ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DAL

prof. Francesco Brioschi

IN MILANO

colla cooperazione dei professori:

Luigi Cremona *in Roma* — Enrico Betti *in Pisa*

Eugenio Beltrami *in Pavia* — Felice Casorati ~~*in*~~ *Pavia.*

SERIE II - TOMO XVII

(dal maggio 1889 al febbraio 1890).

MILANO.

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XVII.º (SERIE II.ª)

Indice.

Fondamenti della teoria dei tipi ordinati. (*)

(*Di* Giulio Vivanti, *a Mantova.*)

§ I.

1. *Definizione.* Abbiasi un aggregato d'elementi qualisivogliano (materiali o no), e sieno questi ordinati in n sensi; cioè, presi due elementi qualunque, sia noto se l'uno abbia rango inferiore, eguale o superiore all'altro in ciascuno degli n sensi che si prendono in considerazione.

Eccone alcuni esempi.

a) L'insieme di tutte le note d'un pezzo di musica è un aggregato ordinato in 4 sensi, quando si considerino i suoi elementi come ordinati: 1.° secondo la successione di tempo; 2.° secondo il valore; 3.° secondo l'altezza; 4.° secondo l'intensità.

b) L'insieme di tutti i punti d'un dipinto è un aggregato ordinato in 3 sensi, quando si considerino i suoi elementi come ordinati: 1.° secondo la grandezza dell'ascissa; 2.° secondo quella dell'ordinata; 3.° secondo il colore (lunghezza d'onda).

c) L'insieme dei punti d'un campo ad n dimensioni è un aggregato ordinato in n sensi, quando si considerino i suoi elementi come ordinati rispetto alle grandezze delle loro n coordinate.

(*) I principi di questa teoria, dovuta all'illustre matematico Giorgio Cantor, furono da lui esposti nelle *Mittheilungen zur Lehre vom Transfiniten (Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik,* T. 91, 92). Da questo lavoro, dalla tesi di laurea di Hermann Schwarz (*Ein Beitrag zur Th. d. Ordnungstypen,* Halle a. S. 1888), e da alcune lettere direttemi dal prof. Cantor, che gentilmente mi permise di farne libero uso, ho desunta la presente esposizione, la quale si limita per ora alla teoria dei tipi finiti. Di mio non v'è che la disposizione della materia in ordine sistematico, l'uso costante d'una imagine geometrica dei tipi, qualche aggiunta, generalizzazione o mutamento di forma qua e là, e molta parte del § V.

Se nella considerazione d'un insieme ordinato in n sensi si fa astrazione dalla natura speciale degli elementi, è chiaro che ad esso può sostituirsi un insieme come quello ultimamente descritto [es. *c*)], i cui punti sieno ordinati secondo le n direzioni degli assi di riferimento nello stesso modo in cui sono ordinati secondo gli n sensi gli elementi dell'insieme considerato.

Tutti gli aggregati rappresentabili mediante uno stesso aggregato di punti ad n dimensioni si dicono *simili,* oppure appartenenti ad uno stesso *tipo ordinato (Ordnungstypus)* ad n dimensioni. Per conseguenza ogni tipo ad n dimensioni può essere rappresentato da un insieme di punti posti in uno spazio ad n dimensioni.

Se questi punti sono tutti differenti, il tipo si dice *puro;* in caso contrario si dice *misto.* Ogniqualvolta non si avverta il contrario, s'intenderà di parlare di tipi puri.

2. *Sui numeri trasfiniti.* Non sarà inutile far vedere quale stretto legame esista fra la teoria dei tipi e quella dei numeri trasfiniti, e rammentare brevemente i principii di quest'ultima teoria.

Se si ha un aggregato lineare, ossia ordinato in un solo senso, e se inoltre esso è *ben ordinato* (*), cioè se possiede un primo elemento e a ciascun suo elemento ne succede un altro determinato (**), allora il tipo a cui esso appartiene prende il nome di *numero ordinale.* È chiaro che qualunque tipo lineare finito è un numero ordinale; ma lo stesso non può asserirsi pei tipi infiniti (***). I numeri ordinali infiniti sono identici coi *numeri trasfiniti* di Cantor, di cui passiamo a discorrere.

Se si considera l'insieme di tutti i punti d'un tratto rettilineo aventi ascissa razionale, è noto che essi possono ordinarsi in modo che il loro insieme corrisponda elemento ad elemento alla serie naturale dei numeri 1, 2,...; in altre parole, i punti considerati possono disporsi in *serie semplice.* La cosa non è più possibile invece quando si tratti dell'insieme dei punti aventi ascissa irrazionale; e lo stesso fenomeno si verifica per infiniti altri aggregati di punti. Ma, come l'impossibilità di certe operazioni in determinati casi ha condotto

(*) Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre,* § 2.

(**) Tale sarebbe, per esempio, l'insieme dei numeri (o dei punti aventi per ascisse i numeri) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},\ldots$ Invece l'insieme dei numeri razionali maggiori di zero considerati come disposti in ordine di grandezza non possiede alcuna delle due proprietà caratteristiche degli aggregati ben ordinati.

(***) V. la nota precedente.

a creare i numeri negativi, frazionari, irrazionali, imaginari, ideali, così anche qui l'impossibilità accennata ebbe per conseguenza un'estensione considerevole, indefinita delle serie dei numeri interi.

Abbiasi la serie $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$, dove ν è un numero intero finito; ν può considerarsi come il numero ordinale corrispondente a questa serie, cioè come espressione del fatto che essa è simile alla serie $1, 2, \ldots, \nu$. Se si ha invece la serie infinita $a_1, a_2, \ldots$, si esprime il fatto che essa è simile alla serie naturale dei numeri $1, 2, \ldots$ presa in tutta la sua estensione dicendo che essa ha per numero ordinale ω; e questo ω (che indicherò anche con ω_1) si definisce come *il più piccolo numero intero trasfinito,* ossia come il numero immediatamente successivo alla serie di tutti i numeri interi finiti. Da ω si deducono innumerevoli altri numeri trasfiniti; servano d'esempio $\omega + 1$, $\omega + \nu$, $\omega \cdot 2$, ω^2, che sono i numeri ordinali delle serie:

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3, \ldots,\quad b_1$$
$$a_1,\quad a_2,\quad a_3, \ldots,\quad b_1,\quad b_2,\quad b_3, \ldots,\quad b_\nu$$
$$a_1,\quad a_2,\quad a_3, \ldots,\quad b_1,\quad b_2,\quad b_3, \ldots$$
$$a_1^{(1)},\quad a_2^{(1)},\quad a_3^{(1)}, \ldots,\quad a_1^{(2)},\quad a_2^{(2)},\quad a_3^{(2)}, \ldots,\quad a_1^{(3)},\quad a_2^{(3)},\quad a_3^{(3)}, \ldots.$$

Come si vede, il processo di generazione dei nuovi numeri si fonda su due principi differenti; l'uno consiste nell'aggiungere un'unità ad un numero già noto (es. $\omega + 1$, $\omega + \nu$), l'altro nel creare un nuovo numero da considerarsi come immediatamente superiore ad una successione indefinita di numeri conosciuti (es. ω, $\omega \cdot 2$, ω^2). In virtù di questo secondo principio noi potremo, giunti ad un certo punto, creare un numero *del tutto nuovo* Ω (od ω_2) (*), che verrà definito come il numero immediatamente successivo a tutti quelli già ottenuti; indi procedere alla creazione di nuovi numeri combinando fra loro quelli già noti od introducendone altri affatto nuovi $\omega_3, \omega_4, \ldots$; e così di seguito indefinitamente. Ma qui si presenta spontanea una questione: Qual è il punto, giunti al quale si verifica la necessità d'introdurre un numero del tutto nuovo ω_i? La risposta ci è fornita da un terzo principio, che può dirsi *principio di limitazione;* ma per parlare di questo è necessario premettere alcuni cenni sui *numeri cardinali* o *potenze.*

Se in un tipo ordinato in uno o più sensi si fa astrazione dall'ordine degli elementi, potrà ad esso sostituirsi un insieme d'unità comunque disposte, tale

(*) Dicendo che Ω è del tutto nuovo, intendo che esso non si ottiene mediante operazioni eseguite sui numeri precedenti. Della stessa natura è ω.

che a ciascun elemento del tipo considerato corrisponda un solo elemento dell'insieme e reciprocamente. Tutti i tipi che possono essere sostituiti da un medesimo insieme, ossia che possono, a parte l'ordine degli elementi, riferirsi univocamente l'uno all'altro, si dicono *equivalenti;* e l'insieme d'unità che li rappresenta viene designato come il *numero cardinale* o la *potenza* di ciascuno di essi. È chiaro che v'ha un solo tipo lineare finito avente un dato numero cardinale; per es. il numero cardinale 5 appartiene al tipo formato di 5 punti in linea retta, e a nessun altro tipo lineare diverso da questo. In altre parole, quando si tratta di numeri finiti, non v'ha luogo a distinzione alcuna fra i numeri cardinali e gli ordinali; e di qui segue che una parte d'un insieme finito ha sempre potenza inferiore a quella dell'insieme totale. Al contrario v'hanno innumerevoli tipi lineari infiniti aventi una stessa potenza; e può avvenire in particolare che abbiano la stessa potenza un aggregato infinito ed una parte di esso. Se due aggregati M, N non sono equivalenti, e può separarsi da M un aggregato parziale equivalente ad N, si dice che la potenza di M è *maggiore* di quella di N. *Il più piccolo numero cardinale infinito* è quello che compete all'insieme $1, 2, \ldots$; esso si designa con o_1, mentre o_2, $o_3, \ldots$ denotano i numeri cardinali successivi.

È tempo ora di dire in che consista il principio di limitazione sopra accennato. Esso può enunciarsi dicendo che la creazione d'un numero affatto nuovo ω_i deve aver luogo soltanto quando l'insieme di tutti i numeri già formati ha la potenza o_i.

I numeri ordinali finiti costituiscono la 1.ª *classe* di numeri; quelli compresi fra ω_1 ed ω_2 (ω_2 escl.) la 2.ª; in generale quelli compresi fra ω_{i-1} ed ω_i (ω_i escl.) costituiscono la i^{esima} classe. La serie ben ordinata $0, 1, 2, \ldots, \nu - 1$, dove ν è un numero finito, ha per numero ordinale e per numero cardinale ν. La serie ben ordinata costituita da tutti i numeri ordinali inferiori ad un numero α della i^{esima} classe ($i > 1$) ha per numero ordinale α e per numero cardinale o_{i-1}.

Il tipo a cui appartiene un aggregato M si denota con $\overline{M}$, il suo numero cardinale con $\overline{\overline{M}}$. Il numero cardinale d'un tipo α s'indica con $\overline{\alpha}$.

§ II.

3. Tornando ora all'oggetto principale del presente lavoro, tratterò anzitutto delle operazioni che possono farsi sui tipi e di alcune classificazioni a cui essi dànno luogo.

Addizione. Sieno M, N due aggregati (*) ad n dimensioni appartenenti rispettivamente ai tipi α e β, e si riuniscano i loro elementi in un solo aggregato $M+N$ caratterizzato dalle seguenti proprietà:

a) Gli elementi di M conservano in $M+N$ la loro disposizione relativa rispetto a ciascuna delle n direzioni, e lo stesso ha luogo per gli elementi di N;

b) Gli elementi di N hanno in $M+N$ rango superiore a quelli di M rispetto a tutte le n direzioni.

Il tipo a cui appartiene $M+N$ si definisce come la *somma* $\alpha+\beta$ dei due tipi α e β; α dicesi l'*augendo*, β l'*addendo*. L'addizione è un'operazione univoca, associativa ma non commutativa; il numero cardinale del tipo $\alpha+\beta$ è la somma di quelli dei tipi α e β.

Operazioni analoghe all'addizione. Può concepirsi un'infinità di siffatte operazioni, fra le quali accennerò soltanto alla seguente.

Abbiasi un aggregato P ad n dimensioni, e si imaginino i suoi elementi disposti in una serie ben ordinata e_0, e_1, e_2,..., e_λ; ciò è sempre possibile, e λ è un numero finito, se P è un insieme finito, un numero trasfinito dell'i^{esima} classe, se P è un insieme di potenza o_{i-1}. Abbiasi inoltre un insieme ben ordinato di aggregati ad n dimensioni M_0, M_1, M_2,..., M_λ avente il numero ordinale λ, e si riuniscano gli elementi di questi aggregati in un aggregato unico N avente le seguenti proprietà:

a) Gli elementi di M_i conservano in N la loro disposizione relativa rispetto a ciascuna delle n direzioni;

b) Ciascun elemento di M_i ha relativamente a qualunque elemento di M_j la stessa disposizione (rispetto a tutte le n direzioni) che ha e_i relativamente ad e_j.

Il tipo $\overline{N}$ a cui appartiene N può dirsi la *somma dei tipi* $\overline{M_i}$ *rispetto alla base* P.

Moltiplicazione. L'operazione precedente si riduce alla *moltiplicazione* quando gli aggregati M_i sono tutti fra loro simili. Detto $\overline{M}$ il tipo comune a cui appartengono, si ha: $\overline{N}=\overline{M}\,\overline{P}$; $\overline{M}$ dicesi *moltiplicando*, $\overline{P}$ *moltiplicatore*. La moltiplicazione è un'operazione univoca, associativa e distributiva, ma non commutativa. Si ha poi $\overline{\overline{N}}=\overline{\overline{M}}\cdot\overline{\overline{P}}$.

(*) Poichè ogni tipo può essere rappresentato da un aggregato di punti ad n dimensioni, si potrà eseguire lo studio matematico dei tipi sopra aggregati di questa natura; quindi d'ora innanzi, parlando dei tipi ordinati, intenderò sempre di riferirmi agli aggregati di punti che li rappresentano.

Tipi primi. Un tipo α si dice *primo,* quando, in qualunque modo lo si scomponga nel prodotto di due altri, il moltiplicatore è o α o il *tipo unità* (tipo degli aggregati costituiti da un solo elemento).

Tipi coniugati. Se si ha un tipo α ad n dimensioni, e si costruisce un tipo β pure ad n dimensioni, avente lo stesso numero cardinale, e tale che i rapporti di posizione dei suoi elementi rispetto alla μ^{esima} ed alla ν^{esima} direzione sieno identici a quelli degli elementi di α rispetto alla ν^{esima} ed alla μ^{esima} direzione, e che i rapporti di posizione rispetto alle altre $n-2$ direzioni sieno gli stessi nei due tipi, si dice che β si è ottenuto da α mediante *permutazione* delle direzioni μ^{esima} e ν^{esima}. — Da un tipo possono ottenersi mediante ripetute permutazioni $n!-1$ tipi, in generale tutti diversi.

Dato un tipo α, si può invertire la disposizione de' suoi elementi rispetto ad una determinata direzione, per modo che il rango d'un elemento sia $\gtreqless$ di quello d'un altro rispetto a quella direzione secondochè era prima $\lesseqgtr$. Il tipo così costruito dicesi *inverso* di α rispetto alla direzione considerata. I tipi inversi d'un tipo dato sono in numero di 2^n-1.

Per l'applicazione simultanea della permutazione e dell'inversione un tipo α dà luogo a $2^n n!$ tipi (compreso α), in generale tutti diversi, che diconsi *coniugati.*

Tipi associati. Se si *trasforma* un tipo α in maniera che gli elementi di esso aventi il μ^{esimo} rango rispetto alla λ^{esima} direzione assumano il ν^{esimo} rango e viceversa, il tipo così ottenuto dicesi *associato* ad α (*). Tutti i tipi tra loro associati costituiscono una *classe* di tipi.

Ogni tipo inverso d'un tipo finito è ad esso associato. Ciò non sussiste in generale pei tipi infiniti.

§ III.

4. *Tipi finiti.* In un tipo finito v'ha luogo a distinguere:

a) Il suo numero cardinale m, ossia il numero d'elementi di cui consta;

b) Il numero n delle sue dimensioni;

c) Le grandezze $s_1, s_2, \ldots, s_n$ delle medesime, intendendo per grandezza d'una dimensione il numero dei ranghi rispetto alla direzione corrispondente che figurano effettivamente nel tipo considerato.

(*) All'operazione descritta corrisponde, nella rappresentazione geometrica di cui parleremo più avanti (n.° 5), lo scambio dei piani ad $n-1$ dimensioni condotti normalmente al λ^{esimo} asse coordinato alle distanze μ e ν dall'origine.

5. *Rappresentazione geometrica.* A facilitare lo studio dei tipi finiti serve la seguente rappresentazione geometrica. Si assuma nello spazio euclideo ad n dimensioni un sistema d'assi ortogonali, e si divida quella porzione dello spazio che è compresa tra le parti positive dei piani (ad $n-1$ dimensioni) coordinati in infiniti cubi di lato 1 aventi gli spigoli paralleli agli assi. I vertici di questi cubi non giacenti sopra alcuno dei piani coordinati saranno tutti i punti aventi per coordinate numeri interi e positivi. Se ora si ha un insieme M, di m elementi, ad n dimensioni, appartenente al tipo α, e se l'elemento $e^{(h)}$ di esso occupa il $(\mu_i^{(h)})^{\text{esimo}}$ rango rispetto alla i^{esima} direzione, noi rappresenteremo quell'elemento mediante il punto avente le coordinate $\mu_1^{(h)}, \mu_2^{(h)}, \ldots, \mu_n^{(h)}$; gli m punti così ottenuti come corrispondenti agli m elementi di M costituiranno un insieme di punti P simile ad M e che potrà prendersi come rappresentante del tipo α (*).

Prendiamo ora il più piccolo parallelepipedo composto di cubi elementari contenente nel suo interno o sulla superficie tutti i punti dell'insieme P, e conduciamo esternamente ad esso dei piani (ad $n-1$ dimensioni) paralleli alle sue facce alla distanza $\frac{1}{2}$ da esse; otteniamo così un nuovo parallelepipedo le cui dimensioni sono le dimensioni stesse del tipo α, e nel quale questo tipo può dirsi *inscritto*.

Diremo che tutti i tipi dello stesso numero d'elementi inscritti in un medesimo parallelepipedo appartengono ad uno stesso *genere* (*classe* secondo Schwarz). È chiaro che tutti i tipi fra loro associati appartengono ad uno stesso genere; quindi un genere si compone d'un certo numero di classi complete.

Il numero dei tipi associati ad un tipo di dimensioni $s_1, s_2, \ldots, s_n$ è $s_1!\, s_2! \ldots s_n!$.

6. *Tipi connessi.* Se a, b sono due punti d'un tipo finito α, e si può passare da a a b seguendo una spezzata i cui lati sieno paralleli a qualcuno degli assi e i cui vertici $c_1, c_2, \ldots$, sieno elementi del tipo, si dice che i punti a, b sono tra loro *collegati* per mezzo della *catena* $a, c_1, c_2, \ldots, b$. Se tutti gli elementi d'un tipo sono collegati due a due, il tipo dicesi *connesso.*

Se un tipo α non è connesso, si vede facilmente che esso può scomporsi in una sola maniera in gruppi connessi tra loro separati, cioè tali che due punti qualunque appartenenti a gruppi diversi non sieno tra loro collegati. Gli elementi d'un gruppo continuano a costituire un gruppo connesso anche quando

(*) Se α fosse un tipo misto, alcuni dei punti di P sarebbero *punti multipli*, cioè ciascuno di essi rappresenterebbe due o più elementi di M.

al tipo α si faccia subire una trasformazione qualsiasi, e fra i tipi associati ad α ve n'ha uno almeno che è la somma di più tipi connessi.

Il tipo unità può considerarsi come un tipo connesso.

Tipi semplici. Dicesi *composto* ogni tipo che è la somma di due o più altri, *semplice* ogni altro tipo.

Ogni tipo connesso è semplice; ogni tipo sconnesso è o composto, o associato d'un tipo composto, sicchè ogni classe di tipi sconnessi contiene almeno un tipo composto.

§ IV.

7. La prima questione che si presenta nello studio de' tipi finiti è la seguente: Determinare il numero dei tipi aventi un dato numero cardinale m. Esporrò nel presente paragrafo quanto si riferisce a questo problema e ad altre questioni che più o meno direttamente ad esso si connettono.

8. *Metodo di Cantor.* A ciascun punto a coordinate intere $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ contenuto nel parallelepipedo P in cui è inscritto un dato tipo si assegni un coefficiente $k_{\lambda_1 \ldots, \lambda_n}$, il quale sia zero se quel punto non rappresenta alcun elemento del tipo, 1 se rappresenta un elemento di esso (p se è un punto p-uplo, quando si tratti di tipi misti). Dette $s_1, \ldots, s_n$ le dimensioni di P, e indicando con g_i ($i = 1, 2, \ldots, s_1$) il numero degli elementi del tipo che si trovano sul piano (ad $n - 1$ dimensioni) condotto normalmente al primo asse coordinato alla distanza i dall'origine, dovrà essere:

$$\sum_{i=1}^{s_1} g_i = m$$

$$\sum_{\substack{\lambda_2 = 1, \ldots, s_2 \\ \cdots\cdots \\ \lambda_n = 1, \ldots, s_n}} k_{i, \lambda_2 \ldots, \lambda_n} = g_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, s_1). \tag{1}$$

Affinchè poi il tipo considerato non sia inscrittibile in alcun parallelepipedo minore di P, devono tutte le g_i essere diverse da zero, e inoltre devono sussistere le seguenti $\sum\limits_{h=2}^{n} s_h$ disuguaglianze:

$$\sum_{\substack{\lambda_1 = 1, \ldots, s_1 \\ \cdots\cdots \\ \lambda_{h-1} = 1, \ldots, s_{h-1} \\ \lambda_{h+1} = 1, \ldots, s_{h+1} \\ \cdots\cdots \\ \lambda_n = 1, \ldots, s_n}} k_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{h-1}, i, \lambda_{h+1}, \ldots, \lambda_n} > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s_h;\ h = 2, 3, \ldots, n). \tag{2}$$

Indichiamo con $\varphi(g_1,\ldots, g_{s_1}; s_2,\ldots, s_n)$ [o, quando ciò non possa generare equivoci, con $\varphi(s_2,\ldots, s_n)$] il numero di soluzioni del sistema (1), con $\varphi'(g_1,\ldots, g_{s_1}; s_2,\ldots, s_n)$ [o con $\varphi'(s_2,\ldots, s_n)$] il numero di quelle soluzioni del sistema (1) che soddisfanno le disuguaglianze (2). Poichè le k non possono prendere che i soli valori 0 e 1, la i^{esima} equazione (1) avrà $\binom{\prod_{h=2}^{n} s_h}{g_i}$ soluzioni, quindi sarà:

$$\varphi(s_2,\ldots, s_n) = \prod_{i=1}^{s_1} \binom{\prod_{h=2}^{n} s_h}{g_i}.$$

Come si vede, φ dipende soltanto dal prodotto delle s, sicchè può anche scriversi $\varphi\left(\prod_{h=2}^{n} s_h\right)$. Ora, mentre φ' ci dà il numero dei tipi (di m elementi distribuiti secondo i numeri g_i) inscritti in P, φ ci dà il numero dei tipi (della natura sopra accennata) inscritti, non solo in P, ma anche in tutti i possibili parallelepipedi contenuti entro P e aventi per prima dimensione s_1. Di qui si deduce senza alcuna difficoltà che:

$$\varphi(s_2,\ldots, s_n) = \varphi\left(\prod_{h=2}^{n} s_h\right) = \sum_{\substack{\mu_2=0,\ldots,s_2-1\\ \cdots\cdots\cdots\\ \mu_n=0,\ldots,s_n-1}} \binom{s_2}{\mu_2}\cdots\binom{s_n}{\mu_n}\varphi'(s_2-\mu_2,\ldots, s_n-\mu_n), \quad (3)$$

ossia, ponendo μ_h invece di $s_h - \mu_h$:

$$\varphi(s_2,\ldots, s_n) = \varphi\left(\prod_{h=2}^{n} s_h\right) = \sum_{\substack{\mu_2=1,\ldots,s_2\\ \cdots\cdots\\ \mu_n=1,\ldots,s_n}} \binom{s_2}{\mu_2}\cdots\binom{s_n}{\mu_n}\varphi'(\mu_2,\ldots \mu_n), \quad (4)$$

donde notoriamente (*):

$$\varphi'(s_2,\ldots, s_n) = \sum_{\substack{\mu_2=0,\ldots,s_2-1\\ \cdots\cdots\cdots\\ \mu_n=0,\ldots,s_n-1}} (-1)^{\mu_2+\ldots+\mu_n}\binom{s_2}{\mu_2}\cdots\binom{s_n}{\mu_n}\varphi\left(\prod_{h=2}^{n}(s_h-\mu_h)\right). \quad (5)$$

(*) Ecco come può ricavarsi la (5) dalla (4). Si consideri il sistema delle $\prod_{i=2}^{n}\sigma_i$ equazioni ottenute dalla (4) dando ad s_2 i valori $1, 2,\ldots, \sigma_2$, ad s_3 i valori $1, 2,\ldots, \sigma_3,\ldots$, ad s_n i valori $1, 2,\ldots \sigma_n$. Si moltiplichi l'equazione corrispondente ai valori $\overline{s}_h$ delle s_h per $(-1)^{\overline{s}_2+\cdots+\overline{s}_n}\binom{\sigma_2}{\overline{s}_2}\cdots\binom{\sigma_n}{\overline{s}_n}$ e si sommino i prodotti. Il primo membro dell'equazione risul-

Se quindi s'indica con $\Phi(m, n)$ il numero dei tipi puri ad n dimensioni aventi il numero cardinale m, si ha, scrivendo t'_{h-1}, μ_{h-1} invece di s_h, μ_h e ponendo $t' = (t'_1 - \mu_1)(t'_2 - \mu_2) \cdots (t'_{n-1} - \mu_{n-1})$:

$$\Phi(m, n) = \sum_{\substack{\mu_1 = 0,\ldots, t'_1 - 1 \\ \cdots\cdots \\ \mu_{n-1} = 0,\ldots, t'_{n-1}-1 \\ g_1 + g_2 + \ldots + g_s = m \\ s = 1, 2,\ldots, m \\ t'_1 = 1, 2,\ldots, m \\ \cdots\cdots \\ t'_{n-1} = 1, 2,\ldots, m}} (-1)^{\mu_1 + \cdots + \mu_{n-1}} \binom{t'_1}{\mu_1} \cdots \binom{t'_{n-1}}{\mu_{n-1}} \varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s;\ t').$$

---

tante sarà:

$$\sum_{\substack{s_2 = 1,\ldots, \sigma_2 \\ \cdots\cdots \\ s_n = 1,\ldots, \sigma_n}} (-1)^{s_2 + \cdots + s_n} \binom{\sigma_2}{s_2} \cdots \binom{\sigma_n}{s_n} \varphi(s_2, \ldots, s_n),$$

ossia, facendo $\sigma_i - s_i = \mu_i$ ed osservando che $\binom{\sigma_i}{s_i} = \binom{\sigma_i}{\mu_i}$:

$$(-1)^{\sigma_2 + \cdots + \sigma_n} \sum_{\substack{\mu_2 = 0,\ldots, \sigma_2 - 1 \\ \cdots\cdots \\ \mu_n = 0,\ldots, \sigma_n - 1}} (-1)^{\mu_2 + \cdots + \mu_n} \binom{\sigma_2}{\mu_2} \cdots \binom{\sigma_n}{\mu_n} \varphi(\sigma_2 - \mu_2, \ldots, \sigma_n - \mu_n).$$

Il secondo membro sarà:

$$(-1)^{\sigma_2 + \cdots + \sigma_n} \varphi'(\sigma_2, \ldots, \sigma_n) + \sum_{(\sigma)} c_{\mu_2, \ldots, \mu_n} \varphi'(\mu_2, \ldots, \mu_n),$$

dove l'indice (σ) significa che si esclude la combinazione di valori: $\mu_2 = \sigma_2, \ldots, \mu_n = \sigma_n$. L'equazione (5) sarà adunque dimostrata, se faremo vedere che i coefficienti c sono tutti nulli. Ora:

$$c_{\mu_2, \ldots, \mu_n} = \sum_{\substack{s_2 = \mu_2, \ldots, \sigma_2 \\ \cdots\cdots \\ s_n = \mu_n, \ldots, \sigma_n}} (-1)^{s_2 + \cdots + s_n} \binom{s_2}{\mu_2} \cdots \binom{s_n}{\mu_n} \binom{\sigma_2}{s_2} \cdots \binom{\sigma_n}{s_n},$$

$$\binom{s}{\mu}\binom{\sigma}{s} = \frac{s!\,\sigma!}{\mu!\,(s-\mu)!\,s!\,(\sigma - s)!} = \frac{\sigma!\,(\sigma-\mu)!}{\mu!\,(s-\mu)!\,(\sigma-s)!\,(\sigma-\mu)!} = \binom{\sigma}{s}\binom{\sigma-\mu}{s-\mu},$$

quindi:

$$c_{\mu_2, \ldots, \mu_n} = \binom{\sigma_2}{\mu_2} \cdots \binom{\sigma_n}{\mu_n} \sum_{\substack{s_2 = \mu_2, \ldots, \sigma_2 \\ \cdots\cdots \\ s_n = \mu_n, \ldots, \sigma_n}} (-1)^{s_2 + \cdots + s_n} \binom{\sigma_2 - \mu_2}{s_2 - \mu_2} \cdots \binom{\sigma_n - \mu_n}{s_n - \mu_n} =$$

$$= (-1)^{\mu_2 + \cdots + \mu_n} \binom{\sigma_2}{\mu_2} \cdots \binom{\sigma_n}{\mu_n} \sum_{\substack{s_2 = 0, \ldots, \sigma_2 - \mu_2 \\ \cdots\cdots \\ s_n = 0, \ldots, \sigma_n - \mu_n}} (-1)^{s_2 + \cdots + s_n} \binom{\sigma_2 - \mu_2}{s_2} \cdots \binom{\sigma_n - \mu_n}{s_n}.$$

Ma la somma che figura nell'ultima espressione di $c_{\mu_2, \ldots, \mu_n}$ è eguale a $\prod_i (1-1)^{\sigma_i - \mu_i}$, dove il prodotto è esteso a tutti i valori di i per cui $\mu_i < \sigma_i$; e, poichè almeno per un valore di i tale condizione è soddisfatta, resta provato che $c_{\mu_2, \ldots, \mu_n} = 0$.

Raccogliendo i termini in cui $t'_h - \mu_h$ ha uno stesso valore t_h, e ponendo:

$$C(m, t) = \binom{m}{t} - \binom{m-1}{t} + \binom{m-2}{t} - \cdots + (-1)^{m-t}\binom{t}{t} = \sum_{\mu=0}^{m-t}(-1)^{\mu}\binom{m-\mu}{t}$$

$$C(m, n, t) = \sum_{\substack{t_1 t_2 \ldots t_{n-1} = t \\ t_1 = 1, 2, \ldots, m \\ \cdots\cdots \\ t_{n-1} = 1, 2, \ldots, m}} (-1)^{m(n-1)-t_1-t_2-\cdots-t_{n-1}} C(m, t_1) C(m, t_2) \ldots C(m, t_{n-1})$$

$$D(m, t) = \sum_{\substack{g_1 + \ldots + g_s = m \\ s = 1, 2, \ldots, m}} \varphi(g_1, g_2, \ldots, g_s; t),$$

si ottiene:

$$\Phi(m, n) = \sum_{t=1, 2, \ldots, m^{n-1}} C(m, n, t) \cdot D(m, t) \text{ (*)}.$$

Per la funzione $C(m, t)$ hanno luogo le seguenti relazioni:

$$C(m+1, t+1) = C(m, t+1) + C(m, t)$$

$$C(m, m) = 1$$

$$C(m, t) = 0 \quad \text{per} \quad t > m.$$

Anche per la funzione $D(m, t)$ v'ha una formola ricorrente. Dall' espres-

(*) Il calcolo del numero dei tipi puri e misti presi insieme è del tutto analogo a quello del numero dei tipi puri. Qui invece della funzione φ figura la funzione ψ che rappresenta il numero di soluzioni delle (1) quando alle k possano darsi valori interi non negativi qualisivogliano; ed è facile vedere che:

$$\psi(s_2, \ldots, s_n) = \psi\left(\prod_{h=2}^{n} s_h\right) = \prod_{i=1}^{s_1}\binom{\prod_{h=2}^{n} s_h + g_i - 1}{g_i}.$$

Detto $\Psi(m, n)$ il numero dei tipi puri e misti ad n dimensioni aventi il numero cardinale m, e posto:

$$E(m, t) = \sum_{\substack{g_1 + \ldots + g_s = m \\ s = 1, 2, \ldots, m}} \psi(g_1, g_2, \ldots, g_s; t),$$

si trova:

$$\Psi(m, n) = \sum_{t=1, 2, \ldots, m^{n-1}} C(m, n, t) \, . \, E(m, t).$$

Fra le $\Phi(m, n)$, $\Psi(m, n)$ sussistono le relazioni:

$$\Psi(m, n) = \sum_{\mu=0}^{m-1}\binom{m-1}{\mu}\Phi(m-\mu, n) \qquad \Phi(m, n) = \sum_{\mu=0}^{m-1}(-1)^{\mu}\binom{m-1}{\mu}\Psi(m-\mu, n).$$

sione di $D(m, t)$ si ha:

$$D(m+1, t) = \sum_{\substack{g_0+g_1+\dots+g_s=m+1 \\ s=0,1,\dots,m}} \varphi(g_0, g_1, \dots, g_s; t);$$

al valore 0 di s corrisponde nel secondo membro l'unico termine $\varphi(m+1; t)$ ossia $\binom{t}{m+1}$, quindi:

$$D(m+1, t) = \binom{t}{m+1} + \sum_{\substack{g_0+g_1+\dots+g_s=m+1 \\ s=1,2,\dots,m}} \varphi(g_0, g_1, \dots, g_s; t) =$$

$$= \binom{t}{m+1} + \sum_{\substack{g_1+\dots+g_s=m+1-g_0 \\ s=1,2,\dots,m+1-g_0 \\ g_0=1,2,\dots,m}} \binom{t}{g_0} \varphi(g_1, \dots, g_s; t),$$

donde si ha:

$$D(m+1, t) = \binom{t}{m+1} + \sum_{\mu=1}^{m} \binom{t}{m+1-\mu} D(\mu, t) = \sum_{\mu=1}^{m-1} \binom{t}{\mu} D(m+1-\mu, t),$$

posto $D(0, t) = 1$. Si ha inoltre per ogni valore di m:

$$D(m, 1) = 1.$$

Le formole precedenti offrono il mezzo di calcolare $C(m, t)$ e $D(m, t)$ per tutti i valori di m e di t.

9. *Metodo di Schwarz.* Dalle prime formole di Cantor avrebbe potuto dedursi, invece che $\varphi(m, n)$, il numero $V^{(m)}_{s_1, s_2, \dots, s_n}$ dei tipi di m elementi appartenenti ad un dato genere ossia inscritti in un parallelepipedo di dimensioni assegnate $s_1, s_2, \dots, s_n$. Questo numero fu determinato da Schwarz, e da esso si deduce immediatamente $\Phi(m, n)$ mediante l'equazione:

$$\Phi(m, n) = \sum_{\substack{s_1=1,\dots,m \\ \cdots\cdots \\ s_n=1,\dots,m}} V^{(m)}_{s_1,\dots,s_n}. \tag{6}$$

Le formole di Schwarz possono dividersi in 3 gruppi.

Primo gruppo. Le considerazioni da cui parte Schwarz sono affatto analoghe a quelle che formano la base del metodo di Cantor.

Sia G un dato genere, rappresentato dal parallelepipedo P di dimensioni $s_1, \dots, s_n$, e si dica *inferiore* a G qualunque genere G' tale che nessuna dimensione del parallelepipedo che lo rappresenta sia superiore, ed una almeno sia inferiore, alla dimensione corrispondente di P; se non si può asserire che quest'ultima condizione sia soddisfatta, si dirà che G' *non è superiore* a G.

Si denoti con $f^{(m)}\binom{s_1 \dots s_\nu}{s_{\nu+1} \dots s_n}$ il numero dei tipi di m elementi inscritti in tutti i possibili parallelepipedi contenuti entro P (compreso P stesso) le cui prime ν dimensioni sono precisamente $s_1, \dots, s_\mu$. Sarà in particolare:

$$f^{(m)}\binom{s_1 \dots s_n}{0} = V^{(m)}_{s_1, \dots, s_n}$$

$$f^{(m)}\binom{0}{s_1 \dots s_n} = \binom{s_1 \dots s_n}{m},$$

(numero delle disposizioni di m elementi identici fra loro in $s_1 s_2 \dots s_n$ posti):

$$f^{(m)}\binom{s_1}{s_2 s_3 \dots s_n} = \sum_{g_1 + \dots + g_{s_1} = m} \varphi\left(g_1, \dots, g_{s_1}; \prod_{h=2}^{n} s_h\right) = \sum_{g_1 + \dots + g_{s_1} = m} \prod_{i=1}^{s_1} \binom{\prod_{h=2}^{n} s_h}{g_i}.$$

Il ragionamento con cui s'è ottenuto la formola (3) conduce pure alla seguente:

$$\left.\begin{aligned} & f^{(m)}\binom{s_1 \dots s_\nu}{s_{\nu+1} \dots s_n} = \\ & = \sum_{\substack{\mu_{\nu+1} = 0, \dots, s_{\nu+1} - 1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mu_{\nu+\lambda} = 0, \dots, s_{\nu+\lambda} - 1}} \binom{s_{\nu+1}}{\mu_{\nu+1}} \dots \binom{s_{\nu+\lambda}}{\mu_{\nu+\lambda}} f^{(m)}\binom{s_1, \dots, s_\nu, s_{\nu+1} - \mu_{\nu+1}, \dots, s_{\nu+\lambda} - \mu_{\nu+\lambda}}{s_{\nu+\lambda+1}, \dots, s_n}, \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

da cui si ricava (cfr. il numero precedente):

$$\left.\begin{aligned} & f^{(m)}\binom{s_1 \dots s_{\nu+\lambda}}{s_{\nu+\lambda+1} \dots s_n} = \\ & = \sum_{\substack{\mu_{\nu+1} = 0, \dots, s_{\nu+1} - 1 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mu_{\nu+\lambda} = 0, \dots, s_{\nu+\lambda} - 1}} (-1)^{\mu_{\nu+1} + \dots + \mu_{\nu+\lambda}} \binom{s_{\nu+1}}{\mu_{\nu+1}} \dots \binom{s_{\nu+\lambda}}{\mu_{\nu+\lambda}} f^{(m)}\binom{s_1, \dots, s_\nu}{s_{\nu+1} - \mu_{\nu+1}, \dots, s_{\nu+\lambda} - \mu_{\nu+\lambda}, s_{\nu+\lambda+1}, \dots, s_n}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Da ciascuna delle (7), (8) possono dedursi tante formole diverse, quante sono le coppie di valori possibili di ν, λ. Per es.: si ha per $\nu = 0$, $\lambda = n$:

$$\binom{s_1 s_2 \dots s_n}{m} = \sum_{\substack{\mu_1 = 0, \dots, s_1 - 1 \\ \dots\dots\dots \\ \mu_n = 0, \dots, s_n - 1}} \binom{s_1}{\mu_1} \dots \binom{s_n}{\mu_n} V^{(m)}_{s_1 - \mu_1, \dots, s_n - \mu_n} \quad (9)$$

$$V^{(m)}_{s_1, \dots, s_n} = \sum_{\substack{\mu_1 = 0, \dots, s_1 - 1 \\ \dots\dots\dots \\ \mu_n = 0, \dots, s_n - 1}} (-1)^{\mu_1 + \dots + \mu_n} \binom{s_1}{\mu_1} \dots \binom{s_n}{\mu_n} \binom{(s_1 - \mu_1) \cdots (s_n - \mu_n)}{m}, \quad (10)$$

e per $\nu = 1$, $\lambda = n$:

$$\sum_{g_1+\dots+g_{s_1}=m} \prod_{i=1}^{s_1} \binom{\prod_{h=2}^{n} s_h}{g_i} = \sum_{\substack{\mu_2=0,\dots,s_2-1\\ \cdots\cdots\\ \mu_n=0,\dots,s_n-1}} \binom{s_2}{\mu_2}\cdots\binom{s_n}{\mu_n} V^{(m)}_{s_1,\, s_2-\mu_2,\dots,\, s_n-\mu_n}$$

$$V^{(m)}_{s_1,\dots,s_n} = \sum_{\substack{g_1+\dots+g_{s_1}=m\\ \mu_2=0,\dots,s_2-1\\ \cdots\cdots\\ \mu_n=0,\dots,s_n-1}} (-1)^{\mu_2+\dots+\mu_n} \binom{s_2}{\mu_2}\cdots\binom{s_n}{\mu_n} \prod_{i=1}^{s_1} \binom{\prod_{h=2}^{n} (s_h-\mu_h)}{g_i}.$$

Dalla (9) si ha, ponendo $s_i - \mu_i = \rho_i$ e ricordando che $\binom{s_i}{\mu_i} = \binom{s_i}{\rho_i}$:

$$\binom{s_1\, s_2 \dots s_n}{m} = \sum_{\substack{\rho_1=1,\dots,m\\ \cdots\cdots\\ \rho_n=1,\dots,m}} \binom{s_1}{\rho_1}\cdots\binom{s_n}{\rho_n} V^{(m)}_{\rho_1,\dots,\rho_n}, \tag{11}$$

dove è indifferente porre m invece di s_i come limite superiore di ρ_i perchè per $\rho_i > s_i$ $\binom{s_i}{\rho_i}$ è nullo. È chiaro che la (11) continua a sussistere anche se tutte od alcune delle s_i sono maggiori di m, purchè si convenga (come del resto è naturale) che V è nullo quando qualcuno dei suoi indici è $> m$. Ne segue che la (11) sussiste per tutti i valori, interi o no, delle s, cioè che è un'identità. Questa formola fu trovata per altra via dal prof. Goldscheider di Berlino.

Secondo gruppo. Riflettendo che da un tipo di $m + \mu$ elementi si possono togliere in $\binom{m+\mu}{\mu}$ modi diversi μ elementi, è facile persuadersi della verità del seguente teorema:

Se a ciascuno dei $\Phi(m, n)$ tipi di m elementi s'aggiungono μ elementi in tutti i diversi modi possibili rispetto alle varie direzioni, s'ottengono tutti i $\Phi(m + \mu, n)$ tipi di $m + \mu$ elementi, e ciascuno di questi ripetuto $\binom{m+\mu}{\mu}$ volte.

Applichiamo il teorema al caso di $\mu = 1$. Sieno $s_1, \dots, s_n$ le dimensioni d'un tipo di m elementi. Un nuovo elemento che s'aggiunga a questo tipo potrà avere rispetto alla i^{esima} direzione, o rango superiore, o rango inferiore a quelli di tutti gli m elementi, o identico ad uno, o intermedio fra due di essi; il che ci dà in tutto $2s_i + 1$ possibilità diverse. Rispetto a tutte le direzioni prese insieme avremo quindi $\prod_{i=1}^{n} (2s_i + 1)$ disposizioni possibili; ma fra queste sono comprese quelle in cui il nuovo elemento coincide con uno dei primitivi, disposizioni che devono escludersi, trattandosi qui unicamente di tipi puri. Il numero delle disposizioni possibili si riduce adunque a $\prod_{i=1}^{n}(2s_i+1)-m$, e dal teorema testè enunciato si ha:

$$(m+1)\Phi(m+1,\,n)=\sum_{\substack{s_1=1,\dots,m\\ \cdots\cdots\\ s_n=1,\dots,m}}\left\{\prod_{i=1}^{n}(2s_i+1)-m\right\}V^{(m)}_{s_1,\dots,s_n},$$

ossia, tenendo conto della (6):

$$(m+1)\Phi(m+1,\,n)+m\Phi(m,\,n)=\sum_{\substack{s_1=1,\dots,m\\ \cdots\cdots\\ s_n=1,\dots,m}}(2s_1+1)\cdots(2s_n+1)V^{(m)}_{s_1,\dots,s_n}.$$

Consideriamo in particolare i $V^{(m+1)}_{s_1,\dots,s_n}$ tipi di $m+1$ elementi inscritti nel parallelepipedo P di dimensioni $s_1,\dots,\,s_n$. Essi provengono:

a) Dai $V^{(m)}_{s_1,\dots,s_n}$ tipi di m elementi inscritti in P; il nuovo elemento può essere rappresentato da uno qualunque dei $s_1,\dots s_n-m$ punti di P non occupati dagli elementi primitivi. Si ottengono così $(s_1\,s_2\dots s_n-m)V^{(m)}_{s_1,\dots,s_n}$ tipi di $m+1$ elementi;

b) Dai $V^{(m)}_{\binom{s_1,\dots,s_n}{\lambda,\,1}}$ tipi di m elementi inscritti in un parallelepipedo di cui λ dimensioni sono minori d'una unità delle dimensioni corrispondenti di P, ciò che si vuol denotare colla segnatura $\binom{s_1,\dots,\;s_n}{\lambda,\;1}$. Il nuovo elemento può prendere rispetto a ciascuna di queste λ direzioni, o rango superiore, o rango inferiore agli $s-1$ ranghi degli elementi primitivi, o intermedio fra due di essi, onde si hanno s possibilità. Rispetto a ciascuna delle altre $n-\lambda$ direzioni il nuovo elemento deve essere lo stesso rango d'uno degli elementi già esistenti, sicchè si hanno anche qui s casi possibili. Adunque s'ottengono in tutto $s_1\,s_2\dots s_n\,V^{(m)}_{\binom{s_1,\dots,s_n}{\lambda,\,1}}$ tipi di $m+1$ elementi.

Rammentando che ciascun tipo di $m+1$ elementi figura $m+1$ volte, si ha dunque:

$$(m+1)V^{(m+1)}_{s_1,\dots,s_n}=s_1\,s_2\dots s_n\sum_{\lambda=0}^{n}V^{(m)}_{\binom{s_1,\dots,s_n}{\lambda,\,1}}-m\,V^{(m)}_{s_1,s_2,\dots,s_n},$$

ossia, ponendo $m-1$ invece di m:

$$m\,V^{(m)}_{s_1,\dots,s_n}=s_1\,s_2\dots,s_n\sum_{\lambda=0}^{n}V^{(m-1)}_{\binom{s_1,\dots,s_n}{\lambda,\,1}}-(m-1)\,V^{(m-1)}_{s_1,\dots,s_n},\tag{12}$$

dove la somma del secondo membro è estesa a tutti i valori di λ da 0 ad n e a tutte le combinazioni delle $s_1, \ldots, s_n$ a λ a λ.

Terzo gruppo. Consideriamo ancora i $V^{(m+1)}_{s_1,\ldots,s_n}$ tipi inscritti nel parallelepipedo P di dimensioni $s_1, \ldots, s_n$. Projettando questi tipi sopra un piano ad $n-1$ dimensioni normale all'n^{esimo} asse coordinato, s'ottengono dei tipi, eventualmente misti, ad $n-1$ dimensioni di m elementi inscritti nel parallelogrammo di dimensioni $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$; questi tipi possono considerarsi come tipi puri di $m-h$ elementi dando ad h valori convenienti, ed è facile vedere che si ottengono così tutti i $\sum V^{(m-h)}_{s_1,\ldots,s_{n-1}}$ tipi corrispondenti ai valori $0, 1, \ldots$ di h. Ciascuno d'essi però sarà ripetuto un certo numero di volte. Per determinare questo numero facciamo il cammino inverso. Considerando uno qualunque T dei $V^{(m-h)}_{s_1,\ldots,s_{n-1}}$ tipi corrispondenti ad un determinato valore di h, per ottenere da esso uno dei $V^{(m)}_{s_1,\ldots,s_n}$ tipi ad n dimensioni dobbiamo sulle normali al piano Π ad $n-1$ dimensioni in cui giace T innalzate dagli $m-h$ punti di T distribuire m punti i quali abbiano s_n ranghi differenti rispetto alla direzione comune di quelle normali (direzione dell'n^{esimo} asse coordinato). Vediamo in quanti modi ciò possa farsi. Conduciamo per l'origine delle coordinate una retta r giacente nel piano Π e soggetta alla condizione che gli $m-h$ punti del tipo T si projettino su di essa in punti tutti distinti; nel piano (propriamente detto) determinato da r e dall'n^{esimo} asse coordinato gli m punti del tipo ad n dimensioni costruito si proietteranno in m punti distinti costituenti un tipo a 2 dimensioni inscritto nel rettangolo di dimensioni s_n, $m-h$. E poichè i tipi di questa natura sono in numero di $V^{(m)}_{s_n, m-h}$ e nessuno di essi può essere proiezione di due diversi tipi ad n dimensioni derivanti da T, sarà:

$$V^{(m)}_{s_1,\ldots,s_n} = \sum_{h=0,1,\ldots} V^{(m-h)}_{s_1,\ldots,s_{n-1}} V^{(m)}_{s_n, m-h}. \tag{13}$$

Il limite superiore di h è determinato dalla condizione $m-h \geq \bar{s}$, essendo $\bar{s}$ il più grande dei numeri $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$.

Con ragionamento analogo s'ottiene la formola:

$$V^{(m)}_{s_1,\ldots,s_n} = \sum_{h=0,1,\ldots} V^{(m-h)}_{s_1,\ldots,s_{n-\nu}} V^{(m)}_{s_{n-\nu+1},\ldots,s_n, m-h}. \tag{14}$$

Se $s_1 = m$, nelle (13), (14) h prende il solo valore 0, sicchè esse divengono:

$$\left.\begin{aligned} V^{(m)}_{m, s_2,\ldots,s_n} &= V^{(m)}_{m, s_2,\ldots,s_{n-1}} V^{(m)}_{s_n, m} \\ V^{(m)}_{m, s_2,\ldots,s_n} &= V^{(m)}_{m, s_2,\ldots,s_{n-\nu}} V^{(m)}_{s_{n-\nu+1},\ldots,s_n, m}. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Rammentando che V è funzione simmetrica de'suoi indici, si ha dalla (15):

$$V^{(m)}_{m, s_1, \dots, s_n} = V^{(m)}_{m, s_2, \dots, s_n} V^{(m)}_{m, s_1},$$

e applicando quest'equazione ripetutamente:

$$V^{(m)}_{m, s_1, s_2, \dots, s_n} = V^{(m)}_{m, s_1} V^{(m)}_{m, s_2} \dots V^{(m)}_{m, s_n}.$$

D'altra parte si ha in virtù della (13):

$$V^{(m)}_{m, s_1, \dots, s_n} = V^{(m)}_{s_1, \dots, s_n, m} = \sum_{h=0, 1, \dots} V^{(m-h)}_{s_1, \dots, s_n} V^{(m)}_{m, m-h},$$

quindi:

$$V^{(m)}_{m, s_1} V^{(m)}_{m, s_2} \dots V^{(m)}_{m, s_n} = \sum_{h=0, 1, \dots} V^{(m-h)}_{s_1, \dots, s_n} V^{(m)}_{m, m-h}.$$

Ponendo in quest'equazione $s_1 = 1, 2, \dots, m$; $s_2 = 1, 2, \dots, m; \dots$; $s_n = 1, 2, \dots, m$, e sommando le m^n equazioni così ottenute, si ha:

$$[\sum_{s=1}^{m} V^{(m)}_{m, s}]^n = \sum_{\substack{s_1=1, \dots, m \\ \dots\dots \\ s_n=1, \dots, m \\ h=0, 1, \dots}} V^{(m-h)}_{s_1, \dots, s_n} V^{(m)}_{m, m-h} = \sum_{h=0, 1, \dots} \left\{ V^{(m)}_{m, m-h} \sum_{\substack{s_1=1, \dots, m \\ \dots\dots \\ s_n=1, \dots, m}} V^{(m-h)}_{s_1, \dots, s_n} \right\},$$

quindi in virtù della (6):

$$[\sum_{s=1}^{m} V^{(m)}_{m, s}]^n = \sum_{h=0, 1, \dots} V^{(m)}_{m, m-h} \Phi(m-h, n) = \Phi(1, n) V^{(m)}_{m, 1} +$$

$$+ \Phi(2, n) V^{(m)}_{m, 2} + \dots + \Phi(m, n) V^{(m)}_{m, m}.$$

Le formole trovate riducono il calcolo delle funzioni $\Phi(m, n)$, $V^{(m)}_{s_1, \dots, s_n}$ a quello della funzione V relativa ai tipi a due dimensioni.

Se, dopo aver posto nella (13) $n+1$ invece di n, si facesse $s_{n+1} = m-1$, si otterrebbero facilmente, tenendo conto anche della (14), le seguenti formole:

$$\sum_{h=0, 1, \dots} V^{(m-h)}_{s_1, \dots, s_n} V^{(m)}_{m-1, m-h} = \sum_{i=1, 2, \dots, n} V^{(m)}_{m, s_1} \dots V^{(m)}_{m, s_{i-1}} V^{(m)}_{m-1, s_i} V^{(m-1)}_{m-1, s_{i+1}} \dots V^{(m-1)}_{m-1, s_n}$$

$$\sum_{s=1}^{m} V^{(m)}_{m-1, s} \cdot \sum_{i=1}^{n} \{ [\sum_{s=1}^{m} V^{(m)}_{m, s}]^{i-1} [\sum_{s=1}^{m} V^{(m-1)}_{m-1, s}]^{m-i} \} = \Phi(1, n) V^{(m)}_{m-1, 1} +$$

$$+ \Phi(2, n) V^{(m)}_{m-1, 2} + \dots + \Phi(m, n) V^{(m)}_{m-1, m}.$$

Si ha poi dalla (13) sommando per tutti i valori di $s_1, \dots, s_n$ da 1 ad m e tenendo conto della (6):

$$\Phi(m, n) = \Phi(m, n-1)\sum_{s=1}^{m} V_{m,s}^{(m)} +$$

$$+ \Phi(m-1, n-1)\sum_{s=1}^{m} V_{m-1,s}^{(m)} + \cdots + \Phi(1, n-1)\sum_{s=1}^{m} V_{1,s}^{(m)}.$$

Formole relative ai tipi a due dimensioni. È importante studiare anzitutto le proprietà della funzione $V_{m,s}^{(m)}$, che denoteremo più semplicemente con $\Pi(m, s)$. Nella (12) si faccia $n = 2$, $s_1 = m$, $s_2 = s$; si avrà:

$$m\Pi(m, s) = ms\sum_{\lambda=0}^{2} V_{\binom{m,\, s}{\lambda,\, 1}}^{(m-1)} - (m-1)\, V_{m,s}^{(m-1)} =$$

$$= ms\,[V_{m,s}^{(m-1)} + V_{m,s-1}^{(m-1)} + V_{m-1,s}^{(m-1)} + V_{m-1,s-1}^{(m-1)}] - (m-1)\, V_{m,s}^{(m-1)},$$

e poichè $V_{m,s}^{(m-1)} = 0$:

$$\Pi(m, s) = s\,[\Pi(m-1, s) + \Pi(m-1, s-1)]. \tag{16}$$

Di qui si ha:

$$\Pi(m-1, s) = s\,[\Pi(m-2, s) + \Pi(m-2, s-1)]$$
$$\Pi(m-2, s) = s\,[\Pi(m-3, s) + \Pi(m-3, s-1)]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Pi(s, s) = s\,[\Pi(s-1, s) + \Pi(s-1, s-1)] = s\Pi(s-1, s-1).$$

Moltiplicando queste equazioni rispettivamente per $s, s^2, \ldots, s^{m-s}$ ed aggiungendole alla (16) si ottiene:

$$\Pi(m, s) = \sum_{h=1}^{m-s+1} s^h \Pi(m-h, s-1),$$

che è una formola ricorrente per $\Pi(m, s)$. Un'altra formola della stessa natura si deduce dalla (16) nel modo seguente. Si ha da questa equazione:

$$\Pi(m-1, s-1) = (s-1)\,[\Pi(m-2, s-1) + \Pi(m-2, s-2)]$$
$$\Pi(m-2, s-2) = (s-2)\,[\Pi(m-3, s-2) + \Pi(m-3, s-3)]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Pi(m-s+1, 1) = 1\,[\Pi(m-s, 1) + \Pi(m-s, 0)] = \Pi(m-s, 1).$$

Moltiplicando queste equazioni rispettivamente per s, $s(s-1), \ldots$, $s(s-1)\ldots 2$ ed aggiungendole alla (16), si ottiene:

$$\Pi(m, s) = \sum_{h=1}^{s} s(s-1)\cdots(s-h+1)\,\Pi(m-h, s-h+1). \tag{17}$$

Se nella (16) si pone $s = m$, si ha:

$$\Pi(m, m) = m\Pi(m-1, m-1),$$

quindi:

$$\Pi(m, m) = m!.$$

D'altronde la (17) diviene per $s = m$:

$$\Pi(m, m) = m!\,\Pi(0, 1).$$

Ne segue che affinchè la (17) sussista anche per $s = m$ si deve porre $\Pi(0, 1) = 1$.

Scrivendo nella (17) $m - s$ invece di s e $m - s + 1 - h'$ invece di h, essa prende la forma:

$$\Pi(m, m-s) = \sum_{h=1}^{m-s}(m-s)(m-s-1)\cdots h\Pi(h+s-1, h), \qquad (18)$$

ossia:

$$\Pi(m+s, m) = \sum_{h=1}^{m} m(m-s)\cdots h\Pi(h+s-1, h). \qquad (19)$$

Dalla (18) si deduce la seguente formola, che dimostrerò per induzione:

$$\Pi(m, m-s) = (m-s)!\sum_{h_1=1}^{m-s} h_1 \sum_{h_2=1}^{h_1} h_2 \sum_{h_3=1}^{h_2} h_3 \dots \sum_{h_s=1}^{h_{s-1}} h_s. \qquad (20)$$

Anzitutto la (18) ci dà per $s = 1$:

$$\Pi(m, m-1) = \sum_{h=1}^{m-1}(m-1)(m-2)\cdots h\Pi(h, h) =$$

$$= \sum_{h=1}^{m-1}(m-1)(m-2)\cdots h \cdot h! = (m-1)!\sum_{h=1}^{m-1} h,$$

sicchè la (20) sussiste per $h = 1$. Supposto ora che essa sia vera per $s - 1$, scrivendo $s - 1$ invece di s, e poi h_1 invece di $m - s + 1$, $h_2, h_3, \dots, h_s$ invece di $h_1, h_2, \dots, h_{s-1}$, essa diviene:

$$\Pi(h_1 + s - 1, h_1) = h_1!\sum_{h_2=1}^{h_1} h_2 \sum_{h_3=1}^{h_2} h_3 \dots \sum_{h_s=1}^{h_{s-1}} h_s,$$

e introducendo questo valore nella (18), ove si suppone scritto h_1 invece di h:

$$\Pi(m, m-s) = \sum_{h_1=1}^{m-s}(m-s)(m-s-1)\cdots h_1 \cdot h_1!\sum_{h_2=1}^{h_1} h_2 \sum_{h_3=1}^{h_2} h_3 \dots \sum_{h_s-1}^{h_{s-1}} h_s =$$

$$= (m-s)!\sum_{h_1=1}^{m-1} h_1 \sum_{h_2=1}^{h_1} h_2 \dots \sum_{h_s=1}^{h_{s-1}} h_s,$$

che è identica alla (20).

Ponendo per brevità:

$$\sum_{h_1=1}^{p} h_1 \sum_{h_2=1}^{h_1} h_2 \ldots \sum_{h_q=1}^{h_{q-1}} h_q = T(p, q),$$

la (20) diviene:

$$\Pi(m, m-s) = (m-s)!\, T(m-s, s),$$

ossia:

$$\Pi(m, s) = s!\, T(s, m-s).$$

Dopo ciò si ha dalla (16):

$$T(p, q) = T(p-1, q) + pT(p, q-1).$$

Ricordando il significato di $\Pi(m, s)$ e dei numeri $g_1, \ldots, g_s$, ed osservando che pei tipi inscritti nel rettangolo sm v'ha un solo elemento per ciascun rango rispetto alla seconda direzione, si vede facilmente che:

$$\Pi(m, s) = \sum_{g_1 + \ldots + g_s = m} \binom{m}{g_1} \binom{m-g_1}{g_2} \binom{m-g_1-g_2}{g_3} \cdots \binom{m-g_1-g_2-\cdots-g_{s-1}}{g_s} =$$

$$= \sum_{g_1 + \ldots + g_s = m} \frac{m!}{g_1!\, g_2! \ldots g_s!}.$$

Infatti, considerando il lato s come orizzontale e il lato m come verticale, i g_1 elementi della prima colonna possono disporsi su di essa in $\binom{m}{g_1}$ modi, i g_2 elementi della seconda colonna, dovendo stare su righe diverse da quelle su cui giacciono i g_1 elementi prima considerati, potranno disporsi in $\binom{m-g_1}{g_2}$ modi, e così di seguito. — Dalla formola trovata segue:

$$T(p, q) = \frac{1}{p!} \sum_{g_1 + \ldots + g_p = p+q} \frac{(p+q)!}{g_1!\, g_2! \ldots g_p!}.$$

Se t denota la seconda dimensione d'un tipo a due dimensioni, $(g_1, g_2, \ldots, g_s)$ il numero dei tipi di m elementi di cui g_i hanno il rango i^{esimo} rispetto alla prima direzione, si ha evidentemente:

$$(g_1, g_2, \ldots, g_s) = \sum_{t=\overline{g}}^{m} \varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s; t), \tag{21}$$

dove $\overline{g}$ è il più grande dei numeri g_i. Nel rettangolo st (di cui imaginiamo il lato s orizzontale, il lato t verticale) possono inscriversi $\varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s; t)$ tipi di m elementi di cui g_i stieno sulla i^{esima} verticale. Supponiamo di portare a coincidenza le prime due verticali; alcuni dei $g_1 + g_2$ punti in esse contenuti potranno sovrapporsi, sicchè sulla verticale doppia avremo $g_1 + g_2 - \nu$ punti distinti, potendo ν variare da 0 al più piccolo dei due numeri g_1, g_2. Questi punti insieme a quelli che stanno sulle altre verticali formeranno $\varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s; t)$ tipi inscritti nel rettangolo $(s-1)t$ aventi rispettivamente $g_1 + g_2 - \nu$, $g_3, \ldots, g_s$ elementi sulla 1.ª, 2.ª,..., $(s-1)^{\text{esima}}$ verticale; inoltre può asserirsi, che la costruzione eseguita conduce ad ottenere tutti i tipi di questa natura [che sono in numero di $\sum_\nu \varphi'(g_1 + g_2 - \nu, g_3, \ldots, g_s; t)$], e ciascuno di essi ripetuto tante volte, quante sono le diverse distribuzioni di g_1 punti sulla prima verticale e di g_2 punti sulla seconda che dànno origine ad una medesima distribuzione di $g_1 + g_2 - \nu$ punti sulla verticale doppia. Ora questo numero è evidentemente $\varphi'(g_1, g_2; g_1 + g_2 - \nu)$, quindi si ha:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s; t) = \\ &= \sum_{\nu=0}^{g_1} \varphi'(g_1 + g_2 - \nu, g_3, \ldots, g_s; t) \cdot \varphi'(g_1, g_2; g_1 + g_2 - \nu) \text{ (*)}. \end{aligned}\right\} \quad (22)$$

In modo del tutto analogo si dimostra la formola più generale:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s; t) = \\ &= \sum_{\nu=0}^{g_1+\cdots+g_{i-1}} \varphi'(g_1 + \cdots + g_i - \nu, g_{i+1}, \ldots, g_s; t) \cdot \varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_i; g_1 + g_2 + \cdots + g_i - \nu). \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Sostituendo a ciascun indice il suo complemento rispetto ad s, e poscia scrivendo i invece di $s - i - 1$ e mutando l'ordine degli argomenti delle φ' (che sono funzioni simmetriche), si ottiene, posto $\sum_{h=1}^{i} g_h = G_i$:

$$\left.\begin{aligned} &\varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_s; t) = \\ &= \sum_{\nu=0,\ldots} \varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_i, m - G_i - \nu; t) \cdot \varphi'(g_{i+1}, g_{i+2}, \ldots, g_s; m - G_i - \nu). \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Dalla (23) si ha sommando per tutti i valori di t da 1 ad m e tenendo conto della (21):

$$\begin{aligned} &(g_1, g_2, \ldots, g_s) = \\ &= \sum_{\nu=0}^{g_1+\cdots+g_{i-1}} (g_1 + \cdots + g_i - \nu, g_{i+1}, \ldots, g_s) \cdot \varphi'(g_1, g_2, \ldots, g_i; g_1 + g_2 + \cdots + g_i - \nu). \end{aligned}$$

(*) Se fosse $g_2 < g_1$, si dovrebbe propriamente porre a limite superiore g_2; ma è indifferente mettere invece g_1 o qualunque altro numero più grande, od anche omettere del tutto l'indicazione del limite superiore, giacchè nel caso considerato $\varphi'(g_1, g_2; g_1 + g_2 - \nu)$ è nulla per $\nu > g_2$.

La funzione $\varphi'(g_1, g_2; t)$ si calcola facilmente. I g_1 elementi che devono stare sulla prima verticale possono disporsi in $\binom{t}{g_1}$ modi; dei g_2 elementi della seconda verticale $t - g_1$ devono trovarsi sulle $t - g_1$ orizzontali su cui non v'è alcuno dei primi g_1 elementi, e gli altri $g_2 - (t - g_1)$ potranno distribuirsi nei restanti g_1 punti della seconda verticale in $\binom{g_1}{g_1 + g_2 - t}$ modi. Si ha quindi:

$$\varphi'(g_1, g_2; t) = \binom{t}{g_1}\binom{g_1}{g_1 + g_2 - t}.$$

Dopo ciò la (22) ci dà le seguenti formole ricorrenti, che possono servire pel calcolo delle funzioni $\varphi'(g_1, \ldots, g_s; t)$ e $(g_1, \ldots, g_s)$:

$$\left.\begin{aligned} \varphi'(g_1, \ldots, g_s; t) &= \sum_{\nu=0}^{g_1} \binom{g_1}{\nu}\binom{g_1 + g_2 - \nu}{g_1} \varphi'(g_1 + g_2 - \nu, g_3, \ldots, g_s; t) \\ (g_1, \ldots, g_s) &= \sum_{\nu=0}^{g_1} \binom{g_1}{\nu}\binom{g_1 + g_2 - \nu}{g_1} (g_1 + g_2 - \nu, g_3, \ldots, g_s), \end{aligned}\right\} \quad (25)$$

alle quali devono aggiungersi le relazioni evidenti:

$$\varphi'(g_1; t) = \begin{cases} 0 \text{ per } g_1 \gtrless t \\ 1 \text{ per } g_1 = t \end{cases}$$

$$(g_1) = 1.$$

La (25) diviene per $g_1 = 1$:

$$(1, g_2, \ldots, g_s) = (g_2 + 1)(g_2 + 1, g_3, \ldots, g_s) + g_2(g_2, g_3, \ldots, g_s),$$

quindi:

$$(1, r) = 2r + 1$$

$$(1, r, 1) = (r + 1)(r + 1, 1) + r(r, 1)$$

$$(1, r, 1, 1) = (r + 1)(r + 1, 1, 1) + r(r, 1, 1)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

ossia, rammentando che $(g_1, \ldots, g_s)$ è funzione simmetrica e denotando con $\chi_m(r)$ la funzione di m argomenti $(r, 1, 1, \ldots)$:

$$\chi_m(r) = (r + 1)\chi_{m-1}(r + 1) + r\chi_{m-1}(r).$$

Siccome poi evidentemente $\chi_m(1) = \sum_{s=1}^{m} \Pi(m, s)$, così la formola precedente ci dà il modo di calcolare questa somma per tutti i valori di m.

Indichiamo infine con $\overset{g_1,\dots,g_i}{U_{s,t}^{(m)}}$ il numero dei tipi a 2 dimensioni di m elementi inscritti nel rettangolo $s \cdot t$ e tali che sulle prime i verticali si trovino rispettivamente $g_1, g_2, \dots, g_i$ elementi (mentre i numeri $g_{i+1}, \dots, g_m$ restano arbitrari). Sommando la (24) rispetto a tutti i possibili valori di $g_{i+1}, \dots, g_m$ si ottiene:

$$\overset{g_1,\dots,g_i}{U_{s,t}^{(m)}} = \sum_{\nu=0,\dots} \varphi'(g_1, \dots, g_i, m - G_i - \nu;\ t)\, V_{s-i,\, m-G_i-\nu}^{(m-G_i)}.$$

10. *Formola di Goldscheider.* Di questa formola, che abbiamo già trovata nel numero precedente [equaz. (11)], Cantor dà la seguente dimostrazione, che in sostanza non differisce da quella di Schwarz. Come s'è già notato, basta far vedere che l'equazione sussiste per tutti i valori interi e positivi di $s_1, \dots, s_n$ perchè rimanga stabilito che essa è identicamente vera.

Mediante i punti del parallelepipedo di dimensioni $s_1, \dots, s_n$ possono formarsi $\binom{s_1 \dots s_n}{m}$ tipi di m elementi; d'altra parte nello stesso parallelepipedo sono contenuti $\binom{s_1}{\rho_1} \cdots \binom{s_n}{\rho_n}$ parallelepipedi di dimensioni $\rho_1, \dots, \rho_n$, e in ciascuno di essi sono inscritti $V_{\rho_1,\dots,\rho_n}^{(m)}$ tipi di m elementi. Si ha quindi:

$$\binom{s_1 \dots s_n}{m} = \sum_{\substack{\rho_1 = 1,\dots, s_1 \\ \cdots\cdots \\ \rho_n = 1,\dots, s_n}} \binom{s_1}{\rho_1} \cdots \binom{s_n}{\rho_n} V_{\rho_1,\dots,\rho_n}^{(m)}.$$

Siccome per $\rho_i > m$ $V_{\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_i,\dots,\rho_n}^{(m)} = 0$ e per $\rho_i > s_i$ $\binom{s_i}{\rho_i} = 0$, così tanto se $s_i > m$ come se $s_i < m$ si può prendere m come limite superiore di ρ_i, dopodichè l'equazione prende la forma (11).

Dando ad $s_1, \dots, s_n$ tutti i valori interi da 1 ad m e risolvendo il sistema così ottenuto dalla (11), si ricava la (10).

Anche molti altri risultati ottenuti da Schwarz possono dedursi dalla formola di Goldscheider. Io mi limiterò a far vedere, a guisa d'esempio, come se ne ricavino le relazioni (12) e (14).

È facile verificare per $n = 2$ la seguente identità:

$$\left.\begin{aligned} x_1 x_2 \dots x_n = s_1 s_2 \dots s_n + \overset{n}{S}(x_1 - s_1) s_2 \dots s_n + \\ + \overset{n}{S}(x_1 - s_1)(x_2 - s_2) s_3 \dots s_n + \cdots + (x_1 - s_1)(x_2 - s_2) \cdots (x_n - s_n), \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

dove $\overset{n}{S}$ indica la somma dell'espressione scritta e di quelle che si ottengono da essa scambiando gl'indici in tutti i modi possibili. Per dimostrarla in generale basta supporla vera per $n-1$, cioè porre:

$$x_2 \dots x_n = s_2 \dots s_n + \overset{n-1}{S} (x_2 - s_2) s_3 \dots s_n +$$
$$+ \overset{n-1}{S} (x_2 - s_2)(x_3 - s_3) s_4 \dots s_n + \cdots + (x_2 - s_2)(x_3 - s_3) \cdots (x_n - s_n),$$

e moltiplicare membro a membro per $x_1 = s_1 + (x_1 - s_1)$; è facile vedere che s'ottiene così la (26).

Si sottragga ora $m-1$ da ambi i membri della (26), e poscia si moltiplichi per $\binom{x_1}{s_1}\binom{x_2}{s_2}\cdots\binom{x_n}{s_n}$; osservando che $(x-s)\binom{x}{s} = (s+1)\binom{x}{s+1}$, si ottiene:

$$(x_1 x_2 \dots x_n - m + 1)\binom{x_1}{s_1}\binom{x_2}{s_2}\cdots\binom{x_n}{s_n} = (s_1 s_2 \dots s_n - m + 1)\binom{x_1}{s_1}\binom{x_2}{s_2}\cdots\binom{x_n}{s_n} +$$
$$+ \overset{n}{S}(s_1 + 1) s_2 \dots s_n \binom{x_1}{s_1+1}\binom{x_2}{s_2}\cdots\binom{x_n}{s_n} +$$
$$+ \overset{n}{S}(s_1 + 1)(s_2 + 1) s_3 \dots s_n \binom{x_1}{s_1+1}\binom{x_2}{s_2+1}\binom{x_3}{s_3}\cdots\binom{x_n}{s_n} +$$
$$+ \cdots + (s_1+1)(s_2+1)\cdots(s_n+1)\binom{x_1}{s_1+1}\binom{x_2}{s_2+1}\cdots\binom{x_n}{s_n+1}.$$

Moltiplicando per $V^{(m-1)}_{s_1,\dots,s_n}$ e sommando per tutti i valori di $s_1,\dots, s_n$ da 1 ad m (ciò che s'indicherà semplicemente con $\sum$), si ha:

$$\left.\begin{aligned}
&(x_1 x_2 \dots x_n - m + 1)\sum V^{(m-1)}_{s_1,\dots,s_n}\binom{x_1}{s_1}\binom{x_2}{s_2}\cdots\binom{x_n}{s_n} = \\
&= \sum(s_1 s_2 \dots s_n - m + 1) V^{(m-1)}_{s_1,\dots,s_n}\binom{x_1}{s_1}\binom{x_2}{s_2}\cdots\binom{x_n}{s_n} + \\
&+ \sum\overset{n}{S}(s_1+1) s_2 \dots s_n V^{(m-1)}_{s_1,\dots,s_n}\binom{x_1}{s_1+1}\binom{x_2}{s_2}\cdots\binom{x_n}{s_n} + \\
&+ \sum\overset{n}{S}(s_1+1)(s_2+1) s_3 \dots s_n V^{(m-1)}_{s_1,\dots,s_n}\binom{x_1}{s_1+1}\binom{x_2}{s_2+1}\binom{x_3}{s_3}\cdots\binom{x_n}{s_n} + \\
&+ \cdots + \sum(s_1+1)(s_2+1)\cdots(s_n+1) V^{(m-1)}_{s_1,\dots,s_n}\binom{x_1}{s_1+1}\binom{x_2}{s_2+1}\cdots\binom{x_n}{s_n+1}.
\end{aligned}\right\} \quad (27)$$

Ora per la (11):

$$\sum V^{(m-1)}_{s_1,\dots,s_n}\binom{x_1}{s_1}\binom{x_2}{s_2}\cdots\binom{x_n}{s_n} = \binom{x_1 x_2 \dots x_n}{m-1};$$

ma si ha identicamente:

$$(x_1 x_2 \dots x_n) - m + 1) \binom{x_1 x_2 \dots x_n}{m-1} = m \binom{x_1 x_2 \dots x_n}{m},$$

e applicando di nuovo la (11):

$$(x_1 x_2 \dots x_n - m + 1) \binom{x_1 x_2 \dots x_n}{m-1} = m \sum V^{(m)}_{s_1, \dots, s_n} \binom{x_1}{s_1} \binom{x_2}{s_2} \cdots \binom{x_n}{s_n},$$

quindi:

$$(x_1 x_2 \dots x_n - m + 1) \sum V^{(m-1)}_{s_1, \dots, s_n} \binom{x_1}{s_1} \binom{x_2}{s_2} \cdots \binom{x_n}{s_n} = m \sum V^{(m)}_{s_1, \dots, s_n} \binom{x_1}{s_1} \binom{x_2}{s_2} \cdots \binom{x_n}{s_n}.$$

Dopo ciò la (27) può scriversi così:

$$\begin{aligned} m \sum V^{(m)}_{s_1, \dots, s_n} \binom{x_1}{s_1} \cdots \binom{x_n}{s_n} &= -(m-1) \sum V^{(m-1)}_{s_1, \dots, s_n} \binom{x_1}{s_1} \binom{x_2}{s_2} \cdots \binom{x_n}{s_n} + \\ &+ \sum s_1 s_2 \dots s_n V^{(m-1)}_{s_1, \dots, s_n} \binom{x_1}{s_1} \binom{x_2}{s_2} \cdots \binom{x_n}{s_n} + \\ &+ \sum \overset{n}{S} s_1 s_2 \dots s_n V^{(m-1)}_{s_1-1, s_2, \dots, s_n} \binom{x_1}{s_1} \binom{x_2}{s_2} \cdots \binom{x_n}{s_n} + \\ &+ \sum \overset{n}{S} s_1 s_2 \dots s_n V^{(m-1)}_{s_1-1, s_2-1, s_3, \dots, s_n} \binom{x_1}{s_1} \binom{x_2}{s_2} \cdots \binom{x_n}{s_n} + \\ &+ \cdots + \sum s_1 s_2 \dots s_n V^{(m-1)}_{s_1-1, s_2-1, \dots, s_n-1} \binom{x_1}{s_1} \binom{x_2}{s_2} \cdots \binom{x_n}{s_n}. \end{aligned}$$

Eguagliando i coefficienti di $\binom{x_1}{s_1} \binom{x_2}{s_2} \cdots \binom{x_n}{s_n}$, si ottiene:

$$m V^{(m)}_{s_1, \dots, s_n} = -(m-1) V^{(m-1)}_{s_1, \dots, s_n} +$$

$$+ s_1 s_2 \dots s_n \left\{ V^{(m-1)}_{s_1, \dots, s_n} + \overset{n}{S} V^{(m-1)}_{s_1-1, s_2, \dots, s_n} + \overset{n}{S} V^{(m-1)}_{s_1-1, s_2-1, s_3, \dots, s_n} + \cdots + V^{(m-1)}_{s_1-1, s_2-1, \dots, s_n-1} \right\},$$

che coincide colla (12).

Riprendiamo la formola di Goldscheider. Da essa si deduce immediatamente:

$$\sum_{s_1, s_2, \dots, s_n} V^{(m)}_{s_1, \dots, s_n} \binom{x_1}{s_1} \cdots \binom{x_n}{s_n} = \binom{x_1 x_2 \dots x_n}{m} =$$

$$= \sum_{s_1, \dots, s_\nu, t} V^{(m)}_{s_1, \dots, s_\nu, t} \binom{x_1}{s_1} \cdots \binom{x_\nu}{s_\nu} \binom{x_{\nu+1} x_{\nu+2} \dots x_n}{t},$$

ma per la stessa formola:

$$\binom{x_{\nu+1} x_{\nu+2} \dots x_n}{t} = \sum_{s_{\nu+1}, s_{\nu+2}, \dots, s_n} V^{(t)}_{s_{\nu+1}, \dots, s_n} \binom{x_{\nu+1}}{s_{\nu+1}} \cdots \binom{x_n}{s_n},$$

quindi:

$$\sum_{s_1, s_2,\dots, s_n} V^{(m)}_{s_1,\dots,s_n}\binom{x_1}{s_1}\cdots\binom{x_n}{s_n} = \sum_{s_1,\dots, s_n, t} V^{(m)}_{s_1,\dots, s_\nu, t}\, V^{(t)}_{s_{\nu+1},\dots, s_n}\binom{x_1}{s_1}\cdots\binom{x_n}{s_n},$$

da cui, eguagliando i coefficienti di $\binom{x_1}{s_1}\cdots\binom{x_n}{s_n}$:

$$V^{(m)}_{s_1,\dots,s_n} = \sum_t V^{(m)}_{s_1,\dots, s_\nu, t}\, V^{(t)}_{s_{\nu+1},\dots, s_n},$$

che coincide colla (14).

Finirò coll'indicare una notevole espressione di $\Phi(m, n)$, che Goldscheider ha dedotta dalla formola da lui trovata. Moltiplicando ambi i membri di questa formola per $\xi_1^{x_1}\xi_2^{x_2}\dots\xi_n^{x_n}$ e sommando per tutti i valori interi e positivi di x_1, $x_2,\dots, x_n$, si ha:

$$\sum_{x_1,\dots, x_n}\binom{x_1\, x_2\dots x_n}{m}\xi_1^{x_1}\xi_2^{x_2}\dots\xi_n^{x_n} = \sum_{s_1,\dots, s_n}\ \sum_{x_1,\dots, x_n} V^{(m)}_{s_1,\dots, s_n}\binom{x_1}{s_1}\cdots\binom{x_n}{s_n}\xi_1^{x_1}\dots\xi_n^{x_n}.$$

Ora:

$$\sum_{x=1,\dots}\binom{x}{s}\xi^x = \sum_{x=s,\, s+1,\dots}\binom{x}{s}\xi^x = \frac{\xi^s}{(1-\xi)^{s+1}},$$

quindi:

$$\sum_{x_1,\dots, x_n}\binom{x_1\, x_2\dots x_n}{m}\xi_1^{x_1}\xi_2^{x_2}\dots\xi_n^{x_n} = \sum_{s_1,\dots, s_n} V^{(m)}_{s_1,\dots, s_n}\frac{\xi_1^{s_1}\xi_2^{s_2}\dots\xi_n^{s_n}}{(1-\xi_1)^{s_1+1}(1-\xi_2)^{s_2+1}(1-\xi_n)^{s_n+1}}.$$

Poniamo $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_n = \frac{1}{2}$; avremo:

$$\sum_{x_1,\dots, x_n}\binom{x_1\, x_2\dots x_n}{m}\frac{1}{2^{x_1+x_2+\cdots+x_n}} = 2^n \sum_{s_1,\dots, s_n} V^{(m)}_{s_1,\dots, s_n} = 2^n\Phi(m, n),$$

ossia:

$$\Phi(m, n) = \frac{1}{2^n}\sum_{\substack{x_1=1, 2,\dots\\ \dots\dots\\ x_n=1, 2,\dots}}\binom{x_1\, x_2\dots x_n}{m}\frac{1}{2^{x_1+x_2+\cdots+x_n}}. \tag{28}$$

11. *Metodo di Wiener*. Di questo metodo, noto soltanto per un breve cenno che ne fa Schwarz in appendice alla sua tesi, dirò solo che esso si fonda sul concetto delle *reti di tipi* e della periodicità che in queste si verifica. Si ottiene da un tipo T una rete di tipi, dividendo lo spazio indefinito ad n dimensioni in parallelepipedi tutti congruenti a quello in cui è inscritto il tipo T.

§ V.

12. *Numero dei tipi connessi.* Ecco in qual modo si determina secondo CANTOR il numero $W^{(m)}_{s_1,\ldots,s_n}$ dei tipi connessi di m elementi appartenenti al genere rappresentato dal parallelepipedo di dimensioni $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Per evitare una soverchia complicazione nelle formole supporrò $n=2$.

Siccome (n.° 6) ogni tipo o è connesso o può scomporsi in una sola maniera in gruppi connessi fra loro separati, così si ha la formola:

$$V^{(m)}_{s,t} = \sum_{\substack{\rho=1,2,\ldots \\ m_1+\ldots+m_\rho=m \\ s_1+\ldots+s_\rho=s \\ t_1+\ldots+t_\rho=t}} \frac{1}{\rho!} \frac{s!}{s_1!\ldots s_\rho!} \frac{t!}{t_1!\ldots t_\rho!} W^{(m_1)}_{s_1,t_1}\ldots W^{(m_\rho)}_{s_\rho,t_\rho}.$$

Moltiplicando ambi i membri per $\theta^m \xi^s \eta^t$, sommando per tutti i valori interi e positivi di m, s, t, e ponendo:

$$\sum_{m,s,t} \frac{1}{s!\,t!} \theta^m \xi^s \eta^t V^{(m)}_{s,t} = F(\theta, \xi, \eta), \qquad \sum_{m,s,t} \frac{1}{s!\,t!} \theta^m \xi^s \eta^t W^{(m)}_{s,t} = F_1(\theta, \xi, \eta),$$

si ottiene (*):

$$F(\theta, \xi, \eta) = \sum_{\rho=1,2,\ldots} \frac{1}{\rho!} [F_1(\theta, \xi, \eta)]^\rho = e^{F_1(\theta,\xi,\eta)} - 1,$$

donde:

$$F_1(\theta, \xi, \eta) = \lg[1 + F(\theta, \xi, \eta)] = \sum_{\rho=1,2,\ldots} (-1)^{\rho-1} \frac{1}{\rho} [F(\theta, \xi, \eta)]^\rho.$$

Ponendo per F, F_1 le loro espressioni ed eguagliando i coefficienti di $\theta^m \xi^s \eta^t$, si ha:

$$W^{(m)}_{s,t} = \sum_{\substack{\rho=1,2,\ldots \\ m_1+\ldots+m_\rho=m \\ s_1+\ldots+s_\rho=s \\ t_1+\ldots+t_\rho=t}} (-1)^{\rho-1} \frac{1}{\rho} \frac{s!}{s_1!\ldots s_\rho!} \frac{t!}{t_1!\ldots t_\rho!} V^{(m_1)}_{s_1,t_1}\ldots V^{(m)}_{s_\rho,t_\rho}.$$

L'espressione di $F(\theta, \xi, \eta)$ può semplificarsi notevolmente. Dalla (10) si ha per $n=2$:

$$V^{(m)}_{s,t} = \sum_{x,y} (-1)^{x+y+s+t} \binom{s}{x} \binom{t}{y} \binom{xy}{m},$$

(*) Trattandosi di relazioni puramente formali, noi possiamo operare sulle serie senza punto occuparci della loro convergenza.

quindi:

$$F(\theta,\ \xi,\ \eta)=\sum_{m,s,t,x,y}\frac{(-1)^{x+y+s+t}}{s!\,t!}\binom{s}{x}\binom{t}{y}\binom{xy}{m}\theta^m\,\xi^s\,\eta^t.$$

Ora:

$$(-1)^x\sum_{s=1,\dots}\frac{1}{s!}\binom{s}{x}(-1)^s\xi^s=(-1)^x\sum_{s=x,\dots}\frac{1}{s!}\binom{s}{x}(-1)^s\xi^s=$$

$$=(-1)^x\sum_{s=0,\dots}\frac{x}{(s+x)!}\binom{s+x}{x}(-1)^x(-1)^s\xi^{x+s}=\frac{\xi^x}{x!}\sum_{s=0,\dots}\frac{(-\xi)^s}{s!}=\frac{\xi^x}{x!}e^{-\xi},$$

e parimenti:

$$(-1)^y\sum_{t=1,\dots}\frac{1}{t!}\binom{t}{y}(-1)^t\eta^t=\frac{\eta^y}{y!}e^{-\eta},$$

inoltre:

$$\sum_{m=1,\dots}\binom{xy}{m}\theta^m=(1+\theta)^{xy}-1,$$

quindi:

$$F(\theta,\ \xi,\ \eta)=\sum_{x,y}e^{-\xi-\eta}\frac{\xi^x\eta^y}{x!\,y!}\{(1+\theta)^{xy}-1\}=$$

$$=e^{-\xi-\eta}\left[\sum_{x,y}\frac{\xi^x\eta^y(1+\theta)^{xy}}{x!\,y!}-\sum_{x,y}\frac{\xi^x\eta^y}{x!\,y!}\right].$$

Il valore della seconda somma, ove x, y prendono i valori 1, 2,..., è $(e^\xi-1)(e^\eta-1)$. La prima somma può facilmente ridursi ad una somma semplice; infatti:

$$\sum_{x,y}\frac{\xi^x\eta^y(1+\theta)^{xy}}{x!\,y!}=\sum_x\left[\frac{\xi^x}{x!}\sum_y\frac{[\eta(1+\theta)^x]^y}{y!}\right]=$$

$$=\sum_x\frac{\xi^x}{x!}(e^{\eta(1+\theta)^x}-1)=\sum_{x=1,\dots}\frac{\xi^x e^{\eta(1+\theta)^x}}{x!}-(e^\xi-1),$$

e parimenti:

$$\sum_{x,y}\frac{\xi^x\eta^y(1+\theta)^{xy}}{x!\,y!}=\sum_{y=1,\dots}\frac{\eta^y e^{\xi(1+\theta)^y}}{y!}-(e^\eta-1).$$

13. *Teoremi sui tipi connessi.* Se un tipo T inscritto in un parallelepipedo P può scomporsi in due sommandi T_1, T_2, diremo *opposti* i due parallelepipedi contenuti entro P nei quali T_1, T_2 sono inscritti. Essi hanno un solo vertice comune, posto in un punto interno di P le cui coordinate hanno la forma $x_i+\frac{1}{2}$ essendo le x_i numeri interi, e le somme delle loro dimensioni corrispondenti dànno le dimensioni di P. Un parallelepipedo P di di-

mensioni s_i dà luogo a $\prod_{i=1}^{n}(s_i - 1)$ coppie di parallelepipedi opposti. Ora si domanda: Qual è quella coppia i cui componenti presi insieme hanno volume massimo?

Sieno p_i, $s_i - p_i = q_i$ le dimensioni di due parallelepipedi opposti, il volume che si vuol rendere massimo è:

$$v = \prod_{i=1}^{n} p_i + \prod_{i=1}^{n} q_i,$$

ossia, ponendo $\prod_{i=2}^{n} p_i = P$, $\prod_{i=2}^{n} q_i = Q$:

$$v = p_1 P + q_1 Q = p_1(P - Q) + s_1 Q,$$

dove si può sempre supporre $P \gtreqless Q$, giacchè in caso contrario basterebbe scambiare p_i con q_i per tutti gli n valori di i. Noi vogliamo far vedere che v è massimo quando $\prod_{i=1}^{n} p_i$ è il più grande possibile e $\prod_{i=1}^{n} q_i$ il più piccolo possibile. Supponiamo perciò che il teorema, il quale si verifica facilmente per $n = 2$, sussista per $n - 1$, che cioè, quando sia $P > Q$, aumentando P e diminuendo Q s'aumenti $P + Q$; ne segue che, diminuendo Q di a, $P - Q$ cresce di b, essendo $b > 2a$. Ora, se $s_1 = 1$, il teorema resta senz'altro dimostrato anche per n; se $s_1 \gtreqless 2$, noi possiamo anzitutto aumentare v accrescendo p_1 il più possibile, cioè dandogli il valore $s_1 - 1$, dopodichè diminuendo Q di a v crescerà di $(s_1 - 1)b - s_1 a$, che è

$$> a[2(s_1 - 1) - s_1] = a(s_1 - 2) \gtreqless 0.$$

Dunque il massimo valore di v s'avrà quando $p_1 = s_1 - 1$ e P è il più grande possibile, cioè è eguale a $\prod_{i=2}^{n}(s_i - 1)$; e tale valore sarà:

$$\bar{v} = \prod_{i=1}^{n}(s_i - 1) + 1.$$

Questo numero $\bar{v}$ rappresenta anche il numero massimo d'elementi che può avere un tipo composto inscritto in P. Ma se in P può inscriversi un tipo sconnesso di m elementi, nello stesso parallelepipedo sarà inscritto quel tipo composto, avente lo stesso numero d'elementi, che è associato a P (n.° 3); quindi dev'essere $m \overline{\overline{<}} \bar{v}$, cioè:

$$\prod_{i=1}^{n}(s_i - 1 \gtreqless m - 1.$$

Dunque:

A. La condizione necessaria e sufficiente affinchè i tipi di m elementi inscritti in un parallelepipedo di dimensioni s_i sieno tutti connessi è:

$$\prod_{i=1}^{n}(s_i-1)<m-1.$$

14. La questione correlativa a quella or ora risolta è la seguente: Qual è il più grande parallelepipedo in cui può inscriversi un tipo connesso di m punti (*)? O, ciò che è lo stesso: Qual è il tipo connesso composto del minor numero possibile di punti che è inscrittibile in un parallelepipedo di dimensioni assegnate $s_1,\ldots, s_n$? Evidentemente soddisfa a questa condizione un tipo costituito semplicemente da una catena C (n.° 6) tale che le proiezioni de' suoi lati sopra uno stesso asse coordinato non si sovrappongano in tutto nè in parte. Considerando di nuovo, come già nel n.° 5, il più piccolo parallelepipedo A (composto di cubi elementari) che contiene nel suo interno o sulla superficie tutti gli elementi del tipo C, si vede che le proiezioni dei vari tratti della catena dovranno coprire interamente ed una volta sola gli spigoli di A, e quindi che la somma di tali proiezioni sarà $\sum_{i=1}^{n}(s_i-1)$; ma, poichè i lati della catena sono tutti paralleli all'uno o all'altro degli n assi coordinati, quindi ciascuno di essi si proietta sopra un solo asse e in vera grandezza, $\sum_{i=1}^{n}(s_i-1)$ sarà pure la lunghezza della catena. Ora i lati hanno tutti, come è facile vedere, la lunghezza 1, quindi C consterà di $\sum_{i=1}^{n}(s_i-1)$ lati, e per conseguenza di $\sum_{i=1}^{n}(s_i-1)+1$ punti, cioè sarà:

$$\sum_{i=1}^{n}(s_i-1)+1=m.$$

Dunque:

B. La condizione necessaria e sufficiente affinchè i tipi di m elementi inscritti in un parallelepipedo di dimensioni s_i sieno tutti sconnessi è:

$$\sum_{i=1}^{n}(s_n-1)>m-1.$$

(*) Che ciò costituisca realmente una questione, risulta *a priori* dal fatto evidente, che nel cubo ad n dimensioni di lato m non può inscriversi alcun tipo connesso di m elementi.

Per $n=2$ il teorema può anche dimostrarsi per induzione. Se $s+t-2>m-1$, ossia se $s+t>m+1$, uno almeno dei due numeri s, t sarà $>\frac{m}{2}\cdot$ Sia per es. $t>\frac{m}{2}$; allora, se nel rettangolo $s\cdot t$ è inscritto un tipo T di m punti, vi sarà certamente una orizzontale contenente un punto solo P, e se T è connesso, sopprimendo il punto P e la riga che lo contiene, avremo un tipo connesso di $m-1$ punti inscritto nel rettangolo $s(t-1)$. Ora dalla relazione: $s+t>m+1$ segue l'altra: $s+(t-1)>(m-1)+1$; dunque, se il teorema B non è vero pei numeri s, t, m, non lo è neppure pei numeri s, $t-1$, $m-1$. Proseguendo nello stesso modo, si concluderà che il teorema non è vero pei numeri $s-\alpha$, $t-\beta$, 2, dove $\alpha+\beta=m-2$ e $s-\alpha+t-\beta>3$, cioè che esiste un tipo connesso di 2 punti inscritto in un rettangolo il cui semiperimetro è >3. Ora i soli tipi connessi di due elementi sono i tipi $\cdot\,\cdot$ e $\vdots$, inscritti rispettivamente nei rettangoli $2\cdot 1$ e $1\cdot 2$; quindi l'ipotesi fatta è assurda.

15. *Numero dei tipi semplici.* Cantor determina il numero $Q(m)$ dei tipi semplici di m elementi con metodo del tutto analogo a quello che ha servito a trovare il numero dei tipi connessi. Siccome ogni tipo, o è semplice, o è composto in modo unico e determinato mediante tipi semplici, così si ha:

$$\Phi(m)=\sum_{\substack{\rho=1,2,\ldots\\ m_1+\ldots+m_\rho=m}} Q(m_1)\cdot Q(m_2)\ldots Q(m_\rho).$$

Moltiplicando per θ^m, sommando per tutti i valori di m, e ponendo:

$$\sum_{m=1,\ldots}\Phi(m)\theta^m=f(\theta)\qquad \sum_{m=1,\ldots}Q(m)\theta^m=f_1(\theta),$$

si ha:

$$f(\theta)=\sum_{\rho=1,2,\ldots}[f_1(\theta)]^\rho=\frac{f_1(\theta)}{1-f_1(\theta)},$$

quindi:

$$f_1(\theta)=\frac{f(\theta}{1+f(\theta)}=\sum_{\rho=1,2,\ldots}(-1)^{\rho-1}[f(\theta)]^\rho.$$

Mettendo in luogo di $f(\theta)$, $f_1(\theta)$ le loro espressioni ed eguagliando i coefficienti di θ^m, si ha:

$$Q(m)=\sum_{\substack{\rho=1,2,\ldots\\ m_1+\ldots+m_\rho=m}}(-1)^{\rho-1}\Phi(m_1)\Phi(m_2)\ldots\Phi(m_\rho).$$

La funzione $f(\theta)$ può, pei tipi a 2 dimensioni, esser messa sotto forma di serie semplice. Si ha in virtù della (28):

$$f(\theta)=\frac{1}{4}\sum_{m,x,y}\theta^m\binom{xy}{m}\frac{1}{2^x\,2^y}=\frac{1}{4}\sum_{x,y}\frac{1}{2^x\,2^y}\{(1+\theta)^{xy}-1\},$$

ossia, essendo $\sum\limits_{x=1,\dots}\frac{1}{2^x}=1,\ \sum\limits_{y=1,\dots}\frac{1}{2^y}=1$:

$$f(\theta)=\frac{1}{4}\sum_{x,y}\frac{(1+\theta)^{xy}}{2^x\,2^y}-\frac{1}{4}.$$

Inoltre:

$$\sum_{x,y}\frac{(1+\theta)^{xy}}{2^x\,2^y}=\sum_{y=1,\dots}\left[\frac{1}{2^y}\sum_{x=1,\dots}\left\{\frac{(1+\theta)^y}{2}\right\}^x\right]=\sum_{y=1,\dots}\frac{(1+\theta)^y}{2^y[2-(1+\theta)^y]},$$

quindi:

$$f(\theta)=\frac{1}{4}\sum_{y=1,\dots}\frac{(1+\theta)^y}{2^y[2-(1+\theta)^y]}-\frac{1}{4},$$

e ponendo invece di $-\frac{1}{4}$ l'espressione equivalente: $-\frac{1}{4}\sum\limits_{y=1,\dots}\frac{1}{2^y}$:

$$f(\theta)=\frac{1}{4}\sum_{y=1,\dots}\left\{\frac{(1+\theta)^y}{2^y[2-(1+\theta)^y]}-\frac{1}{2^y}\right\}=-\frac{1}{2}\sum_{y=1,\dots}\frac{1-(1+\theta)^y}{2-(1+\theta)^y}.$$

16. *Sulla determinazione del numero delle classi.* Il problema di determinare il numero delle classi in cui si dividono i tipi di un dato numero d'elementi è tuttora insoluto. Come un primo passo verso la risoluzione di questo problema espongo la seguente ricerca, che si riferisce unicamente ai tipi a due dimensioni.

Dirò che due tipi di m elementi inscritti nel rettangolo $s\cdot t$ appartengono alla medesima *sottoclasse* rispetto alla prima direzione, se essi s'ottengono l'uno dall'altro mediante scambi di colonne, ossia permutando tra loro i numeri g_i. Ne segue, che due tipi non possono appartenere alla medesima sottoclasse, se i sistemi di numeri g ad essi relativi non sono identici, astrazion fatta dall'ordine; ossia che, indicando con T l'insieme dei $\sum\varphi'(g_1,\dots, g_s;\ t)$ tipi i cui numeri g hanno, in un ordine qualunque, i valori $g_1,\dots, g_s$, T consta d'un certo numero $p(g_1,\dots, g_s;\ t)$ di sottoclassi complete. Se ora disponiamo le g in un determinato ordine $g_1,\dots, g_s$, è chiaro che l'insieme U dei $\varphi'(g_1,\dots, g_s;\ t)$ tipi corrispondenti conterrà uno o più rappresentanti di ciascuna delle sottoclassi di cui T si compone; dunque $p(g_1,\dots, g_s;\ t)$ rappresenta anche il numero delle sottoclassi fra le quali si distribuiscono i tipi dell'insieme U. Ma il numero delle sottoclassi dei $\Phi(m, 2)$ tipi di m elementi è dato da $\sum\limits_{\substack{s=1,\ldots,m\\ t=1,\ldots,m\\ g_1+\cdots+g_s=m}} p(g_1,\ldots, g_s;\ t)$, dove le g_i prendono tutti i sistemi di valori differenti (*) che hanno per somma m; tutto si riduce quindi alla determinazione della funzione $p(g_1,\ldots;\ g_s\ t)$, cioè del numero delle sottoclassi che hanno qualche rappresentante nell'insieme U.

Consideriamo dapprima due casi particolari.

a) Se tutti i numeri g_i sono differenti, scambiando tra loro due colonne d'un tipo dell'insieme U s'otterrà certamente un tipo non appartenente ad U; quindi tutti i tipi di U appartengono a sottoclassi diverse, e per conseguenza:

$$p(g_1,\ldots, g_s;\ t) = \varphi(g_1,\ldots, g_s;\ t).$$

b) Se $g_1 = g_2 = g$, e le g, $g_3,\ldots, g_s$ sono tutte differenti, scambiando in un tipo qualunque α di U le due prime colonne s'otterrà un tipo α' pure appartenente ad U. I tipi di U possono dividersi in 2 gruppi, composti rispettivamente di k_1 e di k_2 elementi [essendo $k_1 + k_2 = \varphi'(g_1,\ldots, g_s;\ t)$]; il primo contiene quei tipi le cui due prime colonne sono eguali (**), l'altro i tipi rimanenti. I tipi del primo gruppo possono imaginarsi ottenuti aggiungendo una colonna identica alla prima in ciascuno dei $\varphi'(g, g_3,\ldots, g_s;\ t)$ tipi di $m-g$ elementi inscritti nel rettangolo $(s-1)t$ corrispondenti al sistema di numeri g, $g_3,\ldots, g_s$; e poichè a questo modo si ottengono tutti i tipi del primo gruppo e ciascuno d'essi una sola volta, sarà:

$$k_1 = \varphi'(g, g_3,\ldots, g_s;\ t).$$

Ora si osservi che, se α è un tipo del primo gruppo, α' ed α sono identici, ciò che non è se α fa parte del secondo gruppo. Ne segue che i tipi del primo gruppo appartengono tutti a classi diverse mentre quelli del secondo gruppo appartengono due a due alla stessa classe. Dunque:

$$p(g_1,\ldots, g_s;\ t) = k_1 + \frac{1}{2} k_2 = \frac{1}{2}[(k_1 + k_2) + k_1] =$$
$$= \frac{1}{2}[\varphi'(g, g, g_3,\ldots, g_s;\ t) + \varphi'(g, g_3,\ldots, g_s;\ t)].$$

(*) Dicendo che due sistemi di valori sono differenti, intendo che sono tali anche astrazion fatta dall'ordine.

(**) Due colonne contenenti egual numero d'elementi si dicono eguali, quando i loro elementi hanno gli stessi ranghi rispetto alla seconda direzione, e quindi vengono a coincidere se si sovrappongono le colonne l'una all'altra.

Le considerazioni svolte a proposito dei casi a, b aprono la via alla trattazione del caso generale.

Supponiamo che dei numeri g_i i primi s_1 abbiano il valore g_1, i successivi s_2 il valore $g_2, \ldots$, gli ultimi s_μ il valore g_μ, essendo $\sum_{i=1}^{\mu} s_i = s$. In un tipo determinato dell'insieme U le prime s_1 colonne si divideranno in ν_1 gruppi di $\sigma_1^{(1)}, \sigma_1^{(2)}, \ldots, \sigma_1^{(\nu_1)}$ colonne uguali, le s_2 successive in ν_2 gruppi di $\sigma_2^{(1)}, \sigma_2^{(2)}, \ldots, \sigma_2^{(\nu_2)}$ colonne eguali, ecc., essendo:

$$\sum_{h=1}^{\nu_i} \sigma_i^{(h)} = s_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu).$$

Pei tipi di U le cui colonne sono tutte differenti le $\sigma_i^{(h)}$ avranno tutte il valore 1; il numero di tali tipi verrà designato con $\chi\left(\overset{s_1}{g_1}, \ldots, \overset{s_\mu}{g_\mu}; t\right)$.

L'aggregato U si compone di $\prod_{i=1}^{\mu} s_i$ aggregati parziali $Z_{\nu_1, \ldots, \nu_\mu}$ corrispondenti ai vari sistemi di valori possibili delle ν_i; ogni aggregato parziale si divide poi in gruppi $X_{\sigma_1^{(1)}, \ldots, \sigma_1^{(\nu_1)}; \ldots; \sigma_\mu^{(1)}, \ldots, \sigma_\mu^{(\nu_\mu)}}$ o $X_{\sigma_i^{(h)}}$ corrispondentemente ai *diversi* sistemi di valori che possono prendere le $\sigma_i^{(h)}$ per uno stesso sistema di valori ν_i. Infine è da osservarsi che, dati i numeri $\sigma_i^{(h)}$, le s_i colonne contenenti ciascuna g_i punti possono aggrupparsi in un certo numero γ_i di modi diversi; e precisamente, se i numeri $\sigma_i^{(1)}, \ldots, \sigma_i^{(\nu_i)}$ si dividono in ε_i gruppi di $\pi_i^{(1)}, \pi_i^{(2)}, \ldots, \pi_i^{(\varepsilon_i)}$ numeri eguali $\left(\text{essendo } \sum_{k=1}^{\varepsilon_i} \pi_i^{(k)} = \nu_i\right)$, si trova senza alcuna difficoltà:

$$\gamma_i = \frac{s_i!}{\sigma_i^{(1)}! \ldots \sigma_i^{(\nu_i)}!\, \pi_i^{(1)}! \ldots \pi_i^{(\varepsilon_i)}!}$$

Di qui segue che il gruppo $X_{\sigma_i^{(h)}}$ si divide in un certo numero $N_{\sigma_i^{(h)}}$ di sottogruppi, ciascuno dei quali si compone di $\gamma = \prod_{i=1}^{\mu} \gamma_i$ tipi che si ottengono l'uno dall'altro mediante tutti i differenti scambi di colonne possibili, ossia che appartengono alla medesima sottoclasse. Ma, se per es. $\sigma_1^{(1)} = \sigma_1^{(2)}$, e in un determinato tipo α d'un sottogruppo si scambiano le prime $\sigma_1^{(1)}$ colonne colle $\sigma_1^{(2)}$ successive (scambio non compreso in quelli testè considerati perchè non modifica la disposizione dei gruppi di colonne eguali e quindi, rispetto alle *colonne*, non costituisce neppure uno scambio), s'ottiene un tipo α' che appartiene ad un altro sottogruppo, ma che è della stessa sottoclasse di α. Nello stesso modo si vede più generalmente che i $N_{\sigma_i^{(h)}}$ sottogruppi appartengono a $\dfrac{N_{\sigma_i^{(h)}}}{\prod\limits_{i=1}^{\mu}[\pi_i^{(1)}!\ldots\pi_i^{(\varepsilon_i)}!]}$ sottoclassi. Indicando con S la somma presa rispetto a tutti i differenti sistemi di valori possibili $\sigma_i^{(h)}$, si ha adunque:

$$p = \sum_{\substack{\nu_1=1,\ldots,s_1\\ \cdots\cdots\\ \nu_\mu=1,\ldots,s_\mu}} S \frac{N_{\sigma_i^{(h)}}}{\prod\limits_{i=1}^{\mu}[\pi_i^{(1)}!\ldots\pi_i^{(\varepsilon_i)}!]}.$$

Resta da trovarsi il valore di $N_{\sigma_i^{(h)}}$.

Consideriamo quei tipi di $\sum\limits_{i=1}^{\mu}\nu_i g_i$ punti, il cui numero e la cui natura sono determinati dal simbolo $\chi\left(\overset{\nu_1}{g_1},\ldots,\overset{\nu_\mu}{g_\mu};\ t\right)$. Preso un sistema di valori $\sigma_i^{(h)}$, ripetiamo in ognuno di quei tipi la 1.ª colonna $\sigma_1^{(1)}$ volte, la 2.ª $\sigma_1^{(2)}$ volte,..., la $(\nu_1+1)^{\text{esima}}$ $\sigma_2^{(1)}$ volte,..., l'ultima $\sigma_\mu^{(\nu_\mu)}$ volte; s'ottiene così un insieme di tipi tutti diversi di m elementi, contenente uno ed un solo rappresentante di ciascun sottogruppo del gruppo $X_{\sigma_i^{(h)}}$, quindi composto di $N_{\sigma_i^{(h)}}$ tipi. Segue di qui:

$$N_{\sigma_i^{(h)}} = \chi\left(\overset{\nu_1}{g_1},\ldots,\overset{\nu_\mu}{g_\mu};\ t\right),$$

che dipende dai numeri ν_i, ma non dal sistema $\sigma_i^{(h)}$ scelto. Il gruppo $X_{\sigma_i^{(h)}}$ conterrà per conseguenza $\gamma\chi\left(\overset{\nu_1}{g_1},\ldots,\overset{\nu_\mu}{g_\mu};\ t\right)$ tipi, l'aggregato $Z_{\nu_1,\ldots,\nu_\mu}$ ne conterrà $K_{\nu_1,\ldots,\nu_\mu}\chi\left(\overset{\nu_1}{g_1},\ldots,\overset{\nu_\mu}{g_\mu};\ t\right)$, dove $K_{\nu_1,\ldots,\nu_\mu} = S\gamma$ ed S conserva il significato ad esso già attribuito, e infine l'aggregato U conterrà $\sum\limits_{\nu_1,\ldots,\nu_\mu} K_{\nu_1,\ldots,\nu_\mu}\chi\left(\overset{\nu_1}{g_1},\ldots,\overset{\nu_\mu}{g_\mu};\ t\right)$ tipi. Si ha adunque:

$$\varphi'\left(\overset{\nu_1 \text{ volte}}{g_1},\ldots,\overset{\nu_\mu \text{ volte}}{g_\mu};\ t\right) = \sum_{\substack{\nu_1=1,\ldots,s_1\\ \cdots\cdots\\ \nu_\mu=1,\ldots,s_\mu}} K_{\nu_1,\ldots,\nu_\mu}\chi\left(\overset{\nu_1}{g_1},\ldots,\overset{\nu_\mu}{g_\mu};\ t\right),$$

che è una formola ricorrente mediante la quale si determina la funzione χ.

Mantova, 3 ottobre 1888.

Sulle equazioni della elasticità.

(*Di* C. Somigliana, *a Pavia.*)

Mi propongo di dimostrare come per le funzioni che rappresentano gli integrali delle equazioni della elasticità, nel caso della isotropia e dell'equilibrio, si possa stabilire una teoria analoga sotto molti rapporti alla teoria delle funzioni potenziali, e che ne costituisce in certo modo una estensione. Un teorema fondamentale per la teoria, di cui trattiamo, fu dimostrato dal signor prof. Betti (Annali di Matematica, S. II, T. VI); esso fa lo stesso ufficio che il teorema di Green per le funzioni potenziali. Nel presente lavoro io trovo alcune formule che corrispondono a quella di Green, e che servono a rappresentare gli spostamenti nei diversi punti del corpo mediante: 1.° le forze che agiscono sopra tutta la massa; 2.° le forze che agiscono sulla superficie; 3.° gli spostamenti dei punti della superficie.

Con queste formule molti dei metodi usati nello studio delle funzioni potenziali possono essere applicati anche agli integrali delle equazioni della elasticità. Io me ne servo per trovare: 1.° certe relazioni che devono sussistere fra i valori che, alla superficie di un corpo in equilibrio, assumono le forze esterne e gli spostamenti, e dalla cui risoluzione si può dire dipenda il problema dell'equilibrio; 2.° gli sviluppi generali per serie, mediante i quali si possono rappresentare gli spostamenti di una deformazione qualsiasi nell'*intorno* di un punto interno al corpo, quando si intenda per intorno di un punto una sfera che abbia il centro in esso e sia tutta contenuta nell'interno del corpo. Questi sviluppi corrispondono agli sviluppi per funzioni *armoniche* (secondo la denominazione usata da Thomson e Tait) che si hanno per le funzioni che soddisfano alla equazione $\Delta_2 = 0$. Se il corpo è indefinitamente esteso, secondo tutte le direzioni, sviluppi analoghi si hanno per lo spazio esterno ad una sfera di raggio arbitrario, che racchiuda le superficie che possono formare il contorno del corpo a distanza finita.

Infine dimostro che le considerazioni precedenti si possono estendere a certi sistemi di n equazioni differenziali contenenti n funzioni incognite di n variabili, le quali nel caso di $n=3$ si riducono appunto a quelle della elasticità.

Indicherò: 1.° con u_1, u_2, u_3 le componenti secondo tre assi ortogonali dello spostamento di un punto del corpo S, la cui superficie sia σ, e supporrò sempre, quando non dirò espressamente il contrario, che u_1, u_2, u_3 siano in tutto S funzioni finite, continue e ad un valore, insieme alle loro derivate prime e seconde; 2.° con Θ la dilatazione cubica $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}$, e con $\frac{1}{2}R_1$, $\frac{1}{2}R_2$, $\frac{1}{2}R_3$ le componenti della rotazione elementare, $R_1=\frac{\partial u_3}{\partial x_2}-\frac{\partial u_2}{\partial x_3}$, ecc.; 3.° con X_1, X_2, X_3 le componenti delle forze che agiscono sulla massa del corpo, e con L_1, L_2, L_3 quelle delle forze che agiscono sulla superficie.

