Tome I, volume 3. Fascicule 3.

ENCYCLOPÉDIE

DES

IENCES MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DES ACADÉMIES DES SCIENCES
DE GÖTTINGUE, DE LEIPZIG, DE MUNICH ET DE VIENNE
AVEC LA COLLABORATION DE NOMBREUX SAVANTS.

ÉDITION FRANÇAISE

RÉDIGÉE ET PUBLIÉE D'APRÈS L'ÉDITION ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

JULES MOLK,
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE NANCY.

TOME I (TROISIÈME VOLUME),

THÉORIE DES NOMBRES.

RÉDIGÉ DANS *L'ÉDITION* ALLEMANDE SOUS LA DIRECTION DE

FRANÇOIS MEYER,
PROFESSEUR À L'UNIVERSITÉ DE KÖNIGSBERG.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS

LEIPZIG,
B. G. TEUBNER

1910
(17 JUIN)

Tome I; troisième volume; troisième fascicule.

Sommaire.

Avis.

Dans l'édition française, on a cherché à reproduire dans leurs traits essentiels les articles de l'édition allemande; dans le mode d'exposition adopté, on a cependant largement tenu compte des traditions et des habitudes françaises.

Cette édition française offrira un caractère tout particulier par la collaboration de mathématiciens allemands et français. L'auteur de chaque article de l'édition allemande a, en effet, indiqué les modifications qu'il jugeait convenable d'introduire dans son article et, d'autre part, la rédaction française de chaque article a donné lieu à un échange de vues auquel ont pris part tous les intéressés; les additions dues plus particulièrement aux collaborateurs français sont mises entre deux astérisques. L'importance d'une telle collaboration, dont l'édition française de l'Encyclopédie offrira le premier exemple n'échappera à personne.

Tome II. Analyse.

Rédigé dans l'édition allemande sous la direction de H. Burkhardt-Munich et de W. Wirtinger-Vienne.

Rédaction française sous la direction de J. Molk-Nancy.

Premier volume.
Fonctions des variables réelles.

Second volume.
Fonctions de variables complexes.

Troisième volume.
Equations différentielles ordinaires.

Quatrième volume.
Equations aux dérivées partielles.

Cinquième volume.
Développements en séries.

En préparation

tome I. **Arithmétique et Algèbre.** Rédigé dans l'édition allemande par **W. F. Meyer**-Königsberg. Rédaction française par **J. Molk**-Nancy.

tome III. **Géométrie.** Rédigé dans l'édition allemande par **W. F. Meyer**-Königsberg. Rédaction française par **J. Molk**-Nancy.

tome IV. **Mécanique.** Rédigé dans l'édition allemande par **F. Klein** et **C. H. Müller**-Göttingue. Rédaction française par **P. Appell**-Paris et **J. Molk**-Nancy.

tome V. **Physique.** Rédigé dans l'édition allemande par **A. Sommerfeld**-Munich. Rédaction française par **P. Langevin**-Paris et **J. Perrin**-Paris.

tome VI. **Topographie, Géodésie, Géophysique.** Rédigé dans l'édition allemande par **Ph. Furtwängler**-Aix-la-Chapelle et **E. Wiechert**-Göttingue. Rédaction française par **Ch. Lallemand**-Paris.

tome VII. **Astronomie.** Rédigé dans l'édition allemande par **K. Schwarzschild**-Göttingue. Rédaction française par **H. Andoyer**-Paris.

tome VIII. (à l'étude) **Questions d'ordre philosophique, historique ou didactique.**

Tribune publique. 11.

I₁ p. 76 ligne 33] (I 2, **10** note 61) ajouter: *A. de Morgan,* Cambr. math. 4 1843/5), p. 87/90. **M. Lecat.**

I₁ p. 77 ligne 29] (I 2, **10** note 61) ajouter: *J. W. L. Glaisher,* Report Brit. ssoc. 44, Belfast 1874, éd Londres 1875, Transactions p. 13/4; 45, Bristol 875, éd. Londres 1876, Transactions p. 13 4. **M. Lecat.**

I₁ p. 97 entre les lignes 3 et 4] (I 2, **21**) intercaler: *J. J. Sylvester* [155a]) a émontré que si l'on représente par

$$[\, a_{ij} |, \quad b_{ij} \;;\; j_1', j_2', \ldots, j_\sigma';\; \lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_\sigma']$$

déterminant de degré n qui résulte du suivant

$$a_{ij} |$$

même degré, lorsqu'on y remplace les colonnes de rangs $j_1', j_2', \ldots, j_\sigma'$ spectivement par celles de rangs $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_\sigma'$ du déterminant

$$b_{ij}$$

degré n, on a la relation

$$a_{ij} \cdot | b_{ij} | = \sum [\, a_{ij} \,,\; | b_{ij} \;;\; j_1', j_2', \ldots, j_\sigma';\; \lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_\sigma']$$
$$\cdot [| b_{ij} \,,\; | a_{ij} \;;\; \lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_\sigma';\; j_1', j_2', \ldots, j_\sigma']$$

primant le produit de deux déterminants par une somme de produits de ux déterminants. La somme qui figure dans le second membre de cette lation est étendue à toutes les combinaisons des valeurs 1, 2, ..., n s indices $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_\sigma'$.

Note 155a) London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 2 (1851), p. 142/5; *F. von Sperling,* J. math. pures appl. (2) 5 (1860), p. 121/6; *F. Faà Bruno,* id. (1) 17 (1852), p. 190/2. **M. Lecat.**

p. 127 ligne 28] (I 2, **33**) avant *T. Muir* ajouter: Ces fonctions se présentent dans la théorie de certains déterminants cubiques [274a]) et à quatre mensions.

Note 274a) *R. F. Scott,* Proc. London math. Soc. 13 (1881/2), p. 33/42. *Gegenbauer* [Denkschr. Akad. Wien 46 II (1883), p. 291] a généralisé en nsidérant des permanents à n dimensions. **M. Lecat.**

p. 130 ligne 43] (I 2, **34** note 292) ajouter: *L. Gegenbauer,* Sitzgsb. Akad. ien 91 (1882), p. 333/43; 92 (1883), p. 1290/1306. **M. Lecat.**

p. 565 lignes 40 et p. 566 ligne 18] (I 8, **11** note 184). *S. Lie* [Nachr. s. Gött. 1874, p. 535] n'emploie pas la locution „sous-groupe distingué"; parle seulement du rôle particulierement important (ausgezeichnet que le groupe à un paramètre (eingliedrig) des translations dans un groupe deux paramètres. *S. Lie* [Math. Ann. 25 (1885), p. 77] dit expressément:

wenn man den Ausdruck ausgezeichnete Untergruppe mit meinem Namen in Verbindung bringt, so beruht dies auf einem Missverständniss. Ich teile die von Herrn *König* [Math. Ann. 21 (1883), p. 431] ausgesprochene Auffassung, dass der Ausdruck „invariant" besser ist als „ausgezeichnet".

L'expression „*sous-groupe invariant*" est par contre due à *S. Lie* [Archiv for Math. og Naturvidenskab (Christiania) 3 (1878, p. 457; cf. Math. Ann. 25 (1885), p. 77]. Il faut donc [I_1 p. 566, ligne 18] mentionner (dans la note 184) *S. Lie* avant *Gy. König*.

A. Loewy.

212. [I_3 p. 72 ligne 1] (I 15, 35) intercaler: *C. H. Harrison* [416a]), *P. A. MacMahon* [416b]), *C. Planck* [416c]), *J. Willis* [416d]).

416a) Messenger math. (2) 31 (1901), p. 52 63.

416b) Philos. Trans. London 194 A (1900), p. 361/86; 205 A (1906), p. 37/59; Nature (Londres) 65 (1901/2), p. 447/52.

416c) Nature (Londres) 65 (1901/2), p. 509.

416d) id. 66 (1902), p. 78.

M. Lecat.

213. [I_4 p. 166 ligne 2] (I 22, 3). Récemment *G. Schiaparelli* [20a]) et *U. Broggi* [20b]) ont cherché à nouveau à démontrer le principe de la moyenne arithmétique. *R. Schimmack* [20c]) a ensuite traité cette même question en se plaçant au point de vue axiomatique. Après avoir notablement simplifié la marche suivie par *G. Schiaparelli* et *U. Broggi*, il établit le principe de la moyenne arithmétique en faisant remonter à quatre axiomes la démonstration de l'existence de la fonction de la moyenne arithmétique, par un nouveau procédé dans lequel il n'est pas fait appel à la différentiabilité de la fonction de la moyenne arithmétique. Il a d'ailleurs soin de montrer que les deux systèmes d'axiomes sur lesquels il s'appuie sont des systèmes indépendants en sorte qu'aucune des hypothèses faites n'est superflue.

20a) Come si possa giustificare l'uso della media aritmetica nel calcolo dei risultati d'osservazione [Reale Ist. Lombardo *Rendic.* (2) 40 (1907), p. 752/64]. Un résumé de ce mémoire a été publié: Astron. Nachr. 176 (1907), p. 205/12.

20b) Sur le principe de la moyenne arithmétique [L'enseignement mathématique 11 (1909), p. 14 7].

20c) Der Satz vom arithmetischen Mittel in axiomatischer Begründung [Math. Ann. 68 (1910), p. 125/32].

R. Schimmack.

214. [I_4 p. 210 ligne 8] (I 23, 7). *A. Filippov* [32a]) a complètement résolu le problème proposé par *J. Fontès,* en démontrant que le quotient $\frac{a}{b}$ de deux nombres naturels a et b peut toujours être défini à l'aide d'additions, de multiplications et de divisions par 10. Il fait, à cet effet, usage de deux algorithmes, auxquels il donne les noms d'„algorithme de division infinie" et d'„algorithme de multiplication infinie", qui lui permettent de trouver facilement la période de la fraction $\frac{1}{b}$.

Note 32a) [Vcstnik opitnoj fiziki i elementarnoj matematiki, Odessa 1908, nos 467 8; O delinii (sur la division), Mohilev en Podolie 1909].

A. Filippov.

215. [II_1 p. 7 ligne 38] (II 1, 2 note 23). Sauf dans le passage cité des Acta Erud. Lps. [1703, p. 20], *G. W. Leibniz* semble ne s'être guère servi du terme „interscendentes". Ordinairement [voir par ex. Acta Erud. Lps. 1686,

p. 296; Werke, éd. *C. I. Gerhardt,* Math. Schr. 5, Halle 1858, p. 230] il ne parle que de deux espèces de quantités: les quantités algébriques et les quantités transcendantes. Si l'on juge cependant qu'il convient de signaler l'emploi par *G. W. Leibniz* du terme „interscendentes" il faut aussi mentionner que *G. W. Leibniz* a, exceptionnellement, distribué les quantités en *trois* classes d'une façon différente encore: les quantités rationnelles, les quantités algébriques et les quantités transcendantes [Acta Erud. Lps. 1693, p. 385; Werke, éd. *C. I. Gerhardt,* Math. Schr. 5, Halle 1858, p. 294].

Il convient en outre de faire observer que *L. Euler* [Introductio in analysin infinitorum 1, Lausanne 1748, p. 6; trad. *J. L. Labey* 1, Paris an IV, p. 4] fait ressortir expressément que les quantités „interscendentes" doivent être censées algébriques. **G. Eneström.**

216. [II_3 p. 16 ligne 29] (II 15, **11** note 52). *A. L. Cauchy* a présenté son mémoire à l'Académie de Turin, le 11 octobre 1831. Un extrait de ce mémoire a été d'abord publié dans le Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques, en mai 1831. Un extrait plus complet dans lequel *A. L. Cauchy* annonce qu'il fera „à quelques-unes des théories ou des formules que contient le mémoire des corrections ou additions" est ensuite lithographié à Turin; il comprend deux parties:

1°) des considérations générales (p. 1/59);

2°) des applications à la mécanique céleste (p. 60/152). Au bas de la page 152 on lit: Turin 1832.

Ces publications, y compris l'extrait du Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques, ont été ensuite traduites en italien par *P. Frisiani* et *G. Piola,* et insérées [avec tirage à part publié à Milan en 1835] dans les „Opuscoli matematici e fisici di diversi autori 2 (1834)."

A. L. Cauchy a inséré l'extrait du Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques, et presque toute la première partie du mémoire lithographié (p. 1/56) [en ne laissant de côté que le § 3 (p. 57/9)] dans ses Exercices d'analyse et de phys. math. 2, Paris 1841, p. 41/98; à la page 50 il modifie son propre texte en supposant expressément non seulement la continuité des fonctions qu'il développe, mais encore l'existence des dérivées du premier ordre.

Une „addition" de 51 pages au mémoire lithographié [dans certains exemplaires de ce mémoire lithographié cette addition est paginée p. 152 204] porte à la dernière page: „Turin, le 6 mars 1833." Cette addition, outre quelques compléments apportés au contenu du mémoire, contient surtout des applications numériques se rapportant à la détermination des perturbations des planètes alors connues. **H. Burkhardt.**

☞ Toute rectification ou addition, se rapportant à l'édition française, adressée à J. Molk, 8 rue d'Alliance, Nancy, sera insérée, s'il y a lieu, avec mention du nom de son auteur, dans la Tribune publique.

Nancy, le 2 mai 1910. **J. Molk.**

ment primitive, ou si le discriminant est pair, la définition de la forme *représentant principal* (mod. 2^t) est plus compliquée[240]).*

Par rapport à un module composé

$$N = 2^{t_0} p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_\nu^{t_\nu}$$

il y a une forme *représentant principal*; elle est congrue (mod. 2^{t_0}) à la forme représentant principal mod. 2^{t_0}; et pour $i = 1, 2, \ldots, \nu$ elle est congrue (mod. $p_i^{t_i}$) à la forme représentant principal[241]) mod. $p_i^{t_i}$.

On peut choisir d'une infinité de manières une forme

$$\sum_{(i,k)} a_{ik} x_i x_k \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

qui soit représentant principal et telle que deux des nombres successifs

$$\frac{\mathrm{D}_1}{\sigma_1}, \frac{\mathrm{D}_2}{\sigma_2 d_1}, \frac{\mathrm{D}_3}{\sigma_3 d_2}, \ldots, \frac{\mathrm{D}_{n-1}}{\sigma_{n-1} d_{n-2}},$$

soient premiers entre eux; dans ces expressions D_μ désigne le déterminant

$$\mathrm{D}_\mu = |a_{i,k}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, \mu)$$

et les invariants $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, d_1, d_2, \ldots, d_{n-2}$ ont été définis plus haut (n° **42**).

H. J. S. Smith[242]) appelle cette forme *une forme canonique* de la classe (il peut y avoir plus d'une forme canonique dans une classe). *H. Minkowski*[243]) dit de cette forme qu'elle est *une forme caractéristique* de la classe.

Pour $\mathrm{D} = 1$ et $n < 8$ il n'y a qu'une classe et, par conséquent, qu'un genre, classe et genre représentés par la forme

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2.$$

La mesure de cette classe ou de ce genre est $\frac{1}{n!\,2^{n-1}}$.

Pour $n = 8$, *H. Minkowski*[244]) a démontré qu'il y a au moins deux classes et pour $n > 8$ il a démontré qu'il y a au moins $\left[\frac{n}{8}\right] + 1$ classes.

47. Application à la résolution de congruences. La considération de la forme représentant principal est utile dans un grand nombre de questions et en particulier dans la résolution des con-

240) *H. Minkowski,* Mém. présentés [189]), p. 20 et suiv.

241) *H. Minkowski,* Mém. présentés [189]), p. 24; *C. Jordan,* C. R. Acad. sc. Paris 74 (1872), p 1093.

242) Mém. présentés [188]), p. 6; Papers 2, Oxford 1894, p. 626.

243) Mém. présentés [189]), p. 84.

244) Mém. présentés [189]), p. 91; Erreur de *Ch. Hermite,* J. reine angew. Math. 40 (1850), p. 279; Œuvres [12]) 1, p. 122.

gruences quadratiques

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv a \qquad (\text{mod. } N).$$

Cette résolution dans le cas général se ramène à celui où N est un nombre premier impair p ou bien est égal à 2, à 4 ou à 8.

On obtient un système complet de solutions en donnant à $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ toutes les valeurs d'un système complet de restes (mod. N) et déterminant chaque fois x_n.

*Quand $N = 2$, le résultat presque évident est le suivant:

Le nombre des solutions incongrues est 2^{n-1}, si m est le nombre des coefficients *impairs* qui multiplient les carrés des variables.*

Quand N est un nombre premier impair p, le nombre des solutions incongrues est

$$p^{n-1}\left(1 - \varepsilon p^{-\left[\frac{m}{2}\right]}\right),$$

m étant le nombre de termes incongrus à 0 (mod. p) d'une forme

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_m x_m^2$$

représentant principal de la classe de f (mod. p), et ε étant défini par l'expression

$$\varepsilon = (-1)^m \left[\frac{(-1)^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_1 a_2 \ldots a_m a^{m-2\left[\frac{m}{2}\right]}}{p}\right],$$

dans laquelle le grand crochet désigne le *symbole de Legendre*, tandis que le petit crochet $\left[\frac{m}{2}\right]$ désigne le plus grand entier contenu dans $\frac{m}{2}$.

