ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DAL

prof. Francesco Brioschi

IN MILANO

colla cooperazione dei professori:

Luigi Cremona *in Roma* ‖ **Enrico Betti** *in Pisa*

Eugenio Beltrami *in Pavia* ‖ **Felice Casorati** *in Pavia.*

Serie II - Tomo IX

(dal marzo 1878 all'agosto 1879).

MILANO.

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO IX.° (SERIE II.ª)

Indice.

Sur les équations différentielles du second ordre.

(*Par le Père* Pepin S. I., *à Paris.*)

La fin du Mémoire que j'ai publié en 1863 dans les Annali di Matematica (t. 5, pag. 185) se trouvant inexacte par suite de quelques erreurs de calcul, je me propose de la rectifier.

Les treize premiers théorèmes sont confirmés par les résultats auxquels Mr. Fuchs est parvenu dans un Mémoire publié en 1875 dans le journal de Mr. Borchardt; quelques uns même sont reproduits dans ce Mémoire. Pour le 14me théorème il faut se borner à la première conclusion:

« Si les racines de l'équations $F(y)=0$ ne sont pas toutes comprises dans les formules $\rho^i y$, $\rho^i \psi(y)$, le degré de cette équation est égal à 6×8. »

Le deux pages qui suivent cette première conclusion doivent être supprimées, par ce qu'elles tendent à démontrer une impossibilité qui n'a de fondement que dans une erreur de calcul.

Le 15me théorème doit être remplacé par le suivant:

« Soit μ le plus grand diviseur commun des exposants de y dans l'équation

$$F(y)=y^{m\mu}+p_1 y^{(m-1)\mu}+\cdots+p_m=0, \tag{A}$$

dont les racines satisfont à l'équation différentielle $\frac{d^2y}{dx^2}=Py$; si $\mu=10$ et que m soit supérieur a 2, $m=12$ et l'équation est du 120me degré. »

Démonstration. Soit

$$\theta(y)=ay+b\psi(y) \tag{1}$$

une racine de $F(y)$, n'ayant de rapport constant ni avec y ni avec $\psi(y)$. Les deux constantes a et b seront différentes de zéro. Designons par β, β_i les racines de l'unité qui, conformément au cinquième théorème (p. 191) vérifient les équations

$$\left.\begin{aligned}\theta^2(y) &= \left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)\theta(y) - y \\ (\theta\rho^2)^2 y &= \left(\beta_i + \frac{1}{\beta_i}\right)\theta\rho^i \cdot y = y,\end{aligned}\right\} \qquad (B)$$

où

$$\rho = \cos\frac{2\pi}{10} + \sqrt{-1}\sin\frac{2\pi}{10}.$$

La constante a de l'equation (1) sera déterminée d'après le 8^{me} théorème (p. 196) par la formule

$$a = \frac{B_i - \frac{1}{\rho^i} B}{\left(\rho^i - \frac{1}{\rho^i}\right)} \qquad (E)$$

dans laquelle B et B_i designent respectivement les deux binômes $\left(\beta + \frac{1}{\beta}\right)$, $\left(\beta_i + \frac{1}{\beta_i}\right)$. En égalant successivement i à $+1$ et à -1, puis comparant entre eux les résultats obtenus, on déduit de la formule (E)

$$\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)B = B_1 + B_{-1} \qquad (2)$$

Les racines de l'unité β, β_i ne peuvent être que des puissances de ρ ou des racines des équations $x^6 = 1$, $x^8 = 1$; car si l'une d' elle, β par exemple, appartenait à un exposant $l > 10$, la période

$$y, \quad \theta(y), \quad \theta^2(y), \ldots$$

serait composée de l termes distincts, et l'on pourrait former (6^{me} théorème) une autre équations du même degré que $F(y)$ et dans laquelle les exposants de y seraient multiples d'un nombre supérieur a 10, contrairement à l'hypothèse.

Les binômes représentés par B, B_i n'ont par conséquent que l'une des 9 valeurs

$$0, \quad \pm 1, \quad \pm\sqrt{2}, \quad \pm\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right), \quad \pm\left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3}\right). \qquad (3)$$

Du reste on peut exclure immédiatement les deux valeurs $\pm\sqrt{2}$; car B designe l'un quelconque des binômes $\beta + \frac{1}{\beta}$ qui correspondent aux diverses racines de $F(y)$ représentées par la formule (1). Or si l'on fait $B = \pm\sqrt{2}$, il est impossible de satisfaire à l'équations (2) en donnant à B_1 et à B_{-1} des valeurs prises dans le tableau (3).

I. Nous déterminerons d'abord au moyen de la formule

$$a = \frac{B_1 - \frac{1}{\rho} B}{\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)}, \tag{4}$$

les diverses valeurs que l'on peut attribuer à la constante a dans la formule (1) quand on y suppose a et b différents de zéro.

1.° Soit $B = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$. L'équation (2) devient $\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} + 2\right) = \left(\rho + \frac{1}{\rho} + 1\right) = B_1 + B_{-1}$.

L'un des deux nombres B_1 ou B_{-1} doit être égal à 1 et l'autre à $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, de sorte que a ne peut avoir dans ce cas que l'une des deux valeurs

$$\frac{1 - \frac{1}{\rho}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)}{\rho - \frac{1}{\rho}} = \frac{-\rho^{-2}}{\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)}, \qquad \frac{\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) - \frac{1}{\rho}\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)}{\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)} = \frac{\rho^2}{\rho - \frac{1}{\rho}}.$$

Comme l'équation (2) ne change pas quand on change en même temps les signes de B, B_1 et B_{-1}, si $B = -\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, le coefficient a aura l'une des valeurs précédentes changées de signe

$$\frac{\rho^{-2}}{\rho - \frac{1}{\rho}} \quad \text{ou} \quad \frac{-\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}.$$

2.° Soit $B = \rho^3 + \frac{1}{\rho^3}$. Le calcul de a se ramène au précédent au moyen de la formule

$$\theta^6(y) = \left(\beta^3 + \frac{1}{\beta^3}\right)\theta^3(y) - y, \tag{5}$$

qui se deduit de la première des équations (B). Dans le cas présent $\beta = \rho^{\pm 3}$, et par conséquent $\beta^3 + \frac{1}{\beta^3} = \rho^9 + \frac{1}{\rho^9} = \rho + \frac{1}{\rho}$. Posons

$$\theta^3(y) = a_3 y + b_3 \psi(y).$$

La racine $\theta^3(y)$, substitué à y dans ce qui précède, rentre dans le cas que nous venons d'examiner, de sorte que a_3 a l'une des deux valeurs

$$a_3 = \frac{-\rho^{-2}}{\rho - \frac{1}{\rho}}, \qquad \frac{\rho^2}{\rho - \frac{1}{\rho}}.$$

La valeur supposée $\beta = \rho^{\pm 3}$ exige que la période y, $\theta(y)$, $\theta^2(y)$,... se compose de 10 termes, de sorte que l'on a $\theta^5(y) = -y$, $\theta^6(y) = -\theta(y) = -ay - b\psi(y)$. L'équation (5) devient par conséquent

$$-ay - b\psi(y) = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)[a_3 y + b_3\psi(y)] - y,$$

et l'on en déduit $a = 1 - a_3\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\cdot$ En substituant les deux valeurs de a_3 on trouve pour a deux valeurs qui se réduisent à

$$\frac{-\rho^4}{\rho^2 - \frac{1}{\rho^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\rho^{-4}}{\rho^2 - \frac{1}{\rho^2}}.$$

A la valeurs de signe contraire $B = -\left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3}\right)$ correspondent pour a les deux valeurs

$$\frac{\rho^4}{\rho^2 - \frac{1}{\rho^2}}, \qquad \frac{-\rho^{-4}}{\rho^2 - \frac{1}{\rho^2}}.$$

3.° $B = \pm 1$. L'équation (2) devient $\pm\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right) = B_1 + B_{-1}$. On ne peut la vérifier qu'en égalant l'un des nombres B_1, B_{-1} à $\pm\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$ et l'autre à zéro, ou bien en prenant l'un d'eux égal à $\pm\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right) = \mp\left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3}\right)$ et l'autre à ± 1. B_1 aura donc l'un des valeurs 0, ± 1, $\pm\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$, $\pm\left(\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}\right)$, dans les quelles on doit prendre le signe supérieur si $B = 1$, et le signe inférieur si $B = -1$. En substituant ces valeurs de B_1 dans la formule (4) on en déduit pour a les valeurs suivantes

$$\pm\frac{\rho^2}{\rho^2 - \frac{1}{\rho^2}}, \qquad \pm\frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}}, \qquad \mp\frac{\rho^{-1}}{\rho - \frac{1}{\rho}}, \qquad \mp\frac{\rho^{-2}}{\rho - \frac{1}{\rho}}.$$

4.° $B = 0$. Si l'on substitue $(\theta\rho)y$ à $\theta(y)$, l'équation (2) est remplacée par la suivante

$$\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)B_1=B_2+B=B_2.$$

On ne peut pàs supposer $B_1=0$, par ce qu'alors le coefficient a serait nul; or des autres valeurs admissible ± 1, $\pm\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)$, $\pm\left(\rho^3+\frac{1}{\rho^3}\right)$, les deux valeurs $B_1=\pm\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)$ donnent pour B_2 des valeurs qui ne figurent pas dans le tableau (3). Il faut les exclures; et les autres donnent pour a les valeurs

$$\pm\frac{1}{\rho-\frac{1}{\rho}},\qquad \pm\frac{1}{\rho^2-\frac{1}{\rho^2}}.$$

On peut réunir en un seul théorème les résultats obtenus:

« Les valeurs correspondantes de a et de B, dans les équations (1) et (2) sont déterminées par le tableau suivant:

$$\left.\begin{array}{llllll}
B=\pm\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right), & a=\pm\frac{\rho^2}{\rho-\frac{1}{\rho}}, & \text{ou}\ \mp\frac{\rho^{-2}}{\rho-\frac{1}{\rho}}, & & & \\
B=\pm\left(\rho^3+\frac{1}{\rho^3}\right), & a=\mp\frac{\rho^4}{\rho^2-\frac{1}{\rho^2}}, & \pm\frac{\rho^{-4}}{\rho^2-\frac{1}{\rho^2}}, & & & \\
B=\pm 1, & a=\pm\frac{\rho}{\rho-\frac{1}{\rho}}, & \mp\frac{\rho^{-1}}{\rho-\frac{1}{\rho}}, & \pm\frac{\rho^2}{\rho^2-\frac{1}{\rho^2}}, & \mp\frac{\rho^{-2}}{\rho^2-\frac{1}{\rho^2}}, & \\
B=0, & a=\frac{\pm 1}{\rho-\frac{1}{\rho}}, & \frac{\pm 1}{\rho^2-\frac{1}{\rho^2}}; & & &
\end{array}\right\}\quad (C)$$

de sort que toutes les racines de $F(y)$, représentées d'une manière générale par la formule (1), seront comprises dans les deux formules

$$\frac{\rho^h}{\rho-\frac{1}{\rho}}y+b\psi(y),\qquad \frac{\rho^h}{\rho^2-\frac{1}{\rho^2}}y+b\psi(y),\tag{7}$$

dans lesquelles h désigne l'un des nombres 0, 1, 2,... 9, et b une constante. »

II. Nous allons démontrer que la constante b dans les formules (7) ne peut recevoir qu'un nombre limité de valeurs pour chaque valeur de h. Mais auparavant nous remarquerons que $F(x)$ admet des racines des deux formes

(7). Il est évident d'abord qu'elle en admet de l'une des deux formes, car autrement toutes ses racines s'obtiendraient en multipliant y et $\psi(y)$ par des facteurs constants, contrairement à notre hypothèse. Soit donc

$$\varphi(y) = \frac{\rho^h}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + A\psi(y),$$

une racine de $F(y)$; $\varphi(\rho^{-h+2}y)$ sera une autre racine, et comme $\psi(\rho^l y) = \rho^{-l}\psi(y)$, on aura

$$\varphi(\rho^{-h+2}y) = \frac{\rho^2}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + b\psi(y), \qquad b = A\rho^{-l}.$$

Désignons cette racines par $\theta(y)$. Nous concluons du tableau (C) que le coefficient B, dans l'équation $\theta^2(y) = B\theta(y) - y$, ne peut avoir aucune autre valeur que $\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)$. On a donc

$$\theta^2(y) = \left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\left[\frac{\rho^2}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + b\psi(y)\right] - y$$

$$= \frac{\rho}{\rho^2 - \frac{1}{\rho^2}} y + b\left(\rho + \frac{1}{\rho}\right)\psi(y).$$

Ainsi $F(y)$ ne peut avoir de racine comprise dans la première des formules (7) sans en avoir aussi dans la seconde. Réciproquement si une racine est de la seconde forme il en existe aussi de la première. En effet dans l'hypothèse admise l'une des racines sera

$$\theta(y) = -\frac{\rho}{\rho^2 - \frac{1}{\rho^2}} y + b\psi(y).$$

Or il résulte du tableau (C) que la valeur correspondante de B est $\rho^3 + \frac{1}{\rho^3}$. Donc

$$\theta^2(y) = \left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3}\right)\left[-\frac{\rho}{\rho^2 - \frac{1}{\rho^2}} y + b\psi(y)\right] - y$$

$$= -\frac{\rho^3}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + b\left(\rho^3 + \frac{1}{\rho^3}\right)\psi(y).$$

Ainsi $F(y)$ a nécessairement deux racines comprises dans les formules

$$\theta(y)=\frac{\rho^2}{\rho-\frac{1}{\rho}}y+b\psi(y),\qquad \theta^2(y)=\frac{\rho}{\rho^2-\frac{1}{\rho^2}}y+b\left(\rho+\frac{1}{\rho}\right)\psi(y).$$

Si l'on multiplie par une constante convenable les coefficients de $\psi(y)$ on peut supposer $b=\frac{1}{\rho^2-\frac{1}{\rho^2}}$ et alors les deux racines considérées sont

$$\left.\begin{aligned}\theta(y)&=\frac{\rho^2}{\rho-\frac{1}{\rho}}y+\frac{1}{\rho^2-\frac{1}{\rho^2}}\psi(y)\\ \theta^2(y)&=\frac{\rho}{\rho^2-\frac{1}{\rho^2}}y+\frac{1}{\rho-\frac{1}{\rho}}\psi(y).\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

Or l'intégrale $\psi(y)$ ainsi déterminée est elle-même racine de $F(y)$. On déduit en effet des équations (8)

$$\theta^2(y)=\frac{\rho^2}{\rho-\frac{1}{\rho}}\theta(y)+\frac{1}{\rho^2-\frac{1}{\rho^2}}\psi(\theta y)=\frac{\rho}{\rho^2-\frac{1}{\rho^2}}y+\frac{1}{\rho-\frac{1}{\rho}}\psi(y)$$

donc

$$\psi(\theta y)=\frac{1}{\rho^2-\frac{1}{\rho^2}}y+\frac{\rho^3}{\rho-\frac{1}{\rho}}\psi(y).$$

Or on a $\rho^6\theta^2(\rho^3 y)=\frac{1}{\rho^2-\frac{1}{\rho^2}}y+\frac{\rho^{6-3}}{\rho-\frac{1}{\rho}}\psi(y)$; et par conséquent $\psi(\theta y)=\rho^6\theta(\rho^3 y)$. La fonction $\psi(\theta y)$ est donc racine de $F(y)$. Il en est de même de tous les résultats qu'on en déduit en remplaçant y par une racine quelconque de $F(y)$, par exemple par $\theta^9(y)$; $\psi(\theta^{10}y)=\psi(y)$ est donc aussi racine, comme nous l'avons annoncé.

Les résultats que nous venons d'obtenir nous permettent de résoudre sans peine le problème que nous avions en vue, de trouver une limite supérieure du nombre des valeurs de b que l'on peut associer à une même valeur de h dans chacune des formules (7). Soit $\varphi(y)=\frac{\rho^l}{\rho-\frac{1}{\rho}}y+b\psi(y)$ l'une des racines de $F(y)$ qui correspondent à une même valeur $h=l$ dans la première de ces formules. $\varphi(\psi y)$ sera aussi racine de $F(y)$. Mais en appliquant notre théorème 8^{me} à $\psi(y)$ nous trouvons que le coefficient B est nul dans la formule

$$\psi^2(y) = B\psi(y) - y.$$

On a donc

$$\varphi(\psi y) = \frac{\rho^l}{\rho - \frac{1}{\rho}}\psi(y) - by,$$

et, comme $\varphi(\psi y)$ est racine de $F(y)$, nous concluons de là que b doit avoir l'une des valeurs comprises dans le tableau (C), et qu'ainsi il est égal à

$$\frac{\rho^h}{\rho - \frac{1}{\rho}}, \quad \text{ou à} \quad \frac{\rho^h}{\rho^2 - \frac{1}{\rho^2}}.$$

Or b ne peut pas être de la première forme, parce qu'on aurait alors

$$\varphi(\psi \rho^{-h} y) = \frac{-1}{\rho - \frac{1}{\rho}}y + \frac{\rho^{l+h}}{\rho - \frac{1}{\rho}}\psi(y) = \theta_1(y),$$

et de la valeur du coefficient de y dans $\theta_1(y)$ on conclurait, au moyen du tableau (C), que $\theta_1^2(y) = -y$, de sorte qu'on aurait en remplaçant y par $\theta_1(y)$ dans la dernière équation,

$$\frac{-1}{\rho - \frac{1}{\rho}}\left[\frac{-1}{\rho - \frac{1}{\rho}}y + \frac{\rho^{l+h}}{\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)}\psi(y)\right] + \frac{\rho^{l+h}}{\rho - \frac{1}{\rho}}\psi(\theta_1 y) = -y$$

d'où

$$\rho^{l+h}\psi(\theta_1 y) = -\left[\frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} + \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)\right]y + \frac{\rho^{l+h}}{\rho - \frac{1}{\rho}}\psi(y)$$

Comme $\psi(\theta_1 y)$ est racine de $F(y)$ il faudrait que $\dfrac{1 + \left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2}{\rho - \frac{1}{\rho}}$ fût égal à l'une des valeurs de a comprises dans le tableau (C); or on constate aisément que cela n'a pas lieu. Donc à une valeur quelconque $h = l$ on ne peut associer que l'une des 10 valeur de b données par la formule $b = \dfrac{\rho^i}{\rho^2 - \frac{1}{\rho^2}}$.

On verrait de la même manière, pour la seconde des formules (y), qu'à une même valeur de h on ne peut faire correspondre que l'un des dix valeurs de b données par la formule $b = \frac{\rho^i}{\rho - \frac{1}{\rho}}$. Il résulte de là que chacune des ces formules ne peut représenter que 100 racines de $F(y)$, au plus, et en ajoutant les 20 racines comprises dans les deux formules $\rho^h y$, $\rho^h \psi(y)$, on a 220 comme limite supérieur du degré de $F(y)$.

III. Le degré $10m$ de $F(y)$ vérifie donc l'inégalité $10m \leqq 220$. Or comme $\psi(y)$ est racine de $F(y)$ on conclut du 10^{me} théorème que le nombre m est de la forme $5k+2$. De plus le nombre $10m$ doit être divisible par 4 et par 6, et conséquemment par 12. Car comme nous supposons $m > 2$ l'équation $F(y)=0$ doit admettre des racines comprises dans les formules (7). Deux racines de $F(y)$ seront donc exprimées par les formules

$$\theta(y) = \frac{\rho}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + b\psi(y), \qquad \theta_1(y) = \frac{1}{\rho - \frac{1}{\rho}} y + b\psi(y),$$

et l'on conclut du tableau (C) que, dans les formules

$$\theta^2(y) = B\theta(y) - y, \qquad \theta_1^2(y) = B_1\theta_1(y) - y,$$

on a respectivement $B=1$, $B_1=0$, c.-à-d. que les plus petits nombres l et l_1 qui vérifient respectivement les condition $\theta^l(y)=y$, $\theta_1{}^{l_1}(y)=y$, sont $l=6$, $l_1=4$. Ces nombres doivent diviser celui qui exprime le degré de $F(y)$ (6^{me} théorème); et par conséquent $10m$ doit être divisible par 4 et par 6. On en conclut que m doit être divisible par 2 et par 3 et conséquemment par 6. On a donc

$$m = 5k + 2 \equiv 0 \pmod{6}.$$

On deduit de cette congruence $k = 6l + 2$, $m = 30l + 12$. La seule valeur de m, positive et inférieure à 22, que l'on déduise de cette formule, est $m=12$. Le degré de $F(y)$ est donc 12×10, ainsi que nous l'avons annoncé, sous la restriction que ce polynôme ne se réduise pas à $y^{10} + p_1$ ou à $y^{20} + py^{10} + p_2$.

En conséquence de la rectification précédente le 16^{me} théoreme doit être remplacé par le suivant:

« Si l'integrale générale de l'équation $\frac{d^2 y}{dx^2} = Py$ est algébrique, elle est de la forme $cy + c'y_1$, les intégrales particulières y, y_1 étant:

Soit déterminées par les équations $y^m = A$, $y_1 = \frac{B}{y}$, A et B désignant deux fonctions rationelles de la variable x;

Soit des racines d'une même équation trinôme $y^{2m}+p_1 y^m+p_2=0$;
Soit enfin des racines d'une équation

$$y^{m\mu}+p_1 y^{(m-1)\mu}+p_2 y^{(m-2)\mu}+\cdots+p_m=0,$$

dans laquelle m et μ sont pris dans l'un des trois systèmes: $m=4$, $\mu=6$; $m=6$, $\mu=8$, $m=12$, $\mu=10$. »

Quand à la fonctions $t=\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$, qui vérifie l'équation différentielle

$$\frac{dt}{dx}+t^2=P,$$

elle est toujours algébrique lorsqu'elle peut s'exprimer sous forme finie; elle est ou rationelle, ou racine d'une équation algébrique du second, du quatrième, du sixième ou du douzième degré.

Sopra una classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine.

(*Memoria di* F. Brioschi, *in Milano.*)

1.° La teorica delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine si è accresciuta in questi ultimi anni degli importanti lavori dei sig.i Fuchs, Schwarz, Klein, Gordan, Jordan (*) e più recentemente delle interessanti ricerche del sig. Hermite (**) sopra la equazione differenziale incontrata da Lamé (***) nelle sue lezioni sulle superficie isoterme pel caso di una elissoide a tre assi disuguali.

In una lettera da me diretta nell'agosto dell'anno 1876 al sig. Klein pubblicata nel vol. 11 dei Mathematische Annalen, ed in altri lavori posteriori (****), ho dimostrato in qual modo si possa far concorrere la teorica delle forme binarie allo studio delle equazioni differenziali lineari del secondo ordine, am-

---

(*) Fuchs: *Ueber die linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, welche algebraische Integrale besitzen, und eine neue Anwendung der Invariantentheorie.* Borchardt's Journal für Mathematik, Bd. 81, p. 97.

Schwarz: *Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt.* Idem, Bd. 75, p. 292.

Klein: *Ueber lineare Differentialgleichungen.* Mathemat. Annalen, Bd. 11, 12, p. 115, 167.

Gordan: *Ueber endlich Gruppen linearer Transformationen einer Veränderlichen.* Mathematische Annalen, Bd. 12, 23.

Jordan: *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique.* Journal de Borchardt, vol. 84, p. 89.

(**) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Octobre 1877.

(***) *Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes,* p. 277.

(****) *La théorie des formes dans l'intégration des équations différentielles linéaires du second ordre.* Mathematische Annalen, Bd. 11, p. 401 — Atti dell'Istituto Lombardo di Scienze e Lettere. Dicembre 1876 — Comptes Rendus. 17 décembre 1877.

pliando il concetto contenuto nella sopraindicata Memoria del sig. Fuchs. Il presente lavoro può in questo senso considerarsi come una continuazione dei precedenti, essendo il medesimo una nuova applicazione degli stessi principî.

2.° Indicando con y, p, q, tre funzioni di una variabile x, considero l'equazione differenziale lineare del secondo ordine:

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{1}$$

nella quale $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$. Sieno y_1, y_2 due integrali particolari della medesima ed $f(y_1, y_2)$ una forma binaria dell'ordine m a coefficienti costanti. Si avrà in generale:

$$f(y_1, y_2) = F(x) \tag{2}$$

la natura della funzione $F(x)$ dipendendo da quella degli integrali particolari y_1, y_2 e dalla forma della funzione f. Derivando l'equazione superiore rispetto ad x si ottiene la

$$f_1 y'_1 + f_2 y'_2 = \frac{1}{m} F'(x) \tag{3}$$

essendo $f_1 = \frac{1}{m}\frac{df}{dy_1}$, $f_2 = \frac{1}{m}\frac{df}{dy_2}$. Ma, siccome è noto, l'equazione differenziale (1) dà:

$$y_2 y'_1 - y_1 y'_2 = Ce^{-\int p\,dx} \tag{4}$$

dove C è una costante; si avranno quindi le:

$$F(x)y'_1 = \frac{1}{m} y_1 F'(x) + Ce^{-\int p\,dx} f_2; \qquad F(x)y'_2 = \frac{1}{m} y_2 F'(x) - Ce^{-\int p\,dx} f_1. \tag{5}$$

Ora derivando nuovamente l'equazione (3) rispetto ad x si avrà per la (1):

$$f_{11} y'^2_1 + 2f_{12} y'_1 y'_2 + f_{22} y'^2_2 = \frac{1}{m(m-1)} [F''(x) + pF'(x) + mqF(x)]$$

la quale pei valori (5) conduce alla:

$$h(y_1, y_2) = \frac{e^{2\int p\,dx}}{m^2(m-1)C^2} [mFF'' - (m-1)F'^2 + mpFF' + m^2 qF^2] \tag{6}$$

posto:

$$h(y_1, y_2) = f_{11} f_{22} - f_{12}^2$$

essendo cioè h l'Hessiano della forma f. Si indichi per brevità con $P(x)$ il secondo membro della equazione (6), e con $\theta(y_1, y_2)$ il covariante dell'ordine $3(m-2)$

$$\theta(y_1, y_2) = 2(f_1 h_2 - f_2 h_1)$$

si otterrà facilmente la relazione:

$$\theta(y_1, y_2) = \frac{e^{\int p dx}}{m(m-2)C}[2(m-2)F'(x)P(x) - mP'(x)F(x)]. \tag{7}$$

3.° Indicando con z il prodotto dei due integrali particolari y_1, y_2 suppongasi ora che la forma f sia eguale a z^r; si avranno le

$$m = 2r; \qquad h = -\frac{1}{4(2r-1)}z^{2(r-1)}; \qquad \theta = 0 \tag{8}$$

e dalla equazione (7), nella quale pongasi per $P(x)$ il suo valore, si dedurrà la relazione seguente:

$$6r(r-1)FF'F'' - 2(r-1)(2r-1)F'^3 - 2r^2F^2F''' + 6rpF[(r-1)F'^2 - rFF''] -$$
$$- 2r^2[p' + 2p^2 + 4q]F^2F' - 4r^3(q' + 2pq)F^3 = 0.$$

Sieno $\varphi(x)$, $\psi(x)$ due polinomi in x dei gradi s, $s-2$, e si pongano:

$$p = \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}, \qquad q = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)} \tag{9}$$

si hanno facilmente le:

$$p' + 2p^2 + 4q = \frac{1}{2\varphi}[\varphi'' + 8\psi], \qquad q' + 2pq = \frac{\psi'}{\varphi}$$

per le quali la relazione superiore diventa la:

$$\left.\begin{array}{r} 2\varphi[3r(r-1)FF'F'' - (r-1)(2r-1)F'^3 - r^2F^2F'''] + \\ + 3rF\varphi'[(r-1)F'^2 - rFF''] - r^2[\varphi'' + 8\psi]F^2F' - 4r^3\psi'F^3 = 0. \end{array}\right\} \tag{10}$$

Consideriamo dapprima il caso pel quale $r = 1$; quest'ultima equazione è divisibile per F^2 e riducesi alla:

$$2\varphi F''' + 3\varphi'F'' + (\varphi'' + 8\psi)F' + 4\psi'F = 0 \tag{11}$$

la quale sarà soddisfatta assumendo per la funzione $F(x)$ un polinomio del grado n di cui il coefficiente della più alta potenza sia l'unità. Infatti quella equazione risultando del grado $n+s-3$ si avranno eguagliando a zero i coefficienti delle varie potenze della x un numero $n+s-2$ di equazioni per mezzo delle quali si determineranno gli n coefficienti del polinomio $F(x)$ e gli $s-1$ coefficienti del polinomio $\psi(x)$ in funzione di uno di essi.

Suppongasi $\varphi(x) = 4x^3 - g_2x - g_3$, $\psi(x) = \alpha x + \beta$ ed:

$$F(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n.$$

Dai coefficienti di x^n, x^{n-1} nella equazione superiore si ottengono pei valori di α, β le espressioni:

$$\alpha = -n(n+1), \qquad \beta = (2n-1)a_1$$

e dal coefficiente di x^{n-i} la:

$$4i(2n-i+1)(2n-2i+1)a_i = (n-i+1)[8(2n-1)a_1 a_{i-1} - \\ -(n-i+2)(2n-2i+3)g_2 a_{i-2} - 2(n-i+3)(n-i+2)g_3 a_{i-3}]$$

quindi:

$$8(2n-3)a_2 = (n-1)[8a_1^2 - ng_2].$$

$$24(2n-3)(2n-5)a_3 = (n-2)[8a_1^3 - (4n^2-11n+9)g_2 a_1 - 2n(2n-3)g_3]$$

e così di seguito.

Si indichino con e_1, e_2, e_3 le radici della equazione $\varphi(x)=0$; posto:

$$x-e_1 = (e_2-e_1)sn^2u, \qquad x-e_2 = (e_1-e_2)cn^2u, \qquad x-e_3 = (e_1-e_3)dn^2u$$

e $k^2 = \dfrac{e_2-e_1}{e_3-e_1}$, si ottiene facilmente che:

$$\frac{d^2y}{du^2} = \frac{\varphi(x)}{e_3-e_1}\left[y'' + \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}y'\right];$$

ma d'altra parte posto:

$$n(n-1)e_1 - (2n-1)a_1 = (e_3-e_1)h$$

si ha:

$$\psi = -(e_3-e_1)[n(n+1)k^2sn^2u + h]$$

per le quali l'equazione differenziale lineare del secondo ordine qui considerata si trasforma nella:

$$\frac{d^2y}{du^2} = [n(n+1)k^2sn^2u + h]y$$

che è la equazione di Lamé sotto la forma assegnatale dal sig. Hermite nelle ricerche sopra indicate.

Si avrà dunque in questo caso:

$$y_1y_2 = F(x)$$

e la equazione (4) divisa pel prodotto y_1y_2 darà:

$$\frac{y_1}{y_2} = e^{CZ(x)}$$

posto:

$$Z(x) = \int \frac{dx}{F(x)\sqrt{\varphi(x)}}.$$

La determinazione della costante C si ottiene facilmente per mezzo della equazione (6), giacchè essendo per le (8) $m = 2$, $h = -\frac{1}{4}$ si ha dalla medesima:

$$C^2 + \varphi(2FF'' - F'^2) + \varphi' FF' + 4\psi F^2 = 0 \tag{12}$$

per cui indicando con ω una radice della $F(x) = 0$, ed osservando che per la (11) quest'ultima equazione non può avere che radici semplici, si otterrà:

$$C = \pm F'(\omega)\sqrt{\varphi(\omega)}.$$

4.° Ritorniamo ora al caso generale della equazione (10) nella quale supponiamo ancora essere $F(x)$ un polinomio in x del grado n. Il numero delle equazioni che si deducono dalla medesima eguagliando a zero i coefficienti delle potenze di x essendo $3n + s - 2$ eliminando da esse gli $s - 1$ coefficienti di ψ, si avrebbero $3n - 1$ relazioni fra gli n coefficienti di F. Ma ponendo:

$$F = P^r Q$$

dove P è un polinomio del grado ρ e Q un polinomio del grado σ, per cui

$$r\rho + \sigma = n$$

il primo membro della equazione (10) contiene il fattore P^{2r-1}, e dividendo per questo fattore la equazione stessa diventa la:

$$2\varphi L + 3r\varphi' MQ + r^2(\varphi'' + 8\psi)NQ^2 + 4r^3\psi' PQ^3 = 0 \tag{13}$$

posto per brevità:

$$L = r^3 P''' Q^3 + r^2(3P''Q' + 3P'Q'' + PQ''')Q^2 - 3r(r-1)(P'Q' + PQ'')QQ' + \\ + (r-1)(2r-1)PQ'^3$$

$$M = r^2 P'' Q^2 + r(2P'Q' + PQ'')Q - (r-1)PQ'^2$$

$$N = rP'Q + PQ'.$$

Quest' ultima equazione dà evidentemente $\rho + 3\sigma + s - 2$ relazioni fra i $\rho + \sigma + s - 1$ coefficienti di P, Q, ψ. Escludendo il caso in cui $\sigma = 0$ già considerato al paragrafo precedente, la supposizione $\sigma = 1$ darebbe una equazione di più del numero dei coefficienti a determinarsi. Ma la equazione stessa (13) dimostra che indicando con ξ una radice della equazione $\varphi(x) = 0$, si ha $Q(\xi) = 0$; si avrebbe quindi nell'ipotesi superiore:

$$Q(x) = x - \xi.$$

Ora dai valori di L, M, N si vede tosto che i vari termini del primo membro della equazione (13) sono divisibili per Q^2, salvo i seguenti:

$$(r-1)P[2(2r-1)\varphi-3rQ\varphi']$$

i quali sono però divisibili per Q, giacchè $x-\xi$ è un fattore del polinomio $\varphi(x)$. Ora affinchè quest'ultima espressione sia divisibile una seconda volta per Q, dovrà essere $2(2r-1)=3r$ ossia $r=2$, ed in questo caso la equazione (13) divisa per $(x-\xi)^2$ si abbasserà al grado $\rho+s-2$ e fornirà $\rho+s-1$ equazioni colle quali determinare i ρ coefficienti di P e gli $s-1$ coefficienti di ψ.

Ne risulta che posto:

$$y_1^2 y_2^2 = F(x)$$

se n è pari dovrà essere $F(x)$ un quadrato e si rientra nel caso precedente, se n è dispari ed eguale a $2\rho+1$ sarà:

$$F(x)=(x-\xi)P^2$$

dove P è un polinomio del grado ρ e ξ una radice della equazione $\varphi(x)=0$.

La equazione (13) divisa per $4(x-\xi)^2$ supponendo come sopra $\varphi(x)=4x^3-g_2x-g_3$ conduce alla:

$$AP'''+BP''+CP'+DP=0$$

essendo:

$$A=2(x-\xi)\varphi(x), \qquad B=3(x-\xi)(16x^2+4\xi x+4\xi^2-2g_2)$$
$$C=54x^2-30\xi x-6\xi^2-\tfrac{3}{2}g_2+8(x-\xi)\psi(x)$$
$$D=3(2x-\xi)+4\psi(x)+4(x-\xi)\psi'(x).$$

Sieno $\psi(x)=\alpha x+\beta$ e:

$$P=x^\rho+\alpha_1 x^{\rho-1}+\cdots$$

i coefficienti di $x^{\rho+1}$, x^ρ nella equazione superiore eguagliati a zero danno per α, β i seguenti valori:

$$\alpha=-\tfrac{1}{4}(2\rho+1)(2\rho+3), \qquad \beta=(2\alpha_1-\xi)\rho$$

ossia:

$$\alpha=-\frac{n(n+2)}{4}, \qquad \beta=\frac{n-1}{2}(2\alpha_1-\xi)=\frac{n-1}{2}a_1$$

rammentando essere a_1 il coefficiente del secondo termine in $F(x)$.

Posto quindi analogamente a quanto si fece al paragrafo precedente:

$$\frac{n(n+2)}{4}e_1-\frac{n-1}{2}a_1=(e_3-e_1)h$$

la equazione differenziale:

$$\frac{d^2y}{du^2}=\left[\frac{n(n+2)}{4}k^2sn^2u+h\right]y$$

la quale per n pari coincide con quella di Lamé, ha la proprietà per n dispari che indicando con y_1, y_2 due integrali particolari della medesima, si avrà:

$$y_1y_2=P(sn^2u)\cdot snu$$

essendo P un polinomio del grado $\frac{n-1}{2}$.

Passiamo ora a dimostrare che gli integrali stessi sono algebrici.

5.° Essendo

$$y_1y_2=P(x)\sqrt{x-\xi}$$

la equazione (12) nella quale si ponga $F(x)=P(x)\sqrt{x-\xi}$ ed indi si faccia $x=\xi$ dà per C il seguente valore:

$$C=\tfrac{1}{2}P(\xi)\sqrt{\varphi'(\xi)}$$

mentre ponendo in essa $x=x_s$, essendo x_s una delle radici della equazione $P(x)=0$, si ha:

$$C=\sqrt{x_s-\xi}\cdot P'(x_s)\sqrt{\varphi(x_s)}$$

e la equazione (4) divisa pel prodotto y_1y_2 conduce alla:

$$\log\left(\frac{y_1}{y_2}\right)=C\int\frac{dx}{P(x)\sqrt{(x-\xi)\varphi(x)}};$$

ma $x-\xi$, per quanto si è dimostrato al § 4.° è un fattore di $\varphi(x)$, quindi ponendo $\varphi(x)=(x-\xi)\mu(x)$ si avrà:

$$\log\left(\frac{y_1}{y_2}\right)=C\int\frac{dx}{P(x)(x-\xi)\sqrt{\mu(x)}}$$

e pel doppio valore di C:

$$\log\left(\frac{y_1}{y_2}\right)=\tfrac{1}{2}\sqrt{\mu(\xi)}\int\frac{dx}{(x-\xi)\sqrt{\mu(x)}}+\sum_1^{\rho}{}_s\sqrt{\mu(x_s)}\int\frac{dx}{(x-x_s)\sqrt{\mu(x)}}$$

osservando essere $\mu(\xi)=\varphi'(\xi)$.

Posto quindi:

$$\sqrt{\mu(x)} - \sqrt{\mu(a)} - 2(x-a) = t_1(a); \qquad \sqrt{\mu(x)} + \sqrt{\mu(a)} - 2(x-a) = t_2(a)$$

si otterranno per gli integrali particolari y_1, y_2 i valori seguenti:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \sqrt{P(x)}\cdot(x-\xi)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{t_1(\xi)}{t_2(\xi)}\right]^{\frac{1}{4}}\Pi_s\left[\frac{t_1(x_s)}{t_2(x_s)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ y_2 &= \sqrt{P(x)}\cdot(x-\xi)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{t_2(\xi)}{t_1(\xi)}\right]^{\frac{1}{4}}\Pi_s\left[\frac{t_2(x_s)}{t_1(x_s)}\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

6.° Consideriamo ora in modo speciale il caso particolare in cui $n=1$, si avranno pei valori superiori:

$$\alpha = -\tfrac{3}{4}, \qquad \beta = 0$$

e la equazione differenziale risulterà la:

$$y'' + \frac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}y' - \frac{3}{4}\frac{x}{\varphi(x)}y = 0$$

essendo sempre $\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$. Le formole (14) daranno pei due integrali particolari della medesima:

$$y_1 = (x-\xi)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{t_1}{t_2}\right]^{\frac{1}{4}}, \qquad y_2 = (x-\xi)^{\frac{1}{4}}\left[\frac{t_2}{t_1}\right]^{\frac{1}{4}}$$

posto t_1, t_2 in luogo di $t_1(\xi)$, $t_2(\xi)$; e la forma biquadratica:

$$f(y_1, y_2) = a_0 y_1^4 + 6a_2 y_1^2 y_2^2 + a_4 y_2^4$$

nella quale a_0, a_2, a_4 sono costanti, diventerà:

$$f(y_1, y_2) = \frac{x-\xi}{t_1 t_2}\left[a_0 t_1^2 + 6a_2 t_1 t_2 + a_4 t_2^2\right].$$

Sieno g_2, g_3 gli invarianti quadratico e cubico della forma biquadratica f, si avranno le:

$$g_2 = a_0 a_4 + 3a_2^2, \qquad g_3 = a_0 a_2 a_4 - a_2^3$$

dalle quali:

$$4a_2^3 - g_2 a_2 + g_3 = 0, \qquad a_0 a_4 = g_2 - 3a_2^2.$$

La prima di esse dimostra essere $a_2 = -\xi$, e siccome:

$$g_2 - 3\xi^2 = [3\xi + \sqrt{\varphi'(\xi)}][3\xi - \sqrt{\varphi'(\xi)}]$$

si potrà porre $a_0 = \eta_2$, $a_4 = \eta_1$ essendo:

$$\eta_2 = 3\xi + \sqrt{\varphi'(\xi)}, \qquad \eta_1 = 3\xi - \sqrt{\varphi'(\xi)}$$

e la funzione f si trasforma nella:

$$f = \frac{x-\xi}{t_1 t_2}\,[\eta_2 t_1^2 - 6\xi t_1 t_2 + \eta_1 t_2^2].$$

Ma pei valori di t_1, t_2 essendo:

$$t_1 - t_2 = -2\sqrt{\varphi'(\xi)}$$

si hanno le:

$$t_1^2 = t_1 t_2 - 2t_1\sqrt{\varphi'(\xi)}; \qquad t_2^2 = t_1 t_2 + 2t_2\sqrt{\varphi'(\xi)}$$

per le quali:

$$f = 2\sqrt{\varphi'(\xi)}\,\frac{x-\xi}{t_1 t_2}\,[\eta_1 t_2 - \eta_2 t_1];$$

inoltre essendo:

$$\eta_1 t_2 - \eta_2 t_1 = 2[2x + \xi - \sqrt{\mu(x)}]\sqrt{\varphi'(\xi)}, \qquad t_1 t_2 = 4(x-\xi)[2x + \xi - \sqrt{\mu(x)}]$$

risulterà:

$$f(y_1, y_2) = \varphi'(\xi)$$

o pel primo dei valori di C trovati al § 5.°

$$f(y_1, y_2) = 4C_1^2.$$

Gli integrali particolari y_1, y_2 rendono quindi la forma biquadratica

$$f(y_1, y_2) = \eta_2 y_1^4 - 6\xi y_1^2 y_2^2 + \eta_1 y_2^4$$

(di cui gli invarianti sono g_2, g_3), eguale ad una costante $4C^2$; e la equazione (6) nella quale facciasi $m = 4$ ed $F = 4C^2$ darà pel valore corrispondente dell'Hessiano:

$$h(y_1, y_2) = -4C^2 x \text{ da cui: } h(y_1, y_2) + x f(y_1, y_2) = 0.$$

Il caso qui considerato comprende evidentemente quello che il sig. Schwarz ha discusso alla pag. 325 e seguenti della sua Memoria citata più sopra. Supponendo infatti $g_2 = 0$, si potrà porre $g_3 = 4\xi^3$ e trasformando l'equazione differenziale, assumendo in luogo di x la variabile z legata alla prima dalla relazione $x^3 = \xi^3 z$, si ottiene la:

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \tfrac{1}{6}\,\frac{4-7z}{z(1-z)}\,\frac{dy}{dz} + \tfrac{1}{48}\,\frac{1}{z(1-z)}\,y = 0$$

ossia la equazione differenziale ipergeometrica del tetraedro per la quale:

$$\alpha = \tfrac{1}{4}, \qquad \beta = -\tfrac{1}{12}, \qquad \gamma = \tfrac{2}{3}.$$

7.° Passiamo da ultimo a dimostrare un'altra interessante proprietà della classe di equazioni differenziali lineari del secondo ordine fin qui esaminata.

Essendo come precedentemente $\varphi(x) = 4x^3 - g_2 x - g_3$ consideriamo l'equazione differenziale seguente:

$$y'' + \tfrac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} y' + \frac{\alpha t(x) + \beta}{\varphi(x)} y = 0 \tag{15}$$

le α, β avendo i valori determinati ai §§ 3.° e 4.° e $t(x)$ essendo una funzione di x che soddisfa l'altra equazione differenziale:

$$\frac{dt}{\sqrt{\Phi(t)}} = \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} \tag{16}$$

nella quale supponiamo $\Phi(t) = 4t^3 - G_2 t - G_3$. Come è noto quest'ultima equazione è quella per la trasformazione delle funzioni elittiche, e si ha per una trasformazione di ordine n numero primo:

$$t = \frac{U(x)}{T^2(x)}$$

essendo T un polinomio del grado $\frac{n-1}{2}$, ed U un polinomio del grado n. Ora osservando che dalla equazione stessa si deducono le:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\sqrt{\Phi(t)}}{\sqrt{\varphi(x)}}, \qquad \frac{d^2t}{dx^2} + \tfrac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\frac{dt}{dx} = \frac{\Phi'(t)}{2\varphi(x)}$$

si ha evidentemente essere:

$$y'' + \tfrac{1}{2}\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} y' = \frac{\Phi(t)}{\varphi(x)}\left[\frac{d^2y}{dt^2} + \tfrac{1}{2}\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}\frac{dy}{dt}\right].$$

La equazione (15) si trasformerà quindi per mezzo della (16) nella seguente:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \tfrac{1}{2}\frac{\Phi'(t)}{\Phi(t)}\frac{dy}{dt} + \frac{\alpha t + \beta}{\Phi(t)} y = 0$$

che appartiene alla classe considerata più addietro. A ciascun ordine di trasformazione corrisponde quindi una equazione differenziale (15), la integrazione della quale dipende da quella di quest'ultima.

Gennajo 1878.

Sur l'équation de Lamé

(extrait d'une lettre à Mr. Brioschi).

(*Par Mr.* C. Hermite, *à Paris.*)

. . . .

Vous ne serez donc pas surpris que je sois parvenu de mon côté à l'équation différentielle du 3$^{\text{me}}$ ordre:

$$z''' + 3pz'' + (p' + 2p^2 + 4q)z' + 2(q' + 2pq)z = 0$$

dont les solutions sont les produits de deux solutions de l'équation du second ordre:

$$y'' + py' + qy = 0;$$

mais je l'obtiens sous une forme un peu différente, en prenant pour point de départ, l'équation:

$$2Ay'' + A'y' = By. \tag{1}$$

Un calcul facile me donne:

$$2Az''' + 3A'z'' + A''z' = 4Bz' + 2B'z \tag{2}$$

et voici les conséquences que j'en tire. Faisant dans l'équation de Lamé, $sn^2 x = t$, on obtiendra pour transformée l'équation (1), on l'on prendra:

$$A = t(1-t)(1-k^2 t)$$

$$2B = n(n+1)k^2 t + h.$$

Les fonctions A et B étant ainsi de simples polynômes, du troisième et du premier degré en t, la différentiation d'ordre p de l'équation (2), donne:

$$2Az^{p+3} + (2p+3)A'z^{p+2} + \left[\frac{5p(p+1)+2}{2}A'' - 2B\right]z^{p+1}$$

$$+ [2p(p-1)(p-2) + 9p(p-1) + 6p - (2p+1)(n^2+n)]k^2 z^p = 0;$$

or on peut mettre le coefficient de z^p, sous la forme:

$$(2p+1)(p-n)(p+n+1);$$

il s'annulle donc en faisant $p=n$, et en adoptant cette valeur, l'équation est satisfaite si l'on pose $z^p=\text{const.}$ L'équation (2) par conséquent admet pour solution un polynôme entier en t de degré n, $z=F(t)$, et les conclusions aux qu'elles vous êtes parvenu pour $n=1$, s'étendent d'elles mêmes au cas ou n est quelconque. En effet, deux solutions y_1 et y_2 de l'équation (1) sont liées par la relation:

$$y_2\frac{dy_1}{dt}-y_1\frac{dy_2}{dt}=\frac{C}{\sqrt{A}}$$

ou C est une constante, et en y joignant la condition:

$$\frac{d(y_1y_2)}{dt}=y_2\frac{dy_1}{dt}+y_1\frac{dy_2}{dt}=F'(t)$$

on en déduira:

$$y_2\frac{dy_1}{dt}=\frac{1}{2}\left[F'(t)+\frac{C}{\sqrt{A}}\right], \qquad y_1\frac{dy_2}{dt}=\frac{1}{2}\left[F'(t)-\frac{C}{\sqrt{A}}\right]$$

et par suite:

$$\frac{1}{y_1}\frac{dy_1}{dt}=\frac{1}{2}\left[\frac{F'(t)}{F(t)}+\frac{C}{\sqrt{A}F(t)}\right], \qquad \frac{1}{y_2}\frac{dy_2}{dt}=\frac{1}{2}\left[\frac{F'(t)}{F(t)}-\frac{C}{\sqrt{A}F(t)}\right]$$

d'où enfin:

$$y=Ge^{\frac{1}{2}\int\left[\frac{F'(t)}{F(t)}+\frac{C}{\sqrt{A}F(t)}\right]dt}+G'e^{\frac{1}{2}\int\left[\frac{F'(t)}{F(t)}-\frac{C}{\sqrt{A}F(t)}\right]dt} \tag{3}$$

en désignant par G et G' deux constantes arbitraires.

Voici maintenant à l'égard de la costante C, une remarque essentielle. On tire aisément de l'équation (2), la suivante:

$$A(2zz''-z'^2)+A'zz'=2Bz^2-N, \tag{4}$$

et en résultat se vérifie sur le champ en différentiant et divisant les deux membres par z. Mais à la solution spéciale de cette équation qui est donnée en prenant pour z le polynôme $F(t)$, correspond une valeur entièrement déterminée de N. Qu'on attribue en effet à la variable t pour valeur particulière une racine de l'équation $y_1=0$, nous aurons en même temps, $z=0$, $z'=y'_1y_2$, donc: $N = A(y'_1 y_2)^2$. Or en attribuant cette même valeur à t, dans l'équation

$$y_2 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dy_2}{dt} = \frac{C}{\sqrt{A}},$$

vous voyez qu'on en conclut: $C = \sqrt{A}\, y'_1 y_2$; nous parvenons par suite à cette expression $C = \sqrt{N}$, et tout se trouve par conséquent déterminé dans la formule (3) qui donne ainsi la solution complète de l'équation de Lamé.

Vous reconnaitrez maintenant sans peine, qu'en posant $N = 0$ on a les valeurs particulières de h aux quelles correspondent les solutions qui, à l'égard de la variable x, sont des fonctions doublement périodiques, mais en laissant de côté, ce point, je vous indiquerai une dernière remarque. L'équation (4) montre qu'en supposant N différent de zéro, il est impossible d'avoir à la fois: $F(t) = 0$, et $F'(t) = 0$, de sorte que la première équation n'a que des racines simples. Soit: $t = \tau$ l'une quelconque de ces racines, et faisons:

$$\frac{1}{F(t)} = \sum \frac{1}{F'(\tau)(t-\tau)}.$$

Si nous désignons par T la valeur de A pour $t = \tau$, de sorte que l'équation (4), donne:

$$TF'^2(\tau) = N$$

on en conclura:

$$\frac{\sqrt{N}}{F(t)} = \sum \frac{\sqrt{N}}{F'(\tau)(t-\tau)} = \sum \frac{\sqrt{T}}{t-\tau}$$

et par conséquent:

$$\frac{F'(t)}{F(t)} + \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{A}F(t)} = \sum \left[\frac{1}{t-\tau} + \frac{\sqrt{T}}{\sqrt{A}(t-\tau)}\right] = \sum \frac{\sqrt{A}+\sqrt{T}}{\sqrt{A}(t-\tau)}.$$

Cette formule conduit de la manière la plus facile à l'expression de l'intégrale qui figure en exponentielle dans l'équation (3). Faisant en effet: $t = sn^2 x$, $\tau = sn^2 \omega$, on a:

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{A}+\sqrt{T}}{t-\tau}\, dt = \int \frac{sn\,x\, cn\,x\, dn\,x + sn\,\omega\, cn\,\omega\, dn\,\omega}{sn^2 x - sn^2 \omega}\, dx = \int \left[\frac{H'(x-\omega)}{H(x-\omega)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + \frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}\right] dx.$$

(voyez C. R., pag. 1086). Soit pour plus de clarté: $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$ les n détermination de ω qui correspondent aux diverses racines τ, et qui ont été choisies de telle sorte qu'on ait: $\sqrt{T} = sn\,\omega\, cn\,\omega\, dn\,\omega$, en excluant comme vous voyez la supposition: $\sqrt{T} = -sn\omega cn\omega dn\omega$, nous parvenons à ce résultat:

$$e^{\frac{1}{2}\int\left[\frac{F'(t)}{F(t)}+\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{A F(t)}}\right]dt} = \frac{H(x-\omega_1)H(x-\omega_2)\cdots H(x-\omega_n)}{\Theta^n(x)} e^{x\Sigma\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}},$$

et il est clair qu'on aurait semblablement:

$$e^{\frac{1}{2}\int\left[\frac{F'(t)}{F(t)}-\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{A F(t)}}\right]dt} = \frac{H(x+\omega_1)H(x+\omega_2)\cdots H(x+\omega_n)}{\Theta^n(x)} e^{-x\Sigma\frac{\Theta'(\omega)}{\Theta(\omega)}}.$$

Cette méthode pour intégrer l'équation de Lamé se trouve dans les feuilles lithographiées de mon cours de 1872 à l'Ecole Polytecnique . . . . . .

17 décembre 1877.

Ueber eine Classe von Differenzialgleichungen, welche durch Abelsche oder elliptische Functionen integrirbar sind.

[*Von* L. Fuchs, *in Heidelberg* (*).]

Die Differenzialgleichung

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = [n(n+1) k^2 \sin^2 am x + h] y \tag{A}$$

durch welche bekanntlich die Laméschen Functionen definirt werden, ist nach Lamé insbesondere von Herrn Heine zum Gegenstande eingehender Untersuchungen gemacht worden. Während man sich jedoch bis dahin darauf beschränkte, nur solche Werthe von h in Betracht zu ziehen, für welche die Differenzialgleichung durch doppeltperiodische Functionen integrirbar ist, hat in neuerer Zeit Herr Hermite es unternommen, dieselbe Differenzialgleichung für beliebige Werthe von h zu integriren (*Sur quelques applications des fonctions elliptiques* in den Comptes Rendus de l'Académie des sciences de Paris 15 octobre 1877, sqq.). Unter diesen Umständen scheint es nicht ohne Interesse, auf eine Classe von linearen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung hinzuweisen, welche ich in meiner Arbeit (Borchardt's Journal, Band 81, p. 116-118, Nr. 13) durch Abelsche oder elliptische Funktionen integrirt habe, und wovon nicht nur die Lamésche Differenzialgleichung (A), sondern auch diejenigen Differenzialgleichungen, welche Herr Heine (Borchardt's Journal, Band 60, p. 252) den Laméschen Functionen höherer Ordnung zu Grunde gelegt hat, besondere Fälle sind.

(*) Abdruck aus den Nachrichten der Göttinger K. Gesellschaft der Wissenschaften.

1.

Wir resumiren zuerst die Resultate der Nr. 13, p. 116-118 meiner Arbeit in Borchardt's Journal, Band 81.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine Differenzialgleichung:

$$\frac{d^2y}{dz^2} = Py \tag{B}$$

ein Integral der Form

$$y = \varphi(z)^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{4}}\int\frac{dz}{\varphi(z)}} \tag{1}$$

habe, wo $\varphi(z)^2$ eine rationale Function von z und λ eine Constante, ist die, dass P die Form habe:

$$P = \frac{1}{4}\left(\frac{d\log\varphi}{dz}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{d^2\log\varphi}{dz^2} - \frac{\lambda}{4\varphi^2}. \tag{C}$$

1) Ist λ von Null verschieden, so hat Gl. (B) das Fundamentalsystem von Integralen:

$$y_1 = \varphi(z)^{\frac{1}{2}} e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{4}}\int\frac{dz}{\varphi(z)}}, \qquad y_2 = \varphi(z)^{\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{-\frac{\lambda}{4}}\int\frac{dz}{\varphi(z)}}. \tag{D}$$

2) Ist $\lambda = 0$, so sind

$$y_1 = \varphi(z)^{\frac{1}{2}} \qquad y_2 = \varphi(z)^{\frac{1}{2}}\int\frac{dz}{\varphi(z)} \tag{E}$$

ein Fundamentalsystem.

Für die Werthe von z, für welche $\varphi(z)$ unendlich wird, ist P ebenfalls unendlich, für die Nullwerthe b von $\varphi(z)$, dagegen ist P nur dann nicht unendlich, wenn

$$\varphi'(b)^2 = -\lambda, \text{ wo } \varphi'(z) = \frac{d\varphi(z)}{dz}. \tag{F}$$

2.

Wir betrachten nunmehr den speciellen Fall:

$$R(z)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{2}R'(z)\frac{du}{dz} + H(z)\cdot u = 0, \tag{G}$$

wo $R(z)$, $H(z)$ ganze rationale Functionen resp. vom Grade m und $m-2$ sind und $R'(z)=\frac{dR(z)}{dz}$, und ausserdem $R(z)$ nur ungleiche Linearfactoren hat.

Wendet man die Substitution

$$u=R(z)^{-\frac{1}{4}}\cdot y \tag{1}$$

(s. meine oben citirte Abhandlung, p. 102) an, setzt

$$\varphi=G\cdot R^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

und berücksichtigt, dass die zu den singulären Punkten der Gleichung (G) gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen die Wurzeln 0, $\frac{1}{2}$ haben, so folgt aus Nr. 1, dass die Gleichung (G) dann und nur dann ein Integral der Form

$$u=G^{\frac{1}{2}}e^{\sqrt{-\frac{\lambda}{4}}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}} \tag{3}$$

hat, wenn G eine ganze rationale Function ist mit der Eigenschaft, dass für jeden Nullwerth b von G

$$G'(b)^2R(b)=-\lambda, \qquad G'(z)=\frac{dG(z)}{dz}, \tag{F'}$$

und

$$H(z)=\left[-\frac{1}{4}\left(\frac{d\log G}{dz}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{d^2\log G}{dz^2}-\frac{1}{4}\frac{d\log G}{dz}\frac{d\log R}{dz}+\frac{\lambda}{4G^2\cdot R}\right]R. \tag{C'}$$

Ist λ von Null verschieden, so ist demnach $G(z)$ durch keinen quadratischen Factor theilbar und für die Wurzeln der Gleichung $R(z)=0$ von Null verschieden.

Ist dagegen $\lambda=0$, so ist $G(z)$ für $z=b$ Null zweiter oder erster Ordnung je nachdem $R(b)$ von Null verschieden oder gleich Null ist. Ist $R(b)$ von Null verschieden, so ist

$$\frac{G^{(3)}(b)}{G^{(2)}(b)}=-\frac{3}{2}\frac{R'(b)}{R(b)}, \qquad G^{(k)}(z)=\frac{d^kG(z)}{dz^k}. \tag{F''}$$

Ist $\lambda=0$, so wird die quadratische Form S. 116 Nr. 13 Gl. (1) meiner citirten Arbeit ein Quadrat, es genügt daher $\sqrt{G}$ der Gleichung (G).

3.

Nach S. 129 Nr. 21 meiner citirten Arbeit genügt $G(z)$ unter allen Umständen der Differenzialgleichung:

$$R\frac{d^3w}{dz^3}+\frac{3}{2}R'\frac{d^2w}{dz^2}+\left[\frac{1}{2}R''+4H\right]\frac{dw}{dz}+2H'w=0 \qquad (H)$$

$$\frac{d^kR}{dz^k}=R^{(k)}, \qquad \frac{d^kH}{dz^k}=H^{(k)}.$$

Man gelangt daher auch auf folgendem Wege zur Bestimmung der Coefficienten von $H(z)$. Damit Gleichung (H) durch eine ganze rationale Function $2n$ten Grades $G(z)$ befriedigt werde, setze man

$$G(z)=c_0+c_1z+\cdots+c_{2n}z^{2n}$$

in dieselbe ein. Es sind alsdann die $m+2n-2$ Gleichungen

$$\sum_0^m{}_i\left[(l+3-i)(l+1)\left(l+2-\frac{1}{2}i\right)p_i+(4l+8-2i)A_{i-2}\right]c_{l+3-i}=0 \qquad (J)$$

für $l=0, 1, 2,\ldots, m+2n-3$ zu befriedigen, wo

$$R(z)=\sum_0^m{}_i p_iz^i, \qquad H(z)=\sum_0^{m-2}{}_i A_iz^i$$

gesetzt ist. Zwischen diesen Gleichungen eliminire man die Grössen $c_0, c_1,\ldots c_{2n}$, und erhält für die Coefficienten $A_0, A_1,\ldots A_{m-2}$, $m-2$ Gleichungen, wodurch sie sämmtlich als Functionen eines derselben, z. B. A_0, welcher willkürlich bleibt, sich ergeben.

Soll die Gleichung (G) durch die Function $\sqrt{G}$ befriedigt werden, so tritt zu den Gleichungen (J) noch eine Gleichung hinzu, welche ausdrückt, dass $G(z)$ durch einen quadratischen Factor theilbar wird. Oder man substituire nach Nr. 2 in Gleichung (G)

$$\sqrt{G}=(c'_0+c'_1z+\cdots+c'_\mu z^\mu)\sqrt{R_1(z)}$$

wo $R_1(z)$ eine ganze rationale Function νten Grades, welche nur für die Wurzeln der Gleichung $R(z)=0$ und für diese nur erster Ordnung verschwindet, und stelle die Bedingungsgleichungen für die Coefficienten $c'_0, c'_1,\ldots c'_\mu, A_0, A_1,\ldots A_{m-2}$ auf. Nach der einen oder der anderen Methode ergiebt sich eine algebraische Gleichung für den im allgemeinen Falle willkürlich verbleibenden Coefficienten A_0.

4.

Ist $G(z)$ durch keinen quadratischen Factor theilbar, und für die Wurzeln der Gleichung $R(z)=0$ von Null verschieden, so ist nach Nr. 2 λ von Null verschieden, und man erhält als Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (G)

$$u_1 = G^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}}, \qquad u_2 = G^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}}. \tag{K}$$

Bezeichnen wir mit $b_1, b_2, \ldots b_{2n}$ die Wurzeln der Gleichung $G(z)=0$ und setzen

$$G'(b_i)\sqrt{R(b_i)} = \varepsilon_i\sqrt{-\lambda}, \tag{1}$$

so ist nach Nr. 2 $\varepsilon_i = \pm 1$ und $\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int\frac{dz}{G\sqrt{R}}$ ein Abelches Integral dritter Gattung und für $z=b_i$ unendlich wie $\frac{1}{2}\varepsilon_i\log(z-b_i)$. Durch Einführung der Abelschen Functionen lassen sich daher y_1, y_2 durch Thetafunctionen mit ρ Argumenten darstellen, wenn $m=2\rho+1$ oder $2\rho+2$ ist.

Indem wir uns die Ausführung dieser Rechnung, so wie die eingehendere Untersuchung des Falles $\lambda=0$, welcher sich auf die von Herrn Heine den Laméschen Functionen höherer Ordnung zu Grunde gelegten Differenzialgleichungen bezieht, vorbehalten, beschränken wir uns gegenwärtig auf den speciellen Fall der Laméschen Differenzialgleichung.

5.

Transformirt man die Gleichung (A) durch die Substitution

$$\frac{dz}{dx} = \sqrt{R(z)}, \qquad R(z) = (1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2), \tag{1}$$

so erhält man als besonderen Fall der Gleichung (G)

$$R(z)\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{2}R'(z)\frac{du}{dz} - [n(n+1)\varkappa^2 z^2 + h]u = 0. \tag{G'}$$

Für diesen Fall genügt der Gleichung (H) für jeden Werth von h eine ganze rationale Function von z, $G(z)$, $2n$ten Grades, der Form

$$G(z) = c_0 + c_1 z^2 + c_2 z^4 + \cdots + c_n z^{2n}. \tag{2}$$

Das System der Gleichungen (J) reducirt sich nämlich in diesem Falle auf die n folgenden;

$$\left.\begin{array}{l}(2l+4)(2l+3)(2l+2)c_{l+2} - (2l+2)[(4l^2+8l+4)(\varkappa^2+1)+4h]c_{l+1} \\ \qquad + (2l+1)(2l-2n)(2l+2n+2)\varkappa^2 c_l = 0\end{array}\right\} \tag{J'}$$

für $l = 0, 1, 2, \ldots, n-1$, während die Anzahl der Unbekannten $c_0, c_1, c_2, \ldots c_n$ gleich $n+1$.

Setzen wir

$$G(z) = (z^2 - b_1^2)(z^2 - b_2^2)\cdots(z^2 - b^2{}_n), \tag{3}$$

$$z = \sin am x, \qquad b_i = \sin am \beta_i, \tag{4}$$

und drücken das Integral dritter Gattung $\frac{1}{2}\sqrt{-\lambda}\int \frac{dz}{G\sqrt{R}}$ durch Thetafunktionen aus, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung (1) Nr. 4 nach Gleichung (K) das folgende Fundamentalsystem der Gleichung (A)

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \prod\limits_{l=1}^{l=n} e^{-\varepsilon_l x \frac{\Theta'(\beta_l)}{\Theta(\beta_l)}} \cdot \dfrac{H(x+\beta_l)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon_l)} \cdot H(x-\beta_l)^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon_l)}}{\Theta(x)^n} \\[2ex] y_2 = \prod\limits_{l=1}^{l=n} e^{+\varepsilon_l x \frac{\Theta'(\beta_l)}{\Theta(\beta_l)}} \cdot \dfrac{H(x+\beta_l)^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon_l)} \cdot H(x-\beta_l)^{\frac{1}{2}(1+\varepsilon_l)}}{\Theta(x)^n}. \end{array}\right\} \tag{K'}$$

6.

Eine Ausnahme tritt nach Nr. 2 **dann und nur dann** ein, wenn die Gleichung (G') ein Integral von einer der Formen

$$f_{00} = F_{00}, \quad f_{10} = F_{10}\sqrt{1-z^2}, \quad f_{01} = F_{01}\cdot\sqrt{1-\varkappa^2 z^2}, \quad f_{11} = F_{11}\sqrt{R(z)} \tag{α}$$

besitzt, worin $F_{\alpha\beta}$ eine ganze rationale Function von z vom Grade $n-\alpha-\beta$ bedeutet.

Setzen wir

$$F_{\alpha\beta} = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_{n-\alpha-\beta}\cdot z^{n-\alpha-\beta},$$

so liefert die Substitution der Functionen (α) in die Gleichung (G') zur Bestimmung der Grössen $c_0, c_1, c_2, \ldots c_{n-\alpha-\beta}$ das System von Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}(l+2)(l+1)c_{l+2}-[(l+\alpha)^2+(l+\beta)^2\varkappa^2+h]c_l\\ +\varkappa^2(l+\alpha+\beta+n-1)(l+\alpha+\beta-n-2)c_{l-2}=0\end{array}\right\} \qquad (L)$$

für

$$l=0,\ 1,\ 2, \ldots\ n-\alpha-\beta+2$$

worin α, β resp. durch die Combinationen 0, 0; 1, 0; 0, 1; 1, 1 zu ersetzen sind. Je nachdem $n-\alpha-\beta$ gerade oder ungerade, kann man die Coefficienten von c mit ungeradem oder geradem Index gleich Null wählen, und es verbleiben zur Bestimmung der übrigen $\frac{n-\alpha-\beta}{2}+1$, resp. $\frac{n-\alpha-\beta+1}{2}$ Grössen c ebenso viele Gleichungen. Setzt man die Determinante derselben gleich Null, so erhält man eine algebraische Gleichung für h

$$\Psi(h)=0, \qquad (M)$$

welche im Wesentlichen mit derjenigen übereinstimmt, welche Lamé und Herr Heine als Bedingung für die Existenz ganzer Lösungen der Laméschen Differenzialgleichung aufgestellt haben.

Es sei

$$n-\alpha-\beta=\mu, \qquad (1)$$

so ist

$$F_{\alpha\beta}=(z^2-b_1^2)(z^2-b_2^2)\cdots(z^2-b^2_{\frac{\mu}{2}}) \qquad (2)$$

oder

$$F_{\alpha\beta}=z(z^2-b_1^2)(z^2-b_2^2)\cdots(z^2-b^2_{\frac{\mu-1}{2}}), \qquad (2\,a)$$

je nachdem μ gerade oder ungerade ist, worin die Grossen b_i von den Wurzeln der Gleichung $R(z)=0$ verschieden sind.

Reducirt man das Integral $\int\frac{dz}{f^2_{\alpha\beta}\sqrt{R}}$ auf die Normalform, was am zweckmässigsten durch das bekannte Verfahren des Herrn Weierstrass geschieht (s. meine Arbeit B. 71 des Borchardtschen Journals Nr. 9), so ergiebt sich unter Berücksichtigung der Gleichung: $R(b_i)f''_{\alpha\beta}(b_i)+\frac{1}{2}R'(b_i)f'_{\alpha\beta}(b_i)=0$, dass die Integrale dritter Gattung herausfallen (vergl. Heine: *Handb. der Kugelfunctionen,* p. 241).

Setzen wir nach geschehener Reduction

$$z = \sin am x, \qquad b_i = \sin am \beta_i,$$

so ergeben die Gleichungen (E), Gl. 1 in Nr. 2 das folgenden Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung (A)

$$\left.\begin{aligned} y_1 = f_{\alpha\beta} &= (\cos am x)^\alpha (\Delta am x)^\beta (\sin am x)^\varepsilon \prod_1^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}}{}_l \frac{H(x+\beta_l)H(x-\beta_l)}{\Theta(x)^{\mu-\varepsilon}} \\ y_2 = y_1 \Bigg[&\left(\sigma - \tau \frac{J}{K}\right) x + \sum_1^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}}{}_l \omega_l D \log H(x+\beta_l) H(x-\beta_l) \\ &- \varepsilon D \log H(x) + \alpha\gamma D \log H_1(x) + \beta\delta D \log \Theta_1(x) \Bigg] \end{aligned}\right\} (N)$$

wo $\varepsilon = 0$ oder 1, je nachdem μ gerade oder ungerade,

$$\gamma = \frac{2}{R'(1) F^2{}_{\alpha\beta}(1)}, \qquad \delta = \frac{2}{\varkappa R'\left(\frac{1}{\varkappa}\right) F^2{}_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)}$$

$$\sigma = -\varkappa^2 \sum_1^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}}{}_l \frac{b^2{}_l}{f'{}_{\alpha\beta}(b_l)^2 R(b_l)} + \alpha\gamma\varkappa^2 + \beta\delta$$

$$\omega_l = -\frac{1}{R(b_l) f'{}_{\alpha\beta}(b_l)^2}, \qquad \tau = 2 \sum_1^{\frac{\mu-\varepsilon}{2}}{}_l \omega_l - \varepsilon + \alpha\gamma + \beta\delta.$$

Man hat für α, β die Combinationen 0, 0; 1, 0; 0, 1; 1, 1 zu setzen. Natürlich ist die letzte nur für $n \geqq 2$ möglich:

Ist z. B. $n = 1$, so ergeben die Gl. (I')

$$G(z) = \sin^2 am a - z^2,$$

wenn man mit Herrn Hermite

$$h = -1 - \varkappa^2 + \varkappa^2 \sin^2 am a$$

setzt. Die Gleichungen (K') werden:

$$y_1 = e^{-x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}} \cdot \frac{H(x+a)}{\Theta(x)}, \qquad y_2 = e^{x\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}} \cdot \frac{H(x-a)}{\Theta(x)}.$$

Nach Gleichung (L) ist

1) für $\alpha = 0$, $\beta = 0$, die Gl. (M) $h = -1 - \varkappa^2$, $\mu = 1$, $\varepsilon = 1$, $f_{00} = F_{00} = z$, die Gl. (N):

$$y_1 = \sin am x, \qquad y_2 = \sin am x \left[\frac{J}{K} x - D \log H(x)\right]$$

2) fur $\alpha=1$, $\beta=0$ die Gl. (M): $h=-1$, $\mu=0$, $\varepsilon=0$, $\gamma=-\frac{1}{\varkappa'^2}$, $\sigma=-\frac{\varkappa^2}{\varkappa'^2}$, $\tau=-\frac{1}{\varkappa'^2}$

$$f_{10}=\sqrt{1-z^2},\qquad F_{10}=1.$$

Die Gl. (N):

$$y_1=\cos am x,\qquad y_2=\frac{1}{\varkappa'^2}\cos am x\left[\frac{J-K\varkappa^2}{K}x-D\log H_1(x)\right]$$

3) $\alpha=0$, $\beta=1$, die Gl. (M) $h=-\varkappa^2$, $\mu=0$, $\varepsilon=0$, $\delta=\frac{1}{\varkappa'^2}$, $\sigma=\frac{1}{\varkappa'^2}$, $\tau=\frac{1}{\varkappa'^2}$. Die Gl. ($N$):

$$y_1=\Delta am x,\qquad y_2=\frac{1}{\varkappa'^2}\Delta am x\left[\frac{K-'J}{K}x+D\log\Theta_1(x)\right],$$

Resultate, welche mit denen des Herrn Hermite l. c., p. 826 übereinstimmen.

7.

Während für ein willkürliches h die Gleichung (A) durch ein Fundamentalsystem von Integralen (K') befriedigt wird, deren logarithmische Ableitung doppelt periodisch ist, findet dieses für diejenigen besonderen Werthe von h, für welche die Gleichung (G') durch eine Function der Form $f_{\alpha\beta}(z)$ befriedigt wird, nicht mehr statt, wie die Gl. (N) zeigen. Man kann dieses aber auch a priori ohne Zuhülfenahme der Integrale (N) erkennen. Es sei nämlich $u_1=f_{\alpha\beta}(z)$, so kann zunächst $u_2=u_1\int\frac{dz}{u_1^2\sqrt{R}}$ nicht algebraisch sein. Denn da die zu den singulären Punkten der Gleichung (G') gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen die Wurzeln 0, $\frac{1}{2}$ haben, so würde sich ein Integral u_2 ergeben der Form $u_2=f_{\alpha'\beta'}(z)$, (s. meine Abh. B. 66 des Borchardtschen Journals Nr. 6 II), worin die Combination α' β' von der Combination α β verschieden wäre. Dieses ist aber nicht möglich, denn da die zum Punkte $z=\infty$ gehörige determinirende Fundamentalgleichung der Gleichung (G') die Wurzeln $-n$ und $n+1$ hat, und $f_{\alpha\beta}$, $f_{\alpha'\beta'}$ beide für $z=\infty$ unendlich $n$ter Ordnung werden, so müsste $f_{\alpha'\beta'}=\text{Const.}\ f_{\alpha\beta}$ sein.

Es seien nunmehr a, a' zwei beliebige singuläre Punkte der Gleichung (G'), so gehört $u_1 = f_{\alpha\beta}(z)$ zu einer der Wurzeln 0, $\frac{1}{2}$ der zu a gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung, und es gehöre ein Integral u_2 resp. zu $\frac{1}{2}$ oder 0. Ferner sei η_1, η_2 ein zu 0, $\frac{1}{2}$ resp. gehöriges auf a' hezügliches Fundamentalsystem, so ist

$$u_1 = c_{11}\eta_1 + c_{12}\eta_2, \qquad u_2 = c_{21}\eta_1 + c_{22}\eta_2,$$

wo entweder $c_{11} = 0$ oder $c_{12} = 0$, weil $u_1 = f_{\alpha\beta}(z)$. Es sind aber wenigstens für irgend ein a' die Grössen c_{21}, c_{22} von Null verschieden, weil u_2 nicht algebraisch ist. Nach einem Umlaufe um a und a' gehen u_1, u_2 resp. über in

$$\frac{c_{11}c_{22} + c_{12}c_{21}}{\Delta}\cdot u_1 - \frac{2\,c_{11}c_{12}u_2}{\Delta}, \qquad -\frac{2\,c_{21}c_{22}u_1}{\Delta} + \frac{c_{21}c_{12} + c_{11}c_{22}}{\Delta}\cdot u_2$$

wo $\Delta = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$ von Null verschieden ist. Da c_{21}, c_{22} nicht verschwinden, so ist u_2 nicht in sich selbst multiplicirt mit einer Constanten übergegangen, oder, was auf dasselbe hinaus kommt, es ist, wenn man $u_2 = f(x)$ setzt, $D\log f(x)$ nicht periodisch, da ein Umlauf von z um zwei singuläre Punkte der Gl. (G') einer Vermehrung von x um eine der Perioden gleichkommt.

Heidelberg 15 December 1877.

Sopra la teoria delle curve piane di quarto grado.

(*Nota di* C. F. Geiser, *in Zurigo*.)

Nella teoria delle curve algebriche viene, come è noto, ammessa l'ipotesi, che la Hessiana della curva generale di n^{esimo} grado non possegga nè punti doppî, nè punti di regresso; sebbene questa ipotesi non siasi finora potuta dimostrare per vera se non che per $n=3$ (*).

Da una questione rivoltami dal sig. Brioschi, riguardante le curve di quarto grado, fui condotto alla discussione di questa ipotesi per il caso di $n=4$, e mi fò ora qui lecito di esporre brevemente i risultati ottenuti.

§ 1.

L'equazione omogenea della curva generale di quarto grado in coordinate trimetriche di punti riferite ad un triangolo fondamentale qualunque $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$ può sempre essere ridotta alla forma

$$C_4=x_1^4+4u_1x_1^3+6u_2x_1^2+4u_3x_1+u_4=0$$

nella quale u_k rappresenta una funzione intiera ed omogenea del grado k^{esimo} in x_2 ed x_3.

Si domanda se per mezzo di una trasformazione lineare delle coordinate è possibile di ridurre la precedente espressione alla forma

$$C_4=x'^4_1+4u'_3x'_1+u'_4=0 \tag{1}$$

u'^3 ed u'_4 rappresentando delle forme binarie di terzo e quarto grado nelle

(*) Vedi Clebsch: *Vorlesungen über Geometrie,* vol. 1, pag. 361. — Salmon: *Treatise on the higher plane Curves.* Second edition, pag. 351.

nuove cordinate x'_2 ed x'_3; oppure, nel caso che tal riduzione non sempre sia possibile, di trovare le condizioni affinchè lo sia.

A tal fine supponiamo questa riduzione eseguita e si abbia

$$C_4 = x'^4_1 + 4u'_3 x'_1 + u'_4$$

si potrà sempre trovare una sostituzione lineare

$$x'_1 = x''_1, \qquad x'_2 = \alpha x''_2 + \beta x''_3, \qquad x'_3 = \alpha' x''_2 + \beta' x''_3$$

tale, che $4u'_3$ si riduca ad una delle due forme seguenti: $x''^3_2 + x''^3_3$ oppure $x''^2_2 x''_3$. Nel primo caso l'equazione della C_4 si riduce alla forma:

$$(x''^3_1 + x''^3_2 + x''^3_3) x''_1 + u''_4 = 0$$

u''_4 rappresentando una forma binaria di quarto grado in x''_2 ed x''_3. Ma tale espressione non contiene che 14 costanti disponibili, invece delle 15 proprie alla curva generale di quarto grado, dal che ne segue che essa non può essere identica con quest'ultima.

Le stesse considerazioni valgono anche per il secondo caso; quindi se ne conclude che: l'equazione (1) non rappresenta la curva generale di quarto grado.

§ 2.

Sia

$$C_4 = x_1^4 + u x_1 + v = 0$$

(in cui u e v rappresentano delle forme binarie omogenee in x_2 ed x_3 rispettivamente di 3° e 4° grado) l'equazione di una curva di quarto grado. Essa si può considerare come appartenente al fascio $C + \lambda C' = 0$, nel quale sia $C' = x_1^4$ e $C = u x_1 + v$. La curva $C' = 0$ è la linea $x_1 = 0$ quattro volte sovraposta; la curva $C = 0$ possiede un punto triplo in $x_2 = 0$ ed $x_3 = 0$.

Le Hessiane di tutte le curve del fascio sono date dall'equazione

$$\begin{vmatrix} C_{11} + \lambda C'_{11} & C_{21} + \lambda C'_{21} & C_{31} + \lambda C'_{31} \\ C_{12} + \lambda C'_{12} & C_{22} + \lambda C'_{22} & C_{32} + \lambda C'_{32} \\ C_{13} + \lambda C'_{13} & C_{23} + \lambda C'_{23} & C_{33} + \lambda C'_{33} \end{vmatrix} = 0$$

in cui $C_{k\lambda}$ $C'_{k\lambda}$ significano in una maniera facile a comprendersi le seconde derivate dei polinomî C e C'.

E siccome nel nostro caso le $C'_{k\lambda}$ si annullano ad eccezione di C'_{11}, si può scrivere la precedente equazione come segue

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{vmatrix} + \lambda C'_{11} \cdot (C_{22} C_{33} - C'^2_{23}) = 0 \tag{2}$$

dal che si vede che: l e Hessiane del fascio considerato formano di per sè un altro fascio, e questo di curve di sesto grado.

La parte dell'equazione (2) non affetta da λ, posta uguale a zero, rappresenta la Hessiana della curva $C=0$, e possiede al pari della C un punto triplo in $x_2=0$ ed $x_3=0$. La parte della (2) affetta dal parametro λ rappresenta una curva di sesto grado, la quale si risolve nella retta $x_1=0$ due volte sovrapposta, ed in una curva di quarto grado, avente un punto doppio in $x_2=0$ ed $x_3=0$, come chiaramente si scorge considerando l'equazione

$$C_{22} C_{33} - C_{23}^2 = (u_{22} u_{33} - u_{23}^2) x_1^2 + (u_{22} v_{33} + v_{22} u_{33} - 2 u_{23} v_{23}) x_1 + (v_{22} v_{23} - v_{23}^2).$$

Essendo pertanto il punto doppio $x_2=0$, $x_3=0$, comune a due delle curve del fascio rappresentato dall'equazione (2) lo sarà pure a tutte le curve del fascio medesimo e quindi pure alla Hessiana della

$$C_4 = x_1^4 + u x_1 + v = 0.$$

Dal che ne segue che la riduzione cercata soltanto è possibile per tale curva di quarto grado C_4, la cui Hessiana contenga un punto doppio non posto sulla C_4 medesima.

§ 3.

Viceversa sia ora data una curva di quarto grado C_4 la cui Hessiana H possegga un punto doppio A non posto sulla C_4; si potrà prendere questo punto come vertice $x_2=0$ $x_3=0$ di un triangolo fondamentale; rapportata al quale, l'equazione della C_4 sia

$$C_4 = a x_1^4 + 4 b x_1^3 + 6 c x_1^2 + 4 d x_1 + e = 0$$

in cui a, b, c, d, e, sono rispettivamente di grado 0, 1, 2, 3, 4 in x_2 ed x_3.

La Hessiana corrispondente sarà rappresentata dall'equazione:

$$H = \begin{vmatrix} 12 a x_1^2 + 24 b x_1 + 12 c & 12 b_2 x_1^2 + 12 c_2 x_1 + 4 d_2 & 12 b_3 x_1^2 + 12 c_3 x_1 + 4 d_3 \\ 12 b_2 x_1^2 + 12 c_2 x_1 + 4 d_2 & 6 c_{22} x_1^2 + 4 d_{22} x_1 + e_{22} & 6 c_{23} x_1^2 + 4 d_{23} x_1 + e_{23} \\ 12 b_3 x_1^2 + 12 c_3 x_1 + 4 d_3 & 6 c_{23} x_1^2 + 4 d_{23} x_1 + e_{23} & 6 c_{33} x_1^2 + 4 d_{33} x_1 + e_{33} \end{vmatrix} = 0$$

nella quale b_k c_k d_k $c_{k\lambda}$ $d_{k\lambda}$ $e_{k\lambda}$ significano le prime e seconde derivate delle b, c, d, e rispetto ad x_2 ed x_3.

Ora affinchè la H abbia secondo l'ipotesi un punto doppio in A bisogna che nello sviluppo del Determinante precedente secondo le potenze di x_1 si annullino i coefficienti di x_1^6 ed x_1^5. Ma sopra di questi coefficienti non hanno alcuna influenza i termini degli elementi del Determinante che sono indipendenti da x_1; pertanto basta che si annullino i coefficienti di x_1^3 ed x_1^2 nello sviluppo del seguente Determinante:

$$H' = \begin{vmatrix} 12ax_1 + 24b & 12b_2x_1 + 12c_2 & 12b_3x_1 + 12c_3 \\ 12b_2x_1 + 12c_2 & 6c_{22}x_1 + 4d_{22} & 6c_{23}x_1 + 4d_{23} \\ 12b_3x_1 + 12c_3 & 6c_{23}x_1 + 4d_{23} & 6c_{33}x_1 + 4d_{33}. \end{vmatrix}$$

Ma, come lascia scorgere una facile riduzione, l'equazione

$$2H' = 0$$

non è che l'equazione dell'Hessiana H' della seguente curva di terzo grado:

$$C_3 = ax_1^3 + 6bx_1^2 + 12cx_1 + 8d = 0$$

ossia la H' possiede un punto doppio che coincide con quello della H e che quindi non può essere posto nella C_3.

Dalla teoria delle curve di terzo grado è noto che la prima polare, rispetto alla C_3, di un punto doppio della H' non appartenente alla C_3 medesima è una retta due volte sovrapposta (*). Ora, la conica polare del punto A rispetto a C_3 avendo per equazione:

$$\frac{dC_3}{dx_1} = 3ax_1^2 + 12bx_1 + 12c = 0$$

il membro a destra dovrà essere il quadrato perfetto di un'espressione lineare ed omogenea in x_1, x_2, x_3, la qual cosa solo può verificarsi se identicamente $b^2 = ac$. Ma in tal caso si può scrivere

$$a^3C_4 = a^4x_1^4 + 4a^3bx_1^3 + 6a^3cx_1^2 + 4a^3dx_1 + a^3e$$
$$= (ax_1 + b)^4 + 4(a^2d - b^3)(ax_1 + b) + (3b^4 - 4a^2bd + a^3e).$$

(*) Dovendo per una tal curva scomparire l'invariante S (secondo la scritturazione di Aronhold) essa può essere ridotta alla forma normale $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$, l'Hessiana della qual curva ha un punto doppio in ognuno dei vertici del triangolo fondamentale. Per il vertice $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ l'equazione della prima polare si riduce ad $x_1^2 = 0$ dal che risulta la verità della sopra espressa proposizione.

Introducendo ora un nuovo sistema di cordinate

$$x'_1 = ax_1 + b, \qquad x'_2 = x_2, \qquad x'_3 = x_3$$

e ponendo

$$a^2 d - b^3 = u', \qquad 3b^4 - 4a^2 bd + a^3 e = v'$$

(dove u' e v' rappresentano forme binarie di 3° e 4° grado in x_2 ed x_3), si ottiene la cercata riduzione di C_4 alla forma

$$x'^4_1 + 4u'x_1 + v' = 0$$

la quale, come si vede, sempre è possibile quando la Hessiana della C_4 possiede un punto doppio non posto sulla C_4.

§ 4.

La Hessiana di una curva di quarto grado C_4, abbia un punto doppio P; tre casi sono possibili: ovvero P non è posto sulla C_4, oppure ne è un punto semplice, oppure ne è un punto doppio. Ma dalle precedenti considerazioni risulta che il secondo caso non è possibile: infatti prendendo P come vertice $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ di un triangolo fondamentale, condizione necessaria e sufficiente affinchè la curva

$$C_4 = ax_1^4 + 4bx_1^3 + 8cx_1^2 + 4dx_1 + e = 0$$

passi per il punto P si è che $a = 0$.

Ma tale è eziandio la condizione affinchè la curva

$$C_3 = ax_1^3 + 6bx_1^2 + 12cx_1 + 8d = 0$$

passi per P. Ora è noto dalla teoria delle curve di 3° grado che un punto di C_3 può essere un punto doppio della corrispondente Hessiana solamente quando già sia un punto doppio della C_3 medesima. Nel nostro caso dovrebbe pertanto essere pure $b = 0$, il che dimostra che C_4 possiede un punto doppio in P.

Riassumendo i risultati finora ottenuti, vediamo che: la Hessiana della curva generale di quarto grado non possiede alcun punto doppio (o di regresso). Infatti: o questo punto dovrebbe di già appartenere alla curva C_4 medesima, oppure dovrebbe permettere (vedi § 2) di ridurre l'equazione della stessa alla forma

$$C_4 = x_1^4 + 4u_3 x_1 + u_k = 0,$$

della quale fu dimostrato (vedi § 1) che non rappresenta l'equazione della curva generale di quarto grado.

§ 5.

Il metodo fino ad ora seguito si può senz'altro estendere al caso generale delle curve di grado n^{esimo}. Siano $a, b, c, d, e, \ldots$ funzioni intiere omogonee di grado 0, 1, 2, 3, 4,... in x_2 ed x_3, si può sempre ridurre l'equazione della curva generale di grado n^{esimo} alla forma:

$$\left.\begin{aligned} C_n = a x_1^n + n b x_1^{n-1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} c x_1^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} d x_1^{n-3} + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} e x_1^{n-4} \ldots = 0. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Si vede dal numero delle costanti che in generale non è possibile per mezzo di una trasformazione lineare di ridurre la precedente equazione alla forma:

$$C_n = a' x_1'^n + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} d' x_1'^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} e' x_1'^{n-4} \ldots = 0.$$

Condizione necessaria e sufficiente per ciò si è che la Hessiana della C_n possegga un punto doppio non posto sulla C_n (fatta astrazione dal caso speciale in cui C_n possegga un punto triplo).

Per dimostrarlo suppongasi che (3) sia l'equazione di C_n riferita ad un triangolo fondamentale il cui vertice $x_2 = 0$ $x_3 = 0$ coincida col punto doppio della Hessiana. Ma in tal caso anche la curva

$$C_3 = a x_1^3 + 3(n-2) b x_1^2 + 3(n-2)^2 c x_1 + (n-2)^3 d = 0$$

avrà nello stesso punto un punto doppio, e quindi (vedi § 3 Nota) dovrà pur essere $b^2 = ac$.

Eseguendo pertanto nella $a^{n-1} C_n$ la sostituzione

$$x'_1 = a x_1 + b, \qquad x'_2 = x_2, \qquad x'_3 = x_3$$

l'equazione (3) si ridurrà alla forma

$$a^{n-1} C_n = x_1'^n + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} u'_3 x_1'^{n-3} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} u'_4 x_1'^{n-4} \ldots = 0.$$

Dal che facilmente se ne deduce che:

La Hessiana della curva generale di n^{esimo} grado non possiede nè punti doppî, nè punti di regresso.

Zurigo, il 5 gennajo 1878.

Ricerche sulle equazioni algebrico-differenziali.

(*Memoria di* F. CASORATI, *a Pavia.*)

In questa Memoria cerco le condizioni che devono verificarsi in una equazione primitiva completa tra due variabili, affinchè nella corrispondente equazione differenziale di prim'ordine manchi, per l'annullarsi dei singoli coefficienti, un dato numero di gruppi di termini omogenei aventi le maggiori dimensioni rispetto alle variabili stesse. Di questa ricerca lessi un sunto nell'adunanza 29 novembre 1877 del R. Istituto Lombardo, limitandomi però allora quasi esclusivamente alla prima e più facile parte della medesima.

1.

Consideriamo una primitiva della forma

$$f(\Omega)=a\Omega^m+b\,\Omega^{m-1}+c\,\Omega^{m-2}+\cdots+s\Omega+t=0 \qquad (1)$$

dove a, b, c,..., s, t significhino funzioni razionali intere di due variabili u, v, del grado n, ed Ω una costante arbitraria.

La eliminazione di Ω tra questa equazione e la sua differenziale immediata (*)

$$\delta f(\Omega)=da\cdot\Omega^m+db\cdot\Omega^{m-1}+\cdots+ds\cdot\Omega+dt=0 \qquad (2)$$

somministra, come equazione differenziale avente la (1) per primitiva completa,

(*) Adopero sin d'ora il segno δ, volendo in seguito con questo segno, preposto a quello d'una funzione $\varphi(x)$, significare che $\varphi(x)$ va differenziata rispetto ad u e v considerandone l'argomento x come costante quand'anche dipendesse da u, v.

la equazione

$$F=\begin{vmatrix} a & b & c & . & . & . & . \\ 0 & a & b & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & t \\ da & db & dc & . & . & . & . \\ 0 & da & db & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & . & . & dt \end{vmatrix}=0, \qquad (3)$$

che, ordinata secondo le potenze di du, dv, piglia la forma

$$F=A\,du^m+B\,du^{m-1}dv+\cdots+S\,du\,dv^{m-1}+T\,dv^m=0, \qquad (3')$$

in cui A, B,..., S, T significano espressioni formate colle funzioni a, b,..., s, t e le loro derivate prime.

Il grado normale dell'equazione $F=0$, rispetto ad u, v, cioè il grado che le funzioni A, B,..., S, T devono in generale avere, è

$$l=m(2n-1). \qquad (4)$$

Ma la equazione differenziale può talvolta ridursi a grado anche assai minore di l, pur conservandosi razionale intera rispetto ad u, v, du, dv e del grado m rispetto a du, dv. Una tale riduzione può avvenire e per effetto della soppressione di fattori razionali interi in u, v comuni a tutte le funzioni A, B,..., S, T, e perchè riescano nulli in queste funzioni tutti i singoli coefficienti dei termini aventi le maggiori dimensioni in u, v. Ora troveremo le condizioni a cui devono soddisfare le funzioni a, b,..., s, t, affinchè avvenga riduzione nella seconda di queste maniere (*).

2.

A tal fine importa di poter designare separatamente i singoli gruppi o somme di termini omogenei in u, v costituenti una qualunque funzione intera. Se sia

(*) La quale, introducendo l'omogeneità rispetto alle variabili, comparirebbe come caso particolare della prima. Ma per ora non la considereremo sotto questo aspetto; come nè anche porremo mente alla possibilità di simultanea riduzione per soppressione di fattori.

φ il simbolo della funzione, ne indicheremo i gruppi aventi rispettivamente le dimensioni 0, 1, 2,..., con $\overset{0}{\varphi}$, $\overset{1}{\varphi}$, $\overset{2}{\varphi}$,.... Potremo quindi scrivere

$$\begin{aligned}
a &= \overset{n}{a} + \overset{n-1}{a} + \cdots + \overset{0}{a},\\
\overset{r}{f}(X) &= \overset{r}{a} X^m + \overset{r}{b} X^{m-1} + \cdots + \overset{r}{s} X + \overset{r}{t},\\
f(X) &= \overset{n}{f}(X) + \overset{n-1}{f}(X) + \cdots + \overset{0}{f}(X),\\
F &= \overset{l}{F} + \overset{l-1}{F} + \cdots\cdots\cdots + \overset{0}{F}.
\end{aligned}$$

Il gruppo $\overset{l}{F}$ può esprimersi mediante il determinante (3) dove si tengano, come elementi, non a, b,..., da, db,..., ma soltanto i rispettivi loro gruppi dell' ordine massimo:

$$\overset{l}{F} = \begin{vmatrix}
\overset{n}{a} & \overset{n}{b} & \overset{n}{c} & . & . & . & . \\
0 & \overset{n}{a} & \overset{n}{b} & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & . & . & . & \overset{n}{t} \\
\overset{n}{da} & \overset{n}{db} & \overset{n}{dc} & . & . & . & . \\
0 & \overset{n}{da} & \overset{n}{db} & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . \\
0 & 0 & 0 & . & . & . & \overset{n}{dt}
\end{vmatrix} \tag{5}$$

Il gruppo $\overset{l-1}{F}$ si può esprimere mediante la somma dei $2m$ determinanti che provengono dal (5) sostituendovi in una linea agli elementi $\overset{n}{a}$, $\overset{n}{b}$,..., od ai loro differenziali, gli $\overset{n-1}{a}$, $\overset{n-1}{b}$,..., o i differenziali di questi. Il gruppo $\overset{l-2}{F}$ si può esprimere mediante la somma dei $\frac{2m(2m-1)}{2}$ determinanti provenienti dal (5) col sostituire questi ultimi elementi ai primi in due linee, e degli m determinanti provenienti dalla sostituzione degli elementi $\overset{n-2}{a}$,..., $d\overset{n-2}{a}$,... ai primi stessi in una linea. Ed analogamente si può esprimere ciascun altro dei gruppi

$$\overset{l}{F}, \quad \overset{l-1}{F}, \quad \overset{l-2}{F}, \ldots, \quad \overset{0}{F}. \tag{6}$$

Altrettanto noteremo per il discriminante della (1), che chiameremo g,

$$g = \begin{vmatrix} ma & (m-1)b & . & . & . \\ 0 & ma & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & s \\ b & 2c & . & . & . \\ 0 & b & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & mt \end{vmatrix}, \tag{7}$$

il cui grado in generale è

$$h = 2(m-1)n; \tag{8}$$

così che si possono immediatamente avere espressioni in forma di somme di determinanti per ciascuno dei gruppi

$$\overset{h}{g}, \quad \overset{h-1}{g}, \quad \overset{h-2}{g}, \ldots, \quad \overset{0}{g}. \tag{9}$$

Affinchè il grado di F riesca di 1, o 2, o 3, od ecc. unità minore del normale, bisogna che siano identicamente soddisfatte la prima, o le prime due, o le prime tre, od ecc. fra le equazioni

$$\overset{l}{F}=0, \quad \overset{l-1}{F}=0, \quad \overset{l-2}{F}=0, \ldots, \quad \overset{0}{F}=0. \tag{10}$$

Queste sono le equazioni differenziali da integrarsi per ottenere le condizioni finite a cui devono soddisfare le funzioni $a, b, c, \ldots$ della primitiva, o più propriamente i rispettivi loro gruppi omogenei, affinchè avvenga una riduzione nel modo che stiamo considerando.