Le equazioni che devono essere soddisfatte, perchè vi sia equilibrio, sono:

$$\delta X_i+(2\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x_i}+\mu\Delta_2 u_i=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{1}$$

per tutti i punti del corpo, ove δ indica la densità, che supporremo costante, e λ, μ sono costanti che dipendono dalla natura del corpo. Sulla superficie σ poi si deve avere:

$$L_i+2\mu\frac{\partial u_i}{\partial n}+2\lambda\Theta\gamma_i+\mu S_i=0 \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{2}$$

ove n indica la direzione della normale a σ diretta verso l'interno; e si è posto $\gamma_i=\frac{\partial x_i}{\partial n}$,

$$S_1=R_3\gamma_2-R_2\gamma_3 \qquad S_2=R_1\gamma_3-R_3\gamma_1 \qquad S_3=R_2\gamma_1-R_1\gamma_2.$$

Indicherò infine con U_1, U_2, U_3 i valori che u_1, u_2, u_3 assumono nei punti della superficie σ, e con (1') le equazioni (1) quando $X_1=0$ $X_2=0$ $X_3=0$.

Se in un corpo si considerano due deformazioni diverse, e si segnano con uno o due apici le lettere, il cui significato fu ora stabilito, secondo che corrispondono all'una o all'altra, il teorema di Betti, a cui ho accennato, è espresso dalla seguente uguaglianza:

$$\sum_{i=1}^{3}\left\{\delta\int_S X'_i u''_i\,dS+\int_\sigma L'_i U''_i\,d\sigma\right\}=\sum_{i=1}^{3}\left\{\delta\int_S X''_i u'_i\,dS+\int_\sigma L''_i U'_i\,d\sigma\right\}.$$

§ 1.

Siano F_1, F_2, F_3 tre funzioni delle variabili x_1, x_2, x_3, le quali soddisfino alla equazione

$$\Delta_2 \Delta_2 F = 0,$$

dentro un certo campo, e siano in questo monodrome, finite e continue colle loro derivate, eccettuati al più alcuni punti isolati in numero finito. Poniamo

$$G_1 = \Delta_2 F_1 \qquad G_2 = \Delta_2 F_2 \qquad G_3 = \Delta_2 F_3$$

$$S = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_3}{\partial x_3},$$

e avremo:

$$\Delta_2 S = \frac{\partial G_1}{\partial x_1} + \frac{\partial G_2}{\partial x_2} + \frac{\partial G_3}{\partial x_3}.$$

Prendiamo per componenti u_1, u_2, u_3 dello spostamento di un punto i valori

$$u_1 = \alpha \frac{\partial S}{\partial x_1} + G_1 \qquad u_2 = \alpha \frac{\partial S}{\partial x_2} + G_2 \qquad u_3 = \alpha \frac{\partial S}{\partial x_3} + G_3, \tag{3}$$

ove α è una costante; avremo:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = (\alpha + 1) \Delta_2 S \qquad \Delta_2 u_i = \alpha \frac{\partial \Delta_2 S}{\partial x_i},$$

e quindi le equazioni (1'), saranno soddisfatte, prendendo

$$\alpha = -\frac{2\lambda + \mu}{2(\lambda + \mu)}.$$

Se le funzioni F_1, F_2, F_3 non soddisfano alla equazione $\Delta_2 \Delta_2 F = 0$, gli spostamenti (3) soddisfano le equazioni (1), se

$$X_1 = -\frac{\mu}{\delta} \Delta_2 G_1 \qquad X_2 = -\frac{\mu}{\delta} \Delta_2 G_2 \qquad X_3 = -\frac{\mu}{\delta} \Delta_2 G_3.$$

Posto ora:

$$r = \sqrt{(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + (x_3 - x'_3)^2},$$

si ha $\Delta_2 \Delta_2 r = 0$, e quindi possiamo prendere per F_1, F_2, F_3 i seguenti valori

$$F_1 = \frac{r}{2} \qquad F_2 = 0 \qquad F_3 = 0;$$

avremo:

$$G_1 = \frac{1}{r} \qquad G_2 = 0 \qquad G_3 = 0,$$

e gli spostamenti (3) divengono:

$$u'_1 = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x_1^2} + \frac{1}{r} \qquad u'_2 = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_2} \qquad u'_3 = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 r}{\partial x_1 \partial x_3}. \tag{4}$$

Si abbia ora un corpo che occupi uno spazio S, a cui il punto (x'_1, x'_2, x'_3) è esterno, e che in esso avvenga la deformazione (4). Le forze superficiali L'_1, L'_2, L'_3 che manterranno in questo caso l'equilibrio sono:

$$\left.\begin{aligned}
L'_1 &= -2\alpha\mu\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\gamma_1\right) - \mu\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} \\
L'_2 &= -2\alpha\mu\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\gamma_2\right) - \mu\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2}\gamma_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\gamma_2\right) \\
L'_3 &= -2\alpha\mu\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\gamma_3\right) - \mu\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_3}\gamma_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\gamma_3\right).
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Supponiamo ora che il punto (x'_1, x'_2, x'_3) sia interno ad S e consideriamo il nuovo corpo, che si ottiene da S, escludendo questo punto con una superficie chiusa ω, che lo comprenda nell'interno e sia tutta a distanza finita da σ. Applicando il teorema di Betti al nuovo corpo S', ed ai due sistemi di spostamenti u_1, u_2, u_3; u'_1, u'_2, u'_3 abbiamo:

$$\sum_{i=1}^{3}\left\{\delta\int_{S'} X_i u'_i dS' + \int_\sigma L_i U'_i d\sigma - \int_\sigma L'_i U_i d\sigma\right\} = \sum_{i=1}^{3}\int_\omega L'_i U_i d\sigma.$$

Gli spostamenti u'_1, u'_2, u'_3 hanno un punto di discontinuità in (x'_1, x'_2, x'_3), che è anche punto di infinito per u'_1; però la somma $\sum_{i=1}^{3}\delta\int_{S'} X_i u'_i dS'$, quando lo spazio S' tende a diventare lo spazio S, ha un limite determinato e finito che è $\sum_{i=1}^{3}\delta\int_S X_i u_i dS$. Avremo quindi:

$$\sum_{i=1}^{3}\left\{\delta\int_S X_i u'_i dS + \int_\sigma L_i U'_i d\sigma - \int_\sigma L'_i U_i d\sigma\right\} = \lim \sum_{i=1}^{3}\int_\omega L'_i U_i d\omega. \tag{6}$$

Per calcolare il limite indicato nel secondo membro di questa uguaglianza prendiamo per ω una sfera col centro in (x'_1, x'_2, x'_3) e di raggio piccolissimo; introducendo un sistema di coordinate polari r, θ, φ coll'asse polare diretto secondo l'asse x_1, dalle (5) abbiamo sopra ω

$$L'_1 = -3\alpha\mu\frac{\cos^2\theta}{r^2} + (\alpha + 1)\mu\frac{1}{r^2}$$

$$L'_2 = -3\alpha\mu\frac{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi}{r^2}$$

$$L'_3 = -3\alpha\mu\frac{\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi}{r^2}.$$

Di qui si ha, poichè $d\omega = r^2\mathrm{sen}\,\theta\, d\theta\, d\varphi$,

$$\int_\omega L'_1 d\omega = 4\pi\mu \qquad \int_\omega L'_2 d\omega = 0 \qquad \int_\omega L'_3 d\psi = 0,$$

e quindi per un procedimento noto, e per le ipotesi fatte circa la continuità delle u_1, u_2, u_3,

$$\lim \sum_{i=1}^{3}\int_\omega L'_i U_i d\omega = 4\pi\mu u_1(x'_1,\ x'_2,\ x'_3).$$

Il primo membro della (6) rappresenta quindi il valore della componente u_1 nel punto $(x'_1\ x'_2\ x'_3)$ moltiplicato per $4\pi\mu$. In modo analogo si possono ottenere altre due formule per rappresentare le componenti u_2 e u_3, e si arriva così al seguente teorema:

« Le componenti u_1, u_2, u_3 degli spostamenti in una deformazione qual-« siasi si possono rappresentare mediante le forze X_1, X_2, X_3 che agiscono « sopra tutta la massa, le forze L_1, L_2, L_3 che agiscono sulla superficie, e « le componenti U_1, U_2, U_3 degli spostamenti che avvengono alla superficie, « colle seguenti formule:

$$u_s(x'_1,\ x'_2,\ x'_3) = \frac{1}{4\pi\mu}\sum_{i=1}^{3}\left\{\delta\int_S X_i u_i^{(s)} dS + \int_\sigma L_i U_i^{(s)} + L_i^{(s)} U_i) d\sigma\right\}, \tag{7}$$

« ove si ha

$$\left.\begin{aligned}
&u_s^{(s)} = \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial x_s^2} + \frac{1}{r} \qquad u_i^{(s)} = \alpha\frac{\partial^2\frac{r}{2}}{\partial xi\,\partial x_s} \qquad (i == s)\\
&L_s^{(s)} = 2\alpha\mu\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2\frac{r}{2}}{\partial x_s^2} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_s}\gamma_s\right) + \mu\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n}\\
&L_i^{(s)} = 2\alpha\mu\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2\frac{r}{2}}{\partial x_s\,\partial xi} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_s}\gamma_i\right) + \mu\left(\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial xi}\gamma_s - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial x_s}\gamma_i\right).
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Le formule (7) nella teoria della elasticità equivalgono alla formula di Green nella teoria delle funzioni potenziali; il sistema delle tre deformazioni (8) fa l'ufficio del potenziale elementare newtoniano $\frac{1}{r}$.

Se ora immaginiamo che il punto (x'_1, x'_2, x'_3) sia sulla superficie σ, il teorema di Betti sarà ancora applicabile allo spazio che si ottiene da S, escludendone questo punto con una superficie ω descritta attorno ad esso, la quale intercetterà una certa porzione ε di σ. Sia σ' la parte rimanente di σ quando si toglie ε, e consideriamo il nuovo corpo S' il cui contorno è formato da ω e σ'; avremo:

$$\sum_{i=1}^{3}\left\{\delta\int_{S'} X_i u'_i dS' + \int_{\sigma'} L_i U'_i d\sigma' - \int_{\sigma'} L'_i U_i d\sigma'\right\} = \sum_{i=1}^{3}\int_{\omega} L'_i U_i d\omega.$$

Ora quando lo spazio S' tende a diventare lo spazio S, si ha:

$$\lim \sum_{i=1}^{3}\int_{S-S'} X_i u'_i dS = 0,$$

e, se la superficie σ ha nel punto (x'_1, x'_2, x'_3) un piano tangente ordinario, si ha anche:

$$\lim\int_{\varepsilon} L_i U'_i d\varepsilon = 0 \qquad \lim\int_{\varepsilon} L'_i U_i d\varepsilon = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

quando ε tende a zero. Quindi il primo membro della equazione precedente, quando S' tende ad S, ha per limite la espressione che da esso si ottiene, estendendo ad S e σ gli integrali estesi rispettivamente ad S' e σ'. Per calcolare il limite del secondo membro immaginiamo che (x'_1, x'_2, x'_3) sia stato escluso dal corpo con una superficie sferica γ di raggio piccolissimo, col centro in questo punto; allora ω tenderà a diventare quell'emisfero, che si trova dalla parte del piano tangente, nella quale giace il corpo, o almeno giacciono i punti del corpo in vicinanza di (x'_1, x'_2, x'_3). Prendendo anche in questo caso un sistema di coordinate polari r, θ, φ coll'asse diretto secondo la direzione positiva dell'asse x_1, L'_1, L'_2, L'_3 avranno ancora i valori precedentemente considerati in funzione di r, θ, φ. Sia ora ω' quell'emisfero di γ che si trova dalla parte del piano condotto per (x'_1, x'_2, x'_3) parallelamente al piano $x_2\, x_3$, nella quale giace la direzione positiva della normale; quest'ultimo piano ed il piano tangente divideranno γ in quattro fusi sferici, di cui uno sarà comune ad ω e ω', uno non apparterrà nè ad ω nè ad ω' e dei due rimanenti, uguali fra loro, uno apparterrà unicamente ad ω, l'altro ad ω'. Ora per i valori che L'_1, L'_2, L'_3 hanno sopra γ, è facile vedere che

$$L'_1 d\omega, \qquad L'_2 d\omega, \qquad L'_3 d\omega,$$

hanno valori uguali nei punti diametralmente opposti di questi due ultimi fusi; quindi si avrà:

$$\int_\omega L'_i d\omega = \int_{\omega'} L'_i d\omega \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Ma integrando si trova:

$$\int_{\omega'} L'_1 d\omega = 2\pi\mu \qquad \int_{\omega'} L'_2 d\omega = 0 \qquad \int_{\omega'} L'_3 d\omega = 0,$$

e quindi

$$\lim \sum_{i=1}^{3} \int_\omega L'_i U_i d\omega = 2\pi\mu u_1(x'_1, x'_2, x'_3).$$

Concludiamo perciò che le formule (7) stanno anche quando il punto (x'_1, x'_2, x'_3) giace sulla superficie, quando ivi esiste un piano tangente ordinario, purchè si muti la costante $\frac{1}{4\pi\mu}$ in $\frac{1}{2\pi\mu}$.

Nelle (7) consideriamo i tre termini che dipendono dalla componente X_1, cioè:

$$\delta\int X_1 u_1^{(1)} dS, \qquad \delta\int X_1 u_1^{(2)} dS, \qquad \delta\int X_1 u_1^{(3)} dS;$$

è facile vedere che essi rappresentano le componenti di una deformazione speciale, prodotta nel corpo S da forze agenti sopra tutta la massa, le cui componenti sono X_1, 0, 0. Difatti le tre funzioni precedenti si possono porre sotto la forma dei secondi membri delle (3), prendendo:

$$F_1 = \frac{\delta}{8\pi\mu}\int X_1 r\, dS \qquad G_1 = \frac{\delta}{4\pi\mu}\int X_1 \frac{dS}{r}$$
$$F_2 = F_3 = G_2 = G_3 = 0,$$

e poichè $\Delta_2 G_1 = -\frac{\delta}{\mu} X_1$, le equazioni di equilibrio saranno soddisfatte quando le forze di massa sono X_1, 0, 0. Analogamente si può vedere che le altre due terne di termini delle (7) dipendenti dalle altre due componenti X_2, X_3 rappresentano altre due deformazioni corrispondenti a forze di massa 0, X_2, 0 e 0, 0, X_3 rispettivamente.

Osserviamo ora che essendo:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x_i \partial x_s} = \frac{\partial^2 r}{\partial x'_i \partial x'_s} \qquad (i,\ s = 1,\ 2,\ 3),$$

i tre sistemi di spostamenti (8) soddisfano le equazioni (1′) anche quando si considerano come variabili indipendenti le x'_1, x'_2, x'_3, invece delle x_1, x_2, x_3; da ciò segue subito che nelle (7) i termini dipendenti da L_1, o da L_2, o da L_3 rappresentano gli spostamenti di tre deformazioni speciali che avvengono nel corpo per forze di masse nulle.

Consideriamo infine le tre funzioni $L_1^{(1)}$, $L_1^{(2)}$, $L_1^{(3)}$ che compaiono sotto i segni di integrazione nei termini dipendenti da U_1. Esse, considerate come funzioni delle x'_1, x'_2, x'_3, soddisfano le equazioni (1′); difatti se si pone:

$$G_1 = \mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} + 2\alpha\mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1}\gamma_1, \qquad G_2 = \mu\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2}\gamma_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1}\gamma_2\right) + 2\alpha\mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_2}\gamma_1,$$

$$G_3 = \mu\left(\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_3}\gamma_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1}\gamma_3\right) + 2\alpha\mu \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_3}\gamma_1$$

si ha:

$$\frac{\partial G_1}{\partial x'_1} + \frac{\partial G_2}{\partial x'_2} + \frac{\partial G_3}{\partial x'_3} = 2\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x'_1} = \Delta_2 \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial r}{\partial x'_1},$$

ove l'operazione Δ_2 si intende eseguita rispetto alle variabili x'_1, x'_2, x'_3. Posto ora:

$$S = \mu \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial r}{\partial x'_1},$$

le $L_1^{(1)}$, $L_1^{(2)}$, $L_1^{(3)}$ si possono scrivere:

$$L_1^{(1)} = \alpha \frac{\partial S}{\partial x'_1} + G_1 \qquad L_1^{(2)} = \alpha \frac{\partial S}{\partial x'_2} + G_2 \qquad L_1^{(3)} = \alpha \frac{\partial S}{\partial x'_3} + G_3,$$

e rientrano quindi nella forma generale degli spostamenti rappresentati dalle (3).

Considerazioni analoghe si possono fare sopra le altre due terne di funzioni

$$L_2^{(1)}\ L_2^{(2)}\ L_2^{(3)}, \qquad L_3^{(1)}\ L_3^{(2)}\ L_3^{(3)}.$$

Dalle formule (7) risulta quindi il seguente teorema:

« Qualunque deformazione di un corpo elastico isotropo omogeneo può « essere decomposta in tre deformazioni dipendenti rispettivamente dalle forze « di massa, dalle forze superficiali e dagli spostamenti superficiali; la prima « avviene nel corpo per effetto di forze di massa uguali alle date, le altre per

« forze di massa nulle. Ciascuna di queste poi è decomponibile alla sua volta « in altre tre, dipendenti analogamente da una sola delle componenti, secondo « tre direzioni ortogonali, delle forze di massa, o delle forze superficiali o « degli spostamenti superficiali. »

È chiaro poi che una decomposizione analoga si può ottenere per gli altri elementi, che si considerano in una deformazione, come la dilatazione cubica, le componenti delle tensioni interne, ecc., che sono funzioni lineari delle derivate prime degli spostamenti, mediante le formule che per queste quantità si deducono dalle (7).

§ 2.

Formule atte a rappresentare le u_1, u_2, u_3 si possono ottenere anche col seguente procedimento, che è indipendente dal teorema di Betti.

Integrando per parti si ha:

$$\int_S \Theta \frac{dS}{r} = -\int_\sigma \left(\sum_{i=1}^{3} U_i \gamma_i\right) \frac{d\sigma}{r} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x'_i} \int_S u_i \frac{dS}{r}$$

$$\int_S R_1 \frac{dS}{r} = -\int_\sigma (U_3 \gamma_2 - U_2 \gamma_3) \frac{d\sigma}{r} + \frac{\partial}{\partial x'_2} \int_S u_3 \frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x'_3} \int_S u_2 \frac{dS}{r}$$

$$\int_S R_2 \frac{dS}{r} = -\int_\sigma (U_1 \gamma_3 - U_3 \gamma_1) \frac{d\sigma}{r} + \frac{\partial}{\partial x'_3} \int_S u_1 \frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x'_1} \int_S u_3 \frac{dS}{r}$$

$$\int_S R_3 \frac{dS}{r} = -\int_\sigma (U_2 \gamma_1 - U_1 \gamma_2) \frac{d\sigma}{r} + \frac{\partial}{\partial x'_1} \int_S u_2 \frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x'_2} \int_S u_1 \frac{dS}{r};$$

di qui si ottiene:

$$\frac{\partial}{\partial x'_1} \int_S \Theta \frac{dS}{r} + \frac{\partial}{\partial x'_3} \int_S R_2 \frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x'_2} \int_S R_3 \frac{dS}{r} = \Delta_2 \int_S u_1 \frac{dS}{r} +$$

$$+ \int_\sigma \left(\sum_{i=1}^{3} U_i \gamma_i\right) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} d\sigma + \int_\sigma (U_1 \gamma_3 - U_3 \gamma_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_3} d\sigma - \int_\sigma (U_2 \gamma_1 - U_1 \gamma_2) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} d\sigma,$$

ed altre due formule analoghe che si deducono da questa con permutazioni circolari degli indici. Quindi, se il punto (x'_1, x'_2, x'_3) è interno ad S, poichè:

$$\Delta_2 \int_S u_i \frac{dS}{r} = -4\pi u_i(x'_1, x'_2, x'_3),$$

si hanno le seguenti formule:

$$\left.\begin{aligned}
-4\pi u_1(x'_1,\, x'_2,\, x'_3) &= \frac{\partial}{\partial x'_1}\int_S \Theta\,\frac{dS}{r} + \frac{\partial}{\partial x'_3}\int_S R_2\,\frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x'_2}\int_S R_3\,\frac{dS}{r} - \\
&\quad -\int_\sigma (U_1\Lambda + U_3\Lambda_2 - U_2\Lambda_3)\,d\sigma \\
-4\pi u_2(x'_1,\, x'_2,\, x'_3) &= \frac{\partial}{\partial x'_2}\int_S \Theta\,\frac{dS}{r} + \frac{\partial}{\partial x'_1}\int_S R_3\,\frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x'_3}\int_S R_1\,\frac{dS}{r} - \\
&\quad -\int_\sigma (U_2\Lambda + U_1\Lambda_3 - U_3\Lambda_1)\,d\sigma \\
-4\pi u_3(x'_1,\, x'_2,\, x'_3) &= \frac{\partial}{\partial x'_3}\int_S \Theta\,\frac{dS}{r} + \frac{\partial}{\partial x'_2}\int_S R_1\,\frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x'_1}\int_S R_2\,\frac{dS}{r} - \\
&\quad -\int_\sigma (U_3\Lambda + U_2\Lambda_1 - U_1\Lambda_2)\,d\sigma
\end{aligned}\right\}\quad (9)$$

ove per brevità si è posto:

$$\Lambda = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}$$

$$\Lambda_1 = \gamma_2\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_3} - \gamma_3\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2}, \qquad \Lambda_2 = \gamma_3\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} - \gamma_2\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_3}, \qquad \Lambda_3 = \gamma_1\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_2} - \gamma_2\,\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_3}.$$

Queste formule valgono qualunque siano le funzioni u_1, u_2, u_3, purchè soddisfacenti alle note condizioni circa la continuità che sono necessarie, perchè il procedimento seguito sia applicabile. Esse possono essere considerate come una estensione della formula di Green, poichè se facciamo $u_2 = u_3 = 0$, le ultime due si riducono ad identità, e la prima si converte nella formula di Gauss, da cui risulta immediatamente quella di Green, relativa alla funzione u_1.

Se ora supponiamo che le u_1, u_2, u_3 soddisfino alle equazioni dell'equilibrio, possiamo dalle (9) eliminare le R_1, R_2, R_3, oppure la Θ, introducendo invece le forze di massa e le superficiali. Difatti colle solite trasformazioni si ha:

$$\mu\left(\frac{\partial}{\partial x'_3}\int_S R_2\,\frac{dS}{r} - \frac{\partial}{\partial x'_2}\int_S R_3\,\frac{dS}{r}\right) = -\mu\int_S\left(\frac{\partial R_3}{\partial x_2} - \frac{\partial R_2}{\partial x_3}\right)\frac{dS}{r} - \mu\int_\sigma (R_3\gamma_2 - R_2\gamma_3)\,\frac{d\sigma}{r},$$

ma dalle equazioni di equilibrio:

$$\mu\left(\frac{\partial R_3}{\partial x_2} - \frac{\partial R_2}{\partial x_3}\right) = 2(\lambda + \mu)\,\frac{\partial \Theta}{\partial x_1} + \delta X_1,$$

e quindi, sostituendo nella prima delle (9), si ha:

$$-4\pi\mu u_1(x'_1,\ x'_2,\ x'_3) = -(2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'_1}\int_S \Theta\frac{dS}{r} - \delta\int_S X\frac{dS}{r} +$$
$$+ 2(\lambda+\mu)\int_\sigma \Theta\gamma_1\frac{d\sigma}{r} - \mu\int_\sigma S_1\frac{d\sigma}{r} - \mu\int_\sigma (U_1\Lambda + U_3\Lambda_2 - U_2\Lambda_3)d\sigma.$$

Ora dalle equazioni (2) si ha, sopra la superficie σ,

$$2\lambda\Theta\gamma_1 = -L_1 - 2\mu\frac{\partial u_1}{\partial n} - \mu S_1,$$

e sostituendo nella equazione precedente:

$$4\pi\mu u_1(x'_1,\ x'_2,\ x'_3) = (2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'_1}\int_S \Theta\frac{dS}{r} + \delta\int_S X\frac{dS}{r} + \int_\sigma L\frac{d\sigma}{r} +$$
$$+ 2\mu\int_\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial n} + S_1 - \Theta\gamma_1\right)\frac{d\sigma}{r} + \mu\int_\sigma (U_1\Lambda + U_3\Lambda_2 - U_2\Lambda_3)d\sigma,$$

ma d'altra parte si ha (*):

$$\int_\sigma\left(\frac{\partial u_1}{\partial n} + S_1 - \Theta\gamma_1\right)\frac{d\sigma}{r} = -\int_\sigma (U_3\Lambda_2 - U_2\Lambda_3)d\sigma,$$

sicchè sostituendo si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} 4\pi\mu u_1(x'_1,\ x'_2,\ x'_3) = (2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'_1}\int_S \Theta\frac{dS}{r} + \delta\int_S X\frac{dS}{r} + \int_\sigma L_1\frac{d\sigma}{r} + \\ + \mu\int_\sigma (U_1\Lambda + U_2\Lambda_3 - U_3\Lambda_2)d\sigma. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Altre due formule analoghe si possono avere per $u_2(x'_1, x'_2, x'_3)$ e $u_3(x'_1, x'_2, x'_3)$ con sostituzioni circolari degli indici.

Per eliminare invece dalle (9) la Θ, osserviamo che dalle equazioni di equilibrio si ha:

$$2(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'_1}\int_S \Theta\frac{dS}{r} = \mu\int_S\left(\frac{\partial R_3}{\partial x_2} - \frac{\partial R_2}{\partial x_3}\right)\frac{dS}{r} + 2(\lambda+\mu)\int_\sigma \Theta\gamma_1\frac{d\sigma}{r} - \delta\int_S X_1\frac{dS}{r},$$

(*) La dimostrazione di questa formula si può trovare nel mio lavoro: *Sopra l'equilibrio di un corpo elastico isotropo* (Nuovo Cimento, 1885), dove viene stabilita la formula (10) con un procedimento un po' diverso da quello ora seguito.

e sostituendo nelle (9):

$$-8\pi(\lambda+\mu)u_1(x'_1,\ x'_2,\ x'_3)=(2\lambda+\mu)\left[\frac{\partial}{\partial x'_3}\int_S R_2\frac{dS}{r}-\frac{\partial}{\partial x'_2}\int_S R_3\frac{dS}{r}\right]-$$

$$-\partial\int_S X_1\frac{dS}{r}+2(\lambda+\mu)\int_\sigma \Theta\gamma_1\frac{d\sigma}{r}-\mu\int_\sigma S_1\frac{d\sigma}{r}-2(\lambda+\mu)\int_\sigma(U_1\Lambda+U_3\Lambda_2-U_2\Lambda_3)d\sigma,$$

ma come nel caso precedente:

$$2(\lambda+\mu)\int_\sigma\Theta\gamma_1\frac{d\sigma}{r}-\mu\int_\sigma S_1\frac{d\sigma}{r}=-\int_\sigma L_1\frac{d\sigma}{r}+2\mu\int_\sigma(U_3\Lambda_2-U_2\Lambda_3)d\sigma,$$

per cui finalmente si ha:

$$\left.\begin{aligned}8\pi(\lambda+\mu)u_1(x'_1,\ x'_2,\ x'_3)&=(2\lambda+\mu)\left[\frac{\partial}{\partial x'_2}\int_S R_3\frac{dS}{r}-\frac{\partial}{\partial x'_3}\int_S R_2\frac{dS}{r}\right]+\\&+\partial\int_S X_1\frac{dS}{r}+\int_\sigma L_1\frac{d\sigma}{r}+2(\lambda+\mu)\int_\sigma U_1\Lambda d\sigma+2\lambda\int_\sigma(U_3\Lambda_2-U_2\Lambda_3)d\sigma.\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

Le altre due formule analoghe per $u_2(x'_1,\ x'_2,\ x'_3)$ e $u_3(x'_1,\ x'_2,\ x'_3)$ si ottengono da questa con sostituzioni circolari degli indici.

Sia dalle (10), che dalle (11) con derivazioni si ottengono delle formule per rappresentare la Θ e le R_1, R_2, R_3, le quali furono già trovate da Betti nel lavoro citato, e che sono di forma analoga a quella delle (7); per cui qualora nelle formule (10) e (11) si volessero esprimere i secondi membri direttamente in funzione delle X_i, L_i, U_i, sostituendo a Θ e R_1, R_2, R_3 questi valori, si otterrebbero anche integrali sestupli e quintupli, mentre nelle (7) non entrano che integrali tripli e doppi. In alcuni casi però le (10) e (11) possono essere utili.

Supponiamo per es. che si tratti di un problema di equilibrio, in cui sono date le forze X_i, e sulla superficie alcune delle sei componenti L_i, U_i. Per le (10) o (11) il problema si riduce a calcolare quelli fra i dodici integrali

$$\int_\sigma L_i\frac{d\sigma}{r},\qquad\int_\sigma U_i\gamma_s\frac{d\sigma}{r}\qquad(i,\ s=1,\ 2,\ 3),$$

che contengono quelle L_i od U_i che non sono date. Volendo usare delle (7) bisognerà considerare anche gli integrali

$$\int_\sigma L_i r\,d\sigma,\qquad\int_\sigma U_i\gamma_s r\,d\sigma\qquad(i,\ s=1,\ 2,\ 3).$$

Confrontando le (7) colle (10) si ottiene:

$$2(\lambda+\mu)\int_S \Theta \frac{dS}{r} = \sum_{i=1}^{3}\left\{\delta\int_S X_i \frac{\partial \frac{r}{2}}{\partial xi} dS + \int_\sigma L_i \frac{\partial \frac{r}{2}}{\partial xi} d\sigma + 2\mu\int_\sigma U_i \left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial \frac{r}{2}}{\partial xi} - \frac{\gamma i}{r}\right) d\sigma\right\} + C,$$

ove C è una costante. Eseguendo l'operazione Δ_2 sopra i due membri si ottiene la formula di Betti per la dilatazione cubica

$$-8\pi(\lambda+\mu)\Theta = \sum_{i=1}^{3}\left\{\delta\int_S X_i \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial xi} dS + \int_\sigma L_i \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial xi} d\sigma + 2\mu\int_\sigma U_i \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial xi} d\sigma\right\}.$$

Poniamo ora:

$$\Theta^{(1)} = -\frac{\delta}{8\pi(\lambda+\mu)}\sum_{i=1}^{3}\int_S X_i \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial xi} dS \qquad \Theta^{(2)} = -\frac{\delta}{8\pi(\lambda+\mu)}\sum_{i=1}^{3}\int_\sigma L_i \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial xi} d\sigma$$

$$\Theta^{(3)} = -\frac{\mu}{4\pi(\lambda+\mu)}\sum_{i=1}^{3}\int_\sigma U_i \frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial xi} d\sigma,$$

e consideriamo separatamente i termini che, nelle (10), dipendono dalle forze X_i, dalle L_i, e dagli spostamenti U_i. Indicando i primi con $v_1^{(1)}$, $v_2^{(1)}$, $v_3^{(1)}$, abbiamo:

$$4\pi\mu v_i^{(1)} = (2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'i}\int_S \Theta^{(1)}\frac{dS}{r} + \int_S X_i \frac{dS}{r} \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{12'}$$

e indicando i secondi con $v_1^{(2)}$, $v_2^{(2)}$, $v_3^{(2)}$,

$$4\pi\mu v_i^{(2)} = (2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'i}\int_S \Theta^{(2)}\frac{dS}{r} + \int_\sigma L \frac{d\sigma}{r} \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{12''}$$

e finalmente per gli ultimi si ha:

$$\left.\begin{aligned}
4\pi\mu v_1^{(3)} &= (2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'_1}\int_S \Theta^{(3)}\frac{dS}{r} + \mu\int_\sigma (U_1\Lambda + U_2\Lambda_3 - U_3\Lambda_2)d\sigma \\
4\pi\mu v_2^{(3)} &= (2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'_2}\int_S \Theta^{(3)}\frac{dS}{r} + \mu\int_\sigma (U_2\Lambda + U_3\Lambda_1 - U_1\Lambda_3)d\sigma \\
4\pi\mu v_3^{(3)} &= (2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'_3}\int_S \Theta^{(3)}\frac{dS}{r} + \mu\int_\sigma (U_3\Lambda + U_1\Lambda_2 - U_2\Lambda_1)d\sigma.
\end{aligned}\right\} \tag{12'''}$$

Questi tre sistemi $v_i^{(1)}$, $v_i^{(2)}$, $v_i^{(3)}$ rappresentano, come è facile verificare, tre deformazioni speciali del corpo, di cui la prima avviene per forze di massa uguali alle date, le altre due per forze di massa nulle; essi dànno quindi una decomposizione di qualsiasi deformazione, analoga a quella considerata alla fine del § 1.

Siano ora $M_1^{(3)}$, $M_2^{(3)}$, $M_3^{(3)}$ le componenti delle forze superficiali che mantengono l'equilibrio, quando avviene la deformazione $v_1^{(3)}$, $v_2^{(3)}$, $v_3^{(3)}$; e rappresentiamo $v_1^{(1)}$ mediante la (10); si ha:

$$4\pi\mu v_i^{(1)} = (2\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x'_1}\int_S \Theta^{(1)}\frac{dS}{r} + \partial\int_S X_1\frac{dS}{r} + \int_\sigma M_1^{(1)}\frac{d\sigma}{r} + \\ + \mu\int_\sigma (V_1^{(1)}\Lambda + V_2^{(1)}\Lambda_3 - V_3^{(1)}\Lambda_2)d\sigma,$$

e confrontando con (12')

$$\int_\sigma M_1^{(1)}\frac{d\sigma}{r} + \mu\int_\sigma (V_1^{(1)}\Lambda + V_2^{(1)}\Lambda_3 - V_3^{(1)}\Lambda_2)d\sigma = 0. \tag{13}$$

Altre due relazioni analoghe si ottengono permutando circolarmente gli indici inferiori delle M, V, Λ.

Similmente rappresentando mediante le (10) gli spostamenti (12'') (12''') e servendoci di notazioni analoghe alle precedenti per indicare gli spostamenti superficiali corrispondenti, si trovano le seguenti relazioni:

$$\int_\sigma L_1\frac{d\sigma}{r} = \int_\sigma M_1^{(2)}\frac{d\sigma}{r} + \mu\int_\sigma (V_1^{(2)}\Lambda + V_2^{(2)}\Lambda_3 - V_3^{(2)}\Lambda_2)d\sigma \tag{14}$$

$$\int_\sigma M_1^{(3)}\frac{d\sigma}{r} + \mu\int_\sigma (V_1^{(3)}\Lambda + V_2^{(3)}\Lambda_3 - V_3^{(3)}\Lambda_2)d\sigma = \mu\int_\sigma (U_1\Lambda + U_2\Lambda_3 - U_3\Lambda_2)d\sigma, \tag{15}$$

ed altre quattro analoghe. Queste tre terne di relazioni rappresentano le condizioni superficiali a cui soddisfano rispettivamente gli spostamenti (12'), (12''), (12''').

Nella (15) sostituiamo alle U_i le somme equivalenti $U_i^{(1)} + U_i^{(2)} + U_i^{(3)}$ e nella (14) ad L_1 la somma $M_1^{(1)} + M_1^{(2)} + M_1^{(3)}$; avremo:

$$\int_\sigma (M_1^{(1)} + M_1^{(3)})\frac{d\sigma}{r} = \mu\int_\sigma (V_1^{(2)}\Lambda + V_2^{(2)}\Lambda_3 - V_3^{(2)}\Lambda_2)d\sigma$$

$$\int_\sigma M_1^{(3)}\frac{d\sigma}{r} = \mu\int_\sigma [(V_1^{(1)} + V_1^{(2)})\Lambda + (V_2^{(1)} + V_2^{(2)})\Lambda_3 - (V_3^{(1)} + V_3^{(2)})\Lambda_2]d\sigma.$$

Queste due relazioni a cagione della (13) si riducono ad una sola

$$\int_\sigma M_1^{(3)} \frac{d\sigma}{r} - \mu \int_\sigma (V_1^{(2)} \Lambda + V_2^{(2)} \Lambda_3 - V_3^{(2)} \Lambda_2) d\sigma = H_1,$$

ove H_1 è una quantità che dipende unicamente dalle forze X_1, X_2, X_3, e si ha:

$$H_1 = -\int_\sigma M_1^{(1)} \frac{d\sigma}{r} = \mu \int_\sigma (V_1^{(1)} \Lambda + V_2^{(1)} \Lambda_3 - V_3^{(1)} \Lambda_2) d\sigma.$$

Analogamente si trova:

$$\int_\sigma M_2^{(3)} \frac{d\sigma}{r} - \mu \int_\sigma (V_2^{(2)} \Lambda + V_3^{(2)} \Lambda_1 + V_1^{(2)} \Lambda_3) d\sigma = H_2$$

$$\int_\sigma M_3^{(3)} \frac{d\sigma}{r} - \mu \int_\sigma (V_3^{(2)} \Lambda + V_1^{(2)} \Lambda_2 - V_2^{(2)} \Lambda_1) d\sigma = H_3,$$

ove H_2, H_3 dipendono parimente dalle forze X_1, X_2, X_3. Nelle tre relazioni precedenti le $M_i^{(3)}$, dipendono dalle U_i, e le $V_i^{(2)}$ dalle L_i, e sarebbe facile ottenere dalle (12′) (12‴) le loro espressioni mediante queste funzioni; si hanno così tre relazioni che devono essere soddisfatte in qualunque deformazione fra le forze superficiali, gli spostamenti superficiali e le forze di massa. Quando queste ultime sono nulle, si ha anche $H_1 = H_2 = H_3 = 0$, e le relazioni precedenti divengono relazioni fra le forze e gli spostamenti superficiali.

Anche le (11) dànno una decomposizione di qualsiasi deformazione analoga a quelle date dalle (7) e (10); e confrontando le (11) colle (7) si possono fare considerazioni simili alle precedenti.

§ 3.

Se in un certo spazio S_1, contenuto in S, le funzioni $u_i^{(s)}$, $L_i^{(s)}$ del § 1 sono sviluppabili in serie alle quali sia applicabile la integrazione termine a termine, dalle (7) noi potremo dedurre degli sviluppi atti a rappresentare in modo generale u_1, u_2, u_3 in S_1. Supponiamo che S_1 sia limitato da una superficie sferica ω, e proponiamoci di trovare gli sviluppi di $u_i^{(s)}$, $L_i^{(s)}$, validi nello spazio interno ed esterno ad ω, e analoghi agli sviluppi per funzioni sferiche, che si hanno per la funzione $\frac{1}{r}$.

Introduciamo un sistema di coordinate polari ρ, θ, φ col polo nell'origine delle coordinate; si avrà:

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\mu},$$

ove μ è il coseno dell'angolo dei due raggi rettori ρ, ρ'. Indicando con P_n le note funzioni di Legendre, per $\rho' < \rho$ si ha:

$$\frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho'^n}{\rho^{n+1}} P_n(\mu). \tag{16}$$

Sviluppando collo stesso procedimento la funzione r, si ottiene:

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho'^n}{\rho^{n-1}} P'_n(\mu), \tag{17}$$

ove le $P'(\mu)$ sono funzioni razionali intere di μ, al pari delle $P_n(\mu)$ ed hanno con queste relazioni assai semplici.

Osserviamo infatti che facendo $\mu = 1$ nella (17), si vede che deve essere:

$$P'_0(1) = 1 \qquad P'_1(1) = -1 \qquad P'_n(1) = 0 \qquad (n > 1),$$

e derivando rispetto a μ

$$\frac{1}{r} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho'^{n-1}}{\rho^n} \frac{\partial P'_n}{\partial \mu};$$

confrontando colla (16) otteniamo:

$$\frac{\partial P'_0}{\partial \mu} = 0 \qquad \frac{\partial P_n}{\partial \mu} = -P_{n-1} \qquad (n = 1,\ 2,\ 3, \ldots).$$

Di qui integrando, e per una formula nota della teoria delle funzioni sferiche, si ha:

$$P'_0 = 1 \qquad P'_1 = -\mu$$

$$P'_n = -\int_1^{\mu} P_{n-1} d\mu = \frac{1}{2n-1}(P_n - P_{n-2}) \qquad (n > 1).$$

Si hanno così le espressioni delle P'_n in funzione delle P_n; sostituendo nella (17), si ha per r il seguente sviluppo per funzioni P_n

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho'^2}{2n+3} - \frac{\rho^2}{2n-1} \right) \frac{\rho'^n}{\rho^{n+1}} P_n.$$

Se nella equazione

$$\Delta_2 r = \frac{2}{r},$$

sostituiamo ad r e $\frac{1}{r}$ i loro sviluppi (16) (17), uguagliando i coefficienti delle potenze di ρ' o di $\frac{1}{\rho}$ nei due membri otteniamo:

$$\Delta_2 \frac{P'_n}{\rho^{n-1}} = 2\frac{P_n}{\rho^{n+1}} \qquad \Delta'_2 \rho'_n P'_n = 2\rho'^{n-2} P_{n-2}, \tag{18}$$

ove Δ'_2 indica il parametro differenziale Δ_2 preso rispetto alle variabili ρ', θ', φ'. Per ragioni di simmetria poi si ha anche

$$\Delta_2 \rho^n P'_n = 2\rho^{n-2} P_{n-2} \qquad \Delta'_2 \frac{P'_n}{\rho'^{n-1}} = 2\frac{P_n}{\rho'^{n+1}}. \tag{19}$$

Di qui si vede subito che le funzioni

$$\rho^n P'_n, \qquad \frac{1}{\rho^{n-2}} P'_n,$$

soddisfano alla equazione $\Delta_2 \Delta_2 = 0$.

Queste proprietà delle funzioni P'_n possono essere estese nel seguente modo. Siano Y_n, Y_{n-2} due funzioni sferiche di Laplace, contenenti, come è noto, $2n+1$ e $2n-3$ coefficienti arbitrarii rispettivamente. Mediante le equazioni, a cui soddisfano Y_n e Y_{n-2}, è facile dimostrare le uguaglianze

$$\Delta_2 \rho^n Y_{n-2} = 2(2n-1)\rho^{n-2} Y_{n-2} \qquad \Delta_2 \frac{Y_n}{\rho^{n-1}} = -2(2n-1)\frac{Y_n}{\rho^{n+1}};$$

da queste seguono le altre

$$\Delta_2 \Delta_2 \rho^n (Y_{n-2} + Y_n) = 0 \qquad \Delta_2 \Delta_2 \frac{1}{\rho^{n-1}} (Y_{n-2} + Y_n) = 0.$$

Ora osserviamo che la funzione razionale intera omogenea più generale di grado n nelle x_1, x_2, x_3, che soddisfa alla equazione $\Delta_2 \Delta_2 = 0$ conterrà $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{(n-3)(n-2)}{2} = 2(2n-1)$ coefficienti arbitrari; e che parimenti $Y_n + Y_{n-2}$ ne contiene $2n+1+2n-3 = 2(2n-1)$. Dunque possiamo dire: La funzione razionale intera omogenea più generale di grado n che soddisfa alla equazione $\Delta_2 \Delta_2 = 0$ è $\rho^n(Y_n + Y_{n-2})$. La stessa equazione poi è soddisfatta anche dalla funzione omogenea, di grado $-(n-1)$, $\frac{1}{\rho^{n-1}}(Y_n + Y_{n-2})$.

Per ottenere ora gli sviluppi degli spostamenti (8) introdurremo le seguenti notazioni:

$$U'_n = \frac{P'_n}{\rho^{n-1}} \qquad U_n = \frac{P_n}{\rho^{n+1}} \qquad \overline{U'_n} = \frac{P'_n}{\rho'^{n-1}} \qquad \overline{U_n} = \frac{P_n}{\rho'^{n+1}}$$

$$V'_n = \rho^n P'_n \qquad V_n = \rho^n P_n \qquad \overline{V'_n} = \rho'^n P'_n \qquad \overline{V_n} = \rho'^n P_n.$$

Avremo allora per $\rho' < \rho$

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} \rho'^n U'_n \qquad \frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho'^n U_n.$$

Le U'_n sono funzioni omogenee di grado $-(n-1)$ nelle x_1, x_2, x_3, e le U_n invece di grado $-(n+1)$; inoltre per le (18)

$$\Delta_2 U'_n = 2 U_n \qquad \Delta_2 U_n = 0.$$

Se invece $\rho < \rho'$ abbiamo:

$$r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho'^{n-1}} V'_n \qquad \frac{1}{r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho'^{n+1}} V_n,$$

ove V'_n, V_n sono funzioni omogenee, razionali, intere di grado n delle x_1, x_2, x_3, e si ha (19)

$$\Delta_2 V'_n = 2 V_{n-2} \qquad \Delta_2 V_n = 0.$$

Per ciò che segue è utile di stabilire anche le seguenti relazioni. Si ha $\frac{\partial r}{\partial x_i} = -\frac{\partial r}{\partial x'_i}$; quindi:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho'^n \frac{\partial U'_n}{\partial x_i} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial \overline{V'_n}}{\partial x'_i} \frac{1}{\rho^{n-1}}.$$

Ora $\frac{\partial U'_n}{\partial x_i}$ è funzione omogenea di grado $-n$, e si può porre sotto la forma $\frac{F_n}{\rho^n}$, ove F_n è indipendente da ρ e da ρ'; analogamente $\frac{\partial \overline{V'_n}}{\partial x'_n}$ si può porre sotto la forma $\rho'^{n-1} G_{n-1}$, ove G_{n-1} è indipendente da ρ e da ρ'. L'equazione precedente allora si può scrivere:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho'^n}{\rho^n} F_n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho'^n}{\rho^n} G_n,$$

quindi $F_n = -G_n$, ossia:

$$\rho^n \frac{\partial U'_n}{\partial x_i} = -\frac{1}{\rho'^n} \frac{\partial \overline{V'_{n+1}}}{\partial x'_i}.$$

Analogamente si trova: (20)

$$\rho^{n+1} \frac{\partial^2 U'_n}{\partial x_i \partial x_s} = \frac{1}{\rho'^n} \frac{\partial^2 \overline{V'_{n+2}}}{\partial x'_i \partial x'_s}.$$

Per le funzioni U_n, V_n in modo simile, considerando gli sviluppi di $\frac{1}{r}$, si ottengono le relazioni:

$$\left.\begin{aligned} \rho^{n+2}\frac{\partial U_n}{\partial x_i} &= -\frac{1}{\rho'^n}\frac{\partial \overline{V_{n+1}}}{\partial x'_i} \\ \rho^{n+3}\frac{\partial^3 U_n}{\partial x_i\,\partial x_s} &= \frac{1}{\rho'^n}\frac{\partial^2 \overline{V_{n+2}}}{\partial x'_i\,\partial x'_s}\,. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

In queste poi, e nelle precedenti, si possono scambiare le x_1, x_2, x_3 nelle x'_1, x'_2, x'_3 ed ottenere altrettante relazioni fra le derivate delle $\overline{U'_n}$, $\overline{U_n}$ e le derivate delle V'_n, V_n.

Riprendiamo ora a considerare gli spostamenti (8) del § 1; supposto $\rho' < \rho$, dagli sviluppi precedenti di r e $\frac{1}{r}$ si ricava:

$$u_s^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho'^n \left(\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 U'_n}{\partial x_s^2} + U_n\right) \qquad u_i^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho'^n \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 U'_n}{\partial x_i\,\partial x_s}\,,$$

e questi sviluppi, per le (20) (21), si possono scrivere anche

$$u_s^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{n+1}} \left\{\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 \overline{V'_{n+2}}}{\partial x'^2_s} + \overline{V_n}\right\} \qquad u_i^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2 \overline{V'_{n+2}}}{\partial x'_i\,\partial x'_s}\,.$$

Di qui si vede che, se si considerano i tre termini corrispondenti ad un dato valore di n negli sviluppi di $u_1^{(1)}$, $u_1^{(2)}$, $u_1^{(3)}$, essi costituiscono un sistema di spostamenti soddisfacenti alle equazioni di equilibrio, quando le forze di massa sono nulle, tanto considerati come funzioni delle x_1, x_2, x_3, quanto considerati come funzioni delle x'_1, x'_2, x'_3.

Ciò posto, supponiamo che l'origine delle coordinate sia nell'interno del corpo, e ρ' non sia maggiore della distanza minima dell'origine dalla superficie; consideriamo i termini che nelle (7) dipendono dalla forza superficiale L_1, e indichiamoli con u_{11}, u_{12}, u_{13}. Poichè ρ sulla superficie σ è sempre maggiore di ρ', potremo alle $u_i^{(s)}$ in questi termini applicare gli sviluppi (22), e integrando termine a termine avremo:

$$u_{11} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{\frac{\alpha}{2}\int_\sigma L_1 \frac{\partial^2 \overline{V_{n+2}}}{\partial x'^2_1}\frac{d\sigma}{\rho^{n+1}} + \int_\sigma L_1 \overline{V_n}\frac{d\sigma}{\rho^{n+1}}\right\}$$

$$u_{12} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha}{2}\int_\sigma L_1 \frac{\partial^2 \overline{V_{n+2}}}{\partial x'_1\,\partial x'_2}\frac{d\sigma}{\rho^{n+1}}$$

$$u_{13} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha}{2}\int_\sigma L_1 \frac{\partial^2 \overline{V_{n+2}}}{\partial x'_1\,\partial x'_3}\frac{d\sigma}{\rho^{n+1}}\,.$$

In questi sviluppi i termini corrispondenti ad uno speciale valore di n sono funzioni omogenee razionali intere di x'_1, x'_2, x'_3 e soddisfano, considerati come spostamenti, alle equazioni di equilibrio (1′); difatti essi rientrano nella forma generale di spostamenti rappresentati dalle (3). Considerazioni analoghe si possono fare circa i termini dipendenti da L_1, e da L_2.

Indichiamo ora con v_{11}, v_{12}, v_{13} i termini che nelle (7) dipendono da U_1. Le espressioni $L_1^{(1)}$, $L_1^{(2)}$, $L_1^{(3)}$ che moltiplicano U_1 sotto i segni di integrazione si possono sviluppare in serie mediante gli sviluppi di r e $\frac{1}{r}$. Si trova così:

$$L_1^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho'^n \left\{ \alpha\mu \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 U'_n}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial U_n}{\partial x_1} \gamma_1 \right) + \mu \frac{\partial U_n}{\partial n} \right\}$$

$$L_1^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho'^n \left\{ \alpha\mu \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 U'_n}{\partial x_1 \partial x_2} - 2 \frac{\partial U_n}{\partial x_2} \gamma_1 \right) + \mu \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_1} \gamma_2 - \frac{\partial U_n}{\partial x_2} \gamma_1 \right) \right\}$$

$$L_1^{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho'^n \left\{ \alpha\mu \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 U'_n}{\partial x_1 \partial x_3} - 2 \frac{\partial U_n}{\partial x_3} \gamma_1 \right) + \mu \left(\frac{\partial U_n}{\partial x_1} \gamma_3 - \frac{\partial U_n}{\partial x_3} \gamma_1 \right) \right\},$$

ossia per le (20) (21)

$$L_1^{(1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \alpha\mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{\partial \overline{V'_{n+2}}}{\partial x'^2_1} \right) + \frac{2\alpha\mu}{\rho^{n+2}} \frac{\partial \overline{V_{n+1}}}{\partial x'_1} \gamma_1 + \mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\overline{V_n}}{\rho^{n+1}} \right) \right\}$$

$$L_1^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \alpha\mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{\partial^2 \overline{V'_{n+2}}}{\partial x'_1 \partial x'_2} \right) + \frac{2\alpha\mu}{\rho^{n+2}} \frac{\partial \overline{V_{n+1}}}{\partial x'_2} \gamma_1 + \frac{\mu}{\rho^{n+2}} \left(\frac{\partial \overline{V_{n+1}}}{\partial x'_2} \gamma_1 - \frac{\partial \overline{V_{n+1}}}{\partial x'_1} \gamma_2 \right) \right\}$$

$$L_1^{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \alpha\mu \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{\rho^{n+1}} \frac{\partial^2 \overline{V'_{n+2}}}{\partial x'_1 \partial x'_3} \right) + \frac{2\alpha\mu}{\rho^{n+2}} \frac{\partial \overline{V_{n+1}}}{\partial x'_3} \gamma_1 + \frac{\mu}{\rho^{n+2}} \left(\frac{\partial \overline{V_{n+1}}}{\partial x'_3} \gamma_1 - \frac{\partial \overline{V_{n+1}}}{\partial x'_2} \gamma_3 \right) \right\}.$$

Sotto questa forma è facile vedere che anche in questo caso i termini dei secondi membri corrispondenti ad uno stesso valore di n, costituiscono un sistema di spostamenti, che soddisfano alle equazioni (1′), e sono funzioni omogenee razionali intere di grado n delle x'_1, x'_2, x'_3. Perciò anche negli sviluppi dei termini

$$v_{11} = \int_\sigma L_1^{(1)} U_1 \, d\sigma \qquad v_{12} = \int_\sigma L_1^{(2)} U_1 \, d\sigma \qquad v_{13} = \int_\sigma L_1^{(3)} U_1 \, d\sigma,$$

i gruppi corrispondenti ad uno stesso valore di n godono della stessa proprietà.

Considerazioni analoghe si possono fare rispetto agli altri termini dipendenti da U_2, U_3.

Se ora osserviamo che l'origine può essere un punto arbitrario del corpo, da ciò che precede risulta il teorema seguente:

« Se attorno ad un punto (a_1, a_2, a_3) interno al corpo descriviamo una « sfera, il cui raggio sia minore della distanza minima di questo punto dalla « superficie, qualsiasi deformazione, quando le forze di massa sono nulle, è rap- « presentabile dentro tale sfera mediante la somma di infinite deformazioni, i « cui spostamenti sono funzioni omogenee razionali intere delle differenze « $x_1 - a_1$, $x_2 - a_2$, $x_3 - a_3$. I coefficienti in queste funzioni sono esprimibili « mediante i valori delle forze e degli spostamenti alla superficie del corpo. »

Tre polinomii $u_1^{(n)}$, $u_2^{(n)}$, $u_3^{(n)}$ omogenei di grado n nelle variabili x_1, x_2, x_3, contengono complessivamente $\frac{3(n+1)(n+2)}{2}$ coefficienti; e se scriviamo che, considerati come spostamenti, soddisfano alle equazioni (1′) dell'equilibrio, otteniamo $\frac{3n(n-1)}{2}$ relazioni fra i coefficienti. Perciò la n-esima delle deformazioni del teorema precedente si può rappresentare in generale mediante tre polinomii omogenei di grado n delle differenze $x_1 - a_1$, $x_1 - a_2$, $x_1 - a_3$, fra i cui coefficienti sussistono $\frac{3n(n-1)}{2}$ relazioni. Se poi poniamo:

$$u_1^{(n)} = \rho^n X_n \qquad u_2^{(n)} = \rho^n Y_n \qquad u_3^{(n)} = \rho^n Z_n,$$

ove ρ indica il raggio vettore del punto $(x_1\ x_2\ x_3)$, le X_n, Y_n, Z_n saranno funzioni unicamente degli angoli θ, φ che determinano la direzione di ρ, e inoltre dovendo le $u_i^{(n)}$ soddisfare alla equazione $\Delta_2 \Delta_2 = 0$, per quanto abbiamo visto, saranno la somma di due funzioni sferiche di ordine n ed $n-2$.

Mediante le equazioni dell'equilibrio in coordinate polari si possono facilmente stabilire le equazioni differenziali, a cui soddisfano le terne di funzioni X_n, Y_n, Z_n, considerate come dipendenti dalle variabili θ, φ, analogamente a quanto si fa per le funzioni Y_n di Laplace.

Per lo spazio S' esterno ad una sfera ω, si può dimostrare un teorema analogo al precedente, supponendo: 1.° che il corpo si estenda all'infinito, e che occupi tutto lo spazio S'; 2.° che i valori di U_1, U_2, U_3, L_1, L_2, L_3 sopra una sfera ω' di raggio grandissimo, concentrica ad ω, siano tali che si annullino gli integrali delle (7), in cui compariscono queste quantità, quando si prenda per σ la superficie ω'. Gli sviluppi che così si ottengono procedono per funzioni omegenee fratte di ordine negativo.

Mediante queste due serie infinite di spostamenti, gli uni rappresentati da funzioni omogenee razionali intere, gli altri da funzioni omogenee fratte, è possibile rappresentare le deformazioni che avvengono in uno spazio limitato da due sfere concentriche, ed anche, in certi casi, nello spazio limitato da un numero finito di porzioni di superficie sferiche, analogamente a quanto si può fare per le funzioni che soddisfano alla equazione $\Delta_2 = 0$ (*). In quest'ultimo caso gli sviluppi procedono per somme di funzioni omogenee delle differenze $(x_1 - a_1,\ x_2 - a_2,\ x_3 - a_3)$, $(x_1 - b_1,\ x_2 - b_2,\ x_3 - b_3)$, ecc., se $(a_1,\ a_2,\ a_3)$, $(b_1,\ b_2,\ b_3)$, ecc., sono le coordinate dei centri delle diverse sfere, a cui appartengono le regioni del contorno.

§ 4.

Consideriamo un sistema di n funzioni $u_1, u_2, \ldots u_n$ di n variabili $x_1, x_2, \ldots x_n$, le quali in uno spazio S_n debbano soddisfare le n equazioni

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial T_{is}}{\partial x_i} = X_s \qquad (s = 1,\ 2, \ldots\ n), \tag{22}$$

ove le T_{is} sono funzioni lineari delle derivate prime delle u, ossia indicando con $A_{(l,m)}^{(i,s)}$ delle costanti, si ha:

$$T_{is} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} A_{(l,m)}^{(i,s)} \frac{\partial u_l}{\partial x_m},$$

e le X_s sono funzioni date. Inoltre nello spazio S_{n-1}, limite di S_n, debbano essere soddisfatte le equazioni

$$\sum_{i=1}^{n} T_{is} \gamma_{is} = L_s \qquad (s = 1,\ 2, \ldots\ n), \tag{23}$$

ove le L_s sono funzioni date nello spazio S_{n-1}, e le γ_s sono definite dalle equazioni

$$\gamma_s = \frac{d x_s}{d n},$$

essendo dn l'elemento della normale ad S_{n-1} diretta verso l'*interno* di S_n, e dx_s l'incremento che x_s riceve lungo dn.

Supposto *euclideo* lo spazio che si considera, si ha la formula (**)

$$\int_{S_n} \frac{\partial U}{\partial x_s} d S_n = -\int_{S_{n-1}} U \gamma_s d S_{n-1},$$

(*) V. Appell: *Sur les fonctions de trois variables réelles satisfaisant à l'équation différentielle* $\Delta F = 0$ (Acta Mathematica 4 : 4).

(**) V. Beltrami: *Sulla teorica generale dei parametri differenziali*, § 4.

ammettendo per la funzione U le condizioni analoghe a quelle necessarie per la validità di questa formula nello spazio ordinario; e dalle equazioni (22), (23), se si considerano due sistemi di funzioni $u'_1, u'_2, \ldots u'_n$ e $u''_1, u''_2, \ldots u''_n$ che le soddisfino quando X_s, L_s hanno rispettivamente i valori X'_s, L'_s, e X''_s, L''_s, si deduce:

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\int\limits_{S_n} X'_s u''_s\, d S_n + \int\limits_{S_{n-1}} L'_s u''_s\, d S_{n-1}\right\} = -\sum_{l,m,i,s}\int\limits_{S_n} A_{(l,m)}^{(i,s)} \frac{\partial u'_i}{\partial x_m}\frac{\partial u''_s}{\partial x_i}\, d S_n$$

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\int\limits_{S_n} X''_s u'_s\, d S_n + \int\limits_{S_{n-1}} L''_s u'_s\, d S_{n-1}\right\} = -\sum_{s,m,i,s}\int\limits_{S_n} A_{(l,m)}^{(i,s)} \frac{\partial u''_l}{\partial x_m}\frac{\partial u'_s}{\partial x_i}\, d S_n,$$

ove gli indici l, m, i, s nei secondi membri debbono percorrere tutti i valori di 1 ad n. Quindi se per qualsiasi valore di l, m, i, s

$$A_{(l,m)}^{(i,s)} = A_{(s,i)}^{(m,l)}, \tag{24}$$

si avrà:

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\int\limits_{S_n} X'_s u''_s\, d S_n + \int\limits_{S_{n-1}} L'_s u''_s\, d S_{n-1}\right\} = \sum_{s=1}^{n}\left\{\int\limits_{S_n} X''_s u'_s\, d S_n + \int\limits_{S_{n-1}} L''_s u'_s\, d S_{n-1}\right\}. \tag{25}$$

Le condizioni (24) sono soddisfatte se

$$T_{ii} = -2\left(\lambda\Theta + \mu\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) \qquad T_{is} = -\mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_s} + \frac{\partial u_s}{\partial x_i}\right),$$

ove $\Theta = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}$, e λ, μ sono costanti. Le equazioni (22) in questo caso divengono:

$$(2\lambda + \mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x_s} + \mu\,\Delta_2 u_s + X_s = 0 \qquad (s = 1,\ 2, \ldots\ n), \tag{26}$$

e le (23)

$$L_s + 2\lambda\Theta\gamma_s + \mu\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_s}\right)\gamma_i = 0. \tag{27}$$

Se ora si pone:

$$r = \left\{\sum_{i=1}^{n}(x - x'_i)^2\right\}^{\frac{1}{2}},$$

e si introduce un sistema di coordinate polari r, θ_1, $\theta_2, \ldots \theta_{n-1}$ (*) col polo in

(*) Le relazioni che legano queste coordinate alle $x_1, x_2, \ldots x_n$ sono:

$$x_s - x'_s = r \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \ldots \operatorname{sen}\theta_{s-1}\cos\theta_s \qquad (s = 1,\ 2, \ldots\ n-1)$$

$$x_n - x'_n = r \operatorname{sen}\theta_1 \operatorname{sen}\theta_2 \ldots \operatorname{sen}\theta_{n-1}.$$

$(x'_1, x'_2, \dots x'_n)$, il secondo parametro differenziale di una funzione $V(r)$ della sola r è

$$\Delta_2 V = \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1} \frac{\partial V}{\partial r}\right).$$

Perciò si ha, per $n > 2$,

$$\Delta_2\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = 0 \qquad \Delta_2\left(-\frac{r^{-n+4}}{2(n-4)}\right) = \frac{1}{r^{n-2}}.$$

Di qui segue subito che le equazioni (26) sono soddisfatte, quando $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = 0$, dai valori

$$u'_1 = \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \frac{1}{r^{n-2}}$$

$$u'_2 = \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$u'_n = \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_n},$$

ove

$$v = -\frac{r^{-n+4}}{2(n-4)}, \qquad \alpha = -\frac{2\lambda + \mu}{2(\lambda + \mu)}.$$

Per le L_s, quando si prendano per le u i valori precedenti, dalle equazioni (27) risultano le seguenti espressioni:

$$L'_1 = -2\alpha\mu\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x_1}\gamma_1\right) - \mu \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial n};$$

e per $s > 1$

$$L'_s = -2\alpha\mu\left(\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_s} - \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x_1}\gamma_s\right) - \mu\left(\frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x_s}\gamma_1 - \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x_1}\gamma_s\right).$$

Osserviamo ora che, quando r tende a zero, si ha $\lim r^{n-1} u'_i = 0$, e colle coordinate $r, \theta_1, \dots \theta_n$

$$dS_n = r^{n-1}(\operatorname{sen}\theta_1)^{n-2}(\operatorname{sen}\theta_2)^{n-3}\dots \operatorname{sen}\theta_{n-2}\, dr\, d\theta_1 \dots d\theta_{n-1},$$

quindi, applicando la formula (25) ai due sistemi $u_1, \dots u_n$, $u'_1, \dots u'_n$ e allo spazio che si ottiene da S_n togliendone la porzione definita dalla condizione

$$\sum_{r=1}^{n}(x_r - x'_r)^2 \leq \varepsilon^2,$$

ove ε è una costante piccolissima, si ha:

$$\sum_{s=1}^{n}\left\{\int_{S_n} X_s u'_s\, dS + \int_{S_{n-1}} L_s u'_s\, dS_{n-1} - \int_{S_{n-1}} L'_s u_s\, dS_{n-1}\right\} = \lim_{\varepsilon=0}\sum_{s=1}\int_{\varpi_{n-1}} L'_s u_s\, d\varpi_{n-1}, \quad (28)$$

indicando con ϖ_{n-1} lo spazio $\sum_{r=1}^{n}(x_r - x'_r)^2 = \varepsilon^2$; colle coordinate $r_1,\ \theta_1, \ldots\ \theta_n$ si ha inoltre:

$$d\varpi_{n-1} = \varepsilon^{n-1}(\operatorname{sen}\theta_1)^{n-2}(\operatorname{sen}\theta_2)^{n-3}\ldots \operatorname{sen}\theta_{n-2}\, d\theta_1\ldots d\theta_{n-1},$$

e per estendere la integrazione a ϖ_{n-1} si deve far variare $\theta_1,\ \theta_2, \ldots\ \theta_{n-2}$ fra 0 e π, e θ_{n-1} tra 0 e 2π.

Osserviamo ora che in ϖ_{n-1} si ha:

$$\frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial n} = \frac{n-2}{r^{n-1}}, \qquad \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x_s}\gamma_1 - \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\gamma_s = 0,$$

e inoltre, ponendo per brevità $\overline{x_s} = x_s - x'_s$,

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} - \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x_1}\gamma_1 = \frac{n-2}{2}\frac{1}{r^{n-1}} - \frac{n(n-2)}{2}\frac{\overline{x}_1^2}{r^{n+1}}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{\partial^2 V}{\partial x_1\,\partial x_s} - \frac{\partial \frac{1}{r^{n-2}}}{\partial x_1}\gamma_s = -\frac{n(n-2)}{2}\frac{\overline{x_1}\,\overline{x_s}}{r^{n+1}} \qquad (s = 2,\ 3, \ldots\ n).$$

Mediante questi valori possiamo avere le espressioni delle L'_s in ϖ_{n-1}, e quindi calcolare il limite del secondo membro della (28). Ora per $s > 1$, si ha:

$$\frac{\overline{x_1}\,\overline{x_s}}{r^{n+1}}\, d\varpi_{n-1} =$$

$$= \cos\theta_1(\operatorname{sen}\theta_1)^{n-1}(\operatorname{sen}\theta_2)^{n-2}\ldots(\operatorname{sen}\theta_{s-1})^{n-s+1}\cos\theta_s(\operatorname{sen}\theta_s)^{n-s-1}\ldots \operatorname{sen}\theta_{s-2}\, d\theta_1\ldots d\theta_{n-1}$$

e quindi:

$$\int_{\varpi_{n-1}} \frac{\overline{x_1}\,\overline{x_s}}{r^{n+1}}\, d\varpi_{n-1} = 0, \qquad (a)$$

poichè $\int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta_1)^{n-1}\cos\theta_1\, d\theta_1 = 0$. Si ha poi

$$\frac{\overline{x_1}^2}{r^{n+1}}\, d\varpi_{n-1} = \cos^2\theta_1(\operatorname{sen}\theta_1)^{n-2}(\operatorname{sen}\theta_2)^{n-3}\ldots \operatorname{sen}\theta_{n-2}\, d\theta_1\, d\theta_2\ldots d\theta_{n-2},$$

e poichè:

$$\int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta_1)^{n-2}\cos^2\theta_1\, d\theta_1 = \frac{1}{n-1}\int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta_1)^n\, d\theta_1,$$

si avrà:

$$\int_{\varpi_{n-1}} \frac{\overline{x_1}^2}{r^{n+1}}\, d\varpi_{n-1} = \frac{2\pi Z_{n-1}}{n-1}\int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^n\, d\theta, \tag{b}$$

introducendo il numero Z_n definito da

$$Z_n = \int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^{n-2}\, d\theta \int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^{n-3}\, d\theta \ldots \int_0^\pi \operatorname{sen}\theta\, d\theta.$$

Infine si ha:

$$\int_{\varpi_{n-1}} \frac{d\varpi_{n-1}}{r^{n+1}} = 2\pi Z_n. \tag{c}$$

Applicando ora il solito procedimento si ottiene dalle (*a*), (*b*), (*c*)

$$\lim\left\{\int_{\varpi_{n-1}} u_1 \frac{d\varpi_{n-1}}{r^{n+1}} - n\int_{\varpi_{n-1}} u_1 \frac{\overline{x_1}^2}{r^{n+1}}\, d\varpi_{n-1}\right\} =$$

$$= 2\pi\left(Z_n - \frac{n}{n-1} Z_{n-1}\int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^n\, d\theta\right) u_1(x'_1, x'_2, \ldots x'_n)$$

$$\lim \int_{\varpi_{n-1}} u_s \frac{\overline{x_1}\,\overline{x_s}}{r^{n+1}}\, d\varpi_{n-1} = 0.$$

Ma si ha (*):

$$Z_{n-1}\int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^n\, d\theta = \frac{n-1}{n} Z_n,$$

e quindi, riassumendo,

$$\lim \sum_{s=1}^{n} \int_{\varpi_{n-1}} L'_s u_s\, d\varpi_{n-1} = 2\pi\mu(n-2) Z_n u_1(x'_1, x'_2, \ldots x'_n).$$

(*) Questa uguaglianza si dimostra osservando che

$$\int_0^\pi (\operatorname{sen}\theta)^n\, d\theta = \begin{cases} \pi\dfrac{1.3\ldots(n-1)}{2.4\ldots n} & \text{quando } n \text{ è pari} \\[2ex] 2\dfrac{2.4\ldots(n-1)}{3.5\ldots n} & \text{quando } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Sostituendo questa espressione nella (28) si ottiene una formula che dà la rappresentazione della funzione u_1 in tutti i punti interni di S_n, mediante i valori delle X_s, delle L_s, ed i valori delle u_s in S_{n-1}.

Considerazioni simili naturalmente si possono fare per qualunque altra delle funzioni u_s, e si può quindi concludere che il sistema delle funzioni u_1, $u_2, \dots u_n$ è rappresentabile in tutti i punti interni di S_n colle formule:

$$\left.\begin{aligned} u_s(x'_1, x'_2, \dots x'_n) = \frac{1}{2\pi\mu(n-2)Z_n} \sum_{i=1}^{n} \Big\{ \int_{S_n} X_i u_i^{(s)} dS_n + \\ + \int_{S_{n-1}} (L_i u_i^{(s)} + L_i^{(s)} u_i) dS_{n-1} \Big\}, \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

dove, posto

$$V = -\frac{r^{-n+4}}{2(n-4)}, \qquad \alpha = \frac{2\lambda + \mu}{2(\lambda + \mu)},$$

si ha:

$$u_s^{(s)} = \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x_s^2} + r^{-n+2} \qquad u_s^{(i)} = \alpha \frac{\partial^2 V}{\partial x_s \partial x_i}$$

$$L_s^{(s)} = 2\alpha\mu \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_s^2} - \frac{\partial r^{-n+2}}{\partial x_s} \gamma_s \right) + \mu \frac{\partial r^{-n+2}}{\partial n} \qquad (s \neq i)$$

$$L_s^{(i)} = 2\alpha\mu \left(\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial^2 V}{\partial x_s \partial x_i} - \frac{\partial r^{-n+2}}{\partial x_i} \gamma_s \right) + \mu \left(\frac{\partial r^{-n+2}}{\partial x_s} \gamma_i - \frac{\partial r^{-n+2}}{\partial x_i} \gamma_s \right).$$

Pel numero Z_n poi si ha:

$$Z_n = \begin{cases} \dfrac{(2\pi)^{\frac{n-2}{2}}}{2 \, . \, 4 \dots (n-2)} & \text{quando } n \text{ è pari} \\[2ex] \dfrac{2(2\pi)^{\frac{n-3}{2}}}{3 \, . \, 5 \dots (n-2)} & \text{quando } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Queste formule sono analoghe a quella di Green generalizzata alle funzioni di n variabili (v. Beltrami, Memoria citata, § 5). È poi facile vedere che anche quelle trovate nel § 2 possono essere estese ai sistemi di n funzioni di n variabili.

Le considerazioni precedenti non sono applicabili nel caso di $n = 2$; però si può seguire un procedimento identico prendendo la funzione $\lg \frac{1}{r}$ dove

$r = [(x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2]^{\frac{1}{2}}\}$ invece di r^{-n+2}, e ponendo

$$V = \frac{r^2}{4} \lg \frac{1}{r} - \frac{r^2}{4},$$

poichè si ha:

$$\Delta_2 \left(\frac{r^2}{4} \lg \frac{1}{r} - \frac{r^2}{4} \right) = \lg \frac{1}{r} \qquad \Delta_2 \lg \frac{1}{r} = 0.$$

Nelle (29) in questo caso la costante $\frac{1}{2\pi\mu(n-2)Z_n}$ deve essere sostituita da $\frac{1}{2\pi}$.

Queste formule possono essere utili nello studio delle deformazioni di un cilindro indefinito, quando non avvengono spostamenti nel senso delle direttrici, od anche di un cilindro di lunghezza finita, quando si suppongono applicate alle basi forze normali, che impediscano tali spostamenti.

Dicembre, 1888.

Sul problema di trovare la curva di cui è noto il luogo de' suoi centri di curvatura.

(*Di* Geminiano Pirondini, *a Parma.*)

Il sig. J. A. Serret nel *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (1853) ha trattato i due problemi della ricerca della linea di cui è noto il luogo dei centri delle sue sfere osculatrici, ovvero il luogo dei centri de' suoi cerchi osculatori. Egli ha ridotto il 1.° problema all'integrazione dell'equazione:

$$\frac{d\left(\rho_1 \frac{d\rho}{ds_1}\right)}{ds_1} + \frac{\rho}{\rho_1} \pm 1 = 0,$$

e il 2.° all'integrazione dell'equazione:

$$U + \frac{1}{\rho_1 r_1}\sqrt{1 - \left(\frac{d\rho}{ds_1}\right)^2 - \rho_1^2 V^2},$$

nelle quali s_1, ρ_1, r_1 sono l'arco, il raggio di curvatura e il raggio di torsione della linea data L_1 e ρ il raggio di curvatura della linea incognita L; V e U sono due funzioni definite dalle equazioni:

$$V = \frac{d^2\rho}{ds_1^2} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{d\rho}{ds_1}\right)^2 - \frac{1}{\rho_1};$$

$$U = \frac{dV}{ds_1} + \frac{V^2}{\frac{d\rho}{ds_1}\left\{1 - \left(\frac{d\rho}{ds_1}\right)^2\right\}} + \left(\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{ds_1} + \frac{1}{\rho_1}\frac{d\rho_1}{ds_1}\right)V - \frac{1}{\rho_1^2}\,\frac{1 - \left(\frac{d\rho}{ds_1}\right)^2}{\frac{d\rho}{ds_1}}.$$

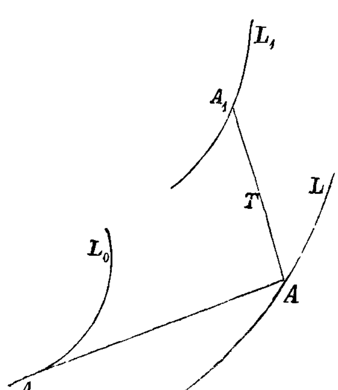
La prima di queste equazioni differenziali, del 2.° ordine, è bensì lineare, ma non è integrabile sotto la sua forma generale; il problema corrispondente, trattato col metodo del sig. SERRET, non è quindi risolvibile completamente.

Al § 4 della Memoria: *Sugli inviluppi di piani e di sfere,* che io ho avuto l'onore di presentare all'Accademia di Bologna (*), ho potuto, con considerazioni geometriche particolari, togliere di mezzo ogni difficoltà, riducendo il problema completamente a quadrature.

In quanto alla seconda equazione differenziale, essa è del 3.° ordine e di una forma così complicata, che non solamente è impossibile, nello stato attuale della scienza, la sua generale integrazione, ma tale impossibilità si manifesta anche nella maggior parte dei casi particolari; quelli ad esempio considerati dal sig. SERRET, rimangono tutti incompletamente risoluti a causa dell'impossibilità d'integrare quell'equazione, quantunque ridotta alquanto più semplice.

Il metodo che ora vado ad esporre, quantunque non risolva il problema nella sua generalità, ha però su quello del sig. SERRET il vantaggio di risolverlo in parecchi casi particolari notevoli; non credo quindi del tutto inutile la presente Nota, colla quale si viene a introdurre qualche semplificazione nella risoluzione di un sì difficile problema.

Sia L_0 una linea qualunque e L una curva posta sulla sviluppabile osculatrice di L_0; per i punti (x, y, z) di L conduciamo delle rette situate nei piani osculatori di L_0 e dirette perpendicolarmente alle tangenti di L_0, prendiamo su di esse a partire da L dei segmenti T e chiamiamo $L_1(x_1, y_1, z_1)$ il luogo degli estremi. Se ε, ε_1, ε_2 sono gli angoli che i segmenti T fanno colla tangente $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, colla normale principale $(\cos\lambda, \cos\mu, \cos\nu)$ e colla binormale $(\cos l, \cos m, \cos n)$ di L, avremo:



$$x_1 = x + T(\cos\alpha\cos\varepsilon + \cos\lambda\cos\varepsilon_1 + \cos l\cos\varepsilon_2), \text{ ecc.}$$

(*) *Atti dell'Accademia,* 1889.

Ricavandosi da queste:

$$\frac{dx_1}{ds_1}\frac{ds_1}{ds} = \left[1 + T'\cos\varepsilon - \frac{T}{\rho}\cos\varepsilon_1 + T(\cos\varepsilon)'\right]\cos\alpha +$$

$$+\left[T'\cos\varepsilon_1 + \frac{T}{\rho}\cos\varepsilon + \frac{T}{r}\cos\varepsilon_2 + T(\cos\varepsilon_1)'\right]\cos\lambda +$$

$$+\left[T'\cos\varepsilon_2 - \frac{T}{r}\cos\varepsilon_1 + T(\cos\varepsilon_2)'\right]\cos l, \text{ ecc.},$$

si conclude che la condizione $\Sigma\frac{dx_1}{ds_1}\cos\alpha = 0$, onde le linee L e L_1 siano a tangenti perpendicolari, è:

$$1 + T'\cos\varepsilon - \frac{T}{\rho}\cos\varepsilon_1 + T(\cos\varepsilon)' = 0. \tag{1}$$

La condizione $\Sigma(\cos\alpha\cos\varepsilon + \cos\lambda\cos\varepsilon_1 + \cos l\cos\varepsilon_2)\cos\alpha_1 = 0$, onde le rette T condotte siano ortogonali alla L_1, è espressa così:

$$T'(\cos^2\varepsilon_1 + \cos^2\varepsilon_2) + T\{\cos\varepsilon_1(\cos\varepsilon_1)' + \cos\varepsilon_2(\cos\varepsilon_2)'\} + \frac{T}{\rho}\cos\varepsilon\cos\varepsilon_1 = 0,$$

e siccome:

$$\cos^2\varepsilon_1 + \cos^2\varepsilon_2 = 1 - \cos^2\varepsilon, \qquad \cos\varepsilon_1(\cos\varepsilon_1)' + \cos\varepsilon_2(\cos\varepsilon_2)' = -\cos\varepsilon(\cos\varepsilon)',$$

la precedente diviene:

$$T'(1 - \cos^2\varepsilon) - T\cos\varepsilon(\cos\varepsilon)' + \frac{T}{\rho}\cos\varepsilon\cos\varepsilon_1 = 0.$$

Ma dalla (1) ricavandosi:

$$-T'\cos^2\varepsilon - T\cos\varepsilon(\cos\varepsilon)' + \frac{T}{\rho}\cos\varepsilon\cos\varepsilon_1 = \cos\varepsilon,$$

la precedente si riduce a:

$$T' + \cos\varepsilon = 0. \tag{2}$$

Le condizioni (1) (2) esprimono che le linee L_1 e L sono a tangenti ortogonali e che L_1 è trajettoria ortogonale delle generatrici della superficie rigata luogo delle T: la tangente di L_1 essendo allora perpendicolare a T e alla tangente di L, è perpendicolare al loro piano che è appunto il piano osculatore di L_0; la L_0 è dunque lo spigolo di regresso della sviluppabile polare di L_1 e quindi le curve L_0, L_1 hanno le normali principali parallele; ma i segmenti T sono paralleli alle normali principali di L_0, dunque i segmenti T

sono le normali principali di L_1 e questa condizione, unita all'altra che le linee L_1 e L sono a tangenti ortogonali, dimostra (*) che L è il luogo dei centri di curvatura di L_1.

I coseni direttivi della AA_0 rispetto alle direzioni principali di L, si esprimono per gli elementi di L nel modo seguente (Memoria citata, § 1):

$$\cos i, \qquad \operatorname{sen} i \cos\theta, \qquad \operatorname{sen} i \operatorname{sen}\theta,$$

dove θ è definita dall'equazione differenziale:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{\cot i}{\rho} \operatorname{sen}\theta,$$

essendo ρ, r i raggi di L e i l'inclinazione di L sulle rette A_0A.

La retta T, posta nel piano determinato dalle tangenti alle L_0 e L e perpendicolare alle A_0A, ha per coseni direttivi rispetto alle direzioni principali di L:

$$\cos\varepsilon = \operatorname{sen} i, \qquad \cos\varepsilon_1 = -\cos i \cos\theta, \qquad \cos\varepsilon_2 = -\cos i \operatorname{sen}\theta,$$

con che le (1) (2) divengono:

$$1 + \frac{d}{ds}(T \operatorname{sen} i) + \frac{T}{\rho}\cos i \cdot \cos\theta = 0, \qquad \frac{dT}{ds} + \operatorname{sen} i = 0. \tag{3}$$

Siccome facendo uso di quest'ultima la prima (2) si riduce all'altra:

$$T\left(\frac{di}{ds} + \frac{\cos\theta}{\rho}\right) + \cos i = 0,$$

potremo enunciare il teorema: « *per far sì che un cerchio mobile si mantenga in tutte le sue posizioni osculatore a una linea, si faccia percorrere al suo centro una linea arbitraria L, si orienti il suo piano in modo che la normale ad esso nel centro (asse del cerchio) formi colla tangente, colla normale principale e colla binormale di L gli angoli i cui coseni sono:*

$$\cos i, \qquad \operatorname{sen} i \cos\theta, \qquad \operatorname{sen} i \cdot \operatorname{sen}\theta,$$

e si dia al suo raggio la lunghezza T, essendo i, θ, T tre funzioni dell'arco s di L definite dal seguente sistema di equazioni differenziali simultanee:

$$\frac{dT}{ds} + \operatorname{sen} i = 0, \qquad T\left(\frac{di}{ds} + \frac{\cos\theta}{\rho}\right) + \cos i = 0, \qquad \frac{1}{r} = \frac{d\theta}{ds} + \frac{\cot i}{\rho}\operatorname{sen}\theta \text{ ».} \tag{4}$$

(*) *Sugli inviluppi di piani e di sfere*, § V.

Dalla terza si deduce:

$$\cot i = \left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds}\right)\frac{\rho}{\operatorname{sen}\theta},$$

ciò che dà:

$$\operatorname{sen} i = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \rho^2\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds}\right)^2}}, \qquad \cos i = \frac{\rho\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \rho^2\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds}\right)^2}}$$

$$\frac{di}{ds} = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \rho^2\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds}\right)^2}}{\rho\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds}\right)} \cdot \frac{d}{ds} \cdot \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \rho^2\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds}\right)^2}}.$$

Dalla seconda (4) si ricava:

$$T = -\frac{\cos i}{\frac{di}{ds} + \frac{\cos\theta}{\rho}}, \quad \text{d'onde:} \quad \frac{dT}{ds} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\cos i}{\frac{di}{ds} + \frac{\cos\theta}{\rho}}\right),$$

e in causa della prima (4):

$$\operatorname{sen} i = \frac{d}{ds}\left(\frac{\cos i}{\frac{di}{ds} + \frac{\cos\theta}{\rho}}\right).$$

Sostituendo in questa al posto di $\operatorname{sen} i$, $\cos i$, $\frac{di}{ds}$ i valori precedenti, dopo alcuni calcoli si trova per determinare θ la seguente equazione differenziale del 3.° ordine:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \rho^2\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds}\right)^2}} = \\ &= \frac{d}{ds} \cdot \left\{\frac{\rho^2}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \rho^2\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds}\right)^2}} \cdot \frac{\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds}\right)^2}{\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds}\right)\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\,\frac{d}{ds}\cdot\log\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \rho^2\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds}\right)^2}}}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Se fosse possibile l'integrazione di tale equazione, non occorrerebbero più che quadrature per condurre a termine il problema; infatti dall'essere:

$$\cos i = \frac{\rho\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds}\right)}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \rho^2\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds}\right)^2}}, \qquad \cos i_1 = \operatorname{sen} i \cos\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \rho^2\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds}\right)^2}}$$

$$\cos i_2 = \operatorname{sen} i \operatorname{sen}\theta = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \rho^2\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds}\right)^2}}$$

$$T = k - \int \operatorname{sen} i \cdot ds = k - \int \frac{\operatorname{sen}\theta \cdot ds}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \rho^2\left(\frac{1}{r} - \frac{d\theta}{ds}\right)^2}},$$

si deduce che gli elementi che determinano il movimento e la variazione di grandezza del cerchio mobile sono tutti espressi per l'arco s della linea L percorsa dal centro, tosto che sia determinato θ per s.

L'equazione differenziale (5), che dovrebbe servire a tale determinazione, è del 3.° ordine e quantunque un poco più semplice di quella del Serret, non è tuttavia integrabile nel caso generale. — Si noti che quando siano noti gli elementi che determinano il modo di spostarsi e di variare del cerchio mobile, si può con tutta facilità determinare la linea inviluppata dal cerchio osculatore mobile; infatti la linea in discorso è il luogo degli estremi dei segmenti eguali a T condotti da ogni punto della linea L e facenti colle direzioni principali di questa linea angoli i cui coseni sono:

$$\operatorname{sen} i, \qquad -\cos i \cdot \cos\theta, \qquad -\cos i \cdot \operatorname{sen}\theta.$$

CASI PARTICOLARI.

I.

Il luogo L dei centri di curvatura di L_1 sia una geodetica sulla superficie polare di L_1.

Per essere $\theta = \frac{\pi}{2}$, la terza (4) diviene:

$$\frac{1}{r} = \frac{\cot i}{\rho}, \quad \text{d'onde:} \quad \cot i = \frac{\rho}{r},$$

e la (3):

$$1 + (T \operatorname{sen} i)' = 0,$$

d'onde:

$$T = \frac{a - s}{\operatorname{sen} i} = (a - s)\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}.$$

Non ci resta che da soddisfare alla prima (4); dall'ultima equazione ottenuta, calcolando $\frac{dT}{ds}$ e sostituendolo nella prima (4), si ha:

$$\left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}} = (a - s)\frac{d}{ds} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2}.$$

Ponendo:

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{r}\right)^2} = x,$$

la precedente diviene:

$$\frac{x^2 - 1}{x} = (a - s)\frac{dx}{ds}, \quad \text{d'onde:} \quad \frac{ds}{a - s} = \frac{x\,dx}{x^2 - 1}.$$

Di qui, integrando, si deduce:

$$\frac{r}{\rho} = b(s - a),$$

la quale dà una notevole costruzione geometrica della linea L.

Infatti si stenda sopra un piano la sviluppabile rettificatrice di L; lo spigolo di regresso di tale sviluppabile si trasforma in una linea Λ e L in una retta; prendendo questa retta per asse delle ξ e la perpendicolare ad essa, condotta per l'origine degli archi s, per asse delle η, evidentemente s diviene eguale all'ascissa del punto di tragitto per l'asse delle ξ della tangente a Λ; si avrà quindi:

$$s = \frac{\xi \frac{d\eta}{d\xi} - \eta}{\frac{d\eta}{d\xi}}.$$

Siccome poi $\frac{r}{\rho}$ è eguale, come si è visto, alla tangente dell'angolo sotto il quale la curva L sega le sue rette rettificatrici, sarà $\frac{r}{\rho}$ eguale alla tangente dell'inclinazione della tangente a Λ sull'asse delle ξ e quindi:

$$\frac{r}{\rho} = \frac{d\eta}{d\xi}.$$

Sostituendo questi valori nella relazione (6), si ottiene:

$$b\eta = b(\xi - a)\frac{d\eta}{d\xi} - \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2. \tag{7}$$

Se si pone $\frac{d\eta}{d\xi} = p$, seguendo i metodi noti d'integrazione, si giunge alla soluzione:

$$\left(\xi - \frac{ab + 2p}{2}\right) dp = 0,$$

la quale dà luogo ai due casi:

$$dp = 0, \qquad \xi = \frac{ab + 2p}{2}. \tag{8}$$

Il primo dà $p =$ costante $= c$ e ad esso corrisponde l'integrale generale:

$$\eta = c\xi - \frac{abc - c^2}{b},$$

il quale, rappresentando una retta, è per noi privo d'importanza; il secondo caso dà luogo all'integrale singolare:

$$\eta = \frac{b}{4}(\xi - a)^2,$$

che si ottiene eliminando p fra le (7) (8); esso rappresenta una parabola di parametro $\frac{4}{b}$ tangente all'asse delle ξ nel vertice e inviluppata dalle rette rappresentate dall'integrale generale, quando si consideri c come variabile. Siccome in questo caso abbiamo:

$$\cos i = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r}{\rho}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2(s-a)^2}}$$

$$\cos i_1 = \operatorname{sen} i \cos\theta = 0, \qquad \cos i_2 = \operatorname{sen} i \operatorname{sen}\theta = \frac{b(s-a)}{\sqrt{1 + b^2(s-a)^2}},$$

si può enunciare il teorema: « *per risolvere nella sua massima generalità il* *problema di spostare un cerchio nello spazio in modo che esso rimanga costantemente osculatore a una linea L_1 a doppia curvatura, e che percorra col suo centro una linea L che sia geodetica sulla sviluppabile polare di L_1, si prenda una parabola e si infletta il suo piano successivamente intorno alle sue tangenti in un modo qualunque. Si faccia percorrere la linea gobba L, a cui si riduce la tangente alla parabola nel vertice, dal centro di un cerchio di raggio $T = \frac{1}{b}\sqrt{1 + b^2(s-a)^2}$ e si orienti il piano di esso in modo, che il suo asse formi colle direzioni principali di L gli angoli i, i_1, i_2 tali che:*

$$\cos i = \frac{1}{\sqrt{1 + b^2(s-a)^2}}, \qquad \cos i_1 = 0, \qquad \cos i_2 = \frac{b(s-a)}{\sqrt{1 + b^2(s-a)^2}}.$$

essendo s l'arco di L, a una costante e $\frac{4}{b}$ il parametro della parabola ».

II.

I raggi di curvatura di L_1 si projettino sulle tangenti della linea L, luogo de' suoi centri di curvatura, in segmenti di lunghezza costante k.

In questo caso dobbiamo avere:

$$T \cdot \operatorname{sen} i = k, \tag{9}$$

ciò che ci dà:

$$T = \frac{k}{\operatorname{sen} i}, \qquad T' = -\frac{k \cos i \dfrac{di}{ds}}{\operatorname{sen}^2 i}.$$

La (3), in causa della (9), diviene:

$$1 + \frac{T}{\rho} \cos i \cdot \cos \theta = 0; \tag{10}$$

le relazioni (9) (10) e la prima delle (4) ci dànno T, i, θ; infatti, sostituendo nella prima (4) il valore di T', si ha l'equazione differenziale:

$$\operatorname{sen} i - k \frac{\cos i}{\operatorname{sen}^2 i} \cdot \frac{di}{ds} = 0,$$

da cui con facile integrazione:

$$\operatorname{sen} i = \sqrt{\frac{k}{a-2s}}, \quad \text{essendo } a \text{ una costante arbitraria.}$$

La (9) ci dà allora:

$$T = \frac{k}{\operatorname{sen} i} = \sqrt{k(a-2s)},$$

e la (10) ci fornisce:

$$\cos\theta = -\frac{\rho}{\sqrt{k(a-k-2s)}},$$

d'onde:

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{k(a-k-2s)-\rho^2}{k(a-k-2s)}}, \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{\rho'(a-k-2s)+\rho}{(a-k-2s)\sqrt{k(a-k-2s)-\rho^2}}.$$

Sostituendo questi valori nella terza delle (4), si ha:

$$\frac{1}{r} = \frac{\rho'(a-k-2s)+\rho}{(a-k-2s)\sqrt{k(a-k-2s)-\rho^2}} + \frac{1}{k}\cdot\frac{1}{\rho}\sqrt{k(a-k-2s)-\rho^2} = 0. \quad (11)$$

Dunque: « *per far in modo che un cerchio mobile si mantenga sempre osculatore a una linea L_1, colla condizione che i raggi di curvatura di questa si projettino in segmenti costanti k sulle tangenti della linea L, luogo dei centri di curvatura di L_1, si faccia percorrere al centro del cerchio mobile una linea L per la quale sia verificata la relazione* (11), *si orienti il suo piano talmente, che l'asse del cerchio formi colla tangente, colla normale principale e colla binormale di L gli angoli i, i_1, i_2 definiti come segue:*

$$\cos i = \sqrt{\frac{a-k-2s}{a-2s}}, \qquad \cos i_1 = -\frac{\rho}{\sqrt{(a-2s)(a-k-2s)}},$$

$$\cos i_2 = \sqrt{\frac{k(a-k-2s)-\rho^2}{(a-2s)(a-k-2s)}},$$

e si dia al cerchio mobile il raggio $T = \sqrt{k(a-2s)}$ ».

Se L è piana, $\frac{1}{r} = 0$ e (11) diviene:

$$\rho\rho' - \rho^2 \frac{2s+2k-a}{2s+k-a} = k(2s+k-a),$$

la quale, col porre $y=\rho^2$, si trasforma in un'equazione differenziale lineare del 1.° ordine facilmente integrabile. Essa dà infatti:

$$\rho = e^s \cdot (2s+k-a)^{\frac{k}{2}} \cdot \sqrt{b + 2k \int \frac{(2s+k-a)^{1-k}}{e^{2s}} \cdot ds},$$

la quale, esprimendo il raggio di curvatura di L in funzione dell'arco, determina completamente questa linea; il problema è quindi, nel caso particolare considerato, completamente ridotto alle quadrature.

III.

Il luogo dei centri di curvatura della linea L_1 sia una trajettoria isogonale delle generatrici della sviluppabile polare di L_1.

Dalla prima (4) si deduce, integrando:

$$T = a - \operatorname{sen} i \cdot s,$$

e la seconda (4) diviene:

$$\frac{T \cos\theta}{\rho} = -\cos i,$$

cioè, in causa della precedente:

$$\cos\theta = \frac{\rho \cos i}{s \cdot \operatorname{sen} i - a}.$$

Da questa si deduce:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{(s \cdot \operatorname{sen} i - a)^2 - \rho^2 \cos^2 i}}{s \cdot \operatorname{sen} i - a},$$

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{[\rho'(s \cdot \operatorname{sen} i - a) - \rho \operatorname{sen} i] \cos i}{(s \cdot \operatorname{sen} i - a)\sqrt{(s \cdot \operatorname{sen} i - a)^2 - \rho^2 \cos^2 i}},$$

e sostituendo questi valori nella terza (4), si ha:

$$\frac{1}{r} = -\frac{[\rho'(s \cdot \operatorname{sen} i - a) - \rho \cdot \operatorname{sen} i] \cos i}{(s \cdot \operatorname{sen} i - a)\sqrt{(s \cdot \operatorname{sen} i - a)^2 - \rho^2 \cos^2 i}} + \frac{\cot i}{\rho} \frac{\sqrt{(s \cdot \operatorname{sen} i - a)^2 - \rho^2 \cos^2 i}}{s \cdot \operatorname{sen} i - a}.$$

Tale è la relazione che lega i raggi ρ, r della linea L, quando abbia luogo la proprietà detta.

Se la linea L è piana, $\frac{1}{r}=0$, e la precedente diviene:

$$\rho\rho'(s\cdot\operatorname{sen}i-a)+\rho^2(\cos^2 i-\operatorname{sen}^2 i)+(s\cdot\operatorname{sen}i-a)^2=0,$$

la quale si rende lineare del 1.° ordine, e quindi perfettamente integrabile, collo stesso metodo del caso precedente; il problema è quindi, in questo caso particolare, completamente ridotto a quadrature.

IV.

I piani osculatori di L formino coi piani tangenti della sviluppabile polare di L_1 un angolo θ costante.

La terza delle (4) dà in questo caso:

$$\operatorname{sen}i=\frac{r\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\rho^2+r^2\operatorname{sen}^2\theta}},\qquad \cos i=\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+r^2\operatorname{sen}^2\theta}},$$

le quali offrono:

$$\frac{di}{ds}=-\frac{\sqrt{\rho^2+r^2\operatorname{sen}^2\theta}}{r\operatorname{sen}\theta}\,\frac{d}{ds}\cdot\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+r^2\operatorname{sen}^2\theta}}.$$

La prima (4) dà:

$$T=a-\int\operatorname{sen}i\cdot ds=a-\int\frac{r\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\rho^2+r^2\operatorname{sen}^2\theta}}\,ds,$$

e la seconda:

$$T=-\frac{\cos i}{\frac{\cos\theta}{\rho}+\frac{di}{ds}}=$$

$$=\frac{\rho^2 r\operatorname{sen}\theta}{\rho(\rho^2+r^2\operatorname{sen}^2\theta)\frac{d}{ds}\cdot\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+r^2\operatorname{sen}^2\theta}}-r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\sqrt{\rho^2+r^2\operatorname{sen}^2\theta}}.$$

Eguagliando i due valori di T, si ottiene:

$$a-\int\frac{r\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\rho^2+r^2\operatorname{sen}^2\theta}}\,ds=$$

$$=\frac{\rho^2 r\operatorname{sen}\theta}{\rho(\rho^2+r^2\operatorname{sen}^2\theta)\frac{d}{ds}\cdot\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+r^2\operatorname{sen}^2\theta}}-r\operatorname{sen}\theta\cos\theta\sqrt{\rho^2+r^2\operatorname{sen}^2\theta}}.$$

Questa è la relazione da cui devono essere legati i raggi ρ, r della linea L onde abbia luogo la proprietà voluta.

Se la curva L è un'elica cilindrica, si ha:

$$\frac{\rho}{r} = \cot\omega,$$

essendo ω l'inclinazione costante dell'elica sulle generatrici del cilindro; allora risultando:

$$\int \frac{r \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\rho^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta}} ds = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \cot^2\omega}} s, \qquad \frac{d}{ds} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2 \operatorname{sen}^2\theta}} = 0,$$

la precedente relazione si riduce alla seguente:

$$a - \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \cot^2\omega}} \cdot s = - \frac{\rho \cot\omega}{\cos\theta \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \cot^2\omega}},$$

da cui si ricava:

$$\rho = \operatorname{sen}\theta \cos\theta \operatorname{tang}\omega \cdot s - a \cos\theta \operatorname{tang}\omega \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta + \cot^2\omega}.$$

Questa relazione dimostra che l'elica L è cilindro-conica. Ora chiamando ρ_0 il raggio di curvatura della spirale logaritmica sezione retta del cilindro, ω_0 l'inclinazione di questa curva sui raggi vettori che escono dal polo e s_0 l'arco di essa, si ha (poichè $\rho_0 = \cot\omega_0 \cdot s_0$)

$$\rho = \frac{\rho_0}{\operatorname{sen}^2\omega} = \frac{\cot\omega_0 \cdot s_0}{\operatorname{sen}^2\omega} = \frac{\cot\omega_0}{\operatorname{sen}\omega} \cdot \frac{s_0}{\operatorname{sen}\omega} = \frac{\cot\omega_0}{\operatorname{sen}\omega} \cdot s,$$

la quale, confrontata colla precedente, dà:

$$\operatorname{sen}\theta \cos\theta \operatorname{tang}\omega = \frac{\cot\omega_0}{\operatorname{sen}\omega}, \quad \text{d'onde:} \quad \operatorname{sen} 2\theta = \frac{2 \cot\omega_0 \cot\omega}{\operatorname{sen}\omega}.$$

Di qui si ottiene:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega} \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\omega - \sqrt{\operatorname{sen}^2\omega - 4\cot^2\omega_0 \cot^2\omega}}{2}},$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\operatorname{sen}\omega} \sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\omega + \sqrt{\operatorname{sen}^2\omega - 4\cot^2\omega_0 \cot^2\omega}}{2}},$$

e perciò:

$$\left.\begin{aligned}
\cos i &= \frac{\cos\omega}{\sqrt{\frac{1}{2}\{1+\cos^2\omega-\sqrt{\operatorname{sen}^2\omega-4\cot^2\omega_0\cot^2\omega}\}}}\\
\cos i_1 &= \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^4\omega-\operatorname{sen}^2\omega+4\cot^2\omega_0\cot^2\omega}}{2\operatorname{sen}\omega\sqrt{\frac{1}{2}\{1+\cos^2\omega-\sqrt{\operatorname{sen}^2\omega-4\cot^2\omega_0\cot^2\omega}\}}}\\
\cos i_2 &= \frac{\operatorname{sen}^2\omega-\sqrt{\operatorname{sen}^2\omega-4\cot^2\omega_0\cot^2\omega}}{2\operatorname{sen}\omega\sqrt{\frac{1}{2}\{1+\cos^2\omega-\sqrt{\operatorname{sen}^2\omega-4\cot^2\omega_0\cot^2\omega}\}}}\\
T &= a-s\cdot\sqrt{\frac{\operatorname{sen}^2\omega-\sqrt{\operatorname{sen}^2\omega-4\cot^2\omega_0\cot^2\omega}}{1+\cos^2\omega-\sqrt{\operatorname{sen}^2\omega-4\cot^2\omega_0\cot^2\omega}}}.
\end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Si ha dunque il teorema: « *fra le eliche che si possono considerare come il luogo L dei centri di curvatura di una linea* L_1 *dello spazio, solamente le cilindro-coniche hanno la proprietà che i loro piani osculatori segano la sviluppabile polare di* L_1 *sotto angolo costante. Se* ω_0, ω *sono le inclinazioni (costanti) della spirale logaritmica, sezione retta del cilindro contenente l'elica, sui raggi vettori uscenti dal polo e dell'elica sulle generatrici del cilindro, il raggio T del cerchio mobile, percorrente col suo centro la curva L, è dato dalla quarta* (12) *e gli angoli* i, i_1, i_2, *che l'asse del cerchio fa colle direzioni principali di L, sono definiti dalle prime tre* (12). »

V.

La linea L sia trajettoria isogonale delle rette polari di L_1 e il piano osculatore di L seghi la sviluppabile polare di L_1 sotto angolo θ costante.

Le relazioni (4) divengono, se si suppone θ costante e i costante:

$$\frac{dT}{ds}+\operatorname{sen} i=0,\qquad \frac{T}{\rho}\cos\theta+\cos i=0,\qquad \frac{1}{r}=\frac{\cot i}{\rho}\operatorname{sen}\theta,$$

dalle quali si deduce:

$$T=a-s\cdot\operatorname{sen} i,\qquad \rho=\frac{(s\cdot\operatorname{sen} i-a)\cos\theta}{\cos i},\qquad r=\frac{(s\cdot\operatorname{sen} i-a)\cot\theta\operatorname{tang} i}{\cos i}.$$

Siccome da queste si ricava:

$$\frac{\rho}{r} = \operatorname{sen}\theta \cot i + \text{costante},$$

e i raggi di curvatura e di torsione di L sono funzioni lineari dell'arco s, si conclude che la linea L è un'elica cilindro-conica.

Se si rinnova il calcolo fatto precedentemente, si trova che le formole (12) che dànno i valori delle quantità $\cos i$, $\cos i_1$, $\cos i_2$, T rimangono inalterate; e perciò si potrà enunciare il teorema: « *facendo muovere un cerchio nelle condizioni espresse dall'enunciato del teorema del caso particolare IV precedente, si ha la soluzione più generale del problema quando si supponga che la linea L, luogo dei centri di curvatura di L_1, sia una trajettoria isogonale delle rette polari di L_1 e i piani osculatori di L formino un angolo costante colla sviluppabile polare di L_1* ».

Gli esempi esposti mostrano a sufficienza come, nei casi particolari del problema che ci occupa, sia spesso più conveniente ricorrere alle equazioni (4) anzi che alla (5), perchè la sua complicazione non permette, il più delle volte, di ridurla integrabile; questo è appunto l'inconveniente che presenta l'equazione risolvente del signor SERRET.

Parma, dicembre 1888.

Sullo sviluppo delle funzioni σ abeliane dispari di genere 3.

(*Memoria I di* Ernesto Pascal, *in Göttingen.*)

Questo è il primo di una serie di lavori, che mi propongo di pubblicare in questo giornale, sulla teoria delle belle funzioni σ abeliane, scoperte ultimamente dal Klein.

Il conseguimento di un posto di studio all'estero nei semestri d'inverno e d'estate 1888-89 avendomi fatto venire quì a lavorare nella scuola del prof. Klein, mi ha dato il mezzo di iniziarmi in ricerche di questo genere.

Io credo di non ingannarmi affermando, che in Italia le ricerche sulle trascendenti superiori sono assai poco coltivate, e parmi che non ci sia che il Brioschi che se ne occupi assai lodevolmente; onde, non fosse altro che per la novità, io nutro la fiducia di destare qualche poco di interesse fra i miei amici e maestri d'Italia.

Scopo di questa prima Memoria è di trovare la espressione del termine di 3.° ordine della funzione σ abeliana dispari corrispondente ad una curva di 4.° ordine di genere 3.

Nella seconda Memoria, che è già compiuta, io passo alla ricerca delle formole ricorrenti per i termini seguenti dello sviluppo, giovandomi delle ultime ricerche, sulle equazioni differenziali delle σ abeliane, del mio amico professore Wiltheiss.

Per la natura stessa del mio lavoro io sono naturalmente costretto a supporre nel lettore molte cognizioni, ma non al punto che possa esimermi dal dare in breve un cenno delle teorie affatto nuove di Klein, o almeno, di quella parte che mi occorre.

Prima di chiudere questa breve prefazione, io debbo sciogliere un debito del cuore. Io sento il bisogno di esprimere qui pubblicamente davanti ai miei concittadini, al mio illustre maestro prof. Klein tutta la mia gratitudine, e sono solo e assai dolente che le mie povere forze non mi bastino ad assicurare le espressioni di questa mia riconoscenza ad un più stabile e durevole monumento.

§ 1. Integrale normale di 3.ª specie.

Supponiamo una curva di 4.° ordine di genere 3, come curva fondamentale per la trascendente abeliana, $a_z^4 = 0$.

Prendiamo per integrali di 1.ª specie:

$$w_i = \left[\int^{x'} + \int^{x''} + \int^{x'''} + \int^{x^{\mathrm{IV}}}\right] z_i \, d\omega_z \qquad (i = 1, 2, 3),$$

dove $d\omega_z = \dfrac{(kz\,dz)}{a_z^3 a_k}$, indipendente da k, e i limiti inferiori corrispondono a 4 punti in linea retta sulla curva.

Riguardo all'integrale di 3.ª specie, cioè quello che ha luoghi di infinito logaritmico, sussiste per il caso della trascendente abeliana la rimarchevole proprietà che esiste già per gli integrali iperellittici, e fatta osservare da Klein, che cioè fra gli infiniti integrali di 3.ª specie che si possono formare ve n'è *uno solo* di cui il numeratore sia un *razionale intero,* covariante della forma fondamentale (*).

Riguardo alla forma poi che ha un tale integrale di 3.ª specie, essa non è stata ancora trovata in generale, ma solo nella ipotesi particolare che la curva fondamentale sia priva di punti doppii.

In tale ipotesi (che è quella appunto del resto che noi qui dobbiamo necessariamente fare per la curva di 4.° ordine, acciocchè essa possa essere di genere 3) il Pick ha trovato la forma dell'integrale *normale* di 3.ª specie (**). Si ha propriamente, chiamando Q questo tale integrale di 3.ª specie normale

(*) Klein, Math. Ann., Bd. 27, pag. 446.

(**) Pick, *Ueber Abelschen Functionen,* Math. Ann., Bd. 29. — Sitsb. der Kais. Akad. der Wissenschaft. zu Wien, Bd. 94, 1886. Nel Bd. 94, II Abth., si trova, dello stesso autore, la ricerca dell'integrale normale di 3.ª specie per il caso degli integrali binomii, cioè di quelli integrali corrispondenti alla curva $x_3^n = f(x_1\, x_2)$.

(se $f = a_x^n$ è la curva fondamentale):

$$Q_{xy}^{x'y'} = \int_y^x \int_{y'}^{x'} \frac{\sum_{\nu=1}^{n} a_h\, a_z^{\nu-1}\, a_{z'}^{n-\nu} \cdot a_h\, a_z^{n-\nu}\, a_{z'}^{\nu-1} - \sum_{\nu=1}^{n-1} a_h^2\, a_z^{\nu-1}\, a_{z'}^{n-\nu-1} \cdot a_z^{n-\nu}\, a_{z'}^{\nu}}{n\,(h z z')^2} \frac{(k z d z)}{a_k\, a_z^{n-1}} \frac{(k' z' d z')}{a_{k'}\, a_{z'}^{n-1}} =$$

$$= \int_y^x \int_{y'}^{x'} \frac{\Phi}{n\,(h z z')^2}\, d\omega_z\, d\omega_{z'}.$$

Le proprietà speciali che caratterizzano univocamente il Q sono:

1. Φ è un covariante intero razionale di f e di 2.° grado nei coefficienti di f;
2. È di 2.° grado in h;
3. Di $n - 1^{\text{mo}}$ grado in z e z';
4. $\dfrac{\Phi}{(h \zeta \zeta')^2}$ è indipendente da h;
5. I residui di Q corrispondenti ai punti d'infinito logaritmico sono ± 1.

Questo integrale normale Q è la generalizzazione diretta dell'integrale normale di 3.ª specie:

$$\int_v^u \int_{v'}^{u'} \wp(\varphi - \varphi')\, d\varphi\, d\varphi',$$

del caso delle funzioni ellittiche.

Nel caso della curva fondamentale di 4.° ordine l'integrando Φ ha la forma:

$$\Phi = 2\, a_z^3\, a_h \cdot a_{z'}^3\, a_h + 2\, a_z^2\, a_{z'}\, a_h \cdot a_z\, a_{z'}^2\, a_h - \sum_{\nu=1}^{3} a_h^2\, a_z^{\nu-1}\, a_{z'}^{n-\nu-1} \cdot a_z^{n-\nu}\, a_{z'}^{\nu}.$$

Si noti infine che l'integrando di Q è simmetrico in ciascuna delle due variabili.

§ 2. Costruzione delle forme principali $\Omega(x\ y)$.

È già nota l'importanza caratteristica di queste funzioni dei due punti x, y della superficie di Riemann, introdotte già da Klein nella teoria delle funzioni iperellittiche (*), e chiamate da lui *Primausdrücke* ovvero anche *formes principales*. — Esse hanno sulla superficie di Riemann la sola radice *semplice* $x = y$ e non sono mai infinite.

(*) Göttinger Nachrichten, 5 Nov. 1887. — Math. Ann., Bd. 32.

Per la superficie generale di Riemann (cioè per il caso generale abeliano) il Klein ha ultimamente mostrato che si possono costruire anche di tali *forme principali* (*).

La loro forma è (riducendo opportunamente quella data dal Klein nel citato luogo dei *Comptes Rendus*):

$$\Omega(x\,y) = \frac{(k\,x\,y)}{\sqrt{a_x^3\,a_k \cdot a_y^3\,a_k}}\, e^{\frac{1}{2}\left\{Q_{xy}^{x'y'} + Q_{xy}^{x''y''} + Q_{xy}^{x'''y'''}\right\}},$$

limitandosi alla curva di 4.° ordine e intendendo per $(x'\,y'))$ $(x''\,y'')$ $(x'''\,y''')$ rispettivamente i punti d'incontro delle rette $\overline{kx}$ $\overline{ky}$ colla curva, essendo k un punto arbitrario nel piano della curva di 4.° ordine.

Questa Ω è indipendente da k (**) ed è di $-\frac{1}{2}$ dimensione in x e y, rispettivamente.

§ 3. L'integrale di 3.ª specie $H_{xy}^{x'y'}$.

È molto utile, per i calcoli che dovremo sviluppare in seguito, di introdurre in luogo di Q quest'altro integrale di 3.ª specie, che si forma facilmente per mezzo di Q.

Definiamo:

$$H_{xy}^{x^i y^i} = \log \frac{(h\,x\,x^i)\,(h\,y\,y^i)}{(h\,x\,y^i)\,(h\,y\,x^i)} - Q_{xy}^{x^i y^i}.$$

Si sa che Q ha i punti d'infinito logaritmico:

$$x = x^i \qquad y = y^i \qquad x = y^i \qquad y = x^i,$$

e i residui corrispondenti a questi ∞ sono rispettivamente ± 1.

