

HYDRODYNAMIQUE

ÉLASTICITÉ, ACOUSTIQUE

COURS PROFESSÉ EN 1890-1891

Par P. DUHEM, chargé d'un cours complémentaire

TOME SECOND

LES FILS ET LES MEMBRANES — LES CORPS ÉLASTIQUES
L'ACOUSTIQUE

COURS DE PHYSIQUE MATHÉMATIQUE ET DE CRISTALLOGRAPHIE

DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE

HYDRODYNAMIQUE

ÉLASTICITÉ, ACOUSTIQUE

COURS PROFESSÉ EN 1890-1891

Par P. DUHEM, chargé d'un cours complémentaire

TOME SECOND

LES FILS ET LES MEMBRANES — LES CORPS ÉLASTIQUES

L'ACOUSTIQUE

PARIS

LIBRAIRIE SCIENTIFIQUE A. HERMANN

LIBRAIRE DE S. M. LE ROI DE SUÈDE ET DE NORVÈGE

8, Rue de la Sorbonne, 8

1891

TABLE DES MATIÈRES

LIVRE III

Les Fils et les Membranes.

CHAPITRE PREMIER. — <i>L'équilibre des fils et des membranes</i>	1
I. Définition du fil flexible.	1
II. Conditions d'équilibre d'un fil flexible.	3
III. Tension en un point d'un fil.	11
IV. Théorèmes généraux sur l'équilibre des fils.	13
V. Équilibre d'un fil dont les éléments ne sont sollicités par aucune force. Stabilité de cet équilibre.	17
CHAP. II. — <i>Équilibre d'un fil tendu sur une surface</i>	21
I. Conditions de l'équilibre d'un fil tendu sur une surface.	21
II. Réaction de la surface sur le fil.	29
III. Fil dont les éléments ne sont soumis à aucune force.	32
IV. Stabilité de cet équilibre.	37
V. Lignes géodésiques et lignes de longueur minima.	39
CHAP. III. — <i>Du mouvement des fils</i>	44
I. Lois générales du mouvement des fils.	44
II. Extension isothermique et extension adiabatique d'un fil flexible.	46
CHAP. IV. — <i>Les petits mouvements des fils. Les vibrations des cordes</i>	51
I. Les petits mouvements des fils. Leur propagation.	51
II. Vibrations des cordes	61
III. Détermination des coefficients des séries. Loi d'Young	67
IV. Historique.	73
CHAP. V. — <i>De l'équilibre d'une membrane flexible</i>	78
I. Définitions et principes fondamentaux.	78
II. On donne à la membrane un déplacement qui laisse invariable la surface de chacun de ses éléments.	80
III. On donne à la membrane une déformation quelconque.	86
IV. Tension superficielle en un point d'une membrane.	87
V. Détermination de la forme d'une membrane en équilibre.	90
VI. Membrane qui n'est soumise à aucune force. Stabilité de l'équilibre d'une telle membrane.	92
CHAP. VI. — <i>Les surfaces à courbure moyenne nulle et les surfaces d'aire minima</i>	99
I. Intégration, par Monge, de l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure moyenne nulle.	99
II. Formules de M. Weierstrass; surfaces réelles à courbure moyenne nulle.	103
III. Surfaces à courbure moyenne nulle passant par un contour donné.	107
IV. Parmi les surfaces à courbure moyenne nulle, passant par un contour donné, reconnaître les surfaces d'aire minima.	113

CHAP. VII. — <i>Équilibre d'une membrane en contact avec un fluide</i>	121
CHAP. VIII. — <i>Les petits mouvements d'une membrane plane</i>	132
I. Équations des petits mouvements d'une membrane plane	132
II. L'équation $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)$. Vitesse de propagation d'un ébranlement transversal à la surface d'une membrane	138
III. Les petits mouvements situés dans le plan d'une membrane	148
CHAP. IX. — <i>Les vibrations transversales des membranes planes et l'équation de M. Schwarz</i>	150
I. Équation dont dépendent les vibrations transversales des membranes planes	150
II. L'équation de M. Picard	152
III. L'équation de M. Schwarz; point de départ des recherches	156
IV. L'équation de M. Schwarz (suite); exposé du théorème fondamental	158
V. L'équation de M. Schwarz (suite); démonstration du théorème fondamental	160
VI. L'équation de M. Schwarz (suite); le cas où $c = 1$	171
VII. Propriétés de la constante c ; ses variations	176
CHAP. X. — <i>Les vibrations transversales des membranes planes; sons propres</i>	186
I. Application des théories précédentes à l'équation $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + K^2 \psi = 0$	186
II. Sons propres; lignes nodales	190
III. Cas particuliers; vérifications expérimentales	195
CHAP. XI. — <i>Les petits mouvements d'une membrane tendue sur un cadre quelconque</i>	197
I. Lemme de géométrie	197
II. Petits mouvements d'une membrane tendue sur un cadre quelconque	199

LIVRE IV

Les Corps élastiques.

CHAPITRE PREMIER. — <i>Définition des corps élastiques. Conditions de leur équilibre</i>	205
I. Définition des corps élastiques	205
II. Potentiel thermodynamique interne d'un corps peu déformé	211
III. Équations fondamentales de l'élasticité	214
IV. Les équations de l'équilibre d'élasticité ne peuvent admettre plus d'une solution	217
V. Les équations du mouvement d'un corps élastique ne peuvent admettre plus d'une solution	219
VI. Théorie des déformations spontanées	221
CHAP. II. — <i>Les corps isotropes</i>	228
I. Potentiel thermodynamique interne d'un corps isotrope. Les deux coefficients λ et μ	228
II. Équilibre des corps isotropes	232
III. Théorème de Clapeyron	235
IV. Corps isotrope soumis à une pression uniforme sur toute sa surface	237
V. Allongement d'un corps prismatique par la traction	239

CHAP. III. <i>Comment a été établie la théorie de l'élasticité.</i>	242
I. Navier aborde la théorie de l'élasticité des corps isotropes (1821)	242
II. Fresnel introduit la notion de corps élastique anisotrope (1821)	245
III. Cauchy détermine les lois des déformations infiniment petites d'un corps quelconque et la distribution des pressions autour d'un point pris à l'intérieur d'un milieu quelconque (1822)	248
IV. Cauchy et Poisson cherchent à exprimer les N_i , T_{ij} , en fonction des six déformations (1822-1830)	253
V. Green reprend la méthode de Lagrange (1837), Sir W. Thomson la justifie par la thermodynamique (1855)	262
CHAP. IV. — <i>Les petits mouvements des corps élastiques isotropes.</i>	264
I. Équations des petits mouvements des corps élastiques isotropes	264
II. Transformation de Clebsch, lemme sur lequel elle repose	267
III. Transformation de Clebsch; démonstration de sa légitimité	271
IV. Propagation d'un petit mouvement dans un corps isotrope	275

LIVRE V

L'Acoustique.

CHAPITRE PREMIER. — <i>Notions sur l'anatomie de l'oreille.</i>	279
I. Disposition générale des principales parties de l'oreille	279
II. Description spéciale du limaçon	282
CHAP. II. — <i>Le timbre des sons.</i>	285
I. Éléments auxquels se réduit toute sensation sonore	285
II. Le timbre des sons; théorie d'Helmholtz	288
III. La phase des divers sons simples n'influe pas sur le timbre d'un son complexe	291
IV. Les voyelles de la voix humaine	292
CHAP. III. — <i>Les sons résultants.</i>	294
I. Découverte des sons différentiels; théorie de Lagrange	294
II. Théorie d'Helmholtz	296
III. Comparaison de la théorie d'Helmholtz et de la théorie de Lagrange	307
IV. Du caractère musical des sons	309

ERRATUM

Au tome I^{er}, p. 148, nous avons écrit l'égalité

$$(18) \quad \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} F.$$

Cette égalité est inexacte et doit évidemment être remplacée par l'égalité

$$\frac{\partial \psi'}{\partial x} = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} F.$$

Tout le raisonnement subsiste, pourvu que l'on remplace constamment $\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2}$ par $\frac{\partial \psi'}{\partial x}$. Ce raisonnement démontre donc l'existence de l'intégrale

$$\int V \frac{\partial \psi'}{\partial x} dv$$

et non celle de l'intégrale

$$\int V \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} dv.$$

Nous pouvons ajouter, comme d'ailleurs nous l'avons fait (tome I^{er}, p. 149) : on démontrerait de même l'existence des intégrales

$$\begin{aligned} & \int \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial x} dv, \\ & \int \frac{\partial (FV)}{\partial x} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} dv, \\ & \int (F - F_0) V \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} dv. \end{aligned}$$

Mais il reste à démontrer l'existence de l'intégrale

$$\int V \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} dv.$$

Soient ν_e, N_e , les normales extérieures aux surfaces Σ et S. Nous aurons

$$\begin{aligned} \int_{E'} V \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} dv &= - \int_{E'} \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial \psi'}{\partial x} dv + \sum_s V \frac{\partial \psi'}{\partial x} \cos(N_e, x) dS \\ &\quad - \sum_{\Sigma} V \frac{\partial \psi'}{\partial x} \cos(\nu_e, x) d\Sigma. \end{aligned}$$

Lorsque la surface Σ se contracte autour du point O, nous savons, par ce qui est déjà démontré, que le premier terme du second membre tend vers une limite déterminée; le second terme ne varie pas; il s'agit donc de prouver que le troisième tend vers une limite déterminée. Or, d'après l'égalité (18) rectifiée, ce troisième terme peut s'écrire

$$- \sum_{\Sigma} \left(\frac{V}{r} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{V}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} F \right) \cos(\nu_e, x) d\Sigma.$$

Si l'on remarque que

$$d\Sigma = r^2 \frac{d\theta}{\cos(\nu_e, r)}$$

et que $\cos(\nu_e, r)$ ne peut être nul en aucun point, si la surface Σ est convexe, on voit que la proposition en question est démontrée.

Je dois cette rectification à l'obligeance de M. J. Oudet.

Livre III.

Les Fils et les Membranes.

Chapitre 1^{er}

L'Equilibre des Fils flexibles.

§.1. Définition du Fil flexible.

Les masses matérielles réelles sont toujours étendues en trois dimensions; mais, une fois que l'on a exprimé par des règles analytiques les lois de l'équilibre et du mouvement de ces masses, rien n'empêche d'étendre les mêmes lois à des masses fictives qui ne soient pas étendues en toutes dimensions. C'est ainsi que l'on peut considérer des masses étendues seulement en deux dimensions; on aura ce qu'on nomme des membranes; ou bien des masses ne présentant qu'une seule dimension: on aura des fils ou cordes; ou bien enfin des masses ne présentant plus aucune dimension: on aura des points matériels.

Bien que ces sortes de masses soient purement fictives, leur étude n'est pas inutile, car elle fournit une image approchée de certaines propriétés que présentent les corps lorsqu'une, deux, ou trois de leurs dimensions deviennent extrêmement petites.

C'est à l'étude des fils d'abord et des membranes ensuite que sera consacré le présent livre.

Imaginons une ligne $M_0 M_1$, dont chaque élément dS ait une masse ρds , ρ étant une quantité finie et variant en général d'une manière continue d'un point à l'autre du fil; ρ sera ce que nous nommerons la densité linéaire ou simplement la densité du fil en un point de l'élément ds .

L'état de chaque élément dS d'un fil donné dont la nature est partout la même sera supposé complètement défini par la connaissance des trois quantités suivantes

Duh. 1 (t. 2)

- 1° La longueur ds de l'élément ;
- 2° La densité ρ en un point de cet élément ;
- 3° La température \mathcal{D} en un point de cet élément.

La position relative des divers éléments du fil est supposée ne pas intervenir dans la définition de l'état de chacun d'eux.

Dans ces conditions, le fil admettra un Potentiel Thermodynamique interne qui sera de la forme suivante :

$$(1) \dots\dots\dots \mathcal{F} = \int^{M_1} \varphi(\rho, \mathcal{D}) ds$$

φ dépendrait uniquement des deux ^{M₀} variables mises en évidence.

Les forces extérieures qui peuvent être appliquées au fil seront supposées de deux sortes :

1° Deux forces finies, T_0, T_1 , dont chacune a pour point d'application l'une des extrémités M_0, M_1 , du fil. Nous leur donnerons le nom de tensions aux extrémités du fil.

2° Des forces appliquées à chaque élément ds . La force appliquée à l'élément ds aura pour composantes

$$\rho X ds,$$

$$\rho Y ds,$$

$$\rho Z ds,$$

X, Y, Z , étant trois quantités finies que nous supposons en général être des fonctions des six variables

$$x, \quad y, \quad z,$$

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

dont les trois dernières sont liées par la relation

$$(2) \dots\dots\dots \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1.$$

Ajoutons, pour achever la définition du fil, que ce fil est supposé incapable de rupture ; on ne pourra pas lui imposer de modifications virtuelles qui en interrompent la continuité.

Nous allons, dans le présent Chapitre, étudier les conditions d'équilibre d'un semblable fil.

Ce problème est, après le problème de l'Équilibre des Fluides, le premier qui ait été abordé dans l'étude de la Physique Mathématique ; le problème de la Chaînette, sur lequel Galilée s'était trompé, fut résolu par les Leibnitz et les Bernoulli.

Lagrange ⁽¹⁾ donna, pour mettre ce problème en équation, une méthode régulière dont nous nous sommes inspirés pour la rédaction du présent chapitre.

§2 Conditions d'Équilibre d'un fil flexible

Le fil ne pourra pas être en équilibre que si la température a la même valeur en tous ses points et dans le milieu qui l'environne. Nous pouvons donc essayer de faire figurer, lorsqu'il s'agit de questions d'équilibre, la variable \mathcal{L} dans l'expression (1) du Potentiel Thermodynamique Interne.

Considérons une modification virtuelle quelconque du fil. Soient dans cette modification, $d\mathcal{C}_e$ le travail des forces extérieures et $\delta\mathcal{F}$ la variation du Potentiel Thermodynamique Interne; nous obtiendrons toutes les conditions d'équilibre du système en écrivant que, pour toute modification virtuelle du système, on a

$$(3) \quad d\mathcal{C}_e - \delta\mathcal{F} \leq 0.$$

Nous imposerons successivement au fil trois espèces de modifications virtuelles:

1^o On impose au fil une modification qui n'altère ni la longueur de chaque élément, ni la position des extrémités du fil.

Chaque élément du fil garde une longueur invariable, ce qui s'exprime par la condition

$$(4) \quad \delta ds = 0.$$

La masse ρds d'un élément étant invariable, on a, en toute circonstance

$$\rho \delta ds + ds \delta \rho = 0$$

et, par conséquent, dans le cas actuel,

$$\delta \rho = 0.$$

Cette égalité, jointe à l'égalité (1) et à l'égalité (4), nous montre que, dans la modification considérée,

$$\delta\mathcal{F} = 0.$$

Comme la modification est évidemment renversable, le signe d'inégalité doit disparaître de la condition (3).

L'égalité (3) devient donc simplement

$$d\mathcal{C}_e = 0.$$

D'ailleurs, comme les extrémités du fil demeurent immobiles, les tensions appliquées aux extrémités de ce fil n'effectuent aucun travail et le travail des forces

(1) Lagrange. Mécanique Analytique. 1^{re} Partie, Section V, Chapitre III.

côténières se réduit à

$$\int_{M_0}^{M_1} \rho (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) ds$$

On doit donc avoir

$$\int_{M_0}^{M_1} \rho (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) ds = 0,$$

les quantités $\delta x, \delta y, \delta z$, étant assujetties seulement à s'annuler aux deux points M_0 et M_1 , et à vérifier en tout point du fil la condition (4)

D'après un théorème fondamental du calcul des variations, il est nécessaire et suffisant pour cela qu'il existe une quantité Θ , variable d'une manière uniforme et continue tout le long du fil, telle que l'on ait :

$$(5) \dots \dots \dots \int_{M_0}^{M_1} \left[\rho (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) ds - \Theta \delta ds \right] = 0$$

les quantités $\delta x, \delta y, \delta z$, étant assujetties seulement à s'annuler aux deux extrémités M_0, M_1 , du fil.

L'égalité

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

donne

$$\delta ds = \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta ds.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_{M_0}^{M_1} \Theta \delta ds &= \int_{M_0}^{M_1} \Theta \left(\frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz \right) \\ &= \int_{M_0}^{M_1} \Theta \left(\frac{dx}{ds} \frac{d \delta x}{ds} + \frac{dy}{ds} \frac{d \delta y}{ds} + \frac{dz}{ds} \frac{d \delta z}{ds} \right) \end{aligned}$$

Des intégrations par parties permettent de remplacer cette égalité par la suivante :

$$(6) \dots \dots \dots \int_{M_0}^{M_1} \Theta \delta ds = \left[\Theta \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right) \right]_{M_0}^{M_1} - \int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dx}{ds} \right) \delta x + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dy}{ds} \right) \delta y + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dz}{ds} \right) \delta z \right] ds$$

Si, comme le suppose l'égalité (5), les quantités $\delta x, \delta y, \delta z$, s'annulent aux deux extrémités du fil, cette égalité (6) permettra de remplacer l'égalité (5) par la suivante

$$(7) \dots \dots \dots \int_{M_0}^{M_1} \left\{ \begin{aligned} &\left[\rho X + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dx}{ds} \right) \right] \delta x \\ &\left[\rho Y + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dy}{ds} \right) \right] \delta y \\ &\left[\rho Z + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dz}{ds} \right) \right] \delta z \end{aligned} \right\} ds = 0.$$

Cette égalité doit avoir lieu quelles que soient les quantités $\delta x, \delta y, \delta z$, pourvu seulement qu'elles s'annulent aux deux extrémités M_0, M_1 du fil; il est aisé d'en conclure qu'on doit avoir, en tout point du fil,

$$(8) \quad \begin{cases} \rho X + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dx}{ds} \right) = 0, \\ \rho Y + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dy}{ds} \right) = 0, \\ \rho Z + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dz}{ds} \right) = 0. \end{cases}$$

Supposons en effet que l'une de ces égalités, la première par exemple, ne soit pas vérifiée en un certain point M du fil. Les quantités $\Theta, X, \frac{dx}{ds}$, variant d'une manière continue au voisinage de ce point M , on pourrait déterminer sur le fil un segment $\mu \mu'$, contenant le point M , le long duquel la quantité

$$\rho X + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dx}{ds} \right)$$

garderait un signe constant.

Prenons alors, tout le long du fil,

$$\delta y = 0, \quad \delta z = 0,$$

Pour δx , prenons une quantité variable d'une manière continue le long du fil, égale à 0 le long des segments $M_0 \mu, \mu' M_1$, et ayant un signe invariable le long du segment $\mu \mu'$. Il est alors visible que l'égalité (7) ne serait pas vérifiée, ce qui ne peut être.

L'exactitude des égalités (8) est donc démontrée.

2° On impose au fil une modification qui laisse invariable la longueur de chaque élément, mais qui déplace les extrémités du fil.

Dans ce cas, on a encore

$$\delta \mathcal{F} = 0$$

et la condition (3) se réduit à

$$(9) \quad \dots \dots \dots d\mathcal{C}_e \leq 0;$$

Mais dans le calcul de $d\mathcal{C}_e$, il faut ici tenir compte du travail des tensions T_0, T_1 , appliquées aux extrémités M_0, M_1 du fil; si $(\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0)$ est le déplacement du point M_0 et $(\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1)$ le déplacement du point M_1 , on aura

$$\begin{aligned} d\mathcal{C}_e = & T_0 \left\{ \cos(T_0, x) \delta x_0 + \cos(T_0, y) \delta y_0 + \cos(T_0, z) \delta z_0 \right\} \\ & + T_1 \left\{ \cos(T_1, x) \delta x_1 + \cos(T_1, y) \delta y_1 + \cos(T_1, z) \delta z_1 \right\} \\ & + \int_{M_0}^{M_1} \rho (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) ds \end{aligned}$$

Les égalités (8) et (6) donnent :

$$\int_{M_0}^{M_1} \rho (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) ds = \int_{M_0}^{M_1} \Theta \delta ds$$

$$- \left[\Theta \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right) \right]_{M_0}^{M_1}.$$

La condition

$$\delta ds = 0,$$

qui doit être vérifiée pour tout élément du fil, permet de transformer cette égalité en

$$\int_{M_0}^{M_1} \rho (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) ds$$

$$= \Theta_0 \left(\frac{dx_0}{ds_0} \delta x_0 + \frac{dy_0}{ds_0} \delta y_0 + \frac{dz_0}{ds_0} \delta z_0 \right) - \Theta_1 \left(\frac{dx_1}{ds_1} \delta x_1 + \frac{dy_1}{ds_1} \delta y_1 + \frac{dz_1}{ds_1} \delta z_1 \right)$$

L'expression de $d\mathcal{L}_2$ devient donc

$$(10) \dots \dots \dots d\mathcal{L}_2 = \left[T_0 \cos(T_0, x) + \Theta_0 \frac{dx_0}{ds_0} \right] \delta x_0$$

$$+ \left[T_0 \cos(T_0, y) + \Theta_0 \frac{dy_0}{ds_0} \right] \delta y_0$$

$$+ \left[T_0 \cos(T_0, z) + \Theta_0 \frac{dz_0}{ds_0} \right] \delta z_0$$

$$+ \left[T_1 \cos(T_1, x) - \Theta_1 \frac{dx_1}{ds_1} \right] \delta x_1$$

$$+ \left[T_1 \cos(T_1, y) - \Theta_1 \frac{dy_1}{ds_1} \right] \delta y_1$$

$$+ \left[T_1 \cos(T_1, z) - \Theta_1 \frac{dz_1}{ds_1} \right] \delta z_1.$$

On peut évidemment donner aux deux extrémités M_0, M_1 du fil tous les déplacements qui sont compatibles avec la condition imposée à la longueur du fil de demeurer invariable ; car si, dans un déplacement du fil sa longueur totale est demeurée invariable, on pourra toujours l'amener de la même position initiale à la même position finale par un déplacement qui conserve la longueur de chaque élément

La condition

$$\int_{M_0}^{M_1} \delta ds = 0$$

peut s'écrire:

$$\int_{M_0}^{M_1} \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right) = 0,$$

ou bien

$$(11) \dots \dots \dots \frac{dx_1}{ds_1} \delta x_1 + \frac{dy_1}{ds_1} \delta y_1 + \frac{dz_1}{ds_1} \delta z_1 \\ - \frac{dx_0}{ds_0} \delta x_0 - \frac{dy_0}{ds_0} \delta y_0 - \frac{dz_0}{ds_0} \delta z_0 \\ - \int_{M_0}^{M_1} \left(\frac{d^2x}{ds^2} \delta x + \frac{d^2y}{ds^2} \delta y + \frac{d^2z}{ds^2} \delta z \right) = 0$$

Deux cas sont à distinguer:

A) Il existe sur la courbe $M_0 M_1$, au moins un segment de longueur finie le long duquel on n'a pas à la fois les trois égalités:

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0.$$

Dans ce cas, on pourra toujours satisfaire à l'égalité (11), quels que soient $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0, \delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$, en disposant des quantités $\delta x, \delta y, \delta z$, le long de la courbe $M_0 M_1$. Les quantités

$$\begin{array}{ccc} \delta x_0, & \delta y_0, & \delta z_0, \\ \delta x_1, & \delta y_1, & \delta z_1, \end{array}$$

sont donc absolument arbitraires. La condition

$$(12) \dots \dots \dots \left[T_0 \cos(T_0, x) + \Theta_0 \frac{dx_0}{ds_0} \right] \delta x_0 \\ + \left[T_0 \cos(T_0, y) + \Theta_0 \frac{dy_0}{ds_0} \right] \delta y_0 \\ + \left[T_0 \cos(T_0, z) + \Theta_0 \frac{dz_0}{ds_0} \right] \delta z_0 \\ + \left[T_1 \cos(T_1, x) - \Theta_1 \frac{dx_1}{ds_1} \right] \delta x_1 \\ + \left[T_1 \cos(T_1, y) - \Theta_1 \frac{dy_1}{ds_1} \right] \delta y_1 \\ + \left[T_1 \cos(T_1, z) - \Theta_1 \frac{dz_1}{ds_1} \right] \delta z_1 \leq 0,$$

qui résulte de la condition (9) et de l'égalité (10), exige alors que l'on ait

$$(13) \dots \dots \dots \begin{cases} T_0 \cos(T_0, x) = - \Theta_0 \frac{dx_0}{ds_0}, \\ T_0 \cos(T_0, y) = - \Theta_0 \frac{dy_0}{ds_0}, \\ T_0 \cos(T_0, z) = - \Theta_0 \frac{dz_0}{ds_0}; \end{cases}$$

et

$$(14) \dots \dots \dots \begin{cases} T_1 \cos(T_1, x) = \Theta_1 \frac{dx_1}{ds_1}, \\ T_1 \cos(T_1, y) = \Theta_1 \frac{dy_1}{ds_1}, \\ T_1 \cos(T_1, z) = \Theta_1 \frac{dz_1}{ds_1}. \end{cases}$$

B) On a, tout le long du fil $M_0 M_1$,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

c'est-à-dire que le fil est rectiligne.

Dans ce cas l'égalité (11) devient

$$(15) \dots \dots \dots \frac{dx_1}{ds_1} Sx_1 + \frac{dy_1}{ds_1} Sy_1 + \frac{dz_1}{ds_1} Sz_1 \\ - \frac{dx_0}{ds_0} Sx_0 - \frac{dy_0}{ds_0} Sy_0 - \frac{dz_0}{ds_0} Sz_0 = 0$$

Les quantités $Sx_0, Sy_0, Sz_0, Sx_1, Sy_1, Sz_1$, ne sont donc plus arbitraires, mais liées par l'égalité (15); c'est seulement moyennant cette égalité (15) que la condition (12) doit avoir lieu.

D'ailleurs, si un système de valeurs de

$$\begin{array}{ccc} Sx_0, & Sy_0, & Sz_0, \\ Sx_1, & Sy_1, & Sz_1, \end{array}$$

vérifie l'égalité (15), le système

$$\begin{array}{ccc} -Sx_0, & -Sy_0, & -Sz_0, \\ -Sx_1, & -Sy_1, & -Sz_1, \end{array}$$

la vérifiera aussi; le signe d'inégalité doit donc disparaître de la condition (12), et l'égalité restante doit être vérifiée toutes les fois que l'égalité (15) est vérifiée.

Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant qu'il existe une constante λ telle que l'égalité

$$\begin{aligned}
& \left[T_0 \cos (T_0, x) + (\Theta_0 + \lambda) \frac{dx_0}{ds_0} \right] \delta x_0 \\
& + \left[T_0 \cos (T_0, y) + (\Theta_0 + \lambda) \frac{dy_0}{ds_0} \right] \delta y_0 \\
& + \left[T_0 \cos (T_0, z) + (\Theta_0 + \lambda) \frac{dz_0}{ds_0} \right] \delta z_0 \\
& + \left[T_1 \cos (T_1, x) - (\Theta_1 + \lambda) \frac{dx_1}{ds_1} \right] \delta x_1 \\
& + \left[T_1 \cos (T_1, y) - (\Theta_1 + \lambda) \frac{dy_1}{ds_1} \right] \delta y_1 \\
& + \left[T_1 \cos (T_1, z) - (\Theta_1 + \lambda) \frac{dz_1}{ds_1} \right] \delta z_1
\end{aligned}$$

soit vérifiée quels que soient

$$\begin{array}{ccc}
\delta x_0, & \delta y_0, & \delta z_0, \\
\delta x_1, & \delta y_1, & \delta z_1.
\end{array}$$

Si l'on pose

$$(16) \dots \dots \dots \Theta' = \Theta + \lambda$$

on devra avoir

$$(13 \text{ bis}) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} T_0 \cos (T_0, x) = - \Theta'_0 \frac{dx_0}{ds_0}, \\ T_0 \cos (T_0, y) = - \Theta'_0 \frac{dy_0}{ds_0}, \\ T_0 \cos (T_0, z) = - \Theta'_0 \frac{dz_0}{ds_0}, \end{array} \right.$$

$$(14 \text{ bis}) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} T_1 \cos (T_1, x) = \Theta'_1 \frac{dx_1}{ds_1}, \\ T_1 \cos (T_1, y) = \Theta'_1 \frac{dy_1}{ds_1}, \\ T_1 \cos (T_1, z) = \Theta'_1 \frac{dz_1}{ds_1}. \end{array} \right.$$

D'ailleurs, comme on a, dans le cas actuel,

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0$$

en tout point du fil, l'égalité (16) permet d'écrire les égalités (8) sous la forme :

$$(18 \text{ bis}) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \rho X + \frac{d}{ds} \left(\Theta' \frac{dx}{ds} \right) = 0 \\ \rho Y + \frac{d}{ds} \left(\Theta' \frac{dy}{ds} \right) = 0 \\ \rho Z + \frac{d}{ds} \left(\Theta' \frac{dz}{ds} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Duh. 2 8.2

3^e On impose au fil une modification virtuelle quelconque.

Dans ce cas, on a encore

$$\begin{aligned} d\mathcal{C}_e = & T_0 \left[\cos(T_0, x) \delta x_0 + \cos(T_0, y) \delta y_0 + \cos(T_0, z) \delta z_0 \right] \\ & + T_1 \left[\cos(T_1, x) \delta x_1 + \cos(T_1, y) \delta y_1 + \cos(T_1, z) \delta z_1 \right] \\ & + \int_{M_0}^{M_1} \rho (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) ds. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\delta \mathcal{F} = \delta \int_{M_0}^{M_1} \varphi(\rho) ds = \int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \delta \rho ds + \varphi(\rho) \delta ds \right]$$

On a d'ailleurs

$$\delta(\rho ds) = \rho \delta ds + ds \delta \rho = 0$$

et par conséquent :

$$\delta \mathcal{F} = - \int_{M_0}^{M_1} \left[\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right] \delta ds.$$

La condition (3), qui doit avoir lieu quelles que soient les quantités δx , δy , δz , devient donc :

$$\begin{aligned} (17) \dots \dots \dots T_0 & \left[\cos(T_0, x) \delta x_0 + \cos(T_0, y) \delta y_0 + \cos(T_0, z) \delta z_0 \right] \\ & + T_1 \left[\cos(T_1, x) \delta x_1 + \cos(T_1, y) \delta y_1 + \cos(T_1, z) \delta z_1 \right] \\ & + \int_{M_0}^{M_1} \rho (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) ds \\ & + \int_{M_0}^{M_1} \left[\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right] \delta ds \leq 0. \end{aligned}$$

A) Supposons que le fil ne soit pas rectiligne dans toute son étendue.

Alors, en vertu des égalités (8), (13) et (14), la condition (17) deviendra :

$$\begin{aligned} & - \left[\Theta \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right) \right]_{M_0}^{M_1} \\ & + \int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dx}{ds} \right) \delta x + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dy}{ds} \right) \delta y + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dz}{ds} \right) \delta z \right] ds \\ & + \int_{M_0}^{M_1} \left[\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right] \delta ds \leq 0, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} & - \int_{M_0}^{M_1} \Theta \left(\frac{dx}{ds} \frac{d\delta x}{ds} + \frac{dy}{ds} \frac{d\delta y}{ds} + \frac{dz}{ds} \frac{d\delta z}{ds} \right) ds \\ & + \int_{M_0}^{M_1} \left[\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right] \delta ds \leq 0 \end{aligned}$$

ou bien

$$\int_{M_0}^{M_1} \left[\Theta - \varphi(\rho) + \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right] \delta ds \geq 0$$

Cette condition doit être remplie quelles que soient les quantités $\delta x, \delta y, \delta z$; par conséquent, quelles que soient les quantités δds . On doit donc avoir, en tout point du fil

$$(18) \dots \dots \dots \varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} - \Theta = 0$$

2° Supposons le fil rectiligne dans toute son étendue; dans ce cas, en vertu de ces égalités (8^{bis}), (13^{bis}), (14^{bis}), la condition (17) deviendra

$$\int_{M_0}^{M_1} \left[\Theta' - \varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right] \delta ds \geq 0$$

et on devra avoir, en tout point du fil

$$(18^{\text{bis}}) \dots \dots \dots \varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} - \Theta' = 0.$$

§.3 Tension en un point d'un fil

Résumons les conséquences de l'analyse précédente.

Que le fil $M_0 M_1$ soit ou ne soit pas rectiligne, il doit exister, soit en vertu des égalités (8), (18), (13) et (14), soit en vertu des égalités (8^{bis}), (18^{bis}), (13^{bis}) et (14^{bis}), une quantité Θ (ou Θ') variant le long du fil d'une manière continue et jouissant des propriétés suivantes:

$$(8^{\text{ter}}) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \rho X + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dx}{ds} \right) = 0, \\ \rho Y + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dy}{ds} \right) = 0, \\ \rho Z + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dz}{ds} \right) = 0; \end{array} \right.$$

$$(18^{\text{ter}}) \dots \dots \dots \varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} - \Theta = 0;$$

$$(13^{\text{ter}}) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} T_0 \cos(T_0, x) = - \Theta_0 \frac{dx_0}{ds_0}, \\ T_0 \cos(T_0, y) = - \Theta_0 \frac{dy_0}{ds_0}, \\ T_0 \cos(T_0, z) = - \Theta_0 \frac{dz_0}{ds_0}; \end{array} \right.$$

4° On a, à l'extrémité M_1 du fil,

$$(14^{ter}) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} T_1 \cos (T_1, x) = \Theta_1 \frac{dx_1}{ds_1}, \\ T_1 \cos (T_1, y) = \Theta_1 \frac{dy_1}{ds_1}, \\ T_1 \cos (T_1, z) = \Theta_1 \frac{dz_1}{ds_1}. \end{array} \right.$$

Ce sont les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre du fil.

Interprétons d'abord les égalités (13^{ter}) et (14^{ter}).

Considérons le fil $M_0 M_1$ (fig 54). En un point infiniment voisin de M_0 , menons la tangente t_0 au fil dans le sens de M_1 vers M_0 . Nous aurons :

$$\cos (t_0, x) = -\frac{dx_0}{ds_0},$$

$$\cos (t_0, y) = -\frac{dy_0}{ds_0},$$

$$\cos (t_0, z) = -\frac{dz_0}{ds_0}.$$

En un point infiniment voisin de M_1 , menons la tangente t_1 au fil dans le sens de M_0 vers M_1 . Nous aurons

$$\cos (t_1, x) = \frac{dx_1}{ds_1},$$

$$\cos (t_1, y) = \frac{dy_1}{ds_1},$$

$$\cos (t_1, z) = \frac{dz_1}{ds_1}.$$

Moyennant ces égalités, les égalités (13^{ter}) et (14^{ter}) deviennent

$$T_0 \cos (T_0, x) = \Theta_0 \cos (t_0, x),$$

$$T_0 \cos (T_0, y) = \Theta_0 \cos (t_0, y),$$

$$T_0 \cos (T_0, z) = \Theta_0 \cos (t_0, z),$$

$$T_1 \cos (T_1, x) = \Theta_1 \cos (t_1, x),$$

$$T_1 \cos (T_1, y) = \Theta_1 \cos (t_1, y),$$

$$T_1 \cos (T_1, z) = \Theta_1 \cos (t_1, z).$$

Ces égalités nous enseignent en premier lieu qu'à chacune des deux extrémités d'un fil en équilibre, la tension est dirigée suivant la tangente au fil à cette extrémité.

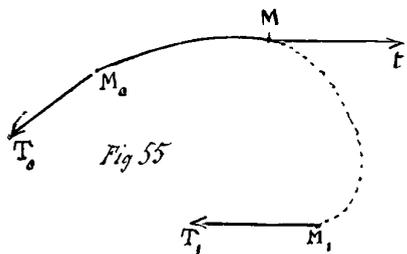
Jusqu'ici, les quantités T_0, T_1 , étaient des grandeurs absolues non susceptibles de signe; maintenant, convenons de compter positivement la tension T_0 lorsqu'elle sera dirigée comme la ligne t_0 et la tension T_1 lorsqu'elle sera dirigée comme la ligne t_1 . Nous

aurons alors, en grandeur et en signe les égalités

$$(19) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} T_0 = \Theta_0, \\ T_1 = \Theta_1. \end{array} \right.$$

Les résultats obtenus nous permettent de justifier le nom de tension au point M du fil que l'on donne à la valeur que prend en ce point la quantité Θ .

Considérons le fil $M_0 M_1$ (fig 55) en équilibre; coupons-le au point M et supprimons l'un des deux segments, par exemple le segment $M M_1$. Pour maintenir en équilibre le segment



segment $M_0 M$, il est nécessaire et suffisant d'appliquer au point M une certaine force T ; cette force doit être dirigée suivant la droite Mt , tangente au fil en M , et menée dans le sens $M M_1$; sa valeur est représentée en grandeur et en signe par la valeur de Θ au point M .

La démonstration de cette proposition résulte immédiatement des Théorèmes précédents.

§ 4 — Théorèmes généraux sur l'Équilibre des Filo

Indiquons ici quelques conséquences générales des équations que nous venons d'établir.

Les cosinus directeurs de la tangente à la courbe $M_0 M_1$, sont donnés par les égalités

$$(20) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \cos(t, x) = \frac{dx}{ds}, \\ \cos(t, y) = \frac{dy}{ds}, \\ \cos(t, z) = \frac{dz}{ds}. \end{array} \right.$$

Posons

$$(21) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{dy}{ds} \frac{d^2 z}{ds^2} - \frac{dz}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2}, \\ B = \frac{dz}{ds} \frac{d^2 x}{ds^2} - \frac{dx}{ds} \frac{d^2 z}{ds^2}; \\ C = \frac{dx}{ds} \frac{d^2 y}{ds^2} - \frac{dy}{ds} \frac{d^2 x}{ds^2}; \end{array} \right.$$

La binormale à la courbe $M_0 M_1$, aura pour cosinus directeurs

$$(22) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \cos(\nu, x) = \frac{A}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}} , \\ \cos(\nu, y) = \frac{B}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}} , \\ \cos(\nu, z) = \frac{C}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}} . \end{array} \right.$$

Le rayon de courbure de la courbe $M_0 M_1$, aura pour valeur

$$(23) \dots \dots \dots R = \frac{1}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}} .$$

Enfin les cosinus directeurs de la normale principale à la courbe $M_0 M_1$, cette normale étant menée vers le centre de courbure, auront pour valeurs :

$$(24) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \cos(\mathcal{N}, x) = - \frac{C \frac{dy}{ds} - B \frac{dz}{ds}}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}} , \\ \cos(\mathcal{N}, y) = - \frac{A \frac{dz}{ds} - C \frac{dx}{ds}}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}} , \\ \cos(\mathcal{N}, z) = - \frac{B \frac{dx}{ds} - A \frac{dy}{ds}}{(A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}}} . \end{array} \right.$$

Ayant rappelé ces formules de géométrie, considérons les égalités (8^{ter}), que nous écrivons plus explicitement :

$$(25) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \rho X + \frac{d\Theta}{ds} \frac{dx}{ds} + (v) \frac{d^2x}{ds^2} = 0 , \\ \rho Y + \frac{d\Theta}{ds} \frac{dy}{ds} + (v) \frac{d^2y}{ds^2} = 0 , \\ \rho Z + \frac{d\Theta}{ds} \frac{dz}{ds} + (v) \frac{d^2z}{ds^2} = 0 ; \end{array} \right.$$

Multiplications la première de ces égalités par A , la seconde par B , la troisième par C et ajoutons les membre à membre, en tenant compte des expressions de A, B, C , données par les égalités (21), nous trouverons sans peine

$$\rho (X A + Y B + Z C) = 0 ,$$

ou bien, en vertu des égalités (22),

$$(26) \dots \dots \dots X \cos(\nu, x) + Y \cos(\nu, y) + Z \cos(\nu, z) = 0 .$$

Lorsqu'un fil est en équilibre, la force appliquée en chacun de ses points est située dans le plan osculateur à la courbe qu'il dessine.

Si l'on tient compte des égalités

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1,$$

$$\frac{d^2x}{ds^2} \frac{dx}{ds} + \frac{d^2y}{ds^2} \frac{dy}{ds} + \frac{d^2z}{ds^2} \frac{dz}{ds} = 0,$$

les égalités (20) et (25) donnent

$$(27) \dots \rho \{ X \cos(t, x) + Y \cos(t, y) + Z \cos(t, z) \} = - \frac{d\Theta}{ds}.$$

En multipliant les deux membres de la dernière égalité (25) par $\frac{dy}{ds}$, les deux membres de la seconde par $\frac{dz}{ds}$, en retranchant le second résultat du premier, en tenant compte enfin des égalités (21), on trouve la première des égalités

$$(28) \dots \left\{ \begin{aligned} \rho \left(Y \frac{dz}{ds} - Z \frac{dy}{ds} \right) &= \Theta A, \\ \rho \left(Z \frac{dx}{ds} - X \frac{dz}{ds} \right) &= \Theta B, \\ \rho \left(X \frac{dy}{ds} - Y \frac{dx}{ds} \right) &= \Theta C. \end{aligned} \right.$$

Les dernières se démontrent d'une manière analogue. Ces égalités nous donnent :

$$X \left(C \frac{dy}{ds} - B \frac{dz}{ds} \right) = \left[\left(X \frac{dy}{ds} - Y \frac{dx}{ds} \right) X \frac{dy}{ds} - \left(Z \frac{dx}{ds} - X \frac{dz}{ds} \right) X \frac{dz}{ds} \right] \frac{\rho}{\Theta}$$

et deux égalités analogues, d'où l'on déduit.

$$(29) \dots X \left(C \frac{dy}{ds} - B \frac{dz}{ds} \right) + Y \left(A \frac{dz}{ds} - C \frac{dx}{ds} \right) + Z \left(B \frac{dx}{ds} - A \frac{dy}{ds} \right) = \frac{\rho}{\Theta} \left[\left(Y \frac{dz}{ds} - Z \frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(Z \frac{dx}{ds} - X \frac{dz}{ds} \right)^2 + \left(X \frac{dy}{ds} - Y \frac{dx}{ds} \right)^2 \right]$$

D'après les égalités (24), le premier membre de cette égalité (29) devient

$$- \{ X \cos(N, x) + Y \cos(N, y) + Z \cos(N, z) \} (A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}},$$

D'après les égalités (28), le second devient

$$\frac{\Theta}{\rho} (A^2 + B^2 + C^2);$$

On a donc finalement,

$$\rho \left[X \cos(N, x) + Y \cos(N, y) + Z \cos(N, z) \right] = -\Theta (A^2 + B^2 + C^2)^{\frac{1}{2}},$$

ou bien, d'après l'égalité (23),

$$(30) \dots \rho \left[X \cos(N, x) + Y \cos(N, y) + Z \cos(N, z) \right] = -\frac{\Theta}{R}.$$

Les égalités (26), (27) et (30), nous font connaître, en fonction de la tension Θ et de la courbure de la ligne $M_0 M_1$, les trois composantes de la force suivant la binormale, la tangente et la normale à la courbe $M_0 M_1$.

L'égalité (27) rappelle l'égalité fondamentale de l'Hydrostatique (v. p. 75). Elle donne lieu à des remarques analogues.

L'égalité (27) peut s'écrire, en vertu des égalités (20),

$$(31) \dots \rho (X dx + Y dy + Z dz) + d\Theta = 0.$$

L'équation (18^{ter}), résolue par rapport à ρ , peut s'écrire

$$\rho = F(\Theta).$$

Considérons une fonction $\Phi(\Theta)$, définie par l'égalité

$$\frac{1}{F(\Theta)} + \frac{d\Phi(\Theta)}{d\Theta} = 0$$

et nous aurons

$$(32) \dots X dx + Y dy + Z dz - d\Phi(\Theta) = 0$$

Cette égalité (32) prend une forme remarquable lorsque les forces qui agissent sur les éléments du fil admettent une fonction potentielle, c'est-à-dire lorsque il existe une fonction uniforme $V(x, y, z)$, indépendante de la forme du fil, telle que l'on ait

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z};$$

L'égalité (32) devient alors

$$d[\Phi(\Theta) + V] = 0,$$

ou

$$(32) \dots V + \Phi(\Theta) = \text{Const.}$$

Dans le cas particulier où le fil est inextensible, la densité ρ est une constante et cette égalité peut s'écrire

$$\rho V - \Theta = \text{Const.}$$

Cette égalité détermine immédiatement la tension en chaque point en fonction

de la fonction potentielle au même point

Nous nous contenterons d'avoir indiqué ces quelques théorèmes généraux qui servent de point de départ à l'étude des fils flexibles et nous renverrons, pour les applications de ces théorèmes, aux traités de mécanique.

§5 — Equilibre d'un Fil dont les Eléments ne sont sollicités par aucune force. Stabilité de cet Equilibre.

Supposons que les divers éléments d'un fil ne soient sollicités par aucune force extérieure, de telle façon que nous ayons, en tout point du fil

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

L'égalité (31) nous montrera alors que l'on a, tout le long du fil,

$$d\Theta = 0$$

ou

$$\Theta = \text{Const}$$

La tension a la même valeur tout le long du fil; le fil est uniformément tendu.

L'égalité (18^{ter})

$$\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} - \Theta = 0$$

nous donne, si le fil est formé d'une seule matière, de telle sorte que $\varphi(\rho)$ soit une seule fonction analytique de ρ ,

$$\rho = \text{Const.}$$

Le fil a la même densité dans toute son étendue.

Les égalités (19) nous donnent:

$$T_0 = T_1 = \Theta;$$

Les forces appliquées aux extrémités du fil sont égales entre elles et égales à la valeur constante de la tension en tout point du fil

Les égalités (8^{tes}) nous donnent:

$$\Theta \frac{d^2x}{ds^2} = 0, \quad \Theta \frac{d^2y}{ds^2} = 0, \quad \Theta \frac{d^2z}{ds^2} = 0;$$

Si les forces appliquées aux extrémités du fil ne sont pas égales à 0, Θ ne sera pas ni plus égal à 0, et les égalités précédentes deviendront

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0;$$

le fil sera rectiligne

Nous allons chercher à quelles conditions cet équilibre est stable; nous n'aborderons l'étude de la stabilité de l'équilibre que pour le cas où l'on maintient

Duh. 3 (t. 2)

fixées les deux extrémités du fil :

Dans ce cas, le travail des forces extérieures étant identiquement nul, le système admet un Potentiel Thermodynamique Total qui se réduit au Potentiel Thermodynamique Interne :

$$\mathcal{F} = \int_{M_0}^{M_1} \varphi(\rho) ds,$$

dont la variation première est

$$\delta \mathcal{F} = \int_{M_0}^{M_1} \left\{ \varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right\} \delta ds$$

et la variation seconde

$$\delta^2 \mathcal{F} = \int_{M_0}^{M_1} \left\{ \varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right\} \delta^2 ds - \int_{M_0}^{M_1} \rho \frac{d^2\varphi(\rho)}{d\rho^2} \delta\varphi \delta ds.$$

L'égalité

$$\rho ds = \text{Const.}$$

donne

$$\rho \delta ds = - ds \delta\rho.$$

On a donc

$$(34) \dots \delta^2 \mathcal{F} = \int_{M_0}^{M_1} \left\{ \varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right\} \delta^2 ds + \int_{M_0}^{M_1} \frac{d^2\varphi(\rho)}{d\rho^2} (\delta\rho)^2 ds.$$

Cette égalité (34) est générale ; dans le cas particulier qui nous occupe, ρ a la même valeur tout le long du fil ; on peut donc écrire

$$(35) \dots \delta^2 \mathcal{F} = \left\{ \varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right\} \int_{M_0}^{M_1} \delta^2 ds + \frac{d^2\varphi(\rho)}{d\rho^2} \int_{M_0}^{M_1} (\delta\rho)^2 ds.$$

Cherchons à quelle condition on sera assuré que cette quantité est positive pour tout déplacement virtuel du fil.

Lorsqu'on passe d'un fil rectiligne à un fil infiniment voisin ayant les mêmes extrémités, on a, puisque la forme rectiligne est la forme de longueur minima,

$$\int_{M_0}^{M_1} \delta ds = 0.$$

L'égalité

$$\rho \delta ds = - ds \delta\rho$$

permet de transformer cette égalité en

$$\int_{M_0}^{M_1} \frac{\delta\rho}{\rho} ds = 0$$

ou bien, puisque ρ a la même valeur tout le long du fil, en

$$(36) \dots \int_{M_0}^{M_1} \delta\rho ds = 0$$

Cette condition (36) est la seule à laquelle soient assujetties les quantités $S\rho$.

On peut donc, en particulier, prendre toutes les quantités $S\rho$ égales à 0; l'inégalité

$$S^2 \mathcal{F} > 0$$

deviendra alors, en vertu de l'égalité (35),

$$\left[\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right] \int_{M_0}^{M_1} S^2 ds > 0.$$

La ligne droite étant le chemin le plus court du point M_0 à M_1 , on a

$$\int_{M_0}^{M_1} S^2 ds > 0$$

et l'inégalité précédente exige que l'on ait

$$(37) \dots \dots \dots \varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} > 0.$$

On peut, d'autre part, envisager une modification durant laquelle les divers éléments du fil varient de longueur tout en glissant seulement sur la droite $M_0 M_1$ dont la longueur totale demeure invariable. (Dans ces conditions on a

$$\int_{M_0}^{M_1} S^2 ds = S^2 \int_{M_0}^{M_1} ds = 0$$

tandis que les quantités $S\rho$ sont seulement assujetties à la condition (35). Dès lors, l'inégalité

$$S^2 \mathcal{F} > 0$$

exige que l'on ait

$$(38) \dots \dots \dots \frac{d^2 \varphi(\rho)}{d\rho^2} > 0.$$

Les conditions (37) et (38) sont nécessaires pour la stabilité de l'équilibre; d'ailleurs, si elles sont vérifiées, il résulte de l'égalité (35) que l'on a toujours

$$S^2 \mathcal{F} > 0$$

et, par conséquent, que l'équilibre est stable.

Ainsi pour que l'équilibre d'un fil qui n'est soumis à aucune force et dont les extrémités sont fixes soit un équilibre stable, il faut et il suffit que l'on ait les deux inégalités

$$\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} > 0,$$

$$\frac{d^2 \varphi(\rho)}{d\rho^2} > 0.$$

Ces deux inégalités s'interprètent aisément.

En vertu de l'égalité (18^{ter}), la première devient

$$\odot > 0.$$

Cette même égalité (18^{ter}) donne

$$\rho \frac{d^2 \varphi(\rho)}{d\rho^2} d\rho + d\Theta = 0;$$

L'égalité (38) devient donc

$$\frac{d\rho}{d\Theta} < 0.$$

Ainsi, les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité du fil sont les suivantes:

La tension du fil est positive;

La densité du fil diminue lorsque la tension augmente;

Lorsque nous traiterons des cordes vibrantes, nous verrons l'importance de ces deux conditions dont l'une intéresse la théorie des vibrations transversales et l'autre la théorie des vibrations longitudinales.

On remarquera que le sens des variations que subit la densité du fil lorsqu'on fait varier la tension, est déterminé, dans l'étude de l'équilibre des fils, par les conditions de stabilité; de même, en Hydrostatique, le sens des variations que subit la densité du fluide lorsqu'on fait varier la pression se présente comme une condition de stabilité de l'équilibre. Au contraire, dans un fil en équilibre, le signe de la tension est fixé par des considérations de stabilité; tandis qu'en Hydrostatique le signe de la pression est donné par les conditions d'équilibre. Cette différence entre ces deux branches de la Statique provient de ce qu'on peut, sans être en contradiction avec la définition des fluides, leur imposer une modification dans laquelle leur masse se creuse de cavités; tandis qu'on ne peut, sans contredire à la définition du fil flexible, lui imposer une modification virtuelle qui en rompe la continuité.

Si l'on n'introduisait pas dans la définition du fil flexible cette condition que la continuité n'en peut être rompue, on serait conduit à des absurdités.

Imaginons en effet que l'on donne au fil une modification virtuelle qui le coupe en un point où la tension avait la valeur Θ ; soit Sl la distance des deux extrémités séparées l'une de l'autre; les conditions d'équilibre déjà trouvées par l'étude des modifications renversables montrent sans peine que, dans ce cas

$$d\mathcal{E}_2 - d\mathcal{F} = \Theta Sl;$$

D'ailleurs la modification n'étant pas renversable, on devrait avoir

$$d\mathcal{E}_2 - d\mathcal{F} \leq 0;$$

ce qui entraînerait

$$\Theta \leq 0.$$

Cette inégalité, entièrement générale, devrait être exacte en particulier pour un fil dont les éléments ne sont soumis à aucune force; dès lors, pour un semblable fil, il n'y aurait pas d'équilibre stable possible.

Ainsi, on voit que les fils tels que nous venons de les définir doivent être

supposés incapables de rupture ; si on les supposait capables de rupture, ils se rompraient indéfiniment, quelles que soient les forces qui les sollicitent.

Si l'on veut étudier l'équilibre des fils en les supposant susceptibles de rupture, il faudra modifier les hypothèses fondamentales sur lesquels repose leur théorie ; il faudra, en particulier, supposer que chaque élément est défini non seulement par sa nature et sa densité, mais encore par la nature, la densité, la position des éléments voisins. Dans le présent Cours, nous n'étudierons aucune théorie où l'on ait à tenir compte, dans la définition des éléments matériels, de la situation qu'ils occupent les uns par rapport aux autres.

Chapitre II

Equilibre d'un Fil tendu sur une Surface.

§ 1. Conditions de l'Equilibre d'un Fil tendu sur une surface.

Nous avons étudié, dans ce qui précède, les conditions d'équilibre d'un fil libre ; nous allons maintenant, par une analyse analogue, déterminer les conditions d'équilibre d'un fil assujéti à demeurer à la surface d'un solide invariable. Soit

$$(1) \dots \dots \dots S(x, y, z) = 0$$

l'équation de la surface sur laquelle le fil doit demeurer.

Tout déplacement virtuel d'un point du fil sera soumis à la condition

$$(2) \dots \dots \dots \frac{\delta S}{\delta x} \delta x + \frac{\delta S}{\delta y} \delta y + \frac{\delta S}{\delta z} \delta z = 0.$$

D'après les hypothèses faites, dans tout ce cours, sur la forme du Potentiel Thermodynamique Interne des systèmes que nous étudions, le Potentiel Thermodynamique Interne du système formé par le fil et le corps sur lequel il s'appuie, se composera du terme $\int_{M_0}^{M_1} \varphi(\rho) ds$ relatif au fil et d'un terme analogue relatif au corps.

Le corps sur lequel le fil est tendu demeurant invariable dans toutes les

modifications virtuelles que nous étudions, ce dernier terme sera une constante qu'il est inutile de faire figurer dans nos équations.

1° Donnons au fil un déplacement dans lequel ses extrémités demeurent fixes et dans lequel chaque élément garde une longueur invariable; les quantités δx , δy , δz , déjà assujetties à la condition (2), devront en outre s'annuler aux deux extrémités du fil, et vérifier en tout point du fil la condition

$$S ds = 0,$$

qui peut s'écrire, comme nous l'avons vu,

$$(3) \dots \dots \dots \frac{dx}{ds} S dx + \frac{dy}{ds} S dy + \frac{dz}{ds} S dz = 0.$$

Dans la modification considérée, le Potentiel Thermodynamique Interne ne varie pas. Le travail des Forces Extérieures se réduit à

$$d\mathcal{T}_e = \int_{M_0}^{M_1} \rho (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) ds$$

La condition générale de l'équilibre devient d'ailleurs, dans ce cas

$$d\mathcal{T}_e \leq 0$$

Mais, si un déplacement virtuel $(\delta x, \delta y, \delta z)$ satisfait aux conditions indiquées dans ce qui précède, le déplacement inverse $(-\delta x, -\delta y, -\delta z)$ y satisfait aussi; on peut donc faire disparaître le signe d'inégalité de la condition d'équilibre et l'écrire simplement :

$$\int_{M_0}^{M_1} \rho (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) ds = 0$$

Cette égalité doit avoir lieu pour toutes les valeurs de δx , δy , δz , qui s'annulent aux deux extrémités du fil et qui vérifient, en tout point du fil, les conditions (2) et (3). Il doit donc, d'après les Principes du Calcul des Variations, exister deux fonctions Θ et λ , variables d'une manière continue le long du fil, telles que l'on ait

$$\int_{M_0}^{M_1} \left[\left(\rho X + \lambda \frac{dS}{dx} \right) \delta x + \left(\rho Y + \lambda \frac{dS}{dy} \right) \delta y + \left(\rho Z + \lambda \frac{dS}{dz} \right) \delta z \right] ds - \int_{M_0}^{M_1} \Theta \left(\frac{dx}{ds} S dx + \frac{dy}{ds} S dy + \frac{dz}{ds} S dz \right) = 0,$$

les quantités δx , δy , δz , étant assujetties seulement à s'annuler aux deux points M_0, M_1 .

On peut écrire

$$\begin{aligned} & \int_{M_0}^{M_1} \Theta \left(\frac{dx}{ds} S dx + \frac{dy}{ds} S dy + \frac{dz}{ds} S dz \right) \\ &= \int_{M_0}^{M_1} \Theta \left(\frac{dx}{ds} \frac{dS}{ds} + \frac{dy}{ds} \frac{dS}{ds} + \frac{dz}{ds} \frac{dS}{ds} \right) ds \end{aligned}$$

$$= \left[\Theta \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right) \right]_{M_0}^{M_1} \\ - \int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dx}{ds} \right) \delta x + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dy}{ds} \right) \delta y + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dz}{ds} \right) \delta z \right] ds.$$

D'ailleurs, comme on a, aussi bien au point M_0 qu'au point M_1 ,

$$\delta x = 0, \quad \delta y = 0, \quad \delta z = 0,$$

on a aussi

$$\left[\Theta \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right) \right]_{M_1}^{M_1} = 0$$

et l'égalité (4) devient :

$$\int_{M_0}^{M_1} \left\{ \left[\rho X + \lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dx}{ds} \right) \right] \delta x \right. \\ \left. \left[\rho Y + \lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dy}{ds} \right) \right] \delta y \right. \\ \left. \left[\rho Z + \lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dz}{ds} \right) \right] \delta z \right\} ds = 0$$

Les quantités $\delta x, \delta y, \delta z$, étant seulement assujetties à s'annuler aux deux points M_0, M_1 , cette égalité exige que l'on ait, en tout point du fil,

$$(5) \dots \dots \dots \begin{cases} \rho X + \lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dx}{ds} \right) = 0, \\ \rho Y + \lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dy}{ds} \right) = 0, \\ \rho Z + \lambda \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dz}{ds} \right) = 0. \end{cases}$$

2° Donnons au fil un déplacement dans lequel chacun de ses éléments garde une longueur invariable, mais dans lequel ses extrémités se déplacent.

Nous aurons dans ce cas,

$$\delta \mathcal{F} = 0,$$

et par conséquent la condition d'équilibre se réduit encore à

$$d\mathcal{C}_e \neq 0.$$

D'ailleurs,

$$d\mathcal{C}_e = T_0 \left\{ \cos(T_0, x) \delta x_0 + \cos(T_0, y) \delta y_0 + \cos(T_0, z) \delta z_0 \right\} \\ + T_1 \left\{ \cos(T_1, x) \delta x_1 + \cos(T_1, y) \delta y_1 + \cos(T_1, z) \delta z_1 \right\} \\ + \int_{M_0}^{M_1} \rho (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) ds$$

D'après les égalités (5), cette égalité devient :

$$d\mathcal{C}_0 = T_0 \left\{ \cos(T_0, x) \delta x_0 + \cos(T_0, y) \delta y_0 + \cos(T_0, z) \delta z_0 \right\} \\ + T_1 \left\{ \cos(T_1, x) \delta x_1 + \cos(T_1, y) \delta y_1 + \cos(T_1, z) \delta z_1 \right\} \\ - \int_{M_0}^{M_1} \lambda \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} \delta z \right) ds \\ - \int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{d}{ds} \left(\ominus \frac{dx}{ds} \right) \delta x + \frac{d}{ds} \left(\ominus \frac{dy}{ds} \right) \delta y + \frac{d}{ds} \left(\ominus \frac{dz}{ds} \right) \delta z \right] ds.$$

Mais une transformation exposée plus haut nous donne

$$\int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{d}{ds} \left(\ominus \frac{dx}{ds} \right) \delta x + \frac{d}{ds} \left(\ominus \frac{dy}{ds} \right) \delta y + \frac{d}{ds} \left(\ominus \frac{dz}{ds} \right) \delta z \right] ds \\ = - \int_{M_0}^{M_1} \ominus \left(\frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz \right) \\ + \left[\ominus \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right) \right]_{M_0}^{M_1};$$

Enfin, on sait que l'on a, en chaque point du fil,

$$(3) \dots \dots \dots \frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz = 0;$$

La condition d'équilibre devient donc, tout calcul fait

$$(6) \dots \dots \dots \left[T_0 \cos(T_0, x) + \ominus_0 \frac{dx_0}{ds_0} \right] \delta x_0 \\ + \left[T_0 \cos(T_0, y) + \ominus_0 \frac{dy_0}{ds_0} \right] \delta y_0 \\ + \left[T_0 \cos(T_0, z) + \ominus_0 \frac{dz_0}{ds_0} \right] \delta z_0 \\ + \left[T_1 \cos(T_1, x) - \ominus_1 \frac{dx_1}{ds_1} \right] \delta x_1 \\ + \left[T_1 \cos(T_1, y) - \ominus_1 \frac{dy_1}{ds_1} \right] \delta y_1 \\ + \left[T_1 \cos(T_1, z) - \ominus_1 \frac{dz_1}{ds_1} \right] \delta z_1 \leq 0.$$

À quelles conditions sont assujetties les quantités $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0, \delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$?

En premier lieu on doit avoir

$$(7) \dots \dots \dots \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_0} \delta y_0 + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_0} \delta z_0 = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z_1} \delta z_1 = 0; \end{cases}$$

En second lieu, on doit avoir

$$\int_{M_0}^{M_1} \lambda ds = 0.$$

condition qui peut s'écrire (Chapitre I Égalité (11)),

$$(8) \dots \dots \dots \frac{dx_1}{ds_1} \delta x_1 + \frac{dy_1}{ds_1} \delta y_1 + \frac{dz_1}{ds_1} \delta z_1 \\ - \frac{dx_0}{ds_0} \delta x_0 - \frac{dy_0}{ds_0} \delta y_0 - \frac{dz_0}{ds_0} \delta z_0 \\ - \int_{M_0}^{M_1} \left(\frac{d^2x}{ds^2} \delta x + \frac{d^2y}{ds^2} \delta y + \frac{d^2z}{ds^2} \delta z \right) ds = 0.$$

On ne doit d'ailleurs pas oublier que, dans cette dernière égalité, on doit avoir, en tout point de la ligne $M_0 M_1$,

$$(2) \dots \dots \dots \frac{\partial S'}{\partial x} \delta x + \frac{\partial S'}{\partial y} \delta y + \frac{\partial S'}{\partial z} \delta z = 0.$$

Ici, nous allons introduire une distinction fondée sur une notion très importante, la notion de ligne géodésique.

Quand il existera une quantité μ , variable d'une manière continue le long d'une ligne tracée sur la surface que représente l'équation (1), telle que l'on ait en chaque point de cette ligne

$$(9) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{ds^2} = \mu \frac{\partial S'}{\partial x}, \\ \frac{d^2y}{ds^2} = \mu \frac{\partial S'}{\partial y}, \\ \frac{d^2z}{ds^2} = \mu \frac{\partial S'}{\partial z}, \end{array} \right.$$

Nous dirons que cette ligne est une ligne géodésique de la surface représentée par l'équation (1).

Nous verrons plus loin quelques propriétés de ces lignes; pour le moment, leur définition nous suffira.

Cette définition posée, nous distinguerons deux cas:

A) Il existe au moins une portion finie de la ligne $M_0 M_1$, qui n'est pas ligne géodésique de la surface représentée par l'équation (1)

Dans ce cas, la quantité

$$\int_{M_0}^{M_1} \left(\frac{d^2x}{ds^2} \delta x + \frac{d^2y}{ds^2} \delta y + \frac{d^2z}{ds^2} \delta z \right) ds,$$

dans laquelle les quantités $\delta x, \delta y, \delta z$, sont assujetties seulement à la condition (3), ne peut, d'après les Principes du calcul des variations, être identiquement nulle. Dès lors, il est aisé de voir que, quelles que soient les valeurs, compatibles avec les égalités (7), données aux quantités $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0, \delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$, on pourra toujours

aux quantités $\delta x, \delta y, \delta z$, donner des valeurs compatibles avec l'égalité (3) et telles que l'égalité (8) soit vérifiée.

Les quantités

$\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0, \delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$,
qui figurent dans la condition (6) sont donc assujetties seulement aux conditions (7). Si celles-ci sont vérifiées par le système de valeurs

$\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0, \delta x_1, \delta y_1, \delta z_1$,
elles le sont aussi par le système de valeurs

$$-\delta x_0, -\delta y_0, -\delta z_0, -\delta x_1, -\delta y_1, -\delta z_1,$$

on peut donc, en la condition (6), supprimer le signe d'inégalité. L'égalité restante doit être vérifiée en vertu des conditions (7); il doit par conséquent exister deux quantités N_0, N_1 , définies sans ambiguïté, telles que l'on ait identiquement:

$$\begin{aligned} & \left[T_0 \cos (T_0, x) + \Theta_0 \frac{dx_0}{ds_0} + N_0 \frac{\partial S'_0}{\partial x_0} \right] \delta x_0 \\ & + \left[T_0 \cos (T_0, y) + \Theta_0 \frac{dy_0}{ds_0} + N_0 \frac{\partial S'_0}{\partial y_0} \right] \delta y_0 \\ & + \left[T_0 \cos (T_0, z) + \Theta_0 \frac{dz_0}{ds_0} + N_0 \frac{\partial S'_0}{\partial z_0} \right] \delta z_0 \\ & + \left[T_1 \cos (T_1, x) - \Theta_1 \frac{dx_1}{ds_1} + N_1 \frac{\partial S'_1}{\partial x_1} \right] \delta x_1 \\ & + \left[T_1 \cos (T_1, y) - \Theta_1 \frac{dy_1}{ds_1} + N_1 \frac{\partial S'_1}{\partial y_1} \right] \delta y_1 \\ & + \left[T_1 \cos (T_1, z) - \Theta_1 \frac{dz_1}{ds_1} + N_1 \frac{\partial S'_1}{\partial z_1} \right] \delta z_1 = 0. \end{aligned}$$

Cette identité entraîne les égalités suivantes:

$$(10) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} T_0 \cos (T_0, x) + N_0 \frac{\partial S'_0}{\partial x_0} &= \Theta_0 \cos (t_0, x), \\ T_0 \cos (T_0, y) + N_0 \frac{\partial S'_0}{\partial y_0} &= \Theta_0 \cos (t_0, y), \\ T_0 \cos (T_0, z) + N_0 \frac{\partial S'_0}{\partial z_0} &= \Theta_0 \cos (t_0, z), \end{aligned} \right.$$

$$(11) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} T_1 \cos (T_1, x) + N_1 \frac{\partial S'_1}{\partial x_1} &= \Theta_1 \cos (t_1, x), \\ T_1 \cos (T_1, y) + N_1 \frac{\partial S'_1}{\partial y_1} &= \Theta_1 \cos (t_1, y), \\ T_1 \cos (T_1, z) + N_1 \frac{\partial S'_1}{\partial z_1} &= \Theta_1 \cos (t_1, z). \end{aligned} \right.$$

B) La ligne $M_0 M_1$ est, dans toute son étendue, ligne géodésique de la surface

représentée par l'égalité (1).

Dans ce cas, en vertu des égalités (9), vérifiées en tout point de la ligne M_0 , l'égalité (8) devient

$$\begin{aligned} & \frac{dx_1}{ds_1} S_{x_1} + \frac{dy_1}{ds_1} S_{y_1} + \frac{dz_1}{ds_1} S_{z_1} \\ & - \frac{dx_0}{ds_0} S_{x_0} + \frac{dy_0}{ds_0} S_{y_0} + \frac{dz_0}{ds_0} S_{z_0} \\ & - \int_{M_0}^{M_1} \mu \left(\frac{\partial S'}{\partial x} S_x + \frac{\partial S'}{\partial y} S_y + \frac{\partial S'}{\partial z} S_z \right) ds = 0, \end{aligned}$$

ou bien, en vertu de la condition (3)

$$(12) \dots \dots \dots \frac{dx_1}{ds_1} S_{x_1} + \frac{dy_1}{ds_1} S_{y_1} + \frac{dz_1}{ds_1} S_{z_1} \\ - \frac{dx_0}{ds_0} S_{x_0} - \frac{dy_0}{ds_0} S_{y_0} + \frac{dz_0}{ds_0} S_{z_0} = 0.$$

Les quantités

$$S_{x_0}, S_{y_0}, S_{z_0}, S_{x_1}, S_{y_1}, S_{z_1}$$

sont donc assujetties dans ce cas aux trois conditions (7) et (12) comme dans le cas précédent, on peut, en la condition (6) effacer le signe d'inégalité; l'égalité restante doit avoir lieu en vertu des conditions (7) et (12); il doit donc exister trois quantités N_0, N_1 et K , telles que l'on ait identiquement

$$\begin{aligned} & \left[T_0 \cos(T_0, x) + N_0 \frac{\partial S'_0}{\partial x_0} + (\Theta_0 + K) \frac{dx_0}{ds_0} \right] S_{x_0} \\ & + \left[T_0 \cos(T_0, y) + N_0 \frac{\partial S'_0}{\partial y_0} + (\Theta_0 + K) \frac{dy_0}{ds_0} \right] S_{y_0} \\ & + \left[T_0 \cos(T_0, z) + N_0 \frac{\partial S'_0}{\partial z_0} + (\Theta_0 + K) \frac{dz_0}{ds_0} \right] S_{z_0} \\ & + \left[T_1 \cos(T_1, x) + N_1 \frac{\partial S'_1}{\partial x_1} - (\Theta_1 + K) \frac{dx_1}{ds_1} \right] S_{x_1} \\ & + \left[T_1 \cos(T_1, y) + N_1 \frac{\partial S'_1}{\partial y_1} - (\Theta_1 + K) \frac{dy_1}{ds_1} \right] S_{y_1} \\ & + \left[T_1 \cos(T_1, z) + N_1 \frac{\partial S'_1}{\partial z_1} - (\Theta_1 + K) \frac{dz_1}{ds_1} \right] S_{z_1} = 0. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$(13) \dots \dots \dots \Theta' = \Theta + K,$$

cette identité entraîne les égalités

$$(10^{bis}) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} & T_0 \cos(T_0, x) + N_0 \frac{\partial S'_0}{\partial x_0} = \Theta'_0 \cos(t_0, x), \\ & T_0 \cos(T_0, y) + N_0 \frac{\partial S'_0}{\partial y_0} = \Theta'_0 \cos(t_0, y), \\ & T_0 \cos(T_0, z) + N_0 \frac{\partial S'_0}{\partial z_0} = \Theta'_0 \cos(t_0, z); \end{aligned} \right.$$

$$(11^{bis}) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} T_1 \cos(T_1, x) + N_1 \frac{dS_1'}{dx} = \Theta_1' \cos(t_1, x), \\ T_1 \cos(T_1, y) + N_1 \frac{dS_1'}{dy} = \Theta_1' \cos(t_1, y), \\ T_1 \cos(T_1, z) + N_1 \frac{dS_1'}{dz} = \Theta_1' \cos(t_1, z). \end{array} \right.$$

L'égalité (13) nous donne les égalités suivantes :

$$\frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dx}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\Theta' \frac{dx}{ds} \right) - K \frac{d^2 x}{ds^2},$$

$$\frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dy}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\Theta' \frac{dy}{ds} \right) - K \frac{d^2 y}{ds^2},$$

$$\frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dz}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\Theta' \frac{dz}{ds} \right) - K \frac{d^2 z}{ds^2}.$$

Si l'on observe que, dans le cas que nous étudions, les égalités (9) sont vérifiées en tout point de la ligne $M_0 M_1$, nous pourrons écrire

$$\frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dx}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\Theta' \frac{dx}{ds} \right) - K \mu \frac{dS'}{dx},$$

$$\frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dy}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\Theta' \frac{dy}{ds} \right) - K \mu \frac{dS'}{dy},$$

$$\frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dz}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(\Theta' \frac{dz}{ds} \right) - K \mu \frac{dS'}{dz}.$$

Posons

$$(14) \dots \dots \dots \lambda' = \lambda - K \mu$$

et nous voyons que, dans le cas où la ligne $M_0 M_1$ est une ligne géodésique de la surface représentée par l'équation (1), les égalités (5) peuvent s'écrire :

$$(5) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \rho X + \lambda' \frac{dS'}{dx} + \frac{d}{ds} \left(\Theta' \frac{dx}{ds} \right) = 0, \\ \rho Y + \lambda' \frac{dS'}{dy} + \frac{d}{ds} \left(\Theta' \frac{dy}{ds} \right) = 0, \\ \rho Z + \lambda' \frac{dS'}{dz} + \frac{d}{ds} \left(\Theta' \frac{dz}{ds} \right) = 0. \end{array} \right.$$

3^e Imposons au fil une modification qui fasse varier d'une manière quelconque la longueur de chacun de ses éléments. Raisonnons dans ce cas comme nous l'avons fait au Chapitre précédent, dans un cas analogue, et nous arriverons aux résultats suivants :

A) Une portion finie de la ligne $M_0 M_1$, n'est pas ligne géodésique de la surface définie par l'équation (1). On a alors, en tout point de la ligne $M_0 M_1$,

$$(15) \dots \dots \dots \varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} - \Theta = 0.$$

B) La ligne $M_0 M_1$, con, dans toute son étendue, ligne géodésique de la surface définie par l'équation (1). En a alors en tout point de la ligne $M_0 M_1$,
 (15^{bis}) $\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} - \Theta = 0$.

Nous avons ainsi obtenu les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un fil tendu sur une surface.

§2. Réaction de la surface sur le fil.

Que le fil forme ou non une ligne géodésique de la surface sur laquelle il est tendu, nous pouvons toujours énoncer les Théorèmes suivants:

Pour que le fil soit en équilibre, il faut et il suffit qu'il existe:

1° Deux quantités Θ et Λ (ou Θ' et Λ') variables d'une manière continue le long du fil et telles que l'on ait, en tout point du fil,

$$(5^{ter}) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \rho X + \Lambda \frac{\partial S'}{\partial x} + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dx}{ds} \right) = C, \\ \rho Y + \Lambda \frac{\partial S'}{\partial y} + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dy}{ds} \right) = 0, \\ \rho Z + \Lambda \frac{\partial S'}{\partial z} + \frac{d}{ds} \left(\Theta \frac{dz}{ds} \right) = 0, \end{array} \right.$$

(15^{ter}) $\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} - \Theta = 0$.

2° Deux quantités N_0, N_1 , telles que l'on ait aux extrémités du fil, les égalités suivantes:

$$(10^{ter}) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} T_0 \cos(T_0, x) + N_0 \frac{\partial S'_0}{\partial x_0} = \Theta_0 \cos(t_0, x), \\ T_0 \cos(T_0, y) + N_0 \frac{\partial S'_0}{\partial y_0} = \Theta_0 \cos(t_0, y), \\ T_0 \cos(T_0, z) + N_0 \frac{\partial S'_0}{\partial z_0} = \Theta_0 \cos(t_0, z), \end{array} \right.$$

$$(11^{ter}) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} T_1 \cos(T_1, x) + N_1 \frac{\partial S'_1}{\partial x_1} = \Theta_1 \cos(t_1, x), \\ T_1 \cos(T_1, y) + N_1 \frac{\partial S'_1}{\partial y_1} = \Theta_1 \cos(t_1, y), \\ T_1 \cos(T_1, z) + N_1 \frac{\partial S'_1}{\partial z_1} = \Theta_1 \cos(t_1, z). \end{array} \right.$$

Si l'on compare ces égalités (5^{ter}), (15^{ter}), (10^{ter}) et (11^{ter}) aux égalités (8^{ter}), (13^{ter}), (14^{ter}) et (14^{ter}) du Chapitre précédent, on arrive sans peine au résultat suivant:

Les lois de l'équilibre d'un fil tendu sur une surface sont les mêmes que si ce fil était libre et soumis non-seulement aux forces données qui agissent réellement sur lui, mais encore à des forces fictives qui sont les suivantes:

1^o Une force appliquée à chacun des éléments ds du fil, force ayant pour composantes:

$$\lambda \frac{\partial S'}{\partial x} ds, \quad \lambda \frac{\partial S'}{\partial y} ds, \quad \lambda \frac{\partial S'}{\partial z} ds;$$

2^o Une force, appliquée à l'extrémité M_0 du fil, force ayant pour composantes:

$$N_0 \frac{\partial S'_0}{\partial x_0}, \quad N_0 \frac{\partial S'_0}{\partial y_0}, \quad N_0 \frac{\partial S'_0}{\partial z_0};$$

3^o Une force appliquée à l'extrémité M_1 du fil, force ayant pour composantes:

$$N_1 \frac{\partial S'_1}{\partial x_1}, \quad N_1 \frac{\partial S'_1}{\partial y_1}, \quad N_1 \frac{\partial S'_1}{\partial z_1}.$$

L'ensemble de ces forces représente la réaction de la surface sur le fil.

Soit n la normale au point (x, y, z) de la surface représentée par l'équation (1), menée vers la région de l'espace où $S'(x, y, z)$ est positif. Nous aurons

$$(16) \dots \dots \dots \begin{cases} \left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cos(n, x) = \frac{\partial S'}{\partial x}, \\ \left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cos(n, y) = \frac{\partial S'}{\partial y}, \\ \left[\left(\frac{\partial S'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S'}{\partial z} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \cos(n, z) = \frac{\partial S'}{\partial z}. \end{cases}$$

On voit donc que les réactions que nous venons d'énumérer sont toutes normales à la surface sur laquelle le fil est tendu.

Nous avons jusqu'ici supposé le fil assujéti à demeurer sur la surface

$$(1) \dots \dots \dots S'(x, y, z) = 0,$$

ce qui constituait une liaison bilatérale; nous pouvons maintenant supposer que la surface représentée par l'équation (1) est la surface d'un corps solide; le corps solide occupe la région de l'espace où l'on a

$$S'(x, y, z) < 0$$

Le fil peut se déplacer soit à la surface de ce corps solide, soit vers la région de l'espace où l'on a

$$S'(x, y, z) > 0$$

Si donc le fil est placé sur la surface (1), tout déplacement virtuel d'un point de ce fil doit vérifier la condition

$$(17) \dots \dots \dots \frac{\partial S'}{\partial x} \delta x + \frac{\partial S'}{\partial y} \delta y + \frac{\partial S'}{\partial z} \delta z \geq 0.$$

Le fil est ainsi assujéti à une liaison unilatérale.

Parmi les déplacements virtuels qui vérifient la condition (17), se trouvent tous ceux qui vérifient la condition

$$(2) \dots\dots\dots \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta x} \delta x + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta y} \delta y + \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta z} \delta z = 0 ;$$

c'est-à-dire tous ceux dans lesquels le fil ne quitte pas la surface représentée par l'équation (1). En raisonnant d'abord sur ces déplacements là, comme nous venons de le faire, on retrouvera les conditions d'équilibre (5^{ter}), (15^{ter}), (10^{ter}), (11^{ter}).

Ces résultats obtenus, envisageons un déplacement virtuel quelconque du fil, compatible avec la condition (17), et écrivons que, pour un semblable déplacement, on a

$$d\mathcal{F} - \delta \mathcal{E}_e \geq 0,$$

ou, plus explicitement,

$$(18) \dots\dots\dots \int_{M_0}^{M_1} \left[\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right] \delta ds$$

$$- T_0 \left\{ \cos(T_0, x) \delta x_0 + \cos(T_0, y) \delta y_0 + \cos(T_0, z) \delta z_0 \right\}$$

$$- T_1 \left\{ \cos(T_1, x) \delta x_1 + \cos(T_1, y) \delta y_1 + \cos(T_1, z) \delta z_1 \right\}$$

$$- \int_{M_0}^{M_1} \rho (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) ds \geq 0.$$

D'après ce que nous avons dit, l'égalité (15^{ter}) doit être vérifiée. On peut donc écrire :

$$\int_{M_0}^{M_1} \left[\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right] \delta ds = \int_{M_0}^{M_1} \ominus \delta ds$$

$$= \int_{M_0}^{M_1} \ominus \left(\frac{dx}{ds} \delta dx + \frac{dy}{ds} \delta dy + \frac{dz}{ds} \delta dz \right)$$

$$= \int_{M_0}^{M_1} \ominus \left(\frac{dx}{ds} \frac{d\delta x}{ds} + \frac{dy}{ds} \frac{d\delta y}{ds} + \frac{dz}{ds} \frac{d\delta z}{ds} \right) ds$$

$$= \left[\ominus \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right) \right]_{M_0}^{M_1}$$

$$- \int_{M_0}^{M_1} \left\{ \frac{d}{ds} \left(\ominus \frac{dx}{ds} \right) \delta x + \frac{d}{ds} \left(\ominus \frac{dy}{ds} \right) \delta y + \frac{d}{ds} \left(\ominus \frac{dz}{ds} \right) \delta z \right\} ds$$

Moyennant cette égalité, la condition (18) devient

$$\int_{M_0}^{M_1} \left\{ \left[\rho X + \frac{d}{ds} \left(\ominus \frac{dx}{ds} \right) \right] \delta x + \left[\rho Y + \frac{d}{ds} \left(\ominus \frac{dy}{ds} \right) \right] \delta y \right.$$

$$\left. + \left[\rho Z + \frac{d}{ds} \left(\ominus \frac{dz}{ds} \right) \right] \delta z \right\} ds$$

$$+ \left[T_0 \cos(T_0, x) - \ominus_0 \cos(t_0, x) \right] \delta x_0 + \left[T_0 \cos(T_0, y) - \ominus_0 \cos(t_0, y) \right] \delta y_0$$

$$+ \left[T_0 \cos(T_0, z) - \ominus_0 \cos(t_0, z) \right] \delta z_0$$

$$+ [T_1 \cos(T_1, x) - Q_1 \cos(t_1, x)] \delta x_1 + [T_1 \cos(T_1, y) - Q_1 \cos(t_1, y)] \delta y_1 \\ + [T_1 \cos(T_1, z) - Q_1 \cos(t_1, z)] \delta z_1 \leq 0$$

Mais, d'après ce que nous avons dit, les égalités (5^{ter}), (10^{ter}) et (11^{ter}) doivent être vérifiées, en sorte que la condition précédente devient :

$$\int_{M_0}^{M_1} \lambda \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} \delta z \right) ds \\ + N_0 \left(\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial x_0} \delta x_0 + \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial y_0} \delta y_0 + \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial z_0} \delta z_0 \right) \\ + N_1 \left(\frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial y_1} \delta y_1 + \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial z_1} \delta z_1 \right) \geq 0$$

Cette condition doit être vérifiée pour tout déplacement virtuel qui se réfère, en tout point du fil, la condition

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} \delta y + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} \delta z \geq 0$$

On en conclut aisément que l'on doit avoir
1^o En tout point du fil M_0 M_1 ,

(19) $\lambda \geq 0$;

2^o Au point M_0

(20) $N_0 \geq 0$;

3^o Au point M_1

(21) $N_1 \geq 0$.

Si l'on observe que les égalités (16) déterminent la direction de la normale au corps solide vers l'extérieur de ce corps, on voit sans peine que les résultats que nous venons d'obtenir peuvent s'énoncer ainsi :

Lorsque la réaction d'un corps solide soit sur un élément d'un fil qui repose à sa surface, soit sur une extrémité de ce fil, n'est pas égale à 0, elle est normale à la surface du corps solide et dirigée vers l'extérieur de ce corps.

§3 Fil dont les éléments ne sont soumis à aucune force

L'équilibre d'un fil tendu à la surface d'un solide est soumis aux mêmes lois que l'équilibre d'un fil libre, pourvu que l'on adjoigne aux forces qui agissent sur le fil, les réactions de la surface sur laquelle il est placé.

Cela étant, proposons-nous d'appliquer à un fil tendu sur un solide les

equations (26), (27) et (30) du Chapitre précédent; désignons encore par r la binormale au fil, par t , sa tangente, par N sa normale principale; remarquons que les quantités

$$\rho X, \rho Y, \rho Z,$$

doivent être respectivement remplacés par

$$\rho X + \lambda \frac{\partial S'}{\partial x}, \quad \rho Y + \lambda \frac{\partial S'}{\partial y}, \quad \rho Z + \lambda \frac{\partial S'}{\partial z}$$

et nous aurons les égalités suivantes:

$$\left(\rho X + \lambda \frac{\partial S'}{\partial x}\right) \cos(r, x) + \left(\rho Y + \lambda \frac{\partial S'}{\partial y}\right) \cos(r, y) + \left(\rho Z + \lambda \frac{\partial S'}{\partial z}\right) \cos(r, z) = 0,$$

$$\left(\rho X + \lambda \frac{\partial S'}{\partial x}\right) \cos(t, x) + \left(\rho Y + \lambda \frac{\partial S'}{\partial y}\right) \cos(t, y) + \left(\rho Z + \lambda \frac{\partial S'}{\partial z}\right) \cos(t, z) = -\frac{d\Theta}{ds},$$

$$(22) \left(\rho X + \lambda \frac{\partial S'}{\partial x}\right) \cos(N, x) + \left(\rho Y + \lambda \frac{\partial S'}{\partial y}\right) \cos(N, y) + \left(\rho Z + \lambda \frac{\partial S'}{\partial z}\right) \cos(N, z) = -\frac{\Theta}{R}.$$

L'avant dernière égalité se simplifie, si l'on remarque que

$$\frac{\partial S'}{\partial x} \cos(t, x) + \frac{\partial S'}{\partial y} \cos(t, y) + \frac{\partial S'}{\partial z} \cos(t, z) = 0;$$

elle devient alors

$$(23) \dots \dots \rho X \cos(t, x) + \rho Y \cos(t, y) + \rho Z \cos(t, z) = -\frac{d\Theta}{ds}.$$

Appliquons ces propositions à un fil dont les divers éléments ne sont sollicités par aucune force.

Pour un tel fil, l'égalité (23) donne

$$\frac{d\Theta}{ds} = 0$$

La tension a la même valeur en tous les points du fil.

L'égalité (15^{ter}) nous donne alors le résultat suivant:

La densité a la même valeur en tous les points du fil.

Les égalités (5^{ter}) deviennent:

$$(24) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \lambda \frac{\partial S'}{\partial x} + \Theta \frac{d^2 x}{ds^2} = 0, \\ \lambda \frac{\partial S'}{\partial y} + \Theta \frac{d^2 y}{ds^2} = 0, \\ \lambda \frac{\partial S'}{\partial z} + \Theta \frac{d^2 z}{ds^2} = 0. \end{array} \right.$$

Ces égalités sont de la forme (9). Donc le fil dessine une ligne géodésique de la surface sur laquelle il est placé.

Duh. 5. (Cone 2).

Ce résultat eût pu s'obtenir directement :

Si le fil est en équilibre sur la surface du corps, il doit encore être en équilibre lorsque l'on fixe ses deux extrémités. Donnons-lui alors un déplacement virtuel à la surface du corps. Les forces extérieures, appliquées exclusivement à ses deux extrémités, n'effectuent aucun travail. La condition d'équilibre du fil se réduit donc à

$$\int \mathcal{F} = 0,$$

ou

$$\int_{M_0}^{M_1} \varphi(\rho) ds = \int_{M_0}^{M_1} \left[\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right] ds = 0.$$

Mais nous venons de voir que la quantité

$$\Theta = \varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho}$$

avait la même valeur tout le long du fil; l'égalité précédente devient donc

$$\int_{M_0}^{M_1} \Theta ds = 0;$$

or nous avons vu que cette égalité caractérisait les lignes géodésiques.

Les égalités (21) du Chapitre I donnent :

$$C \frac{dy}{ds} - B \frac{dz}{ds} = \frac{dx}{ds} \left(\frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} \right) - \left[\left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 \right] \frac{d^2x}{ds^2},$$

ou bien, en vertu des égalités

$$\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1,$$

$$\frac{dx}{ds} \frac{d^2x}{ds^2} + \frac{dy}{ds} \frac{d^2y}{ds^2} + \frac{dz}{ds} \frac{d^2z}{ds^2} = 0,$$

$$C \frac{dy}{ds} - B \frac{dz}{ds} = - \frac{d^2x}{ds^2};$$

on a de même :

$$A \frac{dz}{ds} - C \frac{dx}{ds} = - \frac{d^2y}{ds^2}$$

$$B \frac{dx}{ds} - A \frac{dy}{ds} = - \frac{d^2z}{ds^2}$$

Les égalités (24) du Chapitre I peuvent donc s'écrire, en tenant compte de l'égalité (23) du même chapitre,

$$(25) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \cos(\mathcal{N}, x) = R \frac{d^2x}{ds^2}, \\ \cos(\mathcal{N}, y) = R \frac{d^2y}{ds^2}, \\ \cos(\mathcal{N}, z) = R \frac{d^2z}{ds^2}. \end{array} \right.$$

Si nous comparons ces égalités aux égalités (16) du présent Chapitre, nous voyons que les égalités (9), qui définissent une ligne géodésique, peuvent s'écrire :

$$(26) \dots \dots \begin{cases} \cos (\mathcal{N}, x) = \frac{\mu}{R} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial z} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cos (n, x), \\ \cos (\mathcal{N}, y) = \frac{\mu}{R} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial z} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cos (n, y), \\ \cos (\mathcal{N}, z) = \frac{\mu}{R} \left\{ \left(\frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial z} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \cos (n, z). \end{cases}$$

Une ligne géodésique d'une surface est donc une ligne en tout point de laquelle la normale principale est normale à la surface.