Della prima fra queste equazioni si ottiene subito l'integrale completo ed i singolari, riflettendo che essa risulta dall'eliminazione della costante arbitraria Ω fra le equazioni

$$\overset{n}{f}(\Omega) = \overset{n}{a}\Omega^m + \overset{n}{b}\Omega^{m-1} + \cdots + \overset{n}{s}\Omega + \overset{n}{t} = 0, \tag{11}$$

$$\delta \overset{n}{f}(\Omega) = d\overset{n}{a}\cdot\Omega^m + d\overset{n}{b}\cdot\Omega^{m-1} + \cdots + d\overset{n}{s}\cdot\Omega + d\overset{n}{t} = 0, \tag{12}$$

come la (3) è risultata dall'eliminazione di Ω fra (1) e (2). La (11) è dunque l'integrale completo di $\overset{l}{F}=0$; e gli integrali singolari saranno somministrati dalla equazione che risulta eliminando Ω fra la (11) e la sua derivata rispetto ad Ω, cioè dal discriminante

$$\overset{h}{g}=\begin{vmatrix} m\overset{n}{a} & (m-1)\overset{n}{b} & . & . & . \\ 0 & m\overset{n}{a} & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & \overset{n}{s} \\ \overset{n}{b} & 2\overset{n}{c} & . & . & . \\ 0 & \overset{n}{b} & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & m\overset{n}{t} \end{vmatrix}=0. \qquad (13)$$

3.

Però l'integrazione delle successive equazioni (10), considerate l'una dopo l'altra nella detta loro forma di somme di determinanti, diverrebbe presto, e poi sempre più, laboriosa. Ma pigliando a considerare F in forma di prodotto, e conseguentemente esprimendo in tale forma anche i singoli gruppi $\overset{l}{F}$, $\overset{l-1}{F}$,..., troveremo che la determinazione dei relativi integrali, sì ordinarî che singolari, riescirà assai più facile.

Conviene accompagnare i gruppi omogenei, corrispondenti alle diverse dimensioni, con le diverse potenze di un parametro arbitrario y, non avente alcuna relazione colle variabili u, v. Perciò porremo

$$\begin{aligned} a_y &= \overset{n}{a} + y\overset{n-1}{a} + y^2\overset{n-2}{a} + \cdots + y^n\overset{0}{a} \\ b_y &= \overset{n}{b} + y\overset{n-1}{b} + y^2\overset{n-2}{b} + \cdots + y^n\overset{0}{b} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_y(X) &= a_y X^m + b_y X^{m-1} + \cdots + s_y X + t_y \\ &= \overset{n}{f}(X) + y\overset{n-1}{f}(X) + y^2\overset{n-2}{f}(X) + \cdots + y^n\overset{0}{f}(X) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta f_y(X) &= d a_y \cdot X^m + d b_y \cdot X^{m-1} + \cdots + d s_y \cdot X + d t_y \\ &= \delta \overset{n}{f}(X) + y \delta \overset{n-1}{f}(X) + \cdots + y^{n-1} \delta \overset{1}{f}(X),\end{aligned}$$

La eliminazione di Ω fra le equazioni

$$f_y(\Omega) = 0, \qquad \delta f_y(\Omega) = 0$$

condurrà all'equazione differenziale

$$F_y = \overset{l}{F} + y \overset{l-1}{F} + y^2 \overset{l-2}{F} + \cdots + y^l \overset{0}{F} = 0$$

Indicando con $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ le radici dell'equazione $f_y(X) = 0$, cioè ponendo

$$f_y(X) = a_y (X - \rho_1)(X - \rho_2) \cdots (X - \rho_m),$$

il risultato della detta eliminazione si potrà anche esprimere col prodotto

$$a_y^m (d a_y \cdot \rho_1^m + d b_y \cdot \rho_1^{m-1} + \cdots + d t_y)(d a_y \cdot \rho_2^m + d b_y \rho_2^{m-1} + \cdots + d t_y) \cdots$$

ossia con

$$a_y^m \prod_{\rho=\rho_1}^{\rho=\rho_m} \delta f_y(\rho);$$

e dunque sarà

$$\left.\begin{aligned}&\overset{l}{F} + y \overset{l-1}{F} + y^2 \overset{l-2}{F} + \cdots + y^l \overset{0}{F} = \\ &(\overset{n}{a} + y \overset{n-1}{a} + \cdots + y^n \overset{0}{a})^m \prod_{\rho=\rho_1}^{\rho=\rho_m} \{\delta \overset{n}{f}(\rho) + y \delta \overset{n-1}{f}(\rho) + \cdots + y^{n-1} \delta \overset{1}{f}(\rho)\}\end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Ora, affinchè riescano soddisfatte le prime p fra le equazioni (10) è necessario e sufficiente, che, negli sviluppi degli m fattori

$$\delta f_y(\rho_1), \qquad \delta f_y(\rho_2), \ldots, \qquad \delta f_y(\rho_m), \tag{15}$$

secondo le potenze positive di y, manchi tal complesso di primi termini per cui riesca y^p la più bassa potenza di y nel prodotto di essi fattori.

Indicando con P_μ ciò che diventa ρ_μ per $y = 0$, cioè ponendo

$$\overset{n}{f}(X) = \overset{n}{a}(X - \mathrm{P}_1)(X - \mathrm{P}_2) \cdots (X - \mathrm{P}_m), \tag{16}$$

il primo termine nello sviluppo di $\delta f_y(\rho_\mu)$ sarà $\delta \overset{n}{f}(\mathrm{P}_\mu)$, ed i termini successivi conterranno potenze intere di y, se P_μ sarà radice semplice; ovvero potenze intere di $y^{\frac{1}{2}}$, se P_μ sarà radice doppia; ovvero ecc.

Intanto il primo termine in (14) sarà

$$\overset{l}{F} = (a)^m \delta \overset{n}{f}(P_1) \cdot \delta \overset{n}{f}(P_2) \cdots \delta \overset{n}{f}(P_m). \tag{17}$$

Da qui è manifesto, che, per rendere nullo $\overset{l}{F}$, bisogna far sì che una delle radici dell'equazione $\overset{n}{f}(X) = 0$ sia anche radice della $\delta \overset{n}{f}(X) = 0$. Indicando per semplicità con P una tale radice, avremo dunque le identità

$$\overset{n}{f}(P) = 0, \qquad \delta \overset{n}{f}(P) = 0. \tag{18}$$

Differenziando la prima di queste avremo

$$\delta \overset{n}{f}(P) + \frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial P} dP = 0, \text{ e quindi } \frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial P} dP = 0,$$

dove $\frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial P}$ significa evidentemente la derivata parziale di $\overset{n}{f}(P)$ rispetto a P. Dunque la radice P dovrà soddisfare l'una o l'altra delle condizioni

$$dP = 0, \qquad \frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial P} = 0, \tag{19}$$

che equivalgono all'unica equazione $\overset{l}{F} = 0$, e la prima delle quali, integrata, somministra l'integrale completo, mentre l'altra somministra gli integrali singolari della detta equazione differenziale.

L'integrale completo è espresso da P = Cost., ossia dalla (11), od anche dalla

$$\overset{n}{a} P^m + \overset{n}{b} P^{m-1} + \cdots + \overset{n}{s} P + \overset{n}{t} = 0, \tag{20}$$

dove con P s'intenda una costante. È una relazione lineare tra i gruppi di massima dimensione nella primitiva, con coefficienti che stanno fra loro come le successive potenze di una costante.

Gli integrali singolari si otterranno dalla seconda delle (19), la quale esprime che P dev'essere radice doppia dell'equazione $\overset{n}{f}(X) = 0$, e si traduce, come già avvertimmo, nella (13).

Quanto alle condizioni, sì ordinarie che singolari, affinchè il grado della F si abbassi ulteriormente da $l-1$ ad $l-2$, $l-3$, ecc., riflettiamo anzitutto, che, possiamo ricercarle sia continuando a considerare quello tra i fattori (15) del cui sviluppo abbiamo già annullato il primo termine, e cioè esprimendo che devano essere zero anche il secondo termine, il terzo, ecc.; sia esprimendo che devano essere nulli i primi termini e poscia i successivi negli sviluppi di altri fattori (15). Imperocchè l'abbassamento può provenire dall'uno come da ogni altro, da alcuni soltanto, come da tutti insieme questi fattori. Ma appunto per ciò, possiamo ricercare le condizioni affinchè provengano ulteriori abbassamenti dal fattore già considerato; che per gli altri fattori dovranno verificarsi condizioni affatto somiglianti, affinchè contribuiscano a rendere il prodotto F di grado vie più basso.

4.

Ripigliando dunque in considerazione il fattore $\partial f_y(\rho)$, che per $y=0$ si riduce a $\partial \overset{n}{f}(\mathrm{P})=0$, cerchiamone lo sviluppo secondo le potenze positive di y, supponendo, in primo luogo, che la radice P sia semplice, e però costante. In tal caso potremo porre

$$\rho=\mathrm{P}+s_1 y+s_2 y^2+s_3 y^3+\cdots, \tag{21}$$

e quindi

$$\left.\begin{aligned}\overset{\nu}{f}(\rho)=\overset{\nu}{f}(\mathrm{P})&+y\frac{\partial \overset{\nu}{f}}{\partial \mathrm{P}}s_1+y^2\left[\frac{\partial \overset{\nu}{f}}{\partial \mathrm{P}}s_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{\nu}{f}}{\partial \mathrm{P}^2}s_1^2\right]\\&+y^3\left[\frac{\partial \overset{\nu}{f}}{\partial \mathrm{P}}s_3+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{\nu}{f}}{\partial \mathrm{P}^2}2s_1s_2+\frac{1}{2\cdot 3}\frac{\partial^3 \overset{\nu}{f}}{\partial \mathrm{P}^3}s_1^3\right]+\cdots\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

I coefficienti s_1, s_2,... si determineranno eguagliando a zero i coefficienti delle successive potenze di y nello sviluppo di

$$f_y(\rho)=\overset{n}{f}(\rho)+y\overset{n-1}{f}(\rho)+\cdots+y^n\overset{0}{f}(\rho),$$

che è

$$\left.\begin{aligned}&\overset{n}{f}(\mathrm{P})+y\left[\frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}}s_1+\overset{n-1}{f}(\mathrm{P})\right]+y^2\left[\frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}}s_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^2}s_1^2+\frac{\partial \overset{n-1}{f}}{\partial \mathrm{P}}s_1+\overset{n-2}{f}(\mathrm{P})\right]\\&+y^3\left[\frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}}s_3+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^2}2s_1s_2+\frac{1}{2\cdot 3}\frac{\partial^3 \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^3}s_1^3+\frac{\partial \overset{n-1}{f}}{\partial \mathrm{P}}s_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{n-1}{f}}{\partial \mathrm{P}^2}s_1^2+\frac{\partial \overset{n-2}{f}}{\partial \mathrm{P}}s_1+\overset{n-3}{f}(\mathrm{P})\right]\\&+\cdots.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Determinati così i coefficienti $s_1, s_2, \ldots$, si avrà lo sviluppo di $\delta f_y(\rho)$:

$$\left.\begin{aligned}
\delta f_y(\rho) &= \delta \overset{n}{f}(\rho) + y\,\delta \overset{n-1}{f}(\rho) + \cdots + y^{n-1}\delta \overset{1}{f}(\rho)\\
&= \delta \overset{n}{f}(\mathrm{P}) + y\left[\frac{\partial \delta \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}} s_1 + \delta \overset{n-1}{f}(\mathrm{P})\right] + y^2\left[\frac{\partial \delta \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}} s_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \delta \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^2} s_1^2 + \frac{\partial \delta \overset{n-1}{f}}{\partial \mathrm{P}} s_1 + \delta \overset{n-2}{f}(\mathrm{P})\right]\\
&+ y^3\left[\frac{\partial \delta \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}} s_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \delta \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^2} 2 s_1 s_2 + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{\partial^3 \delta \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^3} s_1^3 + \frac{\partial \delta \overset{n-1}{f}}{\partial \mathrm{P}} s_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \delta \overset{n-1}{f}}{\partial \mathrm{P}^2} s_1^2 + \frac{\partial \delta \overset{n-2}{f}}{\partial \mathrm{P}} s_1 + \delta \overset{n-3}{f}(\mathrm{P})\right]\\
&+ \cdots
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Il primo termine $\delta \overset{n}{f}(\mathrm{P})$ di questo sviluppo è nullo. Se in nessuno degli sviluppi dei restanti fattori (15) mancasse il primo termine, il gruppo $y\overset{l-1}{F}$ si otterrebbe moltiplicando il secondo termine di (24) per i primi termini di questi altri sviluppi, cioè sarebbe

$$\overset{l-1}{F} = \overset{n}{(a)}{}^m\left[\frac{\partial \delta \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}} s_1 + \delta \overset{n-1}{f}(\mathrm{P})\right] \overset{(m-1)}{\Pi}\, \delta \overset{n}{f}(\mathrm{P}_\mu),$$

dove $\overset{(m-1)}{\Pi}$ significa che devesi fare il prodotto dei fattori $\delta \overset{n}{f}(\mathrm{P}_1)$, $\delta \overset{n}{f}(\mathrm{P}_2), \ldots$, escluso il $\delta \overset{n}{f}(\mathrm{P})$. Per opera del fattore $\delta f_y(\rho)$ riuscirà dunque nullo $\overset{l-1}{F}$, se sia soddisfatta la condizione

$$\frac{\partial \delta \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}} s_1 + \delta \overset{n-1}{f}(\mathrm{P}) = 0. \tag{25}$$

E in ogni caso, quand'anche $\overset{l-1}{F}$ fosse già zero per opera degli altri $m-1$ fattori, questa condizione farebbe abbassare il grado di F di un'altra unità. Dovendosi determinare s_1 coll'equazione

$$\frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}} s_1 + \overset{n-1}{f}(\mathrm{P}) = 0 \tag{26}$$

ed essendo

$$\frac{\partial \delta \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}} = \delta \frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}}, \tag{27}$$

la condizione trovata riducesi a

$$\frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}} \delta \overset{n-1}{f}(\mathrm{P}) - \overset{n-1}{f}(\mathrm{P})\,\delta \frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}} = 0. \tag{28}$$

Quest'equazione non ammette integrale completo, ma soltanto un integrale particolare, imperocchè la eguaglianza

$$\overset{n-1}{f}(\mathrm{P})=\frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}}\times \text{Cost. rispetto ad } u,\ v,$$

tra due funzioni omogenee di grado diverso, che ne sarebbe l'integrale completo, non può sussistere che per Cost. $=0$, cioè per

$$\overset{n-1}{f}(\mathrm{P})=0, \tag{29}$$

non essendo zero, per supposto, la derivata di $\overset{n}{f}(\mathrm{P})$.

Questa equazione può qualificarsi come un integrale, d'indole affatto particolare, dell'equazione differenziale $\overset{l-1}{F}=0$ (colla condizione $\mathrm{P}=$ Costante). L'integrale completo di questa equazione differenziale si avrebbe eguagliando a zero uno degli $m-1$ fattori di

$$\overset{(m-1)}{\Pi}\ \delta \overset{n}{f}(\mathrm{P}_\mu),$$

e pigliando la prima delle due equazioni analoghe alle (19)

$$d\mathrm{P}_\mu=0, \qquad \frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}_\mu}=0,$$

che ne scaturiscono, la quale darebbe $\mathrm{P}_\mu=$ Cost. Pigliando la seconda, si avrebbe un integrale singolare della stessa equazione differenziale.

Ammesso che, per P costante, sieno zero $\overset{n}{f}(\mathrm{P})$ ed $\overset{n-1}{f}(\mathrm{P})$, lo sviluppo del fattore $\delta f_y(\rho)$ principia col termine in y^2, il cui coefficiente, per essere $s_1=0$, riducesi a

$$\frac{\partial \delta \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}} s_2+\delta \overset{n-2}{f}(\mathrm{P}). \tag{30}$$

Analoga riduzione subisce il coefficiente di y^2 in (23); laonde s_2 va cavato da

$$\frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}} s_2+\overset{n-2}{f}(\mathrm{P})=0. \tag{31}$$

E però, sostituendo il valore di s_2 nella precedente espressione eguagliata a zero, si ottiene quale condizione, affinchè il grado di F si abbassi d'una terza unità per opera del fattore $\delta f_y(\rho)$, la seguente

$$\frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}} \delta \overset{n-2}{f}(\mathrm{P}) - \overset{n-2}{f}(\mathrm{P}) \delta \frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}} = 0,$$

la quale, analogamente alla (28), traducesi nella

$$\overset{n-2}{f}(\mathrm{P}) = 0. \tag{32}$$

Sussistendo, per P costante, le relazioni $\overset{n}{f}(\mathrm{P}) = 0$, $\overset{n-1}{f}(\mathrm{P}) = 0$, $\overset{n-2}{f}(\mathrm{P}) = 0$, lo sviluppo di $\delta f_y(\rho)$ principia col termine in y^3, il cui coefficiente, per essere $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, riducesi alla

$$\frac{\partial \delta \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}} s_3 + \delta \overset{n-3}{f}(\mathrm{P})$$

analoga alle (25), (30), nella quale s_3 significa il valore che si cava dalla

$$\frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}} s_3 + \overset{n-3}{f}(\mathrm{P}) = 0$$

analoga alle (26), (31). E però la condizione, affinchè il grado di F diminuisca di una quarta unità, per opera del fattore in considerazione, è

$$\overset{n-3}{f}(\mathrm{P}) = 0.$$

E così continuando, conchiuderemo, che, le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè il grado di F si abbassi di p unità per opera del fattore $\delta f_y(\rho)$, nel caso di P radice semplice, sono espresse dalle prime p fra le equazioni

$$\overset{n}{f}(\mathrm{P}) = 0, \qquad \overset{n-1}{f}(\mathrm{P}) = 0, \ldots, \qquad \overset{0}{f}(\mathrm{P}) = 0, \tag{33}$$

dove P significa una costante qualsiasi.

Se nessun altro tra i fattori (15) contribuisse all'abbassamento del grado, se cioè in nessuno mancasse il primo termine dello sviluppo, in tal caso il gruppo $\overset{l-p}{F}$ non sarebbe nullo e si potrebbe esprimere con

$$\overset{l-p}{F} = (\overset{n}{a})^m \frac{\frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}} \delta \overset{n-p}{f}(\mathrm{P}) - \overset{n-p}{f}(\mathrm{P}) \delta \frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}}}{\frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}}} \overset{(m-1)}{\Pi} \delta \overset{n}{f}(\mathrm{P}).$$

Mediante il fattore in considerazione, con P radice semplice, il grado dell'equazione differenziale $F=0$ si potrà far discendere di n unità, e non di più, se non vogliasi che F riesca zero identicamente. Imperocchè, se sussistessero insieme tutte le condizioni (33), la radice ρ dell'equazione $f_y(X)=0$ ridurrebbesi alla costante P, e quindi la identità $f_y(\rho)=0$ trarrebbe seco la $\delta f_y(\rho)=0$, ed il risultante $F=0$ delle equazioni $f_y(X)=0$, $\delta f_y(X)=0$ sarebbe identicamente soddisfatto.

5.

Come si può far discendere il grado di F da l ad $l-n$ per mezzo del fattore considerato finora, nella stessa maniera tale grado si farà discendere da $l-n$ ad $l-2n$ mediante un secondo fattore (15), e cioè stabilendo che un secondo valore costante di P_μ sia radice semplice della prima fra le equazioni

$$\overset{n}{f}(P_\mu)=0, \qquad \overset{n-1}{f}(P_\mu)=0,\ldots, \qquad \overset{1}{f}(P_\mu)=0. \tag{34}$$

e radice di tutte le altre.

Se queste equazioni avessero luogo per m differenti valori costanti di P_μ, allora il grado di F scenderebbe da l ad $l-mn$. Però, come equazione differenziale, la $F=0$ si semplificherebbe assai più ancora, riducendosi ad una del grado $n-1$, in quanto che la F diverrebbe in tal caso eguale al prodotto di una costante per la potenza m^{esima} di uno qualsiasi dei differenziali da, $db,\ldots, ds, dt$. Infatti, sussistendo insieme colle (34) le seguenti

$$\delta\overset{n}{f}(P_\mu)=0, \qquad \delta\overset{n-1}{f}(P_\mu)=0,\ldots, \qquad \delta\overset{1}{f}(P_\mu)=0,$$

le costanti $P_1, P_2,\ldots, P_m$ sarebbero radici di entrambe le equazioni

$$f(X)-\overset{0}{f}(X)=0, \qquad \delta f(X)=0$$

ed avremmo

$$\left.\begin{aligned} &\frac{b-\overset{0}{b}}{a-\overset{0}{a}}=-\Sigma P, \quad \frac{c-\overset{0}{c}}{a-\overset{0}{a}}=\Sigma P_1P_2,\ldots, \quad \frac{t-\overset{0}{t}}{a-\overset{0}{a}}=\pm P_1P_2\cdots P_m,\\ &\frac{db}{da}=-\Sigma P, \quad \frac{dc}{da}=\Sigma P_1P_2,\ldots, \quad \frac{dt}{da}=\pm P_1P_2\cdots P_m. \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

E però, sostituendo nel determinante

$$F=\begin{vmatrix} a-\overset{0}{a}+\overset{0}{a} & b-\overset{0}{b}+\overset{0}{b} & c-\overset{0}{c}+\overset{0}{c} & . & . \\ 0 & a-\overset{0}{a}+\overset{0}{a} & b-\overset{0}{b}+\overset{0}{b} & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & t-\overset{0}{t}+\overset{0}{t} \\ da & db & dc & . & . \\ 0 & da & db & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & dt \end{vmatrix}$$

invece di $b-\overset{0}{b}$, $c-\overset{0}{c},\ldots$, db, $dc,\ldots$ i valori cavati dalle (35), poi raccogliendo da da ciascuna delle m righe inferiori, e sottraendo da ciascuna delle m righe superiori l'omologa inferiore moltiplicata per $a-\overset{0}{a}$, si otterrebbe

$$F=(da)^m \begin{vmatrix} \overset{0}{a} & \overset{0}{b} & \overset{0}{c} & . & . \\ 0 & \overset{0}{a} & \overset{0}{b} & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & \overset{0}{t} \\ 1 & -\Sigma \mathrm{P} & \Sigma \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 & . & . \\ 0 & 1 & -\Sigma \mathrm{P} & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & \pm \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\cdots\mathrm{P}_m \end{vmatrix} . \tag{36}$$

(*Continua.*)

Bestimmung der niedrigsten Classenzahl der algebraischen Minimalflächen.

(*Von* L. Henneberg, *in Zürich.*)

Die vorliegende Arbeit hat den Zweck die niedrigste Classenzahl der algebraischen Minimalflächen als die fünfte nachzuweisen.

In zwei Abhandlungen von mir (*) ist eine specielle Minimalfläche fünfter Classe aufgestellt und untersucht worden, von welcher ich nach Veröffentlichung der betreffenden Arbeiten erfahren habe, dass Herr Weierstrass schon im Besitze ihrer Gleichung gewesen ist; dieselbe lautete in Ebenencoordinaten

$$2w(u^2-v^2)(3u^2+3v^2+2w^2)+3(u^2+v^2)^2=0.$$

Der zuführende Beweis reducirt sich somit darauf, zu zeigen, dass keine algebraische Minimalfläche von der dritten oder vierten Classe existiren kann. Dieses lässt sich mit folgenden Hülfssätzen bewerkstelligen:

Ieder Cylinder, welcher eine algebraische Minimalfläche berührt, hat zum Orthogonalschnitte die Evolute einer algebraischen Curve.

Iede Minimalfläche, welche von einem Cylinder berührt wird, dessen Orthogonalschnitt die Evolute einer transcendenten Curve ist, ist eine transcendente Fläche.

Beweis: Herr Weierstrass (**) hat die Coordinaten x, y, z eines Punctes der Minimalfläche dargestellt als die reellen Theile dreier Functionen U, V, W

(*) *Ueber solche Minimalflächen, welche eine vorgeschriebene ebene Curve zur geodätischen Linie haben.* Zürich, 1875.

Ueber diejenige Minimalfläche, welche die Neil'sche Parabel zur ebenen geodätischen Linie hat. Vierteljahrschrift der zürcher. Naturf. Ges., Bd. 21.

(**) Weierstrass: *Ueber die Fläche, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist.* Monatsberichte der Berl. Akademie der Wissenschaften vom October 1866.

von der Form

$$\left.\begin{aligned} U &= (1+s^2)\frac{d^2F(s)}{ds^2}+2s\,\frac{dF(s)}{ds}-2F(s),\\ V &= i(1+s^2)\frac{d^2F(s)}{ds^2}-2is\frac{dF(s)}{ds}+2iF(s),\\ W &= 2s\frac{d^2F(s)}{ds^2}-2\frac{dF(s)}{ds}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Hierbei bedeutet $F(s)$ eine analytische Function des complexen Argumentes s, welche algebraisch ist oder transcendent, je nachdem die Fläche von algebraischer oder transcendenter Natur ist, und s bezeichnet die Grösse

$$s=\frac{X+Yi}{1-Z},$$

wo X, Y, Z die Cosinus der Winkel sind, welche die Normale der Fläche im Puncte x, y, z mit den Coordinatenaxen einschliesst.

Für denjenigen die Fläche berührenden Cylinder, dessen Mantellinien der y Axe parallel sind, ist

$$Y=0 \text{ und } s=\frac{X}{1-Z}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\text{reell}.$$

Bringt man daher $F(s)$ auf die Form

$$F(s)=F_1(s)+iF_2(s), \tag{2}$$

wo $F_1(s)$ und $F_2(s)$ Functionen sind, welche reell werden für reelle Werthe von s, so ergeben sich für die Coordinaten eines Orthogonalschnittes vom betreffenden Cylinder die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= (1-s^2)\frac{d^2F_1(s)}{ds^2}+2s\frac{dF_1(s)}{ds}-2F_1(s),\\ z &= 2s\frac{d^2F_1(s)}{ds^2}-2\frac{dF_1(s)}{ds}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Bildet man sich nun die Function

$$l=(1+s^2)\frac{d^2F_1(s)}{ds^2}-2s\frac{dF_1(s)}{ds}+2F_1(s), \tag{4}$$

so besteht zwischen x, y, l die Identität

$$dl^2 = dx^2 + dy^2$$

und es wird daher l die Bogenlänge der Curve (3) sein müssen. Für die Evolvente von (3) ist demgemäss

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x + l\cos\alpha = x + \frac{s^2-1}{s^2+1}\,l, \\ \zeta &= z + l\sin\alpha = z + \frac{2s}{s^2+1}\,l. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Ist nun die Fläche eine algebraische, so ist $F(s)$ und also auch $F_1(s)$ eine algebraische Function von s. Dann sind aber x, y, l und infolge davon auch ξ, ζ algebraische Functionen von s, d. h. die Evolvente ist eine algebraische Curve.

Ist dagegen die Evolvente (5) eine transcendente Curve, so ist jedenfalls eine der Grössen x, y, l eine transcendente Function von s. Dies ist nur möglich, wenn $F_1(s)$ und daher auch $F(s)$ eine transcendente Function von s, also die Fläche eine transcendente ist, q. e. d.

Für jeden Wurzelwerth der Gleichung

$$\frac{1}{F(s)} = 0$$

ergibt sich infolge der Gleichung (3) eine reelle, unendlich ferne gerade Linie auf der Minimalfläche. Da zu sämmtlichen Puncten einer solchen Linie der nämliche Werth von s gehört, so werden die Tangentialebenen der Fläche längs derselben in eine einzige Ebene zusammenfallen. Der von einem reellen, unendlich fernen Puncte der Minimalfläche an die Fläche construirte Cylinder wird somit, falls die Fläche von der n ten Classe ist, in die Tangentialebene und in einen Cylinder von der $n-2$ ten Classe zerfallen müssen.

Wenn nun eine Minimalfläche von der vierten Classe existirte, so müsste der von einem reellen, unendlich fernen Puncte der Fläche construirte berührende Cylinder von der zweiten Classe sein, während es, da die Kegelschnitte die Evoluten von transcendenten Curven sind, überhaupt keine algebraischen Minimalflächen geben kann, die von einem Cylinder zweiter Classe berührt werden. Ebenso kann keine algebraische Minimalfläche dritter Classe vorkommen. Die einzige Minimalfläche zweiter Classe ist die Nullkugel. Von der Nullkugel abgesehen ist somit die niedrigste Classenzahl der algebraischen Minimalflächen die fünfte.

Diesen Beweis habe ich in Zürich seinerzeit gelegentlich meiner Habilitation vorgetragen. Inzwischen hat nun Herr LIE (*) eine Abhandlung publicirt, in welcher er sich mit der ganz allgemeinen Frage nach der Bestimmung sämmtlicher Minimalflächen von vorgeschriebener Classe oder Ordnung beschäftigt. Trotzdem habe ich geglaubt, dass dieser Beweis, wenn auch vielleicht nur des Hülfssatzes wegen, noch Interesse besitzen dürfte.

Zürich, im November 1877.

(*) SOPHUS LIE: *Synthetisch-analytische Untersuchungen über Minimalflächen.* Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Kristiania, 1876.

Ueber die unendlich kleinen Schwingungen, welche ein Faden, der an dem einen Endpuncte befestigt und an dem anderen durch ein Gewicht belastet ist, unter dem Einflusse der Schwere und einer anfänglichen Gleichgewichtsstörung ausführt. (*)

(*Von* L. Henneberg, *in Zürich.*)

1.

Bezeichnet man mit s die Bogenlänge, mit α die Masse der Längeneinheit und mit λ die Spannung eines biegsamen, unelastischen Fadens, auf welchen nur in der Richtung der z Axe die Schwere wirkt, so ist die Bewegung desselben ausgedrückt durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \alpha\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}ds - d\left(\lambda\frac{\partial x}{\partial s}\right) &= 0,\\ \alpha\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}ds - d\left(\lambda\frac{\partial y}{\partial s}\right) &= 0,\\ \alpha\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}ds - d\left(\lambda\frac{\partial z}{\partial s}\right) &= \alpha g\, ds. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Zu diesen Gleichungen treten, falls, wie es das gestellte Problem vorschreibt, der eine Endpunct $s=0$ befestigt, der andere $y=l$ durch ein Gewicht von

(*) Der vorliegenden Arbeit liegt eine Schrift zum Grunde, welche der Verfasser, als Schüler der mathematischen Section der Fachlehrer-Abtheilung des eidgenössischen Polytechnikums, im Sommer 1874 zur Erlangung des Displomes eingereicht und zu welcher ihm sein hochverehrter Lehrer, Herr Prof. Dr. Heinrich Weber, das Thema gütigst überlassen hatte.

der Masse m belastet ist, die Grenzbedingungen hinzu für $s=0$:

$$x=0, \qquad y=0, \qquad z=0,$$

für $s=l$:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+\lambda\frac{\partial x}{\partial s}&=0,\\ m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\lambda\frac{\partial y}{\partial s}&=0,\\ m\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+\lambda\frac{\partial z}{\partial s}&=mg.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

In den folgenden Seiten sollen die Gleichungen (1) und (2) unter der Beschränkung, dass der Faden sich nur wenig aus der Gleichgewichtslage entfernt, also $\frac{\partial x}{\partial s}$ und $\frac{\partial y}{\partial s}$ unendlich kleine Grössen erster Ordnung sind, integrirt werden.

Die Spannung λ wird abhängen von der Neigung des Fadens gegen die z Axe, also eine Function sein von $\frac{\partial x}{\partial s}$ und $\frac{\partial y}{\partial s}$. Denkt man sich λ entwickelt in eine Reihe, die nach Potenzen von $\frac{\partial x}{\partial s}$ und $\frac{\partial y}{\partial s}$ geordnet ist

$$\lambda=\lambda_0+\lambda_1\frac{\partial x}{\partial s}+\lambda'_1\frac{\partial y}{\partial s}+\cdots,$$

so geht λ für $\frac{\partial x}{\partial s}=0$ und $\frac{\partial y}{\partial s}=0$ über in λ_0. Es muss folglich λ_0 die Spannung im ruhenden Faden bedeuten und daher den Werth haben

$$\lambda_0=mg+(l-s)\alpha g=(a-\alpha s)g,$$

wenn $a=m+\alpha l$ gesetzt wird. Somit ist

$$\lambda=(a-\alpha s)g+\lambda_1\frac{\partial x}{\partial s}+\lambda'_1\frac{\partial y}{\partial s}+\cdots$$

In den obigen Gleichungen kommt λ nur vor in den Verbindungen $\lambda\frac{\partial x}{\partial s}$, $\lambda\frac{\partial y}{\partial s}$, $\lambda\frac{\partial z}{\partial s}$. Deswegen wird man bei Beschränkung auf die unendlich kleinen Grössen erster Ordnung setzen können

$$\lambda\frac{\partial x}{\partial s}=(a-\alpha s)g\frac{\partial x}{\partial s},$$

$$\lambda\frac{\partial y}{\partial s}=(a-\alpha s)g\frac{\partial y}{\partial s}.$$

Dann ergeben sich aus (1) und (2) für x und y die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\{g(a-\alpha s)\frac{\partial x}{\partial s}\right\}-\alpha\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\{g(a-\alpha s)\frac{\partial y}{\partial s}\right\}-\alpha\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$$

und die Grenzbedingungen für $s=0$:

$$x=0, \qquad y=0,$$

für $s=l$:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+g\frac{\partial x}{\partial s}=0,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+g\frac{\partial y}{\partial s}=0.$$

Bei der Untersuchung der horizontalen, unendlich kleinen Schwinungen eines der Schwere unterworfenen Fadens, dessen einer Endpunct befestigt, während der andere durch ein Gewicht belastet ist, kommt es darauf an die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial s}\left\{g(a-\alpha s)\frac{\partial u}{\partial s}\right\}-\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0 \tag{3}$$

zu integriren unter der Grenzbedingung für $s=0$:

$$u=0, \tag{4}$$

für $s=l$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+g\frac{\partial u}{\partial s}=0.$$

Was die verticalen Schwingungen anbelangt, so kann man in den Gleichungen für z nicht setzen

$$\lambda\frac{\partial z}{\partial s}=(a-\alpha s)g\frac{\partial z}{\partial s},$$

da $\frac{\partial z}{\partial s}$ sehr nahe bei Eins liegt und man somit schon Glieder erster Ordnung vernachlässigen würde. Diese Schwingung ist jedoch von geringerer Bedeutung und darf deshalb gänzlich unberücksichtigt bleiben.

2.

Die Differentialgleichung (3) ist linear und homogen. Das allgemeine Integral wird sich aus einer Reihe von particulären zusammensetzen lassen

$$u = \sum_n A_n u_n.$$

Setzt man zur Auffindung von particulären Integralen

$$u_n = S_n T_n,$$

wo S_n eine Function bedeutet, die nur von s, T_n eine solche, die nur von t abhängt, so zerfällt (3) in die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2 T_n}{d t^2} = -\frac{n^2}{\alpha} T_n$$

und

$$\frac{d}{ds}\left\{g(a - \alpha s)\frac{d S_n}{ds}\right\} + n^2 S_n = 0.$$

Dieselben ergeben

$$T_n = A_n \cos\frac{n}{\sqrt{\alpha}} t + B_n \sin\frac{n}{\sqrt{\alpha}} t,$$

$$S_n = C_n J_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{a - \alpha s}\right) + D_n Y_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{a - \alpha s}\right),$$

wenn J_0 und Y_0 die Bessel'schen Functionen Oter Ordnung sind. Somit ist

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \left\{A_n \cos\frac{n}{\sqrt{\alpha}} t + B_n \sin\frac{n}{\sqrt{\alpha}} t\right\}\left\{C_n J_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{a-\alpha s}\right) + D_n Y_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{a - \alpha s}\right)\right\}, \\ u &= \sum_n \left\{A_n \cos\frac{n}{\sqrt{\alpha}} t + B_n \sin\frac{n}{\sqrt{\alpha}} t\right\}\left\{C_n J_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{a-\alpha s}\right) + D_n Y_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{a - \alpha s}\right)\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Die Grenzbedingungen (4) sind befriedigt, wenn ihnen jedes einzelne particuläre Integral u_n für sich genügt, sobald also für $s = 0$ ist:

$$u_n = 0,$$

für $s = l$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} + g\frac{\partial u_n}{\partial s} = 0.$$

Bei Berücksichtigung der Differentialgleichung von T_n ergeben sich hieraus für die Function S_n die Bedingungen für $s=0$:

$$S_n=0,$$

für $s=l$:

$$g\frac{dS_n}{ds}-\frac{n^2}{\alpha}S_n=0.$$

Es ist nun

$$\lim_{s=l}\frac{1}{n}\left\{g\frac{dS_n}{ds}-\frac{n^2}{\alpha}S_n\right\}=C_n\left\{\frac{n}{\alpha}J_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{m}\right)-\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{m}}J_1\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{m}\right)\right\}$$
$$+D_n\left\{\frac{n}{\alpha}Y_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{m}\right)-\frac{\sqrt{g}}{\sqrt{m}}Y_1\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{m}\right)\right\}.$$

Die Grenzbedingung für $s=l$ wird also durch die Annahme befriedigt

$$S_n=\left\{n\sqrt{m}Y_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{m}\right)-\alpha\sqrt{g}Y_1\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{m}\right)\right\}J_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{a-\alpha s}\right)$$
$$-\left\{n\sqrt{m}J_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{m}\right)-\alpha\sqrt{g}J_1\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{m}\right)\right\}Y_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{a-\alpha s}\right).$$

Um auch noch derjenigen für $s=0$ zu genügen, hat man die Grössen n als die unendlich vielen Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$\left.\begin{aligned}&\left\{n\sqrt{m}Y_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{m}\right)-\alpha\sqrt{g}Y_1\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{m}\right)\right\}J_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{a}\right)\\&-\left\{n\sqrt{m}J_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{m}\right)-\alpha\sqrt{g}J_1\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{m}\right)\right\}Y_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{a}\right)=0\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

anzusehen.

Es ergibt sich daher

$$\left.\begin{aligned}u=\sum_n\left(A_n\cos\frac{n}{\sqrt{\alpha}}t+B_n\sin\frac{n}{\sqrt{\alpha}}t\right)\Bigg[&\left\{n\sqrt{m}Y_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{m}\right)-\alpha\sqrt{g}Y_1\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{m}\right)\right\}J_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{a-\alpha s}\right)\\&-\left\{n\sqrt{m}J_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{m}\right)-\alpha\sqrt{g}J_1\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{m}\right)\right\}Y_0\left(\frac{2n}{\alpha\sqrt{g}}\sqrt{a-\alpha s}\right)\Bigg],\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

wo n die Wurzeln der Gleichung (6) bedeuten.

Die Constanten A_n und B_n, welche noch in u vorkommen, werden vom Anfangszustande des Fadens abhängen. Für $t=0$ soll sein $u=f(s)$, $\frac{\partial u}{\partial t}=\varphi(s)$. Es folgt somit

$$f(s)=\sum A_nS_n,\qquad \varphi(s)=\sum\frac{n}{\sqrt{\alpha}}B_nS_n.$$

Die Constanten A_n sind durch die Anfangslage, die B_n durch die Anfangsgeschwindigkeit bedingt. Zur Berechnung der Werthe von A_n und B_n ist die Herleitung einer Hülfsformel nothwendig:

Es seien n und n' zwei von einander verschiedene Wurzeln der Gleichung (6). Dann sind S_n und $S_{n'}$ zwei Functionen, welche den Gleichungen genügen

$$\frac{d}{ds}\left\{g(a-\alpha s)\frac{dS_n}{ds}\right\}+n^2 S_n=0,$$

$$\frac{d}{ds}\left\{g(a-\alpha s)\frac{dS_{n'}}{ds}\right\}+n'^2 S_{n'}=0$$

und ausserdem den Grenzbedingungen für $s=0$:

$$S_n=0, \qquad S_{n'}=0,$$

für $s=l$:

$$g\frac{dS_n}{ds}-\frac{n^2}{\alpha}S_n=0, \qquad g\frac{dS_{n'}}{ds}-\frac{n'^2}{\alpha}S_{n'}=0.$$

Multiplicirt man nun die obigen Gleichungen mit $S_{n'}$ resp. S_n und integrirt die Differenz in Bezug auf s von $s=0$ bis $s=l$, so erhält man

$$(n^2-n'^2)\int_0^l S_n S_{n'}\,ds+\left[g(a-\alpha s)\left\{S_{n'}\frac{dS_n}{ds}-S_n\frac{dS_{n'}}{ds}\right\}\right]_0^l=0$$

oder bei Benutzung der Grenzbedingungen für $s=0$ und $s=l$

$$\int_0^l S_n S_{n'}\,ds+\frac{m}{\alpha}S_n(l)S_{n'}(l)=0.$$

Aus der Gleichung

$$f(s)=\sum_n A_n S_n$$

folgt nun

$$\int_0^l S_{n'}f(s)ds+\frac{m}{\alpha}S_{n'}(l)f(l)=\sum_n A_n\left\{\int_0^l S_n S_{n'}ds+\frac{m}{\alpha}S_n S_{n'}\right\}.$$

Nach der Hülfsformel verschwinden rechts alle Glieder, für welche $n \gtrless n'$. Somit ist

$$\int_0^l S_{n'}f(s)ds+\frac{m}{\alpha}S_{n'}(l)f(l)=A_{n'}\left\{\int_0^l S_{n'}^2 ds+\frac{m}{\alpha}S_n^2(l)\right\}$$

und daher

$$A_n = \frac{\int_0^l S_n f(s)\,ds + \frac{m}{\alpha} S_n(l) f(l)}{\int_0^l S_n^2\,ds + \frac{m}{\alpha} S_n^2(l)}. \tag{8}$$

Ebenso ergibt sich

$$B_n = \frac{\sqrt{\alpha}}{n} \frac{\int_0^l S_n \varphi(s)\,ds + \frac{m}{\alpha} S_n(l) \varphi(l)}{\int_0^l S_n^2\,ds + \frac{m}{\alpha} S_n^2(l)}. \tag{9}$$

3.

Besonderes Interesse verdienen die beiden Grenzfälle, welche man erhält, wenn man einerseits annimmt, dass kein schwerer Punct am Ende des Fadens ist, andererseits die Masse des Fadens als unendlich klein betrachtet gegenüber der Masse m des schweren Punctes am Ende $s = l$.

In dem ersten Falle wird

$$S_n = C_n J_0\left(\frac{2n}{\sqrt{g}}\sqrt{l-s}\right) + D_n Y_0\left(\frac{2n}{\sqrt{g}}\sqrt{l-s}\right).$$

Die Functionen Y_0 werden für den Nullwerth des Argumentes unendlich gross. Es muss daher

$$D_n = 0, \qquad S_n = J_0\left(\frac{2n}{\sqrt{g}}\sqrt{l-s}\right)$$

gesetzt werden. Die Grenzbedingung für $s = l$ ist hierdurch von selbst erfüllt; derjenigen für $s = 0$ kann man durch die Annahme genügen, dass die Grössen n die Wurzeln der transcendenten Gleichung sind

$$J_0\left(\frac{2n}{\sqrt{g}}\sqrt{l}\right) = 0. \tag{10}$$

Es ist somit

$$u = \sum_n \left\{ A_n \cos\frac{n}{\sqrt{\alpha}} t + B_n \sin\frac{n}{\sqrt{\alpha}} t \right\} J_0\left(\frac{2n}{\sqrt{g}}\sqrt{l-s}\right), \tag{11}$$

wo n die Wurzeln von (10) und die Coefficienten A_n und B_n infolge von (8) und (9) die Werthe haben

$$A_n = \frac{\int_0^l J_0\left(\frac{2n}{\sqrt{g}}\sqrt{l-s}\right)f(s)\,ds}{\int_0^l \left[J_0\left(\frac{2n}{\sqrt{g}}\sqrt{l-s}\right)\right]^2 ds} = \frac{\int_0^l J_0\left(\frac{2n}{\sqrt{g}}\sqrt{l-s}\right)f(s)\,ds}{l\left[J_1\left(\frac{2n}{\sqrt{g}}\sqrt{l}\right)\right]^2}, \tag{12}$$

$$B_n = \frac{\sqrt{\alpha}}{n}\frac{\int_0^l J_0\left(\frac{2n}{\sqrt{g}}\sqrt{l-s}\right)\varphi(s)\,ds}{\int_0^l \left[J_0\left(\frac{2n}{\sqrt{g}}\sqrt{l-s}\right)\right]^2 ds} = \frac{\sqrt{\alpha}}{n}\frac{\int_0^l J_0\left(\frac{2n}{\sqrt{g}}\sqrt{l-s}\right)\varphi(s)\,ds}{l\left[J_1\left(\frac{2n}{\sqrt{g}}\sqrt{l}\right)\right]^2}. \tag{13}$$

4.

In dem wichtigeren Falle, in welchem die Masse des Fadens sehr klein ist gegenüber der Masse m des schweren Punctes, wird man berechtigt sein, in der Differentialgleichung (3) das Glied $\frac{\partial}{\partial s}\left(-\alpha g s \frac{\partial u}{\partial s}\right)$ zu vernachlässigen. Da $\frac{\partial u}{\partial s}$ von der ersten Ordnung unendlich klein ist, so werden hierbei nur Glieder von einer höheren Ordnung unberücksichtigt gelassen. Man erhält also die Gleichung

$$a g \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \tag{14}$$

deren Integral ist

$$u = \sum_n \left\{A_n \cos\frac{n}{\sqrt{\alpha}}t + B_n \sin\frac{n}{\sqrt{\alpha}}t\right\}\left\{C_n \cos\frac{ns}{\sqrt{ag}} + D_n \sin\frac{ns}{\sqrt{ag}}\right\}.$$

Die Bedingung, dass $u=0$ für $s=0$ ist, wird erfüllt, wenn $C_n=0$, also

$$u = \sum_n \left\{A_n \cos\frac{n}{\sqrt{\alpha}}t + B_n \sin\frac{n}{\sqrt{\alpha}}t\right\}\sin\frac{ns}{\sqrt{ag}}. \tag{15}$$

Der Bedingung für $s=l$ wird genügt, wenn n die Wurzeln der transcendenten Gleichung sind

$$\cot g\frac{nl}{\sqrt{ag}} = \frac{\sqrt{a}}{\alpha\sqrt{g}}n. \tag{16}$$

Die Wurzeln dieser Gleichung liegen

$$0 < \frac{n_0 l}{\sqrt{a g}} < \frac{\pi}{2},$$

$$\pi < \frac{n_1 l}{\sqrt{a g}} < 3\frac{\pi}{2},$$

$$2\pi < \frac{n_2 l}{\sqrt{a g}} < \frac{5\pi}{2},$$

. . . .

. . . .

. . . .

und zwar nähern sie sich sehr schnell den betreffenden ganzzahligen Vielfachen von π. Im vorliegenden Falle ist $\frac{\alpha}{\sqrt{a}}$ sehr klein. Daher wird $\frac{n_0 l}{\sqrt{a g}}$ nahe bei Null sein und schon $\frac{n_1 l}{\sqrt{a g}}$ sich nur äusserst wenig von π unterscheiden. Deshalb kann man setzen

$$\frac{n_1 l}{\sqrt{a g}} = \pi, \qquad \frac{n_2 l}{\sqrt{a g}} = 2\pi, \ldots$$

und erhält

$$u = \left(A_0 \cos\frac{n_0}{\sqrt{\alpha}} t + B_0 \sin\frac{n_0}{\sqrt{\alpha}} t\right) \sin\frac{n_0 s}{\sqrt{a g}}$$
$$+ \sum_{m=1,2\ldots} \left\{A_m \cos\left(\frac{m\pi}{l}\sqrt{\frac{a g}{\alpha}}\, t\right) + B_m \sin\left(\frac{m\pi}{l}\sqrt{\frac{a g}{\alpha}}\, t\right)\right\} \sin\frac{m\pi}{l} s$$

oder

$$\left.\begin{aligned} u &= \left(A_0 \cos\frac{n_0}{\sqrt{\alpha}} t + B_0 \sin\frac{n_0}{\sqrt{\alpha}} t\right) s \\ &+ \sum_{m=1,2\ldots} \left\{A_m \cos\left(\frac{m\pi}{l}\sqrt{\frac{a g}{\alpha}}\, t\right) + B_m \sin\left(\frac{m\pi}{l}\sqrt{\frac{a g}{\alpha}}\, t\right)\right\} \sin\frac{m\pi}{l} s. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Das erste Glied

$$u_0 = \left(A_0 \cos\frac{n_0}{\sqrt{\alpha}} t + B_0 \sin\frac{n_0}{\sqrt{\alpha}} t\right) s \tag{18}$$

stellt die Schwingung eines starren mathematischen Pendels dar von der Länge

$$L = \frac{\alpha g}{n_0^2}, \tag{19}$$

während die übrigen Glieder die Schwingung des Fadens relativ zu diesem starren Pendel ausdrücken. Was diese letztere Schwingung anbelangt, so stimmt sie infolge von (17) vollständig mit der Schwingung einer elastischen Saite von der Länge l überein. Uebrigens ist diese Schwingung von geringerer Bedeutung, da man A_m und B_m durch Verfügung über den Anfangszustand des Fadens beliebig klein zu machen im Stande ist; so wird $A_m = 0$, $B_m = 0$, wenn $f(s) = \vartheta s$, $\varphi(s) = cs$, wo ϑ und c constante Grössen bedeuten. Näherungsweise wird der Faden wie ein Pendel von der Länge $L = \frac{\alpha g}{n_0^2}$ schwingen. Da nun n_0 als die kleinste Wurzeln von (17) nahe bei Null liegt, so kann man setzen

$$tg \frac{n_0 l}{\sqrt{ag}} = \frac{n_0 l}{\sqrt{ag}} + \frac{1}{3}\left(\frac{n_0 l}{\sqrt{ag}}\right)^3$$

und erhält

$$\left(\frac{n_0 l}{\sqrt{ag}}\right)^3 + 3\frac{n_0 l}{\sqrt{ag}} = \frac{3\alpha\sqrt{g}}{\sqrt{a}\, n_0},$$

$$\frac{n_0}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\, \frac{\sqrt{ag}\sqrt{\sqrt{1+\frac{4}{3}\frac{\alpha l}{a}}-1}}{\sqrt{\alpha l}},$$

$$L = \frac{\alpha g}{n_0^2} = l\left\{1 + \frac{1}{3}\frac{\alpha l}{a} + \cdots\right\}.$$

Bei Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung $\left(\frac{\alpha l}{a}\right)^2$ bekommt man

$$L = l\left\{1 + \frac{1}{3}\frac{\alpha l}{a}\right\}. \tag{20}$$

Die Länge des mathematischen Pendels von der nämlichen Schwingungsdauer ist grösser als die Länge des Fadens. Die Schwingungsdauer wird durch die Biegsamkeit des Fadens vergrössert.

Zürich, im November 1877.

Sur les lignes singulières des surfaces algébriques.

(*Par Mr.* Halphen, *à Paris.*)

Le Mémoire actuel a pour objet l'étude des lignes singulières les plus générales qui se puissent rencontrer sur les surfaces algébriques. Je vais en donner un résumé succinct. Quelques mots au sujet des courbes planes serviront, par un rapprochement naturel et nécessaire, à faire saisir la nature du problème principal que je me suis proposé de résoudre.

Aux environs d'un point singulier, une courbe algébrique peut être envisagée comme la superposition de plusieurs courbes élémentaires distinctes, dont l'ordonnée de chacune est représentée par un développement en série. Ces courbes élémentaires, nommées par Mr. Cayley branches superlinéaires, je les appelle plus abréviativement des cycles, pour des raisons dont je n'ai pas à parler ici. Dans beaucoup de problèmes, chaque cycle est suffisamment caractérisé par deux nombres entiers n, ν, que l'on peut appeler l'ordre et la classe de ce cycle. Le premier est l'ordre de multiplicité du point singulier sur le cycle; quant au second, il est ainsi défini: le quotient $\nu:n$ est l'ordre commun du contact de chaque branche du cycle avec sa tangente au point singulier. Les nombres n, ν suffisent notamment à déterminer leurs analogues pour une figure corrélative: ce sont ces mêmes nombres en ordre inverse.

On ne manquera pas de remarquer qu'un point simple d'une courbe est un cas particulier d'un point singulier ainsi envisagé.

Sur une surface S, considérons à la fois une ligne (a), une section plane arbitraire (S) et un point de rencontre a de ces deux lignes. La surface S, aux environs du point a, est caractérisée dans une certaine mesure par l'ordre et la classe de chacun des cycles en lesquels (S) se décompose au point a. Quels éléments faut-il connaître en outre pour pouvoir trouver les nombres analogues et relatifs à une surface corrélative de S? Telle est la question qui s'offre tout d'abord. Les résultats suivants fournissent la réponse.

1. Aux environs d'une ligne algébrique (a) tracée sur une surface algébrique S, cette surface est la superposition de surfaces élémentaires dont chacune jouit de la propriété suivante: au point de rencontre avec (a) une section plane faite arbitrairement dans une surface élémentaire se compose d'un seul cycle. Je donne aux surfaces élémentaires le nom de cycles de nappes. L'ordre n et la classe ν du cycle unique que possède, en un point de rencontre avec (a), une section plane de cette surface élémentaire, je les appelle l'ordre et la classe du cycle de nappes. J'appelle (a) la ligne-origine du cycle.

2. En chaque point de la ligne-origine, toutes les nappes d'un même cycle ont un même plan tangent, qui contient la tangente de la ligne-origine.

3. Ce plan tangent peut être constant le long de la ligne-origine, ou bien variable. Dans le premier cas, la ligne est plane, et il y correspond, dans une figure corrélative, un point singulier. Dans le second cas, il y correspond une ligne. C'est à ce dernier cas que se rapporte toute ce qui suit.

4. La classe ν d'un cycle de nappes (dont le plan tangent est variable) est égale ou inférieure à l'ordre n de ce cycle.

5. Quand la classe est égale à l'ordre, la théorie de l'indicatrice est applicable.

6. Tout cycle de nappes a pour corrélatif un cycle de nappes. Les classes de deux cycles corrélatifs sont égales.

7. Tout cycle de nappes dont l'ordre égale la classe, et dont l'indicatrice n'est pas parabolique en chaque point de la ligne-origine, a pour corrélatif un cycle du même ordre que le proposé.

Pour les autres cas, il est nécessaire de distinguer trois groupes principaux et des sous-groupes.

8. Groupe A. Le plan tangent en chaque point de la ligne-origine n'est pas osculateur de cette ligne.

Sous-groupe $A_1(\nu, \nu)$; cette notation indique que l'ordre et la classe sont égaux à ν, mais avec cette particularité que l'indicatrice est parabolique en chaque point de la ligne-origine. En chaque point de cette ligne, une droite unique a, avec chaque nappe, un contact d'ordre supérieur au 1$^{\text{er}}$. Soit $(1+\lambda)$ cet ordre.

Sous-groupe $A'_1(n, \nu)$, $n > \nu$.

Un cycle A_1 défini par les nombres ν, λ, a pour corrélatif un cycle A'_1 défini par les nombres $n = (1+\lambda)\nu$, et ν.

Réciproquement un cycle $A'_1(n, \nu)$ a pour corrélatif un cycle $A_1(\nu, \nu)$, pour lequel $\lambda = \frac{n-\nu}{\nu}$.

9. Groupe *B*. Le plan tangent en chaque point de la ligne-origine est osculateur de cette ligne.

Sous-groupe $B_1(n, \nu)$, $\nu < \frac{n}{2}$.

Sous-groupe $B'_1(2\nu, \nu)$, avec cette particularité que la tangente de la ligne-origine a, avec chaque nappe, un contact d'ordre supérieur à 2. Soit $(2+\theta)$ l'ordre de ce contact.

Sous-groupe $B_2(2\nu, \nu)$, avec cette circonstance que l'ordre de ce dernier contact est égal à 2.

Sous-groupe $B_3(n, \nu)$, $\nu > \frac{n}{2}$.

Un cycle $B_1(n, \nu)$ a pour corrélatif un cycle $B'_1(2\nu, \nu)$, avec $\theta = \frac{n-2\nu}{2\nu}$. Réciproquement, un cycle $B'_1(2\nu, \nu)$ défini, en outre, par le nombre θ, a pour corrélatif un cycle $B_1(n, \nu)$, avec $n = 2(1+\theta)\nu$.

Un cycle $B_2(2\nu, \nu)$ a pour corrélatif un cycle $B_2(2\nu, \nu)$.

Un cycle $B_3(n, \nu)$ a pour corrélatif un cycle $B_3(n, \nu)$.

10. Groupe *C*. La ligne-origine est droite.

Un pareil cycle (n, ν) a pour corrélatif un cycle de même définition (n, ν).

La question indiquée plus haut se trouve résolue par l'ensemble des résultats dont je viens de donner le tableau synoptique. Je consacre une seconde partie de ce Mémoire à montrer qu'entre les éléments précédemment définis et rélatifs aux diverses lignes singulières d'une même surface, les éléments analogues et relatifs aux lignes le long desquelles le plan tangent est constant, et enfin le degré et le rang de la surface, il existe une relation. Cette relation, je la forme dans toute sa généralité. C'est celle qui fournit le degré du lieu des points à indicatrice parabolique sur une surface à singularités quelconques.

Enfin je termine ce Mémoire par quelques applications aux surfaces de révolution et aux surfaces gauches.

Les éléments si simples et si peu nombreux, que j'ai été conduit à envisager ici, suffisent à caractériser les lignes singulières dans une catégorie importante de questions. Par exemple, ils suffisent pour traiter, dans toute sa généralité, le problème de trouver le degré du lieu des points qui, sur une surface algebrique, satisfont à une équation algébrique aux dérivées partielles du second ordre. Cette nouvelle questions fera l'objet d'un autre Mémoire.

En terminant ce préambule, je dois signaler à l'attention du lecteur les recherches antérieures de Mr. ZEUTHEN sur le même sujet, principalement celles dont les résultats sont contenus dans son Mémoire: *Sur une classe de points singuliers de surfaces* (Mathematische Annalen, t. 9).

I. Propriétés générales des cycles de nappes.

1. Il est nécessaire de rappeler brièvement ici une propriété des courbes planes, savoir: Aux environs d'un point O d'une courbe algébrique plane, toutes les positions d'un point variable sur cette courbe sont représentées (le point O étant l'origine des coordonnées rectilignes η, ζ) par un ou plusieurs systèmes d'équations, tels que

$$\eta = \omega^n, \qquad \zeta = f(\omega), \tag{1}$$

dans chacun desquels n est un entier positif et $f(\omega)$ un développement suivant les puissances entières et ascendantes de ω s'évanouissant avec ω. Ce système d'équations est valable dans les limites de convergence de $f(\omega)$.

A cet énoncé on doit ajouter diverses observations.

1.° Le nombre des valeurs distinctes de ζ, pour une valeur donnée de η, est n ou un diviseur de n. Soit n' ce diviseur. Alors f contient seulement les puissances de ω dont les exposants sont des multiples de $n:n'$. Si l'on prend pour nouvelle variable, au lieu de ω, la suivante

$$\omega' = \omega^{\frac{n}{n'}},$$

les équations (1) deviennent

$$\eta = \omega'^{n'}, \qquad \zeta = f(\omega'^{\frac{n'}{n}}) = \varphi(\omega').$$

D'après l'hypothèse, φ ne contient que des puissances entières de ω', et acquiert n' valeurs distinctes pour chaque valeurs de η. On peut, sans nuire à la généralité, supposer cette réduction faite dans (1), et dire que dans les équations (1), chaque système de valeurs de η, ζ correspond à une seule valeur de ω.

2.° Si la droite $\eta = 0$ n'est pas tangente à la courbe en O, le rapport $\zeta:\eta$ a une limite quand ω tend vers zéro. Donc $f(\omega)$ commence par un terme de degré non inférieur à n. On peut ainsi écrire, au lieu de (1):

$$\eta = \omega^n, \qquad \zeta = b\,\omega^n + c\,\omega^{n+\nu} + \cdots \tag{2}$$

Les équations (2) représentent, aux environs du point O, n branches de courbe, dont chacune a pour tangente la droite $b\eta - \zeta = 0$, et a, avec cette droite, un contact d'ordre égal à $\nu : n$.

Cet ensemble de n branches a reçu de Mr. Cayley le nom de branche superlinéaire, chacune des n branches s'appelant alors branche partielle. Pour plus de brièveté, je fais usage du nom de cycle, qui rapelle les propriétés algébriques développées par Mr. Puiseux dans un Mémoire très connu. Je nomme le nombre n l'ordre du cycle (2), et le nombre ν la classe de ce même cycle; j'emploie la notation abrégée (n, ν) pour désigner ce cycle. Ces deux nombres se conservent, non seulement quand on change les coordonnées, mais encore quand on fait une transformation homographique. Aussi les lettres η, ζ pouvent-elles être envisagée, dans ce qui précède, comme représentant les rapports de deux coordonnées homogènes à une troisième.

3.° En un point simple quelconque, une courbe se compose d'un seul cycle dont l'ordre est l'unité. En un point multiple, l'ordre de multiplicité est la somme des ordres des cycles en lesquels la courbe se décompose.

4.° Au lieu des équations (2) on peut envisager les suivantes

$$\eta = b'\omega^n + \cdots, \qquad \zeta = b\,\omega^n + \cdots,$$

dans lesquelles les deux coordonées sont, à la fois, représentées par des développements en séries. Par un changement de variable, on peut passer à volonté de l'une des formes à l'autre. Ces dernierès équations représentent un cycle d'ordre n, sous la condition que chaque système de valeurs de η, ζ réponde à une seule valeur de ω.

2. J'arrive maintenant à la théorie des surfaces. Soit S une surface algébrique, sur laquelle est tracée une courbe algébrique (a), lieu du point a dont les coordonnées sont α, β, γ. Considérons une section plane (S) de la surface, et soit a un des points où son plan rencontre (a). Le point a appartient à (S). Je suppose qu'en ce point, (S) se decompose en divers cycles, parmi lesquels un cycle (n, ν). La projection de (S) sur le plan des $\eta\zeta$ passe par la projection de a, s'y décompose en divers cycles, parmi lesquels un cycle (n, ν). Ce cycle, dont l'origine a pour coordonnées β, γ, est représenté par les équations (2) dans lesquelles η et ζ sont respectivement remplacées par $(\eta - \beta)$ et $(\zeta - \gamma)$. Si l'on fait varier le plan de (S), les quantités β, γ, b, c,... varient

en même temps. Je puis les faire dépendre de la seule variable α, en astreignant le plan de (S) à passer, par exemple, par une droite fixe.

Prenons pour origine des coordonnées ξ, η, ζ un point O de (a), qui ne soit pas singulier sur cette ligne. Les coordonnées β, γ d'un point a, voisin de O, sont des fonctions synectiques de α, évanouissantes avec α. Les quantités b, c,... pour la section (S) qui passe en a sont des fonctions algébriques de α, qui ne cessent d'être synectiques que pour certaines valeurs de la variable. Donc, aux environs du point O, arbitrairement choisi sur (a), et dans nne certaine étendue, ces fonctions sont synectiques.

Le cycle variable (n, ν) est maintenant représenté, dans l'espace, par les équations

$$\xi = \alpha + k\omega^n, \qquad \eta = \beta + \omega^n, \qquad \zeta = \gamma + b\,\omega^n + c\,\omega^{n+\nu} + \cdots, \tag{3}$$

où l'on peut supposer k constant, de manière à ce que le plan variable de (S) soit de la forme $k\eta - \xi = \lambda$. On pourrait supposer $k = 0$. Si je ne fais pas cette semplification, c'est afin de pouvoir disposer autrement du plan $\xi = 0$.

Les quantités β, γ, b, c,... sont des développements suivant les puissances entières, ascendantes et positives de α. Considérés à la fois, ces développements sont convergents pour les valeurs de α dont les modules sont inférieurs à une certaine limite. Pour une de ces valeurs de α, le développement de ζ est convergent pour les valeurs de ω dont les modules sont aussi inférieurs à une certaine limite. Donc, dans une certaine étendue, les équations (3) représentent une portion de la surface S. L'ensemble des n nappes représentées par (3) sera dit un cycle de nappes, que je représenterai abréviativement par (n, ν).

A un point de S répond un seul des plans variables. Ce plan coupe (a) en un seul point voisin de O; donc à un point de S répond une seule valeur de α. Dans la section (S), à un point du cycle répond une seule valeur de ω. Donc à chaque système de valeurs de ξ, η, ζ répond un seul système de valeurs de α et de ω.

3. Par les équations (3) je viens de définir un cycle de nappes, et je peux maintenant conclure que le long d'une ligne algébrique tracée sur une surface algébrique, cette surface se décompose en un ou plusieurs cycles. L'ensemble des équations de ces cycles remplace complètement l'équation de la surface aux environs de la ligne envisagée. Pour l'étude de la surface aux environs de cette ligne, on peut donc considérer isolément chaque cycle: les choses se passent comme si la surface se décomposait effectivement en plusieurs surfaces dont chacune n'aurait qu'on seul cycle de nappes. J'étudierai donc les propriétés des cycles en eux-mêmes.

4. Suivant la génération dont les équations (3) constituent l'expression analytique, le cycle de nappes est engendré par le mouvement d'un cycle de branches planes, dont l'origine décrit une courbe, que je désignerai dorénavant par le nom de ligne-origine. Nous ne connaissons donc jusqu'à présent qu'une seule section plane de ce cycle. Coupons-le maintenant par un plan arbitraire mené en O:

$$\xi = \lambda\eta + \mu\zeta, \tag{4}$$

et étudions cette section. Je suppose les axes de coordonnées choisis comme il suit: la droite $\eta = \zeta = 0$ est la tangente de (a) en O, et le plan $\zeta = 0$ contient, en outre, la tangente en O de la section (S). Suivant ces hypothèses, les développements de β et de γ commencent par des termes du 2^d ordre, et b s'évanouit avec α. Ainsi

$$\left.\begin{array}{ll} \beta = \beta_2\alpha^2 + \beta_3\alpha^3 + \cdots, & \gamma = \gamma_2\alpha^2 + \gamma_3\alpha^3 + \cdots \\ b = b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \cdots, & c = c_0 + c_1\alpha + \cdots \end{array}\right\} \tag{5}$$

Dans (4) je substitue à ξ, η, ζ les expressions (3) et j'ordonne suivant les puissances croissantes de ω. Puis tenant compte des équations (5), j'ordonne chaque coefficient suivant les puissances croissantes de α. J'ai ainsi

$$\alpha = (\lambda - k)\omega^n + \cdots \tag{6}$$

Cette équation admet une seule racine α évanouissante avec ω, et la partie principale de cette racine est constituée par le terme écrit dans le second membre. Substituant à α cette racine, j'ai pour ξ, η, ζ des développements suivant les puissances entières et ascendantes de ω, commençant, les deux premiers par des termes de degré n, le dernier par un terme de degré supérieur. Ces équations définissent un cycle de branches (n.° 1), et la tangente de ce cycle est dans le plan $\zeta = 0$. Donc

Théorème I. Si par un point de la ligne-origine d'un cycle de nappes on même un plan arbitraire, la section déterminée par ce plan se compose, en ce point, d'un seul cycle de branches. Quand le plan de section varie, la tangente de la section a pour lieu un plan contenant la tangente de la ligne-origine.

Ce plan, lieu des tangentes, est le plan tangent du cycle de nappes au point envisagé. De quelque manière qu'un point mobile sur une nappe d'un cycle vienne coïncider avec un point de la ligne-origine, le plan tangent de la surface au point mobile a pour limite le plan tangent du cycle au point limite, proposition presque évidente que le calcul justifiera plus loin.

5. D'après le théorème I, un cycle de nappes peut être, d'une infinité de manières, engendré par le mouvement d'un cycle de branches planes dont l'origine suit la ligne (a). Je l'ai précédemment engendré d'une de ces manières, et dans les équations (3) ainsi obtenues figurent explicitement l'ordre n et la classe ν du cycle de la section (S) employée. Il importe de savoir si n et ν sont effectivement l'ordre et la classe du cycle d'un autre section quelconque.

A l'égard de l'ordre, la réponse est immédiate. Pour la section faite par le plan (4), les développements de ξ et de η commencent par des termes de degré n en ω. D'ailleurs, à chaque point de cette section correspond (n.° 2) une seule valeur de ω. Donc (n.° 1), l'ordre du cycle est égal à n.

A l'égard de la classe, il nous suffit, pour la trouver, de connaître le degré du premier terme du développement de ζ pour la même section. Suivant que ν est inférieur ou supérieur à n, ce premier terme est

$$c_0 \omega^{n+\nu} \text{ ou } \{\gamma_2(\lambda-k)^2+b_1(\lambda-k)\}\omega^{2n}.$$

Si donc ν est supérieur à n, la classe du cycle de la section (4) est n, et non pas ν. Cette conclusion suppose toutefois que b_1 et γ_2 ne soient pas nuls. Examinons dans quel cas peut se présenter cette circonstance.

Si l'on forme l'équation du plan tangent en un point de la surface (3), qu'on fasse dans cette équation $\omega=0$, et qu'on ordonne suivant les puissances croissantes de α, on obtient l'équation

$$Z-b_1\alpha Y+\cdots=0.$$

J'en conclus d'abord que pour $\alpha=0$, cette équation se réduit à celle du plan $\zeta=0$, conformément au résultat annoncé précédemment (n.° 4). Secondemment, si b_1 est nul, le plan tangent de la surface le long de (a) est stationnaire au point O. Mais ce point est choisi arbitrairement sur (a). Donc l'hypothèse $b_1=0$ correspond au cas où le plan tangent de la surface reste le même tout le long de la ligne (a). Donc, sauf ce cas, l'hypothèse $\nu>n$ caractérise une section particulière faite dans le cycle. Ayant égard à la signification géométrique du rapport $\nu:n$ (n.° 1), je conclus que

Théorème II. Si, en chaque point d'une ligne tracée sur une surface, une nappe de cette surface a, avec son plan tangent, un contact d'ordre supérieur à l'unité, cette ligne est plane, et ce plan tangent est constant.

6. Ce dernier théorème peut être démontré géométriquement. Soit une section (S) faite par un plan arbitraire mené en O. Par un point variable a de (a) je mène un autre plan faisant avec le précédent un angle fini. Le point a se rapprochant indéfiniment de O, les deux sections (S) et $(S)'$ se coupent en des points infiniment voisins de O: soit m un de ces points. Les trois côtés du triangle maO sont des infiniment petits d'un même ordre; soit n cet ordre. Dans la courbe (S) le point m appartient à un cycle (n, ν) dont O est l'origine. Les tangentes en O et en m font donc entre elles un angle d'ordre ν. On peut faire varier le plan de (S) autour de Om et obtenir toujours la même conclusion. Donc les plans tangents de S en O et en m font entre eux un angle d'ordre ν. De même, les plans tangents en a et m font aussi entre eux un angle d'ordre ν. Donc les plans tangents en O et en a font entre eux un angle qui est au moins d'ordre ν. Donc, si ν est supérieur à n, le plan tangent de S le long de (a) est stationnaire en O. C'est le résultat déjà obtenu par le calcul.

7. Théorème III. A toutes les positions d'un point mobile sur les nappes d'un même cycle correspondent aussi, dans une figure corrélative, les positions d'un point mobile sur une même cycle de nappes.

Cette proposition sera démontrée plus loin (n.° 13). Je l'admets pour le moment afin de pouvoir, dès à présent, parler de cycles correspondants dans deux surfaces corrélatives, ou plus abréviativement de cycles corrélatifs. A cet égard, je vais démontrer la proposition suivante:

Théorème IV. Dans deux cycles corrélatifs, les classes sont égales, ou sous une autre forme:

Théorème V. La somme des ordres des contacts des nappes d'un cycle avec leur plan tangent commun en un point de la ligne-origine, n'est pas altérée par une transformation corrélative. Ce théorème sera vérifié plus loin par le calcul. Je vais ici en donner une démonstration géométrique fondée sur la remarque du n.° 3, en supposant une surface S ne se composant, le long de la ligne (a), que d'un seul cycle.

8. Par définition, la classe d'une courbe plane est le nombre des tangentes qu'on lui peut mener d'un point de son plan. Donc la classe d'une section de S est le nombre des tangentes qu'on peut mener à S par un point b dans un plan q contenant b. Cette définition n'est pas altérée par une transformation corrélative. Donc la classe des sections de deux surfaces corrélatives S, S' est la même. C'est une propriété bien connue. Cette classe commune s'appelle le rang de la surface. Je désigne ce nombre par la lettre r.

Soit q un plan arbitraire, a une de ses rencontres avec (a), et b un point de l'intersection de q avec le plan p, tangent à S en a. Parmi les tangentes menées de b à la section de S par q, quelques-unes sont confondues avec ba. D'après la théorie des courbes planes, le nombre de ces dernières est ν. Il y a donc $(r-\nu)$ tangentes menées de b à S dans le plan q, et différentes de ba.

Je prends une figure corrélative, composée d'un surface S' avec une ligne (a'), d'un plan q' corrélatif de b, et d'un point b' corrélatif de q. Soit a' le point de S' correspondant à a; $b'a'$ est une tangente de S' en a'. Il y a, en outre, $(r-\nu)$ tangentes, distinctes de $b'a'$, menées à S' par b' et dans le plan q'. D'ailleurs, la classe de la section de S' par q' est r. Donc $b'a'$ compte pour ν tangentes confondues. Donc le cycle de la section de S', dont a' est l'origine, a pour classe ν; ce qui démontre le théorème IV.

9. On peut encore donner à ce théorème une autre forme. Soit un cône circonscrit à S; appelons $[S]$ sa trace sur un plan. La ligne plane $[S]$ est corrélative d'une section plane (S') de la surface corrélative S'. A un cycle (n', ν) de (S') correspond un cycle (ν, n') de $[S]$. De même, à un cycle (n, ν) d'une section (S) correspond un cycle (ν, n) de la trace d'un cône circonscrit à S'. Les classes des cycles devenant ici les ordres d'autres cycles, on peut faire intervenir la notion plus usuelle d'ordre de multiplicité d'un point, et dire:

S et S' étant deux surfaces corrélatives, et (a), (a') deux lignes algébriques, singulières ou non, tracées respectivement sur S et sur S' et s'y correspondant: on considère deux lignes $[S]$, $[S']$ de contour apparent de ces surfaces sur un plan. Soit ω un point où $[S]$ touche la perspective de (a), et soit ω' un point où $[S']$ touche la perspective de (a'). Les points ω et ω' sont respectivement sur $[S]$ et sur $[S']$ des points d'un même ordre de multiplicité.

10. Les cycles dont l'ordre égale la classe jouissent de propriétés communes. Reprenons les équations (3) en supposant $\nu = n$. Considérons, comme aux n.^{os} 4 et 5, la section faite par un plan. Les développements des coordonnées commencent alors par les termes suivants:

$$\xi = \lambda\omega^n + \cdots, \qquad \eta = \omega^n + \cdots, \qquad \zeta = \{\gamma_2(\lambda - k)^2 + b_1(\lambda - k) + c_0\}\omega^{2n} + \cdots \qquad (7)$$

Soit la surface, indépendante de λ:

$$\zeta = \gamma_2\xi^2 + (b_1 - 2k\gamma_2)\xi\eta + (c_0 - b_1 k + \gamma_2 k^2)\eta^2.$$

Chaque branche de la courbe (7) a, avec cette surface, un contact d'ordre supérieur au premier. Donc:

Théorème VI. Si, en chaque point d'une ligne (a), une nappe de surface a, avec son plan tangent, un contact d'ordre égal à l'unité, il existe en chaque point de (a) des surfaces du 2[d] ordre ayant, avec cette nappe, en ce point, des contacts d'ordre supérieur au premier.

En conséquence, le théorème de Meusnier et la théorie de l'indicatrice s'appliquent aux sections de cette nappe de surface.

11. Soit maintenant un cycle qui non seulement ait son ordre égal à sa classe, mais pour lequel, en outre, l'indicatrice ne soit pas parabolique en chaque point de la ligne-origine (a). En même temps que la surface S contenant ce cycle, je considère une corrélative S'. Soit, sur cette dernière, (a') la ligne-origine du cycle corrélatif du proposé.

Sur S je considère une section plane (S) rencontrant (a) en O, et soit m un point variant sur (S) aux environs de O. Au point O de (a) correspond un point O' de (a'), à (S) une ligne Σ tracée sur S'. D'après la théorie de l'indicatrice, l'angle sous lequel Σ coupe (a') en O' varie avec l'angle sous lequel (S) coupe (a) en O. C'est donc un angle arbitraire.

La distance mO et l'angle des plans tangents de S en m et O sont des infiniment petits d'un même ordre, comme on le prouve en employant le même raisonnement qu'au n.° 6. Soit m' le point qui correspond à m. La distance $m'O'$ est du même ordre infinitesimal que l'angle des plans tangents de S en m et en O. L'angle des plans tangents de S' en m' et O' est du même ordre que la distance mO. Donc aussi ce dernier angle est du même ordre que $m'O'$. Donc chaque section de S' par un plan contenant $m'O'$ a, en O', un cycle d'ordre égal à sa classe. Mais la direction $m'O'$ est arbitraire dans le plan tangent de S' en O'. Donc le cycle de S' a le même ordre que celui de S, puisqu'on sait déjà qu'il a aussi la même classe. Donc:

Théorème VII. Tout cycle de nappes dont l'ordre égale la classe et dont l'indicatrice n'est pas parabolique en chaque point de la ligne-origine, a pour corrélatif un cycle du même ordre.

II. Propriétés dualistiques des cycles de nappes.

12. Pour faire une étude approfondie des liaisons qui existent entre deux cycles corrélatifs, j'aurai maintenant recours au calcul. Je prendrai pour coordonnées homogènes d'un point d'une surface S' les coefficients de l'équation

d'un plan tangent de la surface S. Pour la symétrie, je supposerai que les coordonnées ξ, η, ζ primitivement employées, soient les rapports de trois coordonnées homogènes à une quatrième, de la manière suivante:

$$x_4\xi = x_1, \qquad x_4\eta = x_2, \qquad x_4\zeta = x_3.$$

Ainsi x désignera un point de S. Le point correspondant sur S' sera désigné par y. Chaque face du tétraèdre de référence sera abréviativement désignée par le premier membre de son équation. Je dirai ainsi le plan x_1 ou y_1 pour la face dont l'équation est $x_1 = 0$. Chaque sommet du même tétraèdre sera désigné par la lettre s affectée de l'indice correspondant à la face opposée. Chaque arête sera désignée indifféremment par ses deux sommets ou ses deux faces.

Dans les équations employées plus haut, le sommet s_4 et la face x_3 sont un point de la ligne (a) et le plan tangent de S en ce point. En outre, l'arête x_2x_3 est la tangente de (a) en ce point. L'arête x_1x_3 est arbitrairement choisie dans le plan x_3. Dans chaque cas, je la déterminerai de la manière la plus convenable.

Au moyen des équations (3), je calcule les quantités y, coefficients de l'équation du plan tangent. Ces quantités se présentent sous la forme de développements suivant les puissances ascendentes de ω, ayant pour coefficients des développements suivant les puissances ascendantes de α. Quelques termes de ces développements suffiront pour découvrir les propriétés que j'ai en vue de rechercher.

13. Les coordonnées ξ, η, ζ d'un point étant des fonctions de deux variables α et ω, les coordonnées du plan tangent à la surface, lieu de ce point, sont:

$$\frac{y_1}{\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}\frac{\partial\zeta}{\partial\omega}-\frac{\partial\eta}{\partial\omega}\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}} = \frac{y_2}{\frac{\partial\zeta}{\partial\alpha}\frac{\partial\xi}{\partial\omega}-\frac{\partial\zeta}{\partial\omega}\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}} = \frac{y_3}{\frac{\partial\xi}{\partial\alpha}\frac{\partial\eta}{\partial\omega}-\frac{\partial\xi}{\partial\omega}\frac{\partial\eta}{\partial\alpha}},$$

$$y_4 = \xi y_1 + \eta y_2 + \zeta y_3.$$

J'emploierai des accents pour dénoter les dérivées prises par rapport à α. En vertu des équations (3), et après suppression d'un facteur commun ω^{n-1}, je puis écrire:

$$\left.\begin{aligned} y_3 &= 1 - k\beta' \\ -y_2 &= b - k\gamma' + \frac{n+\nu}{n} c\omega^\nu + \cdots - kb'\omega^n \ldots \\ y_1 &= b\beta' - \gamma' + \frac{n+\nu}{n} c\beta'\omega^\nu + \cdots - b'\omega^n \ldots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Les quantités y_1 et y_2 et, par suite, aussi y_4, se réduisent à zéro avec ω et α, en vertu des relations (5), tandis que y_3 conserve une valeur finie. Ainsi le point qui correspond à s_4 sur la surface S' est le sommet s_3, comme on le savait d'avance. Eu égard à ces mêmes relations (5), le développement du terme indépendant de ω dans y_1 commence par un terme du 1^er^ degré en α. Si donc on fait dans S' une section par un plan mené en s_3, la variable α sera, pour cette courbe, une fonction synectique de ω, évanouissante avec ω. Les y deviennent donc des développements suivant les puissances entières de ω. La section a donc en s_3 un seul cycle (n.° 1). Donc les équations (8) représentent un seul cycle de nappes. C'est la démonstration du théorème III.

J'ai à chercher l'ordre de ce cycle. A cet effet, il suffira de chercher le degré du premier terme de chacun de ces derniers développements. Il n'y a pas à considérer y_3 qui a une valeur finie, ni y_4 qui, nous le savons d'avance, commence par un terme de degré plus élevé que y_1 et y_2, car y_4 est le plan tangent de S' en s_3, et contient, par suite, la tangente de la section. Cependant je ferai une fois, à titre d'exemple, le calcul du degré du premier terme de y_4. J'y trouverai une vérification du théorème IV, et on pourra la renouveler pour chaque cas.

14. Si, dans les équations (8), on fait $\omega=0$, ces équations donnent les coordonnées des points de la ligne (a'). Désignons-les par la lettre z. Eu égard à (5), on a:

$$\left.\begin{aligned} -z_2 &= b-k\gamma' = (b_1-2k\gamma_2)\alpha+(b_2-3k\gamma_3)\alpha^2+\cdots \\ z_1 &= b\beta'-\gamma' = -2\gamma_2\alpha+(2b_1\beta_2-3\gamma_3)\alpha^2+\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Deux cas sont à distinguer suivant que γ_2 est nul ou non. Si γ_2 est nul, c'est que le plan x_2 est osculateur de (a) en s_4. Dans nos hypothèses, nous avons à considérer ce cas uniquement si cette circonstance a lieu tout le long de (a). De là, deux sortes de lignes à distinguer:

1.° lignes dont le plan osculateur n'est pas, en chaque point, tangent à la surface;

2.° lignes en chaque point desquelles le plan tangent de la surface se confond avec le plan osculateur de la ligne.

Dans ce dernier cas, si la ligne est singulière, elle n'est pas, à proprement parler, une ligne asymptotique. Cependant on peut encore, sans inconvénient, employer cette locution, et distinguer abréviativement deux sortes de cycles, savoir:

1.° les cycles dont la ligne-origine n'est pas une asymptotique;

2.° les cycles dont la ligne-origine est une asymptotique.

15. En premier lieu, je considère le premier de ces deux cas. Le coefficient γ_2, par hypothèse, n'est pas nul.

La développable circonscrite à S le long de (a) a, en s_4, une génératrice différente de la tangente de (a). Je suppose cette droite prise pour l'arête $x_1 x_3$ du tétraèdre de référence, suivant la remarque du n.° 12. Alors l'arête opposée $y_1 y_2$ est la tangente de (a') en s_3, et, par suite, le développement de z_2 commence par un terme du 2^d degré. Ainsi, par ce choix des coordonnées, on a

$$b_1 - 2k\gamma_2 = 0. \tag{10}$$

Je distinguerai encore ici deux cas différents, suivant que ν est inférieur ou égal à n. Je commence par le premier $\nu < n$. En vertu de (10), les formules (8) deviennent, après développement

$$\left.\begin{aligned} -y_2 &= (b_2 - 3k\gamma_3)\alpha^2 + \cdots + \frac{n+\nu}{n}(c_0 + c_1\alpha + \cdots)\omega^\nu + \cdots \\ y_1 &= \quad -2\gamma_2\alpha \quad + \cdots + \frac{n+\nu}{n}(2c_0\beta_2\alpha \quad + \cdots)\omega^\nu + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Pour obtenir ce qui est relatif à une section de la surface par un plan $y_1 = \lambda y_2$, il faudra déterminer α par une série suivant les puissances entières et ascendantes de ω, et dont le premier terme est

$$\lambda \frac{n+\nu}{n} \frac{c_0}{2\gamma_2} \omega^\nu.$$

Les développements de y_1 et y_2 commencent alors chacun par un terme de degré ν en ω. Donc ν est l'ordre du cycle. Nous savons déjà par le théorème IV que la classe de ce cycle est aussi égale à ν. Je ferai ici une vérification de ce résultat en calculant la partie principale de y_4.

Eu égard à la valeur considérée pour α, les développements de ξ, η, ζ commencent respectivement par des termes des degrés ν et 2ν pour ξ et ζ, et de degré supérieur à ν pour η. En vertu de l'expression de y_4, on trouve ainsi pour sa partie principale

$$-\gamma_2 \left(\lambda \frac{n+\nu}{n} \frac{c_0}{2\gamma_2}\right)^2 \omega^{2\nu}.$$

Elle est d'ordre 2ν. Donc la classe est bien égale à ν. Ainsi:

Théorème VIII. Un cycle de nappes dont la ligne-origine n'est pas asymptotique, et dont la classe ν est inférieure à l'ordre, a pour corrélatif un cycle dont l'ordre et la classe sont tous deux égaux à ν.

16. Dans ce cycle (ν, ν) corrélatif d'un cycle dont la classe ν est inférieure à l'ordre, on sait d'avance, eu égard au th. VII, que l'indicatrice est constamment parabolique sur la ligne-origine. Je vais maintenant démontrer le théorème réciproque. C'est là une simple vérification; car cette réciproque est a priori connue. En effet, le th. VII nous apprend qu'un cycle (ν, ν) non parabolique a pour corrélatif un cycle (ν, ν). On peut ajouter que ce dernier n'est pas non plus parabolique, ainsi que le montre le théorème des tangentes conjuguées. Donc un cycle (ν, ν) qui a pour corrélatif un cycle dont l'ordre surpasse la classe, est certainement parabolique. Cette vérification se fait sans peine comme il suit.

Dans les équations (8), je fais $\nu = n$, et je suppose, en outre

$$b_1^2 - 4c_0\gamma_2 = 0,$$

pour exprimer, suivant les équations (7), que l'indicatrice du cycle considéré est parabolique. En vertu de cette relation et de (10), on trouve que, dans l'expression de y_2, le terme en ω^ν disparaît. En répétant le calcul du n.° 15 et coupant par le plan $y_1 = \lambda y_2$, on obtient cette conséquence que la partie principale de α est indépendante de λ, en sorte que les développements de y_1 et y_2 commencent tous deux par des termes de degré supérieur à ν en ω. Donc l'ordre du cycle corrélatif est supérieur à ν. Mais le calcul ne met pas aisément en évidence l'expression de cet ordre, qui dépend de nouveaux éléments.

17. Un raisonnement géométrique met ces éléments en évidence. Considérons de nouveau, comme au n.° 15, un cycle (n, ν). On voit aisément que chaque section faite dans un cycle (n, ν) par un plan tangent à la ligne-origine a, au point de contact, un cycle (n, n). J'en conclus que la tangente de la ligne-origine a, avec chaque nappe, un contact du 1^er^ ordre, et que, par suite, la somme des ordres de ses contacts avec les n nappes du cycle est n. D'autre part, on peut donner au th. IV cette nouvelle forme:

Théorème IX. La somme des ordres des contacts d'une droite avec une surface n'est pas altérée par une trasformation corrélative.

Je puis donc, en appliquant ce théorème, conclure ainsi:

Théorème X. Un cycle de nappes (ν, ν), dont la ligne-origine n'est pas asymptotique et dont l'indicatrice est parabolique, a pour corrélatif un cycle dont l'ordre est égal au produit du nombre ν par l'ordre du contact de chaque nappe du cycle proposé avec sa tangente asymptotique en un point quelconque de la ligne-origine.

Par les théorèmes VIII et X se trouve résolue la question proposée en ce qui concerne les cycles dont la ligne-origine n'est pas asymptotique. J'ai encore, à ce sujet, à ajouter une remarque qui sera utile plus loin.

Dans les équations (11), je suppose $\alpha = \lambda\omega^n + \cdots$ Les développements de y_2 et y_1 commencent alors respectivement par des termes de degré ν et n. La courbe ainsi déterminée sur S' a donc pour tangente la droite $y_1 y_4$, différente de la tangente de (a'), qui est $y_2 y_4$ (n.° 15). Par suite, si ω est infiniment petit du 1^{er} ordre, le point y est à distance infiniment petite d'ordre ν de la courbe (a'). D'autre part, le point x est, en même temps, à distance d'ordre n de la courbe (a). Donc:

Si n est supérieur à ν, et que (ν, ν), (n, ν) soient deux cycles corrélatifs: à un point placé sur une nappe du premier cycle à distance infiniment petite d'ordre ν de sa ligne-origine correspond, sur une nappe du second, un point à distance infiniment petite d'ordre n de la ligne-origine de ce dernier.

18. Je passe maintenant à l'étude des cycles dont la ligne-origine est asymptotique, sans être droite. Comme je l'ai déjà observé plus haut, le coefficient γ_2 est nul dans ce cas. Les équations (9) mettent en évidence que la courbe (a') a pour tangente en s_3 la droite $y_1 y_4$. Son plan osculateur est le plan tangent de S', à savoir y_4.

Je n'ai pas à m'occuper des cas où les nombres n et ν sont égaux entre eux: l'un de ces cas, celui où l'indicatrice n'est pas parabolique, est traité par le théorème VII. Quant au cas où l'indicatrice est parabolique, il n'y a pas lieu de s'en occuper au point de vue actuel: une ligne, en effet, ne peut être à la fois asymptotique et lieu de points paraboliques sans être plane et sans que le plan tangent ne soit constamment confondu avec son propre plan. Quant il en est ainsi, la surface corrélative contient, comme élément correspondant, non pas un cycle de nappes, mais un point singulier.

J'ai donc à étudier ce qui est relatif aux cas où ν est inférieur à n. Tout d'abord, il convient de faire deux remarques concernant les équations générales sur lesquelles repose toute cette analyse.

En premier lieu, pour le cas actuel, il n'y a pas lieu de particulariser la droite $x_1 x_3$. Je ferai donc $k = 0$, conformément à une observation précédente (n.° 2).

En second lieu, le plan osculateur de (a) est, en chaque point de cette ligne, tangent à la surface. Cette condition conduit sans peine à l'équation $b\beta'' = \gamma''$, qui doit être une identité. En égalant à zéro le terme indépendant de α, on trouve

$$b_1\beta_2 - 3\gamma_3 = 0. \tag{12}$$

19. Avant de m'occuper de la surface corrélative de S, je considère un instant la surface S elle-même, et j'en étudie les diverses sections planes. Grâce à l'hypothèse $k=0$, la surface est représentée par les équations suivantes, qui remplacent les équations (3):

$$\eta = \beta_2\xi^2 + \cdots + \omega^n, \qquad \zeta = \gamma_3\xi^3 + \cdots + (b_1\xi + \ldots)\omega^n + (c_0 + c_1\xi + \cdots)\omega^{n+\nu} + \cdots \tag{13}$$

Les sections non tangentes à la droite $\eta = \zeta = 0$, c'est-à-dire à la courbe (a), ont toutes en s_4 le cycle (n, ν), sans exception à cause de l'hypothèse $\nu < n$. C'est sur les sections tangentes à (a), c'est-à-dire faites par un plan $\eta = \lambda\zeta$ qu'il faut porter l'attention.

La condition $\eta = \lambda\zeta$ conduit entre ξ et ω à une équation qui a deux racines ξ évanouissantes avec ω. Si l'on fait $\omega = \omega'^2$, une quelconque de ces deux racines est de l'ordre n par rapport à ω'. On en tire cette conséquence que je me contente d'énoncer:

La section faite dans un cycle (n, ν) par un plan tangent à la ligne-origine dans le cas où cette ligne est asymptotique, présente au point de contact

Si n est impair, un cycle unique d'ordre n;

Si n est pair, deux cycles d'ordre $\frac{1}{2}n$.

Je veux maintenant calculer la classe d'un tel cycle, c'est-à-dire trouver le degré du premier terme du développement de ζ suivant les puissances croissantes de ω'. Il y a trois cas à distinguer:

1.° $2\nu > n$. Le premier terme de ζ est alors fourni par:

$$\zeta = \gamma_3\xi^3 + b_1\xi\omega^n,$$

et devient, en vertu de $\eta = \lambda\zeta$ et de (12): $\frac{2}{3}b_1\xi\omega^n$, dont l'ordre est $3n$ relativement à ω'. Ainsi:

Pour $2\nu > n$, la classe du cycle de la section est double de son ordre. En d'autres termes, la tangente de la ligne-origine a un contact du 2^d ordre avec chaque nappe.

2.° $2\nu < n$. Le premier terme de ζ est alors $c_0\omega^{n+\nu}$, donc l'ordre, relativement à ω', est $2n + 2\nu$. Donc:

Pour $2\nu < n$, les cycles des sections tangentes à la ligne-origine ont pour classe $n+2\nu$ ou $\frac{1}{2}(n+2\nu)$ suivant que n est impair ou pair.

3.° $2\nu = n$. Le premier terme de ζ se compose alors comme il suit:

$$\zeta = \left(c_0 + \frac{2}{3} b_1 \sqrt{-\frac{1}{\beta_2}}\right)\omega'^{3n}.$$

Si la quantité entre parenthèses n'est pas nulle, la section contient deux cycles $(\nu, 2\nu)$.

Dans le cas opposé, l'ordre de ζ augmente, sans que les termes jusqu'à présent envisagés suffisent à le fixer. Ainsi:

Pour $2\nu = n$, il peut arriver que la tangente de la ligne-origine ait, en chaque point de cette ligne, un contact d'ordre supérieur à 2 avec chaque nappe de la surface. La condition sous laquelle cette circonstance se présente peut, à cause de (12), s'écrire

$$\left(\frac{b_1}{3\gamma_3}\right)^3 + \left(\frac{c_0}{2\gamma_3}\right)^2 = 0. \tag{14}$$

On reconnaît la condition qui exprime que l'équation $\gamma_3 x^3 + b_1 x + c_0 = 0$ a deux racines égales. En vertu de (12), la dérivée du premier membre de cette équation se réduit à $(\beta_2 x^2 + 1)$. D'où cette conséquence:

Pour $n = 2\nu$, 1.° Si la tangente de la ligne-origine asymptotique a, avec chaque nappe, un contact du 2^d^ ordre, la section par le plan tangent s'y compose de trois cycles distincts (ν, ν);

2.° si la tangente de la ligne-origine a, avec chaque nappe, un contact d'ordre $(2+\theta)$, la section par le plan tangent s'y compose soit d'un cycle (ν, ν) et de deux cycles $[\nu, (1+\theta)\nu]$, soit d'un cycle (ν, ν) et d'un cycle $[2\nu, 2(1+\theta)\nu]$.

On remarquera que l'arête de rebroussement d'une surface développable correspond à ce dernier cas $n = 2\nu$, avec θ infiniment grand.

Les mêmes divisions en divers cas vont se retrouver dans la discussion de la surface corrélative.

20. Pour étudier la surface corrélative S', je reprends les formules (8) qui deviennent ici, en vertu des diverses hypothèses:

$$-y_2 = b_1\alpha + b_2\alpha^2 + \cdots + \frac{n+\nu}{n}(c_0 + c_1\alpha + \cdots)\omega^\nu + \cdots$$

$$y_1 = 3\gamma_3\alpha^2 \qquad + \cdots + \frac{n+\nu}{n}(2c_0\beta_2\alpha + \cdots)\omega^\nu \cdots - (b_1 + \cdots)\omega^n - \cdots$$

En appliquant le même mode de raisonnement que plus haut, je trouve tout d'abord pour $2\nu > n$:

THÉORÈME XI. Un cycle de nappes dont la ligne-origine est asymptotique, et dont la classe est inférieure à l'ordre, mais supérieure à la moitié de cet ordre, a pour corrélatif un cycle du même ordre et de la même classe que le proposé.