*Le nombre m qui entre dans cette formule peut encore se définir comme étant le *rang* du premier des invariants $\delta_1, \delta_2, \ldots$ de la forme qui est congrue à 0 (mod. p).*

Pour $N = 4$ et pour $N = 8$, les résultats sont plus compliqués. En les combinant avec les précédents, on obtient les résultats pour N quelconque[245]).

H. Minkowski[246]) a déterminé autrement ce nombre de solutions incongrues. Représentons-le par $f(a, N)$ et posons

$$f[h, N] = \sum_{a=0}^{a=N-1} e^{\frac{2i\pi h a}{N}} f(a, N);$$

on a alors inversement

$$f(a, N) = \frac{1}{N} \sum_{h=0}^{h=N-1} e^{-\frac{2i\pi a h}{N}} f[h, N],$$

245) *C. Jordan,* Traité des substitutions, Paris 1870, p. 159; J. math. pures appl. (2) 17 (1872), p. 368; *P. Bachmann,* Quadr. Formen [12]), p. 478/515.

246) *Mém. présentés [189]), p. 49.*

de sorte que tout revient à déterminer $f[h, \mathrm{N}]$; or cette détermination revient à celle de la somme[247])

$$\sum e^{\frac{2i\pi h}{\mathrm{N}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)},$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ parcourant chacun un système complet de restes incongrus (mod. N).

Plus généralement *V. A. Lebesgue*[248]) a déterminé le nombre des solutions de la congruence

$$a_1 x_1^m + a_2 x_2^m + \cdots + a_n x_n^m \equiv a \pmod{p},$$

où p est premier et $\equiv 1 \pmod{m}$.

48. Formes quaternaires. Recherches diverses sur les formes de n variables. Le cas particulier des formes quaternaires a fait l'objet de plusieurs mémoires intéressants parmi lesquels il convient de citer ceux de *C. G. J. Jacobi*[249]), *J. Liouville*[250]), **Th. Pepin*[251])*, *J. W. L. Glaisher*[252]), *M. Weill*[253]) et *L. Charve*[254]).

**E. Picard*[255]) et *H. Bourget*[256]) ont tiré de l'étude des formes quaternaires des exemples de groupes hyperabéliens. Quand la forme quaternaire ne peut représenter zéro, *E. Picard* a montré que le domaine fondamental du groupe hyperabélien correspondant n'a pas de point commun avec la surface limite[257]).*

H. Minkowski[258]) a donné les conditions que doivent remplir

247) *Sur les *sommes multiples de Gauss*, généralisation de la *somme de Gauss*

$$\sum_{k=1}^{k=\mathrm{N}} e^{\frac{2i\pi h k^2}{\mathrm{N}}},$$

voir *H. Weber*, J. reine angew. Math. 74 (1872), p. 14.*

248) J. math. pures appl. (2) 4 (1859), p. 266.

249) J. reine angew. Math. 12 (1834), p. 167; Werke 6, Berlin 1891, p. 245.

250) J. math. pures appl. (1) 10 (1845), p. 169; (2) 9 (1864), p. 295; (2) 10 (1865), p. 1.

251) *J. math. pures appl. (4) 6 (1890), p. 5.*

252) Quart. J. pure appl. math. 19 (1883), p. 212; Papers, Cambridge 1885, mém. n° 5.

253) C. R. Acad. sc. Paris 99 (1884), p. 859; Bull. Soc. math. France 13 (1884/5), p. 28.

254) Ann. Ec. Norm. (2) 11 (1882), p. 119.

255) *C. R. Acad. sc. Paris 98 (1884), p. 904; J. math. pures appl. (4) 1 (1885), p. 87.*

256) *Ann. Fac. sc. Toulouse (1) 12 (1898), mém. n° 4.*

257) *Voir dans l'article II 12 ce qui concerne la représentation géométrique des groupes de substitutions linéaires (Texte et notes 255 et 256 de *E. Picard*).*

258) J. reine angew. Math. 106 (1890), p. 5.

deux formes quadratiques de n variables à coefficients rationnels pour être transformables rationnellement l'une dans l'autre.

Les formes quadratiques à variables complexes et à coefficients complexes ont été considérées par *C. Jordan*[259]), *L. Bianchi*[260]) et *G. B. Mathews*[261]); *C. Jordan*[262]) a fait une étude approfondie de l'équivalence de ces formes.

Les formes bilinéaires (*formes d'Hermite*) $\sum a_{ik} x_i x_k'$, où a_{ik} et a_{ki} sont conjugués ainsi que x_i et x_i', ont été étudiées par *Ch. Hermite*[263]), *C. Jordan*[264]), *E. Picard*[265]), *A. Loewy*[266]) et *E. H. Moore*[267]). Elles ont des propriétés analogues à celles des formes quadratiques dont elles sont une généralisation.

On a aussi considéré des faisceaux de formes quadratiques. Cette théorie est en rapport étroit avec celle des faisceaux de formes bilinéaires dont nous avons parlé plus haut.

49. Minimé d'une forme quadratique de discriminant donné. *Ch. Hermite*[268]) a donné une limite supérieure du minimé d'une forme quadratique définie à n variables, à coefficients réels quelconques et de discriminant D; c'est le nombre

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sqrt[n]{|\mathrm{D}|}.$$

Des limites supérieures moindres dans le cas des formes définies ont été données par *A. N. Korkine* et *G. Zolotarev*[269]), à savoir: pour $n = 2m$, le nombre

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(m-3)}} 3^{\frac{1}{2}(m-2)} \sqrt[n]{|\mathrm{D}|},$$

259) J. Ec. polyt. (1) cah. 51 (1882), p. 1/43.

260) Atti R. Accad. Lincei *Rendic.* (4) 5 I (1889), p. 589.

261) Quart. J. pure appl. math. 25 (1891), p. 289.

262) J. Ec. polyt. (1) cah. 51 (1882), p. 11/23.

263) J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 182; Œuvres[12]) 1, p. 415 (le nombre de classes est fini).

264) J. Ec. polyt. (1) cah. 48 (1880), p. 119.

265) C. R. Acad. sc. Paris 95 (1882), p. 763; 96 (1883), p. 1567, 1779; 97 (1883), p. 745, 845; Bull. Soc. math. France 15 (1886/7), p. 152; Math. Ann. 39 (1891), p. 142.

266) C. R. Acad. sc. Paris 123 (1896), p. 168; Nova Acta Acad. Leop. 71 (1898), p. 379; Math. Ann. 50 (1898), p. 557; 52 (1899), p. 588; J. reine angew. Math. 122 (1900), p. 53.

267) Math. Ann. 50 (1898), p. 213.

268) J. reine angew. Math. 40 (1850), p. 263; Œuvres[12]) 1, p. 103.

269) Math. Ann. 5 (1872), p. 581; 6 (1873), p. 366; 11 (1877), p. 242.

et pour $n = 2m + 1$, le nombre

$$\frac{1}{2^{\frac{1}{n}m(m-2)}} 3^{\frac{1}{n}m(m-1)} \sqrt[n]{|D|}.$$

Le minimé peut atteindre cette limite pour $n = 2, 3, 4$ et dans ces cas seulement; pour $n = 2$, la limite est la même que celle donnée par *Ch. Hermite.*

Le problème de trouver dans tous les cas la limite supérieure du minimé a conduit *A. N. Korkine* et *G. Zolotarev* à la recherche des *formes extrêmes,* c'est-à-dire des formes qui pour un déterminant donné ont le plus petit minimé possible. Pour $n = 2, 3, 4, 5$, ils trouvent que les plus petits minimés possibles correspondant à un déterminant D sont respectivement

$$\sqrt{\tfrac{4}{3}|D|}, \quad \sqrt[3]{2|D|}, \quad \sqrt[4]{4|D|}, \quad \sqrt[5]{8|D|}.$$

H. Minkowski[270]) a cherché à résoudre une question plus générale, à savoir la détermination d'une limite supérieure de la valeur minimée de la somme des puissances $p^{\text{ièmes}}$ des valeurs absolues de n formes linéaires à n variables. Pour le minimé d'une forme quadratique définie positive à n variables, de discriminant D, il trouve la borne supérieure

$$\frac{4}{\pi}\left[\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)\right]^{\frac{2}{n}} \sqrt[n]{|D|}\,;$$

dans cette expression, le coefficient de $\sqrt[n]{|D|}$ est, pour de grandes valeurs de n, notablement inférieur à l'expression donnée par *Ch. Hermite.*

Pour les formes binaires quadratiques indéfinies à discriminant *positif* D, $_*$*Ch. Hermite*[271]) a donné comme minimé $\sqrt{D}$*; *A. N. Korkine* et *G. Zolotarev*[272]) ont montré que la limite supérieure du minimé est égale à $\sqrt{\frac{4}{5}\,D}$. Ce minimé est effectivement atteint pour les formes équivalentes à la forme

$$f_0 = \sqrt{\frac{4}{5}\,D}\,(x^2 - xy - y^2).$$

Pour toute autre forme l'expression $\sqrt{\frac{1}{2}\,D}$ est la limite supérieure du

270) C. R. Acad. sc. Paris 112 (1891), p. 209, J. reine angew. Math. 107 (1891), p. 296; Math. papers Chicago [44]), p. 201.

271) $_*$J. reine angew. Math. 40 (1850), p. 263; Œuvres [12]) 1, p. 103 (Texte et note de *E. Picard*).*

272) Math. Ann. 6 (1873), p. 369, 370.

minimé[272]); ce minimé est d'ailleurs atteint pour les formes équivalentes à la forme

$$f_1 = \sqrt{\frac{1}{2}\, D}\,(x^2 - 2xy - y^2).$$

Pour toute forme qui n'est équivalente ni à f_0 ni à f_1 l'expression $\sqrt{\frac{100}{221}\, D}$ est limite supérieure du minimé; ce minimé est d'ailleurs atteint pour les formes équivalentes à la forme

$$f_2 = \sqrt{\frac{4}{221}\, D}\,(5x^2 - 11xy - 5y^2)$$

et ainsi de suite.

La valeur absolue de toute forme *indéfinie* $ax^2 + 2bxy + cy^2$ non équivalente aux formes écrites ci-dessous:	peut être rendue *inférieure* à:	et cette expression est le minimé atteint par les formes équivalentes à:
$f_0 = \sqrt{\frac{4}{5} D}\,(x^2 - xy - y^2)$	$\sqrt{\frac{4}{5} D}$	f_0
$f_0; f_1 = \sqrt{\frac{1}{2} D}\,(x^2 - 2xy - y^2)$	$\sqrt{\frac{1}{2} D}$	f_1
$f_0, f_1; f_2 = \sqrt{\frac{4}{221} D}\,(5x^2 - 11xy - 5y^2)$	$\sqrt{\frac{100}{221} D}$	f_2
$f_0, f_1, f_2; f_3 = \sqrt{\frac{4}{1517} D}\,(13x^2 - 29xy - 13y^2)$	$\sqrt{\frac{676}{1517} D}$	f_3
$f_0, f_1, f_2, f_3; f_4 = \sqrt{\frac{4}{7565} D}\,(29x^2 - 63xy - 31y^2)$	$\sqrt{\frac{3364}{7565} D}$	f_4
$f_0, f_1, \cdots, f_4; f_5 = \sqrt{\frac{1}{650} D}\,(17x^2 - 38xy - 17y^2)$	$\sqrt{\frac{289}{650} D}$	f_5
$f_0, f_1, \cdots, f_5; f_6 = \sqrt{\frac{4}{71\,285} D}\,(89x^2 - 199xy - 89y^2)$	$\sqrt{\frac{31\,684}{71\,285} D}$	f_6
$f_0, f_1, \cdots, f_6; f_7 = \sqrt{\frac{4}{257\,045} D}\,(169x^2 - 367xy - 181y^2)$	$\sqrt{\frac{114\,244}{257\,045} D}$	f_7
$f_0, f_1, \cdots, f_7; f_8 = \sqrt{\frac{1}{21\,170} D}\,(97x^2 - 216xy - 98y^2)$	$\sqrt{\frac{9409}{21\,170} D}$	f_8
$f_0, f_1, \cdots, f_8; f_9 = \sqrt{\frac{4}{488\,597} D}\,(233x^2 - 521xy - 233y^2)$	$\sqrt{\frac{217\,156}{488\,597} D}$	f_9

Le tableau ci-dessus indique les résultats obtenus jusqu'ici dans cet ordre d'idées.

Le nombre des classes de formes qui ne peuvent prendre de valeurs inférieures, en valeur absolue, à $l\sqrt{D}$, où l désigne un nombre quelconque $< \frac{2}{3}$, est *fini*. Ce nombre croît d'ailleurs indéfiniment quand on fait tendre l vers $\frac{2}{3}$ par valeurs croissantes. Il y a une *infinité* de formes non équivalentes qui admettent $\frac{2}{3}\sqrt{D}$ comme minimé de leurs valeurs absolues[273]).

C. G. J. Jacobi[274]) a montré, à l'aide d'un algorithme qui lui est dû et qui généralise l'algorithme des fractions continues, que toute forme quadratique à n variables peut, par une substitution unimodulaire, se mettre sous la forme réduite

$$a_{1,1}x_1{}^2 + a_{1,2}x_1x_2 + a_{2,2}x_2{}^2 + a_{2,3}x_2x_3 + \cdots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n + a_{n,n}x_n{}^2$$

contenant au plus $2n - 1$ termes[275]).

Formes diverses.

50. Formes binaires cubiques. *G. Eisenstein* a obtenu des résultats remarquables sur les formes cubiques. Si l'on applique à une telle forme

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$$

une substitution linéaire, son covariant quadratique, ou *hessien*,

$$(b^2 - ac)x^2 + (bc - ad)xy + (c^2 - bd)y^2$$

se transforme par la même substitution. Par conséquent, les hessiens d'une classe de formes cubiques constituent eux-mêmes une classe.

Ces classes de formes quadratiques se distinguent par cette propriété que, par triplication, elles reproduisent la classe principale et réciproquement. C'est là-dessus que *Th. Pepin* fonde le dénombrement des classes de formes cubiques de discriminant donné[276]).

273) *A. A. Markov*, Math. Ann. 15 (1879), p. 381; 17 (1880), p. 379.

274) Ber. Akad. Berlin 1848, p. 414; J. reine angew. Math. 39 (1850), p. 290; Werke 6, Berlin 1891, p. 318.

275) Sur les formes à n variables, voir aussi *H. Minkowski*, J. reine angew. Math. 100 (1887), p. 449.

276) *G. Eisenstein*, J. reine angew. Math. 27 (1844), p. 75, 89, 319; *A. Cayley*, Quart. J. pure appl. math. 1 (1857), p. 85, 90; Papers 3, Cambridge 1890, p. 9, 11; *F. Arndt*, J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 309; Archiv Math. Phys. (1) 31 (1858), p. 337; *Ch. Hermite*, C. R. Acad. sc. Paris 48 (1859), p. 351; Œuvres [113]) 2, p. 93; *H. Poincaré*, J. Ec. polyt. (1) cah. 51 (1882), p. 45; *Th. Pepin*, Atti Accad. pontif. Nuovi Lincei 37 (1883/4), p. 227; *G. B. Mathews*, Messenger math. (2) 20 (1890/1), p. 70.

**Ch. Hermite*[277]) a réduit les formes cubiques par la réduction continuelle. La même réduction qui réduit une forme réduit aussi son covariant cubique.*

**Ch. Hermite*[278]) a aussi déterminé les formes cubiques à coefficients entiers qui correspondent à un covariant quadratique donné.*

On s'est déjà occupé dans un article précédent (I 15, **19**, **20** et **21**) de la représentation d'un nombre entier par des formes particulièrement simples. A ces recherches on peut adjoindre celles de *A. Verebrusov*[279]) sur le nombre de représentations d'un entier donné par une forme binaire cubique quelconque

$$\alpha x^3 + 3\beta x^2 y + 3\gamma x y^2 + \delta y^3.$$

51. Formes binaires de degré quelconque. Dans les formes binaires de degré quelconque

$$a_0 x^n + \frac{n}{1} a_1 x^{n-1} y + \cdots + a_n y^n$$

on peut distinguer, d'après *Ch. Hermite*[280]), les formes *primitives,* dans lesquelles $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont premiers dans leur ensemble; elles sont *proprement primitives* si les coefficients $a_0, \frac{n}{1} a_1, \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} a_2, \ldots$ sont aussi premiers dans leur ensemble; elles sont *improprement primitives* dans le cas contraire. Des formes équivalentes ont des covariants équivalents. Des formes constituent un *ordre* lorsque leurs coefficients pris avec les facteurs binomiaux ont le même p. g. c. d. et que leurs coefficients pris sans ces facteurs binomiaux ont également le même p. g. c. d. Des formes constituent un *genre* lorsqu'elles sont transformables l'une dans l'autre par une substitution de déterminant égal à ± 1 et à coefficients rationnels.

Les formes binaires cubiques sont les seules de degré impair qui n'aient pas de covariant linéaire; de même les formes binaires biquadratiques sont les seules de degré pair qui n'aient pas de covariant quadratique.

Pour un degré impair > 3, toutes les formes binaires de même discriminant forment un seul genre. Ce théorème a été énoncé sans démonstration par *Ch. Hermite*[281]).