C'est la définition que les géomètres prennent souvent pour point de départ de l'étude des lignes géodésiques.

Lorsque le fil n'est soumis, sauf à ses extrémités, à aucune force extérieure, l'égalité (22) devient :

$$\lambda \left[\frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial x} \cos (\mathcal{N}, x) + \frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial y} \cos (\mathcal{N}, y) + \frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial z} \cos (\mathcal{N}, z) \right] = - \frac{\Theta}{R}.$$

En vertu des égalités (16) et (26), qui donnent

$$\cos (\mathcal{N}, x) = \frac{\mu}{R} \frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial x},$$

$$\cos (\mathcal{N}, y) = \frac{\mu}{R} \frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial y},$$

$$\cos (\mathcal{N}, z) = \frac{\mu}{R} \frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial z},$$

cette égalité devient

$$\lambda \mu = - \frac{\Theta}{R^2}.$$

D'ailleurs la comparaison des égalités (9) et (24) donne :

$$\mu = - \frac{\lambda}{\Theta}.$$

L'égalité précédente donne alors

$$(27) \dots \dots \dots \lambda^2 = \frac{\Theta^2}{R^2}.$$

La réaction normale de la surface est proportionnelle à la tension du fil, et varie d'un point à l'autre du fil en raison inverse du rayon de courbure du fil.

L'égalité (27) peut s'écrire

$$\lambda = \pm \frac{\Theta}{R}$$

Doit-on, devant le second membre, conserver le signe supérieur ou le signe inférieur ?

Pour décider cette question, reprenons l'égalité

$$\lambda \left(\frac{\partial S'}{\partial x} \cos(N, x) + \frac{\partial S'}{\partial y} \cos(N, y) + \frac{\partial S'}{\partial z} \cos(N, z) \right) = -\frac{\odot}{R}.$$

Supposons que la surface

$$S'(x, y, z) = 0$$

soit celle d'un solide qui occupe la région où l'on a

$$S'(x, y, z) < 0.$$

Les quantités $\frac{\partial S'}{\partial x}$, $\frac{\partial S'}{\partial y}$, $\frac{\partial S'}{\partial z}$, auront même signe que les quantités $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$, $\cos(n, z)$ auxquelles elles sont proportionnelles, n étant la normale au solide vers l'extérieur.

Si le solide est convexe, on aura

$$\cos(n, x) = -\cos(N, x),$$

$$\cos(n, y) = -\cos(N, y),$$

$$\cos(n, z) = -\cos(N, z).$$

L'égalité précédente exigera alors que λ et $\frac{\odot}{R}$ soient de même signe, et l'on aura, d'après l'égalité (27)

$$(28) \dots\dots\dots \lambda = \frac{\odot}{R}$$

Si le solide est concave, on aura

$$\cos(n, x) = \cos(N, x),$$

$$\cos(n, y) = \cos(N, y),$$

$$\cos(n, z) = \cos(N, z);$$

L'égalité précédente exigera que λ et $\frac{\odot}{R}$ soient de signe contraire et l'on aura, d'après l'égalité (28)

$$(28^{bis}) \dots\dots\dots \lambda = -\frac{\odot}{R}.$$

Dans ces deux formules, λ représente toujours la grandeur de la réaction portée vers l'extérieur du corps. On peut les réunir en une seule; représentons par λ la grandeur de la réaction portée vers la région de l'espace que regarde la face convexe de la surface

$$S'(x, y, z) = 0$$

et nous aurons

$$(28^{ter}) \dots\dots\dots \lambda = \frac{\odot}{R}.$$

§4 Stabilité de cet Équilibre

Supposons fixes les deux extrémités du fil ; dans ce cas, le fil admet un Potentiel Thermodynamique Total qui se réduit à

$$F = \int_{M_0}^{M_1} \varphi(\rho) ds$$

La variation première de ce potentiel est

$$\delta F = \int_{M_0}^{M_1} \left[\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right] \delta ds,$$

et, comme nous l'avons vu au Chapitre I, Égalité (34), la variation seconde a pour valeur

$$\delta^2 F = \int_{M_0}^{M_1} \left[\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right] \delta^2 ds + \int_{M_0}^{M_1} \frac{d^2 \varphi(\rho)}{d\rho^2} (\delta \rho)^2 ds.$$

Comme ρ a la même valeur tout le long du fil, cette égalité peut s'écrire

$$(29) \dots \delta^2 F = \left[\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right] \int_{M_0}^{M_1} \delta^2 ds + \frac{d^2 \varphi(\rho)}{d\rho^2} \int_{M_0}^{M_1} (\delta \rho)^2 ds.$$

On a d'ailleurs

$$\int_{M_0}^{M_1} \delta ds = 0,$$

condition qui peut s'écrire (Chapitre I, Égalité (36))

$$\int_{M_0}^{M_1} \delta \rho ds = 0.$$

C'est la seule condition à laquelle les quantités $\delta \rho$ soient assujetties ; elle permet de prendre en tout point

$$\delta \rho = 0.$$

L'inégalité

$$\delta^2 F > 0$$

devient alors, en vertu de l'égalité (29),

$$(30) \dots \left[\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right] \int_{M_0}^{M_1} \delta^2 ds = 0.$$

La quantité $\int_{M_0}^{M_1} \delta^2 ds$ peut-elle être essentiellement négative ? En d'autres termes la ligne géodésique que le fil dessine entre les deux points M_0, M_1 , peut-elle être une ligne de longueur maximum parmi les lignes infiniment voisines qui ont les mêmes extrémités ? Il est évident qu'une semblable ligne de longueur maximum ne peut exister. Donc, ou bien $\int_{M_0}^{M_1} \delta^2 ds$ a un signe variable, ou bien cette quantité est positive. L'inégalité (30) exige donc que l'on ait :

$$(31) \dots \int_{M_0}^{M_1} \delta^2 ds > 0,$$

$$(32) \dots \dots \dots \varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} > 0.$$

Imaginons maintenant que, sans que la ligne $M_0 M_1$ soit modifiée, ses divers éléments varient de longueur. Dans ces conditions, nous aurons

$$\int_{M_0}^{M_1} S^2 ds = S^2 \int_{M_0}^{M_1} ds = 0,$$

tandis que les quantités $S\rho$ seront assujetties seulement à la condition

$$\int_{M_0}^{M_1} S\rho ds = 0.$$

L'inégalité

$$S^2 F > 0$$

devient alors, en vertu de l'égalité (29),

$$(3) \dots \dots \dots \frac{d^2\varphi(\rho)}{d\rho^2} > 0$$

Les inégalités (31), (32), (33) sont donc nécessaires pour la stabilité de l'équilibre du fil. L'égalité (29) montre d'ailleurs que, si elles sont satisfaites, on a, en toutes circonstances,

$$S^2 F > 0$$

et que, par conséquent, l'équilibre du fil est stable.

Ainsi l'on peut énoncer le Théorème suivant:

Un fil, dont les éléments sont soustraits à l'action de toute force, est tendu sur une surface; ses extrémités sont maintenues fixes; pour que l'équilibre du fil soit stable, il faut et il suffit

1° Que sa tension soit positive;

2° Qu'il trace sur la surface une ligne menant d'une de ses extrémités à l'autre par un chemin plus court que les chemins voisins;

3° Que la densité du fil décroisse lorsque la tension croît.

Si le fil, au lieu d'être assujéti à demeurer sur la surface.

$$S(x, y, z) = 0,$$

est simplement assujéti à ne point pénétrer à l'intérieur de l'espace où l'on a

$$S(x, y, z) > 0,$$

on doit avoir pour l'équilibre de ce fil,

$$(19) \dots \dots \dots \lambda \geq 0;$$

D'autre part, pour que l'équilibre soit stable, il faut que l'on ait

$$\Theta > 0;$$

Soit R le rayon de courbure du fil en un point. Si le centre de courbure du fil est à l'extérieur du solide, on a

$$(28^{bis}) \dots \dots \dots \lambda = -\frac{\Theta}{R},$$

égalité incompatible avec les inégalités précédentes; l'équilibre stable du fil ne sera pas possible dans ces conditions.

Si, au contraire, le centre de courbure du fil est à l'intérieur du solide, on aura

$$(28) \dots\dots\dots \lambda = \frac{Q}{R}$$

et l'équilibre pourra être stable.

§5 Lignes géodésiques et lignes de longueur minima

Parmi les conditions d'équilibre d'un fil tendu sur une surface et dont les éléments ne sont sollicités par aucune force, se trouve celle-ci :

Le fil doit dessiner, entre ses deux extrémités, une ligne géodésique de la surface.

Parmi les conditions de stabilité se trouve celle-ci :

La ligne géodésique que le fil dessine doit fournir, pour aller de l'une de ses extrémités à l'autre, un chemin de moindre longueur que les chemins voisins

On est donc amené ainsi à se poser les problèmes suivants :

1° Tracer sur une surface, entre deux points donnés M_0, M_1 , une ligne telle que

$$\int_{M_0}^{M_1} S ds = 0 ;$$

2° Reconnaître si l'on a, pour cette ligne

$$\int_{M_0}^{M_1} S^2 ds = 0 .$$

Le premier problème a été mis en équation et étudié par Gauss⁽¹⁾, puis par de nombreux géomètres. Nous nous contenterons d'indiquer ici le point de départ de ces recherches, en renvoyant, pour leur exposé, au Grand ouvrage de M. G. Darboux⁽²⁾.

Imaginons que, sur la surface

$$S(x, y, z) = 0,$$

on ait adopté un système de coordonnées curvilignes u, v ; supposons que la longueur ds de l'élément qui joint le point de coordonnées (u, v) au point de coordonnées $(u + du, v + dv)$ soit donnée par l'équation

$$(34) \dots\dots\dots ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2 ;$$

E, F, G , sont des fonctions connues de u et de v , qui caractérisent le système de coordonnées curvilignes choisi sur la surface.

(1) Gauss — Disquisitiones generales circa superficies Curvas (Mémoires de la Société des Sciences de Gœttingue T. VI 1828 et œuvres de Gauss. T. IV).

(2) G. Darboux — Leçons sur la Théorie générale des Surfaces. T. II p 442.

Soyent, sur la surface, deux points $M_0(u_0, v_0)$ et $M_1(u_1, v_1)$. Une ligne unit ces deux points. La longueur de cette ligne a pour valeur:

$$\int_{M_0}^{M_1} \sqrt{E du^2 + 2F du dv + G dv^2}^{\frac{1}{2}}.$$

Faisons, pour chaque point de cette ligne, varier u de S_u et v de S_v ; nous aurons

$$\begin{aligned} \int_{M_0}^{M_1} \delta ds &= \int_{M_0}^{M_1} \left(\frac{\frac{\partial E}{\partial u} du^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial u} du dv + \frac{\partial G}{\partial u} dv^2}{2(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}} \delta u \right. \\ &\quad \left. + \frac{\frac{\partial E}{\partial v} du^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial v} du dv + \frac{\partial G}{\partial v} dv^2}{2(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}} \delta v \right) \\ &\quad + \int_{M_0}^{M_1} \left(\frac{E du + F dv}{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}} \delta u \right. \\ &\quad \left. + \frac{F du + G dv}{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}} \delta v \right). \end{aligned}$$

Mais, en intégrant par parties, on a

$$\begin{aligned} &\int_{M_0}^{M_1} \left(\frac{E du + F dv}{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}} \delta u \right. \\ &\quad \left. + \frac{F du + G dv}{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}} \delta v \right) \\ &= \left(\frac{E du + F dv}{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}} \delta u \right. \\ &\quad \left. + \frac{F du + G dv}{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}} \delta v \right) \Big|_{M_0}^{M_1} \\ &\quad - \int_{M_0}^{M_1} \left\{ d \left(\frac{E du + F dv}{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \delta u \right. \\ &\quad \left. + d \left(\frac{F du + G dv}{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}} \right) \delta v \right\}. \end{aligned}$$

Du second membre de cette égalité, le premier terme disparaît lorsque les points M_0, M_1 , sont maintenus fixes, car on a, dans ce cas,

$$\delta u_0 = 0, \quad \delta v_0 = 0, \quad \delta u_1 = 0, \quad \delta v_1 = 0;$$

on peut alors écrire:

$$\int_{M_0}^{M_1} \delta ds = \int_{M_0}^{M_1} \left\{ \left[\frac{\frac{\partial E}{\partial u} du^2 + \frac{\partial F}{\partial u} du dv + \frac{\partial G}{\partial u} dv^2}{2(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}} - d \frac{E du + F dv}{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \delta u + \left[\frac{\frac{\partial E}{\partial v} du^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial v} du dv + \frac{\partial G}{\partial v} dv^2}{2(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}} - d \frac{F du + G dv}{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \delta v \right\}.$$

Pour que les coordonnées (u, v) définissent un point d'une ligne géodésique joignant le point M_0 au point M_1 , il faut et il suffit que l'on ait

$$\int_{M_0}^{M_1} \delta ds = 0$$

quels que soient $\delta u, \delta v$, ce qui donne :

$$(35) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} & \frac{\frac{\partial E}{\partial u} du^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial u} du dv + \frac{\partial G}{\partial u} dv^2}{2(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}} \\ & - d \frac{E du + F dv}{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}} = 0, \\ & \frac{\frac{\partial E}{\partial v} du^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial v} du dv + \frac{\partial G}{\partial v} dv^2}{2(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}} \\ & - d \frac{F du + G dv}{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}} = 0; \end{aligned} \right.$$

Telles sont les équations qui définissent une ligne géodésique.

Dans ces équations, les coordonnées (u, v) d'un point de la ligne géodésique sont exprimées en fonction d'une variable indépendante quelconque; prenons pour variable l'arc s de la ligne géodésique, compté à partir du point M_0 ; multiplions les deux membres de chacune des égalités (35) par

$$\frac{1}{ds} = \frac{1}{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^{\frac{1}{2}}}$$

et les égalités (35) deviendront :

$$(36) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} & 2 \frac{d}{ds} \left(E \frac{du}{ds} + F \frac{dv}{ds} \right) = \frac{\partial E}{\partial u} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial G}{\partial u} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2, \\ & 2 \frac{d}{ds} \left(F \frac{du}{ds} + G \frac{dv}{ds} \right) = \frac{\partial E}{\partial v} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial F}{\partial v} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial G}{\partial v} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2. \end{aligned} \right.$$

Ces équations peuvent être résolues par rapport à $\frac{d^2u}{ds^2}$, et $\frac{d^2v}{ds^2}$; chacune de ces deux quantités sera donnée en fonction de $u, v, \frac{du}{ds}, \frac{dv}{ds}$. Une ligne géodésique sera donc complètement déterminée si l'on se donne u_0, v_0 et $(\frac{du}{ds})_0$; en d'autres termes une ligne géodésique est complètement déterminée lorsqu'on connaît un de ses points et sa tangente en ce point.

On peut démontrer en s'appuyant sur les équations (36) qu'autour de tout point M_0 de la surface, on peut tracer un domaine D tel que tout point M de ce domaine D soit lié au point M_0 par une seule ligne géodésique en entier contenue dans ce domaine D ⁽¹⁾

Dans ce domaine D , chaque point M pourra être déterminé par deux coordonnées choisies de la manière suivante :

1° La longueur u de la ligne géodésique $M_0 M$ située dans le domaine D ;

2° L'angle v que la ligne $M_0 M$ fait, en M_0 , avec une certaine tangente $M_0 T$ à la surface, cet angle étant compris entre 0 et 2π

Un arc quelconque tracé dans le domaine D a une longueur $d\sigma$ définie par

$$d\sigma^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

Si l'on donne à v une valeur constante, on devra trouver

$$d\sigma^2 = du^2,$$

ce qui exige que l'on ait

$$E = 1$$

et l'égalité précédente devient :

$$d\sigma^2 = du^2 + 2F du dv + G dv^2.$$

Au point M_0 , on doit évidemment avoir

$$d\sigma^2 = du^2$$

quel que soit dv , et, par conséquent,

$$F(M_0) = 0, \quad G(M_0) = 0.$$

Si l'on observe que

$$\frac{du}{ds} = 1 \quad \frac{dv}{ds} = 0,$$

la seconde égalité (36) devient

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 0;$$

F est donc une simple fonction de v ; comme pour $u=0$, c'est-à-dire au point M_0 on doit avoir

$$F(M_0) = 0,$$

on voit que F est identiquement nul, et l'arc d'une courbe quelconque, tracé dans la région D , peut s'écrire :

$$d\sigma^2 = du^2 + G dv^2$$

(1) N. Darboux. Lec. cit. p. 409.

Si l'on veut que la quantité $d\sigma$ puisse être réelle même lorsqu'on fait $du = 0$,
c'est-à-dire que les lignes coordonnées

$$v = \text{const.}$$

soient réelles, on devra prendre pour G une valeur positive. Si donc nous désignons par C une fonction réelle de u de v , nous pourrions poser

$$G = C^2$$

La longueur de tout arc tracé dans le domaine D sera alors donnée par l'égalité

$$(37) \dots \dots \dots d\sigma^2 = du^2 + C^2 dv^2.$$

Cette forme a une importance capitale; elle permet, en effet, de démontrer la proposition suivante:

Soit M_0, M_1 une ligne géodésique; on peut toujours déterminer au voisinage du point M_0 (fig 56) un point μ tel que si M est un point de la ligne M_0, M_1 , la ligne M_0, μ , la ligne M_0, M , soit, sur la surface le plus court chemin du point M_0 au point M .

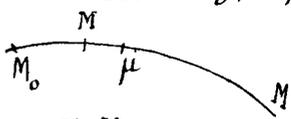


Fig. 56.

Traçons, en effet, autour du point M_0 , le domaine que nous avons désigné par D et soit M_0, μ le segment de la ligne M_0, M_1 qui est tout entier contenu dans ce domaine D . L'arc M_0, M a pour longueur

$$\int_{M_0}^M du.$$

du point M_0 au point M , traçons sur la surface une ligne quelconque; si elle sort du domaine D , on pourra lui en substituer une plus courte en entier contenue dans le domaine D ; supposons-la donc contenue en entier dans le domaine D ; sa longueur sera, d'après l'égalité (37),

$$\int_{M_0}^M (du^2 + C^2 dv^2)^{\frac{1}{2}}$$

Le long de cette ligne, $d\sigma$ ne peut être identiquement nul, car elle serait ligne géodésique et une seule ligne géodésique va du point M_0 au point M . La quantité précédente est donc certainement supérieure à la quantité $\int_{M_0}^M du$, ce qui démontre le Théorème énoncé.

Il n'en résulte pas que tout segment de ligne géodésique soit le chemin le plus court entre ses deux extrémités. Jacobi⁽¹⁾ a donné un important Théorème sur les limites entre lesquelles une ligne géodésique représente le plus court chemin entre ses deux extrémités.

Soit M_0, M_1 une ligne géodésique; par le point M_0 , menons une deuxième ligne géodésique infiniment voisine de la précédente. Si cette deuxième ligne ne rencontre la première ni entre les points M_0, M_1 , ni au point M_1 , la première est le plus court chemin du point M_0 au point M_1 .

⁽¹⁾ Jacobi - Sur le calcul des Variations et la Théorie des équations différentielles (Journal de Liouville. T. III p. 44. 1838)
J. Bertrand - Notes à la 3^e Edition de la Mécanique analytique de Lagrange. T. II. Note VI.

Chapitre III.

Du mouvement des Fils.

§1 Lois générales du Mouvement des Fils.

Des lois de l'équilibre des fils, on déduit les lois de leur mouvement en suivant les Principes indiqués au Chapitre I du Livre I. On peut écrire que le fil est à chaque instant en équilibre sous l'action des forces données et des forces d'inertie. Ces dernières sont données par la loi suivante : à chaque élément ds du fil est appliquée une force d'inertie qui a pour composantes

$- \rho \delta_x ds, \quad - \rho \delta_y ds, \quad - \rho \delta_z ds,$

$\delta_x, \delta_y, \delta_z$ étant les composantes de l'accélération en un point de l'élément ds .

En écrivant les conditions de cet équilibre fictif, on ne doit pas oublier que la température \mathcal{D} n'est plus, comme dans le cas de l'équilibre réel, forcément la même aux divers points du fil. On doit donc la rétablir dans les formules où on avait cessé de la faire figurer à cause de sa constance ; ainsi le Potentiel Thermodynamique Interne du fil sera

$$\mathcal{F} = \int_{M_0}^{M_1} \varphi(\rho, \mathcal{D}) ds.$$

Les égalités (8^{ter}), (18^{ter}), (13^{ter}) et (14^{ter}) du Chapitre I montrent alors que, dans un fil en mouvement, on doit avoir :

1^o En tout point du fil,

$$(1) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \rho (X - \delta_x) + \frac{d}{ds} \left(\ominus \frac{dx}{ds} \right) = 0, \\ \rho (Y - \delta_y) + \frac{d}{ds} \left(\ominus \frac{dy}{ds} \right) = 0, \\ \rho (Z - \delta_z) + \frac{d}{ds} \left(\ominus \frac{dz}{ds} \right) = 0; \end{array} \right.$$

$$(2) \dots \dots \dots \rho(\rho, \mathcal{D}) - \rho \frac{\partial \varphi(\rho, \mathcal{D})}{\partial \rho} - \ominus = 0.$$

2° A l'origine M_0 du fil,

$$(3) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} T_0 \cos (T_0, x) = \Theta_0 \cos (t_0, x) , \\ T_0 \cos (T_0, y) = \Theta_0 \cos (t_0, y) , \\ T_0 \cos (T_0, z) = \Theta_0 \cos (t_0, z) . \end{array} \right.$$

3° A l'extrémité M_1 du fil,

$$(4) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} T_1 \cos (T_1, x) = \Theta_1 \cos (t_1, x) , \\ T_1 \cos (T_1, y) = \Theta_1 \cos (t_1, y) , \\ T_1 \cos (T_1, z) = \Theta_1 \cos (t_1, z) . \end{array} \right.$$

Ces équations suffiraient à déterminer le mouvement du fil si l'on connaissait la température Θ en chaque point de ce fil ; mais cette température n'est pas connue ; d'où la nécessité d'une nouvelle relation entre la température et les autres variables dont dépend l'état du système .

La détermination générale de cette relation soulève des difficultés analogues à celles que l'on rencontre dans la détermination de la relation supplémentaire des fluides ; nous avons examiné ces difficultés au Livre II, Chapitre III, §5 et 6. Nous avons vu que, dans l'étude du mouvement des fluides, on se bornerait à l'examen de deux cas particuliers :

1° Le cas où le mouvement est assez lent pour que l'on puisse regarder la température comme gardant en tout point du fluide la même valeur constante .

2° Le cas où le mouvement est assez rapide et assez petit pour que l'on puisse négliger les échanges de chaleur entre les différentes parties du fluide, ou bien entre le fluide et le milieu ambiant .

Ces deux cas extrêmes sont aussi les seuls dans lesquels on peut traiter le mouvement des fils . Il est cependant des phénomènes dont la loi ne pourrait être trouvée en partant de ces hypothèses . Lorsque, par exemple, on lance dans un fil métallique un courant dont un interrupteur fait varier l'intensité, ce courant produit dans le fil des températures qui varient d'un instant à l'autre, et le fil se met en mouvement . L'étude de ce mouvement ne pourrait être faite ni en supposant que chaque élément du fil garde une température invariable, ni en supposant que les échanges de chaleur sont nuls entre chacun des éléments du fil et le milieu qui l'environne .

L'étude théorique de tels phénomènes devra être laissée de côté, et nous devons nous borner à examiner ceux pour lesquels est approximativement vérifiée l'une des deux hypothèses que nous avons indiquées . L'emploi de ces hypothèses suppose une comparaison préalable entre les lois de l'extension isothermique et les lois de l'extension adiabatique d'un fil flexible .

§2 Extension isothermique et extension adiabatique d'un fil flexible.

Entre la densité linéaire ρ en un point du fil, la température \mathcal{D} et la tension Θ existe la relation

$$(2) \dots \dots \dots \varphi(\rho, \mathcal{D}) - \rho \frac{\partial \varphi(\rho, \mathcal{D})}{\partial \rho} - \Theta = 0.$$

Désignons par λ la longueur de l'unité de masse du fil, définie par l'équation

$$\lambda = \frac{1}{\rho}$$

et écrivons l'équation précédente sous la forme

$$(5) \dots \dots \dots \mathcal{F}(\Theta, \lambda, \mathcal{D}) = 0.$$

Cette égalité (5) représentera la loi suivant laquelle la longueur d'un fil donné varie avec la tension et la température; nous supposons que l'on ait déterminé expérimentalement cette loi.

Si, dans le mouvement du fil, la température \mathcal{D} garde une valeur constante \mathcal{D}_0 , l'équation (5) se réduira à

$$\mathcal{F}(\Theta, \lambda, \mathcal{D}_0) = 0;$$

ce sera une relation entre λ et Θ qui constituera la loi d'extension isothermique du fil.

Si dans l'équation (5) nous maintenons successivement constantes: 1° La tension Θ ; 2° la longueur spécifique λ ; 3° la température \mathcal{D} , cette équation devient successivement:

1° Une relation qui donne λ en fonction de \mathcal{D} ;

$$\left(\frac{d\lambda}{d\mathcal{D}} \right)_{\Theta}$$

représente la dérivée de cette fonction.

2° Une relation qui donne Θ en fonction de \mathcal{D} ;

$$\left(\frac{d\Theta}{d\mathcal{D}} \right)_{\lambda}$$

représente la dérivée de cette fonction.

3° Une relation qui donne λ en fonction de Θ ;

$$\left(\frac{d\lambda}{d\Theta} \right)_{\mathcal{D}}$$

représente la dérivée de cette fonction.

Soit $\alpha(\Theta, \mathcal{D})$ le coefficient de dilatation linéaire du fil soumis à la tension constante Θ et porté à la température \mathcal{D} . Soit λ_0 la longueur de l'unité de masse du fil soumise à la tension Θ et portée à la température de la glace fondante. Nous aurons, par définition

$$(6) \dots \dots \dots \alpha(\Theta, \mathcal{D}) = \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{d\lambda}{d\mathcal{D}} \right)_{\Theta}.$$

Soit $\beta(\lambda, \vartheta)$ une quantité que nous nommerons coefficient de tension du fil, de longueur spécifique λ , à la température ϑ ; soit Θ_0 la tension à laquelle il faut soumettre le fil à la température de la glace fondante pour lui donner la longueur spécifique λ ; la quantité $\beta(\lambda, \vartheta)$ sera définie par la relation

$$(7) \dots \dots \dots \beta(\lambda, \vartheta) = \frac{1}{\Theta_0} \left(\frac{d\Theta}{d\vartheta} \right)_\lambda.$$

Soit L_0 la longueur spécifique du fil soumis à une tension nulle et porté à la température ϑ . La quantité

$$(8) \dots \dots \dots \gamma(\Theta, \vartheta) = \frac{1}{L_0} \left(\frac{d\lambda}{d\Theta} \right)_\vartheta$$

sera le coefficient de traction du fil à la température ϑ , sous la tension Θ .

En raisonnant comme au Livre II, Chapitre IV, On prouvera aisément que l'on a la relation

$$(9) \dots \dots \dots \left(\frac{d\Theta}{d\lambda} \right)_\vartheta \left(\frac{d\lambda}{d\vartheta} \right)_\Theta + \left(\frac{d\Theta}{d\vartheta} \right)_\lambda = 0,$$

relation importante dont nous allons faire usage pour étudier la loi d'extension adiabatique d'un fil.

L'état d'une masse élémentaire dm de ce fil est défini par les deux variables λ et ϑ ; la relation (5) permet de substituer à ces deux variables les variables Θ et ϑ , ou bien les variables λ et Θ ; la quantité de chaleur dégagée par une transformation élémentaire de la masse dm sera exprimée, selon le choix fait des variables indépendantes, par l'une des trois expressions:

$$(10) \dots \dots \dots dQ + (c d\vartheta + l d\lambda) dm = 0,$$

$$(11) \dots \dots \dots dQ + (G d\vartheta + H d\Theta) dm = 0,$$

$$(12) \dots \dots \dots dQ + (\mu d\Theta + \nu d\lambda) dm = 0.$$

Des six coefficients, fonctions des variables indépendantes, c, l, C, H, μ, ν ,

trois seulement ont reçu des noms particuliers:

c , se nomme la chaleur spécifique à longueur constante;

l , se nomme la chaleur de dilatation;

C , se nomme la chaleur spécifique à tension constante.

Les six coefficients

$$c, l, C, H, \mu, \nu,$$

ne sont pas indépendants; ils sont liés entre eux et à la loi de compressibilité et de dilatation (5) par quatre relations; ces relations qui s'établissent en suivant la voie indiquée au Livre II, Chapitre IV, sont les suivantes:

$$(13) \dots\dots\dots l = H \left(\frac{d\Theta}{d\lambda} \right)_{\mathcal{G}} = r + \mu \left(\frac{d\Theta}{d\lambda} \right)_{\mathcal{G}},$$

$$(14) \dots\dots\dots c + l \left(\frac{d\lambda}{d\mathcal{G}} \right)_{\Theta} = C = r \left(\frac{d\lambda}{d\mathcal{G}} \right)_{\Theta}.$$

Le principe de Carnot montre en outre que l'on a

$$(15) \dots\dots\dots l = - \frac{\mathcal{G}}{E} \left(\frac{d\Theta}{d\mathcal{G}} \right)_{\lambda}.$$

Ces égalités conduisent à une conséquence intéressante qui est susceptible d'une vérification expérimentale.

Les égalités (13) et (15) donnent :

$$H = - \frac{\mathcal{G}}{E} \frac{\left(\frac{d\Theta}{d\mathcal{G}} \right)_{\lambda}}{\left(\frac{d\Theta}{d\lambda} \right)_{\mathcal{G}}};$$

Moyennant l'égalité (9), cette égalité devient

$$H = \frac{\mathcal{G}}{E} \left(\frac{d\lambda}{d\mathcal{G}} \right)_{\Theta},$$

ou bien, en vertu de l'égalité (6),

$$H = \frac{\mathcal{G}}{E} \lambda_0 \alpha(\Theta, \mathcal{G});$$

L'égalité (11) devient alors

$$dQ + \left[C d\mathcal{G} + \frac{\mathcal{G}}{E} \lambda_0 \alpha(\Theta, \mathcal{G}) d\Theta \right] dm = 0.$$

Accroissons brusquement de $d\Theta$ la tension du fil; il subira une extension adiabatique pour laquelle $dQ = 0$, et sa température \mathcal{G} croîtra de

$$(16) \dots\dots\dots d\mathcal{G} = - \frac{\mathcal{G}}{E} \frac{\lambda_0}{C} \alpha(\Theta, \mathcal{G}) d\Theta.$$

Comme la chaleur spécifique C est toujours positive, on voit que $d\mathcal{G}$ sera de signe contraire à $\alpha(\Theta, \mathcal{G})$.

Si, à la température considérée, le fil, soumis à la tension considérée, se dilate par une élévation de température, il se refroidit par un étirement brusque.

Si à la température considérée, le fil, soumis à la tension considérée, diminue de longueur lorsque la température s'élève, il s'échauffe lorsqu'on l'étire brusquement.

Ces lois peuvent être soumises à des vérifications qualitatives. On peut même les soumettre à des vérifications quantitatives approchées en étendant à une traction finie la formule (16) exacte pour une traction infiniment petite. C'est ce qu'a fait M. Joule⁽¹⁾.

(1) J. Prescott Joule. Edinburgh philosophical Transactions. 1858. Annales de Chimie et de Physique 3^e série T. III. p. 126.

Les fils métalliques se dilatent par une élévation de température; d'après la loi précédente, leur température doit s'abaisser lorsqu'on les étire brusquement; voici les résultats obtenus par M. Joule sur des fils ou des tiges formés avec des métaux ou des substances qui se comportent comme les métaux; ces résultats expérimentaux s'écartent en général assez peu des valeurs déduites de la formule (16)

Substances étudiées	Traction en livres anglaises	Variation de Température	
		Observée	Calculée.
Fer	775	- 0°, 115	- 0°, 110
"	"	- 0°, 124	- 0°, 110
"	725	- 0, 101	- 0°, 107
Acier	775	- 0, 162	- 0, 125
Fente	"	- 0, 160	- 0, 112
"	784	- 0, 148	- 0, 115
Cuivre	767	- 0, 174	- 0, 154
Plomb	193	- 0, 053	- 0, 040
"	263	- 0, 076	- 0, 055
Gutta Percha	70	- 0, 028	- 0, 031
"	150	- 0, 052	- 0, 066

Le caoutchouc vulcanisé donne lieu à d'intéressantes vérifications de la formule (16).

Contrairement à ce qui arrive pour les métaux, lorsqu'on prend un fil de caoutchouc vulcanisé soumis à une tension initiale faible ou nulle, et qu'on l'étire brusquement, ce fil s'échauffe. Aussi, comme l'aige la formule (16), ce corps se contracte lorsque la température s'élève. Les résultats expérimentaux sont d'accord avec les résultats théoriques

	Traction en livres anglaises	Variation de Température	
		observée	Calculée
Caoutchouc vulcanisé	42	+ 0, 114	+ 0, 137

Lorsqu'on augmente progressivement la tension initiale du fil de caoutchouc vulcanisé, l'effet thermique produit par une traction brusque, diminue d'abord, puis change de sens; en sorte qu'un fil de caoutchouc vulcanisé suffisamment tendu se refroidit, comme un fil métallique, lorsqu'on l'étire brusquement

Duh. (6^{ème} II) N^o 7.

La formule (16) et l'expérience montrent alors l'une et l'autre qu'un fil de caoutchouc vulcanisé soumis à une tension suffisante se dilate par une élévation de température.

Revenons aux égalités (13), (14) et (15).

Les égalités (14) et (15) nous donnent :

$$C - c = - \frac{\mathcal{J}}{E} \left(\frac{d\Theta}{d\mathcal{J}} \right)_{\lambda} \left(\frac{d\lambda}{d\mathcal{J}} \right)_{\Theta},$$

ou bien, en vertu de l'égalité (9),

$$C - c = \frac{\mathcal{J}}{E} \left(\frac{d\Theta}{d\lambda} \right)_{\mathcal{J}} \left[\left(\frac{d\lambda}{d\mathcal{J}} \right)_{\Theta} \right]^2.$$

Les égalités (6) et (8) transforment cette égalité en

$$C - c = \frac{\mathcal{J}}{E} \frac{\lambda_0^2}{L_0} \frac{\alpha^2 (\Theta, \mathcal{J})}{\gamma (\Theta, \mathcal{J})}.$$

Cette formule permet de calculer la différence des deux chaleurs spécifiques C et c ; elle enseigne que cette différence est très petite.

Les formules (13) et (14) donnent

$$\frac{V}{\mu} = - \frac{c}{c} \left(\frac{d\Theta}{d\lambda} \right)_{\mathcal{J}},$$

ou bien

$$\left(\frac{d\Theta}{d\lambda} \right)_{\mathcal{J}} = \frac{c}{c} \left(\frac{d\Theta}{d\lambda} \right)_{\mathcal{J}}$$

D'après ce que nous venons de dire $\frac{c}{c}$ est très voisin de l'unité; on a donc très sensiblement :

$$\left(\frac{d\Theta}{d\lambda} \right)_{\mathcal{J}} = \left(\frac{d\Theta}{d\lambda} \right)_{\mathcal{J}}.$$

Dans l'étude du mouvement des fils, on peut, sans erreur sensible, confondre la loi de traction isothermique et la loi de traction adiabatique

Chapitre IV.

Les petits Mouvements des Fils. - Les Vibrations des Cordes.

§1. Les petits Mouvements des Fils - Leur propagation.

Considérons un fil dont les éléments ne sont sollicités par aucune force ; dans l'état d'équilibre, ce fil est tendu suivant la ligne AB , qui est l'axe des x . (fig. 57). Le fil est supposé animé de petits mouvements autour de cette position d'équilibre en sorte qu'à l'instant t , il occupe la position AMB .

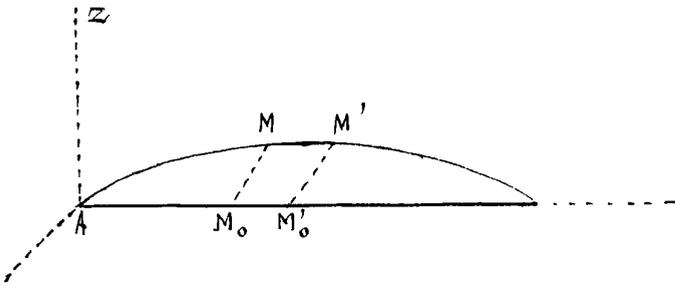


Fig. 57.

Le point matériel qui, dans l'état d'équilibre, serait en M_0 et

aurait pour coordonnées

$$x = x_0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

est, à l'instant t ; en un point M qui a pour coordonnées

$$x = x_0 + \xi, \quad y = \eta, \quad z = \zeta;$$

quel que soit t , ξ , η , ζ , sont des quantités très petites.

Dans ce qui va suivre u, v, w seront, à l'instant t , les composantes de la vitesse du point M ; ce sont des quantités très petites quel que soit t ; pour un même point matériel, elles dépendent de t ; à un même instant, chacune d'elles a des valeurs différentes pour des points matériels différents ; un point matériel pouvant être caractérisé par l'abscisse x_0 de la position M_0 qu'il occuperait dans l'état d'équilibre, on voit que u, v, w sont, en définitive, des fonctions des deux variables x_0 et t . Il en sera de même des quantités ξ, η, ζ , et l'on aura

$$(1) \dots\dots\dots u = \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad v = \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad w = \frac{\partial \zeta}{\partial t}.$$

Les composantes de l'accélération du point M à l'instant t seront

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} f_x = \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \\ f_y = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \\ f_z = \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}. \end{array} \right.$$

Cherchons les équations du mouvement de ce fil.

En tout point de ce fil devront être vérifiées les équations (1) et (2) du chapitre précédent; ces équations vont se simplifier.

On a, en premier lieu, en vertu des hypothèses faites,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Ces égalités, jointes aux égalités (1) du Chapitre précédent donnent,

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{d\Theta}{ds} \frac{dx}{ds} + \Theta \frac{d^2 x}{ds^2}, \\ \rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{d\Theta}{ds} \frac{dy}{ds} + \Theta \frac{d^2 y}{ds^2}, \\ \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{d\Theta}{ds} \frac{dz}{ds} + \Theta \frac{d^2 z}{ds^2}. \end{array} \right.$$

Dans ces équations, nous allons supprimer des termes infiniment petits du second ordre.

La densité ρ diffère infiniment peu de la densité ρ_0 que présenterait le fil en équilibre; les quantités $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$, sont comme ξ, η, ζ , des quantités très petites; on peut donc, au premier membre de chacune des équations (4), remplacer ρ par ρ_0 .

La quantité $\frac{dx}{ds}$ diffère infiniment peu de l'unité; les quantités $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ diffèrent infiniment peu de 0; comme, dans l'état d'équilibre, la tension est uniforme, dans le fil en mouvement $\frac{d\Theta}{ds}$ est infiniment petit. On peut donc remplacer $\frac{d\Theta}{ds} \frac{dx}{ds}$ par $\frac{d\Theta}{ds}$, et négliger $\frac{d\Theta}{ds} \frac{dy}{ds}$, $\frac{d\Theta}{ds} \frac{dz}{ds}$.

La quantité $\frac{dx}{ds}$ ne diffère de l'unité que par une quantité infiniment petite du second ordre. La quantité $\frac{d^2 x}{ds^2}$ est donc une quantité infiniment petite du second ordre, et $\Theta \frac{d^2 x}{ds^2}$ peut être négligé.

Si l'on observe que l'on a constamment

$$y = \eta, \quad z = \zeta,$$

on pourra écrire

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2} \left(\frac{dx_0}{ds} \right)^2 + \frac{\partial \eta}{\partial x_0} \frac{d^2 x_0}{ds^2},$$

$$\frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_0^2} \left(\frac{dx_0}{ds} \right)^2 + \frac{\partial \zeta}{\partial x_0} \frac{d^2 x_0}{ds^2}.$$

Les quantités

$$\frac{\partial \eta}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_0^2},$$

sont des quantités infiniment petites du premier ordre; la quantité

$$\frac{dx_0}{ds}$$

se réduit dans le cas d'équilibre, à $\frac{dx_0}{dx_0} = 1$, c'est-à-dire à 1; par conséquent, dans le cas du mouvement, elle diffère infiniment peu de 1 et la quantité $\frac{d^2 x_0}{ds^2}$ est infiniment petite. Les égalités précédentes se réduisent alors à

$$\frac{d^2 y}{ds^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2}, \quad \frac{d^2 z}{ds^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_0^2}.$$

La tension Θ diffère infiniment peu, pendant toute la durée du mouvement, de la tension Θ_0 qui convient à l'équilibre. On peut donc remplacer les quantités

$$\Theta \frac{d^2 y}{ds^2}, \quad \Theta \frac{d^2 z}{ds^2},$$

par

$$\Theta_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2}, \quad \Theta_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_0^2}$$

Moyennant les diverses simplifications que nous venons d'indiquer, les égalités (4) deviennent

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{d\Theta}{ds}, \\ \rho_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \Theta_0 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2}, \\ \rho_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \Theta_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_0^2}. \end{array} \right.$$

Il est maintenant le lieu de faire intervenir l'égalité (2) du Chapitre précédent.

$$\varphi(\rho, \eta) - \rho \frac{\partial \varphi(\rho, \eta)}{\partial \rho} - \Theta = 0.$$

Nous pouvons supposer, d'après ce qui a été dit au Chapitre précédent, que la température du fil garde une valeur invariable; l'égalité que nous venons d'écrire nous donne alors

$$(6) \dots\dots\dots \Theta_0 = \varphi(\rho_0, \mathcal{D}) - \rho_0 \frac{\partial \varphi(\rho_0, \mathcal{D})}{\partial \rho_0},$$

$$\Theta = \Theta_0 - \rho_0 \frac{\partial^2 \varphi(\rho_0, \mathcal{D})}{\partial \rho_0^2} (\rho - \rho_0).$$

(De cette dernière égalité, on déduit :

$$(7) \dots\dots\dots \frac{d\Theta}{ds} = -\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi(\rho_0, \mathcal{D})}{\partial \rho_0^2} \frac{d}{ds} (\rho - \rho_0)$$

Écrivons qu'un élément dont la longueur, dans l'état d'équilibre est dx_0 , garde une masse invariable pendant toute la durée du mouvement. Nous aurons

$$\rho ds = \rho_0 dx_0,$$

ou bien

$$(\rho - \rho_0) dx_0 + \rho_0 (ds - dx_0) = 0.$$

ds diffère infiniment peu de dx_0 . On a donc :

$$ds - dx_0 = \frac{1}{2} \frac{ds^2 - dx_0^2}{dx_0}.$$

D'ailleurs

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$= dx_0^2 + 2 dx_0 d\xi + d\xi^2 + d\eta^2 + d\xi^2$$

et

$$ds^2 - dx_0^2 = 2 dx_0 d\xi + d\xi^2 + d\eta^2 + d\xi^2.$$

Si l'on observe que ξ, η, ξ , sont infiniment petits, cette égalité se réduira à

$$ds^2 - dx_0^2 = 2 dx_0 d\xi,$$

d'où

$$ds - dx_0 = d\xi$$

et

$$(8) \dots\dots\dots \rho - \rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x_0}.$$

Cette égalité entraînera la suivante :

$$\frac{d}{ds} (\rho - \rho_0) = -\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2} \frac{dx_0}{ds};$$

car $\frac{dx_0}{ds}$ diffère infiniment peu de l'unité; l'égalité que nous venons d'écrire se réduit alors à

$$\frac{d}{ds} (\rho - \rho_0) = -\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2}.$$

L'égalité (7) devient

$$\frac{d\Theta}{ds} = \rho_0^2 \frac{\partial^2 \varphi(\rho_0, \mathcal{D})}{\partial \rho_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2}$$

En vertu de cette égalité et de l'égalité (6), les égalités (9) deviennent

$$(9) \dots \dots \dots \begin{cases} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 \varphi(\rho_0, \vartheta)}{\partial \rho_0^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0} \left[\varphi(\rho_0, \vartheta) - \rho_0 \frac{\partial \varphi(\rho_0, \vartheta)}{\partial \rho_0} \right] \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0} \left[\varphi(\rho_0, \vartheta) - \rho_0 \frac{\partial \varphi(\rho_0, \vartheta)}{\partial \rho_0} \right] \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_0^2}. \end{cases}$$

Nous avons vu (Chapitre I, Inégalités (37) et (38)) que les deux quantités

$$\varphi(\rho_0, \vartheta) - \rho_0 \frac{\partial \varphi(\rho_0, \vartheta)}{\partial \rho_0},$$

$$\frac{\partial^2 \varphi(\rho_0, \vartheta)}{\partial \rho_0^2},$$

doivent être positives. Comme ρ_0 est essentiellement positif, nous pouvons poser :

$$(10) \dots \dots \dots \frac{1}{\rho_0} \left[\varphi(\rho_0, \vartheta) - \rho_0 \frac{\partial \varphi(\rho_0, \vartheta)}{\partial \rho_0} \right] = A^2,$$

$$(11) \dots \dots \dots \rho_0 \frac{\partial^2 \varphi(\rho_0, \vartheta)}{\partial \rho_0^2} = a^2,$$

A et a étant deux quantités réelles et positives.

La signification de ces deux quantités est aisée à obtenir.

En vertu de l'égalité (6), l'égalité (10) devient : (12) $\dots \dots \dots A = \sqrt{\frac{\Theta_0}{\rho_0}}$

La quantité A est la racine carrée du rapport de la tension du fil à sa densité linéaire, les valeurs de ces quantités étant prises dans l'état d'équilibre.

L'égalité (6) donne :

$$\frac{d\rho_0}{d\vartheta_0} = - \frac{1}{\rho_0 \frac{\partial^2 \varphi(\rho_0, \vartheta)}{\partial \rho_0^2}}$$

L'égalité (11) peut donc s'écrire :

$$(13) \dots \dots \dots a = \sqrt{- \frac{d\Theta_0}{d\rho_0}}$$

La quantité a est le rapport de l'accroissement infiniment petit qu'il faut donner à la tension du fil en équilibre pour produire une diminution infiniment petite de sa densité linéaire, à cette diminution de la densité linéaire.

Moyennant les égalités (10) et (11), les égalités (9) deviennent

$$(14) \dots \dots \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = A^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = A^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_0^2}.$$

Celles sont les équations qui régissent le mouvement infiniment petit d'un fil.

Il faudra y joindre des conditions initiales et des conditions aux limites; si les tensions aux extrémités du fil sont données, les conditions aux limites seront fournies par les égalités (3) et (4) du Chapitre précédent; si les extrémités du fil sont fixes, ξ, η, ζ , devront y être égaux à 0; si les extrémités du fil sont mobiles et animées d'un mouvement donné ξ, η, ζ y

seront des fonctions données du temps.

Les équations (14) appartiennent toutes trois à un type que nous avons déjà rencontré et que nous avons appris à intégrer; nous avons vu { Livre II, Chapitre XI } que les équations (14) admettent pour intégrales générales les suivantes :

$$(15) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \xi = f(x_0 - at) + g(x_0 + at), \\ \eta = F_1(x_0 - At) + G_1(x_0 + At), \\ \zeta = F_2(x_0 - At) + G_2(x_0 + At), \end{array} \right.$$

f, g, F_1, G_1, F_2, G_2 étant six fonctions arbitraires, qui ne sont pas forcément analytiques et qui pourront être déterminées lorsqu'on connaîtra la forme initiale de la corde et la vitesse initiale en chacun de ses points.

Considérons, tout d'abord, un fil indéfini dans les deux sens. (Fig. 58).

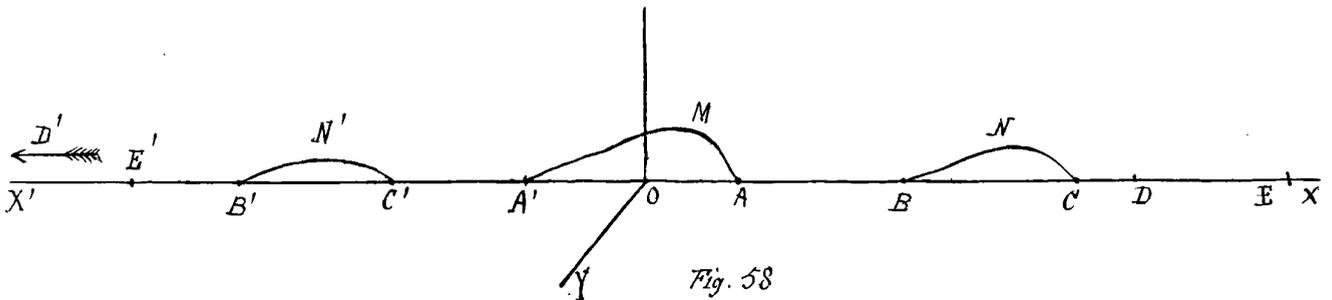


Fig. 58

À l'instant $t=0$, nous donnons une petite déformation à la partie AA' de la corde comprise entre les points

$$x_0 = l \quad \text{et} \quad x_0 = -l;$$

à ces divers points nous imprimons des vitesses données. En raisonnant comme nous avons raisonné au Livre II, Chapitre XI, pour discuter le mouvement de l'air dans un tuyau illimité dans les deux sens, nous trouverons sans peine les résultats suivants, qui définissent l'état de la corde au temps t :

1° Entre le point B , d'abscisse $(At - l)$ et le point C d'abscisse $(At + l)$, on a

$$(16) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \xi = 0, \\ \eta = F_1(x_0 - At), \\ \zeta = F_2(x_0 - At); \end{array} \right.$$

2° Entre le point B' d'abscisse $(-At - l)$ et le point C' , d'abscisse $(-At + l)$, on a

$$(17) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \xi = 0, \\ \eta = G_1(x_0 + At), \\ \zeta = G_2(x_0 + At); \end{array} \right.$$

3° Entre le point D , d'abscisse $(at - l)$ et le point E , d'abscisse $(at + l)$, on a

$$(18) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \xi = f(x_0 - at), \\ \eta = 0, \\ \zeta = 0, \end{array} \right.$$

4° Entre le point D' , d'abscisse $(-at - l)$ et le point E' , d'abscisse $(-at + l)$ on a

$$(19) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \xi = g(x_0 + at), \\ \eta = 0, \\ \zeta = 0; \end{array} \right.$$

5° En tout autre point de la corde, on a

$$(20) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \xi = 0, \\ \eta = 0, \\ \zeta = 0. \end{array} \right.$$

Les formules (16) représentent un mouvement qui se propage de gauche à droite, avec la vitesse uniforme A , en demeurant identique à lui-même. Dans ce mouvement, chaque particule du fil éprouve un déplacement situé dans le plan normal à la position d'équilibre du fil; un semblable déplacement est ce que nous nommerons un déplacement transversal.

Les formules (17) représentent un mouvement qui se propage de droite à gauche, avec la vitesse uniforme A , en demeurant identique à lui-même. Le déplacement de chaque particule de la corde dans ce mouvement est aussi un déplacement transversal.

La quantité A représente donc la vitesse avec laquelle un ébranlement transversal se propage le long d'un fil indéfini.

L'égalité (8)

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x_0}$$

devient, en vertu de la première des égalités (16) ou de la première des égalités (17)

$$\rho - \rho_0 = 0.$$

Ainsi, un ébranlement transversal se propage le long d'un fil indéfini sans altérer la densité du fil.

Les formules (19) représentent un mouvement qui se propage de gauche à droite, avec une vitesse uniforme a , en demeurant identique à lui-même. Dans ce mouvement, chaque particule du fil éprouve un déplacement dirigé suivant la position d'équilibre du fil; un semblable déplacement est ce que nous nommerons un déplacement longitudinal.

Les formules (20) représentent un mouvement qui se propage de droite à gauche, avec une vitesse uniforme a , en demeurant identique à lui-même. Le déplacement de chaque particule de la corde dans ce mouvement est aussi un déplacement longitudinal.

La quantité a représente donc la vitesse avec laquelle un ébranlement longitudinal se propage le long d'un fil indéfini.

L'égalité (8)

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x_0}$$

montre que, lorsqu'un ébranlement longitudinal se propage le long d'un fil indéfini, il fait varier la densité du fil; un fil inextensible ne pourrait donc pas propager un ébranlement longitudinal; c'est une conclusion à laquelle on parviendrait également en considérant

Duh. (Com II) N.º 8.

l'égalité (13) qui donne la vitesse a avec laquelle se propage un ébranlement longitudinal; cette égalité montre en effet que, pour un fil inextensible, la quantité a deviendrait infinie.

Nous retrouverons des propositions analogues à celles-là dans l'étude des mouvements des membranes et des solides.

Comparons la vitesse de propagation des ébranlements transversaux et la vitesse de propagation des ébranlements longitudinaux; pour aucun fil connu la densité n'est en raison inverse de la tension, ce qui exigerait que la densité fût infinie pour une tension nulle; par conséquent il n'existe pas de fil pour lequel on ait

$$a = A.$$

Pour tous les fils, on a

$$-\frac{d\theta_0}{d\rho_0} > \frac{\omega_0}{\rho_0}$$

et, par conséquent,

$$a > A.$$

La vitesse de propagation des ébranlements longitudinaux est toujours plus grande que la vitesse de propagation des ébranlements transversaux.

Après avoir ainsi étudié la propagation d'un ébranlement soit longitudinal, soit transversal, le long d'un fil rectiligne illimité, nous pourrions étudier la réflexion que de semblables ébranlements éprouvent à l'extrémité fixe d'un fil limité; mais les considérations que nous aurions à exposer seraient identiques à celles qui ont été détaillées au Livre II, Chapitre XI; il est donc inutile de les répéter ici.

Proposons-nous seulement de déterminer les fonctions arbitraires qui figurent dans l'intégrale générale du mouvement de la corde, pour le cas où les deux extrémités de la corde sont fixes.

Cette intégrale générale est:

$$(15) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \xi = f(x_0 - at) + g(x_0 + at), \\ \eta = F(x_0 - At) + G(x_0 + At), \\ \zeta = F'(x_0 - At) + G'(x_0 + At). \end{array} \right.$$

Soient $x_0 = 0$, $x_0 = L$, les abscisses des deux extrémités de la corde.

Pour $x_0 = 0$, on doit avoir, quel que soit t ,

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

On doit donc avoir, quel que soit t ,

$$f(-at) + g(at) = 0,$$

$$F(-at) + G(At) = 0,$$

$$F'(-at) + G'(At) = 0;$$

ou bien, en désignant par X une variable qui l'onque,

$$\begin{aligned} f(-X) + g(X) &= 0, \\ F(-X) + G(X) &= 0, \\ F'(-X) + G'(X) &= 0. \end{aligned}$$

Les égalités (15) deviennent alors

$$\begin{aligned} \xi &= f(x_0 - at) - f(-x_0 - at), \\ \eta &= F(x_0 - At) - F(-x_0 - At), \\ \xi &= F'(x_0 - At) - F'(-x_0 - At). \end{aligned}$$

Pour $x_0 = L$, on doit avoir, quel que soit t ,

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \xi = 0,$$

ce qui donne les identités

$$\begin{aligned} f(-at + L) &= f(-at - L), \\ F(-At + L) &= F(-At - L), \\ F'(-At + L) &= F'(-At - L). \end{aligned}$$

Ces identités nous enseignent en premier lieu que les trois fonctions f, F, F' sont des fonctions périodiques admettant pour période $2L$. Dès lors ξ est une fonction périodique de t admettant pour période $2\frac{L}{a}$; η et ξ sont des fonctions périodiques de t admettant pour période $2\frac{L}{A}$; d'où le théorème suivant :

Le mouvement infiniment petit le plus général d'une corde dont les extrémités sont fixes est la superposition d'un mouvement longitudinal périodique ayant pour période

$$\tau = \frac{2L}{a}$$

et d'un mouvement transversal périodique ayant pour période :

$$T = \frac{2L}{A}.$$

Les identités précédentes nous enseignent que, pour déterminer les fonctions $f, F(X), F'(X)$ pour toute valeur de X , il suffit de déterminer leurs valeurs pour toutes les valeurs de X comprise entre $-L$ et $+L$.

Supposons que l'on se donne la forme initiale de la corde et la vitesse initiale imprimée à ses divers points; alors, pour $t=0$, on aura

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x_0), & \eta &= \Phi(x_0), & \xi &= \Phi'(x_0), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \psi(x_0), & \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \Psi(x_0), & \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \Psi'(x_0), \end{aligned}$$

les six fonctions

$$\begin{array}{ccc} \varphi(x_0), & \Phi(x_0), & \Phi'(x_0), \\ \psi(x_0), & \Psi(x_0), & \Psi'(x_0), \end{array}$$

étant données pour toute valeur de x_0 comprise entre 0 et L .

Ces égalités donnent, pour toute valeur de x_0 comprise entre 0 et L ,

$$\begin{aligned} f(x_0) - f(-x_0) &= \varphi(x_0), \\ \frac{df(x_0)}{dx_0} - \frac{df(-x_0)}{dx_0} &= -\frac{1}{a} \psi(x_0), \\ F(x_0) - F(-x_0) &= \Phi(x_0), \\ \frac{dF(x_0)}{dx_0} - \frac{dF(-x_0)}{dx_0} &= -\frac{1}{A} \Psi(x_0), \\ F'(x_0) - F'(-x_0) &= \Phi'(x_0), \\ \frac{dF'(x_0)}{dx_0} - \frac{dF'(-x_0)}{dx_0} &= -\frac{1}{A} \Psi'(x_0). \end{aligned}$$

De ces égalités, on déduit

$$\begin{aligned} \frac{df(x_0)}{dx_0} - \frac{df(-x_0)}{d(-x_0)} &= \frac{d\varphi(x_0)}{dx_0}, & \frac{df(x_0)}{dx_0} + \frac{df(-x_0)}{d(-x_0)} &= -\frac{1}{a} \psi(x_0), \\ \frac{dF(x_0)}{dx_0} - \frac{dF(-x_0)}{d(-x_0)} &= \frac{d\Phi(x_0)}{dx_0}, & \frac{dF(x_0)}{dx_0} + \frac{dF(-x_0)}{d(-x_0)} &= -\frac{1}{A} \Psi(x_0), \\ \frac{dF'(x_0)}{dx_0} - \frac{dF'(-x_0)}{d(-x_0)} &= \frac{d\Phi'(x_0)}{dx_0}, & \frac{dF'(x_0)}{dx_0} + \frac{dF'(-x_0)}{d(-x_0)} &= -\frac{1}{A} \Psi'(x_0). \end{aligned}$$

Ces égalités doivent avoir lieu pour toutes les valeurs de x_0 comprises entre 0 et L . On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{df(x_0)}{dx_0} &= \frac{1}{2} \left[\frac{d\varphi(x_0)}{dx_0} - \frac{1}{a} \psi(x_0) \right], \\ \frac{dF(x_0)}{dx_0} &= \frac{1}{2} \left[\frac{d\Phi(x_0)}{dx_0} - \frac{1}{A} \Psi(x_0) \right], \\ \frac{dF'(x_0)}{dx_0} &= \frac{1}{2} \left[\frac{d\Phi'(x_0)}{dx_0} - \frac{1}{A} \Psi'(x_0) \right], \\ \frac{df(-x_0)}{d(-x_0)} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{d\varphi(x_0)}{dx_0} + \frac{1}{a} \psi(x_0) \right], \\ \frac{dF(-x_0)}{d(-x_0)} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{d\Phi(x_0)}{dx_0} + \frac{1}{A} \Psi(x_0) \right], \\ \frac{dF'(-x_0)}{d(-x_0)} &= -\frac{1}{2} \left[\frac{d\Phi'(x_0)}{dx_0} + \frac{1}{A} \Psi'(x_0) \right], \end{aligned}$$

Comme les quantités

$$\begin{aligned} \psi(x_0), \quad \Psi(x_0), \quad \Psi'(x_0), \\ \frac{d\varphi(x_0)}{dx_0}, \quad \frac{d\Phi(x_0)}{dx_0}, \quad \frac{d\Phi'(x_0)}{dx_0}, \end{aligned}$$

sont connues pour toutes les valeurs de x_0 comprises entre 0 et L , ces égalités déterminent complètement les valeurs des quantités

$$\frac{dF(X)}{dX}, \quad \frac{dF'(X)}{dX}, \quad \frac{dF''(X)}{dX},$$

pour toutes les valeurs de X comprises entre $-L$ et $+L$.

Les fonctions $f(X)$, $F(X)$, $F'(X)$ sont donc, pour toutes les valeurs de X comprises entre $-L$ et $+L$, déterminées à une constante près, ce qui suffit pour déterminer complètement les valeurs de ξ , η , ζ , à tout instant.

Ainsi le mouvement d'une corde dont les deux extrémités sont fixes est complètement déterminé lorsqu'on connaît la figure initiale de la corde et les vitesses initiales imprimées à ses divers points.

Le calcul effectif de ce mouvement est ramené à des quadratures.

Nous allons retrouver ces résultats par une toute autre voie, en examinant en premier lieu les lois qui président aux mouvements vibratoires d'une corde peut être animée.

§2. Vibrations des Cordes.

Proposons-nous d'étudier les mouvements vibratoires que peut présenter une corde; supposons qu'une corde soit animée d'un mouvement vibratoire de période T ; les quantités ξ , η , ζ correspondant à une valeur donnée de x_0 seront des fonctions périodiques de t ayant pour période T , et oscillant autour de la valeur 0. De plus, ces quantités vérifieront en tout point de la corde les équations aux dérivées partielles

$$(14) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2} , \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = A^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2} , \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = A^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_0^2} . \end{array} \right.$$

Si nous nous reportons alors à ce que nous avons vu précédemment (p. 217), nous trouverons que les quantités ξ , η , ζ , doivent être de la forme suivante:

$$\begin{aligned} 21) \dots \xi &= m_1 \cos \frac{2\pi}{aT} (x_0 + \alpha_1) \sin 2\pi \frac{t}{T} + m_2 \cos \frac{4\pi}{aT} (x_0 + \alpha_2) \sin 4\pi \frac{t}{T} + \dots \dots \dots \\ &+ n_1 \cos \frac{2\pi}{aT} (x_0 + \beta_1) \cos 2\pi \frac{t}{T} + n_2 \cos \frac{4\pi}{aT} (x_0 + \beta_2) \cos 4\pi \frac{t}{T} + \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$(21) \left\{ \begin{array}{l} \eta = M_1 \cos \frac{2\pi}{AT} (x_0 + A_1) \sin 2\pi \frac{t}{T} + M_2 \cos \frac{4\pi}{AT} (x_0 + A_2) \sin 4\pi \frac{t}{T} + \dots \\ \quad + N_1 \cos \frac{2\pi}{AT} (x_0 + B_1) \cos 2\pi \frac{t}{T} + N_2 \cos \frac{4\pi}{AT} (x_0 + B_2) \cos 4\pi \frac{t}{T} + \dots, \\ \xi = M'_1 \cos \frac{2\pi}{AT} (x_0 + A'_1) \sin 2\pi \frac{t}{T} + M'_2 \cos \frac{4\pi}{AT} (x_0 + B'_2) \sin 4\pi \frac{t}{T} + \dots \\ \quad + N'_1 \cos \frac{2\pi}{AT} (x_0 + B'_1) \cos 2\pi \frac{t}{T} + N'_2 \cos \frac{4\pi}{AT} (x_0 + B'_2) \cos 4\pi \frac{t}{T} + \dots, \end{array} \right.$$

les quantités $m_i, n_i, M_i, N_i, M'_i, N'_i,$
 $\alpha_i, \beta_i, A_i, B_i, A'_i, B'_i,$

étant des constantes.

Le point $x_0 = 0$, origine de la corde, est supposé immobile. Nous devons avoir ;
 pour $x_0 = 0$, et quel que soit t ,

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \xi = 0,$$

Ce qui donne

$$\begin{array}{ll} m_1 \cos \frac{2\pi}{aT} \alpha_1 = 0, & n_1 \cos \frac{2\pi}{aT} \beta_1 = 0, \\ m_2 \cos \frac{4\pi}{aT} \alpha_2 = 0, & n_2 \cos \frac{4\pi}{aT} \beta_2 = 0, \\ m_3 \cos \frac{6\pi}{aT} \alpha_3 = 0, & n_3 \cos \frac{6\pi}{aT} \beta_3 = 0, \\ \dots & \dots \\ M_1 \cos \frac{2\pi}{AT} A_1 = 0, & N_1 \cos \frac{2\pi}{AT} B_1 = 0, \\ M_2 \cos \frac{4\pi}{AT} A_2 = 0, & N_2 \cos \frac{4\pi}{AT} B_2 = 0, \\ M_3 \cos \frac{4\pi}{AT} A_3 = 0, & N_3 \cos \frac{4\pi}{AT} B_3 = 0, \\ \dots & \dots \\ M'_1 \cos \frac{2\pi}{AT} A'_1 = 0, & N'_1 \cos \frac{2\pi}{AT} B'_1 = 0, \\ M'_2 \cos \frac{4\pi}{AT} A'_2 = 0, & N'_2 \cos \frac{4\pi}{AT} B'_2 = 0, \\ M'_3 \cos \frac{6\pi}{AT} A'_3 = 0, & N'_3 \cos \frac{6\pi}{AT} B'_3 = 0, \\ \dots & \dots \end{array}$$

On litre précédent, nous avons, à plusieurs reprises, discuté des égalités de ce genre (Voir, notamment G.I. p. 219). En reproduisant une discussion semblable à celles que nous avons déjà faites, nous verrons que ces égalités permettent de transformer les égalités (21)

on a les suivantes :

$$\begin{aligned}
 \xi &= \mu_1 \sin \frac{2\pi}{aT} x_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \theta_1 \right) \\
 &+ \mu_2 \sin \frac{4\pi}{aT} x_0 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \theta_2 \right) \\
 &+ \dots \dots \dots , \\
 \eta &= M_1 \sin \frac{2\pi}{AT} x_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \theta_1 \right) \\
 &+ M_2 \sin \frac{4\pi}{AT} x_0 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \theta_2 \right) \\
 &+ \dots \dots \dots , \\
 \xi &= M'_1 \sin \frac{2\pi}{AT} x_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \theta'_1 \right) \\
 &+ M'_2 \sin \frac{4\pi}{AT} x_0 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \theta'_2 \right) \\
 &+ \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

(22) —

les quantités

$$\begin{array}{ccc}
 \mu_1, & M_1, & M'_1, \\
 \theta_1, & \theta_2, & \theta'_1,
 \end{array}$$

étant de nouvelles constantes.

Supposons maintenant que la deuxième extrémité de la corde soit, elle aussi, maintenue immobile; soit L la longueur de la corde; pour $x_0 = L$, nous devons avoir quel que soit t ,

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \xi' = 0,$$

ce qui exige que l'on ait

$$(23) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{ll}
 \mu_1 \sin \frac{2\pi L}{aT} = 0, & \mu_2 \sin \frac{4\pi L}{aT} = 0, \quad \dots \dots \dots \\
 M_1 \sin \frac{2\pi L}{AT} = 0, & M_2 \sin \frac{4\pi L}{AT} = 0, \quad \dots \dots \dots \\
 M'_1 \sin \frac{2\pi L}{AT} = 0, & M'_2 \sin \frac{4\pi L}{AT} = 0, \quad \dots \dots \dots
 \end{array} \right.$$

Supposons que les deux vitesses a et A soient incommensurables entre elles, ce qui aura lieu en général; les égalités (23); se scindront alors en deux groupes; ou bien l'on aura

$$(24) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l}
 \sin \frac{2\pi L}{AT} = 0, \\
 \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0, \quad \dots \dots \dots ;
 \end{array} \right.$$

ou bien l'on aura

$$(25) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l}
 \sin \frac{2\pi L}{AT} = 0, \\
 M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad \dots \dots \dots \\
 M'_1 = 0, \quad M'_2 = 0, \quad \dots \dots \dots
 \end{array} \right.$$

Lorsque les égalités (24) sont vérifiées, on a, quel que soit t en tout point du fil

$$\xi = 0$$

et le déplacement d'une particule quelconque du fil est un déplacement transversal; au contraire, lorsque les équations (25) sont vérifiées, on a, quel que soit t , en tout point du fil

$$\eta = 0, \quad \xi = 0$$

et le déplacement d'une particule quelconque du fluide est un déplacement longitudinal; d'où le Théorème suivant :

Lorsqu'un fil, dont les extrémités sont fixes, est animé d'un mouvement vibratoire le déplacement d'une particule quelconque de ce fil est ou bien un déplacement exclusivement transversal, ou bien un déplacement exclusivement longitudinal.

Une corde présente donc deux espèces de vibrations : des vibrations transversales et des vibrations longitudinales.

A) *Vibrations transversales.* — Les lois des vibrations transversales sont données par les égalités (22) et (24) qui deviennent

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} T = 2 \frac{L}{A}, \quad 2 \frac{L}{2A}, \quad 2 \frac{L}{3A}, \dots \\ \xi = 0, \\ \eta = M_1 \sin \frac{2\pi}{AT} x_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \tau_1 \right) \\ \quad + M_2 \sin \frac{4\pi}{AT} x_0 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \tau_2 \right) \\ \quad + \dots \\ \xi = M'_1 \sin \frac{2\pi}{AT} x_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \tau'_1 \right) \\ \quad + M'_2 \sin \frac{4\pi}{AT} x_0 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \tau'_2 \right) \\ \quad + \dots \end{array} \right.$$

Les sons simples que peut rendre une corde vibrant transversalement sont le son fondamental dont le nombre de vibrations doubles s'obtient en divisant la vitesse de propagation des ébranlements transversaux par le double de la longueur de la corde, et tous les sons harmoniques de celui-là. Lorsque cette corde rend un son complexe, celui-ci est formé en général par la superposition de l'un des sons simples précédents et de toute ses harmoniques.

Le nombre N de vibrations doubles du son fondamental d'une corde qui vibre transversalement a pour valeur

$$N = \frac{A}{2L},$$

ou bien, en vertu de l'égalité (12)

$$N = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{C_0}{\rho_0}}$$

Soit Δ la densité solide de la matière qui forme la corde; soit Ω la section

de la corde ; nous avons :

$$\rho_0 = \Omega \Delta$$

et

$$N = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{C_0}{\Omega \Delta}},$$

formule que l'on vérifie expérimentalement au moyen du sonomètre.

B) Vibrations longitudinales — Les lois des vibrations longitudinales sont données par les égalités (22) et (25), qui deviennent

$$T = \frac{2L}{a}, \quad 2 \frac{L}{2a}, \quad 2 \frac{L}{3a}, \dots$$

$$\xi = \mu_1 \sin \frac{2\pi}{aT} x_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \theta_1 \right) \\ + \mu_2 \sin \frac{4\pi}{aT} x_0 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \theta_2 \right) \\ + \dots$$

$$\eta = 0, \quad \xi = 0.$$

Les sons simples que peut rendre une corde vibrant longitudinalement sont le son fondamental, dont le nombre de vibrations doubles s'obtient en divisant la vitesse de propagation des ébranlements longitudinaux par le double de la longueur de la corde, et tous les sons harmoniques de celui-là. Lorsque cette corde rend un son complexe, celui-ci est formé, en général, par la superposition de l'un des sons simples précédents et de toutes ses harmoniques.

Le son fondamental d'une corde qui vibre longitudinalement correspond à un nombre de vibrations doubles :

$$n = \frac{a}{2L},$$

tandis que le son fondamental de la même corde vibrant transversalement correspond à un nombre de vibrations doubles

$$N = \frac{A}{2L}$$

On a donc

$$\frac{n}{N} = \frac{a}{A}$$

Comme a est beaucoup plus grand que A , on arrive à la proposition suivante :

Le son fondamental d'une corde animée de vibrations longitudinales est beaucoup plus aigu que le son fondamental de la même corde animée de vibrations transversales.

Une corde vibrante présente des nœuds, où l'élongation est constamment nulle ; ce sont les points d'abscisse :

$$x_0 = \frac{aT}{2}, \quad 2 \frac{aT}{2}, \dots$$

Si la corde est animée de vibrations longitudinales, et les points d'abscisse

$$x_0 = \frac{AT}{2}, \quad 2 \frac{AT}{2}, \dots$$

Duh. (tome II). N° 9.

si la corde est animée de vibrations transversales; elle présente aussi des ventres, où l'élongation est, quel que soit t , maxima en valeur absolue; un ventre est toujours équidistant de deux nœuds consécutifs.

Les propriétés des nœuds et des ventres des cordes s'étudient comme les propriétés des nœuds et des ventres des tuyaux sonores (Livre II, Chap. XI).

Nous avons supposé, dans ce qui précède, les deux extrémités du fil maintenues immobiles; supposons maintenant que l'une de ces extrémités, celle qui correspond à $x_0 = L$, soit animée d'un mouvement donné que nous supposerons être un mouvement vibratoire simple:

$$\xi = u \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right),$$

$$\eta = U \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \Phi \right),$$

$$\xi = U' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \Phi' \right).$$

Si l'on compare ces égalités aux égalités (22), on voit que l'on aura en général

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{u}{\sin \frac{2\pi L}{aT}} \sin \frac{2\pi}{aT} x_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \varphi \right) \\ &+ \mu_2 \sin \frac{4\pi}{aT} x_0 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \theta_2 \right) \\ &+ \dots \dots \dots \\ \eta &= \frac{U}{\sin \frac{2\pi L}{AT}} \sin \frac{2\pi}{AT} x_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \Phi \right) \\ &+ M_2 \sin \frac{4\pi}{AT} x_0 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \mathcal{C}_2 \right) \\ &+ \dots \dots \dots \\ \xi &= \frac{U'}{\sin \frac{2\pi L}{AT}} \sin \frac{2\pi}{AT} x_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \Phi' \right) \\ &+ M'_2 \sin \frac{4\pi}{AT} x_0 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \mathcal{C}'_2 \right) \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

En général, les quantités ξ , η , ξ , sont du même ordre de grandeur que les quantités u , U , U' ; les déplacements des divers points de la corde sont du même ordre de grandeur que le déplacement donné à son extrémité; il existe toutefois deux cas d'exception qui sont les suivants:

1° La période du mouvement vibratoire imposé à l'une des extrémités de la corde coïncide avec la période de l'un des sons propres de la corde vibrant transversalement.

On a alors

$$\sin \frac{2\pi L}{AT} = 0;$$

la quantité ξ est du même ordre de grandeur que u , mais les quantités η et ζ sont, en général, infinies par rapport à U et U' . Dans ce cas, les déplacements transversaux des divers points de la corde sont infinies par rapport au déplacement de son extrémité.

2° La période du mouvement vibratoire imposé à l'une des extrémités de la corde coïncide avec la période de l'un des sons propres de la corde vibrant longitudinalement. On a alors

$$\sin \frac{2\pi}{aT} L = 0;$$

les quantités η et ζ sont du même ordre de grandeur que U et U' ; mais la quantité ξ est, en général, infinie par rapport à u . Dans ce cas, les déplacements longitudinaux des divers points de la corde sont, en général, infinies par rapport au déplacement de son extrémité.

Ces propositions rendent compte des phénomènes qui se produisent lorsqu'une corde, dont une extrémité est fixe, est reliée par son autre extrémité à un diapason mis en vibration; cette disposition est réalisée dans les classiques expériences de Melde.

§3 - Détermination des Coefficients des Séries - Loi de Young.

Si une corde est animée d'un mouvement vibratoire transversal, ce mouvement vibratoire est représenté par les formules (26); si elle est animée d'un mouvement vibratoire longitudinal, ce mouvement est représenté par les formules (28); ces formules renferment des séries dont les termes sont affectés de coefficients constants; ces coefficients dépendent de la position et de la vitesse des divers points de la corde à un instant déterminé, par exemple à l'instant $t=0$; voyons de quelle manière la connaissance de ces positions et de ces vitesses permet de déterminer ces coefficients.

Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse d'une corde animée d'un mouvement vibratoire longitudinal. A l'instant $t=0$, on a

$$\xi = f(x_0), \quad \frac{d\xi}{dt} = g(x_0),$$

$f(x_0)$, $g(x_0)$, étant des fonctions données de x_0 .

Les égalités (28) donnent alors

$$(29) \dots f(x_0) = \mu_1 \sin 2\pi\theta_1 \sin \frac{2\pi}{aT} x_0 + \mu_2 \sin 4\pi\theta_2 \sin \frac{4\pi}{aT} x_0 + \dots$$

$$(30) \dots g(x_0) = \frac{2\pi}{T} \mu_1 \cos 2\pi\theta_1 \sin \frac{2\pi}{aT} x_0 + \frac{4\pi}{T} \mu_2 \cos 4\pi\theta_2 \sin \frac{4\pi}{aT} x_0 + \dots$$

Multiplications les deux membres de ces égalités par

$$\sin \lambda \frac{2\pi}{aT} x_0,$$

λ étant un nombre entier, et intégrons les deux membres par rapport à x_0 , depuis $x_0 = 0$, jusqu'à $x_0 = L$. Les séries étant uniformément convergentes, nous obtiendrons les égalités

$$(31) \dots \int_0^L f(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{aT} x_0 dx_0 = \mu_1 \sin 2\pi \theta_1, \int_0^L \sin \frac{2\pi}{aT} x_0 \sin \lambda \frac{2\pi}{aT} x_0 dx_0 \\ + \mu_2 \sin 4\pi \theta_2 \int_0^L \sin \frac{4\pi}{aT} x_0 \sin \lambda \frac{2\pi}{aT} x_0 dx_0 \\ + \dots$$

$$(32) \dots \int_0^L g(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{aT} x_0 dx_0 = \frac{2\pi}{T} \mu_1 \cos 2\pi \theta_1 \int_0^L \sin \frac{2\pi}{aT} x_0 \sin \lambda \frac{2\pi}{aT} x_0 dx_0 \\ + \frac{4\pi}{T} \mu_2 \cos 4\pi \theta_2 \int_0^L \sin \frac{4\pi}{aT} x_0 \sin \lambda \frac{2\pi}{aT} x_0 dx_0 \\ + \dots$$

T est, d'après les formules (28), égal à

$$\frac{2L}{Ka},$$

K étant un nombre entier. Supposons, ce qui est toujours permis, $K = 1$ et posons

$$X = \frac{x}{L};$$

Nous aurons

$$\int_0^L \sin \frac{2\pi}{aT} x_0 \sin \lambda \frac{2\pi}{aT} x_0 dx_0 = L \int_0^1 \sin \pi X \sin \lambda \pi X dX,$$

$$\int_0^L \sin \frac{4\pi}{aT} x_0 \sin \lambda \frac{2\pi}{aT} x_0 dx_0 = L \int_0^1 \sin 2\pi X \sin \lambda \pi X dX,$$

Or on sait que

$$\int_0^1 \sin \lambda' \pi X \sin \lambda \pi X dX = 0,$$

toutes les fois que λ diffère de λ' , et que

$$\int_0^1 \sin^2 \lambda \pi X dX = \frac{1}{2}.$$

Les égalités (31) et (32) donnent donc

$$(33) \dots \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 \sin 2\lambda \pi \theta_1 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{aT} x_0 dx_0, \\ \mu_\lambda \cos 2\lambda \pi \theta_\lambda = \frac{4\lambda \pi}{LT} \int_0^L g(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{aT} x_0 dx_0. \end{array} \right.$$

Ces égalités (33) font connaître, au moyen de la position initiale de la corde et de la vitesse initiale de ses divers points les coefficients du développement qui figure

dans les formules (28).

Nous avons dit que l'on pouvait toujours supposer que l'on avait

$$L = \frac{aT}{2}.$$

La quantité L est, en effet assurément de la forme

$$L = K \frac{aT'}{2},$$

K étant un nombre entier et T' la période du mouvement. Or si le mouvement admet pour période T' , il admet pour période $T = KT'$; seulement, si l'on développe ξ en série de Fourier en admettant pour période T au lieu de T' , les $(k-1)$ premiers termes devront manquer dans le développement, en sorte que les égalités (33) donneront

$$\mu_1 = 0, \quad \mu_2 = 0, \quad \dots \dots \dots \mu_{k-1} = 0,$$

Supposons qu'au lieu de donner aux divers points de la corde, au début du mouvement, des déplacements longitudinaux et des vitesses longitudinales, on leur donne exclusivement des déplacements transversaux et des vitesses transversales de telle façon que l'on ait, pour $t = 0$

$$\begin{aligned} \xi &= 0, & \eta &= F(x_0), & \zeta &= F'(x_0), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= 0, & \frac{\partial \eta}{\partial t} &= G(x_0), & \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= G'(x_0). \end{aligned}$$

Si nous posons

$$T = 2 \frac{L}{A}$$

et si nous déterminons les coefficients $M_1, M_2, \dots, M'_1, M'_2, \dots$
 $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2, \dots$

par les formules

$$(34) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} M_\lambda \sin 2\lambda\pi \mathcal{C}_\lambda &= -\frac{2}{L} \int_0^L F(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{AT} x_0 dx_0, \\ M_\lambda \cos 2\lambda\pi \mathcal{C}_\lambda &= \frac{4\lambda\pi}{LT} \int_0^L G(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{AT} x_0 dx_0, \\ M'_\lambda \sin 2\lambda\pi \mathcal{C}'_\lambda &= \frac{2}{L} \int_0^L F'(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{AT} x_0 dx_0, \\ M'_\lambda \cos 2\lambda\pi \mathcal{C}'_\lambda &= \frac{4\lambda\pi}{LT} \int_0^L G'(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{AT} x_0 dx_0, \end{aligned} \right.$$

les composantes ξ, η, ζ , du déplacement d'une particule quelconque de la corde se ont, à tout instant, représentées par les égalités (26').

Lorsqu'au début du mouvement on donne aux divers points de la corde des vitesses et des déplacements qui ne sont pas ou exclusivement longitudinaux ou exclusivement

transversaux, la corde ne peut plus prendre un mouvement périodique; néanmoins, les formules précédentes, qui représentent le mouvement de la corde soit lorsqu'il est un mouvement longitudinal périodique, soit lorsqu'il est un mouvement transversal périodique, sont, par leur ensemble, nous permettront de déterminer le mouvement le plus général d'une corde dont les deux extrémités sont fixes.

Quelles sont, en effet, les conditions qui déterminent la solution de ce problème?

1° Au début du mouvement on a

$$\begin{aligned} \xi &= f(x_0), & \eta &= F(x_0), & \xi &= F'(x_0), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= g(x_0), & \frac{\partial \eta}{\partial t} &= G(x_0), & \frac{\partial \xi}{\partial t} &= G'(x_0); \end{aligned}$$

2° Aux deux extrémités de la corde, on a, quel que soit t ,

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \xi = 0;$$

3° En tout point de la corde, on a, quel que soit t

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= A^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2}, \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= A^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2}; \end{aligned}$$

On satisfait à ces équations différentielles et aux équations aux limites si l'on pose

$$\tau = \frac{2L}{a}, \quad T = \frac{2L}{A}$$

$$(35) \left\{ \begin{aligned} \xi &= \mu_1 \sin \frac{2\pi}{a\tau} x_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} + \theta_1 \right) + \mu_2 \sin \frac{4\pi}{a\tau} x_0 \sin 4\pi \left(\frac{t}{\tau} + \theta_2 \right) + \dots \\ \eta &= M_1 \sin \frac{2\pi}{AT} x_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \mathcal{C}_1 \right) + M_2 \sin \frac{4\pi}{AT} x_0 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \mathcal{C}_2 \right) + \dots \\ \xi &= M'_1 \sin \frac{2\pi}{AT} x_0 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \mathcal{C}'_1 \right) + M'_2 \sin \frac{4\pi}{AT} x_0 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \mathcal{C}'_2 \right) + \dots \end{aligned} \right.$$

Les développements que nous venons d'écrire sont supposés uniformément convergents ainsi que ceux que l'on obtient en prenant les dérivées premières et secondes des différents termes.

On démontre alors que les développements que nous venons d'écrire vérifieront les conditions initiales si l'on en détermine les coefficients par les égalités

$$(36) \dots \dots \dots \mu_1 \sin 2\lambda\pi\theta_1 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{a\tau} x_0 dx_0,$$

$$\left\{ \begin{aligned} \mu_1 \cos 2\lambda\pi\theta_1 &= \frac{4\lambda\pi}{L\tau} \int_0^L g(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{a\tau} x_0 dx_0, \\ M_1 \sin 2\lambda\pi\mathcal{C}_1 &= \frac{2}{L} \int_0^L F(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{AT} x_0 dx_0, \\ M_1 \cos 2\lambda\pi\mathcal{C}_1 &= \frac{4\lambda\pi}{LT} \int_0^L G(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{AT} x_0 dx_0, \\ M'_1 \sin 2\lambda\pi\mathcal{C}'_1 &= \frac{2}{L} \int_0^L F'(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{AT} x_0 dx_0, \\ M'_1 \cos 2\lambda\pi\mathcal{C}'_1 &= \frac{4\lambda\pi}{LT} \int_0^L G'(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{AT} x_0 dx_0. \end{aligned} \right.$$

Nous voyons donc qu'un petit mouvement quelconque d'une corde peut être regardé comme la superposition d'un mouvement vibratoire longitudinal et d'un mouvement vibratoire transversal, les périodes de ces deux mouvements étant en général incommensurables entre elles.

Il est facile de voir que les égalités (34) peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2} \left[\mu_1 \cos 2\pi \left(\frac{x_0 - at}{a\tau} - \theta_1 \right) + \mu_2 \cos 4\pi \left(\frac{x_0 - at}{a\tau} - \theta_2 \right) + \dots \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\mu_1 \cos 2\pi \left(\frac{x_0 + at}{a\tau} + \theta_1 \right) + \mu_2 \cos 4\pi \left(\frac{x_0 + at}{a\tau} + \theta_2 \right) + \dots \right], \\ \eta &= \frac{1}{2} \left[M_1 \cos 2\pi \left(\frac{x_0 - At}{AT} - \mathcal{C}_1 \right) + M_2 \cos 4\pi \left(\frac{x_0 - At}{AT} - \mathcal{C}_2 \right) + \dots \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[M_1 \cos 2\pi \left(\frac{x_0 + At}{AT} + \mathcal{C}_1 \right) + M_2 \cos 4\pi \left(\frac{x_0 + At}{AT} + \mathcal{C}_2 \right) + \dots \right], \\ \xi &= \frac{1}{2} \left[M'_1 \cos 2\pi \left(\frac{x_0 - At}{AT} - \mathcal{C}'_1 \right) + M'_2 \cos 4\pi \left(\frac{x_0 - At}{AT} - \mathcal{C}'_2 \right) + \dots \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[M'_1 \cos 2\pi \left(\frac{x_0 + At}{AT} + \mathcal{C}'_1 \right) + M'_2 \cos 4\pi \left(\frac{x_0 + At}{AT} + \mathcal{C}'_2 \right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

On voit donc que les expressions générales de ξ , η , ξ , obtenues par l'emploi des séries trigonométriques, ont bien la forme (15) sous laquelle on les obtient immédiatement par le procédé de d'Alembert.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que l'on se donnait les positions initiales et les vitesses initiales des divers points de la corde; au lieu de se donner les positions initiales des diverses parties de la corde, on peut se donner les forces qui, appliquées aux divers points, les maintiennent dans ces positions.