En second lieu, pour $2\nu < n$, on trouve que l'ordre du cycle corrélatif est 2ν. D'ailleurs, sa classe est ν. Il y a donc lieu de chercher, pour ce cycle $(2\nu, \nu)$ le nombre analogue à θ.

La somme des ordres des contacts de la tangente de (a) avec les nappes de S est $n+2\nu$, ainsi que cela a été établi au n.° 19 (2.°). Donc (th. IX), $n+2\nu$ est aussi la somme des ordres des contacts de la tangente de (a') avec les 2ν nappes de S'. Avec chaque nappe, l'ordre du contact est donc

$$2+\theta = \frac{n+2\nu}{2\nu}, \qquad \theta = \frac{n-2\nu}{2\nu} > 0.$$

THÉORÈME XII. Un cycle de nappes dont la ligne-origine est asymptotique, et dont la classe ν est inférieure à la moitié de l'ordre n, a pour corrélatif un cycle $(2\nu, \nu)$, dont chaque nappe a, avec la tangente de la ligne-origine, un contact d'ordre supérieur à 2, savoir $\frac{n+2\nu}{2\nu}$.

21. Troisièmement, pour $2\nu = n$, et quand l'égalité (14) n'a pas lieu, on trouve le résultat suivant:

THÉORÈME XIII. Un cycle de nappes dont la ligne-origine est asymptotique, dont la classe est égale à la moitié de l'ordre, et dont chaque nappe a, avec la tangente de la ligne-origine, un contact du 2^d ordre, a pour corrélatif un cycle jouissant de ces mêmes propriétés.

Enfin, par voie d'exclusion, j'en conclus la réciproque du théorème XII:

THÉORÈME XIV. Un cycle de nappes dont la ligne-origine est asymptotique, dont la classe ν est égale à la moitié de l'ordre, et dont chaque nappe a, avec la tangente de la ligne-origine, un contact d'ordre supérieur à 2, soit $(2+\theta)$, a pour corrélatif un cycle d'ordre $2(1+\theta)\nu$ et de classe ν.

Pour une développable et son arête de rebroussement, ν est égal à l'unité, et θ est infiniment grand. Aussi les sections de la corrélative ont-elles chacune un cycle d'ordre infiniment grand: elles se réduisent chacune à un point, et la corrélative à une simple courbe.

22. Considérons les équations du n.° 20 en y supposant $2\nu < n$. J'y fais $\alpha = \lambda\omega^n + \cdots$ Alors y_2 et y_1 commencent respectivement par des termes de degré ν et n. La branche de courbe ainsi déterminée sur S' a donc, en s_3, un contact d'ordre $\frac{n-\nu}{\nu} > 1$ avec la droite $y_1 y_4$ qui est la tangente de (a'). Cette même branche a donc avec (a'), au même point, un contact du 1^er ordre. Le point y est donc à une distance infiniment petite d'ordre 2ν de la ligne (a'). Je tire de là cette conclusion qui sera utile plus loin:

Si n est supérieur à 2ν, et que l'on envisage deux cycles corrélatifs $(2\nu, \nu)$ et (n, ν), dont les lignes-origines soient asymptotiques:

A un point placé sur une nappe du premier cycle, et à distance infiniment petit d'ordre 2ν de la ligne-origine de ce cycle, correspond sur le second cycle un point placé à distance infiniment petite d'ordre n de la ligne-origine de ce second cycle.

23. Pour avoir terminé ce qui concerne les cycles dont le plan tangent varie le long de la ligne-origine, il nous reste à envisager ceux dont la ligne-origine est droite. Les équations du cycle se simplifient et se réduisent à

$$\eta = \omega^n, \qquad \zeta = (b_1\xi + \cdots)\omega^n + (c_0 + c_1\xi + \cdots)\omega^{n+\nu} + \cdots$$

Par suite, dans les formules du n.° 20, le premier terme de y_1 devient $-b_1\omega^n$, et il en résulte cette conséquence très-simple:

Théorème XV. Un cycle de nappes dont la ligne-origine est droite et dont le plan tangent varie le long de cette ligne, a pour corrélatif un cycle du même ordre que le proposé.

24. Les questions analogues à celles que je viens de résoudre dans ce paragraphe n'ont pas lieu d'être posées pour les surfaces dont le plan tangent reste constant le long d'une ligne. S'il s'agit d'un ligne courbe, il y correspond corrélativement un point conique, et non une ligne. S'il s'agit d'une ligne droite (a) sur une surface S, il y correspond corrélativement sur une surface S' un point singulier en lequel les plans tangents, en nombre infini, passent tous par une droite (a'). La droite (a'), suivant les cas, fait ou non partie de S'. Mais cette circonstance tient à l'existence ou à la non-existence de points singuliers de la surface S sur la droite (a), et non pas à la nature de la surface S en un point arbitraire de cette droite.

J'aurai tout-à-l'heure à considérer de tels cycles, en résolvant un autre problème. Pour le moment, je n'ai qu'à transcrire ici les équations générales d'un cycle, appropriées à ces cas.

Pour un cycle à plan tangent constant le long d'une courbe plane, on aura

$$\eta=\beta_2\xi^2+\beta_3\xi^3+\cdots+\omega^n, \qquad \zeta=(c_0+c_1\xi+\cdots)\omega^{n+\nu}+\cdots;$$

et, quand la ligne-origine est droite:

$$\eta=\omega^n, \qquad \zeta=(c_0+c_1\xi+\cdots)\omega^{n+\nu}+\cdots$$

25. Ce dernier cycle, ainsi qu'on le verra au paragraphe suivant, n'est pas suffisamment défini, pour les applications que j'ai en vue, par les nombres n, ν. Un élement qu'il sera encore nécessaire de connaître est l'ordre le plus élevé du contact que l'on puisse établir entre une nappe de ce cycle et une développable tout le long de la ligne-origine. Cherchons comment ce nombre peut être déterminé.

Je considère les équations

$$\eta=\omega^n, \qquad \zeta=u_0\omega^{n+\nu}+u_1\omega^{n+\nu+1}+u_2\omega^{n+\nu+2}+\cdots \tag{15}$$

dans lesquelles les u sont des fonctions de ξ, et je me propose de déterminer ces fonctions de telle sorte que les équations (15) représentent une développable. A cet effet, je forme la fonction

$$\Delta=\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2}-\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta}\right)^2,$$

je la développe suivant les puissances croissantes de ω, et j'égale successivement à zéro les coefficients de chaque puissance. Le premier terme est de degré 2ν, et donne lieu à l'équation

$$\nu u_0 u''_0-(n+\nu)u'^2_0=0,$$

dont l'intégrale générale est

$$u_0=k(\xi+a)^{-\frac{\nu}{n}}. \tag{16}$$

Si l'on désigne par U une fonction entière de u_0, u_1,... u_{i-1} et de leurs dérivées, on reconnaîtra aisément que le terme de rang $(i+1)$, dont le degré est $(2\nu+i)$, donne lieu à une équation telle que:

$$\nu(n+\nu)u_0u''_i-2(n+\nu)(n+\nu+i)u'_0u'_i+(\nu+i)(n+\nu+i)u''_0u_i=U. \tag{17}$$

Je dis que l'intégrale générale de (17) se compose de la somme d'un nombre limité de termes de la forme $A(\xi+a)^\rho$, dans laquelle A est une constante, a

la constante de (16), et ρ un nombre commensurable positif ou négatif dont le dénominateur est un diviseur de n.

Cette assertion est vérifiée pour u_0, d'après (16). J'admets qu'elle soit exacte pour $u_1, \ldots u_{i-1}$, et je vais en conclure son exactitude pour u_i.

En substituant dans (17) à u_0 son expression (16) et divisant ensuite les deux membres par le facteur $k\nu(n+\nu)(\xi+a)^{-\frac{2n+\nu}{n}}$, puis tenant compte de la forme admise pour $u_1, \ldots u_{i-1}$, on obtient, au lieu de (17):

$$(\xi+a)^2 u''_i + 2\frac{n+\nu+i}{n}(\xi+a)u'_i + \frac{n+\nu+i}{n}\cdot\frac{\nu+i}{n}u_i = \sum A(\xi+a)^\rho;$$

l'intégrale générale de cette équation est, on le vérifie aisément, de la forme indiquée.

De cette analyse, je tire cette conclusion: on peut déterminer les fonctions u de manière que les équations (15) représentent une développable. Chacune d'elles est rationnelle par rapport à $(\xi+a)^{\frac{1}{n}}$ et contient deux constantes arbitraires.

Soient maintenant

$$\eta = \omega^n, \qquad \zeta = v_0\omega^{n+\nu} + v_1\omega^{n+\nu+1} + v_2\omega^{n+\nu+2} + \cdots \tag{18}$$

les équations d'une surface non développable. Je suppose qu'on puisse déterminer les $2i$ constantes de $u_0, u_1, \ldots u_{i-1}$, de manière à avoir identiquement

$$u_0 = v_0, \qquad u_1 = v_1, \ldots \qquad u_{i-1} = v_{i-1}, \tag{19}$$

mais que l'on ne puisse avoir $u_i = v_i$. Dans ce cas, il existe des surfaces développables (15), dont chaque nappe a, avec une nappe de la surface (18), un contact d'ordre $\frac{\nu+i}{n}$ tout le long de l'axe des ξ. Je dis que ce nombre $\frac{\nu+i}{n}$ est l'ordre le plus élevé du contact que l'on puisse établir entre la surface (18) et une développable, le long de la droite considérée, c'est-à-dire le nombre cherché.

C'est, en effet, d'abord l'ordre le plus élevé du contact possible si l'on astreint la développable à être représenté par les équations (15). Cherchons donc s'il est possible d'élever l'ordre du contact en prenant une autre forme pour les équations de la développable. Tout d'abord, pour que l'ordre du contact ne soit pas diminué, il faut prendre les équations suivantes:

$$\eta = \omega^n, \qquad \zeta = v_0\omega^{n+\nu} + v_1\omega^{n+\nu+1} + \cdots + v_{i-1}\omega^{n+\nu+i-1} + V\omega^{n+\nu+i+\lambda} + \cdots, \tag{20}$$

en y supposant λ positif, ce nombre pouvant d'ailleurs ne pas être entier. Nous savons déjà que λ ne peut être nul. Ce nombre dépasse donc zéro. Si, dans (18), il existe un terme de degré $(n+\nu+i)$, l'ordre du contact de (18) et (20) est alors $\frac{\nu+i}{n}$. Donc cet ordre ne peut être dépassé que si v_i est nul. Je suppose donc $v_i=0$.

Je forme, au moyen de (20), le terme de degré $(2\nu+i)$ de la fonction Δ. Dans son coefficient, il est manifeste que V n'entre pas. D'ailleurs, ce coefficient est nul si effectivement les équations (20) représentent une développable. Donc, en vertu des équations (19) on peut disposer des constantes arbitraires de u_i de manière à rendre u_i identiquement nul, c'est-a-dire égal à v_i, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, en résumé:

Pour la surface représentée par les équations (18), si v_i est la première des fonctions v qui ne satisfasse pas à la suite des équations différentielles déduites de $\Delta=0$, l'ordre le plus élevé du contact que l'on puisse établir entre chaque nappe de cette surface et une nappe d'une même développable tout le long de l'axe des ξ, est $\frac{\nu+i}{n}$.

Cela étant, le développement de Δ suivant les puissances croissantes de ω, pour la surface (18), commence par un terme du degré $(2\nu+i)$.

III. De l'équation des points paraboliques.

26. Dans une courbe plane, il existe entre le degré et la classe de cette courbe d'une part, et les ordres et les classes de ses cycles d'autre part, une relation. On obtient cette relation en étudiant la fonction $\frac{d^2\eta}{d\xi^2}$ le long de la courbe.

Dans la théorie des surfaces, nous venons de mettre en évidence des nombres qui, pour les lignes singulières, jouent un rôle analogue. Si l'on y joint les degrés de ces lignes et qu'on considère, d'autre part, le degré et le rang d'une surface, on a entre ces nombres une relation. On obtient cette relation en étudiant, le long d'une section plane de la surface, la fonction Δ (n.° 25), qui égalée à zéro fournit l'équation des points paraboliques.

Pour faire cette étude, j'aurai à faire usage de la transformée de Δ quand on change à la fois les coordonnées et les variables indépendantes d'une manière quelconque. Je me contente d'énoncer ici les résultats dont la vérification se fait aisément.

Comme plus haut, ξ, η, ζ sont les rapports de trois coordonnées homogènes à une quatrième:

$$x_1 = \xi x_4, \qquad x_2 = \eta x_4, \qquad x_3 = \zeta x_4.$$

On fait une transformation homographique en posant:

$$x_i = a_i z_1 + b_i z_2 + c_i z_3 + d_i z_4, \qquad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

On prend pour variables indépendantes deux quantités quelconques α, ω. Je pose:

$$\Delta = \frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2} - \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)^2$$

$$D = \sum \pm a_1 b_2 c_3 d_4$$

$$R = \sum \pm A_1 z_2 \frac{\partial z_3}{\partial\alpha}\cdot\frac{\partial z_4}{\partial\omega}.$$

$$g = \sum \pm z_1 \frac{\partial z_2}{\partial\alpha}\frac{\partial z_3}{\partial\omega}\frac{\partial^2 z_4}{\partial\alpha^2}.$$

$$h = \sum \pm z_1 \frac{\partial z_2}{\partial\alpha}\frac{\partial z_3}{\partial\omega}\frac{\partial^2 z_4}{\partial\alpha\,\partial\omega}.$$

$$l = \sum \pm z_1 \frac{\partial z_2}{\partial\alpha}\frac{\partial z_3}{\partial\omega}\frac{\partial^2 z_4}{\partial\omega^2}.$$

Dans la troisième de ces équations figurent les coordonnées d'un point A. C'est le sommet s_3 du triangle de référence des coordonnées x, en d'autres termes le point à l'infini de l'axe des ζ, si les coordonnées primitives sont cartésiennes. Cela posé, la formule de transformation est la suivante

$$\Delta = \frac{x_4^4}{D^2 R^4}(g\,l - h^2). \tag{21}$$

27. J'explique maintenant la voie que je vais suivre. Soit (S) une section plane d'une surface S. Je considère la fonction Δ le long de cette ligne, je cherche ses zéros et ses infinis et j'égale le nombre des premiers à celui des seconds. C'est cette égalité qui constitue la relation cherchée. Pour former une égalité de ce genre, on peut procéder comme il suit.

Soit, en un point p de la courbe (S) envisagée, n l'ordre d'un des cycles dont cette courbe se compose. Je considère les développements des coordonnées d'un point de (S) suivant les puissances d'une variable ω, qui représentent ce cycle (n.° 1), et je les substitue aux coordonnées dans la fonction envisagée, qui est ici Δ. J'ordonne le résultat suivant les puissances croissantes de ω, et je calcule le degré du premier terme. Ce degré, que j'appelle ordre de la fonction pour le cycle, est positif ou négatif suivant que le point p répond à un zéro ou à un infini de la fonction. Mais cette distinction est inutile, et j'ai montré ailleurs (*) que l'égalité ci-dessus s'obtient simplement en écrivant que la somme des ordres de la fonction est nulle pour tous les cycles de la courbe, pourvu que la fonction soit rationnelle par rapport aux coordonnées et aux dérivées des coordonnées d'un point de la courbe, et c'est ce qui a lieu ici.

28. La question est donc de calculer l'ordre de Δ pour chaque point p en lequel cet ordre n'est pas nul.

Soit p un point quelconque de la section (S) faite par un plan arbitraire. Il peut se présenter l'une des circonstances suivantes:

1.° le point p appartient à la ligne-origine d'un cycle à plan tangent variable et dont l'ordre est supérieur à l'unité;

2.° le point p appartient à la ligne-origine d'un cycle à plan tangent variable, dont l'ordre est l'unité, mais dont les indicatrices sont paraboliques;

3.° le point p appartient à la ligne-origine d'un cycle à plan tangent constant;

4.° le point p n'appartient à aucune des trois catégories précédentes.

Le plan de la section (S) étant censé choisi d'une manière arbitraire, chacun de ses points de rencontre avec la ligne-origine d'un cycle singulier doit être envisagé comme un point arbitraire de la ligne-origine de ce cycle; et, pour la même raison, si la surface possède en dehors de ces lignes-origines de cycles singuliers, des points singuliers, le plan de section n'y passe pas. Donc, si aucune des trois premières circonstances ci-dessus n'a lieu, le point p est un point ordinaire de la surface, c'est-à-dire un point par lequel passe une infinité de lignes que l'on peut envisager comme origines de cycles (1, 1). Un tel point peut être classé parmi ceux qui appartiennent à la ligne-origine d'un cycle (n, n) à plan tangent variable et à indicatrice non-parabolique. En

(*) Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 4, p. 61.

conséquence on pourra, sans omettre aucune circonstance, étudier successivement l'ordre de la fonction Δ en un point arbitraire de chacune des diverses lignes-origines envisagées dans le paragraphe précédent.

29. Le point p étant sur la ligne-origine d'un cycle et le plan de la section passant en p et d'ailleurs de direction quelconque relativement à la ligne-origine, on a à calculer l'ordre de Δ pour le cycle de la section dont l'origine est en p. En vertu de la formule (21), je substitue au calcul de l'ordre de Δ, celui de la somme des ordres des facteurs du second membre de cette formule, et j'y prends pour α et ω les variables qui figurent dans les équations (3) du cycle. J'ai d'ailleurs eu soin de faire en sorte que, dans ces équations, la ligne $\alpha = 0$ pût être envisagée comme une section plane quelconque quant à sa direction relativement à la ligne-origine. Je peux donc supposer qu'au point p la ligne $\alpha = 0$ coïncide avec la section (S).

Donc pour calculer l'ordre de Δ en un point de la ligne-origine d'un cycle, j'aurai à substituer dans le second membre de (21) aux coordonnées leurs développements (3) et à faire ensuite $\alpha = 0$.

Cela étant reconnu, je peux considérer séparément les divers facteurs du second membre de (21). Il n'y a pas à envisager le facteur D^{-2} qui ne contient pas les coordonnées du point mobile. Le facteur x_4^4 s'évanouit en chacun des points d'intersection de (S) avec le plan x_4, qui est arbitraire. Il est donc manifeste qu'en chacun de ces points l'ordre de Δ est égal à quatre fois celui de x_4, c'est-à-dire égal à 4. Le nombre de ces intersections est d'ailleurs égal au degré m de S. Donc, par le fait du facteur x_4, dont il n'y aura plus à s'occuper, la somme des ordres de Δ, le long de (S), contient le terme $4m$.

30. Dans les deux autres facteurs de (21) figurent les coordonnées prises par rapport à un tétraèdre de référence arbitraire. Pour chaque point p que j'envisage je fais coïncider ces coordonnées avec celles qui ont été employées dans les équations (3). Le second membre de (21) ne dépend d'ailleurs que du rapport des coordonnées z à l'une d'elles. Je peux donc, sans le troubler, remplacer pour mon calcul z_4 par l'unité et z_1, z_2, z_3 par ξ, η, ζ, ces dernières quantités ayant les expressions (3), savoir:

$$z_1 = \xi = \alpha + k\omega^n, \qquad z_2 = \eta = \beta + \omega^n, \qquad z_3 = \zeta = \gamma + b\omega^n + c\omega^{n+\nu} + \cdots \quad (22)$$

Les quantités β, γ, b, c,... sont des fonctions de α données par les équations (5).

Ainsi que je viens de le dire au n.° 29, on a à faire $\alpha = 0$ après la substitution dans le second membre de (21). D'après (5), les fonctions b, β, γ et les dérivées de ces dernières s'évanouissent avec α. Grâce à cette remarque, on aperçoit immédiatement que la partie principale de R se réduit à:

$$R = n\,\omega^{n-1} \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = n\,A_3\,\omega^{n-1}.$$

Les lettres A désignent ici, par rapport au nouveau triangle de référence, les coordonnées du sommet s_3 du premier triangle de référence, c'est-à-dire d'un point arbitraire. Ainsi A_3 est nul lorsque le plan z_3 passe par ce point. Le plan z_3 est le plan tangent de la surface au point p. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que les points p de (S), pour chacun desquels le plan tangent de S passe en s_3, n'appartient à aucune des trois premières catégories du n.° 28, en sorte que dans les cas correspondant à ces catégories, l'ordre de R est toujours $(n-1)$. Par suite, dans chacun de ces cas, on aura l'ordre de Δ en retranchant $4(n-1)$ de l'ordre du facteur $(gl-h^2)$.

31. Pour terminer ce qui concerne le facteur R, il reste à connaître son ordre pour un quelconque des points p en lesquels le plan tangent de S passe par s_3. Ce sont des points ordinaires de la surface. En choisissant convenablement les coordonnées, et prenant ξ, η pour variable, indépendante, on a aux environs d'un tel point:

$$\zeta = a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 + \cdots$$

$$R = -2A_1(a\xi + b\eta) - 2A_2(b\xi + c\eta) + \cdots$$

Cette dernière expression s'évanouit dans le cas seulement où la ligne de contact du cône circonscrit à la surface, et de sommet A touche la courbe lieu du point ξ, η, ζ. Je peux écarter cette hypothèse, et conclure que l'ordre de R est égal à l'unité.

Le nombre des points analogues est le rang r de la surface. Donc il y correspond, du fait du facteur R^{-4}, le terme $-4r$ dans la somme des ordres de Δ.

32. Il reste maintenant à calculer l'ordre de $(gl-h^2)$ pour chaque cas. J'écris les premiers termes de g, h, l, déduits des équations (22) et (5) en faisant, après les différentiations, $\alpha = 0$

$$-g = n\omega^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & b_1\omega^n + c_1\omega^{n+\nu} + \cdots \\ k & 1 & \dfrac{n+\nu}{n} c_0\omega^\nu + \cdots \\ 0 & 2\beta_2 & 2\gamma_2 + 2b_2\omega^n + 2c_2\omega^{n+\nu} + \cdots \end{vmatrix} = 2n\gamma_2\omega^{n-1} - 2(n+\nu)\beta_2 c_0\omega^{n+\nu-1} \ldots$$
$$+ 2n(kb_1\beta_2 + b_2)\omega^{2n-1} + \cdots$$

$$-h = n^2 \omega^{2(n-1)} \begin{vmatrix} 1 & 0 & b_1 \omega^n + c_1 \omega^{n+\nu} + \cdots \\ k & 1 & \frac{n+\nu}{n} c_0 \omega^\nu + \cdots \\ 0 & 0 & b_1 + \frac{n+\nu}{n} c_0 \omega^\nu + \cdots \end{vmatrix} = n^2 b_1 \omega^{2(n-1)} + n(n+\nu) c_0 \omega^{\nu+2(n-1)} + \cdots$$

$$-l = n^2 (n-1) \omega^{2n-3} \begin{vmatrix} 1 & 0 & b_1 \omega^n + c_1 \omega^{n+\nu} + \cdots \\ k & 1 & \frac{n+\nu}{n} c_0 \omega^\nu + \cdots \\ k & 1 & \frac{n+\nu}{n} \cdot \frac{n+\nu-1}{n-1} c_0 \omega^\nu + \cdots \end{vmatrix} = n\nu(n+\nu) c_0 \omega^{\nu+2n-3} + \cdots$$

Au moyen de ces formules, je calcule la partie principale de $(gl - h^2)$ dans les divers cas, et je trouve les résultats suivants:

I. Si γ_2 diffère de zéro, c'est-à-dire si la ligne origine n'est pas asymptotique :

1.° $\qquad n = \nu \qquad gl - h^2 = \nu^4 (4 c_0 \gamma_2 - b_1^2) \omega^{4(\nu-1)} + \cdots$

Le coefficient de cette partie principale s'évanouit si l'indicatrice est parabolique. Donc, dans le cas opposé, l'ordre de $(gl - h^2)$ est $4(\nu - 1)$. En retranchant l'ordre de R^4 (n.° 30), on a zéro pour l'ordre de Δ.

Le cas où l'indicatrice est parabolique se déduira du cas suivant:

2.° $\qquad \nu < n \qquad gl - h^2 = 2n^2 \nu (n + \nu) \gamma_2 c_0 \omega^{\nu+3n-4} + \cdots$

L'ordre de Δ est $\nu + 3n - 4 - 4(n-1) = \nu - n$.

3.° Soit maintenant un cycle (ν, ν) à indicatrice parabolique. Je considère simultanément la surface S contenant ce cycle, et une corrélative S', contenant le cycle corrélatif (n, ν). Au point p placé sur S à distance infiniment petite d'ordre ν de la ligne-origine (a) correspond (n.° 17) un point p' placé sur S' à distance infiniment petite d'ordre n de la ligne-origine (a'). Soit Δ' la fonction Δ considérée pour S'. En p' l'ordre de Δ' est $(\nu - n)$ comme on vient de le trouver. Mais, suivant un calcul des plus connus et remontant à Euler, Δ et Δ' sont réciproques. Donc en p l'ordre de Δ est $(n - \nu)$. Désignons par $(1 + \lambda)$ l'ordre du contact de chaque nappe de S en p avec la tangente asymptotique. D'après le théorème X, n est égal à $(1 + \lambda)\nu$, et l'ordre de Δ est $\lambda\nu$.

II. Si γ_2 est nul, c'est-à-dire si la ligne-origine est asymptotique, on trouve:

1.° $\quad n \geqq \nu > \frac{n}{2} \qquad gl - h^2 = -n^4 b_1^2 \omega^{4(n-1)}$.

L'ordre de Δ est zéro.

2.° $\quad n = 2\nu \qquad gl - h^2 = -4\nu^4 (9\beta_2 c_0^2 + 4 b_1^2) \omega^{4(n-1)}$.

Si l'on se reporte aux n.^{os} 18 et 19, on reconnaîtra que la quantité entre parenthèses se réduit, si l'on tient compte de l'équation (12), au premier membre de l'équation (14). D'où cette conclusion: si le cycle $(2\nu, \nu)$ a pour corrélatif un cycle $(2\nu, \nu)$, l'ordre de Δ est nul.

Le cas où l'équation (14) a lieu sera traité comme conséquence du suivant:

3.° $\quad n > 2\nu \qquad gl - h^2 = -2n\nu(n+\nu)^2 c_0^2 \beta^2 \omega^{2\nu+3n-4} + \cdots$

L'ordre de Δ est égal à $(2\nu - n)$.

4.° En raisonnant comme plus haut, pour le cas du cycle parabolique, et s'appuyant sur la remarque du n.° 22, on a le résultat suivant: Pour un cycle $(2\nu, \nu)$ dont chaque nappe a, avec la tangente de la ligne-origine, un contact d'ordre $(2+\theta)$, l'ordre de Δ est $2\theta\nu$.

III. Si γ_2 et β_2 sont nuls, c'est-à-dire si la ligne-origine est droite, le plan tangent étant variable, on trouvera de même que l'ordre de Δ est zéro. Ce résultat, de même qu'une partie des précédents, pouvait être prévu comme conséquence de l'équation d'Euler $\Delta\Delta' = 1$. Car de cette équation on peut conclure que l'ordre de Δ est nul pour tout cycle dont le corrélatif est de même définition que le proposé.

IV. Si γ_2, b_1, b_2 sont nuls, c'est-à-dire (n.° 24) si le plan tangent est constant le long de la courbe-origine, on a:

$$gl - h^2 = -2n\nu(n+\nu)^2 c_0^2 \beta_2 \omega^{2\nu+3n-4} \ldots$$

L'ordre de Δ est $(2\nu - n)$.

V. Enfin dans le cas où le plan tangent est constant le long d'une ligne-origine droite, on a vu (n.° 25) que l'ordre de Δ est $(2\nu + i)$, i étant un nombre entier nul ou positif dont la détermination exige un examen plus approfondi qui a été fait au numéro cité.

33. Des résultats obtenus aux n.^{os} 29, 31 et 32 et conformément à la méthode expliqueé, je conclus maintenant l'énoncé suivant:

Théorème XVI. Sur une surface algébrique quelconque, de degré m et de rang r, considérons:

1.° Chaque cycle de nappes dont la ligne-origine n'est pas droite, dont le plan tangent est variable le long de cette ligne et diffère du plan osculateur de cette même ligne, si, en outre, ce cycle satisfait à une des conditions suivantes:

Sa classe ν est inférieure à son ordre n (soit alors d le degré de sa ligne-origine);

Ou bien sa classe ν_1 est égale à son ordre, et son indicatrice est parabolique en chaque point de sa ligne-origine (soient alors d_1 le degré de cette ligne et $(1+\lambda)$ l'ordre du contact de chaque nappe avec la tangente asymptotique).

2.° Chaque cycle de nappes dont la ligne-origine est gauche, et dont le plan tangent en chaque point de cette ligne se confond avec le plan osculateur de cette même ligne, si, en outre ce cycle satisfait à une des deux conditions suivantes:

Son ordre n_2 est supérieur au double de sa classe ν_2 (soit alors d_2 le degré de la ligne-origine);

Ou bien son ordre est le double de sa classe ν_3, et la tangent de la ligne-origine a, en chaque point de cette ligne, un contact d'ordre supérieur à 2 avec chaque nappe (soient alors $(2+\theta)$ l'ordre de ce contact et d_3 le degré de la ligne-origine).

3.° Chaque cycle de nappes dont la ligne-origine est une courbe plane et dont le plan tangent, en chaque point de cette ligne, se confond avec le plan de cette même ligne (soient alors d_4 le degré de cette courbe, et n_4, ν_4 l'ordre et la classe du cycle).

4.° Chaque cycle de nappes dont la ligne-origine est droite et dont le plan tangent est constant en chaque point de cette droite. Soient alors ν_5, n_5 la classe et l'ordre du cycle et, en outre, $\frac{\nu_5+i}{n_5}$ l'ordre le plus élevé du contact qui se puisse établir entre une nappe de ce cycle et une nappe de développable tout le long de la ligne-origine.

Entre tous les éléments ci-dessus définis pour ces cycles existe la relation

$$\sum[d_1\lambda\nu_1-d(n-\nu)-d_2(n_2-2\nu_2)+2d_3\theta\nu_3+d_4(2\nu_4-n_4)+2\nu_5+i]=4(r-m). \quad (23)$$

34. Sur l'équation (23), on fera les remarques suivantes:

Le rang r se déduit de la connaissance du degré et de celle des lignes singulières au moyen de la théorie des courbes planes.

Le terme $\sum d_1 \lambda \nu_1$ peut être partagé en deux autres, l'un relatif aux lignes paraboliques singulières, censées connues; l'autre relatif à la ligne des points paraboliques proprement dits. Pour cette dernière, les deux nombres λ et ν sont tous deux égaux à l'unité. Donc l'équation (23) donne explicitement le degré du lieu des points paraboliques d'une surface ayant des singularités quelconques.

De l'équation (23) on peut par dualité en déduire une autre, dans laquelle figure la classe de la surface au lieu de son degré, et qui fournira la classe de l'enveloppe des plans tangents stationnaires.

IV. Applications: surfaces de révolution et surfaces gauches.

35. Je vais appliquer les résultats généraux obtenus dans ce Mémoire aux surfaces de révolution. Ces surfaces offrent des exemples de la plus grande partie des singularités envisagées; les circonstances qu'elles présentent peuvent être reconnues en dehors de toute théorie générale. De là une vérification.

Dans le mouvement d'une figure plane, invariable, sur son plan les droites isotropes qui passent par le centre instantané sont, à chaque instant, le lieu des points dont la vitesse est nulle (*). Quand le mouvement est une simple rotation autour d'un centre fixe, les droites isotropes qui passent en ce point restent fixes dans toute l'étendue du mouvement. En conséquence, dans la rotation d'un corps autour d'un axe fixe, les plans isotropes menés par l'axe restent fixes. Tout point non situé dans un de ces plans décrit un parallèle. Donc, dans une surface de révolution, toute ligne singulière est un parallèle, ou bien est située dans un des plans isotropes menés par l'axe.

36. En ce qui concerne les parallèles singuliers, les résultats suivants sont manifestes:

Si le méridien, en un point non situé sur l'axe, contient un cycle dont la tangente ne soit pas perpendiculaire à l'axe, et dont la classe ν soit inférieure à l'ordre n, le parallèle correspondant est la ligne-origine d'un cycle (n, ν) dont cette ligne-origine n'est pas asymptotique.

(*) Voyez Mannheim: *Sur les surfaces trajectoires.* Savants étrangers, t. 22, n.º 12, p. 3.

Les autres circonstances restant les mêmes, si la classe ν est supérieure à l'ordre n sur le méridien, le parallèle est la ligne-origine d'un cycle (n, n) à indicatrice parabolique. La direction asymptotique est celle du méridien; et le cycle de nappes a pour corrélatif un cycle (ν, n).

Si le méridien, en un point non situé sur l'axe, contient un cycle dont la tangente soit perpendiculaire à l'axe, et dont l'ordre et la classe soient (n, ν), le parallèle correspondant est la ligne-origine d'un cycle de nappes (n, ν) dont le plan tangent est constant.

37. Les lignes singulières situées dans les plans isotropes menés par l'axe offrent des circonstances plus curieuses.

Soit O un point de rencontre du méridien avec l'axe. Pour embrasser à la fois tous les cas, je suppose que la perpendiculaire menée par O à l'axe dans le plan du méridien ait k points de rencontre avec ce méridien, confondus en O. (Il s'agit ici, bien entendu, du demi-méridien; cette observation s'applique à tout ce qui suit. Je dirai ensuite les modifications qui ont lieu quand le méridien se compose d'une seule courbe dont l'axe est axe de symétrie). Parmi les cercles suivant lesquels tout plan perpendiculaire à l'axe coupe la surface, il en est k qui s'évanouissent lorsque ce plan vient en O. Donc le plan mené en O perpendiculairement à l'axe coupe la surface suivant deux droites isotropes, dont chacune compte pour k unités dans le degré de la ligne d'intersection.

Ainsi, en chaque point de rencontre du méridien avec l'axe, passent deux droites isotropes, perpendiculaires à l'axe, qui appartiennent à la surface. L'ensemble de toutes ces droites constitue, ainsi qu'on le voit aisément, l'intersection complète de la surface avec les deux plans isotropes menés par l'axe. Je vais étudier la nature de la surface le long d'une quelconque de ces droites.

38. Pour faces x_1 et x_3 du tétraèdre de référence je prends les deux plans isotropes menés par l'axe. Pour faces x_4 et x_2, je prends deux plans perpendiculaires à l'axe, le second x_2 passant par un point de rencontre du méridien avec l'axe. Ainsi le point O est maintenant le sommet s_4 du tétraèdre, et les deux droites isotropes correspondantes sont les arêtes x_1x_2 et x_2x_3. Je considére le méridien dans le plan $x_1 = x_3$, et soit

$$\frac{x_3}{x_4} = f\left(\frac{x_2}{x_4}\right)$$

l'équation de la perspective de ce méridien faite du point de vue s_1 sur le plan x_1. L'équation de la surface de révolution est

$$\frac{x_1\, x_3}{x_4^2} = \left[f\left(\frac{x_2}{x_4}\right)\right]^2,$$

et cette équation met en évidence que l'intersection du plan x_3 et de la surface se compose uniquement de droites telles que

$$x_3 = 0, \qquad x_2 - \lambda x_4 = 0,$$

λ étant une racine de $f(\lambda)$. Ce sont des droites isotropes perpendiculaires à l'axe. La même observation s'applique au plan x_1. Suivant notre hypothèse, une des racines λ est nulle; je vais étudier la nature de la surface le long de la droite isotrope correspondante $x_3 = x_2 = 0$. J'aurai à distinguer trois cas, suivant la nature de la rencontre du méridien avec l'axe.

39. *1^er cas.* Le méridien rencontre l'axe obliquement. Soient n, ν l'ordre et la classe d'un des cycles du méridien en s_4: on aura

$$\eta = \frac{x_2}{x_4} = \omega^n, \qquad f\left(\frac{x_2}{x_4}\right) = a\,\omega^n + b\,\omega^{n+\nu} + \cdots$$

Pour la surface, je pose comme précédemment

$$\xi = \frac{x_1}{x_4}, \qquad \zeta = \frac{x_3}{x_4};$$

j'ai ainsi:

$$\eta = \omega^n, \qquad \zeta = \frac{1}{\xi}[f(\eta)]^2 = \frac{1}{\xi}(a^2\omega^{2n} + 2ab\,\omega^{2n+\nu} + \cdots).$$

Ces équations rentrent dans le type (18) et représentent un cycle de nappes (n, n) dont le plan tangent est constant le long de la ligne-origine droite $\eta = \zeta = 0$. Le nombre désigné par i au n.° 25 est ici égal à ν, en sorte que l'ordre de la fonction Δ pour ce cycle est $(2n+\nu)$. On peut le vérifier directement en mettant l'équation de la surface sous la forme

$$\zeta = \xi^{-1}[f(\eta)]^2,$$

et concluant par un calcul facile

$$\Delta = \frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi^2}\cdot\frac{\partial^2\zeta}{\partial\eta^2} - \left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial\xi\partial\eta}\right)^2 = 4\xi^{-4}f^3f''. \tag{24}$$

Les quantités f et f'' commencent respectivement par des termes de degré n et $(\nu - n)$ en ω. Donc Δ commence par un terme de degré $3n + (\nu - n)$ ou $(2n+\nu)$.

40. *2^ème cas.* Le méridien est tangent à l'axe. On a ici:

$$f\left(\frac{x_2}{x_4}\right) = b\,\omega^{n+\nu} + \cdots$$

$$\eta = \omega^n, \qquad \zeta = \frac{1}{\xi}(b^2\omega^{2n+2\nu} + \cdots)$$

La droite $\eta = \zeta = 0$ est la ligne-origine d'un cycle à plan tangent constant $(n, n+2\nu)$. Le nombre analogue à i est nul. La formule (24) permet encore de le vérifier; l'ordre de Δ est ici $(2n+4\nu)$.

Les deux cas précédents présentent un caractère commun: tout point où le méridien rencontre l'axe sous un angle non droit, appartient à deux droites isotropes perpendiculaires à l'axe, situées sur la surface, et le long de chacune desquelles le plan tangent est constant: c'est le plan mené par l'axe et cette droite.

41. $3^{ème}$ *cas*. Le méridien rencontre l'axe à angle droite. On a ici:

$$\eta = \omega^{n+\nu}, \qquad f\left(\frac{x_2}{x_4}\right) = a\omega^n + \cdots, \qquad \zeta = \frac{1}{\zeta} a^2 \omega^{2n} + \cdots$$

Il en résulte: 1.° pour $n > \nu$, le plan tangent est constant, et c'est encore $\zeta = 0$. Le cycle de nappes a l'ordre $(n+\nu)$ et la classe $(n-\nu)$. L'ordre de Δ est $2(n-\nu)$;

2.° pour $n = \nu$, le plan tangent est variable; l'ordre de Δ est zéro;

3.° pour $n < \nu$, le plan tangent est constant; mais c'est le plan $\eta = 0$. Le cycle a l'ordre $2n$ et la classe $(\nu - n)$. L'ordre de Δ est $2(\nu - n)$. Ainsi: un point où le méridien rencontre l'axe à angle droit appartient à deux droites isotropes perpendiculaires à l'axe, situées sur la surface, et le long de chacune desquelles le plan tangent passe constamment par l'axe, ou bien varie, ou bien est constamment perpendiculaire à l'axe, suivant qu'au point de rencontre le méridien a, avec sa tangente, un contact d'ordre inférieur, égal ou supérieur à l'unité.

42. Je peux maintenant appliquer à une surface de révolution l'équation (23), tous les éléments relatifs aux lignes singulières étant exprimés par les éléments du méridien.

Je désigne pour le méridien par

(n_1, ν_1) un cycle dont l'origine n'est pas sur l'axe, et dont la tangente n'est pas perpendiculaire à l'axe;

(n_2, ν_2) un cycle dont l'origine n'est pas sur l'axe, et dont la tangente est perpendiculaire à l'axe;

(n_3, ν_3) un cycle dont l'origine est sur l'axe, et la tangente oblique à l'axe;

(n_4, ν_4) un cycle tangent à l'axe;

$$\left.\begin{array}{l}(n_5, \nu_5)\\(n'_5, \nu'_5)\\(n''_5, \nu''_5)\end{array}\right\} \text{un cycle dont la tangente est perpendiculaire à l'axe, et pour lequel on a:} \left\{\begin{array}{l}n_5 > \nu_5;\\n'_5 = \nu'_5;\\n''_5 < \nu''_5.\end{array}\right.$$

Après suppression d'un facteur commun 2, l'équation (23) donne:

$$2(r-m)=\sum(\nu-n)+A,$$
$$A=\sum(\nu_3+3n_3+3n_4+3\nu_4+3n_5-3\nu_5+\nu''_5-n''_5).$$

Soient d et c le degré et la classe du méridien. En considérant successivement ses intersections avec l'axe et ses tangentes perpendiculaires à l'axe, on a les relations:

$$\sum(n_3+n_4+\nu_4+n_5+n'_5+n''_5)=d, \qquad A=c+3d-4\sum(\nu_5+n'_5+n''_5).$$
$$\sum(\nu_2+\nu_5+\nu'_5+\nu''_5)=c.$$

On a, en outre, par la théorie des courbes planes

$$\sum(\nu-n)=3(c-d).$$

Je conclus donc finalement en remarquant que $m=2d$

$$r=2(c+d)-2\sum(\nu_5+n'_5+n''_5). \tag{25}$$

Sur la formule (25), comme sur tous les résultats relatifs aux rencontres avec le méridien, on doit faire la remarque que ces résultats doivent être divisés par 2 dans le cas où l'axe de la surface est un axe de symètrie du méridien.

43. La formule (25) donne le rang de la surface de révolution engendrée par un méridien ayant des singularités quelconques. C'est, à proprement parler, une formule appartenant à la théorie des points singuliers des courbes planes. On peut la vérifier très-aisément dans le cas simple où la courbe méridienne rencontre obliquement l'axe en des points simples, et non autrement. Le nombre de ces rencontres est alors égal à d. La section méridienne contient, en plus qu'une section quelconque, d points doubles. Sa classe est $2c$. Donc une section quelconque a pour classe $2c+2d$: c'est précisément à quoi se réduit le second membre de (25) pour $\nu_5=n'_5=n''_5=0$.

Voici un exemple assez curieux. Soient p et q deux entiers positifs; considérons la courbe représentée en coordonnées rectangulaires par

$$y^{2p}=x^q, \qquad 2p>q>p.$$

La surface de révolution engendrée par cette courbe tournant autour de l'axe des x est de degré $2p$ et de rang $2q$.

44. Je m'occupe maintenant des surfaces réglées. Sur une pareille surface, la ligne-origine d'un cycle dont l'ordre surpasse l'unité ne peut être qu'une génératrice rectiligne. De même aussi le lieu des points paraboliques se réduit à des génératrices le long de chacune desquelles le plan tangent est constant.

Soit G une génératrice fixe, et soit G' une génératrice infiniment voisine. Je prends pour infiniment petit principal la distance des points où G et G' rencontrent un plan arbitraire. La plus courte distance de G' à G est d'ordre égal ou supérieur au premier. Dans le premier cas, tout plan coupe G et G' en deux points dont la distance est du 1^er^ ordre. Donc, suivant un théorème concernant la correspondance entre les points de deux courbes (*), les sections faites dans la surface par deux plans quelconques contiennent, aux points de rencontre avec G, des cycles dont les ordres sont égaux. En même temps, le plan tangent au cycle de nappes varie en chaque point de G. Ainsi le caractère distinctif des génératrices singulières ou non, le long desquelles le plan tangent varie, est que les sections faites dans la surface par divers plans ont toujours, au point de rencontre avec G, quel que soit ce point, un cycle d'ordre constant.

Remarquons que cette conclusion semble en défaut si G' et G sont parallèles. Ce cas est écarté ici, toutes les questions étant traitées au point de vue projectif. A ce point de vue, ce cas rentre dans celui que je vais maintenant examiner.

Dans le second cas, il existe sur G un point O, tel qu'un plan arbitraire mené par O coupe G' en un point dont la distance à O soit d'ordre supérieur au premier. Alors les sections de la surface ont, en O, des cycles dont les ordres sont plus grands qu'en tout autre point de G. Ainsi le caractère distinctif des génératrices le long desquelles le plan tangent est constant, c'est l'existence sur chacune d'elles d'un point tel que O. Ce point (s'il n'est pas à l'infini) appartient à la ligne de striction.

45. J'ai à m'occuper ici de ces dernières génératrices seulement. Pour face x_3 du tétraèdre de référence je prends le plan tangent constant, et pour face x_2 un plan passant par G. Pour face x_4 je prends un plan arbitraire mené en O; x_1 enfin est arbitraire. Le sommet s_1 est le point O, et la droite G coïncide avec x_2x_3.

Je considère les sections faites par les faces x_1 et x_4. Ces courbes possèdent des cycles correspondants dont les origines sont s_4 et s_1. La première a pour tangente x_1x_3. Quant à la seconde, on peut faire deux hypothèses: ou bien elle a pour tangente x_3x_4, c'est supposer qu'en O les tangentes de toutes les sections sont aussi dans le plan x_3; ou bien elle a une autre tangente, que je peux alors supposer choisie pour la droite x_2x_4.

(*) Bulletin de la Société Mathématique de France, t. 4, p. 32.

Par les lettres y, z, x, je représente un point de la première courbe, de la seconde courbe et de la surface. Je peux alors poser

1ère hypothèse:

$$z_1=1,\qquad z_2=a'\omega^{n'},\qquad z_3=b'\omega^{n'+\nu'}+\cdots,\qquad z_4=0$$

2ème hypothèse:

$$z_1=1,\qquad z_2=b'\omega^{n'+\nu'}+\cdots,\qquad z_3=a'\omega^{n'}+\cdots,\qquad z_4=0$$

$$n'>n.$$

$$y_1=0,\qquad y_2=a\omega^{n},\qquad y_3=b\omega^{n+\nu}+\cdots,\qquad y_4=1.$$

$$x_1=\alpha,\qquad x_2=y_2+\alpha z_2,\qquad x_3=y_3+\alpha z_3,\qquad x_4=1.$$

46. Je considère maintenant la quantité $(gl-h^2)$, pour former, comme au n.° 32, l'ordre de Δ. Les coordonnées x_i d'un point de la surface étant linéaires par rapport à la variable α, la quantité g est nulle. Ainsi $(gl-h^2)$ se réduit à $-h^2$, et il n'y a plus qu'à envisager la quantité h. En désignant par des accents les dérivées prises par rapport à ω, on trouve aisément:

$$h=\sum\pm y_1y'_2z_3z'_4.$$

Dans la seconde hypothèse, la partie principale de h est $nn'aa'\omega^{n+n'-2}$. Donc (n.° 30) l'ordre de Δ, pour un tel cycle, est $2(n'-n)$.

Dans la première hypothèse, la partie principale de h est

$$n(n'+\nu')ab'\omega^{n+n'+\nu'-2}\ \text{ou}\ -n'(n+\nu)ab'\omega^{n+n'+\nu-2},$$

suivant que ν' est inférieur ou supérieur à ν. Si ν' et ν sont égaux, ces deux termes s'ajoutent. Il peut alors arriver que leur somme s'évanouisse. Dans ce cas, l'ordre de h s'élève, et l'on peut trouver des exemples où cet ordre soit aussi grand que l'on voudra. Dans une surface développable, h est rigoureusement nul. Je dirai donc, dans la première hypothèse, que l'ordre de Δ est $2(n'-n+t)$, le nombre t étant le plus petit des deux nombres ν, ν', et pouvant les dépasser dans le cas seulement où ν et ν' sont égaux.

47. De cette analyse, je tire enfin cette conclusion:

Soit une surface gauche de degré m et de rang r;

Soit, sur cette surface, une génératrice singulière G, ligne-origine d'un cycle de nappes dont le plan tangent P soit constant le long de cette ligne, et dont l'ordre et la classe soient n et ν;

Soient n', ν' $(n'>n)$ l'ordre et la classe du cycle de la section (S) faite dans ce cycle de nappes par un plan mené arbitrairement au point où G rencontre la ligne de striction;

Soit, en outre, t un nombre qui est nul si la tangente à l'origine du cycle (S) n'est pas dans le plan P; qui, dans le cas opposé, est égal au plus petit des deux nombres ν, ν', pouvant, en outre, surpasser ν et ν' si ces derniers nombres sont égaux.

Entre les éléments analogues, et relatifs à toutes les génératrices telles que G, existe la relation

$$\sum(n'-n+t)=2(r-m).$$

La singularité ordinaire correspond au cas $n=1$, $n'=2$, $t=0$. La formule fournit alors $2(r-m)$ pour le nombre des génératrices singulières d'une surface gauche ne possédant que des singularités ordinaires. Ce dernier résultat se démontre directement avec une grande facilité (*).

48. Les surfaces que je viens de considérer dans ce paragraphe n'offrent pas d'exemple des cycles singuliers dont les lignes-origines sont asymptotiques. En dehors des surfaces développables, je n'en connais pas d'exemple parmi les surfaces usuelles. Il est cependant bien facile de former des surfaces possédant une telle singularité, et l'analyse suivie dans ce Mémoire en fournit le moyen.

Que l'on envisage la surface dont l'équation est:

$$(2x_1^3-3x_1x_2x_4+x_3x_4^2)^3x_4=(x_1^2-x_2x_4)^5.$$

On vérifiera aisément que cette surface possède un cycle de nappes (3, 2) dont la ligne-origine asymptotique est la cubique gauche

$$\frac{x_1}{x_4}=\alpha,\qquad \frac{x_2}{x_4}=\alpha^2,\qquad \frac{x_3}{x_4}=\alpha^3.$$

La même surface possède, en outre, un cycle (5, 5) ayant pour ligne-origine la droite x_1x_4, et le plan x_4 pour plan tangent tout le long de cette ligne. On peut à volonté multiplier de tels exemples.

Paris, décembre 1877.

(*) Voyez *Association française pour l'avancement des Sciences.* Congrès de Nantes 1875, pag. 237.

Ricerche sulle equazioni algebrico-differenziali. (*)

(*Memoria di* F. Casorati, *a Pavia.*)

6.

Ora dobbiamo considerare il caso in cui la radice P dell'equazione $\overset{n}{f}(X)=0$ sia multipla. Noi supporremo P radice doppia, e dP diverso da zero, cioè P variabile con u, v. Indicando con ρ, $\overline{\rho}$ le due radici dell'equazione $f_y(X)=0$ che si riducono a P per $y=0$, porremo

$$\left.\begin{aligned} \rho &= \mathrm{P}+m_1 y^{\frac{1}{2}}+m_2 y^{\frac{2}{2}}+m_3 y^{\frac{3}{2}}+\cdots, \\ \overline{\rho} &= \mathrm{P}+\overline{m}_1 y^{\frac{1}{2}}+\overline{m}_2 y^{\frac{2}{2}}+\overline{m}_3 y^{\frac{3}{2}}+\cdots \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Sostituendo questa espressione per ρ in $\overset{\nu}{f}(\rho)$ avremo, come già la (22),

$$\overset{\nu}{f}(\rho)=\overset{\nu}{f}(\mathrm{P})+y^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\overset{\nu}{f}}{\partial \mathrm{P}}m_1+y^{\frac{2}{2}}\left[\frac{\partial\overset{\nu}{f}}{\partial \mathrm{P}}m_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\overset{\nu}{f}}{\partial \mathrm{P}^2}m_1^2\right]$$
$$+y^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\partial\overset{\nu}{f}}{\partial \mathrm{P}}m_3+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\overset{\nu}{f}}{\partial \mathrm{P}^2}2m_1m_2+\frac{1}{2\cdot 3}\frac{\partial^3\overset{\nu}{f}}{\partial \mathrm{P}^3}m_1^3\right]+\cdots;$$

ed, invece delle (23) e (24), avremo le

$$\left.\begin{aligned} f_y(\rho) &= \overset{n}{f}(\rho)+y\overset{n-1}{f}(\rho)+\cdots+y^n\overset{0}{f}(\rho) \\ &= \overset{n}{f}(\mathrm{P})+y^{\frac{1}{2}}\frac{\partial\overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}}m_1+y^{\frac{2}{2}}\left[\frac{\partial\overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}}m_2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^2}m_1^2+\overset{n-1}{f}(\mathrm{P})\right] \\ &+y^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\partial\overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}}m_3+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^2}2m_1m_2+\frac{1}{2\cdot 3}\frac{\partial^3\overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^3}m_1^3+\frac{\partial\overset{n-1}{f}}{\partial \mathrm{P}}m_1\right]+\cdots \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

(*) Continuazione e fine, vedi t. 9, fasc. 1.

$$\left.\begin{aligned}
\delta f_y(\rho) &= \overset{n}{\delta f}(\rho) + y\,\overset{n-1}{\delta f}(\rho) + \cdots + y^{n-1}\,\overset{1}{\delta f}(\rho)\\
&= \overset{n}{\delta f}(\mathrm{P}) + y^{\frac{1}{2}}\frac{\partial \overset{n}{\delta f}}{\partial \mathrm{P}}m_1 + y^{\frac{2}{2}}\left[\frac{\partial \overset{n}{\delta f}}{\partial \mathrm{P}}m_2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{n}{\delta f}}{\partial \mathrm{P}^2}m_1^2 + \overset{n-1}{\delta f}(\mathrm{P})\right]\\
&+ y^{\frac{3}{2}}\left[\frac{\partial \overset{n}{\delta f}}{\partial \mathrm{P}}m_3 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{n}{\delta f}}{\partial \mathrm{P}^2}2m_1m_2 + \frac{1}{2\cdot 3}\frac{\partial^3 \overset{n}{\delta f}}{\partial \mathrm{P}^3}m_1^3 + \frac{\partial \overset{n-1}{\delta f}}{\partial \mathrm{P}}m_1\right] + \cdots\,.
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Sviluppi d'egual forma hanno luogo per la $\bar{\rho}$.

I coefficienti m_1, $m_2,\ldots$ vanno determinati eguagliando a zero i coefficienti delle successive potenze di y in (38), a cominciare da quello di $y^{\frac{2}{2}}$; poichè i primi due sono già nulli, essendo P radice doppia. Abbiamo dunque primieramente

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^2}m_1^2 + \overset{n-1}{f}(\mathrm{P}) = 0, \tag{40}$$

della quale equazione una radice va presa come valore di m_1 e l'altra come valore di $\bar{m}_1$. Nelle equazioni successive il coefficiente (m_2, $m_3,\ldots$) da determinarsi entra sempre linearmente e moltiplicato per

$$\frac{\partial^2 \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^2}m_1,$$

così che, se m_1 non sia zero, ogni coefficiente successivo riesce determinato in modo unico. Altrettanto per $\bar{m}_2$, $\bar{m}_3,\ldots$.

Per esprimere nel modo più conveniente i risultati della ricerca che stiamo facendo, dobbiamo riferirci ai varî gruppi omogenei costituenti il discriminante g_y di $f_y(X)=0$. Perciò considereremo anche questo discriminante in forma di prodotto di fattori che svilupperemo secondo le potenze di y. Per esso i fattori sono

$$\frac{\partial f_y}{\partial \rho_1},\qquad \frac{\partial f_y}{\partial \rho_2},\ldots,\qquad \frac{\partial f_y}{\partial \rho_m}, \tag{41}$$

e la formola esprimente g_y per loro mezzo è

$$g_y = m^{m-2}a_y^{m-2}\prod_{\rho=\rho_1}^{\rho=\rho_m}\frac{\partial f_y}{\partial \rho} \tag{42}$$

analoga alla (14) per F_y. Ma, poichè dianzi abbiamo designato con ρ e $\bar{\rho}$ particolarmente le radici che diventano eguali a P per $y=0$, e vogliamo ricercare le condizioni per l'abbassamento di F scaturienti dai fattori che corrispondono a queste radici, così potremo scrivere le formole (14) e (42) come segue

$$\left.\begin{array}{c} \overset{l}{F} + y\overset{l-1}{F} + y^2\overset{l-2}{F} + \cdots + y^l\overset{0}{F} = \\ (\overset{n}{a} + y\overset{n-1}{a} + \cdots + y^n\overset{0}{a})^m \partial f_y(\rho) \cdot \partial f_y(\overline{\rho}) \overset{(m-2)}{\Pi} \partial f_y(\rho_\mu) \end{array}\right\} \tag{43}$$

$$\left.\begin{array}{c} \overset{h}{g} + y\overset{h-1}{g} + y^2\overset{h-2}{g} + \cdots + y^h\overset{0}{g} = \\ m^{m-2}(\overset{n}{a} + y\overset{n-1}{a} + \cdots + y^n\overset{0}{a})^{m-2} \dfrac{\partial f_y}{\partial \rho} \cdot \dfrac{\partial f_y}{\partial \overline{\rho}} \overset{(m-2)}{\Pi} \dfrac{\partial f_y}{\partial \rho_\mu}, \end{array}\right\} \tag{44}$$

dove $\overset{(m-2)}{\Pi}$ significa che devesi fare il prodotto dei fattori (15) o (41) esclusi i due già particolarmente rappresentati.

Per formare gli sviluppi dei due fattori di g_y in considerazione, trascriveremo la (38), cambiandovi ogni simbolo di funzione in quello della sua derivata, ed avremo

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f_y}{\partial \rho} = \dfrac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \rho} + y \dfrac{\partial \overset{n-1}{f}}{\partial \rho} + \cdots + y^n \dfrac{\partial \overset{0}{f}}{\partial \rho} \\ = \dfrac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}} + y^{\frac{1}{2}} \dfrac{\partial^2 \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^2} m_1 + y^{\frac{2}{2}} \left[\dfrac{\partial^2 \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^2} m_2 + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^3 \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^3} m_1^2 + \dfrac{\partial \overset{n-1}{f}}{\partial \mathrm{P}}\right] \\ + y^{\frac{3}{2}} \left[\dfrac{\partial^2 \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^2} m_3 + \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^3 \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^3} 2 m_1 m_3 + \dfrac{1}{2 \cdot 3} \dfrac{\partial^4 \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^4} m_1^3 + \dfrac{\partial^2 \overset{n-1}{f}}{\partial \mathrm{P}^2} m_1\right] + \cdots. \end{array}\right\} \tag{45}$$

Questo secondo membro darà lo sviluppo di $\dfrac{\partial f_y}{\partial \rho}$ mettendovi per $m_1, m_2, \ldots$ i valori ottenuti come s'è detto, e darà lo sviluppo di $\dfrac{\partial f_y}{\partial \overline{\rho}}$ mettendovi invece i valori ottenuti per $\overline{m}_1, \overline{m}_2, \ldots$.

7.

Innanzi di procedere alle condizioni per l'abbassamento, conviene notare alcune relazioni tra i coefficienti degli sviluppi (38), (39), (45). Per semplicità indicheremo questi coefficienti con φ, ψ, χ, cioè porremo

$$f_y(\rho) = \varphi_0 + \varphi_1 y^{\frac{1}{2}} + \varphi_2 y^{\frac{2}{2}} + \cdots, \qquad f_y(\bar{\rho}) = \varphi_0 + \bar{\varphi}_1 y^{\frac{1}{2}} + \cdots \tag{46}$$

$$\delta f_y(\rho) = \psi_0 + \psi_1 y^{\frac{1}{2}} + \psi_2 y^{\frac{2}{2}} + \cdots, \qquad \delta f(\bar{\rho}) = \psi_0 + \bar{\psi}_1 y^{\frac{1}{2}} + \cdots \tag{47}$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial \rho} = \chi_0 + \chi_1 y^{\frac{1}{2}} + \chi_2 y^{\frac{2}{2}} + \cdots, \qquad \frac{\partial f_y}{\partial \bar{\rho}} = \chi_0 + \bar{\chi}_1 y^{\frac{1}{2}} + \cdots \tag{48}$$

Per un momento consideriamo m_1, $m_2, \ldots$ come altrettante variabili indipendenti ed i secondi membri della prima e terza di quest'ultime equazioni puramente come risultati della sostituzione della espressione

$$\mathrm{P} + m_1 y^{\frac{1}{2}} + m_2 y^{\frac{2}{2}} + \cdots$$

invece del simbolo ρ nelle due formole $f_y(\rho)$ e $\frac{\partial f_y}{\partial \rho}$. Allora i coefficienti φ_0, $\varphi_1, \ldots$, χ_0, $\chi_1, \ldots$ compajono come altrettante funzioni razionali intere delle variabili m_1, $m_2, \ldots$; e noi vogliamo notare le relazioni che fra esse funzioni hanno luogo in forza della

$$\frac{\partial f_y(\rho)}{\partial m_t} = \frac{\partial f_y(\rho)}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial m_t},$$

dove t significa un numero intero positivo qualsiasi. Introducendo i simboli φ, χ, questa eguaglianza si traduce nella

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial m_t} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial m_t} y^{\frac{1}{2}} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial m_t} y^{\frac{2}{2}} + \cdots = (\chi_0 + \chi_1 y^{\frac{1}{2}} + \chi_2 y^{\frac{2}{2}} + \cdots) y^{\frac{t}{2}};$$

e però le relazioni, che essa inchiude tra le φ e χ, e le quali consistono nelle eguaglianze dei coefficienti delle eguali potenze di y, si compendiano nella

$$\frac{\partial \varphi_{t+s}}{\partial m_t} = \chi_s \tag{49}$$

dove s, come t, significa numero intero positivo qualsiasi.

Confrontiamo ora i coefficienti ψ coi χ, considerando però m_1, $m_2, \ldots$ come quantità non più arbitrarie, ma determinate, come più sopra, dalle equazioni $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, ecc. A tal fine, differenziando la identità $f_y(\rho) = 0$, abbiamo

$$\delta f_y(\rho) + \frac{\partial f_y}{\partial \rho} d\rho = 0,$$

ossia

$$\psi_0 + \psi_1 y^{\frac{1}{2}} + \psi_2 y^{\frac{2}{2}} + \cdots + (\chi_0 + \chi_1 y^{\frac{1}{2}} + \chi_2 y^{\frac{2}{2}} + \cdots)(d\mathrm{P} + y^{\frac{1}{2}} dm_1 + y^{\frac{2}{2}} dm_2 + \cdots) = 0.$$

E però, eguagliando i coefficienti delle successive potenze di y, otteniamo

$$\left.\begin{aligned}-\psi_0&=\chi_0\,d\mathrm{P}\\-\psi_1&=\chi_0\,dm_1+\chi_1\,d\mathrm{P}\\-\psi_2&=\chi_0\,dm_2+\chi_1\,dm_1+\chi_2\,d\mathrm{P}\\&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\qquad(50)$$

8.

Abbiamo visto nel n.° 3 come la condizione singolare, affinchè il grado di F si abbassi di una prima unità, consista nella $\dfrac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}}=0$, che traducesi in $\overset{h}{g}=0$. I primi termini ψ_0, $\overline{\psi}_0$, χ_0, $\overline{\chi}_0$ degli sviluppi (47) e (48) sono nulli. Per ottenere $y\overset{l-1}{F}$ bisogna moltiplicare i secondi termini degli sviluppi (47) per i primi degli sviluppi degli altri $m-2$ fattori $\delta f(\rho_\mu)$. Sarà dunque

$$\overset{l-1}{F}=(a)^m\psi_1\overline{\psi}_1\overset{(m-2)}{\Pi}\,\delta\overset{n}{f}(\mathrm{P}_\mu).$$

Ora, affinchè riesca zero anche $\overset{l-1}{F}$ per opera dei due fattori pei quali riuscì già zero $\overset{l}{F}$, bisogna che sia

$$\psi_1\overline{\psi}_1=0.$$

I fattori ψ_1, $\overline{\psi}_1$ di questo prodotto dovranno entrambi essere zero. Infatti, ammesso che sia

$$\psi_1=\frac{\partial\delta\overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}}m_1=0,$$

ne segue $m_1=0$, non potendo essere zero il moltiplicatore di m_1. Imperocchè, se questo fosse zero, dalla differenziale della indentità $\dfrac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}}=0$, cioè da quest'altra identità

$$\delta\frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}}+\frac{\partial^2 \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^2}d\mathrm{P}=0$$

seguirebbe che dovrebb'essere nullo anche il secondo termine del primo membro, cioè nulla l'una o l'altra delle quantità

$$\frac{\partial^2 \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^2}, \qquad d\mathrm{P},$$

il che contraddirebbe alle supposizioni fatte nel principio del n.° 6. Dovendo essere zero la radice m_1 dell'equazione (40), sarà zero anche l'altra radice $\overline{m}_1$, e quindi

$$\overline{\psi}_1 = \frac{\partial \delta \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}} \overline{m}_1 = 0.$$

Inoltre, la (40) stessa fa vedere che la condizione $\psi_1 \overline{\psi}_1 = 0$ si traduce nella

$$\overset{n-1}{f}(\mathrm{P}) = 0. \tag{51}$$

Ma osserviamo altresì che le condizioni $\psi_1 = 0$, $\overline{\psi}_1 = 0$ equivalgono, per le (50), alle $\chi_1 = 0$, $\overline{\chi}_1 = 0$. E però, nel secondo membro della (44) il prodotto dei due fattori (48) principierà col termine in y^2: così che nel primo membro dovrà essere, insieme con $\overset{h}{g} = 0$,

$$\overset{h-1}{g} = 0. \tag{52}$$

Finalmente riflettiamo, che, se $\overset{l-1}{F}$ fosse già riuscito zero per opera di fattori diversi dai due (47) che stiamo considerando, la condizione $\overset{n-1}{f}(\mathrm{P}) = 0$ esprimerebbe pure sempre che, per opera di questi due fattori, il grado di F si abbassa di una seconda unità. E se anche $\overset{h-1}{g}$ fosse già divenuto zero per opera di fattori diversi dai due (48), la condizione $\overset{n-1}{f}(\mathrm{P}) = 0$ si tradurrebbe ancora in una $\overset{h-\nu}{g} = 0$ per $\nu > 1$.

Passiamo ora alla condizione affinchè il grado di F si abbassi di una terza unità per opera dei fattori (47). A tal fine bisogna primieramente porre

$$\psi_2 \overline{\psi}_2 = 0.$$

Qui pure saranno simultaneamente $\psi_2 = 0$ e $\overline{\psi}_2 = 0$. Imperocchè da $\psi_2 = 0$ segue, per le (50), $\chi_2 = 0$. Ora, poichè m_1 è zero, φ_3 riesce anche zero senz'altro, e la equazione che determina m_2 è la $\varphi_4 = 0$. Quest'equazione è di secondo grado, ma le sue due radici m_2 ed $\overline{m}_2$ sono eguali. Imperocchè m_2 soddisfa anche la equazione derivata, essendo, per la (49),

$$\frac{\partial \varphi_4}{\partial m_2} = \chi_2 = 0.$$

Dunque $\overline{m}_2 = m_2$ e $\overline{\psi}_2 = \psi_2$. La condizione in discorso può esprimersi egualiando a zero il discriminante della $\varphi_4 = 0$, cioè ponendo

$$\left(\frac{\partial \overset{n-1}{f}}{\partial \mathrm{P}}\right)^2 - 2\frac{\partial^2 \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^2} \overset{n-2}{f}(\mathrm{P}) = 0. \tag{53}$$

E poichè, riuscendo per essa nulli i coefficienti χ_2 e $\overline{\chi}_2$, il grado di g si abbassa ulteriormente di un'unità, la detta condizione equivarrà all'essere zero un altro dei gruppi di g, e però alla

$$\overset{h-2}{g} = 0, \tag{54}$$

qualora gli altri $m-2$ fattori (41) non abbiano già concorso all'abbassamento di esso grado.

9.

Potremmo adesso passare alla condizione, affinchè il grado di F si abbassi di una quarta unità per opera dei due fattori in discorso, e trovare, in modo analogo al finora seguíto, la espressione di essa condizione analoga alle (51) e (53), come l'analoga delle (52) e (54). Ma conviene invece cercare a dirittura la condizione affinchè il grado di F, dopo essersi abbassato di $\nu-1$ unità per opera dei detti fattori, si abbassi per loro cagione ancora di un'altra unità. Volendo entrare in tutte le particolarità di questa ricerca, benchè, seguendo altro modo, parte delle medesime sarebbero superflue, distingueremo il caso di $\nu-1$ dispari $(=2r-1)$ da quello di $\nu-1$ pari $(=2r)$.

Nel primo caso, coll'essere nulli i coefficienti

$$\begin{array}{llll}
\psi_0, & \psi_1, & \psi_2, \ldots, & \psi_{2r-2} \\
\overline{\psi}_0, & \overline{\psi}_1, & \overline{\psi}_2, \ldots, & \overline{\psi}_{2r-2} \\
\chi_0, & \chi_1, & \chi_2, \ldots, & \chi_{2r-2} \\
\overline{\chi}_0, & \overline{\chi}_1, & \overline{\chi}_2, \ldots, & \overline{\chi}_{2r-2}
\end{array}$$

avremo già trovato che i coefficienti

$$m_1 = \overline{m}_1, \qquad m_3 = \overline{m}_3, \ldots, \qquad m_{2r-3} = \overline{m}_{2r-3}$$

sono rispettivamente le radici doppie delle equazioni quadratiche

$$\varphi_2 = 0, \qquad \varphi_6 = 0, \ldots, \qquad \varphi_{4r-6} = 0$$

ed hanno tutte il valor zero; e che

$$m_2 = \overline{m}_2, \qquad m_4 = \overline{m}_4, \ldots, \qquad m_{2r-2} = \overline{m}_{2r-2}$$

sono le radici doppie delle equazioni

$$\varphi_4 = 0, \qquad \varphi_8 = 0, \ldots, \qquad \varphi_{4r-4} = 0;$$

mentre i coefficienti

$$\varphi_1, \qquad \varphi_3, \qquad \varphi_5, \ldots, \qquad \varphi_{4r-5}$$

non avranno servito a veruna determinazione dei coefficienti m, essendo di mano in mano riusciti nulli identicamente.

La condizione nuova da considerarsi in tale caso sarà

$$\psi_{2r-1} \cdot \overline{\psi}_{2r-1} = 0.$$

Supponiamo dunque $\psi_{2r-1} = 0$. Sarà, per le (50), $\chi_{2r-1} = 0$. La equazione, che serve a determinare m_{2r-1}, sarà $\varphi_{4r-2} = 0$. Infatti osserviamo primieramente che φ_{4r-3} riuscirà zero identicamente. Ed invero, ogni termine di φ_{4r-3} deve contenere un coefficiente m con indice dispari. I termini contenenti m_1, $m_3, \ldots$, m_{2r-3} si annullano insieme con questi coefficienti. E, quanto ai termini contenenti m_{2r-1}, $m_{2r+1}, \ldots$, m_{4r-5}, riflettiamo che questi coefficienti vi entrano linearmente; laonde $m_{2r+\sigma}$ avrà in φ_{4r-3} per moltiplicatore la

$$\frac{\partial \varphi_{4r-3}}{\partial m_{2r+\sigma}},$$

la quale derivata, per la (49), eguaglia la espressione

$$\chi_{2r-3-\sigma},$$

che, per tutti i valori di σ qui occorrenti (cioè -1, 1, $3, \ldots$, $2r-5$), è nulla. In secondo luogo osserviamo, che, nella espressione di φ_{4r-2} i coefficienti m con indice superiore al $2r-1$ spariranno, perchè moltiplicati per quantità già nulle in forza delle precedenti determinazioni. Infatti l'$m_{2r+\sigma}$ (per $\sigma = 0$, 1,

$2, \ldots, 2r-3$) entra linearmente in φ_{4r-2} e vi è quindi moltiplicato per la

$$\frac{\partial \varphi_{4r-2}}{\partial m_{2r+\sigma}},$$

che, giusta la (49), eguaglia la espressione

$$\chi_{2r-2-\sigma},$$

la quale abbiamo già detto essere zero.

La equazione $\varphi_{4r-2}=0$ è di secondo grado rispetto all'incognita m_{2r-1}, contenendo il termine

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}^2} m_{2r-1}^2;$$

ma le due radici sono eguali, come potrebbesi conchiudere dalle

$$\frac{\partial \varphi_{4r-2}}{\partial m_{2r-1}} = \chi_{2r-1} = 0,$$

se non risultasse, che esse radici sono entrambi nulle, da ciò che i termini contenenti m_{2r-1} linearmente devono contenere anche altri coefficienti m con indici dispari inferiori a $2r-1$ (la somma dei prodotti degli indici per gli esponenti dev'essere pari in ogni termine) e sono perciò nulli. Dunque conchiuderemo che devono essere $\overline{m}_{2r-1} = m_{2r-1} = 0$, $\overline{\psi}_{2r-1} = \psi_{2r-1} = 0$, $\overline{\chi}_{2r-1} = 0$.

Nel caso di $\nu - 1$ pari ($= 2r$), mediante considerazioni affatto simili alle precedenti, riconosceremo: che, posto $\psi_{2r}=0$, si ha $\chi_{2r}=0$; che, essendo zero identicamente φ_{4r-1}, la equazione, che deve determinare il coefficiente m_{2r}, è la quadratica $\varphi_{4r}=0$, le cui radici sono eguali; e che quindi risultano $\overline{m}_{2r} = m_{2r}$, $\overline{\psi}_{2r} = \psi_{2r} = 0$, $\overline{\chi}_{2r} = 0$.

E però, possiamo ormai conchiudere in tutta generalità, che, le condizioni, affinchè il grado di F si abbassi di ν unità, per opera di quei due tra i fattori (15) che corrispondono alle due radici eguali dell'equazione $\overset{n}{f}(\mathrm{X})=0$, sono che i discriminanti delle equazioni

$$\varphi_2 = 0, \qquad \varphi_4 = 0, \ldots, \qquad \varphi_{2\nu-2} = 0 \tag{55}$$

sieno nulli insieme con

$$\overset{n}{f}(\mathrm{P}), \qquad \frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}}.$$

Il qual complesso di condizioni si traduce identicamente nel dover essere nulli ν fra i gruppi

$$\overset{h}{g},\quad \overset{h-1}{g},\quad \overset{h-2}{g},\ldots,\quad \overset{0}{g},$$

e precisamente nel dover essere

$$\overset{h}{g}=0,\quad \overset{h-1}{g}=0,\ldots,\quad \overset{h-\nu+1}{g}=0; \tag{56}$$

quando però un simile sistema di condizioni non si trovi già adempiuto per opera di altri tra i fattori (15), conformemente alle riflessioni che ora aggiungeremo.

10.

Potranno riuscire zero anche i primi termini di altri fattori (41). Però questi fattori non concorreranno mai isolatamente, sibbene sempre due a due, μ a μ, all'abbassamento di g_y secondo l'ordine di moltiplicità della radice di $\overset{n}{f}(X)=0$ cui corrispondono. Per es. la

$$\frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}_3}=0$$

significherebbe che P_3 è radice almeno doppia di $\overset{n}{f}(X)=0$ e però dovrebb'essere, per es., $\mathrm{P}_4=\mathrm{P}_3$ e quindi anche

$$\frac{\partial \overset{n}{f}}{\partial \mathrm{P}_4}=0.$$

Ed allora, supponendo il caso ancora di radice doppia, se riuscisse zero anche il coefficiente di $y^{\frac{1}{2}}$ in

$$\frac{\partial f_y}{\partial \rho_3},$$

riuscirebbe zero il coefficiente di $y^{\frac{1}{2}}$ in

$$\frac{\partial f_y}{\partial \rho_4};$$

e così via.

Queste condizioni saranno sempre equivalenti, per le (50), alle analoghe condizioni relative ai coefficienti degli sviluppi di

$$\delta f_y(\rho_3), \qquad \delta f_y(\rho_4),$$

e trarranno quindi seco sempre ulteriori abbassamenti di grado in F.

Sussistendo un sistema (56) di condizioni, non ne segue che devano mancare i primi termini negli sviluppi di **due soli** tra i fattori (41), cioè che per due fattori sieno nulli i coefficienti di y^0, $y^{\frac{1}{2}}$, $y^{\frac{2}{2}}, \ldots$, $y^{\frac{\nu-1}{2}}$; ma segue che deve mancare tal complesso di primi termini nel sistema di tutti quanti i fattori (41) per cui riesca y^ν la più bassa potenza di y nel loro prodotto. Ora, a questo complesso di primi termini mancanti, ossia di coefficienti χ nulli, corrisponderà sempre, per le (50), un analogo complesso di coefficienti ψ nulli, cioè di primi termini mancanti negli sviluppi dei fattori (15), e però di termini mancanti nel loro prodotto, vale a dire di ν gruppi mancanti in

$$\overset{l}{F} + \overset{l-1}{F} + \overset{l-2}{F} + \cdots + \overset{0}{F}.$$

Possiamo anche manifestamente stabilire che coesistano condizioni della forma (33) e condizioni della forma (56). Supponiamo che sussistano le $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\sigma$ condizioni

$$\overset{n}{f}(\mathrm{P}_s) = 0, \qquad \overset{n-1}{f}(\mathrm{P}_s) = 0, \ldots, \qquad \overset{n-\mu_s+1}{f}(\mathrm{P}_s) = 0 \text{ per } s = 1, 2, \ldots \sigma \tag{57}$$

insieme con le (56). Dalle (57) segue, che, nei fattori

$$\delta f_y(\rho_1), \qquad \delta f_y(\rho_2), \ldots, \qquad \delta f_y(\rho_\sigma)$$

sono nulli rispettivamente i primi

$$\mu_1, \qquad \mu_2, \ldots, \qquad \mu_\sigma$$

termini, e che quindi nel prodotto

$$\prod_{\rho=\rho_1}^{\rho=\rho_\sigma} \delta f_y(\rho) \tag{58}$$

la più bassa potenza di y ha per esponente

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\sigma.$$

E dalle (56) segue, che, la $\overset{n}{f}(X) = 0$ ha radici multiple, alle quali riduconsi per $y = 0$ le radici ρ di parecchi tra i fattori non compresi in (58), e che nel prodotto di questi parecchi fattori la più bassa potenza di y ha per esponente

$$\nu.$$

Quindi nel prodotto di tutti quanti i fattori (15) la più bassa potenza di y verrà ad avere per esponente

$$\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\sigma + \nu;$$

e però saranno nulli identicamente i primi $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_\sigma + \nu$ gruppi della espressione F.

11.

Fra le molte conseguenze che scaturiscono dalle condizioni trovate, rileveremo in prima la seguente. Quando sia $h > l$, le condizioni

$$\overset{h}{g} = 0, \quad \overset{h-1}{g} = 0, \ldots, \quad \overset{h-l}{g} = 0 \tag{59}$$

traggono seco queste altre

$$\overset{h-l-1}{g} = 0, \quad \overset{h-l-2}{g} = 0, \ldots, \quad \overset{0}{g} = 0, \tag{60}$$

cioè l'annullamento totale di g.

Infatti, dalle (59) seguono le

$$\overset{l}{F} = 0, \quad \overset{l-1}{F} = 0, \ldots, \quad \overset{0}{F} = 0;$$

dunque F_y riesce identicamente nullo, e però coesistono per un qualche valore di X le equazioni

$$f_y(X) = 0, \qquad \partial f_y(X) = 0.$$

Differenziando rispetto ad u e v la prima di queste, ed osservando la seconda, si ottiene

$$\frac{\partial f_y}{\partial X} dX = 0,$$

donde conchiudesi dover essere zero $\frac{\partial f_y}{\partial X}$ oppure dX. Ammettendo che sia

$$\frac{\partial f_y}{\partial X} = 0,$$

dovrà essere zero anche il risultante di questa equazione e della $f_y(X)=0$, cioè appunto il g_y, ossia tutti i suoi gruppi separatamente.

Se poi si volesse supporre

$$dX=0,$$

la radice X sarebbe costante rispetto ad u e v, e la equazione $f_y(X)=0$ si decomporrebbe nelle

$$\overset{n}{f}(X)=0, \quad \overset{n-1}{f}(X)=0, \ldots, \quad \overset{0}{f}(X)=0;$$

e sarebbe facile, con considerazioni analoghe alle fatte nel n.° 8, dimostrare che in tal caso g riesce già zero, se sieno soddisfatte anche soltanto le prime $2n+1$ fra le condizioni (59).

Ueber die Auflösung der Gleichungen fünften Grades.

[*Von* L. Kiepert, *in Darmstadt.* (*)]

Die neuerdings von den Herren Klein (**), Brioschi (***) und Gordan (****) über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades veröffentlichten Arbeiten haben mich veranlasst, eine Untersuchung über denselben Gegenstand anzustellen, durch deren Ergebniss, wie mir scheint, eine nicht unbedeutende Vereinfachung der von Herrn Gordan gegebenen Ausdrücke herbeigeführt wird. Während nämlich Herr Gordan seiner Lösung die Jerrard-Hermiteschen Formeln zu Grunde legt, kann man mit Anwendung der von Herrn Weierstrass eingeführten Function pu (*****) auf einem kürzeren Wege zum Ziel gelangen. Der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften beehre ich mich im Nachfolgenden einen Auszug aus meiner Untersuchung mitzutheilen.

§ 1.

Es sei die elliptische Function pu definirt durch die Gleichung

$$p'^2 u = 4p^3 u - g_2 pu - g_3,$$

während 2ω, $2\omega'$ ein Paar Fundamentalperioden dieser Function bezeichnen;

(*) Abdruck aus den Nachrichten der Göttinger K. Gesellschaft der Wissenschaften.

(**) Klein, *Weitere Untersuchungen über das Ikosaëder.* Math. Annalen, Bd. 12, p. 503-560.

(***) Brioschi, *Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.* Math. Annalen, Bd. 13, p. 109-160.

(****) Gordan, *Ueber die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade.* Math. Annalen, Bd. 13, p. 375-404.

(*****) Vrgl. Borchardt's Journal, Bd. 76, p. 21-33.

dann sind für $r = 0, 1, 2, 3, 4$

$$f = \frac{1}{p\left(\frac{2\omega}{5}\right) - p\left(\frac{4\omega}{5}\right)},$$

$$f_r = \frac{1}{p\left(\frac{2\omega' + 16r\omega}{5}\right) - p\left(\frac{4\omega' + 32r\omega}{5}\right)}$$

die Wurzeln der Gleichung

$$f^{12} + \frac{10}{\Delta} f^6 - \frac{12 g_2}{\Delta^2} f^2 + \frac{5}{\Delta^2} = 0, \tag{1}$$

wo

$$\Delta = g_2^3 - 27 g_3^2$$

ist. Die Berechnung der Grössen f, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4 wird erleichtert durch eine Umformung, die man mit denselben vornehmen kann, und durch die man erhält

$$f = h^{\frac{1}{3}} \Delta^{-\frac{1}{6}} \sqrt{5} \prod_\nu \left(\frac{1 - h^{10\nu}}{1 - h^{2\nu}}\right), \tag{2}$$

$$f_r = -\varepsilon^{2r} h^{-\frac{1}{15}} \Delta^{-\frac{1}{6}} \prod_\nu \left(\frac{1 - h^{\frac{2\nu}{5}} \varepsilon^{8r\nu}}{1 - h^{2\nu}}\right),$$

wobei $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{5}}$ ist, und $h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}$ berechnet werden kann, sobald man die absolute Invariante $\frac{g_2^3}{\Delta}$ der elliptischen Function kennt.

Entwickelt man $\prod_\nu (1 - h^{2\nu}) \cdot f$ und $\prod_\nu (1 - h^{2\nu}) \cdot f_r$ nach Potenzen von h, so findet man folgende Relationen bestätigt:

$$\left.\begin{aligned} f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4 &= f\sqrt{5}, \\ f_0 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \varepsilon^3 f_3 + \varepsilon^4 f_4 &= 0, \\ f_0 + \varepsilon^4 f_1 + \varepsilon^3 f_2 + \varepsilon^2 f_3 + \varepsilon f_4 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

§ 2.

Setzt man jetzt

$$y_r = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} [(f^2 - f^2_r)(f^2_{r+2} - f^2_{r+3})(f^2_{r+4} - f^2_{r+1})]^{\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

so werden y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 die Wurzeln einer Gleichung fünften Grades

$$\Delta^3 y^5 + 10\Delta^2 y^3 + 45\Delta y - 216 g_3 = 0. \tag{5}$$

Auf diese Gleichung lässt sich aber die allgemeine Gleichung fünften Grades

$$x^5 + Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = 0 \tag{6}$$

zurückführen durch die Substitution

$$x^2 - ux + v = -\frac{\alpha + \beta y}{3 + \Delta y^2} = z, \tag{7}$$

wobei die Grössen u, v, α, β^2, $\frac{g_2^3}{\Delta}$ durch Auflösung von nur zwei quadratischen Gleichungen bestimmt werden. Zunächst folgt aus

$$z = x^2 - ux + v,$$

dass z wieder die Wurzel einer Gleichung fünften Grades ist, in der man aber durch passende Bestimmung von u und v die Summe der Wurzeln und die Summe der Quadrate der Wurzeln gleich Null machen kann. Dies erreicht man indem man setzt

$$\left.\begin{array}{c} 5v = -Au - A^2 + 2B, \\ (2A^2 - 5B)u^2 + (4A^3 - 13AB + 15C)u + 2A^4 - 8A^2B + 10AC + 3B^2 - 10D = 0. \end{array}\right\} \tag{8}$$

Man findet also für u und v die Werthe durch Auflösung einer quadratischen Gleichung und erhält für z die Gleichung

$$z^5 + 5lz^2 - 5mz + n = 0, \tag{9}$$

wobei

$$\left.\begin{array}{l} 5l = -10v^3 - Cu^3 + (-AC + 4D)u^2 + (3AD - BC - 5E)u - 2AE + 2BD - C^2, \\ 5m = 5v^4 + 10lv - Du^4 + (-AD + 5E)u^3 + (4AE - BD)u^2 + \\ \qquad\qquad (3BE - CD)u + 2CE - D^2, \\ n = -v^5 - 5lv^2 + 5mv - E(u^5 + Au^4 + Bu^3 + Cu^2 + Du + E). \end{array}\right\} \tag{10}$$

Dieselbe Form wie bei Gleichung (9) erhält man, wenn man den andern, aus Gleichung (7) sich ergebenden Werth von z, nämlich

$$z = -\frac{\alpha + \beta y}{3 + \Delta y^2}$$

mit Gleichung (5) zusammenstellt und y eliminirt. Damit nun aber völlige Uebereinstimmung mit Gleichung (9) stattfindet, müssen α, β und $\frac{g_2^3}{\Delta}$ so gewählt werden, dass die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} 8\Delta^2\alpha^3 - 72\Delta\alpha\beta^2 + 216 g_3(\Delta\alpha^2\beta - \beta^3) &= 12^3 g_2^3 \Delta l, \\ \Delta^2\alpha^4 + 18\Delta\alpha^2\beta^2 - 27\beta^4 + 216 g_3\alpha\beta^3 &= 12^3 g_2^3 \Delta m, \\ \Delta^3\alpha^5 + 10\Delta^2\alpha^3\beta^2 + 45\Delta\alpha\beta^4 + 216 g_3\beta^5 &= 12^3 g_2^3 \Delta^2 n \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

befriedigt werden. Dies geschieht, wenn man α aus der quadratischen Gleichung

$$(l^4 - lmn + m^3)\alpha^2 + (11 l^3 m + ln^2 - 2m^2 n)\alpha - 27 l^3 n + 64 l^2 m^2 - mn^2 = 0 \tag{12}$$

berechnet und in die Formeln

$$\left.\begin{aligned} \pm 12 g_2 &= l\alpha^2 + 3m\alpha - 3n, \\ \pm \Delta &= l^2[(ln - m^2)\alpha + mn], \\ \beta^2 &= \pm l^3[l^2\alpha^2 + 11 lm\alpha + 64 m^2 - 27 ln] \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

einsetzt.

§ 3.

Zur vollständigen Auflösung einer allgemeinen Gleichung fünften Grades sind nach dem Vorhergehenden also nur folgende Rechnungsoperationen nöthig:

1) Man berechne aus einer quadratischen Gleichung (8) die Grösse u, dann geben die Gleichungen (8) und (10) unmittelbar die Werthe von v, , m und n.

2) Sodann berechne man aus einer zweiten quadratischen Gleichung (12) α und setze den gefundenen Werth in die Formeln (13) ein.

3) Man berechne aus $\frac{g_2^3}{\Delta}$ die Grösse $h = e^{\frac{\omega' \pi i}{\omega}}$ (Vergl. H. Bruns, *Ueber die Perioden der elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung.* Dorpat, 1875).

4) Man bestimme f und $f_r (r = 0, 1, 2, 3, 4)$ durch die Gleichungen (2)

$$f = h^{\frac{1}{3}} \Delta^{-\frac{1}{6}} \sqrt{5} \prod_{\nu} \left(\frac{1 - h^{10\nu}}{1 - h^{2\nu}} \right)$$

$$f_r = - \varepsilon^{2r} h^{-\frac{1}{15}} \Delta^{-\frac{1}{6}} \prod_{\nu} \left(\frac{1 - h^{\frac{2\nu}{5}} \varepsilon^{8r\nu}}{1 - h^{2\nu}} \right),$$

berechne

$$y_r = \frac{1}{\sqrt[4]{5}} \left[(f^2 - f^2_r)(f^2_{r+2} - f^2_{r+3})(f^2_{r+4} - f^2_{r+1}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

und daraus

$$z_r = - \frac{\alpha + \beta y_r}{3 + \Delta y^2_r},$$

dann sind die Wurzeln x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 der allgemeinen Gleichung fünften Grades (6), wie unmittelbar aus Gleichung (7) folgt, für $r = 0, 1, 2, 3, 4$

$$x_r = \frac{-E + (v - z_r)(u^3 + Au^2 + Bu + C) - (v - z_r)^2 (2u + A)}{u^4 + Au^3 + Bu^2 + Cu + D - (v - z_r)(3u^2 + 2Au + B) + (v - z_r)^2}.$$

Nota alla precedente Memoria.

(*Di* F. Brioschi, *in Milano.*)

È noto che dalla equazione modulare Jacobiana del sesto grado:

$$(x-a)^6-4a(x-a)^5+10b(x-a)^3-4c(x-a)+5b^2-4ac=0 \qquad (1)$$

se indicansi con x, x_0, x_1,... x_4 le sue radici, ponendo:

$$y=\frac{1}{\sqrt[4]{5}}[(x-x_0)(x_2-x_3)(x_4-x_1)]^{\frac{1}{2}}$$

si ottiene la equazione del 5.° grado:

$$y^5+10by^3+5(9b^2-4ac)y-8k=0 \text{ (*)} \qquad (2)$$

essendo:

$$k=[c^3-27b^5+25a^3b^4-40a^4b^2c-20a^2bc^2+45ab^3c+16a^5c^2]^{\frac{1}{2}}.$$

Pongasi ora $a=0$ nelle equazioni (1) (2) e nella (1) $x=\xi\sqrt[3]{b}$, nella (2) $y=\eta\sqrt{b}$; si avranno le:

$$\xi^6+10\xi^3-4\frac{c}{b^{\frac{5}{3}}}\xi+5=0 \qquad (3)$$

$$\eta^5+10\eta^3+45\eta-8\sqrt{\frac{c^3}{b^5}-27}=0$$

dalle quali si passa alle equazioni (1) (5) della precedente Memoria col porre $\frac{c}{b^3}=3\frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}$. La equazione modulare corrispondente alla (3) quando si faccia uso dell'integrale elittico nella forma considerata dal sig. Weierstrass nelle sue lezioni, è la seguente:

$$z^6-\frac{5}{4}g_2z^4-5g_3z^3-\frac{5}{16}g_2^2z^2-\frac{1}{4}g_2g_3z-\frac{5}{64}g_3^2=0. \qquad (4)$$

(*) Vedi Mathematische Annalen, Bd. 13, pag. 141.

Ora nel mio lavoro che ha per titolo: *Sopra una classe di forme binarie,* pubblicato nel vol. 8 di questi Annali, ho dimostrato che fra le radici delle equazioni (3) (4) ha luogo la seguente relazione:

$$\xi = 3\sqrt[3]{\Delta}\,\frac{z}{4z^3 - g_2 z - g_3} \tag{5}$$

o reciprocamente:

$$z = -\frac{\sqrt[6]{\Delta}}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{\xi^3 + \frac{g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}\xi + 10}}{\sqrt{\xi}}.$$

Ma, come è noto, indicando con $p(u)$ la funzione introdotta nell'analisi dal sig. Weierstrass, si ha:

$$z = \tfrac{1}{2}\left[p\left(\frac{2\omega}{5}\right) + p\left(\frac{4\omega}{5}\right)\right]$$

e ponendo:

$$\rho = p\left(\frac{2\omega}{5}\right)p\left(\frac{4\omega}{5}\right)$$

si ha:

$$\rho = \frac{1}{12z}\left[8z^3 + g_2 z + g_3\right]$$

da cui:

$$z^2 - \rho = \tfrac{1}{4}\left[p\left(\frac{2\omega}{5}\right) - p\left(\frac{4\omega}{5}\right)\right]^2 = \frac{1}{12z}(4z^3 - g_2 z - g_3).$$

Quindi sostituendo nella (5) si otterrà:

$$\sqrt{\xi} = \frac{\sqrt[6]{\Delta}}{p\left(\frac{2\omega}{5}\right) - p\left(\frac{4\omega}{5}\right)}$$

cioè la prima formola del prof. Kiepert.

Ma la equazione (4) si può abbassare direttamente; infatti ponendo:

$$v = \frac{8}{\sqrt{5\Delta}}(z - z_0)(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)$$

si ottiene la:

$$v^5 + 10v^3 + 45v + \frac{6^3 \cdot g_3}{\sqrt{\Delta}} = 0$$

(vedi il mio lavoro citato sopra pag. 37), nella quale i coefficienti numerici sono gli stessi che nella superiore.

Ueber die Transformationstheorie der Theta-Functionen, ins Besondere derer von drei Veränderlichen.

(*Von* H. Weber, *in Königsberg.*)

§ 1. Transformation der $2p$-fach periodischen Functionen.

Eine $2p$-fach periodische Function von p Veränderlichen kann durch Einführung passender Variablen in eine solche Form gebracht werden, dass sie in Bezug auf jede einzelne der Veränderlichen die Periode πi besitzt und ausserdem noch p Systeme zusammengehörige Perioden, bestehend in den gleichzeitigen Aenderungen sämmtlicher Variablen resp. um

$$a_{1,\nu}, \qquad a_{2,\nu}, \ldots \qquad a_{p,\nu}; \qquad\qquad \nu = 1,\ 2, \ldots\ p.$$

Wir nehmen an, dass diese Periodensysteme den Bedingungen genügen, dass

$$a_{\mu,\nu} = a_{\nu,\mu}$$

und dass der reelle Theil von

$$\sum_{\mu,\nu} a_{\mu,\nu} x_\mu x_\nu$$

eine negative Function sei, was erforderlich ist, wenn die Function durch Theta-functionen darstellbar sein soll.

Es sollen nun an Stelle der ursprünglichen Variablen $u_1, u_2, \ldots u_p$ durch eine lineare Substitution

$$u_h = \sum_{1,p}^{i} Q_i^{(h)} v_i \qquad h = 1,\ 2, \ldots\ p \tag{1}$$

die neuen Variablen $v_1, v_2, \ldots v_p$ eingeführt werden, und die Coefficienten $Q_i^{(h)}$ dieser Substitution, deren Determinante nicht verschwinden darf, sind so zu bestimmen, dass die neu entstandene $2p$ fach periodische Function der Veränderlichen $v_1, v_2, \ldots v_p$ ebenfalls für jede einzelne der Variablen die Periode πi hat, und dass die andern Periodensysteme den für die Darstellbarkeit durch Theta-functionen erforderlichen Bedingungen genügen.