---

277) *J. reine angew. Math. 41 (1851), p. 213; Œuvres[12]) 1, p. 189.*

278) *J. reine angew. Math. 41 (1851), p. 191; Quart. J. pure appl. math. 1 (1857), p. 20, 88; Œuvres 1, p. 164, 434, 437.*

279) Math. Sbornik [recueil Soc. math. Moscou] 26 (1907), p. 115.

280) J. reine angew. Math. 36 (1848), p. 357; 41 (1851), p. 197 et suiv. 52 (1856), p. 1, 18; Œuvres[12]) 1, p. 84, 171, 350, 372.

281) J. reine angew. Math. 52 (1856), p. 2, 38; Œuvres[12]) 1, p. 352, 396. Dans

La réduction d'une forme binaire quelconque décomposée en ses facteurs linéaires

$$a_0(x+\alpha_1 y)(x+\alpha_2 y)\cdots(x+\alpha_n y)$$

a été ramenée par *Ch. Hermite*[282]) à celle de la forme quadratique

$$\lambda_1 \mathrm{N}(x+\alpha_1 y)+\lambda_2 \mathrm{N}(x+\alpha_2 y)+\cdots+\lambda_n \mathrm{N}(x+\alpha_n y),$$

où

$$\mathrm{N}(x+\alpha_i y)=(x+\alpha_i y)(x+\alpha_i' y),$$

α_i' désignant le nombre complexe conjugué du nombre α_i, en sorte que $\mathrm{N}(x+\alpha_i y)$ est la *norme* de $x+\alpha_i y$.

52. Formes qui proviennent de la division du cercle. Pour tout nombre *premier impair* n la forme

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}$$

possède l'importante propriété qu'exprime l'égalité[283])

$$\frac{x^n-y^n}{x-y}=\frac{\mathrm{X}^2-n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{Y}^2}{4},$$

X, Y étant des fonctions entières, homogènes de x, y, à coefficients entiers[284]).

*Pour $y=1$, la fonction Y est de degré $\frac{n-3}{2}$; elle n'a pas de terme constant, et ses coefficients à égale distance des extrêmes sont égaux deux à deux. Toujours pour $y=1$, la fonction X est de degré $\frac{n-1}{2}$; pour $n>3$ les coefficients de X qui sont équidistants des extrêmes sont égaux ou symétriques (I 1, 17; I_1 p. 36) suivant que $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ est égal à $+1$ ou à -1.

---

ce même mémoire on trouve aussi une étude particulière des formes cubiques et biquadratiques.

282) J. reine angew. Math. 36 (1848), p. 361, 363; 41 (1851), p. 197 et suiv.; Œuvres[12]) 1, p. 89, 91, 171 et suiv.

283) Voir à ce sujet *C. F. Gauss,* Disq.[27]) n° 357; Werke 1, p. 443.

284) Voir aussi *A. M. Legendre,* Mém. Acad. sc. Institut France (2) 11 (1832), p. 81 [1830]; Théorie des nombres[1]), (3e éd.) 2, Paris 1830, p. 192 et suiv; *V. A. Lebesgue,* J. math. pures appl. (1) 3 (1838), p. 113; *J. Liouville,* id. (2) 2 (1857), p. 413; *J. A. Serret,* Alg. sup. (5e éd.) 2, Paris 1885, p. 545 et suiv.; *Sophie Germain,* J. reine angew. Math. 7 (1831), p. 201; *K. G. Chr. von Staudt,* J. reine angew. Math. 67 (1867), p. 205.

Exemples:

$$4(x^4+x^3+x^2+x+1)=(2x^2+x+2)^2-5x^2;$$
$$4(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=(2x^3+x^2-x-2)^2+7(x^2+x)^2.$$

G. Zolotarev[285]) a donné un moyen très pratique de calculer X et Y; ce moyen donne d'ailleurs une démonstration très simple des propriétés de X et de Y que l'on vient de signaler.*

Cette équation relie la théorie de la division du cercle à celle des formes quadratiques binaires. En particulier, de là découlent la forme linéaire des diviseurs de la forme $\frac{x^n-y^n}{x-y}$ et aussi une méthode de résolution de l'*équation de Fermat*[286]).

Il y a une formule analogue dans le cas de n non premier[287]).

La formule donnée plus haut, pour n premier, conduit à une décomposition de $\frac{x^n-y^n}{x-y}$ en un produit

$$[\mathrm{X}-\mathrm{Y}\sqrt{\mathrm{N}}][\mathrm{X}+\mathrm{Y}\sqrt{\mathrm{N}}],$$

où l'on a posé pour abréger

$$\mathrm{N}=n(-1)^{\frac{n-1}{2}},$$

et, par conséquent, à une division des racines de l'unité en deux groupes. Ceci se généralise: à toute division des racines de l'unité en *périodes* correspondent des formes, généralisations de $\mathrm{X}^2-n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\mathrm{Y}^2$. Une propriété capitale de toutes ces formes dites *cyclotomiques* consiste en ce que les nombres qu'elles peuvent représenter ont leurs facteurs premiers d'une forme déterminée[288]).

---

285) Nouv. Ann. math. (2) 11 (1872), p. 539.

286) *G. Lejeune Dirichlet,* J. reine angew. Math. 17 (1837), p. 286; Werke 1, Berlin 1889, p. 345; Zahlenth.[82]), (4e éd.) p. 360 (Suppl. VII).

287) *G. Lejeune Dirichlet,* J. reine angew. Math. 17 (1837), p. 290; Werke 1, Berlin 1889, p. 349; *A. L. Cauchy,* C. R. Acad. sc. Paris 10 (1840), p. 181; Œuvres (1) 5, Paris 1885, p. 84; *G. Eisenstein,* J. reine angew. Math. 27 (1844), p. 88; *N. Trudi,* Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1868/9), p. 150; *A. Genocchi,* id. (2) 2 (1868/9), p. 216; *H. J. S. Smith,* Proc. London math. Soc. (1) 7 (1875/6), append. p. 237; Messenger math. (2) 5 (1876), p. 143; Papers 2, Oxford 1894, p. 132: dans ce mémoire on trouve la solution du problème posé par *G. Eisenstein* [J. reine angew. Math. 27 (1844), p. 88] qui avait proposé de transformer de toutes les manières possibles une fonction entière donnée de x en une expression de la forme $\mathrm{Y}^2-(-1)^{\frac{n-1}{2}}n\mathrm{X}^2$; *P. Bachmann,* Die Lehre von der Kreistheilung, Leipzig 1872, p. 205 et suiv.; *L. J. Rogers,* Proc. London math. Soc. (1) 30 (1898/9), p. 23; *E. Lucas,* Assoc. fr. avanc. sc. 7 (Paris) 1878, p. 164/73.

288) *J. J. Sylvester,* Amer. J. math. 2 (1879), p. 280, 357; 3 (1880), p. 58, 179; C. R. Acad. sc. Paris 92 (1881), p. 1084; Johns Hopkins Univ. Circul. 1

Il existe d'autres formes qui jouissent d'une propriété analogue.

Par exemple *G. Lejeune Dirichlet*[289]) a étudié, à ce point de vue, les formes

$$ax^4 + bx^2y^2 + cy^4.$$

A. Genocchi[290]) et *L. Kronecker*[291]) ont ensuite étudié de même les formes qui proviennent du développement de l'expression

$$(x + \sqrt{n}\, y)^k.$$

A la représentation mentionnée plus haut de la forme

$$\frac{x^n - y^n}{x - y}$$

par une forme quadratique

$$\mathrm{X}^2 - n(-1)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{Y}^2$$

correspond, pour un nombre premier n de la forme $6h+1$, décomposable dans le domaine de la racine cubique de l'unité ε en deux facteurs n_1, n_2, et pour une division des racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité en *trois* périodes, l'équation

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = \frac{\mathrm{X}^3 + nn_1\mathrm{Y}^3 + nn_2\mathrm{Z}^3 - 3n\mathrm{XYZ}}{27} = \frac{F(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})}{27}.$$

Si l'on pose

$$\mathrm{Y} = \mathrm{V} + \varepsilon\mathrm{W}, \quad \mathrm{Z} = \mathrm{V} + \varepsilon^2\mathrm{W},$$

X, V, W sont des fonctions entières, à coefficients entiers, de x, y.

Les formes $F(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z})$ ont été étudiées en détail par *G. Eisenstein*[292]). Elles ont beaucoup de propriétés analogues à celles des formes quadratiques binaires de discriminant premier. A la place de l'*équation de Fermat* intervient l'équation $F(\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) = 1$.

(1879/82), p. 45 col. 2 [1880]; *A. S. Hathaway*, id. 1 (1879/82), p. 67 col. 2 [1880]; id. 1 (1879/82), p. 131 col. 2 [1881]; *K. Th. Vahlen*, Schriften phys.-ökon. Ges. Königsberg 38 (1897), Sitzgsb. p. 47.

289) De formis linearibus . . . (Habilitationsschrift) écrit probablement en 1828, imprimé en 1828 à Breslau; J. reine angew. Math. 3 (1828), p. 35; Werke 1, Berlin 1889, p. 49, 65. Voir aussi *Th. Pepin*, C. R. Acad. sc. Paris 92 (1881), p. 173.

290) C. R. Acad. sc. Paris 98 (1884), p. 411; Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1868/9), p. 256.

291) Sitzgsb. Akad. Berlin 1888, p. 417; Werke 3^1, Leipzig 1899, p. 281; voir aussi *X. Stouff*, C. R. Acad. sc. Paris 125 (1897), p. 859.

292) J. reine angew. Math. 28 (1844), p. 289; 29 (1845), p. 19; Math. Abh., Berlin 1847, p. 1.

La forme $F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ se décompose en trois facteurs linéaires

$$\mathrm{x} + \sqrt[3]{nn_1}\,\mathrm{y} + \sqrt[3]{nn_2}\,\mathrm{z},$$

$$\mathrm{x} + \varepsilon\sqrt[3]{nn_1}\,\mathrm{y} + \varepsilon^2\sqrt[3]{nn_2}\,\mathrm{z},$$

$$\mathrm{x} + \varepsilon^2\sqrt[3]{nn_1}\,\mathrm{y} + \varepsilon\sqrt[3]{nn_2}\,\mathrm{z},$$

où ε désigne une racine cubique imaginaire de l'unité.

Soient A', B' deux de ces facteurs linéaires correspondant à une des solutions de l'équation $F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = 1$; la quantité

$$\log \mathrm{A}' - \varepsilon \log \mathrm{B}'$$

s'appelle le *régulateur* de cette solution.

Les solutions pour lesquelles la norme du régulateur est un minimé s'appellent *solutions fondamentales.* Soient A et B deux des facteurs linéaires correspondant à une solution fondamentale; toute solution correspond à une expression de la forme $\mathrm{A}^l\mathrm{B}^m$. Tous les régulateurs s'obtiennent en multipliant le régulateur fondamental

$$\log \mathrm{A} - \varepsilon \log \mathrm{B}$$

par tous les nombres complexes $l + m\varepsilon$; chaque solution correspond ainsi à un nombre complexe $l + m\varepsilon$.

Le nombre des classes est *fini* et dépend des sommes

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\frac{k}{n_1}\right]\frac{1}{k}, \quad \sum_{k=1}^{k=\infty}\left[\frac{k}{n_1}\right]^2\frac{1}{k}$$

des deux séries

$$\left[\frac{1}{n_1}\right] + \left[\frac{2}{n_1}\right]\frac{1}{2} + \cdots + \left[\frac{k}{n_1}\right]\frac{1}{k} + \cdots\cdots,$$

$$\left[\frac{1}{n_1}\right]^2 + \left[\frac{2}{n_1}\right]^2\frac{1}{2} + \cdots + \left[\frac{k}{n_1}\right]^2\frac{1}{k} + \cdots\cdots,$$

où le signe $\left[\frac{k}{n_1}\right]$ désigne le caractère cubique de $k \pmod{n_1}$, c'est-à-dire une des trois racines cubiques de l'unité déterminée par k et n_1 [293]. La sommation montre que le nombre des classes est déterminé par la norme $l^2 - lm + m^2$ du nombre complexe $l + m\varepsilon$ auquel correspond une certaine solution de l'équation

$$F(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = 1$$

résultant de la théorie de la division du cercle [294].

---

293) *Pour la définition et la détermination du caractère cubique d'un nombre voir l'article I 18.*

294) *G. Eisenstein,* J. reine angew. Math. 28 (1844), p. 289; 29 (1845), p. 19; Math. Abh., Berlin 1847, p. 1.

53. Formes décomposables en facteurs linéaires. $_*$*Ch. Hermite*[295]) a indiqué les points de contact entre la théorie des formes décomposables en facteurs linéaires et la théorie des formes quadratiques et il a montré comment ses méthodes générales de réduction continuelle d'une forme associée s'appliquent aux formes décomposables.*

$_*$Ce procédé de réduction s'applique aux formes à coefficients et variables complexes, à un nombre quelconque de variables, décomposables en facteurs linéaires. Il est analogue au procédé de réduction continue (n° **18**) pour les formes quadratiques. *Ch. Hermite*[296]) démontre que le nombre des classes correspondant à un discriminant donné est limité; il en déduit ce beau théorème que les équations algébriques de même discriminant ne donnent lieu qu'à un nombre limité d'irrationalités ou de *corps* de nombres algébriques.*

Les formes cubiques ternaires qui se décomposent en facteurs linéaires et la représentation de nombres entiers par ces formes ont été considérées par *E. Meissel*[297]), *G. B. Mathews*[298]), *H. W. Lloyd Tanner*[299]).

Arnold Meyer a étudié parmi ces formes celles qui sont du type

$$(ax + by + cz)(a'x + b'y + c'z)(a''x + b''y + c''z),$$

$a, b, c, a', \ldots$ étant fonctions rationnelles de la racine cubique d'un nombre entier. Au carré $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}^2$ d'un déterminant donné correspond un nombre fini de classes; chaque classe correspond à un nombre fini (une *période*) de formes réduites; chaque classe est représentée par un nombre fini de classes fondamentales. On peut établir un système complet de ces formes et trouver toutes les transformations d'une de ces formes en elle-même. Le problème de l'équivalence de deux formes est donc résolu[300]).

Les formes plus générales dans lesquelles $a, b, c, a', \ldots$ appartiennent à un corps algébrique cubique ont été étudiées par *Ph. Furt-*

---

295) $_*$J. reine angew. Math. 47 (1854), p. 333; Œuvres[12]) 1, p. 223 (Texte et note de *E. Picard*).*

296) J. reine angew. Math. 47 (1854), p. 334/5; 53 (1857), p. 182 et suiv.; Œuvres[12]) 1, p. 224/5, 415 et suiv.

297) Beitrag zur Pellschen Gleichung, Progr. Kiel 1891.

298) Proc. London math. Soc. (1) 21 (1889/90), p. 280.

299) Proc. London math. Soc. (1) 27 (1895/6), p. 187.

300) *Arnold Meyer,* Zur Theorie der zerlegbaren Formen, insbesondere der cubischen [Habilitationsschrift], Zurich 1870, publiée par *F. Rudio,* Viertelj. Naturf. Ges. Zürich 42 (1897), p. 149.

wängler[301]). Il fait usage, en s'inspirant des idées de *Ch. Hermite,* de la représentation de cette forme par le *réseau* des formes quadratiques associées

$$\lambda\,|ax + by + cz|^2 + \lambda'\,|a'x + b'y + c'z|^2 + \lambda''\,|a''x + b''y + c''z|^2.$$

La théorie de la composition, étudiée par *Ph. Furtwängler,* se base sur la multiplication des *nombres du réseau.* Chaque *nombre du réseau* se décompose en un nombre fini de nombres premiers.

Soit, d'une façon plus générale, la forme

$$a\prod_{i=1}^{i=n}(a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,n}x_n),$$

dans laquelle les $a_{k,i}$ sont des fonctions rationnelles d'un nombre algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré, le produit étant étendu à toutes les valeurs conjuguées de l'un des facteurs; le nombre entier rationnel a sert à faire disparaître le dénominateur.

Toute forme à coefficients entiers qui se décompose en facteurs linéaires peut s'écrire ainsi *et la recherche des facteurs ne dépend que de la recherche du nombre algébrique.*

La forme

$$\prod(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_n x_n),$$

où $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ est la base d'un corps algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré et où le produit est étendu à toutes les valeurs conjuguées, est dite *forme principale;* c'est la *norme* de $\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_n x_n$.

L'équation

$$\prod(\omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \cdots + \omega_n x_n) = \pm 1,$$

où le produit est étendu à toutes les valeurs conjuguées, est l'analogue de *l'équation de Fermat.* Sa résolution est identique à la recherche des unités du corps algébrique envisagé.

G. Lejeune Dirichlet montre que toutes les solutions de l'équation

$$\prod(x_1 + \alpha x_2 + \cdots + \alpha^{n-1}x_n) = 1,$$

où α désigne un nombre entier algébrique du $n^{\text{ième}}$ degré et où le produit est étendu à toutes les valeurs conjuguées de α, s'obtiennent, à des racines de l'unité près contenues dans le corps algébrique envisagé, en multipliant entre elles des puissances de $\nu - 1$ solutions fondamentales, ν désignant le nombre des valeurs réelles augmenté du nombre des couples de valeurs imaginaires de α[302]).

301) Zur Theorie der in Linearfactoren zerlegbaren ganzzahligen ternären kubischen Formen, Diss. Göttingue 1896.