Soient

$$X = \varphi(x_0), \quad Y = \Phi(x_0), \quad Z = \Phi'(x_0),$$

les composantes de ces forces. Il est facile de voir que, pour $t=0$, on devra avoir:

$$X = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2},$$

$$Y = A^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2},$$

$$Z = A^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_0^2},$$

ou bien, en vertu des égalités (35),

$$\varphi(x_0) = - \left(\frac{2\pi}{a\tau} \right)^2 \mu_1 \sin \frac{2\pi x_0}{a\tau} \sin 2\pi \theta_1,$$

$$- \left(\frac{4\pi}{a\tau} \right)^2 \mu_2 \sin \frac{4\pi x_0}{a\tau} \sin 4\pi \theta_2 - \dots \dots \dots,$$

$$\Phi(x_0) = - \left(\frac{2\pi}{AT} \right)^2 M_1 \sin \frac{2\pi x_0}{AT} \sin 2\pi \mathcal{E}_1,$$

$$- \left(\frac{4\pi}{AT} \right)^2 M_2 \sin \frac{4\pi x_0}{AT} \sin 4\pi \mathcal{E}_2 - \dots \dots \dots,$$

$$\Phi'(x_0) = - \left(\frac{2\pi}{AT} \right)^2 M'_1 \sin \frac{2\pi x_0}{AT} \sin 2\pi \mathcal{E}'_1,$$

$$- \left(\frac{4\pi}{AT} \right)^2 M'_2 \sin \frac{4\pi x_0}{AT} \sin 4\pi \mathcal{E}'_2 - \dots \dots \dots.$$

Les coefficients des développements (35) seront alors déterminés par les égalités

$$(37) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \mu_1 \sin 2\lambda\pi \theta_1 = - \frac{2}{\left(\frac{2\lambda\pi}{a\tau} \right)^2 L} \int_0^L \varphi(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{a\tau} x_0 dx_0, \\ \mu_1 \cos 2\lambda\pi \theta_1 = \frac{4\lambda\pi}{L\tau} \int_0^L g(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{a\tau} x_0 dx_0, \\ M_1 \sin 2\lambda\pi \mathcal{E}_1 = - \frac{2}{\left(\frac{2\lambda\pi}{AT} \right) L} \int_0^L \Phi(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{AT} x_0 dx_0, \\ M_1 \cos 2\lambda\pi \mathcal{E}_1 = \frac{4\lambda\pi}{LT} \int_0^L G(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{AT} x_0 dx_0, \\ M'_1 \cos 2\lambda\pi \mathcal{E}'_1 = - \frac{2}{\left(\frac{2\lambda\pi}{AT} \right)^2 L} \int_0^L \Phi'(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{AT} x_0 dx_0, \\ M'_1 \cos 2\lambda\pi \mathcal{E}'_1 = \frac{4\lambda\pi}{LT} \int_0^L G'(x_0) \sin \lambda \frac{2\pi}{AT} x_0 dx_0. \end{array} \right.$$

Les principales méthodes pour mettre une corde en vibration consistent à la frotter avec un archet (violin), à la pincer avec le doigt (guitare) ou à la frapper avec un marteau (piano)

Dans ces divers procédés, les forces qui agissent sur la corde au lieu de son mouvement sont exclusivement appliquées à une très petite région de la corde; cette petite région est aussi la seule à laquelle soient imprimées des vitesses initiales.

S'il en est ainsi, on pourra, dans les égalités précédentes, supprimer sous le signe \int les facteurs $\sin \frac{2\lambda\pi}{a\tau} x_0$, $\sin \frac{2\lambda\pi}{AT} x_0$, et mettre hors du signe \int les facteurs $\sin \frac{2\lambda\pi}{a\tau} X_0$, $\sin \frac{2\lambda\pi}{AT} X_0$, X_0 étant la valeur de x_0 qui correspond à l'un des points de la petite région de la corde attaquée par l'archet, le doigt ou le marteau.

On voit alors que l'on aura sensiblement

$$\mu_\lambda = 0$$

si l'on a sensiblement

$$\sin \frac{2\lambda\pi}{a\tau} X_0 = 0$$

c'est-à-dire si le point attaqué est voisin d'un nœud de la $(\lambda - 1)^{\text{e}}$ harmonique du son fondamental de la corde vibrant longitudinalement.

De même, on aura sensiblement

$$M_\lambda = 0, \quad M'_\lambda = 0,$$

si l'on a sensiblement

$$\sin \frac{2\lambda\pi}{a\tau} X_0 = 0$$

c'est-à-dire si le point attaqué est voisin d'un nœud de la $(\lambda - 1)^{\text{e}}$ harmonique du son fondamental de la corde vibrant transversalement :

On arrive donc à la proposition suivante :

En général, le mouvement infiniment petit d'une corde peut être regardé comme la superposition d'une infinité de sons simples propres à la corde animée de vibrations longitudinales et d'une infinité de sons simples propres à la corde animée de vibrations transversales; parmi ces sons ne se trouvent aucun de ceux qui auraient un nœud au voisinage du point attaqué.

Cette loi est due à Young.

§ 4 Historique.

On peut dire que c'est à l'occasion du problème des cordes vibrantes qu'a été créée la Physique Mathématique; il est donc peu de questions dont l'histoire offre plus d'intérêt; nous allons très brièvement en marquer les principaux points.

Les vibrations transversales des cordes ont été, dès la plus haute antiquité,

Duh. (Côme II) n° 10.

employés à la production des sons musicaux ; aussi les anciens avaient-ils déjà quelques notions sur les lois qui y président. C'est sans doute par l'étude des longueurs qu'il faut donner à des cordes de même nature pour leur faire rendre les sons de la gamme que l'école Pythagoricienne avait fait correspondre aux intervalles de la gamme des rapports numériques déterminés. D'après Young⁽¹⁾ Aristote savait déjà que deux sons de même hauteur correspondent à deux mouvements vibratoires de même période, et qu'un tuyau de longueur double d'un autre ou une corde de longueur double d'une autre exécute des vibrations deux fois plus lentes.

Les lois des vibrations transversales des cordes furent établies expérimentalement en 1636 par le P. Mersenne. En observant des cordes si longues que leurs vibrations pussent se compter à la simple vue, le P. Mersenne montra que le nombre des vibrations transversales d'une corde était proportionnel :

- 1° À l'inverse de la longueur de la corde ;
- 2° À la racine carrée de la tension ;
- 3° À la racine carrée de l'inverse de la densité.

Admettant ensuite par induction que ces lois demeuraient exactes lorsque les vibrations étaient trop rapides pour pouvoir être aperçues, il fonda sur ces lois une méthode propre à déterminer le nombre des vibrations d'un corps sonore quelconque, la méthode du sonomètre. C'est ainsi, notamment, qu'il parvint à établir les lois des sons rendus par les tuyaux.

Brook Taylor⁽²⁾ chercha le premier à rendre compte par des raisons mécaniques des lois qui président aux vibrations transversales des cordes. Considérant seulement les vibrations qui s'effectuent dans un plan ZO X, il admit les deux hypothèses suivantes :

- 1° Tous les points de la corde passent simultanément par l'axe des x ;
- 2° La force qui agit sur un point de la corde est à chaque instant proportionnelle à sa distance à l'axe des x .

De ces hypothèses, il déduisit les conséquences suivantes :

La durée de vibration de la corde a pour valeur

$$T = 2L \sqrt{\frac{\rho}{\Theta}} = \frac{2L}{A}$$

La loi du mouvement de la corde est représenté par

$$\xi = \left(M \sin 2\pi \frac{t}{T} + N \cos 2\pi \frac{t}{T} \right) \sin \frac{2\pi x}{AT}$$

En 1750, D'Alembert publia dans les Mémoires de l'Académie de Berlin un

⁽¹⁾ Young, Lectures on natural philosophy. Vol. I. p. 404.

⁽²⁾ Brook Taylor, De methodo incrementorum. Londres 1715.

Mémoire sur les Cordes Vibrantes et une Addition à ce Mémoire, ouvrages qui furent réimprimés en tête de ses Opuscules. Dans ces Mémoires on remarque, il parait à l'équation aux dérivées partielles des cordes vibrantes,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = A^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

la première des équations aux dérivées partielles qui ait été étudiée. Après avoir fait remarquer⁽¹⁾ que cette équation convenait également au mouvement de l'air dans un tuyau, il donna l'intégrale générale de cette équation sous la forme

$$\xi = F(x_0 - At) + G(x_0 + At)$$

La condition que, pour $x_0 = 0$, ξ doit être nul, ou l'on peut le permet de mettre cette formule sous la forme

$$\xi = F(At + x_0) - F(At - x_0),$$

à laquelle il faut joindre l'identité

$$F(At + L) = F(At - L),$$

qui exprime que ξ est nul quel que soit t pour $x_0 = L$. Cette formule enseigne que F est une fonction périodique ayant pour période $2L$, et par conséquent que, pour une valeur donnée de x_0 , ξ est une fonction périodique de t ayant pour période $\frac{2L}{A}$.

Dans le Tome suivant des Mémoires de l'Académie de Berlin, Euler repré-^Asentant le problème des cordes vibrantes, retrouva les résultats obtenus par d'Alembert. Malgré cette concordance, une discussion prolongée, qui donna lieu à plusieurs travaux imprimés dans les Mémoires de l'Académie de Berlin et les Opuscules de d'Alembert, s'éleva entre les deux grands géomètres. D'Alembert soutenait que l'intégrale donnée par lui de l'équation des cordes vibrantes n'était légitime que si la fonction F était une fonction analytique. Euler soutenait au contraire que cette condition restrictive n'était nullement nécessaire à la légitimité de la solution. Euler avait raison, mais on doit reconnaître que ni d'Alembert, ni Euler, n'appuyèrent leurs opinions sur des arguments convaincants.

En 1753, Daniel Bernoulli publia à son tour, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, une solution nouvelle du problème des cordes vibrantes, cette solution reposant sur l'idée de Taylor, consiste à représenter ξ par une série de la forme suivante.

$$\begin{aligned} \xi = & N_1 \sin \frac{2\pi}{AT} x_0 \cos \frac{2\pi t}{T} \\ & + N_2 \sin \frac{4\pi}{AT} x_0 \cos \frac{4\pi t}{T} \\ & + N_3 \sin \frac{6\pi}{AT} x_0 \cos \frac{6\pi t}{T} \dots \dots \dots \end{aligned}$$

⁽¹⁾ D'Alembert. Mémoire sur les cordes vibrantes. Art. XLVII.

T ayant pour valeur $\frac{2L}{A}$.

Et cette solution que Daniel Bernoulli appuyait non sur des raisons analytiques, mais sur une sorte d'induction, Euler fit immédiatement de justes critiques que l'on trouve imprimées dans le même volume des Mémoires de l'Académie de Berlin.

Euler observe que si, dans l'expression de ξ , on fait $t=0$, on doit trouver l'équation de la figure initiale de la corde. Or, par cette opération on trouve

$$\xi = N_1 \sin \frac{2\pi}{AT} x_0 + N_2 \sin \frac{4\pi}{AT} x_0 + \dots$$

et Euler conteste qu'une semblable équation puisse représenter n'importe quelle forme de courbe tracée entre les deux extrémités de la corde, ce qu'au contraire soutenait Bernoulli.

Bernoulli avait, en ce point, raison contre Euler, et ce n'est point par là que péchait sa solution; son erreur consistait à supposer, avec Taylor, que tous les points de la corde rencontrent en même temps l'axe des x , ce qui est vrai si la corde est abandonnée à elle-même sans aucune vitesse initiale; mais n'est point vrai en général; pour compléter sa solution, il eut dû ajouter, à la série qu'il avait écrite, la nouvelle série.

$$\begin{aligned} & M_1 \sin \frac{2\pi}{AT} x_0 \sin \frac{2\pi t}{T} \\ & + M_2 \sin \frac{4\pi}{AT} x_0 \sin \frac{4\pi t}{T} \\ & + M_3 \sin \frac{6\pi}{AT} x_0 \sin \frac{6\pi t}{T} \\ & + \dots \end{aligned}$$

En 1759, Lagrange⁽¹⁾, alors âgé de 23 ans, aborda à son tour la théorie des cordes vibrantes. Il prouva que la série donnée par Daniel Bernoulli intégrait l'équation aux dérivées partielles des cordes vibrantes donnée par d'Alembert, et que la condition imposée à la corde d'avoir une figure initiale donnée, analytique ou non, permettait de déterminer, au moyen de quadratures, les coefficients constants qui affectent les termes de cette série. Une transformation très simple le conduisit ensuite à prouver que la solution de Daniel Bernoulli pouvait toujours se mettre sous la forme trouvée par d'Alembert.

La solution de Bernoulli et de Lagrange reposait donc essentiellement sur le problème analytique suivant: développer une fonction quelconque analytique ou non entre les limites 0 et L, en série procédant suivant les sinus de l'arc $\frac{\pi}{L} x$

⁽¹⁾ Lagrange. — Recherches sur la nature et la propagation du son (Miscellanea Taurinensia, t. I. 1759 — Œuvres de Lagrange, t. I. p. 39).

et de ses multiples.

Ce problème reçut de Fourier ⁽¹⁾ d'importants développements ; aussi porte-t-il aujourd'hui le nom de ce géomètre. Admettant la possibilité de ce développement, Fourier prouva qu'il ne se peut faire que d'une manière par une démonstration qui suppose l'uniformité de la convergence de ce développement ; il donna, pour parvenir à la détermination des coefficients du développement, la méthode simple que nous avons suivie.

Mais, même après les travaux de Fourier, la théorie des développements trigonométriques présentait une lacune essentielle ; Lagrange et Fourier avaient bien prouvé que, pour qu'un semblable développement représentât une fonction donnée, il était nécessaire que les coefficients constants qui y figuraient eussent des valeurs données ; mais ils n'avaient pas prouvé que cela fût suffisant.

Cette lacune fut comblée par Lejeune-Dirichlet ⁽²⁾ ; Lejeune-Dirichlet démontre que le développement donné par Lagrange et Fourier convergerait vers la fonction donnée, pourvu que celle-ci satisfait à certaines restrictions très larges qui ne l'obligent pas à être analytique.

La méthode pour laquelle Caylor, Daniel Bernoulli & Lagrange ont résolu le problème des cordes vibrantes est devenue le type de méthodes propres à résoudre un certain nombre de problèmes de Physique Mathématique.

Un problème de Physique Mathématique est généralement ramené au point de vue analytique :

- 1° À une équation aux dérivées partielles ;
- 2° À des conditions aux limites ;
- 3° À des conditions initiales.

Comme l'a fait Caylor pour les cordes vibrantes, on cherche d'abord à définir certaines fonctions, dites Solutions simples, qui intègrent l'équation aux dérivées partielles et satisfont aux conditions aux limites ; puis, prenant une suite illimitée de semblables fonctions, on cherche à déterminer les coefficients de cette suite de manière qu'elle satisfasse aux conditions initiales. Laplace, Poisson, Bessel, et surtout Liouville ont fait grand usage de cette méthode, dont nous venons de raconter le premier exemple.

Les recherches sur les cordes vibrantes dont nous avons parlé dans ce qui précède avaient porté uniquement sur les vibrations transversales ; et en effet, la méthode suivie pour étudier le mouvement des cordes, qui consistait à les regarder

⁽¹⁾ Fourier — Théorie de la Chaleur. Mémoire déposé à l'Académie des Sciences le 28^{ème} 1811. — publié en corps d'ouvrage en 1822.

⁽²⁾ Lejeune-Dirichlet — sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire dans des limites données. (Journal de Crell t. IX p. 379. 1822)

comme une file discontinue de points matériels que d'Allembert et Euler supposaient en nombre limité, que Lagrange supposa le premier en nombre illimité, était absolument impropre à faire connaître les lois des vibrations longitudinales.

Dans la Mécanique analytique, Lagrange⁽¹⁾ perfectionna à un haut degré la théorie de l'équilibre des fils et lui donna une forme qui est essentiellement celle que nous avons exposée au Chapitre I.

Aussi Poisson⁽²⁾, bien que ses idées sur la théorie des fils le classent de beaucoup en rigueur à celles de Lagrange, put-il compléter l'étude de leurs vibrations en établissant les lois des vibrations longitudinales. Ces lois furent vérifiées expérimentalement par Pagnard - Latour et Sivart.

⁽¹⁾ Lagrange — Mécanique Analytique 1^{re} Partie. Section V. Ch. III.

⁽²⁾ Poisson — Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps Élastiques. lu à l'Acad. des Sciences le 14 Avril 1828. §3 — Traité de Mécanique. T. II. Chap. VIII §1.

Chapitre V

De l'Équilibre d'une Membrane flexible.

§1 Définitions et Principes fondamentaux

Une membrane flexible est une surface matérielle sans épaisseur, que l'on suppose capable d'éprouver toutes les déformations qui n'altèrent pas sa continuité, qui ne la déchirent pas. Si l'on découpe sur cette surface un élément d'aire $d\sigma$, cet élément aura une masse $\rho d\sigma$, ρ étant ce que nous nommerons la densité superficielle de la membrane.

Un élément de la membrane sera, si la membrane est partout de même nature, défini uniquement par sa densité superficielle ρ sa température et son aire $d\sigma$. Nous supposons que la température elle-même ait en tout point, la même valeur constante, ce qui nous dispensera de la faire figurer dans les formules.

La position relative des divers éléments qui forment la membrane

est supposée ne pas intervenir dans la définition de chacun d'une

Dans ces conditions, la membrane admettra un Potentiel *Piermondy* namique Interne qui sera de la forme

$$(1) \dots \dots \dots F = \int \varphi(\rho) d\rho$$

φ dépendant uniquement de la variable ρ mise en évidence.

Les forces extérieures qui peuvent être appliquées à la membrane seront de deux sortes :

1^o Chaque élément linéaire, de longueur dL , du contour sera soumis à une force ayant pour grandeur $T dL$ et dont les composantes seront désignées par

$$T \cos(T, x) dL,$$

$$T \cos(T, y) dL,$$

$$T \cos(T, z) dL;$$

2^o Chaque élément superficiel d'aire ds' de la membrane sera soumis à une force ayant pour composantes

$$\rho X ds',$$

$$\rho Y ds',$$

$$\rho Z ds'.$$

Tel est le point de départ qui va nous servir à étudier les conditions d'équilibre d'une membrane flexible.

L'établissement de ces conditions n'a donné lieu jusqu'ici qu'à un nombre très restreint de travaux. Lagrange a succinctement indiqué ⁽¹⁾ comment ces conditions pourraient être établies; la méthode qu'il a suivie et qui n'est que l'application de ses idées générales sur la manière dont on doit tenir compte des liaisons en Mécanique, peut être regardée comme une esquisse de celle qui va être exposée ici. Poisson ⁽²⁾ a adressé à la théorie de Lagrange des critiques qui ne sont pas toutes justifiées; il a repris la théorie de l'équilibre des membranes par des considérations sur l'attraction moléculaire auxquelles il attachait une grande importance, mais qui ne sont pas à l'abri de tout reproche.

Lamé ⁽³⁾ a repris également la théorie de l'équilibre des membranes flexibles

⁽¹⁾ Lagrange — Mécanique Analytique 2^e Edition, parue en 1811 p. 148

⁽²⁾ Poisson — Mémoire sur les surfaces élastiques, lu à l'Académie des Sciences le 1^{er} Août 1814.

⁽³⁾ Lamé — Leçons sur la Théorie Mathématique de l'élasticité des corps solides Neuvième leçon.

par une voie plus brève que celle que Poisson avait suivie ; mais tous ces auteurs ont constamment mêlé la théorie de la membrane flexible avec celle de la plaque élastique, problème dont nous exposerons plus loin l'histoire.

Nous allons reprendre ici l'étude de ces conditions d'équilibre en faisant usage de la méthode générale exposée au Livre I.

Nous donnerons à la membrane un déplacement virtuel quelconque, compatible avec sa définition ; dans ce déplacement les forces extérieures effectives font un travail dT_e ; le Potentiel Thermodynamique Interne subira une variation δF ; nous obtiendrons toutes les conditions d'équilibre de la membrane en écrivant que, pour tout déplacement virtuel.

$$(2) \dots\dots\dots dT_e - \delta F = 0$$

§ III On donne à la Membrane un déplacement qui laisse invariable la surface de chacun de ses éléments.

Considérons d'abord un déplacement virtuel où chaque élément superficiel dS de la membrane garde une aire invariable, ce qui exprime la condition

$$(3) \dots\dots\dots dS = 0$$

La masse ρdS d'un élément superficiel étant nécessairement invariable, on a, en toutes circonstances

$$(4) \dots\dots\dots \rho dS + dS \rho = 0$$

égalité qui devient, lorsque l'égalité (2) est vérifiée,

$$\delta \rho = 0$$

Cette égalité, jointe à l'égalité (3) montre que l'on a, dans ce cas

$$\delta F = 0$$

la condition d'équilibre se réduira donc alors à

$$(5) \dots\dots\dots dT_e = 0$$

Nous allons voir sous quelle forme se peuvent mettre les égalités (3) et (5)

Trçons, à la surface de la membrane, deux systèmes de lignes telles que, par un point, il passe deux de ces lignes et deux seulement, et que ces deux lignes se coupent à angle droit ; l'une de ces familles de lignes (les lignes v) est représentée en adjoignant à l'équation de la membrane l'équation

$$u = K,$$

u étant une fonction de x, y, z , et K étant une constante arbitraire, l'autre (la famille des lignes v) se représente en adjoignant à l'équation de la membrane l'équation.

$$v = K',$$

où v est une fonction d' x, y, z , et K' une constante arbitraire.

La connaissance des deux valeurs K et K' de u, v , définit un et un seul point de la surface de la membrane; en sorte que les coordonnées des divers points de la membrane peuvent être mises sous la forme

$$(6) \dots\dots\dots \begin{cases} x = f(u, v), \\ y = g(u, v), \\ z = h(u, v). \end{cases}$$

Faisons :

$$(7) \dots\dots\dots \begin{cases} A = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2, \\ B = \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2. \end{cases}$$

Considérons à la surface de la membrane deux points infiniment voisins $M(u, v)$ et $M'(u+du, v+dv)$. Soit ds la longueur MM' ; les deux systèmes de lignes tracés à la surface de la membrane étant rectangulaires, on a :

$$\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial h}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v} = 0$$

et, par conséquent,

$$(8) \dots\dots\dots ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = A du^2 + B dv^2$$

Considérons les quatre points infiniment voisins

$$\begin{array}{ll} M(u, v), & M'(u+du, v) \\ M''(u, v+dv), & M'''(u+du, v+dv) \end{array}$$

Ils forment les quatre sommets d'un rectangle infiniment petit dont l'aire a pour valeur :

$$dS = \overline{MM'} \times \overline{MM''}.$$

Mais l'égalité (8) donne

$$\begin{aligned} \overline{MM'}^2 &= A du^2, \\ \overline{MM''}^2 &= B dv^2. \end{aligned}$$

On a donc :

$$(9) \dots\dots\dots dS^2 = AB du^2 dv^2$$

Cette formule va nous permettre d'étudier la variation que subit l'aire d'un semblable élément rectangulaire dans un déplacement infiniment petit quelconque de la membrane.

Considérons un point (u, v) ou (x, y, z) de la membrane; un déplacement infiniment petit quelconque éprouvé par ce point peut toujours être décomposé en deux autres.

1° Un déplacement tangent à la membrane, ayant pour effet de l'amener du point (u, v) au point $(u+du, v+dv)$.

2° Un déplacement normal à la membrane; nous ferons choix d'une des faces de la membrane (que nous supposerons avoir deux faces) comme face positive, et nous désignerons par δn la longueur de ce déplacement, affectée du signe + ou du signe -, selon que le déplacement a lieu du côté positif ou du côté négatif de la membrane.

Soient $(n, x), (n, y), (n, z)$ les angles que la normale à la face positive de la membrane fait avec les axes de coordonnées; nous aurons:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial f}{\partial u} \delta u + \frac{\partial f}{\partial v} \delta v + \cos(n, x) \delta n, \\ \delta y &= \frac{\partial g}{\partial u} \delta u + \frac{\partial g}{\partial v} \delta v + \cos(n, y) \delta n, \\ \delta z &= \frac{\partial h}{\partial u} \delta u + \frac{\partial h}{\partial v} \delta v + \cos(n, z) \delta n. \end{aligned} \right.$$

La variation δdS que subit l'aire de l'élément dS dans une modification quelconque de la membrane peut s'écrire ainsi:

$$(11) \quad \delta dS = \delta_1 dS + \delta_2 dS,$$

$\delta_1 dS$ étant la variation éprouvée par l'aire de l'élément dS lorsque chacun des points (u, v) de la membrane subit un déplacement infiniment petit, tangent à la membrane ($\delta u, \delta v$); et $\delta_2 dS$ étant la variation éprouvée par l'aire de l'élément dS , lorsque chacun des points de la membrane subit un déplacement infiniment petit δn normal à la membrane.

L'égalité (9) différenciée nous donnera:

$$2 dS \delta_1 dS = \left[\frac{\partial}{\partial u} (AB) \delta u + \frac{\partial}{\partial v} (AB) \delta v \right] du^2 dv^2 + 2 AB (dv \delta du + du \delta dv) du dv$$

Si du et dv sont choisis positifs, cette égalité rapprochée de l'égalité (9), donnera:

$$(12) \quad \delta_1 dS = \frac{\frac{\partial}{\partial u} (AB) \delta u + \frac{\partial}{\partial v} (AB) \delta v}{2 \sqrt{AB}} du dv + \sqrt{AB} \left(\frac{\delta du}{du} + \frac{\delta dv}{dv} \right) du dv,$$

l'expression \sqrt{AB} étant prise en valeur absolue.

L'expression de la variation $\delta_2 dS$ nous sera donnée par un important théorème de M. J. Bertrand ⁽¹⁾.

Soient $M M' M'' M'''$ un élément rectangulaire de la membrane (Fig. 59). Un déplacement $MN = \delta n$ suivant la normale à la face positive de la membrane l'amène en $N N' N'' N'''$.

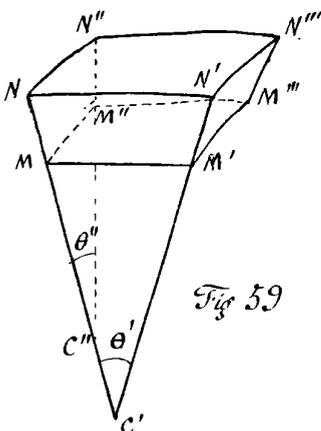


Fig 59

(1) J. Bertrand. Mémoires sur les Surfaces Isothermes orthogonales (Journal de Liouville 1^{ère} Série 618 p.117. 1844).

Nous avons

$$dS = \overline{MM'} \times \overline{MM''},$$

$$dS + \delta_2 dS = \overline{NN'} \times \overline{NN''}$$

Soit C' le centre de courbure de la section normale $C'MM'$ de la surface ; soit r' son rayon de courbure ; soit C'' le centre de courbure de la section normale $C''MM''$; soit r'' son rayon de courbure. Les deux directions $NM, N'M'$ se rencontrent au point C' et l'on a

$$MC' = r' ;$$

Les deux directions $NM, N''M''$ se rencontrent au point C'' et l'on a

$$MC'' = r'' .$$

Soient θ' l'angle $MC'M'$ et θ'' l'angle $MC''M''$. Nous avons :

$$MM' = r' \sin \theta' ,$$

$$NN' = (r' + \delta n) \sin \theta' ,$$

$$MM'' = r'' \sin \theta'' ,$$

$$NN'' = (r'' + \delta n) \sin \theta'' .$$

Nous avons alors :

$$\overline{NN'} \times \overline{NN''} - \overline{MM'} \times \overline{MM''} = (r' + r'') \sin \theta' \sin \theta'' \delta n = \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} \right) \overline{MM'} \times \overline{MM''} \delta n$$

Cette égalité peut s'écrire :

$$\delta_2 dS = \left(\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} \right) dS \delta n$$

Soient, au point M , R_1, R_2 , les deux rayons de courbure principaux de la membrane, comptés positivement lorsque les centres de courbure correspondants sont du côté négatif de la membrane. Nous savons que

$$\frac{1}{r'} + \frac{1}{r''} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} ;$$

alors l'égalité précédente, rapprochée de l'égalité (9), nous donne

$$(13) \dots \dots \delta_2 dS = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \sqrt{AB} \delta n \, du \, dv .$$

Cette égalité constitue le théorème de M. Bertrand.

Les égalités (11), (12) et (13) donnent

$$(14) \delta dS = \frac{\frac{\partial}{\partial u} (AB) \delta u + \frac{\partial}{\partial v} (AB) \delta v}{2 \sqrt{AB}} \, du \, dv + \sqrt{AB} \left(\frac{\delta du}{du} + \frac{\delta dv}{dv} \right) \, du \, dv + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \sqrt{AB} \delta n \, du \, dv .$$

Cette égalité nous permettra de transformer l'égalité (3).

Le travail $d\mathcal{E}_e$ des forces extérieures peut s'écrire :

$$d\mathcal{E}_e = \int \rho (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) \, dS$$

$$+ \int T \left\{ \cos (T, x) \delta x + \cos (T, y) \delta y + \cos (T, z) \delta z \right\} \, dL$$

D'après les égalités (9) et (10), cette égalité peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 (15) \quad d\mathcal{E}_e &= \int \left\{ \left(\rho X \frac{\partial f}{\partial u} + \rho Y \frac{\partial g}{\partial u} + \rho Z \frac{\partial h}{\partial u} \right) \delta u \right. \\
 &+ \left(\rho X \frac{\partial f}{\partial v} + \rho Y \frac{\partial g}{\partial v} + \rho Z \frac{\partial h}{\partial v} \right) \delta v \\
 &+ \left[\rho X \cos(n, x) + \rho Y \cos(n, y) + \rho Z \cos(n, z) \right] \delta n \left. \right\} \sqrt{AB} \, du \, dv \\
 &+ \int \left\{ \left[\cos(T, x) \frac{\partial f}{\partial u} + \cos(T, y) \frac{\partial g}{\partial u} + \cos(T, z) \frac{\partial h}{\partial u} \right] \delta u \right. \\
 &+ \left[\cos(T, x) \frac{\partial f}{\partial v} + \cos(T, y) \frac{\partial g}{\partial v} + \cos(T, z) \frac{\partial h}{\partial v} \right] \delta v \\
 &+ \left[\cos(T, x) \cos(n, x) + \cos(T, y) \cos(n, y) + \cos(T, z) \cos(n, z) \right] \delta n \left. \right\} T dL
 \end{aligned}$$

Cette quantité doit être égale à 0, non pas quels que soient $\delta u, \delta v, \delta n$, mais seulement pour les valeurs de $\delta u, \delta v, \delta n$, qui annulent, en chaque point, le second membre de l'égalité (14). Par conséquent, d'après les principes du Calcul des Variations, il doit exister une quantité Θ , variable d'une manière continue d'un point à l'autre de la membrane, telle que l'on ait identiquement

$$\begin{aligned}
 (16) \quad & \int \left\{ \left[\rho X \frac{\partial f}{\partial u} + \rho Y \frac{\partial g}{\partial u} + \rho Z \frac{\partial h}{\partial u} - \frac{\Theta}{2AB} \frac{\partial(AB)}{\partial u} \right] \delta u \right. \\
 &+ \left[\rho X \frac{\partial f}{\partial v} + \rho Y \frac{\partial g}{\partial v} + \rho Z \frac{\partial h}{\partial v} - \frac{\Theta}{2AB} \frac{\partial(AB)}{\partial v} \right] \delta v \\
 &+ \left[\rho X \cos(n, x) + \rho Y \cos(n, y) + \rho Z \cos(n, z) - \Theta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right] \delta n \left. \right\} \sqrt{AB} \, du \, dv \\
 &- \int \Theta \left(\frac{\delta du}{du} + \frac{\delta dv}{dv} \right) \sqrt{AB} \, du \, dv \\
 &+ \int \left\{ \left[\cos(T, x) \frac{\partial f}{\partial u} + \cos(T, y) \frac{\partial g}{\partial u} + \cos(T, z) \frac{\partial h}{\partial u} \right] \delta u \right. \\
 &+ \left[\cos(T, x) \frac{\partial f}{\partial v} + \cos(T, y) \frac{\partial g}{\partial v} + \cos(T, z) \frac{\partial h}{\partial v} \right] \delta v \\
 &+ \left[\cos(T, x) \cos(n, x) + \cos(T, y) \cos(n, y) + \cos(T, z) \cos(n, z) \right] \delta n \left. \right\} T dL = 0.
 \end{aligned}$$

Cette identité n'est autre chose que l'égalité

$$(17) \quad \dots \dots \dots d\mathcal{E}_e - \int \Theta \delta dS = 0$$

écrite sous une forme plus explicite.

Nous allons transformer l'intégrale

$$\int \Theta \left(\frac{\delta du}{du} + \frac{\delta dv}{dv} \right) \sqrt{AB} \, du \, dv.$$

Considérons en premier lieu l'expression

$$dv \int_{m_0}^{m_1} \Theta \sqrt{AB} \, \delta du.$$

où l'intégrale s'étend le long d'une ligne $M_0 M_1$ (fig. 60), définie par l'égalité

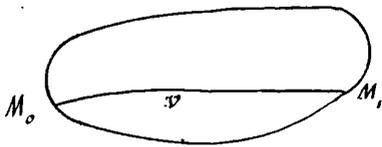


Fig. 60

$$v = \text{const.}$$

en allant d'un bord à l'autre de la membrane.

Nous aurons

$$(18) \int_{M_0}^{M_1} \Theta \sqrt{AB} \delta u = \int_{M_0}^{M_1} \Theta \sqrt{AB} \frac{d}{du} (\delta u) du = \left[\Theta \sqrt{AB} \delta u \right]_{M_0}^{M_1} - \int_{M_0}^{M_1} \left[\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{\Theta}{2AB} \frac{\partial (AB)}{\partial u} \right] \sqrt{AB} \delta u du;$$

du est supposé positif lorsque u croît de la valeur u_0 relative au point M_0 jusqu'à la valeur u , relative au point M_1 .

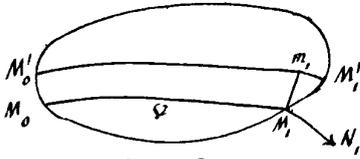


Fig. 61

Considérons la ligne $M'_0 M'_1$ (fig 61) qui correspond à la valeur $(v+dv)$ du paramètre v . Soit $M_1 m_1 = dL$.

En M_1 , menons une ligne N_1 , normale à $M_1 m_1$ tangente à la membrane et dirigée vers l'extérieur de la membrane.

Nous aurons:

$$M_1 m_1 = dL, \cos(M'_1 M_1 m_1) = dL, \cos(N_1, u).$$

Mais d'après l'égalité (8)

$$M_1 m_1 = \sqrt{B}, dv.$$

On a donc

$$\Theta, \sqrt{A, B}, \delta u, dv = \Theta, \cos(N_1, u) \sqrt{A}, \delta u, dL, .$$

On a de même

$$\Theta_0 \sqrt{A_0 B_0} \delta u_0 dv = -\Theta_0 \cos(N_0, u) \sqrt{A_0} \delta u_0 dL_0.$$

En vertu de ces égalités, l'égalité (18) devient.

$$\int \Theta \sqrt{AB} \delta u dv = \int \Theta \cos(N, u) \sqrt{A} \delta u dL - \int \left[\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{\Theta}{2AB} \frac{\partial (AB)}{\partial u} \right] \delta u \sqrt{AB} du dv$$

On démontrera de même que l'on a

$$\int \Theta \sqrt{AB} \delta v du = \int \Theta \cos(N, v) \sqrt{B} \delta v dL - \int \left[\frac{\partial \Theta}{\partial v} + \frac{\Theta}{2AB} \frac{\partial (AB)}{\partial v} \right] \delta v \sqrt{AB} dv du.$$

En ajoutant membre à membre ces deux égalités, on trouve

$$\begin{aligned} \int \Theta \left(\frac{\delta u}{du} + \frac{\delta v}{dv} \right) \sqrt{AB} du dv \\ = \int \Theta \left[\cos(N, u) \sqrt{A} \delta u + \cos(N, v) \sqrt{B} \delta v \right] dL \\ - \int \left\{ \left[\frac{\partial \Theta}{\partial u} + \frac{\Theta}{2AB} \frac{\partial (AB)}{\partial u} \right] \delta u \right. \\ \left. + \left[\frac{\partial \Theta}{\partial v} + \frac{\Theta}{2AB} \frac{\partial (AB)}{\partial v} \right] \delta v \right\} \sqrt{AB} du dv. \end{aligned}$$

L'égalité (16) deviendra alors

$$\begin{aligned}
& \int \left\{ \rho X \frac{\partial f}{\partial u} + \rho Y \frac{\partial g}{\partial u} + \rho Z \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial u} \right\} \delta u \\
& + \left\{ \rho Y \frac{\partial f}{\partial v} + \rho Y \frac{\partial g}{\partial v} + \rho Z \frac{\partial h}{\partial v} + \frac{\partial \Theta}{\partial v} \right\} \delta v \\
& + \left\{ \rho X \cos(n, x) + \rho Y \cos(n, y) + \rho Z \cos(n, z) - \Theta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \right\} \delta n \int \sqrt{AB} \, du \, dv \\
& + \int \left\{ \cos(T, x) T \frac{\partial f}{\partial u} + \cos(T, y) T \frac{\partial g}{\partial u} + \cos(T, z) T \frac{\partial h}{\partial u} - \Theta \cos(N, u) \sqrt{A} \right\} \delta u \\
& + \left\{ \cos(T, x) T \frac{\partial f}{\partial v} + \cos(T, y) T \frac{\partial g}{\partial v} + \cos(T, z) T \frac{\partial h}{\partial v} - \Theta \cos(N, v) \sqrt{B} \right\} \delta v \\
& + \left\{ \cos(T, x) \cos(n, x) + \cos(T, y) \cos(n, y) + \cos(T, z) \cos(n, z) \right\} T \delta n \int dL = 0.
\end{aligned}$$

Les quantités δu , δv , δn , pour assujetties seulement à varier d'une manière continue à la surface de la membrane; dès lors, un raisonnement que nous avons souvent employé montre que l'on doit avoir:

1° En tout point de la membrane

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} \rho \left(X \frac{\partial f}{\partial u} + Y \frac{\partial g}{\partial u} + Z \frac{\partial h}{\partial u} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial u} &= 0, \\ \rho \left(X \frac{\partial f}{\partial v} + Y \frac{\partial g}{\partial v} + Z \frac{\partial h}{\partial v} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial v} &= 0, \end{aligned} \right.$$

$$(20) \quad \rho \left\{ X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z) \right\} - \Theta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0;$$

2° En tout point du contour de la membrane

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} T \left[\cos(T, x) \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\sqrt{A}} + \cos(T, y) \frac{\frac{\partial g}{\partial u}}{\sqrt{A}} + \cos(T, z) \frac{\frac{\partial h}{\partial u}}{\sqrt{A}} \right] - \Theta \cos(N, u) &= 0, \\ T \left[\cos(T, x) \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\sqrt{B}} + \cos(T, y) \frac{\frac{\partial g}{\partial v}}{\sqrt{B}} + \cos(T, z) \frac{\frac{\partial h}{\partial v}}{\sqrt{B}} \right] - \Theta \cos(N, v) &= 0, \end{aligned} \right.$$

$$(22) \quad T \left\{ \cos(T, x) \cos(n, x) + \cos(T, y) \cos(n, y) + \cos(T, z) \cos(n, z) \right\} = 0.$$

§. III. On donne à la membrane une déformation quelconque.

Les résultats précédents ont été obtenus en donnant à la membrane une déformation virtuelle qui laisse constante l'aire de chacun des éléments superficiels qui la composent; nous allons maintenant lui appliquer une déformation virtuelle qui ne soit plus assujettie à cette restriction.

Dans une semblable modification, nous devons avoir:

$$(2) \quad d\mathcal{E}_e - \int \mathcal{F} = 0$$

Mais l'égalité (1) nous donne:

$$\int \mathcal{F} = \int \left\{ \varphi(\rho) \delta dS + \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \rho \delta dS \right\},$$

ou bien en vertu de l'égalité (4)

$$\int \mathcal{F} = \int \left(\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right) \mathcal{F} dS.$$

D'autre part, les conditions d'équilibre (19), (20), (21), (22), expriment que l'on a identiquement

$$(17) \text{-----} d\mathcal{E}_e - \int \Theta \mathcal{F} dS = 0.$$

L'égalité (2) devient donc

$$\int \left(\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} - \Theta \right) \mathcal{F} dS = 0.$$

Les quantités $\mathcal{F} dS$ étant absolument arbitraires, on voit que l'on doit avoir, en tous points de la membrane

$$(23) \text{-----} \varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} - \Theta = 0.$$

§IV. Tension superficielle en un point d'une membrane

Interprétons les conditions d'équilibre que nous venons d'obtenir; commençons par examiner les conditions (21) et (22) relatives aux divers points du contour de la membrane.

La condition (22) peut s'écrire

$$(24) \text{-----} T \cos(T, n) = 0$$

et s'énonce ainsi:

Toutes les fois que la force appliquée à un élément du contour de la membrane n'est pas égale à 0, elle est située dans le plan tangent à la membrane en un point de ce contour.

Les égalités (6) et (7) donnent

$$\begin{aligned} \cos(u, x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\sqrt{A}}, & \cos(u, y) &= \frac{\frac{\partial g}{\partial u}}{\sqrt{B}}, & \cos(u, z) &= \frac{\frac{\partial h}{\partial u}}{\sqrt{A}}, \\ \cos(v, x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\sqrt{B}}, & \cos(v, y) &= \frac{\frac{\partial g}{\partial v}}{\sqrt{B}}, & \cos(v, z) &= \frac{\frac{\partial h}{\partial v}}{\sqrt{B}} \end{aligned}$$

Les égalités (21) deviennent alors

$$(25) \text{-----} \left\{ \begin{array}{l} T \cos(T, u) = \Theta \cos(N, u), \\ T \cos(T, v) = \Theta \cos(N, v) \end{array} \right.$$

Ces égalités nous enseignent que la force appliquée à chaque élément du contour de la membrane est normale à cet élément, en même temps qu'elle est située dans le plan tangent à la membrane en un point de cet élément.

Jusqu'ici la lettre T représente une grandeur absolue non affectée de signe; mais désormais, nous regarderons cette grandeur comme positive lorsque la

force à laquelle elle se rapporte sera dirigée comme la demi-droite N , et comme négative dans le cas contraire; la grandeur T ainsi définie sera ce que nous appellerons la tension en un point du contour de la membrane.

Nous aurons alors

$$\cos(T, u) = \cos(N, u),$$

$$\cos(T, v) = \cos(N, v),$$

et les égalités (25) deviendront simplement

$$(26) \dots \dots \dots T = \Theta.$$

La tension en un point du contour de la membrane est égale à la valeur de la quantité Θ au même point.

La valeur de la quantité Θ en un point (u, v) de la membrane se nomme la tension superficielle ou la tension au point (u, v) de la membrane. On peut justifier cette dénomination par les considérations suivantes:

À la surface de la membrane, traçons une ligne l qui, soit seule (fig. 62), soit avec une partie du contour L (fig. 63), délimite une partie A de la membrane. Soit

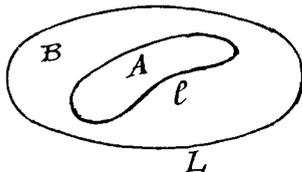


Fig. 62

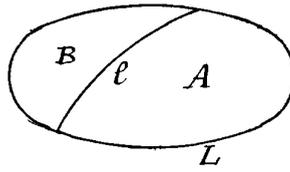


Fig. 63

B , ce qui reste de la membrane lorsqu'on supprime par la pensée la partie A .

Enlevons la partie B de la membrane et conservons la partie A , en gardant toutes les forces appliquées

aux divers éléments de son aire ou de son contour. En général cette partie A ne sera plus en équilibre; mais on voit de suite que l'on en rétablira l'équilibre en appliquant à chaque élément dL de la partie fraîchement coupée du contour une force tangente à la membrane, normale à l'élément dL , dirigée vers l'extérieur de l'aire A , et ayant pour valeur ΘdL .

La grandeur et la direction de la force qu'il convient d'appliquer ainsi à chaque élément de la ligne l pour rétablir l'équilibre de la portion conservée de la membrane, dépend de la grandeur, de la position, de l'orientation de l'élément dL , mais non de la forme de la ligne l à laquelle il appartient: la grandeur de la tension en un point de l'élément dL est indépendante de la direction que cet élément peut affecter autour d'un de ses points; la tension est toujours normale à l'élément auquel elle se rapporte.

Ces théorèmes résultent de l'analyse de Lagrange ⁽¹⁾.

Poisson ⁽²⁾ qui a constamment confondu la théorie des membranes avec la

⁽¹⁾ Lagrange. Mécanique analytique, 1^{re} partie. Section V n^o: 44

⁽²⁾ Poisson Mémoire sur les Surfaces Élastiques, lu à l'Académie le 1^{er} Août 1814, préambule et § 1.

théorie des plaques, a cru que ces théorèmes n'étaient pas exacts en général, que la tension relative à un point d'un élément $d\ell$ n'était pas en général, normal à cet élément, et que sa grandeur et sa direction variaient lorsque l'élément $d\ell$ pivotait autour d'un de ses points. L'auteur par une analyse plus simple a retrouvé les résultats de Poisson.

Des raisonnements analogues à ceux que nous avons donnés en étudiant la pression à l'intérieur des fluides (C. I. p. 73) nous montreront qu'il n'existe qu'une manière d'appliquer des tensions au contour ℓ de manière que l'équilibre de la partie A de la membrane soit rétabli.

La densité superficielle en chaque point d'une membrane en équilibre ne dépend que de la tension au même point; ces deux variables sont liées l'une à l'autre par la relation

$$(23) \quad \varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} - \Theta = 0.$$

Cette relation résolue par rapport à ρ pourra s'écrire

$$(27) \quad \rho = F(\Theta).$$

Soient X, Y, Z , les composantes suivant O_x, O_y, O_z de la force en un point de la membrane; soient F_u, F_v, F_n , les composantes de la même force suivant les trois lignes u, v, n , au même point.

Nous aurons

$$F_u = X \frac{\partial f}{\partial u} + Y \frac{\partial g}{\partial u} + Z \frac{\partial h}{\partial u}$$

$$F_v = X \frac{\partial f}{\partial v} + Y \frac{\partial g}{\partial v} + Z \frac{\partial h}{\partial v},$$

$$F_n = X \cos(n, x) + Y \cos(n, y) + Z \cos(n, z).$$

Les égalités (19) et (20) deviennent donc, en vertu de l'égalité (27)

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{A} F_u = -\frac{1}{F(\Theta)} \frac{\partial \Theta}{\partial u} \\ \sqrt{B} F_v = -\frac{1}{F(\Theta)} \frac{\partial \Theta}{\partial v}, \end{array} \right.$$

$$(29) \quad F_n = \frac{\Theta}{F(\Theta)} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Soit ds un élément linéaire quelconque tracé sur la membrane à partir du point (u, v) ; soit θ la tangente à cet élément. Soit F_θ les composantes de la force F suivant cette tangente. Nous aurons

$$F_\theta = F_u \cos(\theta, u) + F_v \cos(\theta, v).$$

Mais

$$\cos(\theta, u) = \sqrt{A} \frac{du}{ds}, \quad \cos(\theta, v) = \sqrt{B} \frac{dv}{ds}.$$

Tous aurons donc, en vertu de l'égalité (28),

$$F_{\theta} = \frac{1}{F(\Theta)} \left(\frac{\partial \Theta}{\partial u} \frac{du}{d\theta} + \frac{\partial \Theta}{\partial v} \frac{dv}{d\theta} \right),$$

ou bien

$$(30) \text{-----} F_{\theta} = - \frac{1}{F(\Theta)} \frac{d\Theta}{d\theta}$$

Telle est la formule qui donne la composante de la force en un point de la membrane suivant une tangente quelconque à cette membrane.

Cette formule nous donne certains renseignements importants que nous obtiendrons immédiatement en raisonnant comme nous l'avons fait pour les fluides (T. I, pp. 77 et seqq).

La force en un point d'une membrane extensible, homogène, en équilibre est normale à la ligne d'égalité tension qui passe par ce point.

La composante tangentielle de la force est dirigée du côté de cette ligne vers lequel la tension va en diminuant.

La grandeur du produit de la composante tangentielle par la densité de la membrane est, en chaque point, inversement proportionnelle à la distance de deux lignes d'égalité tension infiniment voisines.

L'égalité (29) nous montre que le produit de la composante normale de la force en un point d'une membrane par la densité superficielle est égal au produit de la tension superficielle par le binôme $(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$ auquel, depuis Sophie Germain, on donne le nom de courbure moyenne de la membrane.

SV. Détermination de la forme d'une membrane en équilibre:

Proposons nous, avec Lagrange, de déterminer la cote z de la membrane en fonction des deux coordonnées x et y , qui remplaceront les paramètres u, v , dans la détermination d'un point sur la surface.

Prenons, suivant une notation souvent employée,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Supposons que le côté positif de la membrane soit celui qui regarde les z positifs, nous aurons alors

$$\cos(n, x) = \frac{-p}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos(n, y) = \frac{-q}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\cos(n, z) = \frac{1}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad - \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{(1+q^2)r - 2pq s + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}};$$

et les égalités (20) et (27) donneront

$$(31) \quad Z - pX - qY + \frac{\Theta}{F(\Theta)} \frac{(1+q^2)r - 2pqS + (1+p^2)t}{1+p^2+q^2} = 0$$

Preons sur la membrane un point quelconque. Par ce point menons la direction λ , tangente à la membrane et parallèle au plan ZOX , et la direction μ , tangente à la membrane et parallèle au plan ZOY .

Nous aurons, on le voit aisément,

$$F_\lambda = X \cos(\lambda, x) + Z \cos(\lambda, z),$$

$$F_\mu = Y \cos(\mu, y) + Z \cos(\mu, z),$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \lambda} = \frac{\partial \Theta}{\partial x} \cos(\lambda, x),$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \mu} = \frac{\partial \Theta}{\partial y} \cos(\mu, y).$$

L'égalité (30) donnera donc, en prenant successivement pour la direction θ les deux directions λ et μ ,

$$X + Z \frac{\cos(\lambda, z)}{\cos(\lambda, x)} + \frac{1}{F(\Theta)} \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0$$

$$Y + Z \frac{\cos(\mu, z)}{\cos(\mu, y)} + \frac{1}{F(\Theta)} \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0.$$

Mais on a

$$\cos(\lambda, x) = \frac{dx}{d\lambda}, \quad \cos(\lambda, z) = \frac{\partial z}{\partial \lambda},$$

$$\cos(\mu, y) = \frac{dy}{d\mu}, \quad \cos(\mu, z) = \frac{\partial z}{\partial \mu},$$

d'où, par une démonstration facile,

$$\frac{\cos(\lambda, z)}{\cos(\lambda, x)} = \frac{\partial z}{\partial x} = p,$$

$$\frac{\cos(\mu, z)}{\cos(\mu, y)} = \frac{\partial z}{\partial y} = q.$$

Les égalités précédentes donnent donc :

$$(32) \quad X + pZ + \frac{1}{F(\Theta)} \frac{\partial \Theta}{\partial x} = 0,$$

$$Y + qZ + \frac{1}{F(\Theta)} \frac{\partial \Theta}{\partial y} = 0.$$

Les égalités (31) et (32) ont été données par Lagrange et plus explicitement par Poisson.

Si l'on se donne la nature de la membrane, la fonction $F(\Theta)$ est une fonction connue de la variable Θ , se réduisant à une constante comme si la membrane est inextensible; les trois équations aux dérivées partielles (31) et (32) ne renferment donc que deux fonctions inconnues, Θ et z ; par conséquent, il ne sera pas en général

possible d'y satisfaire. D'où ce beau théorème découvert par Poisson :

Des forces quelconques ne peuvent pas, en général, mettre en équilibre une membrane donnée quelconque.

Il n'en sera plus de même dans le cas où les forces données admettent une fonction potentielle; dans ce cas, les trois équations (31) et (32) seront compatibles entre elles, comme nous l'allons voir, quelle que soit la fonction $F(\Theta)$.

Désignons par $\Phi(\Theta)$ une fonction telle que

$$\frac{1}{F(\Theta)} = \frac{d\Phi(\Theta)}{d\Theta}$$

et soit V la fonction potentielle des forces agissantes; les égalités (32) deviendront

$$\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \Phi(\Theta)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \Phi(\Theta)}{\partial y},$$

ce qui exprime simplement que l'on a, à la surface de la membrane

$$(33) \quad V = \Phi(\Theta) + C,$$

• C étant une constante que les équations aux dérivées partielles du problème ne déterminent pas sans le secours des conditions aux limites.

On peut supposer que l'on résolve cette équation par rapport à Θ , ce qui fera connaître Θ en fonction de x, y, z et de la constante C ; dans l'équation (31) $\frac{\Theta}{F(\Theta)}$ sera alors une quantité connue, et cette équation (31) déterminera la forme de la membrane.

Dans le cas particulier où la membrane est inextensible, $F(\Theta)$ se réduit à une constante ρ ; l'égalité (33) est remplacée par

$$V = \frac{\Theta}{\rho} + C,$$

et l'égalité (31) devient

$$(34) \quad \frac{\partial V}{\partial z} - \rho \frac{\partial V}{\partial x} - q \frac{\partial V}{\partial x} - (V - C) \frac{(1+q^2)r - 2pqS + (1+p^2)t}{1+p^2+q^2} = 0$$

Celle est l'équation aux dérivées partielles du second ordre qui détermine la cote z d'un point de la membrane en fonction des deux coordonnées x et y .

S VI. Membrane qui n'est soumise à aucune force Stabilité de l'équilibre d'une telle membrane.

On ne sait pas en général intégrer l'équation (34), même dans les cas les plus simples. Le seul cas où l'on ait étudié d'une manière approfondie l'équation d'équilibre

des membranes est le cas où les divers éléments superficiels de la membrane ne sont soumis à aucune force ; ce cas, il est vrai, est d'un haut intérêt ; l'examen de ce cas a donné lieu à des découvertes analytiques et géométriques d'une importance capitale, nous allons nous y arrêter quelque temps.

Supposons donc que nous ayons sous les yeux une membrane et que les éléments de cette membrane ne soient soumis à aucune force, nous aurons en tout point de la membrane,

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Les équations (19) nous donneront, en tout point de la membrane,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u} = 0 \quad \frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0 ;$$

la tension aura donc la même valeur en tous les points de la surface ; d'où ce premier Théorème :

Lorsque les divers éléments d'une membrane ne sont soumis à aucune force, la membrane est partout également tendue.

Si l'on a, dans toute l'étendue de la membrane,

$$\Theta = \text{const.}$$

on aura aussi, en vertu de l'égalité (23),

$$\rho = \text{const.}$$

Lorsque les divers éléments d'une membrane extensible et homogène ne sont soumis à aucune force, la densité superficielle de la membrane est la même dans toute son étendue.

L'égalité (26) devient, dans le cas qui nous occupe

$$T = \text{const.}$$

Lorsque les divers éléments superficiels d'une membrane ne sont soumis à aucune force, la tension appliquée aux divers points du contour de la membrane a, en tous ces points, la même valeur.

Enfin l'égalité (20) devient

$$\Theta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 0$$

et se décompose en

$$\Theta = 0$$

ou

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0.$$

Lorsqu'aucune force n'agit sur les divers éléments superficiels d'une membrane et que cette membrane est tendue, sa courbure moyenne est nulle en tout point.

Proposons-nous de déterminer les conditions qui assurent la stabilité de l'équilibre d'une semblable membrane, en nous limitant à l'étude des déplacements

qui n'altère pas son contour.

Si le contour de la membrane est immobile et si ses éléments superficiels ne sont soumis à aucune force, les forces extérieures qui agissent sur la membrane admettent un potentiel, savoir, une constante quelconque, 0 par exemple. Le système admet donc pour potentiel thermodynamique total la quantité

$$F = \int \varphi(\rho) dS$$

Cherchons à quelles conditions cette quantité sera minimum. Nous avons

$$\delta F = \int \left[\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right] \delta dS.$$

Cette quantité doit être égale à 0 d'après les conditions d'équilibre; or les conditions d'équilibre nous apprenant que ρ a la même valeur en tous les points de la membrane, nous pouvons écrire

$$\delta F = \left[\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right] \delta \int dS.$$

On voit donc que les conditions d'équilibre d'une membrane dont les divers éléments superficiels ne sont soumis à aucune force doivent entraîner cette conséquence: l'aire de la membrane éprouve une variation nulle lorsqu'on donne à la membrane un déplacement infiniment petit qui n'en altère pas le contour.

Il n'y a d'exception à ce théorème que si l'on a

$$\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} = 0$$

c'est-à-dire

$$\ominus = 0$$

Dans le cas où la membrane n'est pas tendue, sa forme est quelconque.

Il est aisé de vérifier directement l'exactitude de cette proposition

Nous avons en général

$$(14) \dots \dots \delta dS = \frac{\frac{\partial}{\partial u}(AB) \delta u + \frac{\partial}{\partial v}(AB) \delta v}{2\sqrt{AB}} du dv \\ + \sqrt{AB} \left(\frac{\delta du}{du} + \frac{\delta dv}{dv} \right) du dv \\ + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \sqrt{AB} \delta n du dv$$

et par conséquent

$$\delta \int dS = \int \frac{1}{2AB} \left[\frac{\partial(AB)}{\partial u} \delta u + \frac{\partial(AB)}{\partial v} \delta v \right] \sqrt{AB} du dv \\ + \int \left(\frac{\delta du}{du} + \frac{\delta dv}{dv} \right) \sqrt{AB} du dv \\ + \int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \delta n \sqrt{AB} du dv.$$

En raisonnant comme nous l'avons fait plus haut (p. 83) nous transformons cette égalité en

$$\int \int dS = \int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \int n \sqrt{AB} du dv + \int \left[\cos(N, u) \sqrt{A} du + \cos(N, v) \sqrt{B} dv \right] dL.$$

Si le contour est maintenu immobile, la seconde intégrale disparaît, et l'on trouve simplement

$$\int \int dS = \int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \int n \sqrt{AB} du dv + \int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \int n dS.$$

Dans cette égalité $\int n$ est une quantité variable d'une manière continue quelconque sur la surface de la membrane et s'annulant au bord de cette membrane, cette égalité conduit sans peine au résultat suivant :

Pour qu'un déplacement infiniment petit qui n'altère pas le contour d'une membrane, n'impose à l'aire de cette membrane aucune variation, il faut et il suffit que la courbure moyenne de cette membrane soit nulle en chacun de ses points.

Cette proposition donne la démonstration directe de ce que nous avons indirectement trouvé, à savoir que les conditions d'équilibre de la membrane dont les éléments ne sont soumis à aucune force fournissent l'égalité

(35) $\int \int dS = 0$

pour toutes les déformations qui n'altèrent pas le contour de la membrane

De l'expression de $\int^2 F$, nous déduisons :

$$\int^2 F = \int \left[\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right] \int^2 dS - \int \rho \frac{d^2\varphi(\rho)}{d\rho^2} \int \rho dS.$$

Si l'on observe que ρ a la même valeur en tous points de la membrane, et qu'en outre

(4) $\rho \int dS + dS d\rho = 0$

on voit que l'on a

(36) $\int^2 F = \left[\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right] \int \int^2 dS + \frac{d^2\varphi(\rho)}{d\rho^2} \int (\int \rho)^2 dS$

Nous nous proposons de déterminer les conditions qui sont nécessaires et

suffisante pour que toute déformation qui n'altère pas le contour de la membrane rende cette quantité positive.

Considérons en premier lieu une déformation dans laquelle tous les points de la membrane se déplacent suivant la normale à cette membrane ; l'introduction, dans l'égalité (14) des hypothèses

$$\delta u = 0, \quad \delta v = 0, \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0.$$

donne

$$\int dS = 0,$$

et par conséquent en vertu de l'égalité (4)

$$\int \rho = 0.$$

L'égalité (36) se réduit donc, pour ces déplacements particuliers à

$$(37) \quad \int \delta^2 \mathcal{F} = \left(\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right) \int \delta^2 dS.$$

Or, nous démontrerons Chapitre IX § VII, la proposition suivante :

On peut toujours, autour d'un point M appartenant à une surface dont la courbure moyenne est nulle, tracer un domaine D assez petit pour que l'aire de ce domaine D soit plus petite que l'aire de toute surface infiniment voisine passant par le contour λ du domaine D .

Considérons donc, sur la membrane, un point quelconque M ; autour de ce point, traçons un domaine D jouissant de la propriété que nous venons d'indiquer ; soit D' le reste de la membrane ; aux divers points du domaine D donnons un déplacement, normal à la membrane et se réduisant à 0 pour les points qui forment la limite λ du domaine D ; aux divers points du domaine D' , ne donnons aucun déplacement. Nous aurons, d'après ce que nous venons de dire,

$$\int_D \delta^2 dS > 0.$$

Nous aurons d'ailleurs, évidemment

$$\int_{D'} \delta^2 dS = 0.$$

Nous aurons donc pour toute la membrane

$$\int \delta^2 dS > 0.$$

Dès lors, pour qu'une telle déformation rende $\int \delta^2 \mathcal{F}$ positif, il faudra, d'après l'égalité (37), que l'on ait :

$$(38) \quad \left(\varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} \right) > 0.$$

Ce premier résultat obtenu, on voit que si l'on veut que $\delta^2 F$ soit positif dans toute déformation où chaque point de la membrane se déplace normalement à la membrane, l'égalité (37) exige que l'on ait, pour tous déplacements de ce genre

$$\int \delta^2 dS > 0.$$

Cette inégalité peut encore s'écrire

$$\delta^2 \int dS > 0.$$

Mais sous cette forme, on voit que si elle a lieu pour toutes les déformations qui laissent invariables le contour de la membrane et qui déplacent chacun de ses points suivant sa normale, elle a lieu pour toutes les déformations qui laissent son contour invariable et déplacent chacun de ses points d'une manière quelconque.

Donnons en effet aux divers points d'une membrane des déplacements quelconques qui n'altèrent pas son contour; il en résulte, pour la surface que dessine cette membrane, une certaine déformation, et pour la variation seconde de l'aire de cette surface une certaine valeur; on peut évidemment donner aux divers points de la membrane des déplacements dirigés exclusivement suivant la normale à la membrane, qui imposeront la même déformation à la surface que dessine la membrane et donneront la même variation seconde à l'aire de cette surface.

Nous trouvons donc ainsi cette seconde condition nécessaire pour que $\delta^2 F$ soit toujours positif; dans toute déformation qui n'altère pas le contour de la membrane, nous devons avoir

$$(39) \text{ ----- } \int \delta^2 dS > 0.$$

Revenons maintenant à l'égalité (36). Donnons aux divers points de la membrane des déplacements dirigés à la surface de la membrane et n'altérons pas le contour de la membrane.

La forme de la membrane ne variera pas, en sorte que nous aurons

$$\int \delta^2 dS = 0.$$

D'autre part, nous aurons

$$\int (\delta\rho)^2 dS > 0.$$

Dès lors, pour que $\delta^2 F$ soit positif, nous devons avoir

$$(40) \text{ ----- } \frac{\partial^2 \varphi(\rho)}{\partial \rho^2} > 0.$$

Pour que $\delta^2 F$ soit positif dans tous déplacements de la membrane, il

faut que les inégalités (38) (39) et (40) soient vérifiées ; d'ailleurs, il est évident que ces conditions nécessaires sont en même temps suffisantes ; elles représentent donc les conditions de stabilité d'une membrane dont les éléments superficiels ne sont soumis à aucune force et dont le contour est supposé fixe.

Interprétons ces conditions :

Les conditions

$$(35) \quad \int S dS = 0,$$

$$(39) \quad \int S^2 dS > 0,$$

signifient que parmi toutes les surfaces aboutissant au même contour, la surface qui dessine la membrane est une surface d'aire minima.

La condition

$$(38) \quad \varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho} > 0$$

devient en vertu de l'égalité (23).

$$\Theta > 0.$$

La tension de la membrane est positive.

L'égalité (23) donne

$$\rho \frac{d^2\varphi(\rho)}{d\rho^2} d\rho + d\Theta = 0,$$

en sorte que la condition (40) devient

$$\frac{d\rho}{d\Theta} < 0.$$

La densité superficielle de la membrane diminue lorsque la tension augmente inversement.

Nous pouvons répéter ici une remarque déjà faite en étudiant l'équilibre des fils ; c'est comme condition de stabilité que nous trouvons le signe que doit avoir la tension ; au contraire, dans l'étude des fluides, c'est comme condition d'équilibre que nous avons trouvé le signe de la pression.

Nous avons supposé que les modifications virtuelles de la membrane n'y pouvaient amener aucune solution de continuité ; que la membrane était indécomposable ; dès lors toutes les modifications virtuelles de la membrane étant renversables, les conditions d'équilibre ne pouvaient contenir aucune inégalité telle que celle-ci

$$\Theta > 0.$$

Si nous supposons pour les membranes, comme nous l'avons supposé pour les fluides, qu'une modification virtuelle pût y entraîner une solution de continuité, nous trouverions bien, au nombre des conditions d'équilibre, une inégalité nous donnant le signe de la tension, mais cette inégalité serait précisément de sens

contraire à la précédente ; ce serait l'inégalité
 $\Theta < 0$.

On serait donc amené à une contradiction dans le développement de la théorie actuelle des membranes, si, au lieu de mettre le caractère d'être indéchirable au nombre des propositions qui servent à définir la membrane, on cherchait à le retrouver parmi les conséquences de la théorie. Si l'on voulait donner une théorie des membranes où la possibilité des déchirures fût admise, il faudrait modifier la théorie précédente ; admettre, par exemple, que pour définir un élément superficiel de la membrane, il faut connaître la position et l'état des divers éléments qui l'entourent.

Chapitre VI.

Les surfaces à courbure moyenne nulle et les surfaces d'aire minima.

§. I. Intégration, par Monge, de l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure moyenne nulle.

Nous avons vu qu'une membrane dont les divers éléments ne sont soumis à aucune force ne pouvait être en équilibre que lorsque sa courbure moyenne était égale à 0 en tous points ; que, de plus, cet équilibre ne pouvait être stable si la membrane ne dessinait une surface d'aire minima parmi toutes celles qui aboutissent au même contour. Nous sommes donc amenés à étudier les surfaces à courbure moyenne nulle et les surfaces d'aire minima.

Ces surfaces sont peut-être, parmi toutes celles que les géomètres ont étudiées, celles qui forment la catégorie la plus intéressante ; elles ont fait l'objet de travaux extrêmement nombreux et importants. Les principaux résultats auxquels ces travaux ont conduit sont coordonnés au Tome I des Leçons sur la Géométrie des surfaces de M. G. Darboux. Nous renverrons à cet ouvrage pour l'étude détaillée de la question et nous nous contenterons d'analyser très succinctement ici les problèmes qui ont un intérêt direct pour l'étude de l'équilibre des membranes.

Parmi toutes les surfaces qui passent par un contour donné, celles-là

seules peuvent être d'aire minima dans l'aire n'éprouve aucune variation par une déformation infiniment petite qui n'altère pas le contour; or ces surfaces dont l'aire a une variation première égale à 0, nous l'avons vu, celles en tous points desquelles on a

$$(1) \dots\dots\dots \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0.$$

Ainsi, les surfaces d'aire minima sont forcément des surfaces à courbure moyenne nulle, sans que d'ailleurs la réciproque de cette proposition soit nécessairement exacte.

L'équation (1) est une équation aux dérivées partielles qui peut s'écrire, en vertu des notations usuelles rappelées au chapitre précédent,

$$\frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

ou bien

$$(2) \dots\dots\dots \frac{\partial}{\partial x} \frac{p}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Dès 1760, Lagrange avait donné cette équation (2) pour exprimer que l'aire d'une surface passant par un contour donnée a une variation première égale à 0. La signification géométrique de cette équation, donnée par l'égalité (1), a été donnée en 1776 par Meunier. On trouvera dans l'ouvrage déjà cité de M. Darboux l'histoire détaillée de cette découverte.

L'étude analytique à laquelle on est conduit par l'examen des membranes dans les éléments soumis soustraits à l'action de toute force peut être partagée de la manière suivante en quatre problèmes distincts :

1° Intégrer d'une manière générale l'équation aux dérivées partielles des surfaces à courbure moyenne nulle, de manière à obtenir des formules qui représentent toutes ces surfaces.

2° Parmi toutes ces surfaces, déterminer toutes celles qui sont réelles.

3° Déterminer les fonctions arbitraires qui figurent dans les formules dont nous venons de parler de manière que la surface représentée par ces formules soit formée d'une seule nappe analytique passant par un contour donné; cette opération fera connaître toutes les surfaces analytiques réelles, à courbure moyenne nulle, passant par ce contour.

4° Parmi les surfaces analytiques réelles, à courbure moyenne nulle, passant par ce contour, distinguer celle dont l'aire est un minimum.

L'étude de ces quatre problèmes intéresse non seulement la théorie des membranes, mais encore la science de la Capillarité; on démontre en effet dans cette science que les lames très minces que l'on obtient en plongeant un contour solide dans un liquide tel que le liquide glycérique de Plateau, prennent la

forme d'une surface d'aire minima passant par ce contour

Nous allons examiner rapidement par quelle voie l'analyse peut aborder ces quatre problèmes :

L'équation (1) peut s'énoncer ainsi :

L'indicatrice de la surface est, en tout point, une hyperbole équilatère.

De là on déduit une autre conséquence qui conduit à l'intégration de l'équation (2).

On sait que, dans une courbe du second ordre, les deux droites isotropes ne peuvent former un système de diamètres conjugués que si la courbe est une hyperbole équilatère. Donc pour exprimer que l'indicatrice est une hyperbole équilatère, il suffira d'exprimer qu'elle admet des lignes isotropes comme diamètres conjugués.

Exacons, sur une surface, deux systèmes de lignes; supposons que, par chaque point, il passe une ligne de chaque système; que les deux lignes qui passent ainsi par un même point de la surface aient pour tangentes en ce point deux diamètres conjugués de l'indicatrice; l'ensemble de ces deux systèmes de lignes forme, sur la surface, un réseau conjugué.

D'autre part, si l'on trace sur la surface une ligne ayant pour tangente en chaque point une génératrice du cône isotrope, on obtient ce qu'on nomme une ligne de longueur nulle tracée sur la surface.

On voit donc que la propriété suivante caractérise, à l'exclusion de toute autre classe de surfaces, les surfaces à courbure moyenne nulle :

Les deux familles de lignes de longueur nulle tracées sur la surface forment un réseau conjugué.

Si donc on trouve sous forme finie l'équation générale des surfaces qui jouissent de cette propriété, on aura obtenu l'équation générale des surfaces à courbure moyenne nulle et, par conséquent, on aura intégré l'équation aux dérivées partielles (2).

Supposons la position d'un point sur une surface déterminée par deux paramètres u et v , sans supposer d'ailleurs, comme au chapitre précédent que les deux familles de lignes

$$u = \text{const.}$$

$$v = \text{const.}$$

se coupent à angle droit.

On démontre (Darboux. T. 1 p. 102) que la condition nécessaire et suffisante pour que, sur une surface, les deux familles de lignes dessinées par les équations

$$u = \text{const.}$$

$$v = \text{const.}$$

forment un réseau conjugué est que les trois coordonnées x, y, z , d'un

point de la surface vérifient une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} + U \frac{\partial \theta}{\partial u} + V \frac{\partial \theta}{\partial v} = 0,$$

U et V étant deux fonctions de u et de v qui sont les mêmes pour les trois coordonnées. En d'autres termes on doit avoir

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + U \frac{\partial x}{\partial u} + V \frac{\partial x}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + U \frac{\partial y}{\partial u} + V \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + U \frac{\partial z}{\partial u} + V \frac{\partial z}{\partial v} = 0. \end{array} \right.$$

Si nous exprimons que les lignes

$$u = \text{const.}$$

$$v = \text{const.}$$

sont des lignes de longueur nulle, nous aurons exprimé la condition nécessaire et suffisante pour que la surface soit une surface à courbure moyenne nulle.

Or, si ds représente l'élément d'arc d'une courbe tracée sur la surface, on a

$$ds^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \right)^2.$$

Exprimons que les deux hypothèses $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ fournissent chacune une valeur nulle de ds^2 et nous trouvons

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 = 0 \\ \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 = 0 \end{array} \right.$$

Les formules (3) expriment que les lignes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ forment un réseau conjugué sur la surface dont (x, y, z) est un point; les formules (4) expriment que les mêmes lignes sont, sur cette surface, lignes de longueur nulle; l'ensemble des formules (3) et (4) définit donc les surfaces à courbure moyenne nulle.

Si l'on différentie la première des équations (4) par rapport à v , la seconde par rapport à u , et si l'on remplace les dérivées secondes par leurs valeurs tirées des équations (3) on trouve les équations :

$$U \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0$$

$$V \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \right) = 0$$

Si l'on avait, en tout point de la surface, non seulement les égalités (4)

mais encore l'égalité'

$$\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

la quantité ds^2 serait égale à 0 pour toute ligne tracée sur la surface, qui se réduirait à une sphère évanouissante. Si nous laissons de côté ce cas, nous voyons que nos égalités (3) et (4) exigent que l'on ait

$$U = 0, \quad V = 0$$

et les équations (3) se réduisent à

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0.$$

Ces égalités s'intègrent immédiatement et nous donnent

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = f_1(u) + \varphi_1(v), \\ y = f_2(u) + \varphi_2(v), \\ z = f_3(u) + \varphi_3(v). \end{array} \right.$$

Ces expressions de x, y, z , vérifient évidemment les équations (3).

Pour que les équations (4) soient aussi vérifiées, il faut et il suffit que l'on ait

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{df_1(u)}{du} \right)^2 + \left(\frac{df_2(u)}{du} \right)^2 + \left(\frac{df_3(u)}{du} \right)^2 = 0 \\ \left(\frac{d\varphi_1(v)}{dv} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi_2(v)}{dv} \right)^2 + \left(\frac{d\varphi_3(v)}{dv} \right)^2 = 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, si l'on prend trois fonctions de la variable imaginaire u , liées par la première des égalités (6) et trois fonctions de la variable imaginaire v , liées par la seconde des égalités (6), les égalités (5) représentent une surface à courbure moyenne nulle rapportée à ses lignes de longueur nulle et réciproquement toute surface à courbure moyenne nulle peut être obtenue de la sorte.

§ II. Formules de M. Weierstrass.

Surfaces réelles à courbure moyenne nulle

Le résultat précédent est dû à Monge; il fournit presque immédiatement l'intégrale générale des surfaces à courbure moyenne nulle. Pour obtenir cette intégrale, au lieu de suivre la voie donnée par Monge, nous suivrons la voie indiquée ultérieurement par M. Weierstrass.

Posons :

$$\frac{f_1'(u) + f_2'(u)}{-f_3'(u)} = \alpha,$$

$$\frac{\varphi_1'(v) + \varphi_2'(v)}{-\varphi_3'(v)} = \beta.$$

Au lieu d'employer les paramètres u et v pour définir la position d'un point sur la surface, nous pourrions employer les paramètres α, β qui sont respectivement des fonctions de u et de v .

L'hypothèse $u = \text{const.}$, entraîne $\alpha = \text{const.}$;

L'hypothèse $v = \text{const.}$, entraîne $\beta = \text{const.}$

Donc, dans notre nouveau système, les lignes de longueur nulle sont représentées par les équations

$$\alpha = \text{const.} \quad \beta = \text{const.}$$

la surface est encore rapportée à ses lignes de longueur nulle.

La première des équations (6) nous donnera

$$f_1'(u) - i f_2'(u) = \frac{f_3'(u)}{\alpha};$$

Par suite, on a

$$\frac{f_1'(u)}{1 - \alpha^2} = \frac{f_2'(u)}{i(1 + \alpha^2)} = \frac{f_3'(u)}{2\alpha};$$

α étant une fonction de u , nous pouvons représenter la valeur commune des rapports précédents par

$$\frac{1}{2} \mathcal{F}(\alpha) \frac{d\alpha}{du}$$

et nous aurons

$$f_1(u) = \frac{1}{2} \int (1 - \alpha^2) \mathcal{F}(\alpha) d\alpha,$$

$$f_2(u) = \frac{i}{2} \int (1 + \alpha^2) \mathcal{F}(\alpha) d\alpha,$$

$$f_3(u) = \int \alpha \mathcal{F}(\alpha) d\alpha.$$

On trouverait de même que l'on peut poser

$$\varphi_1(v) = \frac{1}{2} \int (1 - \beta^2) \mathcal{F}_1(\beta) d\beta,$$

$$\varphi_2(v) = -\frac{i}{2} \int (1 + \beta^2) \mathcal{F}_1(\beta) d\beta,$$

$$\varphi_3(v) = \int \beta \mathcal{F}_1(\beta) d\beta$$

On arrive donc ainsi à la conclusion suivante :

Pour avoir l'équation générale des surfaces à courbure moyenne nulle

rapportées à leurs lignes de longueur nulle, on prend une fonction quelconque $F(\alpha)$ de la variable complexe α et une fonction quelconque $F_1(\beta)$ de la variable complexe β , et l'on écrit les formules suivantes :

$$(7) \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \int (1 - \alpha^2) F(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int (1 - \beta^2) F_1(\beta) d\beta, \\ y = \frac{i}{2} \int (1 + \alpha^2) F(\alpha) d\alpha - \frac{i}{2} \int (1 + \beta^2) F_1(\beta) d\beta, \\ z = \int \alpha F(\alpha) d\alpha + \int \beta F_1(\beta) d\beta. \end{array} \right.$$

Telles sont les formules données par M. Weierstrass.

On peut donner à ces égalités une autre forme entièrement débarrassée de tout signe d'intégration ; il suffit en effet, de poser

$$F(\alpha) = \frac{d^3 g(\alpha)}{d\alpha^3},$$

$$F_1(\beta) = \frac{d^3 g_1(\beta)}{d\beta^3},$$

pour obtenir les formules

$$(8) \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1 - \alpha^2}{2} g''(\alpha) + \alpha g'(\alpha) - g(\alpha) \\ \quad + \frac{1 + \beta^2}{2} g''_1(\beta) + \beta g'_1(\beta) - g_1(\beta), \\ y = i \frac{1 + \alpha^2}{2} g''(\alpha) - i \alpha g'(\alpha) + i g(\alpha) \\ \quad - i \frac{1 + \beta^2}{2} g''_1(\beta) + i \beta g'_1(\beta) - i g_1(\beta), \\ z = \alpha g''(\alpha) - g'(\alpha) + \beta g''_1(\beta) - g'_1(\beta) \end{array} \right.$$

qui sont dues également à M. Weierstrass.

Ces formules conduisent bien aisément à la solution du problème qui occupe le deuxième rang parmi ceux que nous avons énoncés : Trouver toutes les surfaces à courbure moyenne nulle qui présentent des nappes réelles.

Il est évident que si les deux fonctions F et F_1 sont deux expressions complexes conjuguées l'une de l'autre et que si, dans une même formule les deux intégrations qui portent l'une sur α , l'autre sur β , sont effectuées le long de deux chemins imaginaires conjugués, les formules (7) donneront pour x, y, z des valeurs réelles, en sorte que les conditions que nous venons d'indiquer suffisent pour définir les nappes réelles d'une surface à courbure moyenne nulle. On peut prouver qu'elles sont en même temps nécessaires (Darboux *Œ.* t. I. p. 232)

Si ces conditions sont remplies les formules (7) sont susceptibles d'être mises sous une forme différente avec M. Weierstrass désignant par le

Œub. T. II. N° 14.

symbole

$$\mathcal{R}\{\alpha\}$$

la partie réelle de la variable complexe α et nous aurons, en place des formules (7)

$$(9) \text{-----} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \mathcal{R} \left[\int (1-\alpha^2) F(\alpha) d\alpha \right], \\ y = \mathcal{R} \left[\frac{i}{2} \int (1+\alpha^2) F(\alpha) d\alpha \right], \\ z = \mathcal{R} \left[\int \alpha F(\alpha) d\alpha \right] \end{array} \right.$$

Ces formules (9) représentent toute nappe réelle qui appartient à une surface à courbure moyenne nulle.

Si l'on pose

$$F(\alpha) = \frac{d^3 g(\alpha)}{d\alpha^3}$$

ces formules deviendront

$$(10) \text{-----} \left\{ \begin{array}{l} x = \mathcal{R} \left[\frac{1-\alpha^2}{2} g''(\alpha) + \alpha g'(\alpha) - g(\alpha) \right], \\ y = \mathcal{R} \left[i \frac{1+\alpha^2}{2} g''(\alpha) - i \alpha g'(\alpha) + i g(\alpha) \right], \\ z = \mathcal{R} \left[\alpha g''(\alpha) - g'(\alpha) \right]. \end{array} \right.$$

Les formules précédentes mettent en évidence ce fait capital :

À toute fonction de variable complexe correspond une surface réelle à courbure moyenne nulle.

Cette proposition établit le lien le plus étroit entre la théorie des fonctions de variables complexes et la théorie des surfaces à courbure moyenne nulle.

Si dans les formules (9) on pose

$$F(\alpha) = \frac{ae^{ib}}{\alpha^2}$$

a et b étant deux constantes réelles, on obtient une famille de surfaces à courbure moyenne nulle étudiée par M. Scherk. Parmi ces surfaces, il en existe deux qui sont particulièrement remarquables.

L'une correspond au cas où l'on fait $b=0$; c'est l'alysséide, obtenue par la révolution d'une chaînette autour de sa base. C'est la seule surface à courbure moyenne nulle qui soit de révolution.

L'autre correspond au cas où l'on fait $b = \frac{\pi}{2}$; c'est l'hélicoïde gauche à plan directeur. C'est la seule surface à courbure moyenne nulle qui soit réglée.

On voit que l'on peut passer de l'une de ces surfaces à l'autre par une série continue de surfaces à courbure moyenne nulle. Ces diverses

surfaces possèdent, en outre la propriété d'être toutes applicables les unes sur les autres. Ainsi l'alysoïde est applicable sur l'hélicoïde gauche et inversement. L'alysoïde et l'hélicoïde gauche à plan directeur sont, après le plan, les deux premières surfaces à courbure moyenne nulle qui aient été connues; elles ont été découvertes par Meusnier en 1785. L'expérience les réalise aisément.

§. III. Surfaces à courbure moyenne nulle passant par un contour donné.

Le troisième problème que nous ayons à résoudre consiste à déterminer la forme de la fonction de variable complexe qui entre dans les formules par lesquelles M. Weierstrass détermine toute surface réelle à courbure moyenne nulle, et cela de telle façon que les formules de M. Weierstrass fournissent une surface analytique passant par un contour donné d'avance.

La mise en équation de ce problème dans les cas où l'on peut l'effectuer, suppose la connaissance de quelques propositions que nous nous contenterons d'énoncer ici, en renvoyant, pour leur démonstration, au Traité de M. G. Darboux.

Étant données deux surfaces S et S' supposons qu'à tout point M de la surface S on fasse correspondre, suivant une certaine loi, un point M' de la surface S' . Si le point M se déplace sur la surface S de manière à décrire une certaine courbe C , le point M' se déplace sur la surface S' de manière à décrire une certaine courbe C' qui est la représentation de la courbe C .

Soient C et C_1 deux courbes quelconques de la surface S ; soient C' et C'_1 les représentations de ces deux courbes sur les surfaces S' . Si, quelles que soient les deux courbes C et C_1 , l'angle sous lequel elles se coupent est égal à l'angle sous lequel se coupent leurs représentations C' et C'_1 , on dit que la loi de correspondance étudiée constitue un tracé géographique ou une représentation conforme de la surface S sur la surface S' . Ainsi la projection stéréographique constitue un tracé géographique de la sphère sur le plan.

Étant donnée une surface S , prenons un point M sur cette surface, le plan tangent P à la surface S au point M et la normale N menée au plan P par le point fixe O . La normale N rencontre en un point M' une sphère de rayon R ayant pour centre le point O . Le point M' est ce qu'on nomme la représentation sphérique du point M .

On doit à M. Ossian Bonnet la démonstration de ce théorème remarquable:

La représentation sphérique d'une surface à courbure moyenne nulle

constitue un tracé géographique de cette surface sur la sphère; la sphère et les surfaces à courbure moyenne nulle jouissent seules de cette propriété.

Soit M un point d'une surface à courbure moyenne nulle, soit M' sa représentation sphérique. Si le point M est réel, il correspond à des valeurs imaginaires conjuguées des paramètres α, β , en sorte que, pour le déterminer, il suffit de connaître α .

Or il est aisé de déduire des formules (7) que les coordonnées de la représentation sphérique sont entre elles comme

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \left[(1+\alpha^2)\beta + (1+\beta^2)\alpha \right], \\ & \frac{1}{2} \left[\alpha(1-\beta^2) - \beta(1-\alpha^2) \right], \\ & \frac{i}{2} \left[(1-\beta^2)(1+\alpha^2) - (1-\alpha^2)(1+\beta^2) \right], \end{aligned}$$

ou bien, en posant

$$\alpha = X + iY, \quad \beta = X - iY,$$

comme

$$\begin{aligned} & X(1+X^2+Y^2), \\ & Y(1+X^2+Y^2), \\ & 4XY \end{aligned}$$

Ainsi pour connaître la représentation sphérique, sur une sphère donnée, d'un point réel M d'une surface à courbure moyenne nulle, il suffit de connaître la valeur de α à laquelle correspond ce point M , sans avoir besoin de connaître la fonction $F(\alpha)$ qui définit la surface. Inversement, connaissant la représentation sphérique du point M sur une sphère donnée, on peut déterminer les quantités X, Y , et par conséquent, la valeur de α à laquelle correspond ce point.

Riemann a montré que l'on pouvait obtenir aussi un tracé géographique d'une surface à courbure moyenne nulle sur un plan.

Soit M un point réel d'une surface à courbure moyenne nulle. Ce point correspond à une valeur déterminée de la variable complexe α . Formons la quantité complexe

$$\sigma = \int \sqrt{2 F(\alpha)} d\alpha$$

et prenons cette quantité variable pour affixe d'un point μ dans le plan XOY . Nous obtiendrons sur le plan une représentation de la surface à courbure moyenne nulle. Riemann a montré que cette représentation est une représentation conforme. Ce tracé présente deux propriétés qui jouent un rôle fondamental dans la solution du problème que nous allons examiner

1° Les deux familles de lignes de courbure sont représentées par des parallèles aux axes de coordonnées.

2° Les deux familles de lignes asymptotiques sont représentées par des parallèles aux bissectrices des axes de coordonnées.

Ces principes posés, arrivons maintenant au problème qui nous occupe.

Déterminer les surfaces analytiques à courbure moyenne nulle qui passent par un contour donné.

L'analyse moderne ne possède aucune méthode propre à résoudre ni même à mettre en équation ce problème pris sous sa forme générale. Mais les principes que nous venons d'exposer permettent de transformer le problème et parfois de le résoudre, dans le cas particulier où la surface à courbure moyenne nulle est limitée par des droites par lesquelles elle passe et par des plans qu'elle est assujéti à rencontrer normalement. Cette dernière condition n'a pas d'application à la théorie des membranes, mais elle a son application dans la théorie des lames de liquide glycérique; lorsqu'une lame de liquide glycérique rencontre un plan de verre, elle le rencontre normalement.

C'est à Riemann et M. Weierstrass et à M. Schwarz, que l'on doit la méthode dont nous allons indiquer la marche générale.

Supposons que nous ayons trouvé une surface à courbure moyenne nulle soumise aux conditions aux limites données.

Étudions la représentation sphérique de cette surface.

Si un plan P coupe normalement notre surface suivant une ligne C la représentation sphérique de la ligne C , sera évidemment un arc de grand cercle C' dont le plan sera parallèle au plan P .

Si une droite D doit être située sur la surface, il est facile de voir que la représentation sphérique de la droite D sera un arc de grand cercle D' dont le plan sera normal à la droite D .

D'où cette première conséquence :

La représentation sphérique du contour de la surface à courbure moyenne nulle est un polygone sphérique, limité par des arcs de grand cercle, qui peut être déterminé lorsqu'on connaît les droites qui encadrent la surface cherchée et les plans sur lesquels elle s'appuie sans avoir besoin de connaître cette surface elle-même.

Étudions maintenant la représentation plane de la surface donnée par le procédé de Riemann.

On connaît ces deux théorèmes :

Si un plan coupe normalement une surface, leur intersection est une ligne de courbure de la surface.

Si une droite est contenue dans une surface elle est ligne asymptotique de cette surface.

Nous voyons alors que la ligne C le long de laquelle le plan P coupe

normalement la surface à courbure moyenne nulle cherchée aura pour représentation une ligne γ parallèle soit à Ox , soit à Oy .

La ligne droite D qui fait partie du cadre sur laquelle la surface est tendue aura pour représentation une droite d parallèle à l'une ou à l'autre des bissectrices des axes Ox, Oy .

Chacune des parties du contour est donc représentée sur le plan par une droite; la position de cette droite n'est pas connue. lorsqu'on ne connaît pas la surface à courbure moyenne nulle; mais pour la direction de cette droite, on ne peut hésiter qu'entre deux directions rectangulaires qui sont connues sans que l'on ait à connaître la surface à courbure moyenne nulle.

Nous sommes maintenant en possession de deux propositions sur lesquelles repose la solution de notre problème.

Lorsque, dans un polygone, on connaît la direction des côtés et l'ordre dans lequel ils se succèdent, sans connaître leur position, nous disons que l'on a un polygone cristallographique. Un polygone cristallographique correspond à une infinité de polygones géométriques. Lorsqu'on connaît un polygone cristallographique, on déterminera un des polygones géométriques qui lui correspondent en donnant les distances p, q, r, \dots des côtés à l'origine des coordonnées.

Si nous désignons par \mathcal{P} le polygone cristallographique, $\mathcal{P}(p, q, r, \dots)$ représentera le polygone géométrique ainsi déterminé.

Si les droites γ, d, \dots avaient des directions parfaitement connues, elles formeraient un polygone géométrique inconnu $\mathcal{P}(p, q, r, \dots)$ correspondant à un polygone cristallographique connu \mathcal{P} .

Comme, pour chacune de ces droites, on peut hésiter entre deux directions rectangulaires, on voit que le contour de la surface cherchée est représentée sur le plan par un polygone géométrique inconnu $\mathcal{P}(p, q, r, \dots)$ qui est l'un des polygones géométriques correspondant à un groupe de polygones cristallographiques connus $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_n$.