Sind also

$$b_{1,\nu}, \qquad b_{2,\nu}, \ldots \qquad b_{p,\nu}$$

die Systeme zusammengehöriger Perioden dieser neuen Function, so ist, wenn wir unter $\alpha_i^{(k)}$, $i, k = 1, 2, \ldots 2p$ ein System von $4pp$ ganzen Zahlen verstehen

$$Q_\mu^{(\nu)} \pi i = \alpha_\mu^{(\nu)} \pi i + \sum_{1,p}^{i} \alpha_\mu^{(p+i)} a_{i,\nu} \tag{2}$$

$$\sum_{1,p}^{i} Q_i^{(\nu)} b_{i,\mu} = \alpha_{p+\mu}^{(\nu)} \pi i + \sum_{1,p}^{i} \alpha_{p+\mu}^{(p+i)} a_{i.\nu}. \tag{3}$$

Hieraus ergiebt sich durch Elimination der $Q_\mu^{(\nu)}$ ein in Bezug auf jedes der Grössensysteme $a_{i,k}$, $b_{i\,k}$ lineares Gleichungssystem:

$$\frac{1}{\pi i} \sum_{1,p}^{i,i'} \alpha_{i'}^{p+i} b_{i,\nu} a_{i'.\mu} = \alpha_{p+\mu}^{(\nu)} \pi i + \sum_{1,p}^{i} \alpha_{p+\mu}^{(p+i)} a_{i,\nu} - \sum_{1,p}^{i} \alpha_i^{(\nu)} b_{i,\mu}. \tag{4}$$

Ferner erhält man aus (2), (3)

$$\left.\begin{aligned} \sum_{1,p}^{i,i'} Q_i^{(\mu)} Q_{i'}^{(\nu)} b_{i,i'} &= \pi i \sum_{1,p}^{i} \alpha_{p+i}^{(\nu)} \alpha_i^{(\mu)} + \sum_{1,p}^{i,i'} a_{i,\nu} \alpha_{p+i}^{(p+i)} \alpha_{i'}^{(\mu)} + \\ &+ \sum_{1,p}^{i,i} a_{i,\mu} \alpha_{p+i'}^{(\nu)} \alpha_i^{(p+i)} + \frac{1}{\pi i} \sum_{1,p}^{i,i',i''} a_{i,\nu} a_{i',\mu} \alpha_{p+i''}^{(p+i)} \alpha_{i''}^{(p+i')}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Vertauscht man hierin μ und ν, so ergeben sich aus den Bedingungen

$$b_{i,i'} = b_{i',i} \tag{6}$$

die Relationen

$$\left.\begin{aligned} \sum_{1,p}^{i} (\alpha_{p+i}^{(\nu)} \alpha_i^{(\mu)} - \alpha_{p+i}^{(\mu)} \alpha_i^{\nu}) &= \pm n \qquad \text{wenn } \nu - \mu = \pm p \\ &= \quad 0 \qquad \text{in allen andern Fällen; } \mu, \nu = 1, 2, \ldots 2p \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

wenn n eine ganze Zahl ist.

Umgekehrt folgen aus (7) die Relationen (6) da die Determinante der $Q_\mu^{(\nu)}$ nicht verschwinden soll.

Die Gleichungen (7) erweisen sich zunächst nur dann als nothwendig, wenn das Grössensystem $a_{i,k}$ allgemein ist. Bestehen zwischen diesen Grössen gewisse Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten, so können die Gleichungen (6) auch ohne die Gleichungen (7) bestehen. Da sich aber weiter unten ergiebt, dass für die Transformation der Theta-functionen die Relationen (7) unter allen Umständen nothwendig sind, so nehmen wir auch hier auf diese Ausnahmefälle keine weitere Rücksicht.

Genügt ein Zahlensystem $\alpha_i^{(k)}$ den Bedingungen (7) so hat die Determinante desselben

$$\Delta = \sum \pm \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(2)} \dots \alpha_{2p}^{(2p)}$$

den Werth $\pm n^p$ wie sich sofort ergiebt, wenn man das Quadrat der Determinante Δ bildet. Später wird sich zeigen dass nur das obere Zeichen gültig ist; für jetzt genügt es, zu wissen, das Δ zugleich mit n verschwindet und nicht verschwindet.

Es lässt sich nun zunächst beweisen, dass unter der Voraussetzung eines positiven n und nur unter dieser der reelle Theil der Function $\sum_{1,p}^{i,i'} b_{i\,i'} x_i x_i$ eine negative Function ist, falls, wie vorausgesetzt ist, das Gleiche von dem reellen Theil der Function $\sum_{1,p}^{i,i'} a_{i,i'} x_i x_{i'}$ gilt.

Bedeutet nämlich $x_1, x_2, \dots x_p$ ein reelles Grössensystem, und definiren wu ein complexes Grössensystem $y_1, y_2, \dots y_p$ durch die transponirte Substitution von (1)

$$x_k = \sum_{1,p}^{i} Q_k^{(i)} y_i$$

so ergiebt sich, indem man

$$a_{h,k} = a'_{h,k} + i a''_{h,k}; \qquad b_{h,k} = b'_{h,k} + i b''_{h,k}; \qquad y_h = y'_h + i y''_h$$

setzt, worin $a'_{h,k}$, $a''_{h,k}$, $b'_{h,k}$, $b''_{h,k}$, y'_h, y''_h reelle Grössen bedeuten, mit Hülfe der Relationen (7)

$$\sum_{h,k} b'_{h,k} x_h x_k = n \sum_{h,k} a'_{h,k} (y'_h y'_k + y''_h y''_k) \; (*).$$

Hieraus aber folgt die Richtigkeit der obigen Behauptung, denn es ist, falls n positiv ist, $\sum_{h,k} b'_{h.k} x_h x_k$ aus zwei negativen Functionen zusammengesetzt.

*) Vgl. bezüglich dieser einfachen Rechnung meine Abhandlung: *Ueber die unen li l vielen Formen der ϑ Function.* Borchardts Journal, Bd. 74, p. 65.

Es wird hiernach n immer als eine ganze positive Zahl vorausgesetzt und heisst der Grad der Transformation. Ist $n=1$, so heisst die Transformation linear.

Da hiernach auch die Determinante Δ von Null verschieden ist, so kann man den Relationen (7) auch die folgende Gestalt geben:

$$\left.\begin{array}{lll} \sum\limits_{1,p}^{i}(\alpha_\nu^{(p+i)}\alpha_\mu^{(i)}-\alpha_\nu^{(i)}\alpha_\mu^{(p+i)})=\pm n & \text{wenn } \nu-\mu=\pm p \\ \qquad\qquad = 0 & \text{in allen andern Fällen; } \mu,\nu=1,2,\dots 2p \end{array}\right\}(8)$$

Endlich lässt sich noch zeigen, dass, immer unter der Voraussetzung eines von Null verschiedenen n und Δ, ein durch (2) bestimmtes Grössensystem $Q_\mu^{(\nu)}$ immer eine von Null verschieden Determinante hat, dass somit jedes beliebige den Relationen (7) oder (8) genügende Zahlensystem in (2) und (3) angenommen werden kann.

Wäre nämlich die Determinante der $Q_h^{(k)}$ gleich Null, so liesse sich ein von Null verschiedenes reelles Grössensystem l_h, m_h bestimmen, welches den Gleichungen

$$\sum_{1,p}^{h} Q_h^{(\nu)}(l_h+im_h)=0$$

genügt. Durch Trennung des Reellen vom Imaginären zerfällt dies System in die beiden folgenden:

$$\left.\begin{array}{l} \pi\sum\limits_{1,p}^{h}\alpha_h^{(\nu)}l_h+\sum\limits_{1,p}^{i}a''_{i,\nu}\sum\limits_{1,p}^{h}\alpha_h^{(p+i)}l_h+\sum\limits_{1,p}^{i}a'_{i,\nu}\sum\limits_{1,p}^{h}\alpha_h^{(p+i)}m_h=0 \\ -\pi\sum\limits_{1,p}^{h}\alpha_h^{(\nu)}m_h-\sum\limits_{1,p}^{i}a''_{i,\nu}\sum\limits_{1,p}^{h}\alpha_h^{(p+i)}m_h+\sum\limits_{1,p}^{i}a'_{i,\nu}\sum\limits_{1,p}^{h}a_h^{(p+i)}l_h=0 \end{array}\right\} \quad (9)$$

woraus sich sofort ergiebt

$$\sum_{1,p}^{i,i'}a'_{i,i'}\Big(\sum_{1,p}^{h}\alpha_h^{(p+i)}m_h\Big)\Big(\sum_{1,p}^{h}\alpha_h^{(p+i')}m_h\Big)+\sum_{1,p}^{i,i'}a'_{i,i'}\Big(\sum_{1,p}^{h}\alpha_h^{(p+i)}l_h\Big)\Big(\sum_{1,p}^{h}\alpha_h^{(p+i')}l_h\Big)=0.$$

Diese Gleichung kann in Folge der über die $a'_{i,i'}$ gemachten Voraussetzung nicht anders bestehen, als wenn

$$\sum_{1,p}^{h}\alpha_n^{(p+i)}m_h=0, \qquad \sum_{1,p}^{h}\alpha_n^{(p+i)}l_h=0$$

ist, was wegen der Gleichungen (9) zur Folge hat:

$$\sum_{1,p}^{h} \alpha_h^{(i)} m_h = 0, \qquad \sum_{1,p}^{h} \alpha_h^{(i)} l_h = 0.$$

Dies aber widerspricht der Annahme, dass die Determinante Δ nicht verschwinden soll.

§ 2. Zusammensetzung zweier Transformationen.

Wir nehmen nun zwei Substitutionen der im Vorhergenhenden betrachteten Art nach einander ausgeführt an, indem wir setzen

$$u_h = \sum_{1,p}^{i} Q_i^{(h)} v_i; \qquad v_h = \sum_{1,p}^{i} P_i^{(h)} w_i; \qquad u_h = \sum_{1,p}^{i} R_i^{(k)} w_i \tag{10}$$

$$R_\mu^{(\nu)} = \sum_{1,p}^{i} Q_i^{(\nu)} P_\mu^{(i)}. \tag{11}$$

Es ist als dann

$$\left.\begin{array}{ll} Q_\mu^{(\nu)} \pi i = \alpha_\mu^{(\nu)} \pi i + \sum\limits_{1,p}^{i} \alpha_\mu^{(p+i)} a_{i,\nu}; & \sum\limits_{1,p}^{i} Q_i^{(\nu)} b_{i\,\mu} = \alpha_{p+\mu}^{(\nu)} \pi i + \sum\limits^{i} \alpha_{p+\mu}^{(p+i)} a_{i,\nu} \\ P_\mu^{(\nu)} \pi i = \beta_\mu^{(\nu)} \pi i + \sum\limits_{1,p}^{i} \beta_\mu^{(p+i)} b_{i,\nu}; & \sum\limits_{1,p}^{i} P_i^{(\nu)} c_{i.\mu} = \beta_{p+\mu}^{(\nu)} \pi i + \sum\limits^{i} \beta_{p+\mu}^{(p+i)} b_{i.\nu} \\ R_\mu^{(\nu)} \pi i = \gamma_\mu^{(\nu)} \pi i + \sum\limits_{1,p}^{i} \gamma_\mu^{(p+i)} a_{i,\nu}; & \sum\limits_{1,p}^{i} R_i^{(\nu)} c_{i\,\mu} = \gamma_{p+\mu}^{(\nu)} \pi i + \sum\limits^{i} \gamma_{p+\mu}^{(p+i)} a_{i\,\nu} \end{array}\right\} \tag{12}$$

worin die Zahlen $\gamma_\mu^{(\nu)}$ aus den Zahlen $\alpha_\mu^{(\nu)}$, $\beta_\mu^{(\nu)}$ nach dem Gesetze gebildet sind:

$$\gamma_\mu^{(\nu)} = \sum_{1,2p}^{i} \alpha_i^{(\nu)} \beta_\mu^{(i)} \qquad\qquad \nu, \mu = 1, 2, \ldots 2p$$

Bezeichnet man daher die Transformationen in der Weise:

$$(P) = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)}, & \alpha_2^{(1)}, \ldots, & \alpha_{2p}^{(1)} \\ \alpha_1^{(1)}, & \alpha_2^{(2)}, \ldots, & \alpha_{2p}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_1^{(2p)}, & \alpha_2^{(2p)}, \ldots, & \alpha_{2p}^{(2p)} \end{pmatrix}, \qquad (Q) = \begin{pmatrix} \beta_1^{(1)}, & \beta_2^{(1)}, \ldots, & \beta_{2p}^{(1)} \\ \beta_1^{(2)}, & \beta_2^{(2)}, \ldots, & \beta_{2p}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_1^{(2p)}, & \beta_2^{(2p)}, \ldots, & \beta_{2p}^{(2p)} \end{pmatrix},$$

$$(R) = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)}, & \gamma_2^{(1)}, \ldots, & \gamma_{2p}^{(1)} \\ \gamma_1^{(2)}, & \gamma_2^{(2)}, \ldots, & \gamma_{2p}^{(2)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_1^{(2p)}, & \gamma_2^{(2p)}, \ldots, & \gamma_{2p}^{(2p)} \end{pmatrix}$$

und bezeichnet ferner die aus zwei anderen zusammengesetzte Transformation als deren Product

$$(R)=(P)(Q)$$

(wobei die Reihenfolge der Factoren nicht gleichgültig ist) so lässt sich das der zusammengesetzten Transformation entsprechende Zahlensystem $\gamma_{\mu}^{(\nu)}$ nach der Multiplicationsregel der Determinanten bilden, indem man im ersten Factor nach Horizontalreihen, im zweiten nach Vertikalreihen summirt. Genügen die Zahlen α, β den Bedingungen

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{1,p}^{i}(\alpha_{p+i}^{(\mu)}\alpha_i^{(\nu)}-\alpha_{p+i}^{(\nu)}\alpha_i^{(\mu)})=\pm n,\ 0 \\ \sum\limits_{1,p}^{i}(\beta_{p+i}^{(\mu)}\beta_i^{(\nu)}-\beta_{p+i}^{(\nu)}\beta_i^{(\mu)})=\pm m,\ 0 \end{array}\right\}\ \text{je nachdem } \mu-\nu=\pm p \text{ ist oder einen andern Werth hat}$$

so ergeben sich daraus leicht die in gleichem Sinne geltenden Relationen

$$\sum_{1,p}^{i}(\gamma_{p+i}^{(\mu)}\gamma_i^{(\nu)}-\gamma_{p+i}^{(\nu)}\gamma_i^{(\mu)})=\pm mn,\ 0.$$

Der Grad einer zusammengesetzten Transformation ist also gleich dem Product der Transformationsgrade der Componenten, und durch Zusammensetzung mit einer linearen Transformation (die wir durch die ersten Buchstaben der Alphabets (A), (B),... bezeichnen wollen) wird der Grad einer gegebenen Transformation nicht geändert.

Zu jeder beliebigen Transformation (P) vom Grade n giebt es eine andere Q vom gleichen Grade, welche der Bedingung genügt:

$$(P)(Q)=(N)=\begin{pmatrix} n & 0 & 0\ldots & 0 \\ 0 & n & 0\ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ 0 & & 0\ldots & n \end{pmatrix}.$$

Die Transformation (Q), welche man (wie Jacobi *in den elliptischen Functionen,* Fund.[a] nova, p. 61) die zu (P) supplementäre Transformation nennen kann, ergänzt (P) zur Multiplication; denn die Transformation (N) liefert die Substitutionsgleichungen

$$u_i=nv_i \qquad a_{i,k}=b_{i,k}.$$

Die Existenz einer supplementären Substitution ergiebt sich sofort aus der folgenden Bildungsweise derselben:

$$(P)=\begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)},\dots & \alpha_p^{(1)}, & \alpha_{p+1}^{(1)},\dots & \alpha_{2p}^{(1)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha_1^{(p)},\dots & \alpha_p^{(p)}, & \alpha_{p+1}^{(p)},\dots & \alpha_{2p}^{(p)} \\ \alpha_1^{(p+1)},\dots & \alpha_p^{(p+1)}, & \alpha_{p+1}^{(p+1)},\dots & \alpha_{2p}^{(p+1)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha_1^{(2p)},\dots & \alpha_p^{(2p)}, & \alpha_{p+1}^{(2p)},\dots & \alpha_{2p}^{(2p)} \end{pmatrix}, \quad (Q)=\begin{pmatrix} \alpha_{p+1}^{(p+1)},\dots & \alpha_{p+1}^{(2p)}, & -\alpha_{p+1}^{(1)},\dots & -\alpha_{p+1}^{(p)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \alpha_{2p}^{(p+1)},\dots & \alpha_{2p}^{(2p)}, & -\alpha_{2p}^{(1)},\dots & -\alpha_{2p}^{(p)} \\ -\alpha_1^{(p+1)},\dots & -\alpha_1^{(2p)}, & \alpha_1^{(1)},\dots & \alpha_1^{(p)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ -\alpha_p^{(p+1)},\dots & -\alpha_p^{(2p)}, & \alpha_p^{(1)},\dots & \alpha_p^{(p)} \end{pmatrix}.$$

Um zu beweisen, dass es nur eine zu einer gegebenen supplementäre Transformation giebt, kann man so verfahren. Die beiden oben bestimmten Transformationen erfüllen die Bedingungen

$$(P)(Q)=(N), \qquad (Q)(P)=(N), \text{ also } (N)(Q)=(Q)(N).$$

Genügt also eine zweite Substitution (Q_1) der Bedingung

$$(P)(Q_1)=(N)$$

so folgt daraus

$$(Q)(P)(Q_1)=(Q)(N)$$

mithin

$$(N)(Q_1)=(N)(Q)$$

was, wie sich leicht ergiebt

$$(Q)=(Q_1)$$

zur Folge hat.

Die zu einer linearen Transformation (A) supplementäre ergänzt dieselbe durch Zusammensetzung zu der identischen Transformation, und kann, insofern man die identischen Transformation als Einheit betrachtet die zu (A) reciproke Transformation genannt und mit $(A)^{-1}$ bezeichnet werden.

Zwei Transformationen n^{ten} Grades (P), (Q) heissen aequivalent, wenn die eine aus der andern entseht, indem man auf dieselbe eine Transformation ersten Grades (B) anwendet:

$$(P)=(Q)(B); \qquad (Q)=(P)(B)^{-1}.$$

Alle aequivalenten Transformationen bilden eine Classe, und da die Anzahl der linearen Transformationen unendlich ist, so ist auch die Anzahl der Transformationen einer Classe unendlich. Von welchem Repräsentanten einer Classe man ausgeht, ist gleichgültig; denn ist

$$(P)=(Q)(B) \qquad (P')=(Q)(B')$$

so folgt:

$$(P') = (P)(B)^{-1}(B').$$

Um einen möglichst einfachen Repräsentanten einer jeden Classe zu erhalten, der zugleich die Anzahl der Classen eines bestimmten Transformationsgrades zu beurtheilen erlaubt, kann man sich des Verfahrens bedienen, welches Kronecker angegeben hat (*), und welches von Clebsch und Gordan in dem Werke über Abel'sche Functionen auf die lineare Transformation angewandt ist.

Es sei

$$(B) = \begin{pmatrix} \beta_1^{(1)}, & \beta_2^{(1)}, \ldots & \beta_{2p}^{(1)} \\ \beta_1^{(2)}, & \beta_2^{(2)}, \ldots & \beta_{2p}^{(2)} \\ \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ \beta_1^{(2p)}, & \beta_2^{(2p)}, \ldots & \beta_{2p}^{(2p)} \end{pmatrix}$$

die lineare Transformation, mit welcher (Q) zusammengesetzt werden soll, und wir machen über diese die folgenden speciellen Annahmen:

$$\left.\begin{array}{l} \beta_h^{(h)} = 1, \qquad \beta_h^{(k)} = 0 \qquad (h \text{ und } k \text{ verschieden}) \\ \text{ausgenommen für ein bestimmtes } h_1 \\ \beta_{h_1}^{(h_1)} = 0, \qquad \beta_{p+h_1}^{(p+h_1)} = 0, \qquad \beta_{h_1}^{(p+h_1)} = \pm 1 \qquad \beta_{(p+h_1)}^{(h_1)} = \mp 1. \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\text{ausgenommen} \qquad \left.\begin{array}{l} \beta_h^{(h)} = 1, \qquad \beta_h^{(k)} = 0 \\ \beta_{h_1}^{(p+h_1)} = \pm 1 \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$\text{ausgenommen} \qquad \left.\begin{array}{l} \beta_h^{(h)} = 1, \qquad \beta_h^{(k)} = 0 \\ \beta_{p+h_1}^{(h_1)} = \pm 1 \end{array}\right\} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta_h^{(h)} = 1, \qquad \beta_h^{(k)} = 0 \\ \text{ausgenommen, für ein bestimmtes } h_1 \text{ und } h_2 \\ \beta_{h_1}^{(h_2)} = \pm 1, \qquad \beta_{p+h_2}^{(p+h_1)} = \mp 1 \end{array}\right\} \quad (4)$$

$$\text{ausgenommen} \qquad \left.\begin{array}{l} \beta_h^{(h)} = 1, \qquad \beta_h^{(k)} = 0 \\ \beta_{p+h_1}^{(h_2)} = \pm 1, \qquad \beta_{p+h_2}^{(h_1)} = \pm 1 \end{array}\right\} \quad (5)$$

(*) Kronecker: *Ueber bilineare Formen.* Monatsberichte der Berliner Akademie vom 15ten Oct. 1866, u. Borchardts Journal, Bd. 68.

$$\text{ausgenommen} \quad \left.\begin{array}{ll} \beta_h^{(h)} = 1, & \beta_h^{(k)} = 0 \\ \beta_{h_1}^{(h_1)} = -1, & \beta_{(p+h_1)}^{(p+h_1)} = -1. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Alle diese speciellen Annahmen führen zu linearen Transformationen, und es ergiebt sich daraus, dass man in einer Transformation (Q) vom n^{ten} Grad, ohne die Classe zu ändern, die folgenden Operationen vornehmen kann:

1) Die h_1^{te} Vertikalreihe mit der $p+h_1^{ten}$ vertauschen und zugleich in einer derselben das Vorzeichen ändern;

2) Zur h_1^{ten} Vertikalreihe die $(p+h_1)^{te}$ addiren oder sie von derselben abziehen;

3) Zur $(p+h_1)^{ten}$ Vertikalreihe die h_1^{te} addiren oder sie von derselben abziehen;

4) Zur h_1^{ten} Vertikalreihe die h_2^{te} addiren oder sie von derselben subtrahiren und zugleich von der $(p+h_2)^{ten}$ Vertikalreihe die $(p+h_1)^{te}$ subtrahiren oder sie zu derselben addiren;

5) Gleichzeitig zur $(p+h_1)^{ten}$ und $(p+h_2)^{ten}$ Vertikalreihe die h_2^{te} und die h_1^{te} Vertikalreihe addiren oder diese von jener subtrahiren;

6) Gleichzeitig die Vorzeichen der h_1^{ten} und der $(p+h_1)^{ten}$ Vertikalreihe ändern.

Ist nun

$$(Q) = \left|\begin{array}{llll} \alpha_1^{(1)}, \ldots & \alpha_p^{(1)}, & \alpha_{p+1}^{(1)}, \ldots & \alpha_{2p}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{(p)}, \ldots & \alpha_p^{(p)}, & \alpha_{p+1}^{(p)}, \ldots & \alpha_{2p}^{(p)} \\ \alpha_1^{(p+1)}, \ldots & \alpha_p^{(p+1)}, & \alpha_{p+1}^{(p+1)}, \ldots & \alpha_p^{(p+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{(2p)}, \ldots & \alpha_p^{(2p)}, & \alpha_{p+1}^{(2p)}, \ldots & \alpha_{2p}^{(2p)} \end{array}\right|$$

irgend eine Transformation n^{ten} Grades, so lassen sich in derselben zunächst durch Anwendung der Operationen (1), (2), (3) die Elemente $\alpha_1^{(2p)}, \ldots \alpha_p^{(2p)}$ zerstören, ferner lassen sich durch Anwendung der Operation (4) auch noch $\alpha_{p+1}^{(2p)}, \ldots \alpha_{2p-1}^{(2p)}$ zum Verschwinden bringen, worauf das in der letzten Horizontalreihe allein übrig bleibende letzte Element als ein Divisor des Transformationsgrades n nicht verschwinden kann. Hierauf kann durch dasselbe Verfahren, indem man die p^{te} und $2p^{te}$ Vertikalreihe ganz ausser Spiel lässt, die vorletzte

Horizontalreihe in die Form gebracht werden

$$0, \quad 0, \ldots \quad \alpha_p^{(2p-1)}, \quad 0, \quad 0, \ldots \quad \alpha_{2p-1}^{(2p-1)},$$

was, wegen der Relation (7) zur Folge hat, dass $\alpha_p^{(2p-1)}$ verschwinden muss. Auf diese Weise kann man fortfahren, bis in den p letzten Horizontalreihen alle Elemente links von der Diagonalreihe gleich Null geworden sind, wonach, in Folge der Relationen (7) die Transformation folgenden Ausdruck erhält:

$$(N) = \left(\begin{array}{llllll}
\alpha_1^{(1)}, & 0, \ldots & 0, & \alpha_{p+1}^{(1)}, & \alpha_{p+2}^{(1)}, \ldots & \alpha_{2p}^{(1)} \\
\alpha_1^{(2)}, & \alpha_2^{(2)}, \ldots & 0, & \alpha_{p+1}^{(2)}, & \alpha_{p+2}^{(2)}, \ldots & \alpha_{2p}^{(2)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\alpha_1^{(p)}, & \alpha_2^{(p)}, \ldots & \alpha_p^{(p)}, & \alpha_{p+1}^{(p)}, & \alpha_{p+2}^{(p)}, \ldots & \alpha_{2p}^{(p)} \\
0, & 0, \ldots & 0, & \alpha_{p+1}^{(p+1)}, & \alpha_{p+2}^{(p+1)}, \ldots & \alpha_{2p}^{(p+1)} \\
0, & 0, \ldots & 0, & 0, & \alpha_{p+2}^{(p+2)}, \ldots & \alpha_{2p}^{(p+2)} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0, & 0, \ldots & 0, & 0, & 0, \ldots & \alpha_{2p}^{(2p)}
\end{array}\right).$$

Es ist alsdann

$$\alpha_1^{(1)} \alpha_{p+1}^{(p+1)} = \alpha_2^{(2)} \alpha_{p+2}^{(p+2)} = \cdots = \alpha_p^{(p)} \alpha_{2p}^{(2p)} = n$$

und da durch alle die Operationen, durch welche diese Reduction erreicht ist, die Determinante der Transformation ungeändert bleibt, so folgt, dass für jede Transformation n^{ten} Grades die Determinante den Werth n^p hat.

Durch die Operation (6) kann man noch erreichen, dass die in der Diagonale stehenden Elemente alle positiv sind, und endlich lassen sich durch die Operationen (3), (4), (5)

$\alpha_{2p}^{(2p-1)}$	auf seinen kleinsten Rest (mod $\alpha_{2p-1}^{(2p-1)}$)
$\alpha_{2p}^{2p-2}, \ \alpha_{2p-1}^{(2p-2)}$	auf die kleinsten Reste (mod $\alpha_{2p-2}^{(2p-2)}$)
. . . .	. . . .
$\alpha_{2p}^{(p+1)}, \ \alpha_{2p-1}^{(p+1)}, \ldots \ \alpha_{p+2}^{(p+1)}$	auf die kleinsten Reste (mod α_{p+1}^{p+1})
$\alpha_{2p}^{(p)}$	auf den kleinsten Rest (mod $\alpha_p^{(p)}$)
$\alpha_{2p}^{(p-1)}, \ \alpha_{2p-1}^{(p-1)}$	auf die kleinsten Reste (mod $\alpha_{p-1}^{(p-1)}$)
. . . .	. . . .
$\alpha_{2p}^{(2)}, \ \alpha_{2p-1}^{(1)}, \ldots \ \alpha_{p+1}^{(1)}$	auf die kleinste Reste (mod $\alpha_1^{(1)}$)

reduciren (oder auch in ein beliebig vorgeschriebenes Restsystem nach den betreffenden Moduln hineinbringen). Diejenigen, ausserhalb der Diagonalreihe stehenden Elemente, über deren Grösse hiernach nichts festgesetzt ist, nämlich $\alpha_i^{(k)}$, $\alpha_{p+i}^{(k)}$ $(i<k)$ sind durch die übrigen völlig bestimmt, nach den Relationen (7), (8).

Die hierdurch charakterisirte Form der Transformation (N) wollen wir die Normalform nennen. Es ergiebt sich leicht, dass in jeder Classe nur eine Transformation vorkommt, welche die Normalform besitzt; denn bedeutet (B) eine lineare Transformation, und sucht man die Bedingung auf, dass die zusammengesetzte Transformation

$$(N)(B)$$

wieder die Normalform habe, son findet man, dass (B) die identische Transformation (1) sein muss.

Wenn man eine Transformation (Q) vom Grade n mit zwei Transformationen ersten Grades (A), (B) in der Weise verbindet, dass sowohl vor als nach der Transformation (Q) eine der linearen Transformationen vorgenommen wird, also

$$(P)=(A)(Q)(B)$$

setzt, so lässt sich (P) auf noch einfachere Formen zurückführen. Bei dieser Betrachtung wird vorausgesetzt, dass der Transformationsgrad n von (Q) keinen quadratischen Theiler habe. Unter dieser Voraussetzung lassen sich die beiden Transformationen ersten Grades (A), (B) so bestimmen, dass in (P) nur noch die in der Diagonale shehenden Elemente von Null verschieden sind. Wir beschränken uns, der einfachern Schreibweise halber auf den Fall $p=3$, der uns später ausschliesslich beschäftigen wird, obwohl die zunächst folgenden Betrachtungen unverändert auf den allgemeinen Fall übertragen werden können.

Wir nehmen an, es sei (Q) bereits in die Normalform gebracht:

$$(Q)=\begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)}, & 0, & 0, & \alpha_4^{(1)}, & \alpha_5^{(1)}, & \alpha_6^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)}, & \alpha_2^{(2)}, & 0, & \alpha_4^{(2)}, & \alpha_5^{(2)}, & \alpha_6^{(2)} \\ \alpha_1^{(3)}, & \alpha_2^{(3)}, & \alpha_3^{(3)}, & \alpha_4^{(3)}, & \alpha_5^{(3)}, & \alpha_6^{(3)} \\ 0, & 0, & 0, & \alpha_4^{(4)}, & \alpha_5^{(4)}, & \alpha_6^{(4)} \\ 0, & 0, & 0, & 0, & \alpha_5^{(5)}, & \alpha_6^{(5)} \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \alpha_6^{(6)} \end{pmatrix}$$

da

$$\alpha_1^{(1)}\alpha_4^{(4)}=\alpha_2^{(2)}\alpha_5^{(5)}=\alpha_3^{(3)}\alpha_6^{(6)}=n$$

ist, und n keinen quadratischen Theiler hat, so ist $\alpha_1^{(1)}$ relativ prim zu $\alpha_4^{(4)}$, ebenso $\alpha_2^{(2)}$ zu $\alpha_5^{(5)}$, $\alpha_3^{(3)}$ zu $\alpha_6^{(6)}$. Haben nun $\alpha_1^{(1)}$, $\alpha_2^{(2)}$ einen gemeinsamen Factor, so kann derselbe nicht in $\alpha_5^{(5)}$ enthalten sein, und muss daher, wie aus der Relation

$$\alpha_1^{(1)}\alpha_5^{(4)} + \alpha_1^{(2)}\alpha_5^{(5)} = 0$$

folgt, in $\alpha_1^{(2)}$ aufgehen. Daher lassen sich die ganzen Zahlen h, k so bestimmen, dass

$$\alpha_1^{(2)} + h\alpha_1^{(1)} + k\alpha_2^{(2)} = 0$$

ist, und wenn man demnach (Q) in folgenden Weise zusammensetzt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (Q) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

so wird $\alpha_1^{(2)}$ zum Verschwinden gebracht, was zur Folge hat, dass auch $\alpha_5^{(4)}$ werschwindet. Auf dieselbe Weise kann man $\alpha_1^{(3)}$, $\alpha_6^{(4)}$; $\alpha_2^{(3)}$, $\alpha_6^{(5)}$ zum Verschwinden bringen.

Bestimmen wir ferner, was gleichfalls nach unseren Voraussetzungen stets möglich ist, die ganzen Zahlen h, k so dass

$$\alpha_4^{(1)} + k\alpha_1^{(1)} + h\alpha_4^{(4)} = 0$$

wird, so wird durch die Zusammensetzung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (Q) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha_4^{(1)}$, und auf demselben Wege $\alpha_5^{(2)}$, $\alpha_6^{(3)}$, zum Verschwinden gebracht.

Bestimmt man endlich zwei Zahlen h, k durch die Bedingung:

$$\alpha_5^{(1)} + h\alpha_5^{(5)} + k\alpha_1^{(1)} = 0$$

so wird durch die Zusammensetzung

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} (Q) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wobei für (Q) die durch die früheren Zusammensetzungen bereits reducirte Form anzuwenden ist, $\alpha_5^{1)}$, und folglich wegen der Relation

$$\alpha_4^4 \alpha_5^{(1)} - \alpha_5^{5)} \alpha_4^2 = 0$$

$\alpha_4^{(2)}$ zum Verschwinden gebracht und durch zwei analoge Zusammensetzungen können die noch übrigen ausserhalb der Diagonale stehenden Elemente fortgeschafft werden.

Wenn also der Transformationsgrad eine Zahl ohne quadratischen Theiler ist, so kann die Transformation durch Zusammensetzung mit linearen Transformationen in die Form gebracht werden

$$\begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix}$$

worin

$$n_1 m_1 = n_2 m_2 = n_3 m_3 = n$$

und hieraus folgt weiter wegen

$$\begin{pmatrix} n_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1\nu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n_2\nu_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3\nu_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_1\mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_2\mu_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & m_3\mu_3 \end{pmatrix}$$

dass jede Transformation, deren Grad eine Zahl ohne quadratischen Theiler ist, sich aus solchen Transformationen zusammensetzen lässt, deren Grad eine Primzahl ist.

Setzen wir jetzt den Transformationsgrad n als Primzahl voraus, so ergeben sich folgende Repräsentanten der nicht äquivalenten Transformationsclassen, welche in 8 Typen zerfallen

$$\mathrm{I}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&n&0&0\\0&0&0&0&n&0\\0&0&0&0&0&n\end{pmatrix}\quad \mathrm{II}\begin{pmatrix}n&0&0&\alpha&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&n&0\\0&0&0&0&0&n\end{pmatrix}\quad \mathrm{III}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\\alpha&n&0&0&\alpha_1&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&n&-\alpha&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&n\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{IV}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\\alpha&\alpha'_3&n&0&0&\alpha_1\\0&0&0&n&0&-\alpha\\0&0&0&0&n&-\alpha'_3\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\quad \mathrm{V}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\\alpha&n&0&0&\alpha_1&\alpha_2\\\alpha'_2&0&n&0&\alpha_2&\alpha_3\\0&0&0&n&-\alpha&-\alpha'_2\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}\quad \mathrm{VI}\begin{pmatrix}n&0&0&\alpha_1&0&\alpha_2\\0&1&0&0&0&0\\0&\alpha&n&\alpha_2&0&\alpha_3\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&n&-\alpha\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{VII}\begin{pmatrix}n&0&0&\alpha_1&\alpha_2&0\\0&n&0&\alpha_2&\alpha_3&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&n\end{pmatrix}\quad \mathrm{VIII}\begin{pmatrix}n&0&0&\alpha_1&\alpha_6&\alpha_5\\0&n&0&\alpha_6&\alpha_2&\alpha_4\\0&0&n&\alpha_5&\alpha_4&\alpha_3\\0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{pmatrix}$$

worin die α beliebige Zahlen eines bestimmten Restsystems (Modulo n) sein können. Die Gesammtzahl der Classen nicht äquivalenter Transformationen ist sonach für einen Primzahlgrad:

$$1+n+n^2+2n^3+n^4+n^5+n^6.$$

Durch Zusammensetzung mit Transformationen ersten Grades lassen sich, wie oben gezeigt alle diese Transformationen aus den acht Hauptfällen ableiten, in denen die sämmtlichen α gleich Null sind. Diese Zusammensetzung gestaltet sich aber hier, wo n eine Primzahl ist, noch einfacher als im allgemeineren Fall, indem man hier alle Fälle aus den betreffenden Hauptfällen (N) durch eine Zusammensetzung (B) (N) erhält, wo (B) diejenige Transformation ersten Grades bedeutet, die sich aus der zu bildenden Transformation ergiebt, wenn man die in der Diagonale stehenden Elemente alle durch 1 ersetzt.

Aber auch die 8 Hauptfälle lassen sich durch Zusammensetzung mit linearen

Transformationen aus einem einzigen herleiten, wie der Anblick des folgenden Formeln zeigt:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und zwei analoge Fälle

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und zwei analoge Fälle.

§ 3. **Die complexe Multiplication.**

Kronecker hat in des schon erwähnten Abhandlung gezeigt, dass es singuläre Werthe der Moduln $a_{i,k}$ giebt, für welche die $b_{i,k}$ den entsprechenden $a_{i,k}$ gleich werden, und man findet dort einen Weg angegeben, diese singulären Moduln durch die Wurzeln einer reciproken Gleichung $2p^{ten}$ Grades mit ganzzahligen Coefficienten zu bestimmen. Auf dem hier eingeschlagenen Wege gelangen wir zu diesen Resultaten wie folgt.

Setzen wir zur Vereinfachung

$$b_{i\,k} = a_{i,k} = \pi i \omega_{i\,k}; \qquad \omega_{i,k} = \omega_{k,i}$$

so ergeben sich für diesen besonderen Fall aus (2) (3) (§ 1) die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} Q_\mu^{(\nu)} &= \alpha_\mu^{(\nu)} + \sum_{1,p}^{i} \alpha_\mu^{(p+i)} \omega_{i,\nu} \\ \sum_{1,p}^{i} Q_i^{(\nu)} \omega_{i,\mu} &= \alpha_{p+\mu}^{(\nu)} + \sum_{1,p}^{i} \alpha_{p+\mu}^{(p+i)} \omega_{i,\nu}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Wir bestimmen nun ein Grössensystem ξ, λ aus den Bedingungen

$$\sum_{1,-p}^{i} \alpha_i^{(\nu)} \xi_i = \lambda \xi_\nu \qquad \nu = 1, 2, \ldots, 2p \tag{2}$$

woraus man für λ die Gleichung vom Grade $2p$ erhält:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} - \lambda, & \alpha_2^{(1)}, \ldots & \alpha_{2p}^{(1)} \\ \alpha_1^{(2)}, & \alpha_2^{(2)} - \lambda, \ldots & \alpha_{2p}^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_1^{(2p)}, & \alpha_2^{(2p)}, \ldots & \alpha_{2p}^{2p} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

deren Wurzeln, wie man leicht erkennt, wenn man dieselbe mit der nicht verschwindenden Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{p+1}^{(p+1)}, \ldots & \alpha_{2p}^{(p+1)}, & -\alpha_1^{(p+1)}, \ldots & -\alpha_p^{(p+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{p+1}^{(2p)}, \ldots & \alpha_{2p}^{(2p)}, & -\alpha_1^{(2p)}, \ldots & -\alpha_p^{(2p)} \\ -\alpha_{p+1}^{(1)}, \ldots & -\alpha_{2p}^{(1)}, & \alpha_1^{(1)}, \ldots & \alpha_p^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -\alpha_{p+1}^{(p)}, \ldots & -\alpha_{2p}^{(p)}, & \alpha_1^{(p)}, \ldots & \alpha_p^{p} \end{vmatrix}$$

multiplicirt und die Relationen (7) berücksichtigt, in Paare λ, λ' zerfallen, di der Bedingung $\lambda\lambda' = n$ genügen. $\left(\text{Man erhält also eine reciproke Gleichung für } \frac{\lambda}{\sqrt{n}}.\right)$ Ieder Wurzel der Gleichung (3) entspricht ein den Gleichungen (2) genügendes Grössensystem ξ und demnach erhalten wir $2p$ solcher Grössensysteme ξ, λ.

Multiplicirt man nun die Gleichungen (1) mit ξ_μ, $\xi_{p+\mu}$ und summirt in

Bezug auf μ, so folgt, wenn man zur Abkeirzung

$$\Omega_\nu = \sum_{1,p}^{i} \omega_{\nu,i}\xi_{p+i} + \xi_\nu \tag{4}$$

setzt, mit Rücksicht auf (2)

$$\sum_{1,p}^{i} Q_i^{(\nu)}\Omega_i = \lambda\Omega_\nu \qquad \nu = 1, 2, \ldots p. \tag{5}$$

Da nun die Gleichung

$$\begin{vmatrix} Q_1^{(1)}-\lambda, & Q_1^{(2)},\ldots & Q_1^p \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Q_p^{(1)}, & Q_p^{(2)},\ldots & Q_p^{(p)}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

nicht mehr als p Wurzeln haben kann, so folgt unter der Voraussetzung, die von nun an gemacht werden soll, dass die Gleichung (3) keine gleichen Wurzeln hat, dass für die Hälfte der $2p$ Werthsysteme λ, ξ die Gleichungen

$$\Omega_\nu = 0 \tag{7}$$

erfüllt sein müssen, aus denen man durch Auflösung linearer Gleichungen die gesuchten $\omega_{\nu,\mu}$ erhält. Für die andere Hälfte ergiebt das Gleichungssystem (5) wieder durch Auflösung linearer Gleichungen, die Werthe der Substitutions coefficienten $Q_\mu^{(\nu)}$.

Was die Zertheilung der $2p$ Werthsysteme ξ, λ in die beiden Hälften betrifft, von denen die eine in (7) einzusetzen ist, so sind dafür folgende Gesichtspunkte massgebend. Es muss diese Zertheilung so geschehen, das erstens die Determinanten der Gleichungen (7) (5) nicht verschwinden, sodann so, dass die aus (7) bestimmten Grössen $\omega_{i\,k}$ den Bedingungen $\omega_{i.k} = \omega_{k\,i}$ genügen, und endlich kommt noch die Convergenzbedingung der mit den Moduln $\pi i\omega_{i\,k}$ gebildeten Theta-Function in Betracht, welche verlangt, dass der imaginäre Theil der Function $\sum^{i,k}\omega_{i,k}x_i x_k$ eine positive Function sei. Es wird sich zeigen, dass diesen Bedingungen, wenn überhaupt, so nur durch eine ganz bestimmte Auswahl der in (7) einzusetzenden Werthsysteme ξ, λ genügt werden kann. Wir bezeichnen die Wurzeln der Gleichung (3) mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{2p}$ und die entsprechenden Werthe des Grössensystems ξ_ν, welches aus den Gleichungen (2) bestimmt wird, mit $\xi_\nu^{(1)}, \xi_\nu^{(2)}, \ldots \xi_\nu^{(2p)}$. Ueber den noch unbestimmten gemeinschaftlichen Factor eines jeden Systems $\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}, \ldots \xi_{2p}^{(i)}$ denken wir uns irgend wie verfügt, jedoch so, dass etwaigen reellen Wurzeln λ reelle Werthe dieses Grössensystems und conjugirt imaginären Wurzeln conjugirt imaginäre Werthe desselben entsprechen. Es ergiebt sich dann zunächst leicht, dass die Determinante

$$\delta = \sum \pm \xi_1^{(1)} \xi_2^{(2)} \ldots \xi_{2p}^{(2p)}$$

nicht verschwinden kann, denn dieselbe ist, abgesehen von einem nicht verschwindenden Factor, gleich der Quadratwurzel aus der Discriminante der Gleichung (3) von der wir vorausgesetzt haben, dass sie von Null verschieden sei (*). Es folgt nun weiter aus den Gleichungen (2) in Verbindung mit den Relationen, denen das Zahlensystem $\alpha_\mu^{(\nu)}$ unterworfen ist:

$$\sum_{1,p}^{i} (\xi_i^{(h)} \xi_{p+i}^{(k)} - \xi_i^{(k)} \xi_{p+i}^{(h)}) = 0, \tag{8}$$

vorausgesetzt dass die beiden Wurzeln λ_h, λ_k nicht ein Paar bilden, dessen Product $= n$ ist. Ist aber $\lambda_h \lambda_k = n$, so kann die Gleichung (8) **nicht** bestehen, da sonst die Determinante δ verschwinden müsste. Aus (4) und (7) aber ergiebt sich als Folge der Bedingungen $\omega_{i,k} = \omega_{k,i}$, dass für die in (7) vorkommenden Wurzeln λ der Gleichung (3) die Bedingungen (8) erfüllt sein müssen, so dass in den Gleichungen (7) nicht die beiden Wurzeln eines Paare vorkommen können, deren Product $= n$ ist. Bei der Auswahl derjenigen p Wurzeln also, von denen die Gleichungen (7) abhängen, hat man aus jedem dieser Paare

---

(*) Es folgt nämlich aus den Gleichungen (2)

$$\sum_{1,2p}^{i} \xi_i \alpha_i^{(\nu)} = \xi_\nu \lambda, \qquad \sum^{i} \xi_i \sum^{i'} \alpha_i^{(i')} \alpha_{i'}^{(\nu)} = \xi_\nu \lambda^2, \qquad \sum^{i} \xi_i \sum^{i'\,i''} \alpha_i^{(i')} \alpha_{i'}^{(i'')} \alpha_{i''}^{(\nu)} = \xi_\nu \lambda^3, \ldots$$

Bildet man, indem man die Indices $\nu_1, \nu_2, \ldots$ beliebig, jedoch so wählt, dass keine der Grössen $\xi_{\nu_1}^{(1)}, \xi_{\nu_2}^{(2)}, \ldots$ verschwindet, aus diesen, für die verschiedenen Werthe von λ aufgestellten Gleichungen die Determinante, so folgt, wenn

$$D = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_5) \cdots (\lambda_{2p-1} - \lambda_{2p})$$

gesetzt und beachtet wird dass $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_{2p} = n^p$ ist:

$$\delta \begin{vmatrix} \alpha_1^{\nu_1}, & \sum^{i} \alpha_1^{(i)} \alpha_i^{(\nu_1)}, \ldots \\ \alpha_2^{\nu_2}, & \sum^{i} \alpha_2^{(i)} \alpha_i^{(\nu_2)}, \ldots \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \end{vmatrix} = \xi_{\nu_1}^{(1)} \xi_{\nu_2}^{(2)} \ldots n^p D.$$

eine Wurzel zu nehmen. Aber auch diese Auswahl wird zu einer vollständig bestimmten durch die Convergenzbedingung der Theta-Functionen mit den Moduln $\pi i \omega_{i\,k}$.

Zunächst fordert diese Convergenzbedingung, dass die Gleichung (3) nur imaginäre Wurzeln hat, die sonach, da die Coefficienten reell sind, paarweise conjugirt sein müssen.

Denn gesetzt es gäbe eine reelle Wurzel der Gleichung (3), so existirt eine zweite, und eine von diesen muss in einem der Gleichungssysteme (7) vorkommen, in welchem dann auch die Grössen ξ reell sind. Das betreffende Gleichungssystem lautet dann:

$$\sum^{h} \omega_{h,\,k} \xi_{p+h} + \xi_k = 0$$

voraus

$$\sum^{h} \sum^{k} \omega_{h.\,k} \xi_{p+h} \xi_{p+k} = - \sum^{k} \xi_k \xi_{p+k}.$$

Es würde also für ein reelles, von Null verschiedenes Werthsystem der Variablen die Function

$$\sum^{h} \sum^{k} \omega_{h,\,k} x_h x_k$$

reelle Werthe annehmen, was den Convergenzbedingungen widerspricht, die einen wesentlich positiven imaginären Theil dieser Function verlangen.

Betrachten wir also eine imaginäre Wurzel λ, und setzen das zugehörige, gleichfalls imaginäre Grössensystem $\xi_\nu = \eta_\nu + i \zeta_\nu$, ferner $\omega_{i,\,k} = \omega'_{i,\,k} + i \omega''_{i\,k}$, worin η_ν, ζ_ν, $\omega'_{i,\,k}$, $\omega''_{i,\,k}$ reell vorausgesetzt sind, so ergiebt sich aus (7)

$$\sum^{h} \omega'_{h,\,k} \eta_{p+h} - \sum^{h} \omega''_{h,\,k} \zeta_{p+h} + \eta_k = 0$$

$$\sum^{h} \omega'_{h,\,k} \zeta_{p+h} + \sum^{h} \omega''_{h,\,k} \eta_{p+h} + \zeta_k = 0$$

woraus folgt:

$$\sum^{h} \sum^{k} \omega''_{h\,k} (\zeta_{p+h} \zeta_{p+k} + \eta_{p+h} \eta_{p+k}) = \sum^{k} (\eta_k \zeta_{p+k} - \zeta_k \eta_{p+k}). \tag{9}$$

Dasjenige Grössensystem ξ, welches zu der zu λ conjugirten Wurzel gehört, unterscheidet sich von dem hier benutzten nur durch die Vorzeichen der Grössen ζ. Die auf der rechten Seite von (9) stehende Summe kann daher nur für das eine dieser beiden Grössensysteme einen positiven Werth haben, wie ihn die Convergenzbedingungen verlangen. Es kann daher von zwei conjugirt imaginären Wurzeln der Gleichung (3) nur die eine, und zwar eine ganz bestimmte zur Bildung der Gleichungen (7) benutzt werden, und dadurch wird die Auswahl derjenigen p Wurzeln, von welchen jene Gleichungen abhängen zu einer bestimmt vorgeschriebenen.

Es existirt also für eine gegebene Transformation, für welche die Gleichung (3) lauter von einander verschiedene imaginäre Wurzeln hat, höchstens ein den Convergenzbedingungen genügendes Grössensystem $\omega_{i,k}$ welches dem entsprechenden transformirten Grössensystem gleich wird; aber es existirt, wie Beispiele lehren, nicht immer ein solches Grössensystem. Wenn die Gleichung (3) gleiche Wurzeln hat, dann können unendlich viele solcher Grössensysteme existiren.

§ 4. **Die Transformation des Theta-Functionen.**

Wir wenden nun die im Vorstehenden entwickelten allgemeinen Transformationsprincipien auf die Theta-functionen dreier Variablen an. Es ist:

$$\vartheta\begin{Bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{Bmatrix}(u_1, u_2, u_3) = \left(\sum_{-\infty}^{+\infty} n\right)^3 \cdot e^{\sum\limits_{1,3}^{i}\sum\limits_{1,3}^{k} a_{i,k}(n_i + \frac{1}{2}g_i)(n_k + \frac{1}{2}g_k) + 2\sum\limits_{1,3}^{k}(n_k + \frac{1}{2}g_k)(u_k + \frac{1}{2}h_k\pi i)} \tag{1}$$

worin der Zahlencomplex $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}$, welchen wir die Charakteristik der Theta-function nennen, irgend wie aus den Zahlen 0, 1 zusammengesetzt ist, so dass sich 64 Functionen dieser Art ergeben.

Macht man nun in einer solchen Theta-function die Substitution

$$u_h = \sum_{1,3}^{i} Q_i^{(h)} v_i \tag{2}$$

mit den Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} Q_\mu^{(\nu)}\pi i &= \alpha_\mu^{(\nu)}\pi i + \sum_{1,3}^{i}\alpha_\mu^{(3+i)} a_{i,\nu} \\ \sum_{1,3}^{i} Q_i^{(\nu)} b_{i,\mu} &= \alpha_{3+\mu}^{(\nu)}\pi i + \sum_{1,3}^{i}\alpha_{3+\mu}^{(3+i)} a_{i,\nu} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

so geht diese Function über in eine Function der Veränderlichen v_1, v_2, v_3, welche die Eingenschaft hat, dass ihr Logarithmus bei Vermehrung der Argumente um ein System zusammengehöriger Perioden um eine lineare Function der Variablen zunimmt. Eine solche Function kann durch Multiplication mit einem Factor, dessen Logarithmus eine Function zweiten Grades der Variablen ist, in eine Function verwandelt werden, welche für jede der Variablen die Periode πi besitzt, und diese wieder, nöthigen Falls indem man für die Variablen durch eine lineare Substitution mit ganzzahligen Coefficienten neue Variable einführt, in eine ϑ-Function. (Vgl. meine Schrift: *Ueber die* Abel'*schen Functionen vom Geschlecht* 3. Berlin 1876, Ste. 8, u. 9.)

Demnach betrachten wir jetzt eine Function von der Form

$$\Pi_{(\varpi)}(u_1,\ u_2,\ u_3) = e^{f(u_1,\ u_2,\ u_3)}\vartheta_{(\varpi)}(u_1,\ u_2,\ u_3;\ a) \tag{4}$$

in welcher wir die homogene Function zweiten Grades

$$f(u_1,\ u_2,\ u_3) = \sum^{i,k}\sum c_{i,k} u_i u_k \tag{5}$$

so bestimmen, dass dieselbe in eine ϑ-Function der Variablen v_1, v_2, v_3 übergeht, was nach den angeführten Betrachtungen stets möglich ist, wenn über die Zahlen $\alpha_\nu^{(\mu)}$ die geeigneten Voraussetzungen gemacht werden.

Wir bezeichnen vorläufig die Function von v_1, v_2, v_3 welche durch die Substitution (1) aus Π hervorgeht mit $\psi(v_1,\ v_2,\ v_3)$. Wenn nun v_ν um πi wächst, so wächst u_μ um

$$Q_\nu^{(\mu)}\pi i = \alpha_\nu^{(\mu)}\pi i + \sum^{i}\alpha_\nu^{(3+i)} a_{i.\mu}$$

und $\vartheta_{(\varpi)}(u_1,\ u_2,\ u_3)$ geht über in

$$(-1)^{\sum^{i}(g_i\alpha_\nu^{(i)} + h_i\alpha_\nu^{3+i})} e^{-2\sum^{i}\alpha_\nu^{(3+i)}u_i - \sum^{i}\sum^{k} a_{i,k}\alpha_\nu^{(3+i)}\alpha_\nu^{(3+k)}} \vartheta_{(\varpi)}(u_1,\ u_2,\ u_3)$$

$$f(u_1,\ u_2,\ u_3) \text{ in } f(u_1,\ u_2,\ u_3) + \pi i\sum^{h} Q_\nu^{(h)} f'(u_h) - \pi^2 f(Q_\nu^{(1)},\ Q_\nu^{(2)},\ Q_\nu^{3}).$$

Um daher unseren Zweck zu erseichen, müssen wir setzen

$$\alpha_\nu^{(3+i)} = \pi i\sum^{k} c_{i,k} Q_\nu^{(k)} \tag{6}$$

woraus die Constanten $c_{i,k}$ zu bestimmen sind, und dafür, dass $c_{i,k} = c_{k,i}$ werde, ergeben sich als nothwendige und hinreichende Bedingungen

$$\sum_{1,3}^{i}(\alpha_\nu^{(3+i)}\alpha_\mu^{(i)} - \alpha_\mu^{(3+i)}\alpha_\nu^{(i)}) = 0 \qquad \nu,\ \mu = 1,\ 2,\ 3 \tag{7}$$

weiter folgt aus (6):

$$-\pi^2 f(Q_\nu^{(1)},\ Q_\nu^{(2)},\ Q_\nu^{(3)}) = \pi i\sum^{i}\alpha_\nu^{i}\alpha_\nu^{(i+3)} + \sum^{i}\sum^{k} a_{i,k}\alpha_\nu^{(3+i)}\alpha_\nu^{(3+k)}$$

und demnach genügt $\psi(v_1, v_2, v_3)$ den Bedingungen:

$$\psi(\cdots v_\nu + \pi i \cdots) = (-1)^{g'_\nu} \psi(v_1, v_2, v_3) \tag{8}$$

$$g'_\nu \equiv \sum^{i} (g_i \alpha_\nu^{(i)} + h_i \alpha_\nu^{(3+i)} + \alpha_\nu^{(i)} \alpha_\nu^{(5+i)}) \qquad \text{(mod. 2)} \tag{9}$$

Wachsen nun ferner die Variablen v_1, v_2, v_3 gleichzeitig beziehungsweise um $b_{1,\nu}, b_{2\,\nu}, b_{3,\nu}$, so wächst u_μ um

$$q_\nu^{(\mu)} = \sum^{i} Q_i^{(\mu)} b_{i,\nu} = \alpha_{3+\nu}^{(\mu)} \pi i + \sum^{i} \alpha_{3+\nu}^{3+i} a_{i,\mu}$$

und $\vartheta_{(\varpi)}(u_1, u_2, u_3)$ geht über in

$$(-1)^{\sum^{i}(\alpha_{3+\nu}^{(i)} g_i + \alpha_{3+\nu}^{3+i} h_i)} e^{-2\sum^{i} \alpha_{3+\nu}^{(3+i)} u_i - \sum^{i,k} a_{i,k} \alpha_{3+\nu}^{(3+i)} \alpha_{3+\nu}^{(3+k)}} \vartheta_{(\varpi)}(u_1, u_2, u_3)$$

$$f(u_1, u_2, u_3) \text{ in } f(u_1, u_2, u_3) + 2 \sum^{i} u_i \sum^{k} c_{i,k} q_\nu^{(k)} + f(q_\nu^{(1)}, q_\nu^{(2)}, q_\nu^{(3)}).$$

Soll daher $\psi(v_1, v_2, v_3)$ eine θ-Function von der Ordnung n seine, so muss

$$\sum^{i} \alpha_{3+\nu}^{(3+i)} u_i - \sum^{i} u_i \sum^{k} c_{i,k} q_\nu^{(k)} = n v_\nu, \tag{10}$$

was zu den Bedingungen führt

$$\sum^{i} Q_\mu^{(i)} (\alpha_{3+\nu}^{(3+i)} - \sum^{k} c_{i,k} q_\nu^{k}) = n,\ 0 \tag{11}$$

und daraus

$$\sum^{i} (\alpha_{3+\nu}^{(3+i)} \alpha_\mu^{(i)} - \alpha_{3+\nu}^{(i)} \alpha_\mu^{(3+i)}) = n,\ 0 \tag{12}$$

je nachdem μ, ν gleich oder verschieden sind.

Ferner erhält man aus (11)

$$n \cdot b_{\mu,\nu} = \pi i \sum^{i} \alpha_{3+\nu}^{(3+i)} \alpha_{3+\mu}^{(i)} + \sum^{i} \sum^{k} a_{i,k} \alpha_{3+\nu}^{(3+i)} \alpha_{3+\mu}^{(3+k)} - \sum^{i} \sum^{k} c_{i,k} q_\nu^{(k)} q_\mu^{(i)} \tag{13}$$

was wegen $b_{\mu,\nu} = b_{\nu,\mu}$ zur Folge hat:

$$\sum^{i} (\alpha_{3+\nu}^{(3+i)} \alpha_{3+\mu}^{(i)} - \alpha_{3+\mu}^{(3+c)} \alpha_{3+\nu}^{(i)}) = 0 \tag{14}$$

für $\mu = \nu$ ergiebt (13)

$$f(q_\nu^{(1)}, q_\nu^{(2)}, q_\nu^{(3)}) = \pi i \sum^{i} \alpha_{3+\nu}^{(3+i)} \alpha_{3+\nu}^{(i)} + \sum^{i} \sum^{k} a_{i,k} \alpha_{3+\nu}^{(3+i)} \alpha_{3+\nu}^{(3+k)} - n b_{\nu,\nu} \tag{15}$$

woraus sich für $\psi(v_1, v_2, v_3)$ die weitere Gleichung ergiebt:

$$\psi(v_1 + b_{1,\nu}, v_2 + b_{2,\nu}, v_3 + b_{3,\nu}) = (-1)^{h'_\nu} e^{-2nv_\nu \; nb_{\nu,\nu}} \psi(v_1, v_2, v_3) \tag{16}$$

$$h'_\nu \equiv \sum^{i} (g_i \alpha^{(i)}_{3+\nu} + h_i \alpha^{3+i}_{3+\nu} + \alpha^{3+i}_{3+\nu} \alpha^{i}_{3+\nu}) \quad (\text{mod } 2) \tag{17}$$

und demnach ist in der That die Function $\psi(v_1, v_2, v_3)$ eine θ-Function von der Ordnung n mit der Charakteristik

$$(\varpi') = \begin{pmatrix} g'_1 & g'_2 & g'_3 \\ h'_1 & h'_2 & h'_3 \end{pmatrix}$$

deren Elemente g', h' durch die Bedingungen (9) (17) bestimmt sind.

Ist der Transformationgrad n eine ungerade Zahl so ergiebt sich aus dieser Bestimmung leicht.

$$\sum^{i} g'_i h'_i \equiv \sum^{i} g_i h_i \qquad (\text{mod } 2)$$

so dass also die Charakteristiken der ursprünglichen und der transformirten Theta-function gleichzeitig gerade und ungerade sind. Für einen geraden Transformationsgrad trifft dies nicht mehr zu.

Die Relationen (7), (12), (14), auf welche wir hier geführt worden sind stimmen überein mit den Relationen (8) § 1 aus welchen die Relationen (7) § 1 unmittelbar folgen. Die Transformation der Theta-Functionen erfordert aber, dass diese Relationen unbedingt erfüllt seien, auch wenn zwischen den Moduln der Theta-functionen beliebige Relationen zugelassen werden, was die früheren allgemeineren Betrachtungen nicht ergeben haben. Zur Aufklärung dieses Umstandes sei bemerkt, dass, wenn auch in besonderen Fällen die Gleichungen $b_{i,k} = b_{k,i}$ ohne die Relationen (7) oder (8) § 1 erfüllt werden können, man um auf ϑ-Functionen der neuen Variablen zu gelangen, für die Variablen v durch lineare Substitution mit ganzzahligen Coefficienten ein drittes System von Variablen einführen muss, für welche die Relationen (7) (8) bestehen.

§ 5. Die linearen Transformationen.

Ist der Transformationsgrad $n = 1$, so wird die Function $\Pi_{(\varpi)}(u_1, u_2, u_3)$ in eine θ-Function erster Ordnung der Variablen v_1, v_2, v_3 transformirt, deren Charakteristik

$$(\varpi') = \begin{pmatrix} g'_1 & g'_2 & g'_3 \\ h'_1 & h'_2 & h'_3 \end{pmatrix}$$

aus der gegebenen Charakteristik (ϖ) durch die Congruenzen (9) (17) bestimmt wird, welche sich auch so schreiben lassen:

$$\left.\begin{aligned} g'_\nu &\equiv \sum^{i} g_i h_i + \sum^{i} (g_i + \alpha_\nu^{(3+i)})(h_i + \alpha_\nu^{(i)}) \\ h'_\nu &\equiv \sum^{i} g_i h_i + \sum^{i} (g_i + \alpha_{3+\nu}^{(3+i)})(h_i + \alpha_{3+\nu}^{(i)}) \end{aligned}\right\} \pmod{2} \qquad (18)$$

und die Function Π unterscheidet sich von der Function $\vartheta_{(\varpi)}(v_1, v_2, v_3)$ nur durch einen constanten Factor, mit dessen Bestimmung ich mich in einer früheren Abhandlung beschäftigt habe (*). Die Anzahl aller möglichen Transformationen ersten Grades ist unendlich gross; es werden jedoch solche Transformationen, deren Transformationszahlen $\alpha_i^{(k)}$ nach dem Modul 2 congruent sind, zu denselben Charakteristiken der transformirten ϑ-Functionen führen, und können daher in gewissem Sinne als nicht wesentlich verschieden betrachtet werden. Die Anzahl der Transformationen ersten Grades, in denen die Transformationszahlen nach dem Modul 2 unterschieden werden, ist aber eine endliche, und es soll nunmehr diese Anzahl bestimmt werden.

Zu dem Ende leiten wir aus den Bedingungen (8) § 1 die Congruenzen ab:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{1,3}^{i} \alpha_\mu^{(i)} \alpha_\mu^{(3+i)} + \sum_{1,3}^{i} \alpha_\nu^{(i)} \alpha_\nu^{(3+i)} + \sum_{1,3}^{i} (\alpha_\nu^{(i)} + \alpha_\mu^{(i)})(\alpha_\nu^{3+i} + \alpha_\mu^{3+i}) &\equiv 0 \\ \text{oder } &\equiv 1 \end{aligned}\right\} \pmod{2} \quad (19)$$

letzteres nur wenn $\mu - \nu = \pm 3$ ist.

Hiernach lassen sich die 36 Transformationszahlen $\alpha_i^{(k)}$ in 6 Charakteristiken zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} \alpha_\nu^{(4)} & \alpha_\nu^{(5)} & \alpha_\nu^{(6)} \\ \alpha_\nu^{(1)} & \alpha_\nu^{(2)} & \alpha_\nu^{(3)} \end{pmatrix} = (\alpha_\nu)$$

in der Art, dass von den drei Charakteristiken

$$(\alpha_\mu), \qquad (\alpha_\nu), \qquad (\alpha_\mu + \alpha_\nu)$$

entweder zwei oder keine ungerade sind, falls nicht $\mu - \nu = \pm 3$ ist, und dass von den drei Charakteristiken

$$(\alpha_\nu), \qquad (\alpha_{3+\nu}), \qquad (\alpha_\nu + \alpha_{3+\nu})$$

entweder zwei oder keine gerade sind.

(*) *Ueber die unendlich vielen Formen der ϑ-Function.* Borchardts Journal Bd. 74, p. 57.

Im ersten Fall enthalten daher die beiden Gruppen (α_μ) (α_ν) vier gepaarte gemeinschaftliche Charakteristiken, während die beiden Gruppen (α_ν), $(\alpha_{3+\nu})$ sechs ungepaarte Charakteristiken gemein haben. (Vgl. meine oben erwähnte Schrift: *Ueber die* Abel'*schen Functionen vom Geschlecht* 3, p. 20-21.)

Es folgt nun sofort aus den Congruenzen (9) (17), dass die Summen dreier (oder überhaupt einer ungeraden Anzahl) Charakteristiken durch die Transformation übergeht in die Summe der entsprechenden transformirten Charakteristiken, und daraus, und aus dem Umstand, dass eine Charakteristik, zugleich mit ihrer transformirten gerade oder ungerade ist, ergiebt sich, dass ein vollständiges System ungerader Charakteristiken (Vgl. l. c., § 4) durch eine lineare Transformation in ein eben solches System übergeht. Hiernach ist es leicht, in völlig eindeutiger Weise (nach dem Modul 2) das System der Transformationszahlen zu bestimmen, durch welches ein beliebig gegebenes vollständiges System ungerader Charakteristiken auf ein bestimmtes Normalsystem zurückgeführt wird.

Es ist erforderlich, ein bestimmtes, indessen ganz willkürliches, Normalsystem zu Grunde zu legen, da für jede Annahme sich die Betrachtung etwas anders, (wiewohl ganz analog) gestaltet. Nehmen wir also etwa das System

$$(p^0)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad (\beta_1^0)=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad (\beta_2^0)=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix},\quad (\beta_3^0)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\end{pmatrix},$$

$$(\beta_4^0)=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},\quad (\beta_5^0)=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&1&0\end{pmatrix},\quad (\beta_6^0)=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix},\quad (\beta_7^0)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

und suchen diejenige Transformation, welche vermittelst der Formeln (18) ein beliebiges vollständiges System

$$(p),\quad (\beta_1),\quad (\beta_2),\quad (\beta_3),\quad (\beta_4),\quad (\beta_5),\quad (\beta_6),\quad (\beta_7)$$

auf diesen Normalfall reducirt, so ergiebt sich, indem man in (18) für g'_ν, h'_ν die Elemente von $(p^{(0)})$, für g_ν, h_ν die Elemente von (p) setzt, und beachtet, dass (p) gerade ist, dass

$$(\alpha_1+p),\quad (\alpha_2+p),\quad (\alpha_3+p),\quad (\alpha_4+p),\quad (\alpha_5+p),\quad (\alpha_6+p)$$

alle gerade sein müssen, und mithin sind, da kein $(\alpha)=(0)$ sein kann, die (α) sämmtlich von der Form:

$$(p+\beta_i+\beta_h+\beta_k).$$

Ebenso findet man aus (18) dass

$$(\alpha_1+\beta_2),\quad (\alpha_1+\beta_4),\quad (\alpha_1+\beta_5)\ \text{ungerade},$$
$$(\alpha_1+\beta_1),\quad (\alpha_1+\beta_3),\quad (\alpha_1+\beta_6),\quad (\alpha_1+\beta_7)\ \text{gerade}$$

sind, woraus für (α_1) der Ausdruck folgt:

$$(\alpha_1) = (p + \beta_2 + \beta_4 + \beta_5).$$

Auf diese Weise ergiebt sich die folgende Darstellung:

$$\left.\begin{aligned}
(\alpha_1) &= (p + \beta_2 + \beta_4 + \beta_5)\\
(\alpha_2) &= (p + \beta_1 + \beta_2 + \beta_6)\\
(\alpha_3) &= (p + \beta_1 + \beta_3 + \beta_4)\\
(\alpha_4) &= (p + \beta_3 + \beta_6 + \beta_7)\\
(\alpha_5) &= (p + \beta_1 + \beta_2 + \beta_7)\\
(\alpha_6) &= (p + \beta_1 + \beta_3 + \beta_5)
\end{aligned}\right\}\ (20)
\qquad
\left.\begin{aligned}
(p + \beta_1) &= (\alpha_1 + \alpha_4)\\
(p + \beta_2) &= (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_6)\\
(p + \beta_3) &= (\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_5)\\
(p + \beta_4) &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_5)\\
(p + \beta_5) &= (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_5 + \alpha_6)\\
(p + \beta_6) &= (\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6)\\
(p + \beta_7) &= (\alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6)
\end{aligned}\right\}\ (21)$$

wodurch die Transformationszahlen $\alpha_i^{(k)}$ nach dem Modul 2 völlig bestimmt sind. Zugleich überzeugt man sich leicht aus den Sätzen über die Charakteristiken (l. c., § 3, 4) dass durch diese Bestimmung die Congruenzen (19) in der That erfüllt sind.

Da das vollständige System (β_i) jedes beliebige, und in jeder beliebigen Anordnung sein kann, und da es $288 = 8 \cdot 9 \cdot 4$ solche System giebt (l. c., p. 26), so schliesst man, dass die Anzahl der nach dem Modul 2 verschiedenen Transformationen

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 4 = 1451520$$

ist. In jedem besonderen Fall ist es sehr leicht, aus den Formeln (20) ein System von Transformationszahlen, nicht nur Zahlen denen dieselben congruent sein müssen, zu bestimmen; dass dies aber in allen Fällen möglich ist, d. h. dass man für jede Annahme über das System (β) nicht bloss die Congruenzen (19) sondern auch die Gleichungen (8) (oder 7) § 1 aus welchen diese hergeleitet sind, befriedigen kann, davon überzeugt man sich auf folgendem Wege.

Nehmen wir an, es sei für irgend ein System (β_i) die entsprechende Transformation gefunden:

$$(A) = \begin{pmatrix}
\alpha_1^{(1)} & \alpha_2^{(1)} & \alpha_3^{(1)} & \alpha_4^{(1)} & \alpha_5^{(1)} & \alpha_6^{(1)}\\
\alpha_1^{(2)} & \alpha_2^{(2)} & \alpha_3^{(2)} & \alpha_4^{(2)} & \alpha_5^{(2)} & \alpha_6^{(2)}\\
\alpha_1^{(3)} & \alpha_2^{(3)} & \alpha_3^{(3)} & \alpha_4^{(3)} & \alpha_5^{(3)} & \alpha_6^{(3)}\\
\alpha_1^{(4)} & \alpha_2^{(4)} & \alpha_3^{(4)} & \alpha_4^{(4)} & \alpha_5^{(4)} & \alpha_6^{(4)}\\
\alpha_1^{(5)} & \alpha_2^{(5)} & \alpha_3^{(5)} & \alpha_4^{(5)} & \alpha_5^{(5)} & \alpha_6^{(5)}\\
\alpha_1^{(6)} & \alpha_2^{(6)} & \alpha_3^{(6)} & \alpha_4^{(6)} & \alpha_5^{(6)} & \alpha_6^{(6)}
\end{pmatrix}$$

und vertauschen wir in (20) (β_1) mit (β_2), so geht, wie aus (21) sich ergiebt, das System der Charakteristiken (α) über in ein anderes (α') welches so bestimmt ist:

$$\begin{aligned}
(\alpha'_1) &= (\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_6)\\
(\alpha'_2) &= (\alpha_2)\\
(\alpha'_3) &= (\alpha_4 + \alpha_6)\\
(\alpha'_4) &= (\alpha_4)\\
(\alpha'_5) &= (\alpha_5)\\
(\alpha'_6) &= (\alpha_3 + \alpha_4).
\end{aligned}$$

Daraus geht hervor, dass durch die zusammengesetzts Transformation

$$(A)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ein vollständiges System, welches aus (β_i) durch Vertauschung von (β_1) mit (β_2) hervorgeht, auf das Normalsystem zurückgeführt wird.

Es ergiebt sich leicht aus den Formeln (9) (17) dass, wenn durch eine Transformation (A) eine Charakteristik (ϖ) in eine andere (ϖ') übergeht, durch die reciproke Transformation $(A)^{-1}$ (ϖ') in (ϖ) übergeht. Demnach können wir auch sagen, dass durch die reciproke Transformation von

$$(A)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}(A)^{-1}$$

das vollständige System (β_i) in ein anderes übergeht, welches aus demselben entstanden ist durch Vertauschung von (β_1) mit (β_2).

Auf demselben Wege findet man, dass, um (β_1) mit (β_3), mit (β_4), mit (β_5), mit (β_6) und mit (β_7) zu vertauschen, die Transformation (A) in gleicher Weise zusammengesetzt werden muss bezüglich mit:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieser sechs Vertauschungen kann man aber jede beliebige Permutation der sieben Elemente (β_1), (β_2), (β_3), (β_4), (β_5), (β_6), (β_7) herleiten, und daher lässt sich aus den hier betrachteten Transformationen eine zusammensetzen, welche das vollständige System (β_i) in ein anderes überführt, welches aus denselben Charakteristiken (β) besteht, aber in einer beliebigen anderen Anordnung.

Setzt man ferner (A) in derselben Weise zusammen mit den beiden Transformationen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

so geht das vollständige System (β_i) durch die erste derselben über in das vollständige System

$$(\beta_1), \quad (p+\beta_1+\beta_2), \quad (p+\beta_1+\beta_3), \quad (p+\beta_1+\beta_4), \quad (p+\beta_1+\beta_5), \quad (p+\beta_1+\beta_6), \quad (p+\beta_1+\beta_7)$$

welches zu demselben (p) gehört, durch die zweite in

$$(p+\beta_2+\beta_3), \quad (p+\beta_3+\beta_1), \quad (p+\beta_1+\beta_2), \quad (\beta_4), \quad (\beta_5), \quad (\beta_6), \quad (\beta_7)$$

welches zu $(p')=(\beta_1+\beta_2+\beta_3)$ gehört.

Hiernach lässt sich aus den angegebenen 8 Transformationen immer eine Transformation zusammensetzen, welche ein beliebig gegebenes vollständiges System auf das Normalsystem zurückführt, und die Existenz der oben bestimmten Anzahl von nach dem Modul 2 verschiedenen linearen Transformationen ist damit erwiesen.

§ 6. Die Transformation n^{ten} Grades.

Der Hauptsatz der allgemeinen Transformationstheorie besteht darin, dass die in § 4 betrachtete Function $\Pi_{(\varpi)}(u_1, u_2, u_3)$ sich darstellen lässt als homogene ganze rationale Function n^{ten} Grades der Functionen

$$\vartheta\begin{Bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{Bmatrix}(v_1, v_2, v_3; b).$$

Wir beschränken uns bei dem Beweis dieses Satzes, der übrigens allgemein gildt (*) auf den Fall, wo der Transformationsgrad n eine ungerade Primzahl ist. Die Transformation zweiten Grades wird weiterhin besonders behandelt werden. Alle Transformationen, welche sich aus Transformationen mit Primzahlgraden zusammensetzen lassen (welches vielleicht alle sind) sind damit zugleich erledigt.

Ist n eine Primzahl, so kann man, wie oben gezeigt, alle Transformationen n^{ten} Grades durch Zusammensetzung mit linearen Transformationen aus einer beliebigen unter ihnen herleiten, für welche wir die Transformation

$$\begin{pmatrix} n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

wählen. Die Function $\Pi(u_1, u_2, u_3)$ wird dann:

$$\vartheta(nv_1, nv_2, nv_3; nb) \tag{1}$$

(*) Es lässt sich allgemein beweisen, das jede θ-Function n^{ter} Ordnung als ganze rationale und homogene Function n^{ten} Grades der Functionen ϑ dargestellt werden kann. Wir beschränken uns auf den besonderen Fall, um einen Einblick in die Bedeutung der Coefficienten dieser Functionen zu erhalten.

und wir können uns auf die Betrachtung der Charakteristik (0) beschränken, da (weil n ungerade ist) man aus der für diese gültigen Formel die übrigen herleiten kann durch Vermehrung von v_1, v_2, v_3 um Systeme zusammengehöriger halber Perioden. Diese Function, die wir als Function von v_1, v_2, v_3 mit $\psi(v_1, v_2, v_3)$ bezeichnen, ist bis auf einen constanten Factor definirt durch die beiden Bedingungen

$$\left.\begin{aligned} \psi\left(\cdots v_\nu + \frac{\pi i}{n} \cdots\right) &= \psi(v_1, v_2, v_3) \\ \psi(v_1 + b_{1,\nu}, v_2 + b_{2,\nu}, v_3 + b_{3,\nu}) &= e^{-2nv_\nu - nb_{\nu\nu}} \psi(v_1, v_2, v_3) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

in Verbindung mit der Bedingung der Stetigkeit. Ein constanter Factor hebt sich aber im Quotienten zweier solcher Functionen heraus und kann daher, in sofern es sich um die 6-fach periodischen Functionen handelt, unberücksichtigt bleiben.

Nun kommen die Eigenschaften (2) auch der Function zu

$$\underset{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}{S} \left\{\vartheta\left(v_1 + \frac{\lambda_1 \pi i}{n}, \quad v_2 + \frac{\lambda_2 \pi i}{n}, \quad v_3 + \frac{\lambda_3 \pi i}{n}\right)\right\}^n \tag{3}$$

worin sich die Summe S in Bezug auf jede der Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ über ein vollständiges Restsystem nach dem Modul n erstreckt, und diese Summe unterscheidet sich daher von der Function (1) nur durch einen constanten Factor.

Auf die hier auftretenden Functionen wenden wir nun das Additionstheorem der Theta-Functionen an. Auf S.[te] 37 meiner mehrfach erwähnten Schrift findet man unter V die Formel

$$\begin{aligned} &\vartheta_{(p)} \vartheta_{(p)}(w_h) \vartheta(u_h + v_h + w_h) \vartheta(u_h - v_h) \\ = &\sum_{i=0}^{i=7} (-1)^{\Sigma \nu^{(i)} m} \vartheta_{(\beta_i)}(v_h + w_h) \vartheta_{(\beta_i)}(v_h) \vartheta_{(p+\beta_i)}(u_h + w_h) \vartheta_{(p+\beta_i)}(u_h). \end{aligned}$$

Hieraus leitet man, indem man u und w um beliebige Systeme zusammengehöriger halber Perioden vermehrt und dann an Stelle von v und w schreibt $-v$ und $w+v$, die Formel her:

$$\left.\begin{aligned} &\vartheta_{(p)} \vartheta_{(p+\varpi+\varpi')}(v_h + w_h) \vartheta_{(\varpi)}(u_h + w_h) \vartheta_{(\varpi')}(u_h + v_h) \\ = &\sum_{i=0}^{i=7} \varepsilon_i \vartheta_{(\beta_i+\varpi+\varpi')}(w_h) \vartheta_{(\beta_i)}(v_h) \vartheta_{(p+\beta_i+\varpi)}(u_h + v_h + w_h) \vartheta_{(p+\beta_i+\varpi')}(u_h) \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

worin die ε_i leicht zu bestimmende vierte Einheitswurzeln sind.

Man übersieht sofort, dass man durch wiederholte Anwendung dieser Formel ein Product von der Form

$$\vartheta_{(\varpi')}(u_h + \omega'_h)\vartheta_{(\varpi'')}(u_h + \omega''_h) \cdots \vartheta_{(\varpi^{(n)})}(u_h + \omega_h^{(n)}),$$

sofern es von u_h abhängig ist, als ganze rationale und homogene Function n^{ten} Grades der ϑ-Functionen

$$\vartheta_{(\varpi)}(u_h + \omega'_h + \omega''_h + \cdots \omega_h^{(n)}), \qquad \vartheta_{(\varpi)}(u_h)$$

darstellen kann. In diesen Ausdrücken kommen ausser numerischen Coefficienten nur noch Theta-Functionen vor, deren Argumente durch Addition aus $\omega'_h,\ \omega''_h, \ldots\ \omega_h^{(n)}$ zusammengesetzt sind.

Um diesen Satz auf die einzelnen Glieder der Summe (3) anzuwenden, hat man für $u_h\ v_h$ und für $\omega'_h,\ \omega''_h, \ldots\ \omega_h^{(n)}$ die n-tel Perioden $\frac{\lambda_\nu \pi i}{n}$ zu setzen, so dass

$$[\overset{3}{\underset{1}{h}}(\omega'_h + \omega''_h + \cdots + \omega_h^{(n)})] \equiv (0,\ 0,\ 0)$$

ist, und daraus folgt, dass man die Function $\vartheta(nv_1,\ nv_2,\ nv_3;\ nb)$ darstellen kann als ganze rationale und homogene Function n^{ter} Ordnung von den Functionen $\vartheta_{(\varpi)}(v_1,\ v_2,\ v_3;\ b)$, deren Coefficienten rational zusammengesetzt sind aus Grössen von der Form $\vartheta_{(\varpi)}\left(\frac{h_1 \pi i}{n},\ \frac{h_2 \pi i}{n},\ \frac{h_3 \pi i}{n};\ b\right)$.

Die Verhältnisse der Grössen $\vartheta_{(\varpi)}\left(\frac{h_1 \pi i}{n},\ \frac{h_2 \pi i}{n},\ \frac{h_3 \pi i}{n}\right)$, wie überhaupt die Verhältnisse der Grössen $\vartheta_{(\varpi)}\left(\frac{p_1}{n},\ \frac{p_2}{n},\ \frac{p_3}{n}\right)$, in denen für $p_1,\ p_2,\ p_3$ alle möglichen Systeme zusammengehöriger Perioden zu setzen sind, lassen sich mittelst einer Gleichung vom Grade $\frac{n^6 - 1}{n - 1}$ algebraisch ausdrücken durch die Grössen $\vartheta_{(\varpi)}$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch die Moduln der mit den betreffenden Theta-Functionen in Verbindung stehenden algebraischen Functionenclasse (*), und diese algebraische Gleichung kann als Modulargleichung betrachtet werden. Es zeigt sich hierbei der merkwürdige Umstand, dass der Grad dieser Gleichung niedriger ist als die Anzahl der Classen nicht äquivalenter Transformationen vom Grade n.

(*) Vgl. Clebsch und Gordan: *Theorie der Abelschen Functionen,* § 74.

§ 7. Die Transformation zweiten Grades.

Wir behandeln im Folgenden speciell die Transformationen des zweiten Grades und werden zur Aufstellung der vollständigen Transformationsformeln für die Repräsentanten der 135 Transformationsclassen gelangen, Zunächst aber können wir uns auf die Betrachtung der 8 Hauptfälle beschränken. Für diese erhalten wir nach § 4 die Aufgabe, die folgenden 8 Functionsclassen:

$$\text{I.}\quad \vartheta_{(\varpi)}\left(\begin{matrix} v_1, & v_2, & v_3; \end{matrix}\begin{matrix} \frac{1}{2}b_{11}, & \frac{1}{2}b_{22}, & \frac{1}{2}b_{33} \\ \frac{1}{2}b_{23}, & \frac{1}{2}b_{31}, & \frac{1}{2}b_{12} \end{matrix}\right)$$

$$\text{II.}\quad \vartheta_{(\varpi)}\left(\begin{matrix} 2v_1, & v_2, & v_3; \end{matrix}\begin{matrix} 2b_{11}, & \frac{1}{2}b_{22}, & \frac{1}{2}b_{33} \\ \frac{1}{2}b_{23}, & b_{31}, & b_{12} \end{matrix}\right)$$

$$\text{III.}\quad \vartheta_{(\varpi)}\left(\begin{matrix} v_1, & 2v_2, & v_3; \end{matrix}\begin{matrix} \frac{1}{2}b_{11}, & 2b_{22}, & \frac{1}{2}b_{33} \\ b_{23}, & \frac{1}{2}b_{31}, & b_{12} \end{matrix}\right)$$

$$\text{IV.}\quad \vartheta_{(\varpi)}\left(\begin{matrix} v_1, & v_2, & 2v_3; \end{matrix}\begin{matrix} \frac{1}{2}b_{11}, & \frac{1}{2}b_{22}, & 2b_{33} \\ b_{23}, & b_{31}, & \frac{1}{2}b_{12} \end{matrix}\right)$$

$$\text{V.}\quad \vartheta_{(\varpi)}\left(\begin{matrix} v_1, & 2v_2, & 2v_3; \end{matrix}\begin{matrix} \frac{1}{2}b_{11}, & 2b_{22}, & 2b_{33} \\ 2b_{23}, & b_{31}, & b_{12} \end{matrix}\right)$$

$$\text{VI.}\quad \vartheta_{(\varpi)}\left(\begin{matrix} 2v_1, & v_2, & 2v_3; \end{matrix}\begin{matrix} 2b_{11}, & \frac{1}{2}b_{22}, & 2b_{33} \\ b_{23}, & 2b_{31}, & b_{12} \end{matrix}\right)$$

$$\text{VII.}\quad \vartheta_{(\varpi)}\left(\begin{matrix} 2v_1, & 2v_2, & v_3; \end{matrix}\begin{matrix} 2b_{11}, & 2b_{22}, & \frac{1}{2}b_{33} \\ b_{23}; & b_{31}, & 2b_{12} \end{matrix}\right)$$

$$\text{VIII.}\quad \vartheta_{(\varpi)}\left(\begin{matrix} 2v_1, & 2v_2, & 2v_3; \end{matrix}\begin{matrix} 2b_{11}, & 2b_{22}, & 2b_{33} \\ 2b_{23}, & 2b_{31}, & 2b_{12} \end{matrix}\right)$$

als ganze rationale Functionen des zweiten Grades der Functionen

$$\vartheta_{(\varpi)}\left(\begin{matrix} v_1, & v_2, & v_3; \end{matrix}\begin{matrix} b_{11}, & b_{22}, & b_{33} \\ b_{23}, & b_{31}, & b_{12} \end{matrix}\right)$$

darzustellen. Die betreffenden Formeln ergeben sich einfach aus wenigen Fundamentalsätzen. Betrachten wir, indem wir

$$\varphi(m_h) = \sum_{1,3}^{i,k} b_{i,k} m_i m_k$$

setzen, das Product:

$$\vartheta(u_h+v_h)\vartheta(u_h-v_h)=\sum_{-\infty,\infty}^{n}\sum_{-\infty,\infty}^{m} e^{\varphi(m_h)+\varphi(n_h)+2\sum_{1,3}^{i}(n_i+m_i)u_i+2\sum_{1,3}^{i}(n_i-m_i)v_i}$$

und setzen

$$\varphi(m_h)+\varphi(n_h)=\tfrac{1}{2}\varphi(m_h+n_h)+\tfrac{1}{2}\varphi(m_h-n_h)$$

ferner

$$m_h+n_h=2\mu_h+\lambda_h \qquad m_h-n_h=2\nu_h+\lambda_h$$

worin λ_h 0 oder 1 ist und μ_h, ν_h alle Zahlenwerthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen, so folgt zunächst:

$$\vartheta(u_h+v_h)\vartheta(u_h-v_h)=$$

$$\underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{S}\sum^{\mu} e^{\frac{1}{2}\varphi(2\mu_h+\lambda_h)+2\sum_i(2\mu_i+\lambda_i)u_i}\sum^{\nu} e^{\frac{1}{2}\varphi(2\nu_h+\lambda_h)+2\sum(2\nu_i+\lambda_i)v_i}$$

wofür wir schreiben können

$$\vartheta(u_h+v_h;\ b)\vartheta(u_h-v_h;\ b)=\underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{S}\vartheta\begin{Bmatrix}\lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3\\ 0, & 0, & 0\end{Bmatrix}(2u_h;\ 2b)\vartheta\begin{Bmatrix}\lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3\\ 0, & 0, & 0\end{Bmatrix}(2v_h;\ 2b).$$

Diese Formel verallgemeinern wir, indem wir an Stelle von u_h, v_h setzen $u_h+\frac{1}{2}\varpi_h+\frac{\varepsilon_h}{4}\pi i$, $v_h+\frac{\varepsilon_h}{4}\pi i$, worin $\frac{1}{2}\varpi_1$, $\frac{1}{2}\varpi_2$, $\frac{1}{2}\varpi_3$ ein System zusammengehöriger halber Perioden mit der Charakteristik

$$(\varpi)=\begin{pmatrix}g_1 & g_2 & g_3\\ h_1 & h_2 & h_3\end{pmatrix}$$

bedeutet, und ε_1, ε_2, ε_3 0 oder 1 sind. Man erhält so:

$$\left.\begin{aligned}&(-1)^{\Sigma g h}\vartheta\begin{Bmatrix}g_1 & g_2 & g_3\\ h_1 & h_2 & h_3\end{Bmatrix}(u_h-v_h;\ b)\vartheta\begin{Bmatrix}g_1 & g_2 & g_3\\ h_1+\varepsilon_1, & h_2+\varepsilon_2, & h_3+\varepsilon_3\end{Bmatrix}(u_h+v_h;\ b)\\ &=\underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{S}(-1)^{\Sigma\lambda h}\vartheta\begin{Bmatrix}\lambda_1+g_1, & \lambda_2+g_2, & \lambda_3+g_3\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3\end{Bmatrix}(2u_h;\ 2b)\vartheta\begin{Bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3\end{Bmatrix}(2v_h;\ 2b).\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Setzt man hierin $u_h=-v_h$ und schreibt dann v_h an Stelle von $2v_h$, $b_{i,k}$ an Stelle von $2b_{i,k}$ so ergiebt sich die Transformationsformel für den Fall (I)

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta_{(\varpi)}(v_h;\ \tfrac{1}{2}b)\vartheta_{(\varpi+\varepsilon)}(0;\ \tfrac{1}{2}b)=\\ &(-1)^{\Sigma g\varepsilon}\underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{S}(-1)^{\Sigma\lambda(h+\varepsilon)}\vartheta\begin{Bmatrix}\lambda_1+g_1, & \lambda_2+g_2, & \lambda_3+g_3\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3\end{Bmatrix}(v_h;\ b)\vartheta\begin{Bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3\end{Bmatrix}(v_h;\ b_h).\end{aligned}\right\}\quad(\mathrm{I})$$

Hierin bedeutet (ε) die Charakteristik $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$ und diese kann beliebig angenommen werden, jedoch so, das die Charakteristik $(\varpi+\varepsilon)$ gerade ist. Die in (I) enthaltenen Formeln zerfallen in zwei Classen, von denen die der ersten Classe, in welcher $(g_1, g_2, g_3)=(0, 0, 0)$ ist, auf der rechten Seite je 8 Glieder enthalten, während in denen der andern Classe, die alle übrigen Fälle umfasst, auf der rechten Seite je zwei Glieder einander gleich werden, so dass die Summen in Bezug auf $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ aus vier Glieder bestehen. Statt des Vorzeichens $(-1)^{\Sigma\lambda g}$ kann man auch setzen $(-1)^{\Sigma gh}$, wie sich ergiebt, wenn man unter den Summenzeicher λ_h durch λ_h+g_h ersetzt.

Mittelst des Formel (1) lässt sich noch der Transformationsfall (VIII) erledigen. Versteht man unter ν_1, ν_2, ν_3 Zahlen, welche 0 oder 1 sind, multiplicirt die Formel (1) mit $(-1)^{\Sigma\nu h}$ und nimmt die Summe über alle Combinationen der Zahlen 0, 1 für h_1, h_2, h_3, so ergiebt sich, weil

$$\underset{h_1,h_2,h_3}{S}(-1)^{\Sigma h\lambda}=8 \text{ oder } =0$$

ist, je nachdem sämmtliche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \equiv 0 \pmod 2$ sind oder nicht:

$$\left.\begin{aligned} &8\vartheta\begin{Bmatrix} \nu_1+g_1, & \nu_2+g_2, & \nu_3+g_3 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix}(2u_h;\ 2b)\,\vartheta\begin{Bmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix}(2v_h;\ 2b) \\ =&\underset{h_1,h_2,h_3}{S}(-1)^{\Sigma(g+\nu)h}\,\vartheta\begin{Bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{Bmatrix}(u_h-v_h;\ b)\,\vartheta\begin{Bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1+\varepsilon_1, & h_2+\varepsilon_2, & h_3+\varepsilon_3 \end{Bmatrix}(u_h+v_h;\ b). \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Hieraus erhält man, indem man $u_h=0$ setzt, und zur besseren Uebereinstimmung mit der vorigen Formel $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}=(\varpi)$ für $\begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$, ferner $\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ für $\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix}$ schreibt; die Formel für den Transformationsfall (VIII):

$$\left.\begin{aligned} &8\vartheta_{(\varpi)}(2v_h;\ 2b)\,\vartheta_{(\varpi+\varepsilon)}(0;\ 2b) \\ =&\underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{S}(-1)^{\Sigma\lambda g}\,\vartheta\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{Bmatrix}(v_h;\ b)\,\vartheta\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \lambda_1+h_1, & \lambda_2+h_2, & \lambda_3+h_3 \end{Bmatrix}(v_h;\ b) \end{aligned}\right\} \quad \text{(VIII)}$$

worin wieder die Charakteristik $(\varepsilon)=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ so gewählt sein muss, dass $(\varpi+\varepsilon)$ gerade ist.

Um die übrigen Hauptfälle in derselben Weise zu behandeln, muss man von einer der Formel (1) analogen Formel ausgehen, die sich in derselben Weise herleiten lässt. Man erhält so zunächst:

$$2\vartheta(2u_1,\ u_2+v_2,\ u_3+v_3;\ b)\vartheta(2v_1,\ u_2-v_2,\ u_3-v_3;\ b)$$

$$= \underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{S} \vartheta\begin{Bmatrix} 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}\left(u_1+v_1,\ 2u_2,\ 2u_3;\ \begin{matrix} \frac{1}{2}b_{11}, & 2b_{22}, & 2b_{33} \\ 2b_{23}, & b_{31}, & b_{12} \end{matrix}\right)\vartheta\begin{Bmatrix} 0 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & 0 \end{Bmatrix}\left(u_1-v_1,\ 2v_2,\ 2v_3;\ \begin{matrix} \frac{1}{2}b_{11}, & 2b_{22}, & 2b_{33} \\ 2b_{23}, & b_{31}, & b_{12} \end{matrix}\right).$$

Diese Formel verallgemeinern wir, indem wir für u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 setzen:

$$u_1+\frac{\varepsilon_1 b_{11}}{4}, \qquad u_2+\frac{\varepsilon_1 b_{12}}{4}+\frac{\varepsilon_2 \pi i}{4}, \qquad u_3+\frac{\varepsilon_1 b_{13}}{4}+\frac{\varepsilon_3 \pi i}{4}$$

$$v_1, \qquad v_2+\frac{\varepsilon_1 b_{12}}{4}+\frac{\varepsilon_2 \pi i}{4}, \qquad v_3+\frac{\varepsilon_1 b_{13}}{4}+\frac{\varepsilon_3 \pi i}{4}$$

wodurch, wenn wir noch zur Abkürzung

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{22}, & a_{33} \\ a_{23}, & a_{31}, & a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_{11}, & 2b_{22}, & 2b_{33} \\ 2b_{23}, & b_{31}, & b_{12} \end{pmatrix}$$

schreiben, dieselbe übergeht in:

$$2\vartheta\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix}(2u_1,\ u_2+v_2,\ u_3+v_3;\ b)\vartheta(2v_1,\ u_2-v_2,\ u_3-v_3;\ b)$$

$$= \underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{S} (-1)^{\lambda_1\varepsilon_1} \vartheta\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix}(u_1+v_1,\ 2u_2,\ 2u_3;\ a)\vartheta\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix}(u_1-v_1,\ 2v_2,\ 2v_3;\ a).$$

Wenn wir hierin abermals u_1, u_2, u_3, v_1, v_2, v_3 ersetzen durch

$$\begin{array}{ll} u_1+\frac{1}{4}g_1 b_{11}+\frac{1}{4}g_2 b_{12}+\frac{1}{4}g_3 b_{13}+\frac{1}{4}h_1\pi i, & v_1+\frac{1}{4}g_1 b_{11}+\frac{1}{4}g_2 b_{12}+\frac{1}{4}g_3 b_{13}+\frac{1}{4}h_1\pi i \\ u_2+\frac{1}{2}g_1 b_{21}+\frac{1}{2}g_2 b_{22}+\frac{1}{2}g_3 b_{23}+\frac{1}{2}h_2\pi i, & v_2 \\ u_3+\frac{1}{2}g_1 b_{31}+\frac{1}{2}g_2 b_{32}+\frac{1}{2}g_3 b_{33}+\frac{1}{2}h_3\pi i, & v_3 \end{array}$$

so erhalten wir endlich:

$$\left.\begin{array}{l} (-1)^{g_2h_2+g_3h_3} 2\vartheta\begin{Bmatrix} \varepsilon_1+g_1, & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2+\varepsilon_2, & h_3+\varepsilon_3 \end{Bmatrix}(2u_1,\ u_2+v_2,\ u_3+v_3;\ b)\vartheta\begin{Bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{Bmatrix}(2v_1,\ u_2-v_2,\ u_3-v_3;\ b) \\ = \underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{S} (-1)^{\lambda_1(g_1+\varepsilon_1)+\lambda_2h_2+\lambda_3h_3} \vartheta\begin{Bmatrix} \varepsilon_1, & \lambda_2+g_2, & \lambda_3+g_3 \\ \lambda_1+h_1, & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix}(u_1+v_1,\ 2u_2,\ 2u_3;\ a)\vartheta\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix}(u_1-v_1,\ 2v_2,\ 2v_3;\ a). \end{array}\right\} \quad (3)$$

Ersetzt man hierin

$$\begin{pmatrix} b_{11}, & b_{22}, & b_{33} \\ b_{23}, & b_{31}, & b_{12} \end{pmatrix} \text{ durch } \begin{pmatrix} 2b_{11}, & \frac{1}{2}b_{22}, & \frac{1}{2}b_{33} \\ 2b_{23}, & b_{31}, & b_{12} \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{23}, & a_{33} \\ a_{23}, & a_{31}, & a_{12} \end{pmatrix} \text{ durch } \begin{pmatrix} b_{11}, & b_{22}, & b_{33} \\ b_{23}, & b_{31}, & b_{12} \end{pmatrix},$$

setzt

$$u_1 = 0, \qquad v_2 = -u_2, \qquad v_3 = -u_3$$

und schreibt

$$(v_1, \tfrac{1}{2}v_2, \tfrac{1}{2}v_3) \text{ für } (v_1, u_2, u_3)$$

so folgt die Transformationsformel für den Fall (II):

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^{g_2h_2+g_3h_3} 2\vartheta_{(\varpi)}(2v_1, v_2, v_3; a)\vartheta_{(\varpi+\varepsilon)}(0; a) \\ &= \underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{S} (-1)^{\lambda_1 g_1+\lambda_2(h_2+\varepsilon_2)+\lambda_3(h_3+\varepsilon_3)} \vartheta\begin{Bmatrix} \varepsilon_1, & g_2+\lambda_2, & g_3+\lambda_3 \\ \lambda_1+h_1, & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix}(v_h; b)\vartheta\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix}(v_h, b) \end{aligned}\right\} \text{(II)}$$

worin jetzt:

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{22}, & a_{33} \\ a_{23}, & a_{31}, & a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_{11}, & \tfrac{1}{2}b_{22}, & \tfrac{1}{2}b_{33} \\ \tfrac{1}{2}b_{23}, & b_{31}, & b_{12} \end{pmatrix}, \qquad (\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{pmatrix}.$$

Hieraus ergeben sich die Fälle (III), (IV) durch Vertauschung der Argumente.