302) *J. L. Lagrange,* Hist. Acad. Berlin 23 (1767), éd. 1769, p. 165; Al-

La réduction de ces formes se ramène, par la méthode de *Ch. Hermite,* à celle des formes quadratiques positives associées.

Le nombre des classes, pour un discriminant donné, est *fini,* et toutes les substitutions automorphes de ces formes sont des produits de puissances de certaines *substitutions fondamentales* en nombre fini[303]).

54. Autres formes. Pour les formes de degré quelconque supérieur à *deux,* à un nombre quelconque de variables, *C. Jordan* a démontré d'importants théorèmes généraux.

*En particulier[304]), une forme à coefficients entiers est équivalente à une *réduite* dont les coefficients ont leurs valeurs absolues limitées par des fonctions rationnelles entières des valeurs absolues des invariants de la forme. Les formes à coefficients entiers algébriquement équivalentes à une même forme, c'est-à-dire s'en déduisant par une substitution de déterminant ± 1 mais à coefficients quelconques, se distribuent en un nombre limité de classes. Ces théorèmes peuvent être exceptionnellement en défaut mais seulement quand le discriminant de la forme est nul.*

*Quand le discriminant commun des deux formes est différent de zéro, le nombre fini des substitutions qui transforment l'une de ces deux formes dans l'autre ne dépend que du degré m et du nombre des variables n; les valeurs absolues des coefficients de ces substitutions sont limitées; elles ne dépendent que de m, de n et des valeurs absolues des coefficients des deux formes. On en déduit que *par un nombre limité d'essais* on peut voir si deux formes de mêmes m et n sont, ou non, équivalentes et, si elles le sont, trouver les substitutions à coefficients entiers qui les transforment l'une dans l'autre.

H. Poincaré[305]), qui a repris ces questions dans le cas particulier

gèbre[29]) 2, p. 636 et suiv.; Œuvres 2, Paris 1868, p. 377; 7, Paris 1877, p. 164 et suiv.; *G. Lejeune Dirichlet,* C. R. Acad. sc. Paris 10 (1840), p. 286; Ber. Akad. Berlin 1841, p. 280; 1842, p. 93; 1846, p. 105; Werke 1, Berlin 1889, p. 621, 627, 635, 642; *G. B. I. T. Libri,* C. R. Acad. sc. Paris 10 (1840), p. 311, 383; *J. Liouville,* C. R. Acad. sc. Paris 10 (1840), p. 381; *Ch. Hermite,* J. reine angew. Math. 40 (1850), p. 298, 312; Œuvres[12]) 1, p. 144, 160; *H. Poincaré,* C. R. Acad. sc. Paris 92 (1881), p. 777; Bull. Soc. math. France 13 (1884/5), p. 162; *L. Kronecker,* C. R. Acad. sc. Paris 96 (1883), p. 93, 148, 216; Werke 3[1], Leipzig 1899, p. 3/19. Voir à ce sujet *H. Minkowski,* Diophantische Approximationen, Leipzig 1907, p. 142 et, en général, l'article I 18.

303) *Ch. Hermite,* J. reine angew. Math. 47 (1854), p. 335, 339; 53 (1857), p. 182; Œuvres[12]) 1, p. 226, 230, 415.

304) **C. Jordan,* C. R. Acad. sc. Paris 88 (1879), p. 906; 90 (1880), p. 1422; J. Ec. polyt. (1) cah. 48 (1880), p. 111 (Texte de *E. Picard*)*.

305) C. R. Acad. sc. Paris 90 (1880), p. 1336; 94 (1882), p. 67, 124; J. Ec. polyt. (1) cah. 50 (1881), p. 199; (1) cah. 51 (1882), p. 45.

des formes cubiques ternaires et quaternaires, montre que, quand le discriminant commun des deux formes envisagées est nul, il y a une infinité de transformations automorphes des deux formes l'une dans l'autre.*

L'*ordre* et le *genre* ont été définis par *H. Poincaré.* Deux classes sont dites de *même ordre* lorsque leurs coefficients, pris ou non avec les facteurs polynomiaux, ont le même p. g. c. d. et qu'il en est de même de leurs invariants et covariants. Deux classes sont dites de *même genre* lorsque, étant donné un module quelconque, on peut trouver dans ces deux classes respectivement deux formes qui soient congrues par rapport à ce module.

55. Représentation par des formes diverses. Sur la représentation des nombres entiers par des formes données, on doit d'abord mentionner le théorème que *E. Waring*[306]) a énoncé mais non démontré:

Quel que soit le nombre naturel n que l'on envisage, tout nombre naturel N est la somme d'un nombre k de puissances $n^{\text{ièmes}}$ de nombres naturels et $k \leqq \left[\frac{3^n}{2^n}\right] + 2^n - 2$, en sorte que pour $n = 2, 3, 4, 5, \ldots$ on a $k \leqq 4, 9, 19, 37, \ldots$

Pour $n = 2$ le théorème est démontré (n° **37**); on sait même que k est égal à 4 pour tous les entiers positifs $N \equiv 7 \pmod{8}$.

*Pour $n = 3$, *E. Maillet*[307]) a démontré que $k \leqq 17$. *A. Fleck*[308]) a réduit ce nombre à 13. Enfin *A. Wieferich*[309]) a démontré le théorème de Waring, pour $n = 3$, en réduisant ce nombre à 9. On ne connaît d'ailleurs que deux nombres 23 et 239 ne pouvant être représentés par un nombre moindre de cubes; on a

$$23 = 2^3 + 2^3 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$$
$$239 = 5^3 + 3^3 + 3^3 + 3^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 + 1.$$

E. Landau[310]) a montré que tout entier N supérieur à une certaine borne finie est la somme d'au plus 8 cubes positifs.*

*Le théorème de Waring, pour $n = 4$, d'après lequel tout bicarré

306) Meditationes algebraicae (3e éd.), Cambridge 1782, p. 349. Voir aussi *C. G. J. Jacobi,* J. reine angew. Math. 42 (1851), p. 41; Werke 6, Berlin 1891, p. 322/54; *A. R. Zornov,* J. reine angew. Math. 14 (1835), p. 276; *S. Realis,* Nouv. Corresp. math. 4 (1878), p. 209; *E. Lucas,* Nouv. Corresp. math. 4 (1878), p. 323; Nouv. Ann. math. (2) 17 (1878), p. 536.

307) *Assoc. fr. avanc. sc. 24 (Bordeaux) 1895², p. 242; J. math. pures appl. (5) 2 (1896), p. 363/80.*

308) *Sitzgsb. Berliner Math. Ges. 5 (1906), p. 2.*

309) *Math. Ann. 66 (1909), p. 95/101.*

310) *Math. Ann. 66 (1909), p. 103 *

est la somme d'au plus 19 bicarrés n'a pu encore être démontré. Il a toutefois été vérifié par *C. A. Bretschneider*[311]) jusqu'au nombre 4100. Et les nombres

$$79, \quad 159, \quad 239, \quad 319, \quad 399, \quad 479, \quad 559$$

exigent vraiment 19 bicarrés.*

**J. Liouville*[312]) a, le premier, démontré que tout nombre entier positif est décomposable en une somme de 53 bicarrés au plus. *S. Realis*[313]), *E. Lucas*[314]), *A. Fleck*[315]), *E. Landau*[316]) et *A. Wieferich*[317]) ont successivement réduit ce nombre à 47, 41, 39, 38 et 37.*

*Pour $n = 5$, *E. Maillet*[318]) a montré que tout nombre N est au plus la somme de 192 cinquièmes puissances; ce nombre a été abaissé à 59 par *A. Wieferich*[318a]).

Pour $n = 6$, *A. Fleck*[319]) a seulement montré que k est limité. *A. Wieferich*[318a]) a traité de cas où $n = 7$.

Pour $n = 8$, *E. Maillet*[320]) et *A. Hurwitz*[321]) ont également montré que k est limité. *A. Hurwitz*[321]) a même trouvé que $k \leqq 36959$; ce nombre peut d'ailleurs être un peu réduit.

D'après une remarque de *E. Landau*[322]), reposant sur une identité que lui avait communiquée *I. Schur*, le théorème d'après lequel k est limité a encore lieu pour $n = 10$.

A. Hurwitz[323]) et *E. Maillet*[320]) ont montré qu'à chaque nombre n correspond une infinité de nombres N ne pouvant pas être représentés comme somme de n ou de moins de n puissances $n^{\text{ièmes}}$.

D. Hilbert[324]) enfin a montré que, quel que soit n, tout nombre

---

311) *J. reine angew. Math. 46 (1853), p. 1.*

312) *Dans un Cours professé au Collége de France; voir à ce sujet *V. A. Lebesgue*, Exercices d'Analyse numérique, Paris 1859, p. 113.*

313) *Nouv. Corresp. math. 4 (1878), p. 209/10.*

314) *Id. 4 (1878), p. 323/5; Nouv. Ann. math. (2) 17 (1878), p. 536.*

315) *Sitzgsb. Berliner Math. Ges. 5 (1906), p. 2.*

316) *Rend. Circ. mat. Palermo 23 (1907), p. 91/6.*

317) *Math. Ann. 66 (1909), p. 106/18.*

318) *J. math. pures appl. (5) 2 (1896), p. 363/80.*

318a) *Math. Ann. 67 (1909), p. 61 et suiv.*

319) *Math. Ann. 64 (1907), p. 563.*

320) *C. R. Acad. sc. Paris 145 (1907), p. 1399; Bull. Soc. math. France 36 (1908), p. 69/77.*

321) *Math. Ann. 65 (1908), p. 425.*

322) *Math. Ann. 66 (1909), p. 105.*

323) *Math. Ann. 65 (1908), p. 426.*

324) *Nachr. Ges. Gött. 1909, math. p. 17. Au sujet du théorème de *E. Waring*, cf. *D. Hilbert*, Math. Ann. 67 (1909), p. 281 et suiv.; *F. Hausdorff*, id. 67 (1909), p. 301 et suiv.*

naturel N est la somme d'un nombre k de puissances $n^{\text{ièmes}}$ de nombres naturels, où k est plus petit ou égal à un nombre ν qui ne dépend que de n.*

$_*$*E. Waring*[306]) avait aussi prévu (sans le démontrer) que tout nombre entier positif supérieur à une certaine borne finie est, à un nombre limité d'unités près, la somme d'un nombre limité de nombres entiers positifs de la forme

$$ax^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

où $a, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sont des entiers positifs donnés et où x est un entier positif. *E. Maillet*[325]) a établi l'exactitude jusqu'à $n = 5$ de cette hypothèse générale de *E. Waring*. Il a même envisagé des extensions de ce théorème au cas un peu plus général où $a, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ sont des nombres rationnels, $a > 0$.* Ainsi il s'est occupé[326]) de la représentation des nombres entiers par des sommes d'expressions de la forme $\frac{ax^2+bx}{2}$, $\frac{ax^4+bx^2}{2}$, $_*$et a montré que tout nombre entier $\geqq 19272$ est la somme de *douze* nombres pyramidaux (cf. I 15, **3**) au plus.*

$_*$*E. Catalan*[327]) a énoncé, mais non démontré, que deux entiers consécutifs autres que 8 et 9 ne peuvent être des puissances exactes.*

Sur la représentation des puissances comme somme de puissances, nous citerons ici les théorèmes suivants:

La somme ou la différence de deux cubes ne peut être un cube[328]), ni le double d'un cube, ni le quadruple d'un cube[329]).

La somme de trois cubes peut être un cube; ainsi

$$3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3;$$

elle peut être le double d'un cube; ainsi

$$7^3 + 11^3 + 102^3 = 2 \cdot 81^3.$$

La somme de deux bicarrés ne peut être un bicarré[328]) ou le double d'un bicarré. Elle ne peut même être le carré ou le double d'un carré. Au contraire, la somme de trois bicarrés peut être un carré

---

325) $_*$J. math. pures appl. (5) 2 (1896), p. 363 (Texte et notes 318 à 325 de *E. Maillet*).*

326) *E. Maillet*, Bull. Soc. math. France 23 (1895), p. 40; J. math. pures appl. (5) 2 (1896), p. 363.

327) Nouv. Ann. math. (1) 1 (1842), p. 520; *V. A. Lebesgue*, id. (1) 9 (1850), p. 178.

328) Cf. I 15, **21**. C'est un cas particulier du théorème de Fermat.

329) $_*$*H. A. Delannoy*, J. math. élém. (Longch.) (5) 1 (21ième année) 1897, p. 58;* *A. M. Legendre* [Théorie des nombres[1]) (3e éd.) 2, Paris 1830, p. 9] avait déjà montré que $x^3 + y^3 = 2^m z^3$ n'est jamais résoluble en nombres entiers, quel que soit m.*

ou le double d'un carré; ainsi quand x, y, z désignent trois entiers tels que $x^2 + y^2 = z^2$, on a

$$(xy)^4 + (yz)^4 + (zx)^4 = (z^4 - x^2y^2)^2;$$

ainsi

$$12^4 + 20^4 + 15^4 = (481)^2;$$

et quand x, y, z sont trois entiers tels que $x + y + z = 0$ on a

$$x^4 + y^4 + z^4 = 2(xy + yz + zx)^2;$$

ainsi

$$1^4 + 2^4 + 3^4 = 2 \cdot 7^2.$$

La somme de cinq bicarrés peut être un bicarré; la somme de six cinquièmes puissances peut être une cinquième puissance; ainsi[330])

$$4^5 + 5^5 + 6^5 + 7^5 + 9^5 + 11^5 = 12^5.$$

Les deux équations[331])

$$x^m y^n + y^m z^n + z^m x^n = 0,$$

$$u^{m^2 - mn + n^2} + v^{m^2 - mn + n^2} + w^{m^2 - mn + n^2} = 0,$$

où m et n sont deux entiers positifs quelconques donnés, dont l'un au moins est impair [on les suppose premiers relatifs], sont ou bien toutes deux résolubles en nombres entiers, ou bien n'admettent ni l'une ni l'autre de solution en nombres entiers.

Le plus célèbre théorème de ce genre est le *théorème de Fermat*: si n est un nombre naturel plus grand que 2, la somme de deux puissances $n^{\text{ièmes}}$ de deux nombres naturels ne peut être une puissance $n^{\text{ième}}$ d'un nombre naturel. ⁎Il suffirait évidemment de démontrer ce théorème pour n premier, puisqu'il est démontré pour $n = 4$; mais jusqu'ici on n'a pas même pu le démontrer pour une suite infinie de nombres premiers.*

⁎En s'appuyant sur la théorie des idéaux (cf. I 18) qu'il a créée à cette occasion, *E. E. Kummer*[332]) en a donné une première démonstration[333]) s'appliquant aux nombres premiers qui satisfont à une

330) ⁎Voir par ex. *A. Martin,* Math. papers Chicago[44]), p. 168.*

331) ⁎*A. Hurwitz,* Math. Ann. 65 (1908), p. 430.*

332) Cf. I 15, **21**.