La représentation sphérique, entièrement connue, du contour de la surface cherchée, sépare la sphère en deux aires sphériques A, A' ; prenons une de ces aires sphériques, l'aire A par exemple et un polygone géométrique plan $\mathcal{P}_1(p, q, r, \dots)$ correspondant à l'un de nos polygones cristallographiques \mathcal{P}_1 , par exemple.

Supposons que nous ayons trouvé un tracé géométrique faisant correspondre tout point M' de l'aire A à un point μ du polygone $\mathcal{P}_1(p, q, r, \dots)$

Formons une quantité

$$\mathcal{L} = X + iY$$

déterminée par cette condition que les trois coordonnées du point M' soient

respectivement proportionnelles à

$$\begin{aligned} X(1+X^2+Y^2), \\ Y(1+X^2+Y^2), \\ 4XY. \end{aligned}$$

Soit ensuite σ l'affixe du point μ ; σ est fonction des coordonnées du point M' en partant de α ; cette quantité dépend aussi des paramètres p, q, r, \dots qui définissent le contour de la représentation plane.

Posons

$$F_1(\alpha, p, q, r, \dots) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \right)^2$$

Posons

$$(g^{bis}) \left\{ \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \mathcal{R} \left\{ \int (1-\alpha^2) F_1(\alpha, p, q, r, \dots) d\alpha \right\}, \\ y &= \mathcal{R} \left\{ \frac{i}{2} \int (1+\alpha^2) F_1(\alpha, p, q, r, \dots) d\alpha \right\}, \\ z &= \mathcal{R} \left\{ \int \alpha F_1(\alpha, p, q, r, \dots) d\alpha \right\}, \end{aligned} \right.$$

Ces formules représenteront les coordonnées d'un point réel M appartenant à une surface à courbure moyenne nulle; en donnant à p, q, r, \dots toutes les valeurs possibles; en considérant successivement, au lieu du polygone P_1 , les polygones P_2, \dots, P_n ; au lieu de l'aire A , l'aire A' ; nous obtiendrons une infinité de surfaces à courbure moyenne nulle. Toutes les surfaces cherchées se trouvent assurément parmi elles.

Comment, dans cette infinité de surfaces, choisira-t-on celles qui répondent au problème?

Considérons une des surfaces que nous venons d'obtenir, par exemple la surface représentée par les formules (g^{bis}).

Il existe une partie Γ du contour de cette surface qui a pour représentation sphérique l'arc de grand cercle C et qui est représentée sur le plan suivant la méthode de Riemann par une parallèle γ à l'un des axes de coordonnées.

Ce second caractère nous montre que cette partie Γ du contour est une ligne de courbure de la surface. D'autre part, pour qu'une ligne de courbure de la surface ait pour représentation sphérique un arc de grand cercle C' , il faut évidemment qu'elle soit plane et que son plan Π soit parallèle au plan du cercle C' , c'est-à-dire au plan P .

Il existe une partie Δ du contour de la surface qui a pour représentation sphérique un arc de grand cercle D' et pour représentation plane selon la méthode de Riemann une droite D parallèle à l'une des bissectrices du système Ox, Oy . Ce dernier caractère nous enseigne que la ligne Δ est une ligne asymptotique de la surface. Pour que la représentation sphérique d'une ligne asymptotique Δ

sou un arc de grand cercle D' , il faut que la ligne Δ soit une ligne droite normale au plan du cercle D' , et, par conséquent, parallèle à la droite D .

Donc toutes les surfaces déterminées par les procédés que nous venons d'indiquer rencontrent normalement les plans donnés P ou des plans Π parallèles à ceux-là, et passent par les droites données D ou par des droites Δ , parallèles à celles-là.

Les surfaces déterminées par les procédés que nous venons d'indiquer se rangent en un certain nombre de familles; les diverses surfaces d'une même famille ne diffèrent les unes des autres que par les valeurs des paramètres p, q, r, \dots . On aura, dans chaque famille, à déterminer les valeurs de ces paramètres p, q, r, \dots de telle manière que les plans Π , parallèles aux plans P , que la surface rencontre normalement, viennent coïncider avec les plans P eux-mêmes; que les droites Δ , parallèles aux droites D , que la surface rencontre, viennent coïncider avec les droites D elles-mêmes.

Ainsi le problème est en définitive ramené à cette autre question d'analyse.

Trouver un tracé géographique d'une aire sphérique limitée par des arcs de grand cercle sur une aire plane limitée par des parallèles aux axes de coordonnées ou à leurs bissectrices.

Par une projection stéréographique, on peut toujours, d'une aire sphérique limitée par des arcs de grand cercle, donner sur le plan une représentation conforme limitée par des arcs de cercle. On peut donc ramener le problème précédent à celui-ci :

Trouver une représentation conforme d'une aire plane limitée par des arcs de cercle sur une aire plane limitée par des parallèles aux axes de coordonnées et à leurs bissectrices.

Ce problème, intimement lié à la théorie des fonctions de variables complexes, a fait l'objet des travaux de Riemann, de M. Schwarz et d'autres géomètres. On sait le résoudre d'une manière générale; Mais on en a, dans certains cas particuliers seulement, des solutions assez simples pour qu'on puisse les appliquer à la détermination des surfaces à courbure moyenne nulle passant par un contour donné formé de droites et de plans.

Ainsi Riemann et M. Schwarz ont appliqué la méthode que nous venons d'indiquer à la recherche de la surface à courbure moyenne nulle qui passe par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche quelconque.

Ils ont ramené la question à l'intégration d'une équation différentielle linéaire du second ordre. Cette équation a une forme très remarquable qui la rapproche de l'équation de Lamé. Riemann est parvenu à l'intégrer dans le cas particulier où les quatre côtés du quadrilatère sont les arêtes d'un

tétraèdre régulier, et M. Schwarz dans le cas plus général où le quadrilatère admet un plan de symétrie.

La surface ainsi déterminée diffère extrêmement peu d'un paraboloidé hyperbolique. Dans le cas traité par Riemann, où les côtés du quadrilatère gauche forment les arêtes d'un tétraèdre régulier, M. Schwarz a démontré que la différence entre l'aire du paraboloidé hyperbolique et celle de la surface minima est inférieure à $\frac{1}{800}$ de l'une quelconque de ces aires. De plus, les deux surfaces sont tangentes l'une à l'autre au point central du quadrilatère.

Cette surface se réalise aisément en tendant une membrane sur un cadre ayant la forme d'un quadrilatère gauche, ou en plongeant un semblable cadre dans le liquide glycérique de Plateau.

§. IV. Parmi les surfaces à courbure moyenne nulle, passant par un contour donné, reconnaître les surfaces d'aire minima.

C'est le dernier des problèmes que nous ayons à examiner; la solution en est due à M. Schwarz ⁽¹⁾.

Nous savons que la condition, imposée à une surface qui passe par un contour donné, d'avoir une courbure moyenne nulle en tous points revient à celle-ci:

Si l'on impose à la surface une déformation infiniment petite qui n'altère pas son contour, la variation première de l'aire de cette surface est égale à 0.

Nous sommes donc amenés à former la variation seconde de cette aire pour en étudier le signe.

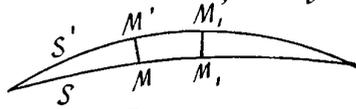


Fig. 64.

Soit S la surface étudiée (fig. 64) On la déforme en lui conservant le même contour, de manière à l'amener en S'. Soit M, un point de la surface S; ses coordonnées s'obtiennent au moyen des formules de

M. Weierstrass en donnant certaines valeurs α, β , aux paramètres des lignes de longueur nulle. Soit MM' la distance normale des deux surfaces S S'.

nous poserons

$$MM' = \epsilon w(\alpha, \beta).$$

⁽¹⁾ Schwarz. Beitrag zur Untersuchung der zweiten Variation des Flächeninhalts von Minimal-Flächen im Allgemeinen und von Theilen der Schraubenfläche im Besondern (Monatsber. der Berl. Akad. 1872 p. 718).

ε étant une constante réelle et infiniment petite ; $w(\alpha, \beta)$ une fonction réelle de α, β , uniforme, finie, continue, admettant des dérivées partielles du premier ordre par rapport à α, β , et devenant égale à 0 en tout point du contour.

Soient X, Y, Z , les cosinus directeurs de la droite MM' , normale à la surface S .

Les coordonnées du point M sont :

$$(M) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2} \int (1 - \alpha^2) F(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2} \int (1 - \beta^2) F_1(\beta) d\beta, \\ y = \frac{i}{2} \int (1 + \alpha^2) F(\alpha) d\alpha - \frac{i}{2} \int (1 + \beta^2) F_1(\beta) d\beta, \\ z = \int \alpha F(\alpha) d\alpha + \int \beta F_1(\beta) d\beta \end{array} \right.$$

Les coordonnées du point M' sont :

$$(M') \quad \left\{ \begin{array}{l} x' = x + \varepsilon X w(\alpha, \beta), \\ y' = y + \varepsilon Y w(\alpha, \beta), \\ z' = z + \varepsilon Z w(\alpha, \beta). \end{array} \right.$$

Soit M_1 , un point de la surface S infiniment voisin du point M . Il correspond à des valeurs $(\alpha + d\alpha)$, $(\beta + d\beta)$, des paramètres des lignes de longueur nulle. Ses coordonnées sont

$$(M_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x + dx = x + \frac{1 - \alpha^2}{2} F(\alpha) d\alpha + \frac{1 - \beta^2}{2} F_1(\beta) d\beta, \\ y_1 = y + dy = y + i \frac{1 + \alpha^2}{2} F(\alpha) d\alpha + i \frac{1 + \beta^2}{2} F_1(\beta) d\beta, \\ z_1 = z + dz = z + \alpha F(\alpha) d\alpha + \beta F_1(\beta) d\beta. \end{array} \right.$$

Au point M_1 , de la surface S correspond un point M'_1 sur la surface S' , dont les coordonnées x'_1, y'_1, z'_1 ont pour valeur :

$$(M'_1) \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_1 + \varepsilon X w(\alpha, \beta) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha} \{ X w(\alpha, \beta) \} d\alpha + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \beta} \{ X w(\alpha, \beta) \} d\beta, \\ y'_1 = y_1 + \varepsilon Y w(\alpha, \beta) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha} \{ Y w(\alpha, \beta) \} d\alpha + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \beta} \{ Y w(\alpha, \beta) \} d\beta, \\ z'_1 = z_1 + \varepsilon Z w(\alpha, \beta) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \alpha} \{ Z w(\alpha, \beta) \} d\alpha + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \beta} \{ Z w(\alpha, \beta) \} d\beta. \end{array} \right.$$

Calculons X, Y, Z , coefficients angulaires de la normale à la surface S . Nous trouvons sans peine :

$$X = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta},$$

$$Y = \frac{\alpha - \beta}{i(1 + \alpha\beta)},$$

$$Z = \frac{\alpha\beta - 1}{1 + \alpha\beta}.$$

et par conséquent

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = \frac{1 - \beta^2}{(1 + \alpha\beta)^2},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = -i \frac{1 + \beta^2}{(1 + \alpha\beta)^2},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \alpha} = \frac{2\beta}{(1 + \alpha\beta)^2},$$

$$\frac{\partial X}{\partial \beta} = \frac{1 - \alpha^2}{(1 + \alpha\beta)^2},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \beta} = i \frac{1 + \alpha^2}{(1 + \alpha\beta)^2},$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = \frac{2\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2}.$$

Si nous posons :

$$x' = x' + dx',$$

$$y' = y' + dy',$$

$$z' = z' + dz',$$

Nous aurons :

$$\left\{ \begin{array}{l} dx' = \left[\frac{1 - \alpha^2}{2} \mathcal{F}(\alpha) + \varepsilon \frac{1 - \beta^2}{(1 + \alpha\beta)^2} w(\alpha, \beta) + \varepsilon \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} \frac{\partial w(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right] d\alpha, \\ \quad + \left[\frac{1 - \beta^2}{2} \mathcal{F}_1(\beta) + \varepsilon \frac{1 - \alpha^2}{(1 + \alpha\beta)^2} w(\alpha, \beta) + \varepsilon \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} \frac{\partial w(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right] d\beta, \\ dy' = i \left[\frac{1 + \alpha^2}{2} \mathcal{F}(\alpha) - \varepsilon \frac{1 + \beta^2}{(1 + \alpha\beta)^2} w(\alpha, \beta) + \varepsilon \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} \frac{\partial w(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \right] d\alpha, \\ \quad - i \left[\frac{1 + \beta^2}{2} \mathcal{F}_1(\beta) - \varepsilon \frac{1 + \alpha^2}{(1 + \alpha\beta)^2} w(\alpha, \beta) - \varepsilon \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta} \frac{\partial w(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \right] d\beta, \\ dz' = \left[\alpha \mathcal{F}(\alpha) + \frac{\alpha\beta - 1}{1 + \alpha\beta} \frac{\partial w(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} + \frac{2\beta}{(1 + \alpha\beta)^2} w(\alpha, \beta) \right] d\alpha, \\ \quad + \left[\beta \mathcal{F}(\beta) + \frac{\alpha\beta - 1}{1 + \alpha\beta} \frac{\partial w(\alpha, \beta)}{\partial \beta} + \frac{2\alpha}{(1 + \alpha\beta)^2} w(\alpha, \beta) \right] d\beta \end{array} \right.$$

Si ds désigne la longueur de l'arc MM , nous aurons :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

ou bien :

$$(11) \text{ ----- } ds^2 = A d\alpha^2 + B d\alpha d\beta + C d\beta^2,$$

avec

$$(11 \text{ bis}) \text{ ----- } \left\{ \begin{array}{l} A = 0, \quad C = 0, \\ B = (1 + \alpha\beta)^2 \mathcal{F}(\alpha) \mathcal{F}_1(\beta) \end{array} \right.$$

Si, de même on désigne par ds' l'arc $M'M'$, on aura :

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

ou bien :

$$(12) \text{ ----- } ds'^2 = A' d\alpha^2 + B' d\alpha d\beta + C' d\beta^2,$$

avec

$$(12' bis) \dots \left\{ \begin{array}{l} A' = 2 \mathcal{E} w(\alpha, \beta) \mathcal{F}(\alpha) + \mathcal{E}^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2, \\ C' = 2 \mathcal{E} w(\alpha, \beta) \mathcal{F}_i(\beta) + \mathcal{E}^2 \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2, \\ B' = (1 + \alpha \beta)^2 \mathcal{F}(\alpha) \mathcal{F}_i(\beta) + 2 \mathcal{E}^2 \left\{ \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{2 w^2}{(1 + \alpha \beta)^2} \right\} \end{array} \right.$$

Si la position d'un point sur une surface est marquée par deux paramètres imaginaires conjugués quelconques :

$$\alpha = \xi + i \eta,$$

$$\beta = \xi - i \eta,$$

et si l'on a l'expression du carré de l'élément d'arc trace sur la surface sous la forme :

$$ds^2 = E d\alpha^2 + F d\alpha d\beta + G d\beta^2,$$

on démontre (v. Darboux p 76) que le petit parallélogramme dont les sommets sont définis par les paramètres

$$\begin{array}{ccc} \alpha & , & \beta & , & (M) & , \\ \alpha + d\alpha & , & \beta & , & (M_2) & , \\ \alpha & , & \beta + d\beta & , & (M_3) & , \\ \alpha + d\alpha & , & \beta + d\beta & , & (M_4) & , \end{array}$$

a pour aire :

$$d\omega = \sqrt{F^2 - 4EG} d\xi d\eta$$

Appliquons cette formule au cas actuel.

L'élément M, M_1, M_2, M_3 de la surface S aura pour valeur

$$d\omega = (1 + \alpha \beta)^2 \mathcal{F}(\alpha) \mathcal{F}_i(\beta) d\xi d\eta.$$

L'élément correspondant M', M'_1, M'_2, M'_3 de la surface S' a pour valeur :

$$\begin{aligned} d\omega' &= (1 + \alpha \beta)^2 \mathcal{F}(\alpha) \mathcal{F}_i(\beta) d\xi d\eta \\ &+ 2 \mathcal{E}^2 \left\{ \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{2 w^2}{(1 + \alpha \beta)^2} \right\} d\xi d\eta \\ &- 4 \mathcal{E}^3 \frac{w}{(1 + \alpha \beta)^2} \left\{ \frac{1}{\mathcal{F}(\alpha)} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{\mathcal{F}_i(\beta)} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \right\} d\xi d\eta + \dots \end{aligned}$$

L'aire de la Surface S est :

$$(13) \dots \dots \dots S = \iint (1 + \alpha \beta)^2 \mathcal{F}(\alpha) \mathcal{F}_i(\beta) d\xi d\eta.$$

L'aire de la surface S' est :

$$(14) \dots \dots \dots S' = \iint (1 + \alpha \beta)^2 \mathcal{F}(\alpha) \mathcal{F}_i(\beta) d\xi d\eta \\ + 2 \mathcal{E}^2 \iint \left\{ \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{2 w^2}{(1 + \alpha \beta)^2} \right\} d\xi d\eta \\ - 4 \mathcal{E}^3 \iint \frac{w}{(1 + \alpha \beta)^2} \left\{ \frac{1}{\mathcal{F}(\alpha)} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{\mathcal{F}_i(\beta)} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \right\} d\xi d\eta + \dots$$

De ces formules (13) et (14), dans lesquelles les intégrations s'étendent au même champ de valeurs de ξ et de η , on déduit

$$(15) \quad \begin{cases} \delta S = 0, \\ \delta^2 S = 2 \varepsilon^2 \iint \left\{ \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} - \frac{2 w^2}{(1 + \alpha \beta)^2} \right\} d\xi d\eta \\ \delta^3 S = -4 \varepsilon^3 \iint \frac{w}{(1 + \alpha \beta)^2} \left\{ \frac{1}{F(\alpha)} \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} \right)^2 + \frac{1}{F_1(\beta)} \left(\frac{\partial w}{\partial \beta} \right)^2 \right\} d\xi d\eta \end{cases}$$

La variation première de la surface S est nulle ainsi qu'il devait arriver.

La variation seconde possède cette propriété remarquable qu'elle ne dépend pas des deux fonctions $F(\alpha)$, $F_1(\beta)$, mais seulement du champ d'intégration.

Transformons l'expression de cette variation.

La fonction réelle w des deux variables imaginaires conjuguées α, β est, en réalité, une fonction des deux variables réelles ξ, η ; Nous pouvons poser:

$$w(\alpha, \beta) = W(\xi, \eta)$$

Nous aurons alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \xi} &= \frac{\partial W}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \eta} &= \frac{\partial W}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

ou bien :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \xi} &= \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{\partial w}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial W}{\partial \eta} &= i \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{\partial w}{\partial \beta} \right); \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \alpha} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} - i \frac{\partial W}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial w}{\partial \beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} + i \frac{\partial W}{\partial \eta} \right), \end{aligned}$$

ou bien :

$$\frac{\partial w}{\partial \alpha} \frac{\partial w}{\partial \beta} = \frac{1}{4} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 \right\}.$$

D'autre part,

$$1 + \alpha \beta = 1 + \xi^2 + \eta^2,$$

on a donc :

$$(16) \quad \delta^2 S = \frac{\varepsilon^2}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{8 [W(\xi, \eta)]^2}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2} \right\} d\xi d\eta$$

Cette formule obtenue, supposons qu'il existe une fonction réelle ψ des deux variables ξ et η , qui vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$(17) \quad \dots \dots \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\delta \psi}{(1 + \xi^2 + \eta^2)} = 0 ;$$

que cette fonction soit finie, continue et uniforme, ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, en tous points du champ d'intégration, et qu'elle ne devienne égale à 0 en aucun point de ce champ ou de ses limites.

Prenez cette fonction. Nous aurons évidemment l'identité :

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta}\right)^2 - \frac{\delta W^2}{1 + \xi^2 + \eta^2} =$$

$$\left(\frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{W}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{W}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{W^2}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{W^2}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)$$

et l'égalité (16) devient

$$(18) \quad \dots \quad \delta^2 S = \frac{\epsilon^2}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{W}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{W}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2 \right\} d\xi d\eta$$

$$+ \frac{\epsilon^2}{2} \iint \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{W^2}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{W^2}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right) \right\} d\xi d\eta.$$

Si ξ, η , sont pris pour coordonnées rectangulaires sur un plan, le champ d'intégration est représenté par l'aire d'une certaine courbe. Des hypothèses faites, il résulte que ψ ne devient égal à 0 pour aucun point intérieur à cette courbe ou situé sur cette courbe $\frac{W^2}{\psi}$ est donc fini pour tous points du champ d'intégration, et égal à 0 en tous points du contour. Si l'on désigne alors par dl un élément de la courbe qui limite le champ, et par n la normale intérieure à cette courbe; si l'on pose :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} \cos(n, \xi) + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \cos(n, \eta) = \frac{\partial \psi}{\partial n},$$

on verra sans peine que le dernier terme de $\delta^2 S$ aura pour valeur

$$-\int \frac{W}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial n} dl,$$

quantité égale à 0, puisque W est égal à 0 le long du contour de la surface. Donc si la fonction ψ existe avec les caractères que nous lui avons attribués, nous aurons :

$$(19) \quad \dots \quad \delta^2 S = \frac{\epsilon^2}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{W}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{W}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2 \right\} d\xi d\eta,$$

quantité essentiellement positive.

Ainsi :

Nous supposons qu'il existe une fonction $\psi(\xi, \eta)$, finie, continue et uniforme ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, en tous points du champ d'intégration; vérifions en tous points de ce champ l'équation aux dérivées partielles

$$(17) \quad \dots \dots \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\delta \psi}{(1 + \xi^2 + \eta^2)} = 0$$

et ne devenant égale à 0 en aucun point de ce champ.

1° Si la fonction ψ ne devient égale à 0 en aucun point de la limite du champ, la surface à courbure moyenne nulle considérée est certainement une surface minima.

Cette proposition demeure vraie si la fonction ψ devient égale à 0 seulement en des points isolés du contour ou le long de parties isolées du contour; en effet, comme W doit être égal à 0 sur le contour, on pourra toujours supposer que $\frac{W}{\psi}$ y a une valeur finie en tout point et le second terme de $\delta^2 S$ deviendra égal à 0. Quant au premier, il ne peut devenir égal à 0 que si $W = \psi$ et on ne peut prendre $W = \psi$, puisque ψ ne s'annule pas tout le long du contour.

Si la fonction ψ devient égale à 0 en tout point du contour, on pourrait prendre $W = \psi$, et alors la formule (18) donnerait $\delta^2 S = 0$. Comme on n'aura pas en même temps en général $\delta^3 S = 0$, la surface ne pourra pas en général être minimum. Ainsi :

2° Si la fonction ψ devient égale à 0 en tout point de la limite du champ, la surface ne sera pas en général une surface minima.

Si la fonction ψ devient égale à 0 en tout point d'une ligne fermée tracée à l'intérieur du domaine d'intégration, on pourra, en désignant par n_i, n_e , les normales intérieure et extérieure à cette courbe, par ψ_i et ψ_e les valeurs de ψ en un point infiniment voisin de la courbe à l'intérieur ou à l'extérieur, écrire.

$$\delta^2 S = \frac{\varepsilon^2}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial \xi} - \frac{W}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{W}{\psi} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right)^2 \right\} d\xi d\eta - \frac{\varepsilon^2}{2} \int \left(\frac{W^2}{\psi_i} \frac{\partial \psi}{\partial n_i} + \frac{W^2}{\psi_e} \frac{\partial \psi}{\partial n_e} \right) d\lambda,$$

d λ étant un élément de la courbe le long de laquelle $\psi = 0$.

Or ψ_i est du même signe que $\frac{\partial \psi}{\partial n_i}$; ψ_e est du même signe que $\frac{\partial \psi}{\partial n_e}$. W n'est pas assujéti à être égal à 0 aux divers points de la ligne λ . Donc $\delta^2 S$ pourra prendre des valeurs négatives. Il en serait de même si ψ s'annulait seulement le long d'une portion finie de la ligne λ . Donc :

3° Si la fonction ψ s'annule le long d'une ligne finie tracée dans le champ d'intégration sans s'annuler de part et d'autre de cette ligne, la surface étudiée ne peut être d'aire minima.

Tels sont les critères marqués par M. Schwarz. Ils supposent la connaissance de la fonction ψ .

L'équation aux dérivées partielles

$$(17) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{8\psi}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2} = 0$$

qui définit cette fonction ψ peut être intégrée de la manière suivante; posons

$$\alpha = \xi + i\eta,$$

$$\beta = \xi - i\eta,$$

ou pour $G(\alpha)$ une fonction quelconque de la variable complexe α , fonction qui équivaut en réalité à deux fonctions arbitraires des variables réelles ξ, η .

Si l'on pose:

$$(20) \text{ ----- } \psi = \mathcal{R} \left\{ G'(\alpha) - \frac{2\beta}{1+\alpha\beta} G(\alpha) \right\},$$

l'équation (17) sera vérifiée, comme on peut s'en assurer par un calcul facile. D'ailleurs, cette expression de ψ renfermant deux fonctions arbitraires des variables ξ, η , est l'intégrale générale de l'équation (17).

Mais l'expression (20) de la fonction ψ est susceptible d'une interprétation géométrique très remarquable.

Soit la surface à courbure moyenne nulle que nous étudions, définie par les formules de M. Weierstrass, débarrassées de tout signe \int :

$$(10) \text{ ----- } \left\{ \begin{array}{l} x = \mathcal{R} \left\{ \frac{1-\alpha^2}{2} g''(\alpha) + \alpha g'(\alpha) - g(\alpha) \right\}, \\ y = \mathcal{R} \left\{ \frac{1+\alpha^2}{2} g''(\alpha) - i\alpha g'(\alpha) + i g(\alpha) \right\}, \\ z = \mathcal{R} \left\{ \alpha g''(\alpha) - g'(\alpha) \right\} \end{array} \right.$$

Remplaçons dans ces formules la fonction $g(\alpha)$ par

$$g(\alpha) + \varepsilon G(\alpha)$$

Nous obtiendrons une nouvelle surface à courbure moyenne nulle différant infiniment peu de la première. Au point M de coordonnées x, y, z , de la première, correspond, sur la seconde, un point M' , répondant à la même valeur de α , en ayant pour coordonnées $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$; et l'on a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta x = \varepsilon \mathcal{R} \left\{ \frac{1-\alpha^2}{2} G''(\alpha) + \alpha G'(\alpha) - G(\alpha) \right\}, \\ \delta y = \varepsilon \mathcal{R} \left\{ i \frac{1+\alpha^2}{2} G''(\alpha) - i\alpha G'(\alpha) + i G(\alpha) \right\}, \\ \delta z = \varepsilon \mathcal{R} \left\{ \alpha G''(\alpha) - G'(\alpha) \right\}, \end{array} \right.$$

La distance normale des deux surfaces au point M a pour valeur:

$$\Delta = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z$$

Si l'on se souvient que:

$$X = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}, \quad Y = \frac{i(\beta - \alpha)}{1 + \alpha\beta}, \quad Z = \frac{\alpha\beta - 1}{1 + \alpha\beta},$$

on trouve tout calcul fait:

$$(21) \text{ ----- } \Delta = \varepsilon \mathcal{R} \left\{ G'(\alpha) - \frac{2\beta}{1+\alpha\beta} G(\alpha) \right\} = \varepsilon \psi.$$

Ainsi on arrive à ce résultat remarquable :

La fonction Ψ , qui intègre l'équation (17) est proportionnelle à la distance normale de la surface à courbure moyenne nulle considérée à une surface à courbure moyenne nulle infiniment voisine.

Les valeurs de ξ, η pour lesquelles $\Psi = 0$ correspondent, d'après cela, aux points où la surface considérée est rencontrée par une surface à courbure moyenne nulle infiniment voisine.

Si l'on rapproche ce résultat des critères énoncés par M. Schwarz, on voit que l'on peut donner à ceux-ci la forme géométrique suivante :

Étant donnée une surface à courbure moyenne nulle limitée par un contour, on trace toutes les surfaces à courbure moyenne nulle infiniment voisines obtenues comme nous l'avons dit.

1° Si une de ces surfaces ne rencontre pas la surface proposée, ou si elle la rencontre seulement en certains points du contour, ou le long de certaines parties du contour, sans la rencontrer tout le long du contour, toutes les autres vérifient la même condition et la surface donnée est d'aire minima.

2° Si une de ces surfaces, dans rencontrer la surface proposée en son intérieur, la rencontre tout le long de son contour, la surface proposée n'est pas minima en général.

3° Si une de ces surfaces coupe la surface proposée à l'intérieur du contour sans la toucher le long de l'intersection, la surface proposée n'est certainement pas d'aire minima.

M. Schwarz a fait remarquer l'analogie de ces propositions avec celles que Jacobi avaient obtenues en étudiant les lignes de longueur minima tracées entre deux points sur une surface (Chapitre II, § 5).

Chapitre VII.

Equilibre d'une Membrane en contact avec un Fluide

Nous allons examiner maintenant un problème important non pas en lui-même, mais par l'analogie qu'il présente avec un autre problème fondamental de la physique, savoir la recherche de la forme d'un fluide placé dans un vase et soumis aux forces capillaires. Le problème dont nous voulons parler est l'étude

des conditions d'équilibre d'une membrane étendue à la surface d'un fluide ou à la surface de séparation de deux fluides. Poisson⁽¹⁾ l'a déjà traité; nous allons le reprendre par les méthodes générales qui nous ont servi dans tout ce cours.

La membrane 3^e que nous voulons étudier forme la surface de séparation S_3 d'un premier fluide 1 et d'un second fluide 2; chacun d'eux peut d'ailleurs présenter une autre surface déformable que nous désignerons respectivement par S_1, S_2 .

ρ_1 sera la densité du premier fluide; ρ_2 la densité du second; ρ_3 la densité superficielle de la membrane.

La recherche des conditions d'équilibre de ce système se fera comme d'habitude, au Chapitre I du Livre II, la recherche des conditions d'équilibre d'un système formé de deux fluides.

Soient, dans une modification virtuelle quelconque du système, dE_e le travail des forces extérieures et dF la variation du potentiel Thermodynamique Interne; pour toutes les modifications virtuelles du système, nous devons avoir:

$$dE_e - dF = 0$$

L'expression de dE_e ne différera de celle que nous avons trouvée au Livre II Chapitre I, Égalité (1) (1^{re} Partie, p. 61) que par la quantité dE_e' exprimant le travail des forces extérieures appliquées à la membrane.

L'expression de dF ne différera de celle que nous avons trouvée au Livre II Chapitre I, Égalité (6) (1^{re} Partie, p. 62) que par le terme

$$\int \left(\varphi_3(\rho_3) - \rho_3 \frac{d\varphi_3(\rho_3)}{d\rho_3} \right) dS$$

exprimant la variation du Potentiel Thermodynamique Interne de la membrane.

On pourra, tout d'abord, donner au système une modification virtuelle qui laisse la membrane immobile; les termes complémentaires dont nous venons de parler seront alors égaux à 0, et l'on retrouvera toutes les lois de l'équilibre des fluides, telles que nous les avons établies déjà.

Il existera une fonction d' x, y, z , π , uniforme, finie, continue en tous points du premier fluide, toujours positive, telle que l'on ait, en tous points de ce fluide:

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 X = \frac{\partial \pi_1}{\partial x} \\ \rho_1 Y = \frac{\partial \pi_1}{\partial y} \\ \rho_1 Z = \frac{\partial \pi_1}{\partial z} \end{array} \right.$$

ou

$$(2) \dots \dots \dots \varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} + \pi_1 = 0.$$

⁽¹⁾ Poisson. Mémoire sur les surfaces Élastiques, lu à l'Académie le 1^{er} Août 1814

En tout point de la surface déformable du fluide 1 la pression sera normale à cette surface, dirigée vers l'intérieur du fluide et aura pour grandeur

$$(3) \text{-----} P_1 = \pi_1,$$

De même il existera une fonction de x, y, z π_2 , uniforme, finie continue en tout point du second fluide toujours positive telle que l'on ait en tout point de ce fluide

$$(1 \text{ bis}) \text{-----} \left\{ \begin{array}{l} \rho_2 X = \frac{\partial \pi_2}{\partial x}, \\ \rho_2 Y = \frac{\partial \pi_2}{\partial y}, \\ \rho_2 Z = \frac{\partial \pi_2}{\partial z}, \end{array} \right.$$

ou

$$(2 \text{ bis}) \text{-----} \varphi_2(\rho_2) - \rho_2 \frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} + \pi_2 = 0.$$

En tout point de la surface déformable du fluide 2, la pression sera normale à cette surface dirigée vers l'intérieur du fluide et aura pour valeur

$$(3 \text{ bis}) \text{-----} P_2 = \pi_2.$$

Enfin, s'il existe une surface Σ le long de laquelle les deux fluides sont directement au contact, sans interposition de membrane on aura en tout point de cette surface,

$$(4) \text{-----} \pi_1 = \pi_2 = \lambda,$$

λ étant une quantité qui varie d'une manière continue le long de la surface Σ

Imaginons maintenant que l'on donne au système un déplacement virtuel quelconque; supposons que les fluides ne se trouvent pas de cavités, de telle façon que ce déplacement soit réversible, nous devons avoir

$$\delta E_2 - \delta F = 0$$

Si $\delta x, \delta y, \delta z$, sont les composantes du déplacement imposé au point matériel dont les coordonnées initiales étaient x, y, z , cette égalité pourra s'écrire

$$(5) \text{-----} \int P_1 \left[\cos(n_i, x) \delta x_1 + \cos(n_i, y) \delta y_1 + \cos(n_i, z) \delta z_1 \right] dS_1 \\ + \int \rho_1 (X_1 \delta x_1 + Y_1 \delta y_1 + Z_1 \delta z_1) dV_1 \\ - \int \left[\varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} \right] \left(\frac{\partial \delta x_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \delta y_1}{\partial y_1} + \frac{\partial \delta z_1}{\partial z_1} \right) dV_1 \\ + \int P_2 \left[\cos(n_i, x) \delta x_2 + \cos(n_i, y) \delta y_2 + \cos(n_i, z) \delta z_2 \right] dS_2$$

$$\begin{aligned}
& + \int \rho_2 (X_2 dx_2 + Y_2 dy_2 + Z_2 dz_2) dv_2 \\
& - \int \left\{ \varphi_2(\rho_2) - \rho_2 \frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} \right\} \left(\frac{\partial dx_2}{\partial x_2} + \frac{\partial dy_2}{\partial y_2} + \frac{\partial dz_2}{\partial z_2} \right) dv_2 \\
& - \int \left\{ \varphi_3(\rho_3) - \rho_3 \frac{d\varphi_3(\rho_3)}{d\rho_3} \right\} d' d S_3 + d' \mathcal{E}'_2 = 0
\end{aligned}$$

En vertu des égalités (1) et (2), la quantité

$$\begin{aligned}
& \int \rho_1 (X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1) dv_1 \\
& - \int \left\{ \varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} \right\} \left(\frac{\partial dx_1}{\partial x_1} + \frac{\partial dy_1}{\partial y_1} + \frac{\partial dz_1}{\partial z_1} \right) dv_1
\end{aligned}$$

peut s'écrire

$$\int \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1} (\pi_1 dx_1) + \frac{\partial}{\partial y_1} (\pi_1 dy_1) + \frac{\partial}{\partial z_1} (\pi_1 dz_1) \right\} dv_1$$

Des intégrations par parties permettent de transformer cette égalité en

$$- \int \pi_1 \{ \cos(n, x) dx_1 + \cos(n, y) dy_1 + \cos(n, z) dz_1 \} dS$$

l'intégration s'étendant à toute la surface qui limite le fluide 1 en n , et en un point de cette surface, la normale vers l'intérieur du fluide 1.

La surface qui limite le fluide 1 peut se composer de quatre parties :

1° La surface S_1 , à laquelle sont appliquées des pressions extérieures; en tout point de cette surface on a, d'après l'égalité (3),

$$\pi_1 = P_{11}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
& \int \pi_1 \{ \cos(n, x) dx_1 + \cos(n, y) dy_1 + \cos(n, z) dz_1 \} dS_1 \\
& = \int P_{11} \{ \cos(n_i, x) dx_1 + \cos(n_i, y) dy_1 + \cos(n_i, z) dz_1 \} dS_{1i};
\end{aligned}$$

2° La surface σ_1 , qui confine à des solides indéformables; en tout point de cette surface on a

$$\cos(n, x) dx_1 + \cos(n, y) dy_1 + \cos(n, z) dz_1 = 0,$$

ce qui donne

$$\int \pi_1 \{ \cos(n, x) dx_1 + \cos(n, y) dy_1 + \cos(n, z) dz_1 \} d\sigma_1 = 0;$$

3° La surface Σ ;

4° La surface S_3 ;

On voit donc que l'on a :

$$\begin{aligned}
 (6) \int P_1 \left[\cos(n_1, x) dx_1 + \cos(n_1, y) dy_1 + \cos(n_1, z) dz_1 \right] dS_1 \\
 + \int \rho_1 (X_1 dx_1 + Y_1 dy_1 + Z_1 dz_1) dv_1 \\
 - \int \left\{ \varphi_1(\rho_1) - \rho_1 \frac{d\varphi_1(\rho_1)}{d\rho_1} \right\} \left(\frac{\partial dx_1}{\partial x} + \frac{\partial dy_1}{\partial y} + \frac{\partial dz_1}{\partial z} \right) dv_1 \\
 = - \int \pi_1 \left[\cos(n_1, x) dx_1 + \cos(n_1, y) dy_1 + \cos(n_1, z) dz_1 \right] d\Sigma \\
 - \int \pi_1 \left[\cos(n_1, x) dx_1 + \cos(n_1, y) dy_1 + \cos(n_1, z) dz_1 \right] dS_3
 \end{aligned}$$

On démontre de même que l'on a

$$\begin{aligned}
 (6^{bis}) \int P_2 \left[\cos(n_2, x) dx_2 + \cos(n_2, y) dy_2 + \cos(n_2, z) dz_2 \right] dS_2 \\
 + \int \rho_2 (X_2 dx_2 + Y_2 dy_2 + Z_2 dz_2) dv_2 \\
 - \int \left\{ \varphi_2(\rho_2) - \rho_2 \frac{d\varphi_2(\rho_2)}{d\rho_2} \right\} \left(\frac{\partial dx_2}{\partial x} + \frac{\partial dy_2}{\partial y} + \frac{\partial dz_2}{\partial z} \right) dv_2 \\
 = - \int \pi_2 \left[\cos(n_2, x) dx_2 + \cos(n_2, y) dy_2 + \cos(n_2, z) dz_2 \right] d\Sigma \\
 - \int \pi_2 \left[\cos(n_2, x) dx_2 + \cos(n_2, y) dy_2 + \cos(n_2, z) dz_2 \right] dS_3.
 \end{aligned}$$

En tout point des surfaces S_3 et Σ , on a

$$(7) \dots \dots \dots \cos(n_1, x) dx_1 + \cos(n_1, y) dy_1 + \cos(n_1, z) dz_1 \\
 + \cos(n_2, x) dx_2 + \cos(n_2, y) dy_2 + \cos(n_2, z) dz_2 = 0.$$

Si l'on joint cette égalité (7) à l'égalité (4), qui a lieu en tous les points de la surface Σ , le long de laquelle les deux fluides sont en contact direct, on trouve l'égalité

$$(8) \dots \dots \dots \int \pi_1 \left[\cos(n_1, x) dx_1 + \cos(n_1, y) dy_1 + \cos(n_1, z) dz_1 \right] d\Sigma \\
 + \int \pi_2 \left[\cos(n_2, x) dx_2 + \cos(n_2, y) dy_2 + \cos(n_2, z) dz_2 \right] d\Sigma = 0.$$

En vertu des égalités (6), (6^{bis}), (7) et (8), l'égalité (5) peut s'écrire

$$\int (\pi_1 - \pi_2) \left[\cos(n_2, x) dx_2 + \cos(n_2, y) dy_2 + \cos(n_2, z) dz_2 \right] dS_3 \\
 + d\mathcal{E}' - \int \left\{ \varphi_3(\rho_3) - \rho_3 \frac{d\varphi_3(\rho_3)}{d\rho_3} \right\} dS_3 = 0.$$

Cette égalité est celle que l'on trouverait en cherchant les conditions d'équilibre de la membrane si les deux fluides n'existaient pas et si la membrane était

soumise non seulement aux forces extérieures qui agissent sur elle, mais encore à des forces fictives, dont la loi serait la suivante :

La force fictive appliquée à l'élément dS_3 de la membrane est normale à cet élément, dirigée de la face baignée par le fluide 1 à la face baignée par le fluide 2 ; elle a pour grandeur

$$(\pi_1 - \pi_2) dS_3$$

Nous pouvons maintenant, pour trouver les conditions d'équilibre de notre membrane, faire usage des résultats obtenus au Chapitre V.

Prenons pour face positive de la membrane la face baignée par le fluide 2, en sorte que la normale désignée par n au Chapitre V coïncide avec la normale désignée ici par n_2 .

Soient u, v , les coordonnées curvilignes orthogonales d'un point de la membrane. Il existera, à la surface de la membrane une fonction continue de u et de v , désignée par Θ , telle que l'on ait, en tout point de la membrane,

$$(9) \dots \dots \dots \varphi_3(\rho_3) \frac{d\varphi_3(\rho_3)}{d\rho_3} - \Theta = 0 \quad \left\{ \text{ou } \rho_3 = F(\Theta) \right\}$$

$$(10) \dots \dots \dots \begin{cases} F_u = -\frac{\sqrt{A}}{F(\Theta)} \frac{\partial \Theta}{\partial u}, \\ F_v = -\frac{\sqrt{B}}{F(\Theta)} \frac{\partial \Theta}{\partial v}. \end{cases}$$

$$(11) \dots \dots \dots F(\Theta) F_n + \pi_1 - \pi_2 = \Theta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Si une partie du bord de la membrane est déformable, ce bord sera soumis à des tensions normales à chaque élément du bord, situées dans le plan tangent extrême à la membrane, dirigées vers l'extérieur de l'aire de la membrane, et ayant pour valeur en chaque point

$$(12) \dots \dots \dots T = \Theta.$$

Nous avons ainsi, par les égalités (1), (2), (3), (1 bis), (2 bis), (3 bis), (4), (9), (10), (11), (12), toutes les conditions d'équilibre d'un système formé de deux fluides séparés par une membrane.

Nous allons restreindre quelque peu, dans ce qui va suivre, la généralité du problème, et cela par deux hypothèses :

1° Nous admettrons que la membrane ne présente pas de bord libre ; ou bien elle est fermée sur elle-même, ou bien, par ses bords, elle est attachée aux parois des vases qui renferment les fluides.

2° Nous admettrons que $F(\Theta) F_u$, $F(\Theta) F_v$, $F(\Theta) F_n$ sont négligeables ; c'est ce qui arrive, par exemple, lorsqu'on soumet à l'action de

la pesanteur une membrane dont la densité superficielle est très faible, ce qui a lieu pour une membrane réelle extrêmement mince.

Les égalités (10) donnent alors :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0,$$

ou

(13) ----- $\Theta = \text{const.}$

La membrane est uniformément tendue. L'égalité (9) entraîne cette autre conséquence : la densité de la membrane est constante dans toute son étendue.

L'égalité (11) se réduit à

(14) ----- $\pi_1 - \pi_2 = \Theta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$

La pression du fluide qui baigne la face négative de la membrane surpasse la pression du fluide qui en baigne la face positive ; l'excès de la première pression sur la seconde est le produit de la tension de la membrane par sa courbure moyenne.

Faisons quelques applications de ces résultats à des cas particuliers intéressants.

1°. Deux masses de gaz sont séparées par une membrane.

La pression de chacune des deux masses de gaz est sensiblement constante dans toute son étendue ; on peut donc, dans l'équation (14), regarder π_1 et π_2 comme des constantes ; la tension Θ ayant elle-même une valeur constante en tout point de la membrane, on voit que lorsqu'une membrane sépare l'une de l'autre deux masses gazeuses, sa courbure moyenne a en tout point la même valeur.

Nous rencontrons ainsi, dans notre étude, une classe remarquable de surfaces, les surfaces à courbure moyenne constante, dont les surfaces à courbure moyenne nulle ne sont qu'un cas particulier. nous n'étudierons pas ici ces surfaces à courbure moyenne constante ; nous nous contenterons de démontrer leur propriété fondamentale qui est la suivante :

Si une surface close en partie déformable, est adjettée à enfermer un volume donné, pour que cette surface ait une aire minima, il faut que sa courbure moyenne ait la même valeur en tout point de sa partie déformable.

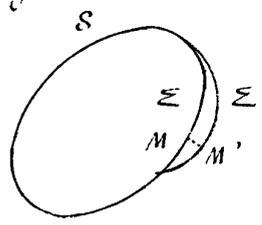


fig. 65.

Considérons en effet une surface S (fig. 65) dont E est la partie déformable ; donnons à cette partie une déformation infiniment petite qui l'amène en E' ; soit $MM' = \delta n$ la distance normale, au point M , des deux surfaces E et E' . L'aire de la surface S aura subi dans cette déformation, une variation première :

$$\delta S = \int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \delta n \, d\Sigma.$$

D'autre part, le volume qu'enferme la surface S aura subitement une variation première

$$\delta V = \int \delta n \, d\Sigma.$$

Si la surface S est assujettie à enfermer un volume donné, et, en même temps, à avoir une aire minima, on devra avoir à la fois

$$\delta S = 0 \quad \text{et} \quad \delta V = 0.$$

Pour cela, d'après les principes du Calcul des Variations, il faut et il suffit qu'il existe une constante λ telle que l'on ait identiquement

$$\int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} - \lambda \right) \delta n \, d\Sigma = 0.$$

Cette identité entraîne

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \lambda$$

et, par conséquent, démontre la proposition énoncée.

2° Une membrane sépare deux liquides incompressibles.

Soit V la fonction potentielle des forces appliquées aux liquides.

Les densités ρ_1, ρ_2 étant deux constantes, les égalités (1) et (1 bis) peuvent s'écrire :

$$\pi_1 + \rho_1 V = C_1,$$

$$\pi_2 + \rho_2 V = C_2,$$

C_1 étant une quantité constante à l'intérieur du fluide 1 et C_2 une quantité constante à l'intérieur du fluide 2.

L'égalité (14) devient alors

$$(15) \quad \ominus \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) + (\rho_1 - \rho_2) V = C_1 - C_2.$$

Dans le cas particulier où les deux liquides auraient la même densité, cette égalité marque que la courbure moyenne de la membrane aurait la même valeur en tous points.

Cette équation a exactement la forme de l'équation aux dérivées partielles qui détermine la surface de contact de deux liquides soumis aux actions capillaires. D'ailleurs les conditions aux limites qui achèvent la détermination de ces surfaces peuvent être différentes ; notre membrane, par exemple, peut être assujettie à passer par un contour donné, tandis que la surface capillaire est assujettie à couper sous un angle donné le vase qui renferme les fluides. Enfin, dans l'étude de la capillarité, la quantité \ominus dépend uniquement de la nature des deux fluides en contact, tandis qu'ici elle dépend de la dilatation de la membrane.

L'analogie dont nous venons de parler a joué un rôle considérable dans le développement de l'étude de la capillarité; retraçons brièvement l'histoire de ce développement.

Séguier⁽¹⁾, en cherchant à déterminer par l'analyse des attractions moléculaires la forme que présente la surface d'un liquide pesant, contenu dans un tube cylindrique, fut conduit à assimiler la section méridienne de cette surface à une corde tendue, et à lui attribuer l'équation

$$\frac{C}{R} + \rho g z = C$$

R étant le rayon de courbure de la section méridienne et z son ordonnée.

Si la théorie de la courbure des surfaces, ni la théorie de l'équilibre des membranes, n'étaient connues de Séguier. Après que les géomètres eurent créé ces deux théories, en 1805, Young⁽²⁾ eut l'idée de modifier l'équation de Séguier en substituant la courbure moyenne de la surface à la courbure de la section méridienne. Il obtint ainsi, le premier, par une voie hypothétique qui ne peut être regardée comme un véritable raisonnement, l'équation de la surface capillaire.

Deux ans après, Laplace⁽³⁾, sans connaître le travail d'Young fut conduit, par l'analyse directe des actions moléculaires, à représenter la surface capillaire par l'équation (15).

Enfin Poisson⁽⁴⁾ étudia par une méthode vraiment rationnelle, les conditions d'équilibre d'une membrane tendue à la surface d'un liquide; il montra que la surface de cette membrane était aussi représentée par l'équation (15) et justifia ainsi l'assimilation faite par Young, de la surface libre d'un liquide soumis aux forces capillaires, et de la surface d'un liquide soustrait aux actions capillaires, mais enveloppé dans une membrane tendue.

Les considérations précédentes mettent en évidence les relations étroites qui existent entre les théories de la capillarité et la théorie de l'équilibre des membranes. Toutefois, la comparaison de la surface capillaire à la forme d'une membrane flexible et extensible qui recouvrirait un liquide pesant n'est point

(1) Séguier. - De figuris superficialium fluidorum (Mémoires de l'Académie de Göttingue T. 1. p. 301).

(2) Young - An Essay of the cohesion of fluids. Lu le 20 Décembre 1804 à la Société royale de Londres (Philosophical Transactions 1805 p. 35)

(3) Laplace. - Mécanique céleste

(4) Poisson. - Mémoire sur les surfaces élastiques, lu à l'Académie le 1^{er} Août 1814.

exacte si l'on ne fait certaines hypothèses sur les conditions aux limites auxquelles la membrane est assujettie.

D'ailleurs, même lorsqu'on fait ces hypothèses, elle n'est évidemment qu'une fiction, très propre à frapper l'imagination et à faire prévoir les résultats d'une théorie directe des phénomènes capillaires, mais incapable de tenir la place d'une semblable théorie.

C'était l'avis de Séguier, dont la théorie reposait sur l'étude de l'attraction moléculaire.

C'était aussi l'avis de Laplace qui écrivit, à la fin du Supplément à la Théorie de l'Action Capillaire :

« La ressemblance de la surface des gouttes liquides et des fluides contenus dans les espaces capillaires avec les surfaces sous les géomètres s'occupèrent à l'origine du calcul infinitésimal, sous les noms de, l'inténaire, d'élastique, etc porta naturellement plusieurs physiciens à considérer les liquides comme étant enveloppés de semblables surfaces qui, par leur tension et leur élasticité, donnaient au liquide les formes indiquées par l'expérience. Séguier, l'un des premiers qui eurent cette idée, sentit bien qu'elle n'était qu'une fiction propre à représenter les phénomènes, mais que l'on ne devait admettre qu'autant qu'elle se rattachait à la loi d'une attraction insensible à des distances sensibles. Il essaya donc d'établir cette dépendance, mais en suivant son raisonnement, il est facile d'en reconnaître l'inexactitude et les résultats auxquels il parvient en sous la preuve..... Lorsque je m'occupais de ces objets, M. Thomas Young en faisait pareillement le sujet de recherches ingénieuses qu'il a insérées dans les Transactions Philosophiques pour l'année 1805. En comparant, avec Séguier, la force capillaire à la tension d'une surface qui envelopperait les liquides et en appliquant à cette force les résultats connus sur la tension des surfaces, il a reconnu qu'il fallait avoir égard à la courbure des surfaces liquides dans deux directions perpendiculaires entre elles; il a de plus supposé que ces surfaces, pour un même liquide, coupent sous le même angle les parois des tubes formés de la même matière, quelle que soit d'ailleurs leur figure, ce qui, comme nous l'avons vu, cesse d'être exact aux extrémités de ces parois. Mais il n'a pas tenté, comme Séguier, de dériver ces hypothèses de la loi de l'attraction des molécules décroissante avec une extrême rapidité, ce qui était indispensable pour les réaliser »

Le même avis est exprimé par Poisson⁽¹⁾ qui, en parlant de l'identité de la surface capillaire avec la surface d'une membrane flexible, dit: « identité qui ne peut être que la conséquence, et non le principe de la solution du

⁽¹⁾ Poisson -- Théorie nouvelle de l'action capillaire p. 2 Paris 1830

problème. »

Ainsi, d'après les grands géomètres qui ont fondé la théorie de l'action capillaire, la théorie de la tension superficielle des liquides doit être reçue comme une image précieuse pour traduire les résultats déduits d'une analyse rigoureuse fondée sur l'hypothèse d'une attraction moléculaire.

Cel n'est point l'avis qui a prévalu auprès de la plupart des physiciens modernes qui ont traité de la capillarité.

Rejetant la suite de raisonnements par lesquels la théorie de la Capillarité peut être déduite de l'hypothèse de l'attraction moléculaire ils admettent d'emblée, à titre de principes, la constance de l'angle de raccordement et l'assimilation de la surface capillaire à la surface d'une membrane flexible et extensible, se contentant d'introduire ces suppositions si complexes, si imprévues, par quelques vagues considérations indignes du nom de raisonnements.

Cette tendance prend sa source, en partie, dans le discrédit que les erreurs de Poisson et de son école ont fini par jeter sur la théorie de l'Attraction moléculaire; mais elle découle surtout d'une infirmité qui, à notre époque, frappe un grand nombre d'esprits.

La complexité extrême de la plupart des questions de Physique exige une attention très soutenue et très fatigante de celui qui veut traiter ces questions par des méthodes entièrement précises, dégager nettement toutes les hypothèses et établir d'une manière rigoureuse l'enchaînement des déductions. Soit par paresse d'esprit, soit par hâte d'arriver au but, soit par ignorance des théories mathématiques, appui indispensable du raisonnement, la plupart des physiciens s'écartent de cette méthode, pour se contenter de vagues aperçus et d'analogies admises sans preuves. Ceux que le génie soutient dans l'emploi de cette méthode incorrecte n'en recueillent pas moins une riche moisson de vérités. Mais les hommes de moindre intelligence, en se privant de la garantie que l'appareil mathématique apporte à la logique se sont condamnés à l'impuissance et à l'erreur, et leurs efforts ont souvent abouti à faire rétrograder la science.

C'est ce qui est arrivé pour la théorie de la Capillarité. Elle a perdu cette rigueur et cette généralité que Gauss lui avait donnée pour devenir un amas confus de raisonnements par à peu près.

Une seule remarque permet de juger l'absence d'esprit scientifique qui caractérise les travaux dont nous parlons. Parmi tant d'exposés de la théorie des phénomènes capillaires, fondée sur l'assimilation de la surface d'un liquide à une membrane flexible, il n'en est pas un seul qui expose et démontre les lois de l'équilibre des membranes. Il est vrai que l'établissement de ces lois

exigerai des considérations mathématiques aussi compliquées que celles dont on prétend s'affranchir par leur emploi.

Chapitre VIII.

Les Petits Mouvements d'une Membrane plane.

§ 1^{er}. Equations des petits mouvements d'une Membrane plane

L'extension donnée par les principes de la Thermodynamique (1^{re} Partie, p. 18) du principe de d'Alembert, montre que, pour déduire les lois du mouvement des membranes des lois de leur équilibre, il suffit de remplacer, dans les équations d'équilibre, la force extérieure donnée

$$\rho X dS, \quad \rho Y dS, \quad \rho Z dS,$$

qui agit sur l'élément superficiel dS de la membrane par la grandeur

$$\rho (X - \delta_x) dS, \quad \rho (Y - \delta_y) dS, \quad \rho (Z - \delta_z) dS,$$

$\delta_x, \delta_y, \delta_z$, étant les composantes de l'accélération d'un point de l'élément dS .

L'étude du mouvement d'une membrane présente une difficulté déjà rencontrée dans l'étude du mouvement des fluides et dans l'étude du mouvement des fils et qui, nous l'avons dit, est générale. Le nombre des variables est supérieur d'une unité au nombre des équations que fournit la Thermodynamique, celle-ci ne nous enseignant pas comment varie la température aux divers points du système. Une hypothèse supplémentaire nous est nécessaire pour achever la mise en équation du problème. Dans le cas où la membrane n'est animée que d'un très petit mouvement, on peut supposer sa température constante et justifier cette supposition comme on a justifié, pour les fils, une supposition analogue (Chapitre III).

C'est à ce cas d'une membrane animée de très petits mouvements que nous bornerons nos recherches; encore nous limiterons nous dans le présent Chapitre, à un cas extrêmement particulier compris dans celui-là.

Nous concevons qu'une membrane, sur laquelle n'agit aucune force ait été uniformément tendue sur un cadre plan L ; puis qu'après avoir extrêmement peu déformé ce système, on l'abandonne à lui-même; il sera

alors animé de mouvements toujours très petits, si l'on suppose remplies les conditions de stabilité que nous avons précisées au Chapitre V; ce sont ces mouvements très petits que nous allons étudier.

Nous prendrons pour plan des (x, y) le plan du cadre L sur laquelle la membrane est tendue à l'état de repos.

Considérons un point matériel qui dans l'état de repos de la membrane, se trouvait au point géométrique qui a pour coordonnées

$$x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = 0.$$

À l'instant t , il se trouve en un point géométrique qui a pour coordonnées

$$x = x_0 + \xi, \quad y = y_0 + \eta, \quad z = z_0 + \zeta$$

ξ, η, ζ , sont des fonctions des trois variables t, x_0, y_0 ; par hypothèse, elles sont toujours très petites.

Les équations du mouvement de la membrane s'obtiennent en remplaçant respectivement, dans les égalités (31) et (32) du Chapitre V, X, Y, Z , par $-\delta x, -\delta y, -\delta z$; ces équations sont donc:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta x + p \delta z = \frac{1}{F(\Theta)} \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \delta y + q \delta z = \frac{1}{F(\Theta)} \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \\ p \delta x + q \delta y - \delta z = -\frac{1}{F(\Theta)} \frac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{1+p^2+q^2}. \end{array} \right.$$

Considérons les quantités ξ, η, ζ , comme des infiniment petits du premier ordre, nous allons nous proposer de mettre ces équations sous une forme plus simple, en y négligeant des termes du second ordre par rapport à ξ, η, ζ .

Nous aurons en premier lieu

$$\delta x = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2},$$

$$\delta y = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2},$$

$$\delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}.$$

Les quantités $\delta x, \delta y, \delta z$, sont donc des quantités infiniment petites du premier ordre.

Il en est évidemment de même des quantités

$$p, \quad q, \\ r, \quad s, \quad t.$$

On peut donc, en négligeant seulement des termes infiniment petits du second ordre, écrire les équations (1) sous la forme:

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{F(\Theta)} \frac{\partial \Theta}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{1}{F(\Theta)} \frac{\partial \Theta}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{1}{F(\Theta)} \frac{\partial \Theta}{\partial z}. \end{array} \right.$$

La quantité $\frac{\Theta}{F(\Theta)}$ diffère infiniment peu de $\frac{\Theta_0}{F(\Theta_0)}$ ou de $\frac{\Theta_0}{\rho_0}$, qui est sa valeur lorsque la membrane est en équilibre ; comme r et t sont infiniment petits, on pourra, dans la troisième équation (2) remplacer $\frac{\Theta}{F(\Theta)}$ par $\frac{\Theta_0}{\rho_0}$.

On a

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_0^2} = r \left(\frac{\partial x}{\partial x_0} \right)^2 + 2s \frac{\partial x}{\partial x_0} \frac{\partial y}{\partial x_0} + t \left(\frac{\partial y}{\partial x_0} \right)^2 + p \frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2} + q \frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2} ;$$

Mais

$$\frac{\partial x}{\partial x_0} = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x_0},$$

$$\frac{\partial y}{\partial x_0} = \frac{\partial \eta}{\partial x_0},$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_0^2} = \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2}.$$

L'égalité précédente devient donc, en négligeant les infiniment petits du second ordre

$$r = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2}.$$

On trouverait de même

$$t = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y_0^2}.$$

La dernière équation (2) devient donc

$$(3) \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{\Theta_0}{\rho_0} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y_0^2} \right).$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial x_0} &= \frac{\partial \Theta}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x_0} \\ &= \frac{\partial \Theta}{\partial x} \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x_0} \right) + \frac{\partial \Theta}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x_0}. \end{aligned}$$

Si l'on observe que $\frac{\partial \Theta}{\partial x}$, $\frac{\partial \Theta}{\partial y}$ sont des quantités infiniment petites, on pourra écrire :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial \Theta}{\partial x_0} ,$$

ou pareillement

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{\partial \Theta}{\partial y_0} .$$

Les deux premières égalités (2) pourront donc s'écrire :

$$(4) \text{ ----- } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Theta}{\partial x_0} , \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Theta}{\partial y_0} . \end{array} \right.$$

Soit Θ_0 la tension de la membrane en équilibre ; nous pourrions poser

$$\Theta = \Theta_0 + \frac{d\Theta_0}{d\rho_0} (\rho - \rho_0) ,$$

$(\rho - \rho_0)$ étant une quantité infiniment petite. D'ailleurs, si nous désignons par dS_0 l'aire d'un élément de la membrane au repos, et par dS , l'aire de ce même élément au temps t , nous aurons

$$(\rho - \rho_0) = -\rho_0 \frac{dS - dS_0}{dS_0} .$$

On a donc :

$$(5) \text{ ----- } \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Theta}{\partial x_0} = -\frac{d\Theta_0}{d\rho_0} \frac{\partial}{\partial x_0} \frac{dS - dS_0}{dS_0} , \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Theta}{\partial y_0} = -\frac{d\Theta_0}{d\rho_0} \frac{\partial}{\partial y_0} \frac{dS - dS_0}{dS_0} . \end{array} \right.$$

Or la quantité $(dS - dS_0)$ est donnée par l'égalité (14) du Chapitre V, dans laquelle nous devons faire :

$$\begin{aligned} u &= x_0 , & v &= y_0 , \\ \mathcal{A}u &= \xi , & \mathcal{A}v &= \eta , \\ A &= 1 , & B &= 1 , \\ dx_0 dy_0 &= dS_0 , \\ \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} &= 0 . \end{aligned}$$

On a alors

$$(6) \text{ ----- } \frac{dS - dS_0}{dS_0} = \frac{\partial \xi}{\partial x_0} + \frac{\partial \eta}{\partial y_0} .$$

Les égalités (5) deviennent donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Theta}{\partial x_0} &= -\frac{d\Theta_0}{d\rho_0} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y_0^2} \right) , \\ \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \Theta}{\partial y_0} &= -\frac{d\Theta_0}{d\rho_0} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2} \right) , \end{aligned}$$

et les égalités (4) deviennent —

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{d \Theta_0}{d \rho_0} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2 \partial y_0^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = - \frac{d \Theta_0}{d \rho_0} \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_0^2 \partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y_0^2} \right).$$

(D'après les conditions de stabilité trouvées au Chapitre V, les quantités Θ_0 et $(-\frac{d \Theta_0}{d \rho_0})$ doivent être positives. Si donc on pose

$$(7) \text{ ----- } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Theta_0}{\rho_0} = A^2, \\ -\frac{d \Theta_0}{d \rho_0} = \alpha^2, \end{array} \right.$$

on aura pour lois du mouvement de la membrane, les équations aux dérivées partielles que voici :

$$(8) \text{ ----- } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2 \partial y_0^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y_0^2 \partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial y_0^2} \right), \end{array} \right.$$

$$(9) \text{ ----- } \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y_0^2} \right).$$

Ces équations aux dérivées partielles doivent avoir lieu pour tous les points de la membrane et à tous les instants du mouvement. À ces équations, on doit joindre des conditions initiales et des conditions aux limites.

Au début du mouvement, dans toute l'étendue de la membrane les quantités

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

sont des fonctions données de x_0, y_0 .

Pendant toute la durée du mouvement, et pour les valeurs de x_0, y_0 qui correspondent au contour L , les quantités

$$\xi, \quad \eta, \quad \zeta,$$

sont des fonctions données de t .

Nous arrivons donc ainsi à la conclusion suivante:

Quelque soit le petit mouvement qui anime une membrane homogène et primitivement plane, ce mouvement peut toujours se décomposer en deux autres qui peuvent se déterminer séparément.

Dans le premier chaque point de la membrane se déplace suivant la normale à la membrane. Son déplacement est défini par l'égalité (9).

$$\frac{dS - dS_0}{dS_0} = \frac{\partial \xi}{\partial x_0} + \frac{\partial \eta}{\partial y_0}$$

montre que, dans un semblable mouvement, chaque élément superficiel de la membrane éprouve une dilatation qui est un infiniment petit d'ordre supérieur.

Dans le second mouvement, chaque point de la membrane se déplace dans le plan même de la membrane. Ce mouvement, accompagné de contractions et de dilatations, est représenté par les équations (9).

L'étude des vibrations des membranes est fort ancienne; mais la mise en équation du problème a été demandée, par la plupart des auteurs, à la théorie des plaques; Lagrange seul a évité cette confusion sur laquelle nous insisterons au début du Livre IV.

C'est Euler qui a le premier étudié les vibrations que les membranes tendues peuvent effectuer suivant la normale à leur plan. Par un raisonnement peu rigoureux, où il assimilait une membrane rectangulaire à un lacs de cordes s'entrecroisant, il parvint⁽¹⁾ à l'équation.

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = A^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2} + B^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial y_0^2},$$

A^2 et B^2 étant deux constantes différentes.⁽¹⁾

Lagrange⁽²⁾, ayant marqué la véritable méthode sur laquelle doit être fondée l'étude des membranes, attribua à ces deux constantes la même valeur et donna ainsi l'équation (9). Biot et Brisson⁽³⁾ se servirent de cette équation de Lagrange dans l'étude expérimentale des vibrations des membranes. Mais Poisson⁽⁴⁾ crut devoir reprendre la forme d'équation donnée par Euler, et ne regarder la forme plus simple de Lagrange que comme un cas particulier. Toutefois, dans les applications, il a fait usage, en général de l'équation fournie par la méthode de Lagrange.

Les mouvements que peuvent éprouver les divers points d'une membrane sans sortir du plan de cette membrane ont été fort peu étudiés. Poisson les a considérés; mais, déduisant la théorie des membranes de la théorie des plaques, il a obtenu⁽⁵⁾ pour ces mouvements, des équations aux dérivées partielles

⁽¹⁾ Euler. Novi commentarii Academiae Petropolitanae. Tome X. p. 247.

⁽²⁾ Lagrange. Mécanique Analytique 1^{re} Partie. Section V. N^o. 45 (2^e Edition)

⁽³⁾ Biot et Brisson. Mémoires de la 1^{re} Classe de l'Institut. T. IV. p. 421.

⁽⁴⁾ Poisson. Mémoire sur les surfaces élastiques. — Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des Corps élastiques.

⁽⁵⁾ Poisson. — Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des Corps élastiques. N^o. 56.

trois différentes des équations (8), et qui sont les suivantes :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2} + \frac{5}{8} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0 \partial y_0} + \frac{3}{8} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y_0^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial y_0^2} + \frac{5}{8} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y_0 \partial x_0} + \frac{3}{8} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2} \right),$$

Lamé⁽¹⁾ a de même obtenu les équations

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 4(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \xi}{\partial x_0^2} + (3\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0 \partial y_0} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y_0^2},$$

$$\rho \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = 4(\lambda + \mu) \frac{\partial^2 \eta}{\partial y_0^2} + (3\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \xi}{\partial y_0 \partial x_0} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 \eta}{\partial x_0^2},$$

λ et μ étant deux constantes qui dépendent de la nature de la membrane.
Ces équations de Lamé reproduisent les équations de Poisson, si l'on y fait

$$\lambda = \mu, \quad A^2 = \frac{8\lambda}{\rho}.$$

Elles reproduiraient nos équations (8) si l'on y faisait

$$\mu = -\frac{\lambda}{2}, \quad A^2 = \frac{2\lambda}{\rho}.$$

Nous allons étudier d'abord les petits mouvements qui s'effectuent suivant une normale à la membrane; nous étudierons ensuite les petits mouvements où chaque point demeure dans la membrane.

§. II. L'Equation $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)$. Vitesse de propagation d'un ébranlement transversal à la surface d'une membrane.

L'étude des petits mouvements d'une membrane plane dans lesquels chaque point se déplace suivant la normale à la membrane est ramenée à l'étude d'une équation aux dérivées partielles du second ordre, l'équation (9) qui est du type suivant :

$$(10) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right).$$

Cette équation, où A^2 est une constante, rappelle par sa forme l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2},$$

⁽¹⁾ Lamé. Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Elasticité des Corps Solides 2^e Edition. p. 112.

dont dépendent les petits mouvements tant longitudinaux que transversaux des cordes flexibles, et l'équation

$$(11) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right),$$

dont dépendent les petits mouvements des fluides.

On est porté à croire, d'après l'analogie de ces équations, que les petits mouvements transversaux des membranes doivent présenter les plus étroites analogies avec les petits mouvements des fluides.

Sans méconnaître ces analogies, qui sont réelles, il faudrait se garder, cependant, de les exagérer; il faudrait se garder, par exemple, de transporter aux intégrales de l'équation (10) toutes les propriétés obtenues pour les intégrales de l'équation (11). On serait ainsi conduit à des erreurs, comme nous l'allons montrer.

L'étude de l'équation (11) est donnée par une propriété fondamentale de cette équation; cette propriété, démontrée par Euler, est celle qui sert de point de départ à la théorie des Ondes sphériques [Livre II, Chapitre XIII]; elle consiste dans la possibilité d'intégrer l'équation (10) par une expression de la forme

$$(12) \dots \dots \dots \varphi = \frac{F(r - At) + G(r + At)}{r},$$

où r est la distance du point (x, y, z) à un point fixe, et où F et G sont deux fonctions arbitraires.

Ce résultat est le fondement du Théorème par lequel Poisson intègre d'une manière générale l'équation (11) et de la proposition dans laquelle Kirchhoff [Livre II, Chapitre VII] a compris le Théorème de Poisson comme cas particulier.

Or, il est impossible d'obtenir, pour l'équation (10), une intégrale dont la forme rappelle celle de la fonction φ donnée par l'égalité (12)

Cherchons si l'on peut trouver une fonction $\psi(r)$ telle que l'expression

$$(13) \dots \dots \dots \varphi = \psi(r) F(r - At)$$

intègre l'équation (10), quelle que soit la fonction F .

Si nous prenons pour φ cette expression (13), nous trouverons

$$A^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A^2 \left[\frac{1}{r} \frac{d\psi(r)}{dr} + \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} \right] F(r - At) \\ + A^2 \left[\frac{1}{r} \psi(r) + 2 \frac{d\psi(r)}{dr} \right] \frac{dF(r - At)}{dr}$$

Si nous voulons que cette quantité soit égale à 0 quelle que soit la fonction F , nous voyons que la fonction ψ doit vérifier les deux équations

$$(14) \dots \dots \dots \frac{1}{r} \psi(r) + 2 \frac{d\psi(r)}{dr} = 0,$$

$$(15) \dots\dots\dots \frac{1}{r} \frac{d\psi(r)}{dr} + \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} = 0$$

L'équation (14) intégrée, donne

$$\psi(r) = \frac{K}{r^{\frac{1}{2}}},$$

K étant une constante. Moyennant cette expression de $\psi(r)$, on trouve

$$\frac{1}{r} \frac{d\psi(r)}{dr} + \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} = \frac{1}{4} \frac{K}{r^{\frac{5}{2}}},$$

en sorte que l'égalité (15) n'est point vérifiée.

Il n'est donc pas possible de donner des ondes circulaires à la surface d'une membrane une théorie analogue à celles des ondes sphériques dans un fluide.

Ce résultat nous conduit à nous poser la question suivante. — Étant donnée l'équation

$$(16) \dots\dots\dots \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dots\dots\dots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \right),$$

où les variables $x, y, \dots\dots\dots z$, sont en nombre n , dans quel cas peut-on l'intégrer par une expression de la forme

$$(17) \dots\dots\dots \varphi = \psi(r) F(r - At),$$

r étant défini par l'égalité:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \dots\dots\dots + (z - z_0)^2,$$

où $x_0, y_0, \dots\dots\dots z_0$ sont des constantes et où F est une fonction arbitraire?

Nous aurons:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} &= \left\{ \left[\frac{1}{r} - \frac{(x-x_0)^2}{r^3} \right] \frac{d\psi(r)}{dr} + \frac{(x-x_0)^2}{r^2} \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} \right\} F(r - At) \\ &+ \left\{ \left[\frac{1}{r} - \frac{(x-x_0)^2}{r^3} \right] \psi(r) + \frac{2(x-x_0)^2}{r^2} \frac{d\psi(r)}{dr} \right\} \frac{dF(r - At)}{dr} \\ &+ \frac{(x-x_0)^2}{r^2} \psi(r) \frac{d^2F(r - At)}{dr^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{A^2} \psi(r) \frac{d^2F(r - At)}{dr^2}$$

De ces égalités, nous déduisons

$$\begin{aligned} A^2 \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \dots\dots\dots + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \\ = \left[\frac{(n-1)d\psi(r)}{dr} + \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} \right] F(r - At) + \left[\frac{(n-1)\psi(r)}{r} + 2 \frac{d\psi(r)}{dr} \right] \frac{dF(r - At)}{dr} \end{aligned}$$

Si nous voulons que cette quantité soit nulle, quelle que soit la fonction F ,

nous devons avoir

$$(18) \dots \dots \dots \frac{(n-1)}{r} \frac{d\psi(r)}{dr} + \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} = 0,$$

$$(19) \dots \dots \dots \frac{(n-1)}{r} \psi(r) + 2 \frac{d\psi(r)}{dr} = 0.$$

L'égalité (19), intégrée, donne :

$$(20) \dots \dots \dots \psi(r) = K r^{-\left(\frac{n-1}{2}\right)},$$

K étant une constante.

De cette égalité (20), nous déduisons

$$\frac{d\psi(r)}{dr} = -\frac{n-1}{2} K r^{-\left(\frac{n+1}{2}\right)},$$

$$\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n+1}{2} K r^{-\left(\frac{n+3}{2}\right)},$$

et, par conséquent,

$$\frac{n-1}{r} \frac{d\psi(r)}{dr} + \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} = -\frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} K r^{-\left(\frac{n+3}{2}\right)}$$

Cette quantité n'est identiquement nulle, et partant les deux équations (18) et (19) ne peuvent être simultanément satisfaisantes que si n a l'une des deux valeurs

Dans le premier cas $n=1$ et $n=3$ l'égalité (20) donne

$$\psi = k,$$

et dans le second l'égalité (20) donne

$$\psi = \frac{K}{r}.$$

Si donc nous étudions l'équation générale (16), que nous pouvons nommer l'équation des petits mouvements des fluides élastiques dans l'espace à n dimensions, nous voyons qu'elle ne pourra admettre une intégrale de la forme (17), à moins que le nombre des dimensions de l'espace ne soit 1 ou 3.

La théorie si simple des ondes planes et des ondes sphériques ne peut s'étendre ni aux ondes circulaires à la surface d'une membrane, ni aux ondes sphériques dans un espace à n dimensions.

La démonstration du Théorème de G. Kirchhoff [Livre II, Chapitre VII, § II] repose essentiellement sur la possibilité d'intégrer l'équation (11) par une expression de la forme

$$\varphi = \frac{F(r-At)}{r}$$

Cette démonstration ne saurait donc être répétée pour les intégrales de l'équation (10), auxquelles on ne peut étendre le Théorème de G. Kirchhoff

Cette remarque entraîne, au point de vue des Théories de l'Optique

une conséquence importante que nous allons indiquer brièvement :

Kirchhoff a fondé sur ce Théorème une explication, qui est la plus parfaite connue jusqu'ici, des phénomènes de diffraction produits par les ondes sphériques qui émanent d'un point lumineux ; il n'est pas possible de donner une explication analogue des phénomènes de diffraction produits par les ondes cylindriques qui émanent d'une ligne lumineuse indéfinie.

Le Théorème par lequel Poisson intègre d'une manière générale l'équation (11), peut être regardé comme une conséquence naturelle du Théorème de G. Kirchhoff ; il est donc à prévoir qu'il tombe avec ce dernier. Toutefois la conclusion à laquelle on parvient dépend de la manière dont on veut généraliser le Théorème de Poisson.

Si $F(x, y, z)$ et $G(x, y, z)$, sont deux fonctions régulières arbitrairement données, nous savons [1^o Partie, p. p. 164 et seqq.] que la quantité

$$\varphi(x_0, y_0, z_0, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi t G(x_0 + At \cos u, y_0 + At \sin u \sin v, z_0 + At \sin u \cos v) \sin u \, du \, dv \\ + \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi t F(x_0 + At \cos u, y_0 + At \sin u \sin v, z_0 + At \sin u \cos v) \sin u \, du \, dv$$

représente l'intégrale générale de l'équation

$$(11) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_0^2} \right).$$

Dès lors, il est évident, comme Poisson,⁽¹⁾ et avant lui Poiseval,⁽²⁾ l'aient remarqué, qu'il suffit de supposer les deux fonctions F et G indépendantes de la variable z pour que le même procédé fournisse une fonction φ , indépendante de z_0 , intégrant l'équation

$$(10) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_0^2} \right)$$

Mais l'intégrale de l'équation (10) obtenue par cette méthode ne se prête pas à la discussion comme l'intégrale de l'équation (11) fournie par la même méthode. Pour donner prise aux mêmes raisonnements, il faudrait que l'intégrale générale de l'équation (10) fût représentée non par une intégrale double, mais par une intégrale simple étendue à une circonférence ayant pour centre le point (x_0, y_0) .

La forme sous laquelle devrait, pour qu'il en soit ainsi, se présenter l'intégrale générale de l'équation (10) serait la suivante :

$$\varphi(x_0, y_0, t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{f(t)}{2\pi A t} \int_c F(x, y) \, dL \right] + \frac{g(t)}{2\pi A t} \int_c G(x, y) \, dL,$$

(1) Poisson. Mémoire sur l'Intégration de quelques équations aux différences partielles et particulièrement de l'équation générale du mouvement des fluides élastiques. Art. 8.

(2) Lacroix. Traité des différences et des Séries. 1^o Edition. page 515.

les deux fonctions $F(x, y)$, $G(x, y)$ étant deux fonctions régulières arbitrairement données, et les intégrations s'étendant au cercle C qui a pour centre le point (x_0, y_0) et pour rayon At .

Si l'on se reporte à ce que nous avons dit ailleurs (1^{re} Partie, pp. 164 et suivantes) on voit sans peine que la question à examiner se présente alors à nous sous la forme suivante :

Soit $F(x, y)$ une fonction régulière arbitrairement donnée dans une aire E . Dans cette aire, traçons une circonférence C de centre $O(x_0, y_0)$ et de rayon At (fig. 66). La moyenne des valeurs de la fonction F sur cette circonférence est

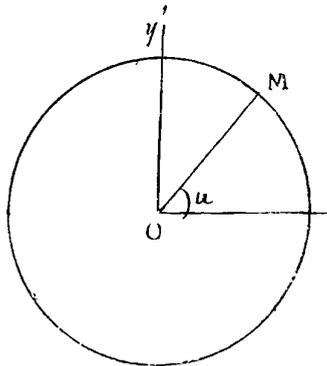


Fig. 66.

$$\psi = \frac{1}{2\pi At} \int_C F(x, y) dL.$$

C'est une fonction de x_0, y_0 et de t .
Peut-on trouver une fonction $f(t)$ telle que la fonction

$$\varphi(x_0, y_0, t) = f(t) \psi(x_0, y_0, t)$$

vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_0^2} \right) ?$$

Si l'on peut trouver une semblable fonction, on pourra étendre le théorème de Poisson [Livre II, Chapitre VII, § 2] aux intégrales de l'équation (10). Sinon, il faudra renoncer à une semblable extension.

Soit M un point de la circonférence C . Soit u l'angle de OM avec l'axe des x . Nous aurons

$$\begin{aligned} x &= x_0 + At \cos u, \\ y &= y_0 + At \sin u, \\ dL &= At du, \end{aligned}$$

et par conséquent

$$\varphi = \frac{f(t)}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x_0 + At \cos u, y_0 + At \sin u) du;$$

de cette égalité, nous déduisons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= \frac{1}{2\pi} \frac{df(t)}{dt} \int_0^{2\pi} F(x_0 + At \cos u, y_0 + At \sin u) du \\ &+ \frac{Af(t)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \cos u + \frac{\partial F}{\partial y_0} \sin u \right) du, \end{aligned}$$

et

$$(21) \dots \dots \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \int_0^{2\pi} F(x_0 + At \cos u, y_0 + At \sin u) du + \frac{2A}{2\pi} \frac{df(t)}{dt} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \cos u + \frac{\partial F}{\partial y_0} \sin u \right) du$$

$$+ \frac{A^2}{2\pi} f(t) \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} \cos^2 u - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} \cos u \sin u + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} \sin^2 u \right) du.$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \cos u + \frac{\partial F}{\partial y_0} \sin u \right) du \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \sin u - \frac{\partial F}{\partial y_0} \cos u \right) \Big|_0^{2\pi} \\ & - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} \sin u - \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} \cos u \right) du. \end{aligned}$$

Or on a évidemment

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \sin u - \frac{\partial F}{\partial y_0} \cos u \right) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

D'autre part

$$\frac{\partial F}{\partial u} = -At \left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \sin u - \frac{\partial F}{\partial y_0} \cos u \right),$$

en sorte que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial x_0} = -At \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} \sin u - \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} \cos u \right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial y_0} = -At \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y_0 \partial x_0} \sin u - \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} \cos u \right).$$

On a donc, tout calcul fait

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial F}{\partial x_0} \cos u + \frac{\partial F}{\partial y_0} \sin u \right) du \\ &= At \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} \sin^2 u - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} \sin u \cos u + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} \cos^2 u \right) du \end{aligned}$$

et l'égalité (21) devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= \frac{1}{2\pi} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \int_0^{2\pi} F(x_0 + At \cos u, y_0 + At \sin u) du \\ &+ \frac{A^2}{2\pi} \left[2t \frac{df(t)}{dt} - f(t) \right] \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} \sin^2 u - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} \sin u \cos u + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} \cos^2 u \right) du \\ &+ \frac{A^2}{2\pi} f(t) \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} \right) du \end{aligned}$$

Mais on a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_0^2} = \frac{f(t)}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} \right) du.$$

On a donc :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - A^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y_0^2} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} \int_0^{2\pi} F(x_0 + At \cos u, y_0 + At \sin u) du \\ &+ \frac{A^2}{2\pi} \left[2t \frac{df(t)}{dt} - f(t) \right] \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_0^2} \sin^2 u - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x_0 \partial y_0} \sin u \cos u + \frac{\partial^2 F}{\partial y_0^2} \cos^2 u \right) du. \end{aligned}$$

Pour que le Théorème de Poisson puisse s'étendre aux intégrales de l'équation (10), il faut et il suffit que le second membre soit égal à 0 quelle que soit la fonction F . Il faut et il suffit pour cela que la fonction $f(t)$ vérifie les deux équations

$$\begin{aligned} 2t \frac{df(t)}{dt} - f(t) &= 0, \\ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} &= 0. \end{aligned}$$

La première donne

$$f(t) = Ct^{\frac{1}{2}},$$

C étant une constante, et la seconde exige que

$$C = 0.$$

Le procédé de Poisson ne permet donc pas d'intégrer l'équation (10).

D'une manière plus générale, considérons l'équation

$$(22) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right),$$

où le nombre des variables x, y, \dots, z est égal à n . Soit $F(x, y, \dots, z)$ une fonction régulière de ces n variables. Dans l'espace à n dimensions, décrivons une sphère S ayant le point x, y, \dots, z pour centre et At pour rayon. Soit σ la surface de la sphère de rayon 1 dans l'espace à n dimensions.

Posons

$$\varphi = \frac{f(t)}{\sigma (At)^{n-1}} \int F dS$$

et cherchons à quelle condition cette fonction φ intégrera l'équation (22).

Nous trouverons, en excluant le cas de $n = 1$, que cette fonction φ intègre l'équation (22) seulement dans le cas où le nombre des variables x, y, \dots, z est égal à 3, $f(t)$ a alors la valeur Ct et on retrouve le procédé de Poisson.

Ainsi le théorème de Poisson comme le Théorème de G. Kirchhoff, s'applique à l'équation de la propagation du son dans un espace à trois dimensions, mais ne peut s'étendre aux espaces ayant deux dimensions ou aux espaces ayant plus de trois dimensions.

Il est assurément curieux de voir que c'est seulement dans le cas

où le nombre des variables x, y, \dots, z est égal à 3 que l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right)$$

donne prise à des méthodes analogues à celles qui permettent d'étudier les intégrales de l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Parmi les résultats obtenus dans l'étude de l'équation

(11) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A^2 \Delta \varphi,$

il en est quelques uns qui peuvent s'appliquer à l'équation

(10) $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right).$

Signalons en premier lieu celui-ci :

Les intégrales de l'Equation (10) ne sont pas forcément analytiques.

Pour démontrer l'exactitude de cette assertion, il suffit de remarquer qu'on peut intégrer l'équation (10) en posant

$$\varphi = F(x - At) + G(x + At) + F'(y - At) + G'(y + At),$$

F, F', G, G' , sont quatre fonctions arbitraires qui ne sont pas forcément analytiques.

Traçons, sur la membrane, une courbe L , et supposons que cette courbe partage, la membrane en deux régions où à l'instant t , la fonction φ a des déterminations analytiques différentes que nous désignerons par φ et φ' . Cette courbe L se déplace avec le temps. Au temps $(t + dt)$, elle est venue en L' . Soit dn la distance normale des deux courbes L et L' . Si nous supposons seulement que l'on ait constamment, sur la courbe L ,

$$\varphi = \varphi',$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi'}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi'}{\partial t}$$

nous pouvons démontrer par la méthode d'Hugoniot (Livre II, Chapitre IX, § 2) que l'on a

$$\left(\frac{dn}{dt} \right)^2 = A^2.$$

Ainsi, si un petit mouvement transversal se propage à la surface d'une membrane primitivement immobile ou animée d'un autre petit mouvement transversal, il s'y propage avec une vitesse constante A .

Le théorème d'Hugoniot s'étend sans peine aux intégrales de l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \dots + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right),$$

où le nombre des variables x, y, \dots, z est quelconque ; il règle la déformation de la surface qui dans l'espace à n dimensions, sépare deux régions où la fonction φ a des déterminations analytiques différentes. Il nous apparaît comme la propriété la plus générale des fonctions définies par une semblable équation aux dérivées partielles.

Lorsque la fonction φ ne doit dépendre que du temps t et de la distance r du point (x, y, z) à un point fixe $O(x_0, y_0, z_0)$ l'intégrale générale de l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right)$$

se réduit à la célèbre intégrale d'Euler

$$\varphi = \frac{F(r - At) + G(r + At)}{r},$$

F et G étant deux fonctions arbitraires. Nous avons vu que l'équation

$$(10) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)$$

n'admettait aucune intégrale de cette forme. Cherchons la forme que devra avoir la fonction φ des deux variables r et t pour que l'équation (10) soit vérifiée, nous obtiendrons ainsi la loi des mouvements transversaux se propageant par ondes circulaires à la surface d'une membrane plane.

Si la fonction φ dépend seulement des deux variables r et t nous aurons

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \left(\frac{x - x_0}{r} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \left[\frac{1}{r} - \frac{(x - x_0)^2}{r^3} \right],$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \left(\frac{y - y_0}{r} \right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \left[\frac{1}{r} - \frac{(y - y_0)^2}{r^3} \right],$$

et l'équation (10) deviendra

$$(23) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right).$$

Cette équation aux dérivées partielles (23) est un cas particulier de l'équation suivante :

$$(24) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\mu}{r^2} \varphi \right)$$

où λ et μ sont deux constantes arbitraires.

L'étude de cette équation (24) a fait l'objet de l'un des plus beaux Mémoires de Poisson⁽¹⁾. Avant lui, elle avait fait l'objet d'importants travaux

⁽¹⁾ Poisson. Mémoires sur l'intégration des équations aux Différences partielles lu à l'Académie des Sciences le 31 Décembre 1821. Journal de l'École Polytechnique, XIX^e, Cahier. p. 215.

qu'il résume en ces termes: "Euler en a donné, il y a longtemps, l'intégrale complète soit en série infinie, soit sous forme finie, quand cette forme est possible; et c'est à son occasion qu'il a fait la remarque importante et nouvelle alors, que l'intégrale d'une équation aux différences partielles doit le plus souvent contenir non seulement des fonctions arbitraires, mais aussi leurs coefficients différentiels. Lagrange avait déjà considéré des cas particuliers de cette même équation, dans ses recherches sur la Théorie du son et sur les Cordes vibrantes; et enfin elle est comprise parmi celles que M. Laplace a traitées dans un de ses premiers Mémoires et ensuite, sous un autre point de vue, dans sa Théorie des Fonctions Génératrices. Mais malgré tous les travaux dont elle a été l'objet, on va voir que la matière est loin d'être épuisée et que l'intégration de cette équation peut encore donner lieu à des remarques nouvelles qui ne seront pas sans intérêt."

Dans le cas particulier où l'on a

l'équation (24) redonne la célèbre équation des Cordes vibrantes. Si l'on y fait

$$\lambda = 0, \mu = 0,$$

$$\lambda = 1, \mu = 0$$

on retrouve l'équation (23).