Quindi è chiaro, per la formazione di H, che esso non ha più i punti d'infinito logaritmico x^i, y^i, ma però ha acquistato per punti d'infinito logaritmico i punti in cui le rette hx, hy tagliano ancora la curva; tali punti si chiamino rispettivamente $\xi'\ \xi''\ \xi'''$; $\eta'\ \eta''\ \eta'''$. Supponiamo ora un altro punto k e congiungiamolo con $x\ y$ e si abbiano le altre coppie di punti $x'\,y'$, $x''\,y''$, $x'''\,y'''$. Applichiamo all'integrale H il teorema di Abel per i punti corre-

(*) Comptes Rendus, 11 Janvier 1889, pag. 136.
(**) Vedi Pick, Op. cit.

siduali:

$$\begin{matrix} x & x' & x'' & x''' \\ y & y' & y'' & y''', \end{matrix}$$

(si noti che possiamo applicare il teorema di Abel perchè $x\ y$ non sono punti d'infinito di H).

Si ha allora:

$$H_{xy}^{xy} + \sum H_{xy}^{x^i y^i} = \log \left[\prod_i \frac{(k\,x\,\xi^i)(k\,y\,\eta^i)}{(k\,x\,\eta^i)(k\,y\,\xi^i)} \right],$$

essendo appunto i punti $\xi^i\ \eta^i$ i punti d'infinito di H.

Da questa formola si ricava:

$$-\sum Q_{xy}^{x^i y^i} + \log \Pi \frac{(h\,x\,x^i)(h\,y\,y^i)}{(h\,x\,y^i)(h\,y\,x^i)} \frac{(k\,y\,\xi^i)(k\,x\,y^i)}{(k\,y\,y^i)(k\,x\,\xi^i)} = -H_{xy}^{xy}.$$

Se ora facciamo coincidere il punto h col punto k, i punti $\xi^i\ \eta^i$ verranno a coincidere coi punti $x^i\ y^i$, e resta solo:

$$\sum Q_{xy}^{x^i y^i} = H_{xy}^{xy} = H(x\,y).$$

Mediante questa formola la espressione Ω diventa semplicemente:

$$\Omega(x\,y) = \frac{(k\,x\,y)}{\sqrt{a_x^3\,a_k \cdot a_y^3\,a_k}}\, e^{\frac{1}{2} H(x\,y)}.$$

Si può anche facilmente trovare la espressione dell'integrando di H.

Giovandosi della formola:

$$\log \frac{(h\,x\,x')(h\,y\,y')}{(h\,x\,y')(h\,y\,x')} = \int_y^x \int_{y'}^{x'} \frac{(h\,z\,d\,z)(h\,z'\,d\,z')}{(h\,z\,z')},$$

si può ricavare:

$$H_{xy}^{x'y'} = \int_y^x \int_{y'}^{x'} \frac{n\,a_h\,a_z^{n-1} \cdot a_h\,a_{z'}^{n-1} - \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_h\,a_z^{\nu-1}\,a_{z'}^{n-\nu} \cdot a_h\,a_z^{n-\nu}\,a_{z'}^{\nu-1} + \sum\limits_{\nu=1}^{n-1} a_h^2\,a_z^{\nu-1}\,a_{z'}^{n-\nu-1} \cdot a_z^{n-\nu}\,a_{z'}^{\nu}}{n \cdot (h\,z\,z')^2} \times$$

$$\times \frac{(k\,z\,d\,z)}{a_k\,a_z^{n-1}} \frac{(k'\,z'\,d\,z')}{a_{k'}\,a_{z'}^{n'-1}} \quad (*).$$

(*) Bisogna in primo luogo porre in Q, $k = k' = h$, allora viene $\frac{(h\,z\,d\,z)}{a_h\,a_z^{n-1}} \frac{(h\,z'\,d\,z')}{a_h\,a_{z'}^{n-1}}$ e, poichè ciascuno di questi fattori è indipendente da h, può mutarsi a piacere nell'uno h in k e nell'altro h in k'.

Nel caso della curva di 4.° ordine si ha in particolare facendo $h_1 = h_2 = 0$ $h_3 = 1$ e lo stesso per le k, k':

$$H_{xy}^{x'y'} = \int_y^x \int_{y'}^{x'} \Phi \frac{(z\,dz)(z'\,dz')}{4(zz')^2},$$

dove le z comprese nei determinanti binarii si riferiscono agli indici 1, 2, e

$$\Phi = 2 - 2\,\frac{a_z^2\,a_{z'}\,a_3 \cdot b_z\,b_{z'}^2\,b_3}{a_z^3\,a_3 \cdot b_{z'}^3\,b_3} + \sum_{\nu=1}^{3} \frac{a_3^2\,a_z^{\nu+1}\,a_{z'}^{3-\nu} \cdot b_z^{4-\nu}\,b_{z'}^{\nu}}{a_z^3\,a_3 \cdot b_{z'}^3\,b_3},$$

espressione che inseriamo qui perchè ce ne dobbiamo servire in seguito.

§ 4. Fattore M per la formazione delle funzioni σ.

Colle *forme principali* Ω si costruisce un'espressione che Klein ha chiamata M e che, come egli ha dimostrato ultimamente nei *Comptes Rendus,* entra come fattore nella formazione di *tutte* le funzioni σ abeliane pari e dispari (*).

L'altro fattore è quello che fa fra loro differenziare le diverse σ, ed esso dipende dalle curve di contatto e ne parleremo in seguito.

Però prima d'andare avanti ci pare utile una osservazione per il lettore che non sia molto addentro in questo genere di ricerche.

Il Klein nei suoi lavori pubblicati nei *Comptes Rendus* parla sempre di funzioni Θ e non delle σ. Ci pare utile accennare in che consiste la differenza secondo i nostri punti di vista.

Noi formiamo l'Ω e quindi l'M giovandoci dell' integrale *normale* di 3.ª specie Q.

Se invece di esso si sceglie un qualunque altro integrale di 3.ª specie si arriva in fine anzichè alle funzioni σ alle Θ, le quali dunque in questo senso vengono ad avere come caso particolare le σ. L'altro fattore poi che insieme ad M forma tutta la funzione Θ o σ è lo stesso sia per la Θ che per la *corrispondente* σ.

Per la formazione del fattore M il Klein introduce le cosiddette *forme medie.*

Limitiamoci per fissare le idee al nostro caso delle curve di 4.° ordine.

(*) Comptes Rendus, 11 Febbraio 1889.

Consideriamo una retta $a_x = 0$ che taglia la curva nei 4 punti t' t'' t''' t^{v}. La espressione:

$$m(x) = \frac{\Pi_i \Omega(x t^i)}{a_x},$$

non diviene nulla nè infinita in alcun punto della superficie di Riemann; essa si chiama la *forma media* (*).

La espressione M è allora:

$$M = \frac{\Pi\, m(x^i)}{\Pi\,\Pi\,\Omega(x^i x^j)},$$

dove x^i sono i quattro limiti superiori degli integrali di 1.ª specie.

Naturalmente, potendosi dimostrare che $m(x)$ è composto di un fattore in x e di un altro dipendente solo da t arbitrario, la M sarà determinata a meno di un fattore costante arbitrario, e quindi la stessa indeterminazione vale per le funzioni abeliane a cui giungeremo. Di questa indeterminazione non ci occuperemo affatto.

§ 5. Cenno sopra le curve di contatto di 3.° ordine di una curva di 4.° Determinante D.

Passiamo alla considerazione dell'altro fattore D che entra in σ e che è quello che si differenzia da σ a σ. Esso dipende dalla considerazione delle curve di contatto della curva di 4.° ordine. Nel caso delle funzioni iperellittiche si sa che esso dipendeva invece dalla considerazione delle diverse scomposizioni in due fattori, che si potevano effettuare, della forma $f(x)$ di $2p+2^{\text{mo}}$ grado.

Si sa che vi sono 64 sistemi di curve di 3.° ordine che toccano in 6 punti una data curva di 4.° ordine (**); ciascuno di tali sistemi è al massimo triplamente infinito. Questi 64 sistemi sono fra loro distinti nel senso che non si può passare in un modo continuo, e passando sempre per curve di contatto, da una curva di un sistema a una di un altro.

(*) Il Klein dimostra che tale forma media a meno di un fattore dipendente solo da t, dipende solo da x (lezioni, semestre d'inverno, 1889).

(**) Vedi fra le altre opere Clebsch, III, pag. 249 (ediz. francese). Per le relazioni fra le funzioni abeliane e la teoria delle curve di contatto vedi Weber, *Abelsche Functionen von Geschlecht* 3; e Noether, *Zum Umkehrproblem in der Theorie der Abelschen Functionen.* Math. Ann., Bd. 28.

Se φ_3' φ_3'' φ_3''' φ_3^{IV} sono quattro curve di un sistema, ogni altra dello stesso sistema può sempre porsi sotto la forma irrazionale:

$$(\alpha'\sqrt{\varphi_3'} + \alpha''\sqrt{\varphi_3''} + \alpha'''\sqrt{\varphi_3'''} + \alpha^{IV}\sqrt{\varphi_3^{IV}})^2.$$

Il determinante D si forma prendendo appunto quattro curve di contatto di un sistema e formando:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{\varphi_3'(x')} & \sqrt{\varphi_3''(x')} & \sqrt{\varphi_3'''(x')} & \sqrt{\varphi_3^{IV}(x')} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sqrt{\varphi_3'(x^{IV})} & \cdots & \cdots & \sqrt{\varphi_3^{IV}(x^{IV})} \end{vmatrix}.$$

A ciascuno di questi sistemi di curve di contatto di 3.° ordine corrisponde una delle 64 funzioni Θ o σ abeliane. È noto ancora che questi sistemi si dividono in due classi.

28 di essi hanno la proprietà che i 6 punti di contatto di una delle loro curve insieme coi due punti di contatto di una delle 28 tangenti doppie stanno su di una conica. Ciascuno di questi 28 sistemi corrisponde dunque univocamente ad una delle 28 tangenti doppie. Le σ corrispondenti sono le σ dispari.

Gli altri 36 sistemi dànno luogo alle 36 σ pari. Esse hanno la proprietà che i 12 punti di contatto di due curve dello stesso sistema sono situati su di una curva di 3.° ordine (*).

Infine dobbiamo ricordare le forme speciali sotto cui è utile porre l'equazione della curva fondamentale di 4.° ordine secondochè si intenda considerare un sistema piuttosto che un altro di curve di contatto.

Per i 28 sistemi della 1.ª classe, se chiamiamo $D_x = 0$ la tangente doppia corrispondente, $\Phi_x^3 = 0$ una delle curve di contatto, e $\Omega_x^2 = 0$ la conica passante per i 6 punti di contatto di $\Phi_x^3 = 0$ e per i due di contatto di $D_x = 0$, l'equazione generale della curva fondamentale avrà la forma:

$$D_x \Phi_x^3 - (\Omega_x^2)^2 = 0.$$

Ogni altra curva di contatto dello stesso sistema è:

$$\Phi_x^3 + 2\psi_x \Omega_x^2 + (\psi_x)^2 D_x = 0,$$

e la conica corrispondente sarà:

$$\Omega_x^2 + \psi_x D_x = 0,$$

(*) Clebsch, III, pag. 249.

dove $\psi_x = 0$ è una retta arbitraria del piano. Da questa espressione si vede appunto (poichè in ψ_x entrano tre parametri arbitrarii) che ogni sistema è triplamente infinito, come abbiamo detto avanti.

Nel caso di uno dei 36 sistemi della 2.ª classe diamo alla curva di 4.° ordine la forma datale da Hesse nelle sue ricerche sulle reti di quadriche nello spazio (*).

Consideriamo ξ_i come le quattro coordinate omogenee spaziali, e le x_i come le tre coordinate omogenee planari, e consideriamo la rete di quadriche espressa simbolicamente da:

$$0 = a_x \alpha_\xi^2 = b_x \beta_\xi^2 = \cdots$$

la espressione:

$$a_x b_x c_x d_x (\alpha\beta\gamma\delta)^2 = 0,$$

è una curva di 4.° ordine generale. Le curve di contatto in questo caso non sono altro che:

$$a_x b_x c_x (\alpha\beta\gamma u)^2 = 0,$$

dove u rappresenta 4 parametri omogenei arbitrarii. — La cubica che contiene i 12 punti di contatto di due curve dello stesso sistema, l'una corrispondente ai parametri u e l'altra ai parametri v, è:

$$a_x b_x c_x (\alpha\beta\gamma u)(\alpha\beta\gamma v) = 0.$$

§ 6. Proprietà caratteristiche delle funzioni σ. Covarianti irrazionali di Klein.

Le funzioni σ definite in funzione dei limiti $x^{(i)}$ degli integrali di 1.ª specie sono funzioni degli stessi integrali di 1.ª specie w.

È noto che, nella teoria delle funzioni σ iperellittiche, le σ considerate come funzioni delle w, sono *covarianti non propriamente della forma fondamentale* f, ma delle due forme φ ψ il cui prodotto forma f, proprietà interessantissima trovata per la prima volta dal Klein (**).

Ora le nostre σ abeliane formate appunto con quel tale speciale integrale di 3.ª specie Q, la cui essenza è precisamente quella d'essere un covariante

(*) Hesse, Crelle's Journal, Bd. 55.
(**) Klein, Math. Ann., 27, pag. 450.

(trascendente) della curva di 4.° ordine, godono anche della proprietà invariantiva, cioè i diversi termini dello sviluppo in serie di σ in funzione delle w sono covarianti. Ma di quali forme fondamentali ed in che senso?

Consideriamo il caso delle σ dispari.

Se nella quartica fondamentale

$$D\Phi - \Omega^2 = 0,$$

faccio le sostituzioni in luogo di Φ e Ω:

$$\Phi - 2\psi_x \Omega + (\psi_x)^2 D_x$$

$$\Omega - \psi_x D_x,$$

si vede che la curva fondamentale rimane inalterata. Intanto queste sono appunto le sostituzioni, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, colle quali da una curva di contatto di 3.° ordine Φ si passa ad un'altra dello stesso sistema; per tale cangiarsi della curva di contatto nel proprio sistema, la σ appartenente a quel sistema di curve di contatto individuato da una speciale delle 28 tangenti doppie, deve restare inalterata; i diversi termini dello sviluppo della σ sono funzioni razionali intere dei coefficienti delle tre forme Ω_x^2 D_x Φ_x^3 e debbono rimanere inalterati per quelle tali sostituzioni. Essi sono covarianti della forma fondamentale nel senso che restano inalterati per quelle tali sostituzioni per le quali appunto resta inalterata la forma fondamentale; in una parola sono *covarianti irrazionali* della forma fondamentale, perchè d'altra parte i loro coefficienti non sono funzioni razionali dei coefficienti della quartica (*).

Di questa proprietà estremamente interessante noi ci serviremo in seguito per trovare il 2.° termine dello sviluppo delle σ dispari.

Passando alle σ pari si vede analogamente che la forma fondamentale e le curve di contatto sono covarianti in x della forma rappresentante la rete di quadriche, $a_x \alpha_\xi^2 = 0$.

Dunque con una trasformazione lineare che trasformi in sè stessa questa rete di quadriche, la curva di 4.° ordine resta inalterata, e una curva di contatto di 3.° ordine si trasforma in un'altra avente un altro parametro u, cioè in un'altra dello stesso sistema.

(*) Sui covarianti irrazionali nel senso che ci occorre qui di considerare, vedi una breve Nota di Klein nei Göttinger Nachrichten, Mai 1888.

I termini dello sviluppo delle σ pari sono *covarianti irrazionali* della forma di 4.° ordine nel senso che sono covarianti (solo nelle variabili ternarie x) delle reti fondamentali di quadriche (*).

Accenniamo appena queste proprietà, non potendo su di esse trattenerci.

§ 7. Di un caso particolare degli integrali di 1.ª specie.

Noi finora abbiamo supposto gli integrali di 1.ª specie composti di 4 termini ciascuno, corrispondenti a 4 punti x' x'' x''' x^{IV} della superficie di Riemann. Questa è la forma generale degli integrali abeliani di 1.ª specie, e i tre integrali sono così fra loro indipendenti.

Ma si può considerare un caso particolare di estremo interesse per quello che diremo in seguito.

Consideriamo gli integrali di 1.ª specie:

$$w_1 = \int_y^x dw_1 \qquad w_2 = \int_y^x dw_2 \qquad w_3 = \int_y^x dw_3 .$$

Questi 3 chiaramente sono legati da una relazione, perchè sono tre funzioni di *due* soli punti della superficie di Riemann x y.

Tale relazione $\chi(w_1\ w_2\ w_3)$ è una serie sviluppata secondo le potenze delle w. Di tale relazione si è occupato il Fröbenius in un lavoro ancora inedito, come mi ha comunicato il prof. Klein. È facile vedere che il primo termine non può essere che una espressione contenente per fattore a_w^4; quindi almeno di 4.° ordine nelle w.

Infatti se noi facciamo indefinitivamente avvicinare i due punti y x ponendo:

$$y = x + dx,$$

allora le w si riducono ad una serie espressa nelle x il cui primo termine è:

$$x_1 d\omega, \qquad x_2 d\omega, \qquad x_3 d\omega.$$

Se sostituiamo questi valori nell'espressione $\chi(w_1\ w_2\ w_3) = 0$ questa deve naturalmente (perchè dalle w passiamo alle x) restare identicamente soddisfatta,

(*) Si intenda sempre naturalmente che le tre variabili x_1 x_2 x_3 omogenee, si sostituiscano coi tre integrali di 1.ª specie.

arrestandoci solo al suo primo termine; cioè il suo primo termine deve essere zero. Ora le x sono legate solo da $a_x^4 = 0$, dunque il süo primo termine deve avere per fattore a_w^4.

Dalle considerazioni precedenti si ricava, che se formiamo le σ per il caso speciale di quelli integrali di 1.ª specie (e il modo di formazione lo vedremo adesso), allora possiamo dire che sono anche generali i termini di un grado minore del 4.°; in altri termini noi possiamo trovare i termini di un grado minore del 4.° per il caso speciale, e affermare con sicurezza che essi termini rimangono gli stessi per il caso generale. Questa è un'assai notevole semplificazione per quello che dovremo fare in seguito.

§ 8. Espressione delle funzioni σ per il caso speciale.

Limitiamoci semplicemente (non occorrendoci altro) al caso delle σ dispari.

Allora la σ si definisce:

$$\sigma(w_1\ w_2\ w_3) = \sqrt{D_x D_y} \cdot \Omega(xy),$$

dove D è al solito la tangente doppia corrispondente.

È chiaro che il primo termine dello sviluppo in funzione delle w è D_w, come si vede facendo avvicinare indefinitivamente y ad x. La ricerca del secondo termine, sarà l'oggetto delle prossime considerazioni.

Tale secondo termine sarà di 3.° ordine nelle w. Ricerchiamo prima in generale di che gradi nei coefficienti delle tre forme Φ Ω D debbono essere i varii termini. Poniamo:

$$\sigma(w_1\ w_2\ w_3) = D_w + \sum(\overset{\mu''}{D}, \overset{2\mu}{\Omega}, \overset{\mu'}{\Phi}, \overset{2\nu+1}{w}),$$

dove le lettere poste sopra a D, Ω, ecc., rappresentano i gradi a cui entrano i coefficienti di quelle forme.

Con due semplici considerazioni possiamo trovare che μ μ' μ'' sono legati da due relazioni. Mutiamo:

$$\begin{array}{ccc} D & \text{in} & \rho D \\ \Omega & \text{in} & \rho\Omega \\ \Phi & \text{in} & \rho\Phi. \end{array}$$

Allora la quartica si moltiplica per ρ^2. Le w si moltiplicano per $\frac{1}{\rho^2}$; la D rimanendo moltiplicata per ρ, la D_w sarà moltiplicata per $\frac{1}{\rho}$, e la σ dovendo rimanere inalterata a meno di un fattore si ha che essa verrà a moltiplicarsi per $\frac{1}{\rho}$. Intanto un termine qualunque verrà moltiplicato per ρ elevato ad un esponente:

$$\mu'' + \mu' + 2\mu - 2(2\lambda + 1),$$

onde:

$$\mu'' + \mu' + 2\mu - 4\lambda - 2 = -1.$$

Analogamente mutando:

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \text{in} & \rho^2\Phi \\ \Omega & \text{in} & \rho\,\Omega, \end{array}$$

si ha:

$$2\mu' + 2\mu - 2(2\lambda + 1) = -2,$$

onde infine:

$$\begin{aligned} \mu'' &= 2\lambda + 1 - \mu \\ \mu' &= 2\lambda - \mu. \end{aligned}$$

§ 9. Sviluppo in serie dell'integrale di 3.ª specie H nell'intorno di un punto dato della superficie di Riemann.

La ricerca che ci proponiamo in questo capitolo è di trovare lo sviluppo in serie dell'integrale di 3.ª specie H, quando sia gli argomenti che i parametri si avvicinano indefinitamente ad un certo punto (x); anzi, poichè non ci occorre altro per quello che dovremo dire in seguito, limitiamo la ricerca allo sviluppo di H_{xy}^{xy} quando $x\ y$ si accostano nell'intorno di un punto determinato, ciò che è lo stesso, quando $y = x + dx$.

Per far questo poniamo nell'integrando di H, che è una funzione di $z\ z'$,

$$\begin{aligned} z &= x + \zeta \\ z' &= x + \zeta', \end{aligned}$$

però bisogna tener ben presente che le z e quindi le x e ζ sono variabili ternarie.

Da ora in poi ci farà comodo di non usare più le tre variabili omogenee, ma di porre sempre eguale ad 1 quella coll'indice 2, e inoltre di considerare sempre la variabile coll'indice 3 data in funzione di quella coll'indice 1 per mezzo dell'equazione della quartica. Allora una funzione di $z\, z'$, o in altri termini di $z_1\, z_3\, z'_1\, z'_3$ si considererà solo funzione delle due variabili $z_1\, z'_1$.

È facile allora vedere la legge di formazione dei diversi termini dello sviluppo di una funzione di $z\, z'$, quando ambedue le variabili si suppongono nell'intorno di un medesimo punto x. Avendo fissato di considerare una funzione di $z\, z'$ solo come funzione di $z_1\, z'_1$, gli incrementi $\zeta\, \zeta'$ saranno corrispondenti dunque solo a queste due variabili.

Ponendo in generale:

$$(\varphi, \psi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{\partial \psi}{\partial x_3} - \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

si ha, se teniamo presente la espressione Φ di § 3 e poniamo $\Phi = 2 + \varphi(z\, z')$:

$$\begin{aligned}\Phi(z\, z') = 2 + \Bigg[&\varphi(z\, z')_x + \frac{[\varphi, f(z)]_x}{f_3(x)}\zeta + \frac{[\varphi, f(z')]_x}{f_3(x)}\zeta' + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{[\varphi, f(z)]}{f_3(z)}, f(z)\right)_x \frac{1}{f_3(x)}\zeta^2 \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{[\varphi, f(z')]}{f_3(z')}, f(z')\right)_x \frac{1}{f_3(x)}\zeta'^2 \\ &+ \left(\frac{[\varphi, f(z)]}{f_3(z)}, f(z')\right)_x \frac{1}{f_3(x)}\zeta\zeta' + \cdots\Bigg],\end{aligned}$$

dove con f_3 abbiamo indicata la prima derivata rispetto ad x_3 della funzione che è il primo membro della quartica fondamentale $f = a_x^4 = 0$. Inoltre coll'indice x posto a piede delle parentesi, si intende che dopo fatte tutte le operazioni indicate, bisogna porre tutte le variabili eguali ad x.

Ora è facile verificare, tenendo presente che $f(x) = 0$, che $2 + \varphi(z\, z')_x = 0$. Di qui si ricava ancora che lo sviluppo di Φ deve essere tale che ponendo $\zeta = \zeta'$ deve ridursi a zero; quindi deve essere divisibile per $\zeta - \zeta'$. Ma noi possiamo dire ancora dippiù. Noi osserviamo che Φ è simmetrico in $z\, z'$, e quindi lo sviluppo superiore deve essere simmetrico in $\zeta\, \zeta'$; ma intanto deve già contenere per fattore $\zeta - \zeta'$, dunque deve contenere necessariamente ancora un altro di tali fattori, quindi possiamo senz'altro conchiudere che lo sviluppo di Φ deve contenere per fattore $(\zeta - \zeta')^2$ (*). Ciò porta le seguenti conseguenze.

(*) Un fatto perfettamente analogo si ricava negli sviluppi in serie dell'integrale Q iperellittico. Vedi al proposito Burkhardt, *Ueber hyperelliptische Sigmafunctionen.* Math. Ann, Bd. 32, pag. 389.

1. Che i termini di 1.° ordine dello sviluppo superiore debbono scomparire, ciò che del resto possiamo effettivamente verificare. Dimostriamo cioè appunto che:

$$[\varphi, f(z)]_x = 0.$$

Ponendo infatti:

$$\varphi(z z') = \frac{\psi(z z')}{f_3(z) f_3(z')},$$

si ha:

$$(\varphi, f) = \frac{(\psi, f)}{f_3(z) f_3(z')} - \frac{\psi(z z')}{f_3(z')} \frac{(f_3, f)}{f_3^2(z)}.$$

Ora:

$$(\psi, f) = -4 a_3 a_{z'} a_z (af) b_3 b_{z'}^2 b_z - 2 a_3 a_{z'} a_z^2 b_3 b_{z'}^2 (bf) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{3} \left\{ (\nu - 1) a_3^2 a_{z'}^{3-\nu} a_z^{\nu-2} (af) b_{z'}^{\nu} b_z^{4-\nu} + (4-\nu) a_3^2 a_{z'}^{3-\nu} a_z^{\nu-1} b_{z'}^{\nu} b_z^{3-\nu} (bf) \right\},$$

indicando con (af), (bf) le espressioni:

$$\left(a_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - a_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)$$

$$\left(b_1 \frac{\partial f}{\partial x_2} - b_2 \frac{\partial f}{\partial x_1}\right).$$

Per $z = z' = x$ si ha dunque, essendo $a_x^4 = b_x^4 = 0$

$$(\psi, f) = -\frac{1}{8} (f_3, f) f_3.$$

Intanto

$$\psi(z z')_x = -\frac{1}{8} f_3^2,$$

onde appunto

$$(\varphi, f)_x = 0.$$

2. Che basta calcolare solo il coefficiente di ζ^2, perchè gli altri termini di 2.° ordine debbono essere tali che tutto l'assieme dei termini di 2.° ordine dia un'espressione (che non può quindi essere altro che il coefficiente di ζ^2) moltiplicata per $(\zeta - \zeta')^2$.

Con queste osservazioni lo sviluppo di Φ, arrestandoci ai termini di 2.° ordine, lo possiamo scrivere:

$$\Phi = \frac{1}{2} \left(\frac{[\varphi, f(z)]}{f_3(z)}, f(z) \right)_x \frac{1}{f_3(x)} (\zeta - \zeta')^2 + \cdots.$$

Questo genere di sviluppo è del resto perfettamente d'accordo colla formazione dell'integrale normale di 3.ª specie Q, in quanto che si è detto che i residui che Q ha nell'intorno dei punti d'infinito sono ± 1, cioè che esso diventa infinito come $\int\int \frac{d\zeta\, d\zeta'}{(\zeta - \zeta')^2}$ per $\zeta = \zeta'$; ora, ricordando la formazione di H per mezzo di Q, cioè che esso è formato da Q togliendone i termini d'infinito e facendone comparire altri, si capisce *a priori* che Φ deve essere divisibile per $(\zeta - \zeta')^2$, altrimenti H avrebbe un infinito in $z = z'$, ciò che non può essere.

L'integrale $H_{xy}^{x'y'}$ dunque diventa:

$$H_{xy}^{x'y'} = \frac{1}{8}\left(\frac{(\varphi, f)}{f_3}, f\right)_x \frac{1}{f_3(x)}\zeta\zeta' + \cdots$$

$$e^{\frac{1}{2}H(xy)} = 1 + \frac{1}{16}\left(\frac{(\varphi, f)}{f_3}, f\right)_x \frac{1}{f_3(x)}\zeta^2 + \cdots .$$

§ 10. Sviluppo in serie di σ e degli integrali w secondo le potenze di ζ.

Con principii e notazioni perfettamente simili a quelle del paragrafo precedente, noi abbiamo i seguenti altri sviluppi (sempre per $y = x + \zeta$):

$$(D_x D_y)^{\frac{1}{2}} = D_x^{\frac{1}{2}}\left[D_x^{\frac{1}{2}} + \frac{D_x f(x)}{2 D_x^{\frac{1}{2}} f_3(x)}\zeta + \frac{1}{4}\left(\frac{(D_x f)}{D^{\frac{1}{2}} f_3}, f\right)\frac{1}{f_3}\zeta^2 + \cdots\right]$$

$$\frac{1}{\sqrt{f_3(y)}} = \frac{1}{\sqrt{f_3(x)}}\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{(f_3, f)}{f_3^2}\zeta - \frac{1}{4}\left(\frac{(f_3 f)}{f_3^{\frac{5}{2}}}, f\right)\frac{1}{\sqrt{f_3}}\zeta^2 + \cdots\right],$$

e quindi infine:

$$\sigma = -D_x\frac{\zeta}{f_3} + \frac{1}{2f_3^3}\left\{-f_3(D_x f) + D_x(f_3 f)\right\}\zeta^2$$
$$+\left[-\frac{D_x}{16 f_3^2}\left(\frac{(\varphi f)}{f_3}, f\right) + \frac{D_x}{4 f_3^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{(f_3, f)}{f_3^{\frac{5}{2}}}, f\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{D_x^{\frac{1}{2}}}{4 f_3^2}\left(\frac{(Df)}{D^{\frac{1}{2}} f_3}, f\right) + \frac{1}{4}\,\frac{(f_3 f)(Df)}{f_3^4}\right]\zeta^3 + \cdots .$$

In simile modo si hanno le altre formole:

$$\frac{1}{f_3(z)}=\frac{1}{f_3(x)}-\frac{(f_3 f)}{f_3^3}\zeta-\frac{1}{2}\left(\frac{(f_3 f)}{f_3^3},\, f\right)\frac{1}{f_3}\zeta^2+\cdots$$

$$z_3=x_3-\frac{f_1}{f_3}\zeta-\frac{1}{2}\left(\frac{f_1}{f_3},\, f\right)\frac{1}{f_3}\zeta^2+\cdots,$$

indicando con f_1 la derivata di f rispetto ad x_1.

Intanto gli integrali di 1.ª specie, avendo tolta l'omogeneità delle variabili, sono diventati:

$$w_1=-4\int_y^x\frac{z_1\,d z_1}{f_3(z)}$$

$$w_2=-4\int_y^x\frac{d z_1}{f_3(z)}$$

$$w_3=-4\int_y^x\frac{z_3\,d z_1}{f_3(z)}.$$

Si hanno dunque, sostituendo e integrando, per gli sviluppi delle w le espressioni:

$$w_1=-\frac{4x_1\zeta}{f_3}+2\left[\frac{x_1(f_3 f)-f_3^2}{f_3^3}\right]\zeta^2+\frac{4}{3}\left[\frac{(f_3 f)}{f_3^3}+\frac{1}{2}\frac{x_1}{f_3}\left(\frac{(f_3 f)}{f_3^3},\, f\right)\right]\zeta^3+\cdots$$

$$w_2=-\frac{4\zeta}{f_3}+2\,\frac{(f_3 f)}{f_3^3}\zeta^2+\frac{2}{3}\,\frac{1}{f_3}\left(\frac{(f_3 f)}{f_3^3},\, f\right)\zeta^3+\cdots$$

$$w_3=-\frac{4x_3\zeta}{f_3}+2\left[\frac{x_3(f_3 f)+f_1 f_3}{f_3^3}\right]\zeta^2+\frac{4}{3}\left[-\frac{(f_3 f)f_1}{f_3^4}+\frac{1}{2}\,\frac{x_3}{f_3}\left(\frac{(f_3 f)}{f_3^3},\, f\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2f_3^2}\left(\frac{f_1}{f_3},\, f\right)\right]\zeta^3+\cdots.$$

§ 11. Primo termine dello sviluppo, secondo le potenze di ζ, del termine di 3.° ordine di σ.

Supponiamo la σ espressa per mezzo delle w. Se noi in luogo delle w vi poniamo le espressioni del paragrafo precedente troviamo uno sviluppo secondo le potenze di ζ.

In quanto a tale sviluppo è a notarsi:

1. I termini in ζ vengono solo dai termini di σ di 1.° ordine nelle w, quando per essi pongo i termini in ζ delle w.

2. I termini in ζ^2 vengono solo dai termini di σ di 1.° ordine nelle w quando per essi pongo i termini in ζ^2 delle w, e non da altri, ricordando che σ non ha termini di 2.° ordine nelle w.

3. I termini in ζ^3 vengono dai termini di 1.° ordine nelle w ponendo per essi la parte in ζ^3, e dai termini di 3.° ordine nelle w ponendo per essi la parte in ζ.

Quindi se dal termine in ζ^3 dello sviluppo di σ del paragrafo precedente togliamo ciò che diventa il primo termine di σ, che sappiamo essere D_w, quando in luogo delle w poniamo i termini in ζ^3 delle w, cioè togliamo la espressione:

$$4\left[\frac{1}{6}\,\frac{D_x}{f_3}\left(\frac{(f_3 f)}{f_3^3},\, f\right)+\frac{1}{3}\,\frac{(f_3 f)(Df)}{f_3^4}-\frac{1}{6}\,\frac{1}{f_3^2}\left(\frac{(Df)}{f_3},\, f\right)\right]\zeta^3,$$

otteniamo precisamente ciò che diventa il termine di 3.° ordine in w, quando in luogo di $w_1\ w_2\ w_3$ si pongono rispettivamente:

$$-\frac{4x_1}{f_3}\zeta, \qquad -\frac{4}{f_3}\zeta, \qquad -\frac{4x_3}{f_3}\zeta.$$

Così operando e opportunamente riducendo si ottiene:

$$\left.\begin{aligned}&\Big[-\frac{D_x}{4f_3^3}\Big((\varphi,\, f),\, f\Big)_x+\frac{1}{3}\,\frac{D_x}{f_3^4}\Big((f_3 f),\, f\Big)-\frac{1}{3}\,\frac{1}{f_3^3}\Big((Df),\, f\Big)+\\&\qquad+\frac{1}{2}\,\frac{(Df)^2}{D_x f_3^3}-\frac{1}{2}\,\frac{D_x}{f_3^5}(f_3 f)^2\Big]\zeta^3,\end{aligned}\right\}\qquad\text{(I)}$$

tenendo presente che:

$$(\varphi f)_x=0,$$

come abbiamo avanti osservato (§ 9).

Ora è necessaria una osservazione per non far cadere in dubbii il lettore. Noi abbiamo detto che questa espressione deve essere il primo termine di ciò che diventa il termine di 3.° ordine di σ quando per le w si pongono le espressioni superiori. Ora poichè la 1.ª e la 3.ª per es. di quelle espressioni sono di 1.° grado nelle x a meno di un denominatore f_3, così si deve ottenere un'espressione di 3.° grado nelle x con un denominatore f_3^3. Ora basta uno sguardo all'espressione trovata, per vedere che essa (ponendovi in vista un denominatore f_3^3) resta di grado 5.° nelle x.

Per spiegare questo fatto si deve ricordare che noi abbiamo sin dal principio del calcolo soppressa l'omogeneità, il che è la causa della discordanza osservata. Si dovranno poter raggruppare i vari termini in modo che, per effetto di $f(x)=0$ che è di 4.° ordine, scompaiono quelli di 5.° e 4.° ordine nelle $x_1\ x_3$.

Però in seguito tutta questa riduzione non facile, non ci occorrerà di farla. Essa formerà l'argomento di uno dei capitoli della Memoria II, dove ci occorrerà per uno scopo diverso. Per ora noi, per giungere al risultato finale, devieremo per poco e vi giungeremo per una via meno diretta, ma assai più conveniente, massime per la forma definitiva del risultato a cui ci conduce.

Tornando all'espressione superiore (I), essa deve potersi ridurre ad una funzione intera in x contenente per denominatore f_3^3. Effettuiamo questa riduzione solo per il 4.° termine

$$\frac{(Df)^2}{D_x f_3^3},$$

dove il numeratore deve potersi ridurre divisibile per D_x. Ed infatti ciò si verifica.

Essendo:

$$f = D_x \Phi_x^3 - \Omega_x^2 \Omega'^2_x,$$

si ricava:

$$(Df) = 3(D\Phi) D_x \Phi_x^2 - 4(D\Omega)\Omega_x \Omega'^2_x,$$

intendendo con $(D\Phi)$ la espressione:

$$(D_1\Phi_3 - D_3\Phi_1), \text{ e così per } (D\Omega), \text{ ecc.},$$

quindi:

$$(Df)^2 = 9(D\Phi)(D\Phi') D_x^2 \Phi_x^2 \Phi'^2_x - 24(D\Phi)(D\Omega) D_x \Phi_x^2 \Omega_x \Omega'^2_x +$$
$$+ 16(D\Omega)(D\Omega')\Omega_x \Omega'_x \Omega''^2_x \Omega'''^2_x,$$

ed essendo $f = 0$, cioè:

$$\Omega''^2_x \Omega'''^2_x = D_x \Phi_x^3,$$

si ha:

$$(Df)^2 = D_x \{9(D\Phi)(D\Phi') D_x \Phi_x^2 \Phi'^2_x - 24(D\Phi)(D\Omega)\Phi_x^2 \Omega_x \Omega'^2_x +$$
$$+ 16(D\Omega)(D\Omega')\Omega_x \Omega'_x \Phi_x^3\}.$$

Noi osserviamo che nella nostra espressione (I) tutti i termini, meno il 3.° e 4.°, hanno per fattore il D_x; x rappresenta un punto della curva fondamentale, ma del resto finora arbitrario; particolareggiamolo in modo da essere uno dei due punti di contatto della doppia tangente D_x. Allora $D_x = 0$, e d'altra parte è facile vedere che per tale determinazione di x, la derivata f_3 non va a zero, perchè

$$f_3 = D_3 \Phi_x^3 + 3 D_x \Phi_3 \Phi_x^2 - 4\Omega_x^2 \cdot \Omega'_3 \Omega'_x,$$

e per $D_x = 0$ e quindi $\Omega_x^2 = 0$ resta

$$f_3 = D_3 \Phi_x^3,$$

essenzialmente diversa da zero.

D'altra parte nella nostra espressione superiore (I) tutte le operazioni indicate (meno quella del 1.° termine), sono fra funzioni intere e quindi la loro effettuazione non introduce altro denominatore; nel primo termine poi

$$[(\varphi, f), f],$$

non essendo φ intera, si introducono effettivamente, facendo le operazioni, altri denominatori, ma questi denominatori non sono che sempre f_3 o sue potenze come è facile verificare; dunque possiamo dire senz'altro che la nostra espressione superiore, nel caso che x sia uno dei punti di contatto della tangente doppia, diventa:

$$-\frac{1}{3}\frac{1}{f_3^3}[(Df), f] + \frac{1}{2}\left(\frac{(Df)^2}{D_x}\right)\frac{1}{f_3^3},$$

dove, avendo già calcolato il 2.° termine, non resta che a calcolare ancora il primo.

Dalla espressione di (Df) si ricava:

$$\begin{aligned}[(Df), f] = {} & 9(D\Phi)(D\Phi')\Phi_x^2\Phi_x'^2 D_x + 6(D\Phi)(\Phi D)D_x\Phi_x\Phi_x'^3 + 18(D\Phi)(\Phi\Phi')D_x^2\Phi_x\Phi_x'^2 - \\ & - 12(D\Phi)(D\Omega)\Phi_x^2\Omega_x^2\Omega_x'^2 - 8(D\Omega')(\Omega D)\Omega'_x\Omega_x\Phi_x^3 - 4(D\Omega')(\Omega' D)\Omega_x^2\Phi_x^3 \\ & - 24(D\Omega')(\Omega\Phi)\Omega'_x\Omega_x D_x\Phi_x^2 - 12(D\Omega')(\Omega\,\Phi)D_x\Omega_x^2\Phi_x^2 + \\ & + 32(D\Omega')(\Omega\Omega'')\Omega'_x\Omega_x\Omega''_x\Omega_x'''^2 + 16(D\Omega')(\Omega'\Omega'')\Omega''_x\Omega_x^2\cdot\Omega_x'''^2;\end{aligned}$$

per $D_x = 0$ la espressione di $\frac{(Df)^2}{D_x}$ e queste diventano rispettivamente

$$16\,[(D\Omega)\Omega_x]^2\Phi_x^2$$

$$8\,[(D\Omega)\Omega_x]^2\Phi_x^3,$$

onde infine tutto il termine di 3.° ordine richiesto, diventa nella nostra ipotesi particolare (a meno di un denominatore f_3^3)

$$\frac{16}{3}[(D\Omega)\Omega_x]^2\Phi_x^3.$$

Per i nostri sviluppi non ci occorre altro. Intanto è utile far vedere come effettivamente questo termine è solo apparentemente di grado 5.°, ma in realtà è di 3.° grado.

Ci dobbiamo servire di un'identità fondamentale.
Essendo $x_2 = 1$ si ha:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_x & a_3 \\ b_1 & b_x & b_3 \\ c_1 & c_x & c_3 \end{vmatrix} = (abc),$$

donde:

$$(ab)c_x + (bc)a_x + (ca)b_x = -(abc).$$

Applicando tale formola fra i simboli $D\ \Omega\ \Omega'$ e, elevando a quadrato primo e secondo membro, si ha:

$$(D\Omega)^2 \Omega'^2_x + (D\Omega')^2 \Omega^2_x + (\Omega\Omega')^2 D^2_x + 4(D\Omega)(\Omega\Omega')\Omega'_x D_x +$$
$$+ 2(D\Omega)(\Omega' D)\Omega_x \Omega'_x = (D\Omega\Omega')^2.$$

In ciascun termine i simboli sono *completi.* Facendo la solita ipotesi particolare per i valori di x si ricava semplicemente ed identicamente

$$-2\left[(D\Omega)\Omega_x\right]^2 = (D\Omega\Omega')^2,$$

onde finalmente il nostro termine in questione diventa:

$$-\frac{8}{3}(D\Omega\Omega')^2 \Phi^3_x,$$

che, come si vede, è appunto di 3.° grado nelle x; inoltre si vede pure, come deve verificarsi in generale, che è un covariante delle tre ternarie $D\ \Omega\ \Phi$, ciò che non appariva prima, quando vi comparivano solo determinanti binarii. Ora dobbiamo deviare un po' la nostra ricerca.

§ 12. Ricerca di certi covarianti simultanei di 3.° ordine.

Dalle considerazioni sviluppate avanti (§ 8) risulta che il termine di 3.° ordine nelle w dello sviluppo di σ deve essere formato linearmente mediante termini del tipo

$$(\overset{3-\mu}{D}\ \overset{2-\mu}{\Phi}\ \overset{2\mu}{\Omega}\ \overset{3}{w}),$$

dove quindi μ può avere solo i tre valori 0, 1, 2. Inoltre sappiamo che tale termine deve essere un covariante delle tre ternarie, e non solo un covariante nel senso ordinario, ma un covariante in un senso ancora più ristretto.

Ricerchiamo tutte le combinazioni invariantive che possono formarsi e che sieno di 3.° ordine e dei gradi indicati.

È facile vedere che per $\mu = 0$ si trova solo la combinazione

$$(\Phi\Phi' D)^2 \Phi_w \Phi'_w D_w, \tag{1}$$

per $\mu = 1$ si trovano le sette combinazioni

$$(D\Omega\Omega')^2 \Phi^3_w \tag{2}$$

$$(\Phi\Omega\Omega')(D\Omega\Omega')\Phi^2_w \Omega_w \tag{3}$$

$$(\Phi D\Omega')(D\Omega\Omega')\Phi^2_w D_w \tag{4}$$

$$(\Phi\Omega\Omega')^2 \Phi_w D^2_w \tag{5}$$

$$(\Phi D\Omega')^2 \Phi_w \Omega^2_w \tag{6}$$

$$(\Phi D\Omega')(\Phi\Omega\Omega')\Phi_w \Omega_w D_w \tag{7}$$

$$(\Phi D\Omega)(\Phi D\Omega')\Phi_w \Omega_w \Omega'_w, \tag{8}$$

per $\mu = 2$ si trovano le quattro combinazioni:

$$(\Omega'\Omega''\Omega''')^2 \Omega^2_w D_w \tag{9}$$

$$(\Omega\Omega''\Omega''')(\Omega'\Omega''\Omega''')\Omega_w \Omega'_w D_w \tag{10}$$

$$(\Omega'\Omega''\Omega''')(D\Omega''\Omega''')\Omega'_w \Omega^2_w \tag{11}$$

$$(D\Omega\Omega''')(\Omega'\Omega''\Omega''')\Omega_w \Omega'_w \Omega''_w. \tag{12}$$

Ora è facile vedere che di questi 12 covarianti ne restano solo 6, gli altri 6 esprimendosi linearmente per i primi.

Infatti il (4) lo possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}\Phi^2_w(D\Omega\Omega')[(\Phi D\Omega')\Omega_w - (\Phi D\Omega)\Omega'_w] =$$

$$= \frac{1}{2}\Phi^2_w(D\Omega\Omega')[(D\Omega'\Omega)\Phi_w - (\Omega'\Omega\Phi)D_w] = \frac{1}{2}[(3) - (1)].$$

Il (7) lo possiamo analogamente scrivere:

$$\frac{1}{2}\Phi_w D_w(\Phi\Omega\Omega')[(\Phi D\Omega')\Omega_w - (\Phi D\Omega)\Omega'_w] =$$

$$= \frac{1}{2}\Phi_w D_w(\Phi\Omega\Omega')[(D\Omega'\Omega)\Phi_w - (\Omega'\Omega\Phi)D_w] = \frac{1}{2}[(5) - (3)].$$

L'(8) è:

$$(\Phi D\Omega)\Phi_w\Omega'_w[(D\Omega'\Omega)\Phi_w-(\Omega'\Omega\Phi)D_w+(\Omega\Phi D)\Omega'_w]=(4)-(7)+(6)$$

$$=\frac{1}{2}[(3)-(1)]-\frac{1}{2}[(5)-(3)]+(6)$$

$$=(3)-\frac{1}{2}(1)-\frac{1}{2}(5)+(6),$$

Il (10) è:

$$\frac{1}{3}(\Omega'\Omega''\Omega''')D_w\Omega_w[(\Omega\Omega''\Omega''')\Omega'_w-(\Omega\Omega'\Omega''')\Omega''_w-(\Omega\Omega''\Omega')\Omega'''_w]=$$

$$=\frac{1}{3}(\Omega'\Omega''\Omega''')D_w\Omega_w[(\Omega''\Omega'''\Omega')\Omega_w]=\frac{1}{3}(9).$$

L'(11) è:

$$\frac{1}{3}(\Omega'\Omega''\Omega''')\Omega_w^2[(D\Omega''\Omega''')\Omega'_w-(D\Omega'\Omega''')\Omega''_w-(D\Omega''\Omega')\Omega'''_w]=\frac{1}{3}(9).$$

E finalmente il (12) è evidentemente zero, come si vede scambiando Ω' con Ω''. Dunque restano solamente il (1) (2) (3) (5) (6) (9) i quali sono nel fatto sei covarianti fra loro *linearmente indipendenti,* come è facile dimostrare; però tutti i nostri ragionamenti non si fondano sulla indipendenza lineare di questi covarianti, e sussisterebbero egualmente se essi non fossero indipendenti.

È utile per altro indicare il modo semplicissimo con cui si può giungere a dimostrare la indipendenza lineare di tali covarianti.

In primo punto osserviamo che certamente il (1) e il (9) sono fra loro e dagli altri 4 linearmente indipendenti, perchè i gradi dei coefficienti di $D\ \Phi\ \Omega$ sono diversi. Resta quindi a dimostrare che non è possibile una relazione del tipo

$$c(2)+c'(3)+c''(5)+c'''(6)=0.$$

Tale relazione dovrebbe sussistere qualunque sieno le tre ternarie.

Ora supponiamo in primo luogo che Ω diventi il quadrato di una forma lineare. Allora (2) (3) (5) vanno a zero e (6) non va a zero. Dunque certamente deve essere $c'''=0$.

Supponiamo ora daccapo che Ω diventi il prodotto di D_x per un'altra forma lineare. Allora (2) e (3) vanno a zero, ciò che non fa (5), dunque certamente anche $c''=0$.

Infine supponiamo che Φ e Ω diventino l'una il cubo di un'espressione lineare e l'altra il prodotto di tale espressione lineare per un'altra forma; allora (3) va a zero, ma non va a zero (2), dunque anche c' e quindi finalmente c debbono essere zero.

§ 13. Su di un sistema di equazioni a derivate parziali a cui debbono soddisfare i diversi termini dello sviluppo di σ.

Noi abbiamo detto avanti (§ 6) che i diversi termini dello sviluppo di σ debbono essere tali espressioni nei coefficienti delle tre ternarie che non solo rimangono inalterati per una sostituzione lineare (cioè sono covarianti), ma ancora che restano inalterati quando da una delle curve di contatto di 3.° ordine si passa ad un'altra dello stesso sistema, e abbiamo indicate le formole di tale trasformazione. Ciò dà luogo a certe equazioni a derivate parziali che qui vogliamo sviluppare. Poniamo:

$$\begin{aligned} D &= \sum \alpha_i w_i \\ \Omega &= \sum \alpha_{ij} w_i w_j \\ \Phi &= \sum \alpha_{ijk} w_i w_j w_k, \end{aligned}$$

dove gli indici si intende che possono avere tutti i valori 1, 2, 3.

Inoltre poniamo:

$$\psi = \sum \beta_i w_i,$$

essendo ψ quella tale forma lineare che caratterizza la trasformazione (vedi § 6). Chiamando Φ' Ω' le forme trasformate, cioè la nuova cubica di contatto e la nuova conica corrispondente, si ha evidentemente:

$$\begin{aligned} \Omega' &= \sum w_i w_j (\alpha_{ij} + \alpha_i \beta_j) &&= \sum w_i w_j \alpha'_{ij} \\ \Phi' &= \sum w_i w_j w_k (\alpha_{ijk} + 2\alpha_{ij}\beta_k + \alpha_i \beta_j \beta_k) &&= \sum w_i w_j w_k \alpha'_{ijk}, \end{aligned}$$

dove le α' hanno i valori che si ricavano da queste relazioni.

Sia ora J un termine dello sviluppo di σ; espresso nei nuovi coefficienti sia J'. Perchè J' non deve contenere che solo apparentemente i coefficienti β, facciamo la derivata totale di J' rispetto ad una delle tre β, e eguagliamola a zero.

Si ha:

$$0 = \frac{dJ'}{d\beta_k} = \sum_j \frac{\partial J'}{\partial \alpha'_{jk}} \frac{\partial \alpha'_{jk}}{\partial \beta_k} + \sum_{ij} \frac{\partial J'}{\partial \alpha'_{ijk}} \frac{\partial \alpha'_{ijk}}{\partial \beta_k} + \sum_{ij} \frac{\partial J'}{\partial \alpha'_{ikj}} \frac{\partial \alpha'_{ikj}}{\partial \beta_k},$$

osservando che fra i coefficienti α' con due indici, contengono β_k solo quelli il cui secondo indice è k, e fra i coefficienti α' con tre indici contengono β_k quelli il cui secondo indice o il cui terzo indice è k.

Essendo ora:

$$\frac{\partial \alpha'_{jk}}{\partial \beta_k} = \alpha_j$$

$$\frac{\partial \alpha'_{ijk}}{\partial \beta_k} = 2\alpha_{ij} + \alpha_i \beta_j$$

$$\frac{\partial \alpha'_{ikj}}{\partial \beta_k} = \alpha_i \beta_j,$$

si ricava:

$$0 = \sum_j \frac{\partial J'}{\partial \alpha'_{jk}} \alpha_j + \sum_{ij} \frac{\partial J'}{\partial \alpha'_{ijk}} (2\alpha_{ij} + \alpha_i \beta_j) + \sum_{ij} \frac{\partial J'}{\partial \alpha'_{ikj}} \alpha_i \beta_j .$$

Facciamo ora $\beta = 0$, allora J' diventa J, le α' diventano le α, e possiamo scrivere allora il sistema di tre equazioni a derivate parziali

$$\sum_j \frac{\partial J}{\partial \alpha_{j1}} \alpha_j + 2 \sum_{ij} \frac{\partial J}{\partial \alpha_{ij1}} \alpha_{ij} = 0$$

$$\sum_j \frac{\partial J}{\partial \alpha_{j2}} \alpha_j + 2 \sum_{ij} \frac{\partial J}{\partial \alpha_{ij2}} \alpha_{ij} = 0$$

$$\sum_j \frac{\partial J}{\partial \alpha_{j3}} \alpha_j + 2 \sum_{ij} \frac{\partial J}{\partial \alpha_{ij3}} \alpha_{ij} = 0.$$

Moltiplichiamo rispettivamente queste tre equazioni per i coefficienti $\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3$ di una nuova forma γ_x, e sommiamole; si ha:

$$\sum \frac{\partial J}{\partial \alpha_{jk}} \alpha_j \gamma_k + 2 \sum \frac{\partial J}{\partial \alpha_{ijk}} \alpha_{ij} \gamma_k = 0. \qquad (A)$$

In generale questa equazione deve sussistere qualunque sia la forma lineare γ, ed in questo senso essa è tanto generale quanto le tre precedenti.

Facciamo in particolare $\gamma = D$, e allora abbiamo l'altra equazione

$$\sum \frac{\partial J}{\partial \alpha_{jk}} \alpha_j \alpha_k + 2 \sum \frac{\partial J}{\partial \alpha_{ijk}} \alpha_{ij} \alpha_k = 0, \qquad (B)$$

la quale insieme colla precedente generale ci sarà utile in seguito.

Si vede subito la forma rimarchevole che hanno queste equazioni. Esse corrispondono ad un processo di Aronhold nel quale si sostituiscono rispettivamente le forme γD, $\gamma \Omega$, alle forme degli stessi ordini, Ω, Φ.

§ 14. Applicazione delle equazioni differenziali parziali (B) trovate nel paragrafo precedente.

Troviamo i risultati che si hanno applicando i primi membri delle equazioni differenziali trovate, a ciascuno dei 6 covarianti del § 12. Per far questo è noto dalla ordinaria teoria del processo di Aronhold che si può operare sempre simbolicamente in un modo assai semplice.

Incominciamo coll'applicare prima la 2.ª equazione differenziale, cioè quella in cui la γ si è fatta eguale a D.

Per applicare il processo al covariante

$$(\Phi\,\Phi' D)^2\,\Phi_w\,\Phi'_w\,D_w,$$

dobbiamo consecutivamente a ciascuna delle Φ Φ' sostituire una forma $D_w\,\Omega_w^2$, e poi moltiplicare per 2 la somma dei risultati. Ora il covariante segnato si può ottenere da Φ_w^3 facendo la 2.ª polare rispetto al polo y e poi mutando in questa i coefficienti y nelle serie di variabili $\overline{\underline{\Phi' D}}$ (*) e moltiplicando per $\Phi'_w D_w$. Se quindi seguiamo la stessa via considerando in luogo di Φ la forma $D_w\,\Omega_w^2$ giungiamo al risultato del detto processo di Aronhold su quella espressione quando si consideri il processo applicato rispetto ai coefficienti di Φ. Essendo poi $\Phi\Phi'$ simboli equivalenti e comparendo simmetricamente lo stesso risultato si ottiene applicando il processo nello stesso modo rispetto a Φ'. Quindi infine si ottiene:

$$2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3}\, D_w^2\,\Phi_w(\Omega\,\Phi\,D)^2.$$

Analogamente si procederebbe per tutti gli altri 5 covarianti. Inseriamo qui appresso il quadro dei risultati. Vogliamo però notare che nell'effettuare il processo sulle espressioni (3) e (5) capita un termine del tipo:

$$(D\,\Omega'\,\Omega'')(\Omega\,\Omega'\,\Omega'')\,\Omega_w\,D_w^2.$$

(*) È noto che cosa si intende con questo modo di dire: ciascuna delle variabili y_1 y_2 y_3 deve cioè cangiarsi nei determinanti binarii formati colle due serie di coefficienti ternarii

$$\left|\begin{matrix} \Phi'_1 & \Phi'_2 & \Phi'_3 \\ D_1 & D_2 & D_3 \end{matrix}\right|.$$

Ora questo termine può scriversi:

$$\frac{1}{3}\,D^2_w(\Omega\Omega'\Omega'')\,[(D\Omega'\Omega'')\Omega_w-(D\Omega\Omega'')\Omega'_w-(D\Omega'\Omega)\Omega''_w]=$$
$$=\frac{1}{3}\,D^2_w(\Omega\Omega'\Omega'')\,[(\Omega\Omega'\Omega'')D_w].$$

Si ottiene dunque il seguente quadro:

$$\begin{array}{lcl}
(1)=D_w\Phi_w\Phi'_w(\Phi\Phi'D)^2 & \text{dà} & \frac{4}{3}\,D^2_w\Phi_w(\Omega\Phi D)^2 \\
(2)=\Phi^3_w(D\Omega\Omega')^2 & ,, & 2\,D_w\Omega^2_w(D\Omega'\Omega'')^2 \\
(3)=D_w\Phi^2_w(\Phi\Omega\Omega')(D\Omega\Omega') & ,, & \frac{2}{3}\,D_w\Omega''^2_w(D\Omega\Omega')^2+\frac{4}{9}\,D^3_w(\Omega\Omega'\Omega'')^2 \\
(5)=D^2_w\Phi_w(\Phi\Omega\Omega')^2 & ,, & 2\,D^2_w\Phi_w(\Phi D\Omega)^2+\frac{10}{9}\,D^3_w(\Omega\Omega'\Omega'')^2 \\
(6)=\Omega^2_w\Phi_w(\Phi D\Omega')^2 & ,, & D^2_w\Phi_w(\Phi D\Omega')^2+\frac{2}{3}\,D_w\Omega^2_w(D\Omega\Omega')^2 \\
(9)=D_w\Omega^2_w(\Omega'\Omega''\Omega''')^2 & ,, & D^3_w(\Omega\Omega'\Omega'')^2+3\,D_w\Omega^2_w(D\Omega'\Omega'')^2.
\end{array}$$

Quello che è rimarchevole per il nostro scopo è che questi 6 risultati sono tutti funzioni di 3 sole espressioni, cioè di:

$$(\mathrm{I})=D_w\Omega^2_w(D\Omega'\Omega'')^2$$
$$(\mathrm{II})=D^2_w\Phi_w(\Phi D\Omega)^2$$
$$(\mathrm{III})=D^3_w(\Omega\Omega'\Omega'')^2.$$

Queste tre espressioni sono fra loro *linearmente indipendenti,* e questo è un punto estremamente interessante per le nostre considerazioni.

Ciò si dimostra nel seguente modo. In primo luogo perchè la (II) contiene i coefficienti Φ non contenuti dalle altre due, è chiaro che essa non potrà legarsi linearmente alle altre due. Potrà dunque solo supporsi sussistere una relazione del tipo

$$c(\mathrm{I})+c'(\mathrm{III})-0.$$

Ora supponiamo in particolare che la quadratica Ω si scinda in due fattori $\Omega^2_x=p_xq_x$. Allora (I) diventa $D_xp_xq_x(Dpq)^2$, mentre la (III) va a zero: dunque $c=c'=0$.

Se dunque noi vogliamo avere *tutte le possibili combinazioni lineari* dei 6 covarianti trovati, tali che formino un covariante che soddisfi all'equazione a derivate parziali (B) dobbiamo trovare tutte le possibili combinazioni lineari delle 6 espressioni a destra del quadro precedente, tali che si annullino identicamente e indipendentemente da (I) (II) (III), cioè considerando queste come tre quantità arbitrarie; perchè se vi fosse una combinazione lineare che si annullasse non indipendentemente dai valori di queste tre quantità, ciò equivarrebbe ad una relazione lineare fra queste tre quantità, che è impossibile.

Moltiplicando quindi rispettivamente le 6 dette espressioni per $\lambda\ \mu\ \nu\ \rho\ \sigma\ \tau$ e sommando e eguagliando a zero i coefficienti di (I) (II) (III) rispettivamente, la quistione si ridurrà a soddisfare alle tre equazioni:

$$\begin{aligned} &2\mu+\frac{2}{3}\sigma+3\tau+\frac{2}{3}\nu=0\\ &2\rho+\sigma\quad+\frac{4}{3}\lambda\qquad=0\\ &\frac{10}{9}\rho+\tau\quad+\frac{4}{9}\nu\qquad=0. \end{aligned}$$

È facile trovare che i sistemi indipendenti di soluzioni di queste tre equazioni sono i seguenti tre:

$$\begin{array}{llllll} \lambda_1=-\frac{9}{4} & \mu_1=-1 & \nu_1=0 & \rho_1=0 & \sigma_1=3 & \tau_1=0\\ \lambda_2=-\frac{3}{2} & \mu_2=\frac{5}{3} & \nu_2=0 & \rho_2=1 & \sigma_2=0 & \tau_2=-\frac{10}{9}\\ \lambda_3=0 & \mu_3=-\frac{3}{4} & \nu_3=-\frac{9}{4} & \rho_3=0 & \sigma_3=0 & \tau_3=1. \end{array}$$

È facile vedere che sono sistemi di soluzioni fra loro indipendenti. Infatti il primo per es. non potrà certamente esprimersi per gli altri due perchè esso ha un valore finito per σ_1 e le altre due hanno ambedue i valori zero per le $\sigma_2\ \sigma_3$. E così di seguito.

Inoltre è facile verificare che ogni altra soluzione è esprimibile per queste tre, cioè che ponendo:

$$\begin{aligned} \lambda&=p\lambda_1+q\lambda_2+r\lambda_3\\ \mu&=p\mu_1+q\mu_2+r\mu_3\\ \nu&=p\nu_1+q\nu_2+r\nu_3\\ \rho&=p\rho_1+q\rho_2+r\rho_3\\ \sigma&=p\sigma_1+q\sigma_2+r\sigma_3\\ \tau&=p\tau_1+q\tau_2+r\tau_3, \end{aligned}$$

le equazioni sono identicamente soddisfatte indipendentemente dai valori $p\ q\ r$.

Formiamo dunque i seguenti tre covarianti che *saranno gli unici covarianti di quei dati gradi e ordini* che soddisferanno all'equazione differenziale (B).

$$A = -\ \Phi^3_w (D\Omega\Omega')^2 + 3\Omega^2_w \Phi_w (\Phi D\Omega')^2 - \frac{9}{4} D_w \Phi_w \Phi'_w (\Phi\Phi' D)^2$$

$$B = \frac{5}{3}\Phi^3_w (D\Omega\Omega')^2 + D^2_w \Phi_w (\Phi\Omega\Omega')^2 - \frac{3}{2} D_w \Phi_w \Phi'_w (\Phi\Phi' D)^2 - \frac{10}{9} D_w \Omega^2_w (\Omega'\Pi''\Omega''')^2$$

$$C = -\frac{3}{4}\Phi^3_w (D\Omega\Omega')^2 + D_w \Omega^2_w (\Omega'\Omega''\Omega''')^2 - \frac{9}{4} D_w \Phi^2_w (\Phi\Omega\Omega')(D\Omega\Omega').$$

§ 15. Applicazione della equazione differenziale (A) e conclusione.

Lo sviluppo della funzione abeliana σ non deve solo soddisfare all'equazione differenziale (B), ma anche a quella generale (A). Intanto noi adoperando l'equazione (B) abbiamo potuto nel paragrafo precedente effettuare una prima riduzione del problema, nel senso che dalla considerazione di 6 covarianti siamo passati a doverne considerare solo 3 che sono gli A, B, C del paragrafo precedente. Poichè i 6 covarianti da cui siamo partiti sono, come abbiamo dimostrato, fra loro linearmente indipendenti, e poichè i tre sistemi di soluzioni di cui è parola nel paragrafo precedente sono fra loro indipendenti si ricava che i tre covarianti $A\ B\ C$ sono anche fra loro linearmente indipendenti.

Applichiamo a questi tre covarianti i processi indicati dal 1.° membro dell'equazione differenziale (A). Con opportune riduzioni, otteniamo i seguenti risultati:

$$\begin{array}{lll} A & \text{dà} & 4\Omega^2_w \Omega''_w (\gamma D\Omega')(D\Omega'\Omega'') - 6 D_w \Omega_w \Phi_w (\gamma\Phi D)(\Omega\Phi D) \\ B & » & 2 D_w \Phi^2_w (D\gamma\Omega)(D\Omega\Phi) - 6 D_w \Omega_w \Phi_w (\gamma\Phi D)(\Omega\Phi D) \\ C & » & -\frac{9}{4} D_w \Phi^2_w (D\gamma\Omega)(D\Omega\Phi) - 3\Omega^2_w \Omega^2_w (\gamma D\Omega')(D\Omega'\Omega''), \end{array}$$

Si vede che questi tre risultati sono funzioni di tre sole espressioni:

$$\begin{aligned} (\mathrm{I}') &= \Omega^2_w \Omega''_w (\gamma D\Omega')(D\Omega'\Omega'') \\ (\mathrm{II}') &= D_w \Omega_w \Phi_w (\gamma\Phi D)(\Omega\Phi D) \\ (\mathrm{III}') &= D_w \Phi^2_w (D\gamma\Omega)(D\Omega\Phi). \end{aligned}$$

Queste tre quantità sono fra loro linearmente indipendenti. Infatti in primo luogo è chiaro che (I') non può legarsi linearmente colle altre due, perchè di grado diverso nei coefficienti delle ternarie. Può dunque solo supporsi sussistere una relazione del tipo

$$c(\mathrm{II}') + c'(\mathrm{III}') = 0.$$

Ma facendo divenire Ω il quadrato di γ_w si vede che (III') si annulla, ciò che non fa (II').

Come abbiamo fatto avanti nell'altro paragrafo dobbiamo ora trovare tali combinazioni lineari delle espressioni a destra del quadro precedente che si annullino indipendentemente dai valori di (I') (II') (III'), considerando cioè queste tre espressioni come tre indeterminate.

Moltiplicando quindi le tre dette espressioni per λ μ ν e sommandole e eguagliando a zero i coefficienti delle indeterminate ricaviamo le tre equazioni:

$$\begin{aligned} 4\lambda + \frac{20}{3}\mu - 3\nu &= 0 \\ -6\lambda - 6\mu \qquad &= 0 \\ 2\mu - \frac{9}{4}\nu \qquad &= 0, \end{aligned}$$

di cui la prima è conseguenza delle due altre.

Abbiamo dunque un unico sistema di valori per λ μ ν tale che ogni altro sistema si esprime per esso.

Tale sistema possiamo prenderlo

$$\lambda = 1 \qquad \mu = -1 \qquad \nu = -\frac{8}{9}.$$

Dunque ricaviamo infine un unico covariante soddisfacente all'equazione differenziale generale (A); tale covariante è:

$$A - B - \frac{8}{9}C =$$

$$= -2(D\Omega\Omega')\Phi_w^3 + 3(\Phi D\Omega')^2\Phi_w\Omega_w^2 - \frac{3}{4}(\Phi\Phi' D)^2\Phi_w\Phi'_w D_w - (\Phi\Omega\Omega')^2\Phi_w D_w^2 +$$
$$+ \frac{2}{9}(\Omega'\Omega''\Omega''')^2 D_w\Omega_w^2 + 2(\Phi\Omega\Omega')(D\Omega\Omega')\Phi_w^2 D_w.$$

Questa espressione deve, a meno di un fattore numerico c, essere il 2.° termine richiesto dello sviluppo della σ abeliana.

Poniamo ora per le w le espressioni:

$$-\frac{4x_1}{f_3}\zeta, \qquad -\frac{4}{f_3}\zeta, \qquad -\frac{4x_3}{f_3}\zeta,$$

e supponiamo poi che il punto x sia uno dei punti di contatto della tangente doppia colla curva. Allora, a meno di un fattore $\frac{\zeta^3}{f_3^3}$ si ha:

$$+2\cdot 4^3\cdot c\cdot(D\Omega\Omega')^2\Phi_x^3.$$

Dal paragone colla formola trovata nella stessa ipotesi al § 10 risulta:

$$c=-\frac{1}{3\cdot 16}.$$

Ci pare rimarchevole il notare che noi giungiamo alla conoscenza del 2.º termine di σ senza supporre nota la forma dell'integrale normale di 3.ª specie, ma solo conoscendone le proprietà generali.

Ciò si può verificare riandando tutto il corso di questo lavoro. Tale fatto ha relazione con ciò, che l'integrale *normale* di 3.ª specie è univocamente determinato da tutte le sue proprietà.

Göttingen, marzo 1889.

Le omografie in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni (*).

(*Del dott.* Pilo Predella, *a Pavia.*)

Premessi *nel* § 1 *alcuni teoremi del* Segre *sulle omografie* degeneri, dimostro, nel § 3 con un metodo che mi pare molto semplice, altri teoremi dovuti pure al Segre sulle omografie non degeneri. Nel § 4 *indico una generazione* geometrica delle figure projettive e ritorno sopra i teoremi dei §§ 1 e 2 dimostrandoli con considerazioni geometriche semplicissime.

Nei paragrafi seguenti investigo la grande varietà di tutte le omografie possibili nello spazio S_n, degeneri e non degeneri.

Nel § 5, scegliendo convenientemente i vertici di riferimento, trovo che la causa essenziale del complicarsi dello studio analitico delle omografie, dipende dal fatto geometrico semplicissimo che alcuni spazii fondamentali vengono a sovrapporsi (**), entrando l'uno nell'altro e confondendosi nello spazio *fondamentale di maggiori dimensioni*; *considerando* quegli spazii sovrapposti come infinitamente vicini, vengo a ridurre lo studio di tutte le omografie, allo studio delle omografie generali; e mostro come l'*omografia sia completamente* caratterizzata dai numeri h esprimenti le dimensioni degli spazii fondamentali distinti o sovrapposti.

Ne segue una classificazione delle omografie degeneri e non degeneri, in classi e sottoclassi, che ha un fondamento geometrico molto semplice.

Una classificazione delle omografie non degeneri, fondata sulla considera-

(*) Dissertazione presentata per la laurea in Matematica nella R. Università di Pavia. Luglio 1888.

(**) Dico *sovrapposti* due spazii che giacciono l'uno nell'altro.

zione dei numeri e (esponenti dei divisori elementari) venne fatta dal Segre (*); ma i numeri e non hanno uno spiccato significato geometrico, benchè siano coi numeri h in una relazione semplice.

Nei §§ 7 e 8 dimostro dei teoremi tendenti ad analizzare gli elementi uniti essenziali di una omografia; di questi teoremi sono notevoli specialmente quelli del § 8.

Il Segre ha dimostrato (**) (appoggiandosi al teorema di Weierstrass sulle forme bilineari) che date due omografie appartenenti alla stessa sottoclasse, l'una in S_n, l'altra in S'_n, si può stabilire fra i due spazi S_n ed S'_n una tale corrispondenza omografica, da passare da una omografia all'altra. Ma questa corrispondenza fra i due spazi è determinata, o si possono fissare arbitrariamente alcuni elementi corrispondenti? E ad ogni modo, come si fissano gli elementi corrispondenti fra i due spazi per passare da un'omografia all'altra? Tale questione è risolta completamente nel § 9, dove dimostro che fissata fra i due spazi una coppia di punti corrispondenti, scelti arbitrariamente, e un certo numero di coppie di spazi corrispondenti, scelti pure arbitrariamente in certe totalità, la corrispondenza fra i due spazi che serve a passare dall'una all'altra omografia è determinata. In quel paragrafo dò anche la costruzione di un'omografia qualunque; la quale, benchè abbia qualche punto di contatto colla notevole costruzione del prof. Bertini (***), è però molto più semplice.

Nel § 10 deduco dal teorema del § 9 il teorema di Weierstrass sulle forme bilineari, indicando quanta arbitrarietà ci sia nella scelta dei coefficienti delle sostituzioni per le quali si passa dalla prima coppia di forme bilineari alla seconda.

Nel § 11 mostro che i coefficienti delle relazioni omografiche per le quali si passa da una ad altra omografia appartenenti alla stessa sottoclasse, soddisfano ad un sistema di equazioni lineari, e concludo che fra essi se ne possono scegliere arbitrariamente $n+\sum h(h-1)$ dove i numeri $h-1$ sono le dimensioni degli spazi fondamentali, distinti o sovrapposti, dell'una o dell'altra omografia.

(*) Segre, *Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni.* Mem. della R. Accad. dei Lincei. Anno 1883-84.

(**) Segre, Memoria cit.

(***) Bertini, *Costruzione delle omografie di uno spazio lineare qualunque.* Rend. del R. Istituto Lombardo, Serie II, Vol. XX.

§ 1.

Poniamo fra le coordinate ξ_i dei piani di uno spazio lineare ad n dimensioni S_n e quelle y_i dei punti di uno spazio lineare ad n dimensioni S'_n, la relazione bilineare:

$$\sum_{ik} a_{ik}\, y_i\, \xi_k = 0, \tag{1}$$

ovvero scrivendola distesamente:

$$(a_{11} y_1 + \cdots + a_{n+1\,1} y_{n+1})\xi_1 + \cdots + (a_{1\,n+1} y_1 + \cdots + a_{n+1\,n+1} y_{n+1})\xi_{n+1} = 0 \qquad [1]'$$

$$(a_{11} \xi_1 + \cdots + a_{1\,n+1} \xi_{n+1}) y_1 + \cdots + (a_{n+1\,1} \xi_1 + \cdots + a_{n+1\,n+1} \xi_{n+1}) y_{n+1} = 0. \qquad [1]''$$

Stabiliamo così una corrispondenza fra i due spazi, che dicesi *omografia*. Ad ogni punto y di S'_n corrisponde un punto x di S_n di coordinate:

$$\left.\begin{array}{l} r x_1 \;\;\; = a_{11} y_1 \;\;\; + \cdots + a_{n+1\,1} y_{n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r x_{n+1} = a_{1\,n+1} y_1 + \cdots + a_{n+1\,n+1} y_{n+1}; \end{array}\right\} \qquad [2]$$

e ad ogni piano ξ di S_n corrisponde un piano η di S'_n di coordinate:

$$\left.\begin{array}{l} \rho \eta_1 \;\;\; = a_{11} \xi_1 \;\;\; + \cdots + a_{1\,n+1} \xi_{n+1} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho \eta_{n+1} = a_{n+1\,1} \xi_1 + \cdots + a_{n+1\,n+1} \xi_{n+1}. \end{array}\right\} \qquad [3]$$

Le [1] [2] e [3] sono equivalenti.

Se il determinante $|a_{ik}|$, modulo dell'omografia, è nullo insieme ai suoi minori d'ordine n, $n-1,\ldots$ $n-h+2$ senza che siano nulli tutti i minori di ordine $n-h+1$, cioè se $|a_{ik}|$ è di caratteristica $n-h+1$ (h eguale almeno ad uno) l'omografia dicesi degenere. Allora delle equazioni:

$$\begin{array}{l} u_1 \;\;\; = a_{11} y_1 \;\;\; + \cdots + a_{n+1\,1} y_{n+1} \;\;\; = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{n+1} = a_{1\,n+1} y_1 + \cdots + a_{n+1\,n+1} y_{n+1} = 0, \end{array}$$

$n-h+1$ soltanto (per es. $u_1 = 0 \ldots\; u_{n-h+1} = 0$) sono indipendenti; e determinano un S'_{h-1}. Le altre $u_{n-h+2} = 0 \ldots\; u_{n+1} = 0$ sono combinazioni lineari delle prime:

$$\left.\begin{array}{l} u_{n-h+2} = \lambda'_1 u_1 \quad + \cdots + \lambda'_{n-h+1} u_{n-h+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_{n+1} \quad = \lambda_1^{(n-h)} u_1 + \cdots + \lambda_{n-h+1}^{(n-h)} u_{n-h+1}. \end{array}\right\} \qquad (\alpha)$$

Ad ogni punto di S'_{h-1} (la relazione [1] essendo soddisfatta identicamente) corrisponde un punto qualunque di S_n, ad ogni punto fuori di S'_{h-1} corrisponde un punto x le cui coordinate sono date dalle [2]; ma fra i secondi membri delle [2] avendo luogo le relazioni (α), le stesse relazioni avranno luogo fra i primi membri, cioè:

$$\left.\begin{array}{l} x_{n-h+2} = \lambda'_1 x_1 \quad + \cdots + \lambda'_{n-h+1} x_{n-h+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{n+1} \quad = \lambda_1^{(n-h)} x_1 + \cdots + \lambda_{n-h+1}^{(n-h)} x_{n-h+1}, \end{array}\right\} \qquad (\beta)$$

le quali determinano un S_{n-h}.

Per trovare il punto corrispondente di un punto qualunque di S_{n-h} basta trovare i valori di $y_1 \dots y_{n+1}$ che soddisfano le [2] che si possono scrivere anche così:

$$\frac{u_1}{x_1} = \cdots = \frac{u_{n-h+1}}{x_{n-h+1}} = \frac{u_{n-h+2}}{x_{n-h+2}} = \cdots = \frac{u_{n+1}}{x_{n+1}};$$

ma dall'$n - h + 1^{\text{esimo}}$ in poi i numeratori e i denominatori di quei rapporti sono le stesse combinazioni lineari rispettivamente dei numeratori e denominatori dei primi $n - h + 1$ rapporti, quindi basterà trovare i valori di $y_1 \dots y_{n+1}$ che soddisfano le equazioni:

$$\frac{u_1}{x_1} = \cdots = \frac{u_{n-h+1}}{x_{n-h+1}}:$$

che sono le equazioni di un S'_h passante per S'_{h-1}.

Ad ogni punto x di S_{n-h} corrisponde dunque un S'_h passante per S'_{h-1}.

Osservando poi che $x_1 \dots x_{n-h+1}$ determinano colle (β) un punto di S_{n-h} e si possono quindi prendere come coordinate di un punto di S_{n-h}, ed osservando che $\left(\text{potendosi sempre le equazioni di un } S'_h \text{ qualunque passante per } S'_{h-1} \text{ mettere sotto la forma } \frac{u_1}{x_1} = \cdots = \frac{u_{n-h+1}}{x_{n-h+1}}\right)$ le $x_1 \dots x_{n-h+1}$ si possono anche prendere come coordinate di un S'_h passante per S'_{h-1}, si conclude che con questi sistemi di coordinate, le coordinate di un punto qualunque di S_{n-h}

sono identiche a quelle del S'_h corrispondente. I punti di S_{n-h} e gli S'_h corrispondenti sono dunque in relazione omografica.

Per cui riepilogando:

(1) *Esistono due spazi singolari di punti S'_{h-1} e S_{n-h} l'uno in S'_n l'altro in S_n; ad ogni punto di S'_{h-1} corrisponde un punto qualunque di S_n; ad ogni punto fuori di S'_{h-1} corrisponde un punto di S_{n-h}; e viceversa ad un punto di S_{n-h} corrisponde un S'_h passante per S'_{h-1}; i punti di S_{n-h} e gli S'_h corrispondenti sono in relazione omografica. Lo spazio S'_{h-1} è determinato dai secondi membri delle* [2] *eguagliati a zero.*

Correlativamente, ragionando sulla [1]'' ed invertendo in conseguenza le due figure ricaviamo:

(1)' *Esistono due spazi singolari di piani $\sum_{h-1}$ e $\sum'_{n-h}$ l'uno in S_n l'altro in S'_n; ad ogni piano di $\sum_{h-1}$ corrisponde un piano qualunque di S'_n, ad ogni piano fuori di $\sum_{h-1}$ corrisponde un piano di $\sum'_{n-h}$; e viceversa ad un piano di $\sum'_{n-h}$ corrisponde un $\sum_h$ contenente $\sum_{h-1}$; i piani di $\sum'_{n-h}$ e i $\sum_h$ corrispondenti sono in relazione omografica.*

(2) *Come S'_{h-1} è dato dai secondi membri delle* [2] *eguagliati a zero così $\sum_{h-1}$ è determinato dai secondi membri delle* [3] *eguagliati a zero. Il sostegno di $\sum_{h-1}$ è S_{n-h} e il sostegno di $\sum'_{n-h}$ è S'_{h-1}.*

Infatti moltiplicando le [2] rispettivamente per le coordinate $\xi_1 \ldots \xi_{n+1}$ di un piano di $\sum_{h-1}$ e addizionando nei secondi membri per colonne abbiamo:

$$x_1 \xi_1 + \cdots + x_{n+1} \xi_{n+1} = 0.$$

Analogamente si dimostra che S'_{h-1} è il sostegno di $\sum'_{n-h}$. Un'omografia degenere si riduce quindi ad una relazione omografica non degenere fra due spazi ad $n-h$ dimensioni, l'uno di punti, l'altro di S'_h passanti per S'_{h-1}.

§ 2.

Per scrivere le [2] basta conoscere $(n+1)(n+1)-1=n(n+2)$ coefficienti. Diamo questi teoremi:

(3) *Se fissiamo che ad $n+2$ punti di S'_n, i quali ad $n+1$ ad $n+1$ sono indipendenti* (*), *corrispondano rispettivamente $n+2$ punti di S_n, i quali*

(*) Dico che p spazi S', S'',... $S^{(p)}$ sono indipendenti quando S'' non sega S', S''' non sega lo spazio a cui appartengono S' ed S'', S'''' non sega lo spazio a cui appartengono S', S'', S''' ecc.

pure ad $n+1$ ad $n+1$ sono indipendenti, l'omografia fra i due spazi resta determinata e non è degenere.

(4) *Se fissiamo che ad $n+2$ punti di S'_n, i quali ad $n+1$ ad $n+1$ sono indipendenti, corrispondano: rispettivamente ai primi h ogni punto di S_n ed agli altri rispettivamente $n-h+2$ punti i quali ad $n-h+1$ ad $n-h+1$ sono indipendenti, ma che costituiscono un S_{n-h} di S_n, l'omografia fra i due spazi è determinata ed è degenere di caratteristica $n-h+1$.*

Dimostriamo quest'ultimo teorema che comprende l'altro come caso particolare quando $h=0$. Indichiamo con $\beta_1^{(r)} \dots \beta_{n+1}^{(r)}$ uno degli $n+2$ punti dati di S'_n, e con $\alpha_1^{(r)} \dots \alpha_{n+1}^{(r)}$ il suo corrispondente. Per determinare i coefficienti delle [2] abbiamo il sistema di equazioni:

$$\begin{aligned}
0 &= a_{1s}\,\beta'_1 \quad + \cdots + a_{n+1s}\,\beta'_{n+1} \\
&\dots\dots,\dots\dots\dots\dots\dots \\
0 &= a_{1s}\,\beta_1^{(h)} \quad + \cdots + a_{n+1s}\,\beta_{n+1}^{(h)} \\
\rho^{(h+1)}\,\alpha_s^{(h+1)} &= a_{1s}\,\beta_1^{(h+1)} + \cdots + a_{n+1s}\,\beta_{n+1}^{(h+1)} \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \qquad (s=1\dots n+1) \\
\rho^{(n+1)}\,\alpha_s^{(n+1)} &= a_{1s}\,\beta_1^{(n+1)} + \cdots + a_{n+1s}\,\beta_{n+1}^{n+1} \\
\rho^{(n+2)}\,\alpha_s^{(n+2)} &= a_{1s}\,\beta_1^{(n+2)} + \cdots + a_{n+1s}\,\beta_{n+1}^{(n+2)},
\end{aligned}$$

dove le ρ sono arbitrarie. Indichiamo con B il determinante delle β nelle prime $n+1$ equazioni, e con B_r^p il complemento algebrico del termine β_r^p. Siccome i punti $\beta' \dots \beta^{(n+1)}$ sono indipendenti, B è diverso da zero. Moltiplichiamo la prima equazione per $\frac{B'_r}{B}$ e la $(n+1)^{\text{esima}}$ per $\frac{B_r^{(n+1}}{B}$ ed addizioniamo. Si trova:

$$a_{rs} = \sum_{p=h+1}^{p=n+1} \rho^{(p)}\,\alpha_s^{(p)}\,\frac{B_r^{(p)}}{B}.$$

Per determinare a_{rs} restano da determinare ancora le ρ; per questo si sostituisca l'espressione di a_{rs} nella equazione $n+2^{\text{esima}}$ troviamo:

$$\rho^{(n+2)}\,\alpha_s^{(n+2)} = \sum_{r=1}^{r=n+1}\sum_{p=h+1}^{p=n+1} \rho^{(p)}\,\alpha_s^{(p)}\,\frac{B_r^{(p)}}{B}\,\beta_r^{(n+2)} \qquad (s=1\dots n+1),$$

ovvero:

$$\rho^{(n+2)}\,\alpha_s^{(n+2)} = \sum_{p=h+1}^{p=n+1} \rho^{(p)}\,\alpha_s^{(p)} \sum_{r=1}^{r=n+1} \beta_r^{(n+2)}\,\frac{B_r^{(p)}}{B}.$$

Poniamo:

$$\sum_{r=1}^{r=n+1} \beta_r^{(n+2)} \frac{B_r^{(p)}}{B} = B_p,$$

che è il determinante che si ottiene da B sostituendo in luogo della p^{esima} riga la riga $\beta_1^{(n+2)} \dots \beta_{n+1}^{(n+2)}$. I determinanti B_p sono tutti diversi da zero, perchè i punti β sono ad $n+1$ indipendenti.

L'ultima relazione diventa:

$$\rho^{(n+2)} \alpha_s^{(n+2)} = \sum_{p=h+1}^{p=n+1} \alpha_s^{(p)} B_p \rho^{(p)} \qquad (s = 1 \dots n+1).$$

Siccome poi i punti α sono in un S_{n-h} avremo:

$$\rho^{(n+2)} \alpha_s^{(n+2)} = \sum_{p=h+1}^{p=n+1} \lambda_p \alpha_s^{(p)},$$

dove le λ sono tutte diverse da zero, perchè gli $n-h+2$ punti α sono ad $n-h+1$ ad $n-h+1$ indipendenti. Confrontando le ultime due relazioni scritte troviamo:

$$\lambda_p = B_p \rho^{(p)};$$

per cui finalmente:

$$a_{rs} = \sum_{p=h+1}^{p=n+1} \frac{\lambda_p}{B_p} \alpha_s^{(p)} \frac{B_r^{(p)}}{B}.$$

Si vede subito che il determinante $|a_{rs}|$ è di caratteristica $n-h+1$.

La dimostrazione sarebbe riuscita più semplice supponendo che i punti $\beta' \dots \beta^{(n+1)}$ fossero i vertici della piramide di riferimento, il che non avrebbe tolto nulla alla generalità della dimostrazione.

§ 3.

Se i due spazi S_n ed S'_n sono indipendenti, il punto può essere di natura tutt'affatto diversa nei due spazi; perchè in sostanza abbiamo relazioni fra gruppi di $n+1$ parametri, i quali possono rappresentare in S_n un ente geometrico e in S'_n un altro ente geometrico; ma quando i due spazi sono sovrapposti, o il punto di S_n è della stessa natura del punto di S'_n, ovvero è della stessa natura del piano di S'_n; nel primo caso gli spazi si dicono più particolarmente omografici, nel secondo correlativi.

Noi qui studieremo il caso degli spazî omografici sovrapposti, che supporremo riferiti alla stessa piramide fondamentale.

Per trovare i punti uniti basterà porre nelle [2] $x = y$ e si avrà:

$$\left.\begin{array}{l} (a_{11} - r)x_1 + \cdots + a_{n+1\,1}\, x_{n+1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n+1}\, x_1 + \cdots + (a_{n+1\,n+1} - r)x_{n+1} = 0. \end{array}\right\} \qquad [4]$$

Queste relazioni coesistono quando:

$$D(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r \dots & a_{n+1\,1} \\ \dots & \dots \\ a_{1n+1} \dots & a_{n+1\,n+1} - r \end{vmatrix} = 0.$$

Questa equazione di grado $n + 1$ fornisce i valori di r che messi successivamente nelle [4] danno i punti uniti dell'omografia.

Sia r' una radice di $D(r) = 0$; r' renderà il determinante di caratteristica $n - h' + 1$ (dove h' può avere anche il valore uno); allora le $n + 1$ equazioni [4] si riducono ad $n - h' + 1$ indipendenti, e corrispondentemente ad esse abbiamo uno spazio $S_{h'-1}$ di punti uniti che diremo spazio fondamentale. Poichè r' rende il determinante di caratteristica $n - h' + 1$, sarà almeno radice semplice dei minori di ordine $n - h' + 2$, sarà almeno radice doppia dei minori di ordine $n - h' + 3$ (perchè la derivata rispetto ad r di un minore qualunque di ordine $n - h' + 3$ essendo una somma di minori di ordine $n - h' + 2$ si annulla per $r = r'$); e così sarà almeno radice tripla dei minori di ordine $n - h' + 4$ ecc., sarà almeno radice h'^{esima} del determinante $D(r)$ (*).

Alle altre radici $r'' \dots r^{(\sigma)}$ corrisponderanno rispettivamente gli spazi $S_{h''-1} \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$; e si avrà:

$$h' + h'' + \cdots + h^{(\sigma)} \leqq n + 1.$$

(5) Ora: *Tutti gli spazi fondamentali sono indipendenti, cioè appartengono ad un* $S_{h'+h''+\dots+h^{(\sigma)}-1}$ (**). Infatti se appartenessero ad uno spazio S_{m-1}

(*) Se è proprio radice h'^{esima}, lo spazio, per le ragioni che daremo appresso, lo diremo spazio fondamentale semplice.

(**) Questo teorema è del Segre. Veggasi il § 3 della Nota del prof. Bertini: *Costruzione delle omografie di uno spazio lineare qualunque*. Rend. R. Istituto Lombardo, Serie II, Vol. XX.

di dimensioni inferiori e fosse quindi:

$$h' + h'' + \cdots + h^{(\sigma)} > m + 1,$$

in S_{m-1} si avrebbe un'omografia subordinata alla data in cui gli spazi $S_{h'-1}\ldots$ $S_{h^\sigma-1}$ sarebbero fondamentali e si dovrebbe avere

$$h' + h'' + \cdots + h^{(\sigma)} \leq m + 1;$$

che contraddice l'ipotesi.

Queste considerazioni immaginando di ripeterle sulle [3] e considerando che il determinante

$$D(\rho) = \begin{vmatrix} a_{11} - \rho \ldots & a_{1n+1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{n+1\,1} \ldots & a_{n+1\,n+1} - \rho \end{vmatrix},$$

è identico a $D(r)$ con uno scambio delle colonne nelle righe, si ricava immediatamente che esistono σ spazi fondamentali di piani $\sum_{h'-1}$, $\sum_{h''-1}\ldots$ $\sum_{h^\sigma-1}$, tutti indipendenti, cioè appartenenti ad uno spazio $\sum_{h'+h''+\cdots+h^{(\sigma)}-1}$, e non ad uno spazio di dimensioni inferiori.

Due spazi come $S_{h'-1}$ e $\sum_{h'-1}$ corrispondenti alla stessa radice li diremo coniugati.

Vediamo quali altre relazioni legano due spazi coniugati.

Le coordinate del punto $z = x - r'y$, dove x e y sono punti corrispondenti, si possono scrivere per le [2] così:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= (a_{11} - r')y_1 + \cdots + a_{n+1\,1}\, y_{n+1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_{n+1} &= a_{1n+1}\, y_1 \quad + \cdots + (a_{n+1\,n+1} - r')y_{n+1}. \end{aligned}\right\} \qquad [5]$$

Fra i punti y e i punti z le [5] mostrano che esiste un'omografia degenere rappresentata correlativamente da:

$$\left.\begin{aligned} \eta_1 &= (a_{11} - r')\zeta_1 + \cdots + a_{1n+1}\, \zeta_{n+1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \eta_{n+1} &= a_{n+1\,1}\, \zeta_1 \quad + \cdots + (a_{n+1\,n+1} - r')\zeta_{n+1}. \end{aligned}\right\} \qquad [6]$$

Gli spazi singolari di quest'omografia si ottengono [veggasi il teorema (2)] eguagliando a zero i secondi membri delle [5] e [6]. Ma eguagliando a zero quei secondi membri si ottengono appunto gli spazi fondamentali coniugati

$S_{h'-1}$ e $\Sigma_{h'-1}$ (corrispondenti alla radice r') dell'omografia data; quindi intanto: Ad un punto qualunque y corrisponde un punto x nella omografia data ed un punto $z (z = x - r' y)$ allineato con x e y nella omografia degenere rappresentata dalle [5] e [6]; e gli spazi fondamentali $S_{h'-1}$ e $\Sigma_{h'-1}$ dell'omografia data, sono gli spazii singolari dell'omografia degenere. Allora siccome ad un $S'_{h'}$ di punti y passante per $S_{h'-1}$ corrisponde nell'omografia degenere un punto z del sostegno di $\Sigma_{h'-1}$ [teorema (1)] (*), e nell'omografia data un $S_{h'}$ passante per $S_{h'-1}$, i punti corrispondenti di $S'_{h'}$ e di $S_{h'}$ sono allineati con z, cioè:

(6) *Ad ogni $S'_{h'}$ passante per $S_{h'-1}$ corrisponde un $S_{h'}$ prospettivo, il centro z di prospettiva è situato nel sostegno $S_{n-h'}$ dello spazio $\Sigma_{h'-1}$ coniugato. Fra gli $S'_{h'}$ passanti per $S_{h'-1}$ e i punti z di $S_{n-h'}$ c'è una relazione omografica.* E ancora:

(7) *La retta che unisce due punti corrispondenti x e y taglia i sostegni di tutti gli spazii fondamentali di piani nei punti $x - r' y$, $x - r'' y, \ldots$ $x - r^{(\sigma)} y$.*

Immaginiamo l'$S_{h'}$ passante per $S_{h'-1}$ e per un punto qualunque z di un altro spazio fondamentale; in questo $S_{h'}$ resta determinata un'omografia subordinata, che è un'omologia di cui z è il centro. Il punto z deve giacere quindi in $S_{n-h'}$ cioè:

(8) *Il sostegno S_{n-h} di $\Sigma_{h'-1}$ contiene tutti gli spazii fondamentali di punti, meno il coniugato che può contenere o non contenere come vedremo.*

Sono ovvie le considerazioni correlative che si fanno ragionando sopra le [3] e le [6]. Bisogna però notare che nelle [3] e [6] sono scambiate le due figure.

Consideriamo la punteggiata:

$$x, \quad y, \quad x - r' y, \ldots \quad x - r^{(\sigma)} y,$$

e il fascio:

$$\eta, \quad \xi, \quad \eta - r' \xi, \ldots \quad \eta - r^{(\sigma)} \xi.$$

dove x e y sono due punti corrispondenti, e $x - r' y \ldots$ $x - r^{(\sigma)} y$, come abbiamo visto, i punti dove la loro congiungente taglia i sostegni degli spazii fondamentali di piani $\Sigma_{h'-1} \ldots$ $\Sigma_{h^{(\sigma)}-1}$; e correlativamente η e ξ due piani corrispondenti e $\eta - r' \xi, \ldots$ i piani che proiettano dalla loro intersezione gli spazii fondamentali di punti $S_{h'-1} \ldots$; si deduce subito:

(*) Il teorema (1) dice appunto che ad un $S'_{h'}$ corrisponde nell'omografia degenere un punto z di $S_{n-h'}$ che è poi per il teorema (2) il sostegno di $\Sigma_{h'-1}$.

(9) *Le punteggiate formate da due punti corrispondenti e dai punti dove la loro congiungente taglia i sostegni degli spazii fondamentali, sono omografiche fra loro e omografiche ai fasci formati da due piani corrispondenti (scambiate però le due figure) e dai piani che dalla loro intersezione proiettano gli spazii fondamentali di punti rispettivamente coniugati* (*).

§ 4.

Immaginiamo in un S_{n+k+1} un S_n ed un S_k. Proiettare da S_k i punti di S_n significa immaginare tutti gli S_{k+1} passanti per S_k e rispettivamente per i singoli punti di S_n. S_n lo chiameremo la sezione della stella di S_k. Se S_k sega S_n in un S_{h-1} l'operazione del proiettare o segare la diremo degenere. Chiameremo proiettivi due sistemi che si ottengono con un numero finito di operazioni; di cui al più una degenere; prospettivi nel caso particolare che le operazioni siano ridotte a due o ad una.

Supponiamo dapprima che S_k seghi S_n in un S_{h-1}. Prendiamo in S_{h-1} gli h vertici $(1\ 2 \ldots h)$ della piramide di riferimento di S_n, e prendiamo per elementi di riferimento $h+1 \ldots n+1$ e per elemento unità della stella di sostegno S_k, rispettivamente quegli S_{k+1} che proiettano da S_k i vertici $h+1 \ldots n+1$ e il punto unità della piramide di riferimento di S_n. La corrispondenza proiettiva fra la stella S_k e il sistema punteggiato S_n (indicando con $x_1 \ldots x_{n+1}$ le coordinate degli S_{k+1} della stella e con $y_1 \ldots y_{n+1}$ le coordinate dei punti di S_n) potrà essere rappresentata dalle relazioni:

$$r x_1 = 0 \ldots \qquad r x_h = 0, \qquad r x_{h+1} = y_{h+1} \ldots \qquad r x_{n+1} = y_{n+1}.$$

Le quali relazioni mostrano che fra la stella S_k e il sistema punteggiato S_n abbiamo una relazione omografica degenere di caratteristica $n - h + 1$.

Se S_k non sega S_n allora prendendo per elementi di riferimento $1 \ldots n+1$ e per elemento unità della stella S_k, rispettivamente quegli S_{k+1} che proiettano da S_k i vertici $1 \ldots n+1$ e il punto unità della piramide fondamentale di S_n, la corrispondenza proiettiva fra la stella S_k e il sistema punteggiato S_n potrà

(*) I teoremi (6) (7) (8) (9) la cui importanza per lo studio delle omografie è manifesta sono dovuti al SEGRE (veggasi SEGRE, Memoria citata, e SEGRE, *Gli spazii fondamentali di un'omografia.* R. Acc. dei Lincei, Vol. II, Serie IV), che li dimostrà separatamente con metodi meno semplici. Quì nascono tutti dalla considerazione dell'omografia degenere [5] [6].

essere rappresentata dalle relazioni:

$$r x_1 = y_1 \ldots \qquad r x_{n+1} = y_{n+1}.$$

Le quali mostrano che fra la stella S_k e il sistema punteggiato S_n esiste una relazione omografica non degenere. Si deduce subito che:

(10) *Due sistemi proiettivi sono omografici; e se fra le operazioni che servono a passare dall'uno all'altro, c'è un'operazione degenere, l'omografia è pure degenere.*

Ora passiamo al teorema inverso e premettiamo il lemma:

Date $n+1$ rette indipendenti cioè appartenenti ad un S_{2n+1}, per un punto qualunque di S_{2n+1}, passa uno ed un solo S_n che le incontra tutte (*).

Infatti siano $\alpha_1 \ldots \alpha_{n+1}$ le rette ed A il punto. Gli spazii

$$S'_{2n} = A\,\alpha_2\,\alpha_3 \ldots \alpha_{n+1}$$
$$S''_{2n} = A\,\alpha_1\,\alpha_3 \ldots \alpha_{n+1}$$
$$S^{(n+1)}_{2n} = A\,\alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_n,$$

hanno un S_n in comune che passa per A e incontra tutte le rette α; inoltre è il solo, perchè un S_n che passa per A e incontra le α deve appartenere necessariamente agli spazii S'_{2n}, $S''_{2n}, \ldots S^{(n+1)}_{2n}$, esso è quindi il loro spazio d'intersezione.

Ora dimostrerò che:

(11) *Due spazii di punti S_n ed S'_n omografici ed indipendenti sono prospettivi.*

Supponiamo dapprima che l'omografia non sia degenere.

Assunti $n+2$ punti di S_n che ad $n+1$ ad $n+1$ siano indipendenti, conduciamo le rette $\alpha_1 \ldots \alpha_{n+2}$ che li uniscono ai punti corrispondenti di S'_n. Per un punto di α_1 conduciamo l'S''_n che taglia $\alpha_2 \ldots \alpha_{n+2}$; proiettando da S''_n l'S'_n sopra S_n otteniamo i due spazii omografici dati [teorema (3)] (**).

Se i due spazii sono omografici degeneri, sia S'_{h-1} lo spazio singolare di S'_n e S_{n-h} quello singolare di S_n; ai punti di S'_{h-1} corrisponde un punto qualunque di S_n, e ad un punto di S_{n-h} corrisponde un S'_h passante per S'_{h-1}. Assunti $n-h+2$ punti di S_n che ad $n-h+1$ siano indipendenti, condu-

(*) Questo lemma è un caso particolare di un teorema dovuto al prof. BERTINI, Veggasi il § 1 della Nota citata

(**) S''_n non può tagliare S_n e nemmeno S'_n; perchè per esempio con S_n determina uno spazio che è anche determinato dalle rette α cioè un S_{2n+1}.

ciamo le rette $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-h+2}$ che li uniscono rispettivamente ad $n-h+2$ punti corrispondenti che godono della stessa proprietà, di essere cioè ad $n-h+1$ ad $n-h+1$ indipendenti. Per un punto di α_1 conduciamo l'S''_{n-h} che taglia $\alpha_2 \ldots \alpha_{n-h+2}$ (*). Proiettando dallo spazio S''_n, determinato da S'_{h-1} e S''_{n-h}, lo spazio S'_n sopra S_n, otteniamo i due spazii omografici dati [teorema (4)].

Se S_n ed S'_n non sono indipendenti, prendiamo un S''_n indipendente dall'uno e dall'altro e in relazione omografica non degenere con S_n; allora S_n ed S'_n essendo omografici ad S''_n sono altresì proiettivi ad S''_n, e quindi proiettivi fra di loro; anzi sono deducibili con due proiezioni e due sezioni di cui al più una degenere.

Prendendo in esame i due sistemi in relazione omografica degenere S_n ed S'_n, sezioni della stessa stella di sostegno S''_n poco più sopra considerati, si ricava il teorema (1) già dimostrato analiticamente. Ad ogni punto di S'_{h-1} corrisponde un punto qualunque di S_n; ad ogni punto fuori di S'_{h-1} corrisponde un punto di S_{n-h} che è la sezione dello spazio determinato da S''_n e S'_n collo spazio S_n; e viceversa ad un punto di S_{n-h} corrisponde un S'_h passante per S'_{h-1}; i punti di S_{n-h} e gli S'_h corrispondenti sono in relazione omografica, perchè il sistema dei punti di S_{n-h} e il sistema degli S'_h corrispondenti sono le sezioni della stessa stella di S''_{n+1} passanti per S''_n. Correlativamente, osservando che ad ogni piano di S_n passante per S_{n-h} corrisponde un piano qualunque di S'_n, e che ad ogni piano di S_n non passante per S_{n-h} corrisponde un piano determinato di S'_n passante per S'_{h-1}, si ricava il teorema correlativo. Per completare il teorema (11) enunciamo quest'altro:

(12) *Due spazii omografici non degeneri che hanno nel loro spazio di intersezione S_{h-1} uno spazio di tutti punti uniti sono prospettivi.*

Intanto due spazii S_h ed S'_h omografici che hanno nel loro spazio d'intersezione S_{h-1} uno spazio di tutti i punti uniti sono prospettivi; perchè una retta di S_h e la corrispondente di S'_h si tagliano in un punto di S_{h-1} e sono prospettive; se dal centro T di prospettiva proiettiamo S'_h sopra S_h otteniamo i due spazii omografici dati. Ora passiamo al caso generale. Assumiamo in S_n, $n-h+1$ S_h arbitrarii passanti per S_{h-1}, che saranno prospettivi ai loro corrispondenti di S'_n. Per gli $n-h+1$ centri di prospettiva conduciamo un S_{n-h}; proiettiamo da S_{n-h}, S'_n sopra S_n ed otterremo i due spazii omografici dati (**).

(*) S''_{n-h} non può tagliare nè S_n nè S'_n; perchè per es. con S_n determina uno spazio che è anche determinato da S_n e dalle rette α; cioè un S_{2n-h+1}.

(**) I teoremi (11) e (12) furono comunicati nell'ottobre del 1877 al SEGRE, il quale già li conosceva, non sono stati però ch'io sappia ancora pubblicati.

(13) *Ad ogni S_h passante per S_{h-1} corrisponde un S'_h prospettivo; il centro T di prospettiva giace in S_{n-h}; lo spazio ad $n-h$ dimensioni dei punti T e lo spazio ad $n-h$ dimensioni degli S_h passanti per S_{h-1} sono prospettivi, perchè sono le sezioni di una stessa stella di S_{n-1} di sostegno S'_n, l'uno con S_{n-h} l'altro con S_n.*

Adesso dimostreremo geometricamente i teoremi fondamentali dell'omografia (6), (7), (8).

Supponiamo che gli spazii omografici dati S_n ed S'_n siano sovrapposti ed abbiano un S_{h-1} fondamentale; prendiamo $n-h+2$ punti arbitrarii di S_n: A, B, C,... e gli $n-h+2$ corrispondenti di S'_n A', B', C',...; e supponiamo che al variare di un parametro t i punti A', B', C'..., determinando sempre con S_{h-1} uno spazio ad n dimensioni, escano da S'_n descrivendo linee arbitrarie in un S_{2n-h+1} passante per S_n. Le successive posizioni di questo spazio ad n dimensioni si possono considerare come successive posizioni dello spazio S'_n. Tutti gli altri punti di S'_n supporremo che si muovano in modo che il sistema S'_n nelle sue diverse posizioni sia sempre omografico ad S_n, essendo S_{h-1} uno spazio di tutti punti uniti e AA', BB', CC',... punti corrispondenti. Immaginiamo di rimettere a posto il sistema S'_n facendo descrivere ai suoi punti le stesse linee descritte prima; in ogni sua posizione, per quanto prossima alla iniziale, S'_n sarà con S_n la sezione di una stessa stella che avrà per sostegno uno spazio S_{n-h} (12); ad ogni S_h passante per S_{h-1} di S_n corrisponderà in S'_n un S'_h prospettivo secondo un punto T situato in S_{n-h}, e fra i punti T e gli S_h passanti per S_{h-1} esisterà una relazione omografica (13). Al limite S_{n-h} cadrà nello spazio S_n; e poichè fuori del limite ogni S_{2n-h} della stella di sostegno S_{n-h} taglia S_n ed S'_n in due piani corrispondenti, al limite ogni piano passante per S_{n-h} sarà un piano unito; tutti questi piani costituiscono un $\sum_{h-1}$; onde concludiamo:

Dati due spazii omografici sovrapposti se esiste un S_{h-1} fondamentale di punti esiste anche un $\sum_{h-1}$ fondamentale di piani di sostegno S_{n-h}. Ad ogni S_h passante per S_{h-1} corrisponde un S'_h prospettivo; il centro T di prospettiva è situato nel sostegno di $\sum_{h-1}$; gli S_h passanti per S_{h-1} e i punti T di S_{n-h} sono in relazione omografica ecc. E correlativamente.

Questa dimostrazione dà, mi pare, la *ragione geometrica* di questi teoremi e ravvicina un'omografia qualunque ad un'omologia.

Diamo di questi teoremi un'altra dimostrazione geometrica.

Abbiansi due spazii omografici sovrapposti S_n ed S'_n con un S_{h-1} fondamentale. Facciamo passare per S_{h-1} un S''_n arbitrario, determinante quindi con S_n uno spazio S_{2n-h+1}. Prendiamo $n-h+2$ punti di S_n (A, B, C,...) fuori di S_{h-1}, che ad $n-h+1$ siano indipendenti, e i loro corrispondenti A', B', C'... in S'_n; e prendiamo ancora $n-h+2$ punti di S''_n (A'', B'', C'',...) pure ad $n-h+1$ indipendenti. Poniamo fra S''_n ed S_n una corrispondenza omografica in modo che S_{h-1} sia uno spazio di tutti punti uniti ed AA'', BB''... coppie di punti corrispondenti; e così poniamo fra S'_n ed S''_n una corrispondenza omografica in modo che S_{h-1} sia uno spazio di tutti punti uniti ed $A'A''$, $B'B''$,... coppie di punti corrispondenti. Allora S_n ed S'_n sono prospettivi secondo un S'_{n-h} (12) ed S'_n ed S''_n prospettivi secondo un S''_{n-h}. Due punti corrispondenti di S_n ed S'_n si ottengono proiettando rispettivamente da S'_{n-h} ed S''_{n-h} uno stesso punto di S''_n; ovvero due punti di S_n ed S'_n sono corrispondenti quando si possono condurre due rette che si tagliano in S''_n e incontrino rispettivamente S'_{n-h} ed S''_{n-h}. In questo modo i due spazii omografici dati si possono ottenere l'uno dall'altro con due proiezioni e due sezioni. Tenendo presente questa generazione dei due spazii omografici dati, le cose che diremo più sotto restano evidenti.

I due spazii S'_{n-h} ed S''_{n-h} non si segano; ed infatti supponiamo che abbiano un S_p in comune; lo spazio $S''_{p+n+1}=(S_p,\ S''_n)$ sega S_n in un S_{p+h} passante per S_{h-1} (perchè S_{h-1} giace in S_n ed S''_n e quindi in S_n ed S''_{p+n+1}); questo spazio S_{p+h} sarebbe uno spazio di tutti punti uniti, contrariamente all'ipotesi che S_{h-1} sia fondamentale.

Lo spazio $S_{2n-2h+1}=(S'_{n-h},\ S''_{n-h})$ sega S_n in un S_{n-h} unito che è il sostegno di uno spazio $\sum_{h-1}$ di tutti piani uniti.

Dall'esame della figura risulta ancora che ad un S_h di S_n passante per S_{h-1}, corrisponde un S'_h di S'_n ed un S''_h di S''_n passante per S_{h-1}. S_h ed S''_h sono prospettivi secondo un punto T' di S'_{n-h}; S'_h ed S''_h prospettivi secondo un punto T'' di S''_{n-h}. La $T'T''$ taglia S_{n-h} in un punto T che è il centro di prospettiva di S_h ed S'_h. Ad ogni S_h passante per S_{h-1} viene a corrispondere quindi un punto T di S_{n-h}. Se si proietta da S''_n il punto T' e poi si sega con S_n si ottiene S_h, e se si proietta da S''_{n-h} lo stesso punto T' e si sega con S_{n-h} si ottiene il punto T; quindi lo spazio degli S_h passanti per S_{h-1} e lo spazio S_{n-h} dei rispettivi centri T di prospettiva, sono prospettivi allo spazio S'_{n-h} dei punti T', rispettivamente da S''_n e S''_{n-h}. Si deducono subito i teoremi (6) (7) e (8).

§ 5.

Ora studierò più da vicino questi spazii fondamentali di punti. Sia a radice λ^{esima} di $D(r)$; essa renderà il determinante di caratteristica $l+1$ e si avrà corrispondentemente uno spazio fondamentale di punti S_{h-1} $(l+h=n)$ a cui sarà coniugato un Σ_{h-1} di sostegno S_l (*).

Prendiamo i vertici $1\ 2 \ldots l+1$ della piramide fondamentale in S_l; ogni piano passante per S_l avrà le coordinate $\xi_1 \ldots \xi_{l+1}$ eguali a zero, ed essendo un piano unito (**), le [3] dovranno necessariamente ridursi alla forma:

$$\begin{aligned}
r\eta_1 &= a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{1\,l+1}\xi_{l+1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
r\eta_{l+1} &= a_{l+1\,1}\xi_1 + \cdots + a_{l+1\,l+1}\xi_{l+1} \\
r\eta_{l+2} &= a_{l+2\,1}\xi_1 + \cdots + a_{l+2\,l+1}\xi_{l+1} + a\xi_{l+2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (***) \\
r\eta_{n+1} &= a_{n+1\,1}\xi_1 + \cdots + a_{n+1\,l+1}\xi_{l+1} \cdots + a\xi_{n+1}.
\end{aligned}$$

Il determinante $D(r)$ diventa dunque:

$$D(r) = \begin{vmatrix}
a_{11} - r \ldots & a_{l+1\,1} & a_{l+2\,1} \ldots & a_{n+1\,1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1\,l+1} & a_{l+1\,l+1} - r & a_{l+2\,l+1} \ldots & a_{n+1\,l+1} \\
0 \ldots & 0 & a - r \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 \ldots & 0 & 0 & a - r
\end{vmatrix} = (a-r)D'(r),$$

dove $D'(r)$ è il determinante formato dalle prime $l+1$ righe e colonne. Il punto corrispondente di un punto qualunque y di S_l è dato dalle relazioni:

$$\begin{aligned}
rx_1 &= a_{11}y_1 + \cdots + a_{l+1\,1}y_{l+1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
rx_{l+1} &= a_{1\,l+1}y_1 + \cdots + a_{l+1\,l+1}y_{l+1};
\end{aligned}$$

le quali rappresentano l'omografia subordinata in S_l.

(*) L'analisi che faremo sta anche se $a=0$; l'omografia è allora degenere e corrispondentemente alla radice $a=0$ abbiamo uno spazio fondamentale singolare S_{h-1} a cui è coniugato un Σ_{h-1} di sostegno S_l.

(**) Se l'omografia è degenere, esso è un piano unito perchè gli corrisponde un piano qualunque e quindi anche sè stesso.

(***) Questo artificio per semplificare le relazioni omografiche è adoperato dal Segre: pag. 16 della Memoria citata: *Sulla classificazione delle omografie.*

Per cercare gli elementi uniti bisogna ricorrere al determinante $D'(r)$.