333) Au sujet de la bibliographie du *théorème de Fermat* voir I 15, **21** notes 199 à 213 et en outre ⁎*N. H. Abel,* lettre à *B. M. Holmboe* datée de Copenhague l'an $\sqrt[3]{6064321219}$ en comptant les fractions décimales (24 juin 1823); Œuvres, éd. *L. Sylow* et *S. Lie* 2, Christiania 1881, p. 254/5;* *G. Lamé,* J. math. pures appl. (1) 12 (1847), p. 137, 172; *A. L. Cauchy,* id. (1) 5 (1840), p. 211; *L. Kronecker,* J. reine angew. Math. 56 (1859), p. 188; Werke 1, Leipzig 1895, p. 121; ⁎*L. Calzolari,* Ann. sc. mat. fis. 8 (1857), p. 339/45; Ann. mat. pura appl. (1) 6 (1864), p. 280/6; *A. Genocchi,* id. (1) 6 (1864), p. 287/8; C. R. Acad. sc. Paris 82 (1876), p. 910/3;* *D. S. Hart,* Math. Quest. Educ. Times 14 (1870), p. 86;

certaine condition[334]). Le théorème est ainsi démontré[335]), en particulier, pour les nombres premiers inférieurs à 100 excepté 37, 59, 67. Il a ensuite donné une autre démonstration[336]) s'appliquant aux nombres premiers qui ne satisfont pas à la condition précédente, mais satisfont à d'autres conditions. Cette démonstration s'applique à $n = 37, 59, 67$, mais, pas plus que la précédente, elle n'a un caractère général.*

*On a aussi étudié[337]) des équations de la forme (cf. I 15, 21)

$$x^n + y^n = cz^n.$$

Dans la question de la représentation du nombre *zéro* par une expression algébrique, c'est plutôt le *genre* (au sens de *B. Riemann*) que

---

Ch. Hermite, Nouv. Ann. math. (2) 11 (1872), p. 5; **F. C. Lukas,* Archiv Math. Phys. (1) 58 (1876), p. 109/12; *S. Günther,* Sitzgsb. böhm. Ges., Prag 1878, p. 112/20;* *F. Proth,* Nouv. Corresp. math. 4 (1878), p. 179; *E. Lucas,* id. 4 (1878), p. 323; *E. Catalan,* id. 4 (1878), p. 352; *A. H. Desboves,* id. 6 (1880), p. 34; *Th. Pepin,* Atti Accad. pontif. Nuovi Lincei 34 (1880/1), p. 73; **Th. Pepin,* C. R. Acad. sc. Paris 91 (1880), p. 316/68; *A. Lefébure,* id. 90 (1880), p. 1406; *E. Catalan,* Bull. Acad. Belgique (3) 12 (1886), p. 498/500; *F. Borletti,* Reale Ist. Lombardo *Rendic.* (2) 20 (1887), p. 222/4; *P. Mansion,* Bull. Acad. Belgique (3) 13 (1887), p. 16/7, 25;* *A. Martin,* Math. Quest. Educ. Times 50 (1888), p. 74/5; **D. Varisco,* Giorn. mat. (1) 27 (1889), p. 371/80; *A. Rieke,* Z. Math. Phys. 34 (1889), p. 238/48; 36 (1891), p. 249/54; *J. Rothholz,* Beiträge zum Fermatschen Lehrsatz, Diss. Giessen 1892; *Anonyme,* Z. Math. Phys. 37 (1892), p. 57; *Anonyme,* Z. Math.-Naturw. Unterricht 23 (1892), p. 417/8; *H. Dutordoir,* Ann. Soc. scient. Bruxelles 17[1], (1892/3), p. 81; *E. Wendt,* J. reine angew. Math. 113 (1894), p. 335/47; *G. Korneck,* Archiv Math. Phys. (2) 13 (1895), p. 1/9, 263 [1894]; *E. Picard* et *H. Poincaré,* C. R. Acad. sc. Paris 118 (1894), p. 841; *G. B. Mathews,* Messenger math. (2) 24 (1894/5), p. 97/9; *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières,* C. R. Acad. sc. Paris 121 (1895), p. 1139/43; *D. Gambioli,* Periodico mat. (2) 3 (1900/1), p. 145/92; (2) 4 (1901/2), p. 48/50 (travail bibliographique); *I. R. Bendz,* Öfver diophantiska equationen $x^n + y^n = z^n$, Thèse, Upsal 1901;* *P. Stäckel,* Acta math. 27 (1903), p. 125; **L. E. Dickson,* Messenger math. (2) 38 (1908/9), p. 14; Quart. J. pure appl. math. 40 (1909), p. 27;* J. reine angew. Math. 135 (1909), p. 181; *A. Wieferich,* id. 136 (1909), p. 293; *G. Frobenius,* id. 137 (1910), p. 314; *D. Mirimanov,* id. 128 (1904), p. 45; L'Enseignement math. 11 (1909), p. 49/51. *[Les additions contenues dans cette note sont dues à *G. Vivanti*].* Pour la bibliographie du *théorème de Fermat* voir encore: Interméd. math. 1 (1894), p. 179; 2 (1895), p. 117, 359; 12 (1905), p. 11; 13 (1906), p. 99 [Question 314].

334) *Le *théorème de Fermat* a donné naissance à un nombre étendu d'essais erronés de démonstrations, surtout depuis la fondation du prix *Wolfskehl.**

335) Ber. Akad. Berlin 1847, p. 132, 305; J. reine angew. Math 40 (1850), p. 130; J. math. pures appl. (1) 16 (1851), p. 488.

336) Ber. Akad. Berlin 1857, p. 275; Abh. Akad. Berlin 1857, math. p. 41.

337) *E. Maillet,* C. R. Acad. sc. Paris 129 (1899), p. 198; Acta math. 24 (1901), p. 247; Mém. Acad. sc. Toulouse (10) 5 (1905), p. 132/3; Ann. mat. pura appl. (3) 12 (1905), p. 145; *K. Schwering,* Archiv Math. Phys. (3) 2 (1902), p. 280, 285; *A. Fleck,* Math. Ann. 64 (1907), p. 565.

le *degré* qui intervient. Par exemple, une équation ternaire homogène

$$f(x, y, z) = 0,$$

de *genre zéro*, peut se ramener, par une transformation arithmétique rationnelle, à une équation du second degré [338]) ou même à une équation

$$y^2 = ax^2 + bx + c,$$

qu'on sait résoudre [339]). Au contraire il n'a pas encore été trouvé si une équation de *genre un* peut se ramener à une équation cubique ou à une équation de la forme [340])

$$y^2 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Dans ses recherches sur les *affects* des équations, *L. Kronecker* s'est proposé d'établir toutes les équations ayant *même affect*; à cet effet il faut résoudre l'équation

$$\Phi(g, f_1, f_2, \ldots, f_n) = 0,$$

à coefficients entiers, qui relie la *fonction d'affect* g aux fonctions symétriques élémentaires $f_1, f_2, \ldots, f_n$. *L. Kronecker* [341]) a résolu cette équation dans le cas où g est une *fonction cyclique*.

Si l'on désigne par $\mathrm{D}(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ le discriminant du polynome

$$\mathrm{T} = x_0 t^n + x_1 t^{n-1} + \cdots + x_n,$$

l'équation

$$\mathrm{D}(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \pm 1$$

est toujours résoluble en nombres rationnels. En nombres entiers, la même équation n'est résoluble que lorsque T est de l'une des deux formes [342])

$$\mathrm{T} = (ut + v)(u't + v'), \quad \mathrm{T} = (ut + v)(u't + v')(u''t + v''),$$

où

$$vu' - uv' = \pm 1, \quad u + u' + u'' = 0, \quad v + v' + v'' = 0.$$

---

338) *D. Hilbert* et *A. Hurwitz*, Acta math. 14 (1890/1), p. 217.

339) Pour les équations de genre quelconque, voir *H. Poincaré*, J. math. pures appl. (5) 7 (1901), p. 161.

340) Pour ces équations et les équations cubiques, voir par ex. *Diophante* [Opera [117]), éd. *P. Tannery* 1, Leipzig 1893, p. 410, 436]; *C. G. Bachet de Méziriac* [Diophanti arithmeticorum libri sex [168]), Paris 1621, p. 387, 425]; *J. de Billy* [Inventum novum, trad. par *P. Tannery* dans *P. de Fermat*, Œuvres [97]) 3, p. 325]; *L. Euler* [Algebra [79]) 2, p. 330/63; trad. 2, p. 135/76] etc. *C. G. J. Jacobi* [J. reine angew. Math. 13 (1835), p. 55/78; Werke 2, Berlin 1882, p. 25/50] donne un théorème concernant les équations hyperelliptiques $y^2 = ax^n + \cdots + kx + l$ [cf. *J. Ptaszycki*, Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 18 (1909), p. 1/3; *J. von Sz. Nagy*, id. p. 4/7].

341) Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen, Festschrift zu Herrn Kummers Doktorjubiläum, Berlin 1881 (§ 12); J. reine angew. Math. 92 (1882), p. 38; Werke 2, Leipzig 1897, p. 289; Ber. Akad. Berlin 1853, p. 371.

342) *D. Hilbert*, Nachr. Ges. Gött. 1897, math. p. 48.

**C. Runge*[343]) a spécifié des cas étendus où l'équation indéterminée irréductible, de degré n, $f(x, y) = 0$ n'a qu'un nombre limité de solutions en nombres entiers. Il en est ainsi en particulier quand l'ensemble des termes de degré n de $f(x, y)$ est décomposable en facteurs linéaires rationnels tous distincts, $ax + by$, avec a ou b différent de zéro. Ce dernier résultat a été établi d'une manière simple par *E. Maillet*[344]) qui a aussi indiqué une série d'extensions à des équations indéterminées à trois variables $f(x, y, z) = 0$.

Les équations indéterminées $f(x, y) = 0$, $f(x, y, z) = 0$ n'ont d'ailleurs évidemment qu'un nombre limité de solutions en nombres entiers si elles représentent en coordonnées cartésiennes une courbe ou une surface dont tous les points réels sont à distance finie.

E. Maillet[345]) a formé toutes les équations indéterminées irréductibles $f(x, y) = 0$ ayant une infinité de solutions en nombres entiers ou rationnels x_n, y_n qui se déduisent d'une ou de deux d'entre elles par une formule de récurrence linéaire d'ordre un

$$x_n = \alpha x_{n-1}, \quad y = \alpha y_{n-1}$$

ou d'ordre deux

$$x_n = \alpha x_{n-1} + \beta x_{n-2}, \; y_n = \alpha y_{n-1} + \beta y_{n-2}.$$

Quand les x_n, y_n sont entiers, $f(x, y)$ est nécessairement soit linéaire, soit quadratique, soit de la forme

$$(tv'y - t'vx)^p - (vu'x - uv'y)^q (tu' - ut')^{p-q} = 0,$$

où p, q sont premiers entre eux et où $tu' - ut'$ est différent de zéro. Il a de même indiqué[346]) le moyen de résoudre complètement une catégorie d'équations indéterminées à n variables en liaison avec la théorie des suites récurrentes.*

A. Thue[347]) a démontré le théorème que voici:

Si $f(x, y)$ est une fonction rationnelle entière homogène irréductible quelconque de x, y de degré > 2, l'équation $f(x, y) = c$ n'a qu'un nombre *fini* de solutions en nombres entiers x, y.

---

343) *J. reine angew. Math. 100 (1887), p. 425.*

344) *J. math. pures appl. (5) 6 (1900), p. 266, 276.*

345) *Mém. Acad. sc. Toulouse (9) 7 (1895), p. 213.*

346) *Assoc. fr. avanc. sc. 24 (Bordeaux) 1895[2], p. 233/42 (Texte et notes 343 à 346 de *E. Maillet*).*

347) J. reine angew. Math. 135 (1909), p. 284.

I 17. PROPOSITIONS TRANSCENDANTES DE LA THÉORIE DES NOMBRES.

EXPOSÉ, D'APRÈS L'ARTICLE ALLEMAND DE **P. BACHMANN** (WEIMAR),
PAR **J. HADAMARD** (Paris) et **E. MAILLET** (BOURG LA REINE).

Introduction.

1. *Préliminaires. Il arrive souvent que la solution d'une question d'analyse dépende des propriétés arithmétiques de certains nombres qui figurent parmi les données. Il est alors clair qu'inversement cette solution, si elle est connue par ailleurs, donnera des renseignements sur les propriétés arithmétiques en question.

C'est ce qui a lieu pour la théorie de la multiplication complexe des fonctions elliptiques (I 19), la théorie analogue des fonctions abéliennes singulières, celle du groupe modulaire (cf. I 16, 18) ou, plus généralement, des groupes et des fonctions automorphes, etc.

Les méthodes développées dans le présent article dérivent *très-souvent* d'un même principe, celui des *fonctions génératrices.*

Envisageons une série limitée ou illimitée à terme général

$$a_n \varphi_n(z),$$

où les $\varphi_n(z)$ sont des fonctions données une fois pour toutes et les a_n des constantes numériques arbitraires. Soit $F(z)$ la fonction définie par la somme

$$F(z) = \sum_{(n)} a_n \varphi_n(z) \tag{1}$$

de cette série. Si, $F(z)$ étant donnée ainsi que les $\varphi_n(z)$, il n'existe qu'une manière de déterminer les a_n pour laquelle l'identité (1) soit vérifiée, on conçoit que toute propriété de $F(z)$ fera connaître une propriété des a_n.

Dans cet article, les séries envisagées seront, en général, les *séries de Lejeune Dirichlet,* au sens général du mot, pour lesquelles

$$\varphi_n(z) = e^{-\lambda_n z},$$

où les λ_n sont des nombres réels en nombre infini, constamment et indéfiniment croissants avec n.

Toutefois les *séries de factorielles*, qui correspondent au cas où

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{z\,(z+1)\,(z+2)\ldots(z+n)},$$

peuvent rendre des services du même genre.

Pour

$$\lambda_n = n$$

le terme général

$$a_n e^{-\lambda_n z}$$

des séries de Lejeune Dirichlet devient, en posant

$$e^{-z} = x,$$

le terme général

(2) $$a_n x^n$$

d'une série de Maclaurin.

Ce cas particulier, où l'identité (1) se présente sous la forme

$$\Phi(x) = \sum_{(n)} a_n x^n$$

fait l'objet du premier chapitre de cet article intitulé: „Partition des nombres". La méthode indiquée ci-dessus y est surtout appliquée de la façon suivante:

Supposons qu'on ait plusieurs séries de Maclaurin, dans chacune desquelles les coefficients a_n soient tous égaux à un ou à zéro, autrement dit plusieurs séries de la forme

$$\begin{gathered} x^{p_0} + x^{p_1} + \cdots + x^{p_i} + \cdots\cdots, \\ x^{q_0} + x^{q_1} + \cdots + x^{q_k} + \cdots\cdots, \\ x^{r_0} + x^{r_1} + \cdots + x^{r_l} + \cdots\cdots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{gathered}$$

$p_0, p_1, \ldots, p_i, \ldots\ldots$ étant des entiers positifs croissants, de même que $q_0, q_1, \ldots, q_k, \ldots\ldots$ ou $r_0, r_1, \ldots, r_l, \ldots\ldots$. Envisageons la série que l'on obtient en faisant le produit des séries précédentes; soit

$$\alpha_n x^n$$

un terme quelconque de cette série. Le coefficient α_n est égal au nombre des décompositions ou *partitions* de n en une somme

$$p_i + q_k + r_l + \cdots\cdots.$$

Si, dans la première des séries précédentes, le coefficient de x^{p_i} n'est plus 1 mais une quantité $\psi(p_i)$ variable avec i, le coefficient α_n est égal à la somme des valeurs de $\psi(p_i)$ pour les différentes décompositions en question.

Des règles analogues peuvent être formulées dans tous les autres cas.

Voilà pour les méthodes. Quant aux résultats ils ont été groupés comme il suit:

Dans le premier chapitre on s'occupe de la *partition des nombres* c'est-à-dire *de la manière* de décomposer un nombre entier positif en une somme d'entiers *positifs* jouissant ou non de propriétés particulières. En d'autres termes on cherche des solutions positives des équations indéterminées analogues à

$$n = ax + by + \cdots,$$

où $a, b, \ldots$ sont des entiers positifs donnés, ou des solutions de systèmes d'équations de ce genre.

Le second chapitre est consacré à l'étude des propriétés d'un certain nombre de fonctions numériques de l'arithmétique, des identités auxquelles elles donnent lieu, des transformations qu'on peut leur faire subir et particulièrement de *l'inversion* de ces fonctions, des fonctions $\mu(n)$, $[x]$ et des sommes de Gauss.

Dans les chapitres suivants on étudie les séries et les méthodes de *G. Lejeune Dirichlet*, en particulier le théorème sur l'infinité des nombres premiers qui se trouvent parmi les termes $ax + b$ d'une progression arithmétique telle que a et b soient premiers entre eux et des théorèmes analogues, ainsi que les théorèmes sur le nombre de classes d'une forme quadratique. On envisage les expressions asymptotiques du nombre des nombres premiers au plus égaux à x, on étudie la distribution de ces nombres et l'on effectue des recherches similaires. On s'occupe aussi avec quelques détails des valeurs moyennes ou médianes des fonctions numériques de l'arithmétique.

Enfin un dernier chapitre est consacré à l'exposé des travaux relatifs aux nombres transcendants, c'est-à-dire aux nombres qui, comme e et π, ne sont racines d'aucune équation algébrique à coefficients entiers.*

Partition des nombres.

2. Théorèmes d'Euler. En développant suivant les puissances entières et positives de x et de z des produits infinis convergents, tels que

$$(1 + xz)(1 + x^2z)(1 + x^3z) \cdots (1 + x^\nu z) \cdots\cdots,$$
$$\frac{1}{1 - xz}\,\frac{1}{1 - x^2z}\,\frac{1}{1 - x^3z} \cdots \frac{1}{1 - x^\nu z} \cdots\cdots$$

et autres analogues, *L. Euler*[1]) a obtenu, après quelques transformations

1) Introd. in analysin infin. 1, Lausanne 1748, p. 253; trad. *J. B. Labey* 1,

analytiques[2]), plusieurs théorèmes intéressants parmi lesquels nous citerons les suivants:

Tout nombre naturel peut être décomposé d'autant de manières différentes en une somme de nombres naturels différents, qu'en une somme de nombres naturels impairs, différents ou non.

Tout nombre naturel peut être décomposé d'autant de manières différentes en une somme de h nombres naturels différents, qu'en une somme formée avec les h premiers nombres, chacun de ces derniers figurant au moins une fois dans la somme[3]).

Le nombre des décompositions d'un nombre naturel quelconque n en un nombre *pair* de nombres naturels (inégaux) est égal au nombre des décompositions de n en un nombre *impair* de nombres naturels, sauf quand n est un nombre pentagonal, c'est-à-dire (cf. I 1, **13**) un nombre de la forme $\frac{3h^2-h}{2}$, où h est entier (positif ou négatif). Lorsque n est un nombre pentagonal, le nombre des décompositions de n en un nombre *pair* de nombres naturels (inégaux) est plus grand ou plus petit d'une unité, suivant que h est pair ou impair, ou si l'on veut, suivant que $24n+1$ est le carré d'un nombre de la forme $12k\pm 1$ ou le carré d'un nombre de la forme $12k\pm 7$. C'est là le *théorème sur les nombres pentagonaux*[4]).

3. Théorèmes similaires. *C. G. J. Jacobi*[5]) a obtenu, d'abord à l'aide des fonctions elliptiques, puis directement, une équation d'où

Paris an IV, p. 234; Novi Comm. Acad. Petrop. 3 (1750/1), éd. 1753, p. 125; 14 (1769), éd. 1770, p. 168; Commentat. Arith. 1, St Pétersb. 1849, p. 73, 391.