Wenn man die Formel (3), wie oben die Formel (1) auflösst, indem man mit $(-1)^{\nu_1 g_1+\nu_2 h_2+\nu_3 h_3}$ multiplicirt und die Summe in Beziehung auf g_1, h_2, h_3 nimmt, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^{\nu_1\varepsilon_1} 4\vartheta\begin{Bmatrix} \varepsilon_1, & \nu_2+g_2, & \nu_3+g_3 \\ \nu_1+h_1, & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{Bmatrix}(u_1+v_1, 2u_2, 2u_3; a)\vartheta\begin{Bmatrix} \varepsilon_1, & \nu_2, & \nu_3 \\ \nu_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3 \end{Bmatrix}(u_1-v_1, 2v_2, 2v_3; a) \\ &= \underset{g_1,h_2,h_3}{S} (-1)^{\nu_1 g_1+(\nu_2+g_2)h_2+(\nu_3+g_3)h_3} \vartheta\begin{Bmatrix} \varepsilon_1+g_1, & g_2, & g_3 \\ h_1, & \varepsilon_2+h_2, & \varepsilon_3+h_3 \end{Bmatrix}(2u_1, u_2+v_2, u_3+v_3; b)\vartheta\begin{Bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{Bmatrix}(2v_1, u_2-v_2, u_3-v_3; b) \end{aligned}\right\} (4)$$

worin, wie in (3)

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{22}, & a_{33} \\ a_{13}, & a_{31}, & a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tfrac{1}{2}b_{11}, & 2b_{22}, & 2b_{33} \\ 2b_{23}, & b_{31}, & b_{12} \end{pmatrix}.$$

Hieraus erhält man die Transformationsformel für den Fall (V), indem man $v_1 = -u_1$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ setzt, und für u_1 $\tfrac{1}{2}v_1$ schreibt:

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^{g_1h_1} 4\vartheta_{(\varpi)}(v_1, 2v_2, 2v_3; a)\vartheta_{(\varpi+\varepsilon)}(0; a) \\ &= \underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{S} (-1)^{\lambda_1(h_1+\varepsilon_1)+\lambda_2 g_2+\lambda_3 g_3} \vartheta\begin{Bmatrix} \lambda_1+g_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1, & \lambda_2+h_2, & \lambda_3+h_3 \end{Bmatrix}(v_h; b)\vartheta\begin{Bmatrix} \lambda_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1, & \lambda_2, & \lambda_3 \end{Bmatrix}(v_h; b) \end{aligned}\right\} \text{(V)}$$

worin $(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist. Die Fälle (VI), (VII) folgen hieraus wieder durch Vertauschung der Argumente.

Aus diesen Hauptfällen leitet man nun die übrigen Normalfälle ab, welche ein vollständiges Repräsentantensystem der 135 Transformationsclassen bilden, indem man in den linken Seiten der betreffenden Formeln für die Hauptfälle die nach Ste 15 erforderlichen Transformationen erster Ordnung ausführt, die sich sehr leicht direct erledigen lassen. Wir stellen im Folgenden das auf diese Weise sich ergebende Formelsystem vollständig zusammen.

$$\left.\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&2&0&0\\ 0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix}\\
(u_1,\ u_2,\ u_3)=(v_1,\ v_2,\ v_3) \qquad \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{22}, & a_{33}\\ a_{23}, & a_{31}, & a_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_{11}, & \frac{1}{2}b_{22}, & \frac{1}{2}b_{33}\\ \frac{1}{2}b_{23}, & \frac{1}{2}b_{31}, & \frac{1}{2}b_{12}\end{pmatrix}\\
(\varpi)=\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3\\ h_1 & h_2 & h_3\end{pmatrix} \qquad (\varepsilon)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3\end{pmatrix}\\
\vartheta_{(\varpi)}(u_h;\ a)\vartheta_{(\varpi+\varepsilon)}(0;\ a)\\
=(-1)^{\Sigma gh}\underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{S}(-1)^{\Sigma\lambda(\varepsilon+h)}\vartheta\begin{Bmatrix}\lambda_1+g_1, & \lambda_2+g_2, & \lambda_3+g_3\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3\end{Bmatrix}(v_h;\ b)\vartheta\begin{Bmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3\end{Bmatrix}(v_h;\ b)
\end{array}\right\}\ \text{(I)}$$

$$\left.\begin{array}{c}
\begin{pmatrix} 2&0&0&\alpha&0&0\\ 0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&2&0\\ 0&0&0&0&0&2 \end{pmatrix}\\
(u_1,\ u_2,\ u_3)=(2v_1,\ v_2,\ v_3)\\
\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{22}, & a_{33}\\ a_{23}, & a_{31}, & a_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2b_{11}-\alpha\pi i, & \frac{1}{2}b_{22}, & \frac{1}{2}b_{33}\\ \frac{1}{2}b_{23}, & b_{31}, & b_{12}\end{pmatrix}\\
(\varpi)=\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3\\ h_1 & h_2 & h_3\end{pmatrix} \qquad (\varepsilon)=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0\\ \alpha\varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3\end{pmatrix} \qquad h'_1=h_1-\alpha(g_1+1)\\
\log\delta=\pi i\left(\alpha g_1+h_2g_2+h_3g_3+\frac{\alpha\varepsilon_1^2}{4}+\frac{\alpha g_1^2}{2}+\frac{\alpha\varepsilon_1(g_1+1)}{2}\right)\\
2\vartheta_{(\varpi)}(u_h;\ a)\vartheta_{(\varpi+\varepsilon)}(0;\ a)\\
=\delta\underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{S}(-1)^{\lambda_1 g_1+\lambda_2(h_2+\varepsilon_2)+\lambda_3(h_3+\varepsilon_3)}\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, & g_2+\lambda_2, & g_3+\lambda_3\\ \lambda_1+h'_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3\end{Bmatrix}(v_h;\ b)\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3\end{Bmatrix}(v_h;\ b)
\end{array}\right\}\ \text{(II)}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 & 0 & \alpha' & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(u_1,\ u_2,\ u_3) = (v_1,\ 2v_2 + \alpha v_1,\ v_3)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{22}, & a_{33} \\ a_{13}, & a_{31}, & a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} b_{11}, & 2b_{22} + 2\alpha b_{12} + \frac{\alpha^2}{2} b_{11} - \alpha' \pi i, & \frac{1}{2} b_{33} \\ b_{23} + \frac{\alpha}{2} b_{13}, & \frac{1}{2} b_{13} & b_{12} + \frac{\alpha}{2} b_{11} \end{pmatrix} \qquad \text{(III)}$$

$$(\varpi) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix} \qquad (\varepsilon) = \begin{pmatrix} -\alpha\varepsilon_2, & \varepsilon_2 & 0 \\ \varepsilon_1 & \alpha\varepsilon_1 + \alpha'\varepsilon_2, & \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

$$g'_1 = g_1 + \alpha g_2, \qquad h'_2 = h_2 - \alpha h_1 - \alpha'(g_2 + 1)$$

$$\log\delta = \pi i \left(g'_1 h_1 + g_2 \alpha' + g_3 h_3 + \frac{\alpha' \varepsilon_2^2}{4} + \frac{\alpha' g_2^2}{2} + \frac{\alpha' \varepsilon_2 (g_2 + 1)}{2} \right)$$

$$2\vartheta_{(\varpi)}(u_h;\ a)\vartheta_{(\varpi+\varepsilon)}(0;\ a)$$

$$= \delta \underset{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}{S} (-1)^{\lambda_1(h_1+\varepsilon_1)+\lambda_2 g_2+\lambda_3(h_3+\varepsilon_3)} \vartheta \begin{Bmatrix} g'_1 + \lambda_1, & \varepsilon_2, & g_3 + \lambda_3 \\ \varepsilon_1 & h'_2 + \lambda_2, & \varepsilon_3 \end{Bmatrix} (v_h;\ b)\, \vartheta \begin{Bmatrix} \lambda_1, & \varepsilon_2, & \lambda_3 \\ \varepsilon_1, & \lambda_2, & \varepsilon_3 \end{Bmatrix} (v_h;\ b)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha' & 2 & 0 & 0 & \alpha'' \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -\alpha' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(u_1,\ u_2,\ u_3) = (v_1,\ v_2,\ \alpha v_1 + \alpha' v_2 + 2v_3)$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{22}, & a_{33} \\ a_{23}, & a_{31}, & a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} b_{11}, & \frac{1}{2} b_{22}, & 2b_{33} + 2\alpha b_{13} + 2\alpha' b_{23} + \frac{1}{2} b_{11}\alpha^2 + b_{12}\alpha\alpha' + \frac{1}{2} b_{22}\alpha'^2 - \alpha''\pi i \\ b_{23} + \frac{1}{2}\alpha b_{12} + \frac{1}{2}\alpha' b_{22}, & b_{13} + \frac{1}{2}\alpha b_{11} + \frac{1}{2}\alpha' b_{12}, & \frac{1}{2} b_{12} \end{pmatrix} \qquad \text{(IV)}$$

$$(\varpi) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix} \qquad (\varepsilon) = \begin{pmatrix} -\alpha\varepsilon_3, & -\alpha'\varepsilon_3, & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2, & \alpha\varepsilon_1 + \alpha'\varepsilon_2 + \alpha''\varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

$$g'_1 = g_1 + \alpha g_3, \qquad g'_2 = g_2 + \alpha' g_3, \qquad h'_3 = h_3 - \alpha h_1 - \alpha' h_2 - \alpha''(g_3 + 1)$$

$$\log\delta = \pi i \left(g'_1 h_1 + g'_2 h_2 + g_3 \alpha' + \frac{\alpha'' \varepsilon_3^2}{4} + \frac{\alpha'' g_3^2}{2} + \frac{\alpha'' \varepsilon_3 (g_3 + 1)}{2} \right)$$

$$2\vartheta_{(\varpi)}(u_h;\ a)\vartheta_{(\varpi+\varepsilon)}(0;\ a)$$

$$= \delta \underset{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}{S} (-1)^{\lambda_1(h_1+\varepsilon_1)+\lambda_2(h_2+\varepsilon_2)+\lambda_3 g_3} \vartheta \begin{Bmatrix} g'_1 + \lambda_1, & g'_2 + \lambda_2, & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & h'_1 + \lambda_3 \end{Bmatrix} (v_h;\ b)\, \vartheta \begin{Bmatrix} \lambda_1, & \lambda_2, & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \lambda_3 \end{Bmatrix} (v_h;\ b)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha' & 0 & 2 & 0 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -\alpha & -\alpha' \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
(u_1,\ u_2,\ u_3) = (v_1,\ 2v_2 + \alpha v_1,\ 2v_3 + \alpha' v_1) \\
\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{22}, & a_{33} \\ a_{23}, & a_{31}, & a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} b_{11}, & 2b_{22} + 2\alpha b_{12} + \frac{\alpha^2}{2} b_{11} - \alpha_1 \pi i, & 2b_{33} + 2\alpha' b_{13} + \frac{\alpha'^2 b_{11}}{2} - \alpha_3 \pi i \\ 2b_{23} + \alpha b_{13} + \alpha' b_{12} + \frac{\alpha\alpha' b_{11}}{2} - \alpha_2 \pi i, & \frac{\alpha' b_{11}}{2} + b_{13}, & \frac{\alpha b_{11}}{2} + b_{12} \end{pmatrix} \\
(\varpi) = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix} \qquad (\varepsilon) = \begin{pmatrix} -\alpha\varepsilon_2 - \alpha'\varepsilon_3, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1, & \alpha\varepsilon_1 + \alpha_1\varepsilon_2 + \alpha_2\varepsilon_3, & \alpha'\varepsilon_1 + \alpha_2\varepsilon_2 + \alpha_3\varepsilon_3 \end{pmatrix} \\
g'_1 = g_1 + \alpha g_2 + \alpha' g_3, \qquad h'_2 = h_2 - \alpha h_1 - \alpha_1(g_2 + 1) - \alpha_2 g_3 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad h'_3 = h_3 - \alpha' h_1 - \alpha_2 g_2 - \alpha_3(g_3 + 1) \\
\log\delta = \pi i \Big\{ g'_1 h_1 + \alpha_1 g_2 + \alpha_2 g_2 g_3 + \alpha_3 g_3 + \frac{\alpha_1}{4}\left[\varepsilon_2^2 + 2g_2^2 + 2\varepsilon_2(g_2+1)\right] \\
\qquad + \frac{\alpha_2}{2}(\varepsilon_2\varepsilon_3 + g_2\varepsilon_3 + g_3\varepsilon_2) + \frac{\alpha_3}{4}\left[\varepsilon_3^2 + 2g_3^2 + 2\varepsilon_3(g_3+1)\right]\Big\} \\
4\vartheta_{(\varpi)}(u_h;\ a)\vartheta_{(\varpi+\varepsilon)}(0;\ a) \\
= \delta \underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{S} (-1)^{\lambda_1(h_1+\varepsilon_1)+\lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3} \vartheta\begin{Bmatrix} \lambda_1 + g'_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1, & \lambda_2 + h'_2, & \lambda_3 + h'_3 \end{Bmatrix}(v_h;\ b)\vartheta\begin{Bmatrix} \lambda_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3 \\ \varepsilon_1, & \lambda_2, & \lambda_3 \end{Bmatrix}(v_h;\ b)
\end{array}\right\}\ (\mathrm{V})$$

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 2 & \alpha_2 & 0 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
(u_1,\ u_2,\ u_3) = (2v_1,\ v_2,\ 2v_3 + \alpha v_2) \\
\begin{pmatrix} a_{11}, & a_{22}, & a_{33} \\ a_{23}, & a_{31}, & a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_{11} - \alpha_1 \pi i, & \frac{1}{2} b_{22}, & 2b_{33} + 2\alpha b_{23} + \frac{\alpha^2}{2} b_{22} - \alpha_3 \pi i \\ b_{23} + \frac{\alpha}{2} b_{22}, & 2b_{31} + \alpha b_{12} - \alpha_2 \pi i, & b_{12} \end{pmatrix}
\end{array}\right\}\ (\mathrm{VI})$$

$$\left.\begin{aligned}
&(\varpi)=\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3\\ h_1 & h_2 & h_3\end{pmatrix} \qquad (\varepsilon)=\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & -\alpha\varepsilon_3, & \varepsilon_3 \\ \alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_3, & \varepsilon_2, & \alpha_2\varepsilon_1+\alpha_3\varepsilon_3+\alpha\varepsilon_2\end{pmatrix}\\
&g'_2=g_2+\alpha g_3, \qquad h'_1=h_1-\alpha_1(g_1+1)-\alpha_2 g_3, \qquad h'_3=h_3-\alpha_2 g_1-\alpha_3(g_3+1)-\alpha h_2\\
&\log\delta=\pi i\Big[g'_2 h_1+\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_1 g_3+\alpha_3 g_3+\frac{\alpha_1}{4}(2g_1^2+\varepsilon_1^2+2\varepsilon_1 g_1+2\varepsilon_1)\\
&\qquad+\frac{\alpha_2}{2}(\varepsilon_3 g_1+\varepsilon_1 g_3+\varepsilon_1\varepsilon_3)+\frac{\alpha_3}{4}(2g_3^2+\varepsilon_3^2+2\varepsilon_3 g_3+2\varepsilon_3)\Big]\\
&4\vartheta_{(\varpi)}(u_h;\ a)\vartheta_{(\varpi+\varepsilon)}(0;\ a)\\
&=\delta\underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{S}(-1)^{\lambda_1 g_1+\lambda_2(h_2+\varepsilon_2)+\lambda_3 g_3}\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, & \lambda_2+g'_2, & \varepsilon_3\\ \lambda_1+h'_1, & \varepsilon_2, & \lambda_3+h'_3\end{Bmatrix}(v_h;\ b)\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, & \lambda_2, & \varepsilon_3\\ \lambda_1, & \varepsilon_2, & \lambda_3\end{Bmatrix}(v_h;\ b)
\end{aligned}\right\}\ \text{(VI)}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\begin{matrix} 2&0&0&\alpha_1&\alpha_2&0\\ 0&2&0&\alpha_2&\alpha_3&0\\ 0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&2\end{matrix}\right\}\\
&(u_1,\ u_2,\ u_3)=(2v_1,\ 2v_2,\ v_3); \quad \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{22}, & a_{33}\\ a_{23}, & a_{31}, & a_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2b_{11}-\alpha_1\pi i, & 2b_{22}-\alpha_3\pi i, & \frac{1}{2}b_{33}\\ b_{23}, & b_{31}, & 2b_{12}-\alpha_2\pi i\end{pmatrix}\\
&(\varpi)=\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3\\ h_1 & h_2 & h_3\end{pmatrix} \qquad (\varepsilon)=\begin{pmatrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & 0\\ \alpha_1\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2, & \alpha_2\varepsilon_1+\alpha_3\varepsilon_2, & \varepsilon_3\end{pmatrix}\\
&h'_1=h_1-\alpha_1(g_1=1)-\alpha_2 g_2, \qquad h'_2=h_2-\alpha_2 g_1-\alpha_3(g_2+1)\\
&\log\delta=\pi i\Big[g_3 h_3+\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_1 g_2+\alpha_3 g_2+\frac{\alpha_1}{4}(2g_1^2+\varepsilon_1^2+2\varepsilon_1 g_1+2\varepsilon_1)\\
&\qquad+\frac{\alpha_2}{2}(g_1\varepsilon_2+g_2\varepsilon_1+\varepsilon_1\varepsilon_2)+\frac{\alpha_3}{4}(2g_2^2+\varepsilon_2^2+2\varepsilon_2 g_2+2\varepsilon_2)\Big]\\
&4\vartheta_{(\varpi)}(u_h;\ a)\vartheta_{(\varpi+\varepsilon)}(0;\ a)\\
&=\delta\underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{S}(-1)^{\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\lambda_3(h_3+\varepsilon_3)}\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \lambda_3+g_3\\ \lambda_1+h'_1, & \lambda_2+h'_2, & \varepsilon_3\end{Bmatrix}(v_h;\ b)\vartheta\begin{Bmatrix}\varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \lambda_3\\ \lambda_1, & \lambda_2, & \varepsilon_3\end{Bmatrix}(v_h;\ b)
\end{aligned}\right\}\ \text{(VII)}$$

$$\left.\begin{array}{l}
\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \alpha_1 & \alpha_6 & \alpha_5 \\ 0 & 2 & 0 & \alpha_6 & \alpha_2 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & 2 & \alpha_5 & \alpha_4 & \alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
(u_1, u_2, u_3)=(2v_1, 2v_2, 2v_3); \quad \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{22}, & a_{33} \\ a_{23}, & a_{31}, & a_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_{11}-\alpha_1\pi i, & 2b_{22}-\alpha_2\pi i, & 2b_{33}-\alpha_3\pi i \\ 2b_{23}-\alpha_4\pi i, & 2b_{31}-\alpha_5\pi i, & 2b_{12}-\alpha_6\pi i \end{pmatrix} \\
(\varpi)=\begin{pmatrix} g_1 & g_2 & g_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{pmatrix} \quad (\varepsilon)=\begin{pmatrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3 \\ \alpha_1\varepsilon_1+\alpha_6\varepsilon_2+\alpha_5\varepsilon_3, & \alpha_6\varepsilon_1+\alpha_2\varepsilon_2+\alpha_4\varepsilon_3, & \alpha_5\varepsilon_1+\alpha_4\varepsilon_2+\alpha_3\varepsilon_3 \end{pmatrix} \\
h'_1=h_1-\alpha_1(g_1+1)-\alpha_6 g_2-\alpha_5 g_3 \\
h'_2=h_2-\alpha_6 g_1-\alpha_2(g_2+1)-\alpha_4 g_3 \\
h'_3=h_3-\alpha_5 g_1-\alpha_4 g_2-\alpha_3(g_3+1) \\
\log\delta=\pi i(\alpha_1 g_1+\alpha_2 g_2+\alpha_3 g_3+\alpha_4 g_2 g_3+\alpha_5 g_3 g_1+\alpha_6 g_1 g_2) \\
+\frac{\pi i}{2}\left[\alpha_1(g_1^2+\varepsilon_1 g_1+\varepsilon_1)+\alpha_2(g_2^2+\varepsilon_2 g_2+\varepsilon_2)+\alpha_3(g_3^2+\varepsilon_3 g_3+\varepsilon_3)\right. \\
\left.+\alpha_4(\varepsilon_2 g_3+\varepsilon_3 g_2+\varepsilon_2\varepsilon_3)+\alpha_5(\varepsilon_3 g_1+\varepsilon_1 g_3+\varepsilon_3\varepsilon_1)+\alpha_6(\varepsilon_1 g_2+\varepsilon_2 g_1+\varepsilon_1\varepsilon_2)\right] \\
+\frac{\pi i}{4}(\alpha_1\varepsilon_1^2+\alpha_2\varepsilon_2^2+\alpha_3\varepsilon_3^2) \\
8\,\vartheta_{(\varpi)}(u_h;\, a)\,\vartheta_{(\varpi+\varepsilon)}(0;\, a) \\
=\delta \underset{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3}{S}(-1)^{\Sigma\lambda g}\,\vartheta\begin{Bmatrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3 \\ \lambda_1+h'_1, & \lambda_2+h'_2, & \lambda_3+h'_3 \end{Bmatrix}(v_h;\, b)\,\vartheta\begin{Bmatrix} \varepsilon_1, & \varepsilon_2, & \varepsilon_3 \\ \lambda_1, & \lambda_2, & \lambda_3 \end{Bmatrix}
\end{array}\right\} \text{(VIII)}$$

Königsberg in Januar 1878.

Sopra una classe di equazioni modulari.

(*Nota di* F. Brioschi, *in Milano.*)

1.° Le equazioni modulari che intendiamo considerare in questa Nota appartengono a quel genere di equazioni che altre volte ho denominato Jacobiane, perchè le radici di esse soddisfano ad una condizione enunciata da Jacobi nel terzo volume del Giornale di Matematica di Crelle.

Indicando con z_∞, z_0, z_1, $z_2, \ldots z_{n-1}$ le radici di una fra quelle equazioni si hanno, come è noto, le:

$$\sqrt{z_\infty} = \pm a_0 \sqrt{\pm n}, \qquad \sqrt{z_s} = a_0 + \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_r \, \varepsilon^{m_r s} a_r \qquad (s = 0,\ 1, \ldots\ n-1)$$

dove $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, ed m_1, $m_2, \ldots$ sono i residui quadratici di n, od i suoi non residui quadratici. Ponendo per una qualsivoglia di quelle radici:

$$z\sqrt{z} = \sqrt{Z}$$

una classe di quelle equazioni Jacobiane soddisfa a queste altre condizioni:

$$\sqrt{Z_\infty} = \pm A_0 \sqrt{\pm n}, \qquad \sqrt{Z_s} = A_0 + \sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_r \, \varepsilon^{m_r s} A_r$$

per le quali evidentemente vengono a stabilirsi delle relazioni fra le a_0, a_1, $a_2, \ldots$ e quindi delle proprietà speciali pei coefficienti delle equazioni in z. Per giungere a quest'ultimo risultato è però d'uopo sciegliere opportunamente nei vari casi speciali, cioè secondo i valori di n, tanto il segno a presciegliersi pei valori di $\sqrt{z_\infty}$ e di $\sqrt{Z_\infty}$, quanto la natura degli esponenti numerici m_r. Così per $n = 5$ si avranno:

$$\sqrt{z_\infty} = -a_0\sqrt{5}, \qquad \sqrt{z_s} = a_0 + \varepsilon^{2s} a_1 + \varepsilon^{3s} a_2$$

$$\sqrt{Z_\infty} = A_0\sqrt{5}, \qquad \sqrt{Z_s} = A_0 + \varepsilon^{s} A_1 + \varepsilon^{4s} A_2$$

per $n=7$:

$$\sqrt{z_\infty}=-a_0\sqrt{-7}, \qquad \sqrt{z_s}=a_0+\varepsilon^{6s}a_1+\varepsilon^{3s}a_2+\varepsilon^{5s}a_3$$
$$\sqrt{Z_\infty}=A_0\sqrt{-7}, \qquad \sqrt{Z_s}=A_0+\varepsilon^{s}A_1+\varepsilon^{4s}A_2+\varepsilon^{2s}A_3$$

per $n=11$:

$$\sqrt{z_\infty}=a_0\sqrt{-11}, \qquad \sqrt{z_s}=a_0+\varepsilon^{s}a_1+\varepsilon^{4s}a_2+\varepsilon^{9s}a_3+\varepsilon^{5s}a_4+\varepsilon^{3s}a_5$$

ed analogamente per $\sqrt{Z_\infty}$ e $\sqrt{Z_s}$ mutando le a in A. In generale saranno:

$$\sqrt{Z_\infty}=A_0\sqrt{\rho n}, \qquad \sqrt{Z_s}=A_0+\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_r\,\varepsilon^{m_r s}A_r$$

posto $\rho=(-1)^{\frac{n-1}{2}}$, e gli esponenti m_r residui quadratici di n. Per stabilire le espressioni delle $\sqrt{z}$ è d'uopo distinguere il caso in cui n è della forma $6g+1$ da quello in cui la forma di n sia $6g-1$. Nel primo caso si ha $\sqrt{z_\infty}=\rho a_0\sqrt{\rho n}$, nel secondo $\sqrt{z_\infty}=-\rho a_0\sqrt{\rho n}$; ed in entrambi sarà:

$$\sqrt{z_s}=a_0+\sum_1^{\frac{n-1}{2}}{}_r\,\varepsilon^{m_r s}a_r$$

essendo m_r residuo quadratico o non residuo quadratico di n, secondo che la congruenza $12i\equiv 1 \pmod{n}$ è soddisfatta da un numero, i il quale sia residuo quadratico o non residuo quadratico di n.

2.° Ciò posto sia $n=5$; le espressioni di $\sqrt{z_\infty}$, $\sqrt{Z_\infty}$ danno tosto $A_0=-5a_0^3$ e quelle di $\sqrt{z_s}$, $\sqrt{Z_s}$ le relazioni:

$$A_0=a_0^3+6a_0a_1a_2; \qquad a_0^2+a_1a_2=0$$

od in conclusione la condizione unica $a_0^2+a_1a_2=0$. Le equazioni modulari del sesto grado che hanno questa proprietà sono note per l'uso fattone nella risoluzione delle equazioni del quinto grado.

Per $n=7$: si hanno le condizioni:

$$A_0=7a_0^3; \qquad A_0=a_0^3+6a_1a_2a_3 \qquad \left.\begin{aligned} a_0^2a_1+a_0a_2^2+a_2a_3^2=0\\ a_0^2a_2+a_0a_3^2+a_3a_1^2=0\\ a_0^2a_3+a_0a_1^2+a_1a_2^2=0.\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Le prime due danno:

$$a=a_1a_2a_3=a_0^3$$

le altre tre, introducendo le notazioni:

$$b = a_2^3 a_3 + a_3^3 a_1 + a_1^3 a_2; \qquad c = a_2^2 a_3^3 + a_3^2 a_1^3 + a_1^2 a_2^3;$$

$$d = a^2 + a_2 a_3^5 + a_3 a_1^5 + a_1 a_2^5; \qquad e = 7ab + a_1^7 + a_2^7 + a_3^7$$

danno i seguenti valori di c, d, e in funzione di a, b e di a_0, e quindi in funzione di a_0 e di b:

$$c = -a_0(b + 3a_0^4), \qquad d = 4a_0^6, \qquad a_0 e = -b^2 + 5a_0^4 b - 9a_0^8.$$

Ora come ho dimostrato nella mia Nota presentata all'Istituto Lombardo nella adunanza del 23 gennajo 1868 (*) i coefficienti di qualunque equazione modulare Jacobiana dell'ottavo grado sono funzioni di a_0 e delle cinque espressioni a, b, c, d, e; le quali sono legate dalle due equazioni identiche:

$$ae - bd + c^2 - 7a^2 b = 0$$

$$ce - d^2 - a^2 d - b^3 - 2abc - 7a^4 = 0.$$

Sostituendo i valori trovati sopra per a, b, c, d, e nelle espressioni dei coefficienti della equazione di ottavo grado calcolate in quella Nota, si ha che indicando la equazione stessa colla:

$$z^8 + \alpha_1 z^7 + \alpha_2 z^6 + \alpha_3 z^5 + \alpha_4 z^4 + \alpha_5 z^3 + \alpha_6 z^2 + \alpha_7 z + \alpha_8 = 0$$

risultano:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_5 = 0; \quad \alpha_2 = -14a_0^2 m, \quad \alpha_4 = 63a_0^4 m^2, \quad \alpha_6 = -70a_0^6 m^3, \quad \alpha_8 = -7a_0^8 m^4 \\ \qquad \alpha_7 = a_0^6[7^7 a_0^8 - 14 \cdot 7^5 a_0^6 m + 63 \cdot 7^3 a_0^4 m^2 - 70 \cdot 7a_0^2 m^3 - m^4] \end{array}\right\} \quad (2)$$

essendo $a_0^2 m = b + 8a_0^4$; per cui ponendo:

$$z = y a_0 \sqrt{m}, \qquad \tau = \frac{7^2 \cdot a_0^2}{m}$$

l'equazione modulare Jacobiana sarà in questo caso la:

$$y^8 - 14y^6 + 63y^4 - 70y^2 + Ty - 7 = 0$$

nella quale:

$$T = \frac{1}{\sqrt{\tau}}(\tau^4 - 14\tau^3 + 63\tau^2 - 70\tau - 7).$$

(*) *Sopra le equazioni generali dell'ottavo grado che hanno lo stesso gruppo delle equazioni del moltiplicatore corrispondente alla trasformazione di settimo ordine delle funzioni ellittiche.*

Quella equazione contiene un solo coefficiente non numerico ed è quindi la più semplice fra le equazioni Jacobiane dell'ottavo grado. Essa è dovuta al prof. KLEIN che la dedusse da altre considerazioni tanto nella sua Memoria: *Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades*, pubblicata nel volume 14 dei Mathematische Annalen (pag. 143), quanto nella Nota: *Ueber Gleichungen Siebenten Grades*, presentata il 20 maggio 1878 alla Società di Erlangen.

3.° Rispetto ai risultati della quale ultima Nota stimiamo opportuno aggiungere che posto:

$$a_0 = x_1 x_2 x_3, \qquad a_1 = x_2^2 x_3, \qquad a_2 = x_3^2 x_1, \qquad a_3 = x_1^2 x_2$$

le tre equazioni di condizione (1) coincidono nella sola:

$$f = x_2^3 x_3 + x_3^3 x_1 + x_1^3 x_2 = 0$$

mentre è soddisfatta l'altra $a_0^3 = a_1 a_2 a_3$. Ora posto:

$$\lambda = x_1 x_2 x_3, \qquad \mu = x_2^2 x_3^3 + x_3^2 x_1^3 + x_1^2 x_2^3, \qquad \nu = x_2 x_3^5 + x_3 x_1^5 + x_1 x_2^5$$

si ha tosto:

$$b = -\lambda^2(3\lambda^2 + \nu)$$

quindi:

$$m = 5\lambda^2 - \nu = h$$

essendo h l'hessiano della forma ternaria f, ossia:

$$h = 32 \sum (\pm f_{11} f_{22} f_{33}).$$

Così ponendo:

$$k = 4^2 \cdot 6^2 \sum (fh)^{rs} f_r h_s; \qquad \theta = 4 \cdot 6 \sum (\pm f_1 h_2 k_3)$$

covarianti degli ordini 14°, e 21° della forma f; si hanno le relazioni:

$$\lambda k = -\mu(h^2 - 5 \cdot 7^2 \cdot \lambda^2 h + 7^4 \lambda^4), \quad \lambda\theta = h^4 + 70 \cdot 7 \cdot \lambda^2 h^3 - 63 \cdot 7^3 \cdot \lambda^4 h^2 + 14 \cdot 7^5 \lambda^6 h - 7^7 \lambda^8$$

alle quali deve aggiungersi la relazione identica:

$$\mu^3 = -\lambda[h^2 - 13\lambda^2 h + 7^2 \cdot \lambda^4].$$

Da queste si ottiene dapprima la:

$$\theta^2 - k^3 = \overline{12}^3 \cdot h^7$$

poi rammentando i valori (2) si ha tosto che ponendo $z = y\lambda\sqrt{h}$, la equazione

Jacobiana diventa la seguente:

$$y^8-14y^6+63y^4-70y^2-\frac{\theta}{h^3\sqrt{h}}y-7=0$$

e siccome si ha identicamente:

$$(y^4-13y^2+49)(y^4-5y^2+1)^3+\overline{12}^3y^2=(y^8-14y^6+63y^4-70y^2-7)^2$$

si avrà infine che la equazione stessa potrà porsi sotto la forma:

$$(y^4-13y^2+49)(y^4-5y^2+1)^3=\frac{k^3}{h^7}y^2$$

4.° Per $n=11$ le condizioni a verificarsi per la sussistenza delle:

$$\left.\begin{array}{ll}\sqrt{z_\infty}=a_0\sqrt{-11}, & \sqrt{z_s}=a_0+\varepsilon^s a_1+\varepsilon^{4s}a_2+\cdots+\varepsilon^{3s}a_5\\ \sqrt{Z_\infty}=A_0\sqrt{-11}, & \sqrt{Z_s}=A_0+\varepsilon^s a_1+\varepsilon^{4s}A_2+\cdots+\varepsilon^{3s}A_5\end{array}\right\} \quad (3)$$

sono le sei seguenti:

$$A_0=a_0^3+3(a_1a_4^2+a_4a_5^2+a_5a_2^2+a_2a_3^2+a_3a_1^2)$$
$$a_0(a_1^2+2a_2a_3)+2a_1a_3a_5+a_4^2a_5+a_2^2a_4=0$$
$$a_0(a_2^2+2a_4a_5)+2a_2a_5a_1+a_3^2a_1+a_4^2a_3=0$$
$$a_0(a_3^2+2a_5a_2)+2a_3a_2a_4+a_1^2a_4+a_5^2a_1=0$$
$$a_0(a_4^2+2a_3a_1)+2a_4a_1a_2+a_5^2a_2+a_3^2a_5=0$$
$$a_0(a_5^2+2a_1a_4)+2a_5a_4a_3+a_2^2a_3+a_1^2a_2=0$$

la prima delle quali per essere $A_0=-11a_0^3$ conduce alla seguente:

$$a=a_1a_4^2+a_4a_5^2+a_5a_2^2+a_2a_3^2+a_3a_1^2=-4a_0^3.$$

Dalle altre equazioni di condizione si deducono alcune relazioni fra funzioni cicliche delle cinque lettere a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; funzioni le quali, colla a_0, compongono le somme delle potenze delle radici z e quindi i coefficienti dell'equazione Jacobiana del dodicesimo grado.

La proprietà caratteristica di queste equazioni rilevasi però tosto dalle relazioni (3). Infatti essendo per le medesime:

$$\sum_s z_s=11a_0^2, \qquad \sum_s\sqrt{z_sZ_s}=11a_0A_0, \qquad \sum_s Z_s=11A_0^2$$

per $s=0, 1,\ldots 10$: se con S_1, S_2, S_3 si indicano le somme delle potenze prima, seconda e terza di tutte le radici z si hanno le:

$$S_1=0, \qquad S_2=0, \qquad S_3=0$$

e quindi saranno nulli i coefficienti del secondo, terzo, e quarto termine della equazione.

I coefficienti degli altri termini, dei quali ci riserviamo dare i valori completi in altro scritto, sono funzioni intiere e razionali di tre sole quantità, e cioè delle:

$$a_0; \qquad a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = b; \qquad a_1^{11} + a_2^{11} + a_3^{11} + a_4^{11} + a_5^{11} = c.$$

È quindi evidente l'analogia fra queste equazioni e la Jacobiana generale del sesto grado; analogia la quale è vieppiù confermata dal fatto che il coefficiente del quarto termine della equazione del dodicesimo grado ha il valore seguente:

$$-5 \cdot 2^3 \cdot 11^3 \cdot a_0^3 (a_0^5 + b)$$

e perciò quando suppongasi $a_0^5 + b = 0$, è nullo il coefficiente del quarto termine ed altresì quello del seguente, mentre i coefficienti degli altri si riducono ad essere funzioni delle sole a_0, c; come appunto ha luogo per le equazioni del sesto grado.

14 novembre 1878.

Sopra un teorema della teorica delle funzioni.

(*Nota del prof.* A. Tonelli, *a Pisa.*)

Uno dei teoremi più importanti nella teorica delle funzioni è il seguente:

Qualunque funzione S monodroma dei punti di una superficie $2p+1$ volte connessa T, che rappresenta la diramazione di una funzione s di z definita dall'equazione algebrica

$$F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z})=0,$$

si esprime razionalmente per s e per z, e se diviene infinita m' volte di primo ordine, contiene

$$m'-p+1$$

costanti arbitrarie.

Questo teorema è stato enunciato e dimostrato per la prima volta da Riemann al § 9 della sua Memoria: *Sopra le funzioni Abeliane,* supponendo che la posizione dei punti in cui S diviene infinita fosse limitata a certe condizioni, come quella che fossero esclusi i punti pei quali s o z divengono infiniti, ed anche altre che avremo occasione di apprezzare in seguito. Ultimamente il sig. Prym nel vol. 83 del Giornale di Crelle ha dimostrato il medesimo teorema in tutta la sua generalità, non occupandosi però del numero delle costanti arbitrarie che restano nell'espressione di S. Però la elegantissima dimostrazione del sig. Prym potrebbe far dubitare che per certi valori di S fosse rigorosa, perchè in essa si applica la ricerca del massimo comun divisore tra due polinomi, nei quali sì la funzione principale che i coefficienti divengono infiniti.

Io ho cercato di dimostrare il medesimo teorema attenendomi al metodo di Riemann, e qui espongo i risultati che ho ottenuto. Il numero delle costanti non coincide con quello accennato da Riemann altro che in casi speciali, ovvero escludendo certe posizioni dei punti in cui S deve divenire infinita.

Questa cosa poi era già stata osservata da Roch nella sua Memoria: *Sopra il numero delle costanti nelle funzioni algebriche,* pubblicata nel vol. 64 del Giornale di Crelle.

Il metodo di Riemann per la dimostrazione del teorema accennato ha questo vantaggio, che insegna anche il modo che si può tenere per la costruzione di S in funzione di s e z, e per questo non credo inutile esporre la seguente dimostrazione nella quale questa costruzione si fa in un caso molto generale.

I.

Supporremo in generale che S debba divenire infinita:

di ordine respettivamente uguale ad $a_1, a_2, \ldots, a_\alpha$ nei punti

$$(z=z_1,\ s=s_1)(z=z_2,\ s=s_2),\ldots \qquad (z=z_\alpha,\ s=s_\alpha) \tag{1}$$

essendo $z_1, z_2, \ldots, z_\alpha$; $s_1, s_2, \ldots, s_\alpha$ quantità finite, negli intorni dei quali punti, sopra la superficie T, si ha

$$s-s_l=A_l(z-z_\alpha)^{\frac{\alpha_l}{\mu_l}}+A'_l(z-z_\alpha)^{\frac{\alpha_l+1}{\mu_l}}+\cdots$$

e intendendo che sieno uguali a 1 le μ_l relative ai punti (1) che non sono di diramazione;

di ordine respettivamente uguale a $b_1, b_2, \ldots, b_\beta$ nei punti

$$(z=\infty,\ s=s'), \qquad (z=\infty,\ s=s''),\ldots, \qquad (z=\infty,\ s=s^{(\beta)}) \tag{2}$$

essendo le $s', s'', \ldots, s^{(\beta)}$ quantità finite, negli intorni dei quali punti si ha, sopra la superficie T,

$$s-s^{(l)}=\frac{B_l}{z^{\frac{\beta_l}{\nu_l}}}+\frac{B'_l}{z^{\frac{\beta_l+1}{\nu_l}}}+\cdots$$

e intendendo che sieno uguali ad 1 le ν_l relative ai punti che non sono di diramazione:

di ordine respettivamente uguale a $c_1, c_2, \ldots, c_\gamma$ nei punti

$$(z=z',\ s=\infty), \qquad (z=z'',\ s=\infty),\ldots, \qquad (z=z^{(\gamma)},\ s=\infty) \tag{3}$$

essendo z', z'',..., $z^{(\gamma)}$ quantità finite, negli intorni dei quali punti, sopra la superficie T, si ha

$$s = \frac{C_l}{(z - z^{l})^{\frac{\gamma_l}{\pi_l}}} + \frac{C'_l}{(z - z^{(l)})^{\frac{\gamma_l - 1}{\pi_l}}} + \cdots$$

e intendendo che sieno uguali ad 1 le π_l relative ai punti (3) che non sono di diramazione;

finalmente di ordine d nel punto

$$(z = \infty,\ s = \infty) \tag{4}$$

che per maggior generalità supporremo che esista sopra la superficie T, e nell'intorno del quale si ha

$$s = A z^{\frac{\delta}{\varpi}} + A' z^{\frac{\delta - 1}{\varpi}} + \cdots$$

intendendo che sia $\varpi = 1$ se quel punto non è di diramazione, e $d = 0$ se in quel punto la S non diviene infinita.

Nei punti (2) (3) (4) intendiamo che sieno compresi tutti i punti della superficie T per cui z o s divengono infiniti, perchè, anche quando in essi la S non dovesse divenire infinita, sarebbe necessario considerare quei punti in modo speciale. Per questo a_1, a_2,..., b_1, b_2,..., c_1, c_2,..., d saranno numeri interi e positivi e alcuni potranno anche essere uguali a zero. I numeri α_l, β_l, γ_l sono positivi e differenti da zero e respettivamente primi con μ_l, ν_l, π_l: saranno primi tra loro anche δ e ϖ, e quando sopra la superficie T non esista un punto (4) si supporranno ambedue uguali a zero.

Per semplicità accenneremo con

$$(\overset{t}{s}, \overset{t'}{z})$$

una funzione generale completa in s e z, che contiene tutti i termini che si possono ottenere combinando le potenze di s da 0 a t, con le potenze di z da 0 a t', e che avrà

$$(t+1)(t'+1)$$

termini differenti con altrettanti coefficienti.

Ciò premesso andiamo a vedere se e come possa determinarsi una funzione S della forma

$$\frac{\varphi(s,\ z)}{\psi(s,\ z)}$$

che ammetta gl'infiniti (1) (2) (3) (4).

Incominciamo dal punto (4). Un termine della forma

$$A s^x z^y$$

in quel punto diviene infinito di ordine

$$\delta x + \varpi y \tag{5}$$

e quindi una funzione razionale intera $\varphi(s, z)$ in quel punto diviene infinita di un ordine uguale al massimo dei numeri (5) relativi ad ognuno dei suoi termini.

Se

$$B s^{x'} z^{y'}$$

è uno dei termini del denominatore $\psi(s, z)$ pei quali il numero (5) ha il massimo valore, questa funzione diverrà infinita nel punto (4) di ordine

$$\delta x' + \varpi y'.$$

Accennando con x e y in generale gli esponenti di s e z pei quali al numeratore il numero (5) ha il massimo valore, la funzione

$$\frac{\varphi(s,\ z)}{\psi(s,\ z)}$$

diverrà infinita nel punto (4) di ordine

$$\delta x + \varpi y - (\delta x' + \varpi y') = \delta(x - x') + \varpi(y - y')$$

e perchè quest'ordine sia uguale a d, dovrà essere

$$\delta(x - x') + \varpi(y - y') = d. \tag{6}$$

Questa equazione è solubile in numeri interi perchè δ e ϖ sono primi tra loro, per cui sarà sempre possibile trovare due numeri interi l, l' che la soddisfino, e allora, posto

$$x' = x - l, \qquad y' = y - l',$$

la funzione

$$\frac{\overset{x\ \ \ y}{(s,\ z)}}{\overset{x'\ \ y'}{(s,\ z)}} \tag{7}$$

diverrà infinita di ordine d nel punto (4).

Dei numeri l e l' uno potrà anche essere negativo, ma non ambedue, perchè d è positivo, e se fosse $d = 0$ la soluzione più semplice della (6) sarebbe $l = l' = 0$; in tutti quanti i casi i ragionamenti che faremo in seguito saranno sempre giusti.

È bene notare subito che la (6) non istabilisce alcuna limitazione nè relazione per le x, y, le quali restano completamente arbitrarie. Fin qui non si è stabilito che una relazione tra la differenza dei gradi di s e di z nei termini del numeratore e denominatore della (7), i cui infiniti nel punto (4) sono massimi. Per questo la condizione ora posta non implica nemmeno una limitazione nei singoli gradi di s e z al numeratore e denominatore della (7), che anzi le potenze di z e di s possono superare al numeratore i numeri x, y, al denominatore i numeri x', y', purchè i gradi di s e z sieno tali nel prodotto che la condizione posta non venga disturbata e si abbia sempre

$$\delta(x-x')+\varpi(y-y')=d.$$

L'espressione (7) non è quindi la forma più generale di una funzione che diviene infinita di ordine d nel punto (4). Andremo ora a generalizzarla.

Sieno θ_1, $\theta_2,\ldots$, θ', $\theta'',\ldots$, i più piccoli numeri pei quali si ha

$$\left.\begin{array}{lll} \theta_1\delta \geqq \varpi, & \theta_2\delta \geqq 2\varpi,\ldots, & \theta_k\delta \geqq k\varpi \\ \theta'\varpi \geqq \delta, & \theta''\varpi \geqq 2\delta,\ldots, & \theta^h\varpi \geqq h\delta \end{array}\right\} \tag{10}$$

i quali naturalmente non diminuiranno col crescere del loro indice, e quelli di una serie incominciando coll'unità seguiranno l'ordine naturale dei numeri, colla ripetizione, qualche volta, del medesimo numero. Allora le funzioni della forma

$$(\overset{x+1}{s}, \overset{y-\theta'}{z}),\quad (\overset{x+2}{s}, \overset{y-\theta''}{z}),\ldots,\quad (\overset{x+k}{s}, \overset{y-\theta^k}{z}) \tag{8}$$

$$(\overset{x-\theta_1}{s}, \overset{y+1}{z}),\quad (\overset{x-\theta_2}{s}, \overset{y+2}{z}),\ldots,\quad (\overset{x-\theta^h}{s}, \overset{y+h}{z}) \tag{9}$$

divengono infinite nel punto (4) di ordine respettivamente uguale a

$$\begin{gathered} \delta(x+1)+\varpi(y-\theta')\leqq\delta x+\varpi y \\ \delta(x+2)+\varpi(y-\theta'')\leqq\delta x+\varpi y \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \delta(x-\theta_1)+\varpi(y+1)\leqq\delta x+\varpi y \\ \delta(x-\theta_2)+\varpi(y+2)\leqq\delta x+\varpi y \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

e le funzioni della forma

$$(\overset{x'+1}{s}, \overset{y'-\theta'}{z}),\quad (\overset{x'+2}{s}, \overset{y'-\theta''}{z}),\ldots,\quad (\overset{x'-k'}{s}, \overset{y'-\theta^{k'}}{z}) \tag{8'}$$

$$(\overset{x'-\theta_1}{s}, \overset{y'+1}{z}),\quad (\overset{x'-\theta_2}{s}, \overset{y'+2}{z}),\ldots,\quad (\overset{x'-\theta_{h'}}{s}, \overset{y'+h'}{z}) \tag{9'}$$

divengono infinite nel medesimo punto di ordine respettivamente uguale a

$$\begin{array}{l}
\delta(x'+1)+\varpi(y'-\theta')\leqq\delta x'+\varpi y' \\
\delta(x'+2)+\varpi(y'-\theta'')\leqq\delta x'+\varpi y' \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\delta(x'-\theta_1)+\varpi(y'+1)\leqq\delta x'+\varpi y' \\
\delta(x'-\theta_2)+\varpi(y'+2)\leqq\delta x'+\varpi y' \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{array}$$

e quindi se chiamiamo S_1, Z_1, S'_1, Z'_1, respettivamente le somme di un certo numero di funzioni della forma (8), (9), (8'), (9') l'espressione

$$\frac{S_1+(\overset{x}{s},\ \overset{y}{z})+Z_1}{S'_1+(\overset{x'}{s},\ \overset{y'}{z})+Z'_1} \tag{11}$$

potrà essere sostituita alla (7), come più generale, e sarà sempre soddisfatta la condizione di divenire infinita di ordine d nel punto (4). Forme più semplici si ottengono dalla (11) sopprimendo una od altra delle S_1, S'_1, Z_1, Z'_1, ovvero supponendo uguali a zero alcuni dei numeri h, h', k, k'.

La funzione (11) sarà allora della forma

$$\frac{(\overset{x+k}{s},\ \overset{y-\theta^k}{z})+(\overset{x+k-1}{s},\ \overset{y-\theta^{k-1}}{z})+\cdots+(\overset{x}{s},\ \overset{y}{z})+(\overset{x-\theta_1}{s},\ \overset{y+1}{z})+\cdots+(\overset{x-\theta^h}{s},\ \overset{y+h}{z})}{(\overset{x'+k'}{s},\ \overset{y-\theta^{k'}}{z})+(\overset{x'+k'-1}{s},\ \overset{y-\theta^{k'-1}}{z})+\cdots+(\overset{x'}{s},\ \overset{y'}{z})+(\overset{x'-\theta_1}{s},\ \overset{y'+1}{z})+\cdots+(\overset{x'-\theta^{h'}}{s},\ \overset{y'+h'}{z})}$$

essendo h, h', k, k' arbitrari, e quindi potendosi rendere così grandi quanto sarà necessario per le altre condizioni cui deve sodisfare la (11), purchè contemporaneamente x e y sieno così determinati che $x-\theta_h$, $y-\theta^k$, $x'-\theta_{h'}$, $y'-\theta^{k'}$ non divengano negative. Vedremo poi come, in generale, sarà necessario che questi numeri sieno differenti da zero.

II.

Con la forma ultimamente assegnata alla funzione (11) si vede che mentre essa diviene infinita di ordine d nel punto (4), negli altri punti (2) e (3) può divenire infinita di certi ordini dipendenti dalle massime potenze $x+k$, $x'+k'$, $y+h$, $y'+h'$ di s e di z nel numeratore e nel denominatore, le quali sono in certo modo arbitrarie. Questa arbitrarietà ci offre appunto il mezzo di far sì che la (11) divenga infinita di ordine stabilito nei punti (2) e (3).

Incominceremo dal primo dei punti (3) pel quale il numeratore della (11) diviene infinito di ordine

$$\gamma_1(x+k)$$

e il denominatore di ordine

$$\gamma_1(x'+k')$$

e quindi la funzione stessa di ordine

$$\gamma_1(x-x'+k-k')=\gamma_1(l+k-k').$$

Per le condizioni imposte dovremmo avere

$$\gamma_1(l+k-k')=c_1$$

ma questa uguaglianza non sarà possibile, in generale, per valori interi di $l+k-k'$, e quindi quelle condizioni non potranno soddisfarsi colla determinazione dei soli gradi di s nella (11), ma sarà necessario ricorrere alle funzioni in z che moltiplicano le potenze di s. Il prodotto

$$s^t(z-z')^r$$

nel primo dei punti (3) diviene infinito di ordine

$$\gamma_1 t - r\pi_1$$

per cui, se le potenze superiori $x+k$, $x+k-1,\ldots$, di s nel numeratore della (11) sono moltiplicate per funzioni in z che contengono dei fattori della forma

$$(z-z')^{r'_{k+x}}, \qquad (z-z')^{r'_{k+x-1}},\ldots$$

con le r' soggette alle condizioni

$$\left.\begin{array}{l}\gamma_1(l+k-k')-\pi_1 r'_{x+k}\overline{\overline{<}}\, c_1\\ \gamma_1(l+k-k'-1)-\pi_1 r'_{x+k-1}\overline{\overline{<}}\, c_1\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\} \tag{12}$$

dove almeno una volta è soddisfatta una uguaglianza, la (11) diverrà infinita di ordine c_1 nel primo dei punti (3). Le condizioni (12) però non determinano nè k nè k' perchè, una eccettuata, le altre sono disuguaglianze, e stabilito una volta il valore di $k-k'$ e il corrispondente valore di r' che soddisfa una delle equazioni (12), si può sempre aumentare il valore di $k-k'$ purchè questo, unito con un conveniente valore di r', soddisfi alle disuguaglianze (12). Il grado di s può dunque prendersi ancora così grande come si vuole, tenendo sempre conto della (6) e delle (12).

Quello che si è detto pel primo dei punti (3) può ripetersi pel secondo, cioè, se le potenze superiori di s nel numeratore della (11) vengono moltiplicate respettivamente per fattori della forma

$$(z-z'')^{r''_{k+x}}, \qquad (z-z'')^{r''_{k+x-1}}, \ldots$$

con le r'' soggette alle condizioni

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_2(l+k-k')-\pi_2 r''_{k+x} \leq c_2 \\ \gamma_2(l+k-k'-1)-\pi_2 r''_{k+x-1} \leq c_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{13}$$

e, una volta almeno, è soddisfatto il segno di uguaglianza, la (11) diverrà infinita nel secondo dei punti (3) di ordine c_2. Le medesime considerazioni fatte relativamente alle (12) possono ripetersi per le (13).

Finalmente, nel modo stesso, si può dire, che ove le funzioni del numeratore della (11), che moltiplicano le massime potenze di s, abbiano dei fattori della forma

$$(z-z^{(\gamma)})^{r^{(\gamma)}_{k+x}}, \qquad (z-z^{(\gamma)})^{r^{(\gamma)}_{k+x-1}}, \ldots$$

con le $r^{(\gamma)}$ soggette alle condizioni

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_\gamma(l+k-k')-\pi_\gamma r^{(\gamma)}_{k+x} \leq c_\gamma \\ \gamma_\gamma(l+k-k'-1)-\pi_\gamma r^{(\gamma)}_{k+x-1} \leq c_\gamma \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{14}$$

essendo una volta almeno soddisfatta una uguaglianza, la (11) diverrà infinita di ordine c_γ nell'ultimo dei punti (3). Qui pure si può ripetere quanto si è detto a proposito del sistema (12).

L'essere le γ e le π col medesimo indice, prime tra loro, fa sì che possa sempre rendersi soddisfatta una equazione di ognuno dei sistemi (12), (13),... (14), e con soluzioni positive essendo le π e le γ numeri positivi. Inoltre si vede che se prendiamo le equazioni

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1 x-\pi_1 y=c_1 \\ \gamma_2 x-\pi_2 y=c_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \gamma_\gamma x-\pi_\gamma y=c_\gamma \end{array}\right\} \tag{15}$$

e le risolviamo tutte quante indipendentemente tra loro, e tra le più semplici soluzioni positive consideriamo il massimo valore di x e lo chiamiamo g, prendendo

$$l+k-k' \geqq g$$

le (12), (13),... (14) saranno sempre soddisfatte, e, almeno una volta, avremo una uguaglianza sçegliendo i valori delle r convenientemente coll'ajuto delle (15).

Abbiamo supposto l'esistenza di S'_1 nella (11), ovvero k' differente da zero, e ciò per maggiore generalità, ma si vede facilmente che i nostri ragionamenti valgono anche nel caso speciale di $k'=0$.

III.

In un modo analogo porremo le condizioni relative agli infiniti nei punti (2). Pel primo di quei punti la (11), colla forma fin qui stabilita per essa relativamente alla z, diviene infinita di ordine

$$\nu_1(y+h)-\nu_1(y'+h')=\nu_1(l'+h-h')$$

e non potendosi in generale porre

$$\nu_1(l'+h-h')=b_1$$

per valori interi di $l'+h-h'$, bisognerà porre qualche condizione nella forma delle funzioni di s che moltiplicano le massime potenze di z nel numeratore della (11).

Osserviămo per questo che il prodotto

$$z^\tau(s-s')^\rho$$

nel primo dei punti (2) diviene infinito di ordine

$$\nu_1\tau-\beta_1\rho$$

per cui, se le potenze superiori $y+h$, $y+h-1,\ldots$, di z nel numeratore della (11), sono moltiplicate per funzioni di s che contengano dei fattori della forma

$$(s-s')^{\rho'_{h+y}}, \qquad (s-s')^{\rho'_{h+y-1}},\ldots$$

con le ρ' soggette alle condizioni

$$\left.\begin{array}{l}\nu_1(l'+h-h')-\beta_1\rho'_{h+y}\leqq b_1\\ \nu_1(l'+h-h'-1)-\beta_1\rho'_{h+y-1}\leqq b_1\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\} \qquad (16)$$

e almeno una volta è soddisfatta una uguaglianza, la (11) diverrà infinita di ordine b_1 nel primo dei punti (2). Qui pure relativamente alle h, h' può ripetersi quanto si disse per le k, k', e cioè che le (16) non determinano $h-h'$ perchè basta in esse considerare le disuguaglianze ad eccezione di una qualunque di esse.

Nel medesimo modo se le potenze superiori di z nel numeratore della (11) sono moltiplicate per dei fattori della forma

$$(s-s'')^{\rho''_{h+y}}, \qquad (s-s'')^{\rho''_{h+y-1}}, \ldots$$

con le ρ'' soggette alle condizioni

$$\left.\begin{array}{l} \nu_2(l'+h-h')-\pi_2\rho''_{h+y} \leqq b_2 \\ \nu_2(l'+h-h'-1)-\pi_2\rho''_{h+y-1} \leqq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (17)$$

e una volta almeno è soddisfatta una uguaglianza, la (11) diverrà infinita di ordine b_2 nel secondo dei punti (2).

Finalmente, seguendo sempre il medesimo processo, se le potenze superiori di z nel numeratore della (11) sono moltiplicate per dei fattori della forma

$$(s-s^{(\beta)})^{\rho^{(\beta)}_{h+y}}, \qquad (s-s^{(\beta)})^{\rho^{(\beta)}_{y+h-1}}, \ldots$$

con le $\rho^{(\beta)}$ soggette alle condizioni

$$\left.\begin{array}{l} \nu_\beta(l'+h-h')-\beta_\beta\,\rho^{(\beta)}_{h+y} \leqq b_\beta \\ \nu_\beta(l'+h-h')-\beta_\beta\,\rho^{(\beta)}_{h+y-1} \leqq b_\beta \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (18)$$

e almeno una volta è soddisfatta una uguaglianza, la (11) diverrà infinita di ordine b_β nell'ultimo dei punti (2). Per le (17) e (18) può ripetersi quanto si è detto per le (16). Possiamo pure osservare che le nostre considerazioni varrebbero anche quando la (11) non contenesse Z'_1 ovvero quando fosse $h'=0$.

Poichè le β e le ν di uguale indice sono prime fra loro e positive, così potrà sempre risolversi in numeri interi e positivi una delle equazioni di ognuno dei sistemi (16), (17),... (18). Inoltre si vede che se si risolvono separatamente le equazioni

$$\left.\begin{array}{l} \nu_1 x-\beta_1 y=b_1 \\ \nu_2 x-\beta_2 y=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \nu_\beta x-\beta_\beta y=b_\beta \end{array}\right\} \qquad (19)$$

e si chiama f il massimo valore della x tra le più semplici soluzioni positive delle (19) prendendo

$$l'+h-h' \geqq f$$

potremo sempre soddisfare le (16), (17),... (18), e almeno una volta avremo una uguaglianza scegliendo convenientemente le ρ coll'ajuto delle (19).

Naturalmente le (12) (13) (14) (16) (17) (18) consteranno di un numero limitato di condizioni, le quali cessano quando già il primo termine del primo membro sia minore o uguale al secondo membro.

Le condizioni che abbiamo imposte al numeratore della (11) potevamo imporle al denominatore introducendo nelle funzioni che lo compongono i fattori della forma

$$(z-z')^{r'}, \quad (z-z'')^{r''}, \ldots, \quad (s-s')^{\rho'}, \quad (s-s'')^{\rho''}, \ldots$$

In questo caso le r e le ρ verrebbero determinate con condizioni della forma

$$\left.\begin{array}{l} \gamma(l+k-k')+\pi r_{x'+k'} \leqq c \\ \gamma(l+k-k'+1)+\pi' r_{x'+k'-1} \leqq c \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (20)$$

$$\left.\begin{array}{l} \nu(l'+h-h')+\beta \rho_{y'+h'} \leqq b \\ \nu(l'+h-h'+1)+\beta \rho_{y'+h'-1} \leqq b \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (21)$$

assegnando successivamente alle γ, π, c, ν, β, b gl'indici che hanno nelle (12) (13),... Sopra questi sistemi si potrebbero fare le stesse osservazioni che abbiamo fatto sopra i sistemi (12), (13),... e se li scriviamo sotto l'altra forma,

$$\left.\begin{array}{l} \pi r_{x'+k'}-\gamma(k'-l-k) \leqq c \\ \pi r_{x'+k'-1}-\gamma(k'-l-k-1) \leqq c \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta \rho_{y'+h'-1}-\nu(h'-h-l') \leqq b \\ \beta \rho_{y'+h'-1}-\nu(h'-h-l'-1) \leqq b \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (20')$$

considerando una volta una uguaglianza, questa avrà soluzioni positive. Qui k' e h' prendono il posto di k e h nelle (12), (13),... e quindi le medesime conseguenze che si deducono nel caso generale varrebbero anche ove si supponesse $h=0$, $k=0$, cioè ove la (11) non contenesse al numeratore S_1 e Z_1.

Possiamo dunque concludere in generale che è sempre possibile costruire una funzione della forma

$$\frac{\varphi(s,\ z)}{\psi(s,\ z)}$$

così che divenga infinita di ordini dati nei punti (2) (3) (4), ed ancora abbiamo di arbitrario x, y e in parte h, k, h', k'. Di questa arbitrarietà ce ne serviremo per porre la condizione che la (11) divenga infinita nei punti (1), nei quali sì z che s hanno valori finiti. Prima però di passare a questo, vogliamo studiare un poco la forma della (11) e vedere quante costanti arbitrarie ancora contiene, e in quanti punti divengono infinite e infinitesime le funzioni del numeratore e del denominatore.

IV.

Prima di aver poste le condizioni relative agl'infiniti (2) e (3) si vede facilmente che il numero delle costanti arbitrarie nel numeratore della (11) è

$$\begin{aligned}(x+1)(y+1)+(x-\theta_1+1)+(x-\theta_2+1)+\cdots+(x-\theta_h+1)+\\+(y-\theta'+1)+(y-\theta''+1)+\cdots+(y-\theta^k+1)=\\=(x+k+1)(y+h+1)-hk-\Theta-\Theta'\end{aligned}$$

e pel denominatore

$$\begin{aligned}(x'+1)(y'+1)+(x'-\theta_1+1)+(x'-\theta_2+1)+\cdots+(x'-\theta_{h'}+1)+\\+(y'-\theta'+1)+(y'-\theta'+1)+\cdots+(y'-\theta^{k'}+1)=\\=(x'+k'+1)(y'+h'+1)-h'k'-\vartheta-\vartheta'\end{aligned}$$

avendo posto per brevità

$$\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_h=\Theta,\qquad \theta'+\theta''+\cdots+\theta^k=\Theta'$$
$$\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{h'}=\vartheta,\qquad \theta'+\theta''+\cdots+\theta^{k'}=\vartheta'.$$

Però osserviamo che s e z soddisfano l'equazione

$$F(\overset{n}{s},\ \overset{m}{z})=0$$

per cui ad ogni funzione della forma

$$(\overset{x+t}{s},\ \overset{y-\theta^t}{z})$$

può sostituirsi l'altra

$$(\overset{x+t}{s}, \overset{y-\theta^t}{z}) + F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z})(\overset{x+t-n}{s}, \overset{y-\theta^t-m}{z})$$

e ad ogni funzione della forma

$$(\overset{x-\theta_t}{s}, \overset{y+t}{z})$$

l'altra

$$(\overset{x-\theta^t}{s}, \overset{y+t}{z}) + F(\overset{n}{s}, \overset{m}{z})(\overset{x-\theta^t-n}{s}, \overset{y+t-m}{z})$$

e quindi, in ultima analisi, le costanti arbitrarie sì del numeratore che del denominatore della (11) si riducono respettivamente a

$$\begin{aligned}&(x+k+1)(y+h+1)-hk-\Theta-\Theta'-\\ &-\{(x-n+k+1)(y-m+h-1)-hk-\Theta-\Theta'\}=\\ &=n(y+h+1)+m(x+k+1)-mn\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}&(x'+k'+1)(y'+h'+1)-h'k'-\vartheta-\vartheta'-\\ &-\{(y'-n+k'+1)(y'-m+h'+1)-h'k'-\vartheta-\vartheta'\}=\\ &=n(y'+h'+1)+m(x'+k'+1)-mn\end{aligned}$$

i quali numeri coincidono con quelli dati da Riemann al § 9 della Memoria citata sopra, quando si supponga

$$h=h'=k=k'=l=l'=0.$$

Riguardo agli infiniti e infinitesimi del numeratore e denominatore della (11) si può osservare che il primo nei punti (2) diviene infinito

$$(y+h)(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\beta)$$

volte di primo ordine, è il secondo un numero di volte uguale a

$$(y'+h')(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\beta)$$

pure di primo ordine; e nei punti (3) il primo diviene infinito

$$(x+k)(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\gamma)$$

volte di primo ordine, e il secondo

$$(x'+k')(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\gamma)$$

volte pure di primo ordine; e finalmente nel punto (4) il primo diviene infinito

$$x\delta+y\varpi$$

volte di primo ordine, e il secondo

$$x'\delta + y'\varpi$$

volte pure di primo ordine.

Onde il numeratore diverrà infinito

$$(y+h)(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\beta+\varpi)+(x+k)(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\gamma+\delta)-h\varpi-k\delta$$

volte di primo ordine, e il denominatore

$$(y'+h')(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\beta+\varpi)+(x'+k')(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\gamma+\delta)-h'\varpi-k'\delta$$

volte pure di primo ordine, e poichè, per l'osservazione fatta in principio, sarà

$$\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\beta+\varpi=n \qquad \gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\gamma+\delta=m$$

così il numeratore e denominatore della (11) diverranno infiniti e infinitesimi respettivamente in

$$m(y+h)+n(x+k)-h\varpi-k\delta$$

e

$$m(y'+h')+n(x'+k')-h'\varpi-k'\delta$$

punti di primo ordine.

Dopo aver posto però le condizioni relative agl'infiniti nei punti (2) e (3) il numeratore diverrà infinito in questi punti respettivamente di ordine

$$\nu_1(y'+h')+b_1, \qquad \nu_2(y'+h')+b_2,\ldots, \qquad \nu_\beta(y'+h')+b_\beta$$

$$\gamma_1(x'+k')+c_1, \qquad \gamma_2(x'+k')+c_2,\ldots, \qquad \gamma_\gamma(x'+k')+c_\gamma$$

e quindi diverrà infinito ancora di primo ordine un numero di volte uguale a

$$\begin{aligned}&(y'+h')(\nu_1+\nu_2+\cdots+\nu_\beta+\varpi)+l\delta+l'\varpi+\\&+(x'+k')(\gamma_1+\gamma_2+\cdots+\gamma_\gamma+\delta)-h'\varpi-k'\delta+C+B=\\&=m(y'+h')+n(x'+k')+d+B+C-h'\varpi-k'\delta\end{aligned}$$

avendo posto

$$B=b_1+b_2+\cdots+b_\beta, \qquad C=c_1+c_2+\cdots+c_\gamma.$$

Se poniamo

$$\left.\begin{aligned}\zeta&=(z-z')^{r'}(z-z'')^{r''}\cdots(z-z^{(\gamma)})^{r^{(\gamma)}}\\ \sigma&=(s-s')^{\rho'}(s-s'')^{\rho''}\cdots(s-s^{(\beta)})^{\rho^{(\beta)}}\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

e

$$r'+r''+\cdots+r^{(\gamma)}=r$$

$$\rho'+\rho''+\cdots+\rho^{(\beta)}=\rho$$

essendo le r', r'',..., ρ', ρ'',..., le quantità soggette alle condizioni (12) (13),... (16) (17),...; al numeratore della (11) le potenze superiori di s, cioè

$$s^{x+k}, \quad s^{x+k-1}, \ldots$$

dovranno avere respettivamente i fattori

$$\zeta_{x+k}, \quad \zeta_{x+k-1}, \ldots$$

e le potenze superiori di z, cioè

$$z^{y+h}, \quad z^{y+h-1},$$

i fattori

$$\sigma_{y+h}, \quad \sigma_{y+h-1}$$

e così si verrà a determinare un certo numero di costanti arbitrarie, che dipenderà dalle r e ρ, che hanno un valore finito, e per la natura stessa della questione non crescente col diminuire dell'indice.

Se invece i fattori della forma (22) si introducessero al denominatore della (11) determinando le r e le ρ mediante i sistemi (20), (21),... il numero delle costanti arbitrarie diminuirebbe in questo. Chiamiamo A il numero delle costanti che si determinerebbero al numeratore della (11) nel primo caso, e A' il numero di costanti che si determinerebbero al denominatore nel secondo caso, e allora si potrà concludere che il numero delle costanti ancora arbitrarie dopo stabilite le condizioni relative agli infiniti (2) e (3) nel primo caso sarà

$$n(y+h+1)+m(x+k+1)-mn-A$$
$$n(y'+h'+1)+m(x'+k'+1)-mn$$

e nel secondo

$$n(y+h+1)+m(x+k+1)-mn$$
$$n(y'+h'+1)+m(x'+k'+1)-mn-A'.$$

V.

Finalmente non resta più che porre le condizioni relative agli infiniti di S nei punti (1). In questi punti sì il numeratore che il denominatore di una espressione come la (11) non possono divenire certamente infiniti, perchè le z_1, z_2,..., s_1, s_2,... sono finite: dunque in quei punti dovrà annullarsi il denominatore. Non si potrà però concludere che colla determinazione di

$$a_1+a_2+\cdots+a_\alpha$$

costanti nel denominatore quella condizione relativa agli infiniti di S nei punti (1) è soddisfatta, perchè, come vedremo, ciò non avviene che in casi speciali, nei quali solo è rigorosa la dimostrazione di RIEMANN esposta nel § 9 della Memoria citata.

Poichè i valori di s e z nel primo dei punti (1) sono finiti e il denominatore della (11) è una funzione razionale e intera di s e z, così potrà svilupparsi colla serie di TAYLOR, che si ridurrà ad un polinomio; per cui, chiamando $f(s, z)$ quel denominatore, avremo

$$f(s,\ z)=f(s_1,\ z_1)+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_1(z-z_1)+\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)_1(s-s_1)+$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2}\left\{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)_1(z-z_1)^2+2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial s}\right)_1(z-z_1)(s-s_1)+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial s^2}\right)_1(s-s_1)^2\right\}+\cdots$$

Ora se $f(s, z)$ deve annullarsi di ordine a_1 nel punto (s_1, z_1) dovranno, nel suo sviluppo in $(z-z_1)$ e $(s-s_1)$, mancare tutti i termini i cui infinitesimi sono di ordine inferiore in quel punto. Ma un termine come

$$C\frac{\partial^{p+q} f}{\partial^p z\,\partial s^q}(z-z_1)^p(s-s_1)^q$$

diviene infinitesimo in quel punto di ordine

$$p\mu_1+q\alpha_1$$

e quindi non dovranno comparire nello sviluppo di $f(s, z)$ quei termini corrispondenti ai valori di p e q, per cui

$$p\mu_1+q\alpha_1<a_1$$

e dovranno comparirvi quelli per cui

$$p\mu_1+q\alpha_1=a_1 \tag{23}$$

non che quelli di ordine superiore, cioè quelli per cui

$$p\mu_1+q\alpha_1>a_1.$$

Da ciò si vede che il numero delle condizioni da imporsi al denominatore della (11) non dipende solo da a_1, ma anche dai numeri μ_1, e α_1. Così, per citare un solo esempio, se fosse

$$\alpha_1=a_1,\qquad \mu_1>a_1$$

basterebbe porre la condizione

$$f(s_1,\ z_1)=0$$

perchè $f(s, z)$ nel punto (s_1, z_1) divenisse infinitesima come

$$(s - s_1)$$

ovvero di ordine $a_1 = \alpha_1$, e quindi con una sola condizione si avrebbe un infinito di S di ordine a_1.

Ma una osservazione più importante ancora a farsi si è quella, che la (23) può non ammettere soluzioni positive, ovvero può non esser possibile che la $f(s, z)$ nel punto (s_1, z_1) divenga infinitesima di ordine a_1, e in questo caso la sola considerazione del denominatore della (11) non è sufficiente per porre la condizione che la (11) divenga infinita di ordine a_1 nel punto (s_1, z_1). Consideriamo anche il numeratore, chiamiamolo $f_1(s, z)$ e sviluppiamolo colla serie di Taylor per le potenze di $(z - z_1)$ e $(s - s_1)$, sarà

$$f_1(s, z) = f_1(s_1, z_1) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z}\right)_1 (z - z_1) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial s}\right)(s - s_1) +$$

$$+ \frac{1}{1 \cdot 2}\left\{\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial s}\right)(z - z_1)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial z \partial s}\right)_1 (s - s_1)(z - z_1) + \left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial s^2}\right)_1 (s - s_1)^2\right\} + \cdots$$

Supponiamo che in questo sviluppo manchino tutti i termini il cui ordine d'infinitesimo in (s_1, z_1) è minore di quello del termine

$$C_1\left(\frac{\partial^{p_1+q_1} f_1}{\partial z^{p_1} \partial s^{q_1}}\right)(z - z_1)^{p_1}(s - s_1)^{q_1}$$

ovvero minore di

$$\mu_1 p_1 + \alpha_1 q_1$$

allora la funzione (11) ovvero

$$\frac{f_1(s, z)}{f(s, z)}$$

diverrà infinita nel punto (s_1, z_1) di ordine

$$\mu_1(p - p_1) + \alpha_1(q - q_1)$$

e se chiamiamo $\pm P$ e $\mp Q$ le soluzioni dell'equazione

$$\mu_1(p - p_1) + \alpha_1(q - q_1) = a_1$$

sarà

$$p - p_1 = \pm P, \qquad q - q_1 = \mp Q$$

con P e Q positivi, e sarà sempre possibile determinare p, p_1, q, q_1, con numeri interi e positivi. Prendendo, per esempio, il segno superiore si potrà anche porre volendo

$$p = P, \qquad p_1 = 0$$
$$q = 0, \qquad q_1 = Q$$

e quindi qualunque sieno μ_1, α_1, a_1 sarà sempre possibile colla considerazione del numeratore e denominatore della (11) porre la condizione che questa funzione divenga infinita di ordine a_1 nel primo dei punti (1).

Il medesimo si può ripetere per gli altri punti (1) nei quali la S deve divenire infinita respettivamente di ordine uguale ad $a_2, a_3, \ldots, a_\alpha$.

È quasi inutile osservare poi che le equazioni come le (23) sono certamente solubili in numeri interi perchè le α e le μ di indice uguale sono prime fra loro.

Se chiamiamo a e a' i numeri degli infinitesimi di primo ordine che si determinano in questo modo al numeratore e al denominatore della (11), in quello e in questo rimangono ancora respettivamente

$$m(y'+h')+n(x'+k')+d+B+C-h'\varpi-k'\delta-a$$

e

$$m(y'+h')+n(x'+k')-h'\varpi-k'\delta-a'$$

infinitesimi, e poichè

$$a'-a=a_1+a_2+\cdots+a_\alpha$$

così sarà certamente

$$a' \geqq a$$

e quindi gl'infinitesimi ancora disponibili al numeratore sono in maggior numero di quelli del denominatore.

Se vogliamo che il numeratore e il denominatore della (11) si annullino ancora in alcuni, o tutti i punti della superficie T in cui si distruggono dei punti di diramazione, quei numeri si ridurranno ancora a

$$m(y'+h')+n(x'+k')+B+C+d-h'\varpi-k'\delta-a-\tau$$

e

$$m(y'+h')+n(x'+k')-h'\varpi-k'\delta-a'-\tau$$

avendo chiamato τ il numero degli infinitesimi determinati per questa condizione.

Riguardo al numero delle costanti osserviamo che chiamando respettivamente D, D' i numeri che di esse vengono determinati al numeratore e denominatore della (11) a causa degl'infiniti (1), e delle condizioni relative ai punti in cui si distruggono dei punti di diramazione, di arbitrarie ne rimarrà, al numeratore

$$n(y+h+1)+m(x+k+1)-mn-A-D$$

al denominatore

$$n(y'+h'+1)+m(x'+k'+1)-mn-D'$$

ovvero al numeratore

$$n(y+h+1)+m(x+k+1)-mn-D$$

e al denominatore

$$n(y'+h'+1)+m(x'+k'+1)-mn-A'-D'$$

secondo che le condizioni relative agli infiniti nei punti (2) e (3) si esprimono al numeratore o denominatore della (11).

Ma dopo tutto ciò la S rappresentata dalla (11) cui sono state imposte le condizioni di cui abbiamo parlato fin qui, diviene infinita in altri

$$m(y'+k')+n(x'+k')-h'\varpi-k'\delta-a'-\tau$$

punti, di primo ordine, e poichè la S non deve essere infinita altro che nei punti (1) (2) (3) (4), così in quelli dovrà annullarsi il suo numeratore. Ora il numeratore della (11) sappiamo che si annulla ancora in

$$m(y'+h')+n(x'+k')-h'\varpi-k'\delta-a-\tau+B+C$$

punti di primo ordine, e quindi determinando un conveniente numero di costanti arbitrarie potremo sempre farlo divenire nullo nei punti in cui si annulla il denominatore. Qui poi la cosa sarà possibile, perchè non si tratta altro che di rendere il polinomio numeratore infinitesimo dell'ordine del polinomio denominatore in certi punti, e quindi non può accadere il caso notato a proposito della equazione (23).

Con ciò si verranno a determinare al numeratore un certo numero E di costanti arbitrarie, dipendente da

$$m(y'+h')+n(x'+k')-h'\varpi-k'\delta-a'-\tau$$

e dalla natura dei punti in cui il denominatore della (11) si annulla, per cui il numero delle costanti arbitrarie al numeratore diviene

$$n(y+h+1)+m(x+k+1)-mn-A-D-E$$

ovvero

$$n(y+h+1)+m(x+k+1)-mn-D-E.$$

Possiamo prendere x, y in modo che questo numero sia positivo, come pure sia positivo il numero che rappresenta quante costanti rimangono al denominatore dopo poste tutte le condizioni volute dalla natura di S. Così della arbitrarietà lasciata alle h, k, h', k', dalle condizioni (12), (13),... possiamo valercene per far sì che i numeri rappresentanti gl'infinitesimi del numeratore e denominatore della (11), dopo poste le condizioni degli infiniti (2) (3), sieno sufficienti a porre le condizioni relative agl'infiniti (1).

Nel caso contemplato da Riemann non avendosi i punti (2), (3) e (4) si aveva

$$h = h' = k = k' = l = l' = d = B = C = 0$$

$$A = A' = 0, \qquad D = r, \qquad D' = a_1 + \cdots + a_\alpha + r$$

e il numero delle costanti al numeratore e denominatore diveniva

$$n(y+1) + m(x+1) - mn - r$$

e

$$n(y+1) + m(x+1) - mn - r$$

prima di aver posto le condizioni relative agl'infiniti (1).

Gl'infinitesimi invece, poichè

$$a = 0, \qquad a' = a_1 + a_2 + \cdots + a_\alpha = m', \qquad \tau = 2r$$

saranno respettivamente, dopo poste le condizioni relative agl'infiniti (1)

$$mx + ny - 2r$$

$$mx + ny - 2r - m'$$

e poichè

$$E = mx + ny - 2r - m'$$

così il numero delle costanti al numeratore della S sarà in fine

$$n + m - mn + r + m' = m' - p + 1.$$

Si potrebbe vedere facilmente che questo numero è giusto anche in alcuni casi un poco più generali, in cui si considerino infiniti di S in punti come i punti (2) e (3) quando non sono di diramazione, ma su questo non ci intratterremo più oltre.

Ueber die elastischen Schwingungen einer isotropen Kugel ohne Einwirkung von äusseren Kräften.

(*Von* L. Henneberg, *in Darmstadt.*)

Abgesehen von solchen Körpern, deren Dimensionen theilweise sehr klein sind, sind bis jetzt bloss die elastischen Schwingungen des Kreiscylinders (*) und diejenigen der Kugel für einen speciellen Fall (**) untersucht worden. In folgender Arbeit soll eine in der theoretischen Optik zur Transformation der Differentialgleichungen der elastischen Schwingungen eines isotropen Körpers häufig angewandte Substitution auch zur Vereinfachung der für den Fall, dass der Körper keinen äusseren Kräften unterworfen ist, hinzutretenden Grenzbedingungen benutzt und sodann das Problem für die Kugel vollständig durchgeführt werden.

1.

Bezeichnet man mit u, v, w die Verrückungen eines Punctes x, y, z parallel zu den Coordinatenaxen, so sind die elastischen Schwingungen eines isotropen Körpers dargestellt durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \Delta u + (b^2 - a^2)\frac{\partial \sigma}{\partial x},\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= a^2 \Delta v + (b^2 - a^2)\frac{\partial \sigma}{\partial y},\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= a^2 \Delta w + (b^2 - a^2)\frac{\partial \sigma}{\partial z},\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

(*) Pochhammer: *Ueber die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreiscylinder*. Journal für reine und angewandte Mathematik, 81. Bd.

(**) Clebsch: *Theorie der Elasticität fester Körper;* Seite 55. Teubner, 1862.

wo σ die räumliche Dilatation

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

bedeutet.

Setzt man nun, wie es in der Optik geschieht,

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z}, \\ v &= \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x}, \\ w &= \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

und bestimmt die vier Functionen P, U, V, W durch die Bedingung, dass jede der vier Gruppen

$$\left.\begin{array}{llll} u_1 = \frac{\partial P}{\partial x}, & u_2 = 0, & u_3 = -\frac{\partial V}{\partial z}, & u_4 = \frac{\partial W}{\partial y}, \\ v_1 = \frac{\partial P}{\partial y}, & v_2 = \frac{\partial U}{\partial z}, & v_3 = 0, & v_4 = -\frac{\partial W}{\partial x}, \\ w_1 = \frac{\partial P}{\partial z}; & w_2 = -\frac{\partial U}{\partial y}; & w_3 = \frac{\partial V}{\partial x}; & w_4 = 0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

eine mögliche Schwingung des Körpers darstellt, so ergibt sich

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = b^2 \Delta P, \tag{4}$$

während U, V, W die Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \Delta \varphi \tag{5}$$

befriedigen müssen, und es ist hierdurch die Bewegung des Körpers in eine longitudinale Schwingung zerlegt und in drei transversale.

2.

Auf die Oberfläche des Körpers sollen keine Druckkräfte wirken. Man wird daher festsetzen können, dass jede der vier Einzelschwingungen (3) eine solche ist, welche ohne Einwirkung von äusseren Kräften vor sich geht.

Die Componenten der Druckkraft, die auf ein Flächenelement wirkt, dessen Normale mit den Axen die Winkel (nx), (ny), (nz) einschliesst, sind

$$\left.\begin{aligned}
X_n &= a^2\left\{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{b^2-2a^2}{2a^2}\sigma\right)\cos(nx)+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\cos(ny)+\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\cos(nz)\right\},\\
Y_n &= a^2\left\{\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(nx)+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{b^2-2a^2}{2a^2}\sigma\right)\cos(ny)+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\cos(nz)\right\},\\
Z_n &= a^2\left\{\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\cos(nx)+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)\cos(ny)+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{b^2-2a^2}{2a^2}\sigma\right)\cos(nz)\right\}.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Für die longitudonale Schwingung u_1, v_1, w_1 ist somit

$$X_n = 2a^2\frac{\partial^2 P}{\partial x\,\partial n}+(b^2-2a^2)\Delta P\cdot\cos(nx),$$

$$Y_n = 2a^2\frac{\partial^2 P}{\partial y\,\partial n}+(b^2-2a^2)\Delta P\cdot\cos(ny),$$

$$Z_n = 2a^2\frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial n}+(b^2-2a^2)\Delta P\cdot\cos(nz).$$

Die Componente des Druckes in einer beliebigen Richtung r wird daher sein

$$R_n = 2a^2\frac{\partial^2 P}{\partial r\,\partial n}+(b^2-2a^2)\Delta P\cdot\cos(nr),$$

wenn (nr) den Winkel bezeichnet, welchen die Normale n des Flächenelementes mit r bildet. Zerlegt man nun den Druck in die Normale n und in zwei auf derselben senkrecht stehende Richtungen n_1 und n_2, so erhält man

$$N_n = 2a^2\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}+(b^2-2a^2)\Delta P,$$

$$N_{1,n} = 2a^2\frac{\partial^2 P}{\partial n\,\partial n_1},$$

$$N_{2,n} = 2a^2\frac{\partial^2 P}{\partial n\,\partial n_2}.$$

Falls keine Druckkräfte auf die Oberfläche der Körpers wirken sollen, müssen für dieselbe die Grenzbedingungen bestehen

$$\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}+\frac{b^2-2a^2}{2a^2}\Delta P = 0,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial n\,\partial n_1} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial n\,\partial n_2} = 0.$$

oder

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 P}{\partial n^2}+\frac{b^2-2a^2}{2a^2}\Delta P=0,\\ \frac{\partial P}{\partial n}=\text{const.}\end{aligned}\right\}\qquad(7)$$

Der Differentialquotient $\frac{\partial P}{\partial n}$ stellt die Verrückung in der Richtung der Normale dar. Die Grenzbedingung $\frac{\partial P}{\partial n}=\text{const.}$ sagt somit aus, dass die normale Verrückung an der Oberfläche nicht vom Orte, sondern nur von der Zeit abhängig ist.

3.

Damit die transversale Schwingung

$$u_2=0,\qquad v_2=\frac{\partial U}{\partial z},\qquad w_2=-\frac{\partial U}{\partial y}$$

ebenfalls ohne Einwirkung von äusseren Kräften vor sich geht, muss die Function U infolge der Gleichungen (6) an der Oberfläche des Körpers den Bedingungen genügen

$$\left.\begin{aligned}X_n&=a^2\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}\cos(ny)-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\cos(nz)\right\}=0,\\ Y_n&=a^2\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial z}\cos(nx)+2\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}\cos(ny)+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\cos(nz)\right\}=0,\\ Z_n&=a^2\left\{-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}\cos(nx)+\left(\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)\cos(ny)-2\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial z}\cos(nz)\right\}=0.\end{aligned}\right\}\qquad(8)$$

Die Grenzbedingungen erhalten eine für die Anwendungen vortheilhaftere Gestalt, wenn die Druckkraft in die Normale n und in zwei auf derselben und unter sich senkrecht stehende Richtungen n_1 und n_2 zerlegt wird. Man bekommt für diese Componenten der Druckkraft:

$$\begin{aligned}N_n=2a^2\Big\{&-\frac{\partial^2 U}{\partial n\partial n_2}\left[\cos(n_2y)\cos(nz)-\cos(n_2z)\cos(ny)\right]\\ &+\frac{\partial^2 U}{\partial n\partial n_1}\left[\cos(ny)\cos(n_1z)-\cos(nz)\cos(n_1y)\right]\Big\}=0,\end{aligned}$$

$$N_{1,n} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial n_2} [\cos(n_1 y)\cos(n_2 z) - \cos(n_1 z)\cos(n_2 y)] \right.$$
$$- \frac{\partial^2 U}{\partial n_1 \partial n_2} [\cos(n_2 y)\cos(n z) - \cos(n_2 z)\cos(n y)]$$
$$\left. + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}\right)[\cos(n y)\cos(n_1 z) - \cos(n z)\cos(n_1 y)] \right\} = 0,$$

$$N_{2,n} = a^2 \left\{ - \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial n_1} [\cos(n_1 y)\cos(n_2 z) - \cos(n_1 z)\cos(n_2 y)] \right.$$
$$- \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n_2^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}\right) [\cos(n_2 y)\cos(n z) - \cos(n_2 z)\cos(n y)]$$
$$\left. + \frac{\partial^2 U}{\partial n_1 \partial n_2} [\cos(n y)\cos(n_1 z) - \cos(n z)\cos(n_1 y)] \right\} = 0.$$

Da nun aber

$$\lambda \cos(n x) = \cos(n_1 y)\cos(n_2 z) - \cos(n_1 z)\cos(n_2 y),$$
$$\lambda \cos(n_1 x) = \cos(n_2 y)\cos(n z) - \cos(n_2 z)\cos(n y),$$
$$\lambda \cos(n_2 x) = \cos(n y)\cos(n_1 z) - \cos(n z)\cos(n_1 y),$$

so ergeben sich für die Oberfläche der Körpers die Bedingungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial n_2}\cos(n_1 x) - \frac{\partial^2 U}{\partial n \partial n_1}\cos(n_2 x) = 0,\\
\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial n_2}\cos(n x) - \frac{\partial^2 U}{\partial n_1 \partial n_2}\cos(n_1 x) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n_1^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}\right)\cos(n_2 x) = 0,\\
\frac{\partial^2 U}{\partial n \partial n_1}\cos(n x) + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial n_2^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial n^2}\right)\cos(n_1 x) - \frac{\partial^2 U}{\partial n_1 \partial n_2}\cos(n_2 x) = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Die Grenzbedingungen für V und W erhält man aus denen für U durch Vertauschung von x mit y und z.

4.

Die Constanten des Problemes müssen aus dem Anfangszustande des Körpers bestimmt werden, also aus der Bedingung, dass u, v, w, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$ für $t = 0$ gegebene Functionen der Coordinaten sind. Da nun den Gleichungen (2) genügt wird durch die Annahme

$$P = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\sigma\, da\, db\, dc}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}},$$

$$U = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right) da\, db\, dc}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}},$$

$$V = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) da\, db\, dc}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}},$$

$$W = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) da\, db\, dc}{\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)^2}},$$

wobei die rechts stehenden Integrale über den ganzen Körper auszudehnen sind, so kann man die Anfangsbedingungen für P, U, V, W dahin formuliren, dass P, U, V, W, $\frac{\partial P}{\partial t}$, $\frac{\partial U}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial W}{\partial t}$ für $t=0$ gegebene Functionen der Coordinaten sein sollen.

Die longitudonalen Schwingungen der Kugel.

5.

Bei Einführung von Polarcoordinaten

$$x = r\sin\vartheta\cos\psi, \qquad (0<r<\rho)$$
$$y = r\sin\vartheta\sin\psi, \qquad (0<\psi<2\pi)$$
$$z = r\cos\vartheta \qquad (0<\vartheta<\pi)$$

wird

$$\Delta P = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial P}{\partial r}\right)}{\partial r}+\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial P}{\partial\vartheta}\right)}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\psi}\frac{\partial^2 P}{\partial\psi^2}\right\}.$$

Es kommt daher bei der Untersuchung der longitudonalen Schwingungen einer Kugel vom Radius ρ darauf an, die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \frac{b^2}{r^2}\left\{\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial P}{\partial r}\right)}{\partial r}+\frac{\partial\left(\sin\vartheta\frac{\partial P}{\partial\vartheta}\right)}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\psi}\frac{\partial^2 P}{\partial\psi^2}\right\} \tag{10}$$

zu integriren unter den Grenzbedingungen für $r = \rho$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{b^2 - 2a^2}{2a^2 r^2}\left\{\frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial P}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\partial\left(\sin\vartheta \frac{\partial P}{\partial \vartheta}\right)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\psi}\frac{\partial^2 P}{\partial\psi^2}\right\} = 0, \\ \frac{\partial P}{\partial r} = \text{const.} \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Die Differentialgleichung für P ist linear und homogen. Das allgemeine Integral wird somit aus einer Reihe von particulären zusammenzusetzen sein. Substituirt man

$$P = T\Psi\Theta R,$$

wo $T = f(t)$, $\Psi = f(\psi)$, $\Theta = f(\vartheta)$, $R = f(r)$, so zerfällt (10) in die vier gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -n^2 b^2 T,$$

$$\frac{d^2\Psi}{d\psi^2} = -m^2\Psi,$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\vartheta^2} + \operatorname{cotg}\vartheta \cdot \frac{d\Theta}{d\vartheta} + \left[q(q+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right]\Theta = 0,$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[n^2 - \frac{q(q+1)}{r^2}\right]R = 0,$$

welche ergeben

$$\begin{aligned} T &= A\cos nbt + B\sin nbt, \\ \Psi &= C\cos m\psi + D\sin m\psi, \\ \Theta &= EP_m^q(\cos\vartheta) + F\,Q_m^q(\cos\vartheta), \\ R &= G\frac{I_{q+\frac{1}{2}}(nr)}{\sqrt{r}} + H\frac{Y_{q+\frac{1}{2}}(nr)}{\sqrt{r}}. \end{aligned}$$

Die Kugelfunctionen $Q_m^q(\cos\vartheta)$ und die Bessel'schen Functionen $Y_{q+\frac{1}{2}}(nr)$ sind hierbei jedoch zu verwerfen, da dieselben für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, resp. für $r = 0$ unendlich gross werden. Man erhält somit für P ein particuläres Integral

$$(A\cos nbt + B\sin nbt)(C\cos m\psi + D\sin m\psi)\,P_m^q(\cos\vartheta)\frac{I_{q+\frac{1}{2}}(nr)}{\sqrt{r}}.$$

Für jeden Werth von n, m, q ergibt sich ein solches Integral. Daher wird sein

$$\left.\begin{aligned} P = \sum_n \sum_m \sum_q \{ &\cos nbt [A_{m,n,q} \cos m\psi + A'_{m,n,q} \sin m\psi] \\ &+ \sin nbt [B_{m,n,q} \cos m\psi + B'_{m,n,q} \sin m\psi]\} \cdot P_m^q(\cos\vartheta) \frac{I_{q+\frac{1}{2}}(nr)}{\sqrt{r}}. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Den Constanten m dürfen natürlich nur ganzzahlige Werthe beigelegt werden, da die Schwingung in Bezug auf ψ die Periode 2π besitzen muss. Die Grössen n und q sind aus den Grenzbedingungen (11) zu bestimmen. Nimmt man an, dass jedes einzelne particuläre Integral für sich den Gleichungen (11) genügt, so zerfällt (11) in die Bedingungen für $r = \rho$:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{k^2}{r}\frac{dR}{dr} + \left(n^2 - \frac{q[q+1]}{\rho^2}\right) R = 0, \text{ wo } k^2 = \frac{4a^2}{b^2} \\ &\Psi\Theta \frac{dR}{dr} = \text{const.}, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

velche erfüllt sind:

1) wenn P nur von r und t abhängt und ausserdem für $r = \rho$ ist:

$$\frac{k^2}{r}\frac{dR}{dr} + n^2 R = 0,$$

2) wenn n und q die gemeinsamen Wurzeln der beiden transcendenten Gleichungen sind

$$n^2 - \frac{q[q+1]}{\rho^2} = 0 \text{ oder } R(\rho) = 0 \text{ und } \left[\frac{dR}{dr}\right]_{\text{für } r=\rho} = 0.$$

Die Schwingung der Kugel ist hierdurch in zwei Schwingungen zerlegt

$$P = Q + S,$$

von denen die eine Q in der Richtung des Radius vor sich geht und ausser von der Zeit nur von der Entfernung r vom Mittelpuncte abhängt, während bei der anderen die Oberfläche der Kugel vollständig in Ruhe bleibt resp. sich nur in sich selbst bewegt. Bei der zweiten Schwingung muss die Function R infolge der Grenzbedingung $\frac{dR}{dr} = 0$ die Form haben

$$R = \text{const.} + (r-\rho)^2 K(r-\rho).$$

Man kann daher diese Schwingung wiederum in zwei Einzelschwingungen zerlegen: in eine, für welche $R = (r-\rho)^2 K(r-\rho)$ ist also für $r = \rho$ die Bedingungen bestehen $R=0$ und $\frac{dR}{dr}=0$, und in eine zweite, für die $R=\text{const.}$, also P unabhängig von r ist. Diese letztere ist jedoch keine mögliche Schwingung, da sie infolge von (10) und (11) an die Bedingung $\frac{\partial^2 P}{\partial t^2}=0$ geknüpft ist.