Essendo a radice λ^{esima} di $D(r)$, sarà radice $\lambda - h^{esima}$ di $D'(r)$ e renderà $D'(r)$ di caratteristica $p+1$. Corrispondentemente si avrà uno spazio (singolare se l'omografia è degenere) fondamentale di punti S_{k-1} $(p+k=l)$, al quale sarà coniugato uno spazio fondamentale di piani (piani di S_l) $\sum_{k-1}$ di sostegno S_p; scegliendo i vertici $1 \ldots p+1$ della piramide di riferimento in S_p, il determinante $D'(r)$, per le ragioni più sopra esposte riguardo a $D(r)$ diventa:

$$D'(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r \ldots & a_{p+1\,1} & a_{p+2\,1} \ldots & a_{l+1\,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1\,p+1} \ldots & a_{p+1\,p+1} - r & a_{p+2\,p+1} \ldots & a_{l+1\,p+1} \\ 0 \ldots & 0 & a - r \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \ldots & 0 & 0 \ldots & a - r \end{vmatrix} = (a-r)^k D''(r),$$

e l'omografia in S_p è data dalle relazioni:

$$\begin{aligned} r x_1 &= a_{11} y_1 + \cdots + a_{p+1\,1} y_{p+1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r x_{p+1} &= a_{1\,p+1} y_1 + \cdots + a_{p+1\,p+1} y_{p+1}, \end{aligned}$$

e il determinante che dà gli elementi uniti di questa omografia è $D''(r)$.

E così continuando, a sarà radice $(\lambda - h - k)^{esima}$ di $D''(r)$ e renderà il determinante $D''(r)$ di caratteristica $q+1$; corrispondentemente vi sarà uno spazio fondamentale (singolare se $a=0$) S_{m-1} $(m+q=p)$ al quale sarà coniugato un $\sum_{m-1}$ di sostegno S_q; scegliendo i vertici $1 \ldots q+1$ della piramide fondamentale in S_q, $D''(r)$ diventa:

$$D''(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r \ldots & a_{q+1\,1} & a_{q+2\,1} \ldots & a_{p+1\,1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1\,q+1} \ldots & a_{q+1\,q+1} - r & a_{q+2\,q+1} \ldots & a_{p+1\,q+1} \\ 0 \ldots & 0 & a - r \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 \ldots & 0 & 0 \ldots & 0 \end{vmatrix} = (a-r)^m D'''(r),$$

dove $D'''(r)$ è il determinante che dà gli elementi uniti della omografia in S_q. Così proseguiremo finchè $\lambda - h - k - m -$ ecc. si ridurrà a zero.

Se $\lambda - h = 0$ lo spazio S_{h-1} lo chiameremo spazio fondamentale semplice. Noi supporremo $\lambda - h - k - m = 0$ cioè supporremo che a non sia radice di $D''(r)$; nulla toglieremo per questo alla generalità del ragionamento.

Possiamo intanto concludere, se $a = 0$ cioè se l'omografia è degenere, che abbiamo uno spazio singolare S_{h-1} a cui è coniugato un $\sum_{h-1}$ di sostegno S_l; in cui abbiamo un'omografia degenere, con uno spazio singolare S_{k-1} (contenuto in S_{h-1} come vedremo) a cui è coniugato uno spazio di piani (piani di S_l) di sostegno S_p; nel quale abbiamo ancora un'omografia degenere con uno spazio singolare S_{m-1} a cui è coniugato uno spazio di piani (piani di S_p) di sostegno S_q; nel quale abbiamo un'omografia non degenere i cui spazii fondamentali sono dati da $D'''(r)$.

Tornando al caso generale, vediamo che scelti i vertici della piramide di riferimento come abbiamo detto, il determinante $D(r)$ si riduce alla forma:

$$D(r) = \begin{vmatrix}
a_{11} - r \ldots & a_{q+1\,1} & a_{q+2\,1} \ldots & a_{p+1\,1} & a_{p+2\,1} \ldots & a_{l+1\,1} & a_{l+2\,1} \ldots & a_{n+1\,1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
a_{1\,q+1} \ldots & a_{q+1\,q+1} - r & a_{q+2\,q+1} \ldots & a_{p+1\,q+1} & a_{p+2\,q+1} \ldots & a_{l+1\,q+1} & a_{l+2\,q+1} \ldots & a_{n+1\,q+1} \\
0 \ldots & 0 & a - r \ldots & 0 & a_{p+2\,q+2} \ldots & a_{l+1\,q+2} & a_{l+2\,q+2} \ldots & a_{n+1\,q+2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 \ldots & 0 & 0 \ldots & a - r & a_{p+2\,p+1} \ldots & a_{l+1\,p+1} & a_{l+2\,p+1} \ldots & a_{n+1\,p+1} \\
0 \ldots & 0 & 0 \ldots & 0 & a - r \ldots & 0 & a_{l+2\,p+2} \ldots & a_{n+1\,p+2} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 \ldots & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \ldots & a - r & a_{l+2\,p+1} \ldots & a_{n+1\,l+1} \\
0 \ldots & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \ldots & 0 & a - r \ldots & 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
0 \ldots & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 \ldots & a - r
\end{vmatrix}.$$

E questo era il nostro scopo, di semplificare cioè le relazioni omografiche.

Consideriamo l'omografia il cui $D(r)$ è:

$$
(\alpha)\qquad
\left|\begin{array}{cccccccc}
a_{11}-r & a_{q+1\,1} & a_{q+2\,1} & a_{p+1\,1} & a_{p+2\,1} & a_{l+1\,1} & a_{l+2\,1} & a_{n+1\,1} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{1q+1} & a_{q+1\,q+1}-r & a_{q+2\,q+1} & a_{p+1\,q+1} & a_{p+2\,q+1} & a_{l+1\,q+1} & a_{l+2\,q+1} & a_{n+1\,q+1} \\
0 & 0 & a''-r & 0 & a_{p+2\,q+2} & a_{l+1\,q+2} & a_{l+2\,q+2} & a_{n+1\,q+2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & a''-r & a_{p+2\,p+1} & a_{l+1\,p+1} & a_{l+2\,p+1} & a_{n+1\,p+1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & a'-r & 0 & a_{l+2\,p+2} & a_{n+1\,p+2} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a'-r & a_{l+2\,l+1} & a_{n+1\,l+1} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-r & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a-r
\end{array}\right| ,
$$

che non differisce dal primo se non in alcune delle a che furono cambiate in a'' ed a'.

In questa omografia in luogo dello spazio fondamentale S_{h-1} abbiamo tre spazii fondamentali semplici S_{h-1}, S_{k-1}, S_{m-1} corrispondenti rispettivamente alle radici a, a', a''. Ed infatti si vede subito che ponendo $r=a$ il determinante si riduce di caratteristica $n-h+1$, ponendo $r=a'$ di caratteristica $n-k+1$ e ponendo $r=a''$ di caratteristica $n-m+1$. Facendo tendere a'' ad a' ed a' ad a questa seconda omografia tende alla data, e i tre spazii semplici vengono a sovrapporsi costituendo lo spazio fondamentale unico S_{h-1} (*). È ovvio che questi spazii semplici S_{k-1} e S_{m-1}, i quali vengono a sovrapporsi

---

(*) Per uno spazio fondamentale semplice $S_{h'-1}$ la radice di $D(r)=0$ a cui esso corrisponde è radice h'^{esima} di $D(r)$, $h'-1^{\text{esima}}$ di tutti i minori d'ordine n di $D(r)$, $h'-2^{\text{esima}}$ di tutti quelli di ordine $n-1$ ecc., è radice semplice dei minori di ordine $n-h'+2$. Un'omografia che ha tutti i suoi spazii fondamentali semplici (omografia generale) si studia assai facilmente, per questa ragione principale che tutti gli spazii fondamentali $S_{h'-1}\ldots S_{h^{(\sigma)}-1}$ essendo $h'+h''+\cdots+h^{(\sigma)}=n+1$ appartengono e determinano tutto S_n (5); e il sostegno dello spazio coniugato di uno spazio fondamentale qualunque $S_{h'-1}$, oltre contenere tutti gli altri spazii fondamentali (8) $S_{h''-1}\ldots S_{h^{(\sigma)}-1}$, è da essi determinato.

ad S_{h-1}, si identificano al limite con quegli spazii S_{k-1} e S_{m-1} dell'omografia data che furono già trovati analiticamente (*).

(14) *Ogni spazio fondamentale che non è semplice si può considerare come il limite di un gruppo di spazii fondamentali semplici che vengono a sovrapporsi;* lo chiameremo *spazio fondamentale multiplo.*

Come abbiamo operato sopra $D(r)$ immaginiamo di operare sopra $D''(r)$ per rispetto successivamente alle altre radici; verremo così a considerare un'omografia in cui tutti gli spazii fondamentali sono semplici. Ricaviamo immediatamente:

(15) *Ogni omografia con spazii fondamentali multipli si può considerare come il limite di un'omografia a spazii fondamentali semplici.*

Vale a dire possiamo sempre scrivere le equazioni di una certa omografia a spazii fondamentali semplici, e poi immaginare che i coefficienti di questa omografia variino in modo da dare successivamente omografie che, essendo sempre a spazii fondamentali semplici, si accostano però indefinitamente all'omografia a spazii multipli data.

In virtù di questo teorema possiamo ricondurre lo studio delle omografie a spazii fondamentali multipli allo studio delle omografie a spazii semplici, potendosi sempre pensare un'omografia a spazii fondamentali multipli come un'omografia a spazii semplici, alcuni dei quali sono infinitamente vicini.

Il (15) permette di dare ad alcuni teoremi una forma più determinata; per es. si può dire:

(16) *In un'omografia qualunque esistono* σ *spazii fondamentali di punti* $S_{h'-1} \dots S_{h^{(\sigma)}-1}$, *e* σ *spazii fondamentali di piani* $\sum_{h'-1} \dots \sum_{h^{(\sigma)}-1}$, *reali o immaginarii, tutti distinti o a gruppi sovrapposti singolari o no, ed è*

$$h' + \cdots + h^{(\sigma)} = n + 1.$$

Altri teoremi diventano evidenti, per es. quello dovuto al SEGRE (veggasi nota, in fin di pagina) che lo spazio S_{h-1} sega il sostegno S_t dello spazio coniugato in S_{k-1} che sega alla sua volta S_p in S_{m-1} ecc.

Dipendendo poi due spazii coniugati come $S_{h'-1}$ e $\sum_{h'-1}$ dalla stessa radice,

---

(*) È $h \geqq k \geqq m$; perchè se fosse $h < k$ la radice a renderebbe il determinante $D(r)$ di caratteristica $n - k + 1$, contrariamente all'ipotesi che a renda il determinante di caratteristica $n - h + 1$. Facendo tendere a'' ad a' S_{m-1} cade in S_{k-1}, e poi S_{k-1} insieme ad S_{m-1} in S_{h-1}; cioè nell'omografia data S_{h-1} contiene S_{k-1}, che contiene S_{m-1}; e quindi S_{h-1} sega S_t in S_{k-1}, e S_{k-1} sega S_p in S_{m-1}; teorema dovuto al SEGRE: *Teoria e classificazione delle omografie.*

se alcuni spazii fondamentali di punti vengono a sovrapporsi, vengono pure a sovrapporsi i coniugati spazii di piani e quindi anche i loro sostegni.

Ogni retta che unisce due punti corrispondenti x e y, taglia i sostegni dei σ spazii fondamentali di piani in σ punti, di cui alcuni possono essere coincidenti; la punteggiata:

$$x, \quad y, \quad x - r' y, \ldots \quad x - r^{(\sigma)} y,$$

formata da questi punti, è omografica a tutte le analoghe che si ottengono facendo variare i due punti corrispondenti; perchè è omografica alla serie dei parametri

$$0, \quad \infty, \quad r', \ldots \quad r^{(\sigma)}.$$

I $(\sigma - 1)$ rapporti anarmonici,

$$\frac{r''}{r'}, \ldots \quad \frac{r^{(\sigma)}}{r'},$$

che si possono formare con quei $\sigma + 2$ numeri (dove r' è scelto fra le radici diverse da zero) sono invarianti assoluti dell'omografia. Alcuni di quei rapporti anarmonici possono essere eguali fra di loro o all'unità, o anche uguali a zero, quando ci sono spazii singolari (*); giova però considerarli come $\sigma - 1$ invarianti distinti; cioè rappresentanti proprietà proiettive distinte; perchè il fatto dell'essere eguali tra loro o all'unità rappresenta l'esistenza degli spazii multipli, e il fatto dell'essere uguali a zero rappresenta l'esistenza degli spazii singolari.

Ma veniamo ad una classificazione delle omografie.

Due omografie che hanno lo stesso numero di spazii fondamentali rispettivamente collo stesso numero di dimensioni, siano questi spazii reali o immaginarii, distinti o a gruppi sovrapposti singolari o no, diremo che appartengono alla stessa *classe.*

Due omografie appartenenti alla stessa classe hanno lo stesso numero di invarianti assoluti i quali si corrispondono uno ad uno.

Due omografie che appartengono alla stessa classe diremo che appartengono anche alla stessa *sottoclasse,* quando gli invarianti assoluti corrispondenti nelle due omografie sono eguali.

Se uno spazio è multiplo o singolare per l'una, il suo corrispondente è multiplo o singolare anche per l'altra.

(*) Naturalmente se ci sono spazii singolari, non possono essere che sovrapposti, perchè corrispondono alla stessa radice zero.

Come si vede per la distinzione in sottoclassi non si tien conto della posizione rispettiva degli spazii fondamentali fra di loro e per riguardo ad una coppia di punti corrispondenti; di questo si tien conto per la distinzione in sottoclassi.

Fra le sottoclassi di una stessa classe sono maggiormente degne di studio quelle che hanno spazii multipli; e devono essere studiate a parte quelle che hanno uno spazio singolare multiplo o no.

Dimostreremo in seguito che due omografie appartenenti alla stessa sottoclasse sono identiche a meno di una trasformazione di coordinate, cioè sono identiche dal punto di vista proiettivo.

Uno spazio fondamentale multiplo formato dagli spazii fondamentali $S_{h_1-1} \dots S_{h_p-1}$ che vengono a sovrapporsi lo indicheremo con $(h_1-1, \dots h_p-1)$, e se è singolare con $(\overline{h_1-1, \dots h_p-1})$, che chiameremo *gruppo caratteristico* relativo a quello spazio.

L'unione dei gruppi caratteristici relativi agli spazii di un'omografia chiameremo *caratteristica dell'omografia.*

La somma dei numeri costituenti la caratteristica aumentati di un'unità è eguale ad $n+1$.

L'analisi fatta a pag. 130 e 131 dimostra che a qualunque caratteristica corrisponde un'omografia.

Il prof. Bertini nella Nota citata ha mostrato geometricamente che si può sempre costruire un'omografia corrispondente a qualunque caratteristica. E noi lo mostreremo nel § 9.

Caratteristiche delle omografie.

Nella retta:

Classe unica: $[0\,0]$, $[\bar{0}\,0]$, $[(0\,0)]$.

Nel piano:

Classe 1.ª $[0\,0\,0]$, $[\bar{0}\,0\,0]$; $[(0\,0)\,0]$, $[\overline{(0\,0)}\,0]$, $[(0\,0)\,\bar{0}]$, $[(0\,0\,0)]$, $[\overline{(0\,0\,0)}]$;

Classe 2.ª $[1\,0]$, $[\bar{1}\,0]$, $[1\,\bar{0}]$; $[(1\,0)]$, $[\overline{(1\,0)}]$.

Nello spazio ordinario:

Classe 1.ª $[0\,0\,0\,0]$, $[\bar{0}\,0\,0\,0]$; $[(0\,0)\,0\,0]$, $[\overline{(0\,0)}\,0\,0]$, $[(0\,0)\,\bar{0}\,0]$; $[(0\,0)\,(0\,0)]$ $[\overline{(0\,0)}\,(0\,0)]$; $[(0\,0\,0)\,0]$, $[\overline{(0\,0\,0)}\,0]$, $[(0\,0\,0)\,\bar{0}]$; $[(0\,0\,0\,0)]$, $[\overline{(0\,0\,0\,0)}]$.

Classe 2.ª $[1\,0\,0]$, $[\bar{1}\,0\,0]$, $[1\,\bar{0}\,0]$; $[(1\,0)\,0]$, $[\overline{(1\,0)}\,0]$, $[(1\,0)\,\bar{0}]$;

$[1\,(0\,0)]$, $[\bar{1}\,(0\,0)]$, $[1\,\overline{(0\,0)}]$, $[1\,(0\,0)]$, $[(\overline{1\,0\,0})]$;

Classe 3.ª $[1\,1]$, $[\bar{1}\,1]$, $[(1\,1)]$, $[(\overline{1\,1})]$;

Classe 4.ª $[2\,0]$, $[\bar{2}\,0]$, $[2\,\bar{0}]$, $[(2\,0)]$, $[\overline{(2\,0)}]$.

Queste notazioni mi pare che riescano assai comode, perchè dànno subito una idea della natura della omografia; e del come sono disposti gli spazii uniti, senza bisogno di calcoli. La notazione per es. $[\bar{1}\,(0\,0)]$ rappresenta l'omografia che ha un raggio fondamentale singolare e una coppia di punti uniti coincidenti.

Concependo uno spazio multiplo come il complesso di spazii fondamentali semplici infinitamente vicini e sempre indipendenti si vengono a considerare degli spazii fondamentali che nel § 3 non si erano ancora presentati. Ed invero se per esempio ad una radice corrisponde lo spazio multiplo $(h_1 - 1, h_2 - 1 \ldots h_r - 1 \ldots h_p - 1)$ $h_1 \geqq h_2 \geqq \cdots \geqq h_p$, nel § 3 non si sarebbe presentato che lo spazio S_{h_1-1}. Prima di finire questo studio sugli spazii multipli vogliamo vedere come si modifica il teorema (6) colla considerazione degli altri spazii $S_{h_2-1} \ldots S_{h_r-1} \ldots S_{h_p-1}$. Siccome a tutti gli S_{h_r} passanti per S_{h_r-1} e giacenti in uno stesso S_{h_1} passante per S_{h_1-1}, corrispondono rispettivamente degli S'_{h_r} prospettivi secondo uno stesso punto T di S_{n-h_1}, sostegno dello spazio coniugato di S_{h_1-1}, e siccome S_{n-h_1} è contenuto in S_{n-h_r}, sostegno dello spazio coniugato di S_{h_r-1}, concludiamo:

(6)' *Ad ogni S_{h_r} passante per S_{h_r-1}, corrisponde un S'_{h_r} prospettivo secondo un punto T di S_{n-h_r}. La stella degli S_{h_r} e i punti T sono in corrispondenza omografica degenere. Lo spazio singolare della stella di S_{h_r} è lo spazio ad $h_1 - h_r - 1$ dimensioni di S_{h_r} giacenti in S_{h_1-1}; e il sostegno dello spazio singolare in S_{n-h_r} è S_{n-h_1}.* E correlativamente.

§ 6.

Come applicazione del teorema (15) dimostriamo che due omografie appartenenti alla stessa sottoclasse sono proiettive. E cominciamo a dimostrare che:

(17) *Se di un'omografia generale, sono dati gli spazii fondamentali e gli invarianti assoluti la corrispondenza è determinata.*

Infatti siano $S_{h_1-1} \ldots S_{h_\tau-1}$ gli spazii fondamentali.

Fissiamo $n+1$ punti in S_n di cui h_1 in S_{h_1-1}, h_2 in S_{h_2-1} ecc. h_σ in $S_{h_\sigma-1}$. Per trovare il corrispondente di un punto M, dallo spazio determinato da quegli $n+1$ punti esclusi due appartenenti a spazii fondamentali diversi, proiettiamo rispettivamente questi due punti e il punto M; otterremo tre piani; ed al piano che proietta il punto M dovrà corrispondere un piano formante coi tre un rapporto anarmonico dato [che è un invariante dell'omografia (6)], cioè un piano determinato.

Escludendo altri due punti e proiettando dai rimanenti $n-1$ rispettivamente i due punti esclusi e il punto M ecc. e ripetendo l'operazione convenientemente $n+1$ volte, otterremo $n+1$ piani nei quali deve trovarsi il punto M', il quale resta così completamente determinato (*).

Il teorema dimostrato si può esprimere anche così:

Due omografie generali aventi gli stessi spazii fondamentali, se hanno anche gli stessi invarianti assoluti coincidono. Ovvero: *Due omografie generali appartenenti alla stessa sottoclasse sono projettive; e in questa proiettività una coppia di punti corrispondenti resta completamente arbitraria; perchè basta passare dagli spazii fondamentali dell'una agli spazii fondamentali dell'altra.*

Ora passiamo al caso di due omografie qualunque non degeneri appartenenti alla stessa sottoclasse, l'una nello spazio S_n l'altra nello spazio S'_n che supporremo indipendenti.

Ripetiamo nell'una e nell'altra l'analisi fatta a pag. 130 131 mettendo in luogo delle a ecc. le stesse a' ed a'' ecc.; otterremo due omografie generali appartenenti alla stessa sottoclasse; le quali saranno proiettive, anzi prospettive secondo un certo S''_n, ed è arbitraria in questa proiettività una coppia di punti corrispondenti AA'. Ora immaginiamo che nell'una e nell'altra omografia a' tenda ad a, allora lo spazio fondamentale S_{k-1} (**) corrispondente alla radice a' tenderà a cadere con legge determinata nell'una e nell'altra omografia nello spazio S_{h-1}, corrispondente alla radice a; S''_n varierà tendendo a prendere una posizione determinata, e le due omografie sono sempre prospettive e lo saranno anche al limite. Così immaginando che a'' tenda ad a ecc. concludiamo che le due omografie date sono prospettive secondo un S''_n; ed una

(*) Il procedimento si può abbreviare (quando $h_1-1 \ldots h_\sigma-1$ non sono tutti nulli) osservando che la retta MM' deve incontrare tutti i sostegni degli spazii coniugati di $S_{h_1-1} \ldots$, $S_{h_\sigma-1}$, che sono poi gli spazii $S_{n-h_1} \ldots S_{n-h_\sigma}$ determinati da tutti gli spazii fondamentali, meno rispettivamente $S_{h_1-1} \ldots S_{h_\sigma-1}$. Cioè M' deve trovarsi nel S_{n-h_1+1} determinato da M e S_{n-h_1}, nel S_{n-h_2+1} determinato da M e S_{n-h_2} ecc., e quindi nel loro spazio comune che è un $S_{\sigma-1}$.

(**) Adopero le stesse notazioni adoperate a pag. 130 e 131.

coppia di punti corrispondenti resta fissata arbitrariamente. Ma si vede che l'arbitrarietà non è limitata alla coppia di punti AA'; poichè ridotte le due omografie date a due omografie generali, basta passare dagli spazii fondamentali dell'una agli spazii fondamentali dell'altra, e quindi fissati nella prima omografia h_1 punti in S_{h_1-1}, ecc., h_σ in $S_{h_\sigma-1}$ dove $S_{h_1-1} \dots S_{h_\sigma-1}$ sono gli spazii fondamentali di questa omografia, per passare dall'una omografia all'altra basta scegliere i corrispondenti in S'_n in modo che h_1 siano in S'_{h_1-1}, ecc., h_σ in $S'_{h_\sigma-1}$, dove S'_{h_1-1} ecc. $S'_{h_\sigma-1}$ sono gli spazii fondamentali della seconda. Passando al limite questa arbitrarietà si deve necessariamente sentire; ma di questo faremo un'analisi rigorosa nel § 9.

Il teorema inverso che due omografie dedotte con un numero finito di operazioni appartengono alla stessa sottoclasse è evidente; perchè le due omografie avranno lo stesso numero di spazii fondamentali rispettivamente collo stesso numero di dimensioni e gli stessi invarianti assoluti.

I determinanti $D(r)$ e $D(\rho)$, pag. 120 e 121, essendo identici con uno scambio delle colonne nelle righe, la corrispondenza omografica fra i punti della prima figura e i punti della seconda, è identica alla corrispondenza omografica fra i piani della seconda figura e i piani della prima, a meno di una trasformazione delle x nelle η e della stessa trasformazione delle y nelle ξ cioè a meno di una correlazione.

Questo teorema è del SEGRE che l'ha dedotto da quello di WEIERSTRASS appoggiandosi ad un teorema di SIACCI sui determinanti.

L'inversa di un'omografia è un'omografia che appartiene alla stessa classe ed ha gli invarianti assoluti reciproci della data. Ne viene che un'omografia che ha gli invarianti assoluti uguali ad 1 o a -1 (un'omografia per esempio con un unico spazio unito multiplo) è omografica alla sua inversa, correlativa di sè stessa e della sua inversa.

§ 7.

Sia l'omografia $[(h_1-1,\ h_2-1, \dots\ h_q-1, \dots\ h_p-1) \dots]$ nella quale sono sovrapposti i p spazii fondamentali di punti $S_{h_1-1} \dots S_{h_p-1}$ e quindi sono sovrapposti anche i coniugati p spazii fondamentali di piani $\sum_{h_1-1} \dots, \sum_{h_2-1} \dots \sum_{h_p-1}$; cioè $\sum_{h_1-1}$ contiene $\sum_{h_2-1}$ ecc.

(18) *In ogni piano S_{n-1} di $\sum_{h_q-1}$ che non è però un piano di $\sum_{h_{q+1}-1}$ abbiamo un'omografia subordinata di punti, e quindi di S_{n-2} (che sono i piani*

di S_{n-1}), di caratteristica

$$[(h_1-1,\ h_2-1, \ldots\ h_q-2, \ldots\ h_p-1)\ldots].$$

Se $h_q-1=0$, invece di mettere h_q-2 si sopprime h_q-1.

E correlativamente:

(19) *Intorno ad ogni punto di S_{h_q-1} che non è però un punto di $S_{h_{q+1}-1}$ abbiamo un'omografia subordinata di S_{n-1} e quindi anche di S_1 di caratteristica*

$$[(h_1-1,\ h_2-2, \ldots\ h_q-2, \ldots\ h_p-1)\ldots].$$

Dimostrerò il (18). Concependo l'omografia data come il limite di un'omografia generale, in un piano qualunque passante per lo spazio S_{n-h_q}, determinato da tutti gli spazii fondamentali semplici dell'omografia generale meno S_{h_q-1}, col tendere dell'omografia generale all'omografia data, avremo sempre un'omografia generale di caratteristica

$$[h_1-1,\ h_2-1, \ldots\ h_q-2, \ldots\ h_p-1, \ldots];$$

perchè quel piano passando per S_{n-h_q} contiene tutti gli spazii fondamentali meno S_{h_q-1} che sega in un S_{h_q-2}.

Al limite S_{n-h_q} (che è sempre fuori del limite nell'omografia generale il sostegno dello spazio coniugato di S_{h_q-1}) diventa il sostegno dello spazio fondamentale di piani $\sum_{h_q-1}$, e nel limite di S_{n-1} avremo un'omografia subordinata di caratteristica

$$[(h_1-1,\ h_2-1, \ldots\ h_q-2, \ldots\ h_p-1)\ldots]\ (*).$$

Il teorema (18) permette di determinare la caratteristica dell'omografia subordinata in uno spazio S_{n-1} unito qualunque; come si vede basta diminuire di un'unità nella caratteristica le dimensioni di un certo spazio fondamentale o sopprimerle addiritura se è un punto. Applicando ad un S_{n-2} unito qualunque di S_{n-1} lo stesso teorema ecc. concludiamo facilmente:

(20) *In uno spazio lineare unito qualunque abbiamo un'omografia subordinata la cui caratteristica si può ottenere dalla caratteristica dell'omografia data, o sopprimendo alcuni spazii fondamentali, o diminuendone le dimensioni di un certo numero di unità. Resta sempre che la somma dei numeri della caratteristica di queste omografie subordinate, aumentati di un'unità, deve essere uguale alle dimensioni dello spazio più un'unità.*

(*) Questo teorema si verifica facilmente sulle forme ridotte, che si ottengono colla regola (33).

Nel sostegno dello spazio $\sum_{h_q-1}$ avendosi sempre fuori del limite un'omografia generale subordinata di caratteristica

$$[h_1 - 1,\ h_2 - 1, \ldots\ h_{q-1} - 1,\ h_{q+1} - 1 \ldots\ h_p - 1 \ldots],$$

al limite si avrà un'omografia la cui caratteristica si potrà ottenere dalla caratteristica dell'omografia data sopprimendo il numero $h_q - 1$.

In un'omografia generale tutti i raggi uniti dell'omografia sono quelli che appartengono ad uno spazio fondamentale o che si appoggiano a due spazii fondamentali; quando l'omografia non è generale allora alcuni spazii fondamentali vengono a sovrapporsi, e possono anche sovrapporsi alcuni spazii di raggi uniti. Il teorema (19) ci permette di determinare gli spazii di raggi uniti di un'omografia, uscenti da un punto unito qualunque, e di trovare gli spazii di raggi uniti che vengono a sovrapporsi. Applicando all'omografia dei raggi uniti uscenti da un punto unito lo stesso teorema (19) (poichè gli spazii ad una dimensione di quest'ultima omografia sono spazii a due dimensioni per la data) potremo determinare gli spazii di S_2 uniti passanti per una retta unita qualunque ecc.; il teorema (19) ci permette dunque di determinare gli spazii di S_1, S_2, S_3 ecc. uniti di un'omografia qualunque.

§ 8.

Continuiamo lo studio dello spazio multiplo $(h_1 - 1,\ h_2 - 1, \ldots\ h_p - 1)$ dove $h_1 \geqq h_2 \geqq \cdots \geqq h_p$. Abbiamo visto che considerando l'omografia data come il limite di un'omografia generale i p spazii semplici S_{h_1-1}, $S_{h_2-1}, \ldots$ S_{h_p-1} che tengono luogo in questa dello spazio multiplo $(h_1 - 1, \ldots\ h_p - 1)$, al limite entrano l'uno nell'altro, gli spazii di dimensioni inferiori in quelli di dimensioni superiori, di modo che S_{h_1-1} contiene S_{h_2-1} ecc. $S_{h_{p-1}-1}$ contiene S_{h_p-1}. Ora vogliamo vedere come si sovrappongono al limite, gli spazii determinati fuori del limite da gruppi di quei p spazii fondamentali. Intanto ricordiamo che nello spazio $S_{k_1+\cdots+k_q-1}$ (determinato da q di essi $S_{k_1-1} \ldots\ S_{k_q-1}$) sempre unito ed unito anche al limite, avremo un'omografia che fuori del limite avrà q spazii fondamentali semplici, ma che al limite avrà un unico spazio fondamentale multiplo $(k_1 - 1, \ldots,\ k_q - 1)$.

Il teorema seguente risolve completamente la questione che ci siamo proposti.

Siano S_{k_1-1}, $S_{k_2-1}, \ldots\ S_{k_q-1}$ $(k_1 \geqq k_2 \geqq \cdots \geqq k_q)$ q dei p spazii fondamentali

$S_{h_1-1} \ldots S_{h_p-1}$ che vengono a sovrapporsi; e siano $S_{l_1-1}, S_{l_2-1}, \ldots S_{l_r-1}$ ($l_1 \geqq l_2 \geqq \cdots \geqq l_r$) r degli stessi p spazii $S_{h_1-1}, \ldots S_{h_p-1}$. Supponiamo $q \geqq r$. Indichiamo con S_{m_1-1} ed S_{n_1-1} rispettivamente della coppia dei due spazii S_{k_1-1} ed S_{l_1-1} quello di dimensioni superiori e quello di dimensioni inferiori o indifferentemente l'uno o l'altro se sono di dimensioni eguali. E così indichiamo con S_{m_2-1} e S_{n_2-1} della coppia S_{k_2-1} S_{l_2-1} ecc., ecc., ed indichiamo finalmente (se $q > r$) con $S_{m_{r+1}-1} \ldots S_{m_q-1}$ gli spazii $S_{k_{r+1}-1} \ldots S_{k_q-1}$.

(21) *I due spazii $S_{k_1+\cdots+k_q-1}$ ed $S_{l_1+\cdots+l_r-1}$, che passano rispettivamente per gli spazii infinitamente vicini $S_{k_1-1}, \ldots S_{k_q-1}$, ed $S_{l_1-1} \ldots S_{l_r-1}$, appartengono allo spazio $S_{m_1+\cdots+m_q-1}$ che passa per gli spazii $S_{m_1-1} \ldots S_{m_q-1}$, e si segano nello spazio $S_{n_1+\cdots+n_r-1}$ che passa per gli spazii $S_{n_1-1} \ldots S_{n_r-1}$.*

In particolare se $q = r$ e $k_1 \geqq l_1, \ldots k_q \geqq l_q$:

(22) *Lo spazio $S_{k_1+\cdots+k_q-1}$ contiene lo spazio $S_{l_1+\cdots+l_q-1}$.*

Cominciamo a dimostrare quest'ultimo teorema:

Per $q = 1$ il teorema è dimostrato; dimostriamolo per $q = 2$.

Nell'omografia subordinata nello spazio $S_{k_1+k_2+l_1-1}$ fuori del limite abbiamo i tre spazii fondamentali distinti S_{k_1-1}, S_{k_2-1}, S_{l_1-1} di punti e quelli fondamentali di piani (piani di $S_{k_1+k_2+l_1-1}$) $\sum_{k_1-1}$, $\sum_{k_2-1}$, $\sum_{l_1-1}$ di sostegni $S_{k_2+l_1-1}$, $S_{k_1+l_1-1}$, $S_{k_1+k_2-1}$.

I tre spazii fondamentali di punti al limite venendo a sovrapporsi, vengono pure a sovrapporsi i coniugati spazii di piani e quindi anche i loro sostegni; cioè $S_{k_2+l_1-1}$ giace in $S_{k_1+k_2-1}$; analogamente considerando lo spazio $S_{k_2+l_1+l_2-1}$ concludiamo che $S_{l_1+l_2-1}$ giace in $S_{k_1+l_1-1}$ e quindi in $S_{k_1+k_2-1}$.

La dimostrazione è identica per $q = 3$.

Si trova, considerando lo spazio $S_{k_1+k_2+k_3+l_1-1}$ che $S_{k_1+k_2+k_3-1}$ contiene $S_{k_2+k_3+l_1-1}$, il quale contiene $S_{k_3+l_1+l_2-1}$ che contiene $S_{l_1+l_2+l_3-1}$ ecc.

(23) *In particolare in un'omografia con un unico punto unito $n+1^{\text{plo}}$ a_0 abbiamo un'unica retta unita a_1 passante per a_0, limite di tutte le rette che uniscono a due a due gli $n+1$ punti uniti infinitamente vicini; e così abbiamo un unico spazio a due dimensioni unito a_2 passante per a_1, limite di tutti gli spazii a due dimensioni che uniscono a tre a tre gli $n+1$ punti uniti infinitamente vicini ecc.*

Passiamo a dimostrare il teorema (21).

Per il (22) lo spazio $S_{n_1+\cdots+n_r-1}$ è contenuto nei due spazii $S_{k_1+\cdots+k_q-1}$ ed $S_{l_1+\cdots+l_r-1}$ e lo spazio $S_{m_1+\cdots+m_q-1}$ li contiene tutti e due.

Basterà dimostrare che lo spazio in cui si segano non è di dimensioni superiori ad $n_1 + \cdots + n_r - 1$ e ne verrà che lo spazio a cui appartengono sarà di dimensioni $m_1 + \cdots + m_q - 1$ (*). Nello spazio in cui i due spazii $S_{k_1+\cdots+k_q-1}$ ed $S_{l_1+\cdots+l_r-1}$ si segano avremo un'omografia, subordinata all'omografia, di $S_{k_1+\cdots+k_q-1}$ e all'omografia di $S_{l_1+\cdots+l_r-1}$, che sarà di caratteristica (20) $(x_1 - 1, \ldots x_s - 1)$ dove $s \leqq r$ e $x_1 \leqq l_1 \ldots x_s \leqq l_s$ e così $x_1 \leqq k_1 \ldots x_1 \leqq k_s$, e quindi $x_1 \leqq n_1 \ldots x_s \leqq n_s$ da cui $x_1 + \cdots + x_s - 1 \leqq n_1 + \cdots + n_r - 1$; ma lo spazio in cui si segano $S_{k_1+\cdots+k_j-1}$ ed $S_{l_1+\cdots+l_r}$ è ad un numero di dimensioni $x_1 + \cdots + x_s - 1$, quindi il teorema è dimostrato.

Non è inutile forse osservare che gli spazii $S_{n_1+\cdots+n_r-1}$ $S_{m_1+\cdots+m_q-1}$ abbiamo omografie subordinate di caratteristica rispettivamente $(n_1 - 1, n_2 - 1, \ldots n_r - 1)$, $(m_1 - 1, \ldots m_q - 1)$.

Per esempio nell'omografia [(1 0 0)]; la retta fondamentale è tagliata dalla retta che unisce i due punti uniti infinitamente vicini in un punto, e in quest'ultima retta abbiamo un'omografia subordinata [(0 0)]. Le due rette determinano un piano in cui si ha l'omografia [(1 0)]. Nell'omografia in uno spazio S_7 con un unico spazio multiplo [(2 1 1 0)], lo spazio S_3 (che passa per i due spazii fondamentali infinitamente vicini S_2 ed S_0) e lo spazio S'_3 (che passa per i due spazii fondamentali infinitamente vicini S_1 ed S'_1) si segano in un S'_2 in cui si ha l'omografia [(1 0], ed appartengono ad un S_5 in cui si ha l'omografia [(2 1 0)]. Sopra uno spazio multiplo qualunque

$$(h_1 - 1, h_2 - 1, \ldots h_q - 1, \ldots h_p - 1),$$

dimostriamo quest'altro teorema:

(24) *Per ogni punto α_0 di S_{h_q-1}, ma non di $S_{h_{q+1}-1}$ passa una totalità $h_1 - 1$ volte infinita di S_1 uniti con un solo punto unito, una totalità $h_1 - 1 + h_2 - 1$ volte infinita di S_2 uniti con un solo punto unito ecc. una totalità $h_1 - 1 + \cdots + h_{q-1} - 1$ volte infinita di S_{q-1} uniti con un solo punto unito. Gli S_{q-1} uniti con un solo punto unito, sono gli spazii di massime dimensioni passanti per α_0; cioè per α_0 non passa alcun S_q unito con un unico punto unito.*

(*a*) Sia dapprima α_0 un punto di S_{h_1-1} ma non di S_{h_2-1}. Intorno ad α_0 abbiamo (19) un'omografia subordinata di S_1 di caratteristica $(h_1 - 2, h_2 - 1, h_3 - 1, \ldots)$. Siano S'_{h_1-2}, S'_{h_2-1}, $S'_{h_3-1} \ldots$ gli spazii fondamentali (di raggi) di questa omografia. Gli S_1 della totalità lineare S'_{h_1-2} [totalità che contiene tutte le altre S'_{h_2-1}, $S'_{h_3-1}, \ldots$ (**)] costituiscono tutti gli S_1 uniti passanti per

(*) Perchè se due spazii S_α ed S_β si segano in un S_γ ed appartengono ad un S_δ si ha; $\alpha + \beta = \gamma + \delta$.

(**) Perchè avendo supposto che α_0 sia un punto di S_{h_1-1} ma non di S_{h_2-1} ne viene che $h_1 - 1 > h_2 - 1$ e quindi $h_1 - 2 \geqq h_2 - 1$.

α_0 e sono gli S_1 che passano per α_0 e giacciono in S_{h_1-1}; perchè questi S_1 costituiscono appunto una totalità lineare h_1-2 volta infinita. Per α_0 non passa adunque alcun S_1 unito con un solo punto unito.

(b) Sia α_0 un punto di S_{h_2-1} ma non di S_{h_3-1}. Intorno ad α_0 abbiamo un'omografia subordinata di S_1 di caratteristica $(h_1-1,\ h_2-2,\ h_3-1\ldots)$. Siano S'_{h_1-1}, S'_{h_2-2}, $S'_{h_3-1}\ldots$ gli spazii fondamentali (di raggi) di questa omografia. Gli S_1 della totalità lineare S'_{h_1-1} (totalità che contiene tutte le altre S'_{h_2-2}, $S'_{h_3-2},\ldots$) costituiscono tutti gli S_1 uniti passanti per α_0, e sono S_1 uniti con un solo punto unito (se si eccettuano quelli che passano per α_0 e giacciono in S_{h_1-1}, i quali costituiscono una totalità h_1-2 volte infinita). Applicando il teorema (a) a questa omografia di raggi, siccome gli S_1 di questa omografia di raggi sono S_2 per l'omografia data, si conclude che per ciascun S_1 di S'_{h_1-1} non passa alcun S_2 unito con un solo punto unito. Ora ogni S_2 unito con un solo punto unito passante per α_0 conterrebbe una retta unita passante per α_0, quindi concludiamo che per α_0 non passa alcun S_2 unito con un unico punto unito.

(c). Supponiamo che α_0 sia un punto di S_{h_3-1} ma non di S_{h_4-1}. Intorno ad α_0 abbiamo un'omografia subordinata di S_1 di caratteristica $(h_1-1,\ h_2-1,\ldots\ h_3-2,\ldots)$. Siano S'_{h_1-1}, S'_{h_2-1}, $S'_{h_3-1},\ldots$ gli spazii fondamentali di raggi di questa omografia. Gli S_1 della totalità lineare S'_{h_1-1} sono S_1 uniti con un solo punto unito se si eccettuano quelli che giacciono in S_{h_1-1}. Per ogni S_1 della totalità S'_{h_1-1} che non è un S_1 della totalità S'_{h_2-1} non passa [teorema (a)] alcun S_2 unito con un unico punto unito; per ogni S_1 della totalità S'_{h_2-1} passa [per il teorema (b) applicato a questa omografia di raggi] una totalità h_1-1 volte infinita di S_2 uniti con quel solo S_1 unito e quindi con un solo punto unito. Gli S_2 passanti per α_0 costituiscono quindi una totalità h_1-1+h_2-1 volte infinita. Per gli S_1 di S'_{h_2-1} non passa alcun S_3 unito, ancora per il teorema (b), con un solo S_1 unito; per α_0 non passa quindi alcun S_3 unito con un solo punto unito, perchè quel S_3 avrebbe una retta unita con un solo punto unito che dovrebbe essere una retta di S'_{h_1-1} ecc.

Il ragionamento si può continuare senza difficoltà e ammesso il teorema vero per $q=1$, $q=2,\ldots\ q=r$ per tutte le omografie, si dimostra col ragionamento (c) che è vero per $q=r+1$.

A complemento del teorema (24) diamo il seguente:

(25) *Se da ciascun punto di un certo numero di punti indipendenti fissati in S_{h_1-1} immaginiamo condotto uno spazio unito con un solo punto unito, tutti questi spazii sono pure indipendenti.*

Infatti siano α_0, β_0, $\gamma_0 \dots$ punti indipendenti fissati in S_{h_1-1} e siano α, β, $\gamma, \dots$ degli spazii uniti con un solo punto unito passanti rispettivamente per α_0, β_0. $\gamma_0 \dots$

Dico che α, β, γ sono indipendenti. Infatti se α e β si segassero, avrebbero almeno un punto unito in comune, ed allora β_0 dovrebbe coincidere con α_0. Nello spazio a cui α e β appartengono, i soli punti uniti sono i punti della retta $\alpha_0\ \beta_0$; se quindi γ segasse questo spazio, allora γ avrebbe con questo spazio almeno un punto unito in comune e γ_0 dovrebbe giacere nella retta $\alpha_0\ \beta_0$ contrariamente all'ipotesi ecc.

Ai teoremi (24) e (25) aggiungo questa osservazione di cui farò uso nel paragrafo seguente. Essa è relativa ancora allo spazio multiplo $(h_1 - 1, \dots h_p - 1)$. Fissiamo arbitrariamente in S_{h_1-1} h_1 punti indipendenti

$$a'_0 \dots \qquad a_0^{h_1},$$

dei quali i primi h_p in S_{h_p-1} i primi h_{p-1} in $S_{h_{p-1}-1}$ ecc. i primi h_2 in S_{h_2-1}.

Sia α_0 uno qualunque di quei punti ed α_0 appartenga ad S_{h_q-1} ma non ad $S_{h_{q+1}-1}$. Sia α_{q-1} uno spazio a $q-1$ dimensioni passante per α_0 unito e con l'unico punto unito α_0. Allora α_{q-1} (24) è uno degli spazii di massime dimensioni (unito e con un unico punto unito α_0) passante per α_0; è un punto cioè α_0 stesso, se α_0 è uno degli ultimi $h_1 - h_2$ punti a; è una retta se α_0 ecc.; è uno spazio a $p-1$ dimensioni se α_0 è uno dei primi h_p punti a. Si può scegliere α_{q-1} in una totalità $h_1 - 1 + h_2 - 1 + \dots + h_{q-1} - 1$ volte infinita (24) quando è fissato α_0; ma il punto α_0 è scelto in S_{h_q-1} cioè in una totalità $h_q - 1$ volte infinita; introducendo dunque l'arbitrarietà della scelta di α_0 in quella di α_{q-1}, lo spazio α_{q-1} è scelto in una totalità $h_1 - 1 + \dots + h_q - 1$ volte infinita. Scelto lo spazio α_{q-1} resta determinato il punto α_0 che è il punto unito nell'omografia subordinata in α_{q-1}.

Per ciascuno dei punti $a'_0 \dots a_0^{h_1}$ immaginiamo uno spazio α di massime dimensioni unito e con un unico punto unito, analogo ad α_{q-1}; tutti gli spazii α sono indipendenti (25), e di questi $h_1 - h_2$ sono punti, $h_2 - h_3$ sono rette, ecc., h_p sono spazii a $p-1$ dimensioni; introducendo l'arbitrarietà della scelta dei punti a in quella degli spazii α, possiamo dire che il gruppo degli h_1 spazii α si può scegliere in una totalità

$$(h_1 - h_2)(h_1 - 1) + (h_2 - h_3)(h_1 - 1 + h_2 - 1) +$$
$$+ (h_3 - h_4)(h_1 - 1 + h_2 - 1 + h_3 - 1) + \cdots$$
$$\cdots + h_p(h_1 - 1 + h_2 - 1 + \cdots + h_p - 1) \text{ volte infinita},$$

cioè in una totalità:

$$h_1(h_1-1)+h_2(h_2-1)+\cdots+h_p(h_p-1) \text{ volte infinita.}$$

Concludiamo:

(26) *In uno spazio $S_{h_1+h_2+\cdots+h_p-1}$ in cui abbiamo un'omografia $(h_1-1, h_2-1, \ldots h_p-1)$ possiamo sempre immaginare un gruppo di h_1 spazii α uniti e con un unico punto unito, che si possono ottenere fissando i punti $a'_0 \ldots a_0^{h_1}$ e poi immaginando per ciascuno di essi uno spazio unito con un unico punto unito di massime dimensioni. Questi spazii α, dei quali h_1-h_2 sono punti h_2-h_3 rette, ecc. ed h_p sono spazii a $p-1$ dimensioni, sono tutti indipendenti e quindi determinano tutto $S_{h_1+h_2+\cdots+h_p-1}$. Il loro complesso si può scegliere in una totalità $h_1(h_1-1)+\cdots+h_p(h_p-1)$.*

Immaginiamo ora un'omografia qualunque di caratteristica:

$$[(h'_1-1, \ldots h'_{p'}-1)(h''_1-1, \ldots h''_{p''}-1) \ldots (h_1^{(\sigma)}-1 \ldots h_{p^{(\sigma)}}^{(\sigma)}-1)]. \quad [1]$$

Indico con $S'=S_{h'_1+h'_2+\cdots+h'_{p'}-1}$ lo spazio che passa per gli spazii fondamentali infinitamente vicini $S_{h'_1-1}, \ldots, S_{h'_{p'}-1}$ costituenti lo spazio multiplo $(h'_1-1, \ldots h'_{p'}-1)$; così indico con S'' lo spazio $S_{h''_1+\cdots+h''_{p''}-1}, \ldots$ e con $S^{(\sigma)}$ lo spazio $S_{h_1^{(\sigma)}+\cdots+h^{(\sigma)}_{p^{(\sigma)}}-1}$. Gli spazii $S', S'', \ldots S^{(\sigma)}$ sono spazii uniti indipendenti (*) e determinano S_n (**).

In ciascuno di essi immaginiamo il gruppo degli spazii α; questi spazii determinano tutto S_n e in ciascuno di essi abbiamo omografie subordinate con un unico punto unito. La considerazione degli spazii uniti $S', S'', \ldots S^{(\sigma)}$ e dei gruppi degli spazii α in essi contenuti, è una guida sicura nello studio delle omografie; le quali così analizzate nei loro elementi uniti, presentano in modo chiaro le loro notevoli proprietà.

Insieme agli spazii $S', S'', \ldots S^{(\sigma)}$ è degno di nota lo spazio S determinato dagli spazii $S_{h'_1-1}, S_{h''_1-1}, \ldots, S_{h_1^{(\sigma)}-1}$; in S abbiamo un'omografia a spazii fondamentali semplici di caratteristica $[h'_1-1, h''_1-1, \ldots h_1^{(\sigma)}-1]$. Lo spazio S taglia gli spazii $S', S'', \ldots S^{(\sigma)}$ rispettivamente in $S_{h'_1-1}, S_{h''_1-1}, \ldots S_{h_1^{(\sigma)}-1}$.

(*) Sono indipendenti perchè se due di essi per es. S' ed S'' si segassero in un punto, quel punto sarebbe unito, e quindi sarebbe un punto di $S_{h'_1-1}$ e di $S_{h''_1-1}$; e allora $S_{h'_1-1}$ ed $S_{h''_1-1}$ avrebbero un punto in comune; il che non può essere (5); e così se S''' segasse lo spazio a cui appartengono S' ed S'' ecc.

(**) Se $p'=1$, S' si riduce allo spazio fondamentale semplice $S_{h'_1-1}$ e il gruppo degli spazii α si riduce ad h_1 punti fissati in $S_{h'_1-1}$.

(27) *Gli spazii S', S'',... $S^{(\sigma)}$ sono determinati dai rispettivi gruppi di spazii α; e lo spazio S è determinato dai punti uniti degli spazii α costituenti quei gruppi.*

Ed infatti gli spazii costituenti il gruppo che si trova in S' escono da h'_1 punti indipendenti di $S_{h'_1-1}$ (26) che sono i loro punti uniti; questi punti uniti determinano dunque $S'_{h'_1-1}$; analogamente i punti uniti degli spazii α costituenti i gruppi che si trovano in S'',... $S^{(\sigma)}$ determinano $S_{h''_1-1}\dots S^{(\sigma)}_{h^{(\sigma)}-1}$; il che dimostra la seconda parte del teorema; quanto alla prima è inclusa nel teorema (26).

(28) *Date le omografie subordinate in S'. S''... $S^{(\sigma)}$ e gli invarianti assoluti l'omografia in S_n è determinata.*

Infatti l'omografia è determinata in S (17) e quindi anche in S_n; perchè per trovare il piano corrispondente di un piano qualunque S_{n-1}, basta trovare i corrispondenti degli spazii dove S_{n-1} taglia S' S''... $S^{(\sigma)}$ ed S, che costituiscono appunto un S'_{n-1}.

§ 9.

Date due omografie in S_n ed S'_n appartenenti alla stessa sottoclasse abbiamo visto che sono proiettive ed una coppia di punti corrispondenti in questa proiettività si può fissare arbitrariamente.

Proponiamoci questo problema:

Fissata fra i due spazii S_n ed S'_n una coppia arbitraria di punti corrispondenti trovare altre $n+1$ coppie in modo da passare dall'omografia in S_n a quella in S'_n.

Considereremo dapprima due omografie con un unico punto unito $n+1$ plo. Premetterò la costruzione di un'omografia con un unico punto unito multiplo.

Abbiamo già visto (23) che in un'omografia con un unico punto unito $n+1^{\text{plo}}$ a_0, esiste una sola retta unita a_1 che passa per a_0, un solo spazio a due dimensioni unito a_2 che passa per a_1 un solo spazio a tre dimensioni unito a_3 che passa per a_2 ecc. un solo spazio a $n-1$ dimensioni unito a_{n-1} che passa per a_{n-2}.

Siano b_0 b'_0 una coppia qualunque di punti corrispondenti di a_1, c_0 c'_0 una coppia qualunque di punti corrispondenti di a_2, d_0 d'_0 una coppia di a_3 ecc. l_0 l'_0 una coppia qualunque di punti corrispondenti di S_n.

(29) *Queste coppie determinano l'omografia tenendo presente che a_0 deve essere un punto unito $n+1^{\text{plo}}$.*

Per $n=1$ il teorema è subito dimostrato perchè il corrispondente di b_0 (considerando b_0 come appartenente all'altra figura) è un punto che deve formare coi tre $a_0\ b'_0\ b_0$ un rapporto armonico.

Supponiamo il teorema dimostrato per uno spazio ad $n-1$ dimensioni a_{n-1} e dimostriamolo per lo spazio S_n. Intorno ad a_{n-2} abbiamo due fasci proiettivi sovrapposti di piani col solo piano a_{n-1} unito. Al piano $a_{n-2}\ m_0$ corrisponde il piano $a_{n-2}\ m'_0$ per cui la corrispondenza fra i piani di questi due fasci è determinata. Per trovare il punto corrispondente di un punto M basta trovare il piano corrispondente di $a_{n-2}\ M$ e la retta corrispondente di $m_0\ M$ che è una retta che passa per m'_0 e per il punto corrispondente del punto dove $m_0\ M$ taglia a_{n-1} che è per l'ipotesi determinato.

Da ciò si ricava una costruzione semplicissima di un'omografia con un unico punto unito a_0. Basterà condurre arbitrariamente per a_0 una retta a_1, per a_1 uno spazio a due dimensioni a_2 ecc. e poi fissare arbitrariamente in a_1 una coppia di punti corrispondenti $b_0\ b'_0$, in a_2 una coppia $c_0\ c'_0$ ecc. in S_n una coppia $m_0\ m'_0$. Queste coppie determinano l'omografia.

Abbiansi ora due omografie rispettivamente in S_n ed S'_n con un unico punto unito $n+1^{\text{plo}}$.

Siano al solito $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ il punto, la retta... lo spazio ad $n-1$ dimensioni uniti della prima omografia. Fissiamo in S_n arbitrariamente il punto m'_0, a questo punto corrisponde un certo punto m_0; la retta $m'_0\ m_0$ taglia a_{n-1} in un punto l'_0 al quale corrisponde l_0; la retta $l'_0\ l_0$ taglia a_{n-2} in un punto ecc. verremo così a determinare in a_3 un punto d'_0 al quale corrisponde d_0, la retta $d_0\ d'_0$ taglia a_2 in un punto c_0 al quale corrisponde c'_0; la retta $c_0\ c'_0$ taglia a_1 in un punto b'_0 al quale corrisponde b_0. Il punto a_0 unito $n+1^{\text{plo}}$ e le coppie $b_0\ b'_0$, $c_0\ c'_0$, $d_0\ d'_0 \ldots\ l_0\ l'_0$, $m_0\ m'_0$ determinano l'omografia (26).

In S'_n ripetiamo le stesse costruzioni indicando i punti ottenuti allo stesso modo colle stesse lettere; cioè fissiamo in S'_n *arbitrariamente* un punto m'_0 ecc. Ponendo fra i due spazii S_n ed S'_n la corrispondenza

$$(a_0\,a_0),\qquad (b_0\,b_0),\qquad (c_0\,c_0),\ldots\qquad (l_0\,l_0)\qquad (m_0\,m_0)\qquad (m'_0\,m'_0),$$

passeremo dal punto l'_0 al punto $l'_0, \ldots$ dal punto c'_0 al punto c'_0, dal punto b'_0 al punto b'_0 e quindi dalla prima omografia alla seconda.

Nella corrispondenza fra i due spazii la coppia $m'_0\ m'_0$ è fissata arbitrariamente, ma le altre ne sono in conseguenza determinate; poichè fissata la coppia $m'_0\ m'_0$ per passare da un'omografia all'altra bisogna necessariamente passare da m_0 ad m_0, e quindi da l'_0 ad l'_0, da l_0 ad l_0 ecc.

Ora consideriamo un'omografia qualunque di caratteristica [1] (pag. 144).

Immaginiamo gli spazii S', S'',... $S^{(\sigma)}$, (pag. 144) e in ciascuno di essi il gruppo degli spazii α. Sia α_{q-1} uno di questi spazii; indichiamo con α_0, α_1,... α_{q-2}, il punto, la retta,... lo spazio a $q-2$ dimensioni uniti di α_{q-1}. Sia $\beta_0\ \beta'_0$ una coppia qualunque di punti corrispondenti di α_1, $\gamma_0\ \gamma'_0$ una coppia di α_2 ecc. $\lambda_0\ \lambda'_0$ una coppia di α_{q-2} e $\mu_0\ \mu'_0$ una coppia di α_{q-1}. Scelti i punti α_0, β_0, γ_0,... λ_0, μ_0 in modo che siano indipendenti, essi determinano α_{q-1}.

Ripetiamo queste costruzioni in tutti gli spazii α_{q-1}.

(30) *Le coppie* $(\alpha_0\,\alpha_0)$, $(\beta_0\,\beta'_0)$, $(\gamma_0\,\gamma'_0)$,... $(\lambda_0\,\lambda'_0)$ $(\mu_0\,\mu'_0)$, *relative a tutti gli spazii* α (*), *insieme alla condizione che gli spazii* α *siano uniti con un solo punto unito e insieme agli invarianti assoluti determinano l'omografia.*

E infatti queste coppie determinano l'omografia in tutti gli spazii α (29) ed anche in tutti gli spazi S', S'',... $S^{(\sigma)}$; perchè per trovare il piano corrispondente di un piano qualunque di S' basta trovare lo spazio corrispondente dello spazio dove quel piano taglia $S'_{h'_1-1}$ e gli spazii corrispondenti degli spazii dove quel piano taglia gli spazii α del gruppo che si trova in S'. Essendo determinata la corrispondenza negli S', S'',... $S^{(\sigma)}$, gli invarianti assoluti finiscono col determinare la corrispondenza in tutto S_n (28).

Si ricava una costruzione semplicissima di un'omografia qualunque di caratteristica [1] pag. 144:

(31) *Conduciamo arbitrariamente i* σ *spazii indipendenti* S'... $S^{(\sigma)}$ *fissiamo rispettivamente in essi gli spazii* $S_{h'_1-1}$... $S_{h_1^{(\sigma)}-1}$; *conduciamo i gruppi degli spazii* α *come è stato indicato* (26), *fissiamo in ciascuno di essi* (α_{q-1}) *arbitrariamente la retta* α_1 *passante per* α_0, *lo spazio* α_2 *passante per* α_1... *lo spazio* α_{q-2} *passante per* α_{q-3} *e scegliamo finalmente in* α_1 *arbitrariamente una coppia di punti* $\beta_0\ \beta'_0$, *in* α_2 *una coppia* $\gamma_0\ \gamma'_0$... *in* α_{q-2} *una coppia* $\lambda_0\ \lambda'_0$ *e in* α_{q-1} *una coppia* $\mu_0\ \mu'_0$. *Queste coppie relative a tutti gli spazii* α *insieme agli invarianti assoluti, scelti pure arbitrariamente determinano l'omografia* (30).

Abbiansi ora due omografie qualunque, l'una in S_n l'altra in S'_n di caratteristica [1] e cogli stessi invarianti assoluti; due omografie quindi appartenenti alla stessa sottoclasse.

(*) Indico con $\beta_0\,\beta'_0$, $\gamma_0\,\gamma'_0$ le coppie fissate in α_{q-1} e le coppie analoghe fissate negli altri spazii α. È chiaro che se lo spazio α è un punto queste coppie non ci sono; se è una retta bisogna fermarsi a $\beta_0\,\beta'_0$ ecc.

Immaginiamo in S_n gli spazii S', S'',... $S^{(\sigma)}$ e in ciascuno di essi il gruppo degli spazii α; scegliamo arbitrariamente in S_n un punto U. Da tutti gli α meno uno (meno per es. α_{q-1}) proiettiamo U sopra α_{q-1}; otterremo un punto μ'_0 perchè gli α sono indipendenti e determinano S_n. Al punto μ'_0 corrisponde un certo punto μ_0; la retta $\mu'_0\,\mu_0$ taglia α_{q-2} in un punto λ'_0, al quale corrisponde un certo punto λ_0 ecc. verremo così a determinare in α_2 un punto γ'_0, al quale corrisponde γ_0; la retta $\gamma'_0\,\gamma_0$ taglia α_1 in β'_0 al quale corrisponde β_0. Ripeto queste costruzioni in tutti gli spazii α; i punti α_0, β_0, $\gamma_0 \ldots\, \lambda_0$, μ_0, relativi agli α (*), sono $n+1$ perchè determinano i singoli spazii α e quindi tutto S_n.

Le coppie $(\alpha_0\,\alpha_0)$, $(\beta_0\,\beta'_0)$, $(\gamma_0\,\gamma'_0) \ldots$ $(\lambda_0\,\lambda'_0)$, $(\mu_0\,\mu'_0)$ relative a tutti gli spazii α insieme alla condizione che questi spazii siano uniti con un unico punto unito e insieme agli invarianti assoluti determinano l'omografia in S_n (30).

Ripetiamo nello spazio S'_n le stesse costruzioni, indicando colle stesse lettere gli spazii e i punti ottenuti allo stesso modo (punti e spazii omologhi); cioè fissiamo arbitrariamente in S'_n un punto U, e fissiamo gli spazii S', S'',... $S^{(\sigma)}$; scegliamo in S' nella totalità $h'_1(h'_1-1)+\cdots+h'_{p'}(h'_{p'}-1)$ (26) il gruppo degli spazii α, e così in S'' ecc. Proiettiamo da tutti gli spazii α meno α_{q-1}, sopra α_{q-1} il punto U ecc. Ponendo fra i due spazii la corrispondenza data dalle $n+2$ coppie:

$$(U\,U), \qquad (\alpha_0\,\alpha_0), \qquad (\beta_0\,\beta_0) \ldots \qquad (\lambda_0\,\lambda_0), \qquad (\mu_0\,\mu_0), \tag{2}$$

relativi a tutti gli spazii analoghi ad a_{q-1}, passeremo dal punto U e dagli spazii α della omografia in S_n al punto U e agli spazii α omologhi dell'omografia in S'_n, e quindi dal punto μ'_0 di S_n (proiezione di U fatta da tutti gli α meno uno sopra il mancante) al punto μ'_0 di S'_n; dal punto λ'_0 di S_n (intersezione della retta $\mu_0\,\mu'_0$ con α_{q-2}) al punto λ'_0 di S'_n ecc. da γ'_0 a γ'_0, da β'_0 a β'_0; e quindi passeremo dall'una all'altra omografia perchè l'omografia in S_n e quella in S'_n sono determinate dalle coppie $(\alpha_0\,\alpha_0)$, $(\beta_0\,\beta'_0) \ldots$ $(\mu_0\,\mu'_0)$ relative a tutti gli spazii α; e dagli invarianti assoluti che sono gli stessi.

(32) *Nella corrispondenza fra i due spazii S_n ed S'_n che serve a passare dall'una all'altra omografia il punto U di S'_n corrispondente del punto U di S_n, è scelto arbitrariamente in S'_n, e il gruppo degli spazii α di S'*

(*) Quando parlo degli spazii α intendo gli spazii analoghi ad α_{q-1} indicati nel teorema (26); e non intendo quindi di comprendervi gli spazii $\alpha_{q-2} \ldots \alpha_0$ uniti di α_{q-1}.

in S'_n corrispondenti degli spazii α di S' in S_n è scelto in una totalità

$$h'_1(h'_1-1)+\cdots+h'_{p'}(h'_{p'}-1),$$

volte infinita; e così il gruppo degli spazii α di S'' in S'_n corrispondenti degli spazii α di S'' in S_n è scelto arbitrariamente in una totalità

$$h''_1(h''_1-1)+\cdots+h''_{p''}(h''_{p''}-1) \text{ (*) } ecc.,$$

Non solo; ma fissati nello spazio S'_n il punto U e gli spazii α corrispondenti del punto U e degli spazii α omologhi in S_n, la corrispondenza che serve a passare dall'una all'altra omografia è determinata (**).

(*) Se $h'_1-1=h'_2-1=\cdots=h'_{p'}-1$ allora gli spazii fondamentali in S' sono p' punti coincidenti, caso già considerato. Allora abbiamo un unico spazio α che è S' stesso.

(**) *Osservazione I.* — Date due omografie appartenenti alla stessa sottoclasse esiste, dunque, una varietà $n+\sum h(h-1)$ volte infinita di corrispondenze proiettive (dove $h-1$ sono le dimensioni degli spazii fondamentali distinti o a gruppi sovrapposti) colle quali si passa da un'omografia all'altra. Siano $x_i=\sum_k c_{ki}y_k$ le relazioni che rappresentano queste corrispondenze proiettive. Siccome fissata una corrispondenza le c sono determinate meno una, che è arbitraria; le corrispondenze essendo $n+\sum h(h-1)$ volte infinite si conclude che fra le c ve ne devono essere $n+1+\sum h(h-1)$ arbitrarie. Vedremo nel § 11 che le altre sono determinate e sono combinazioni lineari delle prime. Essendo $\sum h=n+1$, sarà $n+1+\sum h(h-1)=\sum h^2$.

Osservazione II. — Il minimo valore di $n+\sum h(h-1)$ è n; quando gli spazii fondamentali sono tutti punti; il massimo valore è n^2 quando le due omografie sono omologie cioè quando vi sono due soli spazii fondamentali, un piano ed un punto. Osserviamo che in questo caso, se nelle corrispondenze proiettive colle quali si passa dalla 1.ª omologia alla 2.ª, n coppie di punti corrispondenti fossero arbitrarie, quelle corrispondenze costituirebbero appunto una totalità n^2 volte infinita. E ciò accade infatti cioè:

Nella corrispondenza che serve a passare da un'omologia ad un'altra appartenente alla stessa sottoclasse, n coppie di punti corrispondenti sono arbitrarie, le altre due sono in conseguenza determinate.

Ed infatti, siano $(A_1 A'_1)\ldots(A_n A'_n)$ n coppie arbitrarie di punti corrispondenti della 1.ª omologia in S_n, ed A_{n+1} il centro; e analogamente $(A_1 A'_1)\ldots(A_n A'_n)$ n coppie arbitrarie di punti corrispondenti della 2.ª omologia in S'_n ed A_{n+1} il centro. Fissiamo in S_n ed S'_n un punto U in modo, che passando dai punti $A_1\ldots A_n$, A_{n+1}, U di S_n ai punti $A_1\ldots A_n A_{n+1}$ U di S'_n si passi dal piano $(A'_1\ldots A'_n)$ di S_n al piano $(A'_1\ldots A'_n)$ di S'_n. Questo si può sempre fare. Per esempio in S_n ed S'_n si può fissare il punto U, con quelle costruzioni armoniche colle quali si determina il punto unità dati i vertici della piramide fondamentale e il piano unitario, prendendo in luogo dei vertici di riferimento i punti $A_1\ldots A_n$ e in luogo del piano unitario il piano $(A'_1\ldots A'_n)$. Allora colla corrispondenza $(A_1 A_1)\ldots(A_n A_n)(A_{n+1} A_{n+1})$ (UU) passeremo dal piano $(A'_1\ldots A'_n)$ al piano $(A'_1\ldots A'_n)$ e quindi dai punti $A'_1\ldots A'_n$ rispettivamente ai punti $A'_1\ldots A'_n$ e dal piano d'omologia della 1.ª al piano d'omologia della 2.ª

Perchè il piano d'omologia nell'una e nell'altra omologia passa per l'intersezione dei

Perchè bisogna allora passare necessariamente dal punto μ'_0 al punto μ'_0 e quindi da μ_0 a μ_0 da λ'_0 a λ'_0 ecc. cioè dal punto U e dai punti α_0, β_0,... μ_0 relativi a tutti gli spazii α di S_n ai punti α_0, β_0,... μ_0 di S'_n; e questa è appunto la corrispondenza [2].

Prendendo in S_n per vertici di riferimento $1 \ldots n+1$, rispettivamente i punti α_0 degli spazii α contenuti in S' (dagli spazii α di maggiori dimensioni a quelli di minori dimensioni) poi i punti β_0 nello stesso ordine poi i punti γ_0 ecc. poi i punti α_0 degli spazii α contenuti in S'' ecc. le relazioni omografiche

$$\begin{aligned} r x_1 &= a_{11} y_1 + \cdots + a_{n+1\,1} y_{n+1} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r x_{n+1} &= a_{1n+1} y_1 + \cdots + a_{n+1n+1} y_{n+1}, \end{aligned}$$

prendono una forma semplicissima. Interpretando i punti β_0 γ_0... come appartenenti alla figura y e i punti β'_0 γ'_0,... come appartenenti alla figura x; il corrispondente del vertice 1 è il vertice 1, quindi le $a_{11} \ldots a_{1n+1}$ sono tutte nulle tranne a_{11}; il corrispondente del vertice 2 è il punto 2 stesso, quindi le $a_{21} \ldots a_{2n+1}$ sono tutte nulle tranne a_{22}; ecc. fino al vertice h'_1; perchè i punti α_0 sono h'_1. Il corrispondente del vertice h'_1+1 cioè il corrispondente di β_0 è il punto β'_0 che trovasi sulla retta α_0 β_0, cioè sulla retta $(1, h'_1+1)$; quindi le $a_{h'_1+1,1} \ldots a_{h'_1+1,n+1}$ sono tutte nulle tranne $a_{h'_1+1,1}$ e $a_{h'_1+1,h'_1+1}$ ecc.; avendo poi presente che il determinante $D(r)=0$ corrispondentemente allo spazio multiplo $(h'_1-1, \ldots h'_{p'}-1)$ deve avere $h'_1+h'_2+\cdots+h'_{p'}-1$ radici eguali ad r', si conclude che $a_{11}=a_{22}=$ ecc., fino al $h'_1+h'_2+\cdots+h'_{p'}{}^{esima}=r'$.

(33) Così cancellando i termini che sono nulli e ponendo $a_{11}=a_{22}=\cdots=r'$ *[corrispondentemente allo spazio multiplo $(h'_1-1,.,.\ h'_{p'}-1)$ contenuto in S'] si vengono a trovare lungo la diagonale p' gruppi*

$$(r' y_1 \ldots r' y_{h'_1})(r' y_{h'_1+1} \ldots r' y_{h'_1+h'_2}) \ldots (r' y_{h'_1+\cdots+h'_{p'-1}+1} \ldots r' y_{h'_1+\cdots+h'_{p'}}),$$

composti il primo gruppo di h'_1 termini, il secondo di h'_2 termini... l'ultimo

---

piani $(A_1 \ldots A_n)$, $(A'_1 \ldots A'_n)$ e taglia la retta A_1 A'_1 in un punto che forma coi tre A_{n+1} A_1 A'_1 un rapporto anarmonico (invariante assoluto) che è lo stesso nelle due omologie. Se l'omologia è speciale cioè se il rapporto anarmonico è uguale ad uno, allora il piano d'omologia passa per A_{n+1}. Con quella corrispondenza si passa adunque da un'omologia all'altra, e il teorema è dimostrato. Come si vede in alcuni casi particolari in luogo degli spazii α si possono scegliere arbitrariamente delle coppie di punti corrispondenti; e questa scelta è sempre subordinata alla condizione che le corrispondenze costituiscano una totalità $n+\sum h(h-1)$ volte infinita.

di $h'_{p'}$ termini, e fuori della diagonale altri termini che si ottengono facendo scorrere dal basso all'alto il secondo gruppo di h'_1 posti, il terzo gruppo di h'_2 posti, l'ultimo gruppo di $h'_{p'-1}$ posti ed applicando dei coefficienti λ arbitrarii diversi da zero; e così in seguito [corrispondentemente allo spazio multiplo $(h''_1-1, \ldots h''_{p''}-1)$ contenuto in S'] avremo lungo la diagonale p'' gruppi; il primo gruppo di h''_1 termini ecc., l'ultimo di $h''_{p''}$ termini portanti tutti il coefficiente r'', e i termini fuori della diagonale si otterranno facendo scorrere dal basso all'alto il secondo gruppo di h''_1 posti ecc., l'ultimo di $h''_{p''-1}$ posti ed applicando dei coefficienti λ arbitrarii (*) *diversi da zero ecc.*

Con questa regola di facile applicazione possiamo scrivere nella loro forma più semplice le relazioni omografiche di un'omografia qualunque, il che deve riuscire molto utile nello studio delle omografie particolari (**).

Forme ridotte delle omografie.

Nella retta.

Classe unica [0 0]

$$x_1 = a y_1$$
$$x_2 = b y_2$$

[(0 0)]

$$x_1 = a y_1 + \lambda_1 y_2$$
$$x_2 = a y_2$$

Nel piano.

1.ª classe [0 0 0]

$$x_1 = a y_1$$
$$x_2 = b y_2$$
$$x_3 = c y_3$$

[(0 0) 0]

$$x_1 = a y_1 + \lambda_1 y_2$$
$$x_2 = a y_2$$
$$x_3 = b y_3$$

(*) I coefficienti λ dipendono dalla scelta del punto unità come si dimostra facilmente.

(**) Le formole che così si ottengono le credevo nuove; poi ho saputo che il Jordan (*Sur la résolution des équations différentielles linéaires.* Tomo LXXIII des Comptes rendus) in sostanza le ha trovate analiticamente trattando un argomento tutt'affatto diverso; esso non dà però la regola (33) che serve per ottenerle.

1.ª classe [(0 0 0)]

$$\begin{aligned} x_1 &= a y_1 + \lambda_1 y_2 \\ x_2 &= \quad a y_2 + \lambda_2 y_3 \\ x_3 &= \quad\quad a y_3 \end{aligned}$$

2.ª classe [1 0]

$$\begin{aligned} x_1 &= a y_1 \\ x_2 &= \quad a y_2 \\ x_3 &= \quad\quad b y_3 \end{aligned}$$

[(1 0)]

$$\begin{aligned} x_1 &= a y_1 \quad + \lambda_1 y_3 \\ x_2 &= \quad a y_2 \\ x_3 &= \quad\quad a y_3 \end{aligned}$$

Nello spazio.

1.ª classe [0 0 0 0]

$$\begin{aligned} x_1 &= a y_1 \\ x_2 &= \quad b y_2 \\ x_3 &= \quad\quad c y_3 \\ x_4 &= \quad\quad\quad d y_4 \end{aligned}$$

[(0 0) 0 0]

$$\begin{aligned} x_1 &= a y_1 + \lambda_1 y_2 \\ x_2 &= \quad a y_2 \\ x_3 &= \quad\quad b y_3 \\ x_4 &= \quad\quad\quad c y_4 \end{aligned}$$

[(0 0) (0 0)]

$$\begin{aligned} x_1 &= a y_1 + \lambda_1 y_2 \\ x_2 &= \quad a y_2 \\ x_3 &= \quad\quad b y_3 + \lambda_2 y_4 \\ x_4 &= \quad\quad\quad b y_4 \end{aligned}$$

[(0 0 0) 0]

$$\begin{aligned} x_1 &= a y_1 + \lambda_1 y_2 \\ x_2 &= \quad a y_2 + \lambda_2 y_3 \\ x_3 &= \quad\quad a y_3 \\ x_4 &= \quad\quad\quad b y_4 \end{aligned}$$

1.ª classe [(0000)]

$$\begin{array}{llllll} x_1 = & a y_1 + \lambda_1 y_2 & & & \\ x_2 = & & a y_2 + \lambda_2 y_3 & & \\ x_3 = & & & a y_3 + \lambda_3 y_4 & \\ x_4 = & & & & a y_4 \end{array}$$

2.ª classe [100]

$$\begin{array}{lllll} x_1 = & a y_1 & & & \\ x_2 = & & a y_2 & & \\ x_3 = & & & b y_3 & \\ x_4 = & & & & c y_4 \end{array}$$

[(10)0]

$$\begin{array}{lllll} x_1 = & a y^1 & & + \lambda_1 y_3 & \\ x_2 = & & a y_2 & & \\ x_3 = & & & a y_3 & \\ x_4 = & & & & b y_4 \end{array}$$

[1(00)]

$$\begin{array}{lllll} x_1 = & a y_1 & & & \\ x_2 = & & a y_2 & & \\ x_3 = & & & b y_3 + \lambda_1 y_4 & \\ x_4 = & & & & b y_4 \end{array}$$

[(100)]

$$\begin{array}{lllll} x_1 = & a y_1 + & & \lambda_1 y_3 & \\ x_2 = & & a y_2 & & \\ x_3 = & & & a y_3 + \lambda_2 y_4 & \\ x_4 = & & & & a y_4 \end{array}$$

3.ª classe [11]

$$\begin{array}{lllll} x_1 = & a y_1 & & & \\ x_2 = & & a y_2 & & \\ x_3 = & & & b y_3 & \\ x_4 = & & & & b y_4 \end{array}$$

[(11)]

$$\begin{array}{lllll} x_1 = & a y_1 & & + \lambda_1 y_3 & \\ x_2 = & & a y_2 & & + \lambda_2 y_4 \\ x_3 = & & & a y_3 & \\ x_4 = & & & & a y_4 \end{array}$$

4.ª classe $\quad [2\,0] \quad$
$$\begin{aligned} x_1 &= a y_1 \\ x_2 &= \quad a y_2 \\ x_3 &= \qquad a y_3 \\ x_4 &= \qquad\quad b y_4 \end{aligned}$$

$[(2\,0)]$
$$\begin{aligned} x_1 &= a y_1 \qquad\quad + \lambda_1 y_4 \\ x_2 &= \quad a_0 y_2 \\ x_3 &= \qquad a y_3 \\ x_4 &= \qquad\quad a y_4 . \end{aligned}$$

Le λ sono quantità arbitrarie come è noto diverse da zero.

§ 10.

Ora dedurremo dal teorema (32) quello di Weierstrass sulle forme bilineari. Due omografie non degeneri fra due spazii S_n ed S'_n

$$\sum_{ik} a_{ik}\, x_i\, \xi'_k = 0 \qquad \sum_{ik} b_{ik}\, x_i\, \xi'_k = 0, \tag{1}$$

determinano un'omografia (A) di S_n in sè stesso, assumendo per punti corrispondenti in S_n due punti che corrispondono allo stesso punto di S'_n. Quest'omografia è rappresentata dalle relazioni:

$$\sum_i a_{ik}\, x_i = \sum_i b_{ik}\, y_i \qquad (k = 1 \dots n+1).$$

Analogamente due altre omografie fra i due spazii S_n ed S'_n

$$\sum_{ik} a'_{ik}\, X_i\, \Xi'_k = 0 \qquad \sum_{ik} b'_{ik}\, X_i\, \Xi'_k = 0, \tag{2}$$

determinano un'omografia (A') di S_n in sè stesso data dalle relazioni:

$$\sum_i a'_{ik}\, X_i = \sum_i b'_{ik}\, Y_i .$$

Si vede subito che se i due determinanti

$$|a_{ik} - r\, b_{ik}| \qquad |a'_{ik} - r\, b'_{ik}|,$$

hanno gli stessi divisori elementari le due omografie (A) ed (A') appartengono alla stessa sottoclasse (*).

Il teorema di Weierstrass è questo:

Se con una trasformazione delle x nelle X e con una trasformazione delle ξ' nelle ξ' con moduli diversi da zero si passa dalle funzioni bilineari

$$\sum_{ik} a_{ik}\, x_i\, \xi'_k, \qquad \sum_{ik} b_{ik}\, X_i\, \xi'_k,$$

rispettivamente alle funzioni bilineari

$$\sum_{ik} a'_{ik}\, X_i\, \Xi'_k, \qquad \sum_{ik} b'_{ik}\, X_i\, \Xi'_k,$$

i due determinanti

$$|a_{ik} - r\, b_{ik}| \qquad |a'_{ik} - r\, b'_{ik}|,$$

hanno gli stessi divisori elementari; e viceversa.

Il teorema diretto è subito dimostrato; la dimostrazione del teorema inverso fu data da Weierstrass ricorrendo a sviluppi in serie; qui dedurremo questo teorema inverso, completandolo, dal teorema (32).

(*) Le relazioni che legano gli esponenti dei divisori elementari e le dimensioni degli spazii fondamentali si trovano facilmente col teorema (15).

Alla radice r' del determinante $D(r) = 0$ di un'omografia qualunque corrisponda uno spazio fondamentale multiplo $(h_1 - 1, \ldots h_p - 1)$. L'omografia si può considerare come il limite di un'omografia generale nella quale in luogo dello spazio multiplo $(h_1 - 1, \ldots h_p - 1)$ si hanno p spazii fondamentali semplici rispettivamente ad $h_1 - 1, \ldots h_p - 1$ dimensioni, corrispondenti a certe radici $a_1 \ldots a_p$. Sarà a_1 radice $h_1{}^{esima}$ del determinante che tien luogo nell'omografia generale di $D(r)$, sarà radice $h_1 - 1^{esima}$ dei minori di ordine n, $h_1 - 2^{esima}$ dei minori di ordine $n - 1$ ecc.; e così a_2 sarà radice $h_2{}^{esima}$ ecc. Quando l'omografia generale tende alla data, le radici $a_1 \ldots a_p$ tendono ad r'; per cui nell'omografia data, r' sarà radice $h_1 + \cdots + h_p{}^{esima}$ di $D(r) = 0$, $h_1 - 1 + \cdots + h_p - 1^{esima}$ dei minori di ordine n, $h_1 - 2 + \cdots + h_p - 2^{esima}$ dei minori di ordine $n - 1$ ecc.

Facendo le differenze successive per trovare gli esponenti e dei divisori elementari, otteniamo p gruppi di numeri e:

$$\underbrace{p \ldots p}_{h_p}, \qquad \underbrace{p-1 \ldots p-1}_{h_{p-1} - h_p}, \qquad \underbrace{p-2 \ldots p-2}_{h_{p-2} - h_{p-1}} \ldots \qquad \underbrace{1 \ldots 1}_{h_1 - h_2}.$$

Il 1.° gruppo è composto di h_p numeri $= p$, il 2.° di $h_{p-1} - h_p$ numeri $= p - 1$, il 3.° di $h_{p-2} - h_{p-1}$ numeri $= p - 2 \ldots$, l'ultimo di $h_1 - h_2$ numeri $= 1$; come è indicato. Dato dunque i numeri h possiamo trovare i numeri e; e viceversa dati i numeri e, h_1 è il numero di tutti i numeri e, h_2 è il numero di tutti i numeri e meno quelli dell'ultimo gruppo, ecc. h_p è il numero di tutti i numeri e del 1.° gruppo.

È stato implicitamente dimostrato che gli esponenti dei divisori elementari non sono crescenti.

Passiamo con una trasformazione di S_n in sè stesso

$$x_i = \sum_k \alpha_{ik} X_k, \tag{α}$$

dall'omografia (A) all'omografia (A'); allora con quella trasformazione le [1] diventeranno:

$$\sum_{ik} a''_{ik} X_i \xi'_k = 0 \qquad \sum_{ik} b''_{ik} X_i \xi'_k = 0. \tag{[3]}$$

Le [2] e le [3] rappresentano in S_n la stessa omografia (A'). Assumendo per punti corrispondenti in S'_n due punti che corrispondono l'uno per le [2] l'altro per le [3] alla stessa coppia di punti corrispondenti dell'omografia (A') avremo in S'_n un'omografia non degenere rappresentata da certe relazioni:

$$\xi'_i = \sum_k \beta_{ik} \Xi'_k, \tag{β}$$

dove le β_{ik} sono determinate a meno di un fattore di proporzionalità. Con queste trasformazioni passeremo dalle [3] alle

$$\sum_{ik} a'''_{ik} X_i \Xi'_k = 0 \qquad \sum_{ik} b'''_{ik} X_i \Xi'_k = 0. \tag{[4]}$$

Ora assunto un punto di S'_n,

$$\sum_{ik} a'_{ik} X_i \Xi'_k = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{ik} a'''_{ik} X_i \Xi'_k = 0,$$

dànno lo stesso punto corrispondente di S_n;

$$\sum_{ik} a'_{ik} X_i \Xi'_k \quad \text{e} \quad \sum_{ik} a'''_{ik} X_i \Xi'_k,$$

potranno differire quindi al più per un fattore ρ. Analogamente

$$\sum_{ik} b'_{ik} X_i \Xi'_k \quad \text{e} \quad \sum_{ik} b'''_{ik} X_i \Xi'_k,$$

potranno differire al più per un fattore che sarà lo stesso ρ; dovendo i due determinanti

$$|a'_{ik} - r\, b'_{ik}| \quad \text{e} \quad |a'''_{ik} - r\, b'''_{ik}|,$$

avere gli stessi divisori elementari. Determiniamo il fattore di proporzionalità contenuto nelle β_{ik} in modo che

$$\sum a'_{ik} X_i \Xi'_k \quad \text{e} \quad \sum b'_{ik} X_i \Xi'_k,$$

siano rispettivamente identiche a

$$\sum a'''_{ik} X_i \Xi'_k \quad \text{e} \quad \sum b'''_{ik} X_i \Xi'_k.$$

Cosi colle trasformazioni (α) e (β) passeremo delle [1] alle]2]; ma fra le α_{ik} ve ne sono $n+1+\sum h(h-1)$ (*) arbitrarie, dunque:

(34) *Non solo colle sostituzioni* (α) (β) *passiamo dalle funzioni bilineari* $\sum a_{ik} x_i \xi'_k$ $\sum b_{ik} x_i \xi'_k$ *alle funzioni bilineari* $\sum a'_{ik} X_i \Xi'_k$ $\sum b'_{ik} X_i \Xi'_k$ *quando i due determinanti* $|a_{ik} - r b_{ik}|$ e $|a'_{ik} - r b'_{ik}|$ *hanno gli stessi divisori elementari, ma nell'una o nell'altra di queste sostituzioni sono completamente arbitrarii* $n+1+\sum h(h-1) = \sum h^2$ *coefficienti, gli altri sono in conseguenza determinati.*

E questo è il completamento del teorema di WEIERSTRASS.

§ 11.

Abbiamo visto che date due omografie, appartenenti alla stessa sottoclasse, possiamo passare geometricamente dall'una all'altra; ora vediamo come si possono determinare i coefficienti di questa omografia. Siano

$$x_i = \sum_k a_{ki}\, y_i \qquad [1]$$

$$x'_i = \sum_k b_{ki}\, y'_k \qquad (i = 1 \dots n+1),$$

le omografie date appartenenti alla stessa sottoclasse; e

$$x_i = \sum_k c_{ki}\, x'_k, \qquad [3]$$

l'omografia per cui si passa dall'una all'altra. Sostituendo la [1] diventerà:

$$\sum_k c_{ki}\, x'_k = \sum_k a_{ki} \sum_p c_{pk}\, y'_p.$$

Moltiplichiamo per $\frac{C_{qi}}{C}$ (dove C_{qi} è il complemento algebrico del determinante $C = |c_{ki}|$) e addizioniamo rispetto ad i

$$\sum_k x'_k \sum_i c_{ki} \frac{C_{qi}}{C} = \sum_i \frac{C_{qi}}{C} \sum_k a_{ki} \sum_p c_{pk}\, y'_p,$$

ovvero:

$$x'_q = \sum_p y'_p \sum_k \sum_i a_{ki}\, c_{pk} \frac{C_{qi}}{C};$$

(*) Le $h-1$ sono le dimensioni degli spazii fondamentali distinti o a gruppi sovrapposti dell'omografia (A) od (A'). Veggasi l'osservazione 1.ª della nota a pag. 149.

poichè le [3] trasformano le [1] nelle [2] sarà:

$$b_{pq} = \sum_k \sum_i a_{ki}\, c_{pk} \frac{C_{qi}}{C}.$$

Moltiplicando per c_{qr} ed addizionando rispetto a q:

$$\sum_q b_{pq}\, c_{qr} = \sum_k \sum_i a_{ki}\, c_{pk} \sum_q c_{hr} \frac{C_{qi}}{C},$$

ovvero:

$$\sum_q b_{pq}\, c_{qr} = \sum_k c_{pk}\, a_{kr};$$

e mettendo la sommatoria rispetto a q anche nel 2.° membro:

$$\sum_q b_{pq}\, c_{qr} = \sum_q c_{pq}\, a_{qr}. \qquad [4]$$

Dando a p e ad r tutti i valori possibili otteniamo $(n+1)^2$ equazioni fra le c. Cioè:

Se le omografie [1] e [2] appartengono alla stessa sottoclasse i coefficienti delle sostituzioni per le quali si passa dalla prima alla seconda soddisfano alle $(n+1)^2$ equazioni [4]. Viceversa; se

$$\begin{matrix} c_{11} \ldots & c_{n+1\,1} \\ c_{1n+1} \ldots & c_{n+1\,n+1}, \end{matrix}$$

soddisfano alle [4] e il loro determinante è diverso da zero, colle sostituzioni [3] si passa dall'omografia [1] alla omografia [2]. Infatti per mezzo delle [3] le [1] diventano

$$x'_q = \sum_p y'_p \sum_k \sum_i a_{ki}\, c_{pk} \frac{C_{qi}}{C},$$

ovvero:

$$x'_q = \sum_p y'_p \sum_i \frac{C_{qi}}{C} \sum_k c_{pk}\, a_{ki},$$

e per le [4]:

$$x'_q = \sum_p y'_p \sum_i \frac{C_{qi}}{C} \sum_k b_{pk}\, c_{ki},$$

da cui:

$$x'_q = \sum_p y'_p \sum_k b_{pk} \sum_i c_{ki} \frac{C_{qi}}{C},$$

e finalmente

$$x'_q = \sum_p b_{pq} y'_p,$$

c. d. d.

Esistendo (32) una varietà $n+1+\sum h(h-1)$ volte infinita di sostituzioni [3] per le quali si passa dall'omografia [1] alla [2]; fra le [4] vi devono essere $n+1+\sum h(h-1)$ equazioni che sono conseguenza delle altre; dei coefficienti c, $n+1+\sum h(h-1)$ sono arbitrarii, gli altri sono combinazioni lineari dei primi.

(35) *Se due omografie appartengono alla stessa sottoclasse, nelle sostituzioni per le quali si passa dall'una all'altra vi sono* $n+1+\sum h(h-1)$ *coefficienti arbitrarii, gli altri sono combinazioni lineari dei primi.*

Le equazioni [4] dànno anche quest'altro teorema:

(36) *Se due determinanti* $|b_{pq}|$ *ed* $|a_{qr}|$ *hanno la stessa caratteristica esiste un determinante* $|c_{qr}|$ [*nel quale* $n+1+\sum h(h-1)$ *elementi sono arbitrarii e gli altri ecc.*] *tale che moltiplicando* $|b_{pq}|$ *per* $|c_{qr}|$ *colonne per righe, e* $|c_{qr}|$ *per* $|a_{qr}|$ *colonne per righe si ottengono due determinanti identici elemento per elemento.* E viceversa.

Sul sistema di due coniche.

(*Del dott.* Francesco Gerbaldi, *a Roma.*)

I. Formole fondamentali.

Siano due forme ternarie quadratiche in notazione simbolica

$$a_x^2 = a'^2_x = \cdots = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3)^2 = \Sigma a_{ik} x_i x_k$$

$$b_x^2 = b'^2_x = \cdots = (b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3)^2 = \Sigma b_{ik} x_i x_k.$$

Se ne considerino le seguenti forme invariantive fondamentali

$$\begin{array}{ll} u_\alpha^2 = u_{\alpha'}^2 = \cdots = (a a' u)^2 & A_1 = (a a' a'')^2 = a_\alpha^2 \\ u_\tau^2 = u_{\tau'}^2 = \cdots = (a b u)^2 & \Theta_1 = (a a' b)^2 \ = b_\alpha^2 = a_\tau^2 \\ u_\beta^2 = u_{\beta'}^2 = \cdots = (b b' u)^2 & \Theta_2 = (a b b')^2 \ = a_\beta^2 = b_\tau^2 \\ f_x^2 = f'^2_x = \cdots = (\alpha \beta x)^2 & A_2 = (b b' b'')^2 \ = b_\beta^2, \end{array}$$

e si ricordino inoltre le relazioni:

$$(\alpha \alpha' x)^2 = \frac{4}{3} A_1 a_x^2 = \bar{a}_x^2 \qquad (1) \qquad\qquad (\beta \beta' x)^2 = \frac{4}{3} A_2 b_x^2 = \bar{b}_x^2 \qquad (2)$$

$$(\alpha \alpha' \alpha'')^2 = \frac{4}{3} A_1^2 = \overline{A_1} \qquad (3) \qquad\qquad (\beta \beta' \beta'')^2 = \frac{4}{3} A_2^2 = \overline{\Theta_2} \qquad (4)$$

$$(\alpha \alpha' \beta)^2 = \frac{4}{3} A_1 \Theta_2 = f_\alpha^2 = \overline{\Theta_1} \qquad (5) \qquad\qquad (\alpha \beta \beta')^2 = \frac{4}{3} A_2 \Theta_1 = f_\beta^2 = \overline{A_2}. \qquad (6)$$

Si introduca ora l'operazione

$$\delta = \Sigma \frac{\partial}{\partial a_{ik}} b_{ik},$$

per la quale si ha:

$$\begin{array}{llll} \delta a_x^2 = b_x^2 & \delta b_x^2 = 0 & & \\ \delta u_\beta^2 = 2 u_\tau^2 & \delta u_\tau^2 = u_\beta^2 & \delta u_\beta^2 = 0 & \\ \delta A_1 = 3 \Theta_1 & \delta \Theta_1 = 2 \Theta_2 & \delta \Theta_2 = A_2 & \delta A_2 = 0, \end{array}$$

e la si applichi successivamente ai due membri della (1), si deduce:

$$(\alpha \tau x)^2 = \Theta_1 a_x^2 + \frac{1}{3} A_1 b_x^2 \tag{7}$$

$$t_x^2 = (\tau \tau' x)^2 = \Theta_2 a_x^2 + \Theta_1 b_x^2 - \frac{1}{2} f_x^2 \tag{8}$$

$$(\beta \tau x)^2 = \frac{1}{3} A_2 \alpha_x^2 + \Theta_2 b_x^2. \tag{9}$$

Si applichi ancora l'operazione δ successivamente ai due membri della (3), e si avrà:

$$(\alpha \alpha' \tau)^2 = \frac{4}{3} A_1 \Theta_1 \tag{10}$$

$$(\alpha \tau \tau')^2 = \frac{1}{3}(A_1 \Theta_2 + 3\Theta_1^2) \qquad (\alpha \tau \tau')^2 = t_\alpha^2 = (a a' t)^2 \tag{11}$$

$$2(\tau \tau' \tau'')^2 + 2(\alpha \beta \tau)^2 = \frac{1}{3} A_1 A_2 + 5\Theta_1 \Theta_2 \tag{12}$$

$$(\beta \tau \tau')^2 = \frac{1}{3}(A_2 \Theta_1 + 3\Theta_2^2) \qquad (\beta \tau \tau')^2 = t_\beta^2 = (b b' t)^2 \tag{13}$$

$$(\beta \beta' \tau)^2 = \frac{4}{3} A_2 \Theta_2. \tag{14}$$

Dalla (8) ponendo $x_i = \tau_i$ si ha:

$$(\tau \tau' \tau'')^2 = 2\Theta_1 \Theta_2 - \frac{1}{2}(\alpha \beta \tau)^2,$$

e da questa combinata colla (12) si ricava:

$$(\alpha \beta \tau)^2 = \frac{1}{3}(A_1 A_2 + 3\Theta_1 \Theta_2) \qquad (\alpha \beta \tau)^2 = f_\tau^2 = (a b f)^2 \tag{15}$$

$$(\tau \tau' \tau'')^2 = \frac{1}{6}(9\Theta_1 \Theta_2 - A_1 A_2) \qquad (\tau \tau' \tau'')^2 = t_\tau^2 = (a b t)^2. \tag{16}$$

Le formole che corrispondono per dualità alle (7) (8) (9) sono:

$$(\bar{a} f u)^2 = \overline{\Theta}_1 u_\alpha^2 + \frac{1}{3} \overline{A}_1 u_\beta^2$$

$$(f f' u)^2 = \overline{\Theta}_2 u_\alpha^2 + \overline{\Theta}_1 u_\beta^2 - \frac{1}{2}(\bar{a} \bar{b} u)^2$$

$$(\bar{b} f u)^2 = \frac{1}{3} \overline{A}_2 u_\alpha^2 + \overline{\Theta}_2 u_\beta^2,$$

e da queste, in virtù delle relazioni (1), (2),..., (6), si deduce:

$$(afu)^2 = \Theta_2 u_\alpha^2 + \frac{1}{3} A_1 u_\beta^2 \tag{17}$$

$$u_\varphi^2 = (ff'u)^2 = \frac{4}{3} A_2 \Theta_1 u_\alpha^2 - \frac{8}{9} A_1 A_2 u_\tau^2 + \frac{4}{3} A_1 \Theta_2 u_\beta^2 \tag{18}$$

$$(bfu)^2 = \frac{1}{3} A_2 u_\alpha^2 + \Theta_1 u_\beta^2. \tag{19}$$

Nella (18) si ponga successivamente

$$u_i = a_i, \qquad b_i, \qquad t_i, \qquad f_i,$$

e si tengano presenti le formole (5), (6), (11), (13), (15), (16), si avrà:

$$a_\varphi^2 = (aff')^2 = \frac{4}{9} A_1 (3\Theta_2^2 + A_2 \Theta_1) \tag{20}$$

$$f_\varphi^2 = (ff'f'')^2 = \frac{8}{27} A_1 A_2 (9\Theta_1\Theta_2 - A_1 A_2) \tag{21}$$

$$b_\varphi^2 = (bff')^2 = \frac{4}{9} A_2 (3\Theta_1^2 + A_1 \Theta_2) \tag{22}$$

$$t_\varphi^2 = (ff't)^2 = \frac{4}{27} (9 A_1 \Theta_2^3 + 9 A_2 \Theta_1^3 + A_1^2 A_2^2 - 3 A_1 A_2 \Theta_1 \Theta_2). \tag{23}$$

II. Fascio e schiera di coniche.

Le equazioni $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$ rappresentano due coniche C_1 e C_2 in coordinate di punti, e le equazioni $u_\alpha^2 = 0$, $u_\beta^2 = 0$ rappresentano le stesse in coordinate di rette. L'equazione $u_\tau^2 = 0$ rappresenta una conica le cui tangenti tagliano armonicamente C_1 e C_2: e l'equazione $f_x^2 = 0$ rappresenta una conica i cui punti proiettano armonicamente C_1 e C_2.

Le coniche C_1 e C_2 determinano un fascio ed una schiera di coniche. Le equazioni:

$$a_x^2 + \theta b_x^2 = 0 \tag{24}$$

$$u_\alpha^2 + 2\theta u_\tau^2 + \theta^2 u_\beta^2 = 0, \tag{24'}$$

rappresentano una conica qualunque del fascio, la prima in coordinate di punti, la seconda in coordinate di rette. Così pure le equazioni:

$$u_\alpha^2 + \eta u_\beta^2 = 0 \tag{25}$$

$$\overline{a}_x^2 + 2\eta f_x^2 + \eta^2 \overline{b}_x^2 = 0, \tag{25'}$$

rappresentano una conica qualunque della schiera; la prima in coordinate di rette, la seconda in coordinate di punti.

Nel fascio vi sono tre coniche degenerate in coppie di rette; i valori corrispondenti del parametro θ sono le radici dell'equazione

$$A_1 + 3\Theta_1\theta + 3\Theta_2\theta^2 + A_2\theta^3 = 0, \tag{26}$$

e li denoteremo con θ', θ'', θ'''; per questi valori di θ la (24') rappresenta i vertici del triangolo autoconiugato comune a C_1 e C_2 contati ciascuno due volte.

Nella schiera vi sono tre coniche degenerate in coppie di punti; i valori corrispondenti del parametro η sono le radici dell'equazione

$$\overline{A}_1 + 3\overline{\Theta}_1\eta + 3\overline{\Theta}_2\eta^2 + \overline{A}_2\eta^3 = 0,$$

e li denoteremo con η', η'', η'''; per questi valori di η la (25') rappresenta i lati del triangolo autoconiugato comune a C_1 e C_2, contati ciascuno due volte.

In virtù delle formole (3), (4), (5), (6) si hanno le relazioni

$$\eta' = \frac{A_1}{A_2\theta'} \qquad \eta'' = \frac{A_1}{A_2\theta''} \qquad \eta''' = \frac{A_1}{A_2\theta'''}\,. \tag{27}$$

In ciò che segue, quando le coniche C_1 e C_2 si suppongono non degeneri e quindi A_1 ed A_2 diversi da zero, porremo per ragioni di semplicità e di simmetria

$$X_1 = \frac{4}{3}A_2 a_x^2 \qquad X_2 = 2f_x^2 \qquad X_3 = \frac{4}{3}A_1 b_x^2$$

$$U_1 = u_\alpha^2 \qquad U_2 = 2u_\tau^2 \qquad U_3 = u_\beta^2.$$

Allora le equazioni dei lati del triangolo autoconiugato (contati ciascuno due volte) si scrivono:

$$\theta^2 X_1 + \theta X_2 + X_3 = 0 \qquad [\theta = \theta', \ \theta'', \ \theta'''], \tag{28}$$

e le equazioni dei vertici (contati ciascuno due volte) si scrivono:

$$U_1 + \theta U_2 + \theta^2 U_3 = 0 \qquad [\theta = \theta', \ \theta'', \ \theta''']. \tag{29}$$

Il discriminante dell'equazione di 3.° grado (26) è

$$R = A_1^2 A_2^2 - 3\Theta_1^2\Theta_2^2 - 6A_1A_2\Theta_1\Theta_2 + 4A_2\Theta_1^3 + 4A_1\Theta_2^3, \tag{30}$$

e quando esso si annulla le due coniche C_1 e C_2 si toccano.

III. Le coniche invariantive.

Siccome il sistema di due forme ternarie quadratiche ha soltanto tre covarianti di second'ordine, così tutte le coniche che hanno relazioni invariantive colle coniche date C_1 e C_2 formano una rete, di cui l'equazione è

$$l a_x^2 + 2 m f_x^2 + n b_x^2 = 0. \tag{31}$$

Siccome poi il sistema di tre forme ternarie quadratiche ha soltanto tre contravarianti di 2.ª classe, così tutte le coniche che hanno relazioni invariantive colle C_1 e C_2 formano un tessuto, di cui l'equazione è

$$\lambda u_\alpha^2 + 2\mu u_\tau^2 + \nu u_\beta^2 = 0. \tag{32}$$

Le coniche invariantive di C_1 e C_2 formano adunque una serie che è ad un tempo *rete* e *tessuto;* cioè ve ne è sempre una ed una sola che passa per due punti dati, e così pure ve ne è sempre una ed una sola che tocca due rette date; le coniche d'un siffatto sistema hanno tutte, come è noto, uno stesso triangolo autoconiugato.

Una conica di equazione tangenziale (32), che chiameremo *conica* (λ, μ, ν), ha per equazione locale

$$\begin{gathered}\lambda^2(\alpha\alpha' x)^2 + 4\mu^2(\tau\tau' x)^2 + \nu^2(\beta\beta' x)^2 \\ + 4\mu\nu(\beta\tau x)^2 + 2\lambda\nu(\alpha\beta x)^2 + 4\lambda\mu(\alpha\tau x)^2 = 0,\end{gathered}$$

e questa, in virtù delle formole (1), (2), (7), (8), (9), si riduce precisamente alla forma (31), avendosi:

$$\left.\begin{aligned} l &= \frac{4}{3}[A_1\lambda^2 + 3\Theta_1\lambda\mu + 3\Theta_2\mu^2 + A_2\mu\nu] \\ m &= \lambda\nu - \mu^2 \\ n &= \frac{4}{3}[A_1\lambda\mu + 3\Theta_1\mu^2 + 3\Theta_2\mu\nu + A_2\nu^2]. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Analogamente una conica di equazione locale (31), che chiameremo *conica* (l, m, n), ha per equazione tangenziale

$$\begin{gathered}l^2(a a' u)^2 + 4m^2(f f' u)^2 + n^2(b b' u)^2 \\ + 4mn(b f u)^2 + 2ln(a b u)^2 + 4lm(a f u)^2 = 0,\end{gathered}$$

e questa, in virtù delle formole (17), (18), (19) si riduce precisamente alla forma (32), avendosi

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= l^2 + 4\Theta_2 lm + \frac{16}{3} A_2 \Theta_1 m^2 + \frac{4}{3} A_2 mn \\ \mu &= ln - \frac{16}{9} A_1 A_2 m^2 \\ \nu &= n^2 + 4\Theta_1 mn + \frac{16}{3} A_1 \Theta_2 m^2 + \frac{4}{3} A_1 lm. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

In ciò che segue, fino a tanto che le coniche C_1 e C_2 si suppongono non degeneri, scriveremo le equazioni locale e tangenziale d'una conica invariantiva sotto la forma:

$$l_1 X_1 + l_2 X_2 + l_3 X_3 = 0 \tag{31'}$$

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0, \tag{32'}$$

e allora le relazioni precedenti tra i *parametri locali* $l_1\ l_2\ l_3$ ed i *parametri tangenziali* $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ acquistano maggior simmetria e diventano:

$$\left.\begin{aligned} l_1 &= \frac{1}{A_2}\left[A_1 \lambda_1^2 + 3\Theta_1 \lambda_1 \lambda_2 + 3\Theta_2 \lambda_2^2 + A_2 \lambda_2 \lambda_3\right] \\ l_2 &= \lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2^2 \\ l_3 &= \frac{1}{A_1}\left[A_2 \lambda_3^2 + 3\Theta_2 \lambda_2 \lambda_3 + 3\Theta_1 \lambda_2^2 + A_1 \lambda_1 \lambda_2\right] \end{aligned}\right\} \tag{33'}$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{A_1}\left[A_2 l_1^2 + 3\Theta_2 l_1 l_2 + 3\Theta_1 l_2^2 + A_1 l_2 l_3\right]. \\ \lambda_2 &= l_1 l_3 - l_2^2 \\ \lambda_3 &= \frac{1}{A_2}\left[A_1 l_3^2 + 3\Theta_1 l_2 l_3 + 3\Theta_2 l_2^2 + A_2 l_1 l_2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{34'}$$

Dalle (33') si passa alle (34') e viceversa dalle (34') si ritorna alle (33') cogli scambi di l_1 con λ_3, di l_2 con λ_2, e di l_3 con λ_1.

Il discriminante di una conica di equazione (32) è:

$$\begin{aligned} &(\alpha\alpha'\alpha'')^2\lambda^3 + 8(\tau\tau'\tau'')^2\mu^3 + (\beta\beta'\beta'')^2\nu^3 + 12(\alpha\beta\tau)^2\lambda\mu\nu \\ &+ 6(\alpha\alpha'\tau)^2\lambda^2\mu + 3(\alpha\alpha'\beta)^2\lambda^2\nu + 12(\alpha\tau\tau')^2\mu^2\lambda \\ &+ 12(\beta\tau\tau')^2\mu^2\nu + 3(\alpha\beta\beta')^2\lambda\nu^2 + 6(\beta\beta'\tau)^2\mu\nu^2, \end{aligned}$$

donde, tenendo presenti le formole (3), (4), (5), (6), (10)... (16) si ha che il discriminante della conica $(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3)$ è:

$$\left.\begin{aligned}&A_1^2\lambda_1^3+(9\Theta_1\Theta_2-A_1A_2)\lambda_2^3+A_2^2\lambda_3^3+3(A_1A_2+3\Theta_1\Theta_2)\lambda_1\lambda_2\lambda_3\\&+6A_1\Theta_1\lambda_1^2\lambda_2+6A_2\Theta_2\lambda_2\lambda_3^2+3A_1\Theta_2\lambda_1^2\lambda_3+3A_2\Theta_1\lambda_1\lambda_3^2\\&+3(A_1\Theta_2+3\Theta_1^2)\lambda_1\lambda_2^2+3(A_2\Theta_1+3\Theta_2^2)\lambda_2^2\lambda_3.\end{aligned}\right\}\quad(35)$$

In modo analogo si potrebbe ottenere il discriminante della conica $(l_1\ l_2\ l_3)$; ma esso si deduce immediatamente dalla formola precedente scambiando λ_1, λ_2, λ_3 rispettivamente con l_3, l_2, l_1; ed è:

$$\left.\begin{aligned}&A_2^2l_1^3+(9\Theta_1\Theta_2-A_1A_2)l_2^3+A_1^2l_3^3+3(A_1A_2+3\Theta_1\Theta_2)l_1l_2l_3\\&+6A_2\Theta_2l_1^2l_2+6A_1\Theta_1l_2l_3^2+3A_2\Theta_1l_1^2l_3+3A_1\Theta_2l_1l_3^2\\&+3(A_2\Theta_1+3\Theta_2^2)l_1l_2^2+3(A_1\Theta_2+3\Theta_1^2)l_2^2l_3.\end{aligned}\right\}\quad(36)$$

Infine, se della conica si conoscono ad un tempo i parametri locali ed i tangenziali, il suo discriminante è:

$$\begin{aligned}&a_\alpha^2l\lambda+4f_\gamma^2m\mu+b_\beta^2n\nu+a_\beta^2l\nu+b_\alpha^2n\lambda\\&+2a_\gamma^2l\mu+2f_\alpha^2m\lambda+2b_\gamma^2n\mu+2f_\beta^2m\nu,\end{aligned}$$

ossia:

$$\left.\begin{aligned}&A_1A_2(l_1\lambda_1+l_3\lambda_3)+2A_2\Theta_1(l_1\lambda_2+l_2\lambda_3)+2A_1\Theta_2(l_2\lambda_1+l_3\lambda_2)\\&+(3\Theta_1\Theta_2+A_1A_2)l_2\lambda_2+A_1\Theta_1l_3\lambda_1+A_2\Theta_2l_1\lambda_3.\end{aligned}\right\}\quad(37)$$

A due terne proporzionali $\lambda_1:\lambda_2:\lambda_3::\lambda'_1:\lambda'_2:\lambda'_3$ di parametri tangenziali corrisponde evidentemente una stessa conica. La proposizione inversa non è evidente, ed infatti vi è un caso in cui essa non è vera, e questo caso avviene quando le due coniche C_1 e C_2 hanno doppio contatto.

Se la conica $(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3)$ coincide colla conica $(\lambda'_1\ \lambda'_2\ \lambda'_3)$, denotando con k un incognito fattore, deve essere identicamente per tutti i valori di u_1, u_2, u_3

$$(\lambda_1-k\lambda'_1)u_\alpha^2+2(\lambda_2-k\lambda'_2)u_\gamma^2+(\lambda_3-k\lambda'_3)u_\beta^2=0,\qquad(a)$$

donde, ponendo successivamente $u_i=a_i$, b_i, f_i e tenendo presenti le formole (5) e (15), si deduce:

$$\begin{aligned}A_1(\lambda_1-k\lambda'_1)+2\Theta_1(\lambda_2-k\lambda'_2)+\Theta_2(\lambda_3-k\lambda'_3)&=0\\\Theta_1(\lambda_1-k\lambda'_1)+2\Theta_2(\lambda_2-k\lambda'_2)+A_2(\lambda_3-k\lambda'_3)&=0\\2A_1\Theta_2(\lambda_1-k\lambda'_1)+(3\Theta_1\Theta_2+A_1A_2)(\lambda_2-k\lambda'_2)+2A_2\Theta_1(\lambda_3-k\lambda'_3)&=0.\end{aligned}$$

Il determinante di queste tre equazioni omogenee di 1.° grado rispetto ai binomii $\lambda_i-k\lambda'_i$ è $-R$. Dunque se R non è zero, cioè se le coniche C_1 e C_2

non si toccano, le coniche $(\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3)$ e $(\lambda'_1\,\lambda'_2\,\lambda'_3)$ coincideranno soltanto quando si abbia:

$$\lambda_1 - k\lambda'_1 = 0 \qquad \lambda_2 - k\lambda'_2 = 0 \qquad \lambda_3 - k\lambda'_3 = 0,$$

quando cioè le due terne di parametri sono proporzionali.

Se poi si ha $R = 0$, la terza delle precedenti equazioni è conseguenza delle prime due, le quali, denotando con h un fattore incognito, dànno:

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_1 - k\lambda'_1 = 2h(\Theta_2^2 - A_2\Theta_1), \qquad \lambda_2 - k\lambda'_2 = h(A_1A_2 - \Theta_1\Theta_2), \\ \lambda_3 - k\lambda'_3 = 2h(\Theta_1^2 - A_1\Theta_2), \end{array}\right\} \quad (38)$$

e mercè queste la identità (a) diventa:

$$h\left[(\Theta_2^2 - A_2\Theta_1)u_\alpha^2 + (A_1A_2 - \Theta_1\Theta_2)u_\tau^2 + (\Theta_1^2 - A_1\Theta_2)u_\beta^2\right] = 0;$$

dunque: o è h nullo, e allora dalle (38) segue nuovamente la proporzionalità fra le due terne di parametri; oppure deve annullarsi identicamente la forma:

$$u_\omega^2 = (\Theta_2^2 - A_2\Theta_1)u_\alpha^2 + (A_1A_2 - \Theta_1\Theta_2)u_\tau^2 + (\Theta_1^2 - A_1\Theta_2)u_\beta^2. \quad (39)$$

In quest'ultimo caso le coniche C_1 e C_2 (come è noto) hanno doppio contatto, ed in questo solo caso possono due coniche $(\lambda_1\,\lambda_2\,\lambda_3)$ e $(\lambda'_1\,\lambda'_2\,\lambda'_3)$ coincidere, senza che si abbia $\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3 : : \lambda'_1 : \lambda'_2 : \lambda'_3$; bastando allora per la coincidenza le relazioni (38), qualunque siano i valori delle costanti h e k, con k diverso da 0.