2) Les conditions de convergence de ces séries sont contenues dans des théorèmes d'analyse élémentaire. Voir à ce sujet l'article I 4 de l'Encyclopédie.

3) *F. Brioschi* [Ann. sc. mat. fis. 8 (1857), p. 5]; *J. J. Sylvester* [id. p. 12]; *P. Volpicelli* [id. p. 22] et *F. Faà di Bruno* [J. reine angew. Math. 85 (1878), p. 317; Math. Ann. 14 (1879), p. 241] ont donné des méthodes pour la détermination du nombre des décompositions de n en une somme de h termes, différents ou non, pris dans la suite $1, 2, \ldots, m$. Des formules pour le nombre des décompositions d'un nombre en une somme de trois, quatre, cinq, six termes ont été établies par *J. J. Sylvester* [Amer. J. math. 5 (1882), p. 79], *A. Cayley* [Philos. Trans. London 146 (1856), p. 127/40; 148 (1858), p. 47/52; Papers 2, Cambr. 1889, p. 235/49, 506/12], *J. Zuchristian* [Monatsh. Math. Phys. 4 (1893), p. 185], *K. Glösel* [id. 7 (1896), p. 133, 290], *R. Daublebsky von Sterneck* [Archiv Math. Phys. (3) 3 (1902), p. 195], *H. Wolff*, Diss. Halle 1899.

4) *L. Euler*, *Bibliothèque impartiale (Leyde) 3 (1751), p. 10/31;* Novi Comm. Acad. Petrop. 3 (1750/1), éd. 1753, p. 125/69; 5 (1754/5), éd. 1760, p. 75/83; Commentat. Arith. 2, St Pétersb. 1849, p. 639/47; id. 1, St Pétersb. 1849, p. 73/101, 234/8. *Voir aussi *A. M. Legendre*, Théorie des nombres (3e éd.) 2, Paris 1830, p. 132.* On trouvera à ce sujet des renseignements historiques dans *C. G. J. Jacobi*, J. reine angew. Math. 32 (1846), p. 164; Werke 6, Berlin 1891, p. 303.

résultent des théorèmes sur le nombre des décompositions d'un nombre de la forme $24k+3$ en une somme de trois carrés [cf. I 16, **37**]. Il donna[6]), ainsi que plus tard *F. Franklin*[7]), une démonstration *arithmétique* du théorème sur les nombres pentagonaux.

K. Th. Vahlen[8]) a indiqué un certain nombre de théorèmes de même nature et les a démontrés par des procédés arithmétiques tout à fait élémentaires. Ainsi, parmi les décompositions d'un nombre naturel n en une somme de termes différents, dont la somme des plus petits résidus en valeur absolue (mod. 3) est h, il y en a autant qui contiennent un nombre pair de termes qu'il y en a qui contiennent un nombre impair de termes, sauf toutefois quand n est de la forme $\frac{3h^2-h}{2}$; dans ce dernier cas on a une décomposition paire de plus ou une décomposition paire de moins, suivant que h est pair ou impair. Le théorème d'Euler sur les nombres pentagonaux[4]) s'en déduit en effectuant une sommation par rapport aux h. De la même manière *K. Th. Vahlen*[8]) retrouve aussi une formule de récurrence donnée par *J. Liouville*[9]) pour la somme des diviseurs des nombres impairs.

R. Daublebsky von Sterneck[10]) a déduit à nouveau, en la précisant, la proposition de *K. Th. Vahlen*[8]) ainsi que le théorème sur les nombres pentagonaux[4]) et la formule analytique de *C. G. J. Jacobi*[5]). Il a étendu les recherches de *K. Th. Vahlen* au cas où le module 3 est remplacé par le module 5 et, à ce propos, il a trouvé quelques nouveaux théorèmes d'après lesquels l'imparité du nombre de certaines décompositions d'un nombre naturel n dépend du nombre des représentations du nombre $24n+1$ par certaines formes quadratiques.

4. Formules d'Euler et de Zeller. Désignons par $\int(n)$ la somme de tous les diviseurs de n [cf. I 15, **1**], en sorte que

$$\int(1)=1,\ \int(2)=3,\ \int(3)=4,\ \int(4)=7,$$
$$\int(5)=6,\ \int(6)=12,\ \int(7)=8,\ \int(8)=15,\ \ldots\ldots$$

L. Euler[11]) a donné pour cette somme $\int(n)$ la formule

5) J. reine angew. Math. 21 (1840), p. 13; Werke 6, Berlin 1891, p. 281.

6) J. reine angew. Math. 32 (1846), p. 164; Werke 6, Berlin 1891, p. 303.

7) C. R. Acad. sc. Paris 92 (1881), p. 448; voir aussi *L. Goldschmidt*, Progr. Gotha 1892; Z. Math. Phys. 38 (1893), p. 121.

8) J. reine angew. Math. 112 (1893), p. 1.

9) J. math. pures appl. (2) 1 (1856), p. 349.

10) Sitzgsb. Akad. Wien 105 II^a (1896), p. 875; 106 II^a (1897), p. 115; 109 II^a (1900), p. 28.

11) Novi Comm. Acad. Petrop. 5 (1754/5), éd. 1760, p. 59, 75; Commentat.

$$\int(n)=\sum_{(h)}(-1)^{h-1}\left\{\int\left(n-\frac{3h^2+h}{2}\right)+\int\left(n-\frac{3h^2-h}{2}\right)\right\},$$

dans laquelle la somme Σ est étendue à tous les nombres naturels h pour lesquels l'argument $\left(n-\frac{3h^2+h}{2}\right)$, ou $\left(n-\frac{3h^2-h}{2}\right)$, qui figure sous le signe $\int$ est positif ou nul; lorsque n est un nombre pentagonal le terme $\int(0)$ qui figure dans le second membre doit être remplacé par le nombre n lui-même.

Ainsi pour $n=5$ ou $n=24$, on a

$$\int(5)=\int(3)+\int(4)-\int(0),$$
$$\int(24)=\int(22)+\int(23)-\int(17)-\int(19)+\int(9)+\int(12)-\int(2).$$

Une formule analogue a lieu pour le nombre $\Gamma(n)$ des décompositions de n en une somme de termes différents ou non; on a d'ailleurs

$$\int(n)=\sum_{(h)}(-1)^{h-1}\frac{3h^2+h}{2}\,\Gamma\left(n-\frac{3h^2+h}{2}\right),$$

la somme Σ qui figure dans le second membre étant étendue aux valeurs entières positives et négatives de h pour lesquelles l'argument $\left(n-\frac{3h^2+h}{2}\right)$ de Γ est positif ou nul; $\Gamma(0)$ doit d'ailleurs être ici remplacé par 1.

On a manifestement

$$\Gamma(1)=1,\ \ \Gamma(2)=2,\ \ \Gamma(3)=3,\ \ \Gamma(4)=5,$$
$$\Gamma(5)=7,\ \Gamma(6)=11,\ \Gamma(7)=15,\ \ldots\ldots$$

5. Formules d'Halphen et de Glaisher. D'un théorème général de *J. W. L. Glaisher* [12]) résultent deux formules [13]) déjà signalées par lui [14]), mais dont la première est due à *G. Halphen* [15]); ce sont les

---

Arith. 1, S^t Pétersb. 1849, p. 146, 234; *Chr. Zeller,* Acta math. 4 (1884), p. 415; *M. A. Stern,* id. 6 (1885), p. 327. Voir encore *J. J. Sylvester*, C. R. Acad. sc. Paris 96 (1883), p. 674, 1110, 1276; *J. W. L. Glaisher,* Proc. London math. Soc. (1) 22 (1890/1), p. 359; Messenger math. (2) 21 (1891/2), p. 47, 49, 122. D'autres théorèmes sur les décompositions peuvent se déduire de formules données par *V. A. Lebesgue,* J. math pures appl. (1) 5 (1840), p. 42. Cf. *P. Bachmann,* Die analytische Zahlentheorie, Leipzig 1894, p. 40/5. *Voir encore *P. A. Mac Mahon,* Trans. Cambr. philos. Soc. 18 (1900), p. 12 [1899].*

12) Messenger math. (2) 20 (1890/1), p. 129.

13) London Edinb. Dublin philos. mag. (5) 33 (1892), p. 54.

14) Quart. J. pure appl. math. 19 (1883), p. 220; Proc. London math. Soc. (1) 15 (1883/4), p. 110.

formules

$$\sum_{(h)} \left\{ (-1)^h (2h+1) \int \left(n - \frac{h(h+1)}{2} \right) \right\} = 0,$$

$$\sum_{(h)} \delta \left(n - \frac{h(h+1)}{2} \right) = 0,$$

dans lesquelles la somme Σ est étendue à tous les entiers h positifs ou nuls, pour lesquels l'argument $\left(n - \frac{h(h+1)}{2}\right)$ est positif ou nul; dans la dernière formule $\delta(n)$ désigne l'excès de la somme de tous les diviseurs impairs de n sur la somme de tous les diviseurs pairs de n; $\delta(0)$ doit y être remplacé par $-n$; dans la première formule $\int(0)$ doit être remplacé par $\frac{n}{3}$ [16]).

Ainsi pour $n = 8$ on a

$$\int(8) - 3\int(7) + 5\int(5) - 7\int(2) = 0,$$

$$\delta(8) + \delta(7) + \delta(5) + \delta(2) = 0.$$

On a d'ailleurs manifestement

$$\delta(1) = 1, \quad \delta(2) = -1, \quad \delta(3) = 4, \quad \delta(4) = -5, \quad \delta(5) = 6,$$
$$\delta(6) = -4, \ \delta(7) = 8, \ \delta(8) = -13, \ \ldots\ldots$$

J. W. L. Glaisher [17]) a aussi donné une formule concernant la somme

$$\sum_{(h)} (-1)^h (2h+1) \int_{(m)} \left(n - \frac{h(h+1)}{2} \right)$$

où la somme Σ est étendue à tous les nombres naturels h pour lesquels l'argument $n - \frac{h(h+1)}{2}$ est positif ou nul; dans cette expression le symbole $\int_{(m)}(k)$ désigne la somme des $m^{\text{ièmes}}$ puissances des diviseurs de k, m étant un nombre impair quelconque donné; cette formule (qui est d'ailleurs fort longue) établit un lien entre les sommes des puissances impaires des diviseurs de certains nombres et les sommes des puissances paires des nombres naturels [18]).

Ainsi pour $n = 8$ et $m = 3$, on a la relation

$$\int_{(3)}(8) - 3\int_{(3)}(7) + 5\int_{(3)}(5) - 7\int_{(3)}(2) = 120,$$

---

15) Bull. Soc. math. France 5 (1876/7), p. 158.

16) Voir à ce sujet *J. W. L. Glaisher*, Messenger math. (2) 7 (1877/8), p. 66.

17) Messenger math. (2) 20 (1890/1), p. 129.

18) Cf. *J. W. L. Glaisher*, Messenger math. (2) 21 (1891/2), p. 47, 49, 122, où il est encore question des rapports entre la fonction $\int(n)$ et le nombre des représentations d'un nombre naturel comme somme de 2, 3 ou 5 carrés.

et le nombre 120 peut être représenté d'après la formule de *J. W. L. Glaisher* par la somme que voici, où entrent des puissances paires des nombres naturels

$$120 = 6\left[\int(7) - (1^2 + 2^2)\int(5) + (1^2 + 2^2 + 3^2)\int(2)\right].$$

J. W. L. Glaisher s'est encore occupé[19]) de l'excès du nombre des diviseurs de la forme $2h$, ou $4h+1$, ou $3h+1$ d'un nombre n, sur le nombre des diviseurs de n qui sont respectivement de la forme $2h+1$, ou $4h+3$, ou $3h+2$.

Dans la démonstration des divers résultats des n^os **4** et **5** interviennent encore des fonctions génératrices.

6. Point de vue de la théorie des combinaisons. La décomposition d'un nombre n en m parties est au fond un cas simple d'un problème de combinaisons[20]).

Sous cette forme, les divers problèmes de la partition des nombres ont été étudiés surtout par des mathématiciens anglais, en particulier par *J. J. Sylvester*[21]), *A. Cayley*, *P. A. Mac Mahon* [I 2, **10**].

J. J. Sylvester appelle le nombre de manières de décomposer n en une somme de multiples de nombres naturels $a, b, \ldots, l$, c'est-à-dire le nombre Q des solutions entières positives ou nulles de l'équation (cf. I 16, **2** à **5**)

$$ax + by + \cdots + lt = n,$$

la *quotity* de n par rapport aux éléments $a, b, \ldots, l$, ou encore le *denumerant* $\dfrac{n;}{a, b, \ldots, l;}$ de cette équation. C'est le coefficient de x^n dans le développement de

$$\frac{1}{(1-x^a)(1-x^b)\cdots(1-x^l)}.$$

Ce nombre Q peut être mis sous la forme $\mathrm{A} + \mathrm{U}$, où A est une fonction algébrique entière de n et des éléments $a, b, \ldots, l$, et où U est formé d'expressions où entrent des racines de l'unité; on peut encore mettre Q sous la forme

$$\mathrm{Q} = \mathrm{W}_1 + \mathrm{W}_2 + \mathrm{W}_3 + \cdots + \mathrm{W}_q + \cdots$$

---

19) Proc. Cambr. philos. Soc. 5 (1883/6), p. 108 [1884]. Cf. Proc. London math. Soc. (1) 15 (1883/4), p. 104; (1) 21 (1889/90), p. 395; Quart. J. pure appl. math. 20 (1885), p. 97 [1884].

20) Voir *P. A. Mac Mahon,* Proc. London math. Soc. (1) 28 (1896/7), p. 9.

21) *J. J. Sylvester* a donné dans ses „Outlines of seven lectures on the partition of numbers", conférences faites à Londres en 1859 [Proc. London math. Soc. (1) 28 (1896/7), p. 33] une esquisse de ses vues, méthodes et résultats. Voir encore I 2, **10**, note 61; en partic. Ann. sc. mat. fis. 8 (1857), p. 12. Les travaux et démonstrations de *J. J. Sylvester* doivent d'ailleurs être lus avec prudence.

L'expression W_q, dite *wave* par *J. J Sylvester*, est le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement, suivant les puissances croissantes de z, de la somme

$$\sum_{(\varrho)} \frac{(\varrho e^z)^n}{\left[1-\left(\frac{1}{\varrho e^z}\right)^a\right]\cdot\left[1-\left(\frac{1}{\varrho e^z}\right)^b\right]\cdots\left[1-\left(\frac{1}{\varrho e^z}\right)^l\right]}$$

étendue à toutes les racines primitives $q^{\text{ièmes}}$ de l'unité. Une *wave* W_q n'est différente de zéro que si q divise un ou plusieurs des éléments $a, b, \ldots, l$; la *wave* W_1 est égale à A.

Pour le même nombre Q, qu'il désigne par

$$P \mid (a, b, \ldots, l) n,$$

A. Cayley[22]) a donné une autre expression à l'aide de ses *prime circulators*. Si l'on entend par a_i l'unité ou zéro suivant que i est divisible par a ou n'est pas divisible par a, on peut appeler *circulating function*[23]), ou *circulator* à période a, et l'on représente par le symbole

$$(A_0, A_1, \ldots, A_{a-1}) \text{ circlor } a_i,$$

l'expression

$$A_0 a_i + A_1 a_{i-1} + \cdots + A_{a-1} a_{i-a+1},$$

dans laquelle $A_0, A_1, \ldots, A_{a-1}$ désignent des nombres quelconques. On peut dire aussi que ce „circulator" est un *prime circulator*, si, quand b est un diviseur de a et que c désigne le quotient $\frac{a}{b}$, on a pour $i = 0, 1, 2, \ldots, b-1$ entre les a nombres $A_0, A_1, \ldots, A_{a-1}$ les b relations que voici

$$A_i + A_{b+i} + A_{2b+i} + \cdots + A_{(c-1)b+i} = 0.$$

On peut encore évaluer à l'aide d'une certaine quotité Q le nombre

$$P \mid (0, 1, 2, \ldots, k)^m n$$

qui désigne le nombre des décompositions de n en une somme de m termes, différents ou non, et dont chacun est un des nombres 0, 1, 2, ..., k; c'est le coefficient de $x^n z^m$ dans le développement de

$$\frac{1}{(1-z)(1-xz)\cdots(1-x^k z)}.$$

L'expression du nombre Q donnée par *J. J. Sylvester* peut s'établir à l'aide de la théorie des résidus de *A. L. Cauchy*; elle se transforme en celle donnée par *A. Cayley* grâce à la considération des „circulating functions".

---

22) Philos. Trans. London 146 (1856), p. 130 [1855]; Papers 2, Cambr. 1889, p. 238.

23) *J. F. W. Herschel*, Philos. Trans. London 140 (1850), p. 401.

Le nombre Q peut encore se déduire[24]) de l'expression algébrique de la somme

$$\sum x^{\alpha} y^{\beta} \ldots t^{\lambda},$$

étendue à tous les systèmes de solutions $x, y, \ldots, t$ de l'équation

$$ax + by + \cdots + lt = n,$$

en y faisant $\alpha = \beta = \cdots = \lambda = 0$.