Für Q erhält man

$$Q=\sum\{A_n \cos nbt + B_n \sin nbt\}\frac{I_{\frac{1}{2}}(nr)}{\sqrt{r}}$$

oder bei Einführung der adjungirten Bessel'schen Functionen (*)

$$Q=\sum\{A_n \cos nbt + B_n \sin nbt\}J_{\frac{1}{2}}(nr), \tag{14}$$

und n sind die Wurzeln der transcendenten Gleichung für $r=\rho$:

$$\frac{k^2}{r}\frac{dJ_{\frac{1}{2}}(nr)}{dr}+n^2 J_{\frac{1}{2}}(nr)=0. \tag{15}$$

Dagegen ergibt sich für S

$$\left.\begin{aligned} S=\sum_n\sum_m\sum_q\{&\cos nbt[A_{m,n,q}\cos m\psi + A'_{m,n,q}\sin m\psi] \\ &+\sin nbt[B_{m,n,q}\cos m\psi + B'_{m,n,q}\sin m\psi]\}\cdot P_m^q(\cos\vartheta)\frac{I_{q+\frac{1}{2}}(nr)}{\sqrt{r}}\,; \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

wo n und q die Wurzeln der beiden Gleichungen sind

$$I_{q+\frac{1}{2}}(n\rho)=0 \text{ und } \left[\frac{d}{dr}\left(\frac{I_{q+\frac{1}{2}}(nr)}{\sqrt{r}}\right)\right]_{\text{für } r=\rho}=0. \tag{17}$$

6.

Die Constanten A und B sind aus dem Anfangszustande zu bestimmen, also aus der Bedingung, dass für $t=0$ ist:

$$P=f(r,\vartheta,\psi),$$

$$\frac{dP}{dt}=F(r,\vartheta,\psi).$$

Zerlegt man nun f und F in je zwei Functionen

$$f=f_1+f_2, \qquad F=F_1+F_2,$$

(*) Neumann: *Theorie der Bessel'schen Functionen,* Seite 53. Teubner, 1867.

so dass f_1 und F_1 nur abhängen von r, während f_2 und F_2 an die Bedingungen geknüpft sind

$$[f_2]_{r=\rho}=0, \qquad \left[\frac{d f_2}{d r}\right]_{r=\rho}=0, \qquad [F_2]_{r=\rho}=0, \qquad \left[\frac{d F_2}{d r}\right]_{r-\rho}=0,$$

so ergibt sich, es muss sein für $t=0$:

$$Q=f_1(r), \qquad S=f_2(r, \vartheta, \psi),$$

$$\frac{dQ}{dt}=F_1(r); \qquad \frac{dS}{dt}=F_2(r, \vartheta, \psi).$$

Es war nun

$$Q=\sum\{A_n \cos n b t+B_n \sin n b t\} J_{\frac{1}{2}}(n r).$$

Daher wird

$$f_1(r)=\sum A_n J_{\frac{1}{2}}(n r), \qquad F_1(r)=\sum n b B_n J_{\frac{1}{2}}(n r).$$

Ebenso erhält man

$$f_2(r, \vartheta, \psi)=\sum\sum\sum[A_{m,n\,q} \cos m\psi+A'_{m,n\,q} \sin m\psi] P_m^q(\cos\vartheta) \frac{I_{q+\frac{1}{2}}(n r)}{\sqrt{r}},$$

$$F_2(r, \vartheta, \psi)=\sum\sum\sum n b[B_{m,n,q} \cos m\psi+B'_{m,n,q} \sin m\psi] P_m^q(\cos\vartheta) \frac{I_{q+\frac{1}{2}}(n r)}{\sqrt{r}}.$$

Zur Bestimmung der Constanten ist es nothwendig, eine Hülfsformel herzuleiten. Es sei $n \gtrless n_1$. Dann folgt aus den beiden Gleichungen

$$\frac{d^2 R}{d r^2}+\frac{2}{r} \frac{d R}{d r}+\left(n^2-\frac{q[q+1]}{r^2}\right) R=0,$$

$$\frac{d^2 R_1}{d r^2}+\frac{2}{r} \frac{d R_1}{d r}+\left(n_1^2-\frac{q[q+1]}{r^2}\right) R_1=0$$

$$\int_0^\rho r^2 R R_1 d r=\frac{1}{n_1^2-n^2} \int_0^\rho\left\{r^2 R_1\left(\frac{d^2 R}{d r^2}+\frac{2}{r} \frac{d R}{d r}\right)-r^2 R\left(\frac{d^2 R_1}{d r^2}+\frac{2}{r} \frac{d R_1}{d r}\right)\right\} \cdot d r$$

$$=\frac{1}{n_1^2-n^2}\left[r^2\left(R_1 \frac{d R}{d r}-R \frac{d R_1}{d r}\right)\right]_0^\rho.$$

Die rechte Seite verschwindet nun, sowohl wenn $R=J_{\frac{1}{2}}(n r)$ ist und die Grössen n der Bedingung (15) genügen, wie wenn $R=\frac{I_{q+\frac{1}{2}}(n r)}{\sqrt{r}}$ ist und n und q die Gleichungen (17) befriedigen. Somit besteht für beide Schwingungen die Gleichung

$$\int_0^\rho r^2 R R_1 d r=0.$$

Demgemäss wird sein

$$\left.\begin{aligned}
A_n &= \frac{\displaystyle\int_0^\rho r^2 f_1(r)\, J_{\frac{1}{2}}(nr)\, dr}{\displaystyle\int_0^\rho r^2 [J_{\frac{1}{2}}(nr)]^2\, dr}, \\
B_n &= \frac{\displaystyle\int_0^\rho r^2 F_1(r)\, J_{\frac{1}{2}}(nr)\, dr}{\displaystyle nb\int_0^\rho r^2 [J_{\frac{1}{2}}(nr)]^2\, dr}.
\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Ebenso bekommt man bei Benutzung der über die Kugelfunctionen geltenden Formeln (*):

$$\left.\begin{aligned}
A_{m,n,q} &= \frac{\displaystyle\int_{r=0}^{r=\rho}\int_{\psi=0}^{\psi=2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} f_2(r,\vartheta,\psi)\cos m\psi\, P_m^q(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, r^{\frac{3}{2}} I_{q+\frac{1}{2}}(nr)\, dr\, d\psi\, d\vartheta}{\displaystyle(-1)^m \frac{2\pi}{2q+1}\frac{\Pi(q+m)\Pi(q-m)}{[1\cdot3\cdots(2q-1)]^2}\int_0^\rho r[I_{q+\frac{1}{2}}(nr)]^2\, dr}, \\
A'_{m,n\,q} &= \frac{\displaystyle\int_{r=0}^{\rho}\int_{\psi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi} f_2(r,\vartheta,\psi)\sin m\psi\, P_m^q(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, r^{\frac{3}{2}} I_{q+\frac{1}{2}}(nr)\, dr\, d\psi\, d\vartheta}{\displaystyle(-1)^m \frac{2\pi}{2q+1}\frac{\Pi(q+m)\Pi(q-m)}{[1\cdot3\cdots(2q-1)]^2}\int_0^\rho r[I_{q+\frac{1}{2}}(nr)]^2\, dr}, \\
B_{m,n,q} &= \frac{\displaystyle\int_{r=0}^{\rho}\int_{\psi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi} F_2(r,\vartheta,\psi)\cos m\psi\, P_m^q(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, r^{\frac{3}{2}} I_{q+\frac{1}{2}}(nr)\, dr\, d\psi\, d\vartheta}{\displaystyle(-1)^m \frac{2nb\pi}{2q+1}\frac{\Pi(q+m)\Pi(q-m)}{[1\cdot3\cdots(2q-1)]^2}\int_0^\rho r[I_{q+\frac{1}{2}}(nr)]^2\, dr}, \\
B'_{m,n,q} &= \frac{\displaystyle\int_{r=0}^{\rho}\int_{\psi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi} F_2(r,\vartheta,\psi)\sin m\psi\, P_m^q(\cos\vartheta)\sin\vartheta\, r^{\frac{3}{2}} I_{q+\frac{1}{2}}(nr)\, dr\, d\psi\, d\vartheta}{\displaystyle(-1)^m \frac{2nb\pi}{2q+1}\frac{\Pi(q+m)\Pi(q-m)}{[1\cdot3\cdots(2q-1)]^2}\int_0^\rho r[I_{q+\frac{1}{2}}(nr)]^2\, dr}.
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Für $m=0$ kommt in die Nenner noch der Factor 2 zu stehen.

(*) HEINE: *Handbuch der Kugelfunctionen,* Seite 183.

7.

Die specielle Interpretation des Bewegungsvorganges soll auf die Schwingung Q beschränkt werden (cf. CLEBSCH: *Elasticität,* Seite 55).

Die BESSEL'sche Function $J_{\frac{1}{2}}(z)$, welche in Q auftritt, ist definirt als das jenige particuläre Integral der Gleichung

$$\frac{d^2F}{dz^2}+\frac{2}{z}\frac{dF}{dz}+F=0, \tag{20}$$

welches für $z=0$ den Werth $\frac{1}{\sqrt{2}\,\Pi(\frac{1}{2})}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ annimmt. Da nun aber dass allgemeine Integral von (20) ist

$$F=A\frac{\cos z}{z}+B\frac{\sin z}{z},$$

so muss sein

$$J_{\frac{1}{2}}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin z}{z}. \tag{21}$$

Allgemein wird, wenn p eine beliebige ganze Zahl bedeutet, die Gleichung

$$\frac{d^2F}{dz^2}+\frac{2(1+p)}{z}\frac{dF}{dz}+F=0$$

durch

$$F=A\frac{d^p\frac{\cos z}{z}}{(dz^2)^p}+B\frac{d^p\frac{\sin z}{z}}{(dz^2)^p}$$

vollständig integrirt sein, und man wird somit haben

$$J_{p+\frac{1}{2}}(z)=(-2)^p\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{d^p\frac{\sin z}{z}}{(dz^2)^p}$$

und

$$I_{p+\frac{1}{2}}(z)=(-2)^p\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,z^{p+\frac{1}{2}}\frac{d^p\frac{\sin z}{z}}{(dz^2)^p} \quad (*).$$

(*) NEUMANN: *Theorie der* BESSEL'*schen Functionen,* Seite 54.

Mit der Untersuchung der BESSEL'schen Functionen von den Ordnungen $\frac{n}{2}$ hat sich in

Hiernach erhält man nun

$$Q = \sum_n (A_n \cos nbt + B_n \sin nbt) \frac{\sin nr}{nr}, \tag{22}$$

$$\left.\begin{aligned} A_n &= \frac{2n^2\pi \int_0^\rho r f_1(r) \sin nr\,dr}{n\rho - \sin n\rho \cos n\rho}, \\ B_n &= \frac{2n\pi \int_0^\rho r F_1(r) \sin nr\,dr}{n\rho - \sin n\rho \cos n\rho}, \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

und die Grössen n werden die Wurzeln der Gleichung

$$\operatorname{cotg} n\rho = \frac{k^2 - n^2\rho^2}{k^2 n\rho}. \tag{24}$$

Sezt man

$$n\rho = u, \qquad \operatorname{cotg} n\rho = v$$

und betrachtet u als die Abscissen-, v als die Ordinatenaxe eines Coordinatensystemes, so treten die Grössen $n\rho$ auf als die Abscissen der Schnittpuncte der beiden Curven

$$v = \operatorname{cotg} u, \qquad k^2 uv = k^2 - u^2.$$

Die Hyperbel $k^2uv = k^2 - u^2$ hat den Punct $u = 0$, $v = 0$ zum Mittelpuncte, sie schneidet die Axe u in $u = k^2$ und hat zur einen Asymptote die v-Axe, während die andere mit der u-Axe den Winkel $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{k^2}$ bildet. Die Wurzeln von (24) liegen somit

$$\begin{array}{ll} 0 < u_0 \text{ und } u_1 < \pi, & 0 < n_0, \quad n_1 < \frac{\pi}{\rho}, \\ \frac{3\pi}{2} < u_2 < 2\pi, & \frac{3\pi}{2\rho} < n_2 < \frac{2\pi}{\rho}, \\ \frac{5\pi}{2} < u_3 < 3\pi, & \frac{5\pi}{2\rho} < n_3 < \frac{3\pi}{\rho}, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array}$$

---

einer inzwischen erschienenen Abhandlung: *Note sur l'integration de l'équation* $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{n+1}{x}\frac{dV}{dx} + V = 0$ (Journal de mathématiques pures et appliquées, t. 4ème). Herr Worms de Romilly eingehend beschäftigt.

und zwar nähern sie sich den ganzzahligen Vielfachen von $\frac{\pi}{\rho}$ um so schneller je kleiner k^2 ist. Bei Ausschliessung von n_0 und n_1 wird man näherungsweise setzen können

$$n_s = \frac{s\pi}{\rho}\,. \tag{25}$$

Was die Werthe von n_0 und n_1 anbelangt, so hängen dieselben ganz von k^2 ab. Es kann k^2 liegen zwischen 0 und 2. Ist k^2 klein, so ist n_0 nahe an 0, n_1 nahe an $\frac{\pi}{\rho}$.

Durch die Formel (22) ist die ganze Schwingung in eine Reihe von periodischen Einzelschwingungen

$$Q_s = \left(A_n \cos\frac{sb\pi}{\rho}t + B_n \sin\frac{sb\pi}{\rho}t\right)\frac{\sin\frac{s\pi r}{\rho}}{\frac{s\pi r}{\rho}} \tag{26}$$

mit der Periode $\frac{\rho}{bs}$ zerlegt. Für die eingetretene Verrückung bekommt man

$$\frac{dQ_s}{dr} = \left(A_n \cos\frac{sb\pi}{\rho}t + B_n \sin\frac{sb\pi}{\rho}t\right)\frac{\frac{s\pi r}{\rho}\cos\frac{s\pi r}{\rho} - \sin\frac{s\pi r}{\rho}}{\frac{s\pi r^2}{\rho}}\,. \tag{27}$$

Knotenflächen, resp. concentrische Kugelflächen, welche vollständig in Ruhe bleiben, kommen vor, sobald

$$\operatorname{tg}\frac{s\pi r}{\rho} = \frac{s\pi r}{\rho} \tag{28}$$

ist, oder wenn $\frac{s\pi r}{\rho} = x$ gesetzt wird, sobald

$$\operatorname{tg} x = x$$

ist. Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Abscissen der Schnittpuncte der Curve $y = \operatorname{tg} x$ mit der 45° Linie $y = x$, sie liegen somit

$$\begin{array}{ll}
x_0 = 0, & r_0 = 0, \\
\pi < x_1 < \frac{3\pi}{2}, & \frac{\rho}{s} < r_1 < \frac{3\rho}{2s}, \\
2\pi < x_2 < \frac{5\pi}{2}, & \frac{2\rho}{s} < r_2 < \frac{5\rho}{2s}, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}$$

und war nähern sie sich sehr schnell den ungraden Vielfachen von $\frac{\rho}{2s}$ · Näherungsweise kann man setzen

$$r_h = \frac{2h+1}{2s}\rho, \tag{29}$$

dann erhält man die Knotenflächen

$$r_1 = \frac{3\rho}{2s}, \qquad r_2 = \frac{5\rho}{2s}, \ldots, \qquad r_{s-1} = \frac{(2s-1)\rho}{2s}.$$

Die transversalen Schwingungen der Kugel.

8.

Aus der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \Delta U,$$

welcher die Function U genügen mus, ergibt sich

$$U = \sum_n \sum_m \sum_q \{\cos nat[C_{m,n\,q}\cos m\psi + C'_{m,n,q}\sin m\psi]$$
$$+ \sin nat[D_{m,n.q}\cos m\psi + D'_{m\,n,q}\sin m\psi]\} P^q_m(\cos\vartheta)\frac{I_{q+\frac{1}{2}}(nr)}{\sqrt{r}}.$$

Die für $r=\rho$ bestehenden Grenzbedingungen (9) nehmen bei Einführung von Polarcoordinaten die Form an

$$\operatorname{cotg}\vartheta\cos\psi\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial\psi} + \frac{\sin\vartheta\sin\psi}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial\vartheta} = 0,$$

$$\cos\psi\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial\psi} - \frac{\operatorname{cotg}\vartheta\cos\psi}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta\,\partial\psi} + \sin\vartheta\sin\psi\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\sin\vartheta\cos\psi}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial r\,\partial\vartheta} + \cos\vartheta\cos\psi\left(\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial\psi^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right) - \frac{\sin\psi}{r}\frac{\partial^2 U}{\partial\vartheta\,\partial\psi} = 0.$$

Diese Gleichungen werden, da ihnen jedes einzelne particuläre Integral von der Form

$$T\Psi\Theta P$$

für sich genügen soll, nur dann befriedigt:

1) wenn U nur abhängt von r und t und für $r=\rho$ ist $\frac{d^2R}{dr^2}=0$;

2) wenn für $r=\rho$ ist $R=0$ und $\frac{dR}{dr}=0$.

Die Schwingung U zerfällt hiernach in zwei Schwingungen

$$U = U_1 + U_2. \tag{30}$$

Für U_1 erhält man

$$U_1 = \sum (C_n \cos nat + D_n \sin nat) \frac{\sin nr}{nr}, \tag{31}$$

wo n die Wurzeln der Gleichung sind

$$\operatorname{cotg} n\rho = \frac{2 - n^2\rho^2}{2n\rho}, \tag{32}$$

also näherungsweise

$$n_s = \frac{s\pi}{\rho}$$

gesetzt werden kann.

Bei der Schwingung U_2 sind dagegen die Grössen n und q bestimmt als die gemeinsamen Wurzeln der beiden Gleichungen

$$I_{q+\frac{1}{2}}(n\rho) = 0 \text{ und } \left[\frac{d}{dr}\left(\frac{I_{q+\frac{1}{2}}(nr)}{\sqrt{r}}\right)\right]_{r=\rho} = 0.$$

Die Constantenbestimmung ist in beiden Fällen wie bei der longitudonalen Schwingung vorzunehmen.

Für die Functionen V und W erhält man die nämlichen Ausdrücke, nur dass natürlich die Constanten im Allgemeinen andere Werthe besitzen werden.

Von den beiden transversalen Schwingungen ist diejenige, bei welcher U, V, W nur von r und t abhängen von grösserer Wichtigkeit. Für dieselbe erhält man die Verrückungen

$$u = \frac{y}{r}\frac{dW_1}{dr} - \frac{z}{r}\frac{dV_1}{dr},$$

$$v = \frac{z}{r}\frac{dU_1}{dr} - \frac{x}{r}\frac{dW_1}{dr},$$

$$w = \frac{x}{r}\frac{dV_1}{dr} - \frac{y}{r}\frac{dU_1}{dr}.$$

Diese transversale Schwingung ist eine solche, bei welcher jede Kugelfläche

$r = \text{const.}$ sich nur in sich selbst bewegt und bei welcher die relative Lage der Puncte einer Fläche $r = \text{const.}$ sich nicht ändert. Es ist wieder zweckmässig sich die ganze Schwingung nach den Werthen von n in eine Reihe von Einzelschwingungen zerlegt zu denken. Eine solche Einzelschwingung wird dann die Periode $\frac{\rho}{s}$ und die Knotenflächen

$$r_1 = \frac{3\rho}{2s}, \qquad r_2 = \frac{5\rho}{2s}, \ldots, \qquad r_{s-1} = \frac{2s-1}{2s}\rho$$

besitzen.

Bei Anwendung der nämlichen Methode lassen sich auch leicht die Schwingungen des unendlichen Kreiscylinders untersuchen. Diese Schwingungen werden insofern einfacher als nur die Bessel'schen Functionen von ganzzahliger Ordnungszahl aufreten, während bei der Kugel die Ordnungen von einer transcendenten Gleichung abhängen, und als ausserdem statt der Kugelfunctionen trigonometrische Functionen zun Vorschein kommen. Diese Schwingungen sind, wie schon gesagt, von Herrn Pochhammer untersucht worden. — Für das Rotationsellipsoid (ebenso für den elliptischen Cylinder) wird das Problem bedeutend verwickelter, indem statt der Kugelfunctionen und der Bessel'schen Functionen solche Functionen anftreten, welche einer Gleichung

$$\omega(1-\omega)\frac{d^2L}{d\omega^2} + [1 + m - (m + \tfrac{3}{2})\omega]\frac{dL}{d\omega} - (a - b\omega)L = 0$$

genügen.

Zürich, im November 1877.

NELLA SOLENNITÀ

DEL CENTENARIO DALLA NASCITA

DI

CARLO FEDERICO GAUSS.

DISCORSO (*)

DI

ERNESTO SCHERING.

PRONUNZIATO NELLA PUBBLICA ADUNANZA
DELLA REALE SOCIETÀ DELLE SCIENZE DI GOTTINGA,
IL 30 APRILE 1877.

Onorevoli Signori.

Noi siamo quì convenuti per fare atto di riverenza alla memoria d'uno dei più grandi pensatori dell'umanità (1).

In questa sede, consacrata alla ricerca del vero, aleggiò per quasi un mezzo secolo il genio creatore di

CARLO FEDERICO GAUSS,

il sovrano del numero.

Compie oggi il centesimo anno dal giorno che egli vide la luce. Cresciuto in seno alla sua modesta famiglia, che viveva a Braunschweig, fu educato da un padre operoso, coscienziosissimo, ma eziandio fermo e severo, da una madre vigilante, assidua, serena (2). Le attitudini mentali del giovinetto si svolsero in modo così precoce ed aperto, che fin dal suo quattordicesimo anno d'età egli acquistò la protezione del Duca Carlo Guglielmo Ferdinando, il regnante del paese, per conseguire una piena istruzione scientifica (3).

(*) L'egregia consorte dell'Autore di questo Discorso ebbe la compiacenza di inviare una versione italiana di esso alla Direzione degli *Annali.* Questa versione riveduta e modificata in alcuni punti dal prof. Beltrami è quella che quì si pubblica.

Gauss fu studente nella nostra Università di Gottinga dall'autunno del 1795 all'estate del 1798 (4).

In questo breve giro di tempo, vale a dire durante il suo diciannovesimo, ventesimo e ventunesimo anno, questo eroe della matematica fece le sue più peregrine scoperte, ed intravvide i germi di gran parte delle successive sue creazioni; creazioni profonde, che hanno fecondato i più remoti campi dell'umano pensiero (5) (6).

Come tutte le menti indagatrici, fu anch'egli potentemente attratto verso le questioni insolute. Fermat aveva, un secolo prima, formulato alcuni singolari teoremi sui numeri interi, verificabili facilmente in casi particolari, ma riusciti ribelli per lungo tempo ai più strenui sforzi fatti dai matematici per conseguirne la dimostrazione generale. Il grande Eulero aveva lavorato tutta la vita per dimostrare i teoremi di Fermat; ma, dopo varii tentativi inutili, dopo molti anni di studio, non ottenne qualche buon successo che riguardo al primo dei teoremi sui residui che nascono moltiplicando più volte un numero per sè stesso e dividendolo per un altro numero. Lo stesso Eulero non ispese meno di 23 anni a vincere tutte le difficoltà che si opponevano alla dimostrazione di quell'altro teorema di Fermat, che stabilisce la decomponibilità dei numeri primi in somme di due quadrati.

Nel corso di queste ricerche Eulero aveva trovato, per induzione, una proprietà a prima giunta molto strana di due numeri, l'uno dei quali possa risultare come residuo dalla divisione di un quadrato per l'altro. Egli non riuscì a dimostrare questa proprietà, malgrado i molti sforzi e la lunga sua vita di 76 anni (7). Anche Legendre, pervenuto (a quanto pare da sè) al medesimo teorema, per via d'induzione, non ebbe miglior fortuna.

Gauss pure trovò da sè questa recondita proprietà dei numeri nel Marzo del 1795; ma a lui fu dato eziandio di scoprirne la ragione il 29 Aprile 1796, cioè quando non aveva ancora che 19 anni. Egli stesso prese nota di questa data, come fece poi per ogni altra sua grande scoperta. È questa una particolarità che appartiene quasi esclusivamente a Gauss, ma che non può di certo parerci strana. Nei primi tempi della sua vita di studente a Gottinga egli approfittò senza dubbio del ricco tesoro librario che trovò quì raccolto per prendere cognizione dei lavori già fatti su tali argomenti (8). Gli sforzi d'Eulero per dimostrare quel teorema, e quelle men riposte proprietà dei numeri che abbiamo più sopra menzionate, riescono così visibilmente più gravi di quelli cui dovette le sue grandi creazioni in ogni altra dottrina, massimamente quelle che gli riuscì di fare anche nei suddetti 23 anni, che Gauss non potè a meno di sentire tutta l'importanza della propria scoperta, e di considerare come memorando per sè il giorno in cui la fece.

Per conseguire una dimostrazione di questo *teorema,* riconosciuto da lui come *fondamentale,* egli scrutò per ogni verso i misteri dei numeri, e giunse così ai suoi celebri teoremi sulla divisione del cerchio. Nella *Literaturzeitung* dell'Aprile 1796 egli ne annunziò nei seguenti termini un'applicazione particolare:

« Chi conosce gli elementi della geometria sa che si possono costruire geometricamente molti poligoni regolari, come il triangolo, il quadrato, il pentagono, il pentedecagono e quelli che risultano da questi raddoppiando successivamente il numero dei lati.

» Ciò si sapeva fino dai tempi di Euclide, e d'allora in poi sembra sia nata generalmente la presunzione che la geometria elementare non possa andare più oltre; per lo meno io non conosco alcun tentativo felice in questo senso.

» Sembrami dunque meritevole d'attenzione la scoperta della possibilità di costruire geometricamente molti altri poligoni regolari, oltre i già ricordati, per esempio quello di 17 lati. Questa scoperta non è del resto che un corollario speciale d'una più larga teoria non ancora recata a pieno termine, e verrà presentata al pubblico tostochè tal termine sia raggiunto.

Carlo Federico Gauss di Braunschweig
studente di matematica a Gottinga. »

Sappiamo dalle Tusculane di Cicerone che sulla pietra sepolcrale d'Archimede era stata scolpita, a mo' d'epitaffio, la misura scoperta da questi pei volumi del cilindro, della sfera e del cono. Il giovane Gauss doveva già sentirsi congiunto in ispirito al gran geometra siracusano e nell'istinto dell'indagine astratta, e nelle felici tendenze applicative, e nell'indirizzo supremamente aritmetico. Quand'egli, dopo aver fatta quella scoperta la sera del 30 Marzo 1796, nel penultimo mese del suo diciannovesimo anno, andò dal condiscepolo Volfango de Bolyai, ungherese, a sollevarsi del grave lavoro durato in queste sue astratte ricerche, gli mostrò la formola determinatrice della costruzione grafica, con riga e compasso, del poligono di 17 lati, e gli disse che quella *sola* potrebbe ornare la sua tomba, se non fosse un peccato ommettere tant'altre cose, — troppe cose per una lapide (9).

La teoria gaussiana delle funzioni donde dipende la divisione del cerchio divenne, nelle mani del suo istesso autore, uno dei più fecondi campi di ricerca.

Essa gli somministrò un'altra dimostrazione del citato teorema fondamentale, gli servì di filo d'Arianna per penetrare più addentro nel misterioso labirinto dei numeri, fu l'astro che gli rischiarò una parte dell'universa dottrina delle grandezze, la quale può dirsi infinitamente più grande di quella che già si conosceva. Quelle funzioni conferirono pieno diritto di cittadinanza nella matematica alle quantità così dette *immaginarie,* così spesso e così ingiustamente ripulse. Queste, per tal modo legittimate davanti all'umano sapere, rimeritarono ben tosto e in molte guise il loro rivendicatore, guidandolo, nel suo secondo anno di studio, ad importantissime scoperte di proprietà delle funzioni ellittiche e delle algebriche, scoperte che apersero nuove strade alla ricerca.

Al felice intuito delle nuove trovate Gauss accoppiava l'acume critico, cioè quella squisita attitudine a distinguere nettamente ciò che l'umano intelletto può riconoscere da sè per vero ed esatto, da ciò che l'uomo ha rilevato dal mondo esterno per mezzo dei sensi. La scienza geometrica, esposta da Euclide in modo così bello, così esemplare, così logicamente deduttivo, era considerata da due mila anni come rigorosa, come assolutamente vera. S'era bensì notato che fra i principii ch'essa ammetteva senza dimostrazione, come evidenti senz'altro, ve n'era uno, meno semplice degli altri, il quale suppone l'esistenza di rette parallele. Ma nessuno, a quanto pare, ne aveva prima di Gauss messa in dubbio la assoluta esattezza. Noi possiamo chiaramente rilevare ciò ch'egli ne pensasse fin d'allora da un passo di una sua lettera a Volfango de Bolyai, a quel solo fra i suoi compagni di studio col quale egli ebbe attivo scambio d'idee scientifiche. Bolyai era partito da Gottinga il 5 Giugno 1799, dopo aver compiuti i suoi studii matematici nell'Università Georgia Augusta. Alla fine dell'anno, mentre questi era a Clausenburg, Gauss così gli scriveva da Braunschweig:

« Molto mi duole di non aver approfittato della prossimità in cui ci trovavamo in passato per saperne *di più* circa i tuoi lavori sui primi principii della geometria; avrei certamente risparmiate molte vane fatiche, e sarei più tranquillo di quel che possa essere uno, il quale pensa che in tale argomento si sa ancora così poco.

» Dal canto mio, sono andato molto innanzi coi miei studii in proposito (benchè le mie altre occupazioni, del tutto diverse, me ne lascino poco tempo); ma la via che ho tenuto, piuttosto che alla meta desiderata, conduce a mettere in dubbio la verità della geometria. Ho ben trovato parecchie cose che pei più equivarrebbero senz'altro a dimostrazioni; ma per me sono *affatto* prive di valore.

» Per esempio, se si potesse provare la possibilità d'un triangolo avente l'area maggiore di qualunque area data, io sarei in grado di dimostrare rigorosamente tutti i teoremi della geometria. I più lascierebbero correre la cosa come assiomatica; io no: sarebbe ben possibile che per quanto si allontanassero i tre vertici l'uno dall'altro, l'area restasse pur sempre al dissotto di un limite assegnabile.

» Di questi teoremi ne ho parecchi: ma nessuno mi soddisfa. »

Sullo stesso proposito egli così scriveva a Bessel nel 1829:

« In alcuni momenti di libertà ho ripensato ad un argomento, che mi sta a cuore da quasi 40 anni, voglio dire ai primi fondamenti della geometria; nè so se vi abbia mai parlato del mio modo di vedere in proposito. Anche in questa parte ho messo meglio in sodo parecchie cose, e mi sono, se è possibile, vieppiù fortificato nel mio convincimento che la geometria non possa essere stabilita totalmente *a priori*. Tuttavia ci vorrà molto prima che mi risolva ad elaborare per una pubblicazione le mie *estesissime* ricerche, nè forse lo farò mai vita natural durante, perchè pavento troppo i clamori che solleverebbero gli avversarii se io dicessi *chiaro e tondo* il mio pensiero.

» È tuttavia strano che la geometria d'Euclide, *oltre* le note lacune che non si poterono mai colmare, nè mai si potranno, ne presenti molte altre che, per quanto io sappia, nessuno ha mai appuntate, e che non è affatto facile rimovere (benchè possibile sia). Una di queste è la definizione del piano, come d'una superficie nella quale debba giacere per intero ogni retta che ne congiunga due punti arbitrarii.

» Questa definizione contiene più di quanto è necessario per determinare la superficie, ed implica tacitamente un teorema la cui dimostrazione dovrebbe precederla. »

Più tardi Gauss aggiungeva:

« Mi ha fatto veramente piacere la prontezza colla quale voi siete entrato nelle mie idee sulla geometria, massime perchè son così pochi quelli che hanno la mente aperta a ciò. Io sono intimamente convinto che la dottrina dello spazio è diversissimamente atteggiata da quella delle pure grandezze rispetto alla nostra cognizione delle verità intelligibili per sè: ciò che sappiamo della prima manca assolutamente di *quel* pienissimo convincimento della sua necessità (e però anche della sua verità assoluta) che è proprio della *seconda.* Noi dobbiamo umilmente confessare che, mentre il numero è un parto della *sola* nostra mente, lo spazio possiede anche fuori di questa una *realità* alla quale non possiamo prescrivere tutte le leggi *a priori.* »

Dopo aver riconosciuto la sola esperienza essere la base di quell'importante assioma, che tanti geometri tenevano per irrepugnabile, era naturale che Gauss vedesse nella sua più chiara luce la legge che aveva trovata per dedurre dalle osservazioni i risultati più plausibili. Infatti, mercè il metodo da lui scoperto fin dal suo diciottesimo anno, non solo l'astronomia pratica e la fisica di precisione poterono per la prima volta salire alla dignità di scienze sistematiche, ma la stessa geometria tradizionale potè essere riconosciuta bastevole fino a tanto che i telescopii ed i microscopii non abbiano conseguito qualche ragguardevole perfezionamento, od il nostro sistema planetario non abbia percorso insieme col sole una assai più lunga via nello spazio.

Così fortunato era già fin d'allora Gauss, nel ritrovamento delle vie più certe alle indagini naturali, da poter riferire a quei tempi le parole che più tardi egli scrisse sotto il proprio ritratto:

Sii tu, Natura, la mia Diva; e sia
Sacra alle leggi tue la vita mia!

La sua tendenza a volgere le più astratte dottrine in pro' dei problemi offerti dal mondo esterno si esplicò anche rispetto ad una questione reputata ardua fin dai tempi di Keplero. Egli stesso così scriveva in proposito, nel 1802, all'amico che lo amava con affetto e sollecitudine di padre, al celebre inventore del più semplice metodo di calcolo d'orbite cometarie e scopritore di comete e di pianeti, al medico di Brema Guglielmo Olbers:

« Il mio metodo per calcolare l'orbita d'un corpo celeste fa in certo modo riscontro al vostro.

» Avevo già congetturato, cinque anni addietro, la prima volta che lessi la vostra teoria delle orbite cometarie, che vi dovesse essere una formola analoga alla vostra; ne feci qualche cenno al defunto Lichtenberg, il quale mi eccitò molto ad intraprendere tale ricerca: ma ero allora così immerso nell'aritmetica superiore ed in certi studii su un altro ramo d'analisi, dei quali vi scriverò un'altra volta, che ben presto non vi pensai più.

» Ma quando poi, l'anno passato, mi uscì fuori inaspettatamente la formola, vidi subito quanto potesse giovare a rendere spedite le prime approssimazioni d'un calcolo d'orbita, senza intervento di ipotesi arbitrarie. Fortunatamente ricevetti proprio in quel punto le osservazioni di Piazzi sul pianeta nuovamente scoperto, e risolvetti subito di fare sovr'esse una prova del metodo. »

Ma il tema prediletto degli studii di Gauss era, e fu sempre, la teoria dei numeri. Fu nel Luglio del 1801 ch'egli potè dare alla luce la prima parte dei suoi lavori. Ivi egli recò d'un tratto all'altezza di scienza metodicamente ordinata una dottrina che, nata in parte già fra le mani di EUCLIDE e di DIOFANTO, era stata poi coltivata specialmente da FERMAT, da EULERO, da LAGRANGE e da LEGENDRE.

La stampa di questo libro, ritardata da estranei impedimenti, andò tanto per le lunghe da durare più anni. Fin dal Novembre del 1798 GAUSS se ne querelava in questi termini coll'amico BOLYAI:

« Il mio libro va ancora molto a rilento. Oggi soltanto aspetto le bozze dell'8° foglio. Ma poichè non v'è rimedio, ho approfittato del ritardo per rifare ancora una volta di sana pianta una sezione (che è la quinta: sono otto in tutto).

» Questa sezione, che è la più estesa, ha già avuto molte vicissitudini; la redazione attuale è la *quarta*. Ogni volta ch'io l'ho rifatta, son riuscito a condurre le cose in modo da superare le più ardite speranze delle volte precedenti, e fra un pajo di giorni avrò terminato per la quarta volta ciò che impiegai tutto l'estate ad elaborare per la terza. »

Si vede di quì che GAUSS non si lasciava sgomentare dalla fatica d'una rifusione quattro volte intrapresa, pur di recare alla massima perfezione il contenuto e la forma di una pubblicazione. Egli seguiva fin d'allora la regola

Pauca sed matura!

divisa che più tardi applicava volentieri a sè medesimo, quantunque la seconda parte, la maturità, fosse certo appropriata ai lavori di GAUSS, ma la prima fosse più conforme a modestia che a verità, in bocca di lui. Ma di ciò ch'egli intendesse per maturo abbiamo una significantissima testimonianza in queste sue parole a BESSEL:

« Io desideravo molto di sapere se le vostre vedute sull'insufficienza della teoria fin quì accettata circa le azioni capillari fossero d'accordo colle mie.

» Sapendo che sì, ho pigliato più coraggio a *redigere con cura* il mio metodo. Ciò mi ha costato molto tempo; ma crederò il mio lavoro tanto migliore, quanto meno darà a sospettare, in certe parti, la gran fatica che ho durato a recarlo nella sua forma attuale. »

E quell'uomo di genio, che era l'astronomo BESSEL, sapeva ben apprezzare questa perfezione del dettato, egli che a proposito delle ricerche sui cannocchiali scriveva a GAUSS:

« Non ho d'uopo di mettere in rilievo tutto il magistero della vostra trattazione: essa è quello che deve essere, nessuno avendo mai potuto decidere se le vostre produzioni brillino maggiormente per la sostanza o per la forma. »

Ma Bessel considerava questo modo di lavorare anche da un altro aspetto. Egli scriveva a Gauss nel 1837:

« Per quanto poco io abbia il diritto di sperare che un mio voto possa avere qualche peso, pur nondimeno non so tacervi che, rispetto alle vostre presenti elucubrazioni, questo mio voto è per la loro più pronta pubblicazione.

» Voi non avete mai sentito il dovere di promovere la presente cognizione degli argomenti da voi studiati colla diffusione sollecita di una congrua parte delle vostre ricerche: voi vivete per la posterità.

» Fin dove non arriverebbero già le scienze matematiche, non solo nella vostra sede, ma in tutta Europa, se voi aveste detto tutto ciò che potevate dire!

» Ma non voglio aggiunger altro; e ancora temo di non far che ripetere ciò che spesso vi è stato detto. »

E due anni dopo Bessel tornava sullo stesso argomento, scrivendo:

« Ho già avuto abbastanza occasione di ammirare la suprema diligenza da voi recata nell'esposizione e nella forma, ed ho ben anche potuto capire che siffatta perfezione non è conciliabile colla prontezza e colla frequenza delle pubblicazioni. »

Di quì si vede che se la maturità dei lavori di Gauss fu giustamente apprezzata, non sembra esserlo stata altrettanto la loro copia. Ma ora che possiamo vederci schierate davanti tutte le sue opere, ci è più facile pronunciare un equo giudizio.

Gli scritti messi in assetto da Gauss medesimo per la pubblicazione sono, mercè la somma cura dell'elaborazione, ridotti a quell'estremo limite di brevità che può raggiungersi senza offesa della sostanza. Ogni pensiero vi è espresso nel modo più appropriato e più conciso. Quanto poi ai lavori non approntati da lui stesso per la pubblicazione, e conservati soltanto in forma di note manoscritte, essi vi si trovano condensati siffattamente che non si può darsene ragione se non ricordando alcune parole dirette da Gauss a Bessel (nel Dicembre 1816):

« Delle mie ricerche sui residui biquadratici non terrò nota che quanto basti a richiamarmi in memoria le idee nuove che mi balenano dinanzi. »

Sono anche molte notevoli alcune espressioni di Gauss sui sentimenti che lo dominavano quando gli riusciva di fare qualche scoperta nella teoria dei numeri. Così scriveva egli, per esempio, all'amico Olbers nel Settembre del 1805:

« Diverse circostanze — in parte alcune lettere da Parigi di Leblanc, il quale ha studiato con vera passione il mio libro d'alta aritmetica, si è completamente impossessato della materia, e mi ha comunicato in proposito alcune osservazioni veramente belle — in parte anche una specie di tedio o almeno di stanchezza in cui sono caduto a furia di calcoli, mortalmente materiali, sulle orbite dei nuovi pianeti; tutto questo, dico, mi ha fatto cedere nuovamente alla seduzione delle mie favorite ricerche aritmetiche, aprendo una parentesi nei suddetti calcoli.

» Vi ricorderete forse ancora delle nostre conversazioni in Brema, e specialmente di quel bel pomeriggio che abbiam passato sul Vahr, quando vi raccontavo che già da molto tempo ho una gran quantità di ricerche, più *in pectore* che in portafoglio, le quali basterebbero a formare un secondo volume di teoria dei numeri, e che, a mio giudizio almeno, sarebbero notevoli quanto quelle del primo.

» Ma vi ricorderete forse anche delle mie querimonie per un teorema che, oltre essere interessante in sè stesso, era poi la base, od il coronamento di una gran parte di quelle ricerche, e che, a me noto già da più di due anni, resisteva a tutti i miei sforzi per trovarne una dimostrazione soddisfacente; il qual teorema è già accennato nella mia teoria dei numeri e riguarda la determinazione del segno d'un certo radicale, determinazione che mi ha sempre tormentato.

» Questa lacuna mi infirmava tutto ciò che avevo trovato in seguito, sicchè da 4 anni è passata raramente una settimana senza ch'io abbia tentato, in un modo o in un altro, ma sempre invano, di sciogliere il nodo — ed anche ultimamente ci ho messo tutto l'impegno. Ma tutto fu inutile, ho sempre dovuto deporre tristamente la penna.

» Finalmente da un pajo di giorni ne son venuto a capo, — ma debbo credere che sia stato per grazia del Signore, anzichè per i miei faticosi sforzi.

» L'enigma s'è sciolto a un tratto, come folgore che scoppii: io stesso non saprei indicare il filo che ha congiunto ciò ch'io sapevo prima, ciò che mi aveva servito negli estremi tentativi, con ciò che mi ha dato la chiave.

» Lo strano si è che adesso la soluzione dell'enigma pare più facile di molte altre cose, che non mi hanno trattenuto per tanti giorni quanti son gli anni che ho mulinato intorno a questa; ed è ben certo che quando darò fuori questa ricerca, nessuno potrà immaginarsi che io vi abbia incontrato un così lungo intoppo.

» Per il momento non posso far a meno di trascrivere e di mettere in netto alcune di queste cose. Ma non per questo trascurerò totalmente i miei lavori astronomici. »

Sotto il pseudonimo di Leblanc si nascondeva, come Gauss venne poi a sapere, la nota cultrice delle scienze matematiche Sofia Germain (10).

Anche rispetto alla peculiar maniera di far ricerche nella teoria dei numeri, troviamo questo cenno in una lettera di Gauss a Bessel del 1816:

« Da parecchi mesi son tornato nuovamente a certe ricerche d'alta aritmetica, che mi hanno torturato da quasi 12 anni. Sono di quella specie in cui non si può dir prima: voglio far questo, ma in cui dopo forse 999 tentativi infelici si arriva alla meta mercè una 1000^a combinazione che riesce. Ho ben raggiunto lo scopo, ora, ma per una via che non si può veramente dir breve.

» L'argomento è la teoria dei residui biquadratici, di cui debbo avervi già parlato molte volte. »

Dal dovizioso tesoro delle sue altre scoperte, che fecero epoca nell'Astronomia teorica e pratica (11), nella Geodesia strumentale e numerica (12), nella Geometria analitica e nella Fisica matematica (13), non trarrò fuori quì che quella ancora, la quale divenne poi della più grande importanza pratica. Egli ne dava quest'annunzio ad Olbers il 20 Novembre 1833:

« Non so se vi abbia già scritto di un grandioso apparecchio che abbiamo messo insieme qui. È una corrente galvanica che va dall'Osservatorio al Gabinetto di fisica, attraverso fili sostenuti per aria al disopra delle case, salendo sulla torre di S. Giovanni, e ritornando per la stessa via. La lunghezza totale del filo è di circa 8000 piedi.

» Ai due estremi la corrente attraversa un moltiplicatore: il mio ha 170 giri, quello di Weber nel Gabinetto di fisica ne ha 50, ambidue disposti secondo il mio metodo di sospensione. Ho immaginato un apparato semplice col quale posso invertire istantaneamente la direzione della corrente, e che chiamo un commutatore.

» Quando agisco destramente con questo sulla mia pila, il moto dell'ago nel Gabinetto diventa in breve tempo (per es. in 1 minuto od in $1\frac{1}{2}$) così forte, che picchia sopra un campanello udibile in un'altra stanza. Ma questo non è che un giochetto. L'intenzione mia è di rendere *visibili* i movimenti, nel che si può raggiungere la maggior precisione.

» Abbiamo già adoperato quest'apparecchio per esperimenti telegrafici, che son riusciti benissimo con parole intiere o con piccole frasi.

» Il vantaggio di questa maniera di telegrafare è d'essere totalmente indipendente dal tempo e dall'ora; chi dà il segnale, come chi lo riceve, sta nella propria camera e può anche tener chiuse le imposte. Io sono convinto che con fili abbastanza forti si potrebbe in questo modo telegrafare *in un attimo* da Gottinga ad Hannover o da Hannover a Brema. »

Noi vediamo coi nostri occhi quale importanza abbia già acquistato il telegrafo per l'umana società, quanto conferisca all'universale prosperità, quanti servigi renda alle intraprese scientifiche. Potrà quindi riuscir grato il conoscere la materiale estensione di questo grandioso meccanismo. Dai numerosi dati che la Direzione generale dei telegrafi ha posto a mia disposizione, ho calcolato che in un solo anno (1874) sono stati spediti più di 101 milioni di telegrammi, cioè press'a poco la trentacinquesima parte delle lettere scritte nel medesimo tempo, con un introito di circa 112 milioni di franchi, mentre la lunghezza totale dei fili giungeva nella stessa epoca a quasi 1460 milioni di metri, vale a dire a un dipresso quattro volte la distanza dalla terra alla luna.

Noi non abbiamo oggi contemplato che pochi fiori del serto immortale ond'è coronato il capo del pensatore che

Sovra gli altri com'aquila vola;

gli altri s'intrecciano a questi, non men belli, nè men preziosi.

Ma se sfavillano di luce le scoperte di lui, non è men pura e limpida la loro sorgente, la *sete ardente del vero.* Egli stesso lo ha detto al suo condiscepolo: « Ti dà *sempre* egual gioja la ricerca del vero?

» In verità ti dico che non il sapere, ma l'apprendere; non il possedere, ma il vincere; non lo stare, ma l'arrivare è quel che ci dà la somma delle gioje.

» Quando io ho messo in chiaro del tutto una cosa, quando l'ho esaurita, me ne ritorco, per cacciarmi di nuovo nel bujo. »

Le produzioni intellettuali di Gauss sono profonde e penetranti; ma il pensiero che lo ha guidato è semplice e naturale: « Evitare *ogni arbitrio* per esercitare *piena giustizia.* »

Render giustizia alle *osservazioni,* tal fu per lui il fondamento delle leggi che pose alla loro combinazione.

Render giustizia ai movimenti liberi, compatibilmente colle condizioni che son loro prescritte, tal fu per lui l'essenza della *suprema legge della meccanica.*

Anche ai suoi contemporanei egli rese giustizia; e, più che giustizia, esercitò *benevolenza efficace* verso i giovani studiosi, procurando di aprire adeguate vie alla loro attività (14).

Onorevoli Signori.

La nostra comune presenza in questo luogo è la prova del desiderio vivissimo che ci arde nel petto di rendere, noi pure, giustizia a lui, all'altissimo maestro (15) (16) (17).

ADDIZIONI

PER LA STAMPA DEL DISCORSO.

(1) La Reale Società delle Scienze di Gottinga aveva invitato alla Festa commemorativa i Membri stranieri e i Corrispondenti della Classe di matematica.

La solenne seduta pubblica ebbe luogo nella sala delle lauree e cominciò alle 11 ant. Venne aperta dal sig. prof. Wüstenfeld, presidente *pro tempore* della Società, che incominciò col dare il benvenuto ai numerosi ospiti venuti dall'estero. Diede poscia la parola al sig. prof. D.r Borchardt, che lesse il seguente indirizzo della Reale Accademia delle Scienze di Berlino:

« *Alla R. Società delle Scienze di Gottinga.*

» Con lieta comunanza di sentimenti salutiamo questa Reale Società di Scienze, sorella alla nostra, nel giorno in cui festeggia il centenario della nascita di quell'uomo straordinario, del quale essa ebbe la sorte d'ammirare da vicino, testimonio per quasi un mezzo secolo delle di lui creazioni, il genio incomparabile.

» Carlo Federico Gauss è stato appellato da' suoi contemporanei *Princeps mathematicorum*, e la posterità darà la sua sanzione a questo appellativo. Più che in ogni altro dei grandi geometri degli ultimi due secoli si sono in lui accoppiate la profondità speculativa che sa andar fino al fondo d'ogni ricerca, e l'abilità pratica che sa render feconde le scoperte dottrinali con ogni più sottile artifizio; felice accoppiamento, pel quale ci è dato comprendere come l'autore delle *Disquisitiones arithmeticae* e delle Memorie sui residui quadratici e biquadratici abbia potuto scrivere la *Theoria motus corporum coelestium*, schierarsi fra i precursori del suo tempo in astronomia pratica ed in geodesia, mettere in sodo la teoria del magnetismo terrestre, e pigliare una parte decisiva nella sistemazione della telegrafia elettrica. Nè in lui è meno mirabile del trionfo d'ogni sua operazione, la singolare precocità dell'intelletto, la dovizia dei fecondi pensieri, sôrti in sua mente fin dal primo principio di sua carriera, e la perfezione di forma con che egli, fermo alla massima: *pauca sed matura*, presentò al mondo i portati del suo ingegno. E invero i suoi primi lavori erano già da maestro immortale, eran già tali da mettere stupore per l'altezza di scienza come per la chiara consapevolezza del fine che rivelavano nel giovane Autore. Ma la sua preminenza mentale si manifesta più di tutto nell'influsso decisivo ch'egli ha esercitato sull'indirizzo e sullo svolgimento dell'indagine matematica del suo e del nostro tempo, penetrando in ogni sua ricerca fino all'ultimo midollo, appurando ed ampliando i concetti fondamentali delle scienze matematiche, stringendo in fascio sotto leggi generali fatti ch'eran prima rimasti inesplicati e solitarii, e congiungendo il rigore dei metodi antichi al libero atteggiarsi dell'analisi moderna.

» Possa la solenne Festa preparata da questa Società, cui speriamo assisteranno in gran numero i rappresentanti delle varie discipline matematiche, mostrare al mondo che la nostra generazione, non meno della passata, guarda con ammirazione profonda a Gauss, lo riconosce a proprio maestro e luminoso modello, e vuol cooperare secondo la mente di lui all'incremento dell'umano sapere.

» Berlino, 26 Aprile 1877.

» Per la R. Accademia delle Scienze T. Mommsen, E. E. Kummer, E. du Bois Reymond. »

Dopo ciò ebbe la parola il sig. Francesco Brioschi, da Milano, Professore e Senatore del Regno d'Italia, per comunicare gli indirizzi e le credenziali che lo accertavano rappresentante del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, della R. Accademia dei Lincei e della R. Università di Pavia (*).

Lettosi poscia dal Presidente anche l'indirizzo dell'Accademia Ungarica di Scienze di Buda-Pest, il sig. prof. Schering (l'Accademico al quale la Società Reale di Gottinga aveva già affidato l'incarico, ora totalmente assolto, di pubblicare le opere di Gauss) fu da lui invitato a recitare il precedente discorso su i meriti scientifici del grand'uomo in onor del quale si celebrava la Festa.

(2) Le notizie di fatto che si son potute accertare rispetto ai genitori ed agli antenati di Gauss si trovano accuratamente raccolte in un articolo del fascicolo di Marzo ed Aprile delle *Braunschweigischen Anzeigen,* intitolato « Carlo Federico Gauss e Braunschweig » e firmato « Hn. ».

(3) Circa gli indizii della precocità di Gauss non sappiamo altro che quello che ne ha raccontato egli stesso. Sartorio de Waltershausen ne ha riprodotti alcuni episodii nel suo scritto commemorativo.

(*) Ciò che precede fa parte della Relazione inserita, d'incarico della R. Società di Gottinga, dal prof. Schering nelle *Nachrichten* del 16 Maggio 1877, p. 229-237.

Se ne ha pure un esempio in una lettera di Gauss ad Olbers datata: Braunschweig, 20 Aprile, 6 ore pom. 1802.

« Grazie di cuore, amico carissimo, delle vostre due pregiate lettere del 13 e del 18 corr., e delle osservazioni che avete fatte della vostra Pallade, la quale mi va sembrando sempre più notevole. Continuate, ve ne prego, a comunicarmi tali osservazioni.

» Appena ricevetti le vostre prime osservazioni, tentai di far passare un cerchio pei luoghi del 29 Marzo e del 1 Aprile, ma collo stesso risultato vostro, cioè di trovar sempre troppo celere il moto. Lo stesso avvenne quando ricevetti il 14 corr. le osservazioni di Zach del 4, 5 e 7 Aprile e le volli combinare colle vostre del 29 Marzo. Mi provai a determinare col mio metodo la sezione conica soddisfacente alle osservazioni del 29 Marzo e del 4 e 7 Aprile, indipendentemente da qualunque ipotesi, e trovai subito che ciò era del tutto impossibile con osservazioni così vicine. Credetti dunque che il miglior partito fosse di soprassedere pel momento, aspettanto ulteriori osservazioni. Avrei forse ripetuto il tentativo in seguito alla vostra penultima lettera (del 17 Aprile), ma ne fui impedito da estranee circostanze. Ma quando ricevetti jeri sera l'ultima vostra osservazione, non potei più resistere.

» Ho scelto la vostra osservazione del 29 Marzo, quella di Zach del 7 Aprile e la media delle vostre due ultime del 19 Aprile (giacchè la variabilità del moto in un pajo d'ore non può essere sensibile di fronte agli errori d'osservazione), ed ho subito trovato con una prima approssimazione i seguenti elementi, che tuttavia comunico unicamente a voi, e che vi prego di considerare come una testimonianza della mia sincera venerazione e dello straordinario interesse che nutro per la vostra sempre memorabile scoperta. Crederei veramente di non aver fatto errori di calcolo nella fretta; ma l'influenza della minima variazione nelle osservazioni è ancora così grande, che i veri elementi potrebbero benissimo differire ancora notevolmente dai seguenti. Frattanto noi ci accostiamo quasi ogni giorno più alla verità, ed io spero di potervi in breve liberamente comunicare risultati corretti... Se questi elementi, che ad ogni modo sono possibili, fossero prossimi ai veri, non si dovrebbe proprio più esitare a chiamare pianeta la vostra Pallade. È vero che la sua massima distanza dal sole è doppia della minima, ma anche per Mercurio queste distanze stanno come 3 a 2, e l'orbita di Pallade sarebbe ancora poco diversa dalla circolare, benchè il sole non sia nel centro. Ma come andrebbe poi colla nota legge, messa in voga specialmente da Bode, e che sembrò così ben confermata da Cerere? Non mi meraviglierei s'essa andasse in fumo. Per dirvelo a quattr'occhi, io non ci ho mai tenuto molto; ed anzi vi voglio comunicare un'osservazione che ho *in pectore* già da 12 anni e che mi meraviglio non sia stata fatta molto prima. Eccola in poche parole: la serie

$$4, \quad 4+3, \quad 4+6, \quad 4+12, \quad 4+24, \quad 4+48, \quad 4+96, \quad 4+192$$

non è punto una serie regolare. Basta essere messi in guardia, per veder subito che prima di $4+3$ ci dovrebb'essere non 4, ma $4+1\frac{1}{2}$, che quindi Mercurio non quadra colla serie, oppure che fra Mercurio e Venere vi dovrebbero essere infiniti pianeti. Non credo che niuno voglia stare ad aspettarli. Mi piacerebbe sapere il vostro giudizio in proposito. »

Quando Gauss osservò quest'anomalia egli non aveva, come risulta da questa sua indicazione, che 13 anni.

Dove è detto « la media delle vostre due ultime del 19 Aprile » la data è quella del ricevimento della lettera: le osservazioni sono state fatte il giorno 17 alle 10 ed alle 13 ore, e la lettera di Olbers che le comunicava a Gauss ha la data del 18 Aprile 1802. Il 19 Aprile Olbers non fece che una osservazione, alle 11 ore, che trasmise a Gauss con lettera del 23 Aprile 1802, ringraziandolo per la sua lettera del 20. I primi elementi di Pallade furono pubblicati da Gauss dopo che egli potè utilizzare altre osservazioni fino al 1 Maggio 1802.

(4) L'articolo già citato delle *Braunschweigischen Anzeigen* contiene alcuni particolari sugli studî preliminari di Gauss al *Carolinum* di Braunschweig e sui sussidii accordatigli dal Governo ducale per il soggiorno a Gottinga. Oltre queste notizie troviamo i passi seguenti, pure relativi a quei tempi, nelle lettere di Gauss.

Gauss al « sig. de Bolyai in Gottinga. Braunschweig 29 Settembre 1797. »

« Perdona, caro Bolyai, se non ti ho scritto prima; nei giorni che finora ho passato quì non ho fatto che vegetare e divagarmi. Hai visto coi tuoi occhi il tempo infausto col quale ho dovuto mettermi in viaggio: dopo il mio arrivo esso parve migliorare per un pajo di giorni, proprio per farmi pentire di non aver aspettato ancora un giorno a partire. Ed intanto ho perduto il tempo in visite di cerimonia ed in prender medicine. *Denique* son capitati i temporali dell'equinozio e le pioggie, probabilmente perchè i figli delle muse, rincasati, possano studiare più tranquillamente: circostanze nelle quali questa mia lettera ti troverà ancora a Gottinga. Ma ciò passerà, caro Volfango: probabilmente il mese venturo avremo un tempo magnifico, e allora tu devi venir subito a

Braunschweig. Bisogna che tu conosca *à tout prix* la razza che vive in questo paese, ed i nostri prodotti *qualiacumque* della natura e dell'arte. Il nostro Duca non è quì, adesso; non so neppure se verrà in tempo che tu lo possa vedere. È certo ch'egli è uno dei primi uomini di questo paese. Quando puoi, scrivimi del quando conti venire. Puoi fare a piedi le 11 miglia in due giorni, comodamente... Il mio indirizzo è Charles Frédéric G. Candid. en Philos. presso Gebhard Dietrich Gauss al Wendengraben, Braunschweig.

» Finalmente ti dirò anche che forse potremo ritornare insieme, giacchè, per quanto sta in me, non prolungherò molto il mio soggiorno quì, e non vedo l'ora di consacrarmi alla casta vergine Geometria e, se Dio vuole, alla inspirata damigella Musica. Addio, caro Bolyai, non ti so dire la festa che faccio già per la tua venuta. Sempre tuo Gauss. »

In una lettera da Braunschweig, del 21 Aprile 1798, Gauss scrive a Bolyai, a Gottinga, che malgrado i pericoli e le molestie dell'ultimo viaggio pedestre, egli vuol farne ancora un altro:

« Volevo dirti che Lunedì prossimo, 23 Aprile, conto di partire *volente Deo* per essere a Gottinga il 24. »

(5) Anche il sig. Kronecker parla d'una scoperta fatta in quei tempi da Gauss come d'un tratto di genio.

Egli dà, nei *Monatsberichte* dell'Accademia di Berlino del 1876, una nuova definizione del concetto di *carattere del residuo,* introdotto da Gauss, e determinato da Jacobi mediante il valore del segno di Legendre generalizzato, e conclude il suo articolo (p. 341) colle parole: « Al posto di questo lemma [di Gauss, art. 106 delle *Disq. Arithm.*] interviene quì la più importante delle considerazioni su cui posa la prima dimostrazione di Gauss; ed il fatto ch'essa renda possibile di evitare le congruenze di grado superiore, che si presentano in quel lemma, dà nuova luce sulla profonda portata di quella mirabile ed acuta deduzione, che ha condotto per la prima volta ad una rigorosa dimostrazione del teorema di reciprocità, e che, andando diritta allo scopo senza lasciarsi arrestare da alcuna difficoltà, dà quasi una misura della potenza mentale di Gauss. »

(6) Le scoperte fatte in quest'epoca appartengono principalmente alla teoria dei numeri, alla teoria delle funzioni algebriche ed a quella delle funzioni ellittiche; le ho a parte a parte indicate nelle osservazioni da me apposte alle opere di Gauss, e precisamente nel 1°, 2° e 3° volume.

(7) Si deve al sig. KRONECKER d'aver messo in rilievo come EULERO avesse già riconosciuta in tutta la sua estensione la legge di reciprocità dei residui quadratici: *Osservazioni sulla storia della legge di reciprocità,* nei *Monatsberichte* della Reale Accademia di Berlino, anno 1875, p. 267-274.

(8) GAUSS compilò per proprio uso diligentissimi indici ed estratti critici dei giornali e dei libri matematici. Ho fondati argomenti per congetturare che appartengano in massima parte ad un'epoca anteriore a quella del soggiorno a Gottinga, chè altrimenti si potrebbe anche pensare ad Helmstedt. Su di che abbiamo i seguenti passi di sue lettere:

GAUSS al « sig. VOLFANGO DE BOLYAI in Gottinga. Braunschweig 30 Settembre 1798. »

« Caro BOLYAI. Sono arrivato qui Martedì scorso. Nel secondo giorno dovetti viaggiare parecchio sotto la pioggia. Tra per questo e tra per aver dovuto partire il Lunedì a stomaco mezzo vuoto, viaggiando poi tutta la notte all'aperto, non a piedi ma in carrozza, mi son buscata una piccola indisposizione che mi ha costretto finora a stare quasi sempre in casa; ma la mia cara aria natale mi ha già fatto guarire del tutto. Dei miei amici maturi non ho ancor veduto che ZIMMERMANN: al Duca conto far visita fra pochi giorni. So dunque ben poco di quel che farò in seguito; ma anche questo poco non ti dovreb-b'essere indifferente, se i tuoi sentimenti rispondono ai miei. Ho buone ragioni per credere che il Duca mi conserverà la sua protezione finchè io abbia ottenuto una posizione stabile. Ho perduto un'occasione di lucro. Avrei potuto insegnare matematica ed astronomia a due brave ragazze, figlie d'un inviato russo che sta quì. Ma non essendomi date le mani attorno, sono stato prevenuto da un emigrato francese. Ho però in vista un'altra occupazione che molto mi sorriderebbe. C'è il Maggior Generale von STAMFORD, di cui ti ho già parlato spesso come d'un'eccellente persona, che conosce assai a fondo e che ama caldamente le cose matematiche, il quale vorrebbe ripassarne alcune parti insieme con me. Non so ancor bene di che si tratti, nè con qual veste mi troverei, perchè non l'ho ancora personalmente visitato. Ritengo che ciò basterebbe al mio mantenimento, e che mi resterebbe libera gran parte della giornata. Questo è quanto posso dirti oggi di più importante... Fra circa otto giorni conto di partire per Helmstedt. »

« *P.S.* Salutami i miei conoscenti di costà: IDE, SIMONIS, EICHHORN, SEYFFER, LICHTENBERG, KAESTNER, PERSOON ed ogni altro che abbi occasione di vedere. »

GAUSS a BOLYAI. « Braunschweig 20 Novembre 1798. »

« La mia posizione è sempre assai precaria e lo sarà forse fintantochè non siano terminate le mie *Disquisitiones analyt.* Non ho ancora parlato col Duca: subito dopo il mio arrivo ZIMMERMANN ha domandato per iscritto se gli piaccia vedermi, e non ha ancora avuto risposta. Se questa risposta non viene fra alcuni giorni, o se Z. può parlargli personalmente, come forse farà, tenterò di presentarmi a lui, benchè sappia quasi di sicuro che sarà inutile, perchè raramente viene ammesso chi non sia stato chiamato. Mi sarebbe ben necessario il suo appoggio, vivendo io quasi del tutto a credito, dopo che sono andate in fumo le mie prospettive di guadagno; giacchè DE STAMFORD non è più quì, coprendo invece un posto diplomatico a Berlino, ed ho per varii motivi, e specialmente per vera e propria mancanza di tempo, declinato alcune altre offerte che m'erano state fatte; — ma pure ho buonissime ragioni per non chiedere ora quell'appoggio, ragioni che non potrò confidarti che a voce, o più tardi.

» Il mio libro va ancora molto a rilento; il tipografo è un uomo molto flemmatico, che bada poco alle rimostranze ed alle preghiere; non sono stampati che 7 fogli in tutto (5 erano già finiti prima ch'io tornassi). » Quì segue il passo che fu riportato nel discorso, p. 216 linee 8-16, e poi dice: « la sesta (sezione) non è molto estesa, la settima (contenente la teoria dei poligoni) lo è alquanto più, ma in sostanza è già pronta: l'ultima soltanto mi occuperà ancora per molto tempo, giacchè tratta delle parti più difficili. Ma in ogni modo sarò in ordine per Pasqua (se continuo a star bene come adesso); Dio voglia che lo sia anche lo stampatore.

» Sono stato ad Helmstedt ed ho trovato colà buonissima accoglienza tanto presso PFAFF quanto presso il Sovraintendente della Biblioteca. PFAFF ha corrisposto alla mia espettazione. Ha il requisito infallibile del genio, di non lasciare un soggetto prima d'averlo sviscerato fin dove è possibile. Mi ha concesso con molta cordialità d'usare della sua libreria, e gli scriverò fra breve per pregarlo di diverse cose. »

30 Dicembre 1798. GAUSS al « sig. DE BOLYAI a Gottinga. »

« Dopo le mie ultime lettere la mia situazione è alquanto migliorata: non ho propriamente veduto il Duca, ma so ch'egli ha dichiarato di volermi conservare anche per l'avvenire l'assegno di cui godevo a Gottinga (e che ammonta a 158 talleri all'anno, somma che per adesso è press'a poco sufficiente ai miei bisogni). Egli inoltre desidera che io diventi Dottore in Filosofia; ma in quanto a ciò io tirerò per le lunghe finchè sia pronto il mio libro, per poterlo diventare senza spesa, almeno spero, e senza le solite arlecchinate (ciò sia detto *inter nos*). Quì ho fatto conoscenza con alcune brave persone, specialmente con un signor Volkmar, consigliere minerario, il quale è assai ben fondato nella matematica e nella fisica. Poco tempo fa ho avuto la fortuna di comperare molte belle Opere già appartenute al defunto Abate Häseler, la cui libreria fu messa all'asta: fra le altre le edizioni originali di Eulero: *Introd. Differ.* ed *Integr.*

» La stampa del mio libro va sempre innanzi a passi di lumaca; aspetto fra alcuni giorni le bozze dell'11° foglio, e quindi credo difficile di veder stampati per Pasqua 30 fogli e fors'anche più.

» Il nostro Consigliere aulico Eschenburg ha perduto avant'ieri la moglie a 47 anni. Era un'ottima donna, e non so se da lungo tempo ci fosse in tutta la città un uomo così fortunato nella sua famiglia come Eschenburg. È certo che la maggior felicità che possa darsi al mondo è l'amore di due anime squisitamente temperate: ma quando mi metto nei panni d'un uomo che dopo venti anni di beatitudine perde a un tratto il suo tutto, debbo dire ch'egli è il più infelice dei mortali, e che sarebbe stato meglio per lui non aver mai conosciuto quella felicità; ma così va il mondo — anche la gioja più pura trova la sua tomba nell'abisso del tempo. — Cosa siamo noi senza la speranza d'un futuro migliore? Conserviamo quant'è possibile la libertà del nostro cuore, e cerchiamo la nostra felicità più che in altro in noi stessi. Salutami gli amici e vivi felice. Gauss. »

Gauss a Bolyai. « Helmstedt 16 Dicembre 1799. »

« Ti ricorderai che fino da quando ci vedemmo l'ultima volta in Clausthal io avevo mandato un lavoro alla Facoltà filosofica di Helmstedt per ottenere il diploma di Dottore. Or bene: questa pratica ha fatto il suo corso ed il 16 Luglio quella Facoltà mi ha conferito il diploma, esonerandomi dalla maggior parte delle solite formalità. Il nostro Principe ha provveduto alle spese. Quel lavoro è stato stampato e messo in assetto fino dall'Agosto. Lo scopo principale di esso è chiaramente indicato dal titolo: *Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse,* etc. 1799; tuttavia questo argomento non occupa che circa un terzo del lavoro, il resto contiene principalmente la storia e la critica di ciò che hanno fatto su questo argomento altri matematici (specialmente D'Alembert, Bougainville, Eulero, De Foncenex, Lagrange, e gli scrittori di trattati, i quali ultimi non saranno probabilmente molto contenti), oltre diverse osservazioni sulla poca profondità dell'odierna matematica. Son certo che questo lavoro ti interesserà, come primo parto del tuo amico. Che io sappia non ne è ancora uscita fuori in pubblico alcuna recensione. Finora non ne ho distribuito che una trentina d'esemplari, in parte a matematici, in parte a persone cui ero tenuto d'usare questa cortesia. Non ho ancora avuto occasione di spedirne in Francia. Fra i giudizii privati di cui sono venuto a cognizione ho dato maggior importanza a quello del Generale Tempelhoff, a Berlino, e me ne sono rallegrato, sia per essere egli uno dei migliori matematici tedeschi, sia specialmente perchè egli pure, come autore d'un trattato, è tra i colpiti dai miei rimproveri. Ho saputo indirettamente ch'egli ha detto così (son proprio le sue parole): — Questo Gauss è un matematico indiavolato; non cede un palmo di terreno; ha combattuto da prode e con buone armi ed ha perfettamente mantenuto il campo di battaglia. — Aspetto fra breve una risposta da Kaestner al quale ho spedito due esemplari perchè ne presenti uno alla Società di Gottinga: probabilmente egli farà ben presto una recensione dello scritto nelle *Gelehrte Anzeige.* Quanto alla stampa della mia opera maggiore, essa è rimasta pur troppo interrotta per più di sei mesi; sono soltanto tre settimane ch'essa venne ripigliata. Ad ogni posta spero di ricevere nuove bozze, che saran quelle del 18° foglio. (*P.S.* Sono effettivamente arrivate prima che chiudessi questa mia.) La mia andata a Gotha non ha avuto luogo, principalmente per una grave malattia da cui fu colto De Zach, che non se n'è ancora riavuto del tutto. In questo momento la cosa non mi dispiace, perchè non desidero altro che di condurre a termine con ogni energia le mie *Disquisitiones arithmeticae.* Fatto questo, andrò o non andrò a passare qualche tempo a Gotha secondo che le circostanze mi renderanno desiderabile od indifferente l'acquisto della pratica astronomica.

» Non essendo probabile per ora che io venga vincolato da un impiego, e trovando in Braunschweig troppo pochi sussidii pei miei studii, ho deciso di venire per qualche tempo ad Helmstedt, dove mi tratterrò forse fino a Pasqua. Tu puoi spedire le tue lettere o quì od a Braunschweig, avendo io preso i concerti per farmi trasmettere subito tutte le lettere che mi venissero indirizzate colà.

» Abito presso il professore Pfaff, che venero egualmente come segnalato geometra e come uomo eccellente ed amico mio caldissimo, uomo che ha la candida ingenuità d'un fanciullo e che è scevro da tutte quelle passioni che disonorano tanto l'umanità. Non essendo quì neppure da otto giorni, non posso ancor dire se mi ci troverò bene. La città è orribile, ma si dice molto bene dei dintorni; mancano molti comodi; fra i professori che ho imparato a conoscere ho trovato persone egregie.

» Temo che questa mia lettera non ti arrivi prima che finisca l'anno; sappimi dire, nella prossima tua, quando l'hai ricevuta; l'ultimo giorno di Dicembre, passato il quale non potremo per lo meno più dire d'essere nel millesettecento (benchè alcuni glossatori della metrologia portino più innanzi il termine del secolo) mi sarà sacro in modo speciale: bada bene però che quando noi avremo la mezzanotte quì, voi altri l'avrete già trascorsa da un'ora. In queste occasioni solenni la mia mente si sublima, si trasporta in un mondo ideale; spariscono per me i limiti dello spazio, sparisce questo meschino e sudicio mondo con tutto ciò che in esso ci pare così grande, e che vi ci rende così infelici o così felici; mi sento, puro spirito immortale, congiunto alle buone e nobili anime di coloro che hanno felicitato questa nostra terra ed i cui corpi furono disgiunti dal mio per virtù di tempo o di spazio, e godo di quella vita più eccelsa, di quelle gioje più pure che un velo impenetrabile tien celate ai nostri occhi fino al momento decisivo.

» Scrivimi presto e lungamente ed ama sempre il tuo invariabile amico

CARLO FEDERICO GAUSS. »

GAUSS a BOLYAI in Clausenburg. « Braunschweig 3 Dicembre 1802. »

« ... Dacchè ho lasciato Helmstedt, a Pasqua del 1800, sono stato sempre quì a Braunschweig, vivendo principalmente per le mie divinità, per le scienze. A tutto l'estate del 1801 ho lavorato dietro alla mia grande opera, che è poi uscita il S. Michele dello stesso anno: *Disquisitiones arithmeticae.* Dopo d'allora mi sono specialmente occupato dei due nuovi pianeti Cerere e Pallade. Se tu vedi la *Monatliche Correspondenz* di DE ZACH (che so essere letta in Ungheria almeno), potrai rilevarne (fascicolo di Maggio 1802) che il mio lavoro intorno a Cerere ha provocato un considerevole miglioramento nella mia posizione materiale: il nostro magnanimo Principe mi ha accordata una pensione di 400 talleri del Reno, che mi rende per ora indipendente e scevro di cure. Tuttavia non so quanto potrà durare questa condizione di cose. Proprio adesso sono in trattative per una chiamata a Pietroburgo qual Direttore dell'Osservatorio imperiale, e può anche darsi che io abbia a scegliere fra questa ed un'altra chiamata; ma, come ben puoi immaginare, ti dico questo in tutta confidenza: che se avverrà una decisione, tu ne sarai subito informato.

» Il posto di KAESTNER non è propriamente stato ricoperto, nè forse lo sarà. MAYER d'Erlangen, venuto in luogo di LICHTENBERG, dà anche corsi matematici, e THIBAUT è stato, se non mi sbaglio, nominato professore straordinario. In generale io ho pochi rapporti con Gottinga. Da un pajo di settimane soltanto sono stato nominato Corrispondente di quella Società di Scienze.

» E tu, mio buon Bolyai, vivi felice. Il sogno che chiamiamo vita ti sia dolce, e ti faccia pregustare la vita vera della nostra vera patria, quando lo spirito, risvegliandosi, non sentirà più le catene dell'inerte suo involucro, non le barriere dello spazio, nè i triboli delle umane passioni, nè lo scherno dei desiderii e dei meschini bisogni nostri. Portiamo animosamente il nostro fardello fino al termine del cammino, senza mormorare, ma anche senza torcere mai lo sguardo da quella meta suprema. Così, quando suonerà la nostra ora, deporremo lietamente il pondo e vedremo squarciarsi il gran velo. »

Gauss a Bolyai. « Braunschweig 20 Gennajo 1803. »

« La tua lettera del 27 Febbrajo mi ha davvero rallegrato, caro Bolyai... Il ravvicinamento d'un'anima amica, attraverso allo spazio, è sempre per me una festa, una guardata di sole da quel mondo migliore che noi vediamo soltanto in mezzo ad una densa nebbia. Ma perchè mai questi rari giorni di gioja, così avaramente conceduti, devono esserci così spesso avvelenati quaggiù dalle punture di vili insetti?

» La chiamata a Pietroburgo non ebbe effetto di togliermi di quì, giacchè il Duca non mi ha lasciato partire, ed ha reso ancor migliore la mia presente condizione. Spero perfino di avere quì un piccolo Osservatorio, a meno che la guerra non rechi di nuovo funesti incagli ai nostri progetti: l'astronomia e la pura geometria sono i poli magnetici cui si appunta senza posa il mio intelletto. »

Gauss a Bolyai. « Gottinga 20 Marzo 1808. »

« Caro Bolyai, la tua lettera del 18 Dicembre dello scorso anno (da M. Vásárhelly) mi ha liberato dalla grave ansietà in cui ero caduto vedendo passare tre anni senza ricever risposta alle mie ultime lettere. Oh! quanto mi è grato, dopo questi tre anni fatali, sapere che i nostri legami non ne sono stati punto infievoliti, che ci possiamo nuovamente stringer la mano, come dopo una lunga separazione, e dire: siamo ancora gli stessi. Ti interesserà di sapere che sia avvenuto di me nel frattempo.

» Io avevo sempre considerata la mia posizione in Braunschweig come transitoria, e tale che si sarebbe dovuta presto o tardi cambiare. Ma non prevedevo mai la catastrofe che mi doveva togliere così presto di là. Tu sai l'infelice storia dell'autunno 1806. Mentre eravamo immersi nelle dolcezze della pace, abbiamo d'un subito veduto i nostri campi divenire il teatro della guerra, ed il nostro amato Principe, ferito a morte, fare nel suo paese una breve sosta di due giorni per sottrarsi alla persecuzione dei nemici, e per andar poscia a morire in terra straniera. In quei giorni terribili, davanti alla miseranda fine di quell' uomo così nobile, ho sentito più fortemente che mai la nullità di tutte le umane cose ed il bisogno della fede in un'esistenza superiore, come quella che sola può ristabilire l'armonia negli aspri contrasti della vita terrena. »

(9) Il confronto di Gauss con Archimede è stato eloquentemente tratteggiato da Jacobi in una lettera ad Hausmann, datata da Königsberg, li 29 Giugno 1840, nella quale ringrazia per la sua nomina a Membro straniero della Reale Società delle Scienze di Gottinga. Ecco le sue parole: « Se posso attribuirmi qualche titolo ad una tale distinzione, egli è unicamente il mio assiduo sforzo di penetrare nell'intimo degli scritti di quell'uomo straordinario che sta alla testa della Società Reale, e che col suo genio meraviglioso ci richiama involontariamente alla memoria Archimede. Noi troviamo infatti nei suoi lavori, e l'esposizione pienissima di scoperte egualmente profonde, e la perfezione della forma, e l'ideale del rigore scientifico di quell'Antico; e come questi pose il puro pensiero matematico di gran lunga al disopra di tutte quelle manuali applicazioni che lo resero favoloso nell'antichità, così Gauss, lasciando che i più l'ammirino per l'eccellenza delle sue pratiche, vuol essere misurato soltanto dalla profondità dei suoi pensieri. »

(10) « Al sig. D.r Gauss, presso Ritter-Steinweg, n.° 1917, a Braunschweig. »

« Signore. L'interesse dovuto agli uomini eminenti spiega bastantemente la cura da me avuta di pregare il Generale Pernetty che fosse fatto sapere, a chi meglio paresse, essere voi tale da aver diritto al rispetto d'ogni governo illuminato.

» Nel rendermi conto del mandato onorevole che io gli avevo affidato, il sig. Pernetty mi ha fatto sapere che vi aveva comunicato il mio nome: questa circostanza mi determina a confessarvi che io non vi sono così sconosciuta come voi credete, ma che, paventando il ridicolo che s'accompagna al titolo di donna dotta, ho assunto altra volta il pseudonimo di Le Blanc per iscrivervi, e per comunicarvi alcune Note che certamente non meritavano la benevola indulgenza di cui voi le avete volute onorare.

» La gratitudine da me nudrita per l'incoraggiamento che mi deste annoverandomi fra i cultori di quell'aritmetica sublime della quale avete svelato i misteri, era per me una ragione personale d'informarmi di voi in un momento nel quale le vicende della guerra potevano suscitare delle apprensioni; e sono stata veramente soddisfatta quand'ho saputo che poteste restare nella vostra casa, tranquillo quanto le circostanze lo consentivano. Temo tuttavia che le conseguenze di questi grandi avvenimenti ci privino ancora per lungo tempo delle vostre opere astronomiche, e sopratutto del seguito delle vostre ricerche aritmetiche; giacchè questo ramo di scienza mi attira in modo particolare, ed ammiro con sempre nuovo piacere la concatenazione delle verità esposte nel vostro libro: sventuratamente la forza del pensiero è l'attributo di poche menti privilegiate, ed io sono troppo certa di non intravvedere alcuna di quelle deduzioni che, a voi, pajono il corollario inevitabile di ciò che avete reso noto.

» Unisco alla presente una Nota destinata a provarvi che ho conservato per l'analisi quell'interesse che fu destato in me dalla lettura della vostra opera, e in virtù del quale mi son fatto lecito altra volta di comunicarvi i miei tenui saggi, senz'essere a voi raccomandata da altro che dalla benevolenza accordata dai grandi agli ammiratori dei loro lavori.

» Spero che la singolarità di cui faccio oggi la confessione non mi priverà dell'onore che mi avete concesso sotto il velo d'un pseudonimo, e che non isdegnerete di spendere qualche minuto nel darmi vostre dirette notizie. Piacciavi dar fede all'interesse che in ciò ripongo ed alla sincera ammirazione colla quale mi pregio dichiararmi

Vostra umilissima serva
SOFIA GERMAIN.

» Parigi 20 Febbrajo 1807. »

« *P.S.* Il mio indirizzo è: M.[lla] GERMAIN, presso il padre; via S. Croix de la Brétonnerie, n.° 23, a Parigi. »

(11) BESSEL a GAUSS, « Königsberg 15 Giugno 1818. »

« Anzitutto vi ringrazio di tutto cuore, amico carissimo e veneratissimo, del benevolo giudizio che date sulle mie fatiche intorno alle osservazioni di BRADLEY, nella vostra lettera del 10 Maggio, pervenutami da due o tre giorni. Vi assicuro che il vostro acutissimo giudizio ha sempre avuto il maggior influsso sopra di me; e benchè, per la vostra buona amicizia, io l'abbia sempre sperimentato favorevole, ho pur sempre nudrito ne'miei lavori il desiderio di rendervi in qualche modo soddisfatto. Noi dobbiamo a voi la maggior parte delle odierne raffinatezze in astronomia, non solo pel vostro metodo dei minimi quadrati, ma eziandio per avere voi ridestato il senso della precisione, che da BRADLEY in poi pareva essere sopito, e che non s'è rifatto vivo che da 18 anni. Adesso siamo giunti al segno da tener dietro a piccoli errori o divarii fuori dei limiti di probabilità colla stessa attenzione con cui prima si studiavano i grandi; — entrambi debbono avere una causa fisica (nella natura stessa, negli strumenti o nell'osservatore), e la scoperta di questa causa, unica cosa che possa promovere notabilmente l'astronomia pratica, è soltanto adesso considerata come un avvenimento scientifico non meno importante di quello che altre volte (*) si giudicasse essere una più appariscente scoperta.

» Tornando al mio libro, vi confesso che sarò soprammodo contento se non disapproverete l'ordinamento generale del lavoro; certo non isfuggiranno al vostro acuto sguardo talune mende nelle singole parti, nè io ho mai sperato di appagarvi compiutamente.

» Faccio i voti più cordiali per il finale assetto del vostro Osservatorio e per l'allogamento del circolo di Repsold!... A quali conquiste potrà ora aspirare l'Astronomia!... e quanto non rifiorirà essa in Germania, ora che voi siete alla testa d'un Osservatorio! Se io potessi agevolarvi in qualunque modo il lavoro, ne sarei contento oltremodo. »

(12) Bessel a Gauss. « Aprile 1820. »

« Non avrei mai creduto che vi potesse essere un altro metodo, totalmente diverso dai nostri attuali, per calcolare le osservazioni geodetiche, — ma abbiamo già tante prove della novità ed originalità delle vostre idee, che non m'accingo neppur per sogno a tentare, probabilmente invano, d'indovinarle.

» Non ho d'uopo di dirvi quanto io sia smanioso di conoscere quando che sia le vostre vedute. »

(13) Il primo indizio dell'intenzione di Gauss d'occuparsi una volta o l'altra del magnetismo terrestre si trova in una sua lettera ad Olbers del 1° Marzo 1803. Parlando di una scoperta riportata dalle Gazzette sulla possibilità di determinare le posizioni geografiche per mezzo di osservazioni magnetiche, Gauss dice: « Diffido un cotal poco di ciò, quatunque creda che molto vi sia ancor da sapere sulla forza magnetica della terra, e che la matematica possa trovare in questo campo un'applicazione molto più ampia di quella che ne fu fatta fin quì. »

(*) « Voglio dire propriamente nell'intervallo fra Bradley e noi; giacchè per ciò che ora sappiamo è del tutto inverosimile che la costante concordanza delle osservazioni di Bradley sia dovuta al caso; e Bradley stesso, nella celebre Memoria delle Transazioni filosofiche, dà manifestamente a divedere che conosceva le difficoltà che s'incontrano a voler fare osservazioni esatte e sicure. »

(14) Dirichlet a Gauss.

« Onorandissimo Signore. Mi pregio di esternarle la mia più sincera riconoscenza per la benigna indulgenza con cui Le piacque accogliere il mio primo saggio matematico, e per la benevolenza con cui Ella ha voluto raccomandarmi a Berlino. Non sono che troppo conscio del poco che finora ho fatto per meritare la di Lei intercessione; e farò di tutto per corrispondere, fin dove mi basteranno le mie deboli forze, alla di Lei generosa fiducia.

» Il nostro Ministero mi ha recentemente offerto una rimunerazione annua di 400 talleri per incominciare la mia carriera accademica come privato docente a Breslau, e mi ha pure fatto intravvedere la probabilità di una prossima promozione a Professore straordinario di calcolo, cattedra che è vacante in quell'Università dopo la partenza del prof. Brandes. Ho accettato questa offerta e conto recarmi a Breslau verso la fine del mese venturo. Se mi sarà appena possibile, passerò da Gottinga, per fare la conoscenza personale di Lei e per ringraziarla anche verbalmente della bontà che ha avuto per me.

» Ho rilevato col più gran piacere, dalla lettera ch'Ella mi ha fatto l'onore di scrivermi, che il mondo matematico sta per vedere in breve adempiuta la di Lei promessa di pubblicare la teoria completa dei residui cubici e biquadratici. I cultori dell'analisi indeterminata aspettano con impazienza questa pubblicazione, che deve far epoca nella storia di questo ramo di scienza. Se si pensa a tutte le difficoltà incontrate dai matematici che hanno elaborato la teoria dei residui quadratici prima che uscissero in luce le *Disquisitiones arithmeticae,* ben si comprende quali tesori di sagacità si richieggano a gettare i fondamenti di queste nuove dottrine.

» Coi sensi del più sentito ossequio e della più profonda ammirazione, mi confermo

di Lei devotissimo servitore
G. Lejeune Dirichlet.

» Düren 31 Gennajo 1827. »

(15) Per giudicare il carattere di Gauss è di molto peso il concetto ch'egli aveva di sè medesimo. In una lettera dell'8 Febbrajo 1834 al professor Gerling in Marburg, suo allievo ed amico, nella quale lo chiama buon consigliero, aggiunge: « certo più buono di me, che a 56 anni sento pur sempre di essere come uno straniero nel mondo. »

(16) Ai lettori di privati documenti, dei quali si fanno ora tante pubblicazioni, parrà meritevole di nota il giudizio che ne dà Gauss. Il 30 Dicembre 1852 egli scriveva a Gerling:

« Non voglio lasciar passare quest'anno senza darvi, caro Gerling, segno di vita con queste mie righe. Nel semestre corrente devo pur troppo far nuovamente lezione, rinunziando così ancora una volta all'esecuzione di un più serio lavoro. Non ho possibilità nè voglia di accingermivi, finchè non possa disporre completamente di maggior tempo.

» Ho ricevuto da non molto l'Epistolario di Olbers e Bessel, e l'ho rapidamente squadernato prima di darlo al legatore. Contiene molte cose interessanti: ma credo che Olbers non sarebbe stato molto contento di questa pubblicazione, se avesse potuto prevederla; specialmente per molti giudizii prematuri ed irriflessivi, per l'indiscreta pubblicità data a comunicazioni confidenziali, per molte circostanze di fatto che, riferite così incompiutamente, generano concetti fallaci.

» Penso di far fare l'apparato, del quale già vi scrissi, per l'esperienza di Foucault. Spero che con esso il fenomeno potrà rendersi sempre ben manifesto in qualunque luogo, anche dopo brevissimo tempo. Gli esperimenti sulla caduta dei gravi, fatti al modo di Guglielmini e d'altri, non sono veramente atti a mettere in evidenza la rotazione della terra, giacchè esigono disposizioni costosissime senza fornire poi che risultati estremamente grossolani. Le esperienze di Hook e quelle dello stesso Guglielmini non provano nulla, in sostanza, giacchè in queste ultime il filo a piombo non venne applicato che sei mesi dopo le cadute. Non capisco poi del tutto il dire, come si fa, che questi esperimenti indicano un moto verso il Sud, moto che la teoria non sarebbe atta a spiegare. È vero che le esperienze di Benzenberg ad Amburgo avrebbero manifestata una siffatta deviazione, ma in una guisa che toglie ogni valore al risultato, come l'Autore stesso ha riconosciuto, e in forza di che appunto egli ha intraprese le nuove esperienze in una miniera del paese di Berg, esperienze che hanno dato una deviazione non verso il Sud ma verso il Nord (p. 425 del suo libro). Del resto in occasione del suddetto asserto ho consultato di nuovo le esperienze di Reich; questi trova col suo calcolo (p. 46) una deviazione di 4,374 millimetri verso il Sud con un errore probabile di 2,700 mill. Ma, anche ammettendo ciò, non potrei giustificare quel che dice in appresso: « Rispetto all'ultima... verso il Sud ». Poichè in presenza di un risultato, la cui grandezza assoluta non è che una volta e mezzo l'error probabile, non si deve dire che esso « non sia ancora del tutto posto fuori di dubbio »; si deve dire invece: 1.° mancando qualunque altro dato all'infuori dell'esperimento stesso, — che l'esistenza della quantità in discorso non ha che una mediocre probabilità; 2.° se altre potenti ragioni militano contro tale esistenza, — che (a mio avviso) non sia da far gran conto dell'esperimento; 3.° se, come nel caso presente, è stato ormai dimostrato da 50 anni, in base ad una rigorosa teoria, che una tal deviazione verso il Sud non può affatto aver luogo, — che non se ne debba proprio tenere conto alcuno. Quanto all'ultima parte della frase di Reich, io trovo che la cosa è press'a poco egualmente singolare, come il fatto che tutti e tre gli attuali imperatori sieno saliti al trono il 2 Dicembre, e precisamente Francesco Giuseppe 4 anni e Nicolò 27 anni prima di Napoleone III (singolarità che un matematico potrebbe rendere ancor più peregrina scrivendo i numeri così: $4 = 2^2$, $27 = 3^3$). Questi sono capricci della fantasia che possono tutt'al più divertire, ma che nessuno può pigliar sul serio. »

In poscritto: « (La coincidenza del 2 Dicembre, quì sopra accennata, fu da me letta in non so quale Gazzetta. Secondo il Calendario ufficiale l'imperatore Nicolò sarebbe salito al trono il 1° Dicembre). »

» Ma v'è un altra circostanza capitale, ed è che io trovo falso il calcolo di Reich. Non so com'egli abbia fatto ad ottenere quei numeri, ma il calcolo esatto dà i numeri seguenti, invece di quelli della p. 45:

Risultato principale per la deviazione verso oriente	$\overset{mm}{28{,}527}$	invece di	$\overset{mm}{28{,}282}$
Errore probabile	3,481	»	2,703
Risultato principale per la deviazione verso Sud .	3,540	»	5,061
Errore probabile	3,400	»	2,700

Correggendo la falsa orientazione, ricavo di quì:

Deviazione verso oriente	$\overset{mm}{28{,}605}$
» Sud	2,874,

vale a dire che la supposta deviazione verso Sud è ancor più piccola del relativo errore probabile.

» Quando mi si dice che — sussiste pur sempre un *desideratum* rispetto alla esperienza di Foucault — rispondo che la spiegazione dell'oscurità sussistente sta, a mio giudizio, semplicemente in questo, che si tiene la questione per più facile che realmente non sia, e si crede ch'essa possa risolversi con un *aperçu* (per usare un vocabolo che fu spesso il cavallo di battaglia di Goethe), credenza che non ha alcun fondamento. Vi sono, benvero, molti casi in cui uno di cosiffatti *aperçus* può recare gran luce in una questione delicata, ma ve ne sono anche altri in cui questa luce non è che quella d'un fuoco fatuo, e non ha altro effetto che d'indurre più d'uno nella falsa persuasione di capire, mentre non fa che illudersi. Metto fra questi il tentativo inserito nelle *Astronomische Nachrichten,* n.° 838, dove non è già che si dia una dimostrazione elementare, ma non se ne dà alcuna del tutto. L'andamento della cosa nello spazio assoluto può concepirsi così:

» Un punto materiale A viene attratto da un punto fisso C, ed è al tempo stesso obbligato a stare ad una data distanza da un terzo punto B: si cerca il moto del punto A nello spazio. Ora, se anche il punto B è fisso, e se si suppone costante la forza d'attrazione verso C ed AB evanescente rispetto ad AC, il problema diventa molto facile e non differisce da quello delle oscillazioni pendolari a terra immobile. Ma se si suppone B mobile secondo una data legge, la cosa cambia d'aspetto, ed il problema diventa, non che molto difficile, ma quasi specificamente diverso. Lo si semplifica, certamente, supponendo che B si muova uniformemente in un cerchio il cui centro si trovi sulla normale condotta da C al piano del cerchio stesso.

» Il primo caso si verifica per l'esperienza di Foucault supposta fatta al polo, il secondo per qualunque altra latitudine. S'inganna chi crede che, per essere così agevole la soluzione nel primo caso, lo possa essere altrettanto, o poco meno, nel secondo (che ne differisce specificamente); non si può consigliargli altro che di condurre a termine la trattazione rigorosa nell'uno e nell'altro caso. Deploro di non aver mai potuto ritrovare, malgrado tutte le mie ricerche, la Memoria di Plana. Anche Clausen ha trattato la questione nel Bollettino dell'Accademia di Pietroburgo, con metodo sostanzialmente eguale, basandosi sulle mie formole fondamentali riportate nel libro di Benzenberg, ma in questo momento non posso aggiungere indicazioni più precise.

» Avrete voi pure ricevuto il supplemento ai n.i 837 ed 838 delle *Astron. Nachr.,* contenente un preziosissimo catalogo di 2060 articoli. Sapreste mai per avventura chi sia stato l'ultimo proprietario? Vedo con meraviglia che vi sono dentro i manoscritti originali di parecchie mie Memorie. So bene d'aver regalati molti, anzi la più gran parte di questi manoscritti, a buoni amici miei, ma non per verità coll'intenzione di vederli un bel giorno capitare in mano al tubatore per passare in quella del maggior offerente.