Analogamente si dimostra che due coniche $(l_1\,l_2\,l_3)$ ed $(l'_1\,l'_2\,l'_3)$ coincidono allora soltanto, quando si abbia $l_1 : l_2 : l_3 : : l'_1 : l'_2 : l'_3$; eccettuato il caso, in cui si ha per identità:

$$(\overline{\Theta}_2^2 - \overline{\Theta}_1\overline{A}_2)\overline{a}_x^2 + (\overline{A}_1\overline{A}_2 - \overline{\Theta}_1\overline{\Theta}_2)f_x^2 + (\overline{\Theta}_1^2 - \overline{A}_1\overline{\Theta}_2)\overline{b}_x^2 = 0,$$

nel qual caso si annulla identicamente la forma:

$$\Omega_x^2 = \frac{4}{3}A_2(\Theta_1^2 - A_1\Theta_2)a_x^2 + (A_1A_2 - \Theta_1\Theta_2)f_x^2 + \frac{4}{3}A_1(\Theta_2^2 - A_2\Theta_1)b_x^2, \quad (40)$$

e le coniche C_1 e C_2 hanno doppio contatto.

IV. Alcune notevoli coniche invariantive.

L'annullarsi dell'invariante Θ_1 significa (come è noto) che esistono infiniti triangoli iscritti in C_1 ed autoconiugati rispetto a C_2, ed infiniti triangoli circoscritti a C_2 ed autoconiugati rispetto a C_1; in questo caso diremo per brevità che la conica C_1 è *armonicamente iscritta* rispetto a C_2, ovvero che la conica C_2 è *armonicamente circoscritta* rispetto a C_1. Analogo significato ha l'annullarsi dell'invariante Θ_2, basta scambiare le veci delle due coniche C_1 e C_2. Quando son nulli tutti e due gli invarianti Θ_1 e Θ_2 è scambievole l'ufficio dell'una conica rispetto all'altra, e noi diremo *involutorie* due coniche siffatte.

Le due coniche involutorie di un fascio o d'una schiera (*). — In un fascio di coniche ve ne sono sempre due involutorie. Infatti si considerino nel fascio determinato da C_1 e C_2 due coniche di parametri $\theta = r$ $\theta = s$; i loro invarianti simultanei sono:

$$A_1 + (2s + r)\Theta_1 + s(2r + s)\Theta_2 + rs^2 A_2$$
$$A_1 + (2r + s)\Theta_1 + r(2s + r)\Theta_2 + r^2 s A_2.$$

Se le due coniche sono involutorie, essi si annullano, e se ne deducono le equazioni:

$$(r - s)[A_1 + (r + s)\Theta_1 + rs\Theta_2] = 0$$
$$(r - s)[\Theta_1 + (r + s)\Theta_2 + rsA_2] = 0.$$

Escludendo quindi le soluzioni che corrispondono ad $r = s$, per cui si otterrebbero le coniche degeneri del fascio, si ha che i parametri r s delle due coniche involutorie del fascio sono le radici dell'equazione di 2.° grado

$$\begin{vmatrix} x^2 & -x & 1 \\ A_1 & \Theta_1 & \Theta_2 \\ \Theta_1 & \Theta_2 & A_2 \end{vmatrix} = (\Theta_1 A_2 - \Theta_2^2)x^2 + (A_1 A_2 - \Theta_1\Theta_2)x + (\Theta_2 A_1 - \Theta_1^2) = 0, \quad (41)$$

la quale è l'Hessiana dell'equazione di 3.° grado (26) da cui dipendono le coniche degeneri del fascio, ed ha R per discriminante. Se $R > 0$, la (41) ha radici reali, e quindi le coniche involutorie del fascio sono reali, perchè nel caso di $R > 0$ tutte le coniche del fascio, che corrispondono a valori reali del parametro, sono reali. Se $R < 0$, le coniche involutorie sono imaginarie, perchè le radici della (41) sono imaginarie. Se $R = 0$, le coniche C_1 e C_2 si toccano; in questo caso la (41) ha una radice doppia, e questa è radice doppia della (26); quindi le due coniche involutorie coincidono in una conica degenere costituita dalla retta tangente a C_1 e C_2 nel loro punto di contatto e dalla corda per gli altri due punti comuni.

(*) Cfr. Battaglini, *Sulle forme ternarie quadratiche.* Giornale di Matematiche, Vol. VIII, pag. 134.

Analogamente, nella schiera determinata da C_1 e C_2 vi sono due coniche involutorie, i parametri delle quali sono gli inversi delle radici della (41) moltiplicati per $\frac{A_1}{A_2}$.

La conica combinante del fascio o della schiera (*). — Osserviamo che quando si scambia b_x^2 con $a_x^2 + r b_x^2$ bisogna scambiare

$$\left.\begin{array}{lll} u_\alpha^2 & \text{con} & u_\alpha^2 + r u_\tau^2 \\ u_\beta^2 & \text{con} & u_\alpha^2 + 2 r u_\tau^2 + r^2 u_\beta^2 \\ f_x^2 & \text{con} & (\alpha\alpha' x)^2 + 2r(\alpha\tau x)^2 + r^2(\alpha\beta x)^2 \\ & & = \left(\frac{4}{3} A_1 + 2r\Theta_1\right) a_x^2 + r^2 f_x^2 + \frac{2}{3} A_1 r b_x^2 \\ \Theta_1 & \text{con} & A_1 + r\Theta_1 \\ \Theta_2 & \text{con} & A_1 + 2r\Theta_1 + r^2\Theta_2 . \end{array}\right\} \tag{42}$$

Quindi se

$$u_\alpha^2 + y u_\tau^2 + z u_\beta^2,$$

è un combinante del fascio, si deve avere identicamente per tutti i valori di r e di $u_1\ u_2\ u_3$

$$k(u_\alpha^2 + y u_\tau^2 + z u_\beta^2) = u_\alpha^2 + y(u_\alpha^2 + r u_\tau^2) + z(u_\alpha^2 + 2 r u_\tau^2 + r^2 u_\beta^2),$$

donde ponendo successivamente $u_i = a_i,\ b_i$ si deducono le equazioni:

$$k(A_1 + y\Theta_1 + z\Theta_2) = A_1 + y(A_1 + r\Theta_1) + z(A_1 + 2r\Theta_1 + r^2\Theta_2)$$
$$k(\Theta_1 + y\Theta_2 + zA_2) = \Theta_1 + y(\Theta_1 + r\Theta_2) + z(\Theta_1 + 2r\Theta_2 + r^2 A_2),$$

le quali devono essere soddisfatte per valori fissi di y e z qualunque sia il valore di r; tali equazioni si possono scrivere:

$$(k-1)(A_1 + y\Theta_1 + z\Theta_2) = r\left[(y+2z)\Theta_1 + rz\Theta_2\right]$$
$$(k-1)(\Theta_1 + y\Theta_2 + zA_2) = r\left[(y+2z)\Theta_2 + rzA_2\right],$$

donde si ricava:

$$rz[(A_1A_2 - \Theta_1\Theta_2) + (\Theta_1 A_2 - \Theta_2^2)y] + (y+2z)[(A_1\Theta_2 - \Theta_1^2) + (\Theta_2^2 - A_2\Theta_1)z] = 0,$$

e, dovendo questa essere verificata per tutti i valori di r, si deduce:

$$y = \frac{A_1 A_2 - \Theta_1\Theta_2}{\Theta_2^2 - A_2\Theta_1} \qquad z = \frac{\Theta_1^2 - A_1\Theta_2}{\Theta_2^2 - A_2\Theta_1}.$$

(*) Cfr. Battaglini, l. c., pag. 143. — Mertens, *Ueber einen Kegelschnitt, welcher die Combinanteneigenschaft in Bezug auf ein Kegelschnittbüschel hat.* Sitzungsberichte der Mat. Classe der K. Akademie. Wien, Bd. 91; S. 637-640.

Dunque, se vi è una conica combinante del fascio, questa non può essere altro che $u_\omega^2 = 0$, essendo u_ω^2 la forma definita dalla (39).

Volendo l'equazione di questa conica in coordinate di punti, basta far capo alle relazioni (33), e sostituire in esse

$$\lambda = \Theta_2^2 - A_2\Theta_1, \qquad \mu = \frac{1}{2}(A_1A_2 - \Theta_1\Theta_2), \qquad \nu = \Theta_1^2 - A_1\Theta_2,$$

fatti i calcoli si ha:

$$l = \frac{R}{3}\Theta_2, \qquad m = -\frac{R}{4}, \qquad n = \frac{R}{3}\Theta_1,$$

dunque, se $R \gtrless 0$, *l'equazione locale della conica* $u_\omega^2 = 0$ *è*

$$2\Theta_2 a_x^2 - 3f_x^2 + 2\Theta_1 b_x^2 = 0. \tag{43}$$

Tenendo presenti le formole (42) è facile verificare che questa equazione non si altera quando si scambia b_x^2 con $a_x^2 + rb_x^2$; dunque *la conica* $u_\omega^2 = 0$ *è effettivamente un combinante del fascio.*

In modo analogo si dimostra che *per la schiera di coniche determinata da* C_1 *e* C_2 *vi è una sola conica combinante, ed è* $\Omega_x^2 = 0$, essendo Ω_x^2 la forma definita dalla (40). L'equazione tangenziale di questa conica, è (se $R \gtrless 0$)

$$A_2\Theta_1 u_\alpha^2 - 2A_1A_2u_\tau^2 + A_1\Theta_2 u_\beta^2 = 0. \tag{44}$$

La conica $u_\omega^2 = 0$ *è armonicamente circoscritta a tutte le coniche del fascio;* infatti si calcoli $a_\omega^2 + rb_\omega^2$ si ha:

$$a_\omega^2 = (\Theta_2^2 - A_2\Theta_1)A_1 + (A_1A_2 - \Theta_1\Theta_2)\Theta_1 + (\Theta_1^2 - A_1\Theta_2)\Theta_2 = 0$$
$$b_\omega^2 = (\Theta_2^2 - A_2\Theta_1)\Theta_1 + (A_1A_2 - \Theta_1\Theta_2)\Theta_2 + (\Theta_1^2 - A_1\Theta_2)A_2 = 0,$$

e quindi $a_\omega^2 + rb_\omega^2 = 0$.

Analogamente *la conica* $\Omega_x^2 = 0$ *è armonicamente iscritta rispetto a tutte le coniche della schiera.* Di qui segue facilmente che *la conica* $\Omega_x^2 = 0$ *è la conica dei* 14 *punti rispetto al quadrilatero in cui sono iscritte le coniche della schiera,* se si tien presente che il triangolo diagonale di questo quadrilatero è il triangolo autoconiugato rispetto a tutte le coniche invariantive, e che una coppia di vertici opposti del quadrilatero costituisce una conica degenere della schiera.

Le tangenti di $u_\omega^2 = 0$ *tagliano armonicamente le due coniche involutorie del fascio, ed i punti di* $u_\omega^2 = 0$ *proiettano armonicamente queste stesse.* Infatti, se $h_x^2 = a_x^2 + rb_x^2 = 0$ e $k_x^2 = a_x^2 + sb_x^2 = 0$ sono le coniche involutorie del fascio, la conica avviluppata dalle rette che le tagliano armonicamente è:

$$(hku)^2 = u_\alpha^2 + (r+s)u_\tau^2 + rsu_\beta^2 = 0,$$

e questa coincide con $u_\omega^2 = 0$, perchè r ed s sono radici della (41). Inoltre, se per due coniche gli invarianti Θ_1 e Θ_2 sono nulli, le loro coniche invariantive $u_\tau^2 = 0$ e $f_x^2 = 0$, in virtù delle formole (8) e (18), coincidono in una sola.

Analogamente *i punti di* $\Omega_x^2 = 0$ *proiettano armonicamente le due coniche involutorie della schiera, e le tangenti di* $\Omega_x^2 = 0$ *tagliano armonicamente le medesime.*

Ciascuna delle due coniche involutorie del fascio è involutoria colla conica combinante del fascio. Infatti, assumendo come date le due coniche involutorie del fascio, si ha $\Theta_1 = 0$ $\Theta_2 = 0$, ed $u_\omega^2 = 0$ si riduce a $u_\tau^2 = 0$; inoltre per le (11) e (13) si ha $t_\alpha^2 = 0$, $t_\beta^2 = 0$. Quindi *le due coniche involutorie e la conica combinante di un fascio formano una notevole terna di coniche (terna coniugata), che hanno uno stesso triangolo autoconiugato, e sono due a due involutorie.* Lo stesso dicasi per le due coniche involutorie e per la conica combinante di una schiera.

V. Coniche polari reciproche.

Sia Γ la polare reciproca di C_1 rispetto a C_2; se la retta u $(u_1\, u_2\, u_3)$ è tangente a Γ, il polo di u rispetto a C_2 sta su C_1; ma quel polo ha per coordinate $u_\beta\ \beta_i$, dunque sarà $a_\beta\, a_{\beta'}\, u_\beta\, u_{\beta'} = 0$.

Se il punto x sta su Γ, la polare di x rispetto a C_2 è tangente a C_1; ma quella polare ha per coordinate $b_x\ b_i$, dunque si avrà: $b_\alpha\, b'_\alpha\, b_x\, b'_x = 0$.

Pertanto la conica Γ avrà per equazioni locale e tangenziale

$$b_\alpha b'_\alpha b_x b'_x = 0 \qquad a_\beta a_{\beta'} u_\beta u_{\beta'} = 0.$$

Osserviamo, che si ha:

$$f_x^2 = (\alpha\beta x)^2 = (bb',\ \alpha x)^2 = (b_\alpha b'_x - b_x b'_\alpha)^2 = 2b_\alpha^2 b'^2_x - 2b_\alpha b'_\alpha b_x b'_x$$

$$\frac{4}{3} A_2 (abu)^2 = (au,\ \beta\beta')^2 = (a_\beta u_{\beta'} - a_{\beta'} u_\beta)^2 = 2a_\beta^2 u_\beta^2 - 2a_\beta a_{\beta'} u_\beta u_{\beta'};$$

donde le equazioni locale e tangenziale di Γ si possono scrivere:

$$\Theta_1 b_x^2 - \frac{1}{2} f_x^2 = 0 \qquad \Theta_2 u_\beta^2 - \frac{2}{3} A_2 u_\tau^2 = 0. \tag{45}$$

Analogamente la polare reciproca Γ' di C_2 rispetto a C_1 ha per equazioni:

$$\Theta_2 a_x^2 - \frac{1}{2} f_x^2 = 0 \qquad \Theta_1 u_\alpha^2 - \frac{2}{3} A_1 u_\tau^2 = 0.$$

Vogliamo ora trovare una conica, rispetto a cui le due coniche date sono polari reciproche l'una dell'altra (*). L'equazione della conica domandata ha la forma:

$$r_x^2 = l_1 X_1 + l_2 X_2 + l_3 X_3 = 0, \qquad u_\rho^2 = \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0.$$

Scrivasi l'equazione tangenziale della polare reciproca di $u_\alpha^2 = 0$ rispetto ad $u_\rho^2 = 0$; essa è:

$$a_\rho^2 u_\rho^2 - \frac{2}{3} r_\rho^2 (a r u)^2 = 0.$$

Si osservi che si ha:

$$a_\rho^2 = \lambda_1 A_1 + 2\lambda_2 \Theta_1 + \lambda_3 \Theta_2$$

$$\begin{aligned}\frac{4}{3} r_\rho^2 (a r u)^2 &= \frac{4}{3} A_2 l_1 u_\alpha^2 + 2 l_2 (f a u)^2 + \frac{4}{3} A_1 l_3 u_\tau^2 \\ &= \left(\frac{4}{3} A_2 l_1 + 2\Theta_2 l_2\right) u_\alpha^2 + \frac{4}{3} A_1 l_3 u_\tau^2 + \frac{2}{3} A_1 l_2 u_\beta^2 \\ &= \left(\frac{4}{3} A_1 \lambda_1^2 + 2\Theta_2 \lambda_2^2 + \frac{4}{3} A_2 \lambda_2 \lambda_3 + 2\Theta_2 \lambda_3 \lambda_1 + 4\Theta_1 \lambda_1 \lambda_2\right) u_\alpha^2 \\ &+ \left(\frac{4}{3} A_2 \lambda_3^2 + 4\Theta_2 \lambda_2 \lambda_3 + 4\Theta_1 \lambda_2^2 + \frac{4}{3} A_1 \lambda_1 \lambda_2\right) u_\tau^2 \\ &+ \frac{2}{3} A_1 (\lambda_1 \lambda_3 - \lambda_2^2) u_\beta^2,\end{aligned}$$

per cui l'equazione precedente diventa:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{1}{3} A_1 \lambda_1^2 - \Theta_2 \lambda_2^2 - \frac{2}{3} A_2 \lambda_2 \lambda_3\right) U_1 \\ &+ \left(\frac{2}{3} A_1 \lambda_1 \lambda_2 + \Theta_1 \lambda_2^2 - \frac{1}{3} A_2 \lambda_3^2\right) U_2 \\ &+ \left(\frac{2}{3} A_1 \lambda_1 \lambda_3 + \frac{1}{3} A_1 \lambda_2^2 + 2\Theta_1 \lambda_2 \lambda_3 + \Theta_2 \lambda_3^2\right) U_3 = 0.\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

Restano ora a determinare $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ in modo che questa equazione coincida con $u_\beta^2 = 0$; bisognerà perciò risolvere le equazioni:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3} A_1 \lambda_1^2 - \Theta_2 \lambda_2^2 - \frac{2}{3} A_2 \lambda_2 \lambda_3 &= 0 \\ - \Theta_1 \lambda_2^2 + \frac{1}{3} A_2 \lambda_3^2 - \frac{2}{3} A_1 \lambda_1 \lambda_2 &= 0,\end{aligned}\right\} \quad (47)$$

(*) Cfr. Battaglini, *Nota intorno alla conica rispetto alla quale due coniche date sono polari reciproche fra di loro.* Atti della R. Acc. dei Lincei, 1872; pag. 195-202.

ossia, posto $\lambda_2 = 1$,

$$\left.\begin{aligned} 2A_2\lambda_3 &= A_1\lambda_1^2 - 3\Theta_2 \\ 2A_1\lambda_1 &= A_2\lambda_3^2 - 3\Theta_1, \end{aligned}\right\} \tag{47'}$$

di qui si ricavano, con una facile eliminazione, due equazioni di 4.° grado l'una in λ_1 e l'altra in λ_3:

$$\left.\begin{aligned} A_1^2\lambda_1^4 - 6A_1\Theta_2\lambda_1^2 - 8A_1A_2\lambda_1 + 3(3\Theta_2^2 - 4A_2\Theta_1) = 0\ ; \\ A_2^2\lambda_3^4 - 6A_2\Theta_1\lambda_3^2 - 8A_1A_2\lambda_3 + 3(3\Theta_1^2 - 4A_1\Theta_2) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Ponendo:

$$\lambda_1 = \sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}\,x, \qquad \lambda_3 = \sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}\,y,$$

queste equazioni diventano:

$$x^4 + 6\frac{\Theta_2}{A_2}x^2 - 8\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}\,x + \frac{3(3\Theta_2^2 - 4A_2\Theta_1)}{A_2^2} = 0$$

$$y^4 + 6\frac{\Theta_1}{A_1}y^2 - 8\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}\,y + \frac{3(3\Theta_1^2 - 4A_1\Theta_2)}{A_1^2} = 0.$$

Calcolandone la risolvente di Lagrange, si trova per la prima

$$A_1 + 3\Theta_1\theta + 3\Theta_2\theta^2 + A_2\theta^3 = 0,$$

e per la seconda

$$A_2 + 3\Theta_2\zeta + 3\Theta_1\zeta^2 + A_1\zeta^3 = 0;$$

le radici della prima risolvente sono $\theta', \theta'', \theta'''$, e quelle della seconda sono $\frac{1}{\theta'}, \frac{1}{\theta''}, \frac{1}{\theta'''}$; quindi si ha:

$$x = \pm\sqrt{\theta'} \pm \sqrt{\theta''} \pm \sqrt{\theta'''} \qquad y = \pm\frac{1}{\sqrt{\theta'}} \pm \frac{1}{\sqrt{\theta''}} \pm \frac{1}{\sqrt{\theta'''}},$$

e così si hanno per λ_1 e per λ_3 i valori seguenti:

$$\lambda'_1 = \pm\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}(\sqrt{\theta'} + \sqrt{\theta''} + \sqrt{\theta'''}) \qquad \lambda'_3 = \pm\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta'}} + \frac{1}{\sqrt{\theta''}} + \frac{1}{\sqrt{\theta'''}}\right)$$

$$\lambda''_1 = \pm\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}(\sqrt{\theta'} - \sqrt{\theta''} - \sqrt{\theta'''}) \qquad \lambda''_3 = \pm\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta'}} - \frac{1}{\sqrt{\theta''}} - \frac{1}{\sqrt{\theta'''}}\right)$$

$$\lambda'''_1 = \pm\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}(-\sqrt{\theta'} + \sqrt{\theta''} - \sqrt{\theta'''}) \qquad \lambda'''_3 = \pm\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{\theta'}} + \frac{1}{\sqrt{\theta''}} - \frac{1}{\sqrt{\theta'''}}\right)$$

$$\lambda^{IV}_1 = \pm\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}(-\sqrt{\theta'} - \sqrt{\theta''} + \sqrt{\theta'''}) \qquad \lambda^{IV}_3 = \pm\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{\theta'}} - \frac{1}{\sqrt{\theta''}} + \frac{1}{\sqrt{\theta'''}}\right).$$

In queste formole bisogna scegliere il segno $+$, se $A_1 A_2$ è positivo, ed il segno $-$, se $A_1 A_2$ è negativo; perchè il prodotto dei tre radicali deve avere il segno contrario al coefficiente della prima potenza dell'incognita nelle equazioni di 4.° grado (48). Inoltre i valori di λ_1 devono essere accoppiati coi valori di λ_3 in modo che siano verificate le (47'), e precisamente λ'_1 con λ'_3, λ''_1 con λ''_3, λ'''_1 con λ'''_3, λ^{IV}_1 con λ^{IV}_3. Alla condizione dei segni si soddisfa scrivendo $\frac{A_2}{A_1}\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}$ in luogo di $\pm\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}$ nelle formole che dànno λ_1, e scrivendo $\frac{A_1}{A_2}\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}$ in luogo di $\pm\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}$ nelle formole che dànno λ_3. Dunque vi sono 4 coniche rispetto a cui le coniche date sono polari reciproche, e le loro equazioni tangenziali sono:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{A_2}{A_1}\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}(\sqrt{\theta'}+\sqrt{\theta''}+\sqrt{\theta'''})U_1+U_2+\frac{A_1}{A_2}\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta'}}+\frac{1}{\sqrt{\theta''}}+\frac{1}{\sqrt{\theta'''}}\right)U_3=0\\
&\frac{A_2}{A_1}\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}(\sqrt{\theta'}-\sqrt{\theta''}-\sqrt{\theta'''})U_1+U_2+\frac{A_1}{A_2}\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta'}}-\frac{1}{\sqrt{\theta''}}-\frac{1}{\sqrt{\theta'''}}\right)U_3=0\\
&\frac{A_2}{A_1}\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}(-\sqrt{\theta'}+\sqrt{\theta''}-\sqrt{\theta'''})U_1+U_2+\frac{A_1}{A_2}\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}\left(-\frac{1}{\sqrt{\theta'}}+\frac{1}{\sqrt{\theta''}}-\frac{1}{\sqrt{\theta'''}}\right)U_3=0\\
&\frac{A_2}{A_1}\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}(-\sqrt{\theta'}-\sqrt{\theta''}+\sqrt{\theta'''})U_1+U_2+\frac{A_1}{A_2}\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}\left(-\frac{1}{\sqrt{\theta'}}-\frac{1}{\sqrt{\theta''}}+\frac{1}{\sqrt{\theta'''}}\right)U_3=0.
\end{aligned}\right\}\quad(49)$$

Volendo ora l'equazione tangenziale complessiva delle 4 coniche in discorso, osserviamo che basta eliminare $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ fra le equazioni (47) e

$$U_1\lambda_1+U_2\lambda_2+U_3\lambda_3=0.$$

A questo scopo si considerino $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ come coordinate di un punto; allora le equazioni (47) rappresentano due coniche, e l'equazione ultima scritta rappresenta una retta. Eliminare $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ fra queste tre equazioni significa trovare l'equazione complessiva dei quattro punti comuni alle coniche (47); ora, come è noto, se $u_\alpha^2=0$ ed $u_\beta^2=0$ sono le equazioni tangenziali di due coniche, l'equazione complessiva dei 4 punti comuni è $u_\alpha^2\ u_\beta^2-\overline{u_\gamma^2}^2=0$. Nel nostro caso calcolando i contravarianti u_α^2, u_β^2, u_γ^2 si trova:

$$\frac{1}{2}u_\alpha^2=-A_2^2U_1^2-3A_1\Theta_2U_3^2+2A_1A_2U_2U_3$$

$$\frac{1}{2}u_\beta^2=-3A_2\Theta_1U_1^2-A_1^2U_3^2+2A_1A_2U_2U_1$$

$$u_\gamma^2=-3A_2\Theta_2U_1^2+A_1A_2U_2^2-3A_1\Theta_1U_3^2+2A_1A_2U_1U_3,$$

e quindi il risultato dell'eliminazione è:

$$\left.\begin{aligned}&3A_2^2(3\Theta_2^2-4A_2\Theta_1)U_1^4+A_1^2A_2^2U_2^4+3A_1^2(3\Theta_1^2-4A_1\Theta_2)U_3^4\\&+8A_1A_2^3U_1^3U_2+8A_1^3A_2U_3^3U_2+12A_1A_2^2\Theta_2U_1^3U_3+12A_1^2A_2\Theta_1U_1U_3^3\\&-6A_1^2A_2\Theta_1U_2^2U_3^2-18A_1A_2\Theta_1\Theta_2U_1^2U_3^2-6A_1A_2^2\Theta_2U_1^2U_2^2\\&+24A_1A_2^2\Theta_1U_1^2U_2U_3-20A_1^2A_2^2U_1U_2^2U_3+24A_1^2A_2\Theta_2U_1U_2U_3^2=0,\end{aligned}\right\}\quad(50)$$

e questa è l'equazione complessiva tangenziale delle 4 coniche, rispetto a ciascuna delle quali le due coniche date sono polari reciproche l'una dell'altra.

Volendo le equazioni locali separate, e l'equazione locale complessiva di queste quattro coniche, si parte dall'equazione locale della polare reciproca di $a_x^2=0$ rispetto ad una conica invariantiva

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{1}{3}A_2l_1^2-\Theta_1l_2^2-\frac{2}{3}A_1l_2l_3\right)X_1\\&+\left(-\frac{1}{3}A_1l_3^2+\Theta_2l_2^2+\frac{2}{3}A_2l_1l_2\right)X_2\\&+\left(\frac{2}{3}A_2l_1l_3+\frac{1}{3}A_2l_2^2+2\Theta_2l_2l_3+\Theta_1l_3^2\right)X_3=0,\end{aligned}\right\}\quad(51)$$

la quale equazione o si forma direttamente con un procedimento analogo a quello con cui si è formata l'equazione (46), o si deduce senz'altro dalla (46) cogli scambi di

$$u_\alpha^2 \text{ in } \frac{4}{3}A_1a_x^2,\qquad \text{di } u_\beta^2 \text{ in } \frac{4}{3}A_2b_x^2,\qquad \text{di } u_\gamma^2 \text{ in } f_x^2,$$

di A_1, Θ_1, Θ_2, A_2 rispettivamente in $\overline{A_1}$, $\overline{\Theta_1}$, $\overline{\Theta_2}$, $\overline{A_2}$, di λ_1, λ_2, λ_3 rispettivamente in $\frac{4}{3}A_2l_1$, l_2, $\frac{4}{3}A_1l_3$.

Bisogna poi determinare $l_1\ l_2\ l_3$ in modo che la (51) coincida con $b_x^2=0$, ed a questo scopo si hanno da risolvere le equazioni:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{3}A_2l_1^2-\Theta_1l_2^2-\frac{2}{3}A_1l_2l_3&=0\\-\Theta_2l_2^2+\frac{1}{3}A_1l_3^2-\frac{2}{3}A_2l_1l_2&=0.\end{aligned}\right\}\quad(52)$$

Confrontando queste colle (47) si osserva subito, che dalle (47) si passa alle (52) collo scambio di λ_1, λ_2, λ_3 rispettivamente in l_3, l_2, l_1. Dunque per le coniche rispetto a cui le coniche date sono polari reciproche tra i parametri locali ed i parametri tangenziali si ha la semplicissima relazione

$$l_1 : l_2 : l_3 :: \lambda_3 : \lambda_2 : \lambda_1, \tag{53}$$

e quindi dalle (49) si deducono immediatamente le equazioni locali delle 4 coniche in discorso

$$\frac{A_1}{A_2}\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}}\left(\frac{1}{\sqrt{\theta'}}+\frac{1}{\sqrt{\theta''}}+\frac{1}{\sqrt{\theta'''}}\right)X_1+X_2+\frac{A_2}{A_1}\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}}(\sqrt{\theta'}+\sqrt{\theta''}+\sqrt{\theta'''})X_3=0, \tag{54}$$

ecc.

L'equazione locale complessiva si ottiene eliminando $l_1\ l_2\ l_3$ tra le (52) e

$$l_1 X_1 + l_2 X_2 + l_3 X_3 = 0;$$

ora, siccome le (52) possono anche immaginarsi dedotte dalle (47) sostituendo ordinatamente $l_1\ l_2\ l_3$ a $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ e scambiando A_1 con A_2 e Θ_1 con Θ_2, così l'equazione complessiva domandata si deduce dalle (50) sostituendo ad $U_1\ U_2\ U_3$ rispettivamente $X_1\ X_2\ X_3$ e scambiando inoltre A_1 con A_2 e Θ_1 con Θ_2, e però è

$$3A_1^2(3\Theta_1^2-4A_1\Theta_2)X_1^4+A_1^2A_2^2X_2^4+3A_2^2(3\Theta_2^2-4A_2\Theta_1)X_3^4+\text{ecc.}=0. \tag{55}$$

VI. Coniche bitangenti. Coniche coniugate.

Se due coniche $(\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3)$ e $(\lambda'_1\ \lambda'_2\ \lambda'_3)$ del sistema invariantivo considerato sono bitangenti, chiamando y il polo di contatto, esiste un valore di ρ per cui si ha:

$$(\lambda_1+\rho\lambda'_1)U_1+(\lambda_2+\rho\lambda'_2)U_2+(\lambda_3+\rho\lambda'_3)U_3=u_y^2,$$

donde si vede che y è uno dei punti doppi del tessuto di coniche determinato da U_1, U_2, U_3, e però dev'essere:

$$u_y^2 = U_1+\theta U_2+\theta^2 U_3 \qquad \theta=\theta',\ \theta'',\ \theta''';$$

per conseguenza denotando con σ un coefficiente incognito si deve avere:

$$\lambda_1+\rho\lambda'_1=\sigma, \qquad \lambda_2+\rho\lambda'_2=\sigma\theta, \qquad \lambda_3+\rho\lambda'_3=\sigma\theta^2,$$

e quindi *se le due coniche hanno doppio contatto* si ha

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda'_3 \\ 1 & \theta & \theta^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{per} \quad \theta=\theta',\ \theta'',\ \theta''. \tag{56}$$

Dunque data una conica del sistema vi sono tre serie di coniche bitangenti ad essa ed appartenenti al sistema; i tre lati del triangolo autoconiugato sono le corde di contatto, ed i tre vertici del medesimo sono i poli di contatto.

Similmente *la condizione perchè due coniche* $(l_1\, l_2\, l_3)$ *e* $(l'_1\, l'_2\, l'_3)$ *siano bitangenti* è:

$$\begin{vmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ l'_1 & l'_2 & l'_3 \\ \theta^2 & \theta & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{per} \quad \theta = \theta',\ \theta'',\ \theta'''. \tag{57}$$

In particolare le equazioni

$$l X_1 + X_2 + \frac{1}{\theta} X_3 = 0, \qquad \lambda U_1 + U_2 + \theta U_3 = 0, \tag{58}$$

qualunque sia l o λ rappresentano coniche bitangenti a C_1; e le equazioni

$$\theta X_1 + X_2 + l X_3 = 0, \qquad \frac{1}{\theta} U_1 + U_2 + \lambda U_3 = 0, \tag{59}$$

qualunque sia l o λ rappresentano coniche bitangenti a C_2. Per conseguenza se θ_i e θ_j sono due qualunque dei tre valori θ', θ'', θ''' le equazioni:

$$\theta_i X_1 + X_2 + \frac{1}{\theta_j} X_3 = 0, \qquad \frac{1}{\theta_i} U_1 + U_2 + \theta_j U_3 = 0, \tag{60}$$

rappresentano 6 coniche bitangenti ad entrambe le coniche C_1 e C_2.

Le quattro coniche, rispetto a ciascuna delle quali le due coniche date sono polari reciproche, sono due a due bitangenti. Infatti, ponendo per semplicità

$$+\sqrt{\theta'} = p, \qquad +\sqrt{\theta''} = q, \qquad +\sqrt{\theta'''} = r,$$

e osservando che

$$\theta'\theta''\theta''' = -\frac{A_1}{A_2} \quad \text{donde} \quad \frac{A_2}{A_1}\sqrt{-\frac{A_1}{A_2}} = -\frac{1}{pqr} \quad \text{e} \quad \frac{A_1}{A_2}\sqrt{-\frac{A_2}{A_1}} = -pqr,$$

i parametri tangenziali delle 4 coniche suddette sono:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{1}{qr} + \dfrac{1}{rp} + \dfrac{1}{pq}, & -1, & qr + rp + pq \\[2ex] \dfrac{1}{qr} - \dfrac{1}{rp} - \dfrac{1}{pq}, & -1, & qr - rp - pq \qquad \text{ecc.} \end{array}$$

Ora, per dimostrare ad esempio che la 1.ª conica è bitangente alla 2.ª, basta verificare che il determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{qr}+\frac{1}{rp}+\frac{1}{pq}, & -1, & qr+rp+pq \\ \frac{1}{qr}-\frac{1}{rp}-\frac{1}{pq}, & -1, & qr-rp-pq \\ 1 & p^2 & p^4 \end{vmatrix}$$

è nullo, il che si fa facilmente.

Si consideri ora una conica C di equazione $a_x^2=0$ ed una retta v di equazione $v_x=0$. Nel sistema invariantivo di a_x^2 e di v_x^2 si ha:

$$\begin{array}{llll} u_\alpha^2=(aa'u)^2 & u_\tau^2=(avu)^2 & u_\beta^2=0 & f_x^2=0 \\ A_1=(aa'a'')^2 & \Theta_1=v_\alpha^2 & \Theta_2=0 & A_2=0. \end{array}$$

Una conica invariantiva qualsiasi ha per equazioni locale e tangenziale

$$a_x^2+kv_x^2=0 \qquad u_\alpha^2+2ku_\tau^2=0,$$

e tutte queste coniche invariantive formano un fascio-schiera di coniche bitangenti a C, essendo v la corda di contatto.

La polare reciproca di C rispetto ad una di queste coniche è

$$\frac{1}{3}A_1u_\alpha^2+2\left(\frac{2}{3}A_1k+\Theta_1k^2\right)u_\tau^2=0;$$

volendo che coincida colla stessa conica C, bisognerà prendere k in modo che sia:

$$\frac{2}{3}A_1k+\Theta_1k^2=0;$$

donde (trascurando la soluzione $k=0$ per cui si avrebbe la stessa conica C) si ha $k=-\frac{2}{3}\frac{A_1}{\Theta_1}$. Dunque *l'equazione in coordinate di punti*

$$c_x^2=3v_\alpha^2a_x^2-2A_1v_x^2=0, \tag{61}$$

ed in coordinate di rette

$$\frac{1}{3\Theta_1}u_\gamma^2=3v_\alpha^2u_\alpha^2-4A_1u_\tau^2=0, \tag{62}$$

rappresenta una conica Γ tale, che la polare di C rispetto ad essa è la stessa C.

Inversamente prendiamo la polare reciproca di Γ rispetto a C, essa è

$$a_\gamma^2a_x^2-\frac{1}{2}(\alpha\gamma x)^2=0,$$

e siccome si ha:

$$a_\gamma^2 = -3\Theta_1^2 A_1, \qquad (\alpha\gamma x)^2 = -4A_1^2\Theta_1 v_x^2,$$

così l'equazione precedente coincide colla (61). Dunque la relazione tra le coniche C e Γ è scambievole; ciascuna di esse è polare reciproca di sè stessa rispetto all'altra: due coniche siffatte furono dette *coniugate* rispetto alla retta v.

Dualmente si abbia una conica C di equazione $u_\alpha^2 = 0$ ed un punto y di equazione $u_y = 0$. Nel sistema invariantivo di u_α^2 e di u_y^2 si ha:

$$f_x^2 = (\alpha y x)^2 \qquad b_x^2 = 0 \qquad u_\tau^2 = 0$$

$$\Theta_1 = 0 \qquad \Theta_2 = a_y^2 \qquad A_2 = 0.$$

Le equazioni

$$\Theta_2 a_x^2 - f_x^2 = 0 \tag{63}$$

$$3\Theta_2 u_\alpha^2 - 2A_1 u_y^2 = 0, \tag{64}$$

rappresentano una conica Γ'; la conica C e la conica Γ' sono ciascuna polare reciproca di sè stessa rispetto all'altra, e si dicono *coniugate* rispetto al punto y.

L'equazione (63), se si osserva che si ha:

$$f_x^2 = (\alpha y x)^2 = (ab,\ xy)^2 = 2a_y^2 b_x^2 - 2a_x a_y \cdot b_x b_y,$$

si può anche scrivere:

$$a_y^2 b_x^2 - 2a_x a_y \cdot b_x b_y = 0; \tag{65}$$

ora se il punto y e la retta v sono polo e polare rispetto a C si ha $v_x = a_y a_x$ donde $v_\alpha^2 = a_\alpha b_\alpha a_y b_y = \frac{1}{3} A_1 a_y^2$ e però la (61) coincide colla (65); dunque Γ e Γ' coincidono; ossia, *se due coniche sono coniugate rispetto ad una retta, esse sono anche coniugate rispetto al polo di questa.*

Il contravariante u_τ^2 per le coniche C e Γ' è

$$\Theta_2 u_\alpha^2 - \frac{1}{3}(fau)^2 = -\frac{1}{3} A_1 u_y^2,$$

ed il covariante f_x^2 per le coniche C e Γ è

$$3\Theta_1[3\Theta_1(\alpha\alpha' x)^2 - 4A_1(\alpha\tau x)^2] = -4A_1^2\Theta_1 v_x^2,$$

dalle quali espressioni segue che *se due coniche sono coniugate, le rette condotte per il polo di contatto le tagliano armonicamente, ed i punti della retta di contatto le proiettano armonicamente.*

Se si calcolano gli invarianti di C e Γ si trova:

$$A_1, \qquad \Theta_1 = A_1 v_\alpha^2, \qquad \Theta_2 = -3 A_1 \overline{v_\alpha^2}^2, \qquad A_2 = -27 A_1 \overline{v_\alpha^2}^3,$$

dalle quali espressioni si vede che *se due coniche* $a_x^2 = 0$ e $b_x^2 = 0$ *sono coniugate, tra i loro invarianti passano le relazioni*

$$3\Theta_1^2 + A_1\Theta_2 = 0, \qquad A_1 A_2 - 9\Theta_1\Theta_2 = 0, \qquad 3\Theta_2^2 + A_2\Theta_1 = 0, \quad (66)$$

di cui una è conseguenza delle altre due; a queste si possono sostituire le

$$R = 0, \qquad A_1 A_2 - 9\Theta_1\Theta_2 = 0, \quad (66')$$

perchè, potendosi scrivere:

$$R = \frac{4}{3}(3\Theta_1^2 + A_1\Theta_2)(3\Theta_2^2 + A_2\Theta_1) + \frac{1}{3}(A_1 A_2 - 9\Theta_1\Theta_2)(5\Theta_1\Theta_2 + 3A_1 A_2),$$

dalle (66) si deducono le (66') e viceversa.

Cerchiamo ora se nel sistema invariantivo di coniche, che stiamo studiando, ve ne siano di quelle coniugate con una di esse, ad es. con C_1.

Si consideri la polare reciproca di C_1 rispetto alla conica $(\lambda_1\, \lambda_2\, \lambda_3)$, essa ha per equazione la (46); le condizioni perchè questa polare reciproca coincida colla stessa C_1 sono:

$$\left.\begin{aligned} 2A_1\lambda_1\lambda_2 + 3\Theta_1\lambda_2^2 - A_2\lambda_3^2 = 0 \\ A_1(2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2^2) + 6\Theta_1\lambda_2\lambda_3 + 3\Theta_2\lambda_3^2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (67)$$

Queste equazioni sono verificate da $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$; cioè la polare reciproca di C_1 rispetto a C_1 è la stessa C_1, cosa evidente. Escludendo questa soluzione, e ponendo $\lambda_2 = 1$, dalle (67) si ha:

$$A_1 + 3\Theta_1\lambda_3 + 3\Theta_2\lambda_3^2 + A_2\lambda_3^3 = 0,$$

dunque per λ_3 si hanno tre valori, e precisamente θ', θ'', θ'''; dalla prima delle (67) si ricavano i corrispondenti valori di λ_1, e si conchiude che nel sistema invariantivo di due coniche ve ne sono tre coniugate con una di esse, e che le equazioni tangenziali di quelle tre che sono coniugate con C_1 sono:

$$(A_2\theta^2 - 3\Theta_1)U_1 + 2A_1U_2 + 2A_1\theta U_3 = 0, \qquad \theta = \theta', \theta'', \theta'''. \quad (68)$$

Analogamente si trova che i parametri locali $l_1\, l_2\, l_3$ delle coniche coniugate di C_1 verificano le equazioni:

$$\left.\begin{aligned} 2A_2 l_1 l_2 + 3\Theta_2 l_2^2 - A_1 l_3^2 = 0 \\ A_2(2l_1 l_3 + l_2^2) + 6\Theta_2 l_2 l_3 + 3\Theta_1 l_3^2 = 0, \end{aligned}\right\} \quad (69)$$

le quali differiscono dalle (67) per lo scambio di A_1 con A_2 e di Θ_1 con Θ_2; le equazioni locali delle coniche coniugate di C_1 sono dunque:

$$\left(\frac{A_1}{\theta^2} - 3\Theta_2\right)X_1 + 2A_2X_2 + \frac{2A_2}{\theta}X_3 = 0, \qquad \theta = \theta', \theta'', \theta'''. \tag{70}$$

Le tre coniche coniugate con C_1 non solo sono bitangenti a C_1 [il che si accorda coll'essere le (68) e (70) casi particolari della (58)], *ma sono inoltre due a due bitangenti fra loro.* Se si considera infatti il determinante

$$\begin{vmatrix} A_2\theta'^2 - 3\Theta_1 & 2A_1 & 2A_1\theta' \\ A_2\theta''^2 - 3\Theta_1 & 2A_1 & 2A_1\theta'' \\ 1 & \theta''' & \theta'''^2 \end{vmatrix}$$

$$= 2A_1A_2(\theta' - \theta'')\left[(\theta' + \theta'')\theta'''^2 - \left(\theta'\theta'' + \frac{3\Theta_1}{A_2}\right)\theta''' - \frac{2A_1}{A_2}\right],$$

e si tengono presenti le relazioni

$$3\frac{\Theta_1}{A_2} = \theta''\theta''' + \theta'''\theta' + \theta'\theta'', \qquad -\frac{A_1}{A_2} = \theta'\theta''\theta''',$$

si vede che questo determinante è identicamente nullo.

Dimostreremo in seguito che le tre coniche coniugate con C_1 sono anche coniugate due a due fra loro, e però prese insieme con C_1 formano una notevole quaterna di coniche, detta *armonica;* e che *le quattro coniche rispetto a ciascuna delle quali due coniche date sono polari reciproche formano appunto una quaterna armonica.*

VII. Rappresentazione delle coniche invariantive coi punti di un piano.

Se i parametri locali (l_1 l_2 l_3) d'una conica invariantiva L si prendono come coordinate di un punto L in un piano Π, ad ogni conica della rete

$$l_1X_1 + l_2X_2 + l_3X_3 = 0,$$

corrisponde un punto del piano, e viceversa; in particolare ai vertici del triangolo coordinato corrispondono le due coniche date e la conica $f_x^2 = 0$.

Così pure se i parametri tangenziali λ_1 λ_2 λ_3 di una conica L si considerano come le coordinate di un punto L' in un piano Π', ad ogni conica del tessuto

$$\lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 + \lambda_3 U_3 = 0,$$

corrisponde un punto del piano e viceversa; in particolare ai vertici del triangolo coordinato corrispondono le due coniche date e la conica $u_\tau^2 = 0$.

Se i punti del piano Π e i punti del piano Π' si mettono in corrispondenza per modo che due punti corrispondenti rappresentino una stessa conica del sistema, si viene a stabilire una trasformazione quadratica tra i piani Π e Π', che è determinata dalle formole (33′) e (34′). I punti fondamentali di questa trasformazione nel piano Π sono:

$$A(\theta'^2, \theta', 1) \qquad B(\theta''^2, \theta'', 1) \qquad C(\theta'''^2, \theta''', 1), \tag{71}$$

e nel piano Π' sono:

$$A_1(1, \theta', \theta'^2) \qquad B_1(1, \theta'', \theta''^2) \qquad C_1(1, \theta''', \theta'''^2). \tag{71'}$$

Tenendo presenti le equazioni (28) e (29) si vede che i punti fondamentali del piano Π corrispondono alle tre rette doppie del sistema di coniche invariantive, e che i punti fondamentali del piano Π' corrispondono ai punti doppii dello stesso sistema.

Alle coniche d'un fascio contenuto nella rete corrispondono nel piano Π i punti d'una retta e nel piano Π' i punti d'una conica circoscritta al triangolo $A_1 B_1 C_1$; se

$$p_1 l_1 + p_2 l_2 + p_3 l_3 = 0,$$

è la retta nel piano Π, la conica corrispondente nel piano Π' è

$$\frac{p_1}{A_2}(A_1\lambda_1^2 + 3\Theta_1\lambda_1\lambda_2 + \cdots) + p_2(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2^2) + \frac{p_3}{A_1}(A_2\lambda_3^2 + \cdots) = 0. \tag{72}$$

Analogamente alle coniche di una schiera contenuta nel tessuto, corrispondono nel piano Π' i punti d'una retta, e nel piano Π i punti d'una conica circoscritta al triangolo $A\,B\,C$; se

$$q_1\lambda_1 + q_2\lambda_2 + q_3\lambda_3 = 0,$$

è la retta nel piano Π', la conica corrispondente nel piano Π è

$$\frac{q_1}{A_1}(A_2 l_1^2 + \cdots) + q_2(l_1 l_3 - l_2^2) + \frac{q_3}{A_2}(A_1 l_3^2 + \cdots) = 0. \tag{72'}$$

Le coppie di rette, in cui degenerano le coniche della rete invariantiva, costituiscono (come è noto) tre fasci in involuzione coi centri nei vertici del triangolo autoconiugato, essendo raggi doppii i lati di questo; e dualmente le coppie di punti, in cui degenerano le coniche del tessuto invariantivo, costituiscono tre punteggiate in involuzione sui lati del triangolo autoconiugato, essendo punti doppii i vertici di questo. Di qui si capisce che i discriminanti (35) e (36) di 3.° grado l'uno in $l_1\ l_2\ l_3$ l'altro in $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$ devono potersi spezzare nel prodotto di tre fattori di 1.° grado.

Osserviamo, che se $r_x = 0$ ed $s_x = 0$ sono le equazioni di due lati del triangolo autoconiugato, l'equazione

$$r_x^2 + k s_x^2 = 0,$$

rappresenta una coppia di rette che formano con quelli un fascio armonico, e però costituiscono una conica degenere della rete. Donde, ricordando le (28), i tre fasci di coniche degeneri sono:

$$\begin{gathered}
(\theta''^2 + k\theta'''^2)X_1 + (\theta'' + k\theta''')X_2 + (1 + k)X_3 = 0 \\
(\theta'''^2 + k\theta'^2)\,X_1 + (\theta''' + k\theta')\,X_2 + (1 + k)X_3 = 0 \\
(\theta'^2 + k\theta'^2)X_1 + (\theta' + k\theta'')X_2 + (1 + k)X_3 = 0.
\end{gathered}$$

Dunque, se $(l_1\ l_2\ l_3)$ è una conica degenere, si avrà:

$$\theta'^2 + k\theta'''^2 = h l_1, \qquad \theta'' + k\theta''' = h l_2, \qquad 1 + k = h l_3,$$

oppure:

$$\theta'''^2 + k\theta'^2 = h l_1, \qquad \theta''' + k\theta' = h l_2, \qquad 1 + k = h l_3,$$

oppure:

$$\theta'^2 + k\theta''^2 = h l_1, \qquad \theta' + k\theta'' = h l_2, \qquad 1 + k = h l_3.$$

Di qui, coll'eliminazione di h e k, si deducono le equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
l_1 - (\theta'' + \theta''')l_2 + \theta''\theta'''\,l_3 = 0 \\
l_1 - (\theta''' + \theta')\,l_2 + \theta'''\theta'\,l_3 = 0 \\
l_1 - (\theta' + \theta')\,l_2 + \theta'\theta''\,l_3 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{73}$$

Pertanto *queste equazioni rappresentano nel piano* Π *tre rette, i punti delle quali corrispondono a coniche degeneri della rete invariantiva, esse sono precisamente i lati del triangolo $A\,B\,C$*; noi le chiameremo *rette fondamentali* a, b, c del piano Π; a tutti i punti di ciascuna di esse corrisponde nel piano Π' uno stesso punto, che è un vertice del triangolo $A_1\,B_1\,C_1$.

Analogamente

$$\left.\begin{aligned}
\theta''\theta'''\lambda_1 - (\theta'' + \theta''')\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\
\theta'''\theta'\,\lambda_1 - (\theta''' + \theta')\,\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\
\theta'\theta''\,\lambda_1 - (\theta' + \theta'')\,\lambda_2 + \lambda_3 = 0,
\end{aligned}\right\} \tag{73'}$$

sono *tre rette del piano* Π', *i punti delle quali corrispondono a coniche degeneri del tessuto invariantivo; esse sono precisamente i lati del triangolo* $A_1 B_1 C_1$, e noi le chiameremo *rette fondamentali* $a_1\ b_1\ c_1$ del piano Π'; a tutti i punti di ciascuna di esse corrisponde nel piano Π un solo punto che è un vertice del triangolo $A\,B\,C$.

Se si moltiplicano insieme i primi membri delle equazioni (73), e si esprimono per mezzo dei coefficienti delle (26) le funzioni simmetriche di $\theta'\ \theta''\ \theta'''$ che compaiono nel prodotto, si trova (a meno di un fattore) il discriminante (36); così pure moltiplicando i primi membri delle (73') si giunge al discriminante (35).

VIII. Rappresentazione di alcune fra le più notevoli coniche invariantive.

Dati nel piano Π due punti M, N rappresentativi di due coniche del sistema $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$, vogliamo vedere come si costruiscano i punti che rappresentano le più notevoli tra le loro coniche invariantive. Per le costruzioni che vogliam fare si può supporre, senza ledere la generalità, che $\boldsymbol{M}$ ed $\boldsymbol{N}$ siano le due coniche di date equazioni $a_x^2 = 0$, $b_x^2 = 0$; perchè ciò equivale a prendere nel piano Π come triangolo coordinato, quello di cui due vertici sono i punti M, N ed il terzo vertice è il punto F rappresentativo della conica $\boldsymbol{F}$, i cui punti proiettano armonicamente le due coniche $\boldsymbol{M}$ ed $\boldsymbol{N}$; ed a prendere nel piano Π' come triangolo coordinato, quello di cui due vertici sono i punti M' N' ed il terzo vertice è il punto T' rappresentativo della conica $\boldsymbol{T}$, le cui tangenti tagliano armonicamente le coniche $\boldsymbol{M}$ ed $\boldsymbol{N}$.

La conica $\boldsymbol{F}$. — L'equazione $l_1 l_3 - l_2^2 = 0$ è verificata dalle coordinate (71) dei punti A, B, C e però rappresenta nel piano Π una conica circoscritta al triangolo fondamentale $A\,B\,C$; questa conica tocca inoltre i lati MF, NF del triangolo coordinato rispettivamente nei punti M, N. Di qui segue che *la conica* $\boldsymbol{F}$ *i cui punti proiettano armonicamente due coniche* $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ *del sistema è rappresentata dal polo della retta* MN *rispetto alla conica* $A\,B\,C\,M\,N$.

La conica $\boldsymbol{T}$. — Dualmente nel piano Π' la conica $\boldsymbol{T}$ di equazione $u_T^2 = 0$ è rappresentata dal polo T' della retta $M'\,N'$ rispetto alla conica $A'\,B'\,C'\,M'\,N'$. Passando dal piano Π' al piano Π colla trasformazione quadratica, si ha che *la conica* $\boldsymbol{T}$ *le cui tangenti tagliano armonicamente due coniche* $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ *è rappresentata dal quarto punto, in cui si tagliano le due* *coniche circoscritte ad ABC e tangenti alla retta MN l'una in M e l'altra in N,* le quali coniche del piano Π hanno per equazioni:

$$\left.\begin{aligned} A_2 l_1^2 + 3\Theta_2 l_1 l_2 + 3\Theta_1 l_2^2 + A_1 l_2 l_3 = 0 \\ A_1 l_3^2 + 3\Theta_1 l_2 l_3 + 3\Theta_2 l_2^2 + A_2 l_1 l_2 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

Le coordinate del punto T sono $\left(\frac{3\Theta_2}{A_2}, -1, \frac{3\Theta_1}{A_1}\right)$.

Le coniche armonicamente iscritte o circoscritte ad una conica data del sistema. — Se una conica $R(l_1\ l_2\ l_3)$ è armonicamente circoscritta ad una conica $S(\lambda'_1\ \lambda'_2\ \lambda'_3)$, si ha:

$$\left.\begin{aligned} & A_2 l_1 (A_1\lambda'_1 + 2\Theta_1\lambda'_2 + \Theta_2\lambda'_3) \\ + \ & l_2 [2A_1\Theta_2\lambda'_1 + (3\Theta_1\Theta_2 + A_1A_2)\lambda'_2 + 2A_2\Theta_1\lambda'_3] \\ + \ & A_1 l_3 (\Theta_1\lambda'_1 + 2\Theta_2\lambda'_2 + A_2\lambda'_3) = 0. \end{aligned}\right\} \quad (75)$$

Infatti ponendo per brevità

$$r_x^2 = \frac{2}{3} A_2 l_1 a_x^2 + \quad l_2 f_x^2 + \frac{2}{3} A_1 l_3 b_x^2$$

$$u_\sigma^2 = \qquad \lambda'_1 u_\alpha^2 + 2\lambda'_2 u_\tau^2 + \lambda'_3 u_\beta^2,$$

la condizione perchè la conica R sia armonicamente circoscritta ad S è:

$$0 = r_\sigma^2 = \frac{2}{3} A_2 l_1 a_\sigma^2 + l_2 f_\sigma^2 + \frac{2}{3} A_1 l_3 b_\sigma^2,$$

donde si deduce la (75), osservando che si ha:

$$a_\sigma^2 = a_\alpha^2 \lambda'_1 + 2a_\tau^2 \lambda'_2 + a_\beta^2 \lambda'_3$$

$$f_\sigma^2 = f_\alpha^2 \lambda'_1 + 2f_\tau^2 \lambda'_2 + f_\beta^2 \lambda'_3$$

$$b_\sigma^2 = b_\alpha^2 \lambda'_1 + 2b_\tau^2 \lambda'_2 + b_\beta^2 \lambda'_3,$$

e tenendo presenti le (5), (6), (15).

Se la conica R è variabile, e la conica S è fissa, la equazione (75) rappresenta nel piano Π una retta, e precisamente la polare del punto S rispetto al triangolo ABC, come si dimostra facilmente sostituendo a $\lambda'_1\ \lambda'_2\ \lambda'_3$ le loro espressioni (34') per mezzo di $l'_1\ l'_2\ l'_3$, e ricordando che l'equazione del triangolo ABC è $D = 0$, [denotando per brevità con D l'espressione (36)].

Dunque *le coniche del sistema armonicamente circoscritte ad una conica S formano un fascio, rappresentato nel piano* Π *dalla retta polare di S rispetto al triangolo fondamentale.*

Se nell'equazione (75) si sostituiscono invece ad $l_1\ l_2\ l_3$ le loro espressioni (33′) per mezzo di $\lambda_1\ \lambda_2\ \lambda_3$, e si osserva che essa rappresenta allora nel piano Π' la conica polare del punto S' rispetto al triangolo $A_1 B_1 C_1$, la cui equazione è $\Delta = 0$ [denotando per brevità con Δ la espressione (35)], si conchiude che *le coniche del sistema armonicamente circoscritte ad una conica* S *sono rappresentate in* Π' *dai punti della conica polare di* S' *rispetto al triangolo fondamentale.*

Dualmente *le coniche del sistema armonicamente iscritte in una conica* R *formano una schiera, e sono rappresentate sul piano* Π *dai punti della conica polare di* R *rispetto al triangolo fondamentale* $A\,B\,C$, *e sul piano* Π' *dai punti della retta polare di* R' *rispetto al triangolo fondamentale* $A_1 B_1 C_1$.

Data una conica R del sistema, ve ne sono due involutorie con essa, e precisamente quelle rappresentate in Π (o Π') dai punti, ove si tagliano la retta e la conica polari di R (o R') rispetto al triangolo fondamentale.

La conica combinante, e le due coniche involutorie d'un fascio o d'una schiera. — Considerando un fascio di coniche invariantive rappresentato sul piano Π da una retta p, *il polo* P *della retta* p *rispetto al triangolo fondamentale rappresenta la conica combinante del fascio,* perchè questa, come abbiamo visto, è armonicamente iscritta a tutte le coniche del fascio. Il punto P [in virtù della (43)] ha per coordinate $\left(\frac{\Theta_2}{A_2}, -1, \frac{\Theta_1}{A_1}\right)$ e però cade sulla retta FT. Di qui segue, che *se si considerano due coniche qualunque di un fascio, e le due coniche, l'una luogo dei punti che le proiettano armonicamente, l'altra inviluppo delle rette che le tagliano armonicamente, il luogo delle quaterne di punti secondo cui queste due ultime si tagliano è la conica combinante del fascio.*

Le due coniche involutorie del fascio sono rappresentate sul piano Π *dai due punti* Q, R *di* p, *che sono gli Hessiani dei tre punti, in cui la retta* p *taglia il triangolo fondamentale.* Per costruire i punti Q, R basta ricordare, che le coniche involutorie del fascio sono involutorie colla conica combinante, e quindi si troverà il polo P della retta p rispetto al triangolo $A\,B\,C$, e poi del punto P si prenderà la conica polare π rispetto allo stesso triangolo; i punti ove questa conica taglia la retta p saranno i punti domandati. Il triangolo $P\,Q\,R$ è tale che ogni lato è la retta polare del vertice opposto rispetto al triangolo fondamentale.

Allo stesso modo si costruiscono nel piano Π' i punti che rappresentano la conica combinante e le due coniche involutorie di una schiera. Volendo restare sul piano Π, osserviamo anzitutto che le coniche della schiera sono rappresentate dai punti d'una conica π, circoscritta al triangolo ABC, e poi ricordiamo che la conica combinante è armonicamente circoscritta a tutte le coniche della schiera, ed è perciò rappresentata da un punto, in cui devono concorrere le rette polari di tutti i punti di π rispetto al triangolo ABC; concluderemo che *il polo P della conica π rispetto al triangolo ABC corrisponde alla conica combinante della schiera, rappresentata sul piano Π dalla conica π. Se poi del punto P si prende la retta polare rispetto ad ABC, questa taglia la conica π in due punti Q, R, che rappresentano le coniche involutorie della schiera.*

Coniche bitangenti. — La condizione (56) o (57), perchè due coniche del nostro sistema invariantivo siano bitangenti, fa vedere che *a due coniche bitangenti corrispondono sia nel piano Π, sia nel piano Π', due punti allineati con uno dei tre punti fondamentali.*

Quindi date due coniche $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{N}$ le 6 coniche invariantive bitangenti ad entrambe sono rappresentate dai punti in cui i raggi proiettanti A, B, C da M tagliano i raggi proiettanti A, B, C da N.

In generale in un fascio di coniche invariantive ve ne sono tre bitangenti ad una conica invariantiva $\boldsymbol{M}$ qualunque; ed i punti del piano Π che le rappresentano si ottengono proiettando i punti ABC dal punto M sulla retta p che corrisponde al fascio. Se in particolare si prende come centro di proiezione il polo P della retta p rispetto al triangolo fondamentale, la terna di punti proiezione forma (come è facile a dimostrare) il covariante cubico della terna di punti, in cui la retta p taglia il triangolo ABC, e rappresenta la terna di coniche bitangenti alla conica combinante del fascio.

Coniche polari reciproche. Coniche coniugate. — Avendo visto che quattro coniche coniugate sono due a due bitangenti, e così pure sono due a due bitangenti le quattro coniche, rispetto a cui due coniche del sistema sono polari reciproche l'una dell'altra, segue che *a tali gruppi di quattro coniche corrispondono sia nel piano Π, sia nel piano Π', quadrangoli che hanno per triangolo diagonale il triangolo fondamentale.* Quindi due coniche coniugate sono rappresentate da due punti, la cui retta va ad uno dei vertici del triangolo fondamentale, ed è divisa armonicamente da questo vertice e dal lato opposto (*).

(*) Così, data una conica $\boldsymbol{M}$, si trovano facilmente le tre coniche del sistema $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ coniugate con essa; e si osserva che il quadrangolo $MNPQ$ (ovvero $M'N'P'Q'$) ha il triangolo fondamentale per triangolo diagonale. Donde si conchiude che le coniche $\boldsymbol{N}$, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ sono due a due coniugate fra loro.

Date due coniche M, N per costruire i quattro punti rappresentativi delle quattro coniche, rispetto a ciascuna delle quali quelle sono polari reciproche, basta osservare che questi quattro punti sono quelli comuni alle due coniche del piano Π (o Π') di equazioni (52) [o (48)], e che queste coniche hanno entrambe il triangolo ABC [ovvero $A_1 B_1 C_1$] come triangolo autoconiugato, e toccano inoltre la retta MN (ovvero $M'N'$) l'una in M (o M') e l'altra in N (o N').

Di qui segue pure la costruzione del punto, che rappresenta la conica polare di M rispetto ad N. Si considera il fascio di coniche, che hanno il triangolo fondamentale come triangolo autoconiugato e passano per N, a quella che passa per M si tira la tangente in questo punto, questa retta è toccata da un'altra conica del fascio considerato, ed il punto di contatto è il punto domandato.

I quattro vertici d'un quadrangolo, che abbia il triangolo fondamentale per triangolo diagonale, rappresentano un gruppo di quattro coniche del nostro sistema, rispetto a ciascuna delle quali infinite coppie di coniche sono polari reciproche; per avere i due punti, che rappresentano una di queste coppie, basta circoscrivere due coniche qualunque a quel quadrangolo e prendere i due punti di contatto su d'una loro tangente comune. E di qui si deduce che *le quattro coniche, rispetto a ciascuna delle quali due coniche sono polari reciproche fra di loro, formano una quaterna armonica.*

IX. Realità delle coniche invariantive.

Ci proponiamo ora di studiare se nel sistema di coniche invariantive ve ne siano di quelle imaginarie, ed a quali punti del piano rappresentativo (Π o Π') esse corrispondano, supposto che le equazioni delle coniche C_1 e C_2 abbiano coefficienti reali, e che reali siano i valori dei parametri l_1 l_2 l_3 e λ_1 λ_2 λ_3.

Bisognerà distinguere tre casi, secondochè l'equazione di 3.° grado (26) ha radici reali e distinte, radici reali ed uguali, o radici imaginarie.

Se l'equazione (26) ha radici immaginarie, il triangolo autoconiugato rispetto a tutte le coniche invariantive ha di reale soltanto un lato ed il vertice opposto, e però due coniche qualunque hanno due punti comuni reali, ed esse sono tutte reali.

Se l'equazione (26) ha radici uguali, e le coniche C_1 e C_2 si toccano in un punto, tutte le coniche invariantive si toccano in quel punto e sono reali;

se poi le coniche C_1 e C_2 sono bitangenti, le coniche invariantive formano un fascio-schiera di coniche bitangenti.

È sovratutti notevole il caso in cui le radici della equazione di 3.° grado (26) sono reali e distinte. Qui giova premettere alcune considerazioni.

I punti e le rette fondamentali del piano rappresentativo, essendo reali e distinti, formano un triangolo. Questo determina nel piano quattro regioni, che sono: la porzione finita di piano limitata dalle tre rette (superficie del triangolo) e le tre porzioni infinite, occupate ciascuna da un angolo del triangolo e dal suo opposto al vertice toltane la superficie del triangolo. Dal punto di vista proiettivo, queste quattro regioni hanno la stessa importanza (*).

Considerando la retta come una linea rientrante (all'infinito), due punti A e B di essa ne limitano due segmenti; fissata una direzione sulla retta, tali segmenti si possono indicare con AB e BA, intendendo che il primo sia quello percorso da un punto, il quale muovendosi nel senso prestabilito va da A in B; e che il secondo sia quello percorso da un punto, il quale muovendosi ancora nello stesso senso va da B in A.

Ciò posto, le quattro regioni, in cui un piano è diviso da un triangolo ABC, si determinano proiettivamente come segue. Si fissa su di un lato, ad es. AB, una direzione, e si considerano i due segmenti AB, BA limitati dai vertici A e B; dal terzo vertice C si proietta un punto mobile M che percorre uno dei segmenti AB o BA; sul raggio proiettante, che rota intorno a C, si fissa una direzione e si considera costantemente l'uno o l'altro dei due segmenti CM, MC. Allora le quattro regioni in discorso sono: una descritta da CM mentre M percorre AB, un'altra descritta da CM mentre M percorre BA, una terza descritta da MC mentre M percorre BA, ed una quarta descritta da MC mentre M percorre AB.

Chiamando *contorno* d'una regione la spezzata che la limita, e che è formata da segmenti presi sulle tre rette date, è facile vedere che *una retta qualsiasi del piano* (non passante per un vertice) *o non attraversa il contorno d'una regione o lo attraversa in due punti.*

Si consideri ora una conica circoscritta al triangolo, sopra ogni lato si hanno due segmenti, l'uno interno e l'altro esterno alla conica. Se si proietta il segmento interno d'un lato dal vertice opposto, e del raggio proiettante si considera il segmento che è pure interno alla conica, quest'ultimo segmento descriverà una delle quattro regioni del triangolo, e i punti di questa saranno tutti interni alla conica.

(*) Cfr. Staudt, *Geometrie der Lage*, N. 173.

Se un triangolo è iscritto in una conica, una retta qualsiasi (che non passi per un vertice) *ne taglia i lati in tre punti, i quali sono o tutti tre esterni alla conica, ovvero due interni ed uno esterno.* Questa proprietà si dimostra facilmente, considerando quella delle quattro regioni determinate dal triangolo, che è tutta interna alla conica, e ricordando che una retta qualsiasi o non ne attraversa il contorno, o lo attraversa in due punti. Vogliamo dimostrare la stessa proprietà anche analiticamente.

Sia $a_x^2 = 0$ l'equazione della conica, ed $A = (a a' a'')^2$ il suo discriminante. Siano poi $p(p_1 p_2 p_3)$, $q(q_1 q_2 q_3)$ $r(r_1 r_2 r_3)$ i vertici d'un triangolo iscritto nella conica, si avrà:

$$a_p^2 = 0, \qquad a_q^2 = 0, \qquad a_r^2 = 0, \qquad (pqr) \gtrless 0, \tag{α}$$

si prendano poi tre punti x, y, z sui tre lati

$$x_i = q_i + \lambda r_i, \qquad y_i = r_i + \mu p_i, \qquad z_i = p_i + \nu q_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3);$$

se questi tre punti sono in linea retta, si ha:

$$(xyz) = (pqr)[1 + \lambda\mu\nu] = 0,$$

donde:

$$\lambda\mu\nu = -1.$$

Si considerino ora le quantità $A a_x^2$, $A a_y^2$, $A a_z^2$ le quali coi loro segni fanno conoscere, se i punti x, y, z siano interni o esterni alla conica; in virtù delle (α) si ha:

$$a_x^2 = 2 a_q a_r \cdot \lambda, \qquad a_y^2 = 2 a_r a_p \cdot \mu, \qquad a_z^2 = 2 a_p a_q \cdot \nu,$$

donde:

$$A a_x^2 \cdot A a_y^2 \cdot A a_z^2 = -8 A^3 \cdot a_q a_r \cdot a'_r a'_p \cdot a''_p a''_q .$$

Ed ora dalla identità

$$(a a' a'')^2 (pqr)^2 = 6 \begin{vmatrix} a_p^2 & a_p a_q & a_p a_r \\ a'_p a'_q & a'^2_q & a'_q a'_r \\ a''_p a''_r & a''_q a''_r & a''^2_r \end{vmatrix}.$$

in virtù delle (α), si ha:

$$12 a_q a_r \cdot a'_r a'_p \cdot a''_p a''_q = A (pqr)^2,$$

per cui

$$A a_x^2 \cdot A a_y^2 \cdot A a_z^2 = -\frac{4}{3} A^4 (pqr)^2,$$

e quindi le tre quantità $A a_x^2$, $A a_y^2$, $A a_z^2$ devono essere o tutte tre negative, ovvero una negativa e due positive; e di qui segue che i punti x, y, z sono o tutti tre esterni alla conica, ovvero uno esterno e due interni.

Premesse queste cose, ritorniamo allo studio delle coniche invariantive nel caso in cui le radici della equazione (26) sono reali e distinte. Ad un fascio di coniche preso in questo sistema corrisponde nel piano Π una retta p; le coniche degeneri del fascio sono rappresentate dai punti ove la retta p taglia il triangolo fondamentale ABC, e però hanno parametri reali; per conseguenza i quattro punti base del fascio sono tutti quattro reali o tutti quattro imaginarii. Per decidere quale di questi due casi si verifica, si formi il primo membro dell'equazione tangenziale d'una conica del fascio, poi dati alle coordinate variabili $u_1\, u_2\, u_3$ tre valori reali ad arbitrio, si sostituiscano al parametro variabile del fascio uno alla volta i parametri delle tre coniche degeneri. I risultati delle tre sostituzioni, come ho dimostrato in altro luogo (**), sono tutti tre negativi, ovvero uno negativo e due positivi, ed i quattro punti base del fascio sono tutti reali nel 1.° caso, e tutti imaginarii nel 2.° caso. Denotando con $\overline{U_1}\, \overline{U_2}\, \overline{U_3}$ i valori che assumono i polinomii $U_1\, U_2\, U_3$, quando si dànno alle variabili $u_1\, u_2\, u_3$ tre valori reali fissati ad arbitrio, dovremo dunque sostituire in

$$\Phi(l_1 l_2 l_3) = \frac{\overline{U_1}}{A_1}(A_2 l_1^2 + 3\Theta_2 l_1 l_2 + \cdots) + \overline{U_2}(l_1 l_3 - l_2^2) + \frac{\overline{U_3}}{A_1}(A_1 l_3^2 + 3\Theta_1 l_2 l_3 + \cdots),$$

ad $l_1\, l_2\, l_3$ le coordinate dei punti ove la retta p taglia il triangolo ABC, e conchiudere che i punti base del fascio sono reali quando i corrispondenti valori di Φ son tutti negativi, e tutti imaginarii, quando i corrispondenti valori di Φ sono uno negativo e due positivi. In altri termini, osservando che l'equazione $\Phi(l_1\, l_2\, l_3) = 0$ rappresenta nel piano Π una conica circoscritta al triangolo ABC, possiamo conchiudere, che *i punti base del fascio di coniche invariantive rappresentato dalla retta p sono tutti reali o tutti imaginarii, secondo che i tre punti, in cui la retta p taglia il triangolo fondamentale, sono rispettivamente tutti tre esterni, ovvero due interni ed uno esterno alla conica* $\Phi(l_1\, l_2\, l_3) = 0$ (*). Ancora, considerando nel piano Π quella tra le regioni

(*) Per quanto fu sopra dimostrato, non possono mai presentarsi i casi, che i tre punti, in cui la retta p taglia il triangolo fondamentale, siano tutti tre interni, ovvero due esterni ed uno interno alla conica $\Phi(l_1\, l_2\, l_3) = 0$.

(**) *Sulla realità dei punti e delle tangenti comuni a due coniche.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. I, pag. 327-338.

determinate dal triangolo ABC, che è tutta interna alla conica $\Phi(l_1\, l_2\, l_3) = 0$ e che noi chiameremo *regione ideale* del piano Π, possiamo conchiudere che: *se la retta p non attraversa la regione ideale del piano Π, i punti base del fascio sono tutti reali, e i punti di p corrispondono tutti a coniche reali; se poi la retta p attraversa la regione ideale del piano Π i punti base del fascio sono tutti imaginarii.* In questo secondo caso non più tutti i punti di p corrispondono a coniche reali del sistema. Siano allora D, E i punti, in cui la retta p attraversa la regione ideale di Π, ed F il terzo punto in cui p seca il triangolo ABC; le coordinate dei punti D, E sostituite nel polinomio Φ lo rendono positivo, le coordinate del punto F invece lo rendono negativo; i punti D, E rappresentano le due coppie di rette imaginarie del fascio, ed il punto F rappresenta la coppia di rette reali. Un punto M di p allora corrisponderà rispettivamente ad una conica imaginaria, ovvero ad una conica reale, secondo che M ed F separano o non separano i punti D ed E (*), cioè secondochè il punto M è interno od esterno alla regione ideale. Dunque *i punti interni alla regione ideale del piano Π corrispondono a coniche invariantive imaginarie, ed i punti esterni alla regione ideale corrispondono a coniche reali;* i punti che stanno sui lati del triangolo fondamentale rappresentano coniche degenerate in coppie di rette imaginarie o reali, secondochè quelli appartengono o no al contorno della regione ideale.

Analogamente, nel piano Π' il triangolo fondamentale $A_1\, B_1\, C_1$ determina quattro regioni, una di queste, che chiameremo *regione ideale* è tutta interna alla conica

$$\Psi(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) = \frac{\overline{X_1}}{A_2}(A_1\lambda_1^2 + 3\Theta_1\lambda_1\lambda_2 + \cdots) + \overline{X_2}(\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2^2) + \frac{\overline{X_3}}{A_1}(A_2\lambda_3^2 + 3\Theta_2\lambda_2\lambda_3 + \cdots).$$

I punti interni alla regione ideale del piano Π' ed i punti del suo contorno corrispondono alle coniche imaginarie del sistema, ed i punti esterni corrispondono alle coniche reali. Se si prende nel sistema una schiera di coniche, le quattro tangenti comuni sono tutte imaginarie o tutte reali, secondochè la retta q che rappresenta la schiera attraversa o no la regione ideale del piano Π'.

Dalle cose precedenti segue evidentemente che nella trasformazione quadratica tra i piani Π e Π' ai punti della regione ideale dell'uno corrispondono i punti della regione ideale dell'altro.

(*) Per la dimostrazione, vedasi la mia Nota citata, pag. 335.

Date due coniche del sistema col mezzo dei punti M, N nel piano rappresentativo Π, non solo si riconosce facilmente la realità dei punti comuni coll'osservare se la retta MN attraversa o no la regione ideale del piano Π, ma si riconosce ancora facilmente la realità delle tangenti comuni, senza ricorrere ai punti M', N' rappresentativi delle stesse coniche nel piano Π'. Siano D, E, F i punti, in cui la retta MN taglia i lati del triangolo ABC. I parametri delle coniche degeneri del fascio determinato dalle coniche M, N sono le coordinate dei punti D, E, F della retta MN, quando su questa si prendano come punti fondamentali i punti M ed N; e quindi, se quei tre parametri hanno lo stesso segno, i punti $M\,N$ non sono separati dai punti D, E, F, se poi quei tre parametri non hanno lo stesso segno, i punti M, N sono separati da due dei tre punti D, E, F. Ciò posto, ricordando il teorema dimostrato nella mia Nota citata, pag. 336, e quanto abbiamo detto sopra, possiamo formare il quadro seguente:

I. M ED N NON SONO SEPARATI DA D, E, F.

1.° *La retta MN non attraversa la regione ideale.*

Le due coniche sono reali, ed hanno reali tutti i punti e tutte le tangenti comuni.

2.° *La retta MN attraversa la regione ideale, ed i punti MN sono entrambi esterni a questa regione.*

Le due coniche sono reali, ed hanno imaginarii sia i punti sia le tangenti comuni.

3.° *La retta MN attraversa la regione ideale, ed i punti MN sono entrambi interni a questa regione.*

Le coniche sono tutte due imaginarie.

II. M ED N SONO SEPARATI DA D, E, F.

4.° *La retta MN non attraversa la regione ideale.*

Le due coniche sono reali, ed hanno reali i punti comuni ed imaginarie le tangenti comuni.

5.° *La retta MN attraversa la regione ideale, ed i punti M, N sono entrambi esterni a questa regione.*

Le due coniche sono reali, ed hanno imaginarii i punti comuni, e reali le tangenti comuni.

6.° *La retta MN attraversa la regione ideale, ed i punti M, N sono l'uno interno l'altro esterno a questa regione.*

Le due coniche sono l'una reale e l'altra imaginaria.

Per mezzo delle considerazioni che precedono riesce facile ogni questione che riguardi la realità di coniche invariantive.

Noi ci limiteremo qui ad osservare che una retta attraversa tre delle quattro regioni determinate da un triangolo, e che il polo di essa rispetto al triangolo cade nella regione non attraversata, e, distinguendo se una retta del piano Π attraversa o no la regione ideale, ne dedurremo che *in un fascio di coniche, di cui i quattro punti base sono imaginarii, la conica combinante è reale; ed in un fascio di coniche, di cui i quattro punti base sono reali, la conica combinante è imaginaria* (*).

Accenneremo da ultimo ai casi di realità delle quattro coniche, rispetto a ciascuna delle quali due coniche date C_1 e C_2 sono polari reciproche fra di loro, e che sono rappresentate nel piano Π dai punti comuni alle coniche di equazioni (52). Gli invarianti A'_1, Θ'_1, Θ'_2, A'_2 di queste sono:

$$A'_1 = -6A_1A_2^2, \qquad \Theta'_1 = -6A_1A_2\Theta_2,$$

$$\Theta'_2 = -6A_1A_2\Theta_1, \qquad A'_2 = -6A_1^2A_2,$$

per guisa che l'equazione di 3.° grado, da cui dipende la ricerca dei punti comuni alle coniche (52) si riduce alla (26).

Quindi, se le coniche C_1 e C_2 hanno soltanto due punti comuni reali, anche le coniche (52) del piano Π hanno soltanto due punti comuni reali, i quali, essendo allora $R > 0$, rappresentano coniche invariantive reali.

Se poi i punti comuni a C_1 e C_2 sono tutti quattro reali o tutti quattro imaginarii ($R < 0$, nel qual caso le radici della (26) sono tutte reali), mediante le (54) si vede facilmente che i punti comuni alle coniche (52) sono tutti imaginarii, quando le radici della (26) non sono tutte dello stesso segno, e sono tutti reali, quando le radici della (26) sono tutte dello stesso segno. In quest'ultimo caso ricordiamo che i punti comuni alle coniche (52) formano un quadrangolo reale, che ha il triangolo fondamentale per triangolo diagonale, e però in ognuna delle quattro regioni determinate da questo triangolo cade uno di quei quattro punti; e così sapremo che tre di essi rappresentano coniche reali ed uno rappresenta una conica imaginaria.

Finalmente se le coniche C_1 e C_2 si toccano ($R = 0$), anche le coniche (52) si toccano.

(*) Cfr. G. Sforza, *Condizione geometrica per la realità dei punti e delle tangenti comuni a due coniche.* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. II, pag. 172-175.

Le quattro coniche rispetto a ciascuna delle quali le due coniche C_1 e C_2 sono polari reciproche fra loro sono dunque:

1.° due reali e due imaginarie (a coefficienti imaginarii), se C_1 e C_2 hanno due soli punti reali in comune;

2.° tutte imaginarie (a coefficienti imaginarii), se C_1 e C_2 hanno i quattro punti comuni reali, e le quattro tangenti comuni imaginarie, ovvero i quattro punti comuni imaginarii e le quattro tangenti comuni reali, ovvero se le coniche C_1 e C_2 sono l'una reale e l'altra imaginaria;

3.° tre reali ed una imaginaria (a coefficienti reali), se C_1 e C_2 hanno reali tutti i punti e tutte le tangenti comuni, ovvero se C_1 e C_2 hanno imaginarii tutti i punti e tutte le tangenti comuni, essendo però C_1 e C_2 entrambe reali, o entrambe imaginarie;

4.° due coincidenti, se le coniche C_1 e C_2 si toccano.

Roma, giugno 1889.

		ERRATA	CORRIGE.
Pag. 162	lin. 4	α_x^2	a_x^2
» 169	» 1	*iscritta*	*circoscritta*
» 169	» 2	*circoscritta*	*iscritta*
» 171	» 17	*circoscritta*	*iscritta*
» 171	» 22	*iscritta*	*circoscritta.*

Sulle formole di ricorrenza per lo sviluppo delle σ abeliane dispari a tre argomenti.

(*Memoria II di* Ernesto Pascal, *in Göttingen.*)

Questo lavoro fa seguito all'altro pubblicato da poco tempo in questo Giornale. Con esso si chiude la teoria dello sviluppo in serie delle σ abeliane dispari a tre argomenti (*).

Scopo delle Memorie, che seguiranno a questa, sarà la trattazione del problema analogo per il caso delle σ pari.

Dopo avere così espletata la teoria dello sviluppo di tutte le funzioni σ di genere 3, nei loro speciali campi di razionalità, io mi propongo di continuare questa serie di lavori, da me iniziata, prendendo la seguente altra direzione.

Le funzioni σ dispari sono, come si sa, razionali nel campo dei coefficienti di una determinata tangente doppia, di una cubica di contatto corrispondente, e di una certa conica. Tale campo lo chiamiamo il campo di Geiser.

Le funzioni σ pari sono invece razionali nel cosiddetto campo di Hesse, cioè nel campo dei coefficienti di una certa rete di quadriche.

Ma sono questi i soli campi nei quali sono razionali le σ?

E non è possibile per avventura trovare un campo in cui sieno razionali sia le σ pari che le dispari?

Le ricerche di Aronhold, di Weber, e le ultime di Frobenius a questo riguardo sono note.

(*) Un ristrettissimo riassunto della Mem. I e di questa è comparso alcuni mesi sono, sotto gli auspicii del mio maestro prof. Klein, negli Atti dell'Accademia di Göttingen. *Zur Theorie der ungeraden Abel'schen Sigmafunctionen dreier Argumente.* Götting. Nachric. Juli, 89.

Si può dimostrare che sia il campo di Geiser che quello di Hesse (e quindi naturalmente sia le σ dispari che le pari) sono razionali nel campo dei coefficienti di certe *sette tangenti doppie* della curva di 4.° ordine.

Tali sette tangenti non sono prese completamente ad arbitrio ma debbono comporre un cosiddetto *sistema settenario di* Aronhold *(Aronhold'sches Siebenersystem)*, cioè sono sette tangenti doppie formanti una certa configurazione speciale nel sistema di tutte le 28 tangenti doppie della curva di 4.° ordine.

Nella cosiddetta *figura di* Hesse, in cui tali 28 tangenti doppie corrispondono univocamente alle 28 rette che congiungono a due a due gli 8 punti fondamentali di una rete di quadriche, un *sistema settenario* corrisponde al sistema di sette rette che congiungono uno degli 8 punti con tutti gli altri sette.

Ecco dunque verso quali direzioni io mi propongo di drizzare i miei studii posteriori, mi propongo cioè di studiare le σ nel campo di razionalità di un *sistema settenario* di Aronhold.

Io confido nel favore costante dei miei amici, e spero che mai mi verrà meno l'incoraggiamento dei miei maestri.

§ I. Calcolo diretto del 2.° termine dello sviluppo delle σ abeliane dispari.

Nel § 11 della Memoria precedente abbiamo trovato una formola che dà in una maniera complicata l'espressione del 2.° termine dello sviluppo di σ quando i tre integrali di 1.ª specie w si fanno proporzionali alle tre coordinate omogenee x del punto della superficie di Riemann. Adoperando tale espressione siamo ivi giunti a trovare in una maniera *indiretta* il 2.° termine. Scopo di questo paragrafo è di trasformare invece *direttamente* la espressione di cui si parla, e ciò per poter poi, giovandoci di un altro risultato che troveremo nel corso di questa Memoria, dimostrare in maniera decisiva una delle proprietà fondamentali delle funzioni σ.

Incominciamo col calcolare:

$$[(\varphi, f), f)_{z=z'=x}.$$

Ponendo:

$$\varphi(zz') = \frac{16\psi(zz')}{f_3(z)f_3(z')},$$

si ha:

$$[(\varphi, f), f]_x = \frac{16[(\psi f), f]_x}{f_3^2} + \frac{2[(f_3, f), f]}{f_3}.$$

Nel § 9 della Mem. I abbiamo calcolato (ψf). Di qui si può facilmente calcolare $[(\psi f),\, f]$. Si trova usando notazioni analoghe a quelle del paragrafo citato:

$$[(\psi f),\, f]_x = -\frac{1}{18}(f_3 f)^2 - \frac{3}{2}a_x^2 a_3[(af),\, f]f_3 - a_x a_3 (af)(af')f_3$$

$$+\frac{2}{3}b_x^2(bf)(bf')f_{33} + \frac{1}{2}b_x^3[(bf),\, f]f_{33},$$

donde infine:

$$\frac{1}{16}[\varphi,\, f),\, f]_x = \frac{1}{8}\frac{[(f_3 f),\, f]}{f_3} - \frac{1}{18}\frac{(f_3 f)^2}{f_3^2} - \frac{3}{2}\frac{a_x^2 a_3[(af),\, f]}{f_3} - \frac{a_x a_3 (af)(af')}{f_3}$$

$$+\frac{2}{3}\frac{b_x^2(bf)(bf')f_{33}}{f_3^2} + \frac{1}{2}\frac{b_x^2[(bf),\, f]f_{33}}{f_3^2},$$

(con f_{33} si rappresenta la 2.^{a} derivata di f rispetto ad x_3).

La espressione (I) del § 11 citato diventa allora:

$$(\mathrm{I}) = 4\Big[-\frac{1}{24}\frac{D_x}{f_3^4}[(f_3 f),\, f] - \frac{5}{72}\frac{D_x (f_3 f)^2}{f_3^5} - \frac{1}{12}\frac{1}{f_3^3}[(Df),\, f] + \frac{1}{8}\frac{(Df)^2}{D_x f_3^3}$$

$$+\frac{3}{2}\frac{D_x a_x^2 a_3[(af),\, f]}{f_3^4} + \frac{D_x a_x a_3 (af)(af')}{f_3^4} - \frac{2}{3}\frac{f_{33}}{f_3^5}b_x^2(bf)(bf')D_x$$

$$-\frac{1}{2}\frac{f_{33}}{f_3^5}b_x^2[(bf),\, f]D_x\Big].$$

Questa espressione, come abbiamo già osservato al § 11 della Mem. precedente, deve potersi ridurre ad una funzione intera in x avente per denominatore f_3^3.

Cominciamo col considerare i termini contenenti per divisore f_3^5.

Usando per f la sua notazione simbolica è facile trovare:

$$(bf)(bf')b_x^2 = 4\cdot 4(bc)(bd)b_x^2 c_x^3 d_x^3$$

$$[(bf),\, f]\,b_x^3 = 4\cdot 3\cdot 4(bc)(cd)b_x^3 c_x^2 d_x^3$$

$$(f_3 f) = 4\cdot 3\cdot 4(bc)b_x^2 b_3 c_x^3$$

$$[(f_3 f),\, f] = 2\cdot 3\cdot 4^3(ab)(ac)a_x a_3 b_x^3 c_x^3 + 3^2\cdot 4^3(ab)(bc)a_x^2 a_3 b_x^2 c_x^3.$$

I termini dunque aventi per denominatore f_3^5 si riducono a:

$$-5\cdot 8\cdot 4(bc)(ad)b_x^2 b_3 c_x^3 a_x^2 a_3 d_x^3 - 2\cdot 4^3\cdot(bc)(bd)b_x^2 c_x^3 d_x^3 a_x^2 a_3^2$$

$$-2\cdot 3^2\cdot 4^2\cdot(bc)(cd)b_x^3 c_x^2 d_x^3 a_x^2 a_3^2 =$$

$$= 5\cdot 8\cdot 4\,[(bc)(bd)b_x^2 c_x^3 d_x^3 a_x^2 a_3^2 - (bc)(ad)b_x^2 b_3 c_x^3 a_x^2 a_3 d_x^3],$$

e trasformando il primo di questi due termini colla formola:

$$(bd)a_3 = -(da)b_3 - (ab)d_3,$$

e riducendo, resta solo:

$$-5 \cdot 8 \cdot 4(bc)(ab)b_x^2 c_x^3 a_x^2 a_3 \cdot d_x^3 d_3,$$

che ha appunto per divisore un f_3. Questo diventa dunque un termine solo con un divisore f_3^4. L'assieme dei termini di tale natura è dunque:

$$-5 \cdot 8(bc)(ab)b_x^2 c_x^3 a_x^2 a_3 - 4 \cdot 3 \cdot 2(ab)(bc)a_x^2 a_3 b_x^2 c_x^3 +$$
$$+ 2 \cdot 3^2 \cdot 4(ab)(bc)a_x^2 a_3 b_x^2 c_x^3,$$

cioè semplicemente:

$$= + 8(ab)(bc)a_x^2 a_3 b_x^2 c_x^3 = 4(ab)a_x^2 b_x^2 c_x^3 [(bc)a_3 - (ac)b_3]$$
$$= - 4(ab)^2 a_x^2 b_x^2 \cdot c_x^3 c_3,$$

e con ciò è comparso ancora un altro fattore f_3.

La (I) diventa dunque semplicemente:

$$(\mathrm{I}) = \left[-4(ab)^2 a_x^2 b_x^2 D_x - \frac{1}{3}[(Df)f] + \frac{1}{2}\frac{(Df)^2}{D_x}\right]\frac{1}{f_3^3}.$$

Sapendo già (§ 11 della Mem. I) che $\frac{(Df)^2}{D_x}$ è una funzione intera sulla superficie di Riemann si ha che colle trasformazioni fatte si è ottenuto perfettamente lo scopo che ci eravamo proposto.

Ponendo ora f sotto la sua forma canonica $D_x \Phi_x^3 - (\Omega_x^2)^2$ calcoliamo i diversi termini di questa espressione.

Si trovano le seguenti formole:

$$(ab)^2 a_x^2 b_x^2 = \frac{1}{4 \cdot 3}\Big\{\frac{3}{2}(D\Phi)(\Phi' D)\Phi_x^2 \Phi_x^2 + 6(\Phi\Phi')(D\Phi')\Phi_x^2 \Phi'_x D_x + 3(\Phi\Phi')^2 \Phi_x \Phi'_x D_x^2$$
$$- 4(D\Omega')(\Phi\Omega')\Omega_x^2 \Phi_x^2 - 8(D\Omega')(\Phi\Omega)\Omega_x \Omega'_x \Phi_x^2 - 4(\Phi\Omega)^2 \Omega'^2_x \Phi_x D_x$$
$$- 8(\Phi\Omega)(\Phi\Omega')\Phi_x \Omega_x \Omega'_x D_x + \frac{16}{3}(\Omega''\Omega)(\Omega''\Omega')\Omega_x \Omega'_x \Omega'''^2_x +$$
$$+ \frac{4}{3}(\Omega\Omega')^2 \Omega''^2_x \Omega'''^2_x\Big\}$$

$$\frac{(D, f)^2}{D_x} = 9(D\Phi)(D\Phi')\Phi_x^2 \Phi'^2_x D_x - 24(D\Phi)(D\Omega)\Phi_x^2 \Omega_x \Omega'^2_x + 16(D\Omega)(D\Omega')\Omega_x \Omega'_x \Phi_x^3$$

$$\begin{aligned}[(Df), f] = - & \; 6(D\Phi)^2\Phi_x\Phi'^2_x D_x + 9(D\Phi)(D\Phi')\Phi^2_x\Phi'^2_x D_x + 18(D\Phi)(\Phi\Phi')\Phi_x\Phi'^2_x D^2_x \\ & - 12(D\Phi)(D\Omega)\Phi^2_x\Omega_x\Omega'^2_x - 24(D\Phi)(\Phi\Omega)\Omega_x\Phi_x\Omega'^2_x D_x + \\ & + 8(D\Omega)(D\Omega')\Omega_x\Omega'_x\Phi^3_x + 4(D\Omega)^2\Omega'^2_x\Phi^3_x - 24(\Omega\Phi)(D\Omega')\Omega_x\Omega'_x D_x\Phi^2_x \\ & - 12(D\Omega')(\Omega'\Phi)\Omega^2_x\Phi^2_x D_x + 16(D\Omega')(\Omega'\Omega'')\Omega''_x\Omega^2_x\Omega'''^2_x.\end{aligned}$$

Si vede che in tutte queste espressioni vi sono termini di tre tipi diversi. 1) Termini non contenenti alcun simbolo Ω. 2) Termini contenenti due simboli Ω. 3) Termini contenenti quattro simboli Ω.

Sostituendo queste espressioni nella formola (I) e raccogliendo i termini del 1.° tipo, e riducendoli colla formola:

$$[-(\Phi\Phi' D)]^2 = [(\Phi\Phi')D_x + (\Phi' D)\Phi_x + (D\Phi)\Phi'_x]^2,$$

(si ricordi che $x_2 = 1$) si ha:

$$-(\Phi\Phi' D)^2\Phi_x\Phi'_x D_x + 4(D\Phi)^2\Phi_x \cdot D_x\Phi'^3_x,$$

il cui secondo termine lo possiamo scrivere, per effetto di $f = 0$:

$$4(D\Phi)^2\Phi_x \cdot \Omega^2_x\Omega'^2_x.$$

Raccogliendo poi i termini del 2.° tipo insieme con questo ultimamente ottenuto e adoperando le solite identità si ha:

$$-\frac{8}{3}(D\Omega\Omega')^2\Phi^3_x + 4(\Phi D\Omega')^2\Phi_x\Omega^2_x - \frac{4}{3}(\Phi\Omega\Omega')^2 D^2_x\Phi_x + \frac{8}{3}(\Phi\Omega\Omega')(D\Omega\Omega')D_x\Phi^2_x$$

$$+\left[\frac{16}{3}(\Omega\Omega')(D\Omega)\Omega'_x + \frac{4}{3}(\Omega\Omega')^2 D_x\right]\Phi^3_x D_x,$$

i quali due ultimi termini possono, mediante $f = 0$ a cui soddisfanno le x, rendersi termini del 3.° tipo, coi quali riuniti e riducendo si ha:

$$\frac{8}{27}(\Omega\Omega'\Omega'')^2\Omega'''^2_x D_x.$$

Raccogliendo tutti questi tre risultati e ponendo poi per le x le espressioni:

$$-\frac{1}{4}w_1 f_3, \qquad -\frac{1}{4}w_2 f_3, \qquad -\frac{1}{4}w_3 f_3,$$

si ha appunto il termine dello sviluppo di σ che coincide perfettamente con quello trovato per via *indiretta* nella Mem. precedente.

§ II. Equazione differenziale di Wiltheiss e sua applicazione.

Le funzioni ellittiche, iperellittiche e abeliane considerate come funzioni dei loro argomenti e dei moduli soddisfanno a certe equazioni differenziali di 2.° ordine.

Tali equazioni differenziali mutano di forma secondochè si tratti di una piuttosto che di un'altra delle funzioni Θ generali.

Per esempio se si tratti delle ϑ Jacobiane tali equazioni sono estremamente semplici e sono le cosiddette *equazioni di* Riemann (*).

Più complicate sono queste equazioni se si tratti di quelle speciali Θ che noi chiamiamo σ.

È noto che le funzioni ϑ differiscono dalle σ per due fattori di cui il primo è un certo esponenziale di 2.° grado e il secondo è una radice ottava di una certa espressione, dipendente dai moduli.

Ora chiamando s tale radice ottava e ponendo $Th = s \cdot \sigma$ le equazioni differenziali per le Th sono molto più semplici di quelle per le σ ed il Wiltheiss ha trovato tali equazioni per il caso iperellittico qualunque e per il caso abeliano $p = 3$ (**).

La forma generale che allora vengono ad acquistare tali equazioni è la seguente: in primo punto sono equazioni lineari omogenee di 2.° ordine; inoltre vi comparisce un certo processo di Aronhold composto colle derivate di Th rispetto ai coefficienti della forma fondamentale moltiplicate per i coefficienti di un certo covariante. Tale processo di Aronhold ha in generale una relazione assai intima col *discriminante* della forma fondamentale.

Per il caso abeliano $p = 3$ il covariante che entra nel processo di Aronhold δ e che dovremo in seguito studiare molto intimamente è il seguente:

$$F = (a\,b\,c)^2\,[a_x^2\,b_x^2\,c_v^2 + a_x^2\,b_x\,b_v\,c_x\,c_v],$$

(le v si suppongono coordinate di un punto *arbitrario* del piano).

(*) Riemann, Werke, pag. 131.

(**) Wiltheiss, *Ueber die partiellen Differentialgleichungen zwischen den Ableitungen der hyperelliptischen Thetafunctionen nach den Parametern und nach den Argumenten.* Crelle, Bd. 99. — *Partielle Differentialgleichungen der Thetafunct. zweier Arg.* M. A., 29. — *Partielle Differentialgleich. der hyper. Thetaf. etc.* M. A., 31. — *Die Partielle Differentialgleich. etc.* M. A., 33. — *Die Partielle Differentialgleich. der Abelschen Thetafunct. dreier Argumente,* Göttinger Nachrich., Juni 1889.

Questo covariante non è nuovo. Esso ha già delle relazioni assai caratteristiche colla curva di 4.° ordine e colle trascendenti che hanno questa per base.

Infatti esso, considerato nelle coordinate v, rappresenta una conica-covariante che passa per i punti tangenziali di un punto x della curva (*). Inoltre è appunto tale covariante che costituisce l'integrando dell'integrale normale di 3.ª specie Q (**). Ciò non comparisce però direttamente dagli sviluppi da noi dati nel § 1 della Mem. precedente, però si può far vedere che se si vuole fare scomparire la quantità arbitraria h che ivi comparisce allora l'integrando si riduce proprio al covariante di cui è parola tenendo conto che le nostre variabili si muovono sulla *superficie di* RIEMANN.

L'equazione del WILTHEISS è propriamente:

$$\delta Th + \sum v_i v_j \frac{\partial^2 Th}{\partial w_i \partial w_j} + L\,Th = 0,$$

dove:

$$L = \frac{1}{288}\left[9(abc)^2(abe)^2\left\{c_v^2 e_w^2 + c_v c_w e_v e_w\right\} - 5(abc)^4 e_v^2 e_w^2\right],$$

dove le v, come sopra, sono arbitrarie.

Poniamo ora:

$$Th = s\cdot\sigma = s(N_1 + N_3 + N_5 + \cdots),$$

dove le N sono i diversi termini dello sviluppo di σ, e s è una certa irrazionale determinata già dal KLEIN (***), ma che per il nostro scopo non ci occorre conoscere.

Applicando l'equazione differenziale a questa forma di Th e poi eguagliando a zero i termini degli stessi ordini in w, dopo aver posto le v (arbitrarie) eguali alle w si hanno le equazioni:

$$s(\delta N_1)_{v=w} + N_1(\delta s)_{v=w} + 6N_3 s = 0 \tag{1}$$

$$s(\delta N_{2\lambda-1})_{v=w} + N_{2\lambda-1}(\delta s)_{v=w} + (2\lambda+1)2\lambda\cdot s N_{2\lambda+1} + L_{v=w} N_{2\lambda-3}s = 0, \tag{2}$$

la seconda delle quali costituirà il fondamento per le formole ricorrenti che noi desideriamo trovare, mentre la prima ci servirà a conoscere l'espressione

(*) Il problema generale della ricerca di tali curve-covarianti di $n-2^{\text{mo}}$ ordine si correla col problema delle tangenti doppie. Vedi: DERSCH, *Doppeltangenten einer Curve n^{ter} Ordnung*. Math. Ann., VII.

(**) Mem. prima, § 1.

(***) KLEIN, Gottinger Nachrich., Mai 1889.

di $(\delta s)_{v=w}$ e ciò senza la conoscenza della forma di s, ma mediante la conoscenza che già abbiamo del secondo termine dello sviluppo di σ. Viceversa se si potesse giungere alla conoscenza diretta di δs si giungerebbe mediante quella formola alla conoscenza del secondo termine dello sviluppo di σ. Però la determinazione diretta di δs tenendo presente il grado elevato che s ha nei coefficienti e mediante altre considerazioni che è facile fare, appare cosa di non lieve complicazione.

Si sa che le funzioni σ non sono funzioni razionali dei coefficienti della quartica fondamentale, ma dei coefficienti delle curve $\Omega = 0$ $\Phi = 0$ $D = 0$ mediante cui nel modo noto si compone la quartica. Da ciò segue che le nostre formole precedenti non sono applicabili senz'altro se prima non si è trasformato il processo δ che in esse comparisce in modo da farvi comparire non più le derivate rispetto ai coefficienti della quartica, ma rispetto ai coefficienti di quelle altre curve. Cioè a dire lo scopo di tutte le considerazioni che seguiranno, sarà di trasformare l'equazione di Wiltheiss, e per essa il processo δ, nel *campo di razionalità* delle nostre funzioni σ.

§ III. Introduzione alla trasformazione del processo δ.

Noi dovremo ridurre il processo δ alla forma:

$$\delta = \sum \frac{\partial}{\partial D} \overline{D} + \sum \frac{\partial}{\partial \Omega} \overline{\Omega} + \sum \frac{\partial}{\partial \Phi} \overline{\Phi} = \sum \frac{\partial}{\partial f} F,$$

dove con $\overline{D}$ $\overline{\Omega}$ $\overline{\Phi}$ si intendono i coefficienti di tre certi *covarianti* che denoteremo nello stesso modo e alla cui ricerca si riduce tutta la nostra quistione. Che il processo δ debba potere trasformarsi in questa maniera, in modo cioè che $\overline{D}$ $\overline{\Omega}$ $\overline{\Phi}$ risultino *covarianti* delle tre forme D Ω Φ, è cosa che appar chiara quando si ricordi la proprietà sostanziale della funzione σ, la sua proprietà cioè d'essere un *covariante trascendente* delle tre curve D Ω Φ. Noi troveremo effettivamente nel corso del nostro lavoro questa caratteristica proprietà del processo δ che si riduce poi nel fondo ad una nuova proprietà del covariante F.

Supponendo di applicare il δ alla quartica f troviamo senz'altro la seguente equazione:

$$F = \Phi \overline{D} - 2 \Omega \overline{\Omega} + D \overline{\Phi}.$$

Questa relazione ci suggerisce l'idea che dobbiamo seguire per trovare i covarianti $\overline{D}\ \overline{\Omega}\ \overline{\Phi}$; noi dobbiamo cioè calcolare F in funzione dei coefficienti delle tre forme $D\ \Omega\ \Phi$ e poi cercare di raggruppare i termini ottenuti in tal modo che ciascuno di essi venga a contenere per fattore sempre o D o Ω o Φ. È chiaro che alla prima calcolazione F non apparirà senz'altro sotto questa forma, ma essa *vi si deve poter ridurre* e noi indicheremo in seguito gli artifizii non facili coi quali vi si riesce.

Qui capita però ancora un'altra quistione fondamentale.

È solo *in una maniera* che si potrà ridurre F alla forma detta?

Poche osservazioni sul risultato che otterremo ci mostreranno che ciò non è, e che sono invece possibili *infinite* maniere varianti fra certi limiti. D'altra parte il processo δ trasformato nel nostro campo di razionalità deve avere una forma ben determinata, onde a prima vista parrebbe che dopo trasformato F alla forma detta si dovesse poi intraprendere una seconda ricerca, il trovare cioè quale delle infinite forme conviene al nostro caso. Però noi dimostreremo a suo luogo (e questo è un punto di essenziale importanza) che per il nostro scopo, della ricerca cioè delle formole ricorrenti per la σ, qualunque delle infinite forme di F fa raggiungere la meta.

Incominciamo col trasformare F in modo da farvi comparire i simboli di D, Ω, Φ.

Colle solite regole del calcolo simbolico facciamo in primo luogo scomparire in F due simboli a, b, e per essi introduciamovi i corrispondenti D, Ω, Φ.

Allora si hanno in primo luogo i seguenti termini che, poichè sono del tipo che noi desideriamo, cioè contenenti per fattori una di quelle tre forme ternarie, li poniamo da parte:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\cdot 3}\Big\{6(\Phi b c)^2 b_x^2 c_v^2 \Phi_x D_x - 4(\Omega b c)^2 b_x^2 c_v^2 \cdot \Omega'^2_x + 3(\Phi\Phi' c)(D\Phi' c) c_v^2 \Phi_x^2 \Phi'_x \cdot D_x \\
&-2(\Phi\Omega c)(D\Omega c) c_v^2 \Phi_x^2 \cdot \Omega'^2_x - 4(\Omega\Phi c)(\Omega'\Phi c) c_v^2 \Phi_x \Omega_x \Omega'_x \cdot D_x + \\
&+\frac{8}{3}(\Omega\Omega'' c)(\Omega'\Omega'' c) c_v^2 \Omega_x \Omega'_x \cdot \Omega'''^2_x + 6(\Phi b c)^2 b_x b_v c_x c_v \Phi_x \cdot D_x - \\
&-4(\Omega b c)^2 b_x b_v c_x c_v \cdot \Omega'^2_x + \frac{3}{2}(\Phi\Phi' c)(D\Phi' c) c_x c_v \Phi_x^2 \Phi'_v \cdot D_x - \\
&-2(\Omega\Phi c)(\Omega'\Phi c) c_x c_v \Phi_v \Omega_x \Omega'_x \cdot D_x\Big\}.
\end{aligned}$$

In secondo luogo si hanno i seguenti termini che non sono del tipo di quelli che noi desideriamo e che quindi dovremo in seguito occuparci di trasformare.

$$\frac{1}{4\cdot 3}\Big\{\frac{3}{2}(\Phi D c)(D\Phi' c)c_v^2\Phi_x^2\Phi'^2_x+\frac{3}{2}(D\Phi' c)(\Phi\Phi' c)c_x c_v\Phi'_x\Phi_x^2 D_v+$$

$$+\frac{3}{2}(D\Phi' c)(\Phi D c)c_x c_v\Phi'_x\Phi_x^2\Phi'_v-8(\Phi\Omega c)(D\Omega' c)c_v^2\Phi_x^2\Omega_x\Omega'_x-$$

$$-2(D\Omega' c)(\Phi\Omega' c)c_x c_v\Phi_x^2\Omega_x\Omega_v-2(D\Omega' c)(\Phi\Omega c)c_x c_v\Phi_x^2\Omega'_x\Omega_v-$$

$$-2(D\Omega' c)(\Phi\Omega c)c_x c_v\Phi_x^2\Omega_x\Omega'_v-4(\Omega D c)(\Omega'\Phi c)c_x c_v\Omega_x\Omega'_x\Phi_x\Phi_v-$$

$$-2(\Omega\Phi c)(\Omega'\Phi c)c_x c_v\Omega_x\Omega'_x\Phi_x D_v+\frac{8}{3}(\Omega\Omega'' c)(\Omega'\Omega'' c)c_x c_v\Omega_x\Omega'_x\Omega'''_x\Omega'''_v\Big\}.$$

Se in queste espressioni al simbolo c sostituiamo i simboli corrispondenti di D Φ Ω abbiamo in tutto quattro specie di termini diversi, cioè:

1)	Termini	con	3	simboli Φ,	3	simboli D,	0	simboli Ω
2)	»	»	2	»	2	»	2	»
3)	»	»	1	»	1	»	4	»
4)	»	»	0	»	0	»	6	»

È naturale che dobbiamo occuparci separatamente di ciascuno di questi tipi di termini.

§ IV. Trasformazione dei termini del I tipo.

I termini del I tipo che risultano sono (a meno del divisore comune $4\cdot 3$):

$$\frac{1}{8}\Big\{6(\Phi D\Phi'')(D\Phi'\Phi'')\Phi_x^2\Phi'^2_x\Phi''_v D_v+3(\Phi\Phi' D)(D\Phi'\Phi'')\Phi'_x\Phi''_x\Phi_x^2\Phi''_v D_v$$

$$+3(\Phi\Phi'\Phi'')(D\Phi'\Phi'')\Phi'_x\Phi''_x\Phi_x^2 D_v^2+3(D\Phi'\Phi'')(\Phi D\Phi'')\Phi''_x\Phi'_x\Phi_x^2\Phi'_v D_v$$

$$+3(\Phi\Phi'\Phi'')(D\Phi'\Phi'')\Phi'_x\Phi_x^2\Phi''_v D_v\cdot D_x+3(D\Phi'\Phi'')(\Phi D\Phi'')\Phi'_x\Phi_x^2\Phi'_v\Phi''_v\cdot D_x\Big\}.$$

Gli ultimi due hanno già per fattore D_x. Resta a trasformare gli altri quattro. Il terzo termine si riduce facilmente a

$$\frac{1}{3}\cdot 3(\Phi\Phi'\Phi'')^2\Phi_x\Phi'_x\Phi''_x D_v^2\cdot D_x.$$

Il secondo si riduce facilmente alla metà del primo col segno mutato e agli altri due termini

$$-3(D\Phi'\Phi'')^2\Phi'_x\Phi''_v D_v\cdot\Phi_x^3+3(\Phi\Phi'\Phi'')(D\Phi'\Phi'')\Phi'_x\Phi_x^2\Phi''_v D_v\cdot D_x,$$

ed infine il quarto si trasforma in

$$3(D\Phi'\Phi'')\Phi''_x\Phi'_v\Phi^2_x D_v[(D\Phi''\Phi')\Phi_x-(\Phi''\Phi'\Phi)D_x+(\Phi'\Phi D)\Phi''_x],$$

di cui i due primi sono del genere di quelli che noi vogliamo perchè aventi per fattori rispettivamente Φ^3_x, D_x, e l'ultimo si distrugge coll'altra metà del primo.

Si vede dunque che effettivamente i termini superiori si lasciano ridurre a termini del genere voluto.

§ V. Trasformazione dei termini del II tipo.

Tali termini sono:

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}(\Phi D\Omega')(D\Phi'\Omega')\Phi^2_x\Phi'^2_x\Omega^2_v-(\Phi D\Omega')(D\Phi'\Omega)\Phi^2_x\Phi'^2_x\Omega_v\Omega'_v\\
&-(\Phi\Phi'\Omega')(D\Phi'\Omega')\Phi'_x\Phi^2_x D_v\Omega_x\Omega_v-(\Phi\Phi'\Omega')(D\Phi'\Omega)\Omega_x\Phi'_x\Phi^2_x\Omega_v D_v\\
&-(\Phi\Phi'\Omega')(D\Phi'\Omega)\Phi^2_x\Phi'_x\Omega_x\Omega'_v D_v-(D\Phi'\Omega')(\Phi D\Omega')\Phi'_x\Phi^2_x\Omega_x\Omega_v\Phi'_v\\
&-(D\Phi'\Omega')(\Phi D\Omega)\Phi'_x\Phi^2_x\Omega'_x\Omega_v\Phi'_v-(D\Phi'\Omega')(\Phi D\Omega)\Phi'_x\Phi^2_x\Omega_x\Omega'_v\Phi'_v\\
&-4(\Phi\Omega\Phi')(D\Omega'\Phi')\Phi^2_x\Omega_x\Omega'_x\Phi'_v D_v-2(\Phi\Omega D)(D\Omega'\Phi')\Omega_x\Omega'_x\Phi^2_x\Phi'^2_v\\
&-(\Omega D\Phi')(\Omega'\Phi D)\Phi'_x\Phi_x\Omega_x\Omega'_x\Phi_v\Phi'_v-\frac{1}{2}(\Omega\Phi\Phi')(\Omega'\Phi\Phi')\Phi_x\Phi'_x\Omega_x\Omega'_x D^2_v\\
&-2(\Omega D\Phi')(\Omega'\Phi\Phi')\Omega_x\Omega'_x\Phi'_x\Phi_x\Phi_v D_v,
\end{aligned}$$

e inoltre vengono cinque altri termini contenenti per fattore D_x e che per brevità non segniamo qui.