J. Hermes[25]) a considéré une fonction $E_{s,t}(n)$ qui comprend comme cas particulier le nombre des décompositions d'un nombre en une somme d'un nombre déterminé de termes.

H. Wolff[26]) a donné pour le nombre $F_{\mu}(n)$ de certaines décompositions d'un entier n en une somme de μ nombres naturels une expression bien curieuse par la façon dont elle dépend des *nombres de Bernoulli.*

7. Recherches de Sylvester. Les nombres naturels envisagés comme formés de $\alpha + \beta + \gamma + \cdots$ nombres dont α sont d'une espèce, β d'une deuxième espèce, γ d'une troisième espèce, ... sont dits *multipartite numbers* et on les désigne par $\overline{\alpha\beta\gamma\ldots}$[32]). Ainsi un nombre naturel inférieur à 100, envisagé comme formé de α unités et β dizaines, où α et β désignent l'un des chiffres 0, 1, 2, ..., 9, est un *bipartite number*; un nombre naturel de m chiffres est un *m-partite number.*

L. Euler[27]) mentionne un procédé qui consiste à chercher à résoudre l'équation $ax + by = c$ en décomposant par *tâtonnements* le nombre c en deux parties dont l'une soit divisible par a, l'autre par b. On connaissait déjà ce procédé avant lui sous le nom de *regula virginum*[28]).

Décomposer un „bipartite number" $\overline{m\mu}$ en „bipartite numbers" donnés $\overline{a\alpha}, \overline{b\beta}, \ldots, \overline{l\lambda}$ revient de même à résoudre en nombres

24) *J. J. Sylvester,* London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 16 (1858), p. 369/71; Papers 2, Cambridge 1908, p. 110/2.

25) Math. Ann. 47 (1896), p. 281.

26) Diss. Halle 1899.

27) Novi Comm. Acad. Petrop. 14 (1769), éd. 1770, p. 168 [1768]; Commentat. Arith. 1, St Pétersb. 1849, p. 391.

28) *La „regula virginum" est au fond identique à la „regula coeci" donnée par *L. Euler,* Vollständige Anleitung zur Algebra 2, St Pétersbourg 1770, p. 236/48; trad. par *Jean III Bernoulli,* avec notes de *J. L. Lagrange* 2, Lyon 1774, p. 30/41. Les deux termes „regula virginum" et „regula coeci" (ou „cecis") apparaissent déjà au commencement du 16ième siècle [voir par ex. *Chr. Rudolff,* Künstliche Rechnung, Vienne 1526, éd. Nuremberg 1540, fol. N VIIb] et le procédé remonte au moins à *Léonard de Pise* [Liber abbaci [1228]; Scritti, pubb. da *B. Boncompagni* 1, Rome 1857, p. 165/6] (Note de *G. Eneström*).*

naturels $x, y, \ldots, t$ les deux équations simultanées

$$ax + by + \cdots + lt = m,$$
$$\alpha x + \beta y + \cdots + \lambda t = \mu.$$

Le nombre des solutions de ces deux équations est le coefficient de $u^m v^\mu$ dans le développement du produit

$$\frac{1}{(1-u^a v^\alpha)(1-u^b v^\beta)\cdots(1-u^l v^\lambda)}$$

suivant les puissances de u et v. *A. Cayley*[29]) a déterminé ce nombre de solutions pour le cas où $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \cdots, \frac{l}{\lambda}$ sont des fractions inégales irréductibles. En traitant directement les deux équations simultanées et, plus généralement, un système formé d'un nombre quelconque d'équations de ce genre, *J. J. Sylvester* a trouvé que la solution de ce système peut toujours être ramenée à celle de systèmes plus simples ayant un caractère canonique et que la solution de ces derniers systèmes se ramène à celle d'équations isolées; il n'a cependant publié à ce sujet que de courtes indications[30]).

J. J. Sylvester a aussi employé des méthodes graphiques[31]) pour parvenir à des théorèmes sur la décomposition des nombres, entre autres aux théorèmes de *L. Euler*.

Dans le même ordre d'idées, *E. Sadun*[32]) a étudié directement, sans recourir aux fonctions génératrices, le nombre des solutions entières (positives ou nulles) du système particulier des deux équations

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r,$$
$$x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n = n,$$

où r, n sont deux nombres naturels donnés tels que $r \leqq n$.

8. Partitions et compositions. Recherches de Mac Mahon. Dans les décompositions, il faut distinguer les *partitions* et les *compositions*, suivant que les parties doivent être considérées sans tenir compte de leur ordre ou en en tenant compte. *P. A. Mac Mahon* s'est occupé

29) London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 20 (1860), p. 337; Papers 4, Cambr. 1891, p. 166.

30) Quart. J. pure appl. math. 1 (1857), p. 81, 141; London Edinb. Dublin philos. mag. (4) 16 (1858), p. 371; Proc. London math. Soc. (1) 28 (1896/7), p. 33; Papers 2, Cambridge 1908, p. 86, 90, 113, 119.

31) Voir à ce sujet, en dehors des écrits ci-dessus, *J. J. Sylvester*, C. R. Acad. sc. Paris 96 (1883), p. 743, 1110.

32) Ann. mat. pura appl. (2) 15 (1887/8), p. 209. Voir aussi *E. A. A. David*, J. math. pures appl. (3) 8 (1882), p. 61; *B. Pomey*, Nouv. Ann. math. (3) 4 (1885), p. 408.

de ces deux notions[33]) à propos des *multipartite numbers*; il a indiqué à leur sujet un grand nombre de fonctions génératrices.

Dans son mémoire de 1896 on trouve en particulier ce théorème: le nombre des décompositions de tous les nombres en au plus q parties, chacune plus petite ou égale à un nombre donné p, est le coefficient de $a^q x^{pq}$ dans le développement de

$$\frac{1}{(1-a)(1-x)(1-ax)(1-ax^2)\cdots(1-ax^p)}$$

et est égal au coefficient binomial $\binom{p+q}{p}$.

Dans son mémoire de 1893, *P. A. Mac Mahon* propose aussi une nouvelle extension de la notion de décomposition. Imaginons qu'entre p unités

$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1$$

on intercale des symboles donnés de façon qu'entre deux unités consécutives il n'y ait jamais qu'un symbole, en laissant toutefois vide à volonté un ou plusieurs des intervalles si on le juge à propos.

Si k des symboles intercalés sont inégaux, l'expression ainsi obtenue est dite „combinaison d'ordre k pour le nombre p.“ *P. A. Mac Mahon* a cherché à déterminer combien il peut y avoir de combinaisons d'ordre k pour un nombre p.

P. A. Mac Mahon appelle *décomposition complète* d'un nombre[34]), toute décomposition de ce nombre qui contient une décomposition de chacun des nombres plus petits; ainsi

$$7 = 4 + 1 + 1 + 1$$

est une décomposition complète du nombre 7, car les nombres inférieurs à 7 peuvent être décomposés en

$$6 = 4 + 1 + 1,\ \ 5 = 4 + 1,\ \ 4 = 4,\ \ 3 = 1 + 1 + 1,\ \ 2 = 1 + 1,\ \ 1 = 1.$$

Il détermine le nombre de décompositions complètes d'un nombre quelconque donné.

M. A. Stern appelle toute somme de termes différents d'une suite donnée de nombres une *combinaison* de ces derniers et dit que n se présente m fois dans ces combinaisons quand m d'entre elles sont $\equiv n \pmod{p}$, p désignant un nombre premier impair. Il étudie[35]), en s'aidant de fonctions génératrices, les différentes valeurs possibles

33) Philos. Trans. London 184 A (1893), p. 835; 185 A (1894), p. 111; 187 A (1896), p. 619.

34) Messenger math. (2) 20 (1890/1), p. 103.

35) J. reine angew. Math. 61 (1863), p. 66, 334. Voir encore *H. Teege,* Diss. Kiel 1900.

de m et n pour les suites de nombres

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ p-1 \quad \text{et} \quad 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ \frac{p-1}{2}$$

ainsi que pour les suites de résidus quadratiques (mod. p). Ses recherches ont d'ailleurs été complétées et considérablement étendues par *R. Daublebsky von Sterneck*[36]).

*Le problème des carrés magiques (I 15, **31**) peut être rattaché à la partition des nombres.*

Propriétés des fonctions de la théorie des nombres. Sommes de Gauss.

*Avant d'aborder la seconde partie de la théorie, nous mentionnerons une série de fonctions et de propriétés relevant, en réalité, d'autres articles de l'Encyclopédie (particulièrement de l'article I 15) et que nous rassemblerons ici pour n'avoir plus à y revenir.

Nous désignerons, dans ce qui suit, par

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$$

la décomposition d'un entier positif n en facteurs premiers, de sorte que $p_1, p_2, \ldots p_k$ seront, par définition, des nombres premiers distincts entre eux.

Nous désignerons par

$$[x]$$

le nombre entier égal ou immédiatement inférieur au nombre réel quelconque x (cf. I 15, **1**).*

9. Fonctions arithmétiques. L'arithmétique introduit, comme on sait, certaines *fonctions* qui diffèrent des fonctions que considère l'analyse en ce qu'elles ne sont définies que pour les valeurs entières de la variable.

Les plus connues sont (n désignant un entier positif dont la décomposition en facteurs premiers sera toujours définie par la notation indiquée il y a un instant): le *nombre des diviseurs* de n que nous représenterons par $t(n)$ et qui est égal à

$$t(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1),$$

la *somme des diviseurs* de n que nous représenterons par $\int(n)$ et qui est égale à

$$\int(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1}-1}{p_1-1} \frac{p_2^{\alpha_2+1}-1}{p_2-1} \ldots \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1},$$

36) *Sitzgsb. Akad. Wien 111 IIa (1902), p. 1567; 113 IIa (1904), p. 326; 114 IIa (1905), p. 711. Voir aussi Jahresb. deutsch. Math.-Ver. 12 (1903), p. 110.*

l'*indicateur* [I 15, 2] de n que nous désignerons par $\varphi(n)$ et qui est égal à

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Citons encore le *nombre de diviseurs premiers* de n que nous représenterons par

$$k = \varpi(n),$$

le *nombre de décompositions* de n en deux facteurs distincts premiers entre eux que nous représenterons par $p(n)$ et qui, si l'on tient compte de l'ordre dans lequel se présentent les facteurs, est égal à

$$p(n) = 2^{\varpi(n)}$$

et la fonction, que nous désignerons par $P(n)$,

$$P(n) = p_1 p_2 \ldots p_k.$$

D'autres fonctions arithmétiques se rapportant particulièrement à la théorie des fonctions elliptiques seront étudiées dans le tome II de l'Encyclopédie.

10. La fonction $\mu(n)$. *La seule de ces fonctions arithmétiques qui soit véritablement importante pour la suite est d'ailleurs la fonction $\mu(n)$ définie de la manière suivante[37]:*

$\mu(n) = 0$, si n est divisible par un carré (autre que 1), c'est-à-dire si les exposants $a_1, a_2, \ldots, a_k$ ne sont pas tous égaux à 1;

$\mu(n) = (-1)^k$, si $a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 1$ (autrement dit, si les facteurs premiers de n sont en nombre k et tous distincts entre eux);

$$\mu(1) = 1.$$

De la fonction $\mu(n)$ on peut évidemment rapprocher la fonction

$$\lambda(n) = (-1)^{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}.$$

On voit que, dans celle-ci, l'exposant de -1 est égal au nombre des facteurs premiers, *distincts ou non*, de n, tandis que pour la fonction $\mu(n)$, quand elle diffère de zéro, il est égal au nombre de facteurs *distincts* de n.

On considère aussi quelquefois la fonction $\nu(n)$ qui est égale à $\log_e p$ lorsque n est une puissance d'un nombre premier p, et à zéro lorsque n est le produit de plusieurs facteurs premiers distincts et aussi lorsque n est égal à 1[38]).

La somme

$$\sum_{(d)} \mu(d)$$

étendue à tous les diviseurs d d'un nombre naturel $n > 1$ est nulle.

---

37) *E. Cesàro,* Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. n° 6, p. 315/24.

38) *A. F. Möbius,* J. reine angew. Math. 9 (1832), p. 105; Werke 4, Leipzig 1887, p. 591; cf. *F. Mertens,* J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 289.

Ce théorème ne fait d'ailleurs qu'exprimer sous une autre forme ce fait que dans le produit développé

$$(1-p_1)(1-p_2)\cdots(1-p_k)$$

il y a autant de termes positifs que de termes négatifs.

*On trouvera plus loin (n° **13**) plusieurs propriétés d'inversion de la fonction $\mu(n)$. Celles dont on a à se servir dans les théories qui vont suivre (théories analytiques des nombres premiers) se déduisent aisément de ce que la somme $\sum_{(d)}\mu(d)$ est nulle. Ce sont, en effet, à peu près exclusivement les suivantes dont la seconde n'est d'ailleurs pas distincte de la première:

1°) Si $f(x)$ est une fonction (en général discontinue) de la variable positive x, laquelle est identiquement nulle pour $x<1$, et que l'on définisse une fonction $F(x)$ par la somme (composée d'un nombre limité de termes, en vertu de l'hypothèse précédente)

$$F(x)=\sum_{n=1}^{n=+\infty} f\left(\frac{x}{n}\right),$$

on a aussi

$$f(x)=\sum_{n=1}^{n=+\infty}\mu(n)F\left(\frac{x}{n}\right).$$

2°) Si $f(x)$ est une fonction de la variable positive x, laquelle est identiquement nulle pour $x<2$ [ou pour $x<1+\alpha$, α étant un nombre positif fixe] et que l'on définisse une fonction par la somme (composée d'un nombre limité de termes en vertu de l'hypothèse)

$$F(x)=\sum_{n=1}^{n=+\infty} f\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

on a aussi

$$f(x)=\sum_{n=1}^{n=+\infty}\mu(n)F\left(x^{\frac{1}{n}}\right).*$$

11. Identités fondamentales. Pour établir des relations entre plusieurs des fonctions envisagées dans la théorie des nombres on s'appuie souvent sur des identités parmi lesquelles les suivantes sont d'un usage fréquent:

1) La fonction $F(x)$ définie au moyen d'une fonction donnée $f(x)$ par la relation

$$F(x)=\sum_{h=1}^{h=[x]} f(h)$$

est dite souvent la *fonction sommatoire* de $f(x)$.

Quel que soit le nombre naturel N que l'on envisage, la fonction sommatoire $F(x)$ d'une fonction quelconque donnée $f(x)$ est liée à cette fonction par une identité de la forme

$$\sum_{h=1}^{h=N} F\left(\frac{N}{h}\right) = \sum_{h=1}^{h=N} \left[\frac{N}{h}\right] f(h).$$

Lorsque dans cette identité on remplace $f(h)$ par l'une ou l'autre des fonctions $t(h)$ ou $\int(h)$ ou encore par quelque fonction analogue, on peut, comme l'a montré *J. Hacks*[39]), utiliser l'identité pour transformer de diverses manières[40]) l'expression de $F(x)$.

Pour $f(h) = t(h)$ on obtient en particulier la formule

$$\sum_{h=1}^{h=[n]} t(h) \equiv [\sqrt{n}] \quad (\text{mod. } 2);$$

et pour $f(h) = \int(h)$ on parvient après quelques transformations à la relation

$$\sum_{h=1}^{h=[n]} \int(h) \equiv [\sqrt{n}] + \left[\sqrt{\frac{n}{2}}\right] \quad (\text{mod. } 2).$$

2) La fonction $\psi(n)$ définie au moyen d'une fonction donnée $f(x)$ par la relation

$$\psi(n) = \sum_{(d)} f(d),$$

où la somme est étendue à tous les diviseurs d de n, est dite souvent *l'intégrale numérique*[41]) de la fonction $f(x)$.

Quel que soit le nombre naturel N que l'on envisage, une fonction quelconque donnée $f(x)$ est liée à son intégrale numérique $\psi(n)$ par une identité de la forme

$$\sum_{h=1}^{h=N} \psi(h) = \sum_{h=1}^{h=N} \left[\frac{N}{h}\right] f(h).$$

Si l'on envisage deux fonctions quelconques $f(n)$ et $g(n)$ et leurs intégrales numériques

$$\psi(n) = \sum_{(d)} f(d), \quad \chi(n) = \sum_{(d)} g(d),$$

---

39) Acta math. 9 (1886/7), p. 177; 10 (1887), p. 1.

40) Au sujet des deux fonctions $k(n)$, $l(n)$ formées l'une de la somme des diviseurs pairs et l'autre de la somme des diviseurs impairs de n, voir *R. Lipschitz,* C. R. Acad. sc. Paris 100 (1885), p. 845.

41) Cette locution est due à *N. V. Bugajev,* Math. Sbornik [recueil Soc. math. Moscou] 5 (1870/2), p. 1/63; voir aussi Bull. sc. math. (1) 10 (1876), p. 13.

on a toujours une identité de la forme

$$\sum_{(d)} \chi(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{(d)} g(d) \psi\left(\frac{n}{d}\right);$$

on peut d'ailleurs généraliser cette dernière identité et établir ainsi un grand nombre de formules particulières qui ne sont pas dénuées d'intérêt[42].

En utilisant la relation

$$\sum_{(d)} p(d) = t(n^2),$$

où la somme est étendue à tous les diviseurs d de n, on déduit de la dernière identité, en y prenant pour $f(x)$ et $g(x)$ les fonctions particulières

$$f(x) = p(x), \quad g(x) = \mu(x),$$

la relation

$$p(n) = \sum_{(d)} \mu(d)\, t\left(\frac{n^2}{d^2}\right),$$

où la somme est étendue à tous les diviseurs d de n. La même fonction $p(n)$ représentant le nombre des diviseurs de n qui n'ont pas de facteurs quadratiques, est donnée par la formule

$$p(n) = \sum_{(d)} \mu(d) t\left(\frac{n}{d^2}\right)$$

où la somme est étendue[43] à tous les diviseurs quadratiques d^2 de n.

L'indicateur $\varphi(n)$ est lié à la fonction arithmétique $\mu(n)$ par la relation

$$\varphi(n) = \sum_{(d)} d \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right),$$

où la somme est étendue[44] à tous les diviseurs d de n.

De la dernière formule on peut déduire la relation

$$\sum_{(d)} \varphi(d) = n,$$

où la somme est étendue à tous les divisieurs d de n. Cette relation a été généralisée par *G. Cantor*[44]. Une autre généralisation de la même relation est due à *E. Busche*[45].

En partant de la relation $\sum_{(d)} \varphi(d) = n$, on peut établir la formule

42) *E. Cesàro*, Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. n° 6, p. 26, 47.

43) *F. Mertens*, J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 292.

44) Voir d'autres formules de ce genre dans *G. Cantor* [Math. Ann. 16 (1880), p. 583; Nachr. Ges. Gött. 1880, p. 161] et dans *E. Cesàro* [Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. n° 6, p. 62 (note 7)].

45) Math. Ann. 31 (1888), p. 70.

de *G. Lejeune Dirichlet*[46])

$$\sum_{h=1}^{h=+\infty}\left[\frac{\mathrm{N}}{h}\right]\varphi(h)=\frac{\mathrm{N}(\mathrm{N}+1)}{2}$$

dans laquelle $[x]$ désigne le nombre naturel égal ou immédiatement inférieur à x.

Cette formule a lieu pour tout nombre naturel N; elle résulte d'ailleurs aisément de la formule suivante de *E. Busche*[45])

$$2\sum_{h=1}^{h=+\infty}\varphi(h)\left[\frac{n_1}{h}-\left[\frac{n_1}{h}\right]+\frac{n_2}{h}-\left[\frac{n_2}{h}\right]+\cdots+\frac{n_{\mathrm{N}}}{h}-\left[\frac{n_{\mathrm{N}}}{h}\right]\right]=\sum_{i,k=1,2,\ldots,\mathrm{N}}n_i n_k$$

si l'on y prend les N nombres naturels quelconques $n_1, n_2, \ldots, n_{\mathrm{N}}$ qui y figurent égaux chacun à 1.

12. Relations de Liouville. Dans toute une série d'articles dont les premiers sont intitulés: „Sur quelques fonctions numériques", et les suivants: „Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres", *J. Liouville*[47]) a établi un grand nombre de relations du même genre. Les plus simples ont trait aux fonctions des facteurs d et δ dans lesquels on peut décomposer un nombre donné $n = d\cdot\delta$. En voici quelques-unes[48]):

Si d est un diviseur de n on a

$$\sum_{(d)}\int(d)=\sum_{(d)}\frac{n}{d}\,t(d),$$

$$\sum_{(d)}\varphi(d)\,t\left(\frac{n}{d}\right)=\int(n),$$

$$\sum_{(d)}\int(d)\int\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{(d)}d\cdot t(d)\,t\left(\frac{n}{d}\right),$$

chacune des sommes étant étendue à tous les diviseurs d de n.

D'autres formules de *J. Liouville*[49]) sont relatives aux décompositions

$$2n=n'+n'',\quad n=d\cdot\delta,\quad n'=d'\cdot\delta',\quad n''=d''\cdot\delta'',$$

où n, n', n'' sont impairs; ou encore[50]) à des décompositions de la forme

$$2^{\alpha}.n=n'+n'',\qquad 2^{\alpha}.n=2^{\alpha'}.n'+2^{\alpha''}.n''$$

et à d'autres analogues.

---

46) Abh. Akad. Berlin 1849, math. p. 69; Werke 2, Berlin 1897, p. 49.

47) J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 141, 244, 377, 425; (2) 3 (1858), p. 143, 193, 201, 241, 273, 325; (2) 4 (1859), p. 1, 73, 111, 195, 281; (2) 5 (1860), p. 1, etc.

48) J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 141.

49) Id. (2) 3 (1858), p. 143.

50) Id. (2) 3 (1858), p. 193, 241.

Une partie des résultats obtenus par *J. Liouville* a été établie à nouveau par *Th. Pepin*[51]), la plupart des autres par *E. Meissner*[52]).

Des relations précédentes on peut déduire différentes conséquences sur le nombre des décompositions d'un nombre en une somme de carrés. Parmi ces conséquences les plus importantes sont le théorème de *C. G. J. Jacobi* sur les décompositions des nombres de la forme $4n$ en *quatre* carrés[53]), le théorème de *G. Eisenstein* sur les décompositions de tous les nombres naturels n en *six* carrés[54]), et une formule[55]) sur le nombre de décompositions des nombres de la forme

$$n = 2^{\alpha} . m$$

en une somme de *dix* carrés[56]).

13. Formules de Bugajev. Inversion. *N. V. Bugajev* a cherché à obtenir des développements de la forme

$$\psi(n) = \sum_{(i)} a_i E\left(\frac{n}{i}\right)$$

procédant suivant les plus grands entiers $E\left(\frac{n}{i}\right)$ contenus dans les nombres $\frac{n}{i}$, où i désigne un nombre naturel quelconque et où la somme est étendue à tous les nombres naturels i.

Il a aussi étudié de plus près, sous le nom de *fonction discontinue logarithmique*, la fonction[57])

$$\sum_{(d)} \mu(d) \log(d),$$

où la somme est étendue à tous les diviseurs d d'un nombre donné n[58]). Cette fonction est d'ailleurs égale à la fonction $\nu(n)$ changée de signe[59]).

La fonction $\mu(n)$ se prête particulièrement bien à l'inversion des

51) J. math. pures appl. (4) 4 (1888), p. 83; Atti Accad. pontif. Nuovi Lincei 37 (1883/4), p. 9.

52) Diss. Zurich 1907.

53) J. math. pures appl. (2) 3 (1858), p. 143.

54) Id. (2) 4 (1859), p. 281.

55) Id. (2) 11 (1866), p. 1.

56) Voir encore à ce sujet, *M. A. Stern,* J. reine angew. Math. 105 (1889), p. 250; *V. Buniakovskij,* Mém. Acad. Pétersb. (7) 4 (1862), mém. n° 2, p. 1/35.

57) Math. Sbornik [recueil Soc. math. Moscou] 13 (1886/8), p. 757/77 [1887]; 14 (1888/90), p. 1/44, 169/201 [1888]. Voir aussi C. R. Acad. sc. Paris 106 (1888), p. 652 et les remarques de *E. Cesàro,* id. p. 1340.

58) Cf. Math. Sbornik [recueil Soc. math. Moscou] 17 (1893/5), p. 720/58 [1893]; 18 (1896), p. 1/54 [1894].

59) Cf. *L. Kronecker* [Vorlesungen über Zahlentheorie publ. par *K. Hensel* 1, Leipzig 1901, p. 276] qui désigne la fonction $\mu(d)$ par la caractéristique ε_d.

relations où figurent des sommes. De la relation

$$\psi(n) = \sum_{(d)} f(d),$$

où la somme est étendue à tous les diviseurs d de n, on tire en effet par inversion

$$f(n) = \sum_{(d)} \mu(d)\, \psi\left(\frac{n}{d}\right),$$

où la somme est encore étendue à tous les diviseurs d de n. Cette formule a été donnée par *R. Dedekind*[60]) et *J. Liouville*[61]).

Si pour tout nombre entier n on a

$$F(n) = \sum_{h=1}^{h=+\infty} f(hn),$$

on déduit par inversion que l'on a aussi

$$f(1) = \sum_{h=1}^{h=+\infty} \mu(h)\, F(h).$$

R. Lipschitz[62]) a donné plusieurs transformations du même genre. Ainsi en se basant sur la relation

$$\left[\frac{x}{n}\right] = \sum_{h=1}^{h=+\infty} \eta\left(\frac{x}{hn}\right),$$

dans laquelle $\eta(z)$ désigne soit 0, soit 1 suivant que $z < 1$ ou que $z \geqq 1$, *il retrouve la formule déjà citée par *E. Meissel*[62a]) et démontrée par *N. V. Bugajev*[62b])*

$$\sum_{h=1}^{h=+\infty} \mu(h) \left[\frac{x}{h}\right] = 1.$$

De même, de la relation

$$T(x) = \sum_{h=}^{h=+\infty} \left[\frac{x}{h}\right],$$

où pour chaque entier positif n

$$T(n) = t(1) + t(2) + \cdots + t(n),$$

il déduit la relation

$$[x] = \sum_{h=1}^{h=+\infty} \mu(h)\, T\left[\frac{x}{h}\right].$$

Si pour tout diviseur d d'un nombre naturel P on a

$$F(d) = \sum_{(h)} f(hd),$$

60) J. reine angew. Math. 54 (1857), p. 1 [1856].

61) J. math. pures appl. (2) 2 (1857), p. 110.

62) C. R. Acad. sc. Paris 89 (1879), p. 948, 985.

62a) *Observationes quaedam in theoria numerorum, Berlin 1850, p. 3/6.*

62b) *Math. Sbornik (recueil Soc. math. Moscou) 6 (1872/3), p. 179.*

où la somme est étendue à tous les diviseurs h de $\frac{\mathrm{P}}{d}$, on a aussi

$$f(1) = \sum_{(d)} \mu(d)\, F(d),$$

où la somme est étendue à tous les diviseurs d de P.

En s'appuyant sur cette formule d'inversion, on détermine aisément le nombre des nombres naturels inférieurs à un nombre donné x, qui sont premiers à un nombre naturel P ne contenant aucun carré; ce nombre est égal à

$$\sum_{(d)} \mu(d) \left[\frac{x}{d}\right],$$

où la somme est étendue à tous les diviseurs d de P. Le nombre de ces nombres naturels qui sont compris entre deux bornes données s'obtient en appliquant une formule analogue donnée par *L. Kronecker* dans ses leçons sur la théorie des nombres[63]).

Le nombre des nombres premiers p qui sont compris entre un nombre naturel et sa racine carrée ou, d'une façon plus précise, qui vérifient l'inégalité

$$y \geqq p > \sqrt{y}$$

peut être déterminé[64]) par une formule analogue. Quelques théorèmes établis par *E. Cesàro*[65]) rentrent aussi dans le même ordre d'idées et doivent donc être mentionnés ici.

D'autres identités où entrent soit le p. g. c. d. soit le p. p. c. m. de deux nombres ont permis à *E. Cesàro*[66]) d'établir des théorèmes analogues aux suivants:

La somme des diviseurs communs à un nombre naturel n et successivement à chacun des nombres $1, 2, \ldots, n$ est égale à n fois le nombre des diviseurs de n. Le nombre des diviseurs communs à un nombre naturel n et successivement à chacun des nombres $1, 2, \ldots, n$ est égal à la somme des diviseurs de n.

De ces théorèmes *E. Cesàro*[66]) a déduit, entre autres, la formule de *J. Liouville*[67]) d'après laquelle on a pour tout nombre naturel m

---

63) *L. Kronecker*, Zahlenth.[59]) 1, p. 299; voir aussi *K. Zsigmondy*, J. reine angew. Math. 111 (1893), p. 344.

64) *J. Ph. E. de Fauque de Jonquières*, C. R. Acad. sc. Paris 95 (1882), p. 1144, 1343; 96 (1883), p. 231; *R. Lipschitz*, id. 95 (1882), p. 1344; 96 (1883), p. 58, 114, 327; *J. J. Sylvester*, id. 96 (1883), p. 463.

65) Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. n° 6, p. 285. Voir aussi le rapport de *E. Catalan*, id. p. 351/2.

66) Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. n° 6, p. 76.

67) C. R. Acad. sc. Paris 44 (1857), p. 753. Voir encore *J. P. M. Binet*, id. 32 (1851), p. 918.

$$1^m + 2^m + \cdots + n^m = \sum_{(d)} \left(\frac{n}{d}\right)^m \varphi_m(d),$$

la somme étant étendue aux diviseurs d de n. Dans cette formule $\varphi_m(d)$ désigne la somme des puissances $m^{\text{ièmes}}$ des nombres premiers à d et inférieurs à d.

La fonction $\varphi_m(n)$ a été déterminée par *A. Thacker*[68]). On déduit[69]) aussi de ces mêmes relations que l'on a

$$\sum_{(d)} (-1)^{\varpi(d)} \frac{\varphi(d)\,\pi(d)}{d^2} = \frac{1}{n}$$

si la somme est étendue à tous les diviseurs d de n.

E. Cesàro[70]) a indiqué des procédés très étendus d'inversions de séries. Soit Ω un ensemble donné de nombres entiers; *E. Cesàro* désigne sous le nom de *fonction indicatrice* de l'ensemble Ω toute fonction $\Omega(x)$ qui prend la valeur 1 ou la valeur 0 suivant que x est ou n'est pas un nombre de l'ensemble Ω. La somme

$$\sum_{h=1}^{h=[x]} \Omega(h)$$

est dite *fonction énumératrice* de l'ensemble Ω. Quand pour la fonction énumératrice $\Omega(x)$ d'un ensemble Ω on a

$$\Omega(x)\,\Omega(y) = \Omega(xy),$$

les nombres de l'ensemble Ω forment un *groupe fermé,* en ce sens que le produit de deux nombres appartient à l'ensemble Ω et ne lui appartient que s'il en est de même des deux nombres eux-mêmes.

Si alors $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x)$, ... désignent des fonctions vérifiant pour chaque indice α et chaque indice β la condition

$$\varepsilon_\alpha(\varepsilon_\beta(x)) = \varepsilon_\beta(\varepsilon_\alpha(x)) = \varepsilon_{\alpha\beta}(x),$$

on peut déduire de chaque égalité de la forme

$$F(x) = \sum_{(\omega)} h(\omega)\, f(\varepsilon_\omega(x)),$$

où la somme est étendue à *tous* les nombres ω de l'ensemble Ω, une égalité inverse

$$f(x) = \sum_{(\omega)} H(\omega)\, F(\varepsilon_\omega(x)),$$

---

68) J. reine angew. Math. 40 (1850). p. 89.

69) Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. nº 6, notes 2 et 6.

70) Ann. mat. pura appl. (2) 14 (1886/7), p. 141. Voir encore des théorèmes analogues mais ayant un caractère plus particulier, id. (2) 13 (1885), p. 339.

où la somme est encore étendue à tous les nombres ω de Ω, et où la fonction H est telle que la somme

$$\sum_{(d)} h(d) H\left(\frac{n}{d}\right)$$

étendue à tous les diviseurs d de n est égale à 1 ou à 0 suivant que n est égal à 1 ou est plus grand que 1.

Le premier exemple de ce mode d'inversion a été donné par *A. F. Möbius*[71]).

14. Recherches diverses sur les fonctions sommatoires. *M. Lerch* a cherché combien parmi les diviseurs d'un nombre naturel α il y en a qui sont supérieurs à un nombre naturel donné β et combien qui sont inférieurs ou égaux à β. Il désigne le premier de ces nombres par $\psi(\alpha, \beta)$ et le second par $\chi(\alpha, \beta)$. Entre autres résultats concernant ces nombres $\psi(\alpha, \beta)$, $\chi(\alpha, \beta)$, il est arrivé aux formules[72])

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=\left[\frac{m-1}{n}\right]} \psi(m-\alpha n, \alpha) = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\left[\frac{m-1}{n}\right]} \chi(m-\alpha n, n),$$

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m} \psi(m+\alpha, \alpha) = 2m,$$

$$\sum_{\alpha=0}^{\alpha=m-1} \psi(m-\alpha, \alpha) = m,$$

dans lesquelles m et n désignent deux nombres naturels quelconques donnés. Il est d'ailleurs parvenu à ces formules de plusieurs manières dont l'une consiste à s'appuyer sur quelques identités *analytiques*[73]); par des procédés analogues, *J. Schröder*[74]) a obtenu des théorèmes concernant le nombre

$$\psi_{n\mu+s}(m-\alpha n, \alpha)$$

des diviseurs de $m-\alpha n$ qui sont plus grands que α et dont les diviseurs complémentaires sont de la forme $n\mu + s$[75]).

---

71) J. reine angew. Math. 9 (1832), p. 105; Werke 4, Leipzig 1887, p. 591.

72) Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1894, mém. n° 11. La dernière de ces formules figure déjà dans un de ses mémoires précédents [Sitzsgb. böhm. Ges. Prag 1887, p. 683]. *Des formules analogues dues à *M. Lerch* se trouvent aussi: Jornal sciencias math. astr. (Coïmbre) 12 (1896), p. 129.*

73) C. R. Acad. sc. Paris 106 (1888), p. 186; Bull. sc. math. (2) 12 (1888), p. 100, 121.

74) Mitt. math. Ges. Hamburg 3 (1891/1900), p. 177 [1894]; id. p. 302 [1897].

75) Voir, à ce sujet, *M. Lerch*, Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1