Poisson a mis (loc. cit. p. 227) l'intégrale générale de cette dernière sous la forme:

$$(25) \dots \dots \dots \varphi(r, t) = \int_0^\pi F(r \cos \omega + At) d\omega \\ + \int_0^\pi G(r \cos \omega + At) \log(r \sin^2 \omega) d\omega,$$

F et G étant deux fonctions régulières arbitrairement données. On voit combien cette fonction diffère profondément de la fonction

$$\varphi(r, t) = \frac{F(r - At) + G(r + At)}{r}$$

dont dépendent les lois de la propagation par ondes sphériques du son dans l'air.

§ III. - Les petits mouvements situés dans le plan d'une membrane.

Les déplacements qui ne font pas sortir les divers points matériels de la membrane du plan de cette membrane sont régis par les équations

$$(8) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial x_0} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_0} + \frac{\partial \eta}{\partial y_0} \right), \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial}{\partial y_0} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x_0} + \frac{\partial \eta}{\partial y_0} \right). \end{array} \right.$$

Ces déplacements sont accompagnés d'une dilatation des divers éléments superficiels de la membrane. Si l'on désigne par σ cette dilatation, on aura, d'après ce que nous avons vu au § I,

$$(6) \dots \dots \dots \sigma = \frac{dS - dS_0}{dS_0} = \frac{\partial \xi}{\partial x_0} + \frac{\partial \eta}{\partial y_0} .$$

Si nous différentions la première des équations (8) par rapport à x_0 , la seconde par rapport à y_0 , et si nous ajoutons membre à membre les équations obtenues en tenant compte de l'égalité (6) nous trouvons

$$(26) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y_0^2} \right) .$$

Ainsi, les petits mouvements des divers points d'une membrane qui ont lieu dans le plan même de la membrane entraînent une dilatation superficielle des diverses parties de la membrane. Cette dilatation vérifie une équation aux dérivées partielles de la même forme que celle qui régit les petits mouvements normaux au plan de la membrane.

L'application du Théorème d'Hugoniot à l'équation (26) entraîne alors la conséquence suivante :

À la surface d'une membrane plane, une onde dilatante se propage avec une vitesse uniforme égale à a , la quantité a étant définie par l'une des égalités (7).

Examinons un cas particulier : celui où le déplacement est, en chaque point de la membrane, dirigé suivant la ligne qui joint ce point à l'origine O des coordonnées, et où la grandeur de ce déplacement est la même, à un même instant, en tous les points d'une circonférence ayant pour centre le point O .

Ces hypothèses conduisent à écrire :

$$(27) \dots \dots \dots \xi = \varphi \frac{x_0}{r}, \quad \eta = \varphi \frac{y_0}{r},$$

φ étant une fonction des deux variables r et t .

Ces égalités (27) nous donnent en premier lieu

$$\sigma = \frac{\partial \xi}{\partial x_0} + \frac{\partial \eta}{\partial y_0} = \frac{\varphi}{r} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} .$$

À un même instant t , la dilatation a la même valeur en tous les points d'une circonférence ayant pour centre le point O .

Les égalités (8) deviendront :

$$\frac{x_0}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \varphi \right) \frac{x_0}{r},$$

$$\frac{y_0}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \varphi \right) \frac{y_0}{r} .$$

La fonction φ est donc déterminée par l'équation aux dérivées φ partielles

$$(28) \dots\dots\dots \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \varphi \right).$$

Cette équation (28) est encore un cas particulier de l'équation (24). Elle s'en déduit en posant

Son intégrale générale a été donnée par Poisson ⁽¹⁾. Elle est extrêmement compliquée.

Dans le cas particulier où le point 0 fait partie de la membrane, et où par conséquent, la fonction $\varphi(r, t)$ doit demeurer finie pour $r = 0$, son expression se réduit à ⁽²⁾

$$(29) \dots\dots\dots \varphi = r^{\frac{3}{2}} \int_0^\pi F(At + r \cos \omega) \sin^2 \omega \, d\omega,$$

F étant une fonction arbitrairement donnée.

Chapitre IX.

Les Vibrations transversales des Membranes planes et l'Equation de M^c. Schwarz.

§ I. — Equations dont dépendent les Vibrations transversales des membranes planes.

Supposons que les divers points d'une membrane plane soient en mouvement et que chaque point se meuve exclusivement sur la normale à la membrane. La position d'un point dans l'espace à l'instant t est déterminée lorsqu'on connaît l'expression de la quantité ζ en fonction des variables x_0, y_0, t . Cette quantité ζ vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \dots\dots\dots \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = A^2 \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y_0^2} \right).$$

⁽¹⁾ Poisson. Mémoire sur l'Intégration des Equations aux différences partielles (Journal de l'École Polytechnique XIX^e Cahier. p. 239).

⁽²⁾ Poisson. Mémoire sur l'Equilibre et le Mouvement des Corps élastiques lu à l'Académie le 14 Avril 1828. p. 144.

Demandons-nous si le mouvement de chacun des points de la membrane peut être un mouvement périodique, de période T , faisant osciller ce point autour de sa position d'équilibre (x_0, y_0) .

Si en est ainsi, nous pourrions, pour toutes les valeurs du temps développer δ en série de Fourier de la manière suivante :

$$(2) \dots\dots\dots \delta = A_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} + A_2 \sin 4\pi \frac{t}{T} + \dots\dots\dots \\ + B_1 \cos 2\pi \frac{t}{T} + B_2 \cos 4\pi \frac{t}{T} + \dots\dots\dots,$$

$A_1, B_1, A_2, B_2, \dots\dots\dots$ étant des fonctions des deux variables x_0, y_0 .

En reportant cette expression (2) de δ dans l'équation (1) et en exigeant qu'elle est identiquement satisfaite, nous démontrons que les quantités $A_1, A_2, \dots\dots\dots B_1, B_2, \dots\dots\dots$ vérifient les équations aux dérivées partielles

$$(3) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 A_1}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 A_1}{\partial y_0^2} + \left(\frac{2\pi}{AT}\right)^2 A_1 = 0, \\ \frac{\partial^2 B_1}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 B_1}{\partial y_0^2} + \left(\frac{2\pi}{AT}\right)^2 B_1 = 0, \\ \frac{\partial^2 A_2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 A_2}{\partial y_0^2} + \left(\frac{4\pi}{AT}\right)^2 A_2 = 0, \\ \frac{\partial^2 B_2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2 B_2}{\partial y_0^2} + \left(\frac{4\pi}{AT}\right)^2 B_2 = 0, \\ \dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Ces équations aux dérivées partielles ne sont pas les seules conditions auxquelles les coefficients $A_1, A_2, \dots\dots\dots B_1, B_2, \dots\dots\dots$ soient assujettis. Le contour de la membrane sera animé d'un mouvement normal au plan de la membrane, périodique, de période T , que nous supposons donné. En sorte que, pour les valeurs de x_0, y_0 , qui correspondent au contour de la membrane, les fonctions $A_1, A_2, \dots\dots\dots B_1, B_2, \dots\dots\dots$ sont assujetties à avoir des déterminations données.

La détermination des coefficients $A_1, A_2, \dots\dots\dots B_1, B_2, \dots\dots\dots$ est donc ramenée au problème suivant :

Déterminer une fonction régulière ψ qui vérifie, en tous les points d'une aire, l'équation aux dérivées partielles

$$(4) \dots\dots\dots \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + K^2 \psi = 0$$

et dont les valeurs sur le contour de cette aire sont déterminées

Nous allons étudier ce problème.

§ II. - L'Équation de M. Ricard.

Nous allons d'abord, en faisant usage des recherches de M. Ricard⁽¹⁾ étudier un problème beaucoup plus général, qui est le suivant:

Déterminer une fonction Ψ qui, en tous les points d'une aire, vérifie l'équation aux dérivées partielles.

$$(5) \dots\dots\dots \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + 2d \frac{\partial \Psi}{\partial x} + 2e \frac{\partial \Psi}{\partial y} + f\Psi = 0,$$

où d, e, f , sont des fonctions données d' x et d' y , et qui, sur le contour L de cette aire, prend des déterminations données.

Ces conditions analytiques déterminent-elles complètement la fonction Ψ ? C'est la question que nous allons examiner tout d'abord.

Si deux fonctions distinctes Ψ et Ψ' vérifient cette équation aux dérivées partielles (5) en tout point (x, y) de l'aire considérée, et prennent la même valeur en tout point du contour- L de cette aire, leur différence u sera une fonction non identiquement nulle vérifiant aussi l'équation aux dérivées partielles (5) en tout point de l'aire considérée et prenant la valeur 0 en tout point du contour de cette aire. Il s'agit donc de savoir s'il peut exister une semblable fonction u .

S'il existe une semblable fonction, on aura évidemment

$$\iint \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d \frac{\partial u}{\partial x} + 2e \frac{\partial u}{\partial y} + f u \right] u \, dx \, dy = 0,$$

l'intégrale double s'étendant à l'aire considérée. Une intégration partielle permet de transformer cette égalité.

On a en effet

$$\begin{aligned} & \iint \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d \frac{\partial u}{\partial x} + 2e \frac{\partial u}{\partial y} \right) u \, dx \, dy \\ &= -S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + du \right) \cos(n_i, x) + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + eu \right) \cos(n_i, y) \right] u \, dL \\ & \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} \right) u^2 \right] dx \, dy, \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Emile Ricard. Sur une Classe d'équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. (Acta Mathematica. V. XII p. 323. 1889) - Mémoire sur la Théorie des Équations aux Dérivées partielles et la méthode des Approximations successives. (Journal de Mathématiques de Liouville 1890) - Sur la Détermination des Intégrales de certaines Équations aux dérivées partielles du second ordre par leurs valeurs le long d'un contour fermé. (Journal de l'École Polytechnique. LX^e Cahier. 1890).

n_i désignant la normale à l'élément dL vers l'intérieur de l'aire considérée.

Mais, comme la fonction u est égale à 0 en tout point du contour L , le premier terme disparaît, au second membre de cette égalité, et l'égalité qui la précède devient:

$$(6) \dots \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} - f \right) u^2 \right] dx dy = 0.$$

Si la quantité

$$\frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} - f$$

n'est négative en aucun point de l'aire considérée, l'égalité précédente, à laquelle on peut joindre au besoin la condition imposée à u de s'annuler sur le contour, exigera que la fonction u soit identiquement nulle en tout point de l'aire considérée. On voit donc que, si l'on a en tout point de l'aire considérée.

$$\frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} - f \geq 0.$$

il existe au plus une fonction ψ qui vérifie l'équation (5) en tout point de l'aire considérée et qui prenne des valeurs données sur le contour de cette aire.

Ce théorème s'appliquera, en particulier à l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + A \frac{\partial \psi}{\partial x} + B \frac{\partial \psi}{\partial y} - [F(x, y)]^2 \psi = 0,$$

où A et B sont des constantes et $F(x, y)$ une fonction réelle d' x et d' y .

Mais l'équation (4), que nous avons surtout en vue d'étudier, échappe aux prises de cette proposition.

Soient B et B' deux fonctions réelles d' x et d' y . Une intégration par parties nous permet d'écrire:

$$\iint \left[\frac{\partial (B u^2)}{\partial x} + \frac{\partial (B' u^2)}{\partial y} \right] dx dy \\ - - \int [B \cos(n_i, x) + B' \cos(n_i, y)] u^2 dL,$$

et le second membre de cette égalité est nul, puisque u est nul sur le contour L . Alors, l'égalité (6) pourra s'écrire:

$$(7) \dots \iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2B u \frac{\partial u}{\partial x} + 2B' u \frac{\partial u}{\partial y} \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} - f \right) u^2 \right] dx dy = 0.$$

La quantité entre crochets, sous le signe \iint , dans cette dernière

égalité, est une forme homogène et du second degré par rapport aux trois variables

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u.$$

Le Discriminant de cette forme est le déterminant :

$$(8) \dots \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & B \\ 0 & 1 & B' \\ B & B' & \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \theta \right) \end{vmatrix};$$

où θ est défini par l'égalité

$$(9) \dots \theta = \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} - f.$$

Supposons que le déterminant Δ soit positif en tous les points de l'aire considérée; la forme entre crochets aura, dans toute cette aire, un signe constant, sauf aux points où l'on aurait

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = 0$$

on dit alors que, dans l'aire considérée, cette forme est déterminée. On voit sans peine que dans ces conditions, l'égalité (7) ne peut être vérifiée, à moins que l'on n'ait dans toute l'aire,

Développons l'expression du déterminant Δ et nous arrivons ^{$u=0$} au Théorème suivant :

Si l'on peut définir dans l'aire considérée deux fonctions réelles B et B' des variables x, y , telles qu'on ait, en tout point de cette aire, l'inégalité

$$(10) \dots B^2 + B'^2 < \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} + \theta,$$

on sera assuré qu'il existe au plus une fonction ψ , vérifiant en tout point de l'aire l'équation (5) et prenant des valeurs données sur le contour de cette aire.

Étant données, d'une part, l'aire étudiée et, d'autre part, les trois fonctions d, e, f , il est en général fort difficile de reconnaître si l'on peut trouver deux fonctions B et B' telles que l'inégalité (10) soit vérifiée en tous les points de l'aire. Voici, tout au moins, un Théorème général, souvent utile dans les applications.

Les trois fonctions d, e, f , étant supposées données dans une certaine aire A , on pourra toujours tracer, à l'intérieur de cette aire A et autour d'un point quelconque P de cette aire, une aire A' assez petite pour qu'il existe des fonctions B et B' vérifiant l'inégalité (10) à l'intérieur de l'aire A' .

Les fonctions d, e, f , ayant des valeurs connues en tout point de

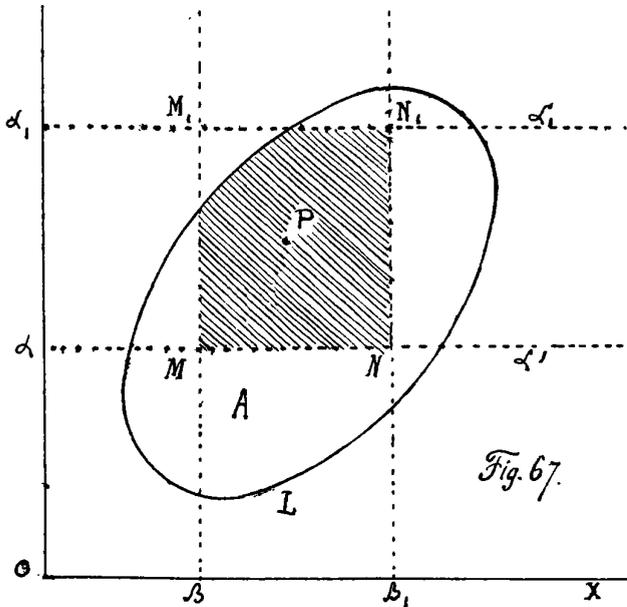
l'aire A , il en est de même de la quantité θ . Soit m^2 la limite supérieure des valeurs absolues prises par la quantité θ dans l'aire A .

Soient x_0, y_0 , les coordonnées d'un point P de l'aire A .

Soient m_1, m_2 deux constantes quelconques satisfaisant à la condition

$$(11) \dots\dots\dots m_1^2 + m_2^2 > m^2.$$

De part et d'autre du point P (fig. 67), menons deux parallèles $\alpha\alpha', \alpha_1\alpha'_1$ à l'axe des x , la distance de chacune de ces parallèles au point P étant inférieure à $\frac{\pi}{2m_1}$; de part et d'autre du point P , menons deux parallèles $\beta\beta', \beta_1\beta'_1$ à l'axe des y , la distance de chacune de ces parallèles au point P étant inférieure à $\frac{\pi}{2m_2}$.



Considérons la fonction $B = m_1 \operatorname{Tang} m_1 (x - x_0)$. Dans l'espace compris entre les parallèles $\beta\beta', \beta_1\beta'_1$, cette fonction est finie et continue et l'on a

$$\frac{\partial B}{\partial x} - B^2 = m_1^2.$$

Considérons de même la fonction

$$B' = m_2 \operatorname{Tang} m_2 (y - y_0)$$

Dans l'espace compris entre les parallèles $\alpha\alpha', \alpha_1\alpha'_1$, cette fonction est finie et continue et l'on a

$$\frac{\partial B'}{\partial y} - B'^2 = m_2^2.$$

Donc à l'intérieur du rectangle MNM_1N_1 , que déterminent les droites $\alpha\alpha', \alpha_1\alpha'_1, \beta\beta', \beta_1\beta'_1$, on a

$$B^2 + B'^2 + (m_1^2 + m_2^2) = \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y},$$

ou bien

$$B^2 + B'^2 + m^2 < \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y}$$

Donc en tout point commun à l'aire de ce rectangle et à l'aire A , on a

$$B^2 + B'^2 - \theta < \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y}.$$

Ainsi, pour que l'aire A' , tracée autour du point P , remplisse les conditions de l'énoncé, il suffit qu'elle soit contenue à la fois à l'intérieur de l'aire A et du rectangle MNM_1N_1 , ce qui aura toujours lieu si elle est assez petite.

Ainsi, étant donnée une aire A où les fonctions d , e , f , sont connues, et un point P de cette aire, on pourra toujours délimiter autour du point P une aire A' assez petite pour qu'une fonction Ψ au plus, vérifie l'équation.

$$(5) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + 2d \frac{\partial \Psi}{\partial x} + 2e \frac{\partial \Psi}{\partial y} + f \Psi = 0$$

en tout point de l'aire A' et prenne des valeurs données aux confins de cette aire; de plus, cette propriété demeure vraie pour toute aire tracée dans A' .

Ces résultats seront les seuls que nous emprunterons aux Mémoires de M. Picard; nous n'exposerons pas ici la méthode d'approximations successives qui permet d'intégrer l'équation (5) dans le cas où les valeurs de l'intégrale sur les contours d'une aire suffisent à déterminer cette intégrale à l'intérieur de l'aire. Cette méthode, malgré son importance, n'a pas d'application aux questions que nous devons étudier dans ce Cours.

§ III. — L'Equation de M. Schwarz. — Point de départ des recherches.

Parmi les équations du type (5), l'une des plus intéressantes est l'équation

$$(12) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + p(x, y) \Psi = 0,$$

où $p(x, y)$ est une fonction essentiellement positive de x et de y .

Cette équation comprend comme cas particulier l'équation (4) dont dépendent les vibrations transversales des membranes; elle s'en déduit en donnant une valeur constante à la fonction $p(x, y)$; elle comprend aussi comme cas particulier l'équation

$$(13) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{8}{1+x^2+y^2} \Psi = 0$$

que nous avons rencontrée [Chapitre VI, Equation (17)] dans l'étude des surfaces minima.

C'est à propos de cette équation (13) que M. Schwarz a étudié d'une manière générale l'équation (12) dans un Mémoire dont nous allons exposer les principaux résultats. Ces résultats nous fourniront, lorsque nous les appliquerons à l'équation (4), une théorie générale des vibrations transversales des membranes.

(1) H. Schwarz. Ueber ein die Flächen Kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variations-Rechnung. Festschrift zum Jubelgeburtstage des Herrn Karl Weierstrass. Acta Societatis Scientiarum Fennicae, Helsingfors. 1885.

Les recherches de M. Schwarz s'appuient sur quelques propositions empruntées à l'étude des fonctions harmoniques de deux variables; c'est à dire des fonctions $V(x, y)$ qui vérifient l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Nous allons rappeler ces propositions que nous supposons démontrées:

1° - On peut déterminer une et une seule fonction $V(x, y)$ harmonique dans un contour donné et prenant, sur le contour, une suite de valeurs données (Principe de Lejeune - Dirichlet)

Les valeurs de la fonction $V(x, y)$ à l'intérieur du contour sont toutes comprises entre deux limites, une limite supérieure et une limite inférieure; aucune de ces deux limites n'est atteinte par la fonction à l'intérieur du contour, mais chacune d'elles est représentée par une des valeurs que la fonction prend sur le contour.

2° - On peut former une et une seule fonction uniforme, finie et continue $V(x, y)$ qui vérifie en tout point d'une aire donnée A l'équation

$$(14) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + f(x, y) = 0,$$

où $f(x, y)$ est une fonction uniforme donnée, et qui prend la valeur 0 en tout point du contour qui limite l'aire A .

Cette fonction est donnée par la formule

$$(15) \dots \dots \dots V(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_A f(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta;$$

La fonction $G(\xi, \eta; x, y)$ est la valeur au point (ξ, η) de la fonction de Green de pôle (x, y) relative à l'aire A .

La valeur de la quantité $G(\xi, \eta; x, y)$ ne change pas lorsqu'on permute entre eux les deux points (ξ, η) et (x, y) ce qu'exprime l'égalité

$$(16) \dots \dots \dots G(\xi, \eta; x, y) = G(x, y; \xi, \eta).$$

La fonction $G(\xi, \eta; x, y)$ est finie, continue et positive en tout point (ξ, η) de l'aire A , sauf au point

$$\xi = x, \quad \eta = y.$$

En ce point elle est infinie, et son résidu est le même que celui de la fonction

$$-\frac{1}{2} \log [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2]$$

Sur le contour de l'aire A , cette fonction prend la valeur 0.

§ IV. - L'Equation de M. Schwarz. (Suite) Exposé du Théorème fondamental.

Après avoir emprunté ces résultats à la théorie des fonctions harmoniques de deux variables, M. Schwarz démontre au sujet de l'équation (12) un théorème fondamental. Au présent §, nous allons exposer ce théorème; nous le démontrerons au § suivant

M. Schwarz forme une première suite de fonctions
 (17) $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_n(x, y), \dots$
 de la manière suivante :

Ces fonctions prennent toutes la valeur 0 aux divers points du contour qui limite l'aire A; elles vérifient, à l'intérieur de cette aire, les équations aux dérivées partielles.

$$(18) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + p(x, y) = 0, \\ \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + p(x, y) u_1(x, y) = 0, \\ \frac{\partial^2 u_3}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial y^2} + p(x, y) u_2(x, y) = 0, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

Ce que nous avons dit au § précédent montre que ces quantités $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_n(x, y), \dots$ peuvent être déterminées de proche en proche à partir de la première, elles dépendent uniquement de l'aire donnée A et de la fonction donnée $p(x, y)$.

M. Schwarz forme alors une suite de constantes
 (19) $W_0, W_1, W_2, \dots, W_n, \dots$
 déterminées par les formules suivantes :

$$(20) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} W_0 = \iint_A p(x, y) dx dy, \\ W_1 = \iint_A p(x, y) u_1(x, y) dx dy, \\ W_2 = \iint_A p(x, y) u_2(x, y) dx dy, \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

La formation des constantes $W_0, W_1, \dots, W_n, \dots$ suppose seulement la connaissance de l'aire A et de la fonction $p(x, y)$.
 M. Schwarz démontre que, lorsque, l'indice n croît au delà

de toute limite, le rapport

$$\frac{W_n}{W_{n-1}}$$

tend vers une limite finie et positive c . La valeur de cette constante c caractérise l'aire étudiée A et la fonction donnée $p(x, y)$.

Si la constante c est inférieure à l'unité, on peut toujours trouver une fonction Ψ et une seule qui vérifie en tout point de l'aire A l'équation aux dérivées partielles

$$(12) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + p(x, y) \Psi = 0,$$

qui soit positive en tout point de l'aire A et qui prenne une valeur positive donnée $F(\xi, \eta)$ en tout point (ξ, η) du contour L de cette aire.

Cette fonction peut s'obtenir de la manière suivante :

On forme une deuxième suite illimitée de fonctions

$$(21) \dots \dots \dots v_0(x, y), v_1(x, y), v_2(x, y), \dots \dots \dots v_n(x, y), \dots \dots \dots$$

par la règle suivante :

La fonction $v_0(x, y)$ vérifie en tout point de l'aire donnée A l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0$$

et prend, en tout point (ξ, η) du contour L , la valeur positive donnée $F(\xi, \eta)$.

La fonction $v_1(x, y)$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + p(x, y) v_0 = 0,$$

en tout point de l'aire considérée A et prend la valeur 0 en tout point du contour L .

La fonction $v_2(x, y)$ vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial y^2} + p(x, y) v_1 = 0,$$

en tout point de l'aire A et prend la valeur 0 en tout point du contour L .

Ce que nous avons dit au § précédent permet de former de proche en proche les fonctions $v_0, v_1, v_2, \dots, v_n$. Lorsque la constante c est inférieure à l'unité, la série

$$(22) \dots \dots \dots v_0(x, y) + v_1(x, y) + v_2(x, y) + \dots \dots \dots$$

converge uniformément en tout point de l'aire A ou du contour L . La somme de cette série est alors la fonction cherchée $\Psi(x, y)$.

Cette fonction ne prend, dans l'aire A , que des valeurs positives.

Tel est le théorème fondamental démontré par M. Schwarz;

nous allons maintenant exposer la démonstration.

§. V. - L'Equation de M. Schwarz. (Suite) Démonstration du Théorème fondamental.

Art. 1^{er} - Considérons la fonction $u_1(x, y)$. Elle s'obtient en remplaçant dans l'égalité (14), la fonction $f(x, y)$ par la fonction $p(x, y)$. On a donc, d'après l'égalité (15)

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_A p(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta.$$

Comme les deux fonctions $p(\xi, \eta)$, $G(\xi, \eta; x, y)$, sont positives en tout point (ξ, η) de l'aire A , la fonction $u_1(x, y)$ est positive en tout point (x, y) de l'aire A .

La fonction $u_2(x, y)$ est de même donnée par l'égalité

$$u_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_A p(\xi, \eta) u_1(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta.$$

Les fonctions $p(\xi, \eta)$, $u_1(\xi, \eta)$, $G(\xi, \eta; x, y)$ étant positives en tout point (ξ, η) de l'aire A , la fonction $u_2(x, y)$ est positive en tout point (x, y) de l'aire A .

On arrive ainsi à démontrer de proche en proche que les fonctions (17)..... $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$, $u_n(x, y)$, sont positives en tout point (x, y) de l'aire A .

Les égalités (20) entraînent alors la conséquence suivante:

Les constantes

(19)..... W_0 , W_1 , W_2 , W_n , sont toutes positives.

Art. 2^e - Considérons l'expression

$$\iint_A p(x, y) u_1(x, y) u_{n-1}(x, y) dx dy.$$

Comme la fonction $u_n(x, y)$ vérifie en tout point de l'aire A l'égalité

$$\frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial y^2} + p(x, y) u_{n-1}(x, y) = 0,$$

cette expression peut s'écrire:

$$-\iint_A u_1(x, y) \left(\frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_n(x, y)}{\partial y^2} \right) dx dy.$$

Le théorème de Green transforme cette expression en

$$\int (u_1 \frac{\partial u_n}{\partial n_1} - u_n \frac{\partial u_1}{\partial n_1}) dL - \iint_A u_n \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) dx dy.$$

Mais les deux fonctions u_1 et u_n sont égales à 0 en tout point du contour L . On a donc.

$$\int_L \left(u_1 \frac{\partial u_n}{\partial n_i} - u_n \frac{\partial u_1}{\partial n_i} \right) dL = 0.$$

D'autre part, comme la fonction u , vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + p(x, y) = 0,$$

on a

$$-\iint_A u_n \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) dx dy = \iint_A p(x, y) u_n(x, y) dx dy.$$

On a donc :

$$\iint_A p(x, y) u_1(x, y) u_{n-1}(x, y) dx dy = \iint_A p(x, y) u_n(x, y) dx dy.$$

On démontrerait de même que

$$\iint_A p(x, y) u_2(x, y) u_{n-2}(x, y) dx dy = \iint_A p(x, y) u_1(x, y) u_{n-1}(x, y) dx dy.$$

On prouverait ainsi de proche en proche que l'on a, pour toute valeur de k inférieure ou égale à n (à condition de poser $u_0 = 1$)

$$(23) \dots \dots \dots W_n = \iint_A p(x, y) u_k(x, y) u_{n-k}(x, y) dx dy.$$

De cette égalité, on déduit encore une autre expression de W_n . La fonction $u_{k+1}(x, y)$, vérifie, en tout point de l'aire A , l'équation aux dérivées partielles.

$$\frac{\partial^2 u_{k+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{k+1}}{\partial y^2} + p(x, y) u_k(x, y) = 0.$$

L'égalité (23) peut donc s'écrire :

$$W_n = - \iint_A u_{n-k}(x, y) \left[\frac{\partial^2 u_{k+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{k+1}}{\partial y^2} \right] dx dy.$$

Le Théorème de Green transforme cette égalité en

$$W_n = \int_L u_{n-k}(x, y) \frac{\partial u_{k+1}}{\partial n_i} dL + \iint_A \left[\frac{\partial u_{n-k}}{\partial x} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x} + \frac{\partial u_{n-k}}{\partial y} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial y} \right] dx dy.$$

La fonction u_{n-k} , pour toutes les valeurs de k inférieures à n , est égale à 0 le long du contour L .

On a donc, pour toute valeur de k inférieure à n ,

$$(24) \dots \dots \dots W_n = \iint_A \left[\frac{\partial u_{n-k}}{\partial x} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial x} + \frac{\partial u_{n-k}}{\partial y} \frac{\partial u_{k+1}}{\partial y} \right] dx dy.$$

Art. 3^e - Soient α et β deux quantités quelconques indépendantes d' x et d' y .
L'intégrale

$$\iint_A p(x, y) \left[\alpha u_n(x, y) + \beta u_{n+1}(x, y) \right]^2 dx dy$$

devera être positive pour toutes les valeurs de α, β , autres que $\alpha = 0, \beta = 0$.

Or elle peut s'écrire:

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \iint_A p(x, y) u_n^2(x, y) dx dy \\ & + 2\alpha\beta \iint_A p(x, y) u_n(x, y) u_{n+1}(x, y) dx dy \\ & + \beta^2 \iint_A p(x, y) u_{n+1}^2(x, y) dx dy, \end{aligned}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (23),

$$W_{2n} \alpha^2 + 2W_{2n+1} \alpha\beta + W_{2n+2} \beta^2.$$

Cette quantité doit être positive pour toute valeur de α, β , sauf pour les valeurs $\alpha = 0, \beta = 0$; il faut et il suffit pour cela que l'on ait:

$$W_{2n} W_{2n+2} - W_{2n+1}^2 > 0.$$

Les quantités W étant toutes positives, cette condition peut s'écrire

$$(25) \dots \dots \dots \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} < \frac{W_{2n+2}}{W_{2n+1}}$$

L'intégrale

$$\iint_A \left[\left(\alpha \frac{\partial u_n}{\partial x} + \beta \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} \right)^2 + \left(\alpha \frac{\partial u_n}{\partial y} + \beta \frac{\partial u_{n+1}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

devera être positive pour toutes les valeurs de α, β , autres que $\alpha = 0, \beta = 0$.

Or elle peut s'écrire:

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \iint_A \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ & + 2\alpha\beta \iint_A \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} + \frac{\partial u_n}{\partial y} \frac{\partial u_{n+1}}{\partial y} \right) dx dy \\ & + \beta^2 \iint_A \left[\left(\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_{n+1}}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy, \end{aligned}$$

ou bien, en vertu de l'égalité (24),

$$W_{2n-1} \alpha^2 + 2W_{2n} \alpha\beta + W_{2n+1} \beta^2.$$

Cette quantité doit être positive pour toutes les valeurs de α, β autres que $\alpha = 0, \beta = 0$. Pour cela il faut et il suffit que l'on ait

$$W_{2n-1} W_{2n+1} - W_{2n}^2 > 0.$$

Les quantités W étant toutes positives, on voit que l'on a

$$(26) \dots \dots \dots \frac{W_{2n}}{W_{2n-1}} < \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}}$$

Les inégalités (25) et (26) devant avoir lieu pour toute valeur de n , on voit que l'on a

$$(27) \dots\dots\dots \frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \dots\dots\dots < \frac{W_{n+1}}{W_n} < \dots\dots\dots$$

Le rapport positif $\frac{W_{n+1}}{W_n}$ va toujours croissant avec l'indice n .

Art. 4^e. - Soit g la limite supérieure des valeurs de la quantité $u_1(x, y)$ à l'intérieur de l'aire A . La quantité $(u_1 - g)$ sera négative ou nulle en tout point de l'aire A .

La quantité u_1 , étant donnée par la formule

$$u_1 = \frac{1}{2\pi} \iint_A G(\xi, \eta; x, y) p(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

et la quantité u_2 étant donnée par la formule:

$$u_2 = \frac{1}{2\pi} \iint_A G(\xi, \eta; x, y) p(\xi, \eta) u_1(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

on voit que l'on a

$$u_2 - g u_1 = \frac{1}{2\pi} \iint_A G(\xi, \eta; x, y) p(\xi, \eta) [u_1(\xi, \eta) - g] d\xi d\eta.$$

Mais aux divers points (ξ, η) de l'aire A la quantité

$$u_1(\xi, \eta) - g$$

est négative ou exceptionnellement nulle. Les fonctions

$$G(\xi, \eta; x, y), \quad p(\xi, \eta),$$

étant positives en tout point (ξ, η) de l'aire A , on voit que la quantité

$$u_2(x, y) - g u_1(x, y)$$

est négative en tout point de l'aire A .

On démontrerait de même que l'on a, en tout point de l'aire A ,

$$u_3(x, y) - g u_2(x, y) < 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u_{n+1}(x, y) - g u_n(x, y) < 0,$$

$$\dots\dots\dots$$

Les égalités

$$W_n = \iint_A p(x, y) u_n(x, y) dx dy,$$

$$W_{n+1} = \iint_A p(x, y) u_{n+1}(x, y) dx dy,$$

donnent

$$W_{n+1} - g W_n = \iint_A p(x, y) [u_{n+1}(x, y) - g u_n(x, y)] dx dy.$$

On voit alors que la quantité $(W_{n+1} - g W_n)$ est négative. Donc, quel que soit l'indice n , la quantité $\frac{W_{n+1}}{W_n}$ est certainement inférieure à g .

Les deux propositions que nous venons de démontrer montrent que lorsque l'indice n croît au delà de toute limite, le rapport $\frac{W_{2n+1}}{W_{2n}}$ tend vers une limite supérieure, forcément positive, que nous désignerons par c .

Cette limite c dépend de l'aire A et la fonction $p(x, y)$.

Art. 5^e. — Considérons l'intégrale

$$\iint_A \left[p(x, y) \frac{u_{n-1}(x, y)}{\sqrt{W_{2n}}} \alpha + G(x, y; \xi, \eta) \beta \right]^2 dx dy$$

Elle doit avoir des valeurs positives pour toutes les valeurs de α et de β autres que

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0.$$

Or elle peut s'écrire :

$$\begin{aligned} & \alpha^2 \iint_A \left[p(x, y) \frac{u_{n-1}(x, y)}{\sqrt{W_{2n}}} \right]^2 dx dy \\ & + 2\alpha\beta \iint_A p(x, y) \frac{u_{n-1}(x, y)}{\sqrt{W_{2n}}} G(x, y; \xi, \eta) dx dy \\ & + \beta^2 \iint_A G^2(x, y; \xi, \eta) dx dy. \end{aligned}$$

Pour que cette quantité soit positive pour toute valeur de α et de β autres que $\alpha = 0, \beta = 0$, il faut et il suffit que l'on ait

$$(28) \dots \iint_A \left[p(x, y) \frac{u_{n-1}(x, y)}{\sqrt{W_{2n}}} \right]^2 dx dy \times \iint_A G^2(x, y; \xi, \eta) dx dy - \left[\iint_A p(x, y) \frac{u_{n-1}(x, y)}{\sqrt{W_{2n}}} G(x, y; \xi, \eta) dx dy \right]^2 > 0.$$

Soit P la plus grande des valeurs de $p(x, y)$ dans l'aire A ; nous aurons :

$$\iint_A \left[p(x, y) \frac{u_{n-1}(x, y)}{\sqrt{W_{2n}}} \right]^2 dx dy < \frac{P}{W_{2n}} \iint_A p(x, y) u_{n-1}^2(x, y) dx dy,$$

ou bien en vertu de l'égalité (23),

$$< P \frac{W_{2n-2}}{W_{2n}}.$$

Soit Ω la plus grande valeur que prenne la quantité

$$\iint_A G^2(x, y; \xi, \eta) dx dy$$

pour toutes les positions du point (ξ, η) . L'inégalité (28) devant avoir lieu quelle que soit la position du point (ξ, η) dans l'aire A , on aura a fortiori, quelle que soit la position de ce point dans l'aire A .

$$\frac{1}{\sqrt{W_{2n}}} \iint_A p(x, y) u_{n-1}(x, y) G(x, y; \xi, \eta) dx dy$$

$$< \sqrt{P \Omega} \cdot \sqrt{\frac{W_{2n-2}}{W_{2n}}}$$

Mais on a

$$u_n(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_A p(x, y) u_{n-1}(x, y) G(x, y; \xi, \eta) dx dy;$$

$$\frac{W_{2n-2}}{W_{2n}} = \frac{W_{2n-2}}{W_{2n-1}} \cdot \frac{W_{2n-1}}{W_{2n}} < \left(\frac{W_0}{W_1}\right)^2;$$

Si donc on pose

$$(29) \dots\dots\dots Q = \frac{1}{2\pi} \frac{W_0}{W_1} \sqrt{P \Omega},$$

on voit que l'on aura, quel que soit n , et quel que soit le point (ξ, η) ,

$$(30) \dots\dots\dots \frac{u_n(\xi, \eta)}{\sqrt{W_{2n}}} < Q.$$

La quantité Q qui figure dans cette inégalité est comme c , une constante qui dépend de l'aire A , et de la fonction $p(x, y)$.

Art. 6^e. - Considérons maintenant la série

$$\sqrt{W_0} + \sqrt{W_2} t + \sqrt{W_4} t^2 + \dots\dots\dots \sqrt{W_{2n}} t^n + \dots\dots$$

Le rapport du terme de rang $(n+1)$ au terme de rang n est

$$\sqrt{\frac{W_{2n}}{W_{2n-2}}} \cdot t = \sqrt{\frac{W_{2n}}{W_{2n-1}}} \cdot \sqrt{\frac{W_{2n-1}}{W_{2n-2}}} \cdot t.$$

Lorsque n croît au delà de toute limite, ce rapport tend vers t et la série précédente est donc absolument convergente pour toute valeur de $|t|$ inférieure à $\frac{1}{c}$.

Il en est de même de la série

$$Q \sqrt{W_0} + Q \sqrt{W_2} t + \dots\dots\dots + Q \sqrt{W_{2n}} t^n + \dots\dots$$

Mais d'après l'inégalité (30), la valeur absolue de chacun des termes de cette série est supérieure à la valeur absolue du terme correspondant de la série

$$1 + u_1(x, y) t + u_2(x, y) t^2 + \dots\dots\dots + u_n(x, y) t^n + \dots\dots$$

Nous arrivons donc à la conclusion suivante:

Lorsque t est inférieur en valeur absolue à $\frac{1}{c}$, la série

$$1 + u_1(x, y) t + u_2(x, y) t^2 + \dots\dots\dots + u_n(x, y) t^n + \dots\dots$$

est absolument et uniformément convergente en tout point de l'aire A et de son contour L .

Désignons par $u(x, y)$ la somme de cette série nous aurons :

$$(31) \dots u(x, y) = 1 + u_1(x, y)t + u_2(x, y)t^2 + \dots + u_n(x, y)t^n + \dots$$

Multiplications les deux membres de cette égalité par

$$\frac{t}{2\pi} \rho(x, y) G(x, y; \xi, \eta) dx dy$$

et intégrons pour l'aire A tout entière. A cause de l'uniformité de la convergence de la série qui définit la fonction $u(x, y)$, le résultat de cette opération pourra s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \iint_A \rho(x, y) u(x, y) t G(x, y; \xi, \eta) dx dy \\ &= \frac{t}{2\pi} \iint_A \rho(x, y) G(x, y; \xi, \eta) dx dy \\ &+ \frac{t^2}{2\pi} \iint_A \rho(x, y) u_1(x, y) G(x, y; \xi, \eta) dx dy \\ &+ \frac{t^3}{2\pi} \iint_A \rho(x, y) u_2(x, y) G(x, y; \xi, \eta) dx dy \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Mais on a

$$u_1(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_A \rho(x, y) G(x, y; \xi, \eta) dx dy,$$

$$u_2(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_A \rho(x, y) u_1(x, y) G(x, y; \xi, \eta) dx dy,$$

$$u_3(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \iint_A \rho(x, y) u_2(x, y) G(x, y; \xi, \eta) dx dy,$$

Le second membre de l'égalité précédente devient donc

$$tu_1(\xi, \eta) + t^2 u_2(\xi, \eta) + t^3 u_3(\xi, \eta) + \dots$$

ou bien

$$u(\xi, \eta) - 1.$$

Cette égalité peut donc s'écrire :

$$u(\xi, \eta) - 1 = \frac{1}{2\pi} \iint_A \rho(x, y) t u(x, y) G(x, y; \xi, \eta) dx dy.$$

Cette égalité nous enseigne que l'on a

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} [u(\xi, \eta) - 1] + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} [u(\xi, \eta) - 1] + \rho(\xi, \eta) t u(\xi, \eta) = 0$$

ou bien

$$\frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + \rho(\xi, \eta) t u(\xi, \eta) = 0.$$

Cette égalité est vérifiée en tout point (ξ, η) de l'aire A .

Si l'on peut connaître la valeur que prend la fonction $u(x, y)$ en un

point du contour L de l'aire A , il suffit de chercher les valeurs limites des divers termes de la série qui définit $u(x, y)$ et de sommer la série de ces valeurs limites.

Or le premier terme de la série (31), qui définit $u(x, y)$ demeure constamment égal à 1; les autres tendent vers 0 lorsque le point (x, y) tend à se placer sur le contour L ; la fonction $u(x, y)$ prend donc la valeur 1 en tout point du contour L .

Ainsi, toutes les fois que la valeur absolue du paramètre t est inférieure à $\frac{1}{2}$, l'égalité (31) définit une fonction $u(x, y)$ qui prend la valeur 1 en tout point du contour de l'aire A et qui vérifie en tout point de cette aire l'équation aux dérivées partielles

$$(32) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + t p(x, y) u = 0.$$

Art. 7. — Considérons maintenant les fonctions

$$(21) \dots \dots \dots v_0(x, y), v_1(x, y), \dots \dots v_n(x, y), \dots \dots$$

définies au paragraphe précédent

Soit M la plus grande des valeurs de la fonction donnée $F(\xi, \eta)$ aux divers points (ξ, η) du contour L . Soit m la plus petite de ces valeurs. Comme la fonction $v_0(x, y)$ est harmonique dans l'aire A , sa valeur en tout point de l'aire A est inférieure à M et supérieure à m , ce qu'expriment les égalités:

$$\begin{aligned} v_0(x, y) - M &< 0, \\ v_0(x, y) - m &> 0. \end{aligned}$$

L'égalité

$$v_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_A p(\xi, \eta) u_0(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta,$$

qui résulte de l'application des égalités (14) et (15) à la définition de $v_1(x, y)$, donne:

$$v_1(x, y) - \frac{M}{2\pi} \iint_A p(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta < 0,$$

$$v_1(x, y) - \frac{m}{2\pi} \iint_A p(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta > 0.$$

Mais on a

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_A p(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta.$$

Les inégalités précédentes deviennent donc

$$v_1(x, y) - M u_1(x, y) < 0,$$

$$v_1(x, y) - m u_1(x, y) > 0.$$

De proche en proche, par une suite de démonstrations analogues,

on prouvera que l'on a, quel que soit n

$$(33) \dots \dots \dots \begin{cases} v_n(x, y) - M u_n(x, y) < 0, \\ v_n(x, y) - m u_n(x, y) > 0. \end{cases}$$

Ces inégalités obtenues, comparons la série

$$v_0(x, y) + t v_1(x, y) + t^2 v_2(x, y) + \dots$$

et la série

$$1 + t u_1(x, y) + t^2 u_2(x, y) + \dots$$

Le rapport d'un terme de la première série à un terme de la seconde est toujours compris entre les deux quantités fixes M et m .

La seconde série étant absolument et uniformément convergente toutes les fois que la valeur absolue t est inférieure à $\frac{1}{c}$, il en est de même de la première

Ainsi, toutes les fois que la valeur absolue de t est inférieure à $\frac{1}{c}$, la série

$$(34) \dots \dots \dots v_0(x, y) + t v_1(x, y) + t^2 v_2(x, y) + \dots$$

est absolument et uniformément convergente.

Représentons par $v(x, y; t)$ la somme de cette série.

En raisonnant sur $v(x, y; t)$ comme nous avons raisonné sur $u(x, y)$ nous arriverons à la conséquence suivante:

En tout point (ξ, η) du contour L , la fonction $v(\xi, \eta; t)$ coïncide avec la fonction donnée $F(\xi, \eta)$. En tout point (x, y) de l'aire A , la fonction $v(x, y; t)$, vérifie l'équation aux dérivées partielles.

$$(35) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + t p(x, y) v = 0.$$

Art. 8°. — Supposons que la constante c soit inférieure à l'unité.

Si nous posons $t = 1$ la valeur absolue de t sera inférieure à $\frac{1}{c}$ et les théorèmes précédents pourront être appliqués:

Ainsi, si la constante c est inférieure à 1 la formule

$$(22) \dots \dots \Psi(x, y) = v_0(x, y) + v_1(x, y) + v_2(x, y) + \dots$$

définit une fonction qui devient, en tout point du contour L , égale à la fonction donnée $F(\xi, \eta)$ et qui vérifie, en tout point de l'aire A l'équation aux dérivées partielles.

$$(12) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + p(x, y) \Psi = 0$$

Art. 9°. — Cette solution possède une propriété remarquable:

Si la fonction donnée $F(\xi, \eta)$ est positive en tout point du contour L , la fonction $\Psi(x, y)$, définie par l'égalité (22), est positive en tout point de l'aire A .

En effet, la fonction harmonique $v_0(x, y)$, qui prend sur le contour L les valeurs données $F(\xi, \eta)$ est comprise entre la plus grande et la plus

petites de ces valeurs, et, par conséquent, est positive.

La fonction

$$v_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_A \rho(\xi, \eta) v_0(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta$$

prend alors des valeurs toutes positives.

De proche en proche, on démontre qu'il en est de même des fonctions

$$v_2(x, y), \dots, v_n(x, y), \dots$$

Tous les termes de la série (22), qui définit $\Psi(x, y)$, étant positifs, il en est de même de $\Psi(x, y)$.

Art. 10°. — Si la fonction $F(\xi, \eta)$ prend, aux divers points (ξ, η) du contour L , des valeurs toutes positives, il ne peut exister deux fonctions distinctes, $\Psi(x, y)$ et $X(x, y)$, prenant sur le contour la valeur $F(\xi, \eta)$, vérifiant l'équation (12) en tout point de l'aire A , et ne prenant à l'intérieur de cette aire que des valeurs positives.

Pour démontrer ce Théorème, nous allons prouver que s'il existe une semblable fonction, elle est forcément donnée par l'égalité (22).

La fonction $v_0(x, y)$ étant harmonique en tout point de l'aire A et la fonction $\Psi(x, y)$ vérifiant l'égalité (12) en tout point de cette aire, on a, en tout point de cette aire :

$$\frac{\partial^2(\Psi - v_0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\Psi - v_0)}{\partial y^2} + \rho(x, y) \Psi = 0;$$

on a, en outre, en tout point du contour L , $\Psi - v_0 = 0$, et par conséquent,

$$\Psi - v_0 = \frac{1}{2\pi} \iint_A \rho(\xi, \eta) \Psi(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta.$$

Si la fonction $\Psi(\xi, \eta)$ est positive en tout point de l'aire A , comme nous le supposons, le second membre de cette égalité est assurément positif. Il en est donc de même, en tout point de l'aire A , de la quantité

$$\Psi(x, y) - v_0(x, y).$$

D'ailleurs, nous avons vu que lorsque les valeurs de la fonction $F(\xi, \eta)$ sont toutes positives sur le contour L , la quantité $v_0(x, y)$ est positive en tout point de l'aire A .

La quantité

$$\frac{\Psi(x, y) - v_0(x, y)}{\Psi(x, y)}$$

a donc pour limite supérieure, dans l'aire A , une quantité q , positive et inférieure à 1.

On a ainsi, en tout point de l'aire A ,

$$\Psi(x, y) - v_0(x, y) \leq q \Psi(x, y).$$

Il est aisé de voir que la fonction $(\Psi - v_0 - v_1)$ prend la valeur 0

en tout point du contour L , et vérifie, en tout point de l'aire A , l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 (\Psi - v_0 - v_1)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (\Psi - v_0 - v_1)}{\partial y^2} + p(x, y) (\Psi - v_0) = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) - v_0(x, y) - v_1(x, y) \\ = \frac{1}{2\pi} \iint_A p(\xi, \eta) [\Psi(\xi, \eta) - v_0(\xi, \eta)] G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

L'inégalité précédente donne alors :

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) - v_0(x, y) - v_1(x, y) \\ < \frac{q}{2\pi} \iint_A p(\xi, \eta) \Psi(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta, \end{aligned}$$

ou bien

$$\Psi(x, y) - v_0(x, y) - v_1(x, y) < q [\Psi(x, y) - v_0(x, y)].$$

En continuant de la sorte, on établira la série d'inégalités

$$\begin{aligned} \Psi - v_0 &\leq q \Psi, \\ \Psi - v_0 - v_1 &< q (\Psi - v_0), \\ \Psi - v_0 - v_1 - v_2 &< q (\Psi - v_0 - v_1), \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\Psi - v_0 - v_1 - v_2 - \dots - v_n < q (\Psi - v_0 - v_1 - \dots - v_{n-1}).$$

Ces inégalités donnent :

$$\Psi - (v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n) < q^{n+1} \Psi.$$

Le premier membre de cette inégalité étant positif, comme on le démontre aisément de proche en proche, on voit qu'il tend vers 0 lorsque n croît au delà de toute limite; on a donc, comme nous l'avons annoncé,

$$(22) \dots \Psi(x, y) = v_0(x, y) + v_1(x, y) + \dots + v_n(x, y) + \dots$$

Un Théorème analogue s'appliquerait évidemment si les fonctions $F(\xi, \eta)$ et $\Psi(x, y)$ n'avaient que des valeurs négatives. Le théorème fondamental de M. Schwarz est ainsi complètement démontré.

Art. 11^e. - Nous y joindrons le Théorème suivant

Si la fonction

$$u_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_A p(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) dx dy$$

est inférieure à 1 en tout point de l'aire A , il ne peut exister qu'une fonction au plus vérifiant l'équation (12) en tout point de l'aire A , et prenant des valeurs données quelconques au contour L de cette aire. Si cette fonction existe, elle est forcément donnée par l'égalité (22)

Il suffit évidemment de prouver la dernière partie de cette énoncé.

Supposons donc qu'il existe une fonction $\Psi(x, y)$, vérifiant l'équation (12)

en tout point de l'aire A et prenant, au contour L , des valeurs données $F(\xi, \eta)$.

Nous démontrerons aisément que l'on a

$$\Psi(x, y) - v_0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_A \rho(\xi, \eta) \Psi(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta.$$

Soient M et m les deux limites supérieure et inférieure de la fonction $\Psi(x, y)$ à l'intérieur de l'aire A ; soit M' la limite supérieure de la fonction u_1 , cette dernière étant positive et inférieure à 1.

Si m est positif, nous sommes dans le cas précédent, et la proposition est démontrée. Supposons donc m négatif ou nul.

Si M est négatif, la fonction Ψ ne prend à l'intérieur de l'aire A et sur son contour que des valeurs négatives, et, d'après ce que nous avons remarqué à la fin du N° précédent, le Théorème est encore démontré. Supposons donc M positif ou nul.

Soit μ la valeur absolue de m .

L'égalité précédente nous permettra d'écrire :

$$-\mu M' < \Psi(x, y) - v_0(x, y) < M M'$$

Ecrivons ensuite l'égalité

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) - v_0(x, y) - v_1(x, y) \\ = \frac{1}{2\pi} \iint_A \rho(\xi, \eta) [\Psi(\xi, \eta) - v_0(\xi, \eta)] G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Moyennant les inégalités précédentes, elle nous donnera

$$-\mu M'^2 < \Psi(x, y) - v_0(x, y) - v_1(x, y) < M M'^2.$$

De proche en proche, nous arriverons à l'inégalité

$$-\mu M'^{n+1} < \Psi - (v_0 + v_1 + \dots + v_n) < M M'^{n+1}.$$

La quantité M' étant inférieure à 1, on voit que lorsque n croît au delà de toute limite, la quantité

$\Psi - (v_0 + v_1 + \dots + v_n)$ tend vers 0, ce qui démontre la proposition énoncée.

§ VI. L'Equation de M. Schwarz. (Suite) - Le cas où $c=1$.

Après avoir examiné en détail les propriétés de l'équation de M. Schwarz dans le cas où la constante c est inférieure à l'unité, nous allons examiner d'une manière spéciale le cas particulier où la constante c est égale à l'unité.

Art. 1^{er}. - Nous allons établir tout d'abord à titre de Lemmes, la convergence de quelques produits d'un nombre illimité de facteurs.

Posons

$$c_1 = \frac{W_1}{W_0}, \quad c_2 = \frac{W_2}{W_1}, \quad \dots \quad c_n = \frac{W_n}{W_{n-1}}, \quad \dots$$

L'égalité (23) nous permet d'écrire :

$$W_{2n} = \iint_A p(x, y) u_n^2(x, y) dx dy,$$

et par conséquent,

$$1 = \iint_A p(x, y) \frac{u_n^2(x, y)}{W_{2n}} dx dy.$$

Mais l'égalité (30) nous enseigne que l'on a

$$\frac{u_n(x, y)}{\sqrt{W_{2n}}} < Q.$$

L'égalité précédente donne donc

$$\frac{1}{\sqrt{W_{2n}}} \iint_A p(x, y) u_n(x, y) dx dy > \frac{1}{Q},$$

ou bien

$$\frac{W_n}{\sqrt{W_{2n}}} > \frac{1}{Q},$$

ou enfin

$$\frac{W_n^2}{W_{2n}} > \frac{1}{Q^2}.$$

Or on a

$$W_n^2 = W_0^2 c_1^2 \cdot c_2^2 \cdot \dots \cdot c_n^2,$$

$$W_{2n} = W_0 c_1 \cdot c_2 \cdot \dots \cdot c_{2n}.$$

On peut donc écrire :

$$\frac{W_n^2}{W_{2n}} = W_0 \frac{c_1^2}{c_1 c_2} \cdot \frac{c_2^2}{c_3 c_4} \cdot \dots \cdot \frac{c_n^2}{c_{2n-1} c_{2n}}.$$

Chacun des facteurs de ce produit est inférieur à l'unité, puisque c_n croît avec n ; ce produit décroît donc constamment lorsque l'indice n croît. Comme le premier membre demeure toujours inférieur à $\frac{1}{Q^2}$, on voit que le produit

$$\prod_n \left(\frac{c_n^2}{c_{2n-1} c_{2n}} \right)$$

est absolument convergent.

Cette convergence entraîne la convergence absolue de produit

$$\prod_n \left(\frac{c_n}{c_{2n}} \right),$$

car on a évidemment

$$\frac{c_n^2}{c_{2n-1} c_{2n}} < \frac{c_n}{c_{2n}} < 1.$$

La convergence absolue du produit précédent permet de l'écrire :

$$\prod_n \left(\frac{c_n}{c_{2n}} \right) = \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{c_2}{c_4} \cdot \frac{c_4}{c_8} \cdot \frac{c_8}{c_{16}} \dots$$

$$\times \frac{c_3}{c_6} \cdot \frac{c_6}{c_{12}} \cdot \frac{c_{12}}{c_{24}} \cdot \frac{c_{24}}{c_{48}} \dots$$

$$\times \frac{c_5}{c_{10}} \cdot \frac{c_{10}}{c_{20}} \cdot \frac{c_{20}}{c_{40}} \cdot \frac{c_{40}}{c_{80}} \dots$$

$$\times \dots$$

Mais si l'on remarque que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n) = c,$$

on voit que les produits partiels figurant au second membre de cette égalité peuvent s'écrire

$$\frac{c_1}{c}, \frac{c_3}{c}, \frac{c_5}{c}, \dots$$

Nous obtenons donc l'égalité :

$$\prod_n \left(\frac{c_n}{c_{2n}} \right) = \prod_n \left(\frac{c_{2n-1}}{c} \right)$$

La convergence absolue du premier produit entraîne la convergence absolue du second.

Mais comme on a évidemment

$$\frac{c_{2n-1}}{c} < \frac{c_{2n}}{c} < 1,$$

on voit que le produit

$$\prod_n \left(\frac{c_{2n}}{c} \right)$$

doit être lui aussi, absolument convergent

La convergence absolue de ces deux derniers produits entraîne celle du produit

$$\prod_n \left(\frac{c_{2n-1}}{c} \right) \prod_n \left(\frac{c_{2n}}{c} \right),$$

et, par conséquent, du produit

$$\prod_n \left(\frac{c_n}{c} \right).$$

Art. 2° - Nous allons maintenant considérer les fonctions U_n et les fonctions W_n qui sont liées respectivement aux fonctions u_n et aux constantes W par les égalités

$$c^n U_n = u_n,$$

$$W_n = W_0 \cdot \frac{c_1}{c} \cdot \frac{c_2}{c} \cdot \frac{c_3}{c} \dots \frac{c_n}{c} = W_n \cdot \frac{1}{c^n}.$$

Le produit $\prod_n \left(\frac{c_n}{c} \right)$ étant absolument convergent, on voit que lorsque l'indice n croît au delà de toute limite la quantité W_n tend vers une limite parfaitement déterminée que nous désignerons par W .

La fonction u_1 , vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + p(x, y) = 0$$

en tout point de l'aire A et prend la valeur 0 en tout point du contour L .

Il suffit, dans l'équation précédente, de remplacer u_1 par sa valeur $c u_1$, pour voir que la fonction U_1 , vérifie en tout point de l'aire A , l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} + \frac{1}{c} p(x, y) = 0,$$

et prend la valeur 0 en tout point du contour L .

La fonction u_2 prend la valeur 0 en tout point du contour L et vérifie, en tout point de l'aire A , l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + p(x, y) u_1 = 0.$$

On voit alors que la fonction U_2 prend la valeur 0 en tout point du contour L , et vérifie en tout point de l'aire A l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} + \frac{1}{c} p(x, y) U_1 = 0.$$

De proche en proche, on démontrera de même que la fonction U_n prend la valeur 0 en tout point du contour L , et vérifie en tout point de l'aire A , l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_n}{\partial y^2} + \frac{1}{c} p(x, y) U_{n-1}(x, y) = 0.$$

L'égalité

$$\iint_A p(x, y) u_n(x, y) dx dy = W_n$$

donne

$$\iint_A p(x, y) U_n(x, y) dx dy = \frac{W_n}{c} = \hat{W}_n.$$

La quantité \hat{W}_n est donc liée à la fonction U_n comme la quantité W_n à la fonction u_n . Aux quantités W_n on peut étendre les propriétés des quantités W_n , en particulier celle qu'exprime l'égalité (23).

On aura alors

$$U_n < Q \sqrt{\hat{W}_{2n}},$$

$$\iint_A p(x, y) [U_n(x, y) - U_{n+k}(x, y)]^2 dx dy = \hat{W}_{2n} - 2\hat{W}_{2n+k} + \hat{W}_{2n+2k}$$

Quel que grand que soit k , le second membre de cette égalité tend vers 0 lorsque n croît au delà de toute limite, puisque chacune des trois quantités \hat{W}_{2n} , \hat{W}_{2n+k} , \hat{W}_{2n+2k} tend vers la même limite W .

Le premier membre de cette égalité tend donc vers 0, quel que

175

grand que soit le nombre fixe K , lorsque l'on fait croître n au delà de toute limite.

L'intégrale double

$$\iint_A p^2(x, y) [u_n(x, y) - u_{n+k}(x, y)]^2 dx dy$$

sera positive et inférieure à

$$P (W_{2n} - 2W_{2n+k} + W_{2n+2k}) = p_n$$

P étant la plus grande des valeurs de la fonction $p(x, y)$ à l'intérieur de l'aire A . Quelque grand que soit le nombre fixe K , cette intégrale tendra vers 0 lorsque n croîtra au delà de toute limite.

Dans l'aire A , les fonctions u_n et u_{n+k} vérifient les équations aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{n+1}}{\partial y^2} + \frac{1}{c} p(x, y) u_n = 0,$$

$$\frac{\partial^2 u_{n+k+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{n+k+1}}{\partial y^2} + \frac{1}{c} p(x, y) u_{n+k} = 0.$$

sur le contour L elles prennent la valeur 0. Dès lors, la fonction

$u_{n+1} - u_{n+k+1}$
prend la valeur 0 en tout point du contour L et vérifie, en tout point de l'aire A l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (u_{n+1} - u_{n+k+1}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (u_{n+1} - u_{n+k+1}) + \frac{1}{c} p(x, y) (u_n - u_{n+k}) = 0,$$

en sorte que l'on a

$$u_{n+1}(x, y) - u_{n+k+1}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_A \frac{p(\xi, \eta)}{c} [u_n(\xi, \eta) - u_{n+k}(\xi, \eta)] G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta.$$

Une démonstration analogue à celle qui nous a permis de démontrer (§ IV, 5°) que l'on avait

$$\frac{u_n}{\sqrt{W_{2n}}} < Q,$$

nous permettra de démontrer que l'on a

$$|u_{n+1}(x, y) - u_{n+k+1}(x, y)| < \frac{1}{2\pi c} \sqrt{\Omega p_n}.$$

Quel que grand que soit le nombre K , la quantité p_n tend vers 0 lorsque l'indice n croît au delà de toute limite. On voit donc que, l'indice n croissant au delà de toute limite, la fonction $u_n(x, y)$ tend vers une limite dont la valeur $u(x, y)$ est bien déterminée en chaque point (x, y) de l'aire A .

Chacune des fonctions u_n prenant la valeur 0 en tout point du contour L , la fonction $u(x, y)$ prend la valeur 0 en tout point du contour L .

On a, quel que soit n ,

$$U_{n+1}(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_A \frac{\rho(\xi, \eta)}{c} U_n(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta;$$

On aura donc

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint_A \frac{\rho(\xi, \eta)}{c} U(\xi, \eta) G(\xi, \eta; x, y) d\xi d\eta.$$

Ce résultat, joint à la propriété que possède la fonction $U(x, y)$ de prendre la valeur 0 en tout point du contour L , montre que la fonction $U(x, y)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1}{c} \rho(x, y) U = 0$$

en tout point de l'aire A .

3°. Ces propositions sont indépendantes de la valeur que possède la constante c ; supposons maintenant que la constante c ait la valeur 1, et nous arrivons au Théorème suivant qui est le second Théorème fondamental de M. Schwarz :

Lorsque la constante c est égale à 1, si l'on fait croître l'indice n au delà de toute limite, la fonction $U_n(x, y)$ a pour limite une fonction $\Psi(x, y)$, bien déterminée en tout point de l'aire A . Cette fonction prend la valeur 0 en tout point du contour L ; elle est positive en tout point de l'aire A , et vérifie, en tout point de l'aire A , l'équation aux dérivées partielles.

$$12) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \rho(x, y) \Psi = 0$$

§ VII. Propriétés de la Constante c . - Ses Variations.

Art. 1^{er}. - Considérons une fonction $\Psi(x, y)$, uniforme, finie et continue en tout point de l'aire A , prenant la valeur 0 en tout du contour L , et, dans l'aire A , des valeurs qui ne sont pas toutes égales à 0. Posons :

$$J_0(\Psi) = \iint_A \rho(x, y) \Psi^2(x, y) dx dy,$$

$$J_1(\Psi) = \iint_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Soit t une quantité positive indépendante d' x et d' y et inférieure à $\frac{1}{c}$. Nous aurons identiquement

$$J_1(\Psi) - t J_0(\Psi) = \iint_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 - t \rho(x, y) \Psi^2 \right] dx dy.$$

Désignons par $u(x, y)$ la fonction définie par l'égalité (31).

Nous aurons identiquement

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 - t \rho(x, y) \Psi^2 = \\ & \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\Psi}{u} \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\Psi}{u} \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Psi^2}{u} \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Psi^2}{u} \frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ & + \frac{\Psi^2}{u} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + t \rho(x, y) u \right]. \end{aligned}$$

Le dernier terme du second membre disparaît, car, en tout point de l'aire A , la fonction u vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + t \rho(x, y) u = 0$$

On a donc, en intégrant les deux membres de l'égalité précédente pour l'aire A ,

$$\begin{aligned} & \iint_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 - t \rho(x, y) \Psi^2 \right] dx dy \\ & = \iint_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\Psi}{u} \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\Psi}{u} \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy \\ & - \int_L \frac{\Psi^2}{u} \frac{\partial u}{\partial n} dL. \end{aligned}$$

La fonction Ψ est égale à 0 en tout point du contour L , et la fonction u égale à l'unité; par conséquent, au second membre de l'égalité précédente, le dernier terme disparaît, et l'on a

$$J_1(\Psi) - t J_0(\Psi) = \iint_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\Psi}{u} \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\Psi}{u} \frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx dy.$$

Ainsi, pour aucune valeur de t comprise entre 0 et $\frac{1}{c}$ la quantité

$$J_1(\Psi) - t J_0(\Psi)$$

ne peut être négative. D'où ce premier théorème :

La fonction Ψ étant assujettie aux conditions indiquées, le quotient $\frac{J_1(\Psi)}{J_0(\Psi)}$ ne peut prendre aucune valeur inférieure à $\frac{1}{c}$.

Parmi les déterminations que l'on peut attribuer à la fonction $\Psi(x, y)$ se trouve la détermination $\mathcal{U}(x, y)$ définie au § précédent. L'identité

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}\right)^2 - \frac{1}{c} \rho(x, y) \mathcal{U}^2 = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{U} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}\right) \\ & - \mathcal{U} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} + \frac{1}{c} \rho \mathcal{U} \right), \end{aligned}$$

jointe à l'égalité

$$\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial y^2} + \frac{1}{c} \rho(x, y) \mathcal{U},$$

que la fonction U vérifie en tout point de l'aire A , et à l'égalité
 $U = 0$,
 qu'elle vérifie en tout point du contour L , nous donne

$$J_1(U) - \frac{1}{c} J_0(U) = 0.$$

Le quotient

$$\frac{J_1(\psi)}{J_0(\psi)}$$

peut donc atteindre la valeur $\frac{1}{c}$, et il l'atteint au moment où l'on donne à ψ la détermination U . Nous obtenons ainsi le Théorème suivant :

La quantité $\frac{1}{c}$ est le minimum des valeurs du quotient $\frac{J_1(\psi)}{J_0(\psi)}$

Art. 2°. - De ce Théorème se déduisent immédiatement certaines conséquences importantes.

Dans un certain nombre de questions relatives aux variations secondes des intégrales doubles, on est amené à se demander si l'intégrale

$$\iint_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - p(x, y) \psi^2 \right] dx dy = J_1(\psi) - J_0(\psi),$$

dans laquelle ψ est une fonction égale à 0 en tout point du contour L , et différente de 0 à l'intérieur de l'aire A , prend des valeurs positives quelle que soit la fonction ψ , ou, au contraire, s'il existe pour ψ des déterminations qui lui fassent prendre la valeur 0 ou des valeurs négatives?

Lorsque la fonction $p(x, y)$ est positive en tout point de l'aire A , on peut donner à cette question la réponse suivante :

1°. - Si la constante c relative à l'aire A et à la fonction $p(x, y)$ est inférieure à 1, l'intégrale

$$\iint_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - p(x, y) \psi^2 \right] dx dy = J(\psi),$$

ne peut prendre que des valeurs positives.

2°. - Si la constante c a la valeur 1, il existe des déterminations de ψ qui font prendre à l'intégrale $J(\psi)$ la valeur 0, mais aucune ne lui fait prendre de valeurs négatives.

3°. Si la constante c est supérieure à 1, l'intégrale $J(\psi)$ prend, suivant la détermination de ψ , une valeur négative, la valeur 0 ou une valeur positive.

De ces Théorèmes, on peut déduire de nouvelles conséquences. Soit

$\psi(x, y)$ une fonction vérifiant, en tout point de l'aire A , l'équation aux dérivées partielles

$$(12) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + p(x, y) \psi = 0.$$

Soient ε une constante réelle et u une fonction réelle d' x et d' y , égale à 0 en tout point du contour L .

Nous verrons aisément que

$$J(\psi + \varepsilon u) - J(\psi) = \varepsilon^2 J(u).$$

L'application des Théorèmes précédents nous donne alors les propositions suivantes :

1°. Si la constante c est inférieure à 1, la quantité $J(\psi)$ est toujours inférieure à $J(\psi + \varepsilon u)$.

2°. Si la constante c est égale à 1, quelle que soit la constante ε , il existe une fonction u telle que l'on ait

$$J(\psi + \varepsilon u) = J(\psi)$$

3°. Si la constante c est supérieure à 1, les valeurs de $J(\psi + \varepsilon u)$ sont les unes supérieures, les autres égales, les autres enfin inférieures à $J(\psi)$.

L'étude des surfaces minima (Chapitre VI, §4) nous a fourni des exemples de ces Théorèmes

Art. 3°. — La constante c est définie pour une aire donnée A et pour une fonction positive, donnée dans cette aire $p(x, y)$. Nous allons supposer que l'on se donne une fonction $p(x, y)$, définie et positive dans une certaine région D du plan, que l'on trace dans cette région une aire variable A , et que l'on cherche comment les variations de cette aire font varier la quantité c .

Le premier Théorème que nous démontrerons est le suivant :

Soit A une aire tracée dans le domaine D ; soit A' une aire en entier contenue dans A ; à l'aire A correspond une constante c , à l'aire A' , une constante c' ; la constante c' est inférieure à la constante c .

Désignons par L le contour de l'aire A , par L' le contour de l'aire A' ; par A'' l'aire annulaire comprise entre les contours L et L' .

Désignons par $V(x, y)$ une fonction définie de la manière suivante :

En tout point de l'aire A' , la fonction $V(x, y)$ est positive et vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{1}{c'} p(x, y) V = 0;$$

En tout point du contour L' , on a $V(x, y) = 0$;

En tout point de l'aire A'' , on a $V(x, y) = 0$.

Ce qui a été dit au § précédent nous assure qu'il existe une semblable fonction.

Soit ε une constante réelle quelconque.

Considérons la quantité

$$J_1 (V + \varepsilon u) - \frac{1}{c'} J_0 (V + \varepsilon u) \\ = \iint_A \left\{ \left[\frac{\partial (V + \varepsilon u)}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial (V + \varepsilon u)}{\partial y} \right]^2 - \frac{\rho(x, y)}{c'} (V + \varepsilon u)^2 \right\} dx dy,$$

où la fonction u est égale à 0 en tout point du contour L sans être égale à 0 en tout point de l'aire A .

Nous avons:

$$\iint_A \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 - \frac{\rho(x, y)}{c'} V^2 \right\} dx dy \\ = \iint_{A'} \left\{ \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 - \frac{\rho(x, y)}{c'} V^2 \right\} dx dy \\ = - \int_{L'} V \frac{\partial V}{\partial n'_i} dL' - \iint_{A'} V \left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\rho(x, y)}{c'} V \right\} dx dy = 0$$

et l'égalité précédente peut s'écrire:

$$J_1 (V + \varepsilon u) - \frac{1}{c'} J_0 (V + \varepsilon u) \\ = 2\varepsilon \iint_A \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\rho}{c'} V u \right) dx dy + \varepsilon^2 \left[J_1(u) - \frac{1}{c'} J_0(u) \right].$$

Mais

$$\iint_A \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\rho}{c'} V u \right) dx dy \\ = \iint_{A'} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\rho}{c'} V u \right) dx dy \\ = - \int_L u \frac{\partial V}{\partial n'_i} dL' - \iint_{A'} u \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} - \frac{\rho}{c'} V \right) dx dy \\ = - \int_L u \frac{\partial V}{\partial n'_i} dL'.$$

Nous avons donc

$$J_1 (V + \varepsilon u) - \frac{1}{c'} J_0 (V + \varepsilon u) \\ = - 2\varepsilon \int_L u \frac{\partial V}{\partial n'_i} dL' + \varepsilon^2 \left[J_1(u) - \frac{1}{c'} J_0(u) \right].$$

La fonction V a la valeur 0 en tout point du contour L' et des valeurs positives en tout point de l'aire A' . La quantité $\frac{\partial V}{\partial n'_i}$ n'a donc de valeurs négatives en aucun point du contour L' !! Ces valeurs ne peuvent être non plus nulles en tout point du contour L' , car il serait aisé de prouver, dans ce cas, que la fonction V serait égale à 0 en tout point de l'aire A' .

On pourra évidemment choisir la fonction u de telle sorte qu'elle soit positive en tout point de la courbe L' . La quantité

$$\int_L u \frac{\partial V}{\partial n'} dL'$$

sera alors assurément différente de 0 et positive.

La fonction u étant ainsi choisie, on pourra toujours disposer de la constante ε de manière que le second membre de l'égalité précédente ait une valeur négative.

On voit donc que l'on peut faire prendre au quotient

$$\frac{J_1 (V + \varepsilon u)}{J_0 (V + \varepsilon u)}$$

des valeurs inférieures à $\frac{1}{c}$. Or, on ne peut lui faire prendre de valeurs inférieures à $\frac{1}{c}$. Il faut donc que $\frac{1}{c}$ soit supérieur à $\frac{1}{c}$, ou que c soit inférieur à c . C. Q. F. D.

Art. 4^e. - Nous allons prouver maintenant que si l'aire A décroît d'une manière continue, la valeur de la quantité c décroît d'une manière continue.

Traçons, en effet, dans l'aire A , une aire A' capable de venir se confondre avec l'aire A par une déformation continue.

Soit L le contour de l'aire A (fig. 68); soit L' le contour de l'aire A' . Soit c la constante relative à l'aire A ; soit c' la constante relative à l'aire A' . Le Théorème précédent nous enseigne que l'on a $c' < c$.

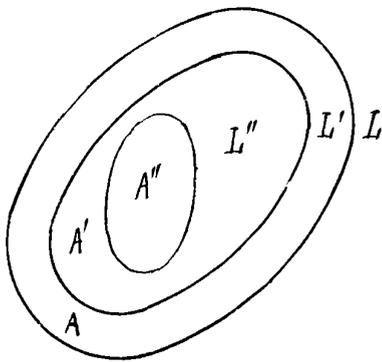


Fig. 68.

Considérons la fonction $U(x, y)$ qui est positive en tout point de l'aire A , vérifie en tout point de cette aire l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{1}{c} \rho(x, y) U = 0,$$

et prend la valeur 0 en tout point du contour L' , cette fonction étant formée par le procédé

qui a été indiqué au § précédent :

Soit E la limite supérieure des valeurs prises par la fonction $U(x, y)$ à l'intérieur de l'aire A . La continuité de la fonction $U(x, y)$ nous permettra toujours de prendre le contour L' assez voisin du contour L pour que la limite supérieure c' des valeurs prises par la fonction $U(x, y)$ entre les contours L et L' soit certainement inférieure à E .

Soit ε une quantité comprise entre c et E . L'ensemble des points où $U(x, y)$ prend des valeurs au moins égales à ε forme certainement une

aire A'' , en entier comprise dans l'aire A' . En tout point du contour L'' de cette aire, on a assurément,

$$u(x, y) = \varepsilon.$$

Soit c'' la constante relative à l'aire A'' . On a

$$c'' < c' < c.$$

Si le contour L tend vers le contour L' , ε tend vers 0; on peut donc en même temps faire tendre ε vers 0. Si nous démontrons que, ε tendant vers 0, c'' tend vers c , nous voyons que l'on sera assuré que c' tend vers c lorsque le contour L' tend vers le contour L , et le Théorème énoncé sera démontré.

La proposition qu'il s'agit maintenant de démontrer, est donc la suivante:

Lorsque ε tend vers 0, c'' tend vers c .

Formons, pour l'aire A'' les fonctions $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots$ et les quantités W_0, W_1, W_2, \dots définies au § IV. Désignons les par

$$u''_1(x, y), u''_2(x, y), \dots$$

$$W_0, W_1'', W_2'', \dots$$

La fonction $\frac{u(x, y)}{\varepsilon}$ est positive en tout point de l'aire A'' ; elle vérifie, en tout point de cette aire, l'équation aux dérivées partielles.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ \frac{u(x, y)}{\varepsilon} \right\} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left\{ \frac{u(x, y)}{\varepsilon} \right\} + \frac{1}{c} \frac{u(x, y)}{\varepsilon} = 0;$$

elle prend la valeur 1 en tout point du contour L'' .

Si l'on observe que $\frac{1}{c}$ est inférieur à $\frac{1}{c''}$ on voit que l'on a, en tout point de l'aire A''

$$\frac{u(x, y)}{\varepsilon} = 1 + \frac{1}{c} u''_1(x, y) + \frac{1}{c^2} (x, y) + \dots$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $\varepsilon p(x, y)$ et en intégrant par rapport à $dx dy$ dans toute l'étendue de l'aire A'' , nous aurons

$$\iint_{A''} p(x, y) u dx dy = \varepsilon \left(W_0'' + \frac{1}{c} W_1'' + \frac{1}{c^2} W_2'' + \dots \right).$$

Désignons par W'' la valeur du premier membre de cette égalité.

Posons

$$c''_n = \frac{W_n''}{W_0''}$$

et nous aurons

$$W'' = \varepsilon W_0'' \left(1 + c''_1 \cdot \frac{1}{c} + c''_1 \cdot c''_2 \cdot \frac{1}{c} + c''_1 \cdot c''_2 \cdot c''_3 \cdot \frac{1}{c} + \dots \right).$$

Les quantités c''_1, c''_2, \dots sont toutes inférieures à c'' , et la quantité c'' elle-même est inférieure à c . L'égalité précédente donne donc

$$W'' < \varepsilon W_0'' \frac{1}{1 - \frac{c''}{c}},$$

ou bien

$$W''(c-c'') < \varepsilon W_0 c.$$

Lorsque ε tend vers 0, le contour L'' tend vers le contour L ; les quantités W_0'' et W'' tendent vers les limites finies W_0 et W . La quantité $(c-c'')$ tend donc vers 0. C. Q. F. D.

Art. 5^e. — Si la fonction $p(x, y)$ est déterminée et positive en tout point d'un domaine donné D , on peut toujours, autour d'un point quelconque M de ce domaine, délimiter une aire A assez petite pour que la constante c relative à cette aire soit inférieure à 1.

Voici comment M. Liard démontre ce Théorème ⁽¹⁾

Tous avons vu (§ II) que la fonction $p(x, y)$ et le point M étant donnés, on pouvait toujours délimiter autour de ce point une aire A assez petite pour qu'il soit possible d'y trouver deux fonctions, B' et B'' , vérifiant l'inégalité

$$\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B''}{\partial y} - p > B'^2 + B''^2.$$

Dans une telle aire une fonction ψ qui vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + p \psi = 0.$$

est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur le contour. En particulier, si elle prend la valeur 0 sur le contour, elle prend assurément la valeur 0 en tout point de l'aire.

Si l'on se reporte à ce que nous avons dit au § précédent on voit que, pour l'aire A , la constante c ne peut être égale à 1. Montrons qu'elle ne peut être supérieure à 1.

L'égalité (23) donne

$$W_{2n} = \iint_A p(x, y) u_n^2 dx dy.$$

L'égalité (24) donne

$$W_{2n-1} = \iint_A \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

De ces égalités on déduit

$$\begin{aligned} W_{2n-1} - W_{2n} &= \iint_A \left[\left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial y} \right)^2 - p u_n^2 \right] dx dy \\ &= \iint_A \left[\left(\frac{\partial B'}{\partial x} + \frac{\partial B''}{\partial y} - p \right) u_n^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_n}{\partial y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 B' u_n \frac{\partial u_n}{\partial y} + 2 B'' u_n \frac{\partial u_n}{\partial x} \right] dx dy. \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Liard, Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du Second Ordre. Acta Mathematica t. XII p 332.

Or la dernière intégrale, nous le savons, est forcément positive. Nous avons donc

$$W_{2n-1} - W_{2n} > 0,$$

ou

$$c_{2n} < 1.$$

Les quantités c_n étant toutes inférieures à l'unité, leur limite c ne peut être supérieure à l'unité.

Nous voyons donc que la constante c , relative à l'aire A , est inférieure à 1, ce qui démontre le Théorème énoncé.

Art. 6^e. — Faisons une application de cette dernière proposition à l'équation

$$(13) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\delta \psi}{1+x^2+y^2} = 0.$$

Elle entraîne la conséquence suivante :

Autour d'un point donné M , il est toujours possible de tracer une aire A assez petite pour qu'il existe une fonction ψ vérifiant l'équation (13) en tout point de cette aire ou de son contour.

Si l'on se reporte à ce qui a été dit [Chapitre VI, § IV] au sujet des surfaces minima, on voit que cette proposition entraîne cette autre :

Étant donné un point quelconque sur une surface à courbure moyenne nulle, on peut toujours, autour de ce point, tracer un contour L assez restreint pour que l'aire qu'il découpe sur la surface à courbure moyenne nulle soit un minimum parmi toutes les aires limitées au même contour.

Nous avons fait usage de ce Théorème au Chapitre V, § VI, pour déterminer les conditions de la stabilité de l'équilibre d'une membrane qui n'est soumise à aucune force.

Art. 7^e. — Nous avons, dans ce qui précède, supposé la fonction $p(x, y)$ donnée, et étudié les variétés de la constante c avec les variations de l'aire A . Le Théorème que nous allons démontrer se rapporte au cas contraire où on laisse l'aire A invariable, et où l'on change la fonction $p(x, y)$.

Supposons que l'on remplace la fonction $p(x, y)$ par une nouvelle fonction $p'(x, y)$ obtenue en multipliant la précédente par la constante positive λ . La constante c sera remplacée par une nouvelle constante c' . Cherchons la relation qui existe entre c' et c .

La fonction $u, (x, y)$ vérifie, en tout point de l'aire A , l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p = 0,$$

et prend la valeur 0 en tout point du contour L ; la fonction $u', (x, y)$

vérifié en tout point de l'aire A l'équation

$$\frac{\partial^2 u'_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'_1}{\partial y^2} + \rho' = \frac{\partial^2 u'_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'_1}{\partial y^2} + \lambda \rho = 0,$$

et prend la valeur 0 en tout point du contour L ; on a donc

$$u'_1 = \lambda u_1.$$

La fonction u_2 et la fonction u'_2 prennent tous deux la valeur 0 en tout point du contour L ; en tout point de l'aire A , la première vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} + \rho u_1 = 0,$$

et la seconde vérifie l'équation aux dérivées partielles:

$$\frac{\partial^2 u'_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'_2}{\partial y^2} + \rho' u'_1 = \frac{\partial^2 u'_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u'_2}{\partial y^2} + \lambda^2 \rho u_1 = 0;$$

on a donc

$$u'_2 = \lambda^2 u_2.$$

On démontrerait ainsi de proche en proche que, quel que soit l'indice n ,

$$u'_n = \lambda^n u_n.$$

Ce premier résultat acquis, on trouve

$$\begin{aligned} W'_n &= \iint_A \rho'(x, y) u'_n dx dy \\ &= \lambda^{n+1} \iint_A \rho(x, y) u_n dx dy = \lambda^{n+1} W_n \end{aligned}$$

puis

$$c'_n = \frac{W'_n}{W'_n} = \frac{\lambda^{n+1} W_n}{\lambda^n W_{n-1}} = \lambda c_n.$$

De cette dernière égalité, nous déduisons sans peine la relation
(36)..... $c' = \lambda c$.

Les Vibrations transversales des Membranes planes. — Sons propres.

§. I. — Application des Théories précédentes à l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + K^2 \psi = 0.$$

Revenons maintenant au problème posé au § I du Chapitre précédent problème qui se ramène à la question analytique suivante : Trouver une fonction ψ qui vérifie, dans une aire donnée A , l'équation.

$$(1) \dots\dots\dots \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + K^2 \psi = 0,$$

et qui prend des valeurs données sur le contour de cette aire.

Nous allons discuter ce problème en supposant que l'aire A soit invariable et que l'on donne successivement au paramètre K^2 , qui est indépendant de x, y , toutes les valeurs positives.

Nous allons prouver en premier lieu ce Théorème :

Lorsque le paramètre K^2 est inférieur à une certaine valeur K_1^2 , il existe une et une seule fonction ψ qui vérifie l'équation (1) en tous les points de l'aire A et prend des valeurs données au contour de cette aire.

Posons en effet

$$K^2 = \lambda X^2;$$

laissons X^2 constant, et donnons au paramètre positif λ les valeurs $\lambda, \lambda', \lambda'', \dots$. Formons la constante c , considérée par M. Schwarz, qui correspond à l'aire A et à chacune des valeurs de la quantité K^2 . D'après le dernier Théorème au Chapitre précédent, ces valeurs c, c', c'', \dots seront de la forme

$$c = \lambda y, \quad c' = \lambda' y, \quad c'' = \lambda'' y, \dots\dots\dots$$

y étant la valeur de ce qui correspond à la valeur X^2 de K^2 .

Tant que λ sera inférieur à $\frac{1}{y}$, et K^2 , inférieur à $\frac{1}{X^2}$, la quantité c sera inférieure à l'unité. Il existera donc une et une seule fonction ψ vérifiant l'équation (1) en tout point de l'aire A et prenant des valeurs données aux divers points du contour. La démonstration que nous venons de faire nous indique en même temps la manière de former la quantité K_1^2 . On donne à K^2 une valeur arbitraire X^2 . Pour l'aire A et cette valeur X^2 de K^2 , on forme la constante c

considérée par M. Schwarz. Soit γ sa valeur. On a :

$$(2) \dots \dots \dots K_1^2 = \frac{\chi^2}{\gamma}$$

Le Théorème démontré au début du § VII du Chapitre précédent nous donne le moyen de former $\frac{1}{\gamma}$.

Soit ψ une fonction régulière et non identiquement nulle dans l'aire A et prenant la valeur 0 aux divers points du contour de cette aire. La quantité $\frac{1}{\gamma}$ est la plus petite des valeurs du quotient :

$$\frac{J_1(\psi)}{J_0(\psi)} = \frac{\iint_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy}{\chi^2 \iint_A \psi^2 dx dy}$$

Par conséquent la quantité K_1^2 est la plus petite des valeurs du quotient

$$(3) \dots \dots \dots f(\psi) = \frac{\iint_A \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy}{\iint_A \psi^2 dx dy}$$

Lorsqu'on donne à K^2 la valeur K_1^2 , la constante c , considérée par M. Schwarz, prend la valeur 1. Alors la fonction ψ n'est plus complètement déterminée par la condition de vérifier l'égalité (1) aux divers points de l'aire A et de prendre, au contour de cette aire, des valeurs données. Il existe une fonction ψ (et partant il existe une infinité de semblables fonctions) qui vérifie l'équation (1) en tout point de l'aire A , et qui s'annule au contour de cette aire sans être identiquement nulle à l'intérieur de l'aire.

Existe-t-il d'autres valeurs de K^2 qui jouissent de la même propriété?

Lorsqu'on donne à la fonction ψ une variation infiniment petite $\delta\psi$, le quotient $f(\psi)$, défini par l'égalité (4), éprouve une variation

$$\delta f(\psi) = f(\psi + \delta\psi) - f(\psi).$$

On donne le nom de valeurs stationnaires du quotient $f(\psi)$ aux valeurs qui sont telles que

$$\delta f(\psi) = 0,$$

quel que soit $\delta\psi$.

Nous allons démontrer que pour qu'il existe une fonction ψ non identiquement nulle dans l'aire A , vérifiant l'équation (1) en tout point de cette aire et prenant la valeur 0 en tout point du contour, il faut et il suffit que K^2 soit une des valeurs stationnaires du quotient $f(\psi)$.