Su questi termini facciamo le seguenti trasformazioni.

Il primo è:

$$=-\frac{1}{2}(\Phi D\Omega')\Phi'^2_x\Phi_x\Omega^2_v[(\Phi'\Omega'\Phi)D_x-(\Omega'\Phi D)\Phi'_x+(\Phi D\Phi')\Omega'_x],$$

di cui l'ultimo diventa facilmente:

$$-\frac{1}{4}(\Phi D\Phi')\Omega'_x\Omega^2_v\Phi_x\Phi'_x[-(\Omega'\Phi'\Phi)D_x+(\Phi'\Phi D)\Omega'_x].$$

Il decimo termine colla identità $(\Phi\Omega D)\Omega'_x=$ ecc., si riduce a termini del nostro genere. Così il nono termine colla identità $(D\Omega'\Phi')\Phi_x=$ ecc., si riduce a termini del genere desiderato e ad un termine come il tredicesimo. Colla identità $(\Phi D \Omega')\Omega_x =$ ecc., il sesto termine, a meno dei soliti termini, si riduce ad uno simile al settimo.

Il dodicesimo è:

$$-\frac{1}{2}(\Omega'\Phi\Phi')\Phi_x\Phi'_x\Omega_x\Omega'_x D_v[(\Phi\Phi' D)\Omega_v - 2(\Phi' D\Omega)\Phi_v],$$

di cui la seconda parte è simile al tredicesimo, mentre la prima parte colla identità $(\Phi\Phi' D)\Omega_x =$ ecc., diventa un termine che si distrugge col quarto e un altro col fattore D_x. Il quinto colla formola $(D\Phi'\Omega)\Phi_x =$ ecc., si riduce, ciò che fa anche l'ottavo colla formola $(\Phi\Omega D\Phi'_x =$ ecc.

Dopo fatte queste riduzioni il tredicesimo è venuto ad acquistare il coefficiente 1 e allora unito coll'undicesimo dà:

$$(\Omega D\Phi')\Phi'_x\Phi_x\Phi_v\Omega_x\Omega'_v[(\Phi\Phi' D)\Omega'_v - (\Phi' D\Omega')\Phi_v],$$

di cui la 2.^{a} parte è:

$$= -(\Omega D\Phi')\Phi'_x\Omega_x\Omega'_x\Phi^2_v[(D\Omega'\Phi)\Phi'_x - (\Omega'\Phi\Phi')D_x + (\Phi\Phi' D)\Omega'_x],$$

la cui 1.^{a} parte si trasforma infine in

$$-(D\Omega'\Phi)\Phi'^2_x\Omega_x\Phi^2_v[(D\Phi'\Omega')\Omega_x - (\Phi'\Omega'\Omega)D_x + (\Omega'\Omega D)\Phi'_x],$$

e con ciò si vede che i due termini presi in considerazione si sono ridotti totalmente a termini della specie richiesta.

Applicando inoltre al secondo l'identità $(D\Phi'\Omega)\Phi_x =$ ecc., si vede infine che di tutti i tredici termini segnati al principio di questo paragrafo solo i quattro seguenti non sono ancora del genere richiesto, cioè:

$$(1) \qquad -(\Phi D\Omega')(\Phi D\Phi')\Omega_x\Omega_v\Omega'_v\Phi'^2_x\Phi_x$$

$$(2) \qquad -(\Phi\Phi'\Omega')(D\Phi'\Omega')\Phi'_x\Phi^2_x D_v\Omega_x\Omega_v$$

$$(3) \qquad +(\Omega D\Phi')(\Phi\Phi' D)\Phi'_x\Phi_x\Phi_v\Omega_x\Omega'_x\Omega'_v$$

$$(4) \qquad -2(D\Omega'\Phi')(\Phi\Omega D)\Phi'_x\Phi'_v\Phi^2_x\Omega'_x\Omega_v.$$

I tre primi si possono trasformare così:

$$(1) = -\frac{1}{2}(\Phi D\Phi')\Omega_v\Omega_x\Omega'_v\Phi_x\Phi'_x[-(\Omega'\Phi'\Phi)D_x + (\Phi'\Phi D)\Omega'_x]$$

$$(2) = -\frac{1}{2}(\Phi\Phi'\Omega')D_v\Omega_x\Omega_v\Phi_x\Phi'_x[(\Phi'\Omega'\Phi)D_x + (\Phi D\Phi')\Omega'_x]$$

$$(3) = \frac{1}{2}(\Phi\Phi' D)\Omega'_v\Omega'_x\Omega_x\Phi_x\Phi'_x[(D\Phi'\Phi)\Omega_v - (\Phi'\Phi\Omega)D_v].$$

L'assieme di questi tre termini, a meno dei due termini contenenti per fattore D_x è semplicemente:

$$\left.\begin{aligned}&-(\Phi\Phi' D)^2\Phi_x\Phi'_x\Omega_x\Omega'_x\Omega_v\Omega'_v+(\Phi\Phi' D)(\Phi\Phi'\Omega)\Phi_x\Phi'_x\Omega_x\Omega'_x\Omega'_v D_v\\ &=-2(\Phi\Phi' D)(D\Omega\Phi')\Phi_x\Phi'_x\Phi_v\Omega_x\Omega'_x\Omega'_v.\end{aligned}\right\}\quad(a)$$

Intanto il (4) lo possiamo scrivere:

$$-2[(D\Omega'\Phi)(\Omega D\Phi')-(D\Omega'\Omega)(D\Phi'\Phi)]\,\Phi'_x\Phi'_v\Phi_x^2\Omega'_x\Omega_v,$$

di cui il primo termine colla formola:

$$(D\Omega'\Phi)\Phi'_x=\text{ecc.},$$

diventa tre termini del nostro genere, e il secondo colla formola $(D\Omega'\Omega)\Phi_x=$ ecc. si riduce a due termini del nostro genere e ad un altro che si distrugge precisamente con (a).

Con ciò si vede dunque effettuato il nostro assunto, che era quello di trasformare secondo il nostro punto di vista i termini del II tipo, i quali, come appunto si prevede *a priori,* sono proprio di tale natura (e analogamente quelli degli altri tre tipi) da potersi trasformare completamente secondo il nostro intento.

I molteplici artifizii per giungere al risultato non sono così facili ad investigarsi.

Notiamo inoltre che noi per brevità abbiamo quasi sempre tralasciato di segnare quei termini i quali comparivano immediatamente sotto la forma desiderata.

In un capitolo seguente poi naturalmente li raccoglieremo tutti.

§ VI. Trasformazione dei termini del III tipo.

Essi sono:

$$\begin{aligned}&\frac{8}{3}(\Omega\Omega'' D)(\Omega'\Omega''\Phi)\Phi_x\Phi_v\Omega_x\Omega'_x\Omega'''_x\Omega'''_v+\frac{4}{3}(\Omega\Omega''\Phi)(\Omega'\Omega''\Phi)\Phi_x D_v\Omega_x\Omega'_x\Omega'''_x\Omega'''_v\\
&+\frac{2}{3}(D\Omega'\Omega'')(\Phi\Omega'\Omega'')\Omega_x\Omega_v\Omega'''_x\Omega'''_v\Phi_x^2+\frac{4}{3}(D\Omega'\Omega'')(\Phi\Omega'\Omega''')\Omega_x\Omega_v\Phi_x^2\Omega'''_x\Omega''_v\\
&+\frac{4}{3}(D\Omega'\Omega'')(\Phi\Omega'\Omega'')\Omega_x\Omega_v\Omega''_v\Omega''_x\Phi_x^2+\frac{2}{3}(D\Omega'\Omega'')(\Phi\Omega\Omega''')\Omega'_x\Omega_v\Omega'''_x\Omega''_v\Phi_x^2\\
&+\frac{2}{3}(D\Omega'\Omega'')(\Phi\Omega\Omega''')\Omega_x\Omega'_v\Omega'''_x\Omega'''_v\Phi_x^2+\frac{4}{3}(\Omega D\Omega'')(\Omega'\Phi\Omega''')\Omega_x\Omega'_x\Phi_x\Phi_v\Omega''_x\Omega'''_v\\
&+\frac{8}{3}(\Phi\Omega\Omega'')(D\,\Omega'\Omega'')\Omega'''^2_v\Omega_x\Omega'_x\Phi_x^2+\frac{16}{3}(\Phi\Omega\Omega'')(D\Omega'\Omega''')\Omega''_v\Omega'''_v\Omega_x\Omega'_x\Phi_x^2.\end{aligned}$$

Indicheremo anche qui brevemente il modo con cui bisogna raggruppare i varii termini, e le identità simboliche che bisogna adoperare per ottenere il nostro scopo.

Trasformando il sesto termine colla identità $(\Phi\Omega\Omega''')\Omega'_x =$ ecc., si ha, a meno di un termine col fattore Φ_x^3 e di un altro con Ω_x^2, un termine simile al quarto. Così il settimo con $(\Phi\Omega\Omega''')\Omega''_x =$ ecc., dà un termine simile anche al quarto. L'ottavo con $(\Omega D\Omega'')\Omega'_x =$ ecc., si trasforma nella forma desiderata. Il terzo con $(\Phi\Omega'\Omega'')\Omega'''_x =$ ecc., dà un termine in Φ_x^3 e due termini simili al quarto.

Il secondo con $(\Omega\Omega''' D)\Omega'_x =$ ecc., si riduce al genere desiderato. Il secondo colla trasformazione $(\Omega\Omega'''\Phi)\Omega''_x =$ ecc., dà luogo ad un termine che si riconosce facilmente eguale a zero, un termine col fattore Ω_x^2 e un termine:

$$\frac{4}{3}(\Omega'\Omega'''\Phi)(\Omega''\Omega\Omega''')\Phi_x^2 D_v \Omega_x \Omega'_x \Omega''_v$$

$$= \frac{2}{3}(\Omega''\Omega\Omega''')\Phi_x^2 D_v \Omega'_x \Omega''_v [(\Omega'''\Phi\Omega)\Omega'_x + (\Omega\Omega'\Omega''')\Phi_x].$$

Il nono con $(D\Omega'\Omega'')\Omega_x =$ ecc., e il primo con $(\Omega\Omega''' D)\Omega'_x =$ ecc., si riducono alla forma desiderata. Restano quindi infine solo i tre termini:

$$\frac{8}{3}(D\Omega'\Omega'')(\Phi\Omega'\Omega''')\Omega_x\Omega_v\Phi_x^2\Omega'''_x\Omega''_v$$

$$+\frac{8}{3}(D\Omega'\Omega'')(\Phi\Omega'\Omega''')\Omega_x\Omega_v\Phi_x^2\Omega'''_v\Omega''_x$$

$$+\frac{16}{3}(D\Omega'\Omega''')(\Phi\Omega\Omega'')\Omega''_v\Omega'''_v\Omega_x\Omega'_x\Phi_x^2,$$

di cui il primo coll'identità $(\Phi\Omega'\Omega''')\Omega_x =$ ecc., e il secondo con $(D\Omega'\Omega'')\Omega_x =$ ecc. si riducono a termini di cui alcuni sono della specie desiderata e gli altri si distruggono esattamente col terzo.

§ VII. Trasformazione dei termini del IV tipo.

Tale trasformazione non è complicata come le precedenti, ma è estremamente semplice. Non vi è che un solo termine del IV tipo ed è:

$$-\frac{8}{9}(\Omega\Omega'''\Omega^{\text{IV}})(\Omega'\Omega'''\Omega^{\text{IV}})\Omega_x\Omega'_x\Omega''_x\Omega''_v\Omega^{\text{V}}_x\Omega^{\text{V}}_v.$$

Colla formola identica:

$$(\Omega'\Omega'''\Omega^{\mathrm{I}})\Omega_x = \text{ecc.},$$

tale termine diventa:

$$-\frac{8}{27}(\Omega\Omega'''\Omega^{\mathrm{IV}})^2\Omega''_x\Omega''_v\Omega^{\mathrm{V}}_x\Omega^{\mathrm{V}}_v\cdot\Omega'^2_x,$$

cioè acquista per fattore Ω^2_x.

Ora passeremo a raccogliere i varii termini che siamo venuti ad ottenere durante tutte queste riduzioni, e propriamente riuniremo insieme quelli contenenti per fattore rispettivamente D_x, Ω^2_x, Φ^3_x, cioè quelli che vengono a formare $\overline{\Phi}$, $\overline{\Omega}$, $\overline{D}$ giusta la formola del § III. Ci occuperemo naturalmente di ridurre alla forma più semplice possibile tutte queste espressioni.

§ VIII. Il covariante $\overline{\Phi}$.

In primo punto è facile trovare di quali specie di tipi di termini deve essere composto il $\overline{\Phi}$. Esso sarà cioè composto di termini dei seguenti tre tipi:

1)	Termini	con	3	simboli Φ,	2	simboli D,	0	simboli Ω
2)	»	»	2	»	1	»	2	»
3)	»	»	1	»	0	»	4	»

Di ciascuno di questi tipi si presenta un numero assai grande di termini, diversi fra loro per la diversità dei loro fattori determinanti simbolici. Questo carattere della diversità dei determinanti contenuti come fattori simbolici dei termini, non costituisce come l'altro carattere delle diversità del numero dei simboli, una differenza sostanziale fra i varii termini, e noi possiamo cercare di trasformarli, mediante le solite identità simboliche, in maniera che si abbiano termini i cui fattori determinanti siano di certi pochi e determinati tipi che noi scegliamo naturalmente fra i più semplici e i più simmetrici.

I dettagli di queste calcolazioni non li possiamo esporre qui, perchè ci porterebbero troppo lontano. Ci basti di esporre i risultati.

I termini del 1.° dei tipi di cui si è parlato al principio di questo paragrafo, si riducono a (*):

(*) Avvertiamo che nell'esposizione di tali risultati ometteremo dappertutto un divisore numerico $4\cdot3$, che dovrà quindi sempre supporsi.

$$(\Phi\Phi'\Phi'')^2\left\{\frac{3}{8}\Phi_x\Phi'_x\Phi''_x D_v^2+\frac{105}{16}\Phi_x\Phi'_x\Phi''_v D_x D_v-\frac{3}{16}\Phi_v\Phi'_v\Phi''_x D_x^2\right\}$$

$$+(D\Phi\Phi')^2\left\{-\frac{3}{2}\Phi_x\Phi'_v\Phi''^2_x\Phi''_v+\frac{9}{16}\Phi_v\overset{*}{\Phi'_v}\Phi''^3_x-\frac{9}{16}\Phi_x\Phi'_x\Phi''_x\Phi''^2_v\right\}.$$

Quelli del 2.° tipo si riducono a:

$$(\Phi\Omega'\Omega'')^2\left\{\frac{43}{4}\Phi_x\Phi'^2_x\Phi'_v D_v+\frac{29}{4}\Phi_x\Phi'^2_v\Phi'_x D_x+\frac{9}{2}\Phi_v\overset{*}{\Phi'^3_x}D_v+\frac{7}{2}\Phi_v\Phi'^2_x\Phi'_v D_x\right\}$$

$$+(\Omega\Omega'\Phi)(\Omega\Omega'\Phi')\left\{-\frac{59}{4}\Phi_x^2\Phi'_x\Phi'_v D_v-\frac{25}{4}\Phi_x\Phi_v\Phi'_x\Phi'_v D_x-6\,\Phi_x^2\Phi'^2_v D_x\right\}$$

$$+(\Omega\Phi'\Omega')(\Omega D\Omega')\left\{-\frac{7}{4}\Phi_x\Phi'_v\Phi_x^2\Phi_v+\frac{5}{4}\overset{*}{\Phi'^2_v}\Phi_x^3+\frac{3}{2}\Phi'^2_x\Phi_x\Phi_v^2\right\}$$

$$+(\Omega'\Phi'D)(\Omega'\Phi'\Phi)\left\{-8\,\Phi_x^2\Phi'_x\Omega_v^2-\frac{19}{2}\Phi_x\Phi_v\Phi'_x\Omega_x\Omega_v-\frac{9}{2}\Phi_x^2\Phi'_v\Omega_x\Omega_v-\right.$$

$$\left.-4\,\Phi_v^2\overset{*}{\Phi'_x}\overset{*}{\Omega_x^2}-\Phi_x\Phi_v\overset{*}{\Phi'_v}\overset{*}{\Omega_x^2}\right\}$$

$$+(\Omega\Phi\Phi')^2\left\{-\frac{11}{4}\Phi_x\Phi'_x D_x\Omega_v^2-\frac{9}{2}\Phi_x\Phi'_x D_v\Omega_x\Omega_v-\frac{19}{2}\Phi_x\Phi'_v\overset{*}{\Omega_x^2}\overset{*}{D_v}-\right.$$

$$\left.-\frac{7}{2}\Phi_x\Phi'_v\Omega_x\Omega_v D_x\right\}.$$

Finalmente i termini del 3.° tipo si riducono:

$$(\Omega\Omega'\Omega'')^2\left\{\frac{4}{9}\Phi_x^2\Phi_v\Omega_x\Omega_v-\frac{17}{9}\overset{*}{\Phi_x^3}\Omega_v^2-\frac{7}{9}\Phi_x\overset{*}{\Phi_v^2}\overset{*}{\Omega_x^2}\right\}$$

$$+(\Phi\Omega'\Omega'')^2\left\{\frac{13}{3}\Phi_x\overset{*}{\Omega_v^2}\overset{*}{\Omega'^2_x}+\frac{1}{3}\Phi_v\overset{*}{\Omega_x^2}\overset{*}{\Omega'_x}\Omega'_v+\frac{2}{3}\Phi_x\Omega_x\Omega_v\Omega'_x\Omega'_v\right\}.$$

I termini che abbiamo contrassegnati con $*$ li toglieremo poi da queste espressioni perchè, per una ragione che svilupperemo in uno dei paragrafi seguenti, li possiamo trasportare a far parte di $\bar{\Omega}$, $\bar{D}$ anzichè di $\bar{\Phi}$.

L'assieme di questi tre risultati ottenuti forma appunto il richiesto covariante $4\cdot 3\cdot \bar{\Phi}$, a meno della riduzione di cui abbiamo ora parlato.

§ IX. Il covariante $\bar{\Omega}$.

Anche qui possono comparire tre diverse specie di termini, cioè:

1) Termini con 2 simboli Φ, 2 simboli D, 1 simbolo Ω
2) „ „ 1 „ 1 „ 3 „
3) „ „ 0 „ 0 „ 5 „

I termini di ciascuno di tali tre tipi si possono ridurre rispettivamente ai seguenti:

1) $(D\Omega\Phi)(D\Omega\Phi')\left[6\Phi_x^2\Phi'^2_v+3\Phi_x\Phi_v\Phi'_x\Phi'_v\right]$

$$+(\Phi\Omega D)^2\left[-3\Phi_v\Phi'^2_x\Phi'_v-\frac{3}{2}\Phi_x\Phi'^2_v\Phi'_x\right]$$

$$+(\Phi'\Omega D)(\Phi'\Omega\Phi)\left[-3\Phi_x\Phi'_x\Phi_v D_v-3\Phi_x^2\Phi'_v D_v-\Phi_x\Phi_v\Phi'_v D_x-2\Phi_v^2\Phi'_x D_x\right]$$

$$+(\Phi\Phi'\Omega)^2\left[\frac{5}{2}\Phi_x\Phi'_v D_x D_v-\frac{1}{4}\Phi_v\Phi'_v D_x^2\right]$$

2) $(\Omega\Omega'\Phi)(\Omega\Omega' D)\left[4\Phi_x\Phi_v\Omega_x\Omega_v+6\Phi_x^2\Omega_v^2+2\Phi_v^2\Omega_x^2\right]$

$$+(\Phi\Omega\Omega')^2\left[2\Phi_x D_v\Omega_x\Omega_v+\frac{4}{3}\Phi_x D_x\Omega_v^2+2\Phi_v D_v\Omega_x^2+\frac{4}{3}\Phi_v D_x\Omega_x\Omega_v\right]$$

$$+(\Omega\Omega'\Omega'')^2\left[-2\Phi_x^2\Phi_v D_v-\frac{10}{9}\Phi_v^2\Phi_x D_x\right]$$

3) $(\Omega\Omega'\Omega'')^2\left[-\frac{8}{9}\Omega'''_x\Omega''_v\Omega^{\text{IV}}_x\Omega^{\text{IV}}_v-\frac{16}{9}\Omega'''^2_x\Omega^{\text{IV}2}_v\right].$

L'assieme di tali espressioni costituisce $-2\cdot 3\cdot 4\cdot\bar{\Omega}$ (*).

§ X. Il covariante $\bar{D}$

L'espressione di questo covariante è molto più semplice delle precedenti. Facilmente si ottiene la seguente espressione per $4\cdot 3\cdot\bar{D}$:

$$(D\Phi\Phi')^2\left[-\frac{3}{4}\Phi_v\Phi'_x D_v\right]$$

$$+(\Phi D\Omega')^2\left[\frac{3}{2}\Phi_x\Omega_v^2+3\Phi_v\Omega_x\Omega_v\right]$$

$$+(D\Omega\Omega')^2\left[-3\Phi_x\Phi_v^2\right]$$

$$+(\Omega D\Omega')(\Omega\Phi\Omega')\left[3\Phi_v^2 D_x+2\Phi_x\Phi_v D_v\right]$$

$$+(\Phi\Omega\Omega')^2\left[-\frac{3}{2}\Phi_v D_x D_v-\frac{1}{2}\Phi_x D_v^2\right]$$

$$+(\Omega\Omega'\Omega'')^2\left[\frac{2}{9}D_v\Omega_x\Omega_v-\frac{2}{9}D_x\Omega_v^2\right].$$

(*) Per intendere la ragione del fattore -2 che vi abbiamo segnato, si ricordi la formola del § III.

§ XI. Mutamenti che possono effettuarsi nelle espressioni dei tre covarianti trovati.

Nei paragrafi precedenti noi abbiamo calcolato il covariante F che è espresso mediante i coefficienti della curva di 4.° ordine, in funzione dei coefficienti delle tre ternarie D Ω Φ, e poichè possiamo porre:

$$F = \Phi \overline{D} - 2\Omega\overline{\Omega} + D\overline{\Phi},$$

abbiamo chiamato $\overline{\Phi}$ $\overline{\Omega}$ $\overline{D}$ i fattori che vengono a moltiplicare rispettivamente D_x Ω_x^2 Φ_x^3. Però si presenta subito il fatto che con questi soli criterii i covarianti $\overline{\Phi}$ $\overline{\Omega}$ $\overline{D}$ non sono individuati; giacchè è chiaro che oltre che comparire termini contenenti semplicemente per fattore una di quelle tre forme, possono comparire addirittura termini coi fattori:

$$D_x \Phi_x^3 \quad \text{ovvero} \quad D_x \Omega_x^2,$$

(l'ipotesi di termini con fattori Ω_x^2 Φ_x^3 si esclude da sè perchè F è solo di 4.° grado in x). Di tal natura sono i termini segnati con $\ast$ nel § VIII.

In tal caso tali termini, almenochè non si assuma un altro criterio per individuare $\overline{D}$ $\overline{\Omega}$ $\overline{\Phi}$, possono sia far parte di $\overline{D}$ che di $\overline{\Phi}$, ovvero di Ω che di $\overline{\Phi}$; la prima idea quindi che si affaccia alla mente è quella di cercare a quali altre condizioni debbono sottostare i tre covarianti $\overline{D}$ $\overline{\Omega}$ $\overline{\Phi}$, perchè possano venire a costituire il nostro processo di Aronhold.

Però noi possiamo dimostrare che per il nostro scopo preciso, cioè per la ricerca delle formole ricorrenti a cui soddisfanno i termini della funzione abeliana σ, la ricerca ulteriore di cui si parla è inutile; in altri termini, il risultato è lo stesso qualunque sia la terna di valori (nei limiti della arbitrarietà di cui si parla) che si assume per $\overline{D}$ $\overline{\Omega}$ $\overline{\Phi}$.

§ XII. Dimostrazione della tesi del paragrafo precedente.

Consideriamo prima i termini contenenti per fattore:

$$D_x \Omega_x^2.$$

L'assieme di tutti questi termini lo possiamo scrivere simbolicamente:

$$t_x \cdot D_x \Omega_x^2.$$

Noi abbiamo trovato nella Memoria precedente che la funzione abeliana σ soddisfa ad una certa equazione differenziale $\Delta\sigma = 0$ (*).

Sebbene non ci occorra sostanzialmente per quello che dovremo dire pure ci pare utile far vedere in questa occasione che alla stessa equazione soddisfa anche la funzione Th introdotta nel § II di questa Memoria e che è formata moltiplicando σ per una certa irrazionale s determinata già dal KLEIN; in altri termini che

$$\Delta(s \cdot \sigma) = s\Delta\sigma + \sigma\Delta s = 0,$$

cioè $\Delta s = 0$.

Ora pel caso delle σ dispari il KLEIN ha propriamente trovato che s è la radice ottava del discriminante della superficie di 3.° ordine (**):

$$\Phi_x^3 + 2x_4\Omega_x^2 + x_4^2 D_x = 0.$$

Tale discriminante sarà un invariante delle tre forme ternarie D Ω Φ. Se per Φ Ω poniamo rispettivamente:

$$\left.\begin{array}{l} \Phi_x^3 + 2q_x\Omega_x^2 + (q_x)^2 D_x \\ \Omega_x^2 + q_x D_x, \end{array}\right\} \qquad (a)$$

ciò corrisponde a fare sulla superficie di 3.° ordine una trasformazione lineare del tipo:

$$x_1 \equiv x_1 \qquad x_2 \equiv x_2 \qquad x_3 \equiv x_3 \qquad x_4 \equiv x_4 + q_x.$$

Allora il discriminante deve restare inalterato, dunque poichè un invariante di Φ Ω D che resta inalterato per le sostituzioni (a) soddisfa all'equazione $\Delta = 0$ (***), si ha che appunto $\Delta s = 0$.

Tornando ora al nostro assunto, se il termine t_x D_x Ω_x^2 lo supponiamo appartenente a $\overline{\Phi}$, esso vi entrerà come termine t_x Ω_x^2, e se lo supponiamo appartenente a $\overline{\Omega}$ esso vi entrerà come $-\frac{1}{2} t_x D_x$.

Se supponiamo effettuato $\partial N_{2\lambda-1}$, che è l'espressione che comparisce nelle formole di ricorrenza del § II di questa Memoria, si otterrà nell'un caso e nell'altro a meno di termini comuni, i due termini rispettivamente:

$$\sum \frac{\partial N}{\partial \Phi} t_x \Omega_x^2$$

$$-\frac{1}{2}\sum \frac{\partial N}{\partial \Omega} t_x D_x,$$

(*) Memoria I, § 13.
(**) KLEIN, Göttinger Nachrichten, Juni 1889.
(***) Memoria I, § 13.

i quali sono due termini fra loro eguali appunto perchè un termine qualunque N di σ soddisfa a $\Delta N = 0$.

Consideriamo ora i termini del tipo:

$$A \cdot D_x \Phi_x^3.$$

Incominciamo coll'osservare che supponendo tale termine come appartenente a $\overline{\Phi}$ il che lo riduce naturalmente a $A \Phi_x^3$, allora quando si va ad applicare il processo δ ad un termine qualunque contenente al grado α i coefficienti di Φ, e propriamente si applica quella parte del processo δ corrispondente al termine $A\Phi_x^3$, allora il risultato parziale che si ottiene non è altro che la stessa espressione su cui si opera moltiplicata per α.

E lo stesso analogamente supponendo il termine appartenente a $\overline{D}$.

Ciò premesso noi ricordiamo inoltre che un termine qualunque dello sviluppo di σ ha il suo grado nei coefficienti D di un'unità maggiore del grado nei coefficienti Φ (*), ciò che del resto appare anche dalla espressione trascendente della funzione σ in cui si vede che vi compariscono due fattori di cui l'uno dipendente solo dai coefficienti di f (che sono sempre di grado eguale nei coefficienti Φ e D) e l'altro di 1.° grado nella D (**).

Vediamo ora nell'applicazione delle formole di ricorrenza del § II quali differenze porta il supporre il termine di cui si parla come appartenente a Φ o a $\overline{D}$.

La formola di ricorrenza la possiamo scrivere:

$$(\delta N_{2\lambda-1})_{v=w} - N_{2\lambda-1}\left(\frac{\delta N_1 + 6 N_3}{N_1}\right) + \text{ecc.} = 0,$$

o anche:

$$(\delta N_{2\lambda-1})_{v=w} - N_{2\lambda+1} \frac{\overline{D} + 6 N_3}{N_1} + \text{ecc.} = 0.$$

Ora consideriamo in $N_{2\lambda-1}$ un termine B di grado α nei coefficienti Φ e $\alpha + 1$ nei coefficienti D.

Allora andiamo a vedere i risultati che otteniamo da questa formola secondochè del termine $A \cdot D_x \Phi_x^3$ ne disponiamo nell'uno o nell'altro modo. Se lo consideriamo come contenente il fattore Φ_x^3 e quindi poniamo il termine $A D_x$ a far parte di $\overline{D}$ si ha per risultato, oltre altri termini di cui è inutile tener

(*) Memoria I, § 8.
(**) Id., id.

conto,

$$(\alpha + 1)AB - AB + \text{ecc.}$$

Se invece poniamo il termine $A\Phi_x^3$ a far parte di Φ si ha:

$$\alpha AB + \text{ecc.}$$

cioè lo stesso risultato di prima.

§ XIII. Altra dimostrazione.

Possiamo dare un'altra dimostrazione della seconda parte della tesi svolta nel paragrafo precedente.

Il fondamento di quest'altra dimostrazione consiste nel dimostrare che mentre σ consiste di un'assieme di termini in cui il grado nei coefficienti di D supera di un'unità quello nei coefficienti di Φ, invece $s\sigma = Th$ ha sempre eguale il grado nei coefficienti di D e Φ.

In tal caso l'applicazione del processo δ alla Th dà sempre lo stesso risultato qualunque sia il modo con cui abbiamo costituito δ, cioè in qualunque modo abbiamo disposto del termine $AD_x\Phi_x^3$. Poichè poi le formole di ricorrenza derivano dall'applicazione di δ a Th che entra nell'equazione primitiva di Wiltheiss, si ha appunto il nostro assunto.

Resta dunque solo a dimostrare che Th è dello stesso grado in D e Φ. Ciò del resto sarebbe chiaro se noi partiamo dalla considerazione che Th deve potersi considerare addirittura come funzione (irrazionale) dei coefficienti della quartica, perchè essa infatti soddisfa all'equazione di Wiltheiss in cui appunto non vi compariscono che solo coefficienti di f o quantità da questi direttamente dipendenti.

Del resto possiamo anche dimostrare direttamente l'asserzione superiore, e propriamente dimostriamo che s^8 cioè il discriminante della superficie cubica:

$$\Phi_x^3 + 2z_4\Omega_x^2 + z_4^2 D_x,$$

è una tale funzione dei coefficienti di D Ω Φ, che il suo grado nei coefficienti Φ è sempre di otto unità maggiore del grado in D.

Infatti nell'opera di Salmon-Fiedler (*) sta calcolato il discriminante della

(*) *Raumgeometrie II*, pag. 427.

superficie di 3.° ordine in funzione razionale di certi invarianti della cosiddetta forma *pentaedrica.*

Uno dei termini di tale discriminante è ivi indicato con A^4 dove A è simbolicamente espresso da:

$$A = (1\,2\,3\,5)(1\,2\,4\,6)(1\,3\,4\,7)(2\,3\,8\,4)(5\,6\,7\,8)^2,$$

dove per semplicità si son poste le cifre per indicare tutti i simboli fra loro equivalenti.

Se poniamo la superficie di 3.° ordine sotto la forma $\alpha_x^3 = 0$ noi possiamo scrivere *uno* dei termini di A così:

$$\alpha_1^3 \cdot \alpha_1^2 \alpha_2 \cdot \alpha_2^2 \alpha_3 \cdot \alpha_1^2 \alpha_4 \cdot \alpha_3^2 \alpha_4 \cdot \alpha_2^2 \alpha_4 \cdot \alpha_3^2 \alpha_4 \cdot \alpha_3 \alpha_4^2.$$

Fatta di questo termine la 4.ª potenza e sostituite alle α le loro espressioni mediante $D\ \Omega\ \Phi$ si ha che uno dei termini del discriminante è certamente del tipo:

$$T = (\overset{4}{D}\ \ \overset{16}{\Omega}\ \ \overset{12}{\Phi}),$$

dove appunto il grado di Φ è eguale a quello di D più 8.

Per dimostrare che la stessa legge si verifica per qualunque altro termine procediamo così: Poniamo un termine qualunque sotto la forma:

$$(\overset{\lambda}{D}\ \ \overset{\mu}{\Omega}\ \ \overset{\nu}{\Phi}).$$

Nella forma fondamentale facciamo i seguenti cangiamenti:

Moltiplichiamo:

$$\begin{array}{rcl} x_4 & \text{per} & \rho \\ \text{i coefficienti di } \Phi & \text{per} & \rho^2 \\ \text{»} \qquad\quad \Omega & \text{per} & \rho. \end{array}$$

Allora la forma fondamentale resta inalterata a meno di un fattore, onde il discriminante deve anche restare inalterato, a meno di un fattore; ma il termine T si moltiplica per $\rho^{24+16} = \rho^{40}$, dunque dovrà essere:

$$\mu + 2\nu = 40. \tag{1}$$

Facciamo d'altra parte i cangiamenti seguenti: moltiplichiamo:

$$\begin{array}{rcl} x_1,\ x_2,\ x_3 & \text{per} & \rho \\ \text{i coefficienti di } D & \text{per} & \rho^2 \\ \text{»} \qquad\quad \Omega & \text{per} & \rho. \end{array}$$

Allora cogli stessi ragionamenti si vede che dovrà sussistere l'altra relazione:

$$2\lambda + \mu = 24. \tag{2}$$

Da (1) e (2) si ricava appunto:

$$\nu - \lambda = 8.$$

§ XIV. Osservazioni sulle espressioni dei tre covarianti $\overline{D}$ $\overline{\Omega}$ $\overline{\Phi}$.

Giusta i risultati dei paragrafi precedenti possiamo dunque semplificare l'espressione di $\overline{\Phi}$ ottenuta al § VIII trasportando a far parte di $\overline{\Omega}$ e di $\overline{D}$ rispettivamente quei termini che ivi abbiamo contrassegnati con ✱✱ ovvero con ✱.

Tali termini poi vengono a ridursi con altri a loro simili che esistono già in $\overline{\Omega}$ o $\overline{D}$.

Ci dispensiamo dallo scrivere di nuovo le espressioni dei tre covarianti dopo fattevi le leggiere modificazioni indicate.

Facciamo solo notare che esse le abbiamo ridotte combinazioni razionali intere degli 11 covarianti seguenti e dei termini delle loro polari rispetto a v:

$$A = (D\Omega\Omega')^2,\quad B = (\Phi D\Omega)^2\Phi_x,\quad C = (\Phi\Phi' D)^2\Phi_x\Phi'_x,\quad G = (\Phi\Omega\Omega')^2\Phi_x$$

$$E = (\Omega\Omega'\Omega'')^2,\quad K = (\Phi\Omega\Omega')(D\Omega\Omega')\Phi_x^2,\quad H = (\Phi\Phi'\Omega)^2\Phi_x\Phi'_x,\quad P = (D\Omega\Phi)(D\Omega\Phi')\Phi_x^2\Phi'^2_x$$

$$Q = (\Omega\Omega'\Phi)(\Omega\Omega'\Phi')\Phi_x^2\Phi'^2_x,\quad M = (\Omega\Phi D)(\Omega\Phi\Phi')\Phi_x\Phi'^2_x,\quad N = (\Phi\Phi'\Phi'')^2\Phi_x\Phi'_x\Phi''_x,$$

di cui i primi 6 sono quelli che entrano nella formazione del secondo termine dello sviluppo di σ (*).

Supponiamo fatto $v = x$. Allora l'espressione di $4 \cdot 3 \cdot F$ da noi calcolata nei paragrafi precedenti diventa un assieme di 14 termini, ciascuno dei quali è una combinazione degli 11 covarianti detti avanti e delle 3 forme D, Ω, Φ.

Tali 14 combinazioni di cui parliamo sono fra loro *linearmente indipendenti,* come ora vogliamo dimostrare.

Esse sono:

$$\mathrm{I} = ND^3,\qquad \mathrm{II} = C\Phi D$$

$$\mathrm{III} = E\Phi\Omega D,\qquad \mathrm{IV} = G\Omega^2 D,\qquad \mathrm{V} = K\Omega^2$$

$$\mathrm{VI} = E\Omega^3$$

$$\left\{\begin{array}{llll} \mathrm{VII} = G\Phi D^2, & \mathrm{VIII} = A\Phi^2, & \mathrm{IX} = QD^2, & \mathrm{X} = K\Psi D \\ \mathrm{XI} = M\Omega D, & \mathrm{XII} = H\Omega D^2, & \mathrm{XIII} = P\Omega, & \mathrm{XIV} = B\Phi\Omega. \end{array}\right\}$$

(*) Memoria I, § 12.

Di questi termini ne abbiamo distinte quattro categorie diverse secondo il grado diverso che hanno nei coefficienti delle forme Φ Ω D.

I coefficienti numerici coi quali queste quattordici espressioni compariscono a formare $4 \cdot 3 \cdot F$ sono rispettivamente i seguenti:

$$\frac{27}{4}, \quad -\frac{9}{4}, \quad -\frac{16}{3}, \quad 12, \quad 12, \quad -\frac{8}{3}, \quad 24, \quad -3,$$
$$-27, \quad 6, \quad -36, \quad -18, \quad 9, \quad 0.$$

Per dimostrare la indipendenza lineare delle 14 espressioni basta naturalmente esaminare partitamente fra loro tutte quelle comprese in ciascuna delle quattro categorie.

La terza categoria è inutile considerarla, perchè contiene un solo termine.

I due termini della prima categoria (I e II) sono fra loro linearmente indipendenti, perchè se si fa diventare Φ il prodotto di un quadrato e di una forma lineare va a zero solo I.

Se Ω acquista per fattore D allora III e V vanno a zero e solo IV resta diverso da zero. Se Ω diventa poi il prodotto di due forme va a zero solo III e non V, dunque i tre elementi della seconda categoria sono fra loro linearmente indipendenti.

Passiamo finalmente agli elementi dell'ultima categoria.

Se Ω diventa il quadrato di D, allora solo XII non va a zero.

Se Ω diventa il prodotto di D per un'altra forma, mentre Φ diventa il prodotto del quadrato di D per un'altra forma, degli elementi rimasti, toltone il XII, solo IV non va a zero.

Se Ω diventa il quadrato di una forma lineare, mentre Φ il prodotto del quadrato di tale forma per un'altra forma, vanno a zero tutti i rimanenti meno XIII.

Inoltre se Ω acquista per fattore D, e Φ diventa un cubo esatto, vanno a zero tutti gli ultimi rimasti meno VII. Lo stesso fanno tutti gli altri rimasti meno XIV se Ω diventa il quadrato e Φ il cubo di una forma lineare.

Se Φ diventa un cubo e Ω il prodotto della base di questo cubo per una altra forma vanno a zero due dei tre rimanenti, ma non va a zero VIII; e finalmente se Φ diventa un cubo va a zero XI e non X.

Con ciò resta dunque completamente dimostrato il nostro assunto.

§ XV. Altre osservazioni sui tre covarianti $\overline{D}\ \overline{\Omega}\ \overline{\Phi}$.

Nei paragrafi precedenti abbiamo sviluppato il fondamento di una certa arbitrarietà colla quale possiamo scegliere i tre covarianti che ci occorrono per la formazione del processo di Aronhold.

La base di tale arbitrarietà consisteva nel fatto che nella trasformazione del covariante F sotto la forma:

$$D\overline{\Phi} - 2\Omega\overline{\Omega} + \Phi\overline{D},$$

compariscono termini contenenti rispettivamente per fattori o $D\Phi$ ovvero $D\Omega$. Allora è arbitrario per il nostro scopo (e lo abbiamo dimostrato) aggregare tali termini alle espressioni di $\overline{\Phi}$ o di $\overline{D}$ ovvero di $\overline{\Phi}$ o di $\overline{\Omega}$, per modo che da tale punto di vista appare questo, che l'arbitrarietà nella formazione per es. del covariante $\overline{D}$ è limitata solo alla aggiunzione di termini contenenti per fattore D_x, e così analogamente per $\overline{\Omega}$ e per $\overline{\Phi}$.

Ma si domanda: Non è possibile supporre che, facendo trasformazioni diverse da quelle da noi fatte nei §§ IV, V, VI, si giunga a poter costituire un altro $\overline{D}$ tale che non differisca dal primo per termini contenenti per fattore D_x?

E in tal caso, sarebbe egualmente arbitrario scegliere questo nuovo $\overline{D}$ piuttosto che l'antico? Questa sarebbe un'arbitrarietà più generale di quella considerata avanti, e d'altra parte la dimostrazione del paragrafo precedente non regge che per il caso particolare considerato. Però è facile far vedere che l'ipotesi messa non può sussistere.

Infatti dalla identità:

$$D\overline{\Phi_1} - 2\Omega\overline{\Omega_1} + \Phi\overline{D_1} = D\overline{\Phi_2} - 2\Omega\overline{\Omega_2} + \Phi\overline{D_2},$$

ne risulta identicamente:

$$\mathrm{A}_x^3 D_x + \mathrm{B}_x^2\Omega_x^2 + \Gamma_x\Phi_x^3 = 0.$$

Se disponiamo di x in modo da farlo diventare uno dei due punti d'incontro di $D_x = 0$ con $\Omega_x^2 = 0$ appare subito che la retta $\Gamma_x = 0$ dovendo passare per ambedue questi punti d'incontro sarà, a meno di un fattore costante, proprio la retta $D_x = 0$. Onde $\Gamma_x = D_x \cdot \Gamma'$ dove, essendo Γ_x e D_x covarianti delle forme $D\ \Omega\ \Phi$, si ricava che Γ' godrà ancora della proprietà invariantiva.

Essendo allora identicamente:

$$A_x^3 D_x + B_x^2 \Omega_x^2 + D_x \Gamma' \Phi_x^3 = 0,$$

sarà B_x^2 eguale al prodotto di D_x per un'altra forma invariantiva, B'_x, e togliendo poi il fattore comune D_x si ricava infine che A_x^3 deve identicamente risultare del tipo:

$$B'_x \Omega_x^2 + \Gamma' \Phi_x^3.$$

Possiamo dunque senz'altro conchiudere che:

1.° La differenza di due $\overline{D}$ è divisibile per D_x;

2.° La differenza di due $\overline{\Omega}$ è divisibile per D_x;

3.° La differenza di due $\overline{\Phi}$ risulta identicamente composta di termini contenenti per fattore Ω_x^2 e di termini col fattore Φ_x^3.

Come corollario si ricava la seguente proprietà che vogliamo qui porre in vista, perchè ha importanza per le cose che diremo nel paragrafo seguente, vogliamo cioè notare che l'assieme dei tre termini:

$$S = \frac{3}{2} B_x \Omega_v^2 + 3 B_v \Omega_v \Omega_x - 3 A \Phi_x \Phi_v^2,$$

che comparisce nell'espressione di $\overline{D}$ è ivi fisso e inalterabile.

Tale assieme, a meno di un fattore numerico comune a tutti tre i termini, comparisce esattamente nella espressione del secondo termine della funzione abeliana σ (*).

Prima di chiudere questo paragrafo non voglio tralasciare di esporre una idea che potrebbe valere come dimostrazione generale, sebbene un po' vaga, della nota arbitrarietà, per la ricerca delle formole di ricorrenza, nella scelta dei covarianti che compongono il processo di Aronhold.

Si può far vedere facilmente che in qualunque modo si scelgano tali covarianti purchè soddisfacenti a

$$F = D\overline{\Phi} - 2\Omega\overline{\Omega} + \Phi\overline{D},$$

si avrà sempre identicamente:

$$\sum \frac{\partial}{\partial D} \overline{D} + \sum \frac{\partial}{\partial \Omega} \Omega + \sum \frac{\partial}{\partial \Phi} \Phi = \sum \frac{\partial}{\partial f} F.$$

Infatti chiamando rispettivamente a_i, a_{ij}, a_{ijk}, a_{ijkl} i coefficienti delle forme

(*) Memoria I, § 15.

D, Ω, Φ, f si ha:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i} = \sum_{jkl} \frac{\partial}{\partial \alpha_{ijkl}} \alpha_{jkl},$$

e così analogamente per $\frac{\partial}{\partial \alpha_{ij}}$ e $\frac{\partial}{\partial \alpha_{ijk}}$, donde si ricava facilmente il nostro assunto.

Onde, poichè nell'equazione di Wiltheiss non entra che:

$$\delta Th = \sum \frac{\partial Th}{\partial f} F,$$

è chiaro che tale equazione darà sempre lo stesso, qualunque sia la indicata trasformazione del processo δ, e poichè le nostre formole di ricorrenza per la σ derivano direttamente dall'equazione di Wiltheiss per Th, è chiaro che i risultati finali debbono sempre coincidere qualunque sia la via seguita.

§ XVI. Espressione di $(\delta s)_{v=w}$ e dimostrazione di una proprietà fondamentale delle funzioni abeliane σ.

Per rendere applicabile la formola di ricorrenza (2) trovata al § II bisogna conoscere la espressione di $(\delta s)_{v=w}$ che si trova mediante la formola (1), e mediante la conoscenza che ora abbiamo dell'espressione di $\overline{D}$. Sostituendo ivi i valori di N_3 e di δN_1 ossia δD_w ossia $\overline{D_w}$ si trova facilmente che:

$$s(\delta N_1)_{v=w} + 6 N_3 s,$$

diventa divisibile per D_w, onde dalla formola (1) si ricava $(\delta s)_{v=w}$ come funzione *intera* dei coefficienti delle tre ternarie fondamentali. Propriamente:

$$(\delta s)_{v=w} = s\left(\frac{5}{64}(\Phi\Phi' D)^2 \Phi_w \Phi'_w - \frac{1}{3}(\Phi\Omega\Omega')^2 \Phi_w D_w + \frac{5}{27}(\Omega'\Omega''\Omega''')^2 \Omega_w^2 \right.$$
$$\left. - \frac{13}{48}(D\Omega\Omega')(\Phi\Omega\Omega')\Phi_w^2\right).$$

L'osservazione fatta nel paragrafo precedente, che cioè quell'assieme di termini che ivi abbiamo chiamato S è in $\overline{D}$ *fisso* e *inalterabile*, ci mostra che in qualunque modo si disponga delle arbitrarietà di cui abbiamo largamente discorso avanti, sempre il δs risulterà funzione *intera*.

Siccome poi dalla formola (2) colla sostituzione del valore trovato per δs, si può togliere un fattore comune s, risulta che $N_{2\lambda+1}$ viene sempre espresso con funzione intera, onde, avendo poi d'altra parte, nel § I di questo lavoro, potuto ritrovare per *una via diretta* il 2.° termine della funzione σ dispari, risulta il teorema fondamentale, che le σ dispari sono funzioni *intere* dei coefficienti delle tre forme D, Φ, Ω (*).

Göttingen, luglio 1889.

(*) Correggendo ora (Napoli, ottobre 1889) le bozze di stampa di questa Memoria, prendo l'occasione per annunziare ai lettori d'aver compiuto da pochi giorni un esteso lavoro *Sulla teoria delle funzioni iperellittiche pari e dispari di genere* 3, che fra poco tempo comparirà in questo stesso Giornale come Memoria III.

Sulle superficie di traslazione.

(*Di* GEMINIANO PIRONDINI, *a Parma.*)

In una Nota: *Sopra la deformazione di una classe di superficie,* inserita nel vol. XVI (anno 1878) del Giornale di BATTAGLINI, il chiar.[mo] prof. BIANCHI ha considerato le superficie, da lui chiamate *di traslazione,* generate da una curva piana C invariabile di forma che si muove senza rotazione ed un punto di essa descrive una curva C' posta in un piano perpendicolare a quello di C. Queste superficie, come quelle di rivoluzione, si possono deformare in infiniti modi, conservando il carattere della loro generazione; e anzi la costruzione dei *profili derivati* dai profili C, C' è, per le superficie in discorso, perfettamente analoga a quella dei profili derivati dai meridiani delle superficie di rivoluzione; di modo che ogni teorema relativo alla deformazione di una superficie di rivoluzione dà luogo a un teorema analogo sulla deformazione di una superficie di traslazione.

Nella presente Nota io chiamo più generalmente superficie di traslazione quelle che sono generate da una linea a doppia curvatura qualunque Λ (generatrice) la quale, conservando inalterata la sua forma, si muove senza rotazione in modo, che un suo punto qualunque descriva una linea arbitraria L (direttrice); dopo avere dimostrato alcune proprietà di tali superficie, risolvo completamente il problema della loro deformazione in altre della stessa specie, e considero qualche caso particolare notevole.

§ I.

Proprietà generali. — Siano: L una linea a doppia curvatura, x, y, z le coordinate di un suo punto qualunque, rispetto ad un sistema di assi rettangolari $0(x, y, z)$, s l'arco della linea.

Siano: Λ un'altra curva arbitraria, ξ, η, ζ le coordinate di un suo punto qualunque rispetto ad un altro sistema di assi $\Omega(\xi, \eta, \zeta)$ e σ l'arco di Λ.

Supponendo che Λ sia invariabilmente collegata al sistema di assi Ω, si immagini che tale triedro si muova in modo, che il suo vertice Ω percorra la linea L e gli spigoli $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$ si mantengano rispettivamente paralleli agli altri fissi $0x$, $0y$, $0z$. In questo movimento la linea Λ (generatrice) genera una superficie di traslazione S; ogni punto di Λ, o più generalmente ogni punto invariabilmente collegato col sistema di assi Ω, genera, in questo movimento, una linea eguale a L (direttrice).

Chiamando X, Y, Z le coordinate, rispetto al sistema di assi fissi 0, di un punto qualunque della superficie S, abbiamo:

$$X = x(s) + \xi(\sigma), \qquad Y = y(s) + \eta(\sigma), \qquad Z = z(s) + \zeta(\sigma).$$

La forma di queste equazioni rende manifesto che *in una superficie di traslazione la direttrice e la generatrice possono essere scambiate fra loro.*

Consideriamo la tangente T in un determinato punto P della generatrice Λ; nel movimento pel quale Λ genera la superficie, il punto P descrive una linea eguale a L e la tangente T, mantenendosi sempre parallela a sè stessa, descrive un cilindro che tocca la superficie lungo la linea descritta da P. La stessa proprietà avendo luogo quando si consideri una delle linee L come generatrice e una delle Λ come direttrice, si può dire che *sopra una superficie di traslazione le direttrici L e le generatrici Λ sono linee a tangenti conjugate.*

Se dalle precedenti equazioni ricaviamo il quadrato dell'elemento lineare della superficie, abbiamo:

$$dS^2 = ds^2 + 2(x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta')\,ds\,d\sigma + d\sigma^2,$$

e quindi, chiamando i l'inclinazione delle linee coordinate, sarà:

$$\cos i = x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta'.$$

Se dunque R_s, R_σ sono i raggi di curvatura geodetica delle linee $s = \text{cost.}$, $\sigma = \text{cost.}$, avremo per formole note:

$$\frac{1}{R_s} = \frac{\partial i}{\partial \sigma}, \qquad \frac{1}{R_\sigma} = \frac{\partial i}{\partial s}.$$

Perciò *in una superficie di traslazione le curvature geodetiche delle direttrici* ($\sigma = \text{cost.}$) *e delle generatrici* ($s = \text{cost.}$) *soddisfano l'equazione:*

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{R_s}\right) = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left(\frac{1}{R_\sigma}\right).$$

Se poi indichiamo con K la curvatura totale della superficie, sarà:

$$K=\frac{1}{\operatorname{sen} i}\frac{\partial^2 i}{\partial s\partial\sigma}=\frac{1}{\operatorname{sen} i}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{1}{R_s}\right)=\frac{1}{\operatorname{sen} i}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{R_\sigma}\right).$$

Indicando con $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ i coseni direttivi della normale principale della direttrice L e con $\cos\lambda_1$, $\cos\mu_1$, $\cos\nu_1$ quelli della normale principale della generatrice Λ, abbiamo:

$$\Sigma\cos\lambda\cos\lambda_1=\rho_s\rho_\sigma\frac{\partial^2\cos i}{\partial s\partial\sigma},$$

essendo ρ_s, ρ_σ i raggi di curvatura assoluta delle $s=\text{cost.}$, $\sigma=\text{cost.}$ Se quindi $\cos(N, N_1)$ è il coseno dell'angolo formato dalle normali principali delle L, Λ si avrà la relazione:

$$\cos(N, N_1)=-\rho_s\rho_\sigma\left(\cos i\frac{\partial i}{\partial s}\frac{\partial i}{\partial\sigma}+\operatorname{sen} i\frac{\partial^2 i}{\partial s\partial\sigma}\right),$$

la quale, col porre $\cos i=\cos(T, T_1)$, diviene:

$$\frac{\cos(N, N_1)}{\rho_s\rho_\sigma}+\frac{\cos(T, T_1)}{R_s R_\sigma}+K=0.$$

Questa costituisce una notevole relazione che lega la curvatura della superficie ai raggi di curvatura assoluta e ai raggi di curvatura geodetica delle linee L, Λ.

Risulta di qui che se una delle linee L, Λ, per es. la L, è una retta, sarà $\frac{1}{\rho_\sigma}=\frac{1}{R_\sigma}=0$ e quindi $K=0$; infatti in questo caso la superficie è un cilindro.

Se una delle linee L, Λ, per es. L, è geodetica, avremo $\frac{1}{R_\sigma}=0$ e perciò:

$$K=\frac{1}{\operatorname{sen} i}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{1}{R_\sigma}\right)=0;$$

dunque *se sopra una superficie di traslazione una delle direttrici o una delle generatrici è geodetica, la curvatura totale della superficie lungo quella linea è nulla.*

Chiamando P_s, P_σ i raggi di curvatura geodetica delle trajettorie ortogonali alle linee $s=\text{cost.}$, $\sigma=\text{cost.}$, si ha:

$$\frac{1}{P_s}=\cot i\frac{\partial i}{\partial\sigma}=\frac{1}{R_s}\cot i;\qquad \frac{1}{P_\sigma}=\cot i\frac{\partial i}{\partial s}=\frac{1}{R_\sigma}\cot i,$$

e quindi:

$$\operatorname{tang} i=\frac{P_s}{R_s}=\frac{P_\sigma}{R_\sigma}.$$

Dunque *in una superficie di traslazione i rapporti dei raggi di curvatura geodetica delle linee L, Λ ai raggi di curvatura geodetica corrispondenti delle loro trajettorie ortogonali sono eguali entrambi alla cotangente dell'angolo formato nel punto che si considera dalle linee L, Λ.*

§ II.

Deformazione per flessione delle superficie di traslazione in altre della stessa specie. — In questo paragrafo si studia in modo completo la deformazione di una superficie di traslazione S in un'altra S_1 della stessa specie.

Si supponga che L e Λ siano la direttrice e la generatrice della superficie primitiva S, che L_1 e Λ_1 siano la direttrice e la generatrice della deformata S_1 e che precisamente la linea L_1 sia la deformata di L e Λ_1 di Λ. I quadrati degli elementi lineari delle due superficie S, S_1 sono:

$$dS^2 = ds^2 + 2(x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta')ds\,d\sigma + d\sigma^2;$$
$$dS_1^2 = ds_1^2 + 2(x'_1\xi'_1 + y'_1\eta'_1 + z'_1\zeta'_1)ds_1 d\sigma_1 + d\sigma_1^2;$$

e poichè $s = s_1$, $\sigma = \sigma_1$, la condizione d'identità delle due espressioni scritte si riduce alla seguente:

$$x'_1\xi'_1 + y'_1\eta'_1 + z'_1\zeta'_1 = x'\xi' + y'\eta' + z'\zeta'.$$

Per più semplicità di scrittura sopprimeremo in questa equazione gli accenti, indicanti derivazioni rapporto alle variabili s, σ, salvo a metterli in fine; e studieremo quindi i casi in cui si può soddisfare all'identità:

$$x_1\xi_1 + y_1\eta_1 + z_1\zeta_1 = x\xi + y\eta + z\zeta, \tag{1}$$

nella quale x, y, z, x_1, y_1, z_1 sono funzioni della variabile s e ξ, η, ζ, ξ_1, η_1, ζ_1 sono funzioni dell'altra variabile σ indipendente dalla prima.

Ciascuno dei due membri di (1), nel caso più generale, è composto di tre termini, ma può darsi che l'uno o l'altro o entrambi si riducano a un numero minore di termini; volendo quindi esaminare tutte le ipotesi possibili, basta esaminare separatamente i sei casi seguenti:

a)	il primo	membro ha	1	termine	e il	secondo	1
b)	»	»	1	»		»	2
c)	»	»	1	»		»	3
d)	»	»	2	»		»	2
e)	»	»	2	»		»	3
f)	»	»	3	»		»	3.

Infatti il caso in cui il primo membro ha 2 termini e il secondo 1; l'altro in cui il primo membro ha 3 termini e il secondo 1; e l'altro in cui il primo membro ha 3 termini e il secondo 2 si riducono rispettivamente ai casi *b*), *c*), *e*), supponendo che, invece di essere data la superficie S deformantesi in S_1, sia data la S_1 deformantesi in S.

a)

L'identità (1) da soddisfare si riduce ora alla seguente:

$$x_1 \xi_1 = x \xi,$$

la quale dà:

$$\frac{x_1}{x} = \frac{\xi}{\xi_1}.$$

Essendo il primo membro funzione di s e il secondo funzione di σ, ciascuno deve essere una costante; indicandola con a, risulta:

$$x_1 = a x, \qquad \xi_1 = \frac{1}{a} \xi; \tag{2}$$

apponendo alle x, x_1, ξ, ξ_1 di queste equazioni gli accenti indicanti derivazioni rapporto alle s, σ e integrando poi le equazioni ottenute, si ottengono le stesse (2), qualora si mettano a zero le costanti arbitrarie d'integrazione, il che non nuoce alla generalità.

Dunque nel caso *a*), fra le coordinate x_1, x e fra le ξ_1, ξ, hanno luogo le relazioni (2).

Se ora confrontiamo la relazione $x_1 \xi_1 = x \xi$ colla (1), deduciamo che nel caso presente deve essere altresì verificata la condizione:

$$y_1 \eta_1 + z_1 \zeta_1 = y \eta + z \zeta;$$

se questa è soddisfatta senza che si annullino contemporaneamente tutti quattro i termini che la compongono, allora si entra nel caso *d*) e perciò tale ipotesi sarà considerata in seguito. Se poi la precedente è verificata coll'annullarsi di ogni termine, allora avendosi:

$$y_1 \eta_1 = 0, \qquad z_1 \zeta_1 = 0, \qquad y \eta = 0, \qquad z \zeta = 0,$$

si dovrebbero esaminare 16 casi particolari; lasciando però da parte quelli nei quali una delle linee L, Λ, L_1, Λ_1 o entrambe sono rette (poichè allora una delle superficie S, S_1 o entrambe sono cilindri, casi evidentemente privi d'importanza) rimangono da considerare i soli quattro casi seguenti:

$$y_1=0,\quad \zeta_1=0,\quad y=0,\quad \zeta=0;\qquad y_1=0,\quad \zeta_1=0,\quad \eta=0,\quad z=0$$

$$\eta_1=0,\quad z_1=0,\quad y=0,\quad \zeta=0;\qquad \eta_1=0,\quad z_1=0,\quad \eta=0,\quad z=0.$$

In ciascuno di questi l'una e l'altra delle superficie S, S_1 è generata da una curva piana, invariabile di forma, che si muove senza rotazione in modo, che un suo punto qualunque descrive una curva posta in un piano perpendicolare a quello che contiene la prima. Siamo quindi nel caso delle superficie di traslazione trattate dal prof. Bianchi nel citato articolo, al quale rimandiamo il lettore.

b)

La condizione da soddisfare (1) diviene:

$$x_1\xi_1=x\xi+y\eta;$$

dividendo ambi i membri per $x\xi$ e derivando l'equazione ottenuta rapporto a s, si ha:

$$\left(\frac{x_1}{x}\right)'\frac{\xi_1}{\xi}=\left(\frac{y}{x}\right)'\frac{\eta}{\xi},$$

la quale si può scrivere:

$$\frac{\left(\frac{x_1}{x}\right)'}{\left(\frac{y}{x}\right)'}=\frac{\eta}{\xi_1},$$

e non può quindi sussistere se ciascuno dei due membri non è una costante; indicandola con B, avremo:

$$\left(\frac{x_1}{x}\right)'=B\left(\frac{y}{x}\right)'.$$

Moltiplicando per ds e integrando, si ha:

$$\frac{x_1}{x}=A+By,$$

essendo A una costante arbitraria; si deduce quindi:

$$x_1=Ax+By.$$

Operando sulle altre coordinate ξ, η,... come abbiamo operato sulle x, y,... si ha:

$$\xi_1 = a\xi + b\eta,$$

con a e b costanti; in causa di queste due relazioni la condizione da soddisfare diviene:

$$(Aa - 1)x\xi + (Bb - 1)y\eta + Abx\eta + Ba\xi y = 0,$$

la quale sarà un'identità quando:

$$Aa - 1 = 0, \qquad Bb - 1 = 0, \qquad Ab = 0, \qquad Ba = 0.$$

Queste equazioni sono incompatibili, poichè le due prime richiedono che le quantità A, B, a, b siano diverse da zero, nel qual caso le altre due non possono essere soddisfatte.

Dunque nel caso b) non si ha alcuna soluzione.

c)

La (1) diviene:

$$x_1\xi_1 = x\xi + y\eta + z\zeta, \tag{3}$$

e questa, divisa per $x\xi$ e derivata rapporto a s, dà:

$$\left(\frac{x_1}{x}\right)' \frac{\xi_1}{\xi} = \left(\frac{y}{x}\right)' \frac{\eta}{\xi} + \left(\frac{z}{x}\right)' \frac{\zeta}{\xi}.$$

Moltiplicando ambo i membri per $\frac{\xi}{\zeta}$ e poi derivando l'equazione ottenuta rapporto a σ, si ha:

$$\left(\frac{x_1}{x}\right)' \left(\frac{\xi_1}{\zeta}\right)' = \left(\frac{y}{x}\right)' \left(\frac{\eta}{\zeta}\right)';$$

deve quindi essere:

$$\frac{\left(\frac{x_1}{x}\right)'}{\left(\frac{y}{x}\right)'} = \frac{\left(\frac{\eta}{\zeta}\right)'}{\left(\frac{\xi_1}{\zeta}\right)'} = \text{costante} = B.$$

Si deduce di qui:

$$\left(\frac{x_1}{x}\right)' = B\left(\frac{y}{x}\right)',$$

la quale, moltiplicata per ds e integrata, dà:

$$\frac{x_1}{x} = A + B\frac{y}{x},$$

con A costante; e di qui:

$$x_1 = Ax + By.$$

Ora è facile vedere che dalla (3) si avrebbe potuto ottenere anche una relazione della forma:

$$x_1 = Ay + Bz,$$

ovvero un'altra della forma:

$$x_1 = Ax + Bz,$$

e quindi basterà, per comprendere tutti i casi particolari, considerare la relazione più generale:

$$x_1 = Ax + By + Cz,$$

dove A, B, C sono costanti. Con un processo analogo al precedente si ricava pure:

$$\xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

essendo a, b, c tre costanti; ed allora la relazione da soddisfare diviene:

$$(Aa - 1)x\xi + (Bb - 1)y\eta + Abx\eta + Acx\zeta + Bay\xi + Bcy\zeta +$$
$$+ Caz\xi + Cbz\eta + (Cc - 1)z\zeta = 0.$$

Questa è identicamente verificata quando i coefficienti soddisfino le equazioni:

$$Aa - 1 = 0; \quad Bb - 1 = 0; \quad Cc - 1 = 0; \quad Ab = 0; \quad Ac = 0;$$
$$Ba = 0; \quad Bc = 0; \quad Ca = 0; \quad Cb = 0;$$

ma dalle tre prime si ricava che A; B, C, a, b, c devono essere diversi da zero ed allora le sei condizioni rimanenti non possono essere soddisfatte.

Dunque nel caso c) non si ha alcuna soluzione.

d)

Si deve verificare la condizione seguente:

$$x_1\xi_1 + y_1\eta_1 = x\xi = y\eta,$$

la quale, divisa per $y\eta_1$ e derivata successivamente rapporto a s e a σ, dà:

$$\left(\frac{x_1}{y}\right)'\left(\frac{\xi_1}{\eta_1}\right)' = \left(\frac{x}{y}\right)'\left(\frac{\xi}{\eta_1}\right)'.$$

Deve perciò essere:

$$\frac{\left(\frac{x_1}{y}\right)'}{\left(\frac{x}{y}\right)'}=\frac{\left(\frac{\xi}{\eta_1}\right)'}{\left(\frac{\xi_1}{\eta_1}\right)'}=A,$$

con A costante; da questa relazione si deduce:

$$\left(\frac{x_1}{y}\right)'=A\left(\frac{x}{y}\right)',$$

e per integrazione:

$$\frac{x_1}{y}=A\,\frac{x}{y}+B,$$

con B costante. Si ha dunque:

$$x_1=Ax+By.$$

Con un processo perfettamente analogo al precedente si può dedurre:

$$y_1=Cx+Ey,$$

con C, E costanti; e per rispetto alle altre coordinate ξ_1, η_1 si avrà pure:

$$\xi_1=a\xi+b\eta;\qquad \eta_1=c\xi+e\eta,$$

essendo a, b, c, d costanti. Ma evidentemente fra i casi possibili vi è pur quello che le due relazioni che dànno x_1, y_1 o le altre che dànno ξ_1, η_1 non siano indipendenti fra loro (e ciò per la sussistenza di una particolare relazione di 1.° grado fra le x_1, y_1 o fra le ξ_1, η_1); si vede quindi che il caso *d*) si suddivide in tre sottocasi, a seconda che ha luogo una sola relazione della 1.ª specie e una sola della 2.ª; ovvero due della 1.ª e una della 2.ª (ovvero, inversamente, una della 1.ª e due della 2.ª); ovvero due relazioni della 1.ª specie e due della 2.ª.

Sottocaso I.° — Avendosi in questo caso:

$$x_1=Ax+By,\qquad \xi_1=a\xi+b\eta,$$

la condizione da soddisfare diviene:

$$(Aa-1)x\xi+(Bb-1)y\eta+Abx\eta+Bay\xi+y_1\eta_1=0.$$

Questa, per essere soddisfatta identicamente con valori particolari di A, B, a, b, richiede cha sia $y_1\eta_1=0$ la qual condizione riduce la (1) alla forma già considerata nel caso *b*); nel sottocaso I.° non si ha quindi nessuna soluzione.

Sottocaso II.° — Ora essendo:

$$x_1=Ax+By;\qquad y_1=Cx+Ey;\qquad \xi_1=a\xi+b\eta,$$

avremo da soddisfare alla condizione:

$$(Aa - 1)x\xi + (Bb - 1)y\eta + Abx\eta + Bay\xi + Cx\eta_1 + Ey\eta_1 = 0,$$

la quale dà:

$$Aa - 1 = 0; \quad Bb - 1 = 0; \quad Ab = 0; \quad Ba = 0; \quad C = 0; \quad E = 0.$$

Ma siccome le prime due equazioni richieggono che A, B, a, b siano diverse da zero e ciò fa sì che non siano soddisfatte le altre due seguenti, così si può dire che neppure in questo sottocaso si ha alcuna soluzione.

Sottocaso III.° — Ora avendosi:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= Ax + By \\ y_1 &= Cx + Ey \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} \xi_1 &= a\xi + b\eta \\ \eta_1 &= c\xi + e\eta \end{aligned}\right\}, \tag{4}$$

la condizione (1) diviene:

$$(Aa + Cc - 1)x\xi + (Bb + Ee - 1)y\eta + (Ab + Ce)x\eta + (Ba + Ec)y\xi = 0,$$

la quale, per essere soddisfatta identicamente, richiede:

$$Aa + Cc - 1 = 0; \quad Bb + Ee - 1 = 0; \quad Ab + Ce = 0; \quad Ba + Ec = 0.$$

Considerando date le costanti A, B, C, E e come incognite le a, b, c, e, si deduce da queste equazioni:

$$\left.\begin{aligned} a = \frac{E}{AE - BC}; \qquad b = -\frac{C}{AE - BC}; \qquad c = -\frac{B}{AE = BC}; \\ e = \frac{A}{AE - BC}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ora, per quanto è stato osservato al principio di questo paragrafo, alle quantità x, y, x_1, y_1, ξ, η, ξ_1, η_1 che entrano nelle (4) bisognerebbe apporre gli accenti indicanti derivazioni rapporto a s o a σ; le (4) ci darebbero così delle relazioni fra le derivate delle coordinate e, mediante integrazioni, si avrebbero le corrispondenti relazioni fra le coordinate. Tali integrazioni introducono delle costanti arbitrarie additive le quali, senza nuocere alla generalità, possono essere supposte nulle; per conseguenza si può ritenere che *fra le coordinate* x_1, y_1 *e le* x, y *e fra le coordinate* ξ_1, η_1 *e le* ξ, η *hanno luogo le relazioni* (4), *nelle quali* A, B, C, E *sono costanti arbitrarie e* a, b, c, e *sono costanti date dalle* (5).

Se confrontiamo la relazione $x_1\xi_1 + y_1\eta_1 = x\xi + y\eta$ che ha luogo nel presente caso *d*) colla generale (1), vediamo che ora è soddisfatta anche l'altra condizione:

$$z_1 \zeta_1 = z \zeta.$$

Se ambi i membri di questa equazione sono diversi da zero, si avrà:

$$\frac{z_1}{z} = \frac{\zeta}{\zeta_1} = \text{costante} = k,$$

da cui:

$$z_1 = k z, \qquad \zeta_1 = \frac{1}{k} \zeta;$$

se insieme a queste equazioni consideriamo le (4), si vede che le tre coordinate x_1, y_1, z_1 sono legate alle x, y, z e le tre coordinate ξ_1, η_1, ζ_1 alle ξ, η, ζ da relazioni lineari, che sono precisamente dei casi particolari di quelle che troveremo nel caso f). [Infatti per ricavare le relazioni, di cui ora si tratta, da quelle del caso f), basta nelle (15) fare: $C = G = H = L = c = g = h = l = 0$, $M = \frac{1}{m} = k$.]

Se dunque $z_1 \zeta_1$ e $z \zeta$ sono diversi da zero, abbiamo un caso che rientra nel generale f) che tratteremo in seguito.

Se poi supponiamo che sia $z \zeta = 0$ $z_1 \zeta_1 = 0$, allora avremo da considerare le quattro soluzioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} z &= 0 \\ z_1 &= 0 \end{aligned}\right\} (\alpha) \qquad \left.\begin{aligned} \zeta &= 0 \\ \zeta_1 &= 0 \end{aligned}\right\} (\beta) \qquad \left.\begin{aligned} z &= 0 \\ \zeta_1 &= 0 \end{aligned}\right\} (\gamma) \qquad \left.\begin{aligned} \zeta &= 0 \\ z_1 &= 0. \end{aligned}\right\} (\delta)$$

α) La condizione $z_1 = 0$ mostra che la linea L_1 è piana e quindi deve essere:

$$\left(\frac{d x_1}{d s}\right)^2 + \left(\frac{d y_1}{d s}\right)^2 = 1;$$

calcolando queste derivate dalle (4), tale condizione diviene:

$$(A^2 + C^2)\left(\frac{d x}{d s}\right)^2 + 2(A B + C E) \frac{d x}{d s} \frac{d y}{d s} + (B^2 + E^2)\left(\frac{d y}{d s}\right)^2 = 1.$$

Ma essendo L piana, risulta:

$$\frac{d y}{d s} = \sqrt{1 - \left(\frac{d x}{d s}\right)^2},$$

e perciò la precedente diviene:

$$(A^2 + C^2 - B^2 - E^2)\left(\frac{d x}{d s}\right)^2 + 2(A B + C E)\sqrt{1 - \left(\frac{d x}{d s}\right)^2} \cdot \frac{d x}{d s} + B^2 + E^2 - 1 = 0.$$

Se quest'eguaglianza non è un'identità ci offre $\frac{dx}{ds} =$ costante, la quale condizione, unita all'altra che L è piana, conduce a una retta; se la linea L è una retta, la superficie di traslazione si riduce a un cilindro, caso evidentemente privo d'importanza.

Se poi quell'eguaglianza è un'identità, allora sarà:

$$A^2 + C^2 = B^2 + E^2 = 1, \qquad AB + CE = 0,$$

da cui si deduce:

$$A = \cos\theta \qquad B = -\operatorname{sen}\theta, \qquad C = \operatorname{sen}\theta, \qquad E = \cos\theta,$$

essendo θ una costante.

Con questi valori si deduce dalle (4) che le due linee piane L, L_1 sono eguali di forma e solamente sono collocate diversamente rapporto ai rispettivi assi di riferimento; le due superficie S, S_1 sono quindi identiche, e anche questo caso non ha evidentemente alcuna importanza.

β) Con un processo perfettamente analogo al precedente, si giunge a conclusioni analoghe, cioè la superficie di traslazione S_1 è un cilindro, ovvero è la stessa S cambiata di posizione; l'un caso e l'altro non ha veruna importanza.

γ) La condizione $\zeta_1 = 0$ mostra che la generatrice Λ_1 è piana e quindi deve essere:

$$\left(\frac{d\xi_1}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\eta_1}{d\sigma}\right)^2 = 1,$$

la quale in causa delle (4) diviene:

$$(a^2 + c^2)\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 + 2(ab + ce)\frac{d\xi}{d\sigma}\frac{d\eta}{d\sigma} + (b^2 + e^2)\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2 - 1 = 0.$$

Facendo uso delle (5), si possono esprimere i coefficienti dei termini di questa equazione per A, B, C, E ed allora si avrà da soddisfare alle due condizioni seguenti:

$$(B^2 + E^2)\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 - 2(AB + CE)\frac{d\xi}{d\sigma}\frac{d\eta}{d\sigma} + (A^2 + C^2)\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2 - (AE - BC)^2 = 0$$

$$\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\sigma}\right)^2 = 1;$$

queste ci forniscono $\frac{d\eta}{d\sigma}$, $\frac{d\zeta}{d\sigma}$ in funzione di $\frac{d\xi}{d\sigma}$ e, con un'integrazione, potremo facilmente ricavare le η, ζ espresse in funzione di ξ, che resta arbitraria.

Se poi si esprimono le coordinate ξ, η, ζ anzi che per l'arco di Λ per un parametro indipendente qualunque τ, si deve soddisfare solamente alla condizione:

$$(B^2+E^2)d\xi^2 - 2(AB+CE)d\xi\, d\eta + (A^2+C^2)d\eta^2 - \\ -(AE-BC)^2(d\xi^2+d\eta^2+d\zeta^2) = 0,$$

alla quale si può dare la forma seguente:

$$(AE-BC)^2 d\zeta^2 = [B^2+E^2-(AE-BC)^2]\, d\xi^2 - 2(AB+CE)d\xi\, d\eta + \\ + [A^2+C^2-(AE-BC)^2]\, d\eta^2.$$

Questa equazione, risolta rapporto a ζ e integrata previa una moltiplicazione per $d\tau$, dà la coordinata ζ in funzione di τ quando si conoscano in funzione di questa variabile le ξ, η.

Operando nell'un modo e nell'altro, si hanno le equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= \xi(\sigma) = \xi(\tau) \\
\eta &= \frac{AB+CE}{A^2+C^2}\,\xi(\sigma) \pm \frac{AE-BC}{A^2+C^2}\int\sqrt{A^2+C^2-\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2}\cdot d\sigma = \eta(\tau) \\
\zeta &= \frac{1}{A^2+C^2}\int\sqrt{(A^2+C^2)^2\left\{1-\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2\right\} - \left\{(AB+CE)\frac{d\xi}{d\sigma} \pm (AE-BC)\sqrt{A^2+C^2-\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2}\right\}^2}\cdot d\sigma = \\
&= \frac{1}{AE-BC}\int\sqrt{\left\{B^2+E^2-(AE-BC)^2\right\}\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 - 2(AB+CE)\frac{d\xi}{d\tau}\frac{d\eta}{d\tau} + \left\{A^2+C^2-(AE-BC)^2\right\}\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2}\cdot d\tau,
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

che ci esprimono ξ, η, ζ sia in funzione dell'arco σ di Λ, sia in funzione del parametro arbitrario τ.

La linea L è piana, ed essendo completamente arbitraria, può rappresentarsi colle equazioni:

$$x = x(s) = x(t), \qquad y = y(s) = y(t), \qquad z = 0, \tag{7}$$

coll'avvertenza che, quando la variabile indipendente è l'arco s, si ha:

$$y = \int\sqrt{1-\left(\frac{dx}{ds}\right)^2}\cdot ds,$$

e quando la variabile indipendente t è qualunque, le funzioni $x(t)$, $y(t)$ sono entrambe arbitrarie.

Le coordinate dei punti di Λ_1 si ottengono dalle (4) mettendo al posto dei coefficienti a, b, c, e i loro valori (5) e invece di η l'espressione data dalla seconda (6); si ha dunque:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= \frac{A}{A^2+C^2}\,\xi(\sigma) \mp \frac{C}{A^2+C^2}\int\sqrt{A^2+C^2-\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2}\cdot d\sigma = \\
&\qquad = \frac{1}{AE-BC}\left\{E\xi(\tau)-C\eta(\tau)\right\} \\
\eta_1 &= \frac{C}{A^2+C^2}\,\xi(\sigma) \pm \frac{A}{A^2+C^2}\int\sqrt{A^2+C^2-\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2}\cdot d\sigma = \\
&\qquad = \frac{1}{AE-BC}\left\{-B\xi(\tau)+A\eta(\tau)\right\} \\
\zeta_1 &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

a seconda che la variabile indipendente è l'arco σ ovvero il parametro arbitrario τ.

In quanto alla linea L_1, la determinazione delle coordinate de'suoi punti in funzione dell'arco s si fa col mezzo delle (4) unitamente alla condizione:

$$\frac{dz_1}{ds} = \sqrt{1-\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2-\left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2}.$$

Se poi tale determinazione si fa in funzione del parametro arbitrario t, si osserverà che le (4) dànno:

$$dx_1 = A\,dx + B\,dy, \qquad dy_1 = C\,dx + E\,dy$$

e quindi, dovendo essere:

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = dx^2 + dy^2,$$

si avrà:

$$dz_1^2 = dx^2 + dy^2 - (A\,dx + B\,dy)^2 - (C\,dx + E\,dy)^2,$$

d'onde:

$$dz_1 = \sqrt{(1-A^2-C^2)dx^2 - 2(AB+CE)dx\,dy + (1-B^2-E^2)dy^2},$$

la quale equazione dà dz_1, e perciò facilmente z_1, tosto che siano date le funzioni $x(t)$, $y(t)$.

Operando nell'un modo e nell'altro, si hanno le seguenti equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= Ax(s) + By(s) = Ax(t) + By(t) \\
y_1 &= Cx(s) + Ey(s) = Cx(t) + Ey(t) \\
z_1 &= \int\sqrt{1-\left(A\frac{dx}{ds}+B\frac{dy}{ds}\right)^2-\left(C\frac{dx}{ds}+E\frac{dy}{ds}\right)^2}\cdot ds = \\
&= \int\sqrt{(1-A^2-C^2)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 - 2(AB+CE)\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + (1-B^2-E^2)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\cdot dt,
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

che ci esprimono le coordinate x_1, y_1, z_1 sia per l'arco s di L_1, sia per il parametro arbitrario t.

Avremo quindi il teorema: *la superficie di traslazione S nella quale la generatrice Λ e la direttrice L sono le linee rappresentate dalle equazioni* (6), (7) *è applicabile sull'altra superficie di traslazione S_1 nella quale la generatrice Λ_1 e la direttrice L_1 sono le linee rappresentate dalle equazioni* (8), (9), *colla condizione che Λ_1 sia la deformata di Λ e L_1 la deformata di L. Nelle precedenti equazioni A, B, C, E sono costanti arbitrarie; σ è l'arco delle linee Λ, Λ_1; s è l'arco delle linee L, L_1; τ e t sono due parametri indipendenti qualunque. Quando le variabili indipendenti sono s e σ, nelle precedenti equazioni sono funzioni arbitrarie le $x(s)$, $\xi(\sigma)$; quando invece le variabili indipendenti sono i parametri arbitrari t e τ, nelle precedenti equazioni sono funzioni arbitrarie le $x(t)$, $y(t)$, $\xi(\tau)$, $\eta(\tau)$.*

Una particolarità della deformazione ora trovata è di trasformare la linea piana L in una linea a doppia curvatura L_1 e la linea a doppia curvatura Λ in una linea piana Λ_1; inoltre dalle (4) si rileva che la projezione sul piano coordinato $z_1 = 0$ della linea gobba L_1 è dello stesso ordine della linea piana L; e la projezione sul piano coordinato $\zeta = 0$ della linea gobba Λ è dello stesso ordine della linea piana Λ_1.

Nella deformazione ora studiata, dico che si possono assumere arbitrariamente le linee piane L, Λ_1. Notiamo anzitutto che le seconde (4), risolte rapporto alle ξ, η, dànno:

$$\xi = A\xi_1 + C\eta_1, \qquad \eta = B\xi_1 + E\eta_1. \tag{10}$$

Se allora supponiamo che le due linee piane L, Λ_1 siano definite rispettivamente nei modi seguenti:

$$x = x(s); \qquad y = y(s) = \int\sqrt{1 - x'^2}\cdot ds; \qquad z = 0 \tag{11}$$

$$\xi_1 = \xi_1(\sigma); \qquad \eta_1 = \eta_1(\sigma) = \int\sqrt{1 - \xi_1'^2}\cdot d\sigma; \qquad \zeta_1 = 0, \tag{12}$$

riesce facile la determinazione delle linee L_1, Λ.

Per la linea L_1 noi abbiamo due coordinate de' suoi punti nelle (4) e l'altra coordinata z_1 si può dedurre dalla nota relazione:

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2 = 1;$$

si ha così:

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = Ax(s) + By(s); \qquad y_1 = Cx(s) + Ey(s); \\ &z_1 = \int\sqrt{1 - \left(A\frac{dx}{ds} + B\frac{dy}{ds}\right)^2 - \left(C\frac{dx}{ds} + E\frac{dy}{ds}\right)^2}\cdot ds. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

In quanto alle coordinate dei punti della linea Λ, le (10) ce ne dànno due e la terza ζ si può ricavare dalla relazione:

$$\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{d\sigma}\right)^2 = 1;$$

abbiamo dunque:

$$\left.\begin{aligned} &\xi = A\xi_1(\sigma) + C\eta_1(\sigma); \qquad \eta = B\xi_1(\sigma) + E\eta_1(\sigma); \\ &\zeta = \int\sqrt{1 - \left(A\frac{d\xi_1}{d\sigma} + C\frac{d\eta_1}{d\sigma}\right)^2 - \left(B\frac{d\xi_1}{d\sigma} + E\frac{d\eta_1}{d\sigma}\right)^2}\cdot d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Dunque *la superficie di traslazione S in cui la generatrice Λ e la direttrice L sono le linee rappresentate dalle equazioni* (14), (11) *è applicabile sull'altra superficie di traslazione S_1 in cui la generatrice Λ_1 e la direttrice L_1 sono le linee rappresentate dalle equazioni* (12), (13), *colla condizione che Λ_1 e L_1 siano le deformate delle Λ, L. In queste equazioni A, B, C, E sono costanti arbitrarie, $x(s)$ è una funzione arbitraria di s e $\xi_1(\sigma)$ è una funzione arbitraria di σ.*

Si applicherà il primo dei precedenti teoremi quando, partendo da una superficie di traslazione *data*, si voglia deformarla in un'altra della stessa specie; infatti allora sono note le linee L, Λ e si tratta di trovare le L_1, Λ_1. Si applicherà invece il secondo teorema quando siano fissate a priori le linee piane L, Λ_1. Ciò si vedrà più particolarmente in alcune applicazioni che seguono.

δ) Trattando il caso δ), si arriva a conseguenze perfettamente analoghe a quelle ora trovate nella trattazione del caso γ).

e)

La condizione (1) nel caso presente diviene:

$$x_1\xi_1 + y_1\eta_1 = x\xi + y\eta + z\zeta,$$

la quale, divisa per $z\eta_1$ e derivata successivamente rapporto a s e a σ, dà:

$$\left(\frac{x_1}{z}\right)'\left(\frac{\xi_1}{\eta_1}\right)' = \left(\frac{x}{z}\right)'\left(\frac{\xi}{\eta_1}\right)' + \left(\frac{y}{z}\right)'\left(\frac{\eta}{\eta_1}\right)'.$$

Dividendo ambi i membri per $\left(\frac{y}{z}\right)'$ e derivando l'equazione che si ottiene rapporto ad s, si ha:

$$\left[\frac{\left(\frac{x_1}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'}\right]'\left(\frac{\xi_1}{\eta_1}\right)'=\left[\frac{\left(\frac{x}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'}\right]'\left(\frac{\xi}{\eta_1}\right)',$$

da cui si ricava:

$$\left[\frac{\left(\frac{x_1}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'}\right]'=A\cdot\left[\frac{\left(\frac{x}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'}\right]',$$

con A costante. Integrando e indicando con B un'altra costante arbitraria, si ottiene:

$$\frac{\left(\frac{x_1}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'}=A\frac{\left(\frac{x}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'}+B,$$

da cui:

$$\left(\frac{x_1}{z}\right)'=A\left(\frac{x}{z}\right)'+B\left(\frac{y}{z}\right)',$$

ed integrando:

$$\frac{x_1}{z}=A\frac{x}{z}+B\frac{y}{z}+C,$$

con C costante. Si deduce finalmente:

$$x_1=Ax+By+Cz.$$

Con processo perfettamente analogo a quello ora seguito, si può dedurre:

$$\xi_1=a\xi+b\eta+c\zeta,$$

con a, b, c costanti arbitrarie.

Si può pure ricavare per le altre coordinate y_1, η_1 delle relazioni analoghe alle precedenti e perciò, per contemplare ancora i casi in cui le due relazioni che dànno x_1, y_1 o quelle che dànno ξ_1, η_1 non siano indipendenti fra loro (il che avverrebbe quando le x_1 e y_1 o le ξ_1 e η_1 fossero legate fra loro da una particolare relazione lineare), esamineremo separatamente tre sottocasi, a seconda che ha luogo una sola relazione della 1.ª specie e una sola della 2.ª, ovvero due della 1.ª specie e una della 2.ª (o inversamente una della 1.ª e due della 2.ª specie), ovvero due relazioni della 1.ª specie e due della 2.ª.

Sottocaso I.º — Essendo ora:

$$x_1 = Ax + By + Cz; \qquad \xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

la condizione da soddisfare diviene:

$$(Aa-1)x\xi + (Bb-1)y\eta + (Cc-1)z\zeta + Abx\eta + Acx\zeta +$$
$$+ Bay\xi + Bcy\zeta + Caz\xi + Cbz\eta + y_1\eta_1 = 0.$$

Qualunque sia il valore delle costanti A, B, C, a, b, c, a volere che tale relazione sia soddisfatta identicamente, si richiede che sia: $y_1\eta_1 = 0$, e quindi si cade nel caso *c*) già trattato.

Sottocaso II.º — Essendo ora:

$$x_1 = Ax + By + Cz; \qquad y_1 = Ex + Fy + Gz; \qquad \xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

la condizione da soddisfare diviene:

$$(Aa-1)x\xi + (Bb-1)y\eta + (Cc-1)z\zeta + Abx\eta + Acx\zeta +$$
$$+ Bay\xi + Bcy\zeta + Caz\xi + Cbz\eta + Ex\eta_1 + Fy\eta_1 + Gz\eta_1 = 0,$$

e sarà un'identità quando si abbia:

$$Aa-1=0; \quad Bb-1=0; \quad Cc-1=0; \quad Ab=0; \quad Ac=0;$$
$$Ba=0; \quad Bc=0; \quad Ca=0; \quad Cb=0; \quad E=0; \quad F=0; \quad G=0.$$

Ora le prime tre equazioni richiedono che A, B, C, a, b, c siano differenti da zero ed allora le altre sei seguenti non possono essere soddisfatte.

Sottocaso III.º — Ora essendo:

$$x_1 = Ax + By + Cz; \qquad y_1 = Ex + Fy + Gz; \qquad \xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta;$$
$$\eta_1 = e\xi + f\eta + g\zeta,$$

la condizione da soddisfare diviene:

$$(Aa + Ee - 1)x\xi + (Bb + Ff - 1)y\eta + (Cc + Gg - 1)z\zeta +$$
$$+ (Ab + Ef)x\eta + (Ac + Eg)x\zeta + (Ba + Fe)y\xi + (Bc + Fg)y\zeta +$$
$$+ (Ca + Ge)z\xi + (Cb + Gf)z\eta = 0,$$

ed è un'identità quando:

$$Aa+Ee-1=0;\quad Bb+Ff-1=0;\quad Cc+Gg-1=0;\quad Ab+Ef=0;$$
$$Ac+Eg=0;\quad Ba+Fe=0;\quad Bc+Fg=0;\quad Ca+Ge=0;\quad Cb+Gf=0.$$

Da queste relazioni si ricava:

$$\frac{A}{E}=\frac{B}{F}=\frac{C}{G}=-\frac{e}{a}=-\frac{f}{b}=-\frac{g}{c};$$

chiamando $\frac{1}{m}$ il valore comune di questi rapporti eguali, si ricava:

$$E=mA,\quad F=mB,\quad G=mC,\quad e=-\frac{1}{m}a,\quad f=-\frac{1}{m}b,\quad g=-\frac{1}{m}c,$$

coi quali valori si riconosce l'impossibilità di soddisfare alle prime tre equazioni.

Riassumendo, si ha che nel caso *e*) non esiste alcuna soluzione.

f)

Nel caso presente la condizione da soddisfare è la stessa (1); dividendone ambo i membri per $z\zeta_1$ e derivando l'equazione ottenuta successivamente rapporto a s e σ, si ha:

$$\left(\frac{x_1}{z}\right)'\left(\frac{\xi_1}{\zeta_1}\right)'+\left(\frac{y_1}{z}\right)'\left(\frac{\eta_1}{\zeta_1}\right)'=\left(\frac{x}{z}\right)'\left(\frac{\xi}{\zeta_1}\right)'+\left(\frac{y}{z}\right)'\left(\frac{\eta}{\zeta_1}\right)'.$$

Dividendo ambi i membri di quest'equazione per $\left(\frac{\eta_1}{\zeta_1}\right)'\left(\frac{y}{z}\right)'$ e derivando poi l'equazione ottenuta rapporto ad s e σ successivamente, si ottiene:

$$\left[\frac{\left(\frac{x_1}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'}\right]'\cdot\left[\frac{\left(\frac{\xi_1}{\zeta_1}\right)'}{\left(\frac{\eta_1}{\zeta_1}\right)'}\right]'=\left[\frac{\left(\frac{x}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'}\right]'\cdot\left[\frac{\left(\frac{\xi}{\zeta_1}\right)'}{\left(\frac{\eta}{\xi_1}\right)'}\right]',$$

dalla quale si deduce:

$$\left[\frac{\left(\frac{x_1}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'}\right]'=A\left[\frac{\left(\frac{x}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'}\right]',$$

con A costante. Integrando e indicando con B un'altra costante, si ha:

$$\frac{\left(\frac{x_1}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'} = A \frac{\left(\frac{x}{z}\right)'}{\left(\frac{y}{z}\right)'} + B,$$

da cui:

$$\left(\frac{x_1}{z}\right)' = A\left(\frac{x}{z}\right)' + B\left(\frac{y}{z}\right)',$$

e con un'altra integrazione:

$$\frac{x_1}{z} = A\frac{x}{z} + B\frac{y}{z} + C,$$

ciò che dà:

$$x_1 = Ax + By + Cz.$$

Analogamente si arriverebbe a una relazione della forma:

$$\xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

con a, b, c costanti; dunque le coordinate dei punti di L_1 sono legate a quelle dei punti di L e le coordinate dei punti di Λ_1 a quelle dei punti di Λ da relazioni lineari; ma siccome le relazioni di una specie e dell'altra possono essere una, due o tre, si avranno in tutto da considerare i seguenti 6 sottocasi:

Numero delle relazioni di 1.ª specie.	1	1	2	1	3	2	2	3	3
		ovvero		ovvero			ovvero		
Numero delle relazioni di 2.ª specie.	1	2	1	3	1	2	3	2	3
Numero dei sottocasi .	I.°	II.°		III.°		IV.°	V.°		VI.°

Sottocaso I.° — Avendosi:

$$x_1 = Ax + By + Cz; \qquad \xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta,$$

la condizione da soddisfare diviene:

$$(Aa-1)x\xi + (Bb-1)y\eta + (Cc-1)z\zeta + Abx\eta + Acx\zeta +$$
$$+ Bay\xi + Bcy\zeta + Caz\xi + Cbz\eta + y_1\eta_1 + z_1\zeta_1 = 0.$$

Onde questa condizione possa essere identicamente soddisfatta con valori particolari delle costanti A, B, C, a, b, c, si richiede che sia $y_1\eta_1+z_1\zeta_1=0$ ed allora, il 1.° membro di (1) riducendosi a un termine solo, entriamo in un caso già considerato.

Sottocaso II.° — Ora abbiamo:

$$x_1=Ax+By+Cz; \qquad y_1=Ex+Fy+Gz; \qquad \xi_1=a\xi+b\eta+c\zeta,$$

e perciò dobbiamo soddisfare identicamente alla condizione:

$$(Aa-1)x\xi+(Bb-1)y\eta+(Cc-1)z\zeta+Abx\eta+Acx\zeta+Bay\xi+$$
$$+Bcy\zeta+Caz\xi+Cbz\eta+Ex\eta_1+Fy\eta_1+Gz\eta_1+z_1\zeta_1=0,$$

la quale richiede che sia $z_1\zeta_1=0$; allora il 1.° membro di (1) si riduce a due termini e cadiamo quindi in un caso già contemplato.

Sottocaso III.° — Si ha:

$$x_1=Ax+By+Cz; \qquad y_1=Ex+Fy+Gz; \qquad z_1=Hx+Ly+Mz;$$
$$\xi_1=a\xi+b\eta+c\zeta,$$

e perciò dovrà essere identicamente:

$$(Aa-1)x\xi+(Bb-1)y\eta+(Cc-1)z\zeta+Abx\eta+Acx\zeta+Bay\xi+Bcy\zeta+$$
$$+Caz\xi+Cbz\eta+Ex\eta_1+Fy\eta_1+Gz\eta_1+Hx\zeta_1+Ly\zeta_1+Mz\zeta_1=0.$$

Deve quindi essere:

$$Aa-1=0; \quad Bb-1=0; \quad Cc-1=0; \quad Ab=0; \quad Ac=0;$$
$$Ba=0; \quad Bc=0; \quad Ca=0; \quad Cb=0;$$
$$E=0; \quad F=0; \quad G=0; \quad H=0; \quad L=0; \quad M=0.$$

Le prime tre relazioni insegnano che A, B, C a, b, c sono diverse da zero ed allora non possono essere soddisfatte le sei seguenti.

Sottocaso IV.° — Si ha:

$$x_1=Ax+By+Cz; \qquad y_1=Ex+Fy+Gz;$$
$$\xi_1=a\xi+b\eta+c\zeta; \qquad \eta_1=e\xi+f\eta+g\zeta,$$

e perciò si dovrà verificare identicamente la relazione:

$$(Aa+Ee-1)x\xi+(Bb+Ff-1)y\eta+(Cc+Gg-1)z\zeta+$$
$$(Ab+Ef)x\eta+(Ac+Eg)x\zeta+(Ba+Fe)y\xi+(Bc+Fg)y\zeta+$$
$$+(Ca+Ge)z\xi+(Cb+Gf)z\eta+z_1\zeta_1=0.$$

Dando alle costanti arbitrarie dei valori qualunque, questa relazione non può essere soddisfatta se non quando $z_1 \zeta_1 = 0$; in tal caso il 1.° membro della (1) si riduce a due termini e si rientra quindi in un caso già studiato.

Sottocaso V.° — Abbiamo:

$$y_1 = Ax + By + Cz; \qquad y_1 = Ex + Fy + Gz;$$
$$\xi_1 = a\xi + b\eta + c\zeta; \qquad \eta_1 = e\xi + f\eta + g\zeta; \qquad \zeta_1 = h\xi + l\eta + m\zeta,$$

e perciò la condizione da soddisfare è:

$$\begin{gathered}(Aa + Ee - 1)x\xi + (Bb + Ff - 1)y\eta + (Cc + Gg - 1)z\zeta + \\ + (Ab + Ef)x\eta + (Ac + Eg)x\zeta + (Ba + Fe)y\xi + (Bc + Fg)y\zeta + \\ + (Ca + Ge)z\xi + (Cb + Gf)z\eta + hz_1\xi + lz_1\eta + mz_1\zeta = 0.\end{gathered}$$

Dovremo dunque avere:

$$\begin{gathered}Aa + Ee - 1 = 0; \qquad Bb + Ff - 1 = 0; \qquad Cc + Gg - 1 = 0; \\ Ab + Ef = 0; \qquad Ac + Eg = 0; \qquad Ba + Fe = 0; \qquad Bc + Fg = 0 \\ Ca + Ge = 0; \qquad Cb + Gf = 0; \qquad h = 0; \qquad l = 0; \qquad m = 0.\end{gathered}$$

Da queste equazioni si deduce:

$$\frac{A}{E} = \frac{B}{F} = \frac{C}{G} = -\frac{e}{a} = -\frac{f}{b} = -\frac{g}{c},$$

e chiamando $\frac{1}{m}$ il valore comune di questi rapporti eguali, si ha:

$$E = mA; \qquad F = mB; \qquad G = mC;$$
$$e = -\frac{1}{m}a; \qquad f = -\frac{1}{m}b; \qquad g = -\frac{1}{m}c.$$

E queste espressioni mostrano l'impossibilità di soddisfare alle prime tre equazioni precedenti.

Sottocaso VI.° — Si ha ora:

$$\left.\begin{aligned}x_1 &= Ax + By + Cz; \quad y_1 = Ex + Fy + Gz; \quad z_1 = Hx + Ly + Mz, \\ \xi_1 &= a\xi + b\eta + c\zeta; \quad \eta_1 = e\xi + f\eta + g\zeta; \quad \zeta_1 = h\xi + l\eta + m\zeta,\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

e la condizione da soddisfare diviene:

$$\begin{gathered}(Aa + Ee + Hh - 1)x\xi + (Bb + Ff + Ll - 1)y\eta + (Cc + Gg + Mm - 1)z\zeta + \\ + (Ab + Ef + Hl)x\eta + (Ac + Eg + Hm)x\zeta + (Ba + Fe + Lh)y\xi + \\ + (Bc + Fg + Lm)y\zeta + (Ca + Ge + Mh)z\xi + (Cb + Gf + Ml)z\eta = 0,\end{gathered}$$

ed è un'identità quando si abbia:

$$Aa + Ee + Hh - 1 = 0; \quad Bb + Ff + Ll - 1 = 0; \quad Cc + Gg + Mm - 1 = 0;$$
$$Ab + Ef + Hl = 0; \quad Ac + Eg + Hm = 0; \quad Ba + Fe + Lh = 0;$$
$$Bc + Fg + Lm = 0; \quad Ca + Ge + Mh = 0; \quad Cb + Gf + Ml = 0.$$

Se si pone per semplicità:

$$D = \begin{vmatrix} A & B & C \\ E & F & G \\ H & L & M \end{vmatrix}, \tag{16}$$

e si suppone che D sia diverso da zero, si ottiene:

$$\left.\begin{array}{lll} a = \frac{1}{D}(FM - GL); & b = \frac{1}{D}(GH - EM); & c = \frac{1}{D}(EL - FH); \\ e = \frac{1}{D}(CL - BM); & f = \frac{1}{D}(AM - CH); & g = \frac{1}{D}(BH - AL); \\ h = \frac{1}{D}(BG - CF); & l = \frac{1}{D}(CE - AG); & m = \frac{1}{D}(AF - BE). \end{array}\right\} \tag{17}$$

Le relazioni trovate (15) hanno veramente luogo fra le derivate delle coordinate; ma per quanto è stato osservato anche nei casi *a*) *d*), si può ritenere che esse abbiano effettivamente luogo fra le coordinate. Le (15), siccome:

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2 = 1,$$

ci dànno:

$$(A^2 + E^2 + H^2)\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + (B^2 + F^2 + L^2)\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + (C^2 + G^2 + M^2)\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 +$$
$$+ 2(AB + EF + HL)\frac{dx}{ds}\frac{dy}{ds} + 2(AC + EG + HM)\frac{dx}{ds}\frac{dz}{ds} +$$
$$+ 2(BC + FG + HM)\frac{dy}{ds}\frac{dz}{ds} - 1 = 0.$$

Inoltre è noto che deve essere:

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1;$$

da queste due relazioni si potrebbe ricavare $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ in funzione di $\frac{dx}{ds}$ e quindi si avrebbero, mediante integrazioni, le espressioni di y e di z in funzione di x, che resterebbe arbitraria. Ma riesce molto più semplice esprimere le coordinate, anzi che per l'arco, per un parametro indipendente qualunque t; nella prima delle precedenti relazioni passando ai differenziali e ponendo per semplicità:

$$\left.\begin{array}{lll} A^2+E^2+H^2-1=\alpha; & B^2+F^2+G^2-1=\beta; & C^2+G^2+M^2-1=\gamma \\ AB+EF+HL=\lambda; & AC+EG+HM=\mu; & BC+FG+LM=\nu, \end{array}\right\} \quad (18)$$

si ottiene:

$$\alpha dx^2+\beta dy^2+\gamma dz^2+2\lambda dx\,dy+2\mu dx\,dz+2\nu dy\,dz=0.$$

Risolvendo quest'equazione rapporto a dz, si ha:

$$dz=-\frac{1}{\gamma}(\mu dx+\nu dy)\pm\frac{1}{\gamma}\sqrt{(\mu^2-\alpha\gamma)dx^2+2(\mu\nu-\gamma\lambda)dx\,dy+(\nu^2-\beta\gamma)dy^2};$$

e perciò, se supponiamo che le coordinate x, y siano funzioni note del parametro indipendente t, avremo che la curva L sarà rappresentata dalle equazioni:

$$\left.\begin{array}{c} x=x(t); \qquad y=y(t); \qquad z=-\dfrac{1}{\gamma}(\mu x+\nu y)\pm \\ \pm\dfrac{1}{\gamma}\displaystyle\int\sqrt{(\mu^2-\alpha\gamma)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2(\mu\nu-\gamma\lambda)\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt}+(\nu^2-\beta\gamma)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\cdot dt. \end{array}\right\} \quad (19)$$

Per la linea Λ si fa un calcolo perfettamente analogo al precedente e si arriva a concludere che, ponendo per semplicità:

$$\left.\begin{array}{lll} a^2+e^2+h^2-1=\alpha_1; & b^2+f^2+g^2-1=\beta_1; & c^2+g^2+m^2-1=\gamma_1; \\ ab+ef+hl=\lambda_1; & ac+eg+hm=\mu_1; & bc+fg+lm=\nu_1, \end{array}\right\} \quad (20)$$

tale linea può rappresentarsi per mezzo delle equazioni:

$$\left.\begin{array}{c} \xi=\xi(\tau); \qquad \eta=\eta(\tau); \qquad \zeta=-\dfrac{1}{\gamma_1}(\mu_1\xi+\nu_1\eta)\pm \\ \pm\displaystyle\int\sqrt{(\mu_1^2-\alpha_1\gamma_1)\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2+2(\mu_1\nu_1-\gamma_1\lambda_1)\frac{d\xi}{d\tau}\frac{d\eta}{d\tau}+(\nu_1^2-\beta_1\gamma_1)\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2}\cdot d\tau, \end{array}\right\} \quad (21)$$

essendo τ un parametro indipendente qualunque.

Facendo poi uso delle (15), si trovano pure le equazioni delle altre linee

L_1 e Λ_1; la prima di queste sarà quindi rappresentata dalle equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= \left(A - \frac{\mu C}{\gamma}\right) x + \left(B - \frac{\nu C}{\gamma}\right) y \pm \\
&\pm \frac{C}{\gamma} \int \sqrt{(\mu^2 - \alpha\gamma)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2(\mu\nu - \gamma\lambda)\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + (\nu^2 - \beta\gamma)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt \\
y_1 &= \left(E - \frac{\mu G}{\gamma}\right) x + \left(F - \frac{\nu G}{\gamma}\right) y \pm \\
&\pm \frac{G}{\gamma} \int \sqrt{(\mu^2 - \alpha\gamma)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2(\mu\nu - \gamma\lambda)\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + (\nu^2 - \beta\gamma)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt \\
z_1 &= \left(H - \frac{\mu M}{\gamma}\right) x + \left(L - \frac{\nu M}{\gamma}\right) y \pm \\
&\pm \frac{M}{\gamma} \int \sqrt{(\mu^2 - \alpha\gamma)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2(\mu\nu - \gamma\lambda)\frac{dx}{dt}\frac{dy}{dt} + (\nu^2 - \beta\gamma)\left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt.
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

Invece la linea Λ_1 è rappresentata dalle equazioni:

$$\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= \left(a - \frac{\mu_1 c}{\gamma_1}\right) \xi + \left(b - \frac{\nu_1 c}{\gamma_1}\right) \eta \pm \\
&\pm \frac{c}{\gamma_1} \int \sqrt{(\mu_1^2 - \alpha_1\gamma_1)\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + 2(\mu_1\nu_1 - \gamma_1\lambda_1)\frac{d\xi}{d\tau}\frac{d\eta}{d\tau} + (\nu_1^2 - \beta_1\gamma_1)\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2} \cdot d\tau \\
\eta_1 &= \left(e - \frac{\mu_1 g}{\gamma_1}\right) \xi + \left(f - \frac{\nu_1 g}{\gamma_1}\right) \eta \pm \\
&\pm \frac{g}{\gamma_1} \int \sqrt{(\mu_1^2 - \alpha_1\gamma_1)\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + 2(\mu_1\nu_1 - \gamma_1\lambda_1)\frac{d\xi}{d\tau}\frac{d\eta}{d\tau} + (\nu_1^2 - \beta_1\gamma_1)\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2} \cdot d\tau \\
\zeta_1 &= \left(h - \frac{\mu_1 m}{\gamma_1}\right) \xi + \left(l - \frac{\nu_1 m}{\gamma_1}\right) \eta \pm \\
&\pm \frac{m}{\gamma_1} \int \sqrt{(\mu_1^2 - \alpha_1\gamma_1)\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + 2(\mu_1\nu_1 - \gamma_1\lambda_1)\frac{d\xi}{d\tau}\frac{d\eta}{d\tau} + (\nu_1^2 - \beta_1\gamma_1)\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2} \cdot d\tau.
\end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Abbiamo perciò il teorema: *la superficie di traslazione S nella quale la direttrice L e la generatrice Λ sono le linee rappresentate dalle equazioni* (19), (21) *è applicabile sull'altra superficie di traslazione S_1 in cui la direttrice L_1 e la generatrice Λ_1 sono le linee rappresentate dalle equazioni* (22), (23), *colla condizione che L_1 sia la deformata di L e Λ_1 la deformata di Λ. In queste equazioni A, B, C, E, F, G, H, L, M sono costanti arbitrarie; le costanti*

a, b, c, e, f, g, h, l, m sono date dalle (17), (16); *le costanti* $(\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu)$ *e* $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \lambda_1, \mu_1, \nu_1)$ *sono date dalle* (18), (20).

Nella deformazione ora trovata le linee L, Λ sono a doppia curvatura, ma nessuna di esse è completamente arbitraria; avvenuta la deformazione, le linee L_1, Λ_1 in cui si trasformano le prime sono pure a doppia curvatura e si ha che L_1 è dello stesso ordine di L e Λ_1 dello stesso ordine di Λ.

§ III.

Casi particolari delle deformazioni studiate. — Consideriamo il caso particolare in cui le coordinate x_1, y_1, z_1 sono proporzionali alle corrispondenti x, y, z e le coordinate ξ_1, η_1, ζ_1 sono proporzionali alle corrispondenti ξ, η, ζ; avremo allora:

$$x_1 = mx, \quad y_1 = ny, \quad z_1 = pz; \quad \xi_1 = \frac{1}{m}\xi, \quad \eta_1 = \frac{1}{n}\eta, \quad \zeta_1 = \frac{1}{p}\zeta,$$

essendo m, n, p costanti. Essendo per di più:

$$\frac{dz_1}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 - \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2} = \sqrt{1 - m^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - n^2\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}$$

$$\frac{d\zeta_1}{d\sigma} = \sqrt{1 - \left(\frac{d\xi_1}{d\sigma}\right)^2 - \left(\frac{d\eta_1}{d\sigma}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{m^2}\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2},$$

ed inoltre:

$$\frac{dz_1}{ds} = p\frac{dz}{ds}, \qquad \frac{d\zeta_1}{d\sigma} = \frac{1}{p}\frac{d\zeta}{d\sigma},$$

avremo:

$$\frac{\sqrt{1 - m^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 - n^2\left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}{\frac{dz}{ds}} = p; \qquad \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{m^2}\left(\frac{d\xi}{d\sigma}\right)^2 - \frac{1}{n^2}\left(\frac{d\eta}{d\sigma}\right)^2}}{\frac{d\zeta}{d\sigma}} = \frac{1}{p}.$$

Se dunque poniamo:

$$\frac{m^2-1}{1-p^2} = a, \qquad \frac{n^2-1}{1-p^2} = b, \qquad \frac{\frac{1}{m^2}-1}{1-\frac{1}{p^2}} = \alpha, \qquad \frac{\frac{1}{n^2}-1}{1-\frac{1}{p^2}} = \beta,$$

risulta:

$$m=\sqrt{\frac{1+a}{1+\alpha}}\,; \qquad n=\sqrt{\frac{1+b}{1+\beta}}\,; \qquad p=\sqrt{\frac{\alpha(1+a)}{a(1+\alpha)}}=\sqrt{\frac{\beta(1+b)}{b(1+\beta)}}\,,$$

e quindi necessariamente:

$$\frac{\alpha(1+\beta)}{\beta(1+\alpha)}=\frac{a(1+b)}{b(1+a)}\,. \tag{24}$$

Le linee L e Λ sono allora rappresentate dalle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} x&=x(t); \qquad y=y(t); \qquad z=\int\sqrt{a\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+b\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\cdot dt\\ \xi&=\xi(\tau); \qquad \eta=\eta(\tau); \qquad \zeta=\int\sqrt{\alpha\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2+\beta\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2}\cdot d\tau, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

e le linee L_1, Λ_1 dalle altre:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\sqrt{\frac{1+a}{1+\alpha}}\,x(t); \qquad y_1=\sqrt{\frac{1+b}{1+\beta}}\,y(t);\\ z_1&=\sqrt{\frac{\alpha(1+a)}{a(1+\alpha)}}\int\sqrt{a\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+b\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\cdot dt\\ \xi_1&=\sqrt{\frac{1+\alpha}{1+a}}\,\xi(\tau); \qquad \eta_1=\sqrt{\frac{1+\beta}{1+b}}\,\eta(\tau);\\ \zeta_1&=\sqrt{\frac{a(1+\alpha)}{\alpha(1+a)}}\int\sqrt{\alpha\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2+\beta\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2}\cdot d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Dunque *onde le linee L, Λ rappresentate dalle* (25) *si possano assumere come direttrice e generatrice di una superficie di traslazione S deformabile in una superficie di egual natura S_1, è necessario e sufficiente che le costanti a, b, α, β verifichino la condizione* (24); *in tal caso la deformazione che riduce S a S_1 riduce le linee L, Λ nelle altre L_1, Λ_1 definite dalle equazioni* (26).

Mettiamo la condizione che le due linee L, L_1 si projettino sui piani coordinati $z=0$, $z_1=0$ in due curve simili; si potranno disporre tali curve in modo, che risulti $m=n$ ed allora anche le due linee Λ, Λ_1 si projettano sui piani coordinati $\zeta=0$, $\zeta_1=0$ in due curve simili.