» Chiudo questa mia coi più cordiali augurii per la felicità vostra e di tutta la vostra famiglia nel prossimo anno. »

Il corso di lezioni, cui Gauss allude al principio di questa lettera, riguardava il metodo dei minimi quadrati e le sue applicazioni. Io pure sono stato fra gli uditori di quel corso, e, se all'atto della mia inscrizione egli non avesse dato a capire che desiderava che il corso non avesse luogo, non mi sarebbe mai venuto in pensiero ch'egli non lo facesse volentieri, tanta era la vivacità della sua esposizione, spirante quella stessa freschezza di mente che apparisce dalla ultima lettera.

I manoscritti di Gauss, compresi nel Catalogo di preziose opere matematiche ed astronomiche di cui sopra, e precisamente segnati coi n.i 674, 889, 890, 1503, 1504, 1505, sono passati nella Biblioteca di Astor:

Catalogue or alphabetical Index of the Astor Library. New York 1857.

« Gauss, *Theoria motus corporum coelestium.* Hamburg 1809. With a Manuscript of 321 pages in Folio of Explanations and Commentary upon the *Theoria motus corporum coelestium.*

» Also a Manuscript of 300 pages in Folio of Astronomical Calculations illustrating the Orbits of Juno, Pallas, Ceres and Vesta, and one of 13 pages of Formulae.

» Gauss, *Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta, si ejus massa per totam orbitam ratione temporis, quo singulae partes describuntur, uniformiter esset dispertita.* Gottingae 1818.

» With an Autograph Manuscript by Professor Gauss of this Memoir, 28 pages in 4.to

» Also a Manuscript of Illustrations and Remarks on the Memoir, 58 pages in 4.to

» Gauss, *Theorematis fundamentalis in doctrina de residuis quadraticis demonstrationes et ampl.* Gott. 1817.

» With an Autograph Manuscript in Prof. Gauss's handwriting. 29 pp. 4.to »

Non sarebbe forse inutile che questi manoscritti fossero esaminati da persone competenti, per sapere se oltre le parti già stampate ne contengano qualche altra atta alla pubblicazione.

(17) Ai ringraziamenti già resi dalla Società Reale delle Scienze di Gottinga per l'invio di lettere di Gauss o di copie delle medesime, io mi permetto di aggiungere quì la preghiera d'ulteriori comunicazioni, affinchè se ne possa trar partito per i Supplementi alle opere di Gauss e per una compiuta narrazione della sua vita e di ciò che egli ha operato.

Ueber die canonische Form der Riemannschen Integrale erster Gattung.

(*Von* E. B. Christoffel, *in Strassburg.*)

I. Gegenstand der Untersuchung und Hülfssätze.

1.

Seit Riemann den Begriff des Integrals I. G. allgemein festgestellt und einen Ausdruck für die zu integrirende algebraische Function, den Integranden I. G. gegeben hat, ist die Frage nach der vollständigen Ausführung dieses Ausdruckes oder einer andern, aber endgültigen Ausdrucksform für den Integranden I. G. nicht mehr weiter verfolgt worden. In der That würde diese Frage als abgeschlossen gelten müssen, wenn es unmöglich wäre, die Schwierigkeiten welche sie darbietet, entweder in ihrer gegenwärtigen Gestalt zu überwinden, oder sie auf einem andern Wege zu vermeiden.

Soll die irreductible Gleichung

$$F(\overset{n}{S}, \overset{m}{Z}) = 0$$

zum Geschlechte p gehören, so müssen ihre Coefficienten so bestimmt sein, dass S als Function von Z genau $r = (m-1)(n-1) - p$ Doppelpunkte (die r Werthepaare γ, δ Riemanns) hat, und dann gehören zu ihr p linearunabhängige im Ausdrucke

$$w = \int \Phi(\overset{n-2}{S} \mid \overset{m-2}{Z}) \frac{dZ}{F'}$$

enthaltene Integrale I. G., wenn F' die nach S genommene partielle Derivirte des Polynoms F bedeutet, und die ganze Function Φ so bestimmt ist, dass sie in den Doppelpunkten verschwindet.

Diese Aufgabe, (1) das Polynom F so zu bestimmen, dass S als Function von Z eine vorgeschriebene Anzahl r von Doppelpunkten erlangt und (2) diese Doppelpunkte wenigstens so weit zu ermitteln, als für die geforderte Bestimmung von Φ nöthig ist, will ich das Problem der Doppelpunkte S, Z nennen.

Die obige Darstellung von dw kann also nur in den besondern Fällen als ausführbar gelten, wo man im Stande ist, das Problem der Doppelpunkte S, Z in ausreichender Weise zu lösen. Für alle übrigen Fälle ist durch die vorstehenden Resultate (*) nur erreicht, dass (1) die Existenz der Function w sichergestellt und (2) bewiesen ist, dass die Anzahl der linearunabhängigen Functionen dieser Art $= p$ ist. Für die weitere Durchführung der Lehre von den Abelschen Functionen ist damit die nothwendige und genügende Grundlage gewonnen, aber nicht für die Lösung der Aufgabe, eine endgültige Ausdrucksform für dw zu finden.

Die Schwierigkeiten dieser Aufgabe werden nur geändert, nicht vermindert, wenn man statt Z, S ein anderes Variabelnpaar zur Darstellung von dw wählt. Sind z, s zwei algebraische wie S verzweigte Functionen von Z, von den Ordnungen μ und ν (**), und so gewählt, dass wenigstens nicht jedem Werthe der einen zusammenfallende Werthe der andern entsprechen, so sind nicht bloss s, z durch S, Z, sondern auch umgekehrt diese durch jene rational darstellbar; das nämliche gilt also auch von dw. Zwischen s, z besteht eine irreductible Gleichung

$$f(\overset{\mu}{s} \mid \overset{\nu}{z}) = 0,$$

deren Grad in jeder Variable gleich der Ordnung der andern ist; mit Benutzung derselben nimmt das Integral I. G. die Form an

$$w = \int \varphi(\overset{\mu-2}{s} \mid \overset{\nu-2}{z}) \frac{dz}{f'},$$

(*) Diese Resultate, ebenso wie die übrigen bekannten Sätze, die im Folgenden erwähnt werden, kann man aus rein algebraischen Betrachtungen ableiten. Die gegenwärtigen Hülfsmittel reichen überhaupt aus, um in der Lehre von den Abelschen Functionen alle indirecten Existenzbeweise dadurch überflüssig zu machen dass man, wie ich es in meinen Vorlesungen zu thun pflege, alle in Betracht kommenden Functionen ohne Ausnahme, nicht bloss die algebraischen, zunächst durch S und Z wirklich darstellt.

(**) Als Ordnung einer algebraischen wie S verzweigten Function von Z bezeichne ich die Zahl, welche angibt, in wie viel getrennten oder zusammenfallenden Punkten S, Z die Function zur ersten Ordnung unendlich wird.

wo f' die nach s genommene partielle Derivirte des Polynoms f bedeutet. Aber diese Darstellung von w setzt die Lösung der Aufgabe voraus, (1) das Polynom f so zu bestimmen, dass die Anzahl der Doppelpunkte s, z gleich $(\mu-1)(\nu-1)-p$ wird und (2) zu bewirken, dass φ in diesen Punkten verschwindet.

Es ist demnach klar, dass man auf diesem Wege dem Kern der hier vorliegenden Frage nicht näher kommt. Die Function w und ihr Differential dw sind absolut unabhängig sowohl von den Doppelpunkten S, Z wie von den Doppelpunkten s, z. Der wirklichen Darstellung von dw tritt die Frage nach jenen nur in den Weg, wenn man Functionen S, Z von den Ordnungen m, n, die Frage nach diesen nur dann, wenn man z, s, nämlich Functionen von den Ordnungen μ, ν zur Darstellung von dw wählt.

Wenn man dies erwägt und hinzunimmt dass eine Function dw, die von jeglicher Irrationalität frei ist, überhaupt gar nicht existirt, so erkennt man, dass die im Problem der Doppelpunkte liegenden Schwierigkeiten bestehen bleiben, solange man nicht auf die Darstellung von dw als rationale Function zweier, gegenseitig irrationaler Argumente verzichtet, und dass diese Art von Schwierigkeiten nur dadurch vermieden werden kann, dass man dw als Function eines einzigen Argumentes z auffasst, d. h. statt zu z irgend eine gleichverzweigte, aber sonst nicht näher bestimmte Irrationalität s zu fügen, um dw durch beide rational auszudrücken, die Function

$$\frac{dw}{dz}=s$$

selbst als unbekannte Irrationalität einführt.

Dies ist die Aufgabe, mit welcher die vorliegende Abhandlung sich beschäftigt; aber sie ist in dieser Form nicht hinreichend begrenzt, da für z jede beliebige Function aus der zu untersuchenden Klasse gleich verzweigter algebraischer Functionen genommen werden kann, und die Ordnung μ dieser Function den Grad bestimmt, bis zu welchem die zwischen s und z stattfindende Gleichung in s ansteigt.

Wir werden finden, dass die verschiedenen Voraussetzungen, die man über z machen kann, in zwei Gattungen zerfallen. Als Hauptfall wird sich der herausstellen, wo die Ordnuug μ von z in gewissem Sinne (art. 3, art. 6 θ, und art. 12) eine möglichst niedrige ist. In diesem Falle ergibt sich für $s=\frac{dw}{dz}$ eine merkwürdige Form, welche ich die canonische nenne, und welche nur in diesem Falle stattfindet; bei dieser Form von s verwandelt sich die Aufstellung der Gleichung zwischen s und z in ein vollkommen geschlossenes Problem der Invariantentheorie, welches zwar schwierig ist, für dessen Behandlung aber auch alle Hülfsmittel dieser Theorie flüssig werden.

Ausserdem ergibt sich im Gegensatze zu dem, was oben erläutert wurde, das Resultat, dass mit der Herstellung dieser Gleichung auch das Problem ihrer Doppel-und Verzweigungspunkte gelöst ist.

2.

Er sei mir gestattet, an dieser Stelle eine gedrängte Uebersicht meiner Untersuchung voranzuschicken. Nach den erläuternden Vorbemerkungen dieses I. Abschnittes weise ich im II. Abschnitte nach dass, wenn für z eine geeignete Function der zu untersuchenden Klasse ausgewählt wird, und μ ihre Ordnung bedeutet, $\frac{dw}{dz}=s$ stets in die Form

$$s=y_1\sigma_1+y_2\sigma_2\cdots+y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1} \tag{1}$$

gebracht werden kann, wo (1) $y_1 y_2 \dots y_{\mu-1}$ ganze Functionen von z mit durchaus willkürlichen Coefficienten $x_1 x_2 \dots x_p$, und ihre Grade $a_1 a_2 \dots a_{\mu-1}$ (vergl. auch den Anfang des Abschn. III.) so gewählt sind, dass die Anzahl aller Glieder von s, nämlich $a_1+a_2\cdots+a_{\mu-1}+\mu-1=p$ wird; (2) $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{\mu-1}$ sind Integranden I. G., die für unendliche Werthe von z stets zu den Ordnungen a_1+2, $a_2+2, \dots$ $a_{\mu-1}+2$ verschwinden.

Diese Form von s heisst die canonische; das Wesentliche bei derselben, und was ihre Wichtigkeit begründet, ist, dass sie aus $\mu-1$ Gliedern besteht, nämlich einem weniger, als die Ordnung von z beträgt.

Im III. Abschnitte wird die Gleichung untersucht, deren Wurzel s ist; sie hat die Form

$$As^{\mu}+A_2 s^{\mu-2}+A_3 s^{\mu-3}\cdots+A_{\mu}=0, \tag{2}$$

indem das zweite Glied immer fehlt; hier ist allgemein A_i ganze homogene Function i^{ten} Grades von $y_1 y_2 \dots y_{\mu-1}$, deren Coefficienten ganze Functionen von z von angebbaren Graden sind. Die Theorie dieser Gleichung wird unter der erleichternden, aber keinen Fall wirklich ausschliessenden Voraussetzung weiter geführt, dass s als Function von z nur einfache und getrennte Singularitäten hat (art. 8) Setzt man, unter $s_1 s_2 \dots s_\mu$ die Zweige von s verstehend,

$$\Delta = A^{\frac{2\mu-3}{2}} \Pi(s_1 s_2 \dots s_\mu),$$

so ergibt sich, dass Δ eine rationale ganze Function von z ist; und wenn man diese letztere durch $\mathfrak{A}$, die Discriminante der Gleichung (1) durch D bezeichnet (art. 10), so folgt

$$\Delta = \mathfrak{A},$$

$$D = \mu h A \mathfrak{A}^2,$$

in den Verzweigungspunkten wird $A = 0$, in den Doppelpunkten von s dagegen $\mathfrak{A} = 0$, h ist eine Constante.

Im IV. Abschnitte werden $A_2 A_3 \dots A_\mu$ als homogene Formen mit den $\mu - 1$ Variabeln $y_1 y_2 \dots y_{\mu-1}$ untersucht. Aus der Lehre von den Gleichungen liegen canonische Formen $A'_2 A'_3 \dots A'_\mu$ derselben bereits vor, indem sie sich durch $s_1 s_2 \dots s_{\mu-1}$, also abermals durch $\mu - 1$ Argumente unmittelbar ausdrücken lassen. Wendet man die obige Gleichung (1) auf diese Zweige $s_1 s_2 \dots s_{\mu-1}$ von s an, so ergibt sich eine Substitution, durch welche diese vorgeschriebenen canonischen Formen $A'_2 A'_3 \dots A'_\mu$ in die zu ermittelnden Ausdrücke $A_2 A_3 \dots A_\mu$ übergeführt werden. Die Untersuchung hat es demnach in erster Linie mit dieser Substitution zu thun; es findet sich, dass dieselbe eine umkehrbare, und ihre Determinante

$$\frac{\partial(s_1 s_2 \dots s_{\mu-1})}{\partial(y_1 y_2 \dots y_{\mu-1})} = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

ist.

Mittelst dieses Satzes ergibt sich sofort eine canonische, durch unser Problem geforderte Form auch für jede Invariante und jede Covariante des Formensystems $A_2 A_3 \dots A_\mu$, wovon im art. 14. Beispiele ausgeführt werden; insbesondere aber findet sich der Ausdruck für die rationale Function $\Delta = \mathfrak{A}$, welche in den Doppelpunkten von s verschwindet nämlich

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial(A_2 A_3 \dots A_{\mu-1})}{\partial(y_1 y_2 \dots y_{\mu-1})}.$$

Im V. Abschnitte wird umgekehrt bewiesen, dass die Gleichung (2) allen Bedingungen der Aufgabe genügt, und in der That s als Integranden I. G. in der canonischen Form (1) bestimmt, wenn bei den vorgeschriebenen Graden ihrer Coefficienten ihre Discriminante $D = \mu h A \mathfrak{A}^2$ ist, unter $\mathfrak{A}$ den vorstehenden Ausdruckverstanden. Dabei erledigen sich auch die Fälle, von vermöge der Wahl von z eine canonische Form von s nicht stattfindet.

Im VI. Abschnitte wird nachgewiesen, dass die verschiedenen Klassen gleichverzweigter algebraischer Functionen einer einzigen Variabeln nicht nach Geschlechtern p, sondern nach Systemen μ von Geschlechtern p klassificirt werden müssen, oder, was dasselbe ist, dass jedes Geschlecht p von Functionenklassen in verschiedenen Systemen μ vertreten ist, und demgemäss in Familien μ zerfällt. Damit ist eine wesentliche Lücke ausgefüllt, welche die Theorie der Moduln bisher in ihren Grundbegriffen darbot.

Bei dieser Klassification gibt es keine Ausnahmefälle; die ultraelliptischen Functionen, welche wohl als ein solcher bezeichnet worden sind, bilden mit den elliptischen zusammen das System $\mu=2$. Als Beispiel der allgemeinen Theorie wird das System $\mu=3$ ausgeführt.

Der VII. Abschnitt endlich ist der Theorie der Function A_2 gewidmet. In der Substitution durch welche A_2 in seine adjungirte Form gebracht wird, lassen sich die Coefficienten in einer sehr merkwürdigen Weise durch irrationale Grössen ausdrücken, und diese Form der Substitution ermöglicht es, u. A. zu beweisen, dass A_2 selbst die Adjuncte, $\frac{1}{\mu}A$ die Discriminante einer quadratischen Form ist, deren Coefficienten ebenfalls ganze Functionen von z, aber von weit niedrigern Graden wie in A_2 sind. Die nämliche Substitution liefert auch noch Eigenschaften der übrigen Functionen A_i.

3.

Ich stelle nun die Hülfssätze zusammen, deren ich mich im Folgenden bediene.

Innerhalb einer Klasse gleichverzweigter algebraischer Functionen einer Variable bezeichne ich als Functionen erster Gattung diejenigen, welche als Quotienten zweier Differentiale I. G. dw_1, dw_2, oder als Quotienten zweier Functionen φ darstellbar sind, alle übrigen als Functionen zweiter Gattung. Im Folgenden kommen einige bekannte Sätze über Functionen I. G. zur Anwendung, welche ich der bessern Uebersicht wegen hier zusammenstelle. Bei Abzählungen werden mehrfache Nullpunkte stets in einfache aufgelöst; in diesem Sinne bezeichne ich das System aller Nullpunkte einer Function I. G. als ein Punktsystem erster Gattung. Sei

$$z=\frac{dw_1}{dw_2}=\frac{\varphi_1}{\varphi_2}$$

eine Function I. G. und von der Ordnung

$$\mu.$$

Stellt man z durch ein bestimmtes Paar gleichverzweigter Variabeln Z, S dar, so gehört dazu eine bestimmte Fläche $\mathfrak{T}$, welche die Werthe von Z der Verzweigungsart von S gemäss repräsentirt; in dieser Fläche ergibt sich also eine bestimmte Gruppe von μ Punkten zur Repräsentation des Punktsystems I. G., in welchem z verschwindet. Wählt man statt Z, S ein anderes Variabelnpaar, so erhält man auch eine andere Fläche $\mathfrak{T}$, also eine räumlich anders geordnete Gruppe von μ Punkten zur Repräsentation des nämlichen Punktsystems. Für das Folgende ist es wesentlich, dass die zu erwähnenden Sätze zwar mit Bezug auf eine einzelne von diesen Flächen ausgesprochen werden, aber für alle gelten.

Da eine Function φ, abgesehen von den Doppelpunkten, in $2p-2$ Punkten verschwindet, so ist die Ordnung von z, nämlich

$$\mu \overline{\overline{<}} 2p-2.$$

Ist nun die Aufgabe gestellt, die allgemeine Function φ so zu bestimmen, dass sie in den nämlichen Punkten verschwindet wie z, so ergeben sich zwischen den p Constanten, von denen φ lineare und homogene Function ist, μ Bedingungsgleichungen; es findet zunächst der Satz statt, dass unter allen Umständen wenigstens eine von diesen Gleichungen aus den übrigen folgt. Ist

$$\rho$$

die genaue Anzahl der überzähligen Bedingungsgleichungen, also $\rho \overline{\overline{>}} 1$ und $\mu-\rho$ die Anzahl der voneinander unabhängigen so kann $\mu=\rho$ nicht $>p-1$ sein, weil sonst φ identisch $=0$ sein müsste, während entweder φ selbst oder eine Specialisirung von φ den Zähler φ_1 von z bildet. Sei also

$$p-\lambda-1$$

die Anzahl dieser von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen, mithin die Anzahl aller

$$\mu=p-\lambda-1+\rho,$$

so nenne ich λ den Defect, ρ den Ueberschuss jenes Punktsystems I. G.

Die ganzen Zahlen λ, ρ können ihrer Natur nach nie negativ werden; aber während stets $\rho \overline{\overline{>}} 1$ ist, ist λ auch des Werthes Null fähig.

Wenn also λ der Defect eines Punktsystemes I. G. ist, so reducirt sich der allgemeine Ausdruck derjenigen Function φ oder desjenigen Integranden I. G., welcher in diesem Punktsystem verschwindet, auf $\lambda+1$ linear unabhängige Glieder, von denen jedes einzelne die verlangte Eigenschaft hat; die Coefficienten dieser Glieder sind willkürliche Constanten. (Vergl. den folgenden art. 4.)

Die Nullpunkte von z zerfallen bei unsern gegenwärtigen Voraussetzungen in zwei Gruppen; die erste enthält diejenigen $p-\lambda-1$ Punkte, denen die voneinander unabhängigen Bedingungsgleichungen $\varphi=0$ entsprechen, die zweite die ρ übrigen, nothwendigen Nullpunkte.

Ist $\rho>1$, so gibt es auch eine Function I. G., welche in den sämmtlichen $p-\lambda-1$ Punkten der ersten Gruppe, aber ausserdem nur noch einmal, nämlich in einem willkürlich wählbaren Punkte der zweiten Gruppe verschwindet. Die Ordnung dieser Function ist also

$$p-\lambda,$$

und dies ist die niedrigste Ordnung, zu welcher, für den gegebenen Defect λ, Functionen I. G. existiren.

Solange die $3p-3$ Moduln der Klasse alle verfügbar sind, ist $\left[\frac{p}{2}\right]-1$ der grösste Werth von λ, wenn $\left[\frac{p}{2}\right]$ die grösste in $\frac{p}{2}$ enthaltene ganze Zahl bedeutet. In diesem Falle erhält man also die niedrigste Ordnung μ, zu welcher überhaupt Functionen I. G. existiren, für $\rho=1$ und $\lambda=\left[\frac{p}{2}\right]-1$, und sie ist also $\mu=p-\left[\frac{p}{2}\right]+1=\left[\frac{p+3}{2}\right]$, was umgekehrt $p=2\mu-3$ oder $p=2\mu-2$ gibt. Auf alle Fälle gilt der Satz, dass für diejenigen Functionen I. G., deren Ordnung bei gleichem Defect λ die möglichst niedrige ist, stets der Ueberschuss $\rho=1$ ist.

Die niedrigste Ordnung einer Function II. G. ist $p+1$. Bestimmt man eine Function φ oder einen Integranden I. G. so, dass er mit irgend einer Function II. G. alle Nullpunkte gemein hat, so wird er identisch Null; eine solche Function φ oder ein solcher Integrand I. G. existirt also nicht.

Die hier angewandte Ausdrucksweise ist bei vollständigern Untersuchungen über algebraische Functionen und das Abelsche Theorem fast unentbehrlich; zu ihrer Rechtfertigung erwähne ich nur noch die beiden folgenden Sätze, von denen der erste, auf corresiduale Systeme bezügliche, allgemein bekannt ist; beide können auch als Sätze über algebraische Kurven ausgesprochen werden. Nennt man ein Punksystem I. G. vollständig, wenn es aus $2p-2$ Punkten besteht, so folgt:

Werden zwei Punktsysteme I. G. durch die nämlichen Punkte zu vollständigen ergänzt, so haben sie gleichen Defect und gleichen Ueberschuss.

Ergänzen zwei Punktsysteme I. G. einander zu einem vollständigen, so ist der Defect des einen gleich dem Ueberschuss des andern.

Der erste von diesen Sätzen zeigt, dass man ohne Missverständniss die oben besprochene Function I. G. z bezeichnen kann als eine Function vom Defect λ und dem Ueberschusse ρ. Sind a, b, c Constanten, so haben nach diesem Satze die Functionen $z-c$, $\frac{az+b}{z-c}$ die gleichen charakteristischen Zahlen λ, ρ.

II. Die canonische Form des Integranden I. Gattung.

4.

Diese Lehrsätze führen zu einer merkwürdigen Form für den Integranden I. G., welche ich als die canonische Form desselben bezeichne. Sind $w_1 w_2 \ldots w_p$ linearunabhängige Integrale I. G., und

$$x_1 \quad x_2 \ldots \quad x_p$$

Parameter, so ist

$$dw = x_1 dw_1 + x_2 dw_2 \cdots + x_p dw_p$$

der allgemeine Ausdruck, in welchem alle Differentiale I. G. enthalten sind.

Dieser Ausdruck ist zweier Transformationen fähig. Die erste besteht in einer linearen und umkehrbaren Substitution mit constanten Coefficienten, durch welche statt der Parameter $x_1 x_2 \ldots x_p$ andere eingeführt werden, die zweite in der Darstellung von dw durch verschiedene Functionen z der Klasse. Beide Transformationen werden zugleich ausgeführt, wenn man nachweist, welche Folgen es für den Ausdruck von dw nach sich zieht, wenn für z eine der Klasse angehörige Function von bestimmten Eigenschaften gewählt wird.

Den Fall, wo für z eine Function II. G. genommen wird, schliesseich vorläufigaus, da er, wie schon der Vergleich mit dem Folgenden leicht zeigt, zu keiner Vereinfachung im Ausdrucke von dw führt; einen besondern Fall werden wir später (art. 12) berücksichtigen. (Vergl. auch art. 22.)

Sei also, wie im vorigen art.

$$z$$

eine Function I. G. mit dem Defect λ und dem Ueberschusse ρ, also von der

Ordnung

$$\mu = p - \lambda - 1 + \rho,$$

indem über λ und namentlich ρ fürs Erste keine nähern Voraussetzungen gemacht werden. Wirbetrachten w als Function von z, so dass

$$s = \frac{dw}{dz}$$

der allgemeine Integrand I. G. wird.

Ist σ irgend eine andere Function der Klasse und so gewählt, dass wenigstens einmal einem gegebenen z nur ungleiche Werthe von σ entsprechen, so ist durch σ und z jede andere Function der Klasse, also auch s rational darstellbar. Zwischen σ und z besteht eine irreductible Gleichung, die in σ vom Grade μ ist, und zu dieser Gleichung gehört eine μ blättrige, zusammenhängende Fläche

$$T,$$

welche die Werthe von z der Verzweigungsart der Klasse (zunächst von σ) gemäss repräsentirt.

Alle Functionen der Klasse sind also eindeutige Functionen des Ortes in dieser Fläche; da die Anzahl der zugehörigen Integrale I. G. gleich p ist, so ist

$$2(p + \mu - 1)$$

die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte dieser Fläche T.

In dieser Fläche wird das Punktsystem I. G., in welchem z verschwindet, durch μ einander bedeckende Punkte repräsentirt; diese μ Punkte bilden also ein Punktsystem I. G. mit dem Defect λ und dem Ueberschusse ρ.

Bestimmt man also den allgemeinen Integranden I. G.

$$s = x_1 w'_1 + x_2 w'_2 \cdots + x_p w'_p$$

so, dass er für $z = 0$ auf jedem Blatte von T verschwindet, so gibt dies μ Bedingungsgleichungen für die p Parameter, aber darunter nur $p - \lambda - 1$ voneinander unabhängige. Ebensovicl Parameter werden durch die übrigen bestimmt, während diese, deren Anzahl $\lambda + 1$ ist, willkürlich bleiben. Sind es die Parameter $x_1 x_2 \ldots x_{\lambda+1}$, und wird $s = x_1 v'_1 + \cdots + x_{\lambda+1} v'_{\lambda+1}$, so ist allgemein v'_i gleich w'_i vermehrt um einen aus $w'_{\lambda+1} \ldots, w'_p$ linear zusammengesetzten Ausdruck, woraus die Linearunabhängigkeit von $v'_1 v'_2 \ldots v'_{\lambda+1}$ ohne Weiteres folgt.

Diese Functionen v' verschwinden also für $z=0$ auf jedem Blatte von T. Setzt man daher $\frac{v'_i}{z}=\sigma_i$, so bleibt diese Function für $z=0$ auf jedem Blatte von T stetig (*), die Ordnung ihrer Unstetigkeit in einem Verzweigungspunkte ist immer dieselbe wie für v'_i, aber im Unendlichen verschwindet σ_i auf jedem Blatte zur dritten Ordnung. Daraus folgt, dass das $\int \sigma_i dz$ niemals unstetig wird, also ein Integral I. G. ist; σ_i ist also ein Integrand I. G.

Wir haben also bewiesen, dass im gegenwärtigen Falle $\lambda+1$ linearunabhängige Integranden I. G.

$$\sigma_1 \quad \sigma_2 \ldots \quad \sigma_{\lambda+1}$$

existiren, die im Unendlichen auf jedem Blatte von T zur dritten Ordnung verschwinden.

Durch diese kann jede andere Function dieser Art ausgedrückt werden. Denn wenn ein Integrand I. G. w' im Unendlichen stets zur dritten oder einer höhern Ordnung verschwindet, so ist auch noch zw' ein Integrand I. G., aber ein solcher, der für $z=0$ auf jedem Blatte verschwindet. Also ist zw' in der Form $x_1 v'_1 + x_2 v'_2 \cdots = z(x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + \cdots)$, mithin w' in der Form $x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 \ldots$ darstellbar:

a) Ist also z Function I. G. mit dem Defect λ, und betrachtet man das Integral I. G. als Function von z, so gibt es

$$\lambda+1$$

linearunabhängige Integranden I. G.

$$\sigma_1 \quad \sigma_2 \ldots \quad \sigma_{\lambda+1},$$

die im Unendlichen auf jedem Blatte von T zu einer höhern als der zweiten Ordnung verschwinden, und durch diese ist jede andere Function dieser Art linear darstellbar.

Dies lässt sich auch umkehren.

b) Gibt es einen Integranden I. G. w', der im Unendlichen auf jedem Blatte von T zur Ordnung $2+k$ verschwindet, so sind z^k, $z^{k-1}, \ldots$ z Functionen I. G.

In der That sind dann auch $zw'=w'_1$, $z^2 w'=w'_2, \ldots$ $z^k w'=w'_k$ Integranden, also $w'_1 : w'$, $w'_2 : w', \ldots$ $w'_k : w'$ Functionen I. G.

(*) Der Fall dass für $z=0$ ein Verzweigungspunkt stattfindet, also σ_i unstetig werden könnte, braucht nicht berücksichtigt zu werden, da man nöthigenfalls statt z die Function $z_1 = z - c$ einführen kann, deren charakteristische Zahlen λ, ρ die nämlichen sind.

5.

Bevor wir die Untersuchung über die canonische Form von dw oder s in ihrer Allgemeinheit aufnehmen, wollen wir sie für den besondern Fall zu Ende führen, wo zwar z, aber nicht auch z^2 Function I. G. ist.

Wir erhalten ausser

$$\sigma_1 \qquad \sigma_2 \ldots \qquad \sigma_{\lambda+1} \tag{1}$$

noch eine zweite Gruppe linearunabhängiger Integranden I. G., nämlich

$$z\sigma_1 \qquad z\sigma_2 \ldots \qquad z\sigma_{\lambda+1}, \tag{2}$$

und es sind nun zwei Fälle zu unterscheiden, jenachdem die $2(\lambda+1)$ Functionen (1) (2) auch noch zusammengenommen linearunabhängig sind oder es nicht sind. In dieser Beziehung finden folgende Sätze statt.

c) Sind die $2(\lambda+1)$ Functionen (1) (2) zusammengenommen linearabhängig, so ist auch z^2 Function I. G. Bezeichnen nämlich A, B lineare homogene Functionen von $\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_{\lambda+1}$ mit constanten Coefficienten, so findet n. V. eine identische Gleichung $A - Bz = 0$ statt. Hier kann weder A noch B identisch Null sein, da die Functionen (1) für sich allein linearunabhängig sind. Also ist $B = \frac{A}{z}$ ein Integrand I. G., der im Unendlichen auf jedem Blatte zur vierten Ordnung verschwindet, mithin nach dem Satze *b*) des vorigen art. z^2 Function I. G.

d) Ist umgekehrt z^2 Function I. G., so sind die Functionen (1) (2) linearabhängig.

Man kann nämlich in diesem Falle die Function s, ohne dass sie identisch verschwindet, so bestimmen, dass sie alle einfachen Nullpunkte mit z^2 gemein hat, d. h. dass sie für $z=0$ auf jedem Blatte von T zur zweiten Ordnung verschwindet. Dividirt man sie dann durch z^2, so erhält man einen Integranden I. G. w', der im Unendlichen auf jedem Blatte $=0^4$ wird. Also kann man nach *a*) (voriger art.) w' und zw' durch die Functionen (1) ausdrücken; ergibt sich $w' = B$, $zw' = A$, so folgt identisch $A - Bz = 0$; die Functionen (1) (2) zusammengenommen sind also linearabhängig. Beide Sätze vereinigt, geben den folgenden:

e) Damit die Functionen (1) (2) zusammengenommen linearunabhängig sind, ist erforderlich und hinreichend, dass zwar z, aber nicht auch z^2 Function I. G. ist.

Fälle, wo diese letztere Bedingung nicht erfüllt ist, lassen sich leicht nachweisen; es findet nämlich der Satz statt:

f) Jede Function I. G., deren Defect λ grösser ist, also er es bei unbeschränkten Moduln sein könnte, hat die Eigenschaft, dass auch ihr Quadrat eine Function I. G. ist.

Dieser Satz ist, wie das Vorangehende zeigt, gleichbedeutend mit dem folgenden:

g) Die Functionen (1) (2) sind stets linearabhängig, wenn $\lambda > \left[\frac{p}{2}\right] - 1$ ist.

Sei nämlich $\lambda = \left[\frac{p}{2}\right] - 1 + \eta$, $\eta \geqq 1$, dann ist die Anzahl der Functionen (1) (2) zusammengenommen $2(\lambda+1) = 2\left[\frac{p}{2}\right] + 2\eta$, also ist $2(\lambda+1) - p = 2\eta - \left(\left[\frac{p+1}{2}\right] - \left[\frac{p}{2}\right]\right)$ gleich $2\eta - 1$ oder gleich 2η, mithin jedenfalls $2(\lambda+1) > p$ mit Ausschluss der Gleichheit. Wir haben also in (1) (2) mehr als p Integranden I. G., während es nur p linearunabhängige gibt.

Der besondere Fall, den wir hier vorläufig erledigen wollen, setzt nun voraus, dass z, aber nicht z^2 Function I. G. ist; es muss also auf jeden Fall $\lambda \leqq \left[\frac{p}{2}\right] - 1$ sein; sei

$$\lambda = \left[\frac{p}{v}\right] - 1 - \omega, \qquad \omega \geqq 0,$$

also

$$\mu = p - \lambda - 1 + \rho = \left[\frac{p+1}{2}\right] + \omega + \rho.$$

Die Anzahl der nunmehr linearunabhängigen Functionen (1) (2) ist $2(\lambda+1) = 2\left[\frac{p}{2}\right] - 2\omega$; setzen wir

$$\left[\frac{p+1}{2}\right] - \left[\frac{p}{2}\right] = \varepsilon,$$

was Null oder Eins ist, jenachdem p eine gerade oder eine ungerade Zahl ist, so fehlen also zu einem vollständigen System von p linearunabhängigen Integranden I. G. noch $l = p - 2(\lambda+1) = p - 2\left[\frac{p}{2}\right] + 2\omega$, d. i.

$$l = 2\omega + \varepsilon$$

Functionen; diese mögen durch

$$\sigma_{\lambda+2} \qquad \sigma_{\lambda+3} \ldots \qquad \sigma_{\lambda+l+1} \tag{3}$$

bezeichnet werden. Aber es ist $\lambda+l+1=p-\lambda-1=\mu-\rho$, so dass wir auch

$$\sigma_{\lambda+l+1}=\sigma_{\mu-\rho}$$

schreiben können. Der allgemeine Ausdruck für den Integranden I. G. wird

$$s=x_1\sigma_1+x_2\sigma_2\cdots+x_{\lambda+1}\sigma_{\lambda+1}+x_{\lambda+2}\sigma_{\lambda+2}\cdots+x_{\mu-\rho}\sigma_{\mu-\rho}+z(x_{\mu-\rho+1}\sigma_1\cdots+x_\rho\sigma_{\lambda+1}),$$

da $\mu-\rho+\lambda+1=p$, $x_{\mu-\rho+\lambda+1}=x_p$ ist.

Setzen wir daher

$$y_1=x_1+zx_{\mu-\rho+1},\qquad y_2=x_2+zx_{\mu-\rho+2},\ldots\qquad y_{\lambda+1}=x_{\lambda+1}+zx_p$$

$$y_{\lambda+2}=x_{\lambda+2},\ldots\qquad y_{\mu-\rho}=x_{\mu-\rho},$$

so folgt

$$s=y_1\sigma_1+y_2\sigma_2\cdots+y_{\mu-\rho}\sigma_{\mu-\rho}.$$

Hier sind also $\lambda+1$ Coefficienten y lineare Functionen von z, die $l=2\omega+\vartheta$ übrigen sind constant.

Dieser Ausdruck von s geht in die Form, welche wir für den vorliegenden Fall als die canonische bezeichnen, über, wenn $\rho=1$ ist.

h) Wenn also in einer Klasse algebraïscher gleichverzweigter Functionen eine Function I. G. z existirt, deren Quadrat Function II. G. ist, und der Ueberschuss ρ dieser Function $=1$, ihr Defect $\lambda=\left[\frac{p}{2}\right]-1-\omega$, $\omega\gtreqless 0$, also ihre Ordnung $\mu=\left[\frac{p+1}{2}\right]+\omega+1$ ist, und man betrachtet das Integral I. G. w als Function von z, so lässt sich

$$s=\frac{dw}{dz}$$

in die canonische Form setzen:

$$s=y_1\sigma_1+y_2\sigma_2\cdots+y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1},$$

und hier sind $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{\mu-1}$ Integranden I. G., von denen die $\lambda+1$ ersten im Unendlichen auf jedem Blatte zur dritten, die übrigen nur zur zweiten Ordnung verschwinden, während die Coefficienten y jener in z linear, die Coefficienten der letztern constant sind.

Ob es aber Functionen z gibt, welche alle Bedingungen dieses Satzes verificiren, lässt sich auf dem hier eingeschlagenen Wege in keiner Weise entscheiden. Resultate die nur an solche Bedingungen geknüpft sind, deren Zulässigkeit a priori feststeht, können sich nur auf einer hinreichend allgemeinen Grundlage ergeben (folgender art θ).

6.

α) Ist i irgend eine positive ganze Zahl, und z^i Function I. G., so bilden ihre μi Nullpunkte ein Punktsystem I. G., dessen Defect und Ueberschuss ich durch λ_i und ρ_i bezeichne, so dass $\mu i = p - \lambda_i - 1 + \rho_i$ und stets $\rho_i \overline{\overline{>}} 1$ ist.

Es gibt in diesem Falle $1 + \lambda_i$ linearunabhängige Integranden I. G., welche für $z = 0$ auf jedem Blatte zur i^{ten} Ordnung verschwinden, und durch welche jede andere Function dieser Art sich linear darstellenlässt. Dividirt man durch z^i, so erhält man ebensoviel Integranden I. G., welche im Unendlichen auf jedem Blatte zur Ordnung $2 + i$ verschwinden; sie sind linearunabhängig, und jede andere Function dieser Art ist lineare homogene Function jener mit constanten Coefficienten.

Diese $1 + \lambda_i$ Functionen bezeichne ich als die Fundamentalintegranden i^{ter} Ordnung.

β) Ich nehme an, dass

$$z^k$$

die höchste Potenz von z ist, die noch zu den Functionen I. G. gehört, so dass auch $z^{k-1}, \ldots z$ zu dieser Gattung gehören, aber z^{k+1} Function zweiter Gattung ist.

γ) Setzen wir nun

$$1 + \lambda_k = L_k,$$

so ergeben sich für $i = k$ im Ganzen L_k Fundamentalintegranden k^{ter} Ordnung

$$\sigma_{k,\nu} \text{ für } \nu = 1, 2, \ldots L_k,$$

und aus ihnen leitet man $k + 1$ Gruppen, jede von L_k Integranden I. G. ab:

$$(k) \qquad \begin{array}{ll} (k,\ 0) & \sigma_{k,\nu} \\ (k,\ 1) & z\sigma_{k,\nu} \\ \cdots & \cdots \\ (k,\ k) & z^k \sigma_{k,\nu} \end{array} \qquad \text{für} \qquad \nu = 1, 2, \ldots L_k,$$

welche zusammengenommen das System (k) oder die Functionen (k) heissen sollen.

Dies sind im Ganzen

$$(k + 1) L_k$$

Functionen, und ich behaupte, sie sind l i n e a r u n a b h ä n g i g.

Beweis. Ausdrücke von der Form $c_1\sigma_{i1}+c_2\sigma_{i2}+\cdots$ in denen alle Coefficienten constant sind, sollen im Folgenden durch A_i, B_i,... E_i bezeichnet werden. Da die Functionen $(k, 0)$ linearunabhängig sind, so kann ein Ausdruck von der Form A_k nur dann identisch verschwinden, wenn jeder Coefficient $c=0$ ist. Wären nun die Functionen (k) linearabhängig, so müsste eine identische Gleichung von der Form

$$A_k+zB_k+z^2C_k\cdots+z^kE_k=0$$

stattfinden, in welcher nach dem so eben gesagten mindestens zwei Glieder vorkommen. Sodann darf man voraussetzen, dass das erste Glied, welches nicht mit einer Potenz von z multiplicirt ist, wirklich vorhanden ist; denn wenn es fehlt, so darf man nur mit der niedrigsten Potenz von z wegheben, um die angegebene Voraussetzung zu verwirklichen. Ist aber A_k nicht identisch $=0$, so würde aus vorstehender Gleichung folgen, dass

$$\frac{A_k}{z}$$

einem Integranden I. G. gleich ist. Aber da im Unendlichen auf jedem Blatte $A_k=0^{2+k}$ wird, so würde folgen, dass dort dieser neue Integrand I. G. zur Ordnung $3+k$ verschwindet, also wäre (art. 4 b) z^{k+1} Function I. G., was ausgeschlossen ist. Also können die Functionen (k) nicht linearabhängig sein, w. z. b. w.

δ) Für $i=k-1$ ergeben sich $1+\lambda_{k-1}$ Fundamentalintegranden von der Ordnung $k-1$, aber zu ihnen gehören die Functionen $(k, 0)$, $(k, 1)$. Scheidet man diese aus, so bleiben

$$L_{k-1}=1+\lambda_{k-1}-2L_k$$

Fundamentalintegranden $(k-1)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\sigma_{k-1,\nu} \text{ für } \nu=1,\ 2,\ldots\ L_{k-1}$$

übrig, welche mit $(k, 0)$, $(k, 1)$ zusammen linearunabhängig sind. Aus ihnen leitet man k Gruppen, jede von L_{k-1} Integranden I. G. ab:

$$(k-1)\quad \begin{array}{ll} (k-1,\ 0) & \sigma_{k-1,\nu} \\ (k-1,\ 1) & z\sigma_{k-1,\nu} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (k-1,\ k-1) & z^{k-1}\sigma_{k-1,\nu} \end{array} \quad \text{für} \quad \nu=1,\ 2,\ldots\ L_{k-1},$$

welche zusammengenommen das System $(k-1)$ oder die Functionen $(k-1)$ heissen sollen.

Dies sind im Ganzen

$$k L_{k-1}$$

neue Integranden I. G., und ich behaupte, dass sie mit den Functionen (k) zusammen linearunabhängig sind.

Beweis. Die Gruppen $(k,\ 0)$ $(k,\ 1)$ $(k-1,\ 0)$ sind linearunabhängig, also kann eine Gleichung $A_k + zB_k + A_{k-1} = 0$ nur dann identisch bestehen, wenn alle Coefficienten $= 0$ genommen werden. Es folgt hieraus, dass kein Ausdruck von der Form

$$\frac{A_k + A_{k-1}}{z}$$

ein Integrand I. G. sein kann.

Wäre nun unser Satz nicht richtig, so müsste eine identische Gleichung von der Form

$$(A_k + A_{k-1}) + z(B_k + B_{k-1}) \cdots + z^{k-1}(D_k + D_{k-1}) + z^k E_k = 0$$

stattfinden, in welcher wir wie im vorigen Falle, voraussetzen oder erzwingen können, dass das erste Glied, $A_k + A_{k-1}$, nicht fehlt, und in welcher dann nothwendig noch eines der folgenden Glieder vorkommen muss. Also wäre

$$\frac{A_k + A_{k-1}}{z}$$

ein Integrand I. G., was unmöglich ist.

ε) Für $i = k-2$ ergeben sich $1 + \lambda_{k-2}$ Fundamentalintegranden von der Ordnung $k-2$, aber zu ihnen gehören alle Functionen $(k,\ 0)$ $(k,\ 1)$ $(k,\ 2)$ $(k-1,\ 0)$ $(k-1,\ 1)$; scheidet man diese aus, so bleiben

$$L_{k-2} = 1 + \lambda_{k-2} - 2L_{k-1} - 3L_k$$

Fundamentalintegranden $(k-2)^{\text{ter}}$ Ordnung:

$$\sigma_{k-2,\nu} \text{ für } \nu = 1,\ 2, \ldots L_{k-2}$$

übrig, welche mit $(k,\ 0)$ $(k,\ 1)$ $(k,\ 2)$ $(k-1,\ 0)$ $(k-1,\ 1)$ linearunabhängig sind. Aus ihnen leitet man $k-1$ Gruppen, jede von L_{k-2} Integranden I. G. ab:

$$(k-2) \quad \begin{array}{ll} (k-2,\ 0) & \sigma_{k-2,\nu} \\ (k-2,\ 1) & z\sigma_{k-2,\nu} \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ (k-2,\ k-2) & z^{k-2}\sigma_{k-2,\nu} \end{array} \quad \text{für} \quad \nu = 1,\ 2, \ldots L_{k-2},$$

welche zusammengenommen das System $(k-2)$ oder die Functionen $(k-2)$ heissen sollen.

Dies sind im Ganzen

$$(k-1)L_{k-2}$$

neue Integranden I. G., und ich behaupte, sie sind mit den Functionen (k), $(k-1)$ zusammen linearunabhängig.

Beweis. Die Gruppen $(k,\ 0)$ $(k,\ 1)$ $(k,\ 2)$ $(k-1,\ 0)$ $(k-1,\ 1)$ $(k-2;\ 0)$ sind linearunabhängig, also kann eine Gleichung $A_k + zB_k + z^2 C_k + A_{k-1} + zB_{k-1} + A_{k-2} = 0$ nur dann identisch bestehen, wenn alle Coefficienten $= 0$ sind. Es folgt hieraus, dass kein Ausdruck von der Form

$$\frac{A_k + A_{k-1} + A_{k-2}}{z}$$

ein Integrand I. G. sein kann.

Wäre nun unser Satz nicht richtig, so müsste eine Gleichung von der Form

$$(A_k + A_{k-1} + A_{k-2}) + z(B_k + B_{k-1} + B_{k-2}) \cdots + z^{k-2}(C_k + C_{k-1} + C_{k-2}) + \\ + z^{k-1}(D_k + D_{k-1}) + z^k E_k = 0$$

identisch bestehen, in welcher wir, wie im vorigen Falle, voraussetzen oder erzwingen können, dass das erste Glied, $A_k + A_{k-1} + A_{k-2}$, nicht fehlt, und in der dann nothwendig noch eines der folgenden Glieder vorkommen muss. Also wäre

$$\frac{A_k + A_{k-1} + A_{k-2}}{z}$$

ein Integrand I. G., was unmöglich ist.

ζ) Man erkennt nunmehr, dass diese Schlussweise für alle folgenden Werthe von i bestehen bleibt. Wendet man dieselbe nacheinander auf $i = k$, $k-1$, $k-2, \ldots 1$ an, und ergeben sich in diesen Fällen, wenn jedesmal alle diejenigen Fundamentalintegranden ausgeschieden werden, welche gegen frühere Gruppen linearabhängig sind, beziehungsweise

$$L_k, \qquad L_{k-1}, \qquad L_{k-2}, \ldots \qquad L_1$$

Fundamentalintegranden, so liefern die Systeme (k) $(k-1)$ $(k-2) \ldots (1)$ zusammengenommen p oder weniger als p linearunabhängige Integranden I. G., da es nur p linearunabhängige gibt. Ist

$$L_0$$

die Anzahl der fehlenden, so folgt

$$p = L_0 + 2L_1 + 3L_1 \cdots + kL_k. \tag{I}$$

Bedeutet sodann, wie im Vorangehenden, $1+\lambda_i$ die Anzahl aller Fundamentalintegranden i^{ter} Ordnung, also aller derjenigen, die im Unendlichen auf jedem Blatte zur Ordnung $2+i$ verschwinden, so dass z. B. $1+\lambda_0 = p$ wird, so folgt

$$\left.\begin{aligned}
1+\lambda_k \;\; &= L_k \\
1+\lambda_{k-1} &= L_{k-1} + 2L_k \\
1+\lambda_{k-2} &= L_{k-2} + 2L_{k-1} + 3L_k \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
1+\lambda_1 \;\; &= L_1 + 2L_2 + 3L_3 \cdots + kL_k \\
1+\lambda_0 \;\; &= L_0 + 2L_1 + 3L_2 \cdots + (k+1)L_k,
\end{aligned}\right\} \tag{II}$$

letztere Gleichung in Uebereinstimmung mit (I) und mit

$$\lambda_0 = p - 1. \tag{III}$$

Die Anzahl der Fundamentalintegranden $(k, 0)$, $(k-1, 0)$,... $(1, 0)$, $(0, 0)$ aus denen wir alle übrigen durch Multiplication mit Potenzen von z ableiten, ist also $L_0 + L_1 \cdots + L_k = \lambda_0 - \lambda_1$. Aber es ist $\mu = p - \lambda_1 - 1 + \rho_1 = \lambda_0 - \lambda_1 + \rho_1$, also ist jene Anzahl gleich

$$\mu - \rho_1. \tag{IV}$$

Sodann folgt aus (II)

$$\begin{aligned}
\lambda_i \;\; - \lambda_{i+1} &= L_i + L_{i+1} \cdots + L_k \\
\lambda_{i+1} - \lambda_{i+2} &= \qquad\;\; L_{i+1} \cdots + L_k,
\end{aligned}$$

also ist für die verschiedenen Ordnungen k, $k-1$,... 1, 0 die Anzahl der beizubehaltenden Fundamentalintegranden:

$$\left.\begin{aligned}
L_k \;\; &= 1 + \lambda_k \\
L_{k-1} &= (\lambda_{k-1} - \lambda_k) - (1 + \lambda_k) \\
L_{k-2} &= \lambda_{k-2} - 2\lambda_{k-1} + \lambda_k \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
L_i \;\; &= \lambda_i - 2\lambda_{i+1} + \lambda_{i+2} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
L_0 \;\; &= \lambda_0 - 2\lambda_1 + \lambda_2.
\end{aligned}\right\} \tag{V}$$

Da ferner unter diesen Zahlen sich keine negative findet, während der Fall, dass eine von ihnen $= 0$ wäre, nicht ausgeschlossen ist, und $\lambda_0 - \lambda_1 = \mu - \rho_1$ ist, so ist

$$\mu - \rho_1 = L_0 + L_1 \cdots + L_k \gtreqless L_1 + \cdots + L_k \gtreqless L_2 \cdots + L_k \cdots \gtreqless L_{k-1} + L_k \gtreqless L_k \qquad \text{(VI } a)$$

also

$$\mu - \rho_1 = \lambda_0 - \lambda_1 \gtreqless \lambda_1 - \lambda_2 \gtreqless \lambda_2 - \lambda_3 \cdots \gtreqless \lambda_{k-1} - \lambda_k \gtreqless \lambda_k + 1. \qquad \text{(VI)}$$

η) Sind, mit nunmehr abgeänderter Bezeichnung und mit Rücksicht auf (IV)

$$\sigma_1 \quad \sigma_2 \ldots \quad \sigma_{\mu-\rho_1} \qquad \text{(VII)}$$

die Fundamentalintegranden, welche der Bildung der Systeme (k) $(k-1)\ldots$ (1) (0) zu Grunde liegen, so werden im Unendlichen auf jedem Blatte von T

die	L_k	ersten	unendlich klein	zur	Ordnung	$2+k$
"	L_{k-1}	folgenden	"	"	"	$2+k-1$
"	L_{k-2}	"	"	"	"	$2+k-2$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
"	L_1	"	"	"	"	$2+1$
"	L_0	letzten	"	"	"	2,

und es nimmt daher der allgemeine Integrand I. G. die Form an

$$s = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 \cdots + y_{\mu-\rho_1}\sigma_{\mu-\rho_1}, \qquad \text{(VIII)}$$

wo $y_1 y_2 \ldots y_{\mu-\rho_1}$ ganze Functionen von z mit constanten, aber sonst willkürlichen Coefficienten

$$x_1 \quad x_2 \ldots \quad x_p$$

sind, und zwar sind von diesen Functionen

die	L_k	ersten	in z	vom Grade	k
"	L_{k-1}	folgenden	"	"	$k-1$
"	L_{k-2}	"	"	"	$k-2$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
"	L_1	"	"	"	1
"	L_0	letzten dagegen constant.			

Die Anzahl der Glieder, aus denen s besteht, und welche alle linearunabhängig sind, ist also $(k+1)L_k + kL_{k-1} \cdots + L_0 = p$ (I), also ist in der That p die Anzahl der Parameter $x_1 x_2 \ldots$

$\mathfrak{h}$) Für z darf man, was bei der vorläufigen Aufgabe des vorigen art. 5 nicht der Fall war, jede Function I. G. nehmen, wofern nur k gehörig ermitteltwird. Wenn ferner λ_1 in der vorgelegten Klasse algebraischer, gleichverzweigter Functionen überhaupt als Defect einer Function I. G. vorkommt, was nicht für jeden Werth von λ_1 der Fall zu sein braucht, so gibt es auch eine Function I. G. z mit diesem Defect λ_1 und dem kleinsten Ueberschuss $\rho_1 = 1$, also von der niedrigsten, mit diesem Defect vereinbaren Ordnung $\mu = p - \lambda_1$.

Nimmt man für z eine solche Function, so ergibt sich aus (VIII) für s ein $(\mu - 1)$ gliedriger Ausdruck; die Gliederzahl ist also um eine Einheit kleiner wie die Ordnung von z. Diese Form von s heisst die canonische Form, und sie ist stets möglich. Zu jeder Defectzahl λ_1, $\lambda'_1, \ldots$ welche in der Klasse wirklich vorkommt, gehört eine canonische Form von s. Wir haben also den Lehrsatz:

Eine canonische Form für $s = \dfrac{dw}{dz}$ ergibt sich, wenn man für z eine Function I. G. mit irgend einem in der Klasse wirklich vorkommenden Defect λ, aber dem Ueberschuss

$$\rho = 1$$

wählt, so dass die Ordnung dieser Function bei gleichem Defect die niedrigste

$$\mu = p - \lambda$$

wird. Dann wird die Anzahl der in s zu verwendenden Fundamentalintegranden, oder die Anzahl der Glieder von

$$s = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 \cdots + y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1}$$

um eine Einheit niedriger als die Ordnung von z, und diese Form von s ist unter allen Umständen möglich.

Die Frage, wie man zu einer solchen Function z gelangen könne, wird sich später (V Abschn. art. 21) durch die Umkehrung der Untersuchung erledigen.

i) Wir schliessen hieran noch einen Zusatz, an den sich (art. 13) wesentliche Folgerungen knüpfen. Derselbe wird nur für die canonische Form von s ausgesprochen, gilt aber auch wenn $\rho_1 > 1$ ist.

Der Ausdruck s kann nur dann identisch verschwinden, wenn die constanten Coefficienten $x_1 x_2 \ldots x_p$ alle $=0$ gesetzt werden. Dies gilt unter der Voraussetzung, dass jedes y den oben ermittelten Grad in z hat. Es findet aber ganz allgemein der Satz stalt,

> dass, wenn $G_1 G_2 \ldots G_{\mu-1}$ irgend welche ganze Functionen von z bedeuten, der Ausdruck
>
> $$G_1\sigma_1 + G_2\sigma_2 \cdots + G_{\mu-1}\sigma_{\mu-1}$$
>
> nur dann identisch verschwinden kann, wenn die Factoren $G_1 G_2 \ldots G_{\mu-1}$ einzeln identisch verschwinden.

Wir ordnen nach den in $G_1 G_2 \ldots G_{\mu-1}$ vorkommenden Potenzen von z und heben, falls alle Glieder durch eine Potenz von z theilbar sind, mit dieser weg. Wäre unser Satz nicht richtig, so würde sich eine Gleichung ergeben

$$A + zB + z^2 C \cdots + z^m E = 0,$$

wo A, B,... in $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_{\mu-1}$ linear und homogen mit constanten Coefficienten sind. Ausser A, welches nicht identisch $=0$ ist, muss noch mindestens ein Glied vorkommen. Also wäre $\frac{A}{z}$ für $z=0$ auf keinem Blatte unstetig, also ein Integrand I. G., was unmöglich ist.

7.

Die hiermit festgestellte canonische Form von s, also auch von $dw = s dz$, ist wesentlich an die Bedingung geknüpft, dass z^k die höchste Potenz von z sein soll, die noch zu den Functionen I. G. gehöst. Es liegt nahe, zu fragen, welchen Werth dieser höchste Exponent k für ein gegebenes p haben kann. Ich will daher schon an dieser Stelle zeigen, wie diese Frage gestellt werden muss.

Aus (VI) (voriger art.) folgt u. A., weil wir jetzt $\rho_1 = 1$ voraussetzen,

$$\mu-1=\lambda_0-\lambda_1,\quad \mu-1\overline{\gtrless}\lambda_1-\lambda_2,\quad \mu-1\overline{\gtrless}\lambda_2-\lambda_3,\ldots\quad \mu-1\overline{\gtrless}\lambda_{k-1}-\lambda_k,\quad \mu-1\overline{\gtrless}\lambda_k+1$$

also durch Addition $(k+1)(\mu-1)\overline{\gtrless}\lambda_0+1$, d. i.

$$(k+1)(\mu-1)\overline{\gtrless}p,\qquad k\overline{\gtrless}\frac{p-\mu+1}{\mu-1}.$$

Andererseits ist die Anzahl der Nullpunkte einer Function I. G. höchstens

$=2p-2$, also

$$\mu k \overset{=}{<} 2p-2.$$

Beides zusammen gibt eine der drei Ungleichheiten

$$\frac{p-\mu+1}{\mu-1} \overset{=}{<} k \leq \frac{2p-2}{\mu} \tag{A}$$

$$\frac{p+k+1}{k+1} \overset{=}{<} \mu \leq \frac{2p-2}{k} \tag{B}$$

$$\tfrac{1}{2}\mu k+1 \overset{=}{<} p \leq (\mu-1)(k+1). \tag{C}$$

Nehmen wir als Beispiel den Fall $\mu=3$, so folgt aus (A)

$$\frac{p-2}{2} \overset{=}{<} k \leq \frac{2p-2}{3}.$$

Im vorliegenden Fall hat s die Form

$$s=y_1\sigma_1+y_2\sigma_2;$$

sind a_1, a_2 die Grade von y_1, y_2 in z, also die Ordnungen von σ_1, σ_2, und ist $a_2 \overset{=}{<} a_1$, so ist $k=a_1$ und $a_2=p-a_1-2$. Es ergibt sich folgende Tabelle

p	3	4	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	10	11	11	12	12	12
a_1	1	2	1	2	3	2	4	3	4	3	5	4	6	5	4	6	5	7	6	5
a_2	0	0	1	1	1	2	1	2	2	3	2	3	2	3	4	3	4	3	4	5

so dass jedesmal z^{a_1} die höchste Potenz von z ist, die noch zu den Functionen I. G. gehört. Der Beweis wird sich im art. 24 ergeben, wo wir finden werden, dass alle diese Fälle wirklich existiren, indem jedem dieser, ins Unbegrenzte fortzusetzenden Reihe von Fällen eine cubische Gleichung in s entspricht, welche s und implicite σ_1 und σ_2 in der jedesmal verlangten Weise bestimmt.

Dann wird es auch ohne weitere Ausführungklar, dass k weder durch p, noch durch μ allein sondern durch p und μ zusammen bestimmt wird, wie es aus der Ungleichheit (A) hervorgeht.

Die zweite und dritte Ungleichheit zeigt, in welchen Fällen überhaupt von einem bestimmten Werthe von k die Rede sein kann. So ist z. B. die Annahme $k=1$ in allen denjenigen Fällen a priori ausgeschlossen, für welche die Ungleichheit $\frac{p+2}{2} \overset{=}{<} \mu \leq 2p-2$ oder $\frac{\mu+2}{2} \overset{=}{<} p \leq 2\mu-2$ nicht erfüllt ist.

III. Die Function s als Wurzel einer Gleichung vom Grade μ.

8.

Wenn umgekehrt eine canonische Form

$$s = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 \cdots + y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1}$$

vorliegt, in welcher die Ordnungen von $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{\mu-1}$ also die Grade von $y_1y_2\ldots y_{\mu-1}$ der Reihe nach

$$a_1 \qquad a_2 \ldots \qquad a_{\mu-1}$$

sind, so ist k die grösste von diesen Zahlen, und L_k gibt an, wieviel von ihnen $= k$ sind. Ebenso ergeben sich die Werthe von $L_{k-1}, \ldots L_0$, und da keiner von ihnen negativ ist, so ist unter diesen Voraussetzungen die Ungleichheit (VI a), d. i. die Bedingung (VI) (art. 6) für die ebenfalls leicht zu berechnenden Defecte $\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k$ von z, $z^2, \ldots$ z^k identisch erfüllt.

Vermöge dieser Abzählung ist ferner $a_1 + a_2 \cdots + a_{\mu-1} = k L_k + (k-1)L_{k-1} \cdots + L_1$; aber wegen (II) (art. 6) ist dies auch gleich $1 + \lambda_1 = p - \mu + \rho_1$, also folgt, weil $\rho_1 = 1$ ist,

$$a_1 + a_2 \cdots + a_{\mu-1} = p - \mu + 1,$$

wie auch aus dem Umstande folgt, dass s, nach den willkürlichen Constanten geordnet, aus p Gliedern besteht.

Ich beschränke nun die Untersuchung dieser Function s und der Gleichung μ^{ten} Grades, deren Wurzel s ist, auf den Fall, wo s nur einfache und getrennte Singularitäten besitzt, d. h. wo für keinen Werth α von z mehr als eine einzige mehrfache Wurzel s stattfindet, und dies jedesmal eine Doppelwurzel ist.

Es sollen also nur einfache Verzweigungspunkte und nur eigentliche Doppelpunkte, und niemals soll für das nämliche z mehr als eine von diesen Singularitäten stattfinden.

Beiläufig bemerkt hängt dies, wie ich in meinen Vorlesungen zu zeigen pflege, von einer einzigen Constante ab, welche ich die Bidiscriminante der Gleichung zwischen s und z nenne; bei einer gegebenen Gleichung $F(s \mid z) = 0$ sind die vorstehenden Bedingungen erfüllt oder nicht, jenachdem diese Constante von Null verschieden oder $= 0$ ist.

Diese Bedingungen ziehen bekanntlich für die Discriminante unserer erst aufzustellenden Gleichung die wichtige Folgerung nach sich, dass sie nur einfache und Doppelfactoren hat, und zwar entspricht einem einfachen Wurzelfactor stets ein einfacher Verzweigungspunkt, einem Doppelfactor stets ein eigentlicher Doppelpunkt.

Unter den Voraussetzungen unserer Untersuchung wird also die Discriminante D der Gleichung zwischen s und z in die Form zu bringen sein

$$D = WR^2,$$

wo W das Product aller einfachen, R^2 das Product aller Doppelfactoren ist; in den Verzweigungspunkten ist dann $W=0$, in den Doppelpunkten $R=0$.

Diese Zerfällung von D und die wirkliche Darstellung von R wird eine der Hauptaufgaben unserer Untersuchung sein.

9.

Unter den nunmehr feststehenden Voraussetzungen hat die Fläche T

$$2(p+\mu-1)$$

einfache und durchaus getrennte Verzweigungspunkte; sei

$$A$$

eine ganze Function $2(p+\mu-1)^{\text{ten}}$ Grades von z, welche in diesen Punkten verschwindet, also nur ungleiche Linearfactoren hat, ferner seien

$$s_1 \quad s_2 \ldots \quad s_\mu$$

die verschiedenen Zweige von z. Dann hat der Ausdruck

$$\tau = A(t-s_1)(t-s_2)\cdots(t-s_\mu)$$

die folgenden Eigenschaften.

1) Er ist algebraïsche einwerthige, also rationale Function von z.

2) Für endliche Werthe von z wird s nur in Verzweigungspunkten unstetig. Findet ein solcher statt für $z=\alpha$, so werden dort zwei Zweige, z. B. s_1 und s_2 unstetig wie $\frac{1}{\sqrt{z-\alpha}}$, die übrigen bleiben stetig. Da zugleich A verschwindet wie $z-\alpha$, so wird für $z=\alpha$ die rationale Function τ weder Null noch unendlich.

3) Für endliche Werthe von z wird demnach diese rationale Function nie unstetig, also ist sie ganze Function von z. Ordnet man sie nach Potenzen von t, und wird dann

$$\tau = A t^{\mu} + A_1 t^{\mu-1} + A_2 t^{\mu-2} \cdots + A_{\mu},$$

so sind also die Coefficienten A, $A_1, \ldots$ ganze Functionen von z, und es wird in einem Verzweigungspunkte zwar A, aber nicht jeder Coefficient $=0$. Dies gilt auch, wenn man y_1, $y_2, \ldots$ $y_{\mu-1}$ auf ihre constanten Theile $x_1 x_2 \ldots x_{\mu-1}$ reducirt; wird als dann $A_i = A^0{}_i$, und ist

$$A^0{}_i = \Sigma A^{(i)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\mu-1}} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_{\mu-1}^{\alpha_{\mu-1}} (\alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_{\mu-1} = i),$$

so sind hier die Coefficienten ganze Functionen von z, also sind sie es auch im ursprünglichen Ausdrucke, nämlich in

$$A_i = \Sigma A^{(i)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\mu-1}} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_{\mu-1}^{\alpha_{\mu-1}} (\alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_{\mu-1} = i).$$

Da im Unendlichen jeder Zweig von s zur zweiten Ordnung verschwindet, so folgt aus dem bereits bekannten Grade von A, dass dort A_i zur Ordnung $2(p + \mu - i - 1)$ unendlich wird, also ist A_i in z vom Grade

$$\delta A_i = 2(p + \mu - i - 1).$$

Aus den bekannten Graden von $y_1 y_2 \ldots y_{\mu-1}$ folgt also weiter, wenn wir zur Bezeichnung des Grades in z das Zeichen δ beibehalten,

$$\delta A^{(i)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\mu-1}} + \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 \cdots + \alpha_{\mu-1} a_{\mu-1} = 2(p + \mu - i - 1).$$

Demnach genügt s einer Gleichung μ^{ten} Grades

$$A s^{\mu} + A_1 s^{\mu-1} + A_2 s^{\mu-2} \cdots + A_{\mu} = 0,$$

und hier findet nun der wichtige Satz statt, dass stets

$$A_1 = 0$$

ist, oder mit andern Worten, dass identisch

$$s_1 + s_2 \cdots + s_{\mu} = 0$$

ist. In der That ist $v' = s_1 + s_2 \cdots + s_{\mu}$ eine rationale Function von z, aber so beschaffen, dass ihr Integral $v = \int v' dz$ weder im Endlichen noch im Unendlichen jemals unstetig wird. Also ist auch v selbst rational, aber nie unstetig, also constant, mithin $v' = 0$. Der besondere Fall dieses Satzes, wo z einwerthige doppeltperiodische Function von $w = \int s dz$ ist, ist seit langer Zeit bekannt.

10.

Als Discriminante des Ausdruckes

$$\tau = A t^{\mu} + A_1 t^{\mu-1} + A_2 t^{\mu-2} \cdots + A_{\mu}$$

bezeichne ich, im Vorzeichen von der üblichen Schreibweise abweichend, die Determinante

$$\begin{vmatrix} \mu A & (\mu-1)A_1 & (\mu-2)A_2 \ldots \\ A_1 & 2A_2 & 3A_3 \ldots \\ . & \mu A & (\mu-1)A_1 \ldots \\ . & A_1 & 2A_2 \ldots \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = D,$$

welche entsteht, wenn das erste Zeilenpaar $\mu - 1$ mal wiederholt aber jedesmal um eine Spalte nach rechts geschoben wird. Ist wie oben

$$\tau = A(t - s_1)(t - s_2) \cdots (t - s_{\mu}),$$

so ergibt sich

$$D = \mu h A^{2\mu-2} [\Pi(s_1 s_2 \ldots s_{\mu})]^2,$$

wo h eine numerische Constante ist.

11.

In unserm Falle ist $A_1 = 0$ und s Wurzel einer Gleichung

$$A s^{\mu} + A_2 s^{\mu-2} + A_3 s^{\mu-3} \cdots + A_{\mu} = 0, \tag{I}$$

in welcher stets das zweite Glied fehlt. Setzt man die $(2\mu - 3)$ zeilige Determinante, welche entsteht, wenn in D (art. 10) die erste Zeile und Spalte weggelassen werden,

$$\begin{vmatrix} 2A_2 & 3A_3 & 4A_4 \ldots \\ \mu A & . & (\mu-2)A_2 \ldots \\ . & 2A_2 & 3A_3 \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} = h\vartheta, \tag{II}$$

so wird die Discriminante

$$D = \mu h A \vartheta.$$

Wenn daher

$$A^{\frac{2\mu-3}{2}} \Pi(s_1 s_2 \ldots s_\mu) = \Delta \tag{III}$$

Gesetzt wird, so ist

$$D = \mu h A \Delta^2 \tag{IV}$$

und

$$\vartheta = \Delta^2. \tag{V}$$

Vergleicht man diese Formeln mit dem Schlusse von art. 8, so folgt dass dort $W = \mu h A$ genommen werden kann, und dann muss $R^2 = \Delta^2$, $R = \Delta$ sein. Die Bedingungen unserer Aufgabe fordern also, dass Δ eine rationale ganze Function von z ist und mit A keinen Linearfactor gemein hat.

Will man dies schon an dieser Stelle verificiren, so ist zunächst zu beachten, dass ausserhalb der Verzweigungspunkte von s oder was dasselbe ist, der $\sqrt{A}$, jeder Factor von Δ, also auch Δ selbst einändrig ist. Wenn sodann z einen Verzweigungspunkt von s in unendlicher Nähe umkreist, so vertauschen sich zwei Zweige von s, die übrigen kehren zu ihren Anfangswerthen zurück; also wechselt Π nur sein Zeichen, ebenso die $\sqrt{A}$, aber der Endwerth von Δ wird dem Anfangswerthe gleich. Also ist Δ für keinen Werth von z mehrändrig, und als algebraïsche Function von z eine rationale. Diese rationale Function könnte für endliche Werthe von z nur unstetig werden, wenn ein Zweig von s es wird, also für $A = 0$. Aber als Integrand I. G. darf s nur in Verzweigungspunkten unstetig werden; für $A = 0$ bleiben also entweder alle Zweige von s stetig, und dann müssten auch $A_2 A_3 \ldots A_\mu$ verschwinden, was auszuschliessen ist oder es werden unstetig nur die beiden Zweige von s, welche im entsprechenden Verzweigungspunkte zusammenhängen, etwa s_1 und s_2. Also darf, so oft A verschwindet, der Grad der Gleichung I. nur um zwei Einheiten sinken, d. h. für $A = 0$ darf niemals A_2 verschwinden. Dann erhält man für die beiden Zweige, welche unendlich werden, $A s^2 + A_2 = 0$, d. h. $s_1 \sqrt{A}$ und $s_2 \sqrt{A}$ werden weder Null noch unendlich, und entgegengesetzt gleich. In diesem Verzweigungspunkte erlangen also die $2\mu - 3$ Factoren

$$(s_2 - s_1)\sqrt{A} \text{ und für } i > 2: \qquad (s_i - s_1)\sqrt{A}, \qquad (s_i - s_2)\sqrt{A}$$

von Δ endliche von Null verschiedene Werthe, die übrigen Factoren bleiben stetig und von Null verschieden, da für $A = 0$ nur zwei Wurzeln s zusammenfallen, also wird für $A = 0$ die Function Δ weder Null noch unendlich.

Damit ist bewiesen, dass die rationale Function Δ für endliche Werthe von z nie unstetig wird, also eine ganze Function von z ist, ausserdem dass vermöge der Bedingungen unserer Aufgabe Δ in keinem Verzweigungspunkte verschwindet.

Es ist leicht zu zeigen, dass der Grad dieser ganzen Function, also die Anzahl der Doppelpunkte von s, gleich $p(2\mu-3)+(\mu-1)(\mu-3)$ ist, was sich übrigens auch aus dem Ausdrucke ergibt, den wir im art. 15 für Δ finden werden.

IV. Das Transformationsproblem; Bestimmung von Δ.

12.

In der für s gefundenen Gleichung

$$A s^{\mu}+A_2 s^{\mu-2}\cdots+A_{\mu}=0 \tag{1}$$

sind die Coefficienten $A_2 A_3 \ldots A_{\mu}$ symmetrische Functionen der Wurzeln $s_1 s_2 \ldots s_{\mu}$, aber zwischen diesen besteht die identische Gleichung

$$s_1+s_2\cdots+s_{\mu}=0. \tag{2}$$

Wir schaffen mittelst dieser Gleichung eine Wurzel weg, und zwar stets s_{μ}; dann gehen $A_2 A_3 \ldots A_{\mu}$ über in symmetrische Functionen von $s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1}$, welche wir durch $A'_2 A'_3 \ldots A'_{\mu}$ bezeichnen, so dass

$$A t^{\mu}+A'_2 t^{\mu-2}\cdots+A'_{\mu}=A(t-s_1)\cdots(t-s_{\mu-1})(t+s_1\cdots+s_{\mu-1}) \tag{3}$$

wird. Es sind also $A'_2 A'_3 \ldots A'_{\mu}$ homogene Formen von den Graden 2, 3,… μ mit $\mu-1$ Argumenten $s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1}$, aus denen sie in vorgeschriebener Weise zusammengesetzt sind.

Nun ist in canonischer Form (art. 8)

$$s=y_1\sigma_1+y_2\sigma_2\cdots+y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1}; \tag{4}$$

da diese Formel für jeden Zweig von s und die gleichzeitigen Zweige von $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_{\mu-1}$ gilt, so liefert sie μ Formeln, von denen aber wegen (2) die letzte aus den übrigen folgt, und weggelassen werden kann.

Um diese wichtigen Formeln ausführen zu können, wollen wir die gleichzeitigen Zweige von s und irgend einem Fundamentalintegranden σ_{λ} durch

$$s_1,\ \sigma_{\lambda 1}; \quad s_2,\ \sigma_{\lambda 2}; \ldots \quad s_i,\ \sigma_{\lambda i}; \ldots \quad s_{\mu},\ \sigma_{\lambda\mu}$$

bezeichnen; dann folgt aus (4)

$$\left.\begin{array}{llll} s_1 &= y_1\sigma_{11} & + y_2\sigma_{21}\cdots & + y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1,1} \\ s_2 &= y_1\sigma_{12} & + y_2\sigma_{22}\cdots & + y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1,2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ s_{\mu-1} &= y_1\sigma_{1,\mu-1} & + y_2\sigma_{2,\mu-1}\cdots & + y_{\mu-1}\sigma_{\mu-1,\mu-1}, \end{array}\right\} \qquad (S)$$

wo aus dem angegebenen Grunde die Formel für s_μ weggelassen ist. Hier stehen also in derselben Zeile jedesmal die gleichzeitigen Zweige der verschiedenen Functionen, aber in derselben Spalte die verschiedenen Zweige der nämlichen Function, bis auf den μ^{ten} Zweig, der weggelassen ist.

Setzt man diese Ausdrücke in $A'_2A'_3\ldots A'_\mu$ ein, so erhält man $A_2A_3\ldots A_\mu$, also diejenigen Formen mit den $\mu-1$ Variabeln $y_1y_2\ldots y_{\mu-1}$, welche zur Bildung der Gleichung (1) erforderlich sind.

Damit sind wir zu einem eigentlichen Transformationsproblem gelangt, indem für die gesuchten Formen $A_2A_3\ldots A_\mu$ (1) canonische Formen $A'_2A'_3\ldots A'_\mu$ von vorgeschriebener Zusammensetzung vorliegen, und (2) die Substitution (S) gegeben ist, durch welche diese in jene übergehen. Die Schwierigkeit unserer Aufgabe liegt also hauptsächlich in den Natur der Substitution (S), über deren Coefficienten $\sigma_{\lambda i}$ weiter nichts feststeht, als was oben über die Fundamentalintegranden nachgewiesen wurde; um unsere Untersuchung weiter führen zu können, werden wir uns daher mit der Substitution (S) eingehender zu beschäftigen haben.

Es ist hier der Ort zu einigen ergänzenden Bemerkungen über die Fälle, welche durch unsere bisherigen Voraussetzungen über z ausgeschlossen sind. Diese Voraussetzungen bestehen darin, dass z eine Function I. G. mit dem niedrigsten Ueberschuss $\rho=1$ sein soll; ausgeschlossen sind also alle Functionen I. G. deren Ueberschuss $\rho>1$ ist und Functionen II. G. z.

Die Gleichung (2) findet auf alle Fälle statt, und mit ihr die Reduction der Coefficienten in die Formen $A'_2\ldots A'_\mu$ mit $\mu-1$ Argumenten $s_1s_2\ldots s_{\mu-1}$.

Wenn aber (1) z Function I. G. und ihr Ueberschuss $\rho>1$ ist, und man drückt s durch Fundamentalintegranden aus, so wird nach art 6 (VIII)

$$s = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2\cdots + y_{\mu-\rho}\sigma_{\mu-\rho},$$

also ist die Gliederzahl $\mu-\rho$, d. i. die Anzahl der Argumente $y_1y_2\ldots$ von $A_2\ldots A_\mu$ kleiner als die Anzahl $\mu-1$ der Argumente von $A'_2\ldots A'_\mu$.

Wenn (2) z Function II. G. ist, so ist jedenfalls ihre Ordnung $\mu\overline{>}p+1$.

Fundamentalintegranden, die im Unendlichen auf jedem Blatte zu einer höhern als der zweiten Ordnung verschwinden, gibt es nicht, weil sonst [nach art. 4 (6.)] z Function I. G. wäre. Durch Fundamentalintegranden $\sigma_1 \sigma_2 \ldots$ ausgedrückt, wird also

$$s = x_1 \sigma_1 + x_2 \sigma_2 \cdots + x_p \sigma_p,$$

ohne Reduction der Gliederzahl. Die Gliederzahl p von s, also die Anzahl der Argumente in den Formen $A_2 \ldots A_\mu$ ist also im Allgemeinen kleiner also die Anzahl $\mu - 1$ der Argumente von $A'_2 \ldots A'_\mu$, und sie ist dieser nur in dem besondern Falle gleich, wo z Function II. G. niedrigster Ordnung $\mu = p + 1$ ist.

In allen denjenigen Fällen, wo $A'_2 \ldots A'_\mu$ von mehr Argumenten abhängen wie $A_2 \ldots A_\mu$, könen zwar jene in diese, aber nicht umgekehrt diese in jene transformirt werden. (Vergl. art. 22.)

Ein Transformationsproblem, wo beide Formensysteme in einander transformirt werden können, also zwischen ihnen wirkliche Aequivalenz besteht, findet also nur statt, wenn z entweder Function I. G. von niedrigster Ordnung bei gegebenem Defect λ, oder Function II. G. von überhaupt niedrigster Ordnung $p+1$ ist, und auch in diesen Fällen nur dann, wenn aus der Substitution S, durch welche $A'_2 \ldots A'_\mu$ in $A_2 \ldots A_\mu$ transformirt werden, eine andere, S^{-1} folgt, welche rückwärts $A_2 \ldots A_\mu$ in $A'_2 \ldots A'_\mu$ transformirt, d. h. wenn die Substitution S eine umkehrbare oder ihre Determinante von Null verschieden ist. Dass dies der Fall ist werden wir im folgenden art. beweisen.

Den hiermit als zulässig nachgewiesenen Fall, wo z zwar Function II. G. aber von niedrigster Ordnung ist, nehmen wir in unsere Vorraussetzungen mit auf, so dass für diesen Fall die oben (art. 8) durch $a_1 a_2 \ldots a_{\mu-1}$ bezeichneten Zahlen alle $= 0$ sind und $p = \mu - 1$ wird.

13.

Wir bezeichnen die Determinante der Substitution S durch r, so dass

$$r = \frac{\partial(s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1})}{\partial(y_1 y_2 \ldots y_{\mu-1})}$$

oder

$$r = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21}\ldots & \sigma_{\mu-1,1} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\ldots & \sigma_{\mu-1,2} \\ \sigma_{1,\mu-1} & \sigma_{2,\mu-1}\ldots & \sigma_{\mu-1,\mu-1} \end{vmatrix}$$

wird; hier sind die Zeilen durch die gleichzeitigen Zweige der verschiedenen Functionen $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{\mu-1}$, die Spalten durch die verschiedenen Zweige ein und derselben Function σ gebildet, immer mit Weglassung des μ^{ten} Zweigs. Wir sind nun im Stande, zunächst zu beweisen, dass die Substitution S eine umkehrbare, d. h. dass r nicht identisch Null ist.

Beweis. Angenommen, r sei identisch Null, allgemeiner, alle $(i+1)$ zeiligen Unterdeterminanten von r seien Null, aber wenigstens eine i zeilige sei nicht Null. Sei dies die Unterdeterminante

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21}\ldots & \sigma_{i1} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\ldots & \sigma_{i2} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \sigma_{1i} & \sigma_{2i}\ldots & \sigma_{ii} \end{vmatrix} = \delta.$$

Wenn dann g und λ beide $>i$ sind, so ist nach Voraussetzung stets

$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21}\ldots & \sigma_{i1} & \sigma_{\lambda 1} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}\ldots & \sigma_{i2} & \sigma_{\lambda 2} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \sigma_{1i} & \sigma_{2i}\ldots & \sigma_{ii} & \sigma_{\lambda i} \\ \sigma_{1g} & \sigma_{2g}\ldots & \sigma_{ig} & \sigma_{\lambda g} \end{vmatrix} = 0.$$

Nun kann man, weil δ nicht $=0$ ist, Factoren $R_1 R_2\ldots R_i$ so bestimmen, dass

$$\begin{aligned} \sigma_{\lambda 1} &= R_1\sigma_{11} + R_2\sigma_{21}\cdots + R_i\sigma_{i1} \\ \sigma_{\lambda 2} &= R_1\sigma_{12} + R_2\sigma_{22}\cdots + R_i\sigma_{i2} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sigma_{\lambda i} &= R_1\sigma_{1i} + R_2\sigma_{2i}\cdots + R_i\sigma_{ii} \end{aligned}$$

wird, und dann wird auch für $g>i$

$$\sigma_{\lambda g} = R_1\sigma_{1g} + R_2\sigma_{2g}\cdots + R_i\sigma_{ig},$$

d. h. es gibt Functionen $R_1 R_2\ldots R_i$ von z, so dass jeder Zweig $\sigma_{\lambda 1}, \sigma_{\lambda 2},\ldots \sigma_{\lambda\mu}$

der Function σ_λ sich durch die gleichzeitigen, dem nämlichen Blatte von T zugeordneten Zweige von $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_i$ nach der Formel

$$\sigma_{\lambda k} = R_1\sigma_{1k} + R_2\sigma_{2k}\cdots + R_i\sigma_{ik}$$

ausdrückt.

Die Ausdrücke für $R_1R_2\ldots R_i$ zeigen, dass dies algebraische Functionen von z sind, und dass diese Functionen für solche Werthe von z, denen in der Fläche T kein Verzweigungspunkt entspricht, einändrig sind. Wenn aber z einen Verzweigungswerth der Functionen $\sigma_1\sigma_2\ldots$ umkreist, so dass der Zweig s_k von s in s_l übergeht, so erhält man

$$\sigma_{\lambda l} = R_1\sigma_{1l} + R_2\sigma_{2l}\cdots + R_i\sigma_{il}$$

mit den ursprünglichen Werthen der Factoren $R_1R_2\ldots R_i$. Diese algebraïschen Functionen von z sind also niemals mehrändrig, mithin sind sie rational in z. Schafft man den gemeinsamen Nenner weg, so ergibt sich eine Gleichung von der Form

$$G_1\sigma_{1k} + G_2\sigma_{2k}\cdots + G_i\sigma_{ik} + G_\lambda\sigma_{\lambda k} = 0,$$

wo G_1, $G_2\ldots$ ganze Functionen von z sind; und da dies für alle Zweige von $\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_\lambda$ gilt, so folgt

$$G_1\sigma_1 + G_2\sigma_2\cdots + G_i\sigma_i + G_\lambda\sigma_\lambda = 0,$$

was nach dem Lehrsatze (i) des art. 6 unmöglich ist. Also ist bewiesen, dass r nicht identisch Null, mithin dass die Substitution S eine umkehrbare ist.

Auf Grund dieses Satzes können wir zur Bestimmung von r übergehen. Sei

$$r_i = \frac{\partial(s_1\ldots s_{i-1}s_\mu s_{i+1}\ldots s_{\mu-1})}{\partial(y_1\ldots y_{i-1}y_iy_{i+1}\ldots y_{\mu-1})},$$

so ergibt sich, wenn man s_μ durch seinen Werth $-s_1\cdots - s_{\mu-1}$ ersetzt,

$$r = -r_i.$$

Wo s sich nicht verzweigt, sind die Elemente von r einändrig und mit ihnen r selbst. Umkreist z in unendlicher Nähe einen Punkt $z=\alpha$, für den s sich verzweigt, so ist der Endwerth von r stets dem Anfangswerthe entgegengesetzt gleich. Denn wenn dort die beiden Zweige s_1, s_2 zusammenhängen, so vertauschen sich die beiden ersten Zeilen von r, hängt s_1 mit s_μ zusammen, so vertauscht sich in $r_i = -r$ die erste mit der i^{ten} Zeile; in beiden Fällen kehren die übrigen Zeilen zu ihren Anfangswerthen zurück, da für sie $z=\alpha$ keinen Verzweigungspunkt bestimmt.

Die nämlichen Eigenschaften hat auch die $\sqrt{A}$, also ist die algebraïsche Function von z

$$P = r \cdot \sqrt{A}$$

eine einwerthige, mithin rational; ich behaupte, sie ist constant.

Wenn nämlich für $z = \alpha$ die Zweige s_1, s_2 zusammenhängen, so werden sie beide unendlich wie $\frac{1}{\sqrt{A}}$, alle übrigen bleiben stetig; der Ausdruck $-r_2 = r$ zeigt, dass auch r selbst nur wie $\frac{1}{\sqrt{A}}$ unstetig wird, also P stetig bleibt. Das nämliche ist, wie der Ausdruck r selbst zeigt, der Fall, wenn s_1 und s_μ für $z = \alpha$ zusammenhängen. Die rationale Function P von z wird also für endliche Werthe von z nie unstetig, und ist daher keine gebrochne.

Nun wird im Unendlichen die $\sqrt{A}$ unendlich zur Ordnung $p + \mu - 1$, jedes einzelne Glied von r, z. B. $\sigma_{11}\sigma_{22}\ldots\sigma_{\mu-1,\mu-1}$ unendlich klein zur Ordnung $2 + a_1 + 2 + a_2 \cdots + 2 + a_{\mu-1} = p + \mu - 1$ (art. 8), also das entsprechende Glied von P weder Null noch unendlich.

Würde nun im Unendlichen r selbst von höherer Ordnung unendlich klein wie seine einzelnen Glieder, so wäre dort $P = 0$ also wäre P und mit ihm r identisch Null. Da letzteres nicht der Fall ist, so folgt

1) dass im Unendlichen jedes einzelne Glied von r zur nämlichen Ordnung $p + \mu - 1$ unendlich klein wird wie r selbst [art. 26 (13)],

2) dass P auch dort stetig bleibt, ohne zu verschwinden, also constant und von Null verschieden ist.

Der Werth von P ist im Uebrigen verfügbar, da jeder Fundamentalintegrand $\sigma_1\sigma_2\ldots$ nur bis auf einen constanten Factor bestimmt ist; durch geeignete Wahl eines der letztern kann man bewirken, dass $P = 1$ wird, und dann folgt

$$r = \frac{\partial(s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1})}{\partial(y_1 y_2 \ldots y_{\mu-1})} = \frac{1}{\sqrt{A}},$$

mithin, wenn ρ die Determinante der Substitution S^{-1} bedeutet,

$$\rho = \frac{\partial(y_1 y_2 \ldots y_{\mu-1})}{\partial(s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1})} = \sqrt{A}.$$

14.

Die bisherigen Anwendungen der Formenalgebra in der Lehre von den algebraïschen Functionen s einer einzigen Variable z beruhen in formaler Beziehung darauf, dass s, z wie Coordinaten eines Punktes behandelt, und dem entsprechend projectivischen Transformationen unterworfen werden (*). Das Wesentliche bei diesem Verfahren besteht darin, dass durch die Form dieser Substitution implicite eine Verfügung über den Rang getroffen wird, den die Functionen s, z in der zu untersuchenden Klasse gleichverzweigter algebraïscher Functionen einnehmen. Drückt man nämlich, wie es der linearen Transformation homogener Punktcoordinaten entspricht, die neuen Variabeln $s'z'$ aus als Quotienten linearer Functionen von sz mit demselben Nenner, so ist damit gleichzeitig festgestellt, dass bis auf etwaige Grenzfälle s' und z' Functionen von derselben Ordnung μ und derselben Gattung, also entweder beide von der I. oder beide von der II. Gattung sein sollen.

Substitutionen dieser Art sind bei unserer Untersuchung ausgeschlossen, da über s vollständig, über z im Wesentlichen verfügt ist. Eine Substitution I. Grades für z allein hat dagegen für unsern Fall gar keine Bedeutung mehr, da sie an den charakteristischen Zahlen λ, ρ der Function z nichts ändert (Ende von art. 3) und auch nichts an der canonischen Form für $dw = s dr$.

Geht nämlich $dw = \Sigma y_i \sigma_i dz$, wo y_i ganze Function von z und vom Grade a_i ist, durch die Substitution $z = \alpha + \frac{\beta}{z'}$ über in $dw = \Sigma y'_i \sigma'_i dz'$, wo y'_i ganze Function von z' und ebenfalls vom Grade a_i ist, so ist

$$\sigma'_i = \frac{\sigma_i}{z'^{a_i+2}} = \left(\frac{z-\alpha}{\beta}\right)^{a_i+2} \sigma_i,$$

also ist σ'_i stetig für $z' = 0$, nämlich $z = \infty$, dagegen $\sigma'_i = 0^{2+a_i}$ für $z' = \infty$, $z = \alpha$. Also ist σ'_i Fundamentalintegrand von der Ordnung a_i, ebenso wie σ_i, nur dass jener sich auf z', dieser sich auf z als Variable bezieht.

An die Stelle aller Substitutionen solcher Art tritt bei unserm Problem die lineare und umkehrbare Substitution S^{-1} von der Determinante $\rho = \sqrt{A}$, durch

(*) Den Riemannschen Voraussetzungen entspricht in der analogen Auffassung eine Substitution I. Grades für s und eine andere für z. Diese Art der Transformation ist meines Wissens bisher nicht weiter verfolgt worden.

welche statt der $\mu-1$ Variabeln $y_1 y_2 \ldots y_{\mu-1}$ ebensoviel neue, $s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1}$ eingeführt werden, und in deren Coefficienten z als Parameter der Substitution eingeht.

Durch diese Substitution werden die Grundformen

$$A_2 \qquad A_3 \ldots \qquad A_\mu \tag{A}$$

gleichzeitig in die vorgeschriebenen canonischen Formen

$$A'_2 \qquad A'_3 \ldots \qquad A'_\mu \tag{A'}$$

transformirt. Ist also I irgend eine Invariante oder Covariante des Formensystems (A) und λ der Exponent zu dem sie gehört, also in bekannter Bezeichnung

$$I' = \rho^\lambda I,$$

so folgt

$$I = A^{-\frac{\lambda}{2}} I';$$

also haben wir auch für jede Invariante und jede Covariante I des Formensystems (A) vermöge der vorstehenden Gleichung eine vorgeschriebene canonische Form.

Mit Hülfe dieser canonischen Formen ergeben sich dann weiter Relationen zwischen den Grundformen (A) und ihren Invarianten und Covarianten: soweit diese Relationen nicht für jedes Formensystem (A) gelten, gehören sie zu den nothwendigen Bedingungen unserer Aufgabe.

Ich will dies an einigen Beispielen erläutern. Sind p, q Functionen von $\mu-1$ Variabeln $t_1 t_2 \ldots t_{\mu-1}$, so will ich zur Abkürzung die Hessesche Covariante

$$\left[\frac{\partial^2 p}{\partial t_i \partial t_k}\right] = H_t(p)$$

und die im Parameter ε lineare Determinante

$$\left[\frac{\partial^2 p}{\partial t_i \partial t_k} - \varepsilon \frac{\partial q}{\partial t_i}\frac{\partial q}{\partial t_k}\right] = H_t(p) + \varepsilon H_t(p \mid q)$$

setzen, so dass

$$H_t(p \mid q) = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial q}{\partial t_1} & \frac{\partial q}{\partial t_2} \cdots \\ \frac{\partial q}{\partial t_1} & \frac{\partial^2 p}{\partial t_1^2} & \frac{\partial^2 p}{\partial t_1 \partial t_2} \cdots \\ \frac{\partial q}{\partial t_2} & \frac{\partial^2 p}{\partial t_1 \partial t_2} & \frac{\partial^2 p}{\partial t_2^2} \cdots \\ \cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot\,\cdot \end{vmatrix}$$

ist. Sind nun u, v Functionen von $s_1 s_2 \dots s_{\mu-1}$ und insofern auch von $y_1 y_2 \dots y_{\mu-1}$, so sind $H_y(u)$ und $H_y(u \mid v)$ Covarianten die zum Exponenten 2 gehören, also ist

$$H_y(u) = \frac{1}{A} H_s(u), \qquad H_y(u \mid v) = \frac{1}{A} H_s(u \mid v).$$

Wenn aber u, v zunächst als Functionen von $s_1 s_2 \dots s_{\mu-1}$ und s_μ gegeben sind, und man s_μ nicht eliminiren will, so kann man diese Gleichungen in die folgende Form bringen

$$H_y(u) = -\frac{1}{A} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \dots & 1 \\ 1 & u_{11} & u_{12} \dots & u_{1\mu} \\ 1 & u_{21} & u_{22} \dots & u_{2\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & u_{\mu 1} & u_{\mu 2} \dots & u_{\mu\mu} \end{vmatrix}$$

$$H_y(u \mid v) = -\frac{1}{A} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \dots & 1 \\ 0 & 0 & v_1 \dots & v_\mu \\ 1 & v_1 & u_{11} \dots & u_{1\mu} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & v_\mu & u_{\mu 1} \dots & u_{\mu\mu} \end{vmatrix}$$

wo

$$u_{ik} = \frac{\partial^2 u}{\partial s_i \partial s_k}, \qquad v_i = \frac{\partial v}{\partial s_i}$$

zu setzen ist. Hieraus ergeben sich zahlreiche Formeln der beschriebenen Art, wenn man für u und v Potenzsummen $s_1^k + s_2^k + \cdots$ oder lineare Verbindungen solcher nimmt; ich hebe nur die folgenden drei hervor, welche darauf beruhen, dass in allen Fällen

$$A_2 = -\tfrac{1}{2} A (s_1^2 + s_2^2 \cdots + s^2_\mu)$$
$$A_3 = -\tfrac{1}{3} A (s_1^3 + s_2^3 \cdots + s^3_\mu)$$

ist. Man findet

$$H_y(A_2) \qquad = (-1)^{\mu-1} \mu A^{\mu-2} \tag{1}$$

$$H_y(A_3 - 2\lambda A_2) = 2^{\mu-1} A^{\mu-3} \frac{\partial}{\partial \lambda} [A\lambda^\mu + A_2 \lambda^{\mu-2} + A_3 \lambda^{\mu-3} \cdots + A_{\mu-1}\lambda] \tag{2}$$

$$H_y(A_3 \mid A_2) \qquad = 2^{\mu-2} \mu^2 A^{\mu-2} A_\mu; \tag{3}$$

diese Formeln zeigen, dass in der Gleichung

$$A s^{\mu} + A_2 s^{\mu-2} \cdots + A_{\mu} = 0$$

alle Coefficienten als bekannt gelten können, sobald A_2 und A_3 gefunden sind.

Ausserdem zeigt die Gleichung (1) dass die Discriminante $H_y(A_2)$ der quadratischen Form A_2 in jedem Verzweigungspunkte verschwindet. Aber in einem solchen Punkte wird $s\sqrt{A} = \sqrt{-A_2}$, und dies muss in $x_1 x_2 \ldots x_p$ linear sein; so oft $A = 0$ wird, muss also A_2 sich auf ein reines Quadrat reduciren, mithin nicht bloss seine Discriminante, sondern sogar jede zweizeilige Unterdeterminante derselben verschwinden.

Die Aufklärung über diese merkwürdigen Beziehungen zwischen A und der quadratischen Form A_2 wird sich im VII. Abschnitte ergeben.

15.