Supposons en effet que K^2 soit une valeur stationnaire de ce quotient

essentiellement positif. Écrivons que lorsque la fonction Ψ fait prendre à $f(\Psi)$ la valeur K^2 , la variation de $f(\Psi)$ est égale à 0. Nous aurons

$$0 = \frac{\iint_A \Psi^2 dx dy \cdot \delta \iint_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \iint_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \cdot \delta \iint_A \Psi^2 dx dy}{\left[\iint_A \Psi^2 dx dy \right]^2}$$

ce qui peut s'écrire, en supprimant le facteur non nul

$$\frac{\delta \iint_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy}{\iint_A \Psi^2 dx dy} = 0$$

$$(4) \dots \dots \dots \iint_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - K^2 \delta \iint_A \Psi^2 dx dy = 0.$$

Où on a

$$(5) \dots \dots \dots \delta \iint_A \Psi^2 dx dy = 2 \iint_A \Psi \delta \Psi dx dy.$$

La fonction Ψ étant égale à 0 en tous les points du contour de l'aire A , on a

$$\iint_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = - \iint_A \Psi \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) dx dy.$$

et par conséquent

$$\delta \iint_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = - \iint_A \delta \Psi \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) dx dy - \iint_A \Psi \left(\frac{\partial^2 \delta \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta \Psi}{\partial y^2} \right) dx dy.$$

Mais les deux fonctions Ψ et $\delta \Psi$ sont égales à 0 en tout point de l'aire A ; le Théorème de Green donne donc:

$$\iint_A \Psi \left(\frac{\partial^2 \delta \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta \Psi}{\partial y^2} \right) dx dy = \iint_A \delta \Psi \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) dx dy$$

et l'égalité précédente devient:

$$(6) \dots \dots \delta \iint_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = -2 \iint_A \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \delta \Psi dx dy.$$

En vertu des égalités (5) et (6), l'égalité (4) devient:

$$\iint_A \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + K^2 \Psi \right] \delta \Psi dx dy = 0.$$

Elle ne peut être vérifiée, puisque la quantité $\delta \Psi$ est arbitraire, que si l'on a en tout point de l'aire A ,

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + K^2 \Psi = 0.$$

La fonction Ψ est d'ailleurs assujettie à prendre la valeur 0 en tout point de l'aire A . Ainsi se trouve démontrée la première partie de notre Théorème : Si K^2 est une valeur stationnaire du quotient $f(\Psi)$, il existe une fonction Ψ , non identiquement nulle, prenant la valeur 0 en tout les points du contour de l'aire A et vérifiant l'équation (1) en tout point de cette aire.

Démontrons maintenant la réciproque : S'il existe une fonction Ψ , non identiquement nulle, prenant la valeur 0 au contour de l'aire A , et vérifiant en tout point de l'aire A , l'équation

$$(1) \dots \dots \dots \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + K^2 \Psi = 0,$$

K^2 est une valeur stationnaire du quotient $f(\Psi)$.

L'équation précédente peut s'écrire :

$$\iint_A \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \Psi \, dx \, dy + K^2 \iint_A \Psi^2 \, dx \, dy = 0.$$

La fonction Ψ étant égale à 0 en tout point du contour de l'aire A , le Théorème de Green donne :

$$\iint_A \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} \right) \Psi \, dx \, dy = - \iint_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] \, dx \, dy.$$

On a donc

$$(7) \dots \dots \dots \iint_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] \, dx \, dy - K^2 \iint_A \Psi^2 \, dx \, dy = 0.$$

Cette égalité nous montre déjà que K^2 est la valeur que prend la fonction $f(\Psi)$ lorsqu'on remplace Ψ par une fonction vérifiant l'équation (1) en tout point de l'aire A et égale à 0 en tout point du contour de cette aire. Il reste à démontrer que cette valeur K^2 est une valeur stationnaire de la fonction $f(\Psi)$. L'égalité (7) nous donne, en désignant par $\delta \Psi$ une fonction infiniment petite quelconque, s'annulant au contour de l'aire A ,

$$\iint_A \left(\frac{\partial^2 \delta \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta \Psi}{\partial y^2} \right) \delta \Psi \, dx \, dy + K^2 \iint_A \delta \Psi^2 \, dx \, dy = 0.$$

Mais, en vertu des égalités (5) et (6), cette égalité peut s'écrire :

$$\delta \iint_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] \, dx \, dy - K^2 \delta \iint_A \Psi^2 \, dx \, dy = 0.$$

Celle-ci s'écrit à son tour en vertu de l'égalité (7),

$$\iint_A \Psi^2 \, dx \, dy \cdot \delta \iint_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] \, dx \, dy - \iint_A \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} \right)^2 \right] \, dx \, dy \cdot \delta \iint_A \Psi^2 \, dx \, dy = 0,$$

ou

$$\delta f(\Psi) = 0.$$

K^2 est donc bien une valeur stationnaire de $f(\Psi)$.

Formons le quotient $f(\Psi)$. Il admettra à coup sûr un minimum, qui sera la quantité k_1^2 , dont l'existence est certaine. En outre, il admettra en général d'autres valeurs stationnaires, qui seront, par exemple, des minima relatifs ou des maxima relatifs ou absolus. Rangeons ces valeurs par ordre de grandeur croissante et désignons les par K_2^2, K_3^2, \dots .

Toutes les fois que la quantité K^2 n'aura pas une des valeurs $K_1^2, K_2^2, K_3^2, \dots$ une fonction Ψ sera déterminée sans ambiguïté par la condition de prendre une valeur donnée en tout point du contour de l'aire A et de vérifier l'équation (1) en tout point de cette aire. Si, en particulier, cette fonction doit prendre la valeur 0 en tout point du contour de l'aire A , elle sera égale à 0 en tout point de l'aire.

Au contraire, toutes les fois que la quantité K^2 aura une des valeurs $k_1^2, k_2^2, k_3^2, \dots$ il existera une infinité de fonctions vérifiant l'équation (1) en tout point de l'aire A et prenant les mêmes valeurs données en tout point du contour de cette aire. En particulier, on pourra trouver une fonction non identiquement nulle dans l'aire A vérifiant l'équation (1) en tout point de cette aire et prenant la valeur 0 sur le contour de cette aire.

Cette analyse, on le voit, est imitée de l'analyse de M. Poincaré que nous avons exposée à la page 288 de la I^e Partie. Mais, dans le cas présent, l'emploi des Théorèmes de M. Schwarz permet de donner à cette analyse une rigueur que l'on ne pouvait atteindre dans le problème que nous avons traité par la méthode de M. Poincaré.

§. II. — Sous Propres — Lignes Nodales

Considérons, par une membrane donnée, les constantes K_1^2, K_2^2, \dots . Définissons de nouvelles constantes positives T_1, T_2, \dots par les égalités

$$\left(\frac{2\pi}{aT_1}\right)^2 = K_1^2,$$

$$\left(\frac{2\pi}{aT_2}\right)^2 = K_2^2,$$

Les quantités T_1, T_2, \dots seront les périodes des sous propres de la membrane.

Considérons une telle période, la période T_1 , par exemple. On pourra trouver deux fonctions Ψ et Ψ' , différentes de 0 à l'intérieur de l'aire A , vérifiant en tout point de cette aire l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 \psi = 0,$$

et prenant la valeur 0 en tout point du contour de la membrane.
L'expression

$$\zeta = \psi \sin \frac{2\pi}{T_1} t + \psi' \cos \frac{2\pi}{T_1} t$$

représentera alors un mouvement vibratoire simple, de période T_1 , dans lequel chaque point de la membrane se déplace normalement au plan de la membrane tandis que chaque point du contour demeure immobile.

Ce résultat pourrait servir de point de départ à une étude sur les sons propres et à la résonance des membranes, analogue à celle que nous avons développée sur les sons propres et la résonance des espaces remplis d'air. Nous ne reprendrons pas ici cette étude; signalons seulement la proposition suivante, analogue à celle que le P. Mercenne a énoncée pour les tuyaux.

Si deux membranes également tendues de la même substance sont semblables l'une à l'autre, leurs sons propres se correspondent: les périodes de deux sons propres correspondants sont entre elles comme les dimensions homologues des deux membranes.

Nous nous bornerons à insister sur une théorie qui a une grande importance dans l'étude des membranes, la théorie des lignes nodales.

Considérons d'abord la plus grave des périodes propres d'une membrane; celle qui est définie par l'égalité.

$$\left(\frac{2\pi}{T_1}\right)^2 = K_1^2$$

Si nous considérons l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + K_1^2 \psi = 0$$

nous savons que pour cette équation et pour l'aire A de la membrane, la constante c de M. Schwarz est égale à 1. Nous savons alors que l'on peut former une fonction ψ vérifiant l'égalité précédente en tout point de l'aire A , prenant la valeur 0 en tout point du contour de cette aire, et prenant des valeurs toutes positives en tout point de l'aire A .

Je dis que toute autre fonction ψ' égale à 0 en tout point du contour de l'aire A et vérifiant en tout point de cette aire l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} + K_1^2 \psi' = 0$$

s'obtient en posant

$$\psi' = \lambda \psi,$$

λ étant un coefficient positif ou négatif.

Considérons en effet une fonction Ψ jouissant, des propriétés que nous venons d'indiquer. Posons :

$$J_0 = \iint_A \Psi^2 dx dy, \quad J'_0 = \iint_A \Psi'^2 dx dy.$$

Soit

$$\mu = \left(\frac{J_0}{J'_0} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Posons

$$\Psi'' = \mu \Psi'.$$

La fonction Ψ'' sera égale à 0 en tout point du contour de l'aire A et vérifiera l'équation

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi''}{\partial y^2} + K^2 \Psi'' = 0.$$

Nous allons chercher à démontrer que l'on a

$$\Psi''^2 = \Psi'^2,$$

ou bien

$$\Psi = \pm \frac{\Psi'}{\mu},$$

ce qui prouvera la proposition énoncée.

Supposons que Ψ''^2 ne soit pas égal à Ψ'^2 en tout point de l'aire A . L'égalité

$$\iint_A (\Psi''^2 - \Psi'^2) dx dy = 0,$$

évidente d'après la manière dont a été formée la fonction Ψ'' , nous montre que la quantité $\Psi''^2 - \Psi'^2$ ne pourra avoir constamment le même signe à l'intérieur de l'aire A . L'aire A , se partagera, en une région A' où l'on a constamment

$$\Psi''^2 - \Psi'^2 > 0$$

et une région A'' où l'on a constamment

$$\Psi''^2 - \Psi'^2 < 0.$$

Ces deux inégalités peuvent s'écrire :

$$(\Psi'' - \Psi') (\Psi'' + \Psi') > 0,$$

$$(\Psi'' - \Psi') (\Psi'' + \Psi') < 0.$$

On voit alors que le résultat que nous venons d'énoncer serait impossible, si chacune des deux fonctions $(\Psi'' - \Psi')$ $(\Psi'' + \Psi')$, gardaient à l'intérieur de l'aire A un signe invariable.

Il faut donc que l'une au moins de ces deux fonctions change de signe. Or, nous allons voir que cette hypothèse conduit à une absurdité.

Supposons par exemple que la fonction $(\Psi'' - \Psi')$ ne garde pas un signe invariable à l'intérieur de l'aire A . L'aire A se partagera alors en une

ou plusieurs aires linéairement connexes A_1, A_1', \dots où la fonction $(\Psi'' - \Psi')$ sera positive et en une ou plusieurs aires linéairement connexes A_2, A_2', \dots où la fonction $(\Psi'' - \Psi')$ sera négative. Ces aires sont séparées les unes des autres par des lignes le long desquelles la fonction $(\Psi'' - \Psi')$ aura la valeur 0.

Considérons une de ces aires partielles, l'aire A_1 , par exemple. Dans l'aire A_1 , la fonction $\varphi = \Psi'' - \Psi'$, est différente de 0; elle vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + K_1^2 \varphi = 0;$$

elle prend la valeur 0 aux confins de l'aire A_1 .

Mais l'existence d'une semblable fonction φ est une impossibilité. En effet, la constante c de M. Schwarz est, pour l'aire A , égale à l'unité, l'aire A_1 , étant contenue dans l'aire A , la constante c de M. Schwarz est, pour l'aire A_1 , inférieure à l'unité. Donc toute fonction φ égale à 0 au contour de l'aire A_1 , et vérifiant en tout point de l'aire A_1 , l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + K_1^2 \varphi = 0,$$

doit être identiquement nulle en tout point de l'aire A_1 .

Nous sommes conduits à une absurdité en supposant que les deux fonctions Ψ^2 et Ψ''^2 ne sont pas identiques en tout point de l'aire A . Nous devons donc avoir en tout point de l'aire A ,

$$\Psi''^2 = \Psi^2,$$

ou bien

$$\Psi'^2 = \frac{\Psi^2}{\mu^2},$$

ou bien enfin

$$\Psi' = \pm \frac{1}{\mu} \Psi,$$

ce qui démontre la proposition énoncée.

La fonction Ψ est positive en tout point de l'aire A et ne prend la valeur 0 en aucun point de cette aire. Dès lors, nous obtenons la proposition suivante: Si une fonction Ψ , qui n'est pas identiquement nulle dans l'aire A , vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + K_1^2 \Psi = 0$$

en tout point de cette aire et devient égale à 0 tout le long du contour de cette aire, cette fonction ne peut ni changer de signe, ni devenir égale à 0 à l'intérieur de l'aire A .

De là cette conséquence:

Lorsque la membrane rend le plus grave des sons propres qu'elle puisse rendre, il n'existe à sa surface aucun point qui demeure immobile pendant toute la durée du mouvement.

Duh. (6.11) n° 25.

Soit en effet

$$\zeta = \psi \sin \frac{2\pi t}{T} + \cos \frac{2\pi t}{T}$$

l'équation du mouvement de la membrane. Pour qu'un point de la membrane demeure immobile, il faudrait que l'on eût en ce point

$$\psi = 0, \quad \psi' = 0,$$

chose impossible, comme nous venons de le voir.

Ces diverses conclusions cessent d'être justifiées lorsqu'on considère non plus le plus grave des sons propres que la membrane peut rendre, mais un quelconque des autres sons qui lui sont propres.

Dans ce cas, il peut fort bien arriver que les deux propositions suivantes soient exactes :

1°. Il existe une fonction ψ non identiquement nulle dans l'aire A , vérifiant en tous les points de cette aire l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + K_i^2 \psi = 0,$$

prenant la valeur 0 en tous les points du contour de l'aire A ; cette fonction est positive dans certaines régions de l'aire A et négative dans d'autres,

2°. Si deux fonctions ψ et ψ' vérifient, dans l'aire A , l'équation aux dérivées partielles que nous venons d'écrire, et s'annulant au contour de l'aire A , l'une n'est pas forcément le produit de l'autre par un facteur constant.

Voyons quelles sont les conséquences de ces deux propositions. Commençons par la première.

Supposons que la fonction ψ dont il est question dans cette proposition soit positive dans une partie A_1 de l'aire A et négative dans une autre partie A_2 de l'aire A . Les deux régions A_1, A_2 , sont séparées par une ligne L le long de laquelle la fonction ψ a la valeur 0.

Soient λ et μ deux constantes

L'équation

$$(8) \dots \dots \dots \zeta = \psi \left(\lambda \sin 2\pi \frac{t}{T_i} + \mu \cos 2\pi \frac{t}{T_i} \right)$$

représentera un mouvement vibratoire simple de la membrane. Dans ce mouvement vibratoire simple, les divers points de la ligne L demeureront immobiles pendant toute la durée du mouvement. La ligne L forme alors ce qu'on nomme une ligne nodale à la surface de la membrane.

La première de nos deux propositions entraîne donc la possibilité de lignes nodales à la surface de la membrane.

Voyons maintenant quelle est la signification physique de la seconde proposition, et pour cela, commençons par la supposer inexacte.

Si la seconde de nos propositions est inexacte, en donnant toutes les valeurs possibles aux deux constantes λ et μ qui figurent dans l'équation (8), on amènera cette équation à représenter tous les mouvements vibratoires simples de période T_i que peut présenter la membrane. On voit alors que lorsque la membrane rendra un son simple quelconque de période T_i , elle présentera toujours une même ligne nodale, définie par l'équation

$$\Psi = c.$$

Admettons au contraire l'exactitude de notre seconde proposition

Supposons, par exemple, que l'on puisse trouver deux fonctions Ψ et Ψ' , vérifiant toutes deux l'équation (1) à l'intérieur de l'aire A , prenant la valeur 0 en tout point du contour de l'aire A , et dont l'une ne soit pas le produit de l'autre par un facteur constant

La membrane pourra alors présenter des mouvements vibratoires simples de période T_i , appartenant à trois types différents, respectivement représentés par les équations :

$$\zeta = \Psi \left(\lambda \sin 2\pi \frac{t}{T_i} + \mu \cos 2\pi \frac{t}{T_i} \right),$$

$$\zeta = \Psi' \left(\lambda \sin 2\pi \frac{t}{T_i} + \mu \cos 2\pi \frac{t}{T_i} \right),$$

$$\zeta = \lambda \Psi \sin 2\pi \frac{t}{T_i} + \mu \Psi' \cos 2\pi \frac{t}{T_i} + \lambda' \Psi' \sin 2\pi \frac{t}{T_i} + \mu' \Psi \cos 2\pi \frac{t}{T_i}.$$

où les λ, μ , sont des constantes arbitraires.

Tous les mouvements du premier type admettent une même ligne nodale L définie par l'équation

$$\Psi = 0.$$

Tous les mouvements du second type admettent une même ligne nodale L' définie par l'équation

$$\Psi' = 0.$$

Enfin, dans les mouvements du dernier type, les seuls points qui demeurent immobiles sont les points communs aux lignes L et L' . Ces points forment en général, un système, de nœuds isolés.

§ III. - Cas particuliers. - Vérifications expérimentales

L'existence des lignes nodales a une grande importance. C'est en effet l'existence de semblables lignes qui permet de vérifier expérimentalement les conséquences et la théorie des membranes. On saurait

de sable sur une membrane vibrante, comme Chladni l'a indiqué le premier, on voit le sable abandonner les parties de la membrane qui sont en mouvement et se rassembler sur les parties immobiles, de manière à dessiner les lignes nodales.

Il est donc fort intéressant d'intégrer l'équation des membranes vibrantes et de déterminer la forme des lignes nodales pour certaines membranes de forme simple.

Poisson, dans son grand Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps Élastiques a abordé l'étude de la membrane rectangulaire. Cette étude a été poussée très loin par Lamé, dans ses Leçons sur la Théorie Mathématique de l'Elasticité des Corps solides. Lamé a également traité la membrane triangulaire.

Poisson a abordé l'étude des vibrations tant normales que tangentielles de la membrane circulaire. L'étude des vibrations normales de la membrane circulaire se rattache à la théorie des fonctions de Bessel. Elle a été l'objet des travaux mathématiques d'un grand nombre d'auteurs, notamment de Bourget⁽¹⁾

Enfin, E. Mathieu⁽²⁾ a étudié les vibrations de la membrane elliptique.

Nous terminerons ici cette étude de l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + K^2 \psi = 0$$

et des vibrations normales des membranes, le lecteur, désireux de nouveaux détails, les trouvera dans un ouvrage récent que M. Frédéric Pockels⁽³⁾ a consacré à l'équation précédente.

⁽¹⁾ Bourget. Mémoire sur le mouvement vibratoire des Membranes circulaires (Annales de l'École Normale Sup.^e T. III. 1866)

⁽²⁾ Mathieu. Cours de Physique Mathématique.

⁽³⁾ F. Pockels. Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + K^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik. Leipzig. 1891.

197
Chapitre XI.

Les Petits Mouvements d'une Membrane tendue sur un Cadre quelconque.

§ I. — Lemme de Géométrie.

Nous venons d'étudier les principales propriétés d'une membrane tendue sur un cadre plan ; nous allons maintenant pour terminer cette étude sur l'équilibre et le mouvement des membranes, montrer comment on peut mettre en équation le problème qui consiste à étudier les petits mouvements d'une membrane tendue sur un cadre quelconque.

Nous commencerons par démontrer une proposition de géométrie qui nous sera utile par la suite.

Considérons une surface à courbure moyenne nulle AMB , (fig. 69)

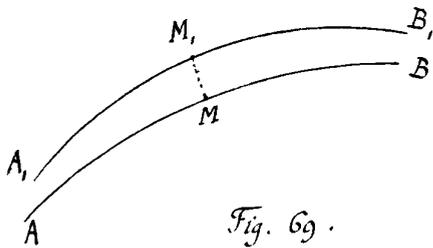


Fig. 69.

que nous supposons posséder une face positive et une face négative. R_1 et R_2 sont les rayons de courbure principaux de cette surface, comptés positivement lorsque les centres de courbure correspondants se trouvent du côté négatif de la surface.

Donnons à chaque point M un déplacement normal infiniment petit $MM_1 = N$, variable d'un point à l'autre, et compté positivement du côté positif de la surface. La surface vient en $A_1M_1B_1$. La courbure moyenne de cette surface au point M_1 a une valeur

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

que nous voulons calculer.

Il est évident tout d'abord que si nous marquons la position du point M sur la surface S au moyen des paramètres ξ, η , employés au Chapitre VI, la quantité $(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$ sera une fonction linéaire et homogène des six quantités infiniment petites.

$$N, \quad \frac{\partial N}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial N}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial \eta}, \quad \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2}.$$

D'autre part, si la quantité N , dans une aire aussi petite que

l'on voudra entourant le point M , vérifie l'équation aux dérivées partielles (Chapitre VI, Equation (17))

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} + \frac{8N}{1 + \xi^2 + \eta^2} = 0,$$

la courbure moyenne $\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$ de la nouvelle surface sera nulle au point M_1 . On doit donc avoir

$$(1) \dots \dots \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \lambda \left(\frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} + \frac{8N}{1 + \xi^2 + \eta^2} \right),$$

le facteur λ ne devenant pas infini lorsque la quantité entre parenthèse s'annule. Comme la quantité $\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$ doit être fonction linéaire et homogène de

$$N, \frac{\partial N}{\partial \xi}, \frac{\partial N}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 N}{\partial \xi \partial \eta}, \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2},$$

on voit que le facteur λ sera indépendant de N et de ses dérivées d'ordre quelconque par rapport à ξ, η ,

Pour déterminer ce facteur λ , on peut, dès lors, choisir pour surface A, M, B , une surface particulière infiniment voisine de la surface AMB . Nous supposons que, dans une région aussi petite que l'on voudra entourant les points M, M_1 , ces deux surfaces soient parallèles entre elles.

Dans un déplacement normal N donné aux divers points avoisinants le point M , un élément superficiel dS éprouve une variation nulle. Si le même déplacement est donné aux points avoisinant le point M_1 , l'élément dS éprouve, d'après le théorème de M. Bertrand, une variation

$$\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) N dS.$$

D'ailleurs, si les deux surfaces sont parallèles, elles ont la même normale l'une au point M , l'autre au point M_1 . Les deux déplacements N peuvent donc être regardés comme deux déplacements successifs suivant la normale à la première surface. Donc, si à tous les points d'un élément dS d'une surface à courbure moyenne nulle, on donne deux fois de suite un déplacement N , le même pour tous, suivant la normale à la surface, on a

$$S^2 dS = \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) N dS,$$

$\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)$, se rapportant à une surface parallèle à la première, et située à une distance N de la première. Mais les calculs faits au Chapitre VI nous donnent, en général,

$$dS = (1 + \xi^2 + \eta^2)^2 \mathcal{F}(\xi + i\eta) \overline{\mathcal{F}}_1(\xi - i\eta) d\xi d\eta,$$

$$\delta^2 dS = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial N}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial N}{\partial \eta} \right)^2 - \frac{8N^2}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2} \right] d\xi d\eta.$$

Dans le cas où les deux surfaces sont parallèles, la seconde égalité devient :

$$\delta^2 dS = - \frac{4N^2}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2} d\xi d\eta.$$

La courbure moyenne d'une surface parallèle à une surface à courbure moyenne nulle et située à une distance infiniment petite N de celle-ci est donc

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = - \frac{4}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^4 \mathcal{F}(\xi + i\eta) \overline{\mathcal{F}}_1(\xi - i\eta)} N.$$

D'autre part, la formule (1) donne dans ce cas,

$$\frac{-1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{8 - \lambda}{1 + \xi^2 + \eta^2} N.$$

On a donc

$$\lambda = - \frac{1}{2(1 + \xi^2 + \eta^2)^3 \mathcal{F}(\xi + i\eta) \overline{\mathcal{F}}_1(\xi - i\eta)}$$

et par conséquent l'égalité (1) devient :

$$(2) \quad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = - \frac{1}{2(1 + \xi^2 + \eta^2)^3 \mathcal{F}(\xi + i\eta) \overline{\mathcal{F}}_1(\xi - i\eta)} \times \left[\frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} + \frac{8N}{1 + \xi^2 + \eta^2} \right]$$

§. II. - Petits Mouvements d'une Membrane tendue sur un cadre quelconque.

Ces préliminaires posés, abordons le problème en vue duquel ils ont été établis, à savoir l'étude des petits mouvements d'une membrane tendue sur un cadre quelconque.

A la surface de la membrane prise dans son état naturel traçons deux systèmes de lignes, orthogonales entre elles; les lignes ($v = \text{const}$) et les lignes $v(u = \text{const.})$

Pour passer de la position $M_0(u, v)$ qu'occupe un point dans l'état naturel de la membrane à la position M qu'il occupe à l'instant t , il faut d'abord prendre le point m de la membrane à l'état naturel qui a pour coordonnées $(u + U), (v + V)$, puis donner à ce dernier un

déplacement N suivant la normale positive à la membrane.

Les composantes ξ, η, ζ , du déplacement de ce point sont, à l'instant t ,

$$\xi = \sqrt{A} \cdot U \cos(u, x) + \sqrt{B} V \cos(v, x) + N \cos(n, x),$$

$$\eta = \sqrt{A} U \cos(u, y) + \sqrt{B} V \cos(v, y) + N \cos(n, y),$$

$$\zeta = \sqrt{A} U \cos(u, z) + \sqrt{B} V \cos(v, z) + N \cos(n, z).$$

Cherchons à l'instant t , les composantes de la vitesse de ce point. Nous aurons,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \left(\frac{\partial \sqrt{A}}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \sqrt{A}}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial t} \right) U \cos(u, x)$$

$$+ \left(\frac{\partial \sqrt{B}}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \sqrt{B}}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial t} \right) V \cos(v, x)$$

$$+ \sqrt{A} \left[\frac{\partial \cos(u, x)}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \cos(u, x)}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial t} \right] U$$

$$+ \sqrt{B} \left[\frac{\partial \cos(v, x)}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \cos(v, x)}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial t} \right] V$$

$$+ \left[\frac{\partial \cos(n, x)}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \cos(n, x)}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial t} \right] N$$

$$+ \sqrt{A} \cos(u, x) \frac{\partial U}{\partial t} + \sqrt{B} \cos(v, x) \frac{\partial V}{\partial t} + \cos(n, x) \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Si l'on néglige les termes qui renferment le produit de deux des quantités $U, V, N, \frac{\partial U}{\partial t}, \frac{\partial V}{\partial t}, \frac{\partial N}{\partial t}$, devant les termes du premier degré par rapport à ces quantités on trouve la première des égalités.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} &= \sqrt{A} \cos(u, x) \frac{\partial U}{\partial t} + \sqrt{B} \cos(v, x) \frac{\partial V}{\partial t} + \cos(n, x) \frac{\partial N}{\partial t}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \sqrt{A} \cos(v, y) \frac{\partial U}{\partial t} + \sqrt{B} \cos(v, y) \frac{\partial V}{\partial t} + \cos(n, y) \frac{\partial N}{\partial t}, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \sqrt{A} \cos(u, z) \frac{\partial U}{\partial t} + \sqrt{B} \cos(v, z) \frac{\partial V}{\partial t} + \cos(n, z) \frac{\partial N}{\partial t}. \end{aligned} \right.$$

Les deux dernières se démontrent d'une manière analogue.

Une démonstration semblable donne les égalités

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \sqrt{A} \cos(u, x) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \sqrt{B} \cos(v, x) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \cos(n, x) \frac{\partial^2 N}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \sqrt{A} \cos(u, y) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \sqrt{B} \cos(v, y) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \cos(n, y) \frac{\partial^2 N}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \sqrt{A} \cos(u, z) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \sqrt{B} \cos(v, z) \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + \cos(n, z) \frac{\partial^2 N}{\partial t^2}. \end{aligned} \right.$$

Les équations d'équilibre de la membrane sont les équations (19),

(20), (21), (22) et (23) du Chapitre V. Nous en déduisons les équations du mouvement de la membrane en y remplaçant X, Y, Z par

$$\left(X - \frac{\partial \xi}{\partial t^2} \right), \left(Y - \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \right), \left(Z - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right).$$

Observons que l'on a :

$$\sqrt{A} \cos(u, x) = \frac{\partial f}{\partial u},$$

$$\sqrt{B} \cos(v, x) = \frac{\partial f}{\partial v},$$

$$\sqrt{A} \cos(u, y) = \frac{\partial g}{\partial u},$$

$$\sqrt{B} \cos(v, y) = \frac{\partial g}{\partial v},$$

$$\sqrt{A} \cos(u, z) = \frac{\partial h}{\partial u},$$

$$\sqrt{B} \cos(v, z) = \frac{\partial h}{\partial v};$$

supposons en outre que les divers éléments de la membrane ne soient sollicités par aucune force extérieure, et, en tenant compte des égalités (3), les égalités (19) et (20) du Chapitre V nous donneront

$$(4) \dots \dots \dots \begin{cases} \rho A \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial u}, \\ \rho B \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial \Theta}{\partial v}, \\ \rho \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} = -\Theta \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \end{cases}$$

Dans l'état naturel, la membrane a partout la même densité, la même tension, et sa courbure moyenne est nulle.

Durant le mouvement la courbure moyenne prend une valeur infiniment petite; la densité et la tension varient infiniment peu autour de leur valeur naturelle. Si donc, dans les équations précédentes on néglige les infiniments petits du second ordre par rapport à U, V et N , on pourra laisser à ρ et à Θ les valeurs constantes ρ_0 et Θ_0 que ces quantités prennent dans l'état naturel. Ces valeurs sont liées entre elles par la relation [Chapitre V, Égalité (23)],

$$(5) \dots \dots \dots \varphi(\rho_0) - \rho_0 \frac{d\varphi(\rho_0)}{d\rho_0} - \Theta_0 = 0.$$

Dans l'état naturel on a

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0.$$

Durant le mouvement, $\frac{\partial \Theta}{\partial u}, \frac{\partial \Theta}{\partial v}$, prennent des valeurs infiniment petites que nous allons calculer.

Calculons pour cela la valeur de Θ à l'instant t .

$$\text{L'égalité} \quad \Theta = \varphi(\rho) - \rho \frac{d\varphi(\rho)}{d\rho},$$

qui a lieu à tout instant, nous donne:

$$\Theta = \Theta_0 - \rho_0 \frac{d^2 \varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2} (\rho - \rho_0).$$

Soit dS_0 l'aire d'un certain élément de la membrane dans l'état naturel; soit dS l'aire du même élément à l'instant t . Nous aurons

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \frac{dS - dS_0}{dS_0},$$

et par conséquent,

$$(6) \dots \dots \dots \Theta = \Theta_0 + \rho_0^2 \frac{d^2 \varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2} \frac{dS - dS_0}{dS_0}$$

La valeur de $(dS - dS_0)$ se déduit de l'égalité (14) du Chapitre V, en y faisant

$$\delta u = U, \quad \delta v = V, \quad \delta n = N.$$

La courbure moyenne de la membrane étant nulle à l'état naturel, nous aurons

$$dS - dS_0 = \left[\frac{\frac{\partial(AB)}{\partial u} U + \frac{\partial(AB)}{\partial v} V}{2AB} + \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v} \right] \sqrt{AB} du dv.$$

D'ailleurs

$$dS = \sqrt{AB} du dv.$$

On a donc

$$\frac{dS - dS_0}{dS_0} = \left[\frac{\frac{\partial(AB)}{\partial u} U + \frac{\partial(AB)}{\partial v} V}{2AB} + \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v} \right],$$

et d'après l'égalité (6)

$$\Theta = \Theta_0 + \left[\frac{\frac{\partial(AB)}{\partial u} U + \frac{\partial(AB)}{\partial v} V}{2AB} + \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial v} \right] \rho_0^2 \frac{d^2 \varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2}.$$

Si l'on observe que Θ_0 et ρ_0 sont indépendants de u et de v , on déduira de là les deux égalités suivantes:

$$(7) \dots \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial u} &= \rho_0^2 \frac{d^2 \varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2AB} \frac{\partial(AB)}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial(AB)}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial u} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2A^2 B^2} \left\{ AB \frac{\partial^2(AB)}{\partial u^2} - \left[\frac{\partial(AB)}{\partial u} \right]^2 \right\} U \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2A^2 B^2} \left\{ AB \frac{\partial^2(AB)}{\partial u \partial v} - \frac{\partial(AB)}{\partial u} \frac{\partial(AB)}{\partial v} \right\} V \right], \\ \frac{\partial \Theta}{\partial v} &= \frac{2 d^2 \varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2} \left[\frac{\partial^2 U}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} + \frac{1}{2AB} \frac{\partial(AB)}{\partial u} \frac{\partial U}{\partial v} + \frac{\partial(AB)}{\partial v} \frac{\partial V}{\partial v} \right] \end{aligned} \right.$$

$$+ \frac{1}{2A^2B^2} \left\{ AB \frac{\partial^2(AB)}{\partial u \partial v} - \frac{\partial(AB)}{\partial u} \frac{\partial(AB)}{\partial v} \right\} U$$

$$+ \frac{1}{2A^2B^2} \left\{ AB \frac{\partial^2(AB)}{\partial v^2} - \left[\frac{\partial(AB)}{\partial v} \right]^2 \right\} V \Bigg\}.$$

Si nous reportons ces valeurs de $\frac{\partial \Theta}{\partial u}$, $\frac{\partial \Theta}{\partial v}$, dans les premières égalités (7) nous trouvons les équations aux dérivées partielles qui régissent les petits mouvements tangentiels d'une membrane tendue sur un cadre quelconque.

Ces équations donnent lieu immédiatement à une remarque importante : Si l'on donne à une membrane diverses formes naturelles applicables l'une sur l'autre, dans ces diverses formes les deux coefficients A et B seront les mêmes fonctions de u, v, et la densité ρ_0 aura la même valeur; en sorte que pour des conditions aux limites correspondantes, les petits mouvements tangentiels des diverses membranes ainsi obtenues seront les mêmes.

Supposons par exemple que la forme naturelle de la membrane soit applicable sur un plan; nous pourrions prendre alors

$$A = 1, \quad B = 1,$$

et les équations (4) et (7), donneront, pour lois des petits mouvements tangentiels :

$$\rho_0 \frac{d^2 \varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial u \partial v} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2},$$

$$\rho_0 \frac{d^2 \varphi(\rho_0)}{d\rho_0^2} \left(\frac{\partial U}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} \right) = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

Ce sont les équations que nous avons trouvées (Chapitre VII, Equations (8)) en étudiant les petits mouvements tangentiels d'une membrane plane.

Arrivons maintenant à l'étude des petits mouvements d'une membrane qui s'effectuent suivant la normale à la membrane. Pour les étudier marquons la position d'un point sur la membrane au moyen des coordonnées ξ, η , employées au § I. La courbure moyenne de la membrane sera alors, à un instant quelconque, exprimée par la formule (2). Moyennant cette formule, la dernière des équations (4) deviendra

$$(8) \dots \frac{\Theta_0}{\rho_0} \frac{1}{2(1+\xi^2+\eta^2)^3} \mathcal{F}(\xi+i\eta) \mathcal{F}(\xi-i\eta) \left(\frac{\partial^2 N}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} + \frac{8N}{1+\xi^2+\eta^2} \right)$$

$$= \frac{\partial^2 N}{\partial t^2}.$$

Cherchons si le mouvement de la membrane suivant la normale

peut être un petit mouvement périodique simple.

Dans ce cas, on devra avoir

$$N = \Psi \sin 2\pi \frac{t}{T} + \Psi' \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

les deux fonctions Ψ et Ψ' étant deux fonctions de ξ et de η . En remplaçant N par cette valeur dans l'équation (8), on voit que chacune des deux fonctions Ψ et Ψ' doit intégrer l'équation

$$(9) \dots \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + \left[\frac{8}{1 + \xi^2 + \eta^2} + \frac{2\rho_0 (1 + \xi^2 + \eta^2)^3 \mathcal{F}(\xi + i\eta) \mathcal{F}_1(\xi - i\eta)}{\Theta_0} \right] \Psi = 0,$$

et, de plus, prendre des valeurs données pour les valeurs de ξ, η , qui correspondent au contour de la membrane.

Les deux fonctions $\mathcal{F}(x)$ et $\mathcal{F}_1(x)$ sont deux fonctions imaginaires conjuguées, puisque la membrane est réelle. La quantité

$$\mathcal{F}(\xi + i\eta) \mathcal{F}_1(\xi - i\eta)$$

est réelle et positive.

D'ailleurs, nous avons vu [Chapitre V, égalité (38)] que l'on devait avoir

$$\Theta_0 > 0.$$

$$\text{La quantité } p(\xi, \eta) = \frac{8}{1 + \xi^2 + \eta^2} + \frac{2\rho_0 (1 + \xi^2 + \eta^2)^3 \mathcal{F}(\xi + i\eta) \mathcal{F}_1(\xi - i\eta)}{\Theta_0}$$

est donc une fonction réelle et positive des variables (ξ, η) .

L'équation (9),

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \eta^2} + p(\xi, \eta) \Psi = 0,$$

rentre donc dans le type général que M. Schwarz a étudié et dont nous avons exposé les propriétés au Chapitre IX.

Livre IV.

Les Corps Élastiques

Chapitre I.

Définition des Corps Élastiques. Conditions de leur Équilibre.

§. I. Définition des Corps Élastiques.

Après avoir étudié, dans les deux Livres précédents, d'abord les Fluides, puis les fils et les membranes flexibles et extensibles, nous arrivons dans le présent Livre, à l'étude des Corps Élastiques.

Malgré la ressemblance des méthodes qui servent à étudier les corps que nous avons déjà examinés et les Corps Élastiques, ces derniers se distinguent des premiers par des caractères fondamentaux que nous allons chercher à préciser.

Nous admettrons encore dans l'étude des corps élastiques comme dans toutes les théories que nous avons développées jusqu'ici, que chacun des éléments d'un corps est défini par la connaissance d'un certain nombre de caractères qui lui sont propres, sans qu'on ait à faire intervenir dans sa définition la nature des autres éléments qui composent le corps et la position de ces éléments par rapport au premier.

Précisons ce point.

Supposons le corps divisé en éléments que nous désignons par les indices

1, 2, n,

Si l'élément existait seul, il aurait un Potentiel Thermodynamique Interne φ_1 ; si l'élément 2 existait seul, il aurait un potentiel Thermodynamique Interne φ_2 ;

Le système a pour Potentiel Thermodynamique Interne la quantité'

$$F = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n + \dots$$

Cette hypothèse fondamentale que nous faisons en ce moment pour les corps élastiques, nous l'avons faite pour tous les corps étudiés dans ce cours. Elle distingue les théories développées ici des théories de la capillarité, de l'électricité, du magnétisme, etc., ... pour lesquelles elle cesse d'être exacte.

Imaginons que le corps ait été pris dans un premier état parfaitement défini, que nous nommerons l'état naturel. Dans cet état naturel, les éléments 1, 2, ... n, ... auraient chacun un Potentiel Thermodynamique Interne parfaitement défini. Soient $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$ ces Potentiels

La quantité

$$\Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_n + \dots$$

demeurant constante dans les modifications imposées au corps, et l'expression du Potentiel Thermodynamique Interne pouvant toujours être modifiée par la soustraction d'une constante, nous pourrions prendre pour nouvelle expression du Potentiel Thermodynamique Interne du Système pris dans un état quelconque, la quantité

$$F = (\Psi_1 - \Psi'_1) + (\Psi_2 - \Psi'_2) + \dots + (\Psi_n - \Psi'_n) + \dots$$

On dira que le corps a éprouvé une simple déformation sans changement d'état physique ou chimique, si pour connaître la valeur de l'une quelconque des différences $(\Psi'_n - \Psi_n)$ qui correspond à un état quelconque A du corps, il suffit de connaître :

1° L'état naturel de l'élément n;

2° - Les déplacements qu'il faudrait imposer aux divers points matériels qui composent l'élément n pour amener chacun d'eux de la position qu'il occupe dans l'état naturel du corps à la position qu'il occupe dans l'état A du corps.

Si pour connaître la valeur de la différence $(\Psi'_n - \Psi_n)$ il est non pas seulement suffisant comme nous venons de le supposer, mais encore nécessaire, de connaître les déplacements qu'éprouvent tous les points matériels de l'élément n lorsque le corps passe de l'état naturel à l'état A, et si ce passage de l'état naturel à l'état A peut entraîner une déformation finie quelconque, il ne sera pas possible d'exprimer la différence $(\Psi'_n - \Psi_n)$ en fonction d'un nombre fini de paramètres variables.

L'étude des variations subies par la quantité

$$F = (\Psi_1 - \Psi'_1) + (\Psi_2 - \Psi'_2) + \dots + (\Psi_n - \Psi'_n) + \dots$$

sera alors inabordable à l'analyse

Ainsi, dans le cas général, l'étude mécanique des déformations finies d'un corps quelconque est inabordable à l'analyse.

Mais il existe des cas particuliers où la différence $(\varphi_n - \psi_n)$ peut s'exprimer en fonction d'un nombre limité de paramètres variables et où l'étude des variations de la quantité F devient accessible aux méthodes analytiques.

Il existe deux cas principaux où le caractère que nous venons de définir est marqué.

Le premier est celui où la connaissance du déplacement subi par chacun des points de l'élément n lorsque le corps passe de l'état naturel à l'état A , tout en étant suffisant pour définir la valeur de la différence $(\varphi_n - \psi_n)$, n'est pas nécessaire pour connaître cette valeur. et cela, parce que, pour connaître la valeur de la quantité $(\varphi_n - \psi_n)$, on admet qu'il est nécessaire et suffisant de connaître l'état naturel du corps et la variation d'étendue que présente l'élément n lorsque l'on passe de l'état naturel à l'état A .

Par variation d'étendue de l'élément n , nous entendons variation de volume, si le corps étant étendu en toute dimension, l'élément n est un élément de volume; variation d'aire, si le corps étant infiniment mince, l'élément n est un élément de surface; variation de longueur, si le corps étant filiforme, l'élément n est un élément linéaire.

Si l'on admet l'hypothèse que nous venons d'indiquer, il est facile de voir que la différence $(\varphi_n - \psi_n)$ s'exprime en fonction d'un nombre limité de paramètres.

Si par exemple, l'élément n est un élément de volume, dont dv_n est le volume et ρ_n la densité on aura

$$\varphi_n - \psi_n = f_n(\rho_n) dv_n,$$

la forme de la fonction f_n dépendant de l'état naturel de l'élément n et étant la même pour tous les éléments n si le corps est homogène dans l'état naturel. — Ce cas est le cas des corps parfaitement fluides.

Si l'élément n est un élément de surface dont dS_n est l'aire et ρ_n la densité superficielle, on aura

$$\varphi_n - \psi_n = f_n(\rho_n) dS_n,$$

la forme de la fonction f_n dépendant de l'état naturel de l'élément n et étant la même pour tous les éléments n si le corps est homogène dans l'état naturel. — Ce cas est le cas des membranes parfaitement flexibles.

Si l'élément n est un élément linéaire dont ds_n est la longueur et ρ_n la densité linéaire, on aura

$$\varphi_n - \psi_n = f_n(\rho_n) ds_n,$$

la forme de la fonction f_n dépendant de l'état naturel de l'élément n et étant la même pour tous les éléments n si le corps est homogène

dans l'état naturel. — Ce cas est le cas des fils parfaitement flexibles.

Cet exposé nous met en évidence le caractère commun grâce auquel il est possible d'étudier analytiquement les déformations quelconques des corps parfaitement fluides, des membranes parfaitement flexibles, des fils parfaitement flexibles.

2° — Le second cas où il est possible d'exprimer la différence $(\varphi_n - \psi_n)$ en fonction d'un nombre fini de paramètres variables est celui où l'état A diffère toujours infiniment peu de l'état naturel. Dans ce cas, en effet les théories exposées au Livre I, Chapitre II nous enseignent que pour connaître le déplacement éprouvé par chacun des points de l'élément n il suffit de connaître :

1° — Les composantes U, V, W , suivant les trois axes Ox, Oy, Oz , du déplacement d'un point de l'élément n ;

2° — Les composantes

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right),$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right),$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right),$$

de la rotation

3° — Les trois dilatations

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial W}{\partial z},$$

4° — Les trois glissements

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y},$$

$$\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z},$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}.$$

Supposons, pour fixer les idées, que l'élément n soit un élément de volume, et soit dv_n son volume dans l'état naturel. Nous aurons évidemment

$$\varphi_n - \psi_n = f_n dv_n,$$

f_n ne pouvant dépendre que des diverses variables que nous venons d'énumérer.

La quantité f_n ne dépend même pas de toutes ces variables. La translation et la rotation n'ont d'autre effet que de modifier la position de l'élément dv_n dans l'espace. Or nous avons supposé que la position de l'élément n dans l'espace n'intervenait pas dans sa définition thermodynamique. La fonction f_n ne peut donc dépendre que des trois dilatations et des trois glissements.

Donc, lorsque l'état d'un corps est toujours infiniment peu déformé par rapport à l'état naturel, on peut prendre pour Potentiel Thermodynamique Interne de ce corps une expression de la forme

$$(1) \dots \dots \dots \mathcal{F} = \int f_n \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}, \right. \\ \left. \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) dv_n,$$

La forme de la fonction f_n dépend de l'état naturel de l'élément dv_n . Si le corps est homogène dans l'état naturel, la fonction f_n est la même pour tous les éléments.

On voit donc que l'on peut étudier par les méthodes analytiques les déformations infiniment petites qu'un corps quelconque subit à partir d'un état naturel donné.

Jusqu'ici, nous n'avons soumis le choix de cet état naturel à aucune règle; désormais nous admettrons que l'état naturel est l'état d'équilibre que prend le corps lorsque les divers éléments de volume qui le composent et les divers éléments de surface qui le limitent ne sont soumis à aucune force.

Pour que cette définition soit légitime, il faut que le corps soustrait à l'action de toute force, puisse être en effet en équilibre. Les corps gazeux, soustraits à l'action de toute force, ne peuvent être en équilibre. Nous les excluons de notre étude, et nous étudierons désormais les corps non gazeux qui ont subi une déformation infiniment petite à partir de l'état naturel que nous venons de définir. Cette étude constituera la théorie de l'élasticité.

D'après ce que nous venons de dire, la théorie des déformations infiniment petites des corps étendus en toute dimension telle qu'on l'a fait dans l'étude de l'élasticité, renfermera, comme cas particulier la théorie des déformations infiniment petites des liquides.

La théorie des déformations infiniment petites des surfaces élastiques renfermera, comme cas particulier, la théorie des déformations
Duhem (C. II) N.º 27.

infiniment petites des membranes.

La théorie des déformations infiniment petites des lignes élastiques renfermera, comme cas particulier, la théorie des déformations infiniment petites des fils flexibles.

Mais il ne faut pas en conclure que la théorie de l'équilibre des fluides, des membranes, des fils flexibles, soient des cas particuliers de la théorie de l'élasticité. La théorie de l'élasticité n'étudie jamais que les corps infiniment peu déformés à partir de leur état naturel; l'hydrostatique, la théorie des membranes et des fils flexibles, étudient des déformations finies.

Cette séparation si nette entre deux branches voisines de la Physique est souvent méconnue et oubliée.

Après avoir étudié, par la théorie de l'élasticité, les déformations infiniment petites des corps, on peut se proposer de rechercher jusqu'à quel point les formules trouvées rendent compte des déformations très petites des corps naturels.

On peut prévoir, que, tant que les déformations demeureront inférieures à une certaine limite, nommée limite d'élasticité, les formules données par la théorie de l'élasticité leur seront applicables avec une erreur inférieure aux erreurs expérimentales.

On voit que la détermination de la limite d'élasticité pour un corps dépend de l'ordre de grandeur des erreurs expérimentales.

Plus les moyens d'observation seront parfaits, plus la limite d'élasticité sera faible.

Il est des corps pour lesquels la limite d'élasticité est inférieure aux quantités observables. A de pareils corps il sera impossible d'appliquer utilement les théories de l'élasticité. On dit alors qu'ils ne sont pas élastiques.

Il est d'autres corps pour lesquels la limite d'élasticité est supérieure aux grandeurs observables. On peut alors appliquer les formules de l'élasticité à l'étude de déformations petites, mais observables, de ces corps. De tels corps sont dits élastiques.

On voit que cette distinction des corps en corps non élastiques et corps élastiques dépend essentiellement de la précision des méthodes d'observation ou de l'approximation demandée dans les applications, et est essentiellement variable avec le degré de cette précision ou de cette approximation.

S. II. - Potentiel Thermodynamique Interne d'un Corps - peu déformé.

Considérons la fonction

$$f \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}, \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}, \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)$$

qui figure dans l'équation (1), et proposons-nous de préciser d'avantage la forme que doit présenter cette fonction.

Cette fonction étant égale par définition à

$$\frac{f - \varphi}{dv}$$

doit être égale à 0 lorsque les trois dilatations, soient nulles ainsi que les trois glissements. On doit donc pouvoir écrire :

$$f = \alpha_1 \frac{\partial U}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial V}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial W}{\partial z} + \beta_1 \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \beta_2 \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \beta_3 \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + F,$$

la quantité F étant le produit d'une quantité qui demeure finie dans l'état naturel par une forme homogène et du second degré des dilatations et des glissements, et

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3, \end{array}$$

étant six constantes définies par la connaissance de l'état naturel.

Exprimons que l'état naturel est, conformément à sa définition, l'état d'équilibre du corps soustrait à l'action de toute force extérieure.

La condition d'équilibre d'un corps soustrait à l'action de toute force extérieure s'exprime en écrivant que l'on a, pour toute déformation virtuelle de ce corps.

$$\int F \delta v = 0.$$

Donnons au corps une déformation virtuelle, supposons que u, v, w soient les composantes du déplacement du point (x, y, z) . Nous aurons

$$\delta U = u, \quad \delta V = v, \quad \delta W = w,$$

et, par conséquent,

$$\delta F = \alpha_1 \int \frac{\partial u}{\partial x} dv + \alpha_2 \int \frac{\partial u}{\partial y} dv + \alpha_3 \int \frac{\partial w}{\partial z} dv \\ + \beta_1 \int \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) dv + \beta_2 \int \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) dv + \beta_3 \int \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dv. \\ + \delta \int F dv$$

Supposons que l'état du corps soit l'état naturel. Nous aurons $\delta \int F dv = 0$, et la condition d'équilibre deviendra:

$$0 = \alpha_1 \int \frac{\partial u}{\partial x} dv + \alpha_2 \int \frac{\partial v}{\partial y} dv + \alpha_3 \int \frac{\partial w}{\partial z} dv \\ + \beta_1 \int \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) dv + \beta_2 \int \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) dv + \beta_3 \int \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dv.$$

Supposons que la modification virtuelle consiste à imposer les mêmes dilatations principales suivant les mêmes axes principaux de dilatation aux divers éléments du corps. Les six quantités

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

seront alors six arbitraires ayant la même valeur en tout point du corps, et l'égalité précédente ne pourra avoir lieu que si l'on a

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 0, \\ \beta_1 = 0, \quad \beta_2 = 0, \quad \beta_3 = 0.$$

La quantité f est donc le produit d'une quantité qui demeure finie lorsque le corps est ramené à l'état naturel par une forme homogène et du second degré des trois dilatations et des trois glissements.

Faisons

$$(2) \dots \dots \dots \begin{cases} D_1 = \frac{\partial U}{\partial x}, & D_2 = \frac{\partial V}{\partial y}, & D_3 = \frac{\partial W}{\partial z}, \\ G_1 = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}, & G_2 = \frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z}, & G_3 = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}. \end{cases}$$

et nous pouvons écrire l'expression de f , réduite à ses infiniment petits principaux,

$$(3) \dots \dots f = \frac{1}{2} (A_{11} D_1 + A_{12} D_2 + A_{13} D_3 + A_{14} G_1 + A_{15} G_2 + A_{16} G_3) D_1 \\ + \frac{1}{2} (A_{21} D_1 + A_{22} D_2 + A_{23} D_3 + A_{24} G_1 + A_{25} G_2 + A_{26} G_3) D_2$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} (A_{31} D_1 + A_{32} D_2 + A_{33} D_3 + A_{34} G_1 + A_{35} G_2 + A_{36} G_3) D_3 \\
& + \frac{1}{2} (A_{41} D_1 + A_{42} D_2 + A_{43} D_3 + A_{44} G_1 + A_{45} G_2 + A_{46} G_3) G_1 \\
& + \frac{1}{2} (A_{51} D_1 + A_{52} D_2 + A_{53} D_3 + A_{54} G_1 + A_{55} G_2 + A_{56} G_3) G_2 \\
& + \frac{1}{2} (A_{61} D_1 + A_{62} D_2 + A_{63} D_3 + A_{64} G_1 + A_{65} G_2 + A_{66} G_3) G_3,
\end{aligned}$$

les quantités A_{ij} étant des constantes telles que

$$A_{ij} = A_{ji}$$

Le nombre des constantes A_{ij} , distinctes entre elles est de 21. On donne à ces constantes le nom de coefficients d'élasticité du corps.

L'état naturel du corps doit être non seulement un état d'équilibre, mais encore un état d'équilibre stable. Il est facile de démontrer qu'il faut et il suffit pour cela que la fonction f soit positive, toutes les fois que l'on n'a pas

$$\begin{aligned}
D_1 = 0, & \quad D_2 = 0, & \quad D_3 = 0, \\
G_1 = 0, & \quad G_2 = 0, & \quad G_3 = 0.
\end{aligned}$$

Cette condition est évidemment suffisante, car, lorsqu'elle est remplie, on est assuré que le Potentiel Thermodynamique Interne du corps pris à l'état naturel est un minimum. Il n'est pas moins aisé de démontrer qu'elle est nécessaire. Supposons en effet qu'un système de valeurs de

$$\begin{aligned}
D_1, & \quad D_2, & \quad D_3, \\
G_1, & \quad G_2, & \quad G_3,
\end{aligned}$$

fasse prendre à la fonction f une valeur négative. Donnons à tous les éléments du corps des dilatations et des glissements égaux respectivement à ces six quantités. Le Potentiel Thermodynamique du corps prendrait une valeur négative. Il ne serait pas minimum lorsque le corps est dans l'état naturel.

Pour que la fonction f soit positive toutes les fois que l'on n'a pas

$$\begin{aligned}
D_1 = 0, & \quad D_2 = 0, & \quad D_3 = 0, \\
G_1 = 0, & \quad G_2 = 0, & \quad G_3 = 0,
\end{aligned}$$

il faut et il suffit que le déterminant

$$\begin{vmatrix}
A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\
A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\
A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\
A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\
A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} \\
A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66}
\end{vmatrix}$$

et tous les déterminants mineurs qu'on en déduit en supprimant q lignes et les q colonnes correspondantes, soient positifs.

Cela exige, en particulier, que les six coefficients
 $A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}, A_{55}, A_{66}$
 soient positifs, remarque dont nous aurons plus tard à faire usage

§. III. - Equations fondamentales de l'Elasticité.

Rappelons maintenant les conditions, nécessaires pour l'équilibre d'un corps quelconque, que nous avons trouvées au Livre II, Chapitre III.

Soient : dv un élément de volume du corps,
 ρ , la densité en un point de cet élément,
 $\rho X dv, \rho Y dv, \rho Z dv$, les composantes de la force extérieure appliquée à cet élément,
 dS un élément de la surface qui limite le corps,
 $P \cos(P, x) dS, P \cos(P, y) dS, P \cos(P, z) dS$, les composantes de la pression extérieure appliquée à cet élément.

Il doit exister six fonctions d' x, y, z ,

$$N_1, N_2, N_3, \\ T_1, T_2, T_3,$$

variables d'une manière continue à l'intérieur du corps, telles que l'on ait [1^e Partie, p. 43, Egalité (8) et (9)]

1^o - En tout point du corps

$$(4) \dots \dots \dots \begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} = \rho X, \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} = \rho Y, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} = \rho Z \end{cases}$$

2^o - En tout point de la surface qui limite le corps,

$$(5) \dots \dots \begin{cases} N_1 \cos(n_i, x) + T_3 \cos(n_i, y) + T_2 \cos(n_i, z) = P \cos(P, x), \\ T_3 \cos(n_i, x) + N_2 \cos(n_i, y) + T_1 \cos(n_i, z) = P \cos(P, y), \\ T_2 \cos(n_i, x) + T_1 \cos(n_i, y) + N_3 \cos(n_i, z) = P \cos(P, z), \end{cases}$$

n_i étant la normale à l'élément dS vers l'intérieur du corps.

Si l'on se reporte au raisonnement [1^e Partie, p. 33] qui a

servi à établir ces égalités, on voit qu'elles ne font qu'exprimer la proposition suivante:

Quel que soit le déplacement virtuel u, v, w , donné aux divers points du corps, le travail virtuel de \mathcal{T}_e effectué par les forces extérieures appliquées au corps est donné identiquement par l'égalité suivante:

$$(6) \dots \dots d\mathcal{T}_e + \int \left[N_1 \frac{\partial u}{\partial x} + N_2 \frac{\partial v}{\partial y} + N_3 \frac{\partial w}{\partial z} + T_1 \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + T_2 \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + T_3 \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dv = 0.$$

Nous allons faire usage de cette remarque pour déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un corps qui a subi une déformation infiniment petite à partir de l'état naturel.

Ces conditions s'obtiendront en écrivant que, dans une déformation virtuelle quelconque du corps on a

$$(7) \dots \dots \delta \mathcal{F} - d\mathcal{T}_e = 0.$$

Si u, v, w , sont les composantes du déplacement virtuel du point (x, y, z) du corps, nous aurons

$$\delta D_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \delta D_2 = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \delta D_3 = \frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\delta G_1 = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \delta G_2 = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \delta G_3 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

et les égalités (1) et (3) donneront

$$(8) \dots \dots \delta \mathcal{F} = \int \left[(A_{11} D_1 + A_{12} D_2 + A_{13} D_3 + A_{14} G_1 + A_{15} G_2 + A_{16} G_3) \frac{\partial u}{\partial x} + (A_{21} D_1 + A_{22} D_2 + A_{23} D_3 + A_{24} G_1 + A_{25} G_2 + A_{26} G_3) \frac{\partial v}{\partial y} + (A_{31} D_1 + A_{32} D_2 + A_{33} D_3 + A_{34} G_1 + A_{35} G_2 + A_{36} G_3) \frac{\partial w}{\partial z} + (A_{41} D_1 + A_{42} D_2 + A_{43} D_3 + A_{44} G_1 + A_{45} G_2 + A_{46} G_3) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + (A_{51} D_1 + A_{52} D_2 + A_{53} D_3 + A_{54} G_1 + A_{55} G_2 + A_{56} G_3) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + (A_{61} D_1 + A_{62} D_2 + A_{63} D_3 + A_{64} G_1 + A_{65} G_2 + A_{66} G_3) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] dv$$

D'autre part, $d\mathcal{T}_e$ est donné par l'égalité (6)

Si l'on observe que les trois dilatations

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z},$$

et les trois glissements

$$\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x},$$

sont six quantités variables arbitrairement, mais d'une manière continue

d'un point à l'autre du corps, on voit que, pour que l'égalité (7) soit vérifiée, il faut et il suffit, en vertu des égalités (6) et (8), que l'on ait

$$(9) \dots \begin{cases} A_{11} D_1 + A_{12} D_2 + A_{13} D_3 + A_{14} G_1 + A_{15} G_2 + A_{16} G_3 + N_1 = 0, \\ A_{21} D_1 + A_{22} D_2 + A_{23} D_3 + A_{24} G_1 + A_{25} G_2 + A_{26} G_3 + N_2 = 0, \\ A_{31} D_1 + A_{32} D_2 + A_{33} D_3 + A_{34} G_1 + A_{35} G_2 + A_{36} G_3 + N_3 = 0, \\ A_{41} D_1 + A_{42} D_2 + A_{43} D_3 + A_{44} G_1 + A_{45} G_2 + A_{46} G_3 + T_1 = 0, \\ A_{51} D_1 + A_{52} D_2 + A_{53} D_3 + A_{54} G_1 + A_{55} G_2 + A_{56} G_3 + T_2 = 0, \\ A_{61} D_1 + A_{62} D_2 + A_{63} D_3 + A_{64} G_1 + A_{65} G_2 + A_{66} G_3 + T_3 = 0. \end{cases}$$

Ces égalités (9), jointes aux égalités (4) et (5), forment l'ensemble des conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un corps très peu déformé à partir de son état naturel. Ces trois groupes d'égalité sont les équations fondamentales de la théorie de l'élasticité.

Nous avons supposé le corps en équilibre; des équations d'équilibre, on passe aisément aux équations du mouvement, en remplaçant dans les équations les composantes X, Y, Z , des forces extérieures par les quantités $(X - \gamma_x), (Y - \gamma_y), (Z - \gamma_z)$, $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$, étant les composantes de l'accélération du point de coordonnées x, y, z .

Si l'on observe que l'on a

$$\begin{aligned} x &= x_0 + U, \\ y &= y_0 + V, \\ z &= z_0 + W, \end{aligned}$$

x_0, y_0, z_0 , étant les coordonnées du point dans l'état naturel du corps, et U, V, W , des fonctions de x_0, y_0, z_0, t , on voit sans peine que l'on a

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \\ \gamma_y &= \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \\ \gamma_z &= \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Dès lors, si l'on considère un corps animé d'un mouvement qui l'écarte toujours infiniment peu de l'état naturel, on aura, pour déterminer le mouvement de ce corps, les équations (5), les équations (9) et les équations

$$(10) \dots \dots \dots \begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} = \rho \left(X - \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} = \rho \left(Y - \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} = \rho \left(Z - \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right), \end{cases}$$

qui dans le cas de l'équilibre, redonnent les équations (4).

Les coefficients A_{ij} dépendent de l'état naturel. Celui-ci est l'état d'équilibre du corps soustrait à l'action de toute force et ayant d'ailleurs en chaque point la même température que dans l'état variable que l'on étudie. Pour que cette définition ne soit pas contradictoire, il faut que, dans l'état variable que l'on étudie le corps ait en tout point la même température. Cela aura assurément lieu si l'état variable est un état d'équilibre; mais, si l'état variable est un état de mouvement, cela pourrait n'être plus vrai. Il nous faudra donc pour appliquer la théorie de l'élasticité aux corps animés de petits mouvements, supposer que ces petits mouvements laissent aux divers points du corps une même température constante. Cette hypothèse exclut les gaz; mais nous savons déjà qu'une autre raison ne permet pas de leur appliquer les conséquences de la théorie de l'élasticité.

§.IV. Les Equations de l'Equilibre d'Elasticité ne peuvent admettre plus d'une solution.

Le problème général de l'équilibre d'élasticité se présente à nous sous la forme suivante.

Un corps est donné dans son état naturel, en sorte que l'on connaît, pour ce corps, les valeurs des 21 coefficients d'élasticité A_{ij} . Aux divers éléments de volume qui composent ce corps, aux divers éléments de surface qui le limitent, on applique des forces qui le déforment infiniment peu.

On demande de calculer en chaque point du corps les six déformations.

$D_1, D_2, D_3, G_1, G_2, G_3,$
et les six pressions

$N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3.$

Pour effectuer ce calcul nous avons à faire usage des équations (4), (5) et (9). Ces équations déterminent-elles sans ambiguïté les douze inconnues que nous venons de citer?

Si les six déformations sont connues sans ambiguïté, les six pressions sont connues sans ambiguïté, - la égalité (9). Il faut donc montrer que les égalités (4) (5) et (9) ne peuvent être, lorsque les forces extérieures demeurent les mêmes vérifiées par deux systèmes distincts de valeurs des déformations.

Supposons, en effet que deux systèmes distincts de valeurs des déformations vérifient les égalités (4) (5) et (9); soient

Une intégration par parties, jointe aux égalités (12) et aux relations

$$D_1 = \frac{\partial U}{\partial x}, \dots, G_1 = \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y}, \dots$$

qui lient les quantités D_i, G_i , aux quantités U, V, W , transforme l'égalité précédente en

$$\int (\mathcal{N}_1 D_1 + \mathcal{N}_2 D_2 + \mathcal{N}_3 D_3 + \mathcal{T}_1 G_1 + \mathcal{T}_2 G_2 + \mathcal{T}_3 G_3) dr = 0,$$

ou bien, en vertu des égalités (13), en

$$\int [(A_{11} D_1 + \dots + A_{16} G_3) D_1 + \dots + (A_{61} D_1 + \dots + A_{66} G_3) G_3] dr = 0.$$

Dans cette dernière égalité, la quantité sous le signe \int est une forme homogène et du second ordre des six variables

$$D_1, D_2, D_3, G_1, G_2, G_3.$$

Si les conditions, précisées à la fin du § II, qui assurent la stabilité de l'état naturel, sont vérifiées, cette forme est positive toutes les fois que les six variables dont elle dépend n'ont pas, en même temps la valeur 0. L'égalité précédente exige donc que l'on ait en tout point du corps,

$$D_1 = 0, D_2 = 0, D_3 = 0, G_1 = 0, G_2 = 0, G_3 = 0,$$

et par conséquent,

$$D'_1 = D_1, D'_2 = D_2, D'_3 = D_3,$$

$$G'_1 = G_1, G'_2 = G_2, G'_3 = G_3,$$

ce qui démontre le Théorème énoncé.

§ V. — Les Equations du Mouvement d'un Corps Élastique ne peuvent admettre plus d'une Solution.

Proposons nous de démontrer d'une manière analogue que les équations du mouvement d'un corps élastique ne peuvent admettre deux solutions distinctes.

Les forces extérieures appliquées soit aux divers éléments de volume qui composent le corps, soit aux divers éléments de surface qui le limitent, sont supposées données on suppose aussi que les positions initiales et les vitesses initiales sont données en tout point du corps.

On voit alors que, si l'on conserve les rotations du § précédent on aura :

1°, Pour $t=0$, en tout point du corps,

$$(14) \dots \dots \dots \begin{cases} \mathcal{U} = 0, \quad \mathcal{V} = 0, \quad \mathcal{W} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} = 0. \end{cases}$$

2°, Pour toute valeur de t , en tout point du corps en vertu des équations (4),

$$(15) \dots \dots \dots \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{C}_3}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{C}_3}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}_3}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Enfin, pour toute valeur de t , les équations (13) ont lieu en tout point du corps et les équations (12) en tout point de la surface qui le limite.

Les équations (15) nous donnent

$$\int \left[\left(\frac{\partial \mathcal{N}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{C}_3}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathcal{C}_3}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{N}_2}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + \left(\frac{\partial \mathcal{C}_2}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{C}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}_3}{\partial z} + \rho \frac{\partial^2 \mathcal{W}}{\partial t^2} \right) \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t} \right] dv$$

Des intégrations par parties, jointes aux égalités (12), transforment cette égalité en

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho (\mathcal{U}^2 + \mathcal{V}^2 + \mathcal{W}^2) dv + \int \left(\mathcal{N}_1 \frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial t} + \mathcal{N}_2 \frac{\partial \mathcal{D}_2}{\partial t} + \mathcal{N}_3 \frac{\partial \mathcal{D}_3}{\partial t} + \mathcal{C}_1 \frac{\partial \mathcal{G}_1}{\partial t} + \mathcal{C}_2 \frac{\partial \mathcal{G}_2}{\partial t} + \mathcal{C}_3 \frac{\partial \mathcal{G}_3}{\partial t} \right) dv = 0.$$

Si l'on tient compte des équations (12), cette égalité devient

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int \rho (\mathcal{U}^2 + \mathcal{V}^2 + \mathcal{W}^2) dv + \int \left[(A_{11} \mathcal{D}_1 + \dots + A_{16} \mathcal{G}_3) \frac{\partial \mathcal{D}_1}{\partial t} + \dots + (A_{61} \mathcal{D}_1 + \dots + A_{66} \mathcal{G}_3) \frac{\partial \mathcal{G}_3}{\partial t} \right] dv = 0.$$

ou bien :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int \rho (U^2 + V^2 + W^2) dv \right. \\ + \int \left[(A_{11} D_1 + \dots + A_{16} G_3) D_1 \right. \\ + \dots \\ \left. \left. + (A_{61} D_1 + \dots + A_{66} G_3) G_3 \right] dv \right\} = 0.$$

La quantité entre crochets est donc indépendante du temps.

D'après les égalités (14) elle est égale à 0 pour $t=0$. On a donc, quel que soit t .

$$\int \rho (U^2 + V^2 + W^2) dv \\ + \int \left[(A_{11} D_1 + \dots + A_{16} G_3) D_1 \right. \\ + \dots \\ \left. + (A_{61} D_1 + \dots + A_{66} G_3) G_3 \right] dv = 0.$$

Si les conditions précisées à fin du § II sont vérifiées, cette égalité ne pourra avoir lieu que si l'on n'a, en tout point du corps, pour toute valeur du temps t ,

$$\begin{aligned} D_1 &= 0, & D_2 &= 0, & D_3 &= 0, \\ G_1 &= 0, & G_2 &= 0, & G_3 &= 0, \\ U &= 0, & V &= 0, & W &= 0, \end{aligned}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} U &= U', \\ V &= V', \\ W &= W'. \end{aligned}$$

Les équations du mouvement des corps élastiques déterminent donc ce mouvement sans ambiguïté.

Les deux Théorèmes auxquels ont été consacrés les § IV et V, ont été démontrés, pour les corps isotropes, par G. Kirchhoff ⁽¹⁾

§ VI. — Théorie des Déformations spontanées.

Dans les théories que nous venons de développer, nous avons supposé

⁽¹⁾ G. Kirchhoff. Ueber das Gleichgewicht und die Bewegung eines unendlich dünnen elastischen Stabes (Journal de Borchardt. T. LVI. 1858. — Mémoires de G. Kirchhoff. p. 285) G. Kirchhoff. Vorlesungen über Mathematische Physik; Mechanik. XXVI^e Leçon. — F. G. Neumann. Vorlesungen über die Theorie der Elasticität der festen Körper und des Lichtäthers. Chapitre 10.

que l'état naturel du corps fût son état d'équilibre lorsque les divers éléments de volume qui le composent et les divers éléments de surface qui le limitent ne sont soumis à aucune force extérieure. Nous allons maintenant faire l'hypothèse plus générale que l'état naturel du corps est l'état d'équilibre qu'il prend lorsque chacun des éléments de volume dv qui le composent est soumis à une force extérieure dont les composantes sont :

$$(16) \dots\dots\dots \rho X_0 dv, \quad \rho Y_0 dv, \quad \rho Z_0 dv,$$

et lorsque chacun des éléments de surface dS qui le limitent, est soumis à une force dont les composantes sont

$$(17) \dots\dots\dots \begin{cases} P_0 \cos(P_0, x) dS, \\ P_0 \cos(P_0, y) dS, \\ P_0 \cos(P_0, z) dS. \end{cases}$$

Supposons cet état naturel bien défini.

À partir de cet état naturel, donnons au corps une déformation infiniment petite dont U, V, W , soient les composantes. Le Potentiel Thermodynamique Interne du corps va prendre une valeur $F = \int f dv$.

Les considérations exposées au § II, nous montrent que l'expression f , limitée aux infiniment petits du deuxième ordre par rapport aux six déformations.

$$D_1, D_2, D_3, G_1, G_2, G_3,$$

sera

$$(18) \dots\dots\dots f = \alpha_1 D_1 + \alpha_2 D_2 + \alpha_3 D_3 + \beta_1 G_1 + \beta_2 G_2 + \beta_3 G_3 \\ + \frac{1}{2} (A_{11} D_1 + A_{12} D_2 + A_{13} D_3 + A_{14} G_1 + A_{15} G_2 + A_{16} G_3) D_1 \\ + \dots\dots\dots \\ + \frac{1}{2} (A_{61} D_1 + A_{62} D_2 + A_{63} D_3 + A_{64} G_1 + A_{65} G_2 + A_{66} G_3) G_3.$$

Les coefficients $\alpha_i, \beta_i, A_{ij}$, dépendent de l'état du corps pris comme état naturel. Cet état n'étant pas forcément homogène, ces quantités seront des fonctions d' x, y, z . Ce seront aussi, comme l'état naturel, des fonctions des forces (16) et (17).

Soient

$$v_1, v_2, v_3, \quad \tau_1, \tau_2, \tau_3,$$

les pressions en un point du corps pris à l'état naturel.

Nous aurons, en tout point du corps

$$(19) \dots \dots \dots \begin{cases} \frac{\partial r_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} = \rho X_0, \\ \frac{\partial \tau_3}{\partial x} + \frac{\partial r_2}{\partial y} + \frac{\partial \tau_1}{\partial z} = \rho Y_0, \\ \frac{\partial \tau_2}{\partial x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y} + \frac{\partial r_3}{\partial z} = \rho Z_0, \end{cases}$$

et, en tout point de sa surface,

$$(20) \dots \dots \dots \begin{cases} r_1 \cos(n_i, x) + \tau_3 \cos(n_i, y) + \tau_2 \cos(n_i, z) = P_0 \cos(P_0, x), \\ \tau_3 \cos(n_i, x) + r_2 \cos(n_i, y) + \tau_1 \cos(n_i, z) = P_0 \cos(P_0, y), \\ \tau_2 \cos(n_i, x) + \tau_1 \cos(n_i, y) + r_3 \cos(n_i, z) = P_0 \cos(P_0, z). \end{cases}$$

Moyennant ces égalités, le travail effectué par les forces extérieures qui agissent sur le corps dans l'état naturel, dans une modification virtuelle partant de cet état, sera, en désignant par u, v, w , les composantes du déplacement du point (x, y, z) ,

$$(21) \dots \dots d\mathcal{E}_e = - \int \left[r_1 \frac{\partial u}{\partial x} + r_2 \frac{\partial v}{\partial y} + r_3 \frac{\partial w}{\partial z} + \tau_1 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \tau_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \tau_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dv.$$

Exprimons que l'état naturel du corps est un état d'équilibre sous l'action des forces (16) et (17).

Si nous observons que dans l'état naturel,

$$D_1 = 0, D_2 = 0, D_3 = 0, G_1 = 0, G_2 = 0, G_3 = 0,$$

l'égalité (18) nous montrera que, dans toute modification infiniment petite issue de l'état naturel, on a

$$(22) \dots \dots \delta \mathcal{F} = \int \left[\alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial y} + \alpha_3 \frac{\partial w}{\partial z} + \beta_1 \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \beta_2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \beta_3 \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] dv$$

Pour que l'état naturel soit un état d'équilibre, il sera nécessaire et suffisant que l'on ait identiquement, pour toute modification virtuelle issue de l'état naturel,

$$d\mathcal{E}_e - \delta \mathcal{F} = 0,$$

ou bien, en vertu des égalités (21) et (22),

$$(23) \dots \dots \dots \begin{cases} \alpha_1 + r_1 = 0, \quad \alpha_2 + r_2 = 0, \quad \alpha_3 + r_3 = 0, \\ \beta_1 + \tau_1 = 0, \quad \beta_2 + \tau_2 = 0, \quad \beta_3 + \tau_3 = 0. \end{cases}$$

Ces principes sur l'état naturel du corps étant posés, imaginons

que l'on fasse subir une variation infiniment petite aux forces extérieures appliquées au corps. Les forces appliquées à l'élément dv deviennent

$$\rho (X_0 + X) dv, \quad \rho (Y_0 + Y) dv, \quad \rho (Z_0 + Z) dv,$$

et les forces appliquées à l'élément dS deviennent

$$\{ P_0 \cos (P_0, x) + P \cos (P, x) \} dS,$$

$$\{ P_0 \cos (P_0, y) + P \cos (P, y) \} dS,$$

$$\{ P_0 \cos (P_0, z) + P \cos (P, z) \} dS.$$

Les pressions à l'intérieur du corps sont alors modifiées et deviennent

$$r_1 + N_1, \quad r_2 + N_2, \quad r_3 + N_3,$$

$$\tau_1 + T_1, \quad \tau_2 + T_2, \quad \tau_3 + T_3.$$

Les divers éléments du corps ne gardent plus la forme qu'ils avaient dans l'état d'équilibre; ils subissent des déformations infiniment petites

$$D_1, D_2, D_3, \quad G_1, G_2, G_3.$$

On se propose, connaissant les nouvelles forces

$$X, Y, Z, P,$$

de déterminer les six déformations

$$D_1, D_2, D_3, \quad G_1, G_2, G_3,$$

et les six pressions

$$N_1, N_2, N_3, \quad T_1, T_2, T_3.$$

Les égalités (4) nous montrent que nous aurons, en tout point du corps,

$$\frac{\partial (r_1 + N_1)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_3 + T_3)}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_2 + T_2)}{\partial z} = \rho (X_0 + X),$$

$$\frac{\partial (\tau_3 + T_3)}{\partial x} + \frac{\partial (r_2 + N_2)}{\partial y} + \frac{\partial (\tau_1 + T_1)}{\partial z} = \rho (Y_0 + Y),$$

$$\frac{\partial (\tau_2 + T_2)}{\partial x} + \frac{\partial (\tau_1 + T_1)}{\partial y} + \frac{\partial (r_3 + N_3)}{\partial z} = \rho (Z_0 + Z).$$

En vertu des égalités (19), ces égalités deviendront

$$(24) \dots \dots \dots \begin{cases} \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} = \rho X, \\ \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} = \rho Y, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} = \rho Z. \end{cases}$$

On verrait de même que l'on doit avoir en vertu des égalités (20),

$$(25) \dots \begin{cases} N_1 \cos(n_i, x) + T_3 \cos(n_i, y) + T_2 \cos(n_i, z) = P \cos(P, x), \\ T_3 \cos(n_i, x) + N_2 \cos(n_i, y) + T_1 \cos(n_i, z) = P \cos(P, y), \\ T_2 \cos(n_i, x) + T_1 \cos(n_i, y) + N_3 \cos(n_i, z) = P \cos(P, z). \end{cases}$$

Donnons au corps déformé une modification virtuelle infiniment petite dont u, v, w , soient les composantes, et exprimons que l'on a $d\mathcal{C}_e - \delta\mathcal{F} = 0$.

En vertu des égalités (19), (24), (20) et (25) nous aurons :

$$d\mathcal{C}_e = - \int \left\{ (r_1 + N_1) \frac{\partial u}{\partial x} + \dots + (T_3 + T_3) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} dv.$$

D'autre part, en vertu de l'égalité (18), nous aurons

$$\delta\mathcal{F} = \int \left\{ (A_1 + A_{11} D_1 + A_{12} D_2 + A_{13} D_3 + A_{14} G_1 + A_{15} G_2 + A_{16} G_3) \frac{\partial u}{\partial x} + \dots + (\beta_3 + A_{61} D_1 + A_{62} D_2 + A_{63} D_3 + A_{64} G_1 + A_{65} G_2 + A_{66} G_3) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right\} dv$$

L'identité

$$d\mathcal{C}_e - \delta\mathcal{F} = 0$$

donne donc les six égalités

$$A_1 + A_{11} D_1 + \dots + A_{16} G_3 + r_1 + N_1 = 0,$$

$$\beta_3 + A_{61} D_1 + \dots + A_{66} G_3 + T_3 + T_3 = 0,$$

qui deviennent, en vertu des égalités (23),

$$(26) \dots \begin{cases} A_{11} D_1 + \dots + A_{16} G_3 + N_1 = 0, \\ \dots \\ A_{61} D_1 + \dots + A_{66} G_3 + T_3 = 0. \end{cases}$$

Ainsi donc lorsqu'un corps déjà déformé par l'action de forces quelconques, est soumis à l'action de nouvelles forces infiniment petites, les déformations que ces dernières produisent, et les pressions qu'elles engendrent sont déterminées par les équations (24), (25) et (26).

Ces équations ont exactement la même forme que les équations (4)(5) et (9) qui déterminent les déformations et les pressions à l'intérieur d'un corps positivement soustrait à l'action de toute force et que l'on soumet à l'action de forces infiniment petites. Les résultats obtenus dans l'étude de ce dernier problème peuvent donc être transportés à celui qui nous occupe maintenant.

Duhem (C. II) n° 29.

Si le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{16} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{61} & A_{62} & \dots & A_{66} \end{vmatrix}$$

et tous les mineurs qu'on en déduit par la suppression d'un certain nombre de lignes et des colonnes correspondantes, sont positifs, la connaissance des forces $X, Y, Z,$

suffira à déterminer, sans ambiguïté les déformations et les forces élastiques à l'intérieur du corps.

Donnons nous un premier système de forces $X, Y, Z, P.$

Il en résultera un système de déformations bien déterminé $D_1, D_2, D_3, G_1, G_2, G_3.$

Donnons nous ensuite le nouveau système de forces $X' = KX, Y' = KY, Z' = KZ, P = KP,$

où K est une constante. Le nouveau système de déformations sera également déterminé sans ambiguïté. Or les équations qui le doivent déterminer sont évidemment vérifiées si l'on pose

$$\begin{aligned} D'_1 &= KD_1, & D'_2 &= KD_2, & D'_3 &= KD_3, \\ G'_1 &= KG_1, & G'_2 &= KG_2, & G'_3 &= KG_3. \end{aligned}$$

Les nouvelles déformations ne peuvent donc être autres que celles là.

Ainsi, si l'on multiplie par un même nombre toutes les forces qui engendrent la déformation, dans les conditions indiquées, les déformations seront multipliées par ce même nombre.

Ce théorème engendre cet autre :

Dans les conditions indiquées, des forces infiniment petites engendrent des déformations infiniment petites du même ordre.

Mais les coefficients A_{ij} sont des fonctions du système de forces

$$X_0, Y_0, Z_0, P_0,$$

qui définissent l'état naturel du corps. Il en est donc de même du déterminant Δ et de tous ses déterminants mineurs de divers ordres.

Dès lors, si l'on fait varier les forces X_0, Y_0, Z_0, P_0 , il pourra arriver que le déterminant Δ et tous les mineurs que l'on en déduit en

par atteindre un certain point critique. Tout peu qu'on le dépasse, le système éprouve une modification spontanée, qui se produit sans aucun travail des forces extérieures.

D'après M. Brillouin⁽¹⁾, c'est dans cette proposition que l'on doit chercher l'explication d'une foule de phénomènes jusqu'ici mal classés; coulage des corps plastiques, cassure des corps fragiles, clivage des cristaux, nous ne détaillerons pas ici la théorie de ces phénomènes; nous voulions seulement indiquer le Principe de cette théorie.

Chapitre II

Les Corps Isotropes.

§. I. - Potentiel Thermodynamique Interne d'un Corps Isotrope. Les deux coefficients λ et μ .

Il existe en général, pour un corps quelconque, homogène dans l'état naturel, 21 coefficients d'élasticité distincts et différents de zéro. Mais la présence, dans tous les corps qui n'appartiennent pas au système triclinique, d'axes ou de plans de symétrie, réduit le nombre des coefficients d'élasticité distincts et différents de zéro. Cette réduction est exposée dans les Traités d'Elasticité; il n'entre pas dans nos intentions de l'examiner ici.

Nous allons seulement nous occuper des corps isotropes, et tout d'abord, définir ces corps.

Un élément est isotrope, lorsque dans un milieu illimité dont tous les éléments sont identiques à celui-là et s'en déduisent simplement par translation, il est impossible de distinguer par une propriété physique quelconque une direction d'une autre.

Considérons donc un élément isotrope à l'état naturel. Donnons à cet élément trois dilatations infiniment petites suivant trois axes rectangulaires. La variation du Potentiel Thermodynamique Interne

⁽¹⁾ Brillouin Principes généraux d'une théorie élastique de la plasticité et de la fragilité des corps solides. (Annales de l'École Normale sup^{re}. 3^e Série T. VII. p. 345. 1890).

de l'élément dépendra, en général, de la grandeur de ces dilatations; mais elle ne dépendra pas de la position des axes suivant lesquels ces dilatations ont été effectuées.

Ainsi pour un élément peu déformé et isotrope dans l'état naturel, la fonction f doit dépendre des grandeurs des trois dilatations principales qui ont amené l'élément de l'état naturel à l'état actuel, mais pas de la position des axes principaux de dilatation par rapport aux axes des coordonnées.

f dépendra symétriquement des trois dilatations principales; supposons en effet que les dilatations ayant pour grandeur respective Δ_1 , et Δ_2 soient d'abord dirigées suivant les axes $O\xi$, $O\eta$; puis que, les permutant, on les dirige suivant les axes $O\eta$, $O\xi$. La valeur de f ne devra pas changer, puisqu'aucune propriété physique ne différencie les deux axes $O\xi$, $O\eta$.

Enfin f sera une fonction homogène et du second degré des trois dilatations principales.

Posons, comme au Chapitre II du Livre I, (1^{re} Partie. p. 23)

$$(1) \dots \dots \dots \begin{cases} M = 1 + \frac{\partial U}{\partial x}, & N = 1 + \frac{\partial V}{\partial y}, & P = 1 + \frac{\partial W}{\partial z}, \\ m = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \right), & n = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right), & p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right), \end{cases}$$

Et considérons l'équation

$$\begin{vmatrix} M-S & p & n \\ p & N-S & m \\ n & m & P-S \end{vmatrix} = 0,$$

qui peut encore s'écrire:

$$(2) \dots \dots \dots S^3 - (M + N + P) S^2 + (NP + PM + MN - m^2 - n^2 - p^2) S + MNP + 2mnp - Mm^2 - Nn^2 - Pp^2 = 0.$$

Cette équation admet trois racines réelles S_1, S_2, S_3 . Si $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ sont les trois dilatations principales, on aura

$$\Delta_1^2 S_1^2 = 1, \quad \Delta_2^2 S_2^2 = 1, \quad \Delta_3^2 S_3^2 = 1.$$

Pour que la fonction f dépende uniquement des trois quantités $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, et cela rationnellement, et symétriquement, il faut et il suffit qu'elle s'exprime en fonction rationnelle des coefficients de l'équation (2), c'est-à-dire en fonction rationnelle des trois quantités.

$$\begin{aligned} & M + N + P, \\ & NP + PM + MN - m^2 + n^2 + p^2, \\ & MNP + 2mnp - Mm^2 - Nn^2 - Pp^2. \end{aligned}$$

Remplaçons MNP par leurs valeurs (1), et ces quantités deviennent

$$\begin{aligned} & 3 + D_1 + D_2 + D_3, \\ & 3 + 2(D_1 + D_2 + D_3) + (D_2 D_3 + D_3 D_1 + D_1 D_2) - \frac{1}{4}(G_1^2 + G_2^2 + G_3^2), \\ & 1 + 2(D_1 + D_2 + D_3) + (D_2 D_3 + D_3 D_1 + D_1 D_2) - \frac{1}{4}(G_1^2 + G_2^2 + G_3^2) \\ & \quad + D_1 D_2 D_3 + \frac{1}{4} G_1 G_2 G_3 - \frac{1}{4}(D_1 G_1^2 + D_2 G_2^2 + D_3 G_3^2). \end{aligned}$$

Ainsi, pour qu'un élément soit isotrope, il faut et il suffit que la fonction f relative à cet élément ne dépende que des trois quantités

$$\begin{aligned} & D_1 + D_2 + D_3, \\ & D_2 D_3 + D_3 D_1 + D_1 D_2 - \frac{1}{4}(G_1^2 + G_2^2 + G_3^2), \\ & D_1 D_2 D_3 + \frac{1}{4} G_1 G_2 G_3 - \frac{1}{4}(D_1 G_1^2 + D_2 G_2^2 + D_3 G_3^2). \end{aligned}$$

Mais d'après l'égalité (3) du Chapitre I, la quantité f doit être une forme homogène et du second degré des quantités

$$D_1, D_2, D_3, G_1, G_2, G_3.$$

On doit donc avoir en désignant par α et β deux constantes,

$$(3) \dots \dots \dots f = \frac{\alpha}{4}(G_1^2 + G_2^2 + G_3^2) - \alpha(D_2 D_3 + D_3 D_1 + D_1 D_2) + \beta(D_1 + D_2 + D_3)^2.$$

Posons avec Lamé,

$$(4) \dots \dots \dots \alpha = 2\mu, \quad \beta = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)$$

et l'égalité (3) deviendra:

$$(5) \dots \dots \dots f = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)(D_1^2 + D_2^2 + D_3^2) + \lambda(D_2 D_3 + D_3 D_1 + D_1 D_2) + \frac{\mu}{2}(G_1^2 + G_2^2 + G_3^2).$$

Celle est l'égalité qui fait connaître le Potentiel Thermodynamique Interne des corps Isotropes très peu déformés. Elle nous montre que l'étude de ces corps ne dépend que de deux coefficients d'élasticité distincts et différents de zéro, les deux coefficients λ et μ .

La comparaison de l'égalité (5) avec l'égalité (9) du Chapitre précédent nous montre que, pour les corps isotropes, on a

$$(6) \dots \dots \dots \begin{cases} A_{11} = A_{22} = A_{33} = (\lambda + 2\mu) \\ A_{23} = A_{31} = A_{12} = \lambda, \\ A_{44} = A_{55} = A_{66} = \mu, \end{cases}$$

et que tous les autres coefficients d'élasticité sont égaux à 0.

Si l'état naturel du corps est, comme nous le supposons, un état d'équilibre stable, nous savons que les six coefficients

$A_{11}, A_{22}, A_{33}, A_{44}, A_{55}, A_{66}$, doivent être positifs. Donc, dans un corps isotrope, les deux quantités μ et $(\lambda + 2\mu)$ doivent être positives.

Plus généralement, nous avons vu au §2 du Chapitre précédent que le déterminant des quantités A_{ij} et tous les déterminants mineurs de celui-là, obtenus en supprimant certaines lignes et les colonnes correspondantes, devaient être positifs. Dans le cas où les quantités A_{ij} sont données par les égalités (6) ces conditions se réduisent aux trois inégalités

$$(6^{bis}) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \mu > 0, \\ \lambda + 2\mu > 0, \\ 3\lambda + 2\mu > 0. \end{array} \right.$$

Nous avons dit que la théorie de l'élasticité devait contenir, comme cas particulier, la théorie des petites déformations des liquides.