Avendosi poi in questo caso:

$$z=\sqrt{\frac{m^2-1}{1-p^2}}\cdot\int\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\cdot dt,$$

se si pone:

$$x = R\cos t, \qquad y = R\,\mathrm{sen}\,t,$$

essendo R una funzione di t, risulta:

$$z = \sqrt{\frac{m^2-1}{1-p^2}} \cdot \int \sqrt{R^2 + \left(\frac{dR}{dt}\right)^2} \cdot dt.$$

Questa relazione dimostra che L è un'elica segante le generatrici del cilindro sul quale è descritta sotto l'angolo i dato come segue:

$$\cot i = \sqrt{\frac{m^2-1}{1-p^2}}.$$

Da questa si ricava:

$$p = \sqrt{1 + (1-m^2)\,\mathrm{tang}^2 i},$$

e allora per la coordinata z_1 dei punti di L_1 si ha:

$$z_1 = \sqrt{1 + (1-m^2)\,\mathrm{tang}^2 i} \cdot z,$$

la quale mostra che la linea L_1 è pure un'elica e sega le generatrici del cilindro che la contiene sotto l'angolo i_1 tale, che:

$$\mathrm{sen}\,i_1 = m\,\mathrm{sen}\,i.$$

Per la linea Λ abbiamo:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\frac{1}{m^2}-1}{1-\frac{1}{p^2}}} \int \sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2} \cdot d\tau,$$

e quindi, se si pone:

$$\xi = \rho\cos\tau, \qquad \eta = \rho\,\mathrm{sen}\,\tau,$$

essendo ρ funzione di τ, sarà:

$$\zeta = \sqrt{\frac{\frac{1}{m^2}-1}{1-\frac{1}{p^2}}} \int \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2} \cdot d\tau,$$

la quale dimostra che Λ è un'elica segante le generatrici del cilindro sotto l'angolo ι tale, che:

$$\cot\iota = \sqrt{\frac{\frac{1}{m^2}-1}{1-\frac{1}{p^2}}} = \frac{\sqrt{1-m^2\,\mathrm{sen}^2 i}}{m\,\mathrm{sen}\,i}.$$

Avremo dunque:

$$\operatorname{sen}\iota = m \operatorname{sen} i = \operatorname{sen} i_1,$$

da cui risulta:

$$\iota = i_1.$$

Per la linea Λ_1 deformata di Λ si ha:

$$\zeta_1 = \frac{1}{p}\zeta,$$

e quindi anche Λ_1 è un'elica segante le generatrici del cilindro che la contiene sotto l'angolo ι_1 tale, che:

$$\cos\iota_1 = \frac{1}{p}\cos\iota = \frac{1}{\sqrt{1+(1-m^2)\operatorname{tang}^2 i}}\cos\iota;$$

e poichè si è trovato $\iota = i_1$, sarà:

$$\cos\iota_1 = \frac{\sqrt{1-m^2\operatorname{sen}^2 i}}{\sqrt{1+(1-m^2)\operatorname{tang}^2 i}}\cos i,$$

da cui risulta:

$$\iota_1 = i.$$

Dunque *se nella deformazione di una superficie di traslazione* $S\ (L, \Lambda)$ *in un'altra della stessa specie* $S_1\ (L_1, \Lambda_1)$ *le linee* L, L_1 *si projettano sui piani coordinati* $z=0$, $z_1=0$ *in due curve simili* $[x = x(t),\ y = y(t)]$, $[x_1 = m x(t),\ y_1 = m y(t)]$ *anche le linee* Λ, Λ_1 *si projettano sui piani coordinati* $\zeta = 0$, $\zeta_1 = 0$ *in due curve simili* $[\xi = \xi(\tau),\ \eta = \eta(\tau)]$, $\left[\xi_1 = \frac{1}{m}\xi(\tau),\ \eta_1 = \frac{1}{m}\eta(\tau)\right]$ *e le quattro linee* L, Λ, L_1, Λ_1 *sono altrettante eliche. La direttrice* L *della superficie primitiva* S *e la generatrice* Λ_1 *della deformata* S_1 *segano le generatrici dei rispettivi cilindri sotto lo stesso angolo* i*; la generatrice* Λ *della superficie primitiva* S *e la direttrice* L_1 *della deformata* S_1 *segano le generatrici dei rispettivi cilindri sotto il medesimo angolo* ι*; e fra le due inclinazioni* i, ι *ha luogo la relazione:* $\operatorname{sen}\iota = m\operatorname{sen} i$.

Una curiosa deformazione si ottiene come caso particolare di quella ora trovata.

Si supponga che le sezioni rette dei cilindri contenenti le eliche L, Λ siano eguali; allora $\xi\ (\tau)$ e $\eta\ (\tau)$ sono di τ le stesse funzioni che $x\ (t)$ e $y\ (t)$ lo sono di t. Le due eliche L, Λ_1 essendo allora tracciate sopra due cilindri simili e segando le loro generatrici sotto il medesimo angolo sono linee simili; lo stesso avviene delle altre due eliche Λ, L_1.

Siccome poi si deduce $m = \frac{\operatorname{sen} \iota}{\operatorname{sen} i}$, abbiamo *deformando la superficie di traslazione S in cui la direttrice L e la generatrice Λ sono due eliche descritte sullo stesso cilindro e seganti le generatrici sotto gli angoli i, ι in una nuova superficie di traslazione S_1, la direttrice L_1 e la generatrice Λ_1 della superficie deformata sono rispettivamente simili alla generatrice Λ e alla direttrice L della superficie primitiva. Il rapporto di similitudine di L_1 a Λ è $\frac{\operatorname{sen} \iota}{\operatorname{sen} i}$ e quello di Λ_1 a L è $\frac{\operatorname{sen} i}{\operatorname{sen} \iota}$.*

Nella deformazione studiata nel caso *d)* supponiamo che la generatrice Λ sia un'elica tracciata sopra un cilindro colle generatrici parallele all'asse delle ζ e segante queste generatrici sotto l'angolo costante ι; avremo allora:

$$\zeta = \cot \iota \int \sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2} \cdot d\tau,$$

la quale espressione, confrontata colla terza (6), in cui porremo per semplicità:

$$\left.\begin{aligned} m &= \frac{B^2 + E^2 - (AE - BC)^2}{(AE - BC)^2}; \quad n = -\frac{AB + CE}{(AE - BC)^2}; \\ p &= \frac{A^2 + C^2 - (AE - BC)^2}{(AE - BC)^2}, \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

diviene:

$$(m - \cot^2 \iota) d\xi^2 + 2n\, d\xi\, d\eta + (p - \cot^2 \iota) d\eta^2 = 0.$$

Si può soddisfare a questa equazione in due modi, o lasciando arbitrari i coefficienti e determinando in modo conveniente le variabili ξ, η, ovvero lasciando arbitrarie tali variabili e determinando in modo conveniente i coefficienti.

1.° modo. — Risolvendo la precedente equazione rapporto a $d\eta$ e poi integrando, si ottiene:

$$\eta = \frac{-n \pm \sqrt{n^2 - (p - \cot^2 \iota)(m - \cot^2 \iota)}}{p - \cot^2 \iota}\, \xi + \text{cost.},$$

la quale mostra che Λ si riduce a una curva piana, caso che escludiamo:

2.° modo. — Dovendosi avere:

$$m = \cot^2 \iota, \qquad n = 0, \qquad p = \cot^2 \iota,$$

la costante A resta arbitraria e per le altre B, C, E otteniamo:

$$B=\sqrt{\operatorname{sen}^2\iota-A^2},\qquad C=-\sqrt{\operatorname{sen}^2\iota-A^2},\qquad E=A.$$

Le (5) dànno allora:

$$a=\frac{A}{\operatorname{sen}^2\iota},\qquad b=\frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\iota-A^2}}{\operatorname{sen}^2\iota},\qquad c=-\frac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\iota-A^2}}{\operatorname{sen}^2\iota},\qquad e=\frac{A}{\operatorname{sen}^2\iota},$$

e per le coordinate dei punti delle linee L, Λ e dei punti delle linee L_1, Λ_1 abbiamo:

$$x=x(t);\qquad y=y(t);\qquad z=0 \tag{28}$$

$$\xi=\xi(\tau);\qquad \eta=\eta(\tau);\qquad \zeta=\cot\iota\int\sqrt{\left(\frac{d\xi}{d\tau}\right)^2+\left(\frac{d\eta}{d\tau}\right)^2}\cdot d\tau \tag{29}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1=A\,x(t)+\sqrt{\operatorname{sen}^2\iota-A^2}\cdot y(t);\qquad y_1=-\sqrt{\operatorname{sen}^2\iota-A^2}\cdot x(t)+A\,y(t);\\ z_1=\cos\iota\displaystyle\int\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\cdot dt\end{array}\right\} \tag{30}$$

$$\left.\begin{array}{l} \xi_1=\dfrac{A}{\operatorname{sen}^2\iota}\,\xi(\tau)+\dfrac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\iota-A^2}}{\operatorname{sen}^2\iota}\,\eta(\tau);\qquad \eta_1=-\dfrac{\sqrt{\operatorname{sen}^2\iota-A^2}}{\operatorname{sen}^2\iota}\,\xi(\tau)+\dfrac{A}{\operatorname{sen}^2\iota}\,\eta(\tau);\\ \zeta_1=0.\end{array}\right\} \tag{31}$$

Dunque *una superficie di traslazione in cui la direttrice L e la generatrice Λ sono rispettivamente la linea piana* (28) *e l'elica* (29) *entrambe arbitrarie, si può deformare in un'altra superficie di traslazione in cui la direttrice L_1 e la generatrice Λ_1 sono rispettivamente l'elica* (30) *e la linea piana* (31).

Se nelle formole (11), (12) supponiamo che la $\xi_1(\sigma)$ sia dell'arco σ la stessa funzione che la $x(s)$ è dell'arco s, le due linee piane L, Λ_1 sono eguali; se per di più supponiamo che sia $B=C$, le (13), (14) mostrano che le due linee a doppia curvatura L_1, Λ sono perfettamente eguali.

Potremo dunque dire *la superficie di traslazione S nella quale la direttrice L e la generatrice Λ sono rappresentate dalle equazioni* (11), (14) *nelle quali $B=C$ e inoltre $\xi_1(\sigma)$ è di σ la stessa funzione che $x(s)$ lo è di s, può deformarsi in un'altra superficie di traslazione S_1 in modo, che la direttrice L_1 e la generatrice Λ_1 della superficie deformata siano rispettivamente eguali alla generatrice Λ e alla direttrice L della superficie primitiva.*

Parma, novembre 1889.

Sulla teoria delle funzioni σ iperellittiche pari e dispari di genere 3.

(*Memoria III di* Ernesto Pascal, *in Napoli.*)

Come ho promesso nella mia Memoria II, pubblico ora questo mio lavoro sulle σ iperellittiche di genere 3.

Come Memoria IV sarà pubblicato fra breve il lavoro sulle σ abeliane *pari* che ho compito da pochi giorni, e di cui un ristrettissimo riassunto è comparso (come già si fece per le abeliane *dispari*) negli Atti dell'Accademia di Göttingen (*).

Uno degli argomenti interessantissimi che io mi propongo di trattare in avvenire è lo studio delle relazioni fra le σ iperellittiche di genere 3, e le abeliane dello stesso genere; ricerca che io credo non dovrà riuscire molto difficile, dopo avere, con questi lavori già fatti, studiate assai da vicino sia le une che le altre separatamente.

Nel presente lavoro io mi servo moltissimo dei risultati ottenuti dal prof. Wiltheiss nello studio delle equazioni differenziali a cui soddisfanno le funzioni iperellittiche.

Nel corso di questo lavoro mi pare notevole la varietà dei metodi adoperati, e tanto più insisto su questo, inquantochè mi è sempre parso che l'uniformità dei metodi e la mancanza di artifizii rappresenti una matematica senza risorse.

Fra i risultati ottenuti mi piace di porre in vista il seguente, che cioè il metodo tenuto dal dott. Burkhardt per la ricerca del 1.° termine delle σ

(*) *Zur Th. d. ger. Sigmafunct.* Vorgelegt von F. Klein. Gött. Nach., Dec. 1889.

perellittiche (*), e che si presterebbe completamente per la ricerca dei termini seguenti delle σ iperellittiche di genere 2, e delle abeliane di genere 3 (**), non può però far giungere senz'altro alla conoscenza dei termini seguenti delle σ iperellittiche di un genere superiore al 2.

§ I. Sulla forma principale $\Omega(x\ y)$.

Se $P^{x\,y}_{x'y'}$, $Q^{x\,y}_{x'y'}$ sono due integrali di 3.ª specie (cioè che hanno punti di infinito logaritmico) nel campo iperellittico di genere p corrispondente alla forma binaria:

$$f = a_x^{2p+2},$$

e $(x',\ y')$ $(x,\ y)$ sono rispettivamente i loro parametri e i loro argomenti, è noto che P e Q differiscono fra loro per un'espressione razionale ed intera negli integrali di 1.ª specie $u_1\ u_2 \ldots\ u_p$ estesi sia fra i punti x, y, e sia fra i punti $x'\ y'$.

In questo modo si può costruire qualunque integrale di 3.ª specie, conosciutone uno.

Se si tien di mira di semplificare al possibile i *periodi* di tale integrale, cioè i valori che esso acquista quando si gira colla variabile d'integrazione lungo un *taglio* della superficie di Riemann, allora si può costruire quel tale *integrale normale* di 3.ª specie introdotto da Clebsch e Gordan e da essi chiamato Π. Tale integrale è *normale* da un punto di vista, diremo così, *trascendente*.

Il Klein ha scoperto che si può rendere normale l'integrale di 3.ª specie da un altro punto di vista, e propriamente da un punto di vista che diremo *algebrico;* fra gli infiniti, cioè, integrali di 3.ª specie *ne esiste uno solo in cui il numeratore dell'integrando è un covariante razionale ed intero di* f (***). Tale integrale lo chiamiamo Q e la sua forma è:

$$Q^{x'\,y'}_{x\,y} = \int_y^x \int_{y'}^{x'} \frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')} + F(zz')}{2\,(zz')^2}\ \frac{(z'\,dz')}{\sqrt{f(z')}}\ \frac{(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}},$$

dove $F(z\ z')$ è la $p+1^{\text{ma}}$ polare di f fra le variabile z e z'.

(*) Burkhardt, *Beiträge zur Th. der hyp. Sig.* Math. Ann., Bd. 32, pag. 437.
(**) Memoria II, § 1.
(***) Math. Ann., Bd. 27, pag. 446.

Per mezzo dell'integrale Q si può costruire, sulla superficie di Riemann iperellittica, una funzione che bisogna considerarla come il punto cardinale di tutta la nuova teoria di Klein sulle trascendenti.

Tale funzione, indicata da Klein con Ω e chiamata da lui *Primausdruck* ovvero anche *forma principale* (*), è:

$$\Omega(x\,y) = \frac{(x\,y)}{\sqrt[4]{fx \cdot fy}}\, e^{\frac{1}{2} Q(x\,y)},$$

ove con $Q(x\,y)$ si indica uno speciale dei rami dell'integrale Q quando $x'\ y'$ diventano precisamente i due cosiddetti *punti conjugati* di $x\ y$, cioè i punti che sulla superficie di Riemann a *due falde* stanno coincidenti coi punti $x\ y$ rispettivamente, ma nella *falda* opposta.

La funzione Ω è un *covariante trascendente* di f colle due serie di variabili cogredienti $x\ y$: è di grado $\left(-\frac{1}{2}\right)$ nei coefficienti di f. Inoltre le sue proprietà essenziali sono: *che non è diramata in alcun punto della superficie di* Riemann; *non diventa mai infinita, e inoltre si annulla di primo ordine e solo quando* $x = y$.

Nel caso di $p = 1$ cioè nel caso ellittico, la Ω è anche di zero dimensione in x e y.

Se indichiamo con ω, $-\eta$, rispettivamente i *periodi* degli integrali di 1.ª e 2.ª specie, la funzione $\Omega(x\,y)$, quando la variabile x percorra uno dei tagli canonici della superficie di Riemann, acquista il fattore:

$$-e^{\sum_\alpha \eta_{\alpha\beta}\left(u_\alpha^{xy} + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\right)},$$

dove la somma si estende da $\alpha = 1$ ad $\alpha = p$, e il secondo indice β, che abbiamo segnato ad η e ω, si riferisce allo speciale taglio canonico della superficie, che si è percorso colla variabile x.

§ II. Le funzioni σ di Klein.

Le funzioni ϑ di Jacobi non si comportano nel modo più semplice per la trasformazione lineare dei periodi; esse acquistano cioè in generale un fattore esponenziale di 2.° grado negli integrali di 1.ª specie considerati come argomenti delle ϑ.

(*) Math. Ann., Bd. 32; Göttingen Nachrich., 1887; Comptes Rendus, 1.° semestre 89.

Il Klein per il primo ha dimostrato che si possono sostituire alle funzioni ϑ altre funzioni, le quali per la trasformazione lineare dei periodi si permutano *semplicemente* fra loro, senza l'introduzione di alcun fattore estraneo (*).

Queste altre funzioni sono appunto le funzioni σ, che per il solo caso ellittico $p=1$ erano già state per vie diverse costruite da Weierstrass.

Tali funzioni possono definirsi indipendentemente dalle ϑ.

Sieno gli integrali di 1.ª specie:

$$u_1 = \left[\int_{y'}^{x'} + \int_{y''}^{x''} + \cdots + \int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}}\right] \frac{z_1^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{fz}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_p = \left[\int_{y'}^{x'} + \int_{y''}^{x''} + \cdots + \int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}}\right] \frac{z_2^{p-1}(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}},$$

si formi allora l'espressione:

$$M = \frac{\Pi_i \Pi_k \, \Omega(x^{i}\, y^{(k)})}{\Pi_i \Pi_k (x^{(i)} y^{(k)}) \, \Pi_i \Pi'_k \, \Omega(x^{(i)} x^{(k)}) \, \Pi_i \Pi'_k \, \Omega(y^{(i)} y^{k})},$$

dove con $\Pi_i \Pi'_k$ si è voluto indicare che si escludono le combinazioni $k=i$.

Tutte le funzioni σ avranno per fattore la espressione M. L'altro fattore è coordinato univocamente colla scomposizione in due parti della binaria f, cioè se si pone:

$$f = \varphi_{p+1-2\mu}\, \psi_{p+1+2\mu} \qquad \left(\mu = 0,\ 1, \ldots,\ \frac{p+1}{2}\right),$$

allora ad ognuno di tali scomposizioni di f corrisponde una funzione σ.

Propriamente si formi il determinante:

$$D = \left| \begin{matrix} x_1^{\nu-1+\mu}\sqrt{\varphi(x)} \ldots & x_2^{\nu-1+\mu}\sqrt{\varphi(x)} \ldots & x_1^{\nu-1-\mu}\sqrt{\psi(x)} \ldots & x_2^{\nu-1-\mu}\sqrt{\psi(x)} \\ y_1^{\nu-1+\mu}\sqrt{\varphi(y)} \ldots & y_2^{\nu-1+\mu}\sqrt{\varphi(y)} \ldots & y_1^{\nu-1-\mu}\sqrt{\psi(y)} \ldots & y_2^{\nu-1-\mu}\sqrt{\psi(y)} \end{matrix} \right|,$$

colla quale scrittura abbreviata vogliamo intendere che vi sono tante linee colle variabili x per quante sono $x'\ x'' \ldots\ x^{(\nu)}$, e lo stesso per le y.

Tale determinante sarà l'altro fattore che insieme ad M costituisce la σ.

È facile vedere che di scomposizioni di f della specie detta ve ne sono 2^{2p}, quindi vi sono altrettante σ.

(*) Oltre le opere citate di Klein vedi un recente lavoro del signor Krazer: *Zur Bildung allgemeiner σ-Functionen*, Math. Ann., Bd. 33, pag. 591, in cui si stabilisce con metodo diretto la proposizione enunciata.

Ora è noto che vi sono appunto 2^{2p} funzioni ϑ a p argomenti, ad ognuna delle quali corrisponde una speciale *caratteristica*. Si sa che cosa si intenda per *caratteristica* di una funzione ϑ.

La espressione:

$$\begin{vmatrix} g_1 & g_2 \dots & g_p \\ h_1 & h_2 \dots & h_p \end{vmatrix},$$

cioè l'aggregato di questi $2p$ numeri interi i cui valori possono essere semplicemente o 0 o 1, e dai quali numeri dipende la formazione della serie esponenziale che caratterizza la ϑ, è ciò che, seguendo Riemann, si chiama la *caratteristica* di ϑ.

Ad ogni funzione ϑ corrisponde univocamente una σ; la scomposizione di f in due determinati fattori può rappresentare quindi un'altra *caratteristica* di una natura diversa, delle funzioni ϑ; potremo chiamare questa *caratteristica algebrica*, e l'altra (quella di Riemann) *caratteristica trascendente*. Queste due specie di caratteristiche si corrispondono univocamente fra loro.

Ogni funzione ϑ si esprime mediante una speciale σ moltiplicata per un certo fattore; propriamente:

$$\vartheta_{\left|\begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix}\right|} = C_{\varphi\psi}\, e^{G(u_1 \dots u_p)}\, \sigma_{\varphi\psi},$$

dove $C_{\varphi\psi}$ è un fattore algebrico dipendente dai moduli e dai coefficienti di φ, ψ, e G è un'espressione di 2.° grado negli argomenti u. Tralasciamo di indicare precisamente quali sono queste espressioni (*); vogliamo però solo notare che $C_{\varphi\psi}$ contiene per fattore:

$$s = \sqrt[8]{D_\varphi D_\psi},$$

dove D_φ, D_ψ sono rispettivamente i discriminanti delle binarie φ e ψ. La funzione $Th = s \cdot \sigma$ è stata quella considerata dal Wiltheiss nello studio delle equazioni differenziali di cui sarà parola nei paragrafi seguenti.

§ III. Proprietà delle funzioni σ.

Le funzioni σ hanno, come le Ω, la proprietà di non diventare mai *infinite* in qualunque punto della superficie di Riemann. Inoltre esse si annullano allora e solo allora che i punti x, $\bar{y}$ (intendendo con $\bar{y}$ i *conjugati* di y), e k' k''...

(*) Klein, Math. Ann., Bd. 32, pag. 376.

$k^{(p+1-2\mu)}$ (essendo i punti k i *punti-nulli* della binaria φ) sono tutti *punti-nulli* di una medesima funzione della forma (*):

$$G_{p+\nu-\mu}(x) + \gamma_{\nu-\mu-1}(x)\sqrt{f(x)}.$$

Se una x percorre un taglio canonico della superficie di Riemann, allora σ acquista il fattore:

$$\pm\, e^{\Sigma \eta_{\alpha\beta}\left(u_\alpha + \frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}\right)}.$$

Questa proprietà ci occorrerà in un paragrafo seguente.

Il numero intero μ che caratterizza la scomposizione di f in due fattori, ha un significato speciale rispetto alle funzioni σ, esso rappresenta cioè che quella speciale σ per argomenti $u_1 = u_2 = \cdots = 0$ si annulla μ volte cioè diventa zero come 0^μ; inoltre secondo che μ è pari o dispari, la σ sarà funzione pari o dispari.

Così per es. $p = 3$ risulta immediatamente che:

1. vi sono 28 σ *dispari* corrispondenti alle 28 scomposizioni di f (che è di 8.° ordine) in una quadratica ed in una sestica;

2. vi sono 35 σ *pari* che non si annullano per argomenti zero e che chiameremo di 1.ª specie; esse sono corrispondenti alle 35 scomposizioni di f in due quartiche;

3. vi è una sola σ *pari* che si annulla per argomenti zero, e che chiameremo di 2.ª specie. Tale σ corrisponde all'unica scomposizione di f in una forma di 8.° ordine e in una di zero ordine.

Le σ definite sinora come funzioni dei punti x y della superficie di Riemann, *sono anche funzioni analitiche monodrome degli integrali u, le quali per qualunque variabilità degli argomenti u hanno sempre il carattere di funzioni intere.*

Esse sono inoltre anche *funzioni razionali intere dei coefficienti delle due binarie* φ e ψ (**), *e inoltre posseggono la proprietà invariantiva.*

Propriamente se noi poniamo:

$$\chi(z) = u_1 z_2^{p-1} - (p-1)u_2 z_2^{p-2} z_1 + \cdots = \chi_z^{p-1},$$

allora i varii termini dello sviluppo in serie di σ secondo le potenze ascendenti di u sono covarianti simultanei delle tre binarie φ, ψ, χ.

Riguardo ai gradi nei coefficienti di tali tre binarie, si ha che un termine

(*) Burkhardt, Math. Ann., Bd. 32, pag. 423.

(**) Wiltheiss, Math. Ann., Bd. 31, pag. 410.

qualunque dello sviluppo è propriamente del tipo:

$$(\overset{\mu+2\rho}{\chi},\ \overset{\mu+\rho}{\varphi},\ \overset{\rho}{\psi}).$$

Il primo termine di tale sviluppo in serie, per il caso generale, è stato trovato con due metodi diversi dal Klein e dal Burkhardt (*).

Finalmente dobbiamo aggiungere ancora un'altra osservazione che ci occorrerà in seguito (§ XI e XII).

Se il genere è $p = 3$, e se gli integrali di 1.ª specie si pongono sotto la forma ridotta:

$$u_1 = \int_y^x \frac{z_1^2 (z\,dz)}{\sqrt{f(z)}}$$

$$u_2 = \int_y^x \frac{z_1 z_2 (z\,dz)}{\sqrt{f(z)}}$$

$$u_3 = \int_y^x \frac{z_2^2 (z\,dz)}{\sqrt{f(z)}},$$

allora le funzioni:

$$\sqrt{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}\,\Omega(x\,y)$$

$$[\sqrt{\varphi_2(x)\psi_2(y)} + \sqrt{\varphi_2(y)\psi_2(x)}]\,\frac{\Omega(x\,y)}{2(x\,y)},$$

dove rispettivamente φ_1 è un fattore quadratico di f, e φ_2, ψ_2 sono due quartiche il cui prodotto forma f, coincidono colle nostre funzioni σ dispari e pari di 1.ª specie definite avanti sino ai termini di ordine inferiore al quarto negli argomenti u. Ciò è l'analogo di quello che accade per le funzioni abeliane (**).

§ IV. Equazione differenziale trovata da Wiltheiss per le funzioni iperellittiche *Th*.

Le funzioni iperellittiche soddisfanno a certe equazioni differenziali lineari di 2.° ordine.

Il Wiltheiss ha trovato le equazioni differenziali per le Th cioè per le funzioni σ moltiplicate per la irrazionale s (§ II) (***).

(*) Klein, Math. Ann., Bd. 32, pag. 371. — Burkhardt, Math. Ann., Bd. 32, pag. 437.

(**) Vedi Memoria I, § 7.

(***) *Die Partielle Differentialgleich.*, etc. Math. Ann., Bd. 33. Vedi in nota al § II della mia Mem. II l'elenco dei lavori del prof. Wiltheiss trattanti dello stesso argomento.

Poichè le notazioni di Wiltheiss sono diverse da quelle usate da Klein e da noi, così ci è prima di tutto estremamente interessante trasformare i risultati di Wiltheiss secondo il nostro punto di vista.

Dobbiamo, per far ciò, incominciare coll'indicare per sommi capi il procedimento tenuto da Wiltheiss.

Gli integrali normali di 1.ª e 2.ª specie adoperati dal Wiltheiss sono (Math. Ann., 33, pag. 269):

$$\int \frac{H(x)_\alpha}{2y}(dx,\ x), \qquad \int \frac{G(x)_\alpha}{2y}(dx,\ x), \qquad \alpha = 1,\ 2, \ldots\ p, \tag{1}$$

dove y è la radice quadrata della binaria di $2p+2^{\text{mo}}$ grado che è il fondamento dell'irrazionale iperellittico, $y=\sqrt{f(x)}$; le espressioni H, G sono delle funzioni di x fra le quali esiste la relazione:

$$\left.\begin{aligned} -\frac{2y\eta + 2f(x,\ \xi)}{4(x\xi)^2 y\eta} &= \sum_\alpha \frac{H(\xi)_\alpha}{2\eta}\,\frac{G(x)_\alpha}{2y} - \frac{d\Phi(x,\ \xi)}{(dx,\ x)} \\ &= \sum_\alpha \frac{H(x)_\alpha}{2y}\,\frac{G(\xi)_\alpha}{2\eta} - \frac{d\Phi(\xi,\ x)}{(d\xi,\ \xi)}, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

dove Φ è una funzione arbitraria di x e ξ di gradi convenienti, e $f(x,\ \xi)$ è la $p+1^{\text{ma}}$ polare di f fra le variabili x e ξ.

I periodi degli integrali normali di 1.ª e 2.ª specie sono chiamati dal Wiltheiss rispettivamente:

$$2\,\omega_{\alpha\beta}, \qquad 2\,\omega'_{\alpha\beta}; \qquad 2\,\eta_{\alpha\beta}, \qquad 2\,\eta'_{\alpha\beta}. \tag{3}$$

Fra tali periodi esistono notoriamente certe relazioni bilineari che nel nostro caso sono:

$$\sum_\alpha (\eta_{\alpha\beta}\,\omega'_{\alpha\gamma} - \eta'_{\alpha\gamma}\,\omega_{\alpha\beta}) = \begin{cases} 0 & \text{per } \beta \gtrless \gamma \\ \dfrac{\pi i}{2} & \ \ \text{»} \quad \beta = \gamma. \end{cases} \tag{4}$$

Fra le infinite funzioni intere $H(x)_\alpha$ che si possono scegliere per formare i p integrali di 1.ª specie, scegliamo in particolare:

$$H(x)_\alpha = (-x_1)^{\alpha-1}\, x_2^{p-\alpha}. \tag{5}$$

Quindi, secondo le notazioni di Wiltheiss, si ha:

$$du_1 : du_2 : \ldots\ du_p = x_2^{p-1} : -x_1 x_2^{p-2} : \ldots \tag{6}$$

Il Wiltheiss ricerca inoltre, giovandosi delle cosiddette equazioni differenziali di Riemann per le ϑ jacobiane, la forma che debbono avere le equazioni differenziali per la Θ di WEIERSTRASS, che differisce dalla ϑ jacobiana per un fattore algebrico indipendente dagli argomenti e per un fattore esponenziale di 2.° grado negli argomenti (cioè negli integrali di 1.ª specie che funzionano da argomenti). Definendo una funzione Th differente dalla Θ di WEIERSTRASS solo per un certo fattore indipendente dai moduli, essa avrà la periodicità

$$Th(u+2\omega)=(-1)^N\,Th(u)e^{\sum\limits_\beta 2\eta_\beta(u_\beta+\omega_\beta)}. \tag{7}$$

Se allora, giovandoci di questa formola, nella equazione differenziale per la Th (equazione di cui, come abbiamo detto, abbiamo già determinata in generale la forma), aumentiamo gli argomenti u dei periodi 2ω, otteniamo lo stesso primo membro dell'equazione più un'altra parte, che deve dunque essere eguale a zero.

È in questa maniera che si ottengono le equazioni (22) (23) della pag. 276 del lavoro citato di WILTHEISS. Da tali due equazioni si ottengono poi facilmente le (26) (27) della pag. 277 (*).

È da tali equazioni che si ricava il valore dei vari covarianti o parti di covarianti che funzionano da coefficienti nell'equazione differenziale lineare, *formalmente* già conosciuta.

Per brevità non riproduciamo qui il risultato finale ottenuto a pag. 286 del lavoro citato, e inseriremo invece fra poco quello stesso risultato, ma modificato secondo i nostri punti di vista.

§ V. Modificazione dell'equazione di Wiltheiss.

Le notazioni adoperate dal WILTHEISS e inserite nel paragrafo precedente non s'accordano con quelle adoperate dal KLEIN nei suoi lavori e quindi da me nei miei lavori precedenti.

E a questo proposito non voglio tralasciare di notare che in generale questi lavori del WILTHEISS, del resto assai pregevoli, non mancano però d'essere un poco trascurati nelle notazioni e nei procedimenti, per modo che la loro lettura riesce penosa oltre ogni dire. Io ho sempre pensato che la ele-

(*) Ci pare completamente inutile riprodurre qui le equazioni citate. Alla lettura di questo nostro capitolo il lettore dovrà necessariamente tener presente il lavoro del professore WILTHEISS.

ganza della notazione e la precisione dei procedimenti sia un non piccolo fattore del progresso delle matematiche.

In luogo degli integrali di 1.ª specie (1) adoperati dal W. (*), dove le H hanno i valori dati da (5), consideriamo gli integrali

$$u_i = \int \frac{x_1^{p-i} x_2^{i-1} (x\,dx)}{\sqrt{f(x)}} .$$

Queste u soddisfanno anzichè alle (6), a

$$du_1 : du_2 : \ldots = x_1^{p-1} : x_1^{p-2} x_2 : \ldots \tag{8}$$

Si vede inoltre che rispetto alle u del paragrafo precedente queste u hanno un cambiamento di segno per effetto del determinante (x, dx) che nel paragrafo precedente è invece (dx, x).

In conclusione in luogo delle u_α noi consideriamo:

$$\frac{1}{2}(-1)^\alpha u_{p-\alpha+1} .$$

Quindi uno scambio analogo di indici e di segno si verificherà nei periodi ω degli integrali di 1.ª specie. Facendo per un momento astrazione dallo scambio di indici e di segno esaminiamo la relazione fra i nostri periodi ω e quelli di Wiltheiss. Poichè noi chiamiamo ω e non 2ω i periodi dell'integrale, così ricaviamo che, a meno del segno e degli indici, le nostre ω sono il quadruplo di quelle di Wiltheiss. Propriamente la ω_α di W. corrisponde alla nostra $\frac{1}{4}(-1)^\alpha \omega_{p-\alpha+1}$.

Passiamo agli integrali di 2.ª specie e ai loro periodi.

Prendiamo per integrali di 2.ª specie:

$$Z_\alpha(\xi) = \frac{(p-1)_{\alpha-1}}{(p-1)!} \frac{\partial^{p-1} Z(\xi)}{\partial \xi_1^{p-\alpha} \partial \xi_2^{\alpha-1}},$$

dove:

$$Z(\xi) = \int \frac{\sqrt{f(x) f(\xi)} + F(x, \xi)}{2(x\xi)^2} \frac{(x\,dx)}{\sqrt{fx}},$$

essendo $F(x, \xi)$ la polare $p+1^{\text{ma}}$ di f fra le variabili x e ξ (**).

I periodi di tali integrali li chiamiamo $-\eta$.

(*) Spesso in seguito per brevità scriveremo semplicemente W. in luogo di Wiltheiss.

(**) Vedi Burkhardt, *Hyperelliptische Sigmafunctionen.* Math. Ann., Bd. 32, § 1.

Nella formola (2) del paragrafo precedente prendiamo $\Phi = 0$ e per le H le espressioni (5).

Allora si ha per determinare le G l'espressione:

$$-\frac{y\eta + F(x\xi)}{(x\xi)^2} = \xi_2^{p-1}\frac{G(x)_1}{2} - \xi_2^{p-2}\xi_1\frac{G(x)_2}{2} + \cdots$$

Con opportune derivazioni a primo e secondo membro da questa formola si ricavano le G.

Si ha:

$$(p-\alpha)!\,(\alpha-1)!\,\frac{G_\alpha}{2} = (-1)^\alpha \frac{\partial^{p-1}}{\partial\xi_2^{p-\alpha}\,\partial\xi_1^{\alpha-1}}\,\frac{y\eta + F(x\xi)}{(x\xi)^2}.$$

Di qui è facile vedere che gli integrali di 2.ª specie di Wiltheiss a meno di uno scambio di indici e di segno sono eguali a quelli che vogliamo noi adoperare, ma moltiplicati per 2, onde propriamente riguardo alla relazione fra le η del W. e le nostre, si ha che η_α di W. corrisponde alla nostra $(-1)^\alpha\eta_{p-\alpha+1}$.

Questo fatto del resto può anche verificarsi altrimenti giovandoci della relazione bilineare esistente fra i periodi degli integrali di 1.ª e 2.ª specie.

Paragoniamo cioè la relazione (4) del paragrafo precedente coll'ultima delle formole (45) di pag. 401 del lavoro citato di Burkhardt:

$$\sum_{\alpha=1}^{p}(\omega_{\alpha\beta}\eta'_{\alpha\beta} - \omega'_{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta}) = -2\pi i \ (*).$$

Si ricava, sapendo quello che abbiamo stabilito riguardo alla relazione fra le nostre ω e quelle di W. che le nostre η hanno appunto la relazione sopra stabilita con quella di W.

Abbiamo dunque per risultati:

u_α	di W.	corrisponde	alla nostra	espressione	$\frac{1}{2}(-1)^\alpha u_{p-\alpha+1}$
ω_α	»	»	»	»	$\frac{1}{4}(-1)^\alpha \omega_{p-\alpha+1}$
Z_α	»	»	»	»	$2(-1)^{\alpha-1}Z_{p-\alpha+1}$
η_α	»	»	»	»	$(-1)^\alpha\eta_{p-\alpha+1}$.

(*) Ricordiamo che le ω' e η', cogli apici, rappresentano i periodi sul secondo sistema di tagli canonici della superficie di Riemann.

Partiamo ora dalle funzioni iperellittiche Th definite dalla periodicità:

$$Th(u+\omega) = \pm\, Th(u) e^{\Sigma \eta \left(u+\frac{\omega}{2}\right)}, \tag{9}$$

dove le u ω η hanno il significato che loro diamo noi (*).

Paragonata questa equazione (9) colla (7) si vede che essa non differisce *formalmente* dalla (7) se non perchè dappertutto in luogo di ω, η sta posto $\frac{\omega}{2}$, $\frac{\eta}{2}$.

Se quindi partendo dalla (9) incominciamo ad eseguire il procedimento che il W. applica nel § 3 del suo citato lavoro, noi otterremo in primo luogo le equazioni (22) (23) di pag. 276 di W. completamente inalterate.

Non così però le equazioni (26) (27) che si ricavano dalle prime. Giacchè siccome per noi le ω e η hanno significato diverso che in W., così le dette equazioni verranno diversamente costruite.

Propriamente i due primi termini della (26) vengono moltiplicati per 2 e il 3.° viene diviso per 2.

Così nella (27) il 1.° e 3.° vengono divisi per 2, mentre il 2.° termine viene moltiplicato per 2.

Se quindi in luogo delle espressioni $\overline{K}$, L, poniamo rispettivamente $4\overline{K}$, $\frac{1}{4}L$ noi otterremo (a meno delle quantità indeterminate P^0 Q^0), due equazioni che sono nella forma perfettamente identiche colle (26) (27) del W.; onde è chiaro che allora seguendo gli stessi procedimenti del W. otteniamo per i nuovi $\overline{K}$, L introdotti, le stesse espressioni ottenute dal W. Tali espressioni non sono però allora quelle che precisamente ci occorrono per costruire la nostra equazione differenziale, ma dobbiamo moltiplicare per 4 la prima e dividere per 4 la seconda.

Onde l'equazione differenziale per la nostra funzione Th è:

$$2(p+1)\delta\, Th + \pi\, Th + 4\bar{\pi}\, Th + \frac{1}{8}\Lambda \cdot Th = 0,$$

dove δ, π, $\bar{\pi}$, Λ, hanno gli stessi significati che in W.

(*) Questa è precisamente la periodicità della σ iperellittica di Klein. Vedi: *Ueber hyperellip. Sigmafunctionen*. Math. Ann., Bd. 32, pag. 357. Vedi anche il nostro § III.

§ VI. Espressioni dei processi π, $\bar{\pi}$, e di Λ.

Le u introdotte da noi hanno rispetto a quelle adoperate dal W. una certa inversione di indici, come risulta dalle formole del paragrafo precedente.

Del cangiamento che subisce l'equazione solo per effetto di questa inversione di indici non ne abbiamo ancora tenuto conto.

Se consideriamo il processo $\bar{\pi}$, ci accorgiamo facilmente che ivi la inversione degli indici delle u corrisponde a sostituire alle variabili v altrettante serie di variabili *contragredienti*, cioè corrisponde a supporre poste:

$$v_2 \quad \text{e} \quad v_1$$

per

$$-v_1 \quad \text{e} \quad v_2.$$

Allora il processo $\bar{\pi}$ che dobbiamo considerare è propriamente

$$\text{I.} \qquad \bar{\pi} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha\beta=1}^{p} v_1^{2p-\alpha-\beta} v_2^{\alpha+\beta-2} \frac{\partial^2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}.$$

Consideriamo inoltre Λ e π.

Introduciamo la forma χ introdotta da Klein (*):

$$\chi_z^{p-1} = u_1 z_2^{p-1} - (p-1) u_2 z_2^{p-2} z_1 + \cdots$$

per modo che simbolicamente:

$$u_1 = \chi_2^{p-1}$$
$$u_2 = -\chi_2^{p-2} \chi_1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

La espressione Λ è formata dal covariante L, che porremo simbolicamente sotto la forma:

$$L = L_x^{p-1} L_{1s}^{p-1},$$

ponendovi u_α, u_β, per

$$(-x_1)^{\alpha-1} x_2^{p-\alpha}, \qquad (-s_1)^{\beta-1} s_2^{p-\beta}.$$

Per l'osservazione fatta testè che alle variabili x, s, bisogna sostituirne altre contragredienti, si ha che per formare Λ bisogna in L porre u_α u_β per

$$x_2^{\alpha-1} x_1^{p-\alpha}, \qquad s_2^{\beta-1} s_1^{p-\beta},$$

(*) Klein, Math. Ann., Bd. 32, pag. 364.

e tenendo presenti le espressioni simboliche delle u si ha che per

$$\begin{array}{ccc} x_1^{p-1} & \text{deve porsi} & \chi_2^{p-1} \\ x_1^{p-2}x_2 & \text{»} & -\chi_2^{p-2}\chi_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

e analogamente per le s. Onde infine:

$$\text{II.} \qquad \Lambda = (L\chi)^{p-1}(L_1\chi')^{p-1},$$

essendo χ' un simbolo equivalente a χ.

Passiamo ora al processo π.

Poniamo simbolicamente:

$$k_{\alpha\beta} = k_\alpha k_{1\beta},$$

allora in primo luogo π diventa:

$$\pi = \sum(-1)^\alpha k_\alpha u_{p-\alpha+1} \sum(-1)^\beta k_{1\beta} \frac{\partial}{\partial u_{p-\beta+1}}.$$

Poniamo ora il covariante K simbolicamente sotto la forma:

$$K = K_x^{p-1} K_{1t}^{p-1}.$$

Il π si ottiene da K mutando in primo luogo le x nelle χ nel solito modo come avanti, quindi si ha:

$$\text{III.} \qquad \pi = (K\chi)^{p-1}\sum(-1)^\beta k_{1\beta} \frac{\partial}{\partial u_{p-\beta+1}}$$

$$= (\chi K)^{p-1}\sum K_{1,1}^{p-\beta} K_{1,2}^{\beta-1} \frac{\partial}{\partial(\chi_1^{p-\beta}\chi_2^{\beta-1})}.$$

In conclusione il processo π è un processo di Aronhold per effetto del quale ai coefficienti della forma χ_t^{p-1} si sostituiscono quelli di $(\chi K)^{p-1} K_{1t}^{p-1}$.

§ VII. I covarianti F, K, per $p = 3$.

Le espressioni che il Wiltheiss dà per i tre covarianti F, K, L, che entrano nell'equazione differenziale, sono capaci di grandi semplificazioni. Noi daremo qui le espressioni di F, K per $p = 3$.

Secondo il W. si ha:

$$F = (a_x^3 a_v^{2p-1},\ b_x^{2p+2}) : (xv),$$

dove $a_x^{2p+2} = b_x^{2p+2} = \cdots$ è la forma di $2p + 2^{\text{mo}}$ grado che è il fondamento dell'irrazionalità iperellittica, e la parentesi rappresenta il determinante funzionale, rispetto a x, delle due espressioni che essa racchiude.

Per $p = 3$ si ha:

$$F = \frac{(ab)\, a_x^2\, a_v^5\, b_x^7}{(xv)}$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{(ab)\, a_x^2\, b_x^2\,[a_v^5\, b_x^5 - a_x^5\, b_v^5]}{(xv)}\,.$$

e per effetto della equivalenza dei simboli a b si ha finalmente:

$$\text{I.} \qquad F = -\frac{1}{2}(ab)^2 a_x^2 b_x^2 [2 a_v^4 b_x^4 + 2 a_v^3 a_x b_x^3 b_v + a_v^2 a_x^2 b_x^2 b_v^2].$$

L'espressione di K è:

$$K = \left\{(tv)^{p-1} a_x^{p+1} a_v^{p+1} - (tx)^{p-1} a_x^2 a_v^{2p} - (p-1)(xv)(tx)^{p-2} a_x^2 a_t a_v^{2p-1}\right\} : (xv)^2.$$

Per $p = 3$ i due primi termini si riducono a

$$a_x^2 a_v^4 \left\{(tv) a_x - (tx) a_v\right\}\left\{(tv) a_x + (tx) a_v\right\}$$

$$= (xv) a_x^2 a_v^4 a_t \left\{(tv) a_x + (tx) a_v\right\}.$$

Questo termine combinato col 3.° termine di K dà infine, per $p = 3$:

$$\text{II.} \qquad K = a_x^2 a_t^2 a_v^4.$$

L'equazione differenziale per $p = 3$ possiamo dunque scriverla:

$$8\delta\, Th + (\chi a)^2 a_v^4 \sum_{ij} \frac{\partial\, Th}{\partial \chi_i \chi_j} a_i a_j + \sum_{ij} v_1^{6-i-j} v_2^{i+j-2} \frac{\partial^2\, Th}{\partial u_i \partial u_j}$$

$$+ \frac{1}{8}\, Th \cdot \Lambda(\overset{2}{u}) = 0.$$

§ VIII. Covariante L per $p = 3$.

Abbastanza più complicata è l'espressione del covariante L per $p = 3$.

In primo luogo vogliamo esaminare la forma sotto cui deve venire il risultato finale.

La espressione di L data dal W. è:

$$L = 16\,\frac{F(x,\, s;\, v)}{(xs)^2} + \frac{2}{(xv)^2 (sv)^2}(a_x^4 a_v^4 b_s^4 b_v^4 - a_x^4 a_s^4 b_v^8)$$

$$- \frac{8}{(xs)^2 (xv)}(ab) a_x^2 a_v^5 b_x^3 b_s^4 - \frac{8}{(xs)^2 (sv)}(ab) a_s^2 a_v^5 b_s^3 b_x^4,$$

dove $F(x,\, s;\, v)$ è la polare 4.ª di F fra le variabili x ed s.

Questa forma datale dal W. è certamente assai incompleta. La L deve essere una funzione *intera*, e il nostro scopo sarà appunto di darle tale forma.

La espressione di L deve contenere due simboli a, b, e inoltre deve essere di 4.° grado in v e di 2.° in x e s; onde essa dovrà contenere *almeno* quattro determinanti (ab). Ciò nel caso in cui non vi comparisca alcuno dei covarianti identici (xs), (vs), (xv). Nel caso che vi comparisca uno di questi covarianti, vi comparirà corrispondentemente un altro determinante (ab). Allora colle relazioni d'identità:

$$(ab)(xs) = a_x b_s - a_s b_x, \text{ ecc.},$$

si vede che possiamo sempre ridurci al caso in cui vi sono solo 4 determinanti (ab).

Onde possiamo fissare:

$$L = (ab)^4 \Big\{ c\, a_v^4 b_x^2 b_s^2 + c'\, a_v^3 b_v a_x b_x b_s^2 + c''\, a_v^3 b_v a_s b_s b_x^2$$
$$+ c'''\, a_v^2 b_v^2 a_x^2 b_s^2 + c^{\mathrm{IV}}\, a_v^2 b_v^2 a_x a_s b_x b_s \Big\},$$

e per la simmetria di L in x e s possiamo anche *a priori* stabilire che $c' = c''$.

La quistione sarà di ricercare questi coefficienti numerici.

Si ha:

$$(ab)\, a_x^2 a_v^5 b_x^3 b_s^4 = \frac{1}{2}(ab)\, a_x^2 b_x^2 \left[a_v^5 b_x b_s^4 - a_s^4 a_x b_v^5\right] =$$
$$= \frac{1}{2}(ab)\, a_x^2 b_x^2 \Delta_{xs} \left[a_v^5 b_s^5 - a_s^5 b_v^5\right],$$

indicando con Δ_{xs} la polare di polo x e di variabili s.

L'ultima espressione è eguale a

$$\frac{1}{2}(ab)^2 a_x^2 b_x^2 \Delta_{xs}(vs)\left[a_v^4 b_s^4 + a_v^3 a_s b_s^3 b_v + \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{10}(ab)^2 a_x^2 b_x^2 (vs)\left[4 a_v^4 b_x b_s^3 + (a_v^3 a_x b_s^3 b_v + 3\, a_v^3 a_s b_s^2 b_x b_v) + \cdots\right]$$
$$+ \frac{1}{10}(ab)^2 a_x^2 b_x^2 (vx)\left[a_v^4 b_s^4 + \cdots\right]\cdot$$

Analogamente:

$$(ab)\, a_s^2 a_v^5 b_s^3 b_x^4 = \frac{1}{10}(ab)^2 a_s^2 b_s^2 (vx)\left[4\, a_v^4 b_s b_x^3 + \cdots\right]$$
$$+ \frac{1}{10}(ab)^2 a_s^2 b_s^2 (vs)\left[a_v^4 b_x^4 + \cdots\right]\cdot$$

Sostituendo questa espressione nella formola di L risultano termini solo col divisore $(xs)^2$ e termini che possiamo ridurre allo stesso denominatore $(xs)^2(xv)(sv)$.

I primi sono:

$$\frac{1}{(xs)^2}\cdot\frac{4}{5}\cdot(ab)^2\left\{a_x^2 b_x^2\,[a_v^4 b_s^4+\cdots]+a_s^2 b_s^2\,[a_v^4 b_x^4+\cdots]\right\}.$$

Gli altri li possiamo scrivere, tenendo presente la equivalenza dei simboli a, b:

$$\frac{1}{(xs)^2(xv)(sv)}\left\{\frac{32}{5}(ab)^2 b_x^3 b_s^3\,[(vs)^2 a_x^2+(vx)^2 a_s^2]\,a_v^4\right.$$

$$+\frac{8}{5}(ab)^2 b_x^2 b_s^2\,[(vs)^2 a_x^3 b_s+(vx)^2 a_s^3 b_x]\,a_v^3 b_v$$

$$+\frac{24}{5}(ab)^2 a_x b_x^2 a_s b_s^2\,[(vs)^2 a_x b_x+(vx)^2 a_s b_s]\,a_v^3 b_v$$

$$\left.+\frac{16}{5}(ab)^2 a_x a_s b_x^2 b_s^2\,[(vs)^2 a_x^2+(vx)^2 a_s^2]\,a_v^2 b_v^2\right\}.$$

Le espressioni comprese in queste quattro linee possono trasformarsi in modo da aversi sempre termini o col divisore $(xs)^2$ o col divisore (xv) (sv). Le parentesi quadrate della 1.ª, 3.ª, 4.ª linea facilmente si trasformano rispettivamente in

$$(xs)^2 a_v^2+2(xv)(sv)\,a_x a_s$$

$$(xs)^2 a_v b_v+(xv)(sv)(a_x b_s+a_s b_x)$$

$$(xs)^2 a_v^2+2(xv)(sv)\,a_x a_s.$$

La 2.ª linea poi si può trasformare come segue. Collo scambio di a con b nel 2.° termine, e aggiungendo e togliendo opportunamente un certo termine, si ha:

$$\left\{[(vs)^2 b_x^2+(vx)^2 b_s^2]\,a_v^2+(vx)^2\,[a_s^2 b_v^2-a_v^2 b_s^2]\right\}a_x^3 b_s^3 a_v b_v.$$

La prima parte di questa espressione si trasforma in

$$(xs)^2 b_v^2+2(vs)(vx)\,b_x b_s,$$

e la seconda in

$$(vx)(vs)(ba)(vx)\,a_x^3 b_s^3 a_v b_v(a_s b_v+a_v b_s)$$

$$=(vx)(vs)(b_v a_x-b_x a_v)\,a_x^3 b_s^3 a_v b_v(a_s b_v+a_v b_s).$$

Calcoliamo ora il 2.° termine di L. Si ha [a meno del fattore $(ab)^2$ che per brevità tralasceremo]:

$$2a_x^4 b_v^4 [a_v^4 b_s^4 - a_s^4 b_v^4] = 2(ab)(vs) a_x^4 b_v^4 [a_v^3 b_s^3 + \cdots]$$
$$= -(ab)^2(vs)(vx)[a_v^3 b_s^3 + \cdots][2a_x^3 b_v^3 + 2a_x^2 a_v b_v^2 b_x],$$

onde si vede che [poichè a tali termini bisognava supporre il divisore $(vs)^2 \times (vx)^2$] restano solo termini col divisore $(vs)(vx)$.

Con ciò dunque tutta l'espressione L si è venuta a scindere in due specie di termini distinti, cioè termini col divisore $(vs)(vx)$ e termini col divisore $(xs)^2$.

Considereremo separatamente gli uni e gli altri.

I primi sono:

$$(ab)^2 \Big\{ -2[a_x^3 b_v^3 + a_x^2 a_v b_v^2 b_x][a_v^3 b_s^3 + a_v^2 a_s b_s^2 b_v + a_v a_s^2 b_s b_v^2 + a_s^3 b_v^3]$$
$$+ \frac{32}{5} b_x^3 b_s^3 a_v^6 + \frac{8}{5} b_s^3 b_v^3 a_v^3 a_x^3 + \frac{24}{5} b_x^2 b_s^2 b_v^2 a_v^4 a_x a_s$$
$$+ \frac{16}{5} b_x^2 b_s^2 b_v^2 a_v^4 a_x a_s \Big\}.$$

Riducendo e opportunamente raccogliendo i termini, questa espressione si riduce a

$$(ab)^4(vx)(vs)\Big\{\frac{1}{5}[a_v^2 b_x^2 + a_v b_v a_x b_x + a_x^2 b_v^2][a_v^2 b_s^2 + a_v b_v a_s b_s + a_s^2 b_v^2]$$
$$+ 2b_v^3 a_s^2 a_x (b_v a_x + a_v b_x) + a_v^2 b_v^2 a_x b_x a_s b_s$$
$$+ 2a_x^2 b_v^3 a_s (a_v b_s + a_s b_v) + 2a_v^2 b_v^2 a_x b_x a_s b_s \Big\}.$$

Passiamo ora a raccogliere i termini col divisore $(xs)^2$. Essi sono:

$$16F(x,\ s;\ v) + \frac{64}{5}(ab)^2 a_v^4 a_x a_s b_x^3 b_s^3$$
$$- \frac{8}{5}(ab)^2(a_v b_x - a_x b_v)(a_s b_v + a_v b_s) a_x^3 b_s^3 a_v b_v$$
$$+ \frac{24}{5}(ab)^2(a_x b_s + a_s b_x) a_x b_x^2 a_s b_s^2 a_v^3 b_v$$
$$+ \frac{32}{5}(ab)^2 a_x^2 a_s^2 b_x^2 b_s^2 a_v^2 b_v^2 + \frac{16}{5}(ab)^2 a_x^3 b_x b_s^4 a_v^3 b_v$$
$$+ \frac{4}{5}(ab)^2 [2a_v^4 b_s^4 + 2a_v^3 a_s b_s^3 b_v + a_v^2 a_s^2 b_s^2 b_v^2] a_x^2 b_x^2$$
$$+ \frac{4}{5}(ab)^2 [2a_v^4 b_x^4 + 2a_v^3 a_x b_x^3 b_v + a_v^2 a_x^2 b_x^2 b_v^2] a_s^2 b_s^2.$$

Per ridurre questi termini consideriamo separatamente i termini in a_v^4, $a_v^3 b_v$, $a_v^2 b_v^2$.

1. Termini in a_v^4. Riducendoli si ha:

$$-\frac{64}{35}(ab)^4 b_x^2 b_s^2 \cdot (xs)^2.$$

2. Termini in $a_v^3 b_v$. Raccogliendoli e riducendoli si ha:

$$\frac{16}{35}(ab)^4 (b_x a_s + b_s a_x) b_x b_s \cdot (xs)^2.$$

3. Termini in $a_v^2 b_v^2$. Si ha:

$$\frac{24}{35}(ab)^4 [a_x^2 b_s^2 + a_x a_s b_x b_s + a_s^2 b_x^2] \cdot (xs)^2$$

$$-\frac{68}{35}(ab)^4 a_x a_s b_x b_s \cdot (xs)^2.$$

Raccogliendo finalmente tutte queste espressioni con quelle trovate avanti, si ha per L:

$$L = (ab)^4 \left[\frac{18}{7} a_v^4 b_x^2 b_s^2 + \frac{20}{7} a_v^3 b_v a_s b_s b_x^2 + \frac{62}{35} a_v^2 b_v^2 a_s^2 b_x^2 \right.$$
$$\left. + \frac{20}{7} a_v^3 b_v a_x b_x b_s^2 + \frac{68}{35} a_v^2 b_v^2 a_s a_x b_s b_x \right].$$

§ IX. L'espressione di L per un caso particolare.

Per una ragione che svilupperemo in seguito, ci occorre di conoscere l'espressione di L quando la forma fondamentale di 8.° grado diventa il prodotto di due quarte potenze esatte di forme lineari, cioè quando

$$a_x^8 = \varphi_x^4 \psi_x^4,$$

dove φ, ψ non si suppongono coefficienti simbolici ma effettivi.

In tal caso L acquisterà la forma:

$$L = (\varphi\psi)^4 \Big\{ h(\varphi_v^4 \psi_x^2 \psi_s^2 + \psi_v^4 \varphi_x^2 \varphi_s^2) + h'(\varphi_v^3 \psi_v \varphi_x \psi_x \psi_s^2 + \psi_v^3 \varphi_v \psi_x \varphi_x \varphi_s^2 +$$
$$+ \psi_v^3 \varphi_v \psi_s \varphi_s \varphi_x^2 + \varphi_v^3 \psi_v \varphi_s \psi_s \psi_x^2) +$$
$$+ h''(\varphi_v^2 \psi_v^2 \varphi_x^2 \psi_s^2 + \varphi_v^2 \psi_v^2 \psi_x^2 \varphi_s^2) + h''' \varphi_v^2 \psi_v^2 \varphi_x \psi_x \varphi_s \psi_s \Big\}.$$

Il calcolo diretto dell'espressione di L sotto questa forma sarebbe molto lungo. Però coi seguenti artifizii può notevolmente semplificarsi la ricerca dei coefficienti h. Cominciamo col calcolare in funzione di φ, ψ la espressione $(ab)^4 a_v^4 b_x^4$.

Si ha:

$$(ab)^4 a_v^4 b_x^4 = (\varphi\psi)^4 \left\{ \frac{1}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} (\varphi_x^4 \psi_v^4 + \psi_x^4 \varphi_v^4) - \frac{16}{5^2 \cdot 7^2} (\varphi_v \psi_v^3 \varphi_x^3 \psi_x + \psi_v \varphi_v^3 \psi_x^3 \varphi_x) \right.$$
$$\left. + \frac{2 \cdot 3^3}{5^2 \cdot 7^2} \varphi_v^2 \psi_v^2 \varphi_x^2 \psi_x^2 \right\}.$$

Da questo termine possiamo ricavare tutti gli altri che ci occorrono, facendo opportunamente polari al primo e secondo membro.

Ma possiamo procedere anche più semplicemente.

Facciamo in primo luogo $x = s = v$. Allora la L diventa:

$$\left(\frac{18}{7} + \frac{40}{7} + \frac{130}{35}\right)\left(\frac{1}{2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} - \frac{32}{5^2 \cdot 7^2} + \frac{2 \cdot 3^3}{5^2 \cdot 7^2}\right)(\varphi\psi)^4 \varphi_v^4 \psi_v^4,$$

onde:

$$\text{I.} \qquad 2h + 4h' + 2h'' + h''' = \frac{90 \cdot 12}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} = \frac{3^3 \cdot 2}{5 \cdot 7^2}.$$

Con opportune operazioni di polare nella formola ottenuta ultimamente si ricavano le altre formole:

$$(ab)^4 a_v^3 b_v a_x b_x^3 = \frac{(\varphi\psi)^4}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} \left\{ -4(\varphi_x^4 \psi_v^4 + \varphi_v^4 \psi_x^4) + 31(\varphi_x^3 \varphi_v \psi_v^3 \psi_x + \varphi_v^3 \varphi_x \psi_x^3 \psi_v) \right.$$
$$\left. + 36 \varphi_x^2 \varphi_v^2 \psi_x^2 \psi_v^2 \right\}$$

$$(ab)^4 a_v^2 b_v^2 a_x^2 b_x^2 = \frac{(\varphi\psi)^4}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} \left\{ 6(\varphi_x^4 \psi_v^4 + \varphi_v^4 \psi_x^4) + 16(\varphi_x^3 \varphi_v \psi_v^3 \psi_x + \varphi_v^3 \varphi_x \psi_x^3 \psi_v) \right.$$
$$\left. + 46 \varphi_x^2 \varphi_v^2 \psi_x^2 \psi_v^2 \right\}$$

$$(ab)^4 a_v^4 b_v^2 b_x^2 = \frac{(\varphi\psi)^4}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} \left\{ 5(\varphi_v^4 \psi_v^2 \psi_x^2 + \psi_v^4 \varphi_v^2 \varphi_x^2) + 80 \varphi_v^3 \psi_v^3 \varphi_x \psi_x \right\}$$

$$(ab)^4 a_v^3 b_v^3 a_x b_x = \frac{(\varphi\psi)^4}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} \left\{ 30(\varphi_v^4 \psi_v^2 \psi_x^2 + \psi_v^4 \varphi_v^2 \varphi_x^2) + 30 \varphi_v^3 \psi_v^3 \varphi_x \psi_x \right\}.$$

Facciamo ora nell'espressione di L, $x = s$. Allora otteniamo:

$$L = (ab)^4 \left[\frac{18}{7} a_v^4 b_x^4 + \frac{40}{7} a_v^3 b_v a_x b_x^3 + \frac{26}{7} a_v^2 b_v^2 a_x^2 b_x^2 \right].$$

o anche:

$$L = (\varphi\psi)^4 [h(\varphi_v^4 \psi_x^4 + \varphi_x^4 \psi_v^4) + 2h'(\varphi_v^3 \psi_v \varphi_x \psi_v^3 + \psi_v^3 \varphi_v \psi_x \varphi_v^3)$$
$$+ (2h'' + h''')\varphi_v^2 \psi_v^2 \varphi_x^2 \psi_x^2].$$

Il paragone di queste due formole e l'uso delle formole stabilite in avanti, ci dà:

$$\text{II.} \qquad \left\{ \begin{aligned} h &= \frac{1}{2 \cdot 7^2 \cdot 5^2} \\ 2h' &= \frac{3^2 \cdot 2}{5^2 \cdot 7^2} \\ 2h'' + h''' &= \frac{233}{5^2 \cdot 7^2}. \end{aligned} \right.$$

Inoltre facciamo infine in L, $s = v$.

Si ha:

$$L = (ab)^4 \left\{ \frac{36}{5} a_v^4 b_v^2 b_x^2 + \frac{24}{5} a_v^3 b_v^3 a_x b_x \right\},$$

o anche:

$$L = (\varphi\psi)^4 \Big\{ (h + h' + h'')(\varphi_v^4 \psi_v^2 \psi_x^2 + \psi_v^4 \varphi_v^2 \varphi_x^2)$$
$$+ (2h + h''')\varphi_v^3 \psi_v^3 \varphi_x \psi_x \Big\}.$$

E dal paragone si ha:

$$\text{III.} \qquad \left\{ \begin{aligned} h + h' + h'' &= \frac{3^2}{5 \cdot 7^2} \\ 2h' + h''' &= \frac{2^2 \cdot 3^2}{5 \cdot 7^2}. \end{aligned} \right.$$

Le I, II, III si accordano tutte a dare:

$$\begin{aligned} h &= \frac{1}{2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} \\ h' &= \frac{3^2}{5^2 \cdot 7^2} \\ h'' &= \frac{71}{2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} \\ h''' &= \frac{162}{5^2 \cdot 7^2}. \end{aligned}$$

§ X. L'equazione differenziale per le σ ellittiche ricavata da quella generale per le σ iperellittiche data al § V.

Ci pare utile a titolo di verifica dell'equazione data al § V di ricavarne l'equazione differenziale nota a cui soddisfanno le σ ellittiche di Weierstrass.

La equazione di cui si parla è (*):

$$\frac{d^2\sigma}{du^2} + \delta\sigma + \frac{1}{12} g_2 u^2 \sigma = 0,$$

dove:

$$\delta = -12 g_3 \frac{\partial}{\partial g_2} - \frac{2}{3} g_2^2 \frac{\partial}{\partial g_3},$$

e g_2 g_3 sono i noti invarianti della binaria biquadratica, e u ha precisamente lo stesso significato da noi datole precedentemente (**).

Incominciamo col ricercare che cosa diventano per $p=1$ i covarianti F, K, L.

$$F = -\frac{1}{2}(ab)^2 a_x^2 b_x^2 = -\frac{1}{2} H,$$

dove H è l'essiano di f.

In quanto a K, è facile vedere che per $p=1$ esso è zero.

Supponendo la biquadratica f posta sotto la forma canonica:

$$4x_1^3 x_2 - g_2 x_1 x_2^3 - g_3 x_2^4,$$

si trova facilmente che gli invarianti i j della biquadratica nel senso in cui sono definiti nell'Opera di Clebsch (***) sono rispettivamente:

$$i = 2g_2 \qquad j = 6g_3.$$

Il nostro processo δ per il quale ad una serie di coefficienti di f bisogna supporre sostituita una serie di coefficienti del suo essiano H, corrisponde perfettamente $\left(\text{salvo un fattore } -\frac{1}{2}\right)$ al processo δ definito e studiato nell'Opera citata di Clebsch (****).

(*) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, etc., Vol. I, pag. 300.
(**) Halphen. Op. cit., pag. 55.
(***) *Theorie der binären alg. Formen.*
(****) Op. cit., § 41.

Onde profittando dei risultati ivi ottenuti possiamo scrivere:

$$\delta i = -j \qquad \delta j = -\frac{1}{4} i^2,$$

onde la nostra δ è:

$$\delta = -\frac{\partial}{\partial i} j - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial j} i^2$$

$$= -3 \frac{\partial}{\partial g_2} g_3 - \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial g_3} g_2^2.$$

Ci resta a calcolare Λ.

Dobbiamo però premettere un'interessante osservazione.

Mentre in generale L risulta un covariante nelle due variabili x, s, mutando le quali poi opportunamente nei simboli χ si ha Λ che è sempre un'espressione di 2.° grado in u, per $p=1$, invece L risulta di grado zero in x, s. Però Λ deve sempre venire (come si verifica per p qualunque) di 2.° grado nelle u. Quindi nel caso $p=1$ in cui vi è *una sola u* bisogna, per ottenere Λ, moltiplicare L per u^2.

Calcoliamo dunque L.

La formola generale della pag. 288 del lavoro citato di W. ci dà:

$$L = \Big\{ -\frac{4}{3} (xv)^2 (sv)^2 (ab)^2 [a_s^2 b_x^2 + 2 a_x a_s b_x b_s]$$

$$+ 2(xs)^2 (a_x^2 a_v^2 b_s^2 b_v^2 - a_x^2 a_s^2 b_v^4)$$

$$- 4(xv)(sv) [(sv)(ab) a_x^2 a_v b_x b_s^2 + (xv) (ab) a_s^2 a_v b_s b_x^2] \Big\} (xs)^2 (xv)^2 (sv)^2.$$

Con facili trasformazioni il 2.° di questi termini diventa:

$$(xs)^2 (ab)^2 (vs)(xv) [a_x b_v + a_v b_x] [a_v b_s + a_s b_v].$$

Quindi da tutta l'espressione può togliersi un fattore $(vs)(vx)$.

Ciascuno dei termini dell'ultima riga si può trasformare come segue (per es. il primo):

$$-2(ab)(sv) a_x b_x [a_x a_v b_s^2 - b_x b_v a_s^2]$$

$$= -2(ab)(sv) a_x b_x \Delta_{xv} [a_x^2 b_s^2 - a_s^2 b_x^2] \text{ dove } \Delta_{xv} \text{ è la polare fra } x \text{ e } v,$$

$$= -(ab)^2 (sv) a_x b_x [(vs)(a_x b_s + a_s b_x) + (xs)(a_v b_s + a_s b_v)].$$

In tal modo i termini della 3.ª riga di L diventano:

$$2(ab)^2 (vs)^2 a_x^2 b_x b_s - 2(ab)^2 (sv)(xs) a_x b_x a_v b_s$$

$$+ 2(ab)^2 (vx)^2 a_s a_x b_s^2 - 2(ab)^2 (xv)(sx) a_s b_s a_v b_x.$$

Il secondo e quarto si riducono a

$$2(ab)^2(xs)^2 a_v^2 b_x b_s,$$

e il primo e terzo sono:

$$2a_x b_s[(vs)a_x-(vx)a_s][(vs)b_x-(vx)b_s]$$
$$+2a_x b_s(vs)(vx)[a_x b_s+a_s b_x],$$

i quali ultimi uniti con quelli ad essi simili che compariscono nel 1.° rigo di L formano esattamente:

$$\frac{1}{3}(ab)^4(xs)^2(vs)^2(vx).$$

Onde, poichè tutti gli altri termini si distruggono, si ha infine:

$$L=\frac{1}{3}(ab)^4=\frac{1}{3}i=\frac{2}{3}g_2.$$

Raccogliendo questi risultati si vede subito che l'equazione del § V diventa precisamente l'equazione da noi stabilita nel principio di questo paragrafo.

§ XI. Introduzione alla ricerca del 2.° termine dello sviluppo delle σ iperellittiche. Caso delle 28 funzioni dispari

Se $f=a_x^8=\varphi_x^2\psi_x^6$ è la scomposizione in due fattori, una quadratica e una sestica, della forma di 8.° grado, e se gli integrali di 1.ª specie si pongono sotto la forma speciale:

$$u_i=\int_y^x du_i,$$

cioè dipendenti solo da *due* punti x, y della superficie di Riemann, allora la σ dispari corrispondente alla detta scomposizione di f sarà:

$$\sigma=\sqrt{\varphi(x)\varphi(y)}\,\Omega(xy),$$

dove $\Omega(xy)$ è la nota *forma principale* di Klein.

Ponendo:

$$y_1=x_1+\zeta$$
$$y_2=x_2=1,$$

sviluppiamo la σ in serie secondo le potenze di ζ.

La Ω si esprime colla formola:

$$\Omega(xy) = \frac{(xy)\,e^{\frac{1}{2}\overline{Q}(xy)}}{\sqrt[4]{f(x)f(y)}},$$

essendo $\overline{Q}(xy)$ l'integrale *normale* di 3.ª specie introdotto dal Klein.

Si ha (se H è l'essiano di f):

$$e^{\frac{1}{2}\overline{Q}} = 1 + 2\frac{H(x)}{f^2(x)}\zeta^2 + \cdots \text{ (*)}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{f(y)}} = \frac{1}{\sqrt[4]{f(x)}}\left\{1 - \frac{1}{4}\frac{f'(x)}{f(x)}\zeta - \frac{1}{32}\frac{4f''f - 5f'^2}{f^2}\zeta^2 + \cdots\right\}$$

$$\sqrt{\varphi(y)} = \sqrt{\varphi(x)} + \frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\varphi^{\frac{1}{2}}}\zeta + \frac{1}{8}\frac{2\varphi''\varphi - \varphi'^2}{\varphi^{\frac{3}{2}}}\zeta^2 + \cdots,$$

onde, essendo $(xy) = -\zeta$ e mutando poi il segno a tutta l'espressione, il che lo possiamo fare a causa della doppia significazione del radicale, si ha:

$$\sigma = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{f(x)}}\zeta + \left(\frac{1}{2}\frac{\varphi'}{\sqrt{f}} - \frac{1}{4}\frac{\varphi f'}{f^{\frac{3}{2}}}\right)\zeta^2 +$$

$$+ \left[\frac{1}{8}\frac{2\varphi\varphi'' - \varphi'^2}{\varphi\sqrt{f}} - \frac{1}{8}\frac{\varphi' f'}{f^{\frac{3}{2}}} + \left(\frac{2H}{f^2} - \frac{1}{32}\frac{4f''f - 5f'^2}{f^2}\right)\frac{\varphi}{\sqrt{f}}\right]\zeta^3 + \cdots$$

Sviluppiamo ora in serie secondo le potenze di ζ gli integrali di 1.ª specie u.

Si ha:

$$u_1 = \int_y^x \frac{z_1^2(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} \qquad u_2 = \int_y^x \frac{z_1 z_2(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}} \qquad u_3 = \int_y^x \frac{z_2^2(z\,dz)}{\sqrt{f(z)}}.$$

Poniamo $z = x + \zeta$, dove ζ sia la nuova variabile d'integrazione che vada da $\zeta = \zeta$ sino a $\zeta = 0$, giacchè z deve andare da $z = y$ sino a $z = x$.

Facendo questa trasformazione di variabile d'integrazione, sviluppando

(*) Burkhardt, *Beiträge zur Theorie der hyp. Sigmafunct.* Math. Ann., Bd. 32, p. 409. Si noti che nella scrittura della formola riprodotta qui nel testo, vi è in Burkhardt un errore di stampa.

l'integrando in serie secondo le potenze di ζ, e poi integrando, si ottiene:

$$u_1 = \frac{x_1^2}{\sqrt{f(x)}}\zeta + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\frac{x_1^2 f'}{f^{\frac{3}{2}}} + \frac{2x_1}{f^{\frac{1}{2}}}\right]\zeta^2$$

$$+\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{8}\frac{2f''f-3f'^2}{f^2 f^{\frac{1}{2}}}x_1^2 - \frac{f'x_1}{f^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{f^{\frac{1}{2}}}\right]\zeta^3 + \cdots$$

Analoghe espressioni si ottengono per u_2, u_3.

Queste espressioni messe in relazione con quella ottenuta per σ mostrano subito, come del resto già si sa, che il 1.° termine dello sviluppo di σ è $\varphi(u)$ (*).

Ora vogliamo trovare la parte risultante dal 2.° termine di σ quando per le u pongo semplicemente i loro primi termini in ζ.

Tale parte si ottiene sottraendo dalla parte in ζ^3 di σ quello che si ottiene ponendo in $\varphi(u)$, in luogo delle u, i loro termini in ζ^3.

Bisogna cioè togliere:

$$\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{8}\frac{2f''f-3f'^2}{f^2 f^{\frac{1}{2}}}\varphi(x) - \frac{1}{2}\frac{\varphi' f'}{f^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2}\frac{\varphi''}{f^{\frac{1}{2}}}\right),$$

ricordando che:

$$\varphi'(x) = 2(\varphi_1^2 x_1 + \varphi_1\varphi_2).$$

Si ha dunque:

$$\frac{1}{12}\frac{\varphi''}{f^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{8}\frac{\varphi'^2}{\varphi f^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{24}\frac{\varphi' f'}{f^{\frac{3}{2}}} + \frac{2H\varphi}{f^2 f^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{24}\frac{f''\varphi}{f^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{32}\frac{f'^2\varphi}{f^2 f^{\frac{1}{2}}}.$$

Ora la espressione di H mediante le derivate di f è (**):

$$H = a_x^8 b_x^6 b_1^2 - a_x^7 a_1 b_x^7 b_1,$$

onde essendo anche:

$$f'^2 = 64 a_x^7 a_1 b_x^7 b_1,$$

si ha:

$$2H\varphi + \frac{1}{32}f'^2\varphi = 2\varphi a_x^8 b_x^6 b_1^2,$$

cioè è divisibile per f.

L'espressione superiore può dunque scriversi a meno di un divisore $f^{\frac{3}{2}}$, come

(*) Klein, Math. Ann., Bd. 32, pag. 374, — Burkhardt, idem, pag. 442.
(**) Burkhardt, Opera cit., pag. 386.

funzione *intera,* propriamente:

$$\frac{1}{f^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{1}{12}\varphi''f-\frac{1}{8}\varphi'^2\psi+\frac{1}{24}\varphi'f'-\frac{1}{24}f''\varphi+2\varphi\cdot b_x^6 b_1^2\right].$$

Ricordando che $f=\varphi\psi$ e colla notazione simbolica si ha:

$$\frac{1}{4}\left\{\frac{13}{21}\varphi_1^2\varphi'^2_x\psi_x^6-\frac{4}{3}\varphi_x\varphi_1\varphi'_x\varphi'_1\psi_x^6\right.$$
$$\left.+\frac{10}{7}\varphi_x^2\varphi'_x\varphi'_1\psi_x^5\psi_1-\frac{5}{7}\varphi_x^2\varphi'^2_x\psi_x^4\psi_1^2\right\}\frac{1}{f^{\frac{3}{2}}},$$

che trasformata colla formola:

$$\varphi_x\varphi'_1-\varphi'_x\varphi_1=(\varphi\varphi'),$$

(per effetto di $x_2=1$), diventa:

$$\frac{1}{4}\left\{\frac{2}{3}(\varphi\varphi')^2\psi_x^6-\frac{5}{7}(\varphi\psi)^2\varphi'^2_x\psi_x^4\right\}\frac{1}{f^{\frac{3}{2}}}, \qquad (A)$$

con che si vede che il grado in x_1 che prima era apparentemente l'8.°, ora si è ridotto semplicemente al 6.°.

Ripassando ora dalle x alle u, dalla formola (A) dovremmo passare al 2.° termine richiesto di σ.

Le formole colle quali dovremmo operare questo passaggio sono:

$$\frac{x_1^2}{f^{\frac{1}{2}}}\equiv u_1 \qquad \frac{x_1 x_2}{f^{\frac{1}{2}}}\equiv u_2 \qquad \frac{x_2^2}{f^{\frac{1}{2}}}\equiv u_3.$$

Però è facile vedere che, poichè la (A) è una espressione di 6.° grado nelle x, questo passaggio in generale potrà farsi in molti modi; anche che volessimo valerci del teorema che il risultato deve essere una forma invariantiva di φ ψ e della forma:

$$\chi=u_1 z_2^2-2u_2 z_2 z_1+u_3 z_2^2,$$

sempre resterebbe una certa ambiguità, come in seguito svilupperemo più diffusamente.

Capita dunque qui questo fatto nuovo che non accadeva per le funzioni abeliane.

Infatti nella Memoria II con un metodo analogo a quello seguito ora abbiamo potuto univocamente determinare il 2.° termine dello sviluppo di σ (*).

Ci basti intanto per ora d'aver trovato la formola (A); nei paragrafi seguenti giovandoci in una maniera assai singolare dell'equazione differenziale di Wiltheiss completeremo questa ricerca.

§ XII. Caso delle 35 σ iperellittiche pari di 1.ª specie.

Le σ pari sono definite dalla formola:

$$\sigma = [\sqrt{\varphi(x)\psi(y)} + \sqrt{\varphi(y)\psi(x)}]\,\frac{\Omega(xy)}{2(xy)},$$

quando gli integrali di 1.ª specie dipendono al solito solo da due punti x, y della superficie di Riemann. In questa formola φ, ψ sono due forme di 4.° grado il cui prodotto forma f.

Ponendo:

$$y = x + \zeta,$$

si ha:

$$\sqrt{\varphi(x)\psi(y)} + \sqrt{\varphi(y)\psi(x)} = 2\sqrt{\varphi(x)\psi(x)} + \frac{1}{2}\,\frac{\varphi\psi' + \varphi'\psi}{\sqrt{\varphi\psi}}\,\zeta + \\ + \left[\frac{1}{8}\,\frac{\sqrt{\varphi}(2\psi\psi'' - \psi'^2)}{\psi^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{8}\,\frac{\sqrt{\psi}(2\varphi\varphi'' - \varphi'^2)}{\varphi^{\frac{3}{2}}}\right]\zeta^2 + \cdots$$

onde nello sviluppo di σ il coefficiente di ζ^2 è:

$$\frac{1}{16}\,\frac{\varphi^{\frac{1}{2}}(2\psi\psi'' + \psi'^2)}{\sqrt{f}\,\psi^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{16}\,\frac{\psi^{\frac{1}{2}}(2\varphi\varphi'' - \varphi'^2)}{\sqrt{f}\,\varphi^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{16}\,\frac{f'}{f^2}(\varphi\psi' + \psi\varphi') \\ + \frac{1}{f^2}\left[2H - \frac{1}{32}(4ff'' - 5f'^2)\right],$$

ed essendo:

$$H = \frac{1}{8\cdot 7}ff'' - \frac{1}{64}f'^2 \text{ (**)},$$

si ha:

$$2H - \frac{1}{8}ff'' + \frac{5}{32}f'^2 = -\frac{5}{8\cdot 7}ff'' + \frac{1}{8}f'^2.$$

(*) Memoria II, § 1.

(**) Burkhardt, Opera cit., pag. 386.

Inoltre:

$$f\ \ = \varphi\psi$$
$$f'\ = \varphi\psi' + \psi\varphi'$$
$$f'' = \varphi\psi'' + 2\varphi'\psi' + \varphi''\psi,$$

onde, sostituendo e riducendo, si ha come termine in ζ^2 nello sviluppo di σ:

$$\frac{1}{f^2}\cdot\frac{1}{28}\left[\varphi\psi'' + \psi\varphi'' - \frac{3}{2}\varphi'\psi'\right],$$

e, usando le espressioni simboliche:

$$\frac{1}{f^2}\cdot\frac{3}{7}(\varphi\psi)^2\varphi_x^2\psi_x^2. \tag{B}$$

Da questa espressione dovremmo passare al 2.° termine di σ se non avesse luogo anche qui un ostacolo analogo a quello discusso alla fine del paragrafo precedente.

§ XIII. Sopra certi invarianti di tre binarie.

Il 2.° termine dello sviluppo di σ dispari deve essere un invariante simultaneo di

$$\varphi_z^2, \qquad \psi_z^2, \qquad \chi_z^2.$$

che sia di 2.° grado nei coefficienti di φ, di 1.° in quelli di ψ e di 3.° in quelli di χ.

Il 2.° termine di σ pari deve essere invece un invariante simultaneo delle tre binarie:

$$\varphi_z^4, \qquad \psi_z^4, \qquad \chi_z^2,$$

che sia di 1.° grado nei coefficienti di φ e ψ e di 2.° grado nei coefficienti di χ.

Ricerchiamo in questo paragrafo tutti i possibili invarianti *fra loro linearmente indipendenti* delle specie indicate.

In primo punto possiamo per semplicità adoperare in luogo dei coefficienti $\chi\ \chi'\ \chi''$ fra loro equivalenti, altrettante serie di variabili x, y, z che considereremo fra loro equivalenti.

Ciascuna di tali variabili dovendo stare a 2.° grado, in tutto vi compariranno 6 variabili, e intanto il numero delle lettere φ, φ', ψ di cui disponiamo è:

$$2 + 2 + 6 = 10.$$

Onde, ammesso che non vi sieno covarianti identici (xy), (xz), (yz), vi saranno

6 fattori lineari e due determinanti. Il caso poi che vi sieno covarianti identici lo possiamo supporre senz'altro eliminato, perchè allora vi saranno altrettanti determinanti dippiù, e si può trasformare in fattori lineari colle solite formole, il prodotto di un covariante identico per un determinante di coefficienti simbolici.

Ora fra i simboli φ, φ', ψ i determinanti che possiamo supporre, sono:

$$(\varphi\varphi')^2, \qquad (\varphi\varphi')(\varphi\psi), \qquad (\varphi\psi)^2, \qquad (\varphi\psi)(\varphi'\psi).$$

Quindi i soli casi possibili sono:

$$\begin{array}{ll}
(\varphi\varphi')^2\psi_x^2\psi_y^2\psi_z^2 & \\
(\varphi\varphi')(\varphi\psi)\varphi'_x\psi_x\psi_y^2\psi_z^2 & \\
(\varphi\psi)^2\varphi'^2_x\psi_y^2\psi_z^2, & (\varphi\psi)^2\varphi'_x\varphi'_y\psi_x\psi_y\psi_z^2 \\
(\varphi\psi)(\varphi'\psi)\varphi_x\varphi'_x\psi_y^2\psi_z^2, & (\varphi\psi)(\varphi'\psi)\varphi_x\varphi'_y\psi_x\psi_y\psi_z^2.
\end{array}$$

È facile dimostrare che di questi 6, solo tre sono fra loro linearmente indipendenti.

Infatti il 2.° colla formola:

$$(\varphi\psi)\varphi'_x = \text{ecc.}$$

si riduce al 1 °; il 5.° si riduce al 2.° e 3.°, e il 6.° si riduce al 2.° e 4.° colla formola d'identità $(\varphi'\psi)\varphi_x =$ ecc.

Quindi restano solo il 1.°, 3.°, 4.°.

Propriamente, ponendo per le x, y, z le χ, χ', χ'' si hanno i tre soli invarianti:

$$\left.\begin{array}{l}
(\varphi\varphi')^2(\psi\chi)^2(\psi\chi')^2(\psi\chi'')^2 \\
(\psi\varphi')^2(\varphi\chi)^2(\psi\chi')^2(\psi\chi'')^2 \\
(\psi\varphi')^2(\varphi\chi)(\varphi\chi')(\psi\chi)(\psi\chi')(\psi\chi'')^2.
\end{array}\right\} \qquad (A')$$

Considerando invece gli invarianti del secondo caso, si vede che debbono esservi sempre due determinanti simbolici, che quindi non potranno essere altro che $(\varphi\psi)^2$, onde i soli invarianti in questo secondo caso sono due, cioè:

$$\left.\begin{array}{l}
(\varphi\psi)^2(\varphi\chi)^2(\psi\chi')^2 \\
(\varphi\psi)^2(\varphi\chi)(\varphi\chi')(\psi\chi)(\psi\chi').
\end{array}\right\} \qquad (B')$$

Dai risultati di questo paragrafo risulta una prima esplicazione delle cose dette alla fine dei §§ XI e XII.

Giacchè è chiaro che l'espressione (A) del § XI deve potersi ridurre ad una combinazione lineare dei tre invarianti (A'). Però valendosi solo dell'espressione (A) si vede che solo il coefficiente del primo di essi invarianti è determinato e gli altri due rimangono determinati solo nella loro somma.

Analogamente il risultato (B) del § XII determina solo la somma déi due coefficienti numerici che debbono moltiplicarsi per ciascuno degli invarianti (B') per avere il 2.° termine di σ pari.

§ XIV. Trasformazione del processo di Aronhold δ nel campo di razionalità delle σ dispari.

Il processo di Aronhold δ, come abbiamo visto al § V, si compone della somma delle derivate rispetto ai coefficienti della forma fondamentale f, moltiplicate per i coefficienti di un certo covariante F.

Però le funzioni σ non sono funzioni dei coefficienti di f, ma dei coefficienti di certe due forme di grado inferiore, φ, ψ, il cui prodotto forma f.

Ci sarà necessario quindi, prima di tutto, di trasformare il detto processo δ in modo che vi compariscano le derivate rispetto ai coefficienti delle due forme φ, ψ, che nel caso delle σ dispari sono l'una di 2.° e l'altra di 6.° grado.

Ponendo:

$$\delta = \sum \frac{\partial}{\partial f} F = \sum \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi + \sum \frac{\partial}{\partial \psi} \Psi,$$

i coefficienti Φ, Ψ formano nel complesso due certi covarianti che chiameremo Φ, Ψ, e che sono stati trovati sotto *una forma non definitiva* dal Wiltheiss (*).

La forma data loro dal W. è propriamente:

$$\Psi = 3\left\{8(a_x^3 a_v^5,\ \psi_x^6) + \frac{1}{3}\psi_x^6(\psi\varphi)\left[5\psi_v^4\varphi_v\psi_x + \psi_v^5\varphi_x\right]\right\} : 32(xv)$$

$$\Phi = \left\{8(a_x^3 a_v^5,\ \varphi_x^2) - \varphi_x^2(\psi\varphi)\left[5\psi^4\varphi_v\psi_x + \psi_v^5\varphi_x\right]\right\} : 32(xv).$$

Noi trasformeremo queste espressioni in modo da farvi scomparire il divisore (xv), giacchè esse in fondo sono *funzioni intere.*

Cominciamo dall'espressione di Φ.

(*) Opera cit., pag. 290.

Si ha, riducendola tutta in funzione di φ, ψ,

$$\Phi = \frac{1}{32(xv)}\left\{\frac{1}{6\cdot 7}\left[120(\psi\varphi)\psi_x^2\psi_v^3\varphi_v'^2 + 120(\psi\varphi)\psi_v^4\psi_x\varphi_v'\varphi_x' \right.\right.$$
$$\left. + 60(\varphi'\varphi)\psi_x^2\psi_v^4\varphi_v' + 22(\psi\varphi)\varphi_x'^2\psi_v^5\right]\varphi_x$$
$$\left. - (\psi\varphi)\left[5\psi_v^4\varphi_v\psi_x + \psi_v^5\varphi_x\right]\varphi_x'^2\right\}.$$

Il termine in $(\varphi'\varphi)$, collo scambio dei simboli equivalenti è eguale a

$$\frac{5}{7}(\varphi\varphi')^2(vx)\psi_x^2\psi_v^4.$$

Gli altri termini possono scriversi:

$$(\psi\varphi)\psi_v^3\left\{\frac{20}{7}\psi_x^2\varphi_v'^2\varphi_x + \frac{20}{7}\psi_v^2\varphi_x'^2\varphi_x - \frac{40}{7}\psi_x\psi_v\varphi_x'\varphi_v'\varphi_x\right.$$
$$\left. - \frac{25}{7}\psi_v^2\varphi_x\varphi_x'^2 + \frac{60}{7}\psi_v\psi_x\varphi_v'\varphi_x'\varphi_x - 5\psi_v\psi_x\varphi_v\varphi_x'^2\right\}.$$

Gli ultimi tre termini possono scriversi:

$$\frac{25}{7}\psi_v\varphi_x\varphi_x'\left[\psi_x\varphi_v' - \psi_v\varphi_x'\right]$$
$$+ 5\psi_v\psi_x\varphi_x'\left[\varphi_v'\varphi_x - \varphi_x'\varphi_v\right],$$

onde infine, con altre facili riduzioni, possiamo scrivere:

$$\Phi = \frac{1}{32\cdot 7}\left\{-\frac{45}{2}(\varphi'\varphi)^2\psi_x^2\psi_v^4 + 20(\psi\varphi)(\psi\varphi')\psi_v^3\psi_x\varphi_x\varphi_v'\right.$$
$$\left. + 5(\psi\varphi)(\psi\varphi')\psi_v^4\varphi_x\varphi_x'\right\}.$$

Passiamo ora al calcolo di Ψ.

Esso è:

$$\Psi = \frac{3}{32(xv)}\left\{\frac{1}{7\cdot 6}\left[120(\psi'\psi)\psi_x'^2\psi_v'^3\varphi_v^2 + 120(\psi'\psi)\psi_v'^4\psi_x'\varphi_x\varphi_v\right.\right.$$
$$\left. + 60(\varphi\psi)\psi_x'^2\psi_v'^4\varphi_v + 24(\varphi\psi)\varphi_x\psi_v'^5\psi_x' + 12(\psi'\psi)\psi_v'^5\varphi_x^2\right]\psi_x^5$$
$$\left. + \frac{1}{3}\left[5\psi_v^4\psi_x\varphi_v + \psi_v^5\varphi_x\right]\psi_x'^6(\psi\varphi)\right\}.$$

Il primo, secondo e quinto termine sono ciascuno da sè divisibili per (xv). Infatti essi possono scriversi rispettivamente:

$$\begin{aligned}
&\frac{20}{7}(\psi'\psi)\psi_x^2\psi'^2_x\varphi_v^2\,[\psi'^3_v\psi_x^3-\psi'^3_x\psi_v^3]\\
+&\frac{20}{7}(\psi'\psi)\psi'_x\psi_x\varphi_x\varphi_v\,[\psi'^4_v\psi_x^4-\psi'^4_x\psi_v^4]\\
+&\frac{2}{7}(\psi'\psi)\varphi_x^2\qquad\qquad[\psi'^5_v\psi_x^5-\psi'^5_x\psi_v^5].
\end{aligned}$$

e le quantità in parentesi sono tutte divisibili per

$$\psi'_v\psi_x-\psi'_x\psi_v=(\psi'\psi)(vx).$$

Inoltre gli altri termini possono scriversi, aggiungendo e togliendo opportunamente certi termini:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{7\cdot 6}(\varphi\psi)\Big\{&60\,\psi'^2_x\psi_x\varphi_v\,[\psi'^4_v\psi_x^4-\psi'^4_x\psi_v^4]\\
&+24\,\psi'_x\varphi_x\quad[\psi'^5_v\psi_x^5-\psi'^5_x\psi_v^5]\\
&+10\,\psi'^6_x\psi_v^4\quad[\psi_v\varphi_x-\psi_x\varphi_v]\Big\},
\end{aligned}$$

e quindi anche questi termini sono divisibili per (vx). Onde infine l'espressione ridotta di Ψ è la seguente:

$$\begin{aligned}
\Psi=\frac{1}{7\cdot 32}\Big\{(\psi'\psi)^2\,[&-60\,\psi_x^2\psi'^2_x\varphi_v^2(\psi'^2_v\psi_x^2+\psi'_v\psi'_x\psi_x\psi_v+\psi'^2_x\psi_v^2)\\
&+75\,\psi'_x\psi_x\varphi_x\varphi_v(\psi'^3_v\psi_x^3+\psi'^2_v\psi'_x\psi_x^2\psi_v+\psi'_v\psi'^2_x\psi_x\psi_v^2+\psi'^3_x\psi_v^3)\\
&-12\,\varphi_x^2\qquad(\psi'^4_v\psi_x^4+\cdots\cdots \text{ ecc. ecc. } \ldots\ldots\ldots)]\\
+\,5(\varphi\psi)^2\psi'^6_x\psi_v^4.&
\end{aligned}$$

§ XV. Determinazione di $\delta s=\delta\sqrt[8]{D_\varphi D_\psi}$ pel caso delle funzioni dispari.

Abbiamo già detto in un altro paragrafo che s è la irrazionalità colla quale la funzione Th si differenzia dalla funzione σ, propriamente $Th=s\cdot\sigma$ e

$$s=\sqrt[8]{D_\varphi D_\psi},$$

dove con D_φ, D_ψ sono indicati rispettivamente i discriminanti di φ e ψ.

Ora ci occorre di determinare δs e per far questo potremmo procedere col metodo che si presenta più naturale, giacchè ora conosciamo (dal paragrafo precedente) la trasformazione del processo δ.

Però il metodo naturale in questo caso sarebbe molto lungo e faticoso, e noi quindi useremo un artifizio che ci farà assai semplicemente giungere alla determinazione richiesta.

Incominciamo coll'osservare che il discriminante di tutta la forma di 8.° grado, può scriversi:

$$D_f = D_\varphi D_\psi D_{\varphi\psi}^2.$$

avendo con $D_{\varphi\psi}$ indicata la risultante di φ, ψ.

Ci ricordiamo inoltre che il processo δ è caratterizzato dal fatto che applicato su D_f dà per risultato zero (*).

Applicando quindi il δ alla formola precedente e poi dividendo per D_f si ha:

$$\frac{\delta D_\varphi}{D_\varphi} + \frac{\delta D_\psi}{D_\psi} + 2\frac{\delta D_{\varphi\psi}}{D_{\varphi\psi}} = 0,$$

e poichè:

$$\frac{\delta s}{s} = \frac{1}{8}\left(\frac{\delta D_\varphi}{D_\varphi} + \frac{\delta D_\psi}{D_\psi}\right),$$

si ha:

$$\frac{\delta s}{s} = -\frac{1}{4}\,\frac{\delta D_{\varphi\psi}}{D_{\varphi\psi}}.$$

La quistione quindi si riduce a calcolare il secondo membro di questa espressione, la quale sarebbe già da sè, più facile a calcolarsi che non $\frac{\delta D_\psi}{D_\psi}$; ma in ogni modo noi non faremo neanche direttamente tale determinazione, ma ci avvarremo di un artifizio.

Incominciamo col fissare che $\frac{\delta s}{s}$ deve risultare una funzione intera; ciò risulta, per effetto di certe considerazioni che svilupperemo nei paragrafi seguenti (vedi § XVI), dalla nota proprietà delle funzioni σ di essere funzioni *intere* dei coefficienti di φ, ψ (**).

Ora per effetto di facili considerazioni sui gradi in φ e ψ di $D_{\varphi\psi}$ e dei

(*) Wiltheiss, Math. Ann., Bd. 33, pag. 287.

(**) Wiltheiss, *Ueber die Potenzreihen der hyper. Thetafunctionen*. Math. Ann., Bd. 31. — Burkhardt, Op. cit., Math. Ann., Bd. 32, pag. 435.

covarianti del processo δ, risulta che $\frac{\delta D_{\varphi\psi}}{D_{\varphi\psi}}$ sarà di 1.° grado nei coefficienti di φ e di 1.° grado nei coefficienti di ψ e inoltre di 4.° grado nelle variabili v.

Onde non potrà essere altro che:

$$c \cdot (\varphi\psi)^2 \psi_v^4,$$

dove c è una costante da determinare.

Supponiamo la quadratica φ scissa nei due fattori lineari $\varphi_x^2 = p_x \cdot q_x$. Allora la risultante possiamo scriverla:

$$D_{\varphi\psi} = (p\psi)^6 (q\psi)^6.$$

Per potere applicare il δ a questa formola, dobbiamo trasformarlo in modo da farvi comparire, anzichè le derivate rispetto ai coefficienti φ, quelle rispetto ai coefficienti p, q. Cioè in modo che sia:

$$\sum \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi = \sum \frac{\partial}{\partial p} P + \sum \frac{\partial}{\partial q} Q,$$

dove P Q sono da determinarsi.

Al solito essi soddisfanno a

$$\Phi = p\,Q + q\,P,$$

e basterà determinare in qualunque modo due covarianti P, Q, purchè soddisfacenti a quest'unica equazione. Ciò risulta da ragionamenti analoghi a quelli altrove sviluppati (*).

Possiamo allora porre:

$$P = \frac{1}{32 \cdot 7} \left\{ \frac{65}{4} (\psi p)^2 \psi_v^3 \psi_x q_v - \frac{25}{4} (\psi q)(\psi p) \psi_v^3 \psi_x p_v \right.$$
$$\left. + \frac{5}{4} (\psi p)^2 \psi_v^4 q_x \quad + \frac{5}{4} (\psi p)(\psi q) \psi_v^4 p_x \right\}$$

$$Q = \frac{1}{32 \cdot 7} \left\{ \frac{65}{4} (\psi q)^2 \psi_v^3 \psi_x p_v - \frac{25}{4} (\psi q)(\psi p) \psi_v^3 \psi_x q_v \right.$$
$$\left. + \frac{5}{4} (\psi q)^2 \psi_v^4 p_x \quad + \frac{5}{4} (\psi p)(\psi q) \psi_v^4 q_x \right\},$$

dove, fra le infinite coppie che potevamo scegliere per espressioni di P, Q,

(*) Vedi Memoria II, § 15.

abbiamo specialmente scelta quella in cui Q si ricava da P collo scambio di p in q.

Intanto:

$$\delta D_{\varphi\psi} = 6(\psi p)^5(\psi P)(\psi' q)^6 + 6(\psi' q)^5(\psi' Q)(\psi p)^6 + (\Psi p)^6(\psi q)^6 + (\psi p)^6(\Psi q)^6,$$

che per $p = q$ cioè, pel caso in cui φ diventi un quadrato, diventa (poichè allora $P = Q$)

$$(\delta D_{\varphi\psi})_{p=q} = 12(\psi p)^5(\psi P)(\psi' p)^6 + 2(\Psi p)^6(\psi p)^6.$$

Intanto per $p = q$ si ha:

$$P = Q = \frac{1}{32 \cdot 7}\left\{10(\psi p)^2 \psi_v \psi_x p_v + \frac{5}{2}(\psi p)^2 \psi_v^4 p_x\right\},$$

onde:

$$(\delta D_{\varphi\psi})_{p=q} = \frac{3}{7 \cdot 8}(\psi p)^5(\psi' p)^5\left\{10(\psi'' p)^2(\psi\psi'')\psi''^3_v p_v + \frac{5}{2}(\psi'' p)^2(\psi p)\psi''^4_v\right\} + 2(\Psi p)^6(\psi p)^6.$$

Facciamo diventare ora anche ψ una sesta potenza esatta. Ciò equivale a supporre come *effettivi* tutti i simboli ψ che entrano nelle nostre formole.

Intanto dalle formole del paragrafo precedente risulta allora:

$$\Psi = \frac{5}{7 \cdot 32}(\varphi\psi)^2 \psi_v^4 \psi_x^6,$$

onde si ha:

$$(\delta D_{\varphi\psi}) = \frac{5}{28}(\psi p)^{14} \psi_v^4,$$

ma per $p = q$ e per ψ *effettivo* si ha:

$$D_{\varphi\psi} = (\psi p)^{12},$$

onde:

$$\frac{(\delta D_{\varphi\psi})}{D_{\varphi\psi}} = \frac{5}{28}(\psi p)^2 \psi_v^4.$$

Il coefficiente c che era ignoto sul principio di questo paragrafo, è dunque $\frac{5}{28}$, onde infine:

$$\frac{\delta s}{s} = -\frac{5}{4 \cdot 28}(\varphi\psi)^2 \psi_v^4.$$

§ XVI. Formole di ricorrenza per le σ iperellittiche dispari.

Poniamo la Th dispari sotto la forma:

$$Th = s(N_1 + N_3 + \cdots).$$

Sostituendo allora tale espressione di Th nell'equazione differenziale del § VII e eguagliando a zero le parti che sono dello stesso grado in $u_1\, u_2\, u_3$, restando le v arbitrarie, si hanno le equazioni:

$$8\delta(sN_1) + s(\chi a)^2 a_v^4 \sum \frac{\partial N_1}{\partial \chi_i \chi_j} a_i a_j + s \sum v_1^{6-\alpha-\beta} v_2^{\alpha+\beta-2} \frac{\partial^2 N_3}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = 0 \text{ (*)} \quad (A)$$

$$\left.\begin{aligned} 8\delta(sN_{2\lambda-1}) + s(\chi a)^2 a_v^4 \sum \frac{\partial N_{2\lambda-1}}{\partial \chi_i \chi_j} a_i a_j + s \sum v_1^{6-\alpha-\beta} v_2^{\alpha+\beta-2} \frac{\partial^2 N_{2\lambda+1}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} \\ + \frac{1}{8} s N_{2\lambda-3} \Lambda = 0. \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Prima di tutto calcoliamo in funzione dei coefficienti di φ e ψ la espressione:

$$(\chi a)^2 a_v^4 \sum \frac{\partial N_1}{\partial \chi_i \chi_j} a_i a_j = (\chi a)^2 (\varphi a)^2 a_v^4,$$

essendo $N_1 = (\varphi\chi)^2$ (**).

Si ha:

$$\begin{aligned}(\chi a)^2 (\varphi a)^2 a_v^4 = \frac{1}{28}\Big\{ & (\chi\varphi)^2(\varphi'\psi)^2\psi_v^4 + 4(\chi\varphi)(\chi\psi)(\varphi'\varphi)(\varphi'\psi)\psi_v^4 \\ & + 8(\chi\varphi)(\chi\psi)(\varphi'\psi)^2\psi_v^3\varphi_v + (\chi\psi)^2(\varphi'\varphi)^2\psi_v^4 \\ & + 8(\chi\psi)^2(\varphi'\psi)(\varphi'\varphi)\psi_v^3\varphi_v + 6(\chi\psi)^2(\varphi'\psi)^2\psi_v^2\varphi_v^2\Big\}.\end{aligned}$$

Ora il 2.° secondo termine colla identità:

$$(\chi\varphi)(\varphi'\psi) = (\chi\psi)(\varphi'\varphi) + (\chi\varphi')(\varphi\psi),$$

si riduce ad un termine eguale a sè stesso, ma col segno contrario, e ad un termine simile al 4.°.

Inoltre il 5.° termine con

$$(\varphi'\psi)\varphi_v = \text{ecc.},$$

(*) Conoscendo le proprietè di σ, e quindi dei termini N, da questa equazione si ricava facilmente ciò che abbiamo asserito al § XV, che cioè $\frac{\delta s}{s}$ è funzione intera.

(**) Burkhardt, Math. Ann., Bd. 32, pag. 412.

si riduce ad un termine eguale alla metà del 4.°; onde infine si ha:

$$(\chi a)^2 (\varphi a)^2 a_v^4 = \frac{1}{28}\Big\{(\chi\varphi)^2(\varphi'\psi)^2\psi_v^4 + 7(\chi\psi)^2(\varphi'\varphi)^2\psi_v^4 \\ + 8(\chi\varphi)(\chi\psi)(\varphi'\psi)^2\psi_v^3\varphi_v + 6(\chi\psi)^2(\varphi'\psi)^2\psi_v^2\varphi_v^2\Big\}\cdot$$

Vediamo ora che cosa è δN_1. Basta applicare l'espressione di Φ ottenuta al § XIV.

Si ha in primo luogo:

$$\delta N_1 = \frac{1}{7\cdot 32}\Big\{-\frac{45}{2}(\varphi\varphi')^2(\psi\chi)^2\psi_v^4 + 20(\psi\varphi)(\psi\varphi')(\psi\chi)(\varphi\chi)\psi_v^3\varphi'_v \\ + 5(\psi\varphi)(\psi\varphi')(\varphi\chi)(\varphi'\chi)\psi_v^4\Big\}\cdot$$

Il 2.° di questi termini si può facilmente ridurre a

$$20(\psi\varphi')^2(\psi\chi)(\varphi\chi)\psi_v^3\varphi_v + 20(\psi\varphi')^2(\varphi'\varphi)(\psi\chi)(\varphi\chi)\psi_v^4,$$

di cui il 2.° termine si riduce a

$$-10(\varphi\varphi')^2(\psi\chi)^2\psi_v^4.$$

Inoltre il 3.° termine dell'espressione precedente di δN_1 si riduce a

$$5(\psi\varphi')(\varphi\chi)\psi_v^4[(\psi\chi)(\varphi'\varphi) + (\psi\varphi')(\varphi\chi)] \\ = -\frac{5}{2}(\varphi'\varphi)^2(\psi\chi)^2\psi_v^4 + 5(\psi\varphi')^2(\varphi\chi)^2\psi_v^4,$$

onde infine:

$$\delta N_1 = \frac{1}{7\cdot 32}\Big\{-35(\varphi'\varphi)^2(\psi\chi)^2\psi_v^4 + 5(\psi\varphi)^2(\varphi\chi)^2\psi_v^4 \\ + 20(\psi\varphi')^2(\psi\chi)(\varphi\chi)\psi_v^3\varphi_v\Big\}\cdot$$

Raccogliendo tutti questi risultati si ha dalla prima della equazione (A) stabilite al principio di questo paragrafo, la formola:

$$\left.\begin{aligned} s\sum v_1^{6-\alpha-\beta} v_2^{\alpha+\beta-2}\frac{\partial^2 N_3}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = -\frac{s}{28}\Big\{&-28(\varphi\varphi')^2(\psi\chi)^2\psi_v^4 + 6(\psi\varphi')^2(\varphi\chi)^2\psi_v^4 \\ &+ 28(\psi\varphi')^2(\psi\chi)(\varphi\chi)\psi_v^3\varphi_v + 6(\chi\psi)^2(\varphi'\psi)^2\psi_v^2\varphi_v^2\Big\} \\ -8N_1\delta s.& \end{aligned}\right\} \quad (A')$$

§ XVII. Determinazione di N_3.

Colla equazione (A') ottenuta alla fine del paragrafo precedente possiamo finalmente completare la ricerca del 2.° termine della σ iperellittica dispari a tre argomenti, incominciata al § XI. Però ci pare utile di mostrare qui, anche a titolo di verifica dei risultati ottenuti avanti, come da questa unica equazione (A') colla conoscenza delle proprietà fondamentali delle σ, si può ricavare il δs (che noi già conosciamo dal § XV) e l'N_3.

Incominciamo coll'osservare che le v sono rimaste finora completamente arbitrarie; esse compariscono al quarto grado, quindi compariscono solo cinque combinazioni di esse, cioè:

$$v_1^4, \quad v_1^3 v_2, \quad v_1^2 v_2^2, \quad v_1 v_2^3, \quad v_2^4.$$

Possiamo naturalmente porre eguali a cinque quantità a nostro arbitrio queste cinque, perchè l'equazione differenziale di Wiltheiss non rappresenta in fondo che *cinque* equazioni riunite fra loro in quella maniera particolare per mezzo delle v, per dar loro una forma invariantiva e simmetrica.

Nel caso abeliano noi abbiamo potuto disporre (*) [e anche nel caso iperellittico $p=2$ il Wiltheiss ha potuto fare lo stesso (**)] delle v in modo da far riuscire precisamente eguale a $N_{2\lambda+1}$ (a causa del teorema di Eulero) la parte dell'equazione differenziale contenente le seconde derivate di $N_{2\lambda+1}$. Ciò si otteneva supponendo le quantità arbitrarie v eguali agli integrali di prima specie u.

Ma nel caso presente non possiamo fare lo stesso, perchè le combinazioni con ripetizione a due a due delle u_1 u_2 u_3 sono sei e non cinque.

Però noi possiamo usare un artifizio diverso.

Ed invero osserviamo che nell'espressione:

$$v_1^{6-\alpha-\beta} v_2^{\alpha+\beta-2},$$

sebbene α, β vi compariscono come una sola variabile espressa dalla loro somma, pure considerando α, β, come variabili indipendenti che abbiano i valori 1, 2, 3, si hanno sei combinazioni. Noi possiamo ciascuna di tali combinazioni farla eguale a

$$du_\alpha \, du_\beta.$$

(*) Memoria II, § II.

(**) *Ueber eine partielle Differentialgleich. der Thetafunct. zweier Arg. u. über die Reih. derselben.* Math. Ann., Bd. 29.

La sola difficoltà che s'incontrerebbe con questa speciale determinazione delle v, è che la stessa espressione $v_1^2 v_2^2$ può risultare in due modi diversi, cioè:

$$\text{o per} \quad \alpha = 1 \qquad \beta = 3,$$

$$\text{ovvero per} \quad \alpha = 2 \qquad \beta = 2,$$

e quindi quella stessa espressione viene una volta posta eguale a $du_1 du_3$ e un'altra volta a du_2^2.

Però queste due quantità sono fra loro effettivamente eguali. Perchè essendo (§ V):

$$du_1 : du_2 : du_3 = x_1^2 : x_1 x_2 : x_2^2,$$

si ha appunto:

$$du_1 du_3 = du_2^2.$$

Con questa determinazione delle v l'espressione:

$$\sum v_1^{6-\alpha-\beta} v_2^{\alpha+\beta-2} \frac{\partial^2 N_3}{\partial u_\alpha \partial u_\beta},$$

diventa semplicemente il *differenziale secondo* di N_3, cioè $d^2 N_3$.

Quindi conoscendo δs, e facendo *opportunamente* per le v le sostituzioni indicate, il secondo membro di (A') dovrà risultare un *differenziale secondo esatto*.

La sua integrazione ci dà N_3.

Con un metodo precisamente analogo si farebbe l'applicazione delle formole di ricorrenza (B) per trovare i termini seguenti dello sviluppo di σ.

È questa dunque una differenza sostanziale fra questo caso iperellittico $p = 3$ e quello che si presentava per il caso abeliano $p = 3$, e iperellittico $p = 2$. Ivi potevano aversi delle formole di ricorrenza di *applicabilità immediata;* qui invece ogni volta che si dovessero applicare per trovare un termine seguente dello sviluppo, occorrerebbe adoperare un procedimento analogo a quello che quì adoperiamo per trovare N_3.

Ci pare utile mostrare qui con quanta facilità si può ottenere l'espressione di δs, supposto che non ancora si conosca.

Sappiamo però in ogni modo che esso deve essere della forma:

$$\frac{\delta s}{s} = c(\varphi\psi)^2 \psi_v^4.$$

Ora sostituendo questo valore in (A') e giovandoci poi delle condizioni di integrabilità e propriamente eguagliando fra loro la derivata rispetto a u_2

del coefficiente di du_1^2 e la derivata rispetto a u_1 di quello di $du_1\,du_2$, si ha la relazione (scrivendola precisamente come risulta, senza riduzioni):

$$\begin{aligned}
&-28\cdot 2(\varphi\varphi')^2\psi_1^5\psi_2+2(6+8\cdot 28c)(\psi\varphi')^2\varphi_1\varphi_2\psi_1^4\\
&+28(\psi\varphi')^2\psi_1^3\varphi_1(\psi_1\varphi_2+\psi_2\varphi_1)+12(\varphi'\psi)^2\psi_1^3\psi_2\varphi_1^2=\\
=&-28\cdot 2(\varphi\varphi')^2\psi_1^5\psi_2+2(6+8\cdot 28c)(\psi\varphi')^2\psi_1^3\psi_2\varphi_1^2\\
&+14(\psi\varphi')^2\psi^3\varphi_1(\psi_1\varphi_2+3\psi_2\varphi_1)+6(\psi\varphi')^2\psi_1^3\varphi_1(\psi_1\varphi_2+\psi_2\varphi_1),
\end{aligned}$$

da cui risulta senz'altro:

$$c=-\frac{5}{4\cdot 28},$$

come già sappiamo (§ XV).