Auf dem Wege der Formenbildung erhält man hiernach offenbar eine Schaar von Eigenschaften, welche die Grundformen (A) nothwendig besitzen müssen, wenn sie die von uns gestellte Aufgabe lösen sollen, aber man kann auf diesem Wege nicht zur Kenntniss der für diese Aufgabe ausreichenden Bedingungen gelangen.

Wir nehmen daher unsere ursprüngliche Untersuchung wieder auf, und wenden uns zur wirklichen Darstellung der rationalen Function

$$\Delta = A^{\frac{2\mu-3}{2}} \Pi(s_1 s_2 \ldots s_{\mu}). \tag{1}$$

Dieselbe gründet sich auf den Ausdruck von Δ als Functionaldeterminante. Sei

$$f(t) = A(t-s_1)(t-s_2)\cdots(t-s_{\mu}) = A t^{\mu} + A_2 t^{\mu-2} \cdots + A_{\mu};$$

werden $s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1}$ also auch $s_{\mu} = -s_1 \cdots - s_{\mu-1}$ als Functionen von $A_2 \ldots A_{\mu}$ betrachtet, so folgt, indem man nach A_{ρ} differentiirt, für $\rho = 2, 3, \ldots \mu$

$$f(t) \sum_{i=1}^{\mu-1} \left(\frac{1}{t-s_{\mu}} - \frac{1}{t-s_i} \right) \frac{\partial s_i}{\partial A_{\rho}} = t^{\mu-\rho}$$

also ist

$$-f'(s_i) \frac{\partial s_i}{\partial A_{\rho}} = s_i^{\mu-\rho}.$$

Nun ist

$$(-1)^{\mu-1} f'(s_1) f'(s_2) \ldots f'(s_{\mu-1}) = A^{\mu-1} \Pi(s_{\mu-1} \ldots s_1) \Pi(s_1 \ldots s_{\mu})$$

also folgt:

$$A^{\mu-1}\Pi(s_{\mu-1}\dots s_1)\Pi(s_1\dots s_\mu)\frac{\partial(s_1 s_2\dots s_{\mu-1})}{\partial(A_2 A_3\dots A_\mu)}=\begin{vmatrix} s_1^{\mu-2} & s_1^{\mu-3}\dots & 1 \\ \dots & \dots\dots & \dots \\ s_{\mu-1}^{\mu-2} & s_{\mu-1}^{\mu-3}\dots & 1 \end{vmatrix}$$

mithin, da der Ausdruck zur Rechten $=\Pi(s_{\mu-1}\dots s_1)$ ist,

$$A^{\mu-1}\Pi(s_1\dots s_\mu)\frac{\partial(s_1\dots s_{\mu-1})}{\partial(A_2\dots A_\mu)}=1.$$

Also ist auch

$$\frac{\partial(A_2 A_3\dots A_\mu)}{\partial(s_1 s_2\dots s_{\mu-1})}=A^{\mu-1}\Pi(s_1 s_2\dots s_\mu), \tag{2}$$

mithin

$$\Delta=\frac{1}{\sqrt{A}}\frac{\partial(A_2\dots A_\mu)}{\partial(s_1\dots s_{\mu-1})},$$

d. i.

$$\Delta=\frac{\partial(A_2\dots A_\mu)}{\partial(s_1\dots s_{\mu-1})}\cdot\frac{\partial(s_1\dots s_{\mu-1})}{\partial(y_1\dots y_{\mu-1})}=\frac{\partial(A_2\dots A_\mu)}{\partial(y_1\dots y_{\mu-1})}.$$

Wir setzen von hieran den rationalen Ausdruck

$$\frac{\partial(A_2 A_3\dots A_\mu)}{\partial(y_1 y_2\dots y_{\mu-1})}=\mathfrak{A}, \tag{3}$$

dann haben wir

$$\Delta=\mathfrak{A}, \tag{4}$$

womit von Neuem und durch wirkliche Darstellung dargethan ist, was wir schon im art. 11 auf anderm Wege bewiesen hatten, dass Δ rationale ganze Function von z ist. Wird ferner, wie in art. 11 (II.) die $(2\mu-3)$-zeilige Determinante

$$\begin{vmatrix} 2A_2 & 3A_3 & 4A_4\dots \\ \mu A & . & (\mu-2)A_2\dots \\ . & 2A_2 & 3A_3\dots \\ \dots & \dots & \dots\dots \end{vmatrix}=h\vartheta \tag{5}$$

gesetzt, so fanden wir $\vartheta=\Delta^2$, ferner $D=\mu hA\Delta^2$ als Discriminante der Gleichung

$$As^\mu+A_2 s^{\mu-2}\dots+A_\mu=0,$$

also haben wir jetzt

$$\vartheta=\mathfrak{A}^2 \tag{6}$$

$$D=\mu hA\mathfrak{A}^2, \tag{7}$$

womit die in art. 8 angekündigte Zerfällung der Discriminante in die Form WR^2 und, für jeden Fall wo die Bestimmung der Functionen $A_2 \dots A_\mu$ gelingt, für die Function s das Problem ihrer Verzweigungs-und Doppelpunkte z erledigt ist. Die Anzahl der letztern, oder der Grad von $\mathfrak{A}$ in z ist, wie bereits in art. 11 angegeben wurde, $p(2\mu-3)+(\mu-1)(\mu-3)$.

Es verdient bemerkt zu werden, dass aus (3) und (6) auch noch die $\mu-1$ Relationen

$$\frac{\partial(\mathfrak{A} A_3 A_4 \dots A_\mu)}{\partial(y_1 y_2 y_3 \dots y_{\mu-1})} = \frac{1}{2}\frac{\partial \vartheta}{\partial A_2}$$

$$\frac{\partial(A_2 \mathfrak{A} A_4 \dots A_\mu)}{\partial(y_1 y_2 y_3 \dots y_{\mu-1})} = \frac{1}{2}\frac{\partial \vartheta}{\partial A_3}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial(A_2 A_3 A_4 \dots \mathfrak{A})}{\partial(y_1 y_2 y_3 \dots y_{\mu-1})} = \frac{1}{2}\frac{\partial \vartheta}{\partial A_\mu}$$

folgen, welche ihrerseits wieder die Gleichung (6) nach sich ziehen. Ich übergehe die Herleitung dieser Formeln, da im Folgenden von ihnen kein Gebrauch gemacht wird.

V. Die nothwendigen und ausreichenden Bedingungen des Problems.

16.

Nachdem somit die Discriminante D in die Form WR^2 gebracht ist, können wir die Untersuchung umkehren, um unter den nothwendigen Bedingungen unserer Aufgabe die ausreichenden nachzuweisen. Sei

$$A$$

ganze Function von z vom Grade $2(p+\mu-1)$ mit ausschliesslich einfachen Linearfactoren, ferner für $i=2, 3, \dots \mu$

$$A_i = \Sigma A^{(i)}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{\mu-1}} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \dots y_{\mu-1}^{\alpha_{\mu-1}} \quad (\alpha_1 + \alpha_2 \dots + \alpha_{\mu-1} = i)$$

wo 1) $A^{(i)}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots}$ ganze Function von z vom Grade (art. 9)

$$2(p+\mu-i-1)-(a_1\alpha_1+a_2\alpha_2\dots)$$

ist, sodann 2) $y_1 y_2 \dots y_{\mu-1}$ ganze Functionen von z und von den Graden

$$a_1 \qquad a_2 \dots \qquad a_{\mu-1}$$

und 3) diese letztern so gewählt sind, dass

$$a_1 + a_2 \cdots + a_{\mu-1} + \mu - 1 = p$$

ist. Die Coefficienten $x_1 x_2 \ldots x_p$ dieser ganzen Functionen sind willkürliche Constanten und ihre Anzahl ist $= p$.

Es wird vorausgesetzt, dass die Factoren

$$A^{(i)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots},$$

also, bei unbeschränkten Werthen der Parameter $x_1 x_2 \ldots x_p$, die ganzen Functionen $A_2 A_3 \ldots A_p$ auf die allgemeinste Weise so bestimmt sind, dass

4) A_2 keinen Linearfactor $z - \alpha$ mit A gemein hat und

5) identisch

$$\vartheta = \mathfrak{A}^2$$

wird, oder genauer gesprochen, andere Bedingungen als in diesen Gradbestimmungen und den beiden vorstehenden allein enthalten sind, bleiben ausgeschlossen.

Wir stellen uns die Aufgabe, unter diesen Bedingungen die Eigenschaften von s als Function von $z x_1 x_2 \ldots x_p$ zu untersuchen, wenn s die Wurzel der Gleichung

$$A s^{\mu} + A_2 s^{\mu-2} \cdots + A_{\mu} = 0 \qquad (s)$$

ist.

Bei dieser Untersuchung sind zwei Abtheilungen zu unterscheiden. Die erste (art. 17, 18, 19) enthält den Beweis des Satzes, dass in Folge obiger Bedingungen s Integrand I. G. und lineare homogene Function von $y_1 y_2 \ldots$ ist. Bei diesem Beweise kommt die Bedingungsgleichung $\vartheta = \mathfrak{A}^2$ nur insofern in Betracht, als sie fordert, dass ϑ ein reines Quadrat sein soll, aber der Ausdruck von $\mathfrak{A}$ wird bei diesem Beweise nicht benutzt. Dies hat zur Folge dass, wie wir im art. 22 zeigen werden, dieser Theil unserer Untersuchung auch die Ausnahmefälle mit umfasst, wo die Anzahl der Argumente $y_1 y_2 \ldots$ kleiner als $\mu - 1$ ist.

Der zweite Theil unserer Untersuchung (art. 20, 21) vervollständigt die Resultate des ersten für den Hauptfall, wo

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial (A_2 A_3 \ldots A_{\mu})}{\partial (y_1 y_2 \ldots y_{\mu-1})}$$

ist, und wird zeigen dass die vorstehenden Bedingungen, die aus dem vorigen Abschnitte als nothwendige bekannt sind, auch ausreichen, damit s ein vollständiger Integrand I. G. in canonischer Form und gleichzeitig z eine Function von der besondern Beschaffenheit wird, welche in den vorangehenden Abschnitten vorausgesetzt wurde.

17.

Unsere Untersuchung gründet sich in erster Linie auf die Bedeutung der Werthe von z, für welche die Discriminante $D = \mu h A \mathfrak{A}^2$ verschwindet, und welche in zwei Gruppen zerfallen, die Wurzeln der Gleichungen $A = 0$ und $\mathfrak{A} = 0$.

In dieser Beziehung ist es nothwendig festzuhalten, was durch die Untersuchungen der Abschnitte III., IV. bewiesen ist, dass mit unsern gegenwärtigen Bedingungen der dort behandelte Fall verträglich ist, wo s μ-werthiger Integrand I. G. ist und nur einfache und getrennte Singularitäten besitzt, die alle im Endlichen stattfinden.

Es kann also aus diesen Bedingungen allein nichts folgen, wodurch dieser Fall ausgeschlossen wird; aber dies fände statt, 1) wenn allein in Folge der jetzt geltenden Bedingungen $\mathfrak{A}$ mehrfache Factoren $z - \alpha$ oder Factoren mit A gemein hätte, 2) wenn diese Bedingungen zur Folge hätten, dass die Gleichung (s) nicht irreductibel ist.

Die gegenwärtig zu untersuchende Gleichung

$$A s^{\mu} + A_2 s^{\mu-2} \cdots + A_{\mu} = 0 \qquad (s)$$

besitzt hiernach die wesentliche Eigenschaft dass, so oft Wurzeln s zusammenfallen, nur eine mehrfache Wurzel stattfindet, und dies jedesmal eine Doppelwurzel ist. Findet dies für $z = \alpha$ statt, so hat die Discriminante D den Wurzelfactor $z - \alpha$ ein oder zweimal, jenachdem der Doppelwurzel ein Verzweigungs-oder ein Doppelpunkt entspricht.

Zur irreductiblen Gleichung (s) gehört eine μ-blättrige, zusammenhängende Fläche T, welche die Werthe von z der Verzweigungsart von s gemäss repräsentirt; dieselbe hat nur einfache Verzweigungspunkte, und in ihnen ist $A = 0$. In dieser Fläche hat die Function s Doppelpunkte; die Werthe von z, für welche ein solcher stattfindet, sind die Wurzeln der Gleichung $\mathfrak{A} = 0$.

Die Anzahl der einfachen Verzweigungspunkte dieser Fläche T ist $2(p + \mu - 1)$, die Anzahl ihrer Doppellinien $p + \mu - 1$; also ist sie eine $(2p + 1)$ fach zusammenhängende Fläche, und zu ihr gehört eine Klasse algebraïscher gleichverzweigter Functionen von z nebst p linearunabhängigen Integralen I. G.

Vermöge der im art. 16 wiederholten Gradbestimmungen wird im Unendlichen auf jedem Blatte s unendlich klein zur zweiten Ordnung, das $\int s dz$ also nicht unstetig. Im Endlichen kann ein Zweig von s unendlich werden nur für $A=0$; aber dann sinkt der Grad der Gleichung (s) nur um zwei Einheiten, da A_2 nie mit A zugleich verschwindet, also werden dann jedesmal zwei Wurzeln unendlich, die übrigen bleiben stetig. Für jene erhält man $As^2+A_2=0$, also sind es die beiden Zweige von s, die in dem entsprechenden Verzweigungspunkte zusammenhängen, und diese werden unendlich wie $\frac{1}{\sqrt{A}}$; das $\int s dz$ wird also auch dort nicht unstetig.

Da das $\int s dz$ hiernach überhaupt nie unstetig wird, so ist es ein Integral I. G., mithin ist s Integrand I. G., wie auch immer die Parameter $x_1 x_2 \ldots x_p$ angenommen werden mögen.

18.

Dies reicht zum Beweise des von uns (art. 16) ausgesprochenen Satzes keineswegs aus, vielmehr muss s nun auch als Function von $x_1 x_2 \ldots x_p$ untersucht werden. Die Gleichung (s) zeigt, dass s algebraïsche Function von $x_1 x_2 \ldots x_p$ und in ihnen homogen vom ersten Grade ist. Ausserdem geht aus dieser Gleichung hervor, dass s, als Function eines dieser Parameter betrachtet, nur im Unendlichen unstetigwird.

W ä r e n u n b e w i e s e n, d a s s s r a t i o n a l e F u n c t i o n d i e s e r P a r a m e t e r i s t, so würde aus dem letztern Umstande folgen, dass es nur eine ganze Function derselben sei kann, und dann aus der vorangehenden Bemerkung, dass es in den Parametern linear und homogen ist.

Ist unter dieser Voraussetzung s^0 der lineare Ausdruck, in den s übergeht, wenn $y_1 y_2 \ldots$ auf ihre von z unabhängigen Anfangsglieder reducirt, und alle übrigen Parameter $x=0$ gesetzt werden, (s^0) die ebenso modificirte Gleichung (s), so erhält man aus (s^0) die Gleichung (s), also aus s^0 die Wurzel s wieder, wenn jene Anfangsglieder wieder zu $y_1 y_2 \ldots$ ergänzt werden.

Daraus geht hervor, dass wir nur noch beweisen dürfen, s ist rationale Function seiner Parameter, um bewiesen zu haben, dass es in $y_1 y_2 \ldots$ linear und homogen ist.

19.

Wir betrachten also s als Function von x_1 mit den Parametern $z x_2 \ldots x_p$, und untersuchen unter dieser Voraussetzung seine Verzweigungs-und Doppelpunkte, und zwar nur um zu beweisen, dass erstere nicht existiren. Nach einigen Erläuterungen wird dieser Beweis durch Anwendung sehr bekannter-wohl auf Herrn Puiseux zurückzuführender-Schlüsse gelingen.

Die Werthe von x_1, für welche die in Rede stehenden Singularitäten stattfinden können, ergeben sich aus dem Verschwinden der Discriminante also, da der Factor A derselben von x_1 unabhängig ist, aus der Gleichung

$$\mathfrak{A} = 0;$$

die verschiedenen Zweige von s sind wie früher $s_1 s_2 \ldots s_\mu$.

Es ist nothwendig, die Verhältnisse, auf welche hier die Aufmerksamkeit zu richten ist, klar aufzufassen. Wird s als Function von z untersucht, so sind zwar die Verzweigungswerthe z unabhängig von $x_1 x_2 \ldots x_p$, aber die Doppelpunkte sind es nicht. Soll in diesem Falle z einen Punkt dieser Art umkreisen, so begreift es sich von selbst, dass während dessen die Parameter $x_1 x_2 \ldots x_p$ ungeändert bleiben müssen, weil sonst auch der zu umkreisende Punkt variirt. Die analoge Bedingung muss auch in unserm Falle aufrecht erhalten bleiben, und es ist nothwendig, dieselbe völlig sicher zu stellen. Spricht man, wenn s als Function von z untersucht wird, von einem bestimmten Doppelpunkte, so ist nicht bloss von einem Werthepaar s, $z = \gamma$, δ die Rede, sondern es ist gemeint, dass den Parametern $x_1 \ldots x_p$ ein festes Werthesystem $x_1^0 \ldots x_p^0$ zugewiesen ist, für welches jenes Werthepaar stattfindet. Sei für dieses bestimmte Werthesystem

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0, \ldots \qquad x_p = x_p^0$$

der Werth

$$z = z^0$$

eine Lösung der Gleichung $\mathfrak{A} = 0$; dann ist bewiesen, dass dem Werthesystem

$$z = z^0 \qquad x_1 = x_1^0 \qquad x_2 = x_2^0 \ldots \qquad x_p = x_p^0$$

ein Doppelpunkt von s als F u n c t i o n v o n z entspricht; seien

$$s_1 = c \qquad s_2 = c \qquad s_3 = c_3 \ldots \qquad s_\mu = c_\mu \tag{1}$$

die zugehörigen Wurzeln der Gleichung (s), also $s_1 = s_2$, aber

$$\frac{\partial s_1}{\partial z} = c'_1, \qquad \frac{\partial s_2}{\partial z} = c'_2, \tag{2}$$

also c'_2 von c'_1 verschieden.

Wenn nunmehr s als Function von x_1 untersucht werden soll, so müssen $z x_2 \dots x_p$ als unveränderliche Parameter betrachtet werden; wir wollen s als Function von x_1 für

$$z = z^0 \qquad x_2 = x_2^0 \dots \qquad x_p = x^0_p$$

untersuchen. Dann ist

$$x_1 = x_1^0$$

eine Lösung der Gleichung $\mathfrak{A} = 0$, und es ist die Frage ob, wenn x_1 diesen Punkt in unendlicher Nähe einmal umkreist, die Endwerthe $s'_1 s'_2$ der beiden für $x_1 = x_1^0$ zusammenfallenden Zweige von s den Anfangswerthen $s_1 s_2$ beziehungsweise gleich sind oder nicht; im letzten Falle würde für $x_1 = x_1^0$ eine Verzweigung zwischen $s_1 s_2$ stattfinden.

Als Function von x_1 wird kein Zweig von s unstetig ausser für $x_1 = \infty$. Wenn daher x_1 im Endlichen einen unendlich kleinen Weg zurücklegt, so ist die entsprechende Aenderung jedes Zweiges von s eine ebenfalls nur unendlich kleine. Umkreist also x_1 den Punkt x_1^0 in unendlicher Nähe, so bleiben $s_1 s_2$ nur unendlich wenig verschieden von c, ebenso $\frac{\partial s_1}{\partial z}$ von c'_1 und $\frac{\partial s_2}{\partial z}$ von c'_2, da diese Derivirten dort ebenfalls stetig sind. Also ist es sicher, dass nur einer der beiden folgenden Fälle stattfinden kann:

1) Entweder ist $s'_1 - s_1$ zwar unendlichklein, aber nicht Null, und dann ist $s'_1 - s_2 = 0$, $s'_2 - s_1 = 0$, oder es ist;

2) $s'_1 - s_2$ nicht Null, und dann ist $s'_1 - s_1 = 0$, $s'_2 - s_2 = 0$.

Im ersten Falle ist $x_1 = x_1^0$ Verzweigungspunkt zwischen $s_1 s_2$, im andern Falle findet ein Doppelpunkt statt. Aber im ersten Falle wäre auch

$$\frac{\partial s'_1}{\partial z} - \frac{\partial s_2}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial s'_2}{\partial z} - \frac{\partial s_1}{\partial z} = 0,$$

d. h. $c'_1 - c'_2$ Null oder unendlich klein. Dies ist unmöglich wegen der Eigenschaften von s als Function von z, also findet der zweite Fall nothwendig statt, und es ist bewiesen, dass s als Function von x_1 nur Doppelpunkte, keine Verzweigungspunkte hat.

Folglich ist jeder Zweig von s eine algebraische, in keinem Punkte mehrändrige, also eine rationale Function von x_1. Und da dies für jeden der p Parameter $x_1 x_2 \dots x_p$ gilt, so treten die Schlüsse des art. 18 in Kraft, und es ist bewiesen, dass s lineare homogene Function von $x_1 x_2 \dots x_p$, endlich dass es in $y_1 y_2 \dots$ linear und homogen ist.

20.

Wir untersuchen nun weiter, welche Folgerungen sich daran knüpfen, dass der Ausdruck von $\mathfrak{A}$ vorgeschrieben,

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial(A_2 A_3 \dots A_\mu)}{\partial(y_1 y_2 \dots y_{\mu-1})}$$

ist. Die Discriminante der Gleichung (s) ist auf jeden Fall $D = \mu h A \vartheta$, also $= \mu h A \mathfrak{A}^2$, folglich ist $\Delta = \mathfrak{A}$. Aber es ist identisch [art. 15 (2)]

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{A}} \frac{\partial(A_2 A_3 \dots A_\mu)}{\partial(s_1 s_2 \dots s_{\mu-1})}.$$

also folgt

$$\frac{\partial(A_2 A_3 \dots A_\mu)}{\partial(y_1 y_2 \dots y_{\mu-1})} = \frac{\partial(A_2 A_3 \dots A_\mu)}{\partial(s_1 s_2 \dots s_{\mu-1})} \cdot \frac{1}{\sqrt{A}},$$

mithin ist, als nothwendige Folge aus den Bedingungen des art. 16

$$\frac{\partial(s_1 s_2 \dots s_{\mu-1})}{\partial(y_1 y_2 \dots y_{\mu-1})} = \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

21.

Unter den vollständigen Voraussetzungen des art. 16 hat die Wurzel der Gleichung

$$A s^\mu + A_2 s^{\mu-2} \dots + A_\mu = 0 \qquad (s)$$

nothwendig die Form

$$s = y_1 \sigma_1 + y_2 \sigma_2 \dots + y_{\mu-1} \sigma_{\mu-1},$$

wo $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{\mu-1}$ Integranden I. G. von den Ordnungen $a_1 a_2 \dots a_{\mu-1}$ sind. Ordnet man s nach $x_1 x_2 \dots x_p$, so sind also die p Factoren derselben Integranden I.

G., aber s ist nur dann ein vollständiger Integrand I. G., wenn diese p Factoren linearunabhängig sind. Dies ist wirklich der Fall; der Beweis beruht auf dem allgemeinern Satze,

> dass es unmöglich ist, ganze Functionen $G_1 G_2 \ldots G_{\mu-1}$ von z so zu bestimmen, dass die μ Zweige des Ausdruckes
> $$G_1\sigma_1 + G_2\sigma_2 \cdots + G_{\mu-1}\sigma_{\mu-1}$$
> identisch verschwinden.

Setzt man nämlich die $\mu-1$ ersten Zweige dieses Ausdruckes $=0$, so hat man zur Bestimmung der (einwerthigen) Factoren $G_1 G_2 \ldots G_{\mu-1}$ Gleichungen, deren Determinante nach art. 20

$$\frac{\partial(s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1})}{\partial(y_1 y_2 \ldots y_{\mu-1})} = \frac{1}{\sqrt{A}},$$

also nicht Null ist; den geforderten Bedingungen kann man also nur genügen, wenn man G_1, $G_2, \ldots$ $G_{\mu-1}$ für jedes z, also identisch $=0$ setzt.

Also kann man insbesondere einen Ausdruck von der Form $y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2 + \cdots$ nur dadurch identisch $=0$ machen, dass man $x_1 = 0$, $x_2 = 0, \ldots$ $x_p = 0$ setzt, d. h. die Factoren von $x_1 x_2 \ldots x_p$ im Ausdrucke von s sind linearunabhängig, und s ist ein vollständiger Integrand I. G.

Die Gleichung (s) bestimmt eine Klasse algebraischer gleichverzweigter Functionen, und wir sind nun auch im Stande, den Rang nachzuweisen, den z in dieser Klasse einnimmt, was zur vollständigen Umkehrung der in den Abschnitten II. III. IV. durchgeführten Untersuchungen nothwendig ist.

Sind 1) die Zahlen $a_1 a_2 \ldots a_{\mu-1}$ alle oder doch zum Theil von Null verschieden, und ist $a_1 = k$ die grösste unter ihnen, so sind $y_1\sigma_1$ und σ_1 Integranden I. G., also ist ihr Quotient y_1 und insbesondere z^k Function I. G.; ich behaupte, dass z^{k+1} Function II. G. ist.

Ist z^m Function I. G., so gibt es einen Integranden σ von der Ordnung m, und es ist auch $z^m\sigma$ Integrand I. G. Beide sind in der Form s darstellbar, weil s ein vollständiger Integrand I. G. ist. Sei also $\sigma = y'_1\sigma_1 + y'_2\sigma_2 + \cdots$, $z^m\sigma = y''_1\sigma_1 + y''_2\sigma_2 + \cdots$, so sind weder alle Factoren y' noch alle Factoren y'' identisch Null, und ihre Grade in z sind der Reihe nach höchstens $a_1 a_2 \ldots$ Aber nun folgt identisch $(z^m y'_1 - y''_1)\sigma_1 + (z^m y'_2 - y''_2)\sigma_2 + \cdots = 0$, also müssen hier die Coefficienten $z^m y'_1 - y''_1$, $z^m y'_2 - y''_2, \ldots$ alle identisch Null sein, während weder alle y' noch alle y'' es sind. Ist nun y''_1 nicht identisch Null, so kann auch y'_1 es nicht sein, also ist y''_1 durch z^m theilbar. Dies ist kein Widerspruch für $m \overline{<} k$, aber wohl einer für $m > k$; also ist es unmöglich dass z^{k+1} Function I. G. sei, w. z. b. w.

Sind 2) die Zahlen $a_1 a_2 \dots a_{\mu-1}$ alle $=0$, was $\mu - 1 = p$, $\mu = p + 1$ gibt, so folgt aus dem nämlichen Beweise, dass keine Potenz von z Function I. G. sein kann, dass also schon z selbst Function II. G., aber von der niedrigsten Ordnung ist.

Und so haben wir den folgenden Satz in allen seinen Theilen bewiesen:

Die im art. 16 zusammengestellten Bedingungen sind nothwendig und hinreichend, damit die Wurzel s der Gleichung

$$A s^{\mu} + A_2 s^{\mu-2} \cdots + A_{\mu} = 0$$

ein vollständiger Intgrand I. G. und von der canonischen Form

$$s = y_1 \sigma_1 + y_2 \sigma_2 \cdots + y_{\mu-1} \sigma_{\mu-1}$$

wird. Sind die Grade $a_1 a_2 \dots a_{\mu-1}$ von $y_1 y_2 \dots y_{\mu-1}$ alle gleich Null, so ist in der, durch diese Gleichung bestimmten Klasse gleichverzweigter algebraïscher Functionen, z eine Function II. G. von der niedrigsten Ordnung $\mu = p + 1$; sind die Grade $a_1 a_2 \dots a_{\mu-1}$ nicht alle $=0$, und ist dann k der grösste unter ihnen, so sind $z z^2 \dots z^k$ Functionen I. G., aber z^{k+1} ist Function II. G. Also ist in diesem Fall für die Function z selbst der Ueberschuss $\rho = 1$, der Defect $\lambda = p - \mu$.

22.

Wir sind nun auch im Stande, die bisher ausgeschlossenen Fälle zu erledigen, wo entweder z Function II. G., aber nicht von der niedrigsten Ordnung $p+1$, sondern einer Ordnung $\mu = p + \rho$, $\rho > 1$, oder eine Function I. G. von der Ordnung μ und einem Ueberschuss $\rho > 1$ ist. Drückt man den vollständigen Integranden I. G. durch Fundamentalintegranden aus, so erhält man in beiden Fällen

$$s = y_1 \sigma_1 + y_2 \sigma_2 \cdots + y_{\mu-\rho} \sigma_{\mu-\rho}, \tag{1}$$

wo im ersten Falle $\mu - \rho = p$ ist und $y_1 y_2 \dots y_{\mu-\rho}$ mit $x_1 x_2 \dots x_p$ übereinstimmen, während im zweiten Falle (vergl. art. 6 VIII.) einige der Factoren $y_1 y_2 \dots y_{\mu-\rho}$ von z abhängen; in beiden Fällen ist die Gliederzahl $\mu - \rho < \mu - 1$.

Für s ergibt sich wieder eine Gleichung μ^{ten} Grades

$$A s^{\mu} + A_2 s^{\mu-2} \cdots + A_{\mu} = 0, \tag{2}$$

in welcher allgemein A_i in den y homogen vom Grade i ist; der Factor A ist in z vom Grade $2(p+\mu-1)$; ist, nach den y geordnet,

$$A_i = \Sigma A^{(i)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_{\mu-\rho}} y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \ldots y_{\mu-\rho}^{\alpha_{\mu-\rho}} (\alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_{\mu-\rho} = i),$$

und sind $a_1 a_2 \ldots a_{\mu-\rho}$ die Grade von $y_1 y_2 \ldots y_{\mu-\rho}$ in z, so folgt für den Grad der Coefficienten

$$\partial A^{(i)}_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots} = 2(p+\mu-i-1) - (a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 \ldots).$$

Auch hier folgt, wie in art. 11 der Satz, dass

$$\Delta = A^{\frac{2\mu-3}{2}} \Pi(s_1 s_2 \ldots s_{\mu})$$

rationale ganze Function von z, also, wenn man diese wiederum durch

$$\mathfrak{A}$$

bezeichnet, die Discriminante der Gleichung (1)

$$D = \mu h A \mathfrak{A}^2$$

ist: nur ergibt sich für $\mathfrak{A}$ nicht der frühere Ausdruck als Determinante der $\mu-1$ Functionen $A_2 \ldots A_{\mu}$ nach den Variabeln $y_1 y_2 \ldots$, da die Anzahl der letztern $< \mu-1$ ist; ausserdem können $A'_2 \ldots A'_{\mu}$ (art. 12) nicht mehr als canonische Formen von $A_2 \ldots A_{\mu}$ gelten, da sie mehr Argumente $s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1}$ enthalten als diese. Dass zwischen den Argumenten $s_1 s_2 \ldots s_{\mu-1}$, wenn man sie durch $y_1 y_2 \ldots y_{\mu-\rho}$ ausdrückt und dann letztere eliminirt, lineare Relationen eintreten, durch welche ihre Anzahl auf $\mu-\rho$ reducirt wird, nützt nichts, so lange die Coefficienten dieser Relationen sich der Untersuchung entziehen.

Kehrt man nun die Untersuchung um, indem man ausser den obigen Gradbestimmungen nur noch fordert, dass A_2 und A nicht gleichzeitig verschwinden dürfen und dass $\vartheta = \mathfrak{A}^2$, d. h. dass ϑ das Quadrat einer rationalen ganzen Function von z sei, so wiederholen sich alle Schlüsse der art. 17, 18, 19 und es folgt, dass s Integrand I. G. und von der obigen Form (1) ist.

Der Unterschied zwischen dem gegenwärtigen Falle und demjenigen, wo s canonische Form ist, besteht darin, dass in diesem letztern Hauptfalle 1) bekannt ist, von welcher rationalen Function $\mathfrak{A}$ der Ausdruck ϑ das Quadrat sein soll und 2) der Untersuchung alle Hülfsmittel der Transformationstheorie zu Gebote stehen, wovon in den so eben besprochenen Ausnahmefällen weder das Eine noch das Andere der Fall ist.

Im Uebrigen enthalten die gegenwärtigen Betrachtungen den Aufschluss darüber, weshalb die Lösung der Aufgabe, s in canonischer Form zu bestimmen, auch zur Erledigung von Ausnahmefällen führenkann, wovon wir im folgenden (art. 24) ein Beispiel ($\mu = 3$, $p = 1$) geben werden.

VI. Klassification; die Systeme $\mu = 2$ und $\mu = 3$.

23.

Die bisherige Klassification der algebraïschen Functionen einer einzigen Variable beruht auf den charakteristischen Eigenschaften derselben, welche sich an die Riemann'sche Zahl p knüpfen; sie besteht bekanntlich darin, dass man zum nämlichen Geschlechte alle diejenigen Functionenklassen zählt, für welche p den nämlichen Werth hat. Für eine weitergehende Eintheilung der Functionenklassen, die zum nämlichen Geschlechte gehören, fehlt bis jetzt der Eintheilungsgrund, da der Satz, dass für $p > 1$ die Anzahl der verfügbaren Moduln im allgemeinen Falle $= 3p - 3$ ist, einen solchen nicht enthält.

Die gegenwärtige Theorie liefert die Ergänzung für die hier vorhandene Lücke.

Ich ordne die verschiedenen Klassen algebraïscher gleichverzweigter Functionen einer einzigen Variable zunächst nach Systemen, und zähle zum nämlichen System alle diejenigen Klassen, welche sich für den nämlichen Werth der Zahl

$$\mu$$

ergeben, wofern die Ausnahmefälle des vorigen art. 22 ausgeschlossen bleiben und s wirklich als canonische Form erscheint.

In das nämliche System μ gehören dann als Unterabtheilungen Functionenklassen der sämmtlichen Geschlechter p, welche mit diesem Werthe von μ bei geeigneten Werthen der Zahl k verträglich sind.

Umgekehrt ordnen sich innerhalb des nämlichen Geschlechtes p die zu ihm gehörigen Functionenklassen zu Familien, so weit sie—unter der vorhin angegebenen Beschränkung—zur nämlichen Zahl μ gehören, und es würde, wenn eine vollständige Theorie der Moduln möglich werden sollte, ihre Hauptaufgabe sein, für ein gegebenes p die einzelnen Familien μ und jedesmal die Anzahl der Moduln festzustellen.

Das erste System von Functionenklassen gehört zum Werthe

$$\mu = 2;$$

dasselbe wird durch die elliptischen und ultraelliptischen Functionen gebildet, wie man aus der Transformationstheorie leicht erkennt. In der That ergibt sich für s in diesem Falle eine quadratische Gleichung $As^2 + A_2 = 0$, wo A, A_2 ganze Functionen von z von den Graden $2(p+\mu-1) = 2p+2$ und $2p-2$ sind; A hat nur ungleiche Linearfactoren. Die Anzahl der Functionen y ist $\mu - 1 = 1$, also ist $A_2 = Cy_1^2$, $y_1 = x_1 + x_2 z + \cdots + x_p z^{p-1}$, mithin C constant. Für $C = -1$ folgt

$$s = \frac{x_1 + x_2 z + \cdots + x_p z^{p-1}}{\sqrt{A}},$$

wie bekannt.

24.

Das nächste System von Functionenklassen ergibt sich für

$$\mu = 3;$$

in diesem Falle lautet die Gleichung in s

$$As^3 + A_2 s + A_3 = 0,$$

und die Coefficienten $A A_2 A_3$ sind in z von den Graden $2p+4$, $2p$, $2p-2$. Sei

$$y_1 = x_1 + x_2 z \cdots + x_{1+a_1} z^{a_1}$$
$$y_2 = x_{2+a_1} + x_{3+a_1} z \cdots + x_p z^{a_2},$$

also

$$p = a_1 + a_2 + 2.$$

Nun ist

$$s_1 + s_2 + s_3 = 0, \qquad A_2 = A(s_2 s_3 + s_3 s_1 + s_1 s_2), \qquad A_3 = -A s_1 s_2 s_3$$

und

$$\frac{\partial(s_1 s_2)}{\partial(y_1 y_2)} = \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Um bei den canonischen Formen von A_2, A_3 die Symmetrie zu bewahren, drücke ich sie nicht durch s_1, s_2 sondern durch zwei andere Variable $z_1 z_2$ aus, so dass

$$s_1 = z_1 + z_2, \qquad s_2 = \rho z_1 + \rho^2 z_2, \qquad s_3 = \rho^2 z_1 + \rho z_2$$

wird, wo ρ eine dritte Einheitswurzel und zwar

$$\rho = \frac{i\sqrt{3}-1}{2}, \qquad \rho^2 = -\frac{i\sqrt{3}+1}{2}$$

ist. Dann folgt

$$\frac{\partial(s_1 s_2)}{\partial(z_1 z_2)} = \rho^2 - \rho = -i\sqrt{3}, \qquad \frac{\partial(z_1 z_2)}{\partial(s_1 s_2)} = \frac{i}{\sqrt{3}},$$

also

$$\frac{\partial(z_1 z_2)}{\partial(y_1 y_2)} = \frac{i}{\sqrt{3A}}.$$

Aber zugleich wird

$$A_2 = -3Az_1 z_2, \qquad A_3 = -A(z_1^3 + z_2^3).$$

Benutzen wir nun für die Hessesche Determinante einer Function u die schon oben (art. 14) angewandte Bezeichnung, so wird

$$H_y(u) = H_z(u)\left(\frac{\partial(z_1 z_2)}{\partial(y_1 y_2)}\right)^2 = -\frac{1}{3A} H_z(u),$$

und dies gibt

$$H_y(A_3) = -12Az_1 z_2 = 4A_2, \qquad H_y(A_2) = 3A,$$

so dass A_2, A aus A_3 berechnet werden können. Es fragt sich nur, ob die so gewonnenen Ausdrücke auch die Gleichung

$$\vartheta = \mathfrak{A}^2$$

verificiren, oder ob hierzu noch andere Bedingungen erforderlich sind. In unserm Falle ist aber

$$\mathfrak{A} = \frac{\partial(A_2 A_3)}{\partial(y_1 y_2)} = \frac{i}{\sqrt{3A}} \frac{\partial(A_2 A_3)}{\partial(z_1 z_2)} = \frac{9iA^2}{\sqrt{3A}}(z_2^3 - z_1^3),$$

was

$$\mathfrak{A}^2 = -27A^3[(z_1^3 + z_2^3)^2 - 4z_1^3 z_2^3] = -27AA_3^2 - 4A_2^3$$

gibt. Andererseits ist

$$\vartheta = \begin{vmatrix} 2A_2 & 3A_3 & . \\ 3A & . & A_2 \\ . & 2A_2 & 3A_3 \end{vmatrix} = -4A_2^3 - 27AA_3^2;$$

also ist $\vartheta = \mathfrak{A}^2$ ohne neue Bedingungen, und A_2, A_3 genügen unserer Aufgabe, wenn sie noch die gehörigen Grade haben.

Sei f eine cubische Form

$$f = \alpha y_1^3 + 3\alpha_1 y_1^2 y_2 + 3\alpha_2 y_1 y_2^2 + y_2^3 \qquad \text{und} \qquad A_3 = f,$$

so dass noch die Grade von $\alpha\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ festzusetzen sind; sodann sei die Hesse-sche Covariante von f

$$H = \begin{vmatrix} \alpha y_1 + \alpha_1 y_2 & \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 & \alpha_2 y_1 + \alpha_3 y_2 \end{vmatrix} = \beta y_1^2 + \beta_1 y_1 y_2 + \beta_2 y_2^2, \qquad \text{also} \qquad A_2 = 9H;$$

ferner sei die Invariante von f

$$I = \begin{vmatrix} \alpha & 2\alpha_1 & \alpha_2 & . \\ \alpha_1 & 2\alpha_2 & \alpha_3 & . \\ . & \alpha & 2\alpha_1 & \alpha_2 \\ . & \alpha_1 & 2\alpha_2 & \alpha_3 \end{vmatrix} = 4\beta\beta_2 - \beta_1^2, \qquad \text{also} \qquad A = 27I,$$

endlich

$$T = \tfrac{1}{3}\frac{\partial(Hf)}{\partial(y_1 y_2)} \qquad \text{also} \qquad \mathfrak{A} = 27T;$$

dann ergibt sich für s die Gleichung

$$27Is^3 + 9Hs + f = 0, \tag{1}$$

und für diese Function ist nun das Problem ihrer Doppel-und Verzweigungs-punkte gelöst, da in jenen T oder $\mathfrak{A}$, in diesen I oder A verschwindet. Die Gleichung $\vartheta = \mathfrak{A}^2$ ist nichts anderes als die bekannte Formel $T^2 + 4H^3 + If^2 = 0$; mittelst derselben kann man die Gleichung (1) in die Form bringen

$$(3Hs - f)(6Hs + f)^2 + 27T^2 s^3 = 0,$$

so dass in den Doppelpunkten $T = 0$, $6Hs + f = 0$ ist. A_2 und A, d. h. H und I dürfen nicht gleichzeitig verschwinden, d. h. f darf für keinen Werth von z ein reiner Kubus werden.

Um nun zu den Gradbestimmungen überzugehen, setzen wir $a_1 \overline{>} a_2$ voraus; dann ist

$$a_1 = k$$

der Exponent der höchsten Potenz von z, welche noch Function I. G. ist und, weil $a_1 + a_2 + 2 = p$ ist,

$$a_2 = p - 2 - k.$$

Dies sind die Grade von y_1, y_2; da der Grad von f, also $\delta f = 2p - 2$ sein muss, so folgt $\delta\alpha + 3a_1 = \delta\alpha_1 + 2a_1 + a_2 = \delta\alpha_2 + a_1 + 2a_2 = \delta\alpha_3 + 3a_2 = 2p - 2$, also wird

$$\delta\alpha = 2(p-1) - 3k, \quad \delta\alpha_1 = p - k, \quad \delta\alpha_2 = k + 2, \quad \delta\alpha_3 = 3k - p + 4, \quad (2$$

was eine arithmetische Reihe mit der constanten Differenz $a_1 - a_2 = 2k - p + 2$ ist. Man überzeugt sich leicht, dass mit diesen Werthen auch A_2 und A die vorgeschriebenen Grade erlangen.

Nun wissen wir aus art. 7, dass für den Fall $\mu = 3$ unmöglich z^k Function I. G. sein kann, wenn k nicht der Ungleichheit

$$\frac{p-2}{2} \overline{<} k \leqq \frac{2p-2}{3}$$

genügt. Das Vorstehende zeigt umgekehrt dass, so oft k dieser Ungleichheit gemäss angenommen wird, $\delta\alpha = 3\left(\frac{2p-2}{3} - k\right)$ und $a_1 - a_2 = 2\left(k - \frac{p-2}{2}\right)$ positiv, mindestens nicht negativ werden; aus (2) erhält man also für $\delta\alpha$, $\delta\alpha_1, \ldots$ Zahlen, welche wirklich die Grade ganzer Functionen angeben, und wenn man f demgemäss annimmt, so wird s durch die Gleichung (1) als Integrand I. G. in der Form

$$s = y_1\sigma_1 + y_2\sigma_2$$

bestimmt, wo σ_1, σ_2 Fundamentalintegranden von den Ordnungen k, $p-2-k$ und $y_1 y_2$ ganze Functionen von denselben Graden sind; ausserdem ist z^k Function erster, z^{k+1} Function zweiter Gattung, z selbst Function I. G. mit dem Ueberschuss $\rho = 1$.

Sodann ist der Fall zu berücksichtigen, wo z Function II. G. aber niedrigster Ordnung $\mu = p + 1$ ist. Dies gibt in unserm Falle $p = 2$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, also sind in f alle Coefficienten vom Grade $2p - 2 = 2$.

Für die im System $\mu = 3$ enthaltenen Functionenklassen ergeben sich also (vergl. art. 7) folgende charakteristische Zahlen:

$$\mu=3, \qquad a_1=k, \qquad a_2=p-k-2 \tag{1}$$

p	2	3	4	4	5	6	6	7	7	8	8	9	9	10	10	10	11	11	12	12	12...
k	0	1	2	1	2	3	2	4	3	4	3	5	4	6	5	4	6	5	7	6	5...

(2)

Die Ausnahmefälle des art. 22 endlich setzen $1 \lesseqgtr \mu-\rho<\mu-1$, d. i. $1 \lesseqgtr 3-\rho<2$, also $\rho=2$ voraus. Es wird also $\mu-\rho=1$, $s=y_1\sigma_1$, wo y_1 vom Grade $p-1$ ist; ferner $A_3=\alpha y_1^3$, also der Grad von A_3, nämlich $2p-2=\delta\alpha+3p-3$, $p+\delta\alpha=1$, d. i. $p=1$, $\delta\alpha=0$.

Wir erhalten also für $\mu=3$ nur einen einzigen Ausnahmefall $p=1$, $\rho=2$, und dieser gibt $s=x_1\sigma_1$ oder $s=\sigma_1$, da wir jetzt $x_1=1$ setzen dürfen.

Die obigen Resultate erledigen auch diesen Fall. Setzen wir nämlich in (1) zunächst $y_2=0$, $y_1=1$, was $27Is^3+9\beta s+\alpha=0$ gibt, so wird hierdurch s auf jeden Fall als Integrand I. G. bestimmt; soll $p=1$ sein, so müssen I, β, α von den Graden 6, 2, 0 sein. Wir nehmen $\alpha=1$, dann wird

$$\beta=\alpha_2-\alpha_1^2, \qquad I=-4\beta^3-\gamma^2,$$

wenn

$$\gamma=\alpha_3-\alpha_1\alpha_2+2\alpha_1^3$$

ist. Bestimmt man also $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ so, dass β vom zweiten, γ vom dritten Grade wird, d. h. nimmt man β, γ mit diesen Graden an, so ist allen Bedingungen genügt, und für s folgt die Gleichung

$$27(4\beta^3+\gamma^2)s^3-9\beta s-1=0$$

oder

$$(3\beta s-1)(6\beta s+1)^2+27\gamma^2s^3=0;$$

in den Doppelpunkten ist also $\gamma=0$, $6\beta s+1=0$, in den Verzweigungspunkten $4\beta^3+\gamma^2=0$. In diesem Falle ist z einwerthige und doppeltperiodische Function dritter Ordnung von $w=\int 3s\,dz$, oder es ist, nach der in dieser Theorie üblichen Ausdrucksweise,

$$4\beta^3+\gamma^2-3\beta\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2-\left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^3=0$$

die Differentialgleichung der einwerthigen doppeltperiodischen Functionen dritter Ordnung z von w.

25.

Für $\mu > 3$ treten Verhältnisse ein, welche die beiden so leicht zu erledigenden Fälle $\mu = 2$ und $\mu = 3$ in gewissem Sinne als Ausnahmefälle erscheinen lassen. Hierhin gehört zunächst die Gleichung (art. 14)

$$H_y(A_2) = (-1)^{\mu-1} \mu A^{\mu-2};$$

für $\mu = 3$ lehrte sie, wie A aus A_2 zu berechnen ist, für $\mu > 3$ dagegen drückt sie nur eine Eigenschaft von A_2 aus, welche darin besteht, dass die Discriminante von A_2 jeden Linearfactor $\mu - 2$ mal hat.

Sodann ist zu beachten, was die Formeln (2) (3) des art. 14 zeigen, dass für $\mu > 3$ nicht mehr so einfache Beziehungen zwischen den Functionen $A_2 A_3 \dots A_\mu$ stattfinden, wie für $\mu = 3$, wo A_3 eine beliebige binäre cubische Form und, von constanten Factoren abgesehen, A_2 ihre Hessesche Covariante und A ihre Invariante war; vielmehr reducirt sich offenbar, sobald $\mu > 3$ ist, die Theorie der Functionen $A_4 A_5 \dots A_\mu$ auf A_3 und namentlich A_2 als Grundgebilde, was indessen nicht so verstanden sein soll, als ob man eine von diesen beiden willkürlich annehmen dürfte, was bei A_2 niemals, und schon für $\mu = 4$ bei A_3 nicht mehr der Fall ist, da alsdann nicht bloss A_4 sondern auch A_3 als Function von $y_1 y_2 y_3$ in Linearfactoren zerfällt.

Mit der Theorie der Function A_2 wollen wir uns noch im folgenden Abschnitte beschäftigen.

VII. Theorie der Function A_2.

26.

Sei in entwickelter Form

$$A_2 = \sum_i \sum_k a_{ik} y_i y_k (i,\ k = 1,\ 2, \dots\ \mu - 1), \tag{1}$$

mithin der Grad des Coefficienten $a_{ik} = a_{ki}$

$$\delta a_{ik} = 2(p + \mu - 3) - a_i - a_k.$$

Ferner sei C die Discriminante von A_2, also

$$C = \Sigma \pm a_{11} a_{22} \dots a_{\mu-1, \mu-1} \tag{2}$$

und in üblicher Weise C_{ik} die zum Elemente a_{ik} gehörige Unterdeterminante von C. Es findet zunächst der Satz statt, dass A_2 eine vollständige quadratische Form ist. In der That ist $2^{\mu-1}C=H_y(A_2)$, also haben wir

$$C=\frac{(-1)^{\mu-1}\mu}{2^{\mu-1}}A^{\mu-2}, \tag{3}$$

also ist C nicht Null, woraus der vorstehende Satz folgt.

Ich bringe nun A_2 in die adjungirte Form; sind $\eta_1\eta_2\ldots\eta_{\mu-1}$ die neuen Variabeln, also

$$\eta i=\tfrac{1}{2}\frac{\partial A_2}{\partial yi}, \tag{4}$$

so lautet die inverse Substitution

$$Cy_k=\sum_i C_{ik}\eta_i \tag{5}$$

und es wird

$$CA_2=\sum_i\sum_k C_{ik}\eta_i\eta_k. \tag{6}$$

Die Substitution (5), durch welche A_2 direct in diese, zur ursprünglichen adjungirte Form gebracht wird, ist einer merkwürdigen Umformung fähig. Wird A_2 durch $s_1 s_2\ldots s_\mu$ ausgedrückt und berücksichtigt, dass $s_\mu=-s_1\cdots-s_{\mu-1}$ ist, so folgt

$$\frac{dA_2}{ds_1}=\frac{\partial A_2}{\partial s_1}-\frac{\partial A_2}{\partial s_\mu}=A(s_2+\cdots+s_\mu)-A(s_1\cdots+s_{\mu-1})=A(s_\mu-s_1),$$

und ebenso, für $\nu=1, 2,\ldots \mu-1$ allgemein

$$\frac{dA_2}{ds_\nu}=A(s_\mu-s_\nu).$$

Die Substitution (4) wird hiernach zunächst

$$2\eta i=A\sum_\nu(s_\mu-s_\nu)\frac{\partial s_\nu}{\partial yi}.$$

Ist nun r die Determinante dieser Gleichungen, also $r=\frac{1}{\sqrt{A}}$, und

$$r_i^\nu=\frac{\partial r}{\partial\left(\frac{\partial s_\nu}{\partial yi}\right)}$$

die zum Elemente $\frac{\partial s_\nu}{\partial yi}$ gehörige Unterdeterminante, so folgt durch Auflösung nach $A(s_\mu - s_\nu)$

$$\sqrt{A}\cdot(s_\mu - s_\nu) = 2\sum_i r_i^\nu \eta_i, \tag{7}$$

und die beabsichtigte Umformung von (5) erfordert zunächst, dass y_k durch die $\mu - 1$ Differenzen $s_\mu - s_\nu$ ausgedrückt wird. Nun ist

$$s_\nu = \sum_k \frac{\partial s_\nu}{\partial y_k}\cdot y_k,$$

also

$$r y_k = \sum_\nu r_k^\nu s_\nu$$

oder

$$y_k = \sqrt{A}\sum_\nu r_k^\nu s_\nu. \tag{8}$$

Sodann sei $\sigma_\lambda = s_\mu - s_\lambda$; dies gibt $\sigma_1 + \sigma_2 \cdots + \sigma_{\mu-1} = (\mu - 1)s_\mu - (s_1 + s_2 \cdots + s_{\mu-1}) = \mu s_\mu$, also ist

$$s_\mu = \frac{1}{\mu}\sum_\lambda (s_\mu - s_\lambda)$$

$$s_\nu = \frac{1}{\mu}\sum_\lambda (s_\mu - s_\lambda) - (s_\mu - s_\nu),$$

also folgt aus (7) was wir auch im folgenden art. gebrauchen werden

$$\left.\begin{aligned} s_\mu &= \frac{2}{\mu\sqrt{A}}\sum_i \eta_i \sum_\lambda r_i^\lambda \\ s_\nu &= \frac{2}{\sqrt{A}}\sum_i \eta_i\left[\frac{1}{\mu}\sum_\lambda r_i^\lambda - r_i^\nu\right]. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Wird dies endlich in (8) eingeführt, so folgt

$$y_k = 2\sum_\nu r_k^\nu \sum_i \eta_i\left[\frac{1}{\mu}\sum_\lambda r_i^\lambda - r_i^\nu\right]$$

$$y_k = -2\sum_i \eta_i\left\{r'_i r'_k + r_i^2 r_k^2 \cdots + r_i^{\mu-1} r_k^{\mu-1} - \frac{1}{\mu}(r'_i + r_i^2 \cdots + r_i^{\mu-1})(r'_k + r_k^2 \cdots + r_k^{\mu-1})\right\} \tag{10}$$

welches die beabrichtigte Umformang der Substitution (5) ist.

Wenn wir daher den Ausdruck

$$r'_i r'_k + r_i^2 r_k^2 \cdots + r_i^{\mu-1} r_k^{\mu-1} - \frac{1}{\mu}(r'_i + r_i^2 \cdots + r_i^{\mu-1})(r'_k + r_k^2 \cdots + r_k^{\mu-1}) = R_{ik} \tag{11}$$

setzen, so folgt

$$\frac{C_{ik}}{C} = -2 R_{ik}. \tag{12}$$

Dass R_{ik} eine rationale Function von z ist und im Endlichen nur dann unstetig werden kann, wenn z einem Verzweigungswerthe gleich wird, braucht nicht bewiesen zu werden, da der vorstehende Ausdruck durch C_{ik} und C in Verbindung mit der aus (3) bekannten Bedeutung von C dies zeigt; wir benutzen umgekehrt den Ausdruck von R_{ik} durch irrationale Elemente, um zu untersuchen, wie sich die rationale Function $C_{ik}:C$ in den Verzweigungspunkten und im Unendlichen verhält.

Für einen Verzweigungswerth z werden zwei und nur zwei Zweige von s unstetig, beide wie $\frac{1}{\sqrt{A}}$; ihre Summe bleibt stetig, ebenso jeder andere Zweig von s. Da aber in der Unterdeterminante r_i^ν zwei Zweige, s_μ und s_ν fehlen, so wird sie für einen Verzweigungswerth z entweder gar nicht unstetig, nämlich wenn dort s_μ und s_ν zusammenhängen, oder r_i^ν wird unstetig nur wie $\frac{1}{\sqrt{A}}$, letzteres namentlich auch dann, wenn r_i^ν von beiden Zweigen abhängt, welche dort unstetig werden, weil man, ohne Aenderung von r_i^ν, den einen durch die Summe beider ersetzen kann.

Der Ausdruck (11) von R_{ik} besteht daher aus dreierlei Gliedern, 1) solchen die für den betreffenden Verzweigungswerth stetig bleiben, 2) solchen die dort unstetig werden wie $\frac{1}{\sqrt{A}}$ und 3) Gliedern die wie $\frac{1}{A}$ unstetig werden. Da die Summe aller dieser Glieder rational ist, so müssen die Glieder zweiter Art einander aufheben, und es folgt, dass die rationale Function

$$A R_{ik} = \alpha_{ik}$$

für endliche Werthe von z nie unstetig wird, also eine ganze Function von z ist. Aus (11) folgt noch beiläufig $\alpha_{ki} = \alpha_{ik}$.

Um den Grad dieser ganzen Function zu bestimmen, beachte man, dass im Unendlichen auf jedem Blatte $\frac{\partial s}{\partial y_i} = \sigma_i$ zur Ordnung $2 + a_i$ verschwindet, während dort r und (art. 13) jedes einzelne Glied von r, insbesondere auch $r_i^\nu \frac{\partial s_\nu}{\partial y_i}$ zur Ordnung $p + \mu - 1$ verschwindet. Also folgt, dass für unendliche Werthe von z

$$r_i^\nu \text{ zur Ordnung } p + \mu - 1 - 2 - a_i \tag{13}$$

verschwindet. Also wird dort R_{ik} unendlich klein zur Ordnung $2(p+\mu-1)-$ $-a_i-a_k-4$, und weil A vom Grade $2(p+\mu-1)$ ist, $AR_{ik}=\alpha_{ik}$ unendlich gross zur Ordnung a_i+a_k+4. Also ist der gesuchte Grad

$$\partial\alpha_{ik}=a_i+a_k+4. \tag{14}$$

Und so haben wir nun

$$\frac{C_{ik}}{C}=-2\frac{\alpha_{ik}}{A}. \tag{15}$$

Wir setzen nun

$$\Sigma\pm\alpha_{11}\alpha_{22}\cdots\alpha_{\mu-1,\mu-1}=\Gamma, \tag{16}$$

und bezeichnen durch Γ_{ik} die zum Elemente α_{ik} gehörige Unterdeterminante. Durch Bildung von Γ und Γ_{ik} folgt dann

$$\frac{1}{C}=\frac{(-1)^{\mu-1}2^{\mu-1}}{A^{\mu-1}}\cdot\Gamma,\qquad \frac{a_{ik}}{C}=\frac{(-1)^{\mu-2}2^{\mu-2}}{A^{\mu-2}}\Gamma_{ik}.$$

Nun war (3)

$$\frac{1}{C}=\frac{(-1)^{\mu-1}2^{\mu-1}}{\mu.A^{\mu-2}},$$

also folgt:

$$\left.\begin{aligned} A&=\mu\Gamma\\ a_{ik}&=-\frac{\mu}{2}\Gamma_{ik}\\ A_2&=-\frac{\mu}{2}\sum_i\sum_k\Gamma_{ik}y_iy_k\\ AA_2&=-2\sum_i\sum_k\alpha_{ik}\eta_i\eta_k. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Wegen (15) nimmt die Substitution (5), durch welche A_2 aus der ersten in die zweite Form übergeführt wird, die vereinfachte Gestalt

$$y_k=-\frac{2}{A}\sum_i\alpha_{ik}\eta_i \tag{18}$$

an. —

In einem Verzweigungspunkte wird $A=0$, $s\sqrt{A}=\sqrt{-A_2}$, also muss A_2 ein reines Quadrat werden (art. 14 zu Ende). In der That findet für $A=0$ oder $\Gamma=0$ das Formelnsystem $\Gamma_{gh}\Gamma_{ik}=\Gamma_{gk}\Gamma_{ih}$ statt, mittelst dessen sich diese Eigenschaft von A_2 sofort verificirt.

Sodann ist zu bemerken dass, wenn Γ oder A nur einfache Factoren $z-\alpha$

hat, niemals A_2 mit A zugleich verschwinden kann, also die hierauf bezügliche Bedingung 4) des art. 16 wegfällt. Wenn nämlich Γ und A_2 für $z=\alpha$ verschwinden, so ist α von $x_1x_2\dots x_p$ unabhängig, also verschwindet für $z=\alpha$ jeder Coefficient Γ_{ik} von A_2, mithin ausser Γ selbst auch noch $\frac{\partial\Gamma}{\partial z}$, was unmöglich ist, wenn Γ oder A jeden Linearfactor $z-\alpha$ nur einmal besitzt.

27.

Damit ist die nothwendige Form von A_2 dargethan, und es erübrigt noch, die Substitution (18) in den übrigen Functionen $A_3\dots A_\mu$ auszuführen. Wir benutzen für diese die Ausdrücke

$$A_k=(-1)^k A[s_1s_2\dots s_k+\cdots]$$

indem wir statt der Substitution (18) direct die Formeln

$$\left.\begin{aligned} s_\mu &= \frac{2}{\mu\sqrt{A}}\sum_i \eta_i \sum_\lambda r_i^\lambda \\ s_\nu &= \frac{2}{\sqrt{A}}\sum_i \eta_i\left[\frac{1}{\mu}\sum_\lambda r_i^\lambda - r_i^\nu\right] \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

anwenden. Führt man diese ein und scheidet die Potenz von A aus, so nimmt A_k die Form an

$$A_k=\frac{A}{A^{\frac{k}{2}}}\cdot P;$$

wir denken uns P nach $\eta_1\eta_2\dots$ geordnet, und bezeichnen durch $Q\eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2}\dots\eta_{\mu-1}^{\alpha_{\mu-1}}$ irgend ein Glied von P. Der Ausdruck Q ist in den Unterdeterminanten von r homogen vom Grade k, mit rein numerischen Coefficienten. Aber in den Formeln (9) ist η_1 nur mit Unterdeterminanten $r_1^1 r_1^2\dots$ vom gemeinsamen untern Index 1 multiplicirt, η_2 nur mit Unterdeterminanten $r_2^1 r_2^2\dots$ vom untern Index 2, u. s. w. Also ist Q eine Summe von Gliedern, von denen jedes das Product ist aus einem numerischen Coefficienten und α_1 Factoren r_1^ν, α_2 Factoren r_2^ν u. s. w. Da die Anzahl dieser Factoren $=k$ ist, so wird ein solches Product für einen Verzweigungswerth z unendlich höchstens wie $A^{-\frac{k}{2}}$, also $Q\cdot A^{\frac{k}{2}}$ für einen Verzweigungswerth z nie unstetig. Setzen wir dieses Product $=Q_1$

und $PA^{\frac{k}{2}}=P_1$, so wird

$$A_k=\frac{P_1}{A^{k-1}}$$

und $Q_1\eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2}\ldots$ ein Glied von P_1. Da man diese Form von A_k auch durch die Substitution (18) erhält, so ist Q_1 rationale Function von z, und weil sie im Endlichen nie unstetig wird, so ist sie ganze Function von z. Um ihren Grad zu bestimmen, ist zu beachten dass im Unendlichen α_1 Factoren eines Gliedes von Q zur Ordnung $(p+\mu-1)-(a_1+2)$, α_2 Factoren zur Ordnung $(p+\mu-1)-(a_2+2)$ u. s. w. verschwinden, also Q selbst zur Ordnung $\alpha_1[(p+\mu-1)-(a_1+2)]+\alpha_2[(p+\mu-1)-(a_2+2)]+\cdots=k(p+\mu-1)-2k-(\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\cdots)$ verschwindet. Da dort $A^{\frac{k}{2}}$ zur Ordnung $k(p+\mu-1)$ unendlich wird, so wird $Q_1=Q\cdot A^{\frac{k}{2}}$ unendlich zur Ordnung $2k+\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2\ldots$, und dies ist der Grad von Q_1. Wir haben also den Satz:

Aus dem Ausdrucke von A_2 leite man die Substitution

$$\eta_i=\tfrac{1}{2}\frac{\partial A_2}{\partial y_i}$$

oder durch Umkehrung die folgende

$$y_k=-\frac{2}{A}\sum_i \alpha_{ik}\eta_i \tag{18}$$

ab. Führt man letztere in die übrigen Functionen $A_3\ldots A_\mu$ ein, so hebt sich aus den Coefficienten der neuen, nach $\eta_1\eta_2\ldots$ geordneten Ausdrücke A einmal weg, und es nimmt allgemein A_k die Form an

$$A_k=\frac{1}{A^{k-1}}\sum Q^{(k)}_{\alpha_1\alpha_2}\ldots\eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2}\ldots(\alpha_1+\alpha_2+\cdots=k),$$

wo alle Coefficienten ganze Functionen von z sind, und insbesondere $Q^{(k)}_{\alpha_1\alpha_2}\ldots$ vom Grade

$$2k+\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\cdots$$

ist.

Strassburg, 22 Februar 1878.

Ueber algebraische Differentiale.

(*Da due lettere del dott.* A. Harnack, *professore a Dresda, al prof.* L. Cremona).

. . . . . . Als ich vor kurzem die Untersuchungen über algebraische Differentiale (*) für meine Vorträge an der hiesigen polytechnischen Schule wieder aufnahm, ward mir das Studium Ihrer Arbeit (**) von grossem Interesse, weil daselbst ein Weg gezeigt ist, der von vornherein die Behandlung mit homogenen Coordinaten gestattet, ohne dass complicirte Partialbruchzerlegungen benutzt werden.

Gestatten Sie mir, hochverehrter Herr College, Ihnen einige kurze Bemerkungen mitzutheilen, die nur eine Vervollständigung der Methode geben sollen, welche Sie in Ihrem Aufsatze angewandt haben.

Das Verhalten des Differentiales

$$dV = \frac{\theta_x^{n-3} \sum \pm c_1 x_2 d x_3}{a_x^{n-1} a_c} = \frac{\theta_x^{n-3} |c\, x\, dx|}{a_x^{n-1} a_c} \qquad (a_x^n = 0) \tag{1}$$

in einem Doppelpunkte der Curve lässt sich in folgender Weise prüfen: Bedeuten $u_x = 0$ und $v_x = 0$ die Gleichungen zweier Geraden, welche durch den Doppelpunkt $y = \widehat{uv}$ gehen, so ist die Gleichung der Curve in der Form entwickelbar:

$$a_x^n = u^2_x K_0 + u_x v_x K_1 + v^2_x K_2. \tag{2}$$

Substituirt man in die Formen K die Coordinaten des Doppelpunktes, so stellt die rechte Seite das Product der beiden Tangenten des Doppelpunktes dar, die kurz mit $(u_x + \lambda_1 v_x)(u_x + \lambda_2 v_x) = r_x s_x$ bezeichnet werden sollen. Alsdann ist in der Nähe des Doppelpunktes:

$$n\, a_x^{n-1} a_c = r_x s_c + r_c s_x. \tag{3}$$

(*) *Ueber eine Behandlungsweise der algebraischen Differentiale in homogenen Coordinaten* (Mathematische Annalen, 11 Band; Leipzig, 1876).

(**) *Sugli integrali a differenziale algebrico* (Memorie dell'Accademia delle Scienze di Bologna, 1869, tomo 10 della 2ª serie).

Bestimmt man nun eine beliebige Gerade w_x so, dass für den Doppelpunkt $w_y = |wuv| = 1$ wird, so lässt sich an Stelle des Differentiales dV in der Nähe des Doppelpunktes das einfachere betrachten:

$$dV = \frac{n\theta_y^{n-3}|cxdx|}{w_x\{r_x s_c + r_c s_x\}} \qquad r_x s_x = 0. \tag{4}$$

Für den einen oder den anderen der beiden Zweige muss das Differential längs $r_x = 0$ oder längs $s_x = 0$ genommen werden. Für $r_x = 0$ wird, falls man $c = \widehat{sw}$ wählt,

$$V = \int \frac{n\theta\{s_x w_{dx} - w_x s_{dx}\}}{w_x s_x |rsw|} = \frac{n\theta_y^{n-3}}{|rsw|}\{\log w_x - \log s_x\} = -\frac{n\theta_y^{n-3}}{\lambda_2 - \lambda_1}\log(u_x + \lambda_2 v_x). \tag{5}$$

Für $s_x = 0$ wird, wenn $c = \widehat{rw}$ ist,

$$V = \int \frac{n\theta\cdot\{r_x w_{dx} - w_x r_{dx}\}}{w_x r_x |srw|} = -\frac{n\theta_y^{n-3}}{|rsw|}\{\log w_x - \log r_x\} = \frac{n\theta_y^{n-3}}{\lambda_2 - \lambda_1}\log(u_x + \lambda_1 v_x) \tag{6}$$

da in beiden Fällen $|rsw| = (\lambda_2 - \lambda_1)|uvw| = \lambda_2 - \lambda_1$ ist.

Es ist bemerkenswerth, dass die Summe der beiden Integrale in beliebiger Nähe des Doppelpunktes immer endlich bleibt; denn setzt man in die Gleichung (5) $x = \widehat{ru}$, $dx = \widehat{rdu}$, in (6) $x = \widehat{su}$, $dx = \widehat{sdu}$, so folgt:

$$\int\sum dV = n\theta_y^{n-3}\int\left\{\frac{|rudu|}{|wru||sru|} - \frac{|sudu|}{|wsu||sru|}\right\} = -n\theta_y^{n-3}\int\frac{|wudu|}{|wru||wsu|}, \tag{7}$$

ein Integral welches nur in den Schnittpunkten $\widehat{wr}$ und $\widehat{ws}$, nicht aber in der Umgebung von $\widehat{rs}$, unendlich wird.

Eine gleiche Betrachtung gilt für alle vielfachen Punkte, in denen die Tangenten getrennt sind. In einem Rückkehrpunkte, in welchem $\lambda_1 = \lambda_2$ wird, verhält sich das Differential, wie

$$\frac{n\theta|cxdx|}{2w_x r_x r_c} \quad \text{für} \quad r_x = 0.$$

Als Grenzfall der Gleichungen (5) oder (6) aufgefasst, erkennt man dass das Integral unendlich wird, wie $\frac{\log(u_x + \lambda_2 v_x)}{\lambda_2 - \lambda_1}$ für $\lambda_1 = \lambda_2$, das heisst algebraisch von der ersten Ordnung. Auch hier bleibt die Summe der beiden Integrale in den Nähe des Rückkehrpunktes durchaus endlich; denn diese Summe ist gleich

$$\int \sum d V = - n \theta_y^{n-3} \int \frac{|w u d u|}{|w r u|^2}. \tag{8}$$

Den Beweis des Abelschen Theorems für das Normalintegral dritter Gattung führe ich im Anschluss an die von Ihnen a. a. Ort pag. 28 aufgestellte Gleichung (42) in folgender Weise. Es ist zu integriren:

$$V = \int_0^\infty \sum_{i=1}^{i=mn} \frac{\Omega_x^{n-2} |c x d x|}{|\xi \eta x| a_x^{n-1} a_c} = \frac{1}{m} \int_0^\infty d\lambda \sum_{i=1}^{i=mn} \frac{\Omega \cdot \psi}{R} \tag{9}$$

wobei $R = a_x^{n-1} \alpha_x^{m-1} |a \alpha \widehat{\xi \eta}|$ die Jacobische Determinante der drei Functionen a_x^n, $\alpha_x^m = \varphi_x^m + \lambda \psi_x^m$, $|\xi \eta x|$ bedeutet und die Summe für die mn Schnittpunkte der Curven $a_x^n = 0$ und $\alpha_x^m = 0$ gebildet werden soll. Diese Gleichung ergiebt sich auf die kürzeste Weise, in dem man $c = a_x^{m-1} (\widehat{\alpha \xi \eta})$ setzt, und dabei berücksichtigt, dass für die Schnittpunkte und deren Nachbarpunkte

$$\alpha_x^{m-1} \alpha_{dx} = - \frac{d\lambda}{m} \cdot \psi$$

ist.

Nach einem Satze, den ich im 10 Bande der Math. Annalen bewiesen habe, und der, wie ich später fand, eine unmittelbare Folge eines zuerst von Liouville (*) erkannten Theoremes ist, wird die Summe von $\frac{\Omega \cdot \Psi}{R}$ für die Schnittpunkte von $a_x^n = 0$ und $\alpha_x^m = 0$ gleich der mit m multiplicirten Summe von $\frac{\Omega \cdot \psi}{R}$ gebildet für die Schnittpunkte von $a_x^n = 0$ und $|\xi \eta x| = 0$. Da für $n - 2$ derselben $\Omega = 0$ wird, so ist:

$$V = \int_0^\infty d\lambda \left\{ \frac{\Omega_\xi^{n-2} \cdot \psi_\xi^m}{- a_\xi^{n-1} a_\eta \cdot \alpha_\xi^m} + \frac{\Omega_\eta^{n-2} \psi_\eta^m}{a_\eta^{n-1} a_\xi \cdot \alpha_\eta^m} \right\} \tag{10}$$

und weil $\Omega_\xi^{n-2} = \rho \cdot a_\xi^{n-1} a_\eta$, $\Omega_\eta^{n-2} = \rho \cdot a_\eta^{n-1} a_\xi$, so ist

$$V = \rho \cdot \log \frac{\psi_\eta^m \cdot \varphi_\xi^m}{\psi_\xi^m \cdot \varphi_\eta^m}. \tag{11}$$

Die Normirung des Integrales dritter Gattung ist übrigens bei dieser Ablei-

(*) Journal de Mathématiques, t. 2.

tung unwesentlich . . . .

. . . .

Erlauben Sie mir, Ihnen mitzutheilen, wie sich das Integral der rationalen Functionen zwischen reellen Grenzen, vorausgesetzt dass es innerhalb dieses reellen Intervalles nicht unendlich wird, in homogenen Coordinaten auswerthen lässt. Bezeichnet man das auf die Gerade $u_x=0$ bezügliche Differential mit

$$dV=\frac{\alpha_x{}^{n-2}|cx\,dx|}{p_x{}^{(1}\,p_x{}^{(2)}\ldots p_x{}^{(n}\,u_c}\qquad (u_x=0)$$

und sind die Schnittpunkte der Geraden p mit u alle imaginär:

$$\rho\,\xi^{(i)}=\widehat{p^{(i)}u}=a^{(i)}+b^{(i)}\sqrt{-1},$$

so wird, wenn man die Integration mit Hilfe des Strahlbüschels $r_x+\lambda s_x=0$ von $\lambda=+\infty$ bis $\lambda=-\infty$ ausführt,

$$V=\pi\sqrt{-1}\sum_{i=1}^{i=n}\pm\frac{\alpha_{\xi^{(i)}}^{n-2}}{\Pi\,p_{\xi^{(i)}}}$$

wobei das $+$ oder $-$ zeichen zu nehmen, je nachdem

$$r_b s_a - r_a s_b > \text{ oder } < 0.$$

Legt man das Coordinatensystem, was immer möglich, so dass der Punkt b für alle ξ der nämliche wird, und wählt man $s_b=0$, so wird der positive oder negative Werth zu nehmen sein, je nachdem $r_b s_a >$ oder <0.

Dies giebt für die gewöhnliche Darstellung folgende Regel: Ist $r_x=x_1=0$, $s_x=x_2=0$; und werden die Coordinaten jedes Punktes auf u durch

$$\rho\,\xi_1=\mu z_1+\nu z_1\sqrt{-1}$$
$$\rho\,\xi_2=y_2$$

dargestellt, so ist bei der Drehung von $+\infty$ zu $-\infty$ der positive Werth zu nehmen, wenn $\nu z_1 y_2>0$, der negative wenn $\nu z_1 y_2<0$. Das Vorzeichen von $z_1 y_2$ bestimmt die Drehrichtung im Strahlbüschel $x_1+\lambda x_2=0$.

Ich habe mir, hochgeehrter Herr, erlaubt Ihnen die kurzen Bemerkungen mitzutheilen, weil dieselben aus dem Studium Ihrer Abhandlung hervorgegangen sind.

. . . .

Dresden, Polytechnikum,
28 October } 1878.
8 December }

On a Problem in Algebra.

(*By* John. C. Malet, *Trinity College Dublin.*)

This memoir is mainly occupied with the solution and consequences of the following algebraic problem.

« Being given any two algebraic equations to determine the equation of which the roots shall be of the form $\alpha\beta$, α being a root of one of the given equations and β of the other. »

First let us consider the two equations

$$x^n - p_1 x^{n-1} + p_2 x^{n-2} \cdots \pm p_n = 0$$
$$x^n - q_1 x^{n-1} + q_2 x^{n-2} \cdots \pm q_n = 0.$$

Let the roots of the first equation be $x_1, x_2, \ldots x_n$ and the roots of the second $y_1, y_2, \ldots y_n$ and let us determine the conditions that the coefficients of the equations must satisfy in order that the following relations should subsist among the roots

$$x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 \cdots = x_n y_n$$

in this case each of these products should be equal to $(p_n q_n)^{\frac{1}{n}}$, therefore if in the first equation we change x to $x(p_n q_n)^{\frac{1}{n}}$ we evidently should get an equation of which the roots should be the reciprocals of the roots of the second, hence by comparing coefficients we get as the required conditions the following $n-1$ equations

$$\left.\begin{array}{l} p_1(q_n p_n)^{\frac{n-1}{n}} = q_{n-1} p_n, \qquad p_2(q_n p_n)^{\frac{n-2}{n}} = q_{n-2} p_n \\ p_3(q_n p_n)^{\frac{n-2}{n}} = q_{n-3} p_n \text{ and finally } p_{n-1}(q_n p_n)^{\frac{1}{n}} = q_1 p_n \end{array}\right\} \quad (1)$$

these relations are not, as is seen, expressed in the simplest forms, but for convenience *I* write them as above.

Let us now take the equations

$$x^n - A_1x^{n-1} + A_2x^{n-2} \cdots \pm A_n = 0 \qquad (a)$$

$$x^m - B_1x^{m-1} + B_2x^{m-2} \cdots \pm B_m = 0. \qquad (b)$$

The roots of the first of these equations being $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$, and the roots of the second being $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_m$, I proceed to form the equation of which the roots shall be of the form $\alpha_1\beta_1$, $\alpha_1\beta_2$ and so on. Multiply equation (a) by $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{m-1})$ and equation (b) by

$$(x-y_1)(x-y_2)(x-y_3)\cdots(x-y_{n-1})$$

they become respectively

$$x^{m+n-1} - (A_1+X_1)x^{m+n-2} + (A_2 + A_1X_1 + X_2)x^{m+n-3} \cdots \pm A_nX_{m-1} = 0$$

and

$$x^{m+n-1} - (B_1+Y_1)x^{m+n-2} + (B_2 + B_1Y_1 + Y_2)x^{m+n-3} \cdots \pm B_mY_{n-1} = 0$$

where

$$X_1 = \Sigma(x_1), \qquad X_2 = \Sigma(x_1x_2) \cdots X_{m-1} = x_1x_2\cdots x_{m-1}$$

$$Y_1 = \Sigma(y_1), \qquad Y_2 = \Sigma(y_1y_2) \cdots Y_{n-1} = y_1y_2\cdots y_{n-1}.$$

Hence from conditions (1) we see that the following equations

$$(A_1 + X_1)\{A_nB_mX_{m-1}Y_{n-1}\}^{\frac{m+n-2}{m+n-1}} = (Y_{n-1}B_{m-1} + Y_{n-2}B_m)A_nX_{m-1}$$

$$(A_2 + A_1X_1 + X_2)\{A_nB_mX_{m-1}Y_{n-1}\}^{\frac{m+n-2}{m+n-1}} = (Y_{n-1}B_{m-2} + Y_{n-2}B_{m-1} + Y_{n-3}B_m)A_nX_{m-1}$$

. . . .

. . . .

$$(A_n + A_{n-1}X_1 + \cdots)\{A_nB_mX_{m-1}Y_{n-1}\}^{\frac{m-1}{m+n-1}} = (Y_{n-1}B_{m-n} + Y_{n-2}B_{m-n+1}\cdots)A_nX_{m-1}$$

. . . .

. . . .

$$(A_nX_{m-3} + A_{n-1}X_{m-2} + A_{n-2}X_{m-1})\{A_nB_mX_{m-1}Y_{n-1}\}^{\frac{2}{m+n-1}} = (B_2 + B_1Y_1 + Y_2)A_nX_{m-1}$$

$$(A_nX_{m-2} + A_{n-1}X_{m-1})\{A_nB_mX_{m-1}Y_{n-1}\}^{\frac{1}{m+n-1}} = (B_1 + Y_1)A_nX_{m-1}$$

are equivalent to the following relations among x_1, x_2, y_1, $y_2, \dots$

$$x_1\beta_1 = x_2\beta_2 \cdots = x_{m-1}\beta_{m-1} = y_1\alpha_1 = y_2\alpha_2 \cdots = y_{n-1}\alpha_{n-1} = \alpha_n\beta_m$$

from these relations we see that $(A_n B_m X_{m-1} Y_{n-1})^{\frac{1}{m+n-1}} = \alpha_n\beta_m$ hence calling it x the previous conditions may be written

$$(A_1 + X_1)x^{m+n-2} = \frac{B_{m-1}}{B_m}x^{m+n-1} + B_m A_n Y_{n-2} X_{m-1}$$

$$(A_2 + A_1 X_1 + X_2)x^{m+n-3} = \frac{B_{m-2}}{B_m}x^{m+n-1} + B_{m-1}A_n Y_{n-2} X_{m-1} + B_m A_n Y_{n-3} X_{m-1}$$

$$(A_n + A_{n-1}X_1 + \cdots)x^{m-1} = \frac{B_{m-n}}{B_m}x^{m+n-1} + B_{m-n-1}A_n Y_{n-2} X_{m-1} \cdots$$

$$(A_n X_{m-3} + A_{n-1}X_{m-2} + A_{n-2}X_{m-1})x^2 = B_2 A_n X_{m-1} + B_1 A_n Y_1 X_{m-1} + A_n Y_2 X_{m-1}$$

$$(A_n X_{m-2} + A_{n-1}X_{m-1})x = B_1 A_n X_{m-1} + A_n Y_1 X_{m-1}.$$

Now eliminating linearly from these equations the quantities

x^{m-1}, $\quad A_n Y_{n-2} X_{m-1}$, $\quad A_n Y_{n-3} X_{m-1}, \dots \quad X_{m-1}$, $\quad x X_{m-2}, \dots \quad x^{m-2} X_1$

and multiplying the result by B_m we get the required equation in x

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
B_{m-1}x^n - A_1 B_m x^{n-1} & B_m & 0\dots & 0 & 0 & x^n & 0\dots & 0 & 0 & 0 \\
B_{m-2}x^n - A_2 B_m x^{n-2} & B_{m-1} & B_m\dots & 0 & 0 & A_1 x^{n-1} & x^n\dots & 0 & 0 & 0 \\
\dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . & . & . \\
\dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . & . & . \\
\dots\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & . & . & . \\
\dots\dots & \dots & \dots & 1 & B_1 & 0 & 0\dots & A_n & A_{n-1}x & A_{n-2}x^2 - B_2 A_n \\
\dots\dots & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 & 0\dots & 0 & A_n & A_{n-1}x - B_1 A_n
\end{array}\right| = 0 \qquad (c)$$

I will now apply the general formula to a few particular cases.

I. Two quadratic equations

Let the equations be

$$x^2 - A_1 x + A_2 = 0, \qquad x^2 - B_1 x + B_2 = 0$$

then the required equation is

$$\begin{vmatrix} B_1 x^2 - A_1 B_2 x & x^2 - A_2 B_2 \\ x^2 - A_2 B_2 & A_1 x - A_2 B_1 \end{vmatrix} = 0$$

or expanding

$$x^4 - A_1 B_1 x^3 + (A_1^2 B_2 + B_1^2 A_2 - 2 A_2 B_2) x^2 - A_1 A_2 B_1 B_2 x + A_2^2 B_2^2 = 0.$$

II. Cubic and Quadratic.

Let the equations be

$$\begin{aligned} x^3 - A_1 x^2 + A_2 x - A_3 &= 0 \\ x^2 - B_1 x + B_2 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

then the required equation is

$$\begin{vmatrix} B_1 x^3 - A_1 B_2 x^2 & B_2 & x^3 \\ x^3 - A_2 B_2 x & B_1 & A_1 x^2 - B_2 A_3 \\ -A_3 B_2 & 1 & A_2 x - B_1 A_3 \end{vmatrix} = 0$$

or expanding

$$x^6 - A_1 B_1 x^5 + (A_1^2 B_2 + B_1^2 A_2 - 2 A_2 B_2) x^4 + B_1 (3 A_3 B_2 - A_3 B_1^2 - A_1 A_2 B_2) x^3$$
$$+ B_2 (A_1 A_3 B_1^2 + A_2^2 B_2 - 2 A_1 A_3 B_2) x^2 - A_2 A_3 B_1 B_2^2 x + A_3^2 B_2^3 = 0.$$

III. Two-Cubics.

Let the given equations be

$$\begin{aligned} x^3 - A_1 x^2 + A_2 x - A_3 &= 0 \\ x^3 - B_1 x^2 + B_2 x - B_3 &= 0. \end{aligned}$$

Then the required equation will be

$$\begin{vmatrix} B_2 x^3 - A_1 B_3 x^2 & B_3 & x^3 & 0 \\ B_1 x^3 - A_2 B_3 x & B_2 & A_1 x^2 & x^3 - A_3 B_3 \\ x^3 - A_3 B_3 & B_1 & A_2 x & A_1 x^3 - A_3 B_2 \\ 0 & 1 & A_3 & A_2 x - A_3 B_1 \end{vmatrix} = 0$$

which expanded gives

$$x^9 - A_1 B_1 x^8 + (A_1^2 B_2 + B_1^2 A_2 - 2 A_2 B_2) x^7$$
$$+ (3 A_1 A_2 B_3 + 3 B_1 B_2 A_3 - A_1^3 B_3 - A_1^3 A_3 - 3 A_3 B_3 - A_1 A_2 B_1 B_2) x^6$$
$$+ (A_1^2 A_2 B_1 B_3 + B_1^2 B_2 A_1 A_3 + A_2^2 B_2^2 - A_1 A_3 B_1 B_3 - 2 A_1 A_3 B_2^2 - 2 B_1 B_3 A_2^2) x^5$$
$$+ (2 A_1^2 A_3 B_2 B_3 + 2 B_1^2 B_3 A_2 A_3 - A_1^2 A_3 B_1^2 B_3 + A_2 A_3 B_2 B_3 - A_1 A_2^2 B_2 B_3 - B_1 B_2^2 A_2 A_3) x^4$$
$$+ (A_1 A_2 A_3 B_1 B_2 B_3 - 3 A_1 A_2 A_3 B_3^2 - 3 B_1 B_2 B_3 A_3^2 + A_3^2 B_2^3 + A_2^3 B_3^2 + 3 A_3^2 B_3^2) x^3$$
$$- A_3 B_3 (A_2^2 B_1 B_3 + B_2^2 A_1 A_3 - 2 A_1 A_3 B_1 B_3) x^2 + A_2 A_3^2 B_2 B_3^2 x + A_3^3 B_3^3 = 0.$$

IV. A Biquadratic and Quadratic

Let the given equations be

$$x^4 - A_1x^3 + A_2x^2 - A_3x + A_4 = 0$$
$$x^2 - B_1x + B_2 = 0.$$

Then the required equation is

$$\begin{vmatrix} B_1x^4 - A_1B_2x^3 & B_2 & 0 & x^4 \\ x^4 - A_2B_2x^2 & B_1 & B_2 & A_1x^3 \\ -A_3B_2x & 1 & B_1 & A_2x^2 - B_2A_4 \\ -A_4B_2 & 0 & 1 & A_3x - B_1A_4 \end{vmatrix} = 0$$

which expanded gives

$$x^8 - A_1B_1x^7 + (A_1^2B_2 + B_1^2A_2 - 2A_2B_2)x^6 + (3A_3B_1B_2 - A_3B_1^3 - A_1A_2B_1B_2)x^5$$
$$+ (A_1A_3B_1^2B_2 + A_2^2B_2^2 + 2A_4B_2^2 + A_4B_1^4 - 2A_1A_3B_2^2 - 4A_4B_1^2B_2)x^4$$
$$+ (3A_1A_4B_1B_2^2 - A_1A_4B_1^3B_2 - A_2A_3B_1B_2^2)x^3 + (A_2A_4B_1^2B_2^2 + A_3^2B_2^3 + 2A_2A_4B_2^3)x^2$$
$$- A_3A_4B_1B_2^3x + A_4^2B_2^4 = 0.$$

If in equation (c) we change B_m to $\frac{1}{B_m}$, B_{m-1} to $\frac{B_1}{B_m}$ and so on we at once have the equation of which the roots are of the form $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ etc.; hence also we deduce the eliminant of the two equations in the form of a determinant somewhat simpler than that usually given, for to do so we need only put $x = 1$ in the equation just, mentioned.

For example the eliminant of the two cubics

$$x^3 - A_1x^2y + A_2xy^2 - A_3y^3$$

and

$$x^3 - B_1x^2y + B_2xy^2 - B_3y^3$$

may be written

$$\begin{vmatrix} B_1 - A_1 & 1 & 1 & 0 \\ B_2 - A_2 & B_1 & A_1 & B_3 - A_3 \\ B_3 - A_3 & B_2 & A_2 & A_1B_3 - A_3B_1 \\ 0 & B_3 & A_3 & A_2B_3 - A_3B_2 \end{vmatrix}$$

and the eliminant of

$$x^4 - A_1x^3y + A_2x^2y^2 - A_3xy^3 + A_4y^4$$

and

$$x^2 - B_1 xy + B_2 y^2$$

may be written

$$\begin{vmatrix} A_1 - B_1 & 1 & 0 & B_2 \\ A_2 - B_2 & B_1 & 1 & A_1 B_2 \\ A_3 & B_2 & B_1 & A_2 B_2 - A_4 \\ A_4 & 0 & B_2 & A_3 B_2 - A_4 B_1 \end{vmatrix}.$$

Hence also we can write down the discriminant of any equation in the form of a determinant for if we form the equation of which the roots are the roots of the given equation each divided by a root of its first derived we get the required discriminant by writing $x = 1$ in the result.

For example, the discriminant of the cubic

$$x^3 - A_1 x^2 + A_2 x - A_3$$

may be written

$$\begin{vmatrix} A_1 & 3 & A_2 \\ 2A_2 & 2A_1 & A_1 A_2 - 3A_3 \\ 3A_3 & A_2 & A_2^2 - 2A_1 A_3 \end{vmatrix}.$$

In a similar manner, considering the single equation

$$x^n - A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} \cdots \pm A_n = 0$$

we can determine the equation of which the roots are the products of pairs of the roots of the given equation.

First consider the equation

$$x^{2m} - p_1 x^{2m-1} + p_2 x^{2m-2} + p_{2m} = 0.$$

If the roots are x_1, x_2, x_3,... x_{2m} then if

$$x_1 x_2 = x_3 x_4 = \cdots x_{2m-1} x_{2m}$$

it is easily seen, as before, that the coefficients must be connected by the relations

$$\begin{array}{ll} p_1 (p_{2m})^{\frac{m-1}{m}} = p_{2m-1}, & p_2 (p_{2m})^{\frac{m-2}{m}} = p_{2m-2} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{m-2} (p_{2m})^{\frac{2}{m}} = p_{m+2}, & p_{m-1} (p_{2m})^{\frac{1}{m}} = p_{m+1}. \end{array}$$

Hence if we multiply the given equation by

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \cdots (x - x_{n-2})$$

we see that the equations

$$(A_1+X_1)P^{\frac{n-2}{n-1}}=A_nX_{n-3}+\frac{A_{n-1}}{A_n}P$$

$$(A_2+A_1X_1+X_2)P^{\frac{n-3}{n-1}}=A_nX_{n-4}+A_{n-1}X_{n-3}+\frac{A_{n-2}}{A_n}P$$

$$(A_3+A_2X_1+A_1X_2+X_3)P^{\frac{n-4}{n-1}}=A_nX_{n-5}+A_{n-1}X_{n-4}+A_{n-2}X_{n-3}+\frac{A_{n-3}}{A_n}P$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(A_{n-3}+A_{n-4}X_1+\cdots+X_{n-3})P^{\frac{2}{n-1}}=A_nX_1+A_{n-1}X_2+\cdots\frac{A_3}{A_n}P$$

and finally

$$(A_{n-2}+A_{n-3}X_1+A_{n-4}X_2+\cdots+X_{n-2})P^{\frac{1}{n-1}}=A_n+A_{n-1}X_1+\cdots+A_2X_{n-2}$$

where $P=A_nX_{n-2}$, are equivalent to

$$x_1\alpha_1=x_2\alpha_2=x_3\alpha_3\cdots=\alpha_{n-1}\alpha_n$$

α_1 α_2 α_3 α_n being the roots of the given equation.

From these last relations we see that the values of $P^{\frac{1}{n-1}}$ are the products of pairs of roots of the given equation, hence putting $P=x^{n-1}$ and remembering that $A_nX_{n-2}=P$, by eliminating from the previous equations X_1, X_2, X_3,... X_{n-3} we get for our required equation, of which the roots are the products of pairs of roots of the original, the following,

$$\begin{vmatrix}
x^n-A_2x^{n-1}+A_{n-2}A_nx-A^2_n & A_{n-3}x-A_{n-1} & A_{n-4}x-A_{n-2}\ldots & A_2x-A_4 & A_1x-A_3 \\
A_nA_{n-3}x^2-A_3x^{n-1} & A_{n-4}x^2-A_n & A_{n-5}x^2-A_{n-1}\ldots & A_1x^2-A_5 & x^2-A_4 \\
A_nA_{n-4}x^3-A_4x^{n-1} & A_{n-5}x^3 & A_{n-6}x^3-A_n\ldots & x^3-A_6 & -A_5 \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\
A_nA_2x^{n-3}-A_{n-2}x^{n-1} & A_1x^{n-3} & x^{n-3}\ldots & -A_n & -A_{n-1} \\
A_nA_1x^{n-2}-A_{n-1}x^{n-1} & x^{n-2} & 0\ldots & 0 & -A_n
\end{vmatrix}$$

$$=0$$

for example take the sextic equation

$$x^6 - A_1x^5 + A_2x^4 - A_3x^3 + A_4x^2 - A_5x + A_6 = 0$$

the required equation is

$$\begin{vmatrix} x^6 - A_2x^5 - A_4A_6x - A_6^2 & A_3x - A_5 & A_2x - A_4 & A_1x - A_3 \\ A_3A_6x^2 - A_3x^5 & A_2x^2 - A_6 & A_1x^2 - A_5 & x^2 - A_4 \\ A_2A_6x^3 - A_4x^5 & A_1x^3 & x^3 - A_6 & -A_5 \\ A_1A_6x^4 - A_5x^5 & x^4 & 0 & -A_6 \end{vmatrix} = 0$$

which expanded is

$$\begin{gathered} x^{15} - A_2x^{14} + (A_1A_3 - A_4)x^{13} + (A_1A_5 + 2A_2A_4 - A_1^2A_4 - A_3^2 - A_6)x^{12} \\ + (A_1^3A_5 + A_1A_3A_4 + A_3A_5 + 2A_2A_6 - A_1^2A_6 - 3A_1A_2A_5 - A_4^2)x^{11} \\ + (4A_1^2A_2A_6 + 2A_1A_4A_5 + 2A_2A_3A_5 + 2A_4A_6 - A_1^4A_6 - A_1^2A_3A_5 - 3A_1A_3A_6 \\ - 2A_2^2A_6 - A_2A_4^2 - 2A_5^2)x^{10} \\ + (A_1^3A_3A_6 + A_1A_2A_4A_5 + 3A_1A_5A_6 + A_2A_5^2 + 2A_3^2A_6 + A_4^3 - A_1^2A_5^2 - A_1^2A_4A_6 \\ - 3A_1A_2A_3A_6 - 3A_3A_4A_5 - 2A_6^2)x^9 \\ + (A_1^3A_5A_6 + A_1A_3A_4A_6 + 2A_1A_3A_5^2 + 2A_2^2A_4A_6 + A_4A_5^2 - A_1^2A_2A_4A_6 - A_1^2A_6^2 \\ - A_1A_2A_5A_6 - A_1A_4^2A_5 - A_2^2A_5^2 - 3A_3A_5A_6 - A_4^2A_6)x^8 \\ + (A_1^2A_4^2A_6 + A_1A_2^2A_5A_6 + 3A_1A_3A_6^2 + A_1A_4A_5A_6 + A_2^2A_6^2 + A_2A_4A_5^2 + A_5^2A_6 \\ - A_1^2A_2A_6^2 - 2A_1^2A_3A_5A_6 - A_1A_5^3 - A_2A_3A_5A_6 - 2A_2A_4^2A_6)x^7 \\ + (A_1^2A_5^2A_6 + 3A_1A_2A_3A_6^2 + A_2A_5^2A_6 + 3A_3A_4A_5A_6 + 2A_6^3 - A_1^2A_4A_6^2 \\ - A_1A_2A_4A_5A_6 - 3A_1A_5A_6^2 - A_2^3A_6^2 - A_3A_5^3 - 2A_3^2A_6^2)x^6 \\ + (2A_1^2A_6^3 + A_1A_3A_5^2A_6 + A_2^2A_4A_6^2 + 3A_3A_5A_6^2 + 2A_4^2A_6^2 + A_5^4 - 2A_1A_2A_5A_6^2 \\ - 2A_1A_3A_4A_6^2 - 2A_2A_6^3 - 4A_4A_5^2A_6)x^5 \\ + A_6(3A_1A_4A_5A_6 + A_2^2A_6^2 + A_5^2A_6 - A_1A_3A_6^2 - A_1A_5^3 - A_2A_3A_5A_6 - 2A_4A_6^2)x^4 \\ + A_6^2(A_2A_5^2 + A_3^2A_6 + A_6^2 - A_1A_5A_6 - 2A_2A_4A_6)x^3 + A_6^3(A_2A_6 - A_3A_5)x^2 \\ + A_4A_6^4x - A_6^5 = 0. \end{gathered}$$

Dublin, December 1^{s} 1878.

FINE DEL TOMO IX.^{o} (SERIE II.^{a})