Les corps liquides doivent, d'après leur définition, être isotropes. C'est donc dans l'étude des corps isotropes que nous devons rencontrer les Théorèmes qui s'appliquent aux petites déformations des liquides. Nous allons vérifier qu'il en est ainsi.

La quantité

(7) $\dots \dots \dots \Theta = D_1 + D_2 + D_3$
représente comme l'on sait, la dilatation en volume.

L'égalité (5) peut s'écrire :

$$(8) \dots \dots \dots f = \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) \Theta^2 + \frac{\mu}{2} (G_1^2 + G_2^2 + G_3^2) - 2\mu (D_2 D_3 + D_3 D_1 + D_1 D_2)$$

Or on peut toujours disposer des grandeurs des trois dilatations principales $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, de telle sorte que l'on puisse donner à chacune des deux quantités

$$\Theta = D_1 + D_2 + D_3 = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3,$$

$D_2 D_3 + D_3 D_1 + D_1 D_2 - \frac{1}{4} (G_1^2 + G_2^2 + G_3^2) = \Delta_2 \Delta_3 + \Delta_3 \Delta_1 + \Delta_1 \Delta_2$,
des valeurs arbitraires; la quantité précédente ne pourra donc être fonction de la seule quantité Θ que si l'on a

On voit alors qu'il faut et il suffit que le coefficient μ soit égal à 0 pour que le Potentiel Thermodynamique Interne du corps dépende seulement de la dilatation en volume en chaque point, et par conséquent pour que le corps se comporte comme un liquide pour les déformations infiniment petites.

Nous avons dit que le coefficient μ devait être positif si l'on voulait que l'état naturel du corps fut un état d'équilibre stable pour toutes les déformations infiniment petites. Si l'on envisage les corps comme les liquides, pour lesquels

$\mu = 0$
l'état naturel de ces corps ne pourra plus être un état d'équilibre stable

pour toutes les déformations infiniment petites. On le vérifie aisément.

Dans ce cas, en effet, d'après l'égalité (8), le Potentiel Thermodynamique Interne du corps légèrement déformé a pour valeur :

$$F = \frac{\lambda}{2} \int \Theta^2 dv.$$

Dans l'état naturel, ce Potentiel est nul par définition, si la déformation a entraîné des dilatations ou des contractions et si λ est positif il est positif après la déformation; si la déformation n'a entraîné ni dilatation ni contraction, il est encore nul après la déformation.

L'état naturel d'un liquide est donc un état d'équilibre stable pour tous les déplacements qui entraînent des dilatations ou des contractions, et d'équilibre indifférent pour les déplacements qui n'entraînent ni dilatations ni condensation.

Pour montrer que l'état d'équilibre est un état d'équilibre stable pour toutes les déformations qui sont accompagnées de condensations ou de dilatations, nous avons supposé $\lambda > 0$. C'est en effet l'inégalité qui nous donnent les conditions (6 bis) lorsque nous y faisons $\mu = 0$. Pour un liquide, λ pourrait il être, en même temps que μ , égale à 0 ?

La condition $\mu = 0$ nous donne pour Potentiel Thermodynamique Interne du corps peu déformé

$$F = \frac{1}{2} \lambda \int \Theta^2 dv.$$

Si $\lambda = 0$, ce Potentiel est nul, comme dans l'état naturel. Dès lors, une déformation infiniment petite quelconque à partir de l'état naturel ne fait pas varier ce Potentiel. Le liquide peut bien alors être en équilibre sous l'action de forces identiquement nulles.

Mais si on le soumet à des forces infiniment petites, quelles qu'elles soient, il ne pourra jamais être en équilibre, car le travail virtuel de ces forces n'étant pas identiquement nul, ne pourra être toujours égal à la variation virtuelle du Potentiel Thermodynamique Interne, qui serait identiquement nulle. On ne peut donc, pour un liquide, avoir

$$\lambda = 0$$

C'est une remarque dont nous verrons bientôt l'importance

§ II. — Equilibre des Corps Isotropes.

Si dans les égalités (9) du Chapitre précédent, qui conviennent à un corps quelconque, nous reportons les expressions des quantités A_{ij}

qui conviennent à un corps isotrope, et qui sont données par les égalités (6) du présent Chapitre, nous trouvons que pour un corps isotrope, on a

$$(9) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) D_1 + \lambda (D_2 + D_3) + N_1 = c, \\ (\lambda + 2\mu) D_2 + \lambda (D_3 + D_1) + N_2 = 0, \\ (\lambda + 2\mu) D_3 + \lambda (D_1 + D_2) + N_3 = 0, \\ \mu G_1 + T_1 = c, \\ \mu G_2 + T_2 = c, \\ \mu G_3 + T_3 = c. \end{array} \right.$$

Si nous y faisons $\mu = 0$, en tenant compte de l'égalité (7), nous trouvons

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0,$$

$$N_1 = N_2 = N_3 = -\lambda \Theta,$$

égalités qui s'accordent avec les principes fondamentaux de l'Hydrostatique.

Revenons aux équations (9). Substituons ces expressions de $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$, dans les équations (4) du Chapitre précédent, et nous verrons sans peine que les résultats peuvent s'écrire :

$$(10) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta U + \rho X = c, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \Delta V + \rho Y = c, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \Delta W + \rho Z = c, \end{array} \right.$$

avec

$$(11) \dots \dots \dots \Theta = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}.$$

Telles sont les trois équations aux dérivées partielles qui doivent être vérifiées en tous les points d'un corps élastique infiniment peu déformé.

Aux limites du corps, doivent être vérifiées des équations obtenues en remplaçant $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$, par leurs valeurs (9), dans les égalités (5) du Chapitre précédent; ces équations sont

$$(12) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} (\lambda \Theta + 2\mu D_1) \cos(n_i, x) + \mu [G_3 \cos(n_i, y) + G_2 \cos(n_i, z)] + P \cos(P, x) = 0, \\ (\lambda \Theta + 2\mu D_2) \cos(n_i, y) + \mu [G_1 \cos(n_i, z) + G_3 \cos(n_i, x)] + P \cos(P, y) = 0, \\ (\lambda \Theta + 2\mu D_3) \cos(n_i, z) + \mu [G_2 \cos(n_i, x) + G_1 \cos(n_i, y)] + P \cos(P, z) = 0. \end{array} \right.$$

Dans certains cas, au lieu de garder la forme (10) aux équations de l'équilibre d'élasticité, on les écrit sous la forme équivalente.

Duhem. (C. II) N° 30.

$$(13) \dots \begin{cases} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] + \rho X = 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] + \rho Y = 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] + \rho Z = 0. \end{cases}$$

Déduisons de ces égalités (11) et (12) quelques conséquences relatives au cas très important où les forces extérieures appliquées aux divers éléments de volume du corps élastique sont égales à 0, et où les seules forces étrangères qui agissent sur le corps sont les pressions appliquées à sa surface.

On a alors

$$(14) \dots \dots \dots X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

Différentions la première des équations (13) par rapport à x , la seconde par rapport à y , la troisième par rapport à z , et ajoutons membre à membre les résultats obtenus. Nous trouvons

$$(\lambda + 2\mu) \Delta \Theta = 0.$$

Comme la quantité $(\lambda + 2\mu)$ ne peut être égale à 0, on a, en tout point du corps,

$$(15) \dots \dots \dots \Delta \Theta = 0.$$

Ainsi, lorsqu'un corps élastique est déformé par des forces appliquées exclusivement à sa surface, la dilatation cubique en chaque point M de ce corps est une fonction harmonique des coordonnées du point M .

Si l'on tient compte des équations (14), les équations (10) donnent

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \Delta \Theta + \mu \Delta \Delta U = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \Delta \Theta + \mu \Delta \Delta V = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z} \Delta \Theta + \mu \Delta \Delta W = 0.$$

Mais, l'égalité (15) étant vérifiée en tout point du corps, on a aussi, en tout point du corps,

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta \Theta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} \Delta \Theta = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \Delta \Theta = 0,$$

et comme μ est certainement positif, on a, en tout point du corps,

$$(16) \dots \dots \dots \begin{cases} \Delta \Delta U = 0, \\ \Delta \Delta V = 0, \\ \Delta \Delta W = 0. \end{cases}$$

Les égalités (9) montrent bien aisément alors que l'on a aussi, en tout point du corps.

$$(17) \dots \dots \dots \begin{cases} \Delta \Delta N_1 = 0, & \Delta \Delta N_2 = 0, & \Delta \Delta N_3 = 0, \\ \Delta \Delta T_1 = 0, & \Delta \Delta T_2 = 0, & \Delta \Delta T_3 = 0, \end{cases}$$

Ainsi, lorsqu'un corps élastique est infiniment peu déformé par des forces extérieures appliquées exclusivement à sa surface, en tout point de ce corps, les trois composantes du déplacement, les six déformations et les six pressions vérifient une même équation aux dérivées partielles du quatrième ordre

$$(18) \dots \dots \dots \Delta \Delta \Psi = 0$$

Cette équation aux dérivées partielles joue donc un rôle capital dans l'étude de l'élasticité; E. Mathieu⁽¹⁾ donne le nom de Seconds Potentiels aux fonctions qui l'intègrent dans un certain espace.

§ III. - Théorème de Clapeyron.

Revenons aux égalités (9).

Les trois premières, ajoutées membre à membre, nous donnent

$$(3\lambda + 2\mu) \Theta + N_1 + N_2 + N_3 = 0.$$

D'ailleurs, elles peuvent s'écrire

$$2\mu D_1 + \lambda \Theta + N_1 = 0,$$

$$2\mu D_2 + \lambda \Theta + N_2 = 0,$$

$$2\mu D_3 + \lambda \Theta + N_3 = 0.$$

L'ensemble de ces égalités donne

$$(19) \dots \dots \dots \begin{cases} D_1 = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} (N_1 + N_2 + N_3) - \frac{1}{2\mu} N_1, \\ D_2 = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} (N_1 + N_2 + N_3) - \frac{1}{2\mu} N_2, \\ D_3 = \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)} (N_1 + N_2 + N_3) - \frac{1}{2\mu} N_3. \end{cases}$$

Les égalités (9) donnent aussi

$$(20) \dots \dots \dots \begin{cases} G_1 = -\frac{1}{\mu} T_1, \\ G_2 = -\frac{1}{\mu} T_2, \\ G_3 = -\frac{1}{\mu} T_3. \end{cases}$$

Ces égalités (19) et (20) montrent que, dans un corps élastique en équilibre, pourvu que l'on n'ait ni $\mu = 0$, ni $3\lambda + 2\mu = 0$, (ce qui ne peut avoir lieu à cause des inégalités (6^{bis})) on peut exprimer les six déformations

$$D_1, D_2, D_3, G_1, G_2, G_3,$$

en fonction des six pressions,

⁽¹⁾ E. Mathieu. Théorie du Potentiel. 1^{re} Partie.

$$N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3.$$

On peut donc pour définir l'état d'un corps élastique en équilibre, prendre les six pressions au lieu des six déformations.

Si l'on fait ce changement de variables, la fonction f , au lieu d'être donnée par l'égalité (5), sera donnée par l'égalité :

$$(21) \dots f = \frac{\lambda + \mu}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (N_1 + N_2 + N_3)^2 - \frac{1}{2\mu} (N_2 N_3 + N_3 N_1 + N_1 N_2) + \frac{1}{2\mu} (T_1^2 + T_2^2 + T_3^2).$$

Cette expression de f doit être, comme l'expression (5), invariable lorsqu'on change l'orientation des axes de coordonnées. Il est aisé de le vérifier.

Nous avons vu [Livre I, Chapitre III, § 5] ⁽¹⁾ que les trois pressions principales P_1, P_2, P_3 en un point d'un corps sont les trois racines de l'équation

$$\begin{vmatrix} N_1 - S & T_3 & T_2 \\ T_3 & N_2 - S & T_1 \\ T_2 & T_1 & N_3 - S \end{vmatrix} = 0,$$

qui peut encore s'écrire :

$$S^3 - (N_1 + N_2 + N_3) S^2 + (N_2 N_3 + N_3 N_1 + N_1 N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2) S + N_1 N_2 N_3 + 2 T_1 T_2 T_3 - N_1 T_1^2 - N_2 T_2^2 - N_3 T_3^2 = 0.$$

Les relations entre les coefficients et les racines d'une équation nous donnent alors trois égalités, parmi lesquelles nous retenons seulement celles-ci :

$$P_1 + P_2 + P_3 = N_1 + N_2 + N_3,$$

$$P_2 P_3 + P_3 P_1 + P_1 P_2 = N_2 N_3 + N_3 N_1 + N_1 N_2 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2.$$

L'égalité (21) peut alors s'écrire :

$$(22) \dots f = \frac{\lambda + \mu}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (P_1 + P_2 + P_3)^2 - \frac{1}{2\mu} (P_2 P_3 + P_3 P_1 + P_1 P_2).$$

Sous cette forme, on voit que l'expression de la quantité f .

⁽¹⁾ Dans ce §, s'est glissée une faute de calcul facile à corriger; les quantités P, P_1, P_2, P_3 , doivent y être sans cesse remplacées par $\frac{1}{P}, \frac{1}{P_1}, \frac{1}{P_2}, \frac{1}{P_3}$.

est indépendante de l'orientation des axes de coordonnées. Cette forme très remarquable a été autrefois donnée par Clapeyron⁽¹⁾.

§ IV. - Corps Isotrope soumis à une pression uniforme sur toute sa surface.

L'étude des déformations des corps isotropes a donné lieu à un nombre considérable de travaux que l'on trouvera résumés dans les Traités d'Elasticité et que notre intention n'est pas d'exposer dans ce cours.

Nous nous bornerons à l'étude de deux problèmes extrêmement simples, étude dont le but principal sera de mettre en évidence le lien qui existe entre les deux coefficients λ et μ et deux autres coefficients dont la signification physique est plus immédiate: à savoir, le coefficient de compressibilité cubique et le module \mathcal{D} de Young.

Le premier problème que nous aborderons est l'étude de la déformation que subit un corps isotrope, lorsque sa surface extérieure est soumise en tout point à l'action d'une pression normale et uniforme.

Rappelons nous d'abord que, d'après le Théorème de G. Kirchhoff (Chapitre I, § IV), lorsque les forces extérieures sont données, les déformations qui en résultent sont complètement déterminées. Lors donc que nous nous trouvons en présence d'un problème de la théorie de l'élasticité, si, par un moyen quelconque, nous obtenons un système de déformations qui vérifie les équations de ce problème, nous serons assurés d'avoir complètement résolu le problème.

C'est cette voie que nous allons suivre pour résoudre le problème qui nous occupe en ce moment.

Imaginons un système de déformations qui laisse le corps isotrope semblable à lui-même, et prenons pour origine des coordonnées le centre de similitude. Soient x, y, z , les coordonnées d'un point matériel avant la déformation et x', y', z' , les coordonnées du même point après la déformation.

Nous aurons

$$x' = Kx, \quad y' = Ky, \quad z' = Kz.$$

⁽¹⁾ Clapeyron. Mémoire sur le Travail des forces Élastiques dans un corps solide déformé par l'action de forces extérieures (Comptes Rendus. T. XVI p 208. 1858)

ou, en posant,

$$x' = x + U, \quad y' = y + V, \quad z' = z + W,$$

$$(23) \dots \dots \dots \begin{cases} U = (K-1)x, \\ V = (K-1)y, \\ W = (K-1)z. \end{cases}$$

Ces expressions de U, V, W , vérifient les équations (10), où l'on doit faire

$$\dot{X} = 0 \quad \dot{Y} = 0, \quad \dot{Z} = 0.$$

Si nous parvenons à disposer de K de telle manière que les conditions aux limites (12) soient vérifiées, nous aurons résolu le problème proposé. Or les égalités (23) nous donnent

$$D_1 = K-1, \quad D_2 = K-1, \quad D_3 = K-1, \\ G_1 = 0, \quad G_2 = 0, \quad G_3 = 0,$$

Nous avons d'ailleurs dans le cas actuel,

$$\begin{aligned} \cos(P, x) &= \cos(n_i, x), \\ \cos(P, y) &= \cos(n_i, y), \\ \cos(P, z) &= \cos(n_i, z). \end{aligned}$$

Les égalités (12) seront donc vérifiées si nous posons :

$$(3\lambda + 2\mu)(K-1) + P = 0.$$

Ainsi, lorsqu'un corps est uniformément pressé, il demeure homogène, et l'on a en chacun de ses points, P

$$D_1 = D_2 = D_3 = -\frac{P}{3\lambda + 2\mu}, \\ G_1 = G_2 = G_3 = 0.$$

La dilatation cubique a pour valeur

$$\Theta = D_1 + D_2 + D_3 = -\frac{3P}{3\lambda + 2\mu}.$$

Le coefficient de compressibilité cubique du corps est le rapport

$$\text{On voit qu'il a pour valeur } q = -\frac{\Theta}{P}.$$

$$(24) \dots \dots \dots q = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}$$

(24 bis) Pour les liquides, pour lesquels $\mu = 0$, on a simplement

$$\dots \dots \dots q = \frac{3}{\lambda}.$$

Le coefficient de compressibilité est l'inverse de la quantité λ ; on voit que, pour un liquide, on ne peut supposer que l'on ait le coefficient de compressibilité serait infini. $\lambda = 0$;

s.V. - Allongement d'un Corps prismatique par la traction.

Imaginons un corps cylindrique dont la base supérieure est dans un plan immobile et dont la base inférieure, de surface S , est soumise à la traction uniforme d'un poids $\bar{\omega}$, en sorte que cette base inférieure est soumise à une pression normale et uniforme

$$P = - \frac{\bar{\omega}}{S}.$$

La surface latérale du cylindre n'est soumise à aucune pression; les divers éléments de volume du cylindre ne sont soumis à aucune force extérieure.

Supposons l'origine des coordonnées placée en un point de la base supérieure immobile et l'axe des z dirigé verticalement de bas en haut.

Nous allons chercher à satisfaire au problème par des équations de la forme

$$U = Kx, \quad V = Ky, \quad W = K'z.$$

Ces expressions de U, V, W , vérifient certainement les équations (10), où l'on doit faire

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Il reste à déterminer les coefficients K et K' de manière que les équations (12) soient vérifiées en tout point de la base inférieure du cylindre, et en tout point de la surface latérale. Nous obtiendrons pour effectuer cette détermination, les équations

$$\begin{aligned} 2\lambda K + (\lambda + 2\mu) K' - \frac{\bar{\omega}}{S} &= 0, \\ 2(\lambda + \mu) K + \lambda K' &= 0, \end{aligned}$$

qui nous donnent:

$$\begin{aligned} K &= - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{\bar{\omega}}{S}, \\ K' &= \frac{2(\lambda + \mu)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{\bar{\omega}}{S}. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsqu'un corps prismatique est soumis à la traction, les lois de sa déformation sont exprimées par les égalités:

$$(25) \dots \dots \dots \left\{ \begin{aligned} D_1 = D_2 &= - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{\bar{\omega}}{S}, \\ D_3 &= \frac{2(\lambda + \mu)}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \frac{\bar{\omega}}{S}, \\ G_1 = G_2 = G_3 &= 0. \end{aligned} \right.$$

Le cylindre reste homogène. Il subit une dilatation dans le sens de sa longueur et une contraction uniforme dans toute direction perpendiculaire à sa longueur. Chacune de ces déformations est proportionnelle au poids tenseur et en raison inverse de l'aire de la base.

Pour tous les solides connus, la dilatation longitudinale et la contraction transversale sont positives. Si l'on se souvient que l'on a

on voit que pour tous les solides connus on a aussi

$$\lambda > 0$$

On donne le nom de coefficient d'élasticité de traction ou de module d'Young au quotient $\frac{\sigma}{\epsilon}$ de la traction par unité de surface de la base à la dilatation linéaire D_3 dans le sens des génératrices. Si l'on désigne par E ce coefficient, on a

$$(26) \dots \dots \dots E = \frac{\mu (3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

Le rapport de la dilatation longitudinale d'un prisme étiré à la contraction transversale a pour valeur

$$(27) \dots \dots \dots \sigma = \frac{D_3}{-D_1} = \frac{2(\lambda + \mu)}{\lambda}$$

D'après Navier et Poisson, les deux quantités λ et μ seraient égales entre elles; ces théories, que nous examinerons au Chapitre suivant, donneraient donc pour σ la valeur 4.

Le produit du module d'Young par le coefficient de compressibilité cubique a pour valeur

$$(28) \dots \dots \dots E \varrho = \frac{3\mu}{\lambda + \mu}$$

D'après les théories de Navier et de Poisson, ce produit aurait pour valeur $\frac{3}{2}$.

Les quantités λ et μ sont-elles égales entre elles, comme le veulent les théories dont nous venons de parler? C'est un point important qui doit être élucidé par l'expérience.

La détermination expérimentale de la dilatation longitudinale D_3 se fait sans peine. Deux traits sont marqués sur le cylindre. On repère leur distance verticale au cathétomètre lorsque le cylindre est à l'état naturel, puis lorsqu'il est soumis à la tension d'un poids connu.

La mesure de la contraction transversale ne peut, au contraire, se faire directement

La seconde détermination que l'on cherche à effectuer expérimentalement est la détermination de la dilatation cubique

$$\Theta = D_1 + D_2 + D_3 = \frac{1}{3\lambda + 2\mu}$$

Pour cela, on peut placer le cylindre métallique soumis à la traction au sein d'une masse liquide, et observer la variation de niveau du liquide; ou bien employer un tube creux, et, par un procédé analogue, observer la variation du volume intérieur du tube.

Cagniard de Latour,⁽¹⁾ par une expérience unique, avait cru démontrer que la dilatation longitudinale était bien égale à quatre fois la contraction transversale, comme le voulait la théorie de Navier et de Poisson. Les déterminations ultérieures de Wertheim, de F. E. Neumann, de G. Kirchhoff, de M. Cornu et d'une foule d'autres observateurs ont montré que si l'égalité

$$\lambda = \mu$$

avait lieu, d'une manière exacte ou approximative, pour certains corps, tels que le cristal de St. Gobain, elle était fort loin d'être exacte pour la plupart des corps isotropes, notamment pour les métaux.

Les partisans de la théorie de Navier et de Poisson ne se sont pas rendus à ce jugement de l'expérience. Ils ont prétendu que si l'expérience, faite sur certains corps avait donné des valeurs différentes pour les deux coefficients λ et μ , c'est que ces corps n'étaient pas réellement isotropes; qu'ils présentaient une anisotropie que des circonstances accessoires masquaient à l'observateur; qu'ils étaient, par exemple, formés de cristaux enchevêtrés dans toutes les directions possibles; et de longs travaux théoriques ont été entrepris sur ces corps pseudo-isotropes.

Mais si l'expérience ne réussit pas à réduire au silence ceux qui maintiennent l'égalité nécessaire des deux coefficients λ et μ relatifs aux corps isotropes, il semble aisé de montrer que leur théorie est inexacte par le raisonnement suivant:

La définition des corps élastiques comparée à la définition des liquides montre que les propriétés des liquides peu éloignés de l'état naturel doivent être comprises, comme cas particuliers, parmi les propriétés des corps élastiques peu déformés.

La définition même des liquides montre que les liquides sont isotropes.

Si donc, pour tous les corps élastiques isotropes, les deux constantes λ et μ sont égales entre elles, il doit en être ainsi, en particulier, pour les liquides.

Or, nous savons que, pour les liquides, on a $\mu = 0$.

On devrait donc aussi, pour les liquides, avoir $\lambda = 0$. Mais nous avons vu que cette dernière hypothèse est absurde. Il en est donc de même de l'égalité

$$\lambda = \mu.$$

Duh (T. II) n° 31.

⁽¹⁾ Cagniard de Latour. Annales de Chimie et de Physique. T. XXXVI, p. 384 (1827)

que, sur la foi de Navier et de Poisson, beaucoup de physiciens veulent admettre comme une loi générale applicable à tous les corps isotropes.

Chapitre III.

Comment a été établie la Théorie de l'Elasticité.

I. Navier aborde la théorie de l'élasticité des Corps Isotropes (1821).

La découverte et le développement des lois qui président à l'équilibre et au mouvement des corps élastiques ont joué un tel rôle dans la marche des théories physiques, que nous croyons utile d'abandonner pour un instant l'exposé didactique de ces lois et de consacrer un chapitre à l'étude historique des travaux qui les ont établies.

L'étude des corps élastiques dont une ou deux dimensions sont infiniment réduites a précédé de beaucoup l'étude des corps élastiques étendus en toute dimension. Lorsque nous traiterons des lignes élastiques, ou des surfaces élastiques nous exposerons les recherches qui ont fait connaître les conditions de leur équilibre ou de leur mouvement. C'est seulement des recherches qui ont eu pour objet les corps élastiques à trois dimensions qu'il sera question dans ce chapitre.

Le premier nom que nous rencontrons est celui de Navier. Le 14 Mai 1821, Navier lut à l'Académie des Sciences un Mémoire sur la théorie de l'élasticité qui fut imprimé, seulement en 1827.⁽¹⁾

Le point de départ de la théorie développée par Navier est le suivant.

⁽¹⁾ Navier. Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques (Mémoires de l'Académie des Sciences. T. VII. p. 376. 1827. -- Extrait dans le Bulletin de la Société Philomathique XVI^e année, p. 177. 1823.)

Lorsqu'un corps élastique est à l'état naturel, les divers éléments matériels qui le composent n'exercent les uns sur les autres aucune force. Mais, lorsque ces éléments matériels sont écartés de la position qu'ils occupent dans l'état naturel, il naît entre eux des forces attractives ou répulsives.

Soient M et M' deux points matériels, dont m et m' sont les masses, et r la distance lorsque le corps est à l'état naturel. Le corps étant écarté de l'état naturel, leur distance est $(r + \Delta r)$. Dans ce dernier état du corps, les deux points s'attirent avec une force dirigée suivant la droite qui les joint et ayant pour grandeur

$F(r) \Delta r$ étant une fonction de r qui est toujours positive, qui a de grandes valeurs lorsque r est extrêmement petit, et qui devient très voisine de 0 aussitôt que r prend des valeurs sensibles.

Ces forces, appliquées ainsi à chaque élément du système, doivent faire équilibre aux forces extérieures qui, agissant sur ce même élément, l'écartent de sa position d'équilibre.

Un calcul direct montre à Navier qu'un élément de volume dv du corps est ainsi soumis à une force intérieure ayant pour composantes:

$$\begin{aligned} & \lambda \left(3 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right) dv, \\ & \lambda \left(3 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} + 2 \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} \right) dv, \\ & \lambda \left(3 \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} + 2 \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} \right) dv \end{aligned}$$

En égalant respectivement ces composantes aux composantes $\rho X dv$, $\rho Y dv$, $\rho Z dv$,

de la force extérieure qui agit sur le même élément de volume, Navier obtient les équations qui, pour l'équilibre, doivent être vérifiées en tout point de la masse du corps. Ces équations sont celles que l'on obtiendrait en faisant

λ = μ

dans les équations (10) du Chapitre précédent.

Le calcul direct, qui a fourni à Navier ce premier résultat ne lui paraît pas propre à établir les conditions aux limites qui doivent être vérifiées en tout point de la surface du corps. C'est pour obtenir ces conditions qu'il crée la méthode par laquelle doivent être traitées les questions d'élasticité.

Navier forme le Potentiel des Forces intérieures qui agissent sur le système. Ce Potentiel se trouve être de la forme suivante:

$$F = \int f \, dv,$$

avec

$$f = \frac{1}{2} \lambda \left[3 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + 3 \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right)^2 + 3 \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 - 2 \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial z} - 2 \frac{\partial W}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial x} - 2 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y} + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 \right]$$

C'est exactement ce que donnerait l'égalité (8) du Chapitre précédent, si l'on y faisait

$$\lambda = \mu.$$

Navier écrit ensuite que, pour l'équilibre, la variation de ce Potentiel des Forces intérieures, doit être, dans toute modification virtuelle, égale au travail des forces extérieures. Il obtient ainsi, non-seulement les équations d'équilibre qui doivent être vérifiées en tous les points du corps, mais encore les équations à la surface. Ces dernières sont celles que l'on obtiendrait en faisant $\lambda = \mu$ dans les équations (12) du Chapitre précédent.

Navier cherche ensuite à relier la constante λ au coefficient d'élasticité de traction; mais dans la recherche de cette relation il commet une erreur. Il croit que la contraction latérale d'un prisme étiré est nulle. Il trouve ainsi que le coefficient d'élasticité de traction E est le triple de la constante λ , tandis que ses équations auraient dû lui donner la relation

$$E = \frac{5}{2} \lambda,$$

qui se déduit de l'équation (26) du Chapitre précédent en y faisant

$$\lambda = \mu.$$

Le Mémoire de Navier est toujours cité dans tous les Mémoires et Traités d'Elasticité. Mais les auteurs de ces Mémoires et de ces Traités l'ont, en général, lu avec peu de soin. Ils ont laissé passer inaperçue la méthode si belle et si sûre qui consiste à former le Potentiel des Actions Internes, pour en déduire, à la manière de Lagrange, les équations de l'équilibre d'élasticité. Il nous faudra arriver jusqu'à Green pour voir cette méthode remise en honneur.

§. II - Fresnel introduit la notion de Corps élastique Anisotrope. (1821). ²⁴⁵

La notion d'élasticité variable avec la direction ne se trouve pas dans le Mémoire de Navier. Cette notion avait déjà été introduite, dans l'étude des plaques élastiques, comme nous le verrons en étudiant ce problème, d'abord par Euler et par Jacques II Bernouille, puis plus complètement par Poisson. Mais Fresnel l'a, le premier, introduite dans l'étude des corps élastiques étendus en toute dimension. Ses recherches, d'abord confuses, puis de plus en plus précises, sont disséminées dans ses écrits relatifs à la double réfraction ⁽¹⁾.

Le point de départ de Fresnel, son hypothèse fondamentale sur la nature des actions élastiques, diffère notablement de l'hypothèse admise par Navier. Elle se rapproche des idées que Poisson avait émises dès 1814 dans son Mémoire sur les Surfaces Élastiques. Ce point de départ est le suivant :

Un système élastique est assimilable à un système de points matériels isolés les uns des autres et libres de toute liaison. Si M et M' sont deux tels points, m et m' leurs masses, r la distance qui les sépare, ces deux points exercent l'un sur l'autre une action dirigée suivant la droite qui les joint. Si nous comptons positivement cette action quand elle est repulsive, elle aura pour expression

$$m m' f(r),$$

$f(r)$ étant une fonction de la distance r qui devient insensible lorsque la distance r prend une valeur sensible.

Que telle est bien l'idée de Fresnel, c'est ce qui résulte par exemple de la citation suivante ⁽²⁾.

"Les géomètres qui se sont occupés des vibrations des fluides élastiques - Cela tient à ce qu'ils se représentent mathématiquement les fluides élastiques par une réunion de petits éléments"

⁽¹⁾ Fresnel. Premier Mémoire sur la double Réfraction, présenté à l'Académie des Sciences le 19 Novembre 1821. - Supplément au Mémoire sur la Double Réfraction, présenté à l'Académie des Sciences le 22 Janvier 1822. - Second Supplément au Mémoire sur la Double Réfraction. Présenté à l'Académie des Sciences le 1^{er} Avril 1822. - Second Mémoire sur la Double Réfraction (Mémoires de l'Académie des Sciences. T. VII. p. 45. 1827). - Voir Œuvres de Fresnel : IV^e Section. Double Réfraction.

⁽²⁾ Œuvres de Fresnel. T. II. p. 277.

différentiels contigus, susceptibles de se condenser ou de se dilater; tandis que, dans la nature, les fluides élastiques sont composés, sans doute de points matériels séparés par des intervalles plus ou moins considérables relativement aux dimensions de ces molécules, et qui sont tenus à distance en raison des forces répulsives qu'ils exercent les uns sur les autres."

On voit combien cette hypothèse diffère de celle de Navier. D'après Fresnel, lorsque le corps est à l'état naturel, ce sont les répulsions moléculaires qui maintiennent à distance les points matériels qui le composent; l'équilibre est assuré par ce fait que la résultante des actions moléculaires qui agissent sur chacun de ces points matériels est égale à 0. Au contraire, d'après Navier, toutes les forces moléculaires sont nulles à l'état naturel, et c'est en vertu des liaisons imposées par la nature même des molécules que le corps à l'état naturel a une densité finie.

Tandis que l'idée émise par Poisson dans son mémoire sur les surfaces élastiques et adoptée par Fresnel dans sa théorie de la double réfraction, sera développée par Cauchy, Poisson, de St-Venant, M. Boussinesq, la théorie de Navier sera reprise plus tard par Lamé et Clapeyron dans leur Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes, puis par Lamé dans ses Leçons sur la Théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Lamé le tendra aux corps non isotropes, et cherchera à l'allier, dans le cas des corps isotropes, à l'existence de deux coefficients d'élasticité distincts.

La résultante des actions qu'un point matériel subit de tous les autres points du système, nulle, d'après Fresnel, dans l'état naturel du corps, cesse d'être égale à 0 lorsque le corps est écarté de l'état naturel. C'est cette résultante qui tend à déplacer le point matériel et à ramener le corps à l'état naturel.

Fresnel a cherché à déterminer la grandeur et la direction de cette résultante lorsque le point matériel est infiniment peu écarté de sa position naturelle. Il a, à cet égard donné un Théorème qu'il a d'abord énoncé ⁽¹⁾, puis démontré moyennant certaines hypothèses ⁽²⁾ puis enfin démontré d'une manière générale ⁽³⁾. Cauchy en a donné, dans les Anciens exercices de Mathématiques ⁽⁴⁾ une démonstration aussi simple

(1) Œuvres de Fresnel. T. II. p. 336

(2) ———— 2° ———— 344

(3) ———— 2° ———— 369

(4) Œuvres de Cauchy 2^e série. T. VII p. 79.

qu'élegante. Cette démonstration peut encore se simplifier par la considération de la fonction potentielle.

Soit $F(r)$ une fonction de r définie par la condition

$$\frac{dF(r)}{dr} + f(r) = 0.$$

Soient :

M_0 , un point matériel mobile ;

μ , sa masse ;

x, y, z , ses coordonnées dans la position d'équilibre

M_1, M_2, \dots un nombre quelconque de points immobiles.

m, m', \dots leurs masses,

r, r', \dots leurs distances au point M_0 ;

La fonction potentielle au point M_0 sera :

$$V = m F(r) + m' F(r') + \dots$$

Pour que le point M_0 soit en équilibre dans la position (x, y, z) il faut que l'on ait :

$$(1) \dots \dots \dots \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} V(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial y} V(x, y, z) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial z} V(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

Amenerons le point M_0 dans la position $x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z$. Il subira, de la part des points M_1, M_2, \dots des actions dont la résultante aura pour composantes :

$$(2) \dots \dots \dots \begin{cases} X = -\mu \frac{\partial V(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)}{\partial x} \\ Y = -\mu \frac{\partial V(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)}{\partial y} \\ Z = -\mu \frac{\partial V(x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z)}{\partial z} \end{cases}$$

Faisons :

$$A_{11}(x, y, z) = -\frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial x^2}$$

$$A_{22}(x, y, z) = -\frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial y^2}$$

$$A_{33}(x, y, z) = -\frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial z^2}$$

$$A_{23}(x, y, z) = A_{32}(x, y, z) = -\frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial y \partial z}$$

$$A_{31}(x, y, z) = A_{13}(x, y, z) = -\frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial z \partial x}$$

$$A_{12}(x, y, z) = A_{21}(x, y, z) = -\frac{\partial^2 V(x, y, z)}{\partial x \partial y}$$

et tenons compte des égalités (1). Les égalités (2) deviendront

$$(3) \dots\dots\dots \begin{cases} X = \mu (A_{11} \delta x + A_{12} \delta y + A_{13} \delta z) \\ Y = \mu (A_{12} \delta x + A_{22} \delta y + A_{23} \delta z) \\ Z = \mu (A_{13} \delta x + A_{23} \delta y + A_{33} \delta z) \end{cases}$$

Ce sont ces égalités (3) qui constituent le Théorème de Fresnel. Notre intention n'est pas d'exposer ici les conséquences que Fresnel en a déduites pour la théorie de la double réfraction. Elles n'intéressent pas la théorie de l'élasticité.

§3. — Cauchy détermine les lois des déformations infiniment petites d'un corps quelconque et la distribution des pressions autour d'un point pris à l'intérieur d'un milieu quelconque (1822).

Cauchy était l'un des membres de la commission à laquelle l'Académie avait renvoyé l'examen du Mémoire de Navier. Ce fut pour lui l'occasion de méditer la théorie de l'élasticité et de faire faire en peu de temps à cette théorie des progrès extraordinaires. Les conversations de Fresnel qui lui communiqua le théorème rappelé au § précédent, achevèrent de lui suggérer la forme des équations qui devaient être traitées dans l'étude des pressions et dans l'étude des déformations infiniment petites. Le 30 Septembre 1822, il présenta à l'Académie des Sciences un mémoire sur ces sujets; un résumé de ce mémoire fut inséré au Bulletin de la Société Philomathique⁽¹⁾. La lecture attentive de ce résumé montre que, dès 1822, Cauchy était en pleine possession de la théorie des petites déformations d'un corps et de la théorie des pressions à l'intérieur d'un corps quelconque.

⁽¹⁾ Cauchy — Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques. (Bulletin de la Société Philomathique XVI^e Année 1823. p. 9.)

théories que nous avons exposées dans ce cours au Livre I, Chapitres II et III.

Les démonstrations complètes des propositions énoncées par Cauchy ne furent publiées par lui qu'en 1827, dans la 2^e Année des Anciens Exercices de Mathématiques. (1).

La théorie, donnée par Cauchy, des déformations infiniment petites d'un corps quelconque, ne diffère par aucun point essentiel de la théorie développée dans ce cours au Livre I, chapitre II. Il est donc inutile que nous y insistions.

Il n'en est pas de même de la théorie des pressions à l'intérieur d'un corps quelconque, à laquelle Cauchy parvient d'une manière essentiellement différente de celle que nous avons exposée dans ce cours (Livre I, Chapitre III).

Si, dans un corps en équilibre, on trace une surface fermée de forme quelconque et si, supprimant tout ce qui entoure cette surface, on ne garde que la partie du corps qu'elle contient, pour maintenir en équilibre cette partie du corps, il faudra appliquer à chacun des éléments dS de cette surface une force entièrement déterminée par la connaissance de la position de l'élément dS à l'intérieur du corps et de son orientation. Cette force est la pression appliquée à l'élément dS .

Cel est le Théorème fondamental que démontre la méthode exposée au Livre I, Chapitre III et dont Cauchy admet sans démonstration l'exactitude. Ce Théorème admis, Cauchy se propose de déterminer comment la grandeur et la direction de la pression en un point de l'élément dS varient lorsque cet élément tourne autour d'un de ses points de manière à prendre toutes les orientations possibles.

La méthode qu'il suit est très simple.

Si les pressions appliquées à la surface qui délimite une partie du corps doivent faire équilibre aux forces extérieures qui agissent sur cette partie du corps, elles doivent, a fortiori leur faire équilibre lorsque cette partie est supposée rigide. En choisissant convenablement cette partie rigide, Cauchy arrive à établir les théorèmes fondamentaux relatifs aux pressions.

(1) Œuvres de Cauchy 2^e série t. VII et t. VIII - Voici les titres des exercices qui renferment les démonstrations dont il s'agit : De la pression ou tension dans un corps solide t. VII p. 60 - Sur la condensation et la dilatation des corps solides p. 82 - Sur les relations qui existent, dans l'état d'équilibre d'un corps solide ou fluide, entre les pressions ou tensions et les forces accélératrices. p. 141 - Sur quelques théorèmes relatifs à la condensation et à la dilatation des corps. t. VIII, 278.

Supposons d'abord que l'on découpe dans le corps un petit parallépipède dont les arêtes soient respectivement parallèles aux axes de coordonnées (fig 70) et aient respectivement pour dimensions dx , dy , dz . Écrivons que les pressions appliquées à ce petit élément sont en équilibre aux forces extérieures qui agissent sur ce même élément supposé rigide.

La surface $ABCD = dy dz$ supporte une pression dont les composantes

sont : $P_{xx} dy dz$, $P_{xy} dy dz$, $P_{xz} dy dz$.

La surface $A'B'C'D' = dy dz$, supporte une pression dont les composantes sont : $P'_{xx} dy dz$, $P'_{xy} dy dz$, $P'_{xz} dy dz$

La surface $BB'C'C = dz dx$ supporte une pression dont les composantes sont : $P_{yx} dz dx$, $P_{yy} dz dx$, $P_{yz} dz dx$

La surface $AA'DD' = dz dx$ supporte une pression dont les composantes sont : $P'_{yx} dz dx$, $P'_{yy} dz dx$, $P'_{yz} dz dx$

La surface $AA'BB' = dx dy$ supporte une pression dont les composantes sont : $P_{zx} dx dy$, $P_{zy} dx dy$, $P_{zz} dx dy$

La surface $DD'CC' = dx dy$ supporte une pression dont les composantes sont : $P'_{zx} dx dy$, $P'_{zy} dx dy$, $P'_{zz} dx dy$.

Ces conventions posées, projetons sur Ox les forces qui sollicitent le parallépipède élémentaire, et écrivons que la somme de leurs projections est égale à 0. Nous trouverons :

$$(1) \dots \dots P_{xx} dy dz + P_{yx} dz dx + P_{zx} dx dy + P'_{xx} dy dz + P'_{yx} dz dx + P'_{zx} dx dy + \rho X dx dy dz = 0.$$

Cette relation doit avoir lieu quels que soient dx , dy , dz . Nous voyons donc que

doit être un infiniment petit du même ordre que dx ; que

doit être un infiniment petit du même ordre que dy ; que

doit être un infiniment petit du même ordre que dz . Ces résultats, et d'autres analogues que l'on obtiendrait en considérant les axes OY et OZ au lieu de l'axe

OX , nous enseignent que la pression exercée sur un élément normal à l'un des axes de coordonnées vire cap pour cap sans changer de grandeur en même temps que l'orientation de l'élément. Des axes de coordonnées étant trois droites rectangulaires quelconques, cette proposition s'étend évidemment à tous les éléments.

Cette proposition nous permet d'écrire

$$P'_{xx} = - \left(P_{xx} + \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} dx \right)$$

$$P'_{yx} = - \left(P_{yx} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} dy \right)$$

$$P'_{zx} = - \left(P_{zx} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} dz \right)$$

et l'égalité (1) devient la première des égalités

$$(2) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zx}}{\partial z} - \rho X = 0, \\ \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zy}}{\partial z} - \rho Y = 0, \\ \frac{\partial P_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial P_{zz}}{\partial z} - \rho Z = 0, \end{array} \right.$$

Les deux autres s'établissent d'une manière analogue

En égalant à 0 la somme des moments par rapport à OX des forces appliquées à notre petit parallélépipède, et en ne conservant, dans cette somme, que les infiniment petits principaux, nous obtenons la première des égalités.

$$P_{yz} - P_{zy} = 0,$$

$$P_{zx} - P_{xz} = 0,$$

$$P_{xy} - P_{yx} = 0;$$

les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Posons, en tenant compte de ces égalités,

$$N_1 = P_{xx}, \quad N_2 = P_{yy}, \quad N_3 = P_{zz},$$

$$T_1 = P_{yz} = P_{zy},$$

$$T_2 = P_{zx} = P_{xz},$$

$$T_3 = P_{xy} = P_{yx}$$

et les égalités deviendront:

$$\left(\frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} - \rho X = 0, \right.$$

$$(3) \dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} - \rho Y = 0, \\ \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial N_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} - \rho Z = 0. \end{array} \right.$$

Telles sont les conséquences auxquelles Cauchy parvient en étudiant l'équilibre d'un parallélépipède infiniment petit.

L'étude des conditions d'équilibre d'un tétraèdre infiniment petit achève de lui donner les relations fondamentales d'où découlent les propriétés des pressions à l'intérieur d'un corps quelconque.

Considérons un tétraèdre $SABC$ (fig 71) dont trois arêtes

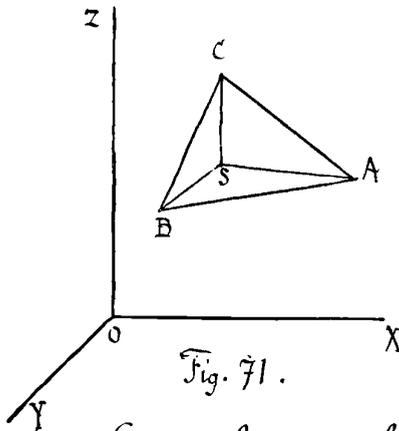


Fig. 71.

$$SA = dx,$$

$$SB = dy,$$

$$SC = dz,$$

sont respectivement parallèles aux axes de coordonnées

Soit Ω l'aire ABC . Cette aire supporte une pression dont les composantes sont

$$\Omega P \cos(P, x), \quad \Omega P \cos(P, y), \quad \Omega P \cos(P, z)$$

Soit n la normale à la base ABC vers l'intérieur du tétraèdre.

Égalons à 0 la somme des projections sur OX des forces qui sollicitent le tétraèdre, en ne gardant, dans notre égalité que les infiniment petits principaux. Nous aurons

$$P_{xx} \frac{dy dz}{2} + P_{yx} \frac{dz dx}{2} + P_{zx} \frac{dx dy}{2} + P \cos(P, x) \Omega = 0.$$

Mais nous aurons aussi

$$\frac{dy dz}{2} = - \Omega \cos(n, x),$$

$$\frac{dz dx}{2} = - \Omega \cos(n, y),$$

$$\frac{dx dy}{2} = - \Omega \cos(n, z).$$

L'égalité précédente deviendra alors la première des égalités

$$(4) \dots \left\{ \begin{array}{l} N_1 \cos(n, x) + T_3 \cos(n, y) + T_2 \cos(n, z) = P \cos(P, x), \\ T_3 \cos(n, x) + N_2 \cos(n, y) + T_1 \cos(n, z) = P \cos(P, y), \\ T_2 \cos(n, x) + T_1 \cos(n, y) + N_3 \cos(n, z) = P \cos(P, z); \end{array} \right.$$

les deux autres se démontrent d'une manière analogue.

Telle est la méthode élégante et devenue classique par laquelle Cauchy a démontré les égalités fondamentales sur lesquelles repose l'étude de la distribution des pressions autour d'un point. Cette étude, Cauchy en a développé les points essentiels, et Lamé et Clapeyron l'ont complétée⁽¹⁾.

§ IV - Cauchy et Poisson cherchent à exprimer les N_i, T_i , en fonction des six déformations (1822-1830).

Pour achever la théorie de l'élasticité, il suffisait de trouver les relations qui expriment les six pressions $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$, en fonction des six déformations $D_1, D_2, D_3, G_1, G_2, G_3$. Mais l'établissement de ces relations a fait l'objet des recherches les plus diverses, recherches qui ont abouti aux résultats les plus contradictoires.

Une première voie se présentait, que Cauchy suivit :

Les six pressions doivent être fonctions linéaires et homogènes des six déformations ; on peut, par voie d'hypothèse, chercher à deviner la forme de ces fonctions.

Cauchy supposa d'abord⁽²⁾ que chacune des trois pressions principales était forcément dirigée suivant un des axes principaux de dilatation et que cette pression principale était proportionnelle en grandeur à la dilatation principale correspondante. Il obtient ainsi les équations que l'on obtiendrait en faisant, dans l'étude des corps isotropes la supposition inadmissible $\lambda = 0$.

Plus tard⁽³⁾ il modifia cette hypothèse en admettant que chacune des trois pressions principales devait être la somme d'un terme proportionnel à la dilatation linéaire correspondante et d'un second terme proportionnel à la dilatation cubique. Il obtient ainsi les équations (3) du Chapitre

(1) Lamé et Clapeyron — Mémoire sur l'Équilibre Intérieur des corps solides homogènes (Journal de Crève t. VII. 1831 - Savants étrangers t. IV p. 463. 1833).

(2) Cauchy — Recherches sur l'Équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques, présenté à l'Académie des sciences le 30 septembre 1829 (Bulletin de la Société Philomatique. Année 1829. p. 9).

(3) Cauchy — Sur les Équations qui expriment les conditions d'équilibre et les lois du mouvement intérieur d'un corps solide, élastique ou non élastique. Anciens Exercices de Mathématiques 3^e Année 1828 - Œuvres de Cauchy 2^e série t. VIII. p. 195 1.

précédent, équations dont découle toute l'étude des corps isotropes. Cauchy fit remarquer que, par l'hypothèse $\lambda = \mu$, ces équations redonneraient celles qu'avait trouvées Navier.

Ces hypothèses ne fournissaient à Cauchy que les équations qui expriment les pressions en fonction des déformations à l'intérieur d'un corps isotrope.

À l'intérieur d'un corps non isotrope, Cauchy⁽¹⁾ proposa de regarder simplement les six pressions comme six fonctions linéaires des déformations, sans rien supposer de particulier sur la forme de ces fonctions. Dans cette manière de voir, on aurait simplement :

$$(4) \dots \left\{ \begin{array}{l} N_1 + A_{11} D_1 + A_{12} D_2 + A_{13} D_3 + A_{14} G_1 + A_{15} G_2 + A_{16} G_3 = 0, \\ N_2 + A_{21} D_1 + A_{22} D_2 + A_{23} D_3 + A_{24} G_1 + A_{25} G_2 + A_{26} G_3 = 0, \\ N_3 + A_{31} D_1 + A_{32} D_2 + A_{33} D_3 + A_{34} G_1 + A_{35} G_2 + A_{36} G_3 = 0, \\ T_1 + A_{41} D_1 + A_{42} D_2 + A_{43} D_3 + A_{44} G_1 + A_{45} G_2 + A_{46} G_3 = 0, \\ T_2 + A_{51} D_1 + A_{52} D_2 + A_{53} D_3 + A_{54} G_1 + A_{55} G_2 + A_{56} G_3 = 0, \\ T_3 + A_{61} D_1 + A_{62} D_2 + A_{63} D_3 + A_{64} G_1 + A_{65} G_2 + A_{66} G_3 = 0, \end{array} \right.$$

sans que les deux coefficients A_{ij} et A_{ji} fussent forcément égaux entre eux. Le nombre des coefficients d'élasticité réellement distincts serait alors de 36.

La méthode qui consiste à faire des hypothèses directes sur la forme des relations qui expriment les six pressions en fonction des six déformations n'est pas la seule qui ait été suivie pour déterminer ces relations; elle n'est même pas celle qui, dans le développement de la théorie de l'élasticité, a joué le rôle le plus important; les considérations sur les actions moléculaires tiennent le premier rang.

La théorie de l'élasticité fondée sur la considération des attractions moléculaires, a pris naissance, comme nous l'avons vu, dans les travaux de Poisson sur les surfaces élastiques; elle a ensuite été reprise dans les travaux de Fresnel. Cauchy et Poisson l'ont développée en même temps, et, si leurs calculs se ressemblent souvent, les idées qui les conduisent à ces calculs ne sont pas les mêmes, au moins au début.

On peut, en effet, dans les travaux de Cauchy sur l'attraction

⁽¹⁾ Cauchy. Sur les diverses méthodes à l'aide desquelles on peut établir les équations qui représentent les lois d'équilibre, ou le mouvement intérieur des corps solides ou fluides lu à l'Académie des Sciences le 8 Mars 1830. (Bulletin des Sciences Mathématiques, Physiques et Chimiques de Terussac. t. XIII p. 169. 1830).

moléculaire distingue deux phases : Dans la première, Cauchy ne connaît pas encore les travaux de Poisson ; il développe une théorie qui lui est propre. Dans la seconde, Cauchy connaît, au moins par l'extrait des Annales de Chimie et de Physique, les idées développées par Poisson dans son Mémoire sur l'équilibre et le Mouvement des corps élastiques. Il adopte alors ces idées et leur donne de grands développements.

Quant aux idées de Poisson, on ne peut douter qu'elles ne lui appartiennent en propre ; elles ne sont que le développement de celles qu'il avait émises en 1815 dans son Mémoire sur les surfaces élastiques.

Examinons d'abord la théorie propre à Cauchy.

Fresnel, en communiquant à Cauchy ses propositions sur l'action que subit une molécule attirée ou repoussée par des centres fixes et très peu écartée de sa position d'équilibre, avait amené Cauchy à découvrir, par voie d'analogie, les Théorèmes qui régissent la distribution des pressions autour d'un point dans un milieu en équilibre. Cette idée d'analogie entre les formules de l'élasticité et les formules qui régissent l'équilibre d'un point soumis à des actions moléculaires émancipées de centres fixes domine les premières recherches de Cauchy¹⁾, celles sur lesquelles les travaux de Poisson n'ont pas exercé d'influence.

Dans un corps élastique, les forces étrangères sont liées aux pressions par les relations

$$\begin{aligned} p X &= \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} , \\ p Y &= \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} , \\ p Z &= \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} . \end{aligned}$$

Imaginons un point matériel de masse μ soumis aux actions moléculaires d'autres points m, m', m'' . Supposons qu'une force extérieure dont les composantes sont $\mu X, \mu Y, \mu Z$ l'écarte d'une très petite quantité (U, V, W) de sa position d'équilibre. Dans sa nouvelle position, les masses $m, m', m'' \dots$ exerceront sur lui des actions équivalentes aux trois forces $\mu \xi, \mu \eta, \mu \zeta$. Pour l'équilibre, nous devons avoir

$$\mu (X + \xi) = 0, \quad \mu (Y + \eta) = 0, \quad \mu (Z + \zeta) = 0.$$

¹⁾ Cauchy — Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle. (Anciens exercices. 3^e Année 1828 — Œuvres de Cauchy 2^e série T. VIII p. 227).

Supposons que nous puissions trouver six quantités $v_1, v_2, v_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ telles que l'on ait.

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z} + \mu \xi = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_3}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial \tau_1}{\partial z} + \mu \eta = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_2}{\partial x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z} + \mu \zeta = 0;$$

les équations d'équilibre deviendront :

$$\mu X = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \tau_3}{\partial y} + \frac{\partial \tau_2}{\partial z},$$

$$\mu Y = \frac{\partial \tau_3}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial \tau_1}{\partial z},$$

$$\mu Z = \frac{\partial \tau_2}{\partial x} + \frac{\partial \tau_1}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}.$$

Ces équations sont de même forme que celles qui doivent exister entre les forces extérieures et les pressions à l'intérieur d'un milieu isotrope; Cauchy admet donc, par voie d'analogie, que les pressions seront, à l'intérieur du milieu élastique, liées au déplacement d'un point par des équations de même forme que celles qui lient les quantités $v_1, v_2, v_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3$ aux quantités U, V, W . Il trouve ainsi que les quantités $N_1, N_2, N_3, T_1, T_2, T_3$ doivent être données par des égalités de la forme (4), mais où les deux coefficients A_{ij} et A_{ji} doivent être égaux entre eux, ce qui réduit à 21 le nombre des coefficients d'élasticité distincts.

À ce moment, Poisson publia à son tour sa théorie de l'élasticité⁽¹⁾ et Cauchy adopta immédiatement⁽²⁾ au moins dans ses points essentiels, la manière de voir de Poisson; c'est donc seulement du Mémoire de Poisson que nous allons nous occuper.

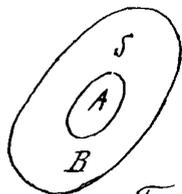
La théorie de Poisson repose sur une manière de concevoir les pressions à l'intérieur d'un corps qui est radicalement distincte de la notion qu'en a donnée Lagrange et que nous avons adoptée dans ce cours.

⁽¹⁾ Poisson — Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques lu à l'Académie des Sciences le 14 Avril 1828 — Un extrait de ce mémoire a été publié dans les Annales de Chimie et de Physique

⁽²⁾ Cauchy — De la pression ou tension dans un système de points matériels (Anciens exercices, 3^e Année 1828 — Œuvres de Cauchy 2^e Série T. VIII p. 253.

Pour Lagrange, les pressions sont les forces de liaison qu'il faut appliquer à une partie d'un corps pour en rétablir l'équilibre lorsque, sans supprimer aucune des forces données qui agissent sur cette partie, on supprime les obstacles que les parties avoisinantes du corps opposaient à son mouvement. Ces forces, purement fictives, représentent en réalité les coefficients que le calcul des variations introduit lorsqu'on veut exprimer qu'une modification virtuelle ne déforme aucun des éléments de volume du corps.

Nous avons souligné ces mots sans supprimer aucune des forces données qui agissent sur cette partie, car ils sont essentiels. Insistons sur leur signification. Dans un corps en équilibre, traçons une surface S (fig 72) dé-



coupant une partie A et laissant à l'extérieur une autre partie B du corps. La partie A est soumise à trois sortes de forces données. Les unes F_z proviennent de causes extérieures au corps ; les autres F_A proviennent des actions des diverses parties de A les unes sur les autres ; d'autres enfin F_B proviennent des actions que les diverses parties de B exercent sur les diverses parties de A . De plus, la partie A ne peut se déplacer sans déplacer ou déformer la partie B , d'où des liaisons.

Supposons la partie B du corps ; nous supprimerons à la fois les liaisons qui gênent le mouvement de la partie A et les forces F_B appliquées à la partie A . Imaginons que des corps étrangers C , non contigus à la partie A , et partant, incapables de gêner son mouvement soient introduits ; que ces corps C exercent sur la partie A des actions identiques aux actions F_B ; nous aurons supprimé les liaisons qui gênaient le mouvement de la partie A sans supprimer aucune des forces qui agissaient sur cette partie. Pour en rétablir l'équilibre, il faudra appliquer à la surface S des forces ; ce sont les pressions au sens que Lagrange donne à ce mot.

Il en est tout autrement pour Poisson.

À l'intérieur des corps, il n'existe pas de conditions de liaisons ; les corps sont formés de points matériels entièrement libres, comme les astres dans les cieux ; comme les astres, ils exercent les uns sur les autres des actions mutuelles dirigées suivant la droite qui les joint ; mais ces actions, au lieu de varier en raison inverse du carré de la distance, décroissent extrêmement vite lorsque la distance croît.

Prenons un tel système de points matériels en équilibre. Dans un semblable système traçons une surface S séparant les points du système en deux groupes : le groupe intérieur A et le groupe extérieur B . Si nous supprimons le groupe extérieur B et partant les actions moléculaires qu'ils exercent sur les

points A, ces derniers ne seront plus en équilibre. Pour rétablir l'équilibre, il faudra leur appliquer des forces qui seraient équivalentes à un système de forces appliquées à la surface S, si celle-ci et le groupe A formaient un solide rigide. Ces forces sont ce que Poisson nomme les pressions appliquées à la surface S. Ainsi: les pressions exercées sur une surface S tracée à l'intérieur d'un corps sont des forces qui, appliquées à cette surface supposée former un solide rigide avec les points matériels A qu'elle renferme, seraient équivalentes aux actions moléculaires que les autres points B du corps exercent sur les points A.

Il faut bien remarquer que l'idée nouvelle de Poisson n'est pas qu'il existe des attractions entre les divers éléments qui composent un corps. Déjà Newton⁽¹⁾ avait imaginé qu'à de très petites distances les diverses particules des corps exercent les unes sur les autres des forces données se réduisant en attractions ou répulsions mutuelles, proportionnelles au produit des masses des particules entre lesquelles elles agissent et fonctions de la distance qui sépare ces particules. C'est sur cette hypothèse que Clairaut, Séguier, Laplace et plus tard Gauss ont fondé la théorie de la capillarité. Cette théorie, déduite directement ou indirectement du principe des vitesses virtuelles, ne fait pas intervenir les forces de liaison, mais n'en nie pas l'existence; le rôle que les actions moléculaires y jouent comme forces données est parfaitement correct.

L'idée essentiellement neuve de Poisson, c'est la négation même des forces de liaison, et l'affirmation que le rôle attribué par Lagrange à ces forces doit, en réalité, être attribué aux attractions moléculaires.

C'est dans son Mémoire sur les Surfaces Elastiques⁽²⁾ que, pour la première fois, Poisson a fait usage de ce principe en définissant la tension d'une membrane. Mais, bientôt, il en poussa les conséquences dans toutes les branches de la Physique: en Elastique⁽²⁾, en Hydrostatique⁽³⁾ dans la théorie de la Capillarité⁽⁴⁾. Selon lui, cette innovation constitue une réforme capitale la Création d'une nouvelle Mécanique, la Mécanique Physique qui s'oppose à la Mécanique Analytique de Lagrange.

" Ajoutons, dit-il à la fin du préambule de son Mémoire sur les Corps Elastiques, qu'il serait à désirer que les géomètres reprissent

(1) Newton. — Optique Question 31.

(2) Poisson — Mémoire sur les Surfaces Elastiques, lu à l'Académie le 1^{er} Août 1814

(3) — " — — Mémoire sur l'Equilibre et le Mouvement des corps élastiques, lu à l'Académie le 14 Avril 1828.

(4) — " — — Mémoire sur l'Equilibre des fluides, lu à l'Acad. le 24 Novembre 1828.

(5) — " — — Nouvelle Théorie de l'action capillaire. Paris 1831.

sous ce point de vue physique et conforme à la nature les principales questions de la Mécanique. Il a fallu les traiter d'une manière tout à fait abstraite pour découvrir les lois générales de l'équilibre et du mouvement; et, en ce genre d'abstraction, Lagrange est allé aussi loin qu'on puisse le concevoir, lorsqu'il a remplacé les liens des corps par des équations entre les coordonnées de leurs différents points: c'est là ce qui constitue la Mécanique analytique; mais, à côté de cette admirable conception, on pourrait maintenant élever la Mécanique Physique, dont le principe unique serait de ramener tout aux actions moléculaires, qui transmettent d'un point à un autre l'action des forces données et sont l'intermédiaire de leur équilibre. De cette manière, on n'aurait plus d'hypothèses spéciales à faire lorsqu'on voudra appliquer les règles générales de la Mécanique à des questions particulières. Ainsi, dans le problème de l'équilibre des cordes flexibles, la tension qu'on introduit pour le résoudre sera le résultat immédiat des actions mutuelles des molécules, un tant soit peu écartées de leurs positions naturelles; dans le cas de la lame élastique, le moment d'élasticité par flexion proviendra de ces mêmes actions considérées dans toute l'épaisseur de la plaque, et son expression sera déterminée sans aucune hypothèse; enfin les pressions exercées par les fluides dans leur intérieur et sur les parois des vases qui les contiennent sont aussi les résultantes des actions de leurs moléculaires sur les surfaces pressées, ou plutôt sur une couche fluide extrêmement mince, en contact avec chaque surface.....))

En même temps que ce passage marque nettement en quoi les idées de Poisson diffèrent des idées de Lagrange, il nous marque nettement aussi en quoi elles se séparent de celles qui avaient tout d'abord inspiré Cauchy. Avant d'avoir subi l'influence des travaux de Poisson, Cauchy ne voyait, dans l'étude de l'attraction moléculaire qu'un moyen de découvrir, par voie d'analogie, la forme des équations de l'élasticité. Poisson, au contraire, y voit l'application véritable de la nature même des corps.

Ainsi, pour Poisson, il existe deux manières de concevoir la Mécanique: dans l'une, qui est celle des géomètres, les systèmes étudiés sont soumis seulement à des forces données extérieures et assujettis à des liaisons; dans l'autre, qui est celle des physiciens, les systèmes étudiés sont soumis à des forces données intérieures, ces dernières réductibles aux attractions moléculaires mais ils sont soustraits à toute liaison; les points qui les composent doivent être regardés comme libres; ces deux Mécaniques doivent être regardées comme équivalentes, mais la dernière pénètre bien plus profondément la nature même des choses. Pas une fois, Poisson ne semble même soupçonner

cette vérité que les attractions mutuelles des diverses parties des corps pourraient exister en même temps que ces particules opposeraient certains obstacles aux déplacements de celles qui leur sont contiguës.

On croirait volontiers qu'une semblable erreur ne peut être qu'une inadvertance, vite reconnue et corrigée; il n'en est rien. Non seulement Poisson la reproduit dans tous ses Mémoires sur les corps solides ou fluides, mais encore elle domine, comme nous l'avons vu au § III, les recherches de Fresnel sur la théorie de la double réfraction et Cauchy⁽¹⁾ l'a adoptée aussitôt qu'il l'a connue.

Non seulement les fondateurs de l'Elastique ont pris cette idée pour point de départ de leurs recherches, mais encore les plus éminents esprits qui ont traité de cette science l'ont adoptée et enseignée.

En parlant de la théorie de la capillarité de Poisson, Monsieur J. Bertrand⁽²⁾ dit:

« Il est bien vrai que, dans le fluide physique et compressible cette pression ne peut être distinguée de la résultante des actions moléculaires, et doit se calculer, comme Poisson l'a si souvent remarqué, au moyen de la fonction qui les représente. Mais, au point de vue abstrait auquel les géomètres se placent, cette pression forme une force à part, de la nature de celles que l'on introduit si souvent en Mécanique sous le nom de forces de liaison »

De Saint Venant, dont les travaux ont si fortement contribué aux progrès de la théorie de l'élasticité, n'a cessé de défendre la manière de voir de Poisson. Dans la traduction du Traité de Clebsch⁽³⁾, il consacre une longue note à la défense de cette manière de voir.

Dans son remarquable Traité de Mécanique Rationnelle⁽⁴⁾, M^e de Freycinet, suivant de tout près l'idée de Poisson, étudie parallèlement les systèmes qu'il nomme géométriques et les systèmes qu'il nomme dynamiques dont les différents points libres de tout lien, exercent les uns sur les autres des attractions ou des répulsions; il affirme que, dans la nature il n'y a que des systèmes dynamiques.

(1) Cauchy — De la pression ou tension dans un système de points matériels (Anciens exercices 3^e Année 1828 - Œuvres de Cauchy t. VIII p. 253)

(2) J. Bertrand — Journal de Liouville 1848.

(3) Clebsch — Théorie de l'élasticité des corps solides traduit par M. M. Barré de Saint Venant et Flamant, p. 63. Paris 1881.

(4) De Freycinet — Traité de mécanique rationnelle t. I. p. 240 Paris 1848.

Dans son livre récent sur la Mécanique⁽¹⁾, M^e Boussinesq conformément aux idées de Poisson et de M. de S^t-Venant, qui l'ont toujours guidé dans ses beaux travaux, ne parle pas une fois des forces de liaison, mais seulement des actions moléculaires.

Nous n'en finirions pas, si nous voulions citer tous les esprits éminents qui ont adopté la manière de voir de Poisson; ceux mêmes qui comme Green, comme Lamé, se sont fortement élevés contre certaines conséquences erronées de la théorie de Poisson, ne l'ont pas moins implicitement acceptée. Bien des doutes sur les principes de la théorie de l'élasticité ont assailli l'esprit de Lamé⁽²⁾, mais ils ne l'ont pas amené à découvrir et à rejeter l'erreur fondamentale que ces principes renfermaient. A notre connaissance, un seul physicien, depuis Lagrange, a été amené, par ses méditations sur la théorie que Poisson avait donnée de l'action capillaire, à reconnaître le vice essentiel de cette théorie; ce physicien est Quet⁽³⁾, qui a écrit:

« En effet, il n'y est tenu aucun compte des forces de liaison que l'on est pourtant obligé d'admettre si l'on veut que les liquides supposés incompressibles soient capables d'appuyer plus ou moins fortement leurs éléments les uns contre les autres et de transmettre les pressions à l'intérieur. La suppression de ces forces de liaison fait disparaître non seulement les phénomènes capillaires, mais aussi l'hydrostatique tout entière et l'Hydrodynamique, et il n'est pas besoin de calculs pour le voir. Sans elles, les conditions d'équilibre sont nécessairement incomplètes, et il y aurait lieu de s'étonner qu'on ne fût pas conduit à de flagrantes contradictions par une méthode qui ne tient pas compte de toutes les causes. »

En effet, l'idée de Poisson a conduit à énoncer bien des contradictions et a engendré bien des discussions. L'histoire de ces contradictions et de ces discussions nous semble contenir un utile enseignement. Bien des gens se refusent à accorder une valeur quelconque aux efforts de ceux qui cherchent à apporter, dans l'exposé des principes de la Mécanique et de la Physique, un peu de précision et de clarté. « A quoi bon, disent-ils, ces recherches subtiles, ces discussions épineuses? Peu importe que les fondements mêmes de la science restent troubles et vagues; le flair des physiciens leur permet d'appliquer avec sécurité des principes qu'ils seraient bien embarrassés d'énoncer

(1) Boussinesq — Leçons synthétiques de Mécanique Générale, Paris 1889.

(2) Lamé — Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications 20^e Leçon Paris 1859.

(3) Quet — Rapport sur les progrès de la capillarité. Paris, 1867.

avec précision ; ces principes doivent donc nous satisfaire, tout incertains qu'ils soient, puisqu'ils conduisent à des conséquences justes dans les applications, ce qui constitue le seul objet digne d'être poursuivi.))

Cependant le flair, disons mieux, le génie de Poisson et de Cauchy ne les a pas empêchés de déduire des principes inexacts qu'ils avaient adoptés des conséquences fausses dont la Physique ne s'est pas encore entièrement débarrassée.

Une seule de ces conséquences nous intéresse dans ce cours : c'est la suivante : l'étude du corps élastique le plus général exige la connaissance expérimentale seulement de quinze coefficients d'élasticité distincts, et non de vingt et un. Dans le cas des corps isotropes, un seul coefficient d'élasticité est à considérer, car les deux quantités λ et μ sont égales entre elles et les équations qui régissent les corps isotropes sont celles qu'avait données Navier.

Nous avons vu au § précédent les raisons qui doivent faire rejeter cette dernière conséquence.

§.V - Green reprend la méthode de Lagrange (1837) - Sir-W. Thomson la justifie par la Thermodynamique (1855).

Malgré la puissance des recherches auxquelles la théorie de l'élasticité avait donné lieu, une grande confusion régnait dans les résultats de cette théorie :

Le nombre des coefficients d'élasticité réellement distincts, dans le cas le plus général, est-il 36 ? Cauchy l'a supposé un instant, et dans sa théorie de l'élasticité des corps solides Lamé regarde cette hypothèse comme la seule certaine.

Est-il 21 ? C'est le nombre auquel Cauchy est parvenu d'abord par la théorie de l'attraction moléculaire et que Lamé regarde comme probable.

Est-il de 15 ? C'est le nombre que les idées de Poisson indiquent, que Cauchy et de St Venant ont finalement adopté.

Est-il même de 27 ? C'est ce que pense aujourd'hui M. Poincaré.

Pour les corps isotropes, doit-on laisser indépendantes les deux quantités λ et μ ? C'est ce que Cauchy a d'abord proposé, ce que Lamé a soutenu dans ses principaux écrits.

Doit-on les faire égales entre elles ? C'est l'idée de Navier de Poisson, de Cauchy, de Clebsch, de de St Venant.

Voilà certes un débat compliqué et qui vaut la peine d'être jugé ;

par quelle voie y parviendra-t-on ?

La cause du débat est dans la diversité des méthodes proposées pour introduire les forces de liaison dans l'étude des corps élastiques ; un moyen se présente d'éliminer la confusion causée par cette diversité ; c'est de faire usage pour établir les équations de l'équilibre d'élasticité du Principe des Vitesses virtuelles, où ne figurent les forces de liaison ; c'est de revenir aux idées et aux méthodes que Lagrange avait employées avec tant de bonheur dans sa Mécanique Analytique.

C'est ce que fit Green ⁽¹⁾.

Les forces intérieures à un corps élastique doivent admettre un Potentiel autrement, dit Green « le mouvement perpétuel serait possible ; et nous avons toute raison de penser que dans la nature, les forces sont disposées de manière à faire du mouvement perpétuel une impossibilité naturelle.

Pour un corps peu écarté de l'état naturel, ce potentiel doit être une somme de termes relatifs à chacun des éléments du corps ; chacun de ces termes doit être une fonction homogène et du second degré des six déformations ; c'est ce que Green établit sans aucune peine.

Donnant ensuite au corps une déformation virtuelle quelconque, il égale le travail virtuel des forces extérieures à la variation du potentiel des forces intérieures, et il obtient ainsi les conditions nécessaires et suffisantes pour l'équilibre d'un corps élastique peu déformé.

Les pressions à l'intérieur du corps, source des litiges auxquels donnait lieu la théorie de l'élasticité, n'ont pas apparu une seule fois dans cette analyse, bien voisine, comme on le voit, de celle qu'avait indiquée Navier dès les débuts de l'élasticité.

D'ailleurs, bien que Green ait tenu à ne pas faire intervenir les pressions à l'intérieur du corps, sa méthode est apte à servir à l'établissement des théorèmes généraux sur les pressions à l'intérieur d'un corps quelconque. Il suffit pour cela de l'appliquer en quelque sorte en deux temps, comme nous l'avons fait dans ce cours.

La méthode de Green tranche le débat auquel donnait lieu la théorie de l'élasticité : le nombre des coefficients d'élasticité réellement distincts est de 21 pour un corps quelconque et de 2 pour un corps isotrope.

⁽¹⁾ George Green — On the laws of the reflexion and refraction of light at the common surface of two non-crystallized media (Transactions of the Cambridge philosophical Society 1838 — présenté le 11 Décembre 1837) — Supplément au précédent Mémoire (Ibid. 1839) — On the propagation of light in crystallized Media (Ibid. 1839) — Voir aussi Mathematical Papers of the late George Green.

Le travail virtuel des forces extérieures appliquées à un corps élastique doit, pour l'équilibre de ce corps, être égal à la variation d'une certaine fonction uniforme de l'état du corps; tel est le point de départ de la théorie de Green. Green le justifie par l'impossibilité du mouvement perpétuel; il est naturel d'en chercher la justification dans la science que Sadi Carnot a fait sortir de l'impossibilité du mouvement perpétuel, dans la Thermodynamique; c'est ce qu'a fait Sir W. Thomson⁽¹⁾. La méthode suivie dans ce cours est en somme le développement des méthodes indiquées par Navier, par Green et par Sir W. Thomson, en application des principes posés par Lagrange.

Chapitre IV

Les petits mouvements des corps élastiques isotropes

§1 Equations des petits mouvements des corps élastiques isotropes.

Nous avons donné, au Chapitre II, les équations d'équilibre des corps isotropes peu déformés à partir de leur état naturel; si, de ces équations, nous voulons déduire les équations qui régissent les petits mouvements des mêmes corps, il nous suffira d'ajouter respectivement aux quantités

$$\rho X dv, \quad \rho Y dv, \quad \rho Z dv$$

qui représentent les composantes de la force extérieure appliquée à l'élément dv les quantités

$$-\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} dv, \quad -\rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} dv, \quad -\rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} dv,$$

qui représentent les composantes de la force d'inertie appliquée au même élément dv .

Cette opération n'altère pas la forme des équations qui doivent être vérifiées à tout instant en tous les points de la surface du corps [Chapitre II, Equations (12)]

⁽¹⁾ W. Thomson Quarterly journal of mathematics. Avril 1855 - Thomson et Gait. Treatise on natural Philosophy. part II. p. 461.

et qui demeurent .

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \left(\lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial U}{\partial x} \right) \cos(n_i, x) + \mu \left[G_3 \cos(n_i, y) + G_2 \cos(n_i, z) \right] + P \cos(P, x) = 0, \\ \left(\lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial V}{\partial x} \right) \cos(n_i, y) + \mu \left[G_1 \cos(n_i, z) + G_3 \cos(n_i, x) \right] + P \cos(P, y) = 0, \\ \left(\lambda \Theta + 2\mu \frac{\partial W}{\partial z} \right) \cos(n_i, z) + \mu \left[G_2 \cos(n_i, x) + G_1 \cos(n_i, y) \right] + P \cos(P, z) = 0. \end{array} \right.$$

avec
(2) $\Theta = D_1 + D_2 + D_3 = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z}$.

L'opération dont nous venons de parler altère seulement les équations aux dérivées partielles qui doivent être vérifiées en tous les points du corps isotrope ; voyons ce que deviennent ces équations, lorsque, pour simplifier, on suppose égales à 0 les forces extérieures appliquées à chacun des éléments de volume.

Si nous prenons les équations d'équilibre sous la forme (10) du Chapitre II, les équations du mouvement seront :

$$(3) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta U - \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \Delta V - \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \Delta W - \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \end{array} \right.$$

Si nous prenons au contraire les équations d'équilibre sous la forme (13) du Chapitre II, les équations du mouvement seront :

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] - \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] - \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \\ (\lambda + 2\mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] - \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \end{array} \right.$$

Les équations aux dérivées partielles qui régissent les petits mouvements des corps isotropes se présentent à nous sous deux formes distinctes et chacune de ces deux formes va nous servir à mettre en évidence une conclusion capitale.

Considérons d'abord les équations (3). Différentions la première par rapport à x , la seconde par rapport à y , la troisième par rapport à z , et ajoutons membre à membre : les résultats obtenus, en tenant compte de la définition de la quantité Θ donnée par les égalités (2).

Duhem (é. II) n° 34.

Nous trouvons sans peine l'égalité :

$$(5) \dots\dots\dots \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta \Theta = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2}$$

Nous savons que la quantité $\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$ est positive (Chapitre II, Inégalités (6 bis)). Nous pouvons donc poser

$$(6) \dots\dots\dots a^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$$

et écrire l'inégalité (5) sous la forme

$$(5 \text{ bis}) \dots\dots\dots a^2 \Delta \Theta = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2}$$

Ainsi, à l'intérieur d'un corps isotrope animé d'un petit mouvement, la dilatation cubique vérifie l'équation canonique des petits mouvements; si, à l'origine du temps, le mouvement est cantonné, à l'intérieur d'un corps isotrope illimité, dans une région très petite avoisinant le point O, à l'instant t, tous les points dont la densité diffère de la densité naturelle du corps, sont au voisinage d'une surface sphérique de centre O et de rayon at. La dilatation cubique se propage donc avec une vitesse

$$(6 \text{ bis}) \dots\dots\dots a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

Considérons maintenant les équations (4). Différencions la seconde par rapport à z, la troisième par rapport à y, et relierons membre à membre les résultats obtenus en tenant compte de la définition de Θ donnée par l'égalité (2). Nous obtiendrons la première des trois égalités :

$$(7) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu}{\rho} \Delta \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right), \\ \frac{\mu}{\rho} \Delta \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial z} \right), \\ \frac{\mu}{\rho} \Delta \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right). \end{array} \right.$$

Les deux autres s'obtiennent d'une manière analogue. La quantité μ est positive. Nous pouvons donc poser

$$(8) \dots\dots\dots A^2 = \frac{\mu}{\rho}$$

et nous voyons que chacune des trois composantes :

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right),$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right),$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right),$$

De la rotation en un point du corps résulte l'équation canonique des petits mouvements.

(7 bis) $\dots\dots\dots A^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$

Si le petit mouvement qui anime un milieu isotrope illimité est cantonné, à l'origine du temps, dans une région très petite voisine d'un point O, tous les éléments qui, au temps t, sont animés d'un mouvement tourbillonnaire se trouvent au voisinage d'une sphère de centre O et de rayon At. Le mouvement tourbillonnaire se propage donc avec une vitesse.

(8 bis) $\dots\dots\dots A = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$

Dans le cas où le corps isotrope est liquide, cette vitesse devient égale à 0. Dès lors, on arrive sans peine au Théorème suivant :

Dans un liquide, les mouvements tourbillonnaires infiniment petits ne se propagent pas. Si dans un liquide animé de mouvements infiniment petits, tous les tourbillons se trouvent à l'origine du temps à l'intérieur d'une certaine surface S, ils se trouvent à tout instant à l'intérieur de la même surface.

On aurait obtenu immédiatement cette proposition en appliquant aux mouvements infiniment petits d'un liquide les théorèmes généraux sur le mouvement des fluides qui ont été démontrés au Livre II, Chapitre VI.

Nous allons retrouver les deux propositions importantes que les équations (3) et (4) mettent immédiatement en évidence, par une voie différente, qui va consister à intégrer les équations (3).

§ II Transformation de Clebsch — Lemme sur lequel elle repose.

Nous avons vu [Livre II, Chapitre VII] que Poisson était arrivé à donner sous la forme d'une intégrale définie double l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles

$$a^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

qui régit les petits mouvements dans les fluides. De ce résultat, Poisson⁽¹⁾ en a déduit un

(1) Poisson — Mémoire sur la propagation du mouvement dans les milieux élastiques lu à l'Académie le 11 Octobre (Mémoires de l'Académie des Sciences et des Arts)

autre non moins important; il est parvenu à donner sous la forme d'intégrales définies doubles, les expressions de U, V, W qui intègrent les équations des petits mouvements dans un milieu élastique isotrope. Ostrogradski, cité par Poisson, a donné aux intégrales de Poisson une forme différente.

Clebsch⁽¹⁾ a indiqué une méthode à la fois rigoureuse et élégante pour retrouver les résultats obtenus par Poisson.

Cette méthode consiste à faire subir aux équations des petits mouvements dans les milieux isotropes une transformation qui en ramène immédiatement l'intégration à l'intégration d'équations aux dérivées partielles du type

$$a^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Nous allons exposer cette méthode de Clebsch.

Dans ce but, nous prendrons pour point de départ un Théorème de Jacobi déjà employé par M. Betti⁽²⁾ dans l'étude d'une question analogue relative à la théorie du magnétisme.

Ce théorème, que nous nous contenterons d'énoncer, est le suivant:

Si trois fonctions A, B, C , régulières dans un certain espace, y vérifient la relation

$$(9) \quad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0,$$

on peut toujours trouver deux fonctions λ et μ régulières dans le même espace, telles que l'on ait:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\partial \lambda}{\partial y} \frac{\partial \mu}{\partial z} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \frac{\partial \lambda}{\partial z}, \\ B = \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial z} \frac{\partial \lambda}{\partial x}, \\ C = \frac{\partial \lambda}{\partial x} \frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial x} \frac{\partial \lambda}{\partial y}. \end{array} \right.$$

Ce théorème se transforme de suite. Les égalités (10) peuvent en effet s'écrire:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial y} \right), \\ B &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial z} \right), \\ C &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial \mu}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

(1) Clebsch — Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche (Journal de Borchardt T. LXI)

(2) E. Betti — Théorie du Potentiel.

$$A = \lambda \frac{\partial \mu}{\partial x},$$

$$B = \lambda \frac{\partial \mu}{\partial y},$$

$$C = \lambda \frac{\partial \mu}{\partial z}.$$

et les égalités précédentes deviendront

$$(11) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}, \\ B = \frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x}, \\ C = \frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y}. \end{array} \right.$$

Ainsi, si trois fonctions A, B, C , régulières dans un certain espace, vérifient l'équation (9) en tout point de cet espace, on peut toujours trouver trois autres fonctions A, B, C , régulières dans ce même espace, telles que les fonctions A, B, C , puissent être exprimées par les égalités (11).

Réciproquement il est évident que si trois fonctions A, B, C sont régulières dans un certain espace, les trois fonctions A, B, C , définies par les égalités (11), sont régulières dans le même espace et y vérifient l'équation (9).

Cela posé, arrivons à la démonstration d'une proposition qui servira de lemme à la transformation de Clebsch.

Supposons que les trois fonctions A, B, C régulières en tous les points d'un espace et assujetties à vérifier l'équation (9) en tous les points de cet espace, y vérifient aussi les équations aux dérivées partielles

$$(12) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} a^2 \Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}, \\ a^2 \Delta B = \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}, \\ a^2 \Delta C = \frac{\partial^2 C}{\partial t^2}. \end{array} \right.$$

Considérons trois fonctions quelconques A, B, C , telles que l'on puisse écrire les égalités (11). De ces égalités (11), jointes aux égalités (12), on déduit sans peine les suivantes:

$$\left[\frac{\partial}{\partial y} \left(a^2 \Delta C - \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial z} \left[a^2 \Delta B - \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \right] = 0,$$

$$(13) \dots \dots \dots \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} \left[a^2 \Delta A - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[a^2 \Delta C - \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} \right] = 0, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[a^2 \Delta B - \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[a^2 \Delta A - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \right] = 0. \end{cases}$$

Ces équations nous montrent qu'il existe une fonction Φ , régulière dans l'espace considéré, telle que l'on puisse écrire

$$\begin{aligned} a^2 \Delta A - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \\ a^2 \Delta B - \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \\ a^2 \Delta C - \frac{\partial^2 C}{\partial t^2} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Admettons qu'il soit possible de former une fonction φ qui vérifie en tout point de l'espace considéré et pour toutes les valeurs de t , l'équation aux dérivées partielles

$$a^2 \Delta \varphi - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Phi.$$

Posons

$$A' = A - \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$B' = B - \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$C' = C - \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Les trois fonctions A' , B' , C' vérifieront les équations

$$(14) \dots \dots \dots \begin{cases} a^2 \Delta A' - \frac{\partial^2 A'}{\partial t^2} = 0, \\ a^2 \Delta B' - \frac{\partial^2 B'}{\partial t^2} = 0, \\ a^2 \Delta C' - \frac{\partial^2 C'}{\partial t^2} = 0. \end{cases}$$

et les équations (11) pourront s'écrire

$$(15) \dots \dots \dots \begin{cases} A = \frac{\partial C'}{\partial y} - \frac{\partial B'}{\partial z}, \\ B = \frac{\partial A'}{\partial z} - \frac{\partial C'}{\partial x}, \\ C = \frac{\partial B'}{\partial x} - \frac{\partial A'}{\partial y}. \end{cases}$$

Ainsi, si trois fonctions A, B, C , des variables x, y, z, t , vérifient en tous les

points d'un espace et pour tous les instants d'un certain laps de temps, les équations (9) et (12), ces trois fonctions peuvent toujours s'écrire sous la forme (15), A', B', C' , étant trois intégrales convenablement choisies de l'équation aux dérivées partielles

$$(14^{bis}) \quad a^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} .$$

Il est évident que, réciproquement, si A', B', C' sont trois intégrales quelconques de l'équation (14^{bis}) les fonctions A, B, C , définies par les égalités (15) sont aussi des intégrales de l'équation (14^{bis}) et qu'elles vérifient l'égalité

$$(2) \quad \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial C}{\partial z} = 0$$

C'est sur ce lemme que reposent non-seulement la transformation de Clebsch, mais encore toutes les méthodes proposées pour intégrer les équations des petits mouvements des corps isotropes.

§. III - Transformation de Clebsch; démonstration de sa légitimité.

Abordons maintenant l'étude de la transformation de Clebsch et démontrons en la légitimité.

Prends pour point de départ les équations (3):

$$(3) \quad \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta U - \rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \Delta V - \rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = 0, \\ (\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \Delta W - \rho \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \end{array} \right.$$

Prends une intégrale quelconque de l'équation

$$\Delta P = \Theta$$

Il est toujours facile de former une telle fonction P ; il suffit, par exemple, de prendre la fonction

$$P = - \frac{1}{4\pi} \int \frac{\Theta}{r} dv .$$

où dv est un élément de l'espace que l'on considère, Θ la valeur de la dilatation cubique en un point de cet élément, r la distance de cet élément au point auquel se rapporte la fonction P . Posons

$$(16) \quad \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} U = \frac{\partial P}{\partial x} + U', \\ V = \frac{\partial P}{\partial y} + V', \\ W = \frac{\partial P}{\partial z} + W'. \end{array} \right.$$

En différentiant la première de ces égalités par rapport à x , la seconde par rapport à y et la troisième par rapport à z , et en ajoutant membre à membre les résultats obtenus, nous trouvons que les fonctions U, V, W , vérifient l'égalité

$$(17) \dots \dots \dots \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0.$$

Moyennant les égalités (16), les égalités (3) deviennent :

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + \mu \Delta U' + \mu \frac{\partial}{\partial x} \Delta P - \rho \frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial y} + \mu \Delta V' + \mu \frac{\partial}{\partial y} \Delta P - \rho \frac{\partial^2 V'}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \Theta}{\partial z} + \mu \Delta W' + \mu \frac{\partial}{\partial z} \Delta P - \rho \frac{\partial^2 W'}{\partial t^2} - \rho \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = 0.$$

Si l'on remarque maintenant que l'on a :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \Delta P,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \Delta P,$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \Delta P$$

et si l'on pose

$$(18) \dots \dots \dots \Omega = (\lambda + 2\mu) \Delta P - \rho \frac{\partial^2 P}{\partial t^2},$$

les égalités précédentes deviendront :

$$(19) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} \mu \Delta U' - \rho \frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} = -\frac{\partial \Omega}{\partial x}, \\ \mu \Delta V' - \rho \frac{\partial^2 V'}{\partial t^2} = -\frac{\partial \Omega}{\partial y}, \\ \mu \Delta W' - \rho \frac{\partial^2 W'}{\partial t^2} = -\frac{\partial \Omega}{\partial z}. \end{array} \right.$$

L'égalité (18) peut s'écrire :

$$\Omega = (\lambda + 2\mu) \Theta - \rho \frac{\partial^2 P}{\partial t^2}.$$

On en déduit

$$\Delta \Omega = (\lambda + 2\mu) \Delta \Theta - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta P$$

$$= (\lambda + 2\mu) \Delta \Theta - \rho \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2},$$

ou bien, à cause de l'égalité (5),

$$(20) \dots \dots \dots \Delta \Omega = 0.$$

Soit q une fonction qui intègre l'équation

$$\rho \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = -\Omega.$$

On aura évidemment, en vertu de l'égalité (20),

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \Delta q = 0,$$

ou

A et B étant deux fonctions dépendantes d' x, y, z et indépendantes de t .
Posons

$$a = \frac{1}{4\pi} \int \frac{A}{r} dv,$$

$$b = \frac{1}{4\pi} \int \frac{B}{r} dv,$$

Nous aurons

$$\Delta a = -A,$$

$$\Delta b = -B.$$

Si nous posons alors

$$Q = q + at + b,$$

nous voyons que cette fonction Q vérifiera à la fois les deux égalités:

$$(21) \dots \dots \dots \begin{cases} \rho \frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = -\Omega \\ \Delta Q = 0. \end{cases}$$

Posons:

$$(22) \dots \dots \dots U'' = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad V'' = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad W'' = \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Les égalités (19) deviendront, en vertu des égalités (21),

$$(23) \dots \dots \dots \begin{cases} \mu \Delta (U' - U'') - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (U' - U'') = 0, \\ \mu \Delta (V' - V'') - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (V' - V'') = 0, \\ \mu \Delta (W' - W'') - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (W' - W'') = 0 \end{cases}$$

Les égalités (22) jointes à la somme des égalités (21), donnent

$$\frac{\partial U''}{\partial x} + \frac{\partial V''}{\partial y} + \frac{\partial W''}{\partial z} = 0,$$

égalité qui, jointe à l'égalité (17), donne

$$(24) \dots \dots \dots \frac{\partial (U' - U'')}{\partial x} + \frac{\partial (U' - U'')}{\partial y} + \frac{\partial (U' - U'')}{\partial z} = 0.$$

L'égalité (18) peut s'écrire, en vertu des égalités (21),

$$(25) \dots \dots \dots (\lambda + 2\mu) \Delta (P + Q) - \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} (P + Q) = 0.$$

Enfin, en vertu des égalités (22), les égalités (16) peuvent s'écrire:

$$(26) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} U = \frac{\partial}{\partial x} (P+Q) + U' - U'', \\ V = \frac{\partial}{\partial y} (P+Q) + V' - V'', \\ W = \frac{\partial}{\partial z} (P+Q) + W' - W'', \end{array} \right.$$

Posons

$$\pi = P+Q, \\ u = U' - U'', \quad v = V' - V'', \quad w = W' - W''$$

et nous arrivons à la conclusion suivante:

Si, U, V, W représentent une intégrale des équations des petits mouvements d'un milieu isotrope, on peut toujours écrire:

$$(26 \text{ bis}) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} U = \frac{\partial \pi}{\partial x} + u, \\ V = \frac{\partial \pi}{\partial y} + v, \\ W = \frac{\partial \pi}{\partial z} + w, \end{array} \right.$$

π étant une fonction qui vérifie l'équation

$$(25 \text{ bis}) \dots\dots\dots \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta \pi = \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2}$$

et u, v, w trois fonctions qui vérifient les équations

$$(23 \text{ bis}) \dots\dots\dots \left\{ \begin{array}{l} \frac{\mu}{\rho} \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\mu}{\rho} \Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\mu}{\rho} \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \end{array} \right.$$

et

$$(24 \text{ bis}) \dots\dots\dots \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Il est facile de vérifier que, réciproquement, trois fonctions U, V, W , constituées comme nous venons de l'indiquer, forment toujours une intégrale des équations des petits mouvements des corps isotropes.

Il suffit maintenant d'appliquer aux trois fonctions u, v, w , le lemme démontré au § précédent, pour parvenir au théorème dont voici l'énoncé:

Soit π une intégrale de l'équation

$$a^2 \Delta \pi = \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2}$$

et U, V, W , trois intégrales de l'équation

$$A^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

La forme la plus générale d'une intégrale des équations des petits mouvements au sein d'un corps isotrope s'obtient en posant :

$$(27) \dots \dots \dots \begin{cases} U = \frac{\partial \pi}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}, \\ V = \frac{\partial \pi}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x}, \\ W = \frac{\partial \pi}{\partial z} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}. \end{cases}$$

Celle est la transformation de Clebsch ; elle ramène, on le voit, la recherche de l'intégrale générale des équations des petits mouvements des corps isotropes à l'intégration de deux équations

$$a^2 \Delta \pi = \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2}, \quad A^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

§.V. Propagation d'un petit mouvement dans un corps isotrope.

Si nous posons :

$$(28) \dots \dots \dots U_1 = \frac{\partial \pi}{\partial x}, \quad V_1 = \frac{\partial \pi}{\partial y}, \quad W_1 = \frac{\partial \pi}{\partial z},$$

$$(29) \dots \dots \dots \begin{cases} U_2 = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial z}, \\ V_2 = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial x}, \\ W_2 = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}, \end{cases}$$

les égalités (27) deviendront

$$U = U_1 + U_2, \quad V = V_1 + V_2, \quad W = W_1 + W_2$$

Ces égalités nous montrent qu'un petit mouvement quelconque d'un corps isotrope peut toujours être regardé comme résultant de la composition de deux autres petits mouvements, définis respectivement par les équations (28) et (29). Étudions séparément ces deux espèces de mouvements

1° Étude du mouvement représenté par les équations (28) — Le mouvement représenté par les équations (28) admet un Potentiel des Vitesses $(-\frac{d\pi}{dt})$ et ce Potentiel vérifie l'équation

$$a^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}$$

Ce mouvement nous est donc bien connu. Il est semblable à celui qui peut se produire dans un fluide.

Ce mouvement se propage avec une vitesse constante :

$$(6 \text{ bis}) \dots\dots\dots a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

S'il est engendré dans un milieu illimité par une sphère de centre fixe et de rayon variable, il se propage par ondes sphériques auxquelles sont applicables tous les Théorèmes démontrés au Livre II Chapitre XII. La vitesse de chaque point est, à chaque instant, normale à l'onde sphérique qui passe par ce point. Le mouvement en question est alors ce que nous nommerons un mouvement longitudinal.

Il est accompagné d'une dilatation du milieu, dilatation qui a pour

$$\text{valeur} \dots\dots\dots (30) \dots\dots\dots \textcircled{4} = \frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z} = \Delta \pi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial t^2}.$$

2° Étude du mouvement représenté par les équations (29). — Si l'on remarque que chacune des trois quantités U, V, W est une intégrale de l'équation

$$A^2 \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

on voit que les équations (29) représentent un mouvement qui se propage avec une vitesse constante

$$(8 \text{ bis}) \dots\dots\dots A = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

Ce mouvement ne fait subir aucune variation à la densité du milieu, car on a

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial W_2}{\partial z} = 0,$$

mais il est accompagné d'une rotation.

Les composantes de la rotation sont :

$$\alpha = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W_2}{\partial y} - \frac{\partial V_2}{\partial z} \right),$$

$$\beta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_2}{\partial z} - \frac{\partial W_2}{\partial x} \right),$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_2}{\partial x} - \frac{\partial U_2}{\partial y} \right).$$

En vertu des égalités (29) la première de ces égalités donne

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) - \Delta U. \end{aligned}$$

On a donc, pour déterminer les composantes de la rotation, les égalités

$$(31) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} 2\alpha = \frac{\partial H}{\partial x} - \Delta \mathcal{U}, \\ 2\beta = \frac{\partial H}{\partial y} - \Delta \mathcal{V}, \\ 2\gamma = \frac{\partial H}{\partial z} - \Delta \mathcal{W}, \end{array} \right.$$

avec

$$(32) \dots \dots \dots H = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z}.$$

Imaginons, en particulier, que le mouvement se propage par ondes sphériques ayant pour centre le point O . Soit r la distance OM du point O à un point arbitraire $M(x, y, z)$ du milieu. Les trois quantités \mathcal{U} , \mathcal{V} , \mathcal{W} seront trois fonctions de r et de t et les égalités (29) pourront s'écrire :

$$U_2 = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial z} \cos(r, y) - \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} \cos(r, z),$$

$$V_2 = \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} \cos(r, z) - \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial r} \cos(r, x),$$

$$W_2 = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial r} \cos(r, x) - \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial r} \cos(r, y).$$

De ces égalités on déduit immédiatement

$$U_2 \cos(r, x) + V_2 \cos(r, y) + W_2 \cos(r, z) = 0$$

Cette égalité montre que, lorsqu'un mouvement représenté par les équations (29) se propage dans un milieu sous forme d'ondes sphériques, la trajectoire de chaque point est tangente à l'onde.

Le mouvement représenté par les équations (29) est ce que nous nommerons un mouvement transversal.

Résumons les résultats de cette étude

Si l'on ébranle une certaine région d'un milieu isotrope, l'ébranlement se partage de suite en deux autres.

Le premier ne communique aux divers éléments aucun mouvement tourbillonnaire, mais il en fait varier la densité. Dans le cas où la propagation se fait par ondes sphériques, chaque point matériel est animé d'un mouvement normal à l'onde.

Il se propage avec la vitesse

$$a = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}.$$

Le second ne fait pas varier la densité des divers éléments du milieu, mais il leur communique un mouvement tourbillonnaire. Dans le cas où la propagation se fait par ondes sphériques, chaque point est animé d'un mouvement

tangent à l'onde.

Il se propage avec la vitesse

$$A = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} .$$

Dans ces résultats sont compris ceux que nous avons déjà trouvés au §1. Nous savons que μ est positif, ce qui nous permet d'écrire :

$$4\mu > 3\mu .$$

Nous savons aussi que l'on a

$$3\lambda + 2\mu > 0 .$$

Ces deux inégalités nous donnent :

$$3(\lambda + 2\mu) > 3\mu ,$$

ou

$$\lambda + 2\mu > \mu .$$

Donc, pour tous les corps isotropes, les mouvements longitudinaux ont une plus grande vitesse de propagation que les mouvements transversaux.

Pour les liquides, la quantité μ est égale à 0. Les mouvements transversaux ont une vitesse de propagation égale à 0. Si, à une certaine époque, ces mouvements sont cantonnés dans une certaine région du liquide, ils y demeureront cantonnés à toute époque. Ce théorème est d'accord avec les propositions générales sur les mouvements tourbillonnaires.

Si un corps est supposé incompressible, la quantité $(3\lambda + 2\mu)$ est infinie, la quantité μ étant positive pour tous les solides isotropes et nulle pour les liquides, la quantité $(3\lambda + 6\mu)$ est aussi infinie, et par conséquent, il en est de même de la quantité $(\lambda + 2\mu)$. Donc, au sein d'un milieu incompressible, les mouvements longitudinaux ont une vitesse de propagation infinie.

Cette proposition s'interprète aisément, grâce à la remarque suivante :

Si le milieu est incompressible, la dilatation cubique doit être égale à 0; on doit avoir

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} + \frac{\partial V_1}{\partial y} + \frac{\partial W_1}{\partial z} = 0 ,$$

ou bien

$$\Delta \pi = 0 .$$

Le Potentiel des Vitesses des mouvements longitudinaux est donc une fonction harmonique. Dès lors, comme nous l'avons expliqué au Livre II, Chapitre IX, §1, la notion même de vitesse de propagation disparaît.

La quantité $(3\lambda + 2\mu)$ étant infinie, il en résulte bien que la quantité $(\lambda + 2\mu)$ est infinie, mais non pas que la quantité μ cesse d'être finie. Dans le cas d'un liquide incompressible, la quantité μ est égale à 0.

Considérons un solide incompressible. Pour un tel corps, $(3\lambda + 2\mu)$ est infini, mais μ est fini et positif. Les mouvements transversaux sont les seuls

auxquels, dans un semblable milieu, on puisse appliquer la notion de propagation. Leur vitesse de propagation est

$$A = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}.$$

La théorie donnée par Fresnel pour expliquer les phénomènes lumineux dans les corps isotropes assimilent l'éther à un semblable corps.

Livre V

L'Acoustique.

Chapitre 1.

Notions sur l'Anatomie de l'Oreille.

S.1. Disposition générale des principales parties de l'Oreille.

Le son, nous le savons par les expériences les plus élémentaires, a pour cause des mouvements très petits des corps qui nous entourent; nous avons étudié les petits mouvements des principales classes de corps employés en musique. Deux classes de corps sonores seulement sont restées hors de notre étude, qui, sans cette omission été trop longue: ce sont les lignes élastiques ou verges et les plaques.

Il nous reste maintenant à examiner des questions d'un autre ordre que celles que nous avons traitées jusqu'ici; ce sont ces questions qui constituent à proprement parler l'Acoustique.

Voici en quoi consistent ces questions:

Étant donnée une sensation sonore, expliquer à quelle particularité du mouvement du corps sonore est due cette sensation, et de quelle manière

le mouvement qui en est la cause affecte les terminaisons nerveuses.

L'examen de ces questions exige non seulement la connaissance des propriétés des corps sonores, mais encore la connaissance des dispositions anatomiques de l'organe qui sert à recueillir les sensations sonores, c'est-à-dire de l'oreille.

C'est à l'examen de la structure anatomique de l'oreille humaine que sera consacré le présent Chapitre.

L'oreille humaine est divisée très naturellement par les anatomistes en trois parties : l'oreille externe, l'oreille moyenne, l'oreille interne. Toutes ces parties, sauf le pavillon auditif, sont formées de cavités creusées à l'intérieur d'une apophyse de l'os temporal, le rocher.

L'oreille externe se compose du pavillon auditif et du conduit auditif. Elle est séparée de l'oreille moyenne par une membrane conjonctive, le tympan.

L'oreille moyenne est une cavité de forme irrégulière, séparée de l'oreille externe par une membrane conjonctive, la membrane du tympan, et de l'oreille interne, par deux autres membranes conjonctives analogues dont chacune ferme une ouverture : ces deux ouvertures portent le nom de fenêtre ronde et de fenêtre ovale.

Un conduit, connu sous le nom de trompe d'Eustache, met l'oreille moyenne en communication avec le pharynx, et maintient la pression de l'air dans le vestibule égale à la pression extérieure.

De la membrane du tympan à la fenêtre ovale s'étend une chaîne de quatre osselets, auxquels leur forme a fait donner les noms de marteau, d'enclume, de lenticulaire et d'étrier.

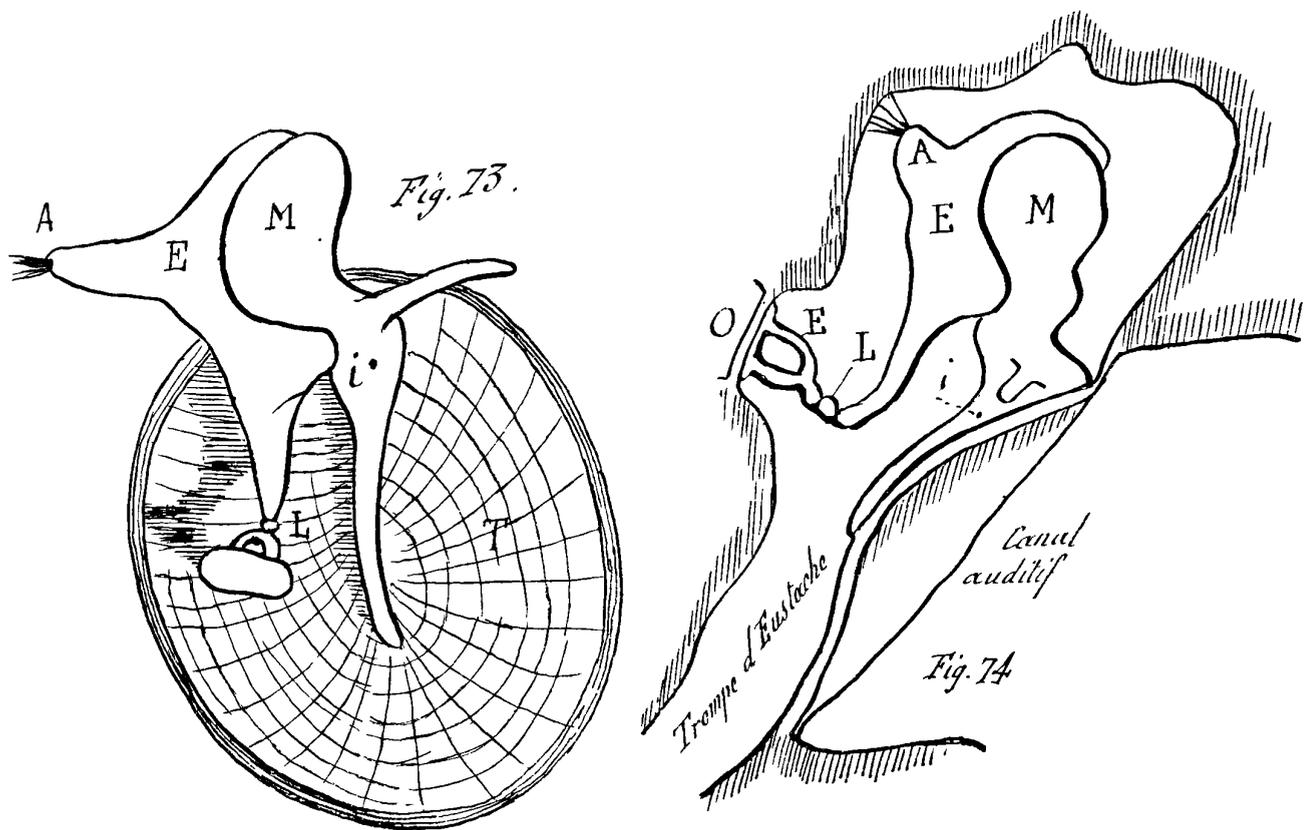
Le marteau est fixé à la membrane du tympan. L'enclume présente une cavité dans laquelle s'emboîte la tête du marteau. Une apophyse de l'enclume est reliée aux parois du vestibule. Une autre apophyse de l'enclume se relie par l'osselet lenticulaire à l'étrier dont la base s'appuie sur la fenêtre ovale.

Les figures 73 et 74 montrent la configuration de la chaîne des osselets, que la première représente vue de face et la seconde vue de profil. Dans ces figures, T est la membrane du tympan, M le marteau, E l'enclume, A le point où l'enclume s'attache aux parois du vestibule, L le lenticulaire, E l'étrier, O la fenêtre ovale.

La chaîne des osselets est soumise à l'action d'un muscle, le muscle tenseur du tympan qui vient s'insérer en un point i du marteau.

La chaîne des osselets semble avoir deux fonctions :

1^o Transmettre à l'oreille interne les vibrations venues du dehors; le jeu



du muscle tenseur du tympan permet à la chaire de se tendre plus ou moins et, par conséquent, de transmettre les sons avec plus ou moins d'intensité, rendant ainsi perceptibles les sons peu intenses et assourdisant les sons trop intenses.

2° Étouffer les vibrations propres de la membrane du tympan, de manière que les sons de différentes hauteurs soient transmis sans grande inégalité à l'oreille interne.

Nous verrons que M. H. von Helmholtz attribue à la chaire des osselets un rôle important dans la formation des sons résultants.

L'oreille interne, que sa forme compliquée fait encore nommer labyrinthe, se compose de trois parties: le vestibule, les canaux semi-circulaires et le limaçon. Toutes ces parties sont remplies non pas d'air comme l'oreille moyenne, mais d'un liquide dans lequel flottent de petites particules solides connues sous le nom d'otolithes.

Les otolithes sont du carbonate de chaux qui se présente soit en granules amorphes, soit en petits cristaux d'aragonite. Un court épithélium cylindrique tapisse les parois de l'oreille interne.

Le vestibule se compose de deux parties: l'Uttricule ronde et l'Uttricule elliptique qui communiquent l'une avec l'autre.

L'utricule elliptique est séparé de l'oreille moyenne par la fenêtre

Duhem (611) n.° 36.

ovale. Dans cette utricule, trois canaux semi-circulaires, en forme d'arc de panier, viennent déboucher par leurs deux extrémités. Les orifices de ces canaux dans l'utricule elliptique sont au nombre de cinq et non de six, car un même orifice sert à deux des canaux.

Les canaux semi-circulaires sont tracés sensiblement dans les trois faces d'un trièdre trirectangle, ce qui a porté certains physiologistes à leur attribuer d'étranges relations avec le sens de l'espace.

Chacun de ces canaux porte à sa base un renflement ou ampoule auditive.

Dans ces ampoules auditives se trouvent des terminaisons nerveuses; ce sont des cellules en forme de bouteille (fig 75 a) où pénètre le cylindre axile d'un filament nerveux et que termine un long batonnet filiforme. Ces cellules, entremêlées de longues cellules épithéliales cylindriques (fig 75 b), forment, à l'intérieur des ampoules auditives, un revêtement continu. La fig 76 représente la coupe d'une de ces ampoules.

Les batonnets qui terminent les cellules auditives sont éminemment aptes à subir le choc des otolithes mis en mouvement par les vibrations sonores.

La figure 77 donne une idée de la disposition des parties que nous venons de décrire. O est la fenêtre ovale; UR, l'utricule ronde; UE, l'utricule elliptique; CS les canaux semi-circulaires; A les ampoules auditives CR est le canalis reuniens qui met le vestibule en communication avec le canal cochléaire du limaçon.

L'importance du limaçon en acoustique nous oblige à en faire une description spéciale.

§. II Description spéciale du limaçon.

Le limaçon a la forme de la coquille dont il porte le nom. Si nous faisons une coupe du canal enroulé en spirale qui le forme, cette coupe présentera l'aspect de la figure 78.

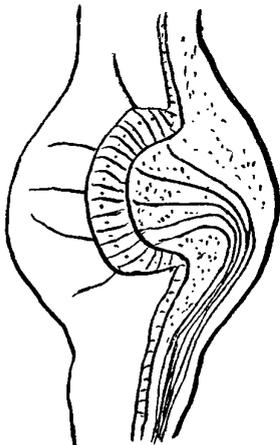
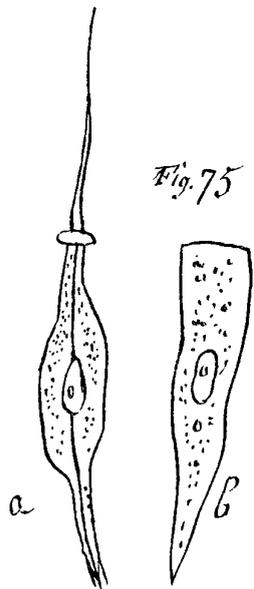


Fig. 76.

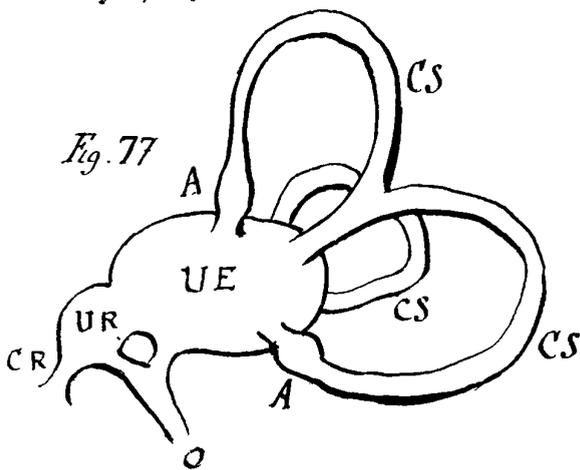


Fig. 77

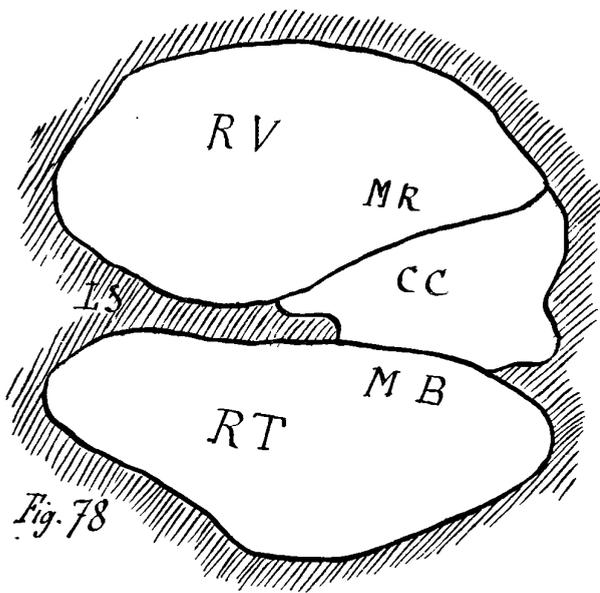


Fig. 78

elle vient s'appuyer sur la fenêtre ronde. On lui donne le nom de rampe tympanique (RT).

Une seconde rampe, à section triangulaire, a pour plancher la membrane basilaire et pour plafond la membrane de Reissner. À l'orifice du limaçon, elle s'ouvre dans le vestibule. On lui donne le nom de canal cochléaire (CC).

Une troisième rampe a pour plancher la lame spirale et la membrane de Reissner. On lui donne le nom de rampe vestibulaire (RV).

Le canal cochléaire et la rampe vestibulaire communiquent avec l'utricule ronde par le canalis reuniens.

Les trois rampes sont mises en communication les unes avec les autres, au sommet du limaçon, par un petit orifice nommé helicotrema.

C'est dans le canal cochléaire, reposant sur la membrane basilaire que se trouve un organe compliqué nommé organe de Corti. Cette organe, dont les propriétés jouent un rôle fondamental dans l'Acoustique physiologique, va retenir quelques temps notre attention.

La membrane basilaire est formée de fibres conjonctives transversales qui sont naturellement d'autant plus longues qu'elles sont plus voisines de la base du limaçon et d'autant plus courtes qu'elles sont plus voisines du sommet. Elles sont comparables aux cordes d'un piano. Le nombre de ces fibres est très grand. Les uns l'évaluent à 6000, les autres à 1300.

Cette membrane porte une sorte de voûte conjonctive, formée par deux séries de piliers, nommés piliers de Corti, qui s'appuient les uns sur les autres, par leur extrémité supérieure.

De la columelle, s'avance, dans la cavité du limaçon, une crête osseuse la lame spirale (LS) qui s'arrête avant d'avoir atteint le bord opposé. De la marge de cette crête, deux membranes s'étendent jusqu'au bord opposé: ce sont la membrane basilaire (MB) et la membrane de Reissner (MR).

Ces deux membranes partagent ainsi le canal qui forme le limaçon en trois rampes:

Une première rampe a pour plafond la lame spirale osseuse et la membrane basilaire. À l'orifice du limaçon,

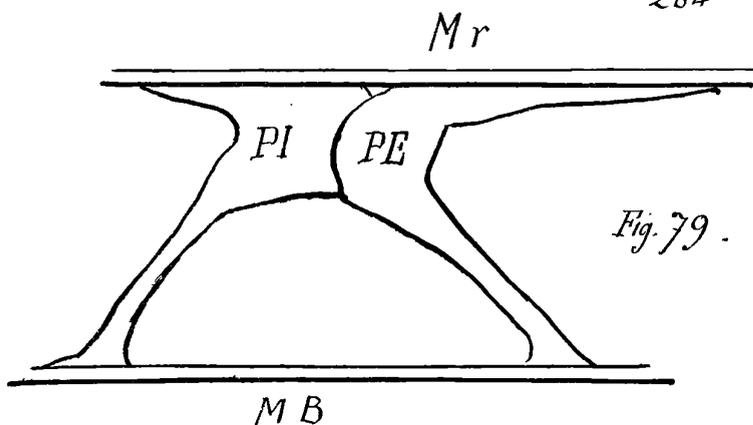
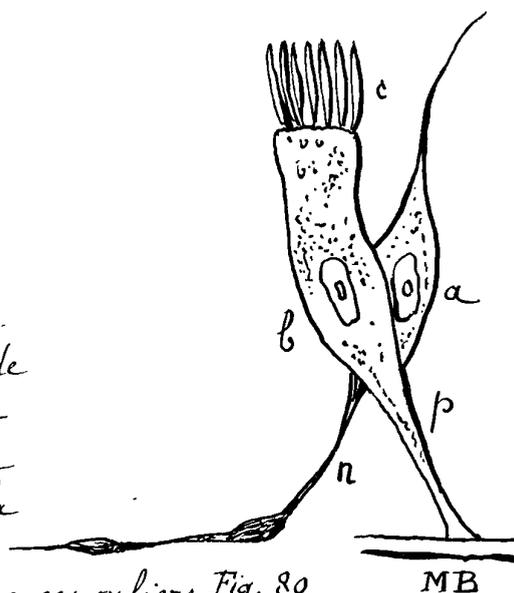


Fig. 79.



La figure 79 montre comment sont disposés un pilier de Corti interne (PI) et le pilier de Corti externe (PE) correspondant. Ces piliers forment une voûte. On donne le nom de rampe de Corti au canal qui a cette voûte pour plafond et la membrane basilaire pour plancher.

La membrane réticulaire (MR) recouvre ces piliers. Fig. 80

Des cellules nerveuses terminales sont distribuées au-dessus de la membrane basilaire, et en dehors de la voûte de Corti. Il y en a une rangée à

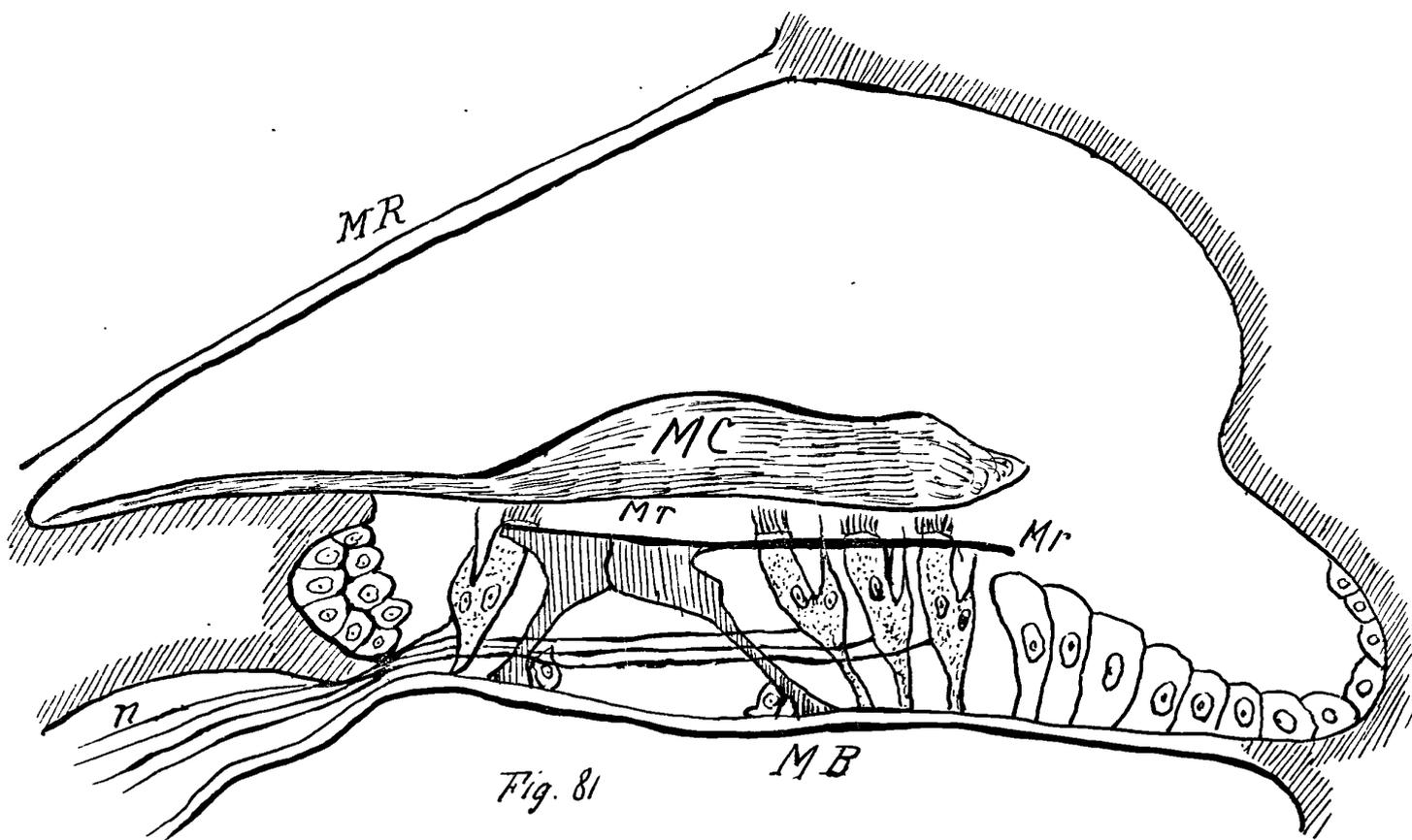


Fig. 81

l'intérieur du pilier interne, et trois rangées à l'extérieur du pilier externe.

Ces cellules portent le nom de cellules jumelles; chacune d'elles se montre en effet, à un examen attentif, comme formée de deux cellules soudées. L'une à l'autre (fig 80) L'une d'elles, a, porte un long bâtonnet filiforme. L'autre, b, est en rapport par sa partie inférieure P avec une des fibres de la membrane basilaire. Elle est en communication avec un filet nerveux provenant du nerf cochléaire n. Son extrémité supérieure porte un certain nombre de bâtonnets en forme de cils courts.

La membrane réticulaire (Mr) s'appuie sur ces cellules qui passent entre ses mailles leurs extrémités. Au dessus de l'organe dont nous venons de décrire les parties essentielles s'étend une membrane conjonctive épaisse, destinée sans doute à servir d'étouffoir, la membrane de Corti.

La figure 81 représente la disposition des diverses parties que nous venons de décrire. On y voit la membrane Basilaire (MB), la membrane de Reissner (MR) et la membrane de Corti (MC). On y voit également la disposition des piliers de Corti, des cellules jumelles et du nerf cochléaire n.

Le limaçon existe chez tous les vertébrés qui respirent dans l'air; il apparaît en même temps que la voix et le développement du limaçon est en général proportionné au développement de la voix. Ainsi le limaçon est plus développé chez les oiseaux chanteurs que chez les autres espèces.

Les oiseaux ne possèdent pas de piliers de Corti. Nous verrons plus loin que cette remarque a une certaine importance pour la discussion des idées émises au sujet de l'organe qui nous permet de percevoir la hauteur des sons.

Chapitre II.

Le Timbre des Sons.

§.1. Éléments auxquels se réduit toute sensation sonore.

L'étude anatomique de l'oreille humaine nous a montré l'existence de deux sortes de terminaisons nerveuses employées au sens de l'audition: les

cellules à bâtonnets des ampoules auditives et les cellules jumelles de l'organe de Corti. On conçoit volontiers qu'à ces deux espèces de terminaisons nerveuses, constituant à proprement parler deux organes différents, correspondent deux classes bien différentes de sensations sonores.

Toutes nos sensations sonores devront alors se réduire à des combinaisons de ces sensations élémentaires.

Cherchons à débrouiller quel doit être le caractère propre de chacune de ces sensations élémentaires.

Si un petit mouvement quelconque agite l'air extérieur, ce petit mouvement doit être transmis par la chaîne des osselets au liquide qui remplit l'oreille interne. Les otolithes que renferment ce liquide doivent servir imprimer des secousses aux bâtonnets des cellules nerveuses que renferment les ampoules auditives; ces secousses seront évidemment d'autant plus fortes que le petit mouvement sera de plus grande amplitude.

Les ampoules auditives paraissent donc propres à exciter en nous une sensation dont la nature soit toujours la même, mais dont l'intensité puisse être plus ou moins grande. Cette sensation simple serait la sensation d'un bruit, toujours semblable, mais plus ou moins intense.

Cette sensation sonore élémentaire existerait seule chez une foule d'animaux qui ne possèdent pas d'autres terminaisons nerveuses auditives que les terminaisons des ampoules, ou d'organes analogues aux ampoules mais complètement clos (otocystes) que l'on trouve dans les tissus de beaucoup d'animaux inférieurs.

Les cellules jumelles de l'organe de Corti, que l'on voit apparaître, en même temps que la voix, chez les Vertébrés aériens, doivent présider à des sensations d'un autre ordre. Leur disposition paraît les rendre propres à exciter en nous la sensation de hauteur et d'intensité d'un son simple.

Imaginons en effet que l'on émette un certain son simple, et que, parmi les nombreuses fibres de la membrane basilaire, il en existe une ayant ce son pour son propre. Cette fibre va résonner; elle prendra un mouvement sensible tandis que les autres fibres de la membrane basilaire ne prendront qu'un mouvement insensible.

Les cellules jumelles qui sont en contact avec cette fibre seront excitées et produiront en nous une sensation.

A chaque son simple correspondra une fibre déterminée de

la membrane basilaire ; l'émission de ce son excitera donc des cellules jumelles déterminées, variables avec la hauteur du son. Ainsi, deux sons simples de même hauteur, mais d'intensité différente, engendreront en nous, par l'intermédiaire de l'organe de Corti, des sensations de même nature, mais d'intensité différente. Deux sons simples de hauteur différente engendreront en nous des sensations essentiellement différentes.

L'organe de Corti est donc l'organe qui nous permet de percevoir la hauteur et l'intensité d'un son simple.

Le nombre des fibres de la membrane basilaire dépasse de beaucoup le nombre des sons simples que peut percevoir l'oreille la plus exercée; ce fait n'a rien de surprenant si l'on observe :

1° - Que chaque cellule jumelle est en relation avec deux ou trois fibres de la membrane basilaire;

2° - Qu'un son déterminé ne fait pas seulement vibrer une fibre de la membrane basilaire, mais encore les fibres voisines, qui adhèrent avec elle.

On voit en effet par là que, pour que les cellules jumelles excitées par deux sons voisins soient différentes et que l'on puisse, par conséquent, distinguer les sensations produites par ces deux sons, il faut que l'intervalle de ces deux sons soit plus grand que l'intervalle des sons propres de deux fibres basilaires consécutives.

Le rôle attribué ici aux fibres de la membrane basilaire avait été tout d'abord, attribué par M. H. von Helmholtz aux piliers de Corti. Mais les oiseaux ne présentent pas de piliers de Corti, et l'on ne peut leur refuser la perception de la hauteur des sons simples, puisque certains d'entre eux sont capables de reproduire les airs qu'on leur chante souvent. Aussi M. Hensen a-t-il proposé d'attribuer la résonance pour les divers sons simples aux fibres de la membrane basilaire. Cet avis a été adopté par M. H. von Helmholtz et par tous les physiologistes.

Ce que nous venons de dire montre que toutes nos perceptions sonores doivent se réduire aux éléments suivants :

1° - La perception d'un bruit, toujours de même nature, mais d'une intensité variable.

2° - La perception de la hauteur et de l'intensité des divers sons simples. Expliquer une particularité quelconque de nos sensations sonores, ce sera la réduire à une combinaison de ces perceptions élémentaires.

Dans les explications de ce genre, la première espèce de sensation ne jouera qu'un rôle obscur. C'est surtout aux éléments du second genre

que nous essayerons de réduire nos diverses notions musicales. Nous commencerons par la notion de timbre.

§ II Le timbre des sons — Théorie d' Helmholtz.

Le timbre est cette qualité par laquelle nous distinguons l'un de l'autre deux sons de même hauteur émis par deux instruments différents ou par deux voix différentes.

Comment ce caractère particulier des sensations sonores peut-il se ramener aux sensations élémentaires définies au paragraphe précédent?

On peut remarquer en premier lieu qu'un son émis par un instrument ou par la voix n'est jamais pur. Il est toujours accompagné de bruits qui s'expliquent, comme tous les bruits, par des petits mouvements trop courts ou trop complexes pour qu'on en puisse démêler le caractère musical. Ces bruits jouent certainement un rôle dans le caractère propre du son émis par un instrument. Mais, dans beaucoup de cas, ils sont assez faibles pour que l'on en puisse faire abstraction et cependant le caractère qui distingue les uns des autres des sons de même hauteur, mais de provenance différente, n'en persiste pas moins.

Ohm et surtout Helmholtz ont fourni une théorie, aujourd'hui universellement admise, de la sensation de timbre; c'est cette théorie que nous allons exposer.

Considérons un mouvement vibratoire, de période T , agitant le liquide de l'oreille interne. Soient U, V, W , les composantes de ce mouvement.

Nous aurons :

$$U = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \alpha_1 \right) + A_2 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \alpha_2 \right) + \dots$$

$$V = B_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \beta_1 \right) + B_2 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \beta_2 \right) + \dots$$

$$W = C_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \gamma_1 \right) + C_2 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \gamma_2 \right) + \dots$$

Ce mouvement peut être regardé comme la superposition d'un nombre limité ou illimité de mouvements vibratoires simples dont le premier

$$U_1 = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \alpha_1 \right),$$

$$V_1 = B_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \beta_1 \right),$$

$$W_1 = C_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \gamma_1 \right),$$

représente le son fondamental; dont le second

$$U_2 = A_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \alpha_2 \right),$$

$$V_2 = B_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \beta_2 \right),$$

$$W_2 = C_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \gamma_2 \right),$$

représente la première harmonique; etc....

Cela posé, voici les propositions essentielles qui constituent la théorie d'Ohm⁽¹⁾ et de M. Helmholtz⁽²⁾

1° L'auditeur perçoit séparément la hauteur et l'intensité de chacun des sons simples dont la superposition constitue le son complexe reçu par l'oreille.

2° La simultanéité de ces sensations nous empêche de les distinguer, à moins d'une attention particulière. Nous les confondons alors en une sensation unique qui présente un caractère que ne possédaient pas les diverses sensations simples dont elle provient; ce caractère constitue le timbre.

Si ces propositions sont exactes, elles ramènent la sensation de timbre aux sensations élémentaires d'intensité et de hauteur de sons simples, et, par conséquent, d'après ce que nous avons dit au § I, elles fournissent une explication physiologique de la sensation de timbre.

Il s'agit donc pour nous de prouver ces propositions.

Remarquons en premier lieu, avec M. Helmholtz, qu'elles n'ont rien que de très vraisemblable, et que l'étude du sens de la vue par exemple, donne lieu à des remarques tout à fait analogues.

Nos deux yeux nous fournissent deux images distinctes des objets qui nous environnent. Mais la simultanéité de ces deux perceptions nous empêche de les distinguer, à moins d'artifices spéciaux tel que le déplacement du globe de l'un des deux yeux. La réunion de ces deux sensations donne naissance, comme le démontre le stéréoscope, à un nouveau caractère que chacune des sensations simples, prise isolément, ne possédait pas; ce caractère est le relief.

Mais, sans vouloir nous arrêter à ces raisons d'analogie, abordons la démonstration directe des propositions qui constituent la théorie de

(1) Ohm — Poggendorffs Annalen T. LIX. p. 513. 1846 et LXII p. 1. 1847

(2) Helmholtz — Théorie physiologique de la musique, fondée sur l'étude des sensations auditives

M. Helmholtz.

Il s'agit en premier lieu de prouver que nous percevons séparément la hauteur et l'intensité des divers sons simples qui composent un son complexe; mais que la simultanéité de ces perceptions nous les fait confondre en une sensation unique.

S'il en est ainsi, il doit être possible, en dirigeant convenablement l'attention, de distinguer les diverses sensations que l'audition inattentive nous fait confondre. Lorsqu'en effet, notre ouïe éprouve à la fois plusieurs perceptions, l'attention nous permet de les distinguer, malgré leur simultanéité; ainsi, l'attention nous permet de distinguer les voix de deux personnes qui parlent en même temps; l'attention nous permet, dans un duo de piano et de violon, de suivre séparément le piano ou le violon. L'attention doit donc nous permettre de distinguer, dans la perception d'un son complexe, la perception des divers sons simples qui le composent.

C'est en effet ce qui arrive, même aux oreilles les moins expérimentées; il suffit pour cela de diriger convenablement l'attention de l'auditeur par les procédés qu'ont indiqués Ohm et M. Helmholtz.

Attaquez sur le piano le sol_2 , laissez retomber l'étouffoir de manière à arrêter le mouvement des cordes qui rendent le sol_2 , et, aussitôt, frappez avec force la touche ut_1 , dont le sol_2 est la deuxième harmonique; si vous fixez bien votre attention sur la hauteur du sol_2 , vous entendrez ce son se détacher du son complexe ut_1 . Il en est de même si l'on donne d'abord très doucement le mi_3 , puis fortement l' ut_1 , dont le mi_3 est la quatrième harmonique.

On objecte quelquefois que c'est par l'effet de l'imagination seule que l'observateur croit distinguer l'harmonique dans la masse sonore, parce qu'il vient de l'entendre isolément. Il est aisé de répondre à cette objection.

Que, sur un piano bien accordé suivant le tempérament ordinaire, on s'exerce, par le procédé que nous venons d'indiquer, à bien distinguer l'harmonique mi_3 dans la note ut_1 ; puis, au moment où l'on entend bien distinctement le mi_3 que l'on frappe le mi_3 du piano. On constatera très nettement que le second son est un peu plus haut que le premier; ce qui est un effet du tempérament égal.

Ces exemples, et une foule d'autres que l'on trouvera dans l'ouvrage de M. Helmholtz, mettent hors de doute la proposition énoncée: dans un son complexe l'oreille, semblable à une collection très variée de résonnateurs, perçoit séparément chacun des sons simples; seules l'habitude et l'inattention lui font confondre ces différentes perceptions.

Passons maintenant à la seconde proposition

La sensation du timbre d'un son est simplement l'effet produit par la superposition des perceptions de la hauteur et de l'intensité des divers sons simples en lesquels il se décompose.

Pour démontrer cette proposition, il suffit évidemment de réaliser l'expérience suivante :

Au moyen de résonnateurs, analyser un son complexe de manière à déterminer les sons simples qui le composent.

Prendre une collection de diapasons dont chacun rende un de ces sons simples.

Faire sonner ensemble tous ces diapasons.

Si la proposition énoncée est exacte, cette collection de diapasons vibrants devra reproduire le timbre du son complexe considéré.

En effet, par ces procédés, M. Helmholtz⁽¹⁾ est arrivé à reproduire le timbre de la voix humaine chantant les différentes voyelles; le timbre de l'orgue, et même de la clarinette et du cor.

Pour obtenir ces résultats M. Helmholtz faisait usage d'un jeu de diapasons entretenus électriquement. Le son de chaque diapason était renforcé par un tuyau de résonance. Cet appareil a permis à M. Helmholtz comme nous l'allons voir, de vérifier une importante conséquence indirecte de la théorie du timbre.

§ III — La phase des divers sons simples n'influe pas sur le timbre d'un son complexe.

D'après la théorie de M. Helmholtz, nous percevons la hauteur et l'intensité de chacun des sons simples qui composent un son complexe; l'ensemble de ces perceptions nous donne la sensation du timbre du son complexe.

La phase de chacun des sons simples dans la superposition forme le son complexe n'affecte en aucune façon notre organe de l'ouïe; le timbre d'un son ne doit donc pas dépendre de cette phase. En d'autres termes les deux mouvements vibratoires

$$U = A_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \alpha_1 \right) + A_2 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \alpha_2 \right) + \dots$$

$$V = B_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \beta_1 \right) + B_2 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \beta_2 \right) + \dots$$

$$W = C_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \gamma_1 \right) + C_2 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \gamma_2 \right) + \dots$$

⁽¹⁾ Théorie physiologique de la Musique p. 158.

et

$$U' = A_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \alpha'_1 \right) + A_2 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \alpha'_2 \right) + \dots$$

$$V' = B_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \beta'_1 \right) + B_2 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \beta'_2 \right) + \dots$$

$$W' = C_2 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \gamma'_1 \right) + C_2 \sin 4\pi \left(\frac{t}{T} + \gamma'_2 \right) + \dots$$

doivent donner la sensation de deux sons de même hauteur et de même timbre
C'est cette conséquence qu'il s'agit de prouver

En d'autres termes, ayant un jeu de sons simples qui produit un son complexe de timbre déterminé, il s'agit de prouver que l'on ne modifie pas ce timbre lorsqu'on modifie la phase d'un des sons simples sans modifier sa hauteur ni son intensité.

Rappelons quelques principes exposés au Livre II, Chapitre XVIII
§VIII.

Nous avons vu que si l'on faisait varier très peu l'accord d'un tuyau accordé à une source sonore extérieure, on faisait varier très fortement l'intensité et la phase du son engendré par la résonnance dans le milieu extérieur au tuyau; mais, au voisinage de l'accord, la variation relative de la phase est infiniment plus rapide que la variation relative de l'intensité. Si donc un tuyau est rigoureusement accordé à une source sonore extérieure, en en modifiant extrêmement peu la longueur réduite, ce qu'on pourra faire en en modifiant extrêmement peu les dimensions de l'ouverture, on pourra donner à la phase une variation notable sans donner à l'intensité une variation relative sensible.

Ces principes permettent aisément d'imaginer une expérience propre à vérifier la proposition précédemment énoncée.

Pretons un jeu de diapasons entretenus électriquement et dont chacun est muni d'un tuyau de résonnance. Ce jeu de diapasons fournit un son complexe d'un timbre déterminé. Désaccordons très légèrement le tuyau de résonnance de l'un d'entre eux, le son qu'il rend gardera sensiblement son intensité; mais sa phase subira une grande variation. Le son complexe rendu par le jeu de diapason devra garder le même timbre. C'est en effet ce qu'a constaté M. Helmholtz⁽¹⁾

§IV — Les voyelles de la voix humaine

Il est un caractère du son, voisin du timbre, et qui est susceptible

⁽¹⁾ Helmholtz. Théorie physiologique de la Musique p. 159.

d'une explication analogue ; c'est le caractère par lequel un son, sans changer de hauteur, nous fait entendre une voyelle ou une autre. La théorie des voyelles, posée d'abord par Wheatstone, a été développée par Helmholtz⁽¹⁾. Voici en quoi consiste essentiellement cette théorie :

Lorsque la voix humaine parle ou chante, les lèvres de la glotte (cordes vocales) entrent en vibration ; à la façon d'une arche d'instrument, elles émettent un son extrêmement complexe. Parmi les périodes des divers sons simples dont la superposition forme ce son complexe, il en est qui sont propres à la cavité formée par le larynx, le pharynx et la bouche. Les sons qui correspondent à ces périodes sont seuls entendus.

Ces sons se divisent en deux catégories :

1° Un son fondamental accompagné de certaines de ses harmoniques. Ce son caractérise la hauteur de la note émise par la voix humaine, et le timbre de cette note. En faisant varier la position de la glotte dans le larynx, la forme du larynx, on peut faire varier la hauteur du son fondamental et l'importance de ses différentes harmoniques.

2° Un ou plusieurs sons qui ne sont pas forcément harmoniques les uns des autres, ni harmoniques des précédents. Ces sons que l'on fait varier en changeant par les mouvements de la langue, de la mâchoire inférieure, des joues et des lèvres la forme de la cavité buccale, caractérisent la voyelle prononcée.

On peut, en changeant les sons de la première catégorie, maintenir fixes les sons de la seconde. On chantera alors une même voyelle sur différentes notes.

On peut, au contraire, en changeant les sons de la seconde catégorie, maintenir fixes les sons de la première. On prononcera différentes voyelles sur une même note.

Tel est, en peu de mots, l'énoncé de la théorie de Wheatstone et d'Helmholtz. Il s'agit maintenant d'en prouver l'exactitude. Voici l'expérience fondamentale que l'on peut faire pour atteindre ce but.

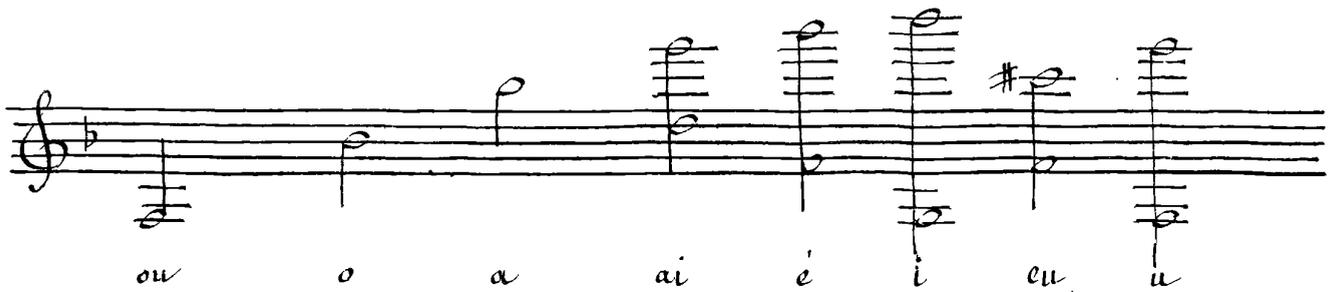
On donne à la cavité buccale la forme qui ferait prononcer une voyelle déterminée, l'A par exemple, si la glotte émettait un son. De la bouche ainsi disposée, on approche successivement divers diapasons mis en vibration, et l'on marque ceux qui excitent la résonnance de la cavité buccale.

Si, ensuite, on fait résonner ces diapasons, on constate que leur son possède nettement le caractère de la voyelle A.

Cette expérience fondamentale a été faite d'abord par Willis, puis avec plus de soin et de variété par Helmholtz et par Ponders. Les notes qui caractérisent une voyelle varient assez notablement par l'effet des petites variations qu'entraîne la prononciation des différents pays. D'après Helmholtz,

⁽¹⁾ Helmholtz - Théorie physiologique de la musique I^e partie, Chapitre V § 9.

dans la prononciation allemande, des différentes voyelles sont caractérisées par les sons suivants :



À chacune des trois voyelles ou, o, a correspond seulement un son propre de la cavité buccale. Au contraire, à chacune des voyelles ai, é, i, eu, u, correspondent deux sons propres. Ces sons sont seulement les plus marqués. D'autres, moins intenses, s'y viennent joindre.

Chapitre III.

Les Sons Résultants.

§.1. - Découverte des Sons Différentiels - Théorie de Lagrange.

Supposons que l'on fasse resonner en même temps avec force deux sons ayant respectivement pour nombre de vibrations

$$N = m \lambda,$$

$$N' = (m+1) \lambda,$$

m et λ étant deux nombres entiers ; outre ces deux sons, une oreille exercée en perçoit un troisième ayant pour nombre de vibrations

$$n = \lambda,$$

c'est-à-dire la différence entre les nombres de vibrations des deux premiers. Ce troisième son a été découvert par Tartini ⁽¹⁾, qui le produisait au moyen des violons

⁽¹⁾ Tartini Traité de Musique. Padoue 1754.

ou des trompettes.

Dès 1759, Lagrange⁽¹⁾ donna une explication du phénomène observé par Tartini.

Les deux sons dont les nombres de vibrations sont N et N' donnent, par seconde $(N' - N)$ battements. Lagrange, comme Rameau, et tous les physiciens de son époque, attribue à l'oreille la propriété d'apprécier la périodicité d'un phénomène, et de transformer cette impression périodique en une sensation sonore correspondante. Dès lors, d'après lui, ces battements, dont $(N' - N)$ se succèdent en une seconde, produisent la même sensation qu'un son de $(N' - N)$ vibrations par seconde.

Cette idée fut adoptée par Chladni. Elle conduisit Hällström à une découverte plus générale⁽²⁾. Supposons que l'on produise simultanément deux sons ayant respectivement pour nombres de vibrations par seconde

$$N = m \lambda,$$

$$N' = m' \lambda.$$

Ils donnent des battements au nombre de

$$n = (m' - m) \lambda$$

par seconde. Aussi, lorsqu'on fait résonner les deux premiers sons, entend-on, d'après Hällström, un troisième son correspondant à

$$n = (m' - m) \lambda$$

vibrations par secondes. Cette découverte contredisait les idées de Weber et de Ohm qui pensaient que l'on devait encore entendre dans ce cas un son dont λ serait le nombre de vibrations.

Hällström poussa plus loin encore sa découverte. Il avança que le son différentiel résultant du premier ordre, dont le nombre de vibrations est

$$n = (m' - m) \lambda$$

pouvait donner, avec les sons que donnent N vibrations par seconde, un son différentiel résultant du second ordre, ayant pour nombre de vibrations par secondes

$$n' = N - n = (2m - m') \lambda.$$

que celui-ci donnait avec le son différentiel résultant du premier ordre, le son différentiel résultant du troisième ordre, dont le nombre des vibrations par secondes est

$$n' - n = (3m - 2m') \lambda$$

⁽¹⁾ Lagrange — Recherches sur la nature et la propagation du son (Miscellanea Taurinensia. T. I pp. 103-105. 1759 — Œuvres de Lagrange T. I

pp. 143)

⁽²⁾ Hällström — Poggendorff's Annalen Bd XXIV p. 438.

ie.... Ces sons dont il annonçait théoriquement l'existence; Hällström parvint à les entendre.

Poggendorff⁽¹⁾ fit des objections à la découverte d'Hällström; selon lui, les sons regardés par Hällström comme des sons résultants du second, du troisième, ordres ne sont autre chose que les sons résultants du premier ordre fournis par les harmoniques des sons fondamentaux étudiés.

Pour décider entre la manière de voir d'Hällström et celle de Poggendorff, il importe d'émettre des sons fondamentaux intenses et cependant simples. M. H. von Helmholtz a indiqué le moyen d'obtenir de semblables sons. Il consiste à prendre comme source sonore un diapason, et à renforcer le son de ce diapason par un résonnateur ayant un seul son propre commun avec le diapason, à savoir le son fondamental du diapason. Comme résonnateur, M. H. von Helmholtz prenait soit une corde vibrante, soit un espace rempli d'air. Il put ainsi mettre en évidence les sons résultants de divers ordres découverts par Hällström sans qu'aucun doute pût exister sur les sons qui en étaient l'origine.

Ces expériences permirent à M. Helmholtz de mettre en évidence le fait suivant, qui n'avait pas été remarqué avant lui par les divers observateurs.

Lorsqu'on émet deux sons de faible intensité, on ne peut percevoir le son différentiel résultant; si l'on fait croître graduellement l'intensité des deux sons fondamentaux, le son différentiel devient perceptible; puis, lorsque l'intensité des sons fondamentaux continue à croître, l'intensité du son résultant croît beaucoup plus vite, au point qu'il finit par couvrir les sons fondamentaux et par être seul entendu; lorsque les sons fondamentaux ont ainsi une grande intensité, le son différentiel du second ordre devient perceptible.

C'est l'observation de l'influence exercée par l'intensité des sons fondamentaux sur l'intensité des sons résultants qui a conduit M. Helmholtz à donner des sons résultants la théorie que nous allons exposer.

§ II — Théorie d'Helmholtz.

La théorie des sons résultants imaginée par Lagrange et adoptée par Chladni, par Thomas Young, par Hällström, ne constitue pas une

(1) Poggendorff — (Poggendorff's Annalen. T. LXXII. p. 522)

(2) Helmholtz — Ueber Combinationstöne (Poggendorff's Annalen. T. XCII p. 497 1856 - Helmholtz Wissenschaftliche Abhandlungen T. I. p. 263).

explication physiologique de la sensation de son résultant au sens que nous avons donné à ce mot au Chapitre I. En effet, elle attribue à l'oreille la faculté de faire correspondre une sensation sonore non pas seulement à un mouvement périodique, mais encore à une variation périodique d'intensité. Elle ne ramène donc pas simplement la perception de son résultant à la perception de la hauteur et de l'intensité des mouvements vibratoires simples qui agitent la lymphe de l'oreille interne.

La théorie proposée par M^r Helmholtz ramène au contraire la sensation de son résultant à des perceptions simples de ce genre et constitue, par conséquent, une explication physiologique des sons résultants.

Considérons ce qu'on nomme en Mécanique un système à liaisons complètes, c'est-à-dire un système dont les divers points sont liés les uns aux autres de manière que, pour connaître d'une manière complète la disposition de tous ces points à l'instant t , il suffit de connaître la valeur que prend à cet instant un certain paramètre variable λ .

Supposons que ce système admette un Potentiel Thermodynamique Interne F , qui sera une fonction de λ , et considérons un état d'équilibre de ce système soustrait à l'action de toute force; nous pouvons toujours supposer que la valeur du paramètre λ qui correspond à cet état d'équilibre soit la valeur 0. Car, si c'était la valeur λ_0 , nous pourrions, pour définir l'état du système, substituer au paramètre λ le paramètre $(\lambda - \lambda_0)$ qui prendrait au moment de l'équilibre, la valeur 0.

Comme on peut toujours ajouter une constante arbitraire au Potentiel Thermodynamique Interne d'un système, nous pourrions supposer que le Potentiel Thermodynamique Interne F prenne la valeur 0 au moment où le système est en équilibre.

Imaginons maintenant que le système soit écarté d'une très petite quantité de sa position d'équilibre; λ aura une petite valeur différente de 0. Si l'on observe que, dans l'état d'équilibre, c'est-à-dire pour $\lambda = 0$, F doit être à la fois nul et minimum, on voit que F , développé en série suivant les puissances croissantes de λ sera de la forme suivante:

$$F = a\lambda^2 + b\lambda^3 + \dots$$

a étant une constante positive.

La constante b pourra être positive ou négative; elle serait nulle dans le cas particulier où le système offrirait une symétrie telle qu'il présenterait la même forme pour deux valeurs égales et de signe contraire du paramètre λ .

Nous supposons que l'écart du système par rapport à sa position

d'équilibre ne soit pas assez petit pour que l'on puisse poser simplement

$$F = a \lambda^3,$$

mais qu'il soit nécessaire de prendre un terme de plus dans l'expression de F et de poser

$$F = a \lambda^3 + b \lambda^2$$

Cherchons l'équation qui régle le mouvement d'un semblable système sous l'action de forces extérieures données.

Cette équation s'obtiendra en écrivant que la variation subie par le Potentiel Thermodynamique Interne dans une modification virtuelle quelconque du système est égale à la somme des travaux virtuels des forces extérieures données et des forces d'inertie.

La variation virtuelle du Potentiel Thermodynamique Interne a pour valeur

$$\delta F = (2a \lambda + 3b \lambda^2) \delta \lambda.$$

Le travail des forces extérieures est une quantité de la forme.

$$d\mathcal{E}_2 = \Phi \delta \lambda.$$

Le travail des forces d'inertie sera

$$-\sum m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right),$$

m étant une des masses élémentaires du système, x, y, z , ses coordonnées à l'instant t ; $\delta x, \delta y, \delta z$, son déplacement virtuel.

Les quantités x, y, z , sont des fonctions de la seule variable λ ; en sorte que l'on a :

$$x = f(\lambda), \quad y = g(\lambda), \quad z = h(\lambda)$$

et, par conséquent,

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x = \left[f''(\lambda) \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + f'(\lambda) \frac{d^2 \lambda}{dt^2} \right] f'(\lambda) \delta \lambda,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \delta y = \left[g''(\lambda) \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + g'(\lambda) \frac{d^2 \lambda}{dt^2} \right] g'(\lambda) \delta \lambda,$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} \delta z = \left[h''(\lambda) \left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 + h'(\lambda) \frac{d^2 \lambda}{dt^2} \right] h'(\lambda) \delta \lambda.$$

Nous admettrons que l'on puisse, dans l'expression du travail des forces d'inertie, négliger les termes du second ordre en λ en présence des termes du premier ordre, bien que nous n'admettions pas la même approximation dans l'évaluation de δF . Nous aurons alors

$$\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x = \left[f'(\lambda) \right]^2 \frac{d^2 \lambda}{dt^2} \delta \lambda,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} \delta y = \left[g'(\lambda) \right]^2 \frac{d^2 \lambda}{dt^2} \delta \lambda,$$

$$\frac{d^2 \lambda}{dt^2} S_3 = \left[h'(\lambda) \right]^2 \frac{d^2 \lambda}{dt^2} S_1.$$

Si nous remarquons que λ est toujours très voisin de 0, et si nous désignons par M la constante positive

$$M = \sum m \left\{ \left[f'(\lambda) \right]^2 + \left[g'(\lambda) \right]^2 + \left[h'(\lambda) \right]^2 \right\},$$

le travail virtuel des forces d'inertie aura pour valeur

$$- M \frac{d^2 \lambda}{dt^2} S_1.$$

Nous aurons donc, comme équation du mouvement du système

$$2a\lambda + 3b\lambda^3 = Q - M \frac{d^2 \lambda}{dt^2}.$$

Nous supposons que Q soit de la forme suivante:

$$Q = \varepsilon F \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) + \varepsilon F' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right),$$

F et F' étant deux constantes données, et ε une quantité infiniment petite arbitraire indépendante de t . Le système sera alors soumis à deux actions périodiques, ayant des périodes différentes, toutes deux infiniment petites. L'équation du mouvement du système soumis à ces deux actions sera:

$$(1) \dots 2a\lambda + 3b\lambda^3 = \varepsilon \left[F \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) + F' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) \right] - M \frac{d^2 \lambda}{dt^2}.$$

L'intégrale de cette équation sera une fonction de ε que nous supposons se réduire à 0 pour $\varepsilon = 0$. Développons la en série ordonnée suivant les puissances croissantes de ε de la manière suivante:

$$(2) \dots \lambda = \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \varepsilon^3 \lambda_3 + \dots$$

Supposons cette série uniformément convergente, ainsi que les séries que l'on obtient en différentiant une fois ou deux fois ses divers termes par rapport à t . L'égalité (1) deviendra:

$$\begin{aligned} & \left[2a\lambda_1 + M \frac{d^2 \lambda_1}{dt^2} - F \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) - F' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) \right] \varepsilon \\ & + \left[2a\lambda_2 + 3b\lambda_1^3 + M \frac{d^2 \lambda_2}{dt^2} \right] \varepsilon^2 \\ & + \left[2a\lambda_3 + 6b\lambda_1\lambda_2 + M \frac{d^2 \lambda_3}{dt^2} \right] \varepsilon^3 + \dots = 0 \end{aligned}$$

Cette égalité doit avoir lieu quel que soit ε ; nous admettrons sans pouvoir le démontrer, qu'il est nécessaire et suffisant pour cela que l'on ait

$$(3) \dots 2a\lambda_1 + M \frac{d^2 \lambda_1}{dt^2} - F \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) - F' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) = 0$$

$$1 \dots \dots 2a\lambda_2^2 + 3b\lambda_1^2 + M \frac{d^2\lambda_2}{dt^2} = 0,$$

$$(5) \dots \dots 2a\lambda_3 + 6b\lambda_1\lambda_2 + \frac{M d^2\lambda_3}{dt^2} = 0,$$

L'égalité (3) détermine λ_1 ; λ_1 une fois connu, l'égalité (4) détermine λ_2 ; λ_1 et λ_2 une fois connus; l'égalité (5) détermine λ_3 , etc.... En reportant dans l'égalité (2) ces valeurs de $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots$ nous aurons les intégrales de l'équation (1) qui s'annulent pour $\varepsilon = 0$.

Il faut bien remarquer que la légitimité mathématique de ce procédé est simplement vraisemblable, mais ne peut être regardée comme démontrée.

Occupons-nous d'abord de l'intégration de l'équation (3).

L'équation privée de second membre est :

$$2a\lambda_1 + M \frac{d^2\lambda_1}{dt^2} = 0.$$

Son intégrale générale est :

$$\lambda_1 = A \sin \left(\sqrt{\frac{2a}{M}} t + h \right),$$

A et h étant deux constantes arbitraires. D'autre part, nous pouvons intégrer l'équation pourvue du second membre par une expression de la forme :

$$\lambda_1 = U_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) + U_1' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right).$$

Il suffit, pour cela, de prendre :

$$(6) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} U_1 = \frac{F}{2a - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 M} \\ U_1' = \frac{F'}{2a - \left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2 M} \end{array} \right.$$

En sorte que, moyennant ces égalités (6), l'intégrale générale de l'équation (3) sera

$$(7) \dots \lambda_1 = A \sin \left(\sqrt{\frac{2a}{M}} t + h \right) + U_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) + U_1' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right).$$

Parmi ces intégrales, nous considérerons seulement celles pour lesquelles la quantité A, est égale à 0, c'est-à-dire celles qui sont comprises dans la formule :

$$(8) \dots \dots \dots \lambda_1 = U_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) + U_1' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right)$$

Transportons maintenant cette valeur de λ_1 dans l'équation (4). Cette équation devient :

$$2a\lambda_2 + M \frac{d^2\lambda_2}{dt^2} + 3b U_1^2 \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) + 6b U_1 U_1' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) + 3b U_1'^2 \sin^2 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) = 0.$$

Elle peut encore s'écrire de la manière suivante :

$$2a \lambda_2 + M \frac{d^2 \lambda_2}{dt^2} + 3b \left\{ \frac{1}{2} (U_1'^2 + U_1'^2) \right. \\ - \frac{1}{2} U_1'^2 \cos 4\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) - \frac{1}{2} U_1'^2 \cos 4\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) \\ + U_1 U_1' \cos 2\pi \left[\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) t + \delta - \delta' \right] \\ \left. - U_1 U_1' \cos 2\pi \left[\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) t + \delta + \delta' \right] \right\} = 0.$$

Il est très facile de voir que si l'on pose :

$$(9) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} U_2 = \frac{-\frac{1}{2} U_1'^2}{2a - \left(\frac{4\pi}{T} \right)^2 M} , \\ U_2' = \frac{-\frac{1}{2} U_1'^2}{2a - \left(\frac{4\pi}{T'} \right)^2 M} , \\ V_2 = \frac{U_1 U_1'}{2a - \left[2\pi \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) \right]^2 M} , \\ V_2' = \frac{-U_1 U_1'}{2a - \left[2\pi \left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) \right]^2 M} , \end{array} \right.$$

L'intégrale générale de l'équation précédente sera

$$(10) \dots \dots \dots \lambda_2 = A_2 \operatorname{Sin} \left(\sqrt{\frac{2a}{M}} t + h_2 \right) - \frac{3b}{4a} (U_1'^2 + U_1'^2) \\ + 3b \left\{ U_2 \cos 4\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) + U_2' \cos 4\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) \right. \\ + V_2 \cos 2\pi \left[\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) t + \delta - \delta' \right] \\ \left. + V_2' \cos 2\pi \left[\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) t + \delta + \delta' \right] \right\}$$

Parmi ces intégrales, nous ne prendrons encore que celles pour lesquelles $A_2 = 0$, c'est-à-dire que celles qui sont comprises dans la formule

$$(11) \dots \dots \dots \lambda_2 = \frac{3b}{4a} (U_1'^2 + U_1'^2) = 3b \left\{ U_2 \cos 4\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) + U_2' \cos 4\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) \right\}$$

$$+ V_2 \cos 2\pi \left[\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) t + \delta - \delta' \right] \\ + V_2' \cos 2\pi \left[\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) t + \delta + \delta' \right] \} .$$

Si nous reportons dans l'égalité (5) l'expression de λ_1 donnée par les égalités (6) et (8) et l'expression de λ_2 donnée par les égalités (9) et (11), cette égalité va devenir :

$$2\alpha\lambda_3 + M \frac{d^2\lambda_3}{dt^2} + 18\beta^2 \left\{ - \frac{U_1^2 + U_1'^2}{4a} U_1 \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) \right. \\ \left. - \frac{U_1^2 + U_1'^2}{4a} U_1' \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) \right. \\ + U_1 U_2 \cos 4\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) \\ + U_1 U_2' \cos 4\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) \\ + U_1' U_2 \cos 4\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) \\ + U_1' U_2' \cos 4\pi \left(\frac{t}{T} + \delta' \right) \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) \\ + U_1 V_2 \cos 4\pi \left[\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) t + \delta - \delta' \right] \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) \\ + U_1 V_2' \cos 2\pi \left[\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) t + \delta + \delta' \right] \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) \\ + U_1' V_2 \cos 2\pi \left[\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T'} \right) t + \delta - \delta' \right] \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) \\ + U_1' V_2' \cos 2\pi \left[\left(\frac{1}{T} + \frac{1}{T'} \right) t + \delta + \delta' \right] \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) \} = 0$$

Cette égalité peut encore s'écrire

$$\frac{1}{9\beta^2} \left(2\alpha\lambda_3 + M \frac{d^2\lambda_3}{dt^2} \right) \\ = \left[U_1 U_2 + U_1' (V_2 + V_2') \right] \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) \\ + \left[U_1' U_2' + U_1 (V_2' - V_2) \right] \sin 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) \\ + (U_1 V_2 + U_1' U_2) \sin 2\pi \left[\left(\frac{2}{T} - \frac{1}{T'} \right) t + 2\delta - \delta' \right] \\ + (U_1 U_2' - U_1' V_2) \sin 2\pi \left[\left(\frac{2}{T'} - \frac{1}{T} \right) t + 2\delta' - \delta \right]$$

$$\begin{aligned}
& + (U_1 V_2' + U_1' V_2) \operatorname{Sin} 2\pi \left[\left(\frac{2}{T} + \frac{1}{T'} \right) t + 2\delta + \delta' \right] \\
& + (U_1 U_2' + U_1' V_2') \operatorname{Sin} 2\pi \left[\left(\frac{2}{T'} + \frac{1}{T} \right) t + 2\delta' + \delta \right] \\
& + \frac{U_1 U_2}{2} \operatorname{Sin} 6\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) . \\
& + \frac{U_1' U_2'}{2} \operatorname{Sin} 6\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) ,
\end{aligned}$$

Si l'on pose:

$$(12) \left\{ \begin{aligned}
u_1 &= \frac{U_1 U_2 + U_1' (V_2 + V_2')}{2a - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 M} , \\
u' &= \frac{U_1' U_2' + U_1 (V_2 - V_2')}{2a - \left(\frac{2\pi}{T'} \right)^2 M} , \\
U_3 &= \frac{\frac{1}{2} U_1 U_2}{2a - \left(\frac{6\pi}{T} \right)^2 M} , \\
U_3' &= \frac{\frac{1}{2} U_1' U_2'}{2a - \left(\frac{6\pi}{T'} \right)^2 M} , \\
V_3 &= \frac{U_1 V_2 + U_1' U_2}{2a - \left[2\pi \left(\frac{2}{T} - \frac{1}{T'} \right) \right]^2 M} , \\
V_3' &= \frac{U_1 V_2' + U_1' U_2}{2a - \left[2\pi \left(\frac{2}{T} + \frac{1}{T'} \right) \right]^2 M} , \\
W_3 &= \frac{U_1 U_2' - U_1' V_2}{2a - \left[2\pi \left(\frac{2}{T'} - \frac{1}{T} \right) \right]^2 M} , \\
W_3' &= \frac{U_1 U_2' + U_1' V_2'}{2a - \left[2\pi \left(\frac{2}{T'} + \frac{1}{T} \right) \right]^2 M} ,
\end{aligned} \right.$$

on verra sans peine que l'intégrale générale de l'équation précédente sera

$$(13) \dots \dots \dots \lambda_3 = A_3 \operatorname{Sin} \left(\sqrt{\frac{2a}{M}} t + h_3 \right) \\
+ 9b^2 \left\{ u \operatorname{Sin} 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) \right. \\
\left. + u' \operatorname{Sin} 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& + U_3 \operatorname{Sin} 6\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) \\
& + U'_3 \operatorname{Sin} 6\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) \\
& + V_3 \operatorname{Sin} 2\pi \left[\left(\frac{2}{T} - \frac{1}{T'} \right) t + 2\delta - \delta' \right] \\
& + V'_3 \operatorname{Sin} 2\pi \left[\left(\frac{2}{T} + \frac{1}{T'} \right) t + 2\delta + \delta' \right] \\
& + W_3 \operatorname{Sin} 2\pi \left[\left(\frac{2}{T'} + \frac{1}{T} \right) t + 2\delta' + \delta \right] \\
& + W'_3 \operatorname{Sin} 2\pi \left[\left(\frac{2}{T'} - \frac{1}{T} \right) t + 2\delta' - \delta \right].
\end{aligned}$$

Parmi ces intégrales, nous ne retiendrons que celles pour lesquelles $A_3 = 0$, c'est-à-dire que celles qui sont comprises dans l'égalité

$$\begin{aligned}
(14) \dots\dots\dots \lambda_3 = 2b^2 \left\{ & u \operatorname{Sin} 2\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) \right. \\
& + u' \operatorname{Sin} 2\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) \\
& + U_3 \operatorname{Sin} 6\pi \left(\frac{t}{T} + \delta \right) \\
& + U'_3 \operatorname{Sin} 6\pi \left(\frac{t}{T'} + \delta' \right) \\
& + V_3 \operatorname{Sin} 2\pi \left[\left(\frac{2}{T} - \frac{1}{T'} \right) t + 2\delta - \delta' \right] \\
& + V'_3 \operatorname{Sin} 2\pi \left[\left(\frac{2}{T} + \frac{1}{T'} \right) t + 2\delta + \delta' \right] \\
& + W_3 \operatorname{Sin} 2\pi \left[\left(\frac{2}{T'} + \frac{1}{T} \right) t + 2\delta' + \delta \right] \\
& \left. + W'_3 \operatorname{Sin} 2\pi \left[\left(\frac{2}{T'} - \frac{1}{T} \right) t + 2\delta' - \delta \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Nous obtiendrons ainsi, de proche en proche, les coefficients des puissances de ε dans le développement de λ représenté par l'égalité (2).

Nous allons maintenant chercher l'interprétation mécanique des résultats obtenus.

Nous considérons un système à liaisons complètes qui est mis en mouvement par deux actions simultanées très petites, toutes deux périodiques, mais ayant des périodes différentes T et T' .

Commençons par supposer les deux actions périodiques assez petites pour que, dans le développement de λ suivant les puissances croissantes de ε ,

on puisse se borner à considérer le premier terme. Nous aurons alors

$$\lambda = \varepsilon \lambda_1,$$

λ_1 , étant déterminé par les égalités (6) et (7).

On voit alors que le mouvement pris par le système se compose de la superposition de trois mouvements périodiques simples. Deux d'entre eux ont respectivement pour période, les périodes T et T' des actions périodiques qui agissent sur le système.

Le troisième, représenté par l'équation

$$\lambda = \varepsilon A \sin \left(\sqrt{\frac{2a}{M}} t + h \right)$$

a pour période

$$D = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{M}{2a}}$$

Il est absolument indépendant de la périodicité et de l'intensité des forces extérieures qui agissent sur le système. Il représente un mouvement vibratoire propre au système.

Admettre, comme nous l'avons fait en écrivant l'égalité (8), que A est égal à 0, c'est admettre qu'un mécanisme quelconque empêche le mouvement propre du système de se produire. Dès lors le mouvement pris par le système soumis à deux actions périodiques infiniment petites, de périodes différentes sera la superposition de deux mouvements périodiques simples, infiniment petits, ayant pour périodes respectives les périodes des forces qui agissent sur le système.

Augmentons maintenant l'intensité des forces qui agissent sur le système, en faisant croître ε ; il viendra un moment où, dans le développement de λ donné par l'égalité (2), nous devons tenir compte du terme en ε^2 et écrire

$$\lambda = \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2$$

L'expression de la quantité λ_2 est donnée par l'égalité (10). Nous voyons alors que, grâce à l'introduction du nouveau terme, le mouvement du système se compose d'une superposition de mouvements périodiques simples.

Ces mouvements sont :

1° Les deux mouvements ayant les mêmes périodes T et T' que les forces qui agissent sur le système; les amplitudes de ceux-ci sont proportionnelles à ε .

2° Le mouvement propre du système que nous supposons étouffé, lorsque, comme nous l'avons fait en écrivant l'égalité (11), nous supposons $A_2 = 0$.

3° Les mouvements ayant pour périodes $\frac{T}{2}$ et $\frac{T'}{2}$, les seuls qu'ils

venant sous à l'octave des premiers

1° Un mouvement ayant une période Θ , définie par

$$\frac{1}{\Theta} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T}$$

il correspond à un son identique au son résultant différentiel du premier ordre donné par la règle d'Hällström.

5° Un mouvement ayant une période τ , définie par

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{T} + \frac{1}{T'}$$

le son auquel il correspond sera nommé son résultant additionnel du premier ordre.

Tous ces mouvements compris sous les N° 3°, 4°, 5°, ont une amplitude proportionnelle à ε^2 . Négligeables, quand les actions extérieures sont infiniment petites, ils croissent avec l'intensité des actions extérieures plus rapidement que cette intensité. Les sons qui leur correspondent, d'abord imperceptibles, pourront arriver à couvrir les deux sons primitifs, qui ont même période que les actions extérieures.

Continuons à faire croître l'intensité des actions extérieures. Il arrivera un moment où ε aura une valeur assez grande pour que, dans le développement de λ par rapport aux puissances croissantes de ε on soit obligé de prendre le terme en ε^3 . On aura alors

$$\lambda = \varepsilon \lambda_1 + \varepsilon^2 \lambda_2 + \varepsilon^3 \lambda_3$$

λ_3 étant donné par l'égalité (13), ou bien, si l'on suppose encore que le son propre du système soit étouffé, par l'égalité (14) Nous voyons alors qu'aux mouvements simples déjà existants dans le système viennent s'ajouter de nouveaux mouvements simples, dont l'amplitude est proportionnelle à ε^3 . Ces mouvements sont :

1° Les deux mouvements qui ont même période que les deux sons extérieurs. On voit donc que, lorsqu'on fait croître graduellement l'intensité des actions extérieures, les sons résultants du premier ordre ont une intensité qui croît d'abord plus vite que celle des sons primitifs, en sorte que le son résultant d'Hällström peut arriver à couvrir les deux sons primitifs. Mais, si l'on continue à faire croître l'intensité des actions extérieures, les sons primitifs pourront, à leur tour, dominer le son résultant

2° Les deux mouvements qui ont pour période $\frac{T}{3}$ et $\frac{T'}{3}$. Ces mouvements correspondent à deux sons qui sont les deuxièmes harmoniques (quinte de l'octave) des sons primitifs

3° Les mouvements dont les périodes $\Theta_2, \Theta_2', \tau_2, \tau_2'$ sont définies

par les égalités

$$\frac{1}{\Theta_2} = \frac{2}{T} - \frac{1}{T'},$$

$$\frac{1}{\Theta'_2} = \frac{2}{T'} - \frac{1}{T''},$$

$$\frac{1}{\tau_2} = \frac{2}{T} + \frac{1}{T''},$$

$$\frac{1}{\tau'_2} = \frac{2}{T'} + \frac{1}{T''}.$$

Le premier de ces mouvements correspond au son résultant du second ordre d'Hällström. Nous donnerons aux sons qui correspondent à ces quatre mouvements vibratoires simples le nom de sons résultants du second ordre.

Nous ne pousserons pas plus loin cette analyse ; ce que nous avons dit suffit à en faire comprendre les Principes. Nous allons maintenant en faire l'application à l'explication de l'audition des sons résultants.

§ III. — Comparaison de la Théorie d'Helmholtz et de la Théorie de Lagrange.

Nous venons de voir que si l'on considère un système à liaisons complètes, doué d'un mécanisme qui en étouffe promptement les mouvements propres, soumis à deux actions périodiques simples, ayant des périodes différentes, ce système rendra en général un son complexe. Parmi les éléments de ce son complexe se trouveront les sons résultants entendus par Hällström.

D'après M. H. von Helmholtz, le système formé par la membrane du tympan, la chaîne des osselets et la fenêtre ovale forme sensiblement un petit mécanisme à liaisons complètes. Dans ce mécanisme figure un organe, le muscle du marteau, qui semble propre à arrêter les sons propres du système. Cet appareil semble donc exactement disposé pour qu'on puisse lui appliquer la théorie précédente.

Si deux sons simples résonnent énergiquement dans l'air extérieur, deux pressions périodiques, de périodes différentes, agissent sur la membrane du tympan. La chaîne des osselets transmettra alors à la lymphe de l'oreille interne un son complexe. Parmi les éléments de ce son se trouveront non seulement les sons primitifs émis par les sources extérieures, mais encore les sons résultants définis par Hällström.

Telle est l'explication des sons résultants proposés par M. H. von Helmholtz et opposée par lui à la théorie de Lagrange.

Quelles sont les raisons qui doivent faire préférer la théorie de M. H. von Helmholtz à la théorie de Lagrange ?

1° La théorie de M. H. von Helmholtz constitue une véritable explication physiologique de l'audition des sons résultants; elle ramène, en effet, cette audition à la perception de la hauteur et de l'intensité de certains mouvements vibratoires simples qui animent la lymphe de l'oreille interne. En revanche la théorie de Lagrange invoque une propriété mystérieuse par laquelle l'oreille ferait correspondre une sensation sonore de hauteur déterminée à un phénomène périodique qui est une variation d'intensité et non un mouvement.

2° La théorie de M. Helmholtz explique fort bien ce fait que l'intensité du son résultant, absolument négligeable lorsque les sons primitifs sont faibles, croît beaucoup plus vite que l'intensité des sons primitifs et que le son résultant peut arriver à couvrir ceux-ci. Ces faits ne s'expliquent pas dans la théorie de Lagrange.

3° La théorie de M. Helmholtz indique que les sons résultants définis par Hallström ne sont pas les seuls qui se produisent. Déjà, parmi les sons résultants du premier ordre, on doit trouver non seulement le son résultant différentiel, mais aussi le son résultant additionnel. M. Helmholtz est parvenu en effet à entendre ce son dont l'existence avait été prévue par la théorie. Plus aigu que les sons primitifs, il est moins facile à entendre et à distinguer des harmoniques que le son différentiel, qui est beaucoup plus grave. Il ne peut être perçu que par des oreilles exercées. Néanmoins, il a été entendu non seulement par M. Helmholtz mais encore par beaucoup d'autres observateurs, notamment par M. Appunn, qui est même parvenu à distinguer les sons additionnels d'ordre très élevé.

M. Helmholtz a construit un instrument très propre à l'étude des sons résultants, c'est la sirène double, dont les deux plateaux peuvent être animés de vitesses différentes et connues, ce qui permet de produire simultanément deux sons intenses et connus.

4° Enfin, un argument décisif permet de décider entre les deux théories de Lagrange et de M. H. von Helmholtz.

D'après la théorie de Lagrange, la sensation de son résultant est une sensation purement subjective.

D'après M. H. von Helmholtz, les sons résultants ont une existence objective. Il doit être possible de former un appareil, qui, frappé par deux mouvements vibratoires simples de période différente, rendra un son complexe dans lequel les résonateurs permettront de reconnaître

les sons résultants. C'est en effet ce qu'a prouvé M. Helmholtz. Si, donnant deux sons primitifs au moyen de l'harmonium, de la sixième polyphone ou de la sixième double, on fait aisément résonner les résonnateurs correspondants aux deux sons résultants du premier ordre et à celui des sons résultants du second ordre qu'a défini Hällström. Cette réalisation objective des sons résultants met hors de doute la supériorité de la théorie de M. H. von Helmholtz sur celle de Lagrange.

SIV Du caractère musical des sons.

Il nous reste à fournir l'explication physiologique d'un dernier caractère de nos sensations auditives. Comment se fait-il que, tandis que l'émission d'un son simple isolé n'entraîne pour nous aucune émotion désagréable, l'émission simultanée de plusieurs sons simples puisse entraîner, pour nous une sensation désagréable, celle de dissonance?

Sauveur⁽¹⁾ a, le premier, émis l'idée que la sensation désagréable qui peut s'éveiller en nous à l'audition de deux sons simultanés est due à l'existence de battements entre ces deux sons:

« On trouve en effet que les accords dont on ne peut entendre les battements sont justement ceux que les musiciens traitent de consonances et que ceux dont les battements se font sentir sont les dissonances; quand un accord est dissonance dans une certaine octave, et consonance dans une autre, c'est qu'il bat dans l'une et ne bat pas dans l'autre. »

M. H. von Helmholtz a cherché à démontrer par des expériences précises l'exactitude de cette vue de Sauveur.

Prenons deux sons à l'unisson; faisons varier l'un d'eux d'une manière continue; il se produira d'abord des battements très lents et très nets; puis au fur et à mesure que nous ferons varier le second son, ces battements se produiront à intervalles beaucoup plus rapprochés; un moment arrivera où nous ne pourrons plus les compter, et où ils ne se marqueront plus à nous que par une sensation de roulement, qui deviendra de plus en plus désagréable et finira par devenir nettement la sensation de dissonance.

Cet effet désagréable produit par les battements rentre, d'après M. Helmholtz dans une règle générale. Toutes les fois que l'intensité d'une sensation

⁽¹⁾ Sauveur Mémoires de l'Académie pour 1700

subit des variations très rapides, il en résulte pour nous une sensation désagréable. M. Helmholtz compare la sensation produite sur notre ouïe par les battements à l'effet produit sur notre vue par une lumière scintillante.

Lorsque deux instruments produisent dans l'air deux sons différents, notre oreille reçoit un son fort complexe contenant ces deux sons, leurs harmoniques et leurs sons résultants. Entre tous ces sons peuvent se produire des battements produisant des effets plus ou moins désagréables et tous les intermédiaires existent entre les franches dissonances et les accords les plus consonnants. Les accords employés dans le mode mineur seraient des accords rendus légèrement dissonants par des battements de sons résultants ou d'harmoniques élevés.

Imprimerie F. Hezmet, 70, rue de Rennes. Paris.