L'equazione (A') diventa allora:

$$\left.\begin{aligned}
d^2N_3=\frac{1}{7\cdot 4}\Big\{&28(\varphi\varphi')^2(\psi\chi)^2\psi_v^4+4(\psi\varphi')^2(\varphi\chi)^2\psi_v^4\\
&-28(\psi\varphi')^2(\psi\chi)(\varphi\chi)\psi_v^3\varphi_v-6(\psi\chi)^2(\psi\varphi')^2\psi_v^2\varphi_v^2\Big\},
\end{aligned}\right\}\qquad (A'')$$

dove però al secondo membro si intenda necessariamente poste *opportunamente* in luogo della v le espressioni di cui si è parlato.

Il risultato dell'integrazione dovrà essere (come sappiamo dalla teoria generale delle funzioni σ) omogeneo intero nelle u, di 3.° ordine e inoltre deve essere di proprietà invariantive.

Giovandoci dei risultati ottenuti al § XIII poniamo:

$$\begin{aligned}
N_3=\frac{1}{7\cdot 6\cdot 4}\Big\{&c'\ (\varphi\varphi')^2(\psi\chi)^2(\psi\chi')^2(\psi\chi'')^2\\
&+c''\ (\psi\varphi')^2(\varphi\chi)^2(\psi\chi')^2(\psi\chi'')^2\\
&+c'''(\psi\varphi')^2(\varphi\chi)(\varphi\chi')(\psi\chi)(\psi\chi')(\psi\chi'')^2\Big\},
\end{aligned}$$

dove giovandoci della (A'') è facile ottenere:

$$\begin{aligned}
c'&=+28\\
c''&=+12\\
c'''&=-42.
\end{aligned}$$

Se in luogo delle u poniamo i primi termini del loro sviluppo in serie secondo le potenze di ζ (vedi § XI), otteniamo un risultato che s'accorda completamente con quello ottenuto per via affatto diversa nel § XI.

§ XVIII. Il processo δ nel campo di razionalità delle 35 σ pari di 1.ª specie.

Supponiamo $f_8 = \varphi_4 \psi_4$ e sia il campo dei coefficienti delle quartiche φ_4, ψ_4, quello di una delle 35 σ pari. Il processo δ trasformato nel campo di tali coefficienti diventa:

$$\delta = \sum \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi + \sum \frac{\partial}{\partial \psi} \Psi,$$

dove Φ Ψ sono due covarianti la cui forma è trovata dal Wiltheiss nel luogo citato (*), ed è propriamente:

$$\Phi = \left\{ 4 (a_x^3 a_v^5, \varphi'^4_x) + \varphi_x^4 (\varphi' \psi) [\varphi'^3_v \psi_v^2 \psi_x + \psi_v^3 \varphi'^2_v \varphi'_x] \right\} : 8 (xv),$$

e la Ψ si ricava evidentemente dalla Φ collo scambio di φ in ψ.

Tale forma data alle Φ e Ψ dal W. non si può dire che è forma definitiva, perchè le Φ e Ψ sono funzioni intere e qui compariscono come frazionarie. Con una prima calcolazione analoga a quella fatta nel § XVI per le σ dispari, si ottiene:

$$\begin{aligned}
\Phi = \frac{1}{8} \Bigg\{ \frac{2}{7} (\varphi\varphi')^2 \big[&- \varphi_x^2 \varphi'^2_x \psi_v^4 \\
&- 4 \varphi_x \varphi'_x \psi_x \psi_v^3 (\varphi_x \varphi'_v + \varphi'_x \varphi_v) \\
&- 2 \psi_x^2 \psi_v^2 (\varphi_x^2 \varphi'^2_v + \varphi_x \varphi_v \varphi'_x \varphi'_v + \varphi_v^2 \varphi'^2_x) \big] \\
- (\psi\varphi')(\varphi\varphi') \big[& \psi_v^3 \varphi_x^2 \varphi'_x (\varphi_v \varphi'_x + \varphi_x \varphi'_v) \\
&+ \psi_v^2 \psi_x \varphi_x (\varphi_v^2 \varphi'^2_x + \varphi_v \varphi_x \varphi'_v \varphi'_x + \varphi_x^2 \varphi'^2_v) \big] \\
+ \frac{2}{7} (\psi\varphi')(\psi\varphi) \Big[& \frac{1}{2} \varphi'^3_x \varphi_x \psi_v^2 \varphi_v^2 \\
&+ \varphi'^3_x \varphi_v^2 \psi_v (\psi_x \varphi_v + \psi_v \varphi_x) \Big] \Bigg\}.
\end{aligned}$$

I termini in $(\psi\varphi')(\varphi\varphi')$ colle regole del calcolo simbolico si riducono facilmente a quelli in $(\varphi\varphi')^2$.

(*) Math. Ann., Bd. 33, pag. 290.

Si ha infine per risultato finale:

$$\Phi = \frac{1}{8}\Big\{(\varphi\varphi')^2\Big[-\frac{2}{7}\psi_v^4\varphi_x^2\varphi_x'^2 - \frac{23}{7}\psi_x^3\psi_x\varphi_x\varphi_v\varphi_x'^2 - \frac{15}{7}\psi_v^2\psi_x^2\varphi_v^2\varphi_x'^2$$

$$- \frac{15}{14}\psi_v^2\psi_x^2\varphi_v\varphi_x\varphi'_v\varphi'_x\Big]$$

$$+ \frac{2}{7}(\psi\varphi)(\psi\varphi')\Big[\frac{3}{2}\psi_v^2\varphi_v^2\varphi_x\varphi_x'^3 + \psi_v\psi_x\varphi_v^3\varphi_x'^3\Big]\Big\}.$$

Determiniamo ora il valore di $\frac{\delta s}{s}$ per il caso pari. Si sa che in tal caso l'irrazionale s è la radice ottava del prodotto dei due discriminanti di φ e ψ. Indicando con $D_{\varphi\psi}$ la risultante di φ, ψ risulta anche qui con ragionamenti eguali a quelli del § XV che:

$$\frac{\delta s}{s} = -\frac{1}{4}\frac{\delta D_{\varphi\psi}}{D_{\varphi\psi}},$$

e d'altra parte con una facile calcolazione di gradi nei coefficienti di φ e ψ e sapendo anche qui che $\frac{\delta s}{s}$ deve essere funzione intera (*), si ha:

$$\frac{\delta D_{\varphi\psi}}{D_{\varphi\psi}} = c(\varphi\psi)^2\varphi_v^2\psi_v^2.$$

Per determinare c supponiamo che φ ψ diventino quarte potenze esatte. Allora $D_{\varphi\psi} = (\varphi\psi)^{16}$ dove φ, ψ non hanno più significato simbolico, ma effettivo. Inoltre Φ diventa:

$$\Phi = \frac{1}{28}(\psi\varphi)^2\Big[\frac{3}{2}\psi_v^2\varphi_v^2\varphi_x^4 + \psi_v\psi_x\varphi_x^3\varphi_x^3\Big],$$

onde:

$$\delta D_{\varphi\psi} = \frac{3}{7}(\varphi\psi)^{18}\psi_v^2\varphi_v^2,$$

e quindi:

$$c = \frac{3}{7},$$

onde:

$$\frac{\delta s}{s} = -\frac{3}{28}(\varphi\psi)^2\varphi_v^2\psi_v^2.$$

(*) Per ragionamenti analoghi a quelli accennati nella nota del § XVI. Vedi la prima equazione differenziale del § XIX.

§ XIX. Formole di ricorrenza e determinazione del 2.° termine delle 35 σ pari di 1.ª specie.

Poniamo una Th pari sotto la forma:

$$Th = s(1 + N_2 + N_4 + \cdots).$$

Allora sostituendo questo valore di Th nell'equazione differenziale del § VII si hanno le formole:

$$8\delta s + s\sum v_1^{6-\alpha-\beta} v_2^{\alpha+\beta-2} \frac{\partial^2 N_2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = 0$$

$$8\delta(sN_{2\lambda}) + s(\chi a)^2 a_v^4 \sum \frac{\partial N_{2\lambda}}{\partial \chi_i \partial \chi_j} a_i a_j + s\sum v_1^{6-\alpha-\beta} v_2^{\alpha+\beta-2} \frac{\partial^2 N_{2\lambda+2}}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}$$
$$+ \frac{1}{8} s N_{2\lambda-2} \Lambda = 0.$$

Dalla prima di queste equazioni, conoscendo il δs (paragrafo precedente), si ricava:

$$\sum v_1^{6-\alpha-\beta} v_2^{\alpha+\beta-2} \frac{\partial^2 N_2}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = +\frac{6}{7}(\varphi\psi)^2 \varphi_v^2 \psi_v^2.$$

Sapendo che N_2 deve risultare della forma (§ XIII)

$$N_2 = c'(\varphi\psi)^2(\varphi\chi)^2(\psi\chi')^2 + c''(\varphi\psi)^2(\varphi\chi)(\varphi\chi')(\psi\chi)(\psi\chi'),$$

la equazione scritta sopra non ci può (come succedeva invece per il caso delle σ dispari) determinare c', c'', ma ci determina solo la loro somma:

$$c' + c'' = \frac{3}{7},$$

risultato che s'accorda con quello ottenuto per vie affatto diverse nel § XII.

Dobbiamo dunque cercare una via diversa per trovare individualmente il valore dei due coefficienti numerici.

Per far questo ci avvarremo della seconda equazione trovata al principio di questo paragrafo, per $\lambda = 1$.

Si ricava in primo luogo:

$$(\chi a)^2 a_v^4 \sum \frac{\partial N_2}{\partial \chi_i \chi_j} a_i a_j = (\chi a)^2 a_v^4 (\varphi\psi)^2 [c'(\varphi a)^2(\psi\chi')^2 + c'(\chi'\varphi)^2(\psi a)^2$$
$$+ 2c''(\varphi a)(\psi a)(\varphi\chi')(\psi\chi')].$$

Per semplificare ora tutti i calcoli che seguono supponiamo un'ipotesi particolare. Supponiamo che φ, ψ non siano coefficienti simbolici, ma effettivi, cioè che f si scinda nel prodotto di due quarte potenze esatte. Questa è la stessa ipotesi, nella quale si è calcolata l'espressione di L nel § IX.

In tale ipotesi l'espressione di δN_2 si semplifica molto e si ha propriamente:

$$\delta N_2 = \frac{3}{28}(\varphi\psi)^2 \varphi_v^2 \psi_v^2 N_2 + \frac{c' + c''}{2 \cdot 28}(\varphi\psi)^4 [(\psi\chi)(\varphi\chi)(\psi\chi')^2 \psi_v \varphi_v^3 + \\ + (\varphi\chi)(\psi\chi)(\varphi\chi')^2 \varphi_v \psi_v^3].$$

Inoltre:

$$(\chi a)^2 (\varphi a)^2 a_v^4 = \frac{1}{70}[6(\varphi\chi)^2(\varphi\psi)^2 \varphi_v^2 \psi_v^2 + 8(\varphi\chi)(\psi\chi)(\varphi\psi)^2 \varphi_v^3 \psi_v \\ + (\psi\chi)^2 (\varphi\psi)^2 \varphi_v^4]$$

$$(\chi a)^2 (\psi a)^2 a_v^4 = \frac{1}{70}[6(\psi\chi)^2(\varphi\psi)^2 \varphi_v^2 \psi_v^2 + 8(\psi\chi)(\varphi\chi)(\varphi\psi)^2 \varphi_v \psi_v^3 \\ + (\varphi\chi)^2 (\varphi\psi)^2 \psi_v^4]$$

$$(\chi a)^2 (\varphi a)(\psi a) a_v^4 = -\frac{2}{35}[(\varphi\chi)^2(\varphi\psi)^2 \varphi_v \psi_v^3 + (\psi\chi)^2(\varphi\psi)^2 \psi_v \varphi_v^3] \\ - \frac{6}{35}(\varphi\chi)(\psi\chi)(\varphi\psi)^2 \varphi_v^2 \psi_v^2.$$

Sostituendo tutti questi valori nell'equazione differenziale, tenendo presente l'espressione di L del § IX, e riducendo si ha:

$$-\sum v_1^{6-\alpha-\beta} v_2^{\alpha+\beta-2} \frac{\partial^2 N_4}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = n' \cdot (\varphi\psi)^4 [(\psi\chi)^2 (\psi\chi')^2 \varphi_v^4 + (\varphi\chi)^2(\varphi\chi')^2 \psi_v^4] \\ + n'' \cdot (\varphi\psi)^4 [(\psi\chi')^2 \varphi_v^2 + (\varphi\chi')^2 \psi_v^2](\varphi\chi)(\psi\chi)\varphi_v \psi_v \\ + n''' \cdot (\varphi\psi)^4 (\varphi\chi)^2 (\psi\chi')^2 \varphi_v^2 \psi_v^2 \\ + n^{\text{IV}} \cdot (\varphi\psi)^4 (\varphi\chi)(\psi\chi)(\varphi\chi')(\psi\chi') \varphi_v^2 \psi_v^2,$$

dove:

$$n' = \frac{1}{2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2} + \frac{1}{70} c'$$

$$n'' = \frac{3^2}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} + \frac{3}{7^2} + \frac{4}{35}(c' - c'')$$

$$n''' = \frac{71}{2^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2} + \frac{6}{35} c'$$

$$n^{\text{IV}} = \frac{3^4}{2^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2} - \frac{12 c''}{35}.$$

Da questa espressione possiamo calcolare:

$$\frac{\partial^2 N_4}{\partial u_1^2}, \qquad \frac{\partial^2 N_4}{\partial u_1 \partial u_2}.$$

Si hanno così due espressioni di 2.° grado nelle u, cioè nelle χ.

Facciamo la derivata della prima rispetto a u_2, e quella della seconda rispetto a u_1, ed uguagliamo queste due derivate.

Allora è facile vedere che in tale eguaglianza scompaiono *identicamente* le parti che moltiplicano n', e quelle che moltiplicano n^{IV}.

Resta solo

$$\begin{aligned}
& n''\Big[2(\varphi\chi)(\psi\chi)\varphi_1^3\psi_1^2\psi_2 + (\psi\chi)^2(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)\varphi_1^3\psi_1 + \\
& \quad + 2(\psi\chi)(\varphi\chi)\psi_1^3\varphi_1^2\varphi_2 + (\varphi\chi)^2(\varphi_1\psi_2 + \varphi_2\psi_1)\cdot{}_1^3\varphi_1\Big] \\
& \quad + 2n'''\Big[(\psi\chi)^2\varphi_1\varphi_2 + (\varphi\chi)^2\psi_1\psi_2\Big]\varphi_1^2\psi_1^2 \\
= & \frac{1}{2}n''\Big[(3\varphi_2\psi_1 + \varphi_1\psi_2)[\varphi_1(\psi\chi)^2 + \psi_1(\varphi\chi)(\psi\chi)]\varphi_1^2\psi_1 + \\
& \quad + (3\psi_2\varphi_1 + \psi_1\varphi_2)[\psi_1(\varphi\chi)^2 + \varphi_1(\varphi\chi)(\psi\chi)]\psi_1^2\varphi_1\Big] \\
& + n'''(\varphi_2\psi_1 + \varphi_1\psi_2)[\varphi_1^2(\psi\chi)^2 + \psi_1^2(\varphi\chi)^2]\varphi_1\psi_1.
\end{aligned}$$

Dovendo questa equazione essere identicamente soddisfatta, eguagliamo a zero il coefficiente di u_2, il che si riduce a porre:

$$n'' - 2n''' = 0,$$

donde:

$$2c' + c'' = \frac{17}{40},$$

e quindi infine:

$$c' = -\frac{1}{2^3\cdot 5\cdot 7}$$

$$c'' = +\frac{11^2}{2^3\cdot 5\cdot 7}.$$

§ XX. Sulla σ iperellittica pari di genere 3, di 2.ª specie.

Sappiamo che mentre nel caso abeliano $p = 3$ le 36 σ pari sono tutte fra loro equivalenti, nel caso iperellittico, invece esse si scindono in due categorie, di cui l'una composta di 35 di esse, risulta di funzioni σ le quali non si annullano per argomenti zero, mentre l'altra risulta di una sola funzione σ distinta dalle altre, perchè per argomenti zero si annulla. Avanti abbiamo studiate quelle della prima categoria; ci pare utile ora, per rendere completo il nostro lavoro di studiare l'altra indicata funzione σ.

La Th corrispondente scriviamola:

$$Th = s(N_2 + N_4 + \cdots).$$

Sappiamo che s è la radice ottava del discriminante della forma f di ottavo ordine, e inoltre che

$$N_2 = (\chi\chi')^2 \text{ (*)}.$$

Si ha quindi:

$$\delta N_2 = 0,$$

perchè N_2 non contiene i coefficienti di f. Inoltre per la proprietà caratteristica del processo δ, si ha:

$$\delta s = 0.$$

Onde infine l'equazione differenziale del paragrafo precedente, per $\lambda = 1$ diventa:

$$\sum v_1^{6-\alpha-\beta} v_2^{\alpha+\beta-2} \frac{\partial^2 N_4}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = -2(\chi a)^2 (\chi' a)^2 a_v^4,$$

donde immediatamente si ha:

$$N_4 = -\frac{1}{6} (\chi a)^2 (\chi' a)^2 (\chi'' a)^2 (\chi''' a)^2.$$

Passiamo ora alla ricerca di N_6.

In primo punto richiamiamone in generale la forma. Il termine N_6 deve essere di 6.° grado nei coefficienti χ, e di 2.° grado nei coefficienti a.

È facile convincersi che non esistono che solo *quattro* di siffatti covarianti fra loro linearmente indipendenti. Il termine N_6 sarà cioè del tipo:

$$\begin{aligned} N_6 = m' & (ab)^2 (a\chi)^2 (a\chi')^2 (a\chi'')^2 (b\chi''')^2 (b\chi^{\mathrm{IV}})^2 (b\chi^{\mathrm{V}})^2 \\ + m'' & (ab)^2 (a\chi)^2 (a\chi')^2 (b\chi'')^2 (b\chi''')^2 (a\chi^{\mathrm{IV}})(b\chi^{\mathrm{IV}})(a\chi^{\mathrm{V}})(b\chi^{\mathrm{V}}) \\ + m''' & (ab)^2 (a\chi)^2 (b\chi')^2 (a\chi'')(b\chi'')(a\chi''')(b\chi''')(a\chi^{\mathrm{IV}})(b\chi^{\mathrm{IV}})(a\chi^{\mathrm{V}})(b\chi^{\mathrm{V}}) \\ + m^{\mathrm{IV}} & (ab)^2 (a\chi)(b\chi)(a\chi')(b\chi')(a\chi'')(b\chi'')(a\chi''')(b\chi''')(a\chi^{\mathrm{IV}})(b\chi^{\mathrm{IV}})(a\chi^{\mathrm{V}})(b\chi^{\mathrm{V}}). \end{aligned}$$

Tali quattro termini li chiameremo per brevità rispettivamente: (I), (II), (III), (IV).

(*) BURKHARDT, Opera cit., pag. 442.

Inoltre:

$$(\chi a)^2 a_v^4 \sum \frac{\partial N_4}{\partial \chi_i \chi_j} a_i a_j = -\frac{2}{3}(ab)^2 a_v^4 (\chi a)^2 (b\chi')^2 (b\chi'')^2 (b\chi''')^2,$$

e giovandoci della espressione di F da noi trovata al § VII si trova:

$$\begin{aligned}\delta N_4 = \frac{1}{6}(ab)^2\Big[&\frac{1}{7}a_v^4[(a\chi)^2(b\chi')^2(b\chi'')^2(b\chi''')^2 + 6(a\chi)(b\chi)(a\chi')(b\chi')(b\chi'')^2(b\chi''')^2]\\ &+\frac{1}{7}a_v^3 b_v[3(a\chi)^2(a\chi')(b\chi')(b\chi'')^2(b\chi''')^2+\\ &\qquad + 4(a\chi)(b\chi)(a\chi')(b\chi')(a\chi'')(b\chi'')(b\chi''')^2]\\ &+\frac{1}{70}a_v^2 b_v^2[3(a\chi)^2(a\chi')^2(b\chi'')^2(b\chi''')^2 + 24(a\chi)^2(a\chi')(b\chi')(a\chi'')(b\chi'')(b\chi''')^2\\ &\qquad + 8(a\chi)(b\chi)(a\chi')(b\chi')(a\chi'')(b\chi'')(a\chi''')(b\chi''')]\Big].\end{aligned}$$

Usiamo ora l'equazione differenziale del paragrafo precedente per $\lambda = 2$, e teniamo presente che δs nel nostro caso è eguale a zero.

Si ha:

$$\begin{aligned}&8\delta N_4 - \frac{2}{3}(ab)^2 a_v^4 (\chi a)^2 (b\chi')^2 (b\chi'')^2 (b\chi''')^2 + \sum v_1^{6-\alpha-\beta} v_2^{\alpha+\beta-2} \frac{\partial^2 N_6}{\partial u_\alpha \partial u_\beta}\\ &+\frac{1}{8}(ab)^2(\chi\chi')^2\Big[\frac{18}{7}a_v^4(b\chi'')^2(b\chi''')^2 + \frac{40}{7}a_v^3 b_v (a\chi'')(b\chi'')(b\chi''')^2\\ &\qquad + \frac{62}{35}a_v^2 b_v^2 (a\chi'')^2(b\chi''')^2 + \frac{68}{35}a_v^2 b_v^2 (a\chi'')(b\chi'')(a\chi''')(b\chi''')\Big] = 0.\end{aligned}$$

Ponendo:

$$(ab)^2(\chi\chi')^2 = 2[(a\chi)^2(b\chi')^2 - (a\chi)(b\chi)(a\chi')(b\chi')],$$

e chiamando per brevità coi numeri

$$(1), \quad (2), \dots\dots \quad (7),$$

i sette termini consecutivi di cui si compone l'espressione di δN_4, l'equazione precedente si riduce a

$$\begin{aligned}\sum v_1^{6-\alpha-\beta} v_2^{\alpha+\beta-2} \frac{\partial^2 N_6}{\partial u_\alpha \partial u_\beta} = -\frac{1}{6}(1) - \frac{1}{2}(2) - 2(3) + \frac{2}{3}(4)\\ -\frac{1}{2}(5) - \frac{1}{2}(6) + \frac{1}{3}(7).\end{aligned}$$

Calcoliamo ora la espressione di $\frac{\partial^2 N_6}{\partial u_1^2}$, e propriamente in due modi, cioè dalla formola precedente, e direttamente dalla espressione di N_6. Riguardo al primo modo non c'è da fare altro che supporre nelle espressioni di (1) (2)... (7) gli indici v sostituiti da indici 1. Riguardo al secondo modo si ha:

$$\begin{aligned}
&12m' \,(1) + 18m' \,(5) + 4m'' \,(2) + \;\; 8m'' \,(6) \\
&+ 16m'' \,(3) + \;\; 2m'' \,(5) + 2m''' (7) + 16m''' (4) \\
&+ 12m''' (6) + 30m^{\text{IV}} (7).
\end{aligned}$$

Risultano dunque immediatamente le equazioni:

$$\begin{aligned}
12m' &= -\frac{1}{6} \\
4m'' &= -\frac{1}{2} \\
16m'' &= -2 \\
16m''' &= -\frac{2}{3} \\
18m' + \;\; 2m'' &= -\frac{1}{2} \\
8m'' + 12m''' &= -\frac{1}{2} \\
2m''' + 30m^{\text{IV}} &= +\frac{1}{3},
\end{aligned}$$

le quali si accordano tutte a dare

$$\begin{aligned}
m' &= -\frac{1}{2^3 \cdot 3^2}, \qquad & m''' &= \frac{1}{2^3 \cdot 3} \\
m'' &= -\frac{1}{2^3}, \qquad & m^{\text{IV}} &= \frac{1}{2^3 \cdot 3 \cdot 5}.
\end{aligned}$$

Napoli, settembre 1889.

Considerazioni comparative intorno a ricerche geometriche recenti.

(*Di* Felice Klein [*a Göttingen*]). (*)

Programma pubblicato in occasione dell' accoglimento nella Facoltà filosofica e nel Senato dell' Università di Erlangen, 1872,

tradotto da GINO FANO.

Fra i risultati ottenuti negli ultimi cinquant'anni nel campo della Geometria occupa il primo posto lo sviluppo della *Geometria Proiettiva* (v. nota I). Benchè da principio le così dette relazioni metriche, non conservandosi invariate nelle proiezioni, sembrassero inaccessibili a questa disciplina, tuttavia recentemente si è riusciti ad abbracciarle anch'esse sotto il punto di vista proiettivo, di modo che ora i metodi proiettivi comprendono tutta quanta la geometria. Solo che le proprietà metriche vi compaiono, non più come proprietà degli oggetti in sè, ma come relazioni fra essi ed una forma fondamentale, il cerchio immaginario all'infinito (delle sfere).

(*) [Alla proposta del sig. Segre †) di pubblicare negli Annali una traduzione del mio Programma del 1872 ho accondisceso tanto più volentieri, in quanto che il primo volume testè comparso della « *Theorie der Transformationsgruppen* » di Lie (Leipzig 1888) potrebbe far sì che l'interesse dei geometri si rivolgesse maggiormente a siffatte discussioni. — La traduzione è assolutamente letterale; nei due o tre passi in cui si sono mutate alcune parole si son racchiuse fra parentesi quadre [—] le nuove espressioni. Nello stesso modo si sono contrassegnate una serie di aggiunte sotto il testo, che solo ora vi furono introdotte.

F. Klein.]

†) Le ragioni di questa proposta (messa poi ad esecuzione grazie al sig. Fano, studente nell'Università di Torino) non consistevano per me soltanto nell'interesse *storico* che a quest'opuscolo proviene dalla moltitudine di ricerche, specialmente del sig. Klein e della sua scuola, che più o meno direttamente s'ispirarono da quasi un ventennio alle vaste vedute ed ai profondi concetti in esso contenuti. Questo lavoro non è, a mio avviso, abbastanza noto ai *giovani geometri italiani;* ed è specialmente per essi che ho desiderato si

Confrontando le nozioni della geometria ordinaria (elementare) con questo metodo, introdottosi gradatamente, di considerare le forme dello spazio, sorge la questione, se esista un principio generale, secondo cui ambo i metodi potrebbero organizzarsi. Tale questione appare tanto più importante, in quanto che accanto alla geometria elementare ed alla proiettiva si presenta una serie di altri metodi ai quali, con tutto che meno sviluppati, convien concedere pari diritto di esistenza autonoma. Tali sarebbero la geometria dei raggi reciproci, quella delle trasformazioni razionali, ecc. le quali saranno in seguito menzionate ancora ed esposte.

Coll'assumerci di stabilire in seguito un sì fatto principio noi non veniamo certo a sviluppare alcuna idea essenzialmente nuova, ma solo delineiamo con chiarezza e precisione ciò che fu già pensato da taluno con più o meno esattezza. Ma il pubblicare siffatte considerazioni comprensive appariva tanto più giustificato, in quanto che la geometria, che pur è unica nella sua sostanza, nel rapido sviluppo cui andò soggetta negli ultimi tempi si è troppo suddivisa in discipline quasi separate (v. nota II), che vanno progredendo alquanto indipendentemente le une dalle altre. Aggiungasi a ciò l'intenzione particolare di esporre metodi e punti di vista che vennero svolti in lavori recenti di Lie e miei. I nostri lavori, per quanto fosser diversi gli oggetti a cui si riferivano, pure d'accordo sono entrati in questo modo generale di considerazione, sicchè era una specie di necessità di discutere finalmente anche questo, caratterizzando dal suo punto di vista contenuto e tendenza di quei lavori.

Benchè finora siasi parlato di sole ricerche geometriche, pure vi si devono intender comprese quelle relative a varietà comunque estese, le quali si sono svolte dalla geometria coll'astrarre dalla rappresentazione nello spazio, rappresentazione non essenziale per le considerazioni puramente matematiche (v. note III e IV). Nello studio delle varietà vi sono appunto dei tipi differenti

---

facesse questa ristampa. Tante idee generali ed ingegnose che si trovano in queste pagine, come l'*identità* sostanziale fra varie discipline matematiche (ed in particolare fra discipline analitiche e geometriche!) che si rappresentano l'una sull'altra quando si tenga conto dei *gruppi di trasformazioni* che in esse si pongono a base; le varie considerazioni su questi gruppi; tante giuste osservazioni che mettono sotto la luce più vera e precisano nel miglior modo il carattere di vari argomenti e varie dottrine, e specialmente di alcune più discusse, come quella delle varietà più volte estese, e la geometria non euclidea: tutte queste son cose o non sufficientemente conosciute e studiate dai giovani, o note solo per via indiretta. Su esse mi sia permesso richiamare tutta la loro attenzione.

Al prof. Klein pel consenso dato a questa traduzione, non che per la revisione e per le aggiunte fattevi; e così pure al sig. Direttore degli Annali per l'ospitalità gentilmente accordatale, i più vivi ringraziamenti del Traduttore e miei.

C. Segre.

come in geometria, e si tratta, come in geometria, di mettere in rilievo ciò che v'ha di comune e di diverso in ricerche intraprese indipendentemente le une dalle altre. In via astratta, basterebbe in seguito parlare semplicemente di varietà più volte estese; ma, collegandola alle rappresentazioni geometriche più famigliari, l'esplicazione si fa più semplice e più facilmente intelligibile. Partendo dalla considerazione dei corpi geometrici, e sviluppando sopra di essi, come esempio, le idee generali, battiamo la stessa via che ha percorsa la scienza nel suo sviluppo, e che di solito nell'esposizione torna maggior conto di mettere a base.

Non è possibile far qui un'esposizione preliminare della materia di cui ci occuperemo in seguito, poichè essa mal si adatta ad una forma più ristretta (1); i titoli dei paragrafi mostreranno il progresso generale del pensiero. Ho aggiunto alla fine una serie di note, nelle quali ho maggiormente sviluppati alcuni punti particolari, quando ciò mi sembrava utile all'esplicazione generale del testo, ovvero sono stato costretto a separare da quelli affini il principio astrattamente matematico conforme alle considerazioni del testo medesimo.

§ 1.

Gruppo di trasformazioni dello spazio. Gruppo principale. Si pone un problema generale.

Il concetto più essenziale fra quelli necessari per quanto esporremo in seguito è quello di *gruppo* di trasformazioni dello spazio.

Componendo assieme quante si vogliano trasformazioni dello spazio (2), si ha sempre di nuovo una trasformazione. Ora, se una data serie di trasformazioni gode della proprietà che ogni trasformazione risultante da composi-

(1) Questa concisione di forma è un difetto dell'esposizione che faremo in seguito; difetto che, temo, renderà più difficile l'intelligenza. Ma a ciò si sarebbe potuto ovviare solo con una trattazione molto più estesa, nella quale le singole teorie, qui appena accennate, fossero ampiamente svolte

(2) Noi supponiamo sempre soggetto simultaneamente alle trasformazioni tutto il complesso delle figure dello spazio, e parliamo perciò semplicemente di trasformazioni dello spazio. Le trasformazioni possono introdurre in luogo dei punti altri elementi, come fanno per es. quelle reciproche; ma su ciò nel testo non si fa distinzione.

zioni di queste appartenga alla serie medesima, chiameremo quest'ultima un *gruppo di trasformazioni* (1) (2).

Un esempio di gruppo di trasformazioni ci è dato dal complesso dei movimenti (considerando ogni movimento come un'operazione eseguita su tutto lo spazio). Un gruppo contenuto in questo è per es. quello delle rotazioni attorno ad un punto (3). Al contrario, un gruppo che comprende quello dei movimenti è costituito dall'insieme delle collineazioni. Invece il complesso delle trasformazioni reciproche non forma alcun gruppo, — perchè due reciprocità assieme dan luogo ad una collineazione —; si ha però un gruppo considerando il complesso di tutte le trasformazioni reciproche e collineari (4).

Ora vi sono nello spazio delle trasformazioni che non alterano affatto le proprietà geometriche dei corpi. Infatti, per la natura del concetto di proprietà geometriche, queste sono indipendenti dalla posizione che la figura da studiare occupa nello spazio, dalla sua grandezza assoluta, e finalmente anche dal senso (5) in cui sono disposte le sue parti. Le proprietà di una tale figura rimangono dunque inalterate in tutti i movimenti dello spazio, nelle sue trasformazioni per similitudine, nel processo di riflessione (specchiamento), come pure in tutte le trasformazioni che risultano da composizioni di queste. Il complesso di tali trasformazioni lo chiameremo *gruppo principale* (6) di trasformazioni dello

---

(1) [Questa definizione vuole ancor essere completata. Vale a dire, nei gruppi del testo si suppone tacitamente che essi, accanto ad ogni operazione che abbiano a contenere, ne contengano altresì sempre l'inversa; ora questo, nel caso che le operazioni siano in numero infinito, non è punto una conseguenza del concetto di gruppo come tale; la nostra supposizione doveva quindi aggiungersi espressamente alla definizione di questo concetto data nel testo.]

(2) La nozione e la denominazione si sono prese dalla *teoria delle sostituzioni*, nella quale però in luogo delle trasformazioni di un campo continuo compajono gli scambi di un numero finito di grandezze discrete.

(3) Camille Jordan ha determinato in generale tutti i gruppi contenuti in quello dei movimenti: *Sur les groupes de mouvements*. Annali di Matematica, t. II.

(4) Non è punto necessario, come però si verificherà sempre per i gruppi di cui faremo menzione nel testo, che le trasformazioni di un gruppo formino una successione continua. Costituisce un gruppo per es. anche la serie finita di movimenti che possono far sovrapporre un corpo regolare a sè stesso, ovvero la serie infinita ma discreta di quelli che sovrappongono una sinussoide a sè medesima.

(5) Per «senso» intendo qui la proprietà dell'ordinamento, su cui si fonda la differenza dalla figura simmetrica (immagine riflessa). Quindi ad es. si distinguono riguardo al senso un'elica destrorsa ed una sinistrorsa.

(6) Che queste trasformazioni formino un gruppo è necessario in causa della loro stessa definizione.

spazio: *le proprietà geometriche non si alterano nelle trasformazioni del gruppo principale.* E inversamente possiamo anche dire: *le proprietà geometriche sono caratterizzate dalla loro invariabilità rispetto alle trasformazioni del gruppo principale.* Invero, se si considera per un istante lo spazio come immobile, ecc., come una varietà rigida, allora ogni figura avrà un interesse individuale; or bene, fra le proprietà ch'essa avrà come individuo, soltanto quelle propriamente geometriche si conserveranno nelle trasformazioni del gruppo principale. Questa nozione, formulata qui in modo un po' indeterminato, apparirà più chiara nel corso ulteriore delle considerazioni.

Facciamo ora astrazione dall'immagine sensibile, matematicamente non essenziale, e consideriamo lo spazio semplicemente come una varietà più volte estesa, quindi a tre dimensioni se ci atteniamo alla solita rappresentazione del punto come elemento dello spazio. Per analogia colle trasformazioni dello spazio parliamo di trasformazioni della varietà; anch'esse formano dei *gruppi.* Solo che non c'è più come nello spazio un gruppo distinto dagli altri pel suo significato; ogni gruppo è equivalente ad ogni altro. Come generalizzazione della Geometria sorge così il seguente problema comprensivo:

È data una varietà e in questa un gruppo di trasformazioni; studiare le forme appartenenti alla varietà per quanto concerne quelle proprietà che non si alterano nelle trasformazioni del gruppo dato.

Secondo l'espressione moderna, la quale però non si suol riferire che ad un determinato gruppo, quello di tutte le trasformazioni lineari, possiamo anche dire così:

È data una varietà e in questa un gruppo di trasformazioni. Si sviluppi la teoria invariantiva relativa al gruppo medesimo.

Questo è il problema generale che comprende in sè, non solo la geometria ordinaria, ma anche e in particolare i nuovi metodi geometrici che qui dobbiamo nominare, e le diverse maniere di trattazione delle varietà comunque estese. Ciò che conviene più specialmente notare si è l'arbitrarietà che sussiste in quanto alla scelta del gruppo di trasformazioni da fissare; e l'egual diritto, che ne segue e che in questo senso va inteso, di tutte le specie di considerazioni che si raccolgono sotto quel punto di vista generale.

§ 2.

I gruppi di trasformazioni di cui l'uno abbraccia l'altro vengono subordinati fra loro. Diversi tipi di ricerche geometriche e loro reciproca relazione.

Poichè le proprietà geometriche dei corpi rimangono inalterate in *tutte* le trasformazioni del gruppo principale, così, considerato da sè solo, è assurdo il ricercare quelle loro proprietà per cui ciò si verifica soltanto rispetto ad una parte delle trasformazioni stesse. Ma il porre una tale questione diventa giustificato, quantunque solo *formalmente,* se noi studiamo le forme dello spazio in relazione ad elementi immaginati fissi. Consideriamo ad es., come nella trigonometria sferica, gli enti geometrici con speciale riguardo ad un punto fisso. Allora la questione è anzitutto questa: Sviluppare le proprietà invariantive, rispetto al gruppo principale fissato, non più dei corpi a sè, ma del sistema formato da essi e dal punto dato. Ma una tale questione possiamo metterla anche sotto quest'altra forma: Si studino le forme dello spazio in sè per quanto concerne le proprietà che non si alterano in quelle trasformazioni del gruppo principale che conservano fisso il punto proposto. In altri termini: È indifferente di studiare le forme dello spazio in relazione al gruppo principale, e aggiunger loro il punto dato, ovvero, senza aggiunger loro nulla di dato, di sostituire al gruppo principale quell'altro in esso contenuto, le cui trasformazioni lasciano inalterato il punto medesimo.

È questo un principio del quale spesso si fa uso in seguito, e che perciò enunceremo qui subito in generale, per es. nel modo seguente:

Sia data una varietà e, per la sua trattazione, un gruppo di trasformazioni ad essa relativo. Si ponga il problema di studiare le forme contenute nella varietà in relazione ad una data forma. *Allora noi possiamo o aggiungere al sistema delle forme quest'ultima data, e allora si richiederanno le proprietà del sistema così esteso in relazione al gruppo proposto; — ovvero non estendere il sistema, ma limitare le trasformazioni che si mettono a base della trattazione a quelle contenute nel gruppo medesimo che lasciano inalterata la proposta forma (e che necessariamente costituiscono ancora un gruppo).*

Contrariamente alla questione sollevata al principio del paragrafo, occupiamoci adesso dell'inversa, che si può comprendere fin d'ora. Cerchiamo quali siano le proprietà dei corpi che si conservano in un gruppo di trasformazioni comprendente quello principale come parte. Ogni proprietà che troviamo in una tale ricerca è una proprietà geometrica del corpo a sè, ma la reciproca non sussiste. In questa entra invece in vigore il principio testè riportato, nel quale ora il gruppo principale è il meno esteso. Si ha quindi:

Sostituendo al gruppo principale un altro gruppo più ampio, le proprietà geometriche si conservano solo in parte. Le rimanenti appaiono come proprietà, non più dei corpi a sè, ma del sistema che risulta aggiungendo a questi una forma speciale. Questa forma speciale (per quanto può essere determinata (1)*) è definita dal fatto che, supposta fissa, concede allo spazio, fra le trasformazioni del gruppo proposto, solo quelle del gruppo principale.*

Su questa proposizione riposa ciò che hanno di particolare i nuovi indirizzi geometrici che qui dobbiamo discutere, e il loro rapporto al metodo elementare. Il loro carattere è appunto quello di porre a base delle considerazioni, in luogo del gruppo principale, un altro gruppo più esteso di trasformazioni dello spazio. La loro reciproca relazione è determinata da una proposizione analoga, finchè i loro gruppi si comprendono l'un l'altro. Questo vale anche per i diversi metodi di trattazione di varietà più volte estese che dobbiamo considerare. Ciò verrà ora mostrato pei singoli metodi, sui quali i teoremi stabiliti in generale in questo paragrafo e nel precedente troveranno spiegazione in oggetti concreti.

§ 3.

Geometria proiettiva.

Ogni trasformazione dello spazio che non appartenga precisamente al gruppo principale può servire a trasportare a figure nuove proprietà di figure note. Così noi usiamo la geometria del piano per quella di superficie rappresentabili sopra il piano; così, già assai prima che nascesse una vera e propria geometria proiettiva, si arguivano dalle proprietà di una figura data quelle di altre che se ne deducevano per proiezione. Ma la geometria proiettiva sorse solamente coll'abitudine di considerare la figura originale come essenzialmente identica a tutte quelle che ne sono deducibili proiettivamente, e di enunciare

(1) Si genera per es. una tal forma applicando le trasformazioni del gruppo principale a un elemento originale arbitrario, che non resti invariato in alcuna delle trasformazioni del gruppo proposto.

le proprietà che si trasportano per proiezione in modo da render evidente la loro indipendenza dalle modificazioni che si hanno proiettando. Con ciò si venne a porre a base della trattazione nel senso del § 1 *il gruppo di tutte le trasformazioni proiettive, creando per tal modo il contrasto fra geometria proiettiva ed elementare.*

Un processo di sviluppo simile a quello qui citato può concepirsi come possibile in ogni sorta di trasformazioni dello spazio; e noi ci ritorneremo sopra più volte ancora. Nella geometria proiettiva stessa esso si è sviluppato ancora da due lati. Una delle estensioni del concetto si effettuò col comprendere le trasformazioni *reciproche* (dualistiche) nel gruppo posto a fondamento. Sotto il punto di vista attuale due figure duali tra loro non si considerano più come diverse, ma come essenzialmente identiche. Un altro passo si fece coll'estensione del gruppo fondamentale di trasformazioni collineari e reciproche mediante la considerazione di quelle *immaginarie* corrispondenti. Questo passo esige che siasi dapprima estesa la cerchia degli elementi propriamente detti dello spazio coll'introduzione degli immaginarii, — in modo affatto analogo a quello in cui l'introduzione delle trasformazioni reciproche nel gruppo fondamentale porta con sè quella contemporanea del punto e del piano come elementi dello spazio. Non è qui il luogo di diffondersi sull'opportunità dell'introduzione degli elementi immaginarii, per mezzo dei quali solamente si giunge alla corrispondenza perfetta fra la scienza dello spazio e il campo, qual è stato scelto, delle operazioni algebriche. Bisogna invece ben notare che la ragione di tale introduzione sta appunto nella considerazione di operazioni algebriche, e non già nel gruppo delle trasformazioni proiettive e reciproche. E come per queste ultime possiamo limitarci a trasformazioni reali, perchè le collineazioni e reciprocità reali formano già di per sè un gruppo; — così pure noi possiamo introdurre elementi immaginarii dello spazio, anche se non ci poniamo dal punto di vista proiettivo, e lo dobbiamo fintanto che studiamo per principio forme algebriche.

Come si abbiano a concepire le proprietà metriche dal punto di vista proiettivo, lo si determina secondo la proposizione generale del paragrafo precedente. Le proprietà metriche debbono considerarsi come relazioni proiettive rispetto ad una forma fondamentale, il cerchio immaginario all'infinito (1), forma

(1) Questo modo di considerazione va ritenuto come una delle più belle cose [della scuola francese]; solo per mezzo di esso vien precisata la distinzione fra proprietà di posizione e proprietà metriche, quale si suol dare in principio della geometria proiettiva.

che ha la proprietà di trasformarsi in sè stessa in quelle sole trasformazioni proiettive che appartengono altresì al gruppo principale. La proposizione enunciata così semplicemente richiede ancora un'aggiunta essenziale, che corrisponde alla restrizione delle ordinarie vedute agli elementi (e alle trasformazioni) reali. Per esser d'accordo con questo punto di vista, bisogna ancora aggiungere espressamente al cerchio immaginario all'infinito il sistema degli elementi (punti) reali dello spazio; le proprietà nel senso della geometria elementare sono perciò proiettivamente o proprietà dei corpi a sè, ovvero relazioni fra essi e questo sistema degli elementi reali, fra essi e il cerchio immaginario all'infinito, fra essi ed entrambi.

E qui conviene por mente ancora al modo in cui v. Staudt nella sua Geometria di posizione istituisce la geometria proiettiva, — e cioè quella geometria proiettiva che si limita a mettere come fondamentale il gruppo di tutte le trasformazioni proiettivo-reciproche reali (1).

È noto come in quell'opera egli dal materiale d'osservazione ordinario estragga solo quei fatti che si conservano anche nelle trasformazioni proiettive. Volendo procedere oltre anche alla considerazione di proprietà metriche, si dovrebbero introdurre queste ultime appunto come relazioni rispetto al cerchio immaginario all'infinito. Il processo d'idee così completato è di tanta maggior importanza per le considerazioni qui esposte, in quanto che è possibile di costruire un analogo edifizio geometrico secondo lo spirito di ciascuno dei singoli metodi che ancora tratteremo.

§ 4.

Trasporto mediante rappresentazione.

Prima di proceder oltre nella discussione dei metodi geometrici che si presentano accanto alla geometria elementare e alla proiettiva, svilupperemo in generale alcune considerazioni che occorreranno sempre di nuovo in seguito, e per cui le cose accennate finora dànno già esempi a sufficienza. A tali discussioni si riferiscono il paragrafo presente e il successivo.

Poniamo di aver esaminata una varietà A con un gruppo B come fondamentale. Se allora per mezzo di una qualche trasformazione si cambia A

(1) La cerchia più estesa che comprende anche trasformazioni immaginarie fu dallo Staudt messa a base solo nei suoi « *Beiträge zur Geometrie der Lage* ».

in un'altra varietà A', dal gruppo B di trasformazioni di A in sè stessa otterremo ora un nuovo gruppo B', le cui trasformazioni si riferiranno ad A'. È allora un principio che si comprende da sè, che *la trattazione di A con B come fondamentale ci dà quella di A' con a base B';* cioè ogni proprietà di una forma contenuta in A relativamente al gruppo B ne dà una della forma corrispondente in A' con riferimento al gruppo B'.

Sia per es. A una retta (punteggiata), B il gruppo delle trasformazioni lineari, in numero tre volte infinito, che la trasformano in sè stessa La maniera di trattare A è allora quella appunto che la nuova algebra chiama « teoria delle forme binarie ». Ora la retta A possiamo riferirla ad una conica A' del piano, mediante proiezione da un punto di quest'ultima. Le trasformazioni lineari B della retta in sè stessa dànno luogo allora, come facilmente si prova, a quelle B' della conica in sè medesima; ossia alle trasformazioni di questa derivanti da quelle lineari del piano, che mutano la conica in sè stessa.

Ma, conforme al principio del secondo paragrafo (1), è indifferente di studiare la geometria sopra una conica, pensandola come fissa e riferendosi a quelle sole trasformazioni lineari del piano che non la alterano; ovvero di studiare la geometria su quella conica, considerando in generale le trasformazioni lineari del piano, e lasciando variare assieme ad esse la conica stessa. Le proprietà che scorgevamo nei sistemi di punti sulla conica sono allora proiettive nel senso ordinario. Annodando quest'ultima considerazione al risultato testè ottenuto, abbiamo dunque:

La teoria delle forme binarie e la geometria proiettiva dei sistemi di punti su di una conica sono la stessa cosa; ossia ad ogni proposizione sulle forme binarie ne corrisponde una sopra questi sistemi di punti, e inversamente (2).

Un altro esempio atto a render più evidente questo genere di considerazioni è il seguente. Mettendo in relazione una quadrica con un piano col mezzo della proiezione stereografica, otteniamo su quella superficie un punto fondamentale: il centro di proiezione; e nel piano, due: le tracce delle generatrici passanti per esso centro. Ora, si può dimostrare senz'altro, che le trasformazioni lineari del piano che lasciano inalterati i suoi due punti fondamentali dànno luogo, per mezzo della rappresentazione, a trasformazioni lineari della quadrica in sè stessa, ma a quelle solamente che non alterano il centro di pro-

(1) Se vogliamo, il principio è applicato qui sotto una forma un po' più generale.

(2) Invece della conica nel piano possiamo introdurre, con egual successo, una cubica gobba, e in generale, nel caso di n dimensioni, qualcosa di analogo.

iezione. (Chiamiamo trasformazioni lineari della quadrica in sè stessa quelle ch'essa subisce quando si operano trasformazioni lineari dello spazio che la sovrappongono a sè medesima.) Divengono per tal modo identiche la trattazione proiettiva di un piano nel quale si fissino due punti come fondamentali e quella di una quadrica in cui se ne fissi uno. La prima — qualora si considerino anche gli elementi immaginarii — non è altro che la trattazione del piano nel senso della geometria elementare. Infatti il gruppo principale di trasformazioni piane si compone appunto di quelle trasformazioni lineari che lasciano inalterata una coppia di punti (i punti ciclici). Otteniamo quindi in conclusione:

La geometria elementare del piano e la trattazione proiettiva di una quadrica con un suo punto come fondamentale sono la stessa cosa.

Tali esempi si potrebbero moltiplicare a piacere (1); i due qui svolti furono scelti perchè in seguito avremo ancora occasione di tornarvi sopra.

§ 5.

Dell'arbitrarietà nella scelta dell'elemento dello spazio. Principio di trasporto di Hesse. Geometria della retta.

Come elemento della retta, del piano, dello spazio, e in generale di una varietà da esaminare possiamo prendere, in luogo del punto, qualunque forma contenuta nella varietà stessa: il gruppo di punti, eventualmente la curva, la superficie, ecc. (v. nota IV). Non essendovi a priori nulla affatto di fisso intorno al numero di parametri arbitrarii da cui tali forme si vogliono far dipendere, la retta, il piano, lo spazio, ecc. appariranno, a seconda della scelta dell'elemento, come varietà a quante si vogliano dimensioni. *Ma fintanto che poniamo a base della trattazione geometrica uno stesso gruppo di trasformazioni, il contenuto della Geometria rimane inalterato;* ossia ogni teorema ottenuto adottando un certo elemento dello spazio è anche un teorema qualora se ne adotti un altro qualunque; si cambiano solamente l'ordine e il collegamento delle proposizioni.

---

(1) Per altri esempi, come anche in particolare per le estensioni al caso di più dimensioni, di cui sono suscettibili quelli qui riportati, rinvio a quanto espongo in una mia Memoria: *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie.* Math. Annalen, t. V, 2, come pure ai lavori di Lie che tosto citerò ancora.

L'essenziale è dunque il gruppo di trasformazioni; il numero di dimensioni che vogliamo attribuire alle varietà appare come qualcosa di secondario.

Collegando quest'osservazione al principio del paragrafo precedente, si ottiene una serie di belle applicazioni, alcune delle quali noi svilupperemo, perchè tali esempi sembrano più adatti che ogni lunga spiegazione a stabilire il significato della considerazione generale.

La geometria proiettiva sulla retta (la teoria delle forme binarie) equivale, in forza del paragrafo precedente, alla geometria proiettiva sulla conica. Su quest'ultima consideriamo ora come elemento, in luogo del punto, la coppia di punti. Ma il complesso delle coppie di punti di una conica si può riferire al sistema delle rette del piano, facendo corrispondere ad ogni retta la coppia di punti in cui essa taglia la conica stessa. Mediante questa rappresentazione le trasformazioni lineari della conica in sè stessa dànno luogo a quelle del piano (rigato) che la lasciano inalterata. Secondo il § 2 è poi indifferente di considerare solo il gruppo di queste ultime trasformazioni, oppure il complesso di tutte quelle lineari del piano, aggiungendo volta per volta la conica data alle forme del piano che dobbiamo esaminare. Riunendo tutte queste considerazioni, abbiamo:

La teoria delle forme binarie e la geometria proiettiva del piano con una conica come fondamentale sono identiche.

E poichè infine, appunto per l'uguaglianza del gruppo, la geometria proiettiva del piano con una conica come fondamentale coincide colla geometria metrico-proiettiva che si può istituire nel piano sopra una conica (v. nota V), possiamo anche dire così:

La teoria delle forme binarie e la geometria metrico-proiettiva generale nel piano sono la stessa cosa.

In luogo della conica nel piano potremmo introdurre nella considerazione precedente una cubica gobba nello spazio, ecc., ma non staremo a sviluppare questo concetto. La connessione qui stabilita fra la geometria del piano e poi dello spazio o di una varietà comunque estesa non costituisce essenzialmente altro che il principio di trasporto proposto da Hesse (Borchardt's Journal, Vol. 66).

Un esempio molto affine l'abbiamo nella geometria proiettiva dello spazio, ovvero, in altri termini, nella teoria delle forme quaternarie. Assumendo la retta come elemento dello spazio, e attribuendole, come si fa nella geometria della retta, sei coordinate omogenee, fra cui passa una relazione di condizione quadratica, le collineazioni e reciprocità dello spazio appaiono siccome quelle trasformazioni lineari delle sei variabili supposte indipendenti, che trasformano in sè stessa la relazione di condizione. Applicando considerazioni analoghe a quelle testè sviluppate, otteniamo da ciò la proposizione seguente:

La teoria delle forme quaternarie coincide colla determinazione metrica proiettiva in una varietà rappresentabile con sei variabili omogenee.

Per una più minuta esposizione di un tale concetto, rinvio ad una memoria che comparirà fra poco nei Math. Annalen (vol. VI) « *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie [Zweite Abhandlung]* », come pure ad una nota al termine di quest'opuscolo (v. nota VI).

Aggiungerò alle spiegazioni precedenti altre due osservazioni, delle quali la prima è bensì già implicitamente contenuta nelle cose dette finora, ma vuol essere più sviluppata, perchè l'argomento cui si riferisce va soggetto facilmente a malintesi

Introducendo forme qualunque come elementi dello spazio, questo può acquistare quante si vogliano dimensioni. Ma se ci atteniamo al metodo di trattazione a noi più famigliare (quello elementare o quello proiettivo), allora il gruppo che dobbiamo assumere come fondamentale per la varietà a più dimensioni ci è dato a priori, ed è appunto rispettivamente il gruppo principale o quello delle trasformazioni proiettive. Volendone assumere un altro, dovremmo uscire risp. dall'intuizione elementare o da quella proiettiva. Adunque, se è vero che, mediante una scelta conveniente dell'elemento dello spazio, quest'ultimo può rappresentare varietà a quante si vogliano dimensioni, importa però anche di aggiungere che *con questa rappresentazione o bisogna mettere fin da prima un determinato gruppo a base della trattazione della varietà, ovvero, volendo disporre del gruppo, dobbiamo poi conformarvi la nostra intuizione geometrica.* — Senza quest'osservazione si potrebbe per es cercare una rappresentazione della geometria della retta nel modo seguente. Alla retta si attribuiscono in quest'ultima sei coordinate; e altrettanti coefficienti ha la conica nel piano. Immagine della geometria della retta sarebbe dunque la geometria in un sistema di coniche separato dal complesso delle coniche di un piano mediante una relazione quadratica tra i coefficienti. Ciò sta bene finchè poniamo come gruppo fondamentale della geometria piana il complesso dei mutamenti rappresentati dalle trasformazioni lineari dei coefficienti della conica, che trasformano in sè stessa la relazione di condizione quadratica. Ma se ci atteniamo alla trattazione elementare o a quella proiettiva della geometria piana, *non* abbiamo immagine *veruna.*

La seconda osservazione si riferisce alla nozione seguente. Sia dato nello spazio un gruppo qualunque, per es. il gruppo principale. Si scelga una qualche forma dello spazio, per es. un punto, una retta, o anche un ellissoide, ecc., e le si applichino tutte le trasformazioni del gruppo principale. Si ottiene così una varietà più volte estesa, con un numero di dimensioni uguale, in generale, a quello dei parametri arbitrarii contenuti nel gruppo; inferiore però in casi particolari, quando cioè la forma scelta in origine abbia la proprietà di mutarsi in sè stessa mediante un numero infinito di trasformazioni del gruppo. Ad ogni varietà così generata diamo, in relazione al gruppo generatore il nome di *corpo* (1). Ora se vogliamo considerare lo spazio secondo lo spirito del gruppo, e nel tempo stesso assumere determinate forme come elementi dello spazio, senza che cose equivalenti in quel senso vengano rappresentate in modo diverso, *dovremo evidentemente scegliere gli elementi dello spazio in modo che la loro varietà costituisca essa stessa un corpo, ovvero possa decomporsi in corpi* (2). Di quest'osservazione che risulta evidente sarà fatta più avanti (§ 9) un'applicazione. La nozione di corpo ricomparirà nell'ultimo paragrafo insieme ad altre affini.

§ 6.

Geometria dei raggi reciproci. Interpretazione di $x+iy$.

Con questo paragrafo torniamo alla discussione dei diversi indirizzi d'investigazioni geometriche, che fu incominciata nei §§ 2 e 3.

Come analoga alle maniere di considerazioni della geometria proiettiva si può riguardare sotto molteplici aspetti una categoria di considerazioni geometriche, in cui si fa uso continuo delle trasformazioni per raggi reciproci. Vi appartengono le ricerche sulle così dette ciclidi e superficie anallagmatiche,

(1) Scelgo questo nome seguendo il Dedekind, il quale nella teoria dei numeri chiama «Corpo» un campo di numeri che risulti da elementi dati mediante date operazioni. (Seconda edizione delle Lezioni di Dirichlet.)

(2) [Nel testo non si fa sufficientemente attenzione al fatto che il gruppo proposto può contenere dei così detti sottogruppi *eccezionali*. Se una forma geometric rimane inalterata nelle operazioni di un sottogruppo eccezionale, lo stesso ha luogo per tutte quelle che se ne ricavano mediante le operazioni del gruppo intero, ossia per tutte le forme del corpo che da essa risulta. Ora un corpo così costituito sarebbe affatto improprio a rappresentare le operazioni del gruppo. Non si deve dunque tener conto nel testo che dei corpi risultanti da elementi dello spazio i quali non si conservino inalterati in alcun sottogruppo eccezionale del gruppo proposto.]

sulla teoria generale dei sistemi ortogonali; inoltre ricerche sul potenziale, ecc. Se le considerazioni contenutevi non furono per anco, come le proiettive, riunite in una Geometria speciale, *che avrebbe allora per gruppo fondamentale il complesso dei mutamenti che risultano dalla composizione del gruppo principale colle trasformazioni per raggi reciproci,* questo bisogna certo attribuirlo al fatto causale, che le dette teorie non vennero finora esposte con connessione; ma i singoli autori che si occuparono di questo ramo non saranno stati lungi da una tale considerazione metodica.

Il confronto fra questa geometria dei raggi reciproci e la proiettiva si presenta da sè, appena si domandi un paragone; e perciò qui richiameremo solo l'attenzione affatto in generale sui punti seguenti:

Nella geometria proiettiva i concetti elementari sono quelli di punto, di retta, di piano. Il cerchio e la sfera sono solo casi particolari della conica e della quadrica. L'infinito della geometria elementare appare siccome un piano; la forma fondamentale a cui si riferisce la geometria stessa è una conica immaginaria all'infinito.

Nella geometria dei raggi reciproci i concetti elementari sono punto, cerchio, sfera. Retta e piano sono casi particolari di questi ultimi, caratterizzati dal fatto di contenere un certo punto — quello all'infinito — che del resto, secondo lo spirito di quel metodo, non è ulteriormente distinto dagli altri. La geometria elementare sorge allorquando ci immaginiamo questo punto come fisso.

La geometria dei raggi reciproci è suscettibile di una rappresentazione che l'avvicina alla teoria delle forme binarie e alla geometria della retta, qualora si sviluppi questa nel modo indicato dal paragrafo precedente. A tale scopo restringeremo la considerazione anzitutto alla geometria piana, e per conseguenza alla geometria dei raggi reciproci nel piano (¹).

Si è già considerata la connessione che esiste fra la geometria elementare del piano e la geometria proiettiva su di una quadrica in cui si sia distinto un punto. Astraendo da quest'ultimo, e studiando quindi la geometria proiettiva sulla superficie a sè, si ha un'immagine della geometria dei raggi reciproci nel piano. Infatti è facile persuadersi (²) che, in virtù della rappresen-

(¹) La geometria dei raggi reciproci sulla retta è equivalente alla trattazione proiettiva di quest'ultima, essendo le relative trasformazioni le stesse. Anche nella geometria dei raggi reciproci si può quindi parlare del *doppio rapporto* di quattro punti di una retta, e poi di un cerchio.

(²) V. il lavoro già citato: « *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie* ». Math. Annalen, Bd. V.

tazione della quadrica, al gruppo di trasformazioni per raggi reciproci nel piano corrisponde il complesso delle trasformazioni lineari di quella quadrica in sè medesima. Abbiamo dunque:

La geometria dei raggi reciproci nel piano e la geometria proiettiva su di una quadrica sono la stessa cosa;

ed in modo affatto analogo:

La geometria dei raggi reciproci nello spazio si identifica colla trattazione proiettiva di una varietà rappresentata da un' equazione omogenea di secondo grado fra cinque variabili.

La geometria dello spazio è messa dunque, mediante quella dei raggi reciproci, in relazione con una varietà a quattro dimensioni, nello stesso modo in cui [mediante la geometria projettiva] è messa con altra a cinque dimensioni.

La geometria dei raggi reciproci nel piano — finchè si vogliono considerare solo le trasformazioni *reali* — permette di fare anche da un altro lato una rappresentazione ed applicazione interessante. Infatti, distendendo una variabile complessa $x + iy$ nel piano al modo solito, alle sue trasformazioni lineari corrisponde il gruppo dei raggi reciproci, colla detta restrizione alla realtà (1). Ma lo studio delle funzioni di una variabile complessa, supposta soggetta a trasformazioni lineari arbitrarie, non è altro che ciò che, in un modo d'esposizione un poco diverso, si chiama teoria delle forme binarie. Dunque:

La teoria delle forme binarie trova la sua rappresentazione nella geometria dei raggi reciproci del piano reale, e precisamente in modo che anche i valori complessi delle variabili vi vengono rappresentati.

Dal piano possiamo ora salire alla quadrica, per riescire nell'abituale cerchia di vedute delle trasformazioni proiettive. Siccome noi consideravamo soli elementi reali del piano, non sarà più indifferente la scelta della quadrica, la quale evidentemente non dovrà essere rigata. In particolare possiamo assumere una sfera — come si fa anche del resto per l'interpretazione di una variabile complessa — e otteniamo per tal modo la proposizione seguente:

---

(1) [Il modo di esprimersi del testo non è esatto. Alle trasformazioni lineari $z' = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ (in cui $z' = x' + iy'$, $z = x + iy$) corrispondono quelle sole operazioni del gruppo dei raggi reciproci, nelle quali non ha luogo alcun rovesciamento degli angoli (in cui i due punti ciclici del piano non si scambiano tra di loro). Volendo abbracciare il gruppo complessivo dei raggi reciproci, bisogna considerare, accanto alle trasformazioni menzionate, anche le altre (non meno importanti) $z' = \dfrac{\alpha \bar{z} + \beta}{\gamma \bar{z} + \delta}$, in cui di nuovo $z' = x' + iy'$, ma $\bar{z} = x - iy$.]

La teoria delle forme binarie a variabili complesse trova la sua rappresentazione nella geometria proiettiva della superficie sferica reale.

Non ho potuto rifiutarmi di esporre altresì in una nota (v. nota VII) come questa rappresentazione dilucidi bene la teoria delle forme binarie cubiche e biquadratiche.

§ 7.

Estensione delle cose precedenti. Geometria delle sfere di Lie.

La teoria delle forme binarie, la geometria dei raggi reciproci e la geometria della retta, che furono coordinate negli scorsi paragrafi e appaiono diverse solo pel numero delle variabili, sono suscettibili di talune estensioni che adesso andremo esponendo. Esse devono contribuire a chiarire con nuovi esempi il concetto, che il gruppo il quale stabilisce la maniera di trattare campi dati può essere esteso a piacimento; aggiungasi poi particolarmente l'intenzione di stabilire, nel loro rapporto con queste riflessioni, talune considerazioni contenute in una recente Memoria del Lie [1]. La via per cui noi giungeremo alla geometria delle sfere di Lie differisce alquanto da quella battuta da quest'ultimo, in quanto che egli si appoggia a nozioni di geometria della retta, mentre noi, per attenerci maggiormente all'intuizione geometrica ordinaria e connetterci a quanto precede, assumiamo per la spiegazione relativa un numero inferiore di variabili. Le considerazioni, come già lo stesso Lie ha messo in evidenza (Göttinger Nachrichten, 1871, N. 7, 22), sono indipendenti dal numero delle variabili. Esse appartengono alla gran cerchia di investigazioni che si occupano dello studio in via proiettiva di equazioni di secondo grado a quante si vogliano variabili, ricerche a cui già spesso abbiamo accennato, e che incontreremo ancora più volte (v. § 10 ed altri).

Io parto dalla connessione che può stabilirsi fra il piano reale e la superficie sferica mediante la proiezione stereografica. Già nel § 5 abbiamo riferite fra loro la geometria del piano e quella della conica, facendo corrispondere ad ogni retta del piano la coppia di punti in cui essa taglia la conica medesima. In modo analogo possiamo stabilire una connessione fra la geometria dello spazio e quella della sfera, facendo corrispondere ad ogni piano dello spazio il cerchio in cui esso sega la sfera. Trasportando poi la geometria della

(1) *Partielle Differentialgleichungen und Complexe.* Math. Annalen, Bd. V.

sfera da questa al piano mediante la proiezione stereografica, con che ogni cerchio si trasforma in un cerchio, vengono così a corrispondersi:

la geometria dello spazio — che adopera come elemento il piano, come gruppo quelle trasformazioni lineari che lasciano inalterata una sfera;

la geometria piana — avente per elemento il cerchio e per gruppo quello dei raggi reciproci.

Vogliamo ora generalizzare da due lati la prima di queste geometrie, sostituendo al suo gruppo un altro più ampio. L'estensione che ne risulterà si potrà poi senz'altro trasportare alla geometria piana mediante quella rappresentazione.

In luogo delle trasformazioni lineari dello spazio di piani che mutano in sè stessa la sfera, possiamo, senza discostarcene molto, scegliere o l'insieme delle trasformazioni lineari dello spazio, ovvero il complesso delle trasformazioni di piani che [in un senso che va ancora precisato] lasciano inalterata la sfera; astraendo con ciò, l'una volta dalla sfera, l'altra dal carattere lineare delle trasformazioni da applicarsi. La prima generalizzazione si comprende senz'altro, e per questo la considereremo subito, studiandone il significato per la geometria piana; sulla seconda ritorneremo dopo, trattandosi allora di determinare anzitutto la trasformazione più generale che le corrisponde.

Le trasformazioni lineari dello spazio hanno comune la proprietà di mutare fasci e stelle di piani rispettivamente in fasci e in stelle. Ma, trasportato sulla sfera, il fascio di piani dà un fascio di cerchi, ossia una serie semplicemente infinita di cerchi che si tagliano negli stessi punti. La stella di piani dà una stella di cerchi, ossia un sistema di cerchi in numero doppiamente infinito, che tagliano ortogonalmente un cerchio fisso — quello, il cui piano ha per polo il centro della stella di piani. Alle trasformazioni lineari dello spazio corrispondono dunque sulla sfera, e quindi nel piano, trasformazioni di cerchi aventi la proprietà caratteristica di mutare fasci e stelle di cerchi rispettivamente in sistemi della stessa natura (1). *La geometria piana che adopera il gruppo delle trasformazioni così ottenute è l'immagine dell'ordinaria geometria proiettiva dello spazio.* Come elemento del piano non potremo prendere in questa geometria il punto, perchè i punti, rispetto a quel gruppo di trasformazioni, non formano un corpo (§ 5); sceglieremo invece come elementi i cerchi.

(1) Queste trasformazioni sono considerate occasionalmente nell'« *Ausdehnungslehre* » del Grassmann (ediz. del 1862, pag. 278).

Nella seconda estensione che abbiamo detta bisogna anzitutto rispondere alla domanda sulla natura del corrispondente gruppo di trasformazioni. Si tratta di trovare trasformazioni di piani tali che ogni [fascio di piani coll'asse tangente alla] sfera dia luogo ad un [altro fascio] similmente posto. Per brevità d'espressione possiamo dapprima trasformare la questione per dualità, e inoltre discendere di un passo nel numero delle dimensioni; cercheremo quindi quali siano quelle trasformazioni puntuali (cioè di punti) nel piano, che ad ogni tangente di una data conica fanno corrispondere un'altra tangente di questa. A tale scopo consideriamo il piano colla sua conica come immagine di una quadrica proiettata da un punto dello spazio che non si trovi su di essa, per modo che quella conica rappresenti la curva di passaggio. Alle tangenti della conica corrisponderanno le generatrici della quadrica, e la questione proposta sarà ridotta a quest'altra: quale sia il complesso delle trasformazioni puntuali della quadrica in sè stessa, in cui le generatrici rimangono tali.

Ora di tali trasformazioni ve ne sono tante quante si vuole; infatti basta considerare il punto della superficie come intersezione delle generatrici dei due sistemi, e trasformare poi in sè stesso ciascuno di questi in un modo qualunque. Ma fra queste trasformazioni vi sono in particolare quelle lineari, e a queste solo vogliamo badare. E ciò perchè se non avessimo a che fare con una superficie, ma con una varietà a più dimensioni rappresentata da un'equazione di secondo grado, resterebbero le sole trasformazioni lineari, e le altre scomparirebbero (1).

Queste trasformazioni lineari della superficie in sè stessa trasportate nel piano per proiezione (non stereografica) dànno una trasformazione puntuale doppia, in forza della quale ad ogni tangente alla conica di passaggio corrisponde bensì di nuovo una tangente a questa, ma ad ogni altra retta corrisponde in generale una conica che ha un doppio contatto colla curva di passaggio. Questo gruppo di trasformazioni si può caratterizzare in modo molto conveniente, istituendo una determinazione metrica proiettiva basata sulla conica di passaggio. Le trasformazioni hanno allora la proprietà di mutare punti aventi, nel concetto di quella determinazione metrica, distanza nulla, ovvero punti aventi distanza costante da un altro punto fisso, in altri per cui si verifica la stessa proprietà.

(1) Proiettando stereograficamente la varietà, si ottiene il noto teorema: In varietà a più dimensioni (e già nello spazio) non vi sono altre trasformazioni conformi di punti, all'infuori di quelle comprese nel gruppo dei raggi reciproci. Nel piano invece ve ne sono quante se ne vogliono di altre. Cfr. anche i citati lavori del Lie.

Tutte queste considerazioni si possono trasportare al caso di quante si vogliano variabili; valgono quindi in particolare per la questione posta da principio e relativa alla sfera e al piano come elemento. Al risultato si può dare una forma particolarmente intuitiva, perchè l'angolo di due piani nella determinazione metrica proiettiva basata sopra di una sfera è uguale a quello (nel senso ordinario) dei cerchi secondo cui essi intersecano la sfera medesima.

Otteniamo quindi sulla sfera, e di qua sul piano, un gruppo di trasformazioni di cerchi aventi la proprietà di *trasformare cerchi tangenti (ad angolo nullo) e cerchi che ne tagliano uno fisso sotto uno stesso angolo rispettivamente in cerchi che si trovano nelle medesime condizioni.* Nel gruppo di queste trasformazioni sono comprese quelle lineari per la sfera e quelle dei raggi reciproci nel piano (1).

Ora la geometria dei cerchi che si può fondare su questo gruppo è l'analoga della *geometria delle sfere,* che Lie ha delineata per lo spazio, e che appare di segnalata importanza per le ricerche sulla curvatura delle superficie. Essa comprende la geometria dei raggi reciproci nello stesso senso in cui questa comprende a sua volta la geometria elementare. —

Le trasformazioni circolari (sferiche) ora studiate hanno in particolare la proprietà di trasformare cerchi (sfere) tangenti in altri pure tangenti. Se consideriamo tutte le curve (superficie) come inviluppi di cerchi (sfere), ne segue che due curve (superficie) tangenti verranno sempre trasformate in altre che

(1) [Le considerazioni del testo potrebbero rendersi essenzialmente più chiare aggiungendovi talune formole analitiche. Sia

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2=0,$$

l'equazione, nelle ordinarie coordinate tetraedriche, della sfera che riferiamo stereograficamente al nostro piano. Le x soggette a questa relazione di condizione acquistano allora per noi il significato di coordinate tetracicliche nel piano, e

$$u_1x_1+u_2x_2+u_3x_3+u_4x_4=0,$$

diventa l'equazione generale del cerchio nel piano. Calcolando il raggio del cerchio così rappresentato, si viene ad incontrare la radice quadrata

$$\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2},$$

che indicheremo con iu_5. Possiamo ora considerare i cerchi come elementi del piano. Il gruppo dei raggi reciproci si presenta allora come il complesso delle trasformazioni lineari omogenee di $u_1\ u_2\ u_3\ u_4$ in cui $u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2$ si cambia in un proprio multiplo. Invece il gruppo più esteso che corrisponde alla geometria delle sfere di Lie si compone delle trasformazioni lineari delle *cinque* variabili $u_1\ u_2\ u_3\ u_4\ u_5$ che mutano $u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2$ in un multiplo di sè stesso.]

si troveranno nelle stesse condizioni. Le trasformazioni in questione appartengono dunque alla categoria, che considereremo più innanzi in generale, delle *trasformazioni di contatto,* cioè delle trasformazioni tali che il contatto tra forme costituite da punti è una proprietà invariantiva. Le trasformazioni circolari menzionate per le prime in questo paragrafo, accanto alle quali se ne possono porre di analoghe per le sfere, non sono trasformazioni di contatto. —

Le due sorta di estensioni che abbiamo collegate soltanto alla geometria dei raggi reciproci valgono anche in modo analogo per la geometria della retta, e in generale per lo studio proiettivo di una varietà separata mediante un'equazione di secondo grado, come già abbiamo accennato, nè qui ne tratteremo più a lungo.

§ 8.

Enumerazione di metodi ulteriori che hanno a fondamento un gruppo di trasformazioni puntuali.

La geometria elementare, quella dei raggi reciproci, ed anche la geometria proiettiva, astraendo dalle trasformazioni reciproche che portano con sè un cambio nell'elemento dello spazio, sono tutte comprese come singole parti nella gran moltitudine immaginabile di maniere di trattazione che pongono a fondamento in generale gruppi di trasformazioni puntuali. Metteremo qui in evidenza solo i tre metodi seguenti, che in ciò coincidono con quelli nominati. Benchè questi metodi siano ancora ben lungi dall'essere sviluppati in discipline indipendenti come la geometria proiettiva, pure essi compaiono, chiaramente riconoscibili, nelle ricerche più recenti (1).

1. *Gruppo delle trasformazioni razionali.*

Nelle trasformazioni razionali bisogna distinguer bene se queste sono razionali per *tutti* i punti del campo in cui si opera, e quindi dello spazio, del piano, ecc. oppure solo per i punti di una varietà contenuta nel campo stesso, ad es. di una superficie, di una curva. Solo le prime sono da applicarsi quando si tratta di delineare, nel senso inteso finora, una geometria dello spazio o del piano: le altre acquistano importanza sotto il punto di vista qui dato solo

(1) [Mentre negli esempi dati fin qui si trattava di gruppi con un numero finito di parametri, ora compajono nelle considerazioni del testo dei così detti gruppi infiniti.]

quando deve essere studiata la geometria su di una data superficie o curva. La stessa distinzione vale per l'*Analysis situs*, di cui tosto tratteremo.

Però le ricerche fatte finora, qui e là, si sono occupate essenzialmente di trasformazioni della seconda specie. Tali ricerche escono dal campo di quelle che qui dobbiamo considerare, la questione lì non essendo relativa alla geometria sulla superficie o sulla curva, ma trattandosi piuttosto di trovare criterii per cui due superficie o curve potessero essere trasformate l'una nell'altra (1). Lo schema generale che in questo lavoro si stabilisce non abbraccia già in massima il complesso di tutte le ricerche matematiche, ma riunisce solamente certi indirizzi sotto un punto di vista comune.

Per una geometria delle trasformazioni razionali, quale dovrebbe ottenersi ponendo le trasformazioni della prima specie come fondamentali, esistono finora solo i principii. Nelle forme di prima specie, sulla punteggiata ad es., le trasformazioni razionali sono identiche alle lineari, e non dànno perciò nulla di nuovo. Nel piano si conosce bensì il complesso delle trasformazioni razionali (le trasformazioni *Cremoniane*), e si sa che si ottengono mediante composizioni di quelle quadratiche. Si conoscono anche caratteri invariantivi delle curve piane; il loro genere, l'esistenza dei moduli; ma tali considerazioni non furono ancora svolte propriamente in una geometria del piano nel senso qui inteso. Nello spazio l'intera teoria è appena al suo sorgere: delle trasformazioni razionali se ne conoscono finora solo poche, e queste si adoperano per mettere in relazione, mediante la rappresentazione, superficie note con altre ignote.

2. *Analysis situs.*

Nella così detta *Analysis situs* si cerca ciò che rimane in seguito a mutamenti risultanti dalla composizione di deformazioni infinitesime. Anche qui, come già si è detto, bisogna distinguere se dobbiamo supporre oggetto della

(1) [Da un altro lato esse trovano posto di nuovo e benissimo fra le considerazioni del testo, cosa che nel 1872 non mi era ancor nota. Data una forma algebrica qualunque (curva, o superficie, ecc.), la si trasporti in uno spazio superiore, introducendo come coordinate i rapporti

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \dots\dots\dots : \varphi_p ,$$

dei relativi integrandi di prima specie. In questo spazio non abbiamo allora che da mettere semplicemente a base della considerazione ulteriore il gruppo delle trasformazioni lineari omogenee delle φ. Vedi diversi lavori dei sig.i Brill, Nöther e Weber, come pure la mia recente Memoria: *Zur Theorie der Abel'schen Functionen,* nel vol. 36 dei Math. Annalen.]

trasformazione tutto il campo, quindi ad es. lo spazio, o solo una varietà in esso contenuta, per es. una superficie. Le trasformazioni della prima specie sono quelle che si potrebbero mettere a base di una geometria dello spazio. Il loro gruppo sarebbe costituito in modo essenzialmente diverso da quelli considerati finora. Abbracciando tutte quelle variazioni che si compongono mediante trasformazioni puntuali infinitamente piccole supposte reali, il gruppo stesso porta con sè per principio la restrizione ad elementi reali dello spazio, e ci conduce nel campo della funzione arbitraria. Si può estendere in modo conveniente questo gruppo di trasformazioni, collegandolo ancora alle collineazioni reali che modificano anche gli elementi all'infinito.

3. *Gruppo di tutte le trasformazioni puntuali.*

Quantunque rispetto a questo gruppo nessuna superficie possegga più proprietà particolari, potendo una qualunque, con trasformazioni di esso, dar luogo ad ogni altra, vi sono tuttavia forme più elevate, nel cui studio questo gruppo trova applicazione vantaggiosa. Nella trattazione della geometria che qui è posta a fondamento può essere indifferente che queste forme finora siano state considerate, non tanto come geometriche, ma solo come forme analitiche le quali trovarono per caso applicazione geometrica, e che nel loro studio si siano usati processi (come appunto trasformazioni puntuali arbitrarie) che solo negli ultimi tempi si sono cominciati a considerare come trasformazioni geometriche. Tra queste forme analitiche vi sono anzitutto le espressioni differenziali omogenee, e subito dopo anche le equazioni alle derivate parziali. Nella discussione generale di queste sembra però, come verrà esposto nel paragrafo seguente, che il gruppo più esteso costituito da tutte le trasformazioni di contatto sia ancora più vantaggioso.

Il teorema principale che sussiste nella geometria basata sul gruppo di tutte le trasformazioni puntuali è che *una trasformazione puntuale per una porzione infinitesima dello spazio è sempre equivalente ad una trasformazione lineare.* Le teorie della geometria proiettiva ricevono così applicazione all'infinitesimo, e *in ciò riposa* — sia pur arbitraria la scelta del gruppo nella trattazione della varietà — *un carattere distintivo della trattazione proiettiva.*

Ed ora, dopo che già da lungo tempo più non parlavamo del rapporto di trattazioni, i cui gruppi fondamentali si comprendono a vicenda, daremo qui un nuovo esempio della teoria generale del § 2. Proponiamoci la questione, come debbansi concepire le proprietà proiettive dal punto di vista di « tutte le trasformazioni puntuali », astraendo in ciò dalle trasformazioni reciproche, che veramente appartengono pure al gruppo della geometria proiettiva. La questione coincide allora con quest'altra: con quale condizione dal complesso delle trasformazioni puntuali si possa separare il gruppo di quelle lineari. Caratteristica di queste si è di far corrispondere ad ogni piano un piano; esse sono quelle trasformazioni puntuali mediante cui si conserva la varietà dei piani (ovvero, il che fa lo stesso, delle rette). *La geometria proiettiva si ottiene dunque da quella di tutte le trasformazioni puntuali coll'aggiunta della varietà dei piani, nello stesso modo in cui la geometria elementare si ha dalla proiettiva mediante l'aggiunta del cerchio immaginario all'infinito.* In particolare, dal punto di vista di tutte le trasformazioni puntuali, dobbiamo concepire per es. la designazione di una superficie quale algebrica e di un certo ordine come una relazione invariantiva rispetto alla varietà dei piani. Questo diventa ben chiaro quando, seguendo il Grassmann, si deriva la generazione delle forme algebriche dalla loro costruzione lineale.

§ 9.

Sul gruppo di tutte le trasformazioni di contatto.

A dir vero le trasformazioni di contatto furono già da lungo tempo considerate in casi particolari; anche Jacobi fece già uso di quelle più generali in ricerche analitiche; ma nella vera intuizione geometrica esse furono introdotte soltanto con recenti lavori del Lie (1). Non è perciò punto superfluo di spiegare qui espressamente cosa sia una trasformazione di contatto; e in questo, come sempre, ci limiteremo allo spazio punteggiato colle sue tre dimensioni.

Per trasformazione di contatto deve intendersi, analiticamente parlando, qualunque sostituzione capace di esprimere i valori delle variabili x, y, z e le loro derivate parziali $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$ mediante nuove x', y', z', p', q'. Allora è evidente che superficie tangenti si trasformano in generale di nuovo in su-

(1) Vedi il lavoro già citato: *Ueber partielle Differentialgleichungen und Complexe,* Math. Annalen, Bd. V. — Quanto dico nel testo relativamente alle equazioni alle derivate parziali l'ho desunto essenzialmente da comunicazioni orali del Lie. Vedi la nota di lui: *Zur Theorie partieller Differentialgleichungen.* Göttinger Nachrichten. Oct. 1872.

perficie tangenti, il che dà ragione del nome di trasformazioni di contatto. Partendo dal punto come elemento dello spazio, le trasformazioni di contatto si dividono in tre classi; quelle che ai punti, in numero triplicemente infinito, fanno corrispondere ancora punti, — e queste sono le trasformazioni puntuali testè considerate —, quelle che li trasformano in curve, e finalmente quelle che li mutano in superficie. Questa divisione non deve considerarsi come essenziale, in quanto che, usando per lo spazio altri elementi, pure in numero tre volte infinito, per es. i piani, si presenta bensì ancora una divisione in tre gruppi, la quale però non coincide con quella che aveva luogo in base alla considerazione dei punti.

Applicando ad un punto tutte le trasformazioni di contatto, esso dà luogo al complesso di tutti i punti, curve e superficie. Punti, curve, superficie formano dunque tutti assieme un *corpo* del nostro gruppo. Da ciò possiamo desumere la regola generale, che la trattazione formale di un problema in relazione a tutte le trasformazioni di contatto (e quindi per es. la teoria delle equazioni alle derivate parziali che tosto accenneremo) deve restare incompiuta finchè si opera con sole coordinate di punti (o di piani), poichè gli elementi dello spazio posti a fondamento non costituiscono punto un corpo.

Non è possibile però, volendo restare in connessione coi metodi ordinarii, di introdurre come elementi dello spazio tutti gli individui contenuti nel detto corpo, essendo il loro numero infinite volte infinito. Da ciò la necessità di introdurre in tali considerazioni come *elemento dello spazio,* non già il punto, la curva o la superficie, ma l'*elemento superficiale,* ossia il sistema di valori di x, y, z, p, q. In qualunque trasformazione di contatto da ogni elemento superficiale se ne ha un altro; tali elementi, in numero cinque volte infinito, formano dunque un corpo.

Sotto questo punto di vista bisogna concepire egualmente il punto, la curva e la superficie come aggregati di elementi superficiali, e precisamente in numero due volte infinito. Infatti la superficie vien ricoperta da ∞^2 di tali elementi, la curva toccata da altrettanti, e altrettanti ne passano per il punto. Ma questi aggregati di ∞^2 elementi hanno comune ancora una proprietà caratteristica. Si chiami *posizione unita* di due elementi superficiali consecutivi x, y, z, p, q e $x+dx$, $y+dy$, $z+dz$, $p+dp$, $q+dq$ la relazione rappresentata da

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0.$$

Allora il punto, la curva e la superficie sono tutti egualmente *varietà ad* ∞^2

elementi, di cui ciascuno giace in posizione unita cogli ∞^1 *suoi vicini.* Per tal modo punto, curva, superficie sono caratterizzati in una stessa maniera, e così devono anche essere rappresentati analiticamente, se si vuol assumere come fondamentale il gruppo delle trasformazioni di contatto.

La posizione unita di elementi consecutivi è una relazione invariantiva per qualunque trasformazione di contatto. Anche reciprocamente però le trasformazioni di contatto possono definirsi siccome *quelle sostituzioni delle cinque variabili* x, y, z, p, q, *mediante cui la relazione* $dz - p dx - q dy = 0$ *viene trasformata in sè stessa.* In tali ricerche adunque lo spazio deve considerarsi come una varietà a cinque dimensioni, varietà da trattarsi prendendo per gruppo fondamentale il complesso di tutte le trasformazioni delle variabili che lasciano inalterata una relazione determinata fra i differenziali.

Saranno in primo luogo oggetto dello studio quelle varietà che si rappresentano con una o più equazioni fra le variabili, ossia *le equazioni alle derivate parziali di primo ordine ed i loro sistemi.* Una questione capitale si è quella, in qual modo dalle varietà di elementi che soddisfanno a date equazioni si possano separare serie semplicemente o doppiamente infinite di elementi, di cui ciascuno sia in posizione unita con un vicino. A una tale questione si riduce per es. il problema della risoluzione di un'equazione alle derivate parziali di primo ordine. Possiamo formularlo così: Fra gli ∞^4 elementi che verificano l'equazione separare tutte le varietà a due dimensioni della detta specie. In particolare, il problema della soluzione completa assume ora questa forma precisa: eseguire una ripartizione degli ∞^4 elementi che verificano l'equazione in un numero doppiamente infinito di siffatte varietà.

Qui non può essere nostra intenzione di proseguire tale considerazione sulle equazioni alle derivate parziali; a questo proposito rinvio ai citati lavori del Lie. Metteremo solo ancora in evidenza che, sotto il punto di vista delle trasformazioni di contatto, un'equazione alle derivate parziali di primo ordine non ha invarianti, che ciascuna può essere trasformata in ogni altra, e che quindi in particolare le equazioni lineari non hanno nulla di speciale. Differenze si introducono solo quando si ritorna al punto di vista delle trasformazioni puntuali.

I gruppi delle trasformazioni di contatto, di quelle puntuali ed infine delle trasformazioni proiettive sono caratterizzabili in un modo unico che qui non posso omettere (1). Le trasformazioni di contatto si sono definite siccome quelle

(1) Queste definizioni le devo ad un'osservazione di Lie.

in cui si conserva la posizione unita di elementi superficiali consecutivi. Le trasformazioni puntuali hanno invece la proprietà caratteristica di mutare elementi lineari consecutivi in posizione unita in altrettali: e finalmente le collineazioni e le reciprocità conservano la posizione unita di elementi di connesso consecutivi. Intendiamo per « elemento di connesso » l'unione di un elemento superficiale con uno lineare in esso contenuto; ed elementi di connesso consecutivi si diranno in posizione unita quando non solo il punto, ma anche l'elemento lineare dell'uno è contenuto in quello superficiale dell'altro. La denominazione (del resto provvisoria) di « elemento di connesso » si riferisce alle forme recentemente introdotte da Clebsch nella Geometria (1), che si rappresentano mediante un'equazione contenente nel tempo stesso serie di coordinate di punti, di piani e di rette, ed i cui analoghi nel piano Clebsch chiama « connessi ».

§ 10.

Sulle varietà a quante si vogliano dimensioni.

Già più volte abbiamo notato che, nel collegare le spiegazioni date finora alla concezione dello spazio, noi non avevamo altro scopo che di poter più facilmente svolgere i concetti astratti coll'appoggiarci ad esempi visibili. Per sè, le considerazioni sono indipendenti dalla figura sensibile, e appartengono al campo generale di ricerche matematiche, che si chiama teoria delle varietà estese, o brevemente (secondo il Grassmann) scienza dell'estensione (*Ausdehnungslehre*). È evidente in qual modo si debba riportare quanto precede dallo spazio al puro concetto di varietà. Ed osserviamo qui ancora una volta che nella ricerca astratta abbiamo, rispetto alla geometria, il vantaggio di poter scegliere affatto ad arbitrio il gruppo di trasformazioni che vogliamo assumere come fondamentale, mentre nella geometria era dato a priori un gruppo assai ristretto, il gruppo principale.

Accenneremo qui ancora solo, ed anche assai brevemente, ai tre metodi di trattazione seguenti.

(1) Gött. Abhandlungen, 1872 (Bd. 17): *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie,* come pure: Gött. Nachrichten, 1872, Nr. 22: *Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie des Raumes.*

1. *Trattazione proiettiva, ovvero algebra moderna. (Teoria degli invarianti.)*

Il suo gruppo si compone del complesso delle trasformazioni lineari e reciproche delle variabili usate per la rappresentazione dell'elemento nella varietà; essa è la generalizzazione della geometria proiettiva. Già si è rilevato come questa specie di trattazione possa applicarsi alla discussione dell'infinitesimo in una varietà con una dimensione di più. Essa comprende le due specie di trattazione che ancora dobbiamo menzionare, in quanto che il suo gruppo abbraccia i gruppi fondamentali di queste.

2. *Varietà a curvatura costante.*

Il concetto di una tale varietà sorse in Riemann, derivando da quello più generale di una varietà in cui è data un'espressione differenziale delle variabili. Il gruppo consiste per lui nell'insieme delle trasformazioni delle variabili che lasciano inalterata l'espressione proposta. Alla rappresentazione di una varietà a curvatura costante si giunge da un altro lato, qualora si istituisca una determinazione metrica nel senso proiettivo basata su di una data equazione di secondo grado fra le variabili. In questo modo si introduce un'estensione, di fronte al modo del Riemann, in quanto che le variabili si suppongono complesse; però si può poi restringere la variabilità al campo reale. A questo ramo appartiene la gran serie di ricerche che abbiamo accennate nei §§ 5, 6, 7.

3. *Varietà piana.*

Varietà piana è chiamata dal Riemann quella a curvatura costante e nulla. La sua teoria è l'immediata generalizzazione della geometria elementare. Il suo gruppo, — come il gruppo principale della geometria —, può esser separato da quello della geometria proiettiva col tener fissa una forma rappresentata da due equazioni, una di secondo ed una di primo grado. In ciò si deve poi far distinzione fra reale e immaginario, qualora si voglia attenersi alla forma sotto cui la teoria viene di solito esposta. Qui sono da porsi anzitutto la geometria elementare stessa, poi per es. le generalizzazioni dell'ordinaria teoria della curvatura sviluppate negli ultimi tempi, ecc.

Osservazioni finali.

Per finire, potremo fare ancora due osservazioni, le quali sono in istretta relazione con quanto si è esposto finora; l'una si riferisce al formalismo con cui si debbono rappresentare gli sviluppi relativi alle cose precedenti; l'altra deve porre in evidenza alcuni problemi, la cui considerazione dopo le spiegazioni che qui furon date appare importante e vantaggiosa.

Spesso si è fatto alla geometria analitica il rimprovero di avvantaggiare elementi arbitrarii coll'introduzione del sistema di coordinate, e questo rimprovero colpisce parimente tutte le trattazioni di varietà estese che caratterizzano l'elemento mediante i valori di certe variabili. Se un tale rimprovero era troppo spesso giustificato dal modo difettoso con cui, specialmente in principio, si maneggiava il metodo delle coordinate, esso però vien meno dinanzi ad una trattazione razionale del metodo stesso. Le espressioni analitiche che possono sorgere nello studio di una varietà in relazione ad un certo gruppo, devono essere, per quel che riguarda il loro significato, indipendenti dal sistema di coordinate, in quanto che questo è scelto a caso, e si tratta quindi di render evidente anche nella forma tale indipendenza. Che ciò sia possibile, e come s'abbia a fare, lo mostra l'algebra moderna, in cui la nozione formale di invariante, di cui qui si tratta, sta impressa in una maniera più chiara che mai. Essa possiede una legge di formazione generale e completa delle espressioni invariantive, ed opera per principio con queste sole. La stessa questione deve porsi nella trattazione formale anche quando si hanno gruppi fondamentali diversi dal proiettivo (1). Poichè il formalismo deve identificarsi colla concezione, sia che si voglia considerarlo solo come espressione precisa e chiara di quest'ultima, sia che vogliamo servircene per penetrare col suo mezzo in campi inesplorati.

Per stabilire i problemi di cui vogliamo ancora far menzione occorre un confronto fra le osservazioni esposte e la così detta teoria delle equazioni di Galois.

Nella teoria di Galois, come anche qui, l'importanza si concentra nei *gruppi* di mutamenti. Gli oggetti a cui si riferiscono i mutamenti sono bensì differenti; là si ha da fare con un numero finito di elementi discreti, qui invece col numero infinito degli elementi di una varietà continua Ma pos-

(1) [Ad esempio pel gruppo delle rotazioni dello spazio a tre dimensioni intorno ad un punto fisso i quaternioni forniscono un tale formalismo]

siamo tuttavia spinger oltre il confronto, a motivo dell'identità della nozione di gruppo (¹); e qui conviene accennarvi, tanto più che ne verrà caratterizzata la posizione da attribuirsi a talune ricerche incominciate da Lie e da me (²) in relazione alle considerazioni qui svolte.

Nella teoria del Galois, quale viene esposta per es. nel *Traité d'Algèbre supérieure* del Serret, oppure nel *Traité des substitutions* di C. Jordan, è oggetto proprio della ricerca la teoria stessa dei gruppi o delle sostituzioni, e quella delle equazioni ne scaturisce come un'applicazione. Analogamente noi vogliamo una *teoria delle trasformazioni*, una dottrina cioè dei gruppi che possono ottenersi con trasformazioni di data natura. I concetti di permutabilità, similitudine, ecc., vi troveranno applicazione come nella teoria delle sostituzioni. La trattazione delle varietà che nasce dal mettere a fondamento i gruppi di trasformazioni appare dunque come un'applicazione della teoria delle trasformazioni.

Nella teoria delle equazioni interessano anzitutto le funzioni simmetriche dei coefficienti, ma subito dopo quelle espressioni che rimangono inalterate, se non in tutte, almeno in gran parte degli scambi delle radici. Nella trattazione di una varietà con un certo gruppo come fondamentale noi cerchiamo analogamente anzitutto i corpi (§ 5) e le forme che rimangono inalterate in tutte le trasformazioni del gruppo. Vi sono però forme che ammettono non tutte, ma alcune delle trasformazioni del gruppo stesso, e queste offrono un'interesse speciale relativamente alla trattazione fondata su di esso, hanno cioè proprietà particolari. Questo equivale a mettere in evidenza per es. nella geometria ordinaria corpi simmetrici e regolari, superficie di rotazione ed elicoidali. Ponendosi invece dal punto di vista della geometria proiettiva, e richiedendo in particolare che le trasformazioni per cui le forme si mutano in sè stesse siano permutabili, si giunge alle forme considerate da Lie e da me nel lavoro citato, e al problema generale posto al § 6 di esso. La determinazione datavi nei §§ 1 e 3 di tutti i gruppi di infinite trasformazioni lineari permutabili nel piano è una parte della teoria generale delle trasformazioni testè menzionata (³).

(¹) Ricordo qui che Grassmann già nell'introduzione alla prima edizione della sua « *Ausdehnungslehre* » (1844) confronta l'analisi combinatoria colla scienza dell'estensione.

(²) Vedi la Memoria comune: *Ueber diejenigen ebenen Curven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen.* Math. Annalen, Bd. IV.

(³) Nel testo debbo astenermi dal mostrare il vantaggio che la considerazione delle trasformazioni infinitesime ha per la teoria delle equazioni differenziali. Nel § 7 del lavoro

NOTE.

I. *Sul contrasto fra l'indirizzo sintetico e quello analitico nella geometria moderna.*

La differenza fra la nuova geometria sintetica e la nuova geometria analitica non deve più considerarsi oggigiorno come essenziale, poichè i concetti e le argomentazioni si sono informati a poco a poco dall'una e dall'altra parte in modo affatto simile. Perciò noi scegliamo nel testo la denominazione di « geometria proiettiva » per indicarle entrambe. Se il metodo sintetico procede di più per mezzo dell'intuizione dello spazio, accordando così alle sue prime e semplici teorie un'attrattiva non comune, tuttavia il campo di tale intuizione non è chiuso al metodo analitico, e le formole della geometria analitica si possono concepire come espressione esatta e trasparente delle relazioni geometriche. D'altra parte non bisogna tenere in poco conto il vantaggio che un formalismo ben fondato offre al processo dell'investigazione, precedendo in certa misura il pensiero. Bisogna bensì attenersi sempre al principio di non considerare come esaurito un argomento matematico, finchè esso non è divenuto evidente nel concetto; e l'avanzare col mezzo del formalismo non è appunto che un primo passo, ma già molto importante.

II. *Distinzione della geometria odierna in discipline.*

Quando si osserva per es. come in generale il fisico matematico si priva dei vantaggi che in molti casi gli potrebbe accordare un'osservazione proiettiva anche poco sviluppata, e come d'altra parte il proiettivo non pon mano alla

citato LIE ed io abbiamo mostrato che: le equazioni differenziali ordinarie che ammettono eguali trasformazioni infinitesime presentano uguali difficoltà d'integrazione. In qual modo siano da usarsi tali considerazioni per le equazioni alle derivate parziali lo ha esposto LIE in luoghi diversi, fra gli altri nella Memoria menzionata dapprima (Math. Annalen, Bd. V) con vari esempi. (Vedi in particolare i Rendiconti dell'Accademia di Cristiania, maggio 1872.)

[Posso oggi accennare al fatto che appunto i due problemi menzionati nel testo han continuato a dar l'indirizzo ad una gran parte dei lavori ulteriori di LIE e miei. Già prima ho ricordata la pubblicazione del 1.° volume della *Theorie der Transformationsgruppen* del LIE. Quanto alle mie ricerche posteriori al presente scritto si possono quì considerare quelle sui corpi regolari, sulle funzioni modulari ellittiche ed in generale sulle funzioni univoche con trasformazioni lineari in sè stesse. Ho già esposte le prime nel 1884 in un'opera speciale: *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades* (Leipzig, 1884); un'esposizione rimaneggiata della teoria delle funzioni modulari ellittiche è appunto ora in corso di stampa.]

ricca fonte di verità matematiche che ha dato luogo alla scoperta della teoria della curvatura delle superficie, bisogna ben ammettere che lo stato attuale della scienza geometrica è assai imperfetto, e sperare ch'esso abbia in breve a migliorare.

III. *Sull'importanza dell'intuizione dello spazio.*

Se nel testo noi accenniamo all'intuizione dello spazio come a qualcosa di secondario, lo facciamo in relazione al contenuto puramente matematico delle considerazioni da formulare. L'intuizione ha per esso il solo scopo dell'evidenza, il quale però dal lato pedagogico è da stimarsi assai. Un modello geometrico per es. è sotto questo punto di vista assai istruttivo ed interessante.

Ben diversa però è la questione sull'importanza dell'intuizione geometrica in generale. Io la considero come una cosa che sta da sè. V'ha una geometria speciale che non vuol esser riguardata, come le ricerche discusse nel testo, quale forma intuitiva di considerazioni astratte. In essa si tratta di concepire assolutamente le figure dello spazio colle forme che esse hanno effettivamente, e di intendere (ed è quello il lato matematico) le relazioni che per esse sussistono come conseguenze evidenti dei postulati sull'intuizione dello spazio. Un modello, — sia pur eseguito ed osservato, oppure solo rappresentato con evidenza, — non è per questa geometria un mezzo per raggiungere lo scopo, ma lo scopo medesimo.

Istituendo per tal modo la geometria come qualcosa a sè, accanto alla matematica pura, ma indipendentemente da essa, non facciamo certo nulla di nuovo. È desiderabile però che si metta una buona volta ed espressamente in evidenza questo punto di vista, poichè l'investigazione recente lo omette quasi totalmente. E a questo si collega il fatto che inversamente l'investigazione stessa venne di rado usata a studiare le proprietà di forma degli enti dello spazio, benchè appaia di gran vantaggio appunto in questo indirizzo.

IV. *Sulle varietà a quante si vogliano dimensioni.*

Che lo spazio, concepito come luogo di punti, abbia solo tre dimensioni, dal punto di vista matematico non va discusso; ma nello stesso modo dal punto di vista matematico non possiamo impedire ad alcuno di asserire che lo spazio abbia invece quattro o un numero illimitato di dimensioni, ma che noi siamo in grado di percepirne solamente tre. La teoria delle varietà più volte estese, che vieppiù si presenta innanzi alle nuove ricerche matematiche, è nella sua essenza del tutto indipendente da una tale asserzione. Si è però naturalizzato in essa un modo di esprimersi che certamente proviene da quella rappresentazione. Si parla cioè, invece che degli individui di una varietà, dei punti di uno spazio superiore, ecc. Per sè, una tale espressione ha del buono, in quanto che, rammentando l'intuizione geometrica, facilita l'intelligenza. Ma essa ha avuta la conseguenza dannosa di far supporre a molti che le ricerche su varietà a quante si vogliano dimensioni fossero intimamente legate all'accennato concetto della natura dello spazio. Nulla è più privo di fondamento che una tale supposizione. Certo che le dette ricerche matematiche troverebbero subito applicazione geometrica se la rappresentazione fosse esatta, — ma il valore e lo scopo di esse riposano, affatto indipendentemente da una tale rappresentazione, nel loro proprio contenuto matematico.

Ben diverso da ciò è quanto insegnò Plücker, a concepire cioè lo spazio effettivo come una varietà a quante si vogliano dimensioni, introducendo come elemento di esso spazio (vedi § 5 del testo) una forma (curva, superficie, ecc.) dipendente da un numero arbitrario di parametri.

Il modo di rappresentazione che considera l'elemento della varietà comunque estesa come analogo al punto dello spazio fu svolto dapprima dal Grassmann nella sua « *Ausdehnungslehre* » (1844). In lui il pensiero è del tutto estraneo all'accennato concetto della natura dello spazio; questo rimonta ad osservazioni occasionali di Gauss, e divenne maggiormente noto in seguito alle ricerche di Riemann sulle varietà più volte estese, colle quali esso si è collegato.

L'uno e l'altro di questi concetti, — quello di Grassmann e quello di Plücker —, ha i suoi proprii vantaggi; ed essi si applicano alternativamente con profitto.

V. *Sulla così detta Geometria non Euclidea.*

La geometria metrica proiettiva di cui si parla nel testo coincide nella sua essenza, come hanno insegnato ricerche recenti, colla geometria metrica che si può svolgere col respingere l'assioma delle parallele, e che oggigiorno è molto discussa e agitata sotto il nome di « geometria non euclidea ». Se nel testo non abbiamo mai accennato a questo nome, si fu per un motivo che si avvicina alle spiegazioni date nella nota precedente. Si collegano col nome di geometria non euclidea una quantità d'idee non matematiche, che da un lato si curano con tanto zelo quanto dall'altro si disprezzano; ma con esse le nostre considerazioni puramente matematiche non hanno nulla a che fare. Il desiderio di apportare qualcosa a questo riguardo per rischiarare le idee dà ragione di quanto ora diremo.

Le ricerche sulla teoria delle parallele cui noi alludiamo hanno progredito in modo da raggiungere matematicamente da due lati un valore preciso.

Esse mostrano una buona volta — e questo loro ufficio può considerarsi come relativo al passato, ed ora esaurito — che l'assioma delle parallele non è conseguenza matematica di quelli che generalmente gli si premettono, ma che vi si manifesta un elemento di intuizione essenzialmente nuovo e non ancora toccato nelle ricerche precedenti. Studi consimili si potrebbero e si dovrebbero effettuare relativamente a ciascun assioma, e non solo della geometria; ci si guadagnerebbe in intelligenza nella reciproca posizione degli assiomi.

Inoltre tali ricerche ci hanno fatto dono di un prezioso concetto matematico, quello di una varietà a curvatura costante. Esso è legato più intimamente che mai, come già accennammo e come è meglio mostrato nel § 10 del testo, alla determinazione metrica proiettiva, sorta indipendentemente da ogni teoria delle parallele. Al fatto che lo studio di questa determinazione metrica offre di per sè un alto interesse matematico e permette numerose applicazioni, bisogna aggiungere che essa comprende come caso speciale (limite) la determinazione metrica data nella geometria, e ci insegna a concepirla da un punto di vista più elevato.

Del tutto indipendente da tali considerazioni è la questione, su quali fondamenti si appoggi l'assioma delle parallele; se dobbiamo considerarlo come dato in via assoluta — come vogliono gli uni — o solo come verificato approssimativamente dall'esperienza — come dicono gli altri —. Se vi fossero ragioni per accettare quest'ultima soluzione, le dette ricerche matematiche ci mostrerebbero in qual modo si avrebbe a costruire una geometria più esatta. Ma la suddetta è evidentemente una questione filosofica, che riguarda i fondamenti più generali delle nostre cognizioni. Il matematico *come tale* non s'interessa alla questione così posta, e desidera che le sue ricerche siano considerate come indipendenti da ciò che dall'una o dall'altra parte si potrà rispondere alla questione medesima.

VI. *Geometria della retta come studio di una varietà a curvatura costante.*

Nel mettere in relazione la geometria della retta colla determinazione metrica proiettiva in una varietà a cinque dimensioni, dobbiamo far attenzione al fatto che nelle rette abbiamo dinanzi a noi (nel senso della determinazione stessa) i soli elementi all'infinito della varietà. Da ciò la necessità di pensare quali valori una determinazione metrica proiettiva attribuisca ai suoi elementi all'infinito, e di questo ci occuperemo ora un po', per allontanare alcune difficoltà che si oppongono alla concezione della geometria della retta come geometria metrica. Riferiremo queste spiegazioni all'esempio intuitivo offerto da una determinazione metrica proiettiva basata su di una superficie di second'ordine.

Una coppia di punti arbitrarii dello spazio ha relativamente alla quadrica un invariante assoluto: il doppio rapporto dei due punti e delle intersezioni della quadrica colla loro congiungente. Ma se i due punti si portano sulle superficie, questo doppio rapporto si annulla indipendentemente dalla loro posizione, eccettuato il caso in cui essi giacciano su di una generatrice, nel qual caso è indeterminato. Questa è l'unica particolarità che può presentarsi nella relazione fra i due punti, a meno che essi non coincidano, e abbiamo quindi la proposizione:

La determinazione metrica proiettiva che si può istituire nello spazio basandosi sopra una superficie di second'ordine non dà ancora alcuna determinazione metrica per la geometria su quest'ultima.

A questo si lega il fatto che mediante trasformazioni lineari della quadrica in sè stessa si possono far coincidere tre suoi punti arbitrarii con tre altri (1).

Volendo avere una determinazione metrica sulla quadrica stessa, bisogna limitare il gruppo di trasformazioni, e ciò si ottiene tenendo fisso un punto qualunque dello spazio (ovvero il suo piano polare). Questo punto non sia dapprima posto sulla superficie. Allora si proietti la quadrica da esso su di un piano, sicchè comparirà una conica come curva di passaggio. Basandoci su di questa, istituiamo nel piano una determinazione metrica proiettiva, che poi riporteremo sulla quadrica (vedi § 7 del testo). Questa è una vera e propria determinazione metrica a curvatura costante; onde si ha la proposizione:

Sulla quadrica si ha una determinazione metrica siffatta, tenendo fisso un punto esterno ad essa.

Analogamente si trova (vedi § 4 del testo):

Si ottiene sulla quadrica una determinazione metrica a curvatura nulla assumendo come punto fisso un punto della superficie medesima.

(1) Questi rapporti si alterano nella geometria metrica ordinaria; due punti all'infinito hanno certo di per sè un invariante assoluto. La contraddizione che per tal modo si potrebbe trovare nel computo delle trasformazioni lineari della superficie all'infinito in sè stessa sparisce, in quanto che le traslazioni e le trasformazioni per similitudine che vi sono comprese non alterano affatto il luogo dei punti all'infinito.

Per tutte queste determinazioni metriche sulla quadrica le generatrici di essa sono linee di lunghezza nulla. L'espressione per l'elemento d'arco sulla superficie differisce dunque nelle diverse determinazioni solo per un fattore. Non vi sono sulla superficie elementi lineari assoluti. Però si può ben parlare dell'angolo formato da due direzioni diverse sulla superficie.

Tutte queste proposizioni e considerazioni possono servire senz'altro per la geometria della retta. Per lo spazio rigato a sè non esiste da principio una vera e propria determinazione metrica. Ne sorge una solo quando teniamo fisso un complesso lineare, e precisamente essa ha curvatura costante o nulla secondo che il complesso è generale o speciale (una retta). Al porre in evidenza un complesso è particolarmente legata anche la validità di un elemento lineare assoluto. Indipendentemente da ciò, le direzioni di passaggio a rette vicine che tagliano quella data hanno lunghezza nulla, e si può anche parlare dell'angolo formato da due direzioni di passaggio arbitrarie (1).

VII. *Interpretazione delle forme binarie.*

Accenneremo qui all'aspetto notevole che, basandosi sull'interpretazione di $x + iy$ sulla sfera, si può dare al sistema invariantivo delle forme binarie cubiche e biquadratiche.

Una cubica binaria f ha un covariante cubico Q, uno quadratico Δ, e un invariante R (2). Da f e Q si ricava tutta una serie di covarianti di sesto grado

$$Q^2 + \lambda R f^2,$$

fra cui è compreso anche Δ^3. Si può mostrare (3) che ogni covariante della forma cubica deve scindersi in gruppi consimili di sei punti. Siccome λ può assumere valori complessi, si ha un numero doppiamente infinito di tali covarianti (4).

Ora tutto il sistema di forme così circoscritto può essere rappresentato sulla sfera nel modo seguente. Mediante un'acconcia trasformazione lineare della sfera in sè stessa si portino i tre punti che rappresentano f in tre punti

(1) Vedi la Memoria: *Ueber Liniengeometrie und metrische Geometrie.* Math. Annalen, Bd. V, pag. 271.

(2) Vedi a questo proposito i relativi capitoli di CLEBSCH: *Theorie der binären Formen.*

(3) Considerando le trasformazioni lineari di f in sè stessa. Vedi Math. Annalen, Bd. IV, pag. 352.

(4) [Cfr. BELTRAMI: *Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche.* Memorie Acc. Bologna. 1870.]

equidistanti di una stessa circonferenza massima. Questa possiamo chiamarla equatore; su di essa i tre punti f abbiano rispettivamente la longitudine 0°, 120°, 240°. Allora Q sarà rappresentato dai punti dell'equatore di longitudine 60°, 180°, 300°; Δ dai due poli. Ogni forma $Q^2 + \lambda R f^2$ sarà rappresentata da sei punti, le cui latitudini e longitudini saranno contenute nello schema seguente, in cui α e β indicano numeri qualunque:

α	α	α	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha$
β	$120+\beta$	$240+\beta$	$-\beta$	$120-\beta$	$240-\beta$

Tenendo dietro a questi sistemi di punti sulla sfera, è interessante il vedere in qual modo ne sorgano f e Q contati due volte, e Δ contato tre volte. —

Una forma biquadratica f ha un covariante H dello stesso suo grado, un covariante T di sesto grado, due invarianti i e j. È particolarmente da considerarsi la serie di forme biquadratiche $iH + \lambda j f$, che corrispondono tutte allo stesso T, e fra cui sono compresi i tre fattori di secondo grado in cui si può scomporre T, ciascuno contato due volte.

Per il centro della sfera facciamo ora passare tre assi mutuamente ortogonali OX, OY, OZ. Le loro sei intersezioni colla sfera rappresentano la forma T. I punti di una quaderna $iH + \lambda j f$, essendo x, y, z le coordinate di un punto arbitrario della sfera, sono rappresentati dallo schema:

$$\begin{array}{rrr} x & y & z \\ x & -y & -z \\ -x & y & -z \\ -x & -y & z. \end{array}$$

Essi sono sempre vertici di un tetraedro simmetrico, le cui coppie di spigoli opposti sono dimezzate dagli assi coordinati; dal che risulta caratterizzato l'ufficio di T nella teoria delle equazioni biquadratiche come risolvente di $iH + \lambda j f$.

Erlangen, ottobre 1872.

Fine del Tomo XVII.° (Serie II.ª).

	ERRATA	CORRIGE
Pag. 41, linea 21.ª	$\frac{\alpha}{2} \frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial x_s^2} + \frac{1}{r}$	$\alpha \frac{\partial^2 \frac{r}{2}}{\partial x_s^2} + \frac{1}{r}$
" 64, " 2.ª e 3.ª	$\frac{r^2}{4} \lg \frac{1}{r} - \frac{r^2}{4}$	$\frac{r^2}{4} \lg \frac{1}{r} + \frac{r^2}{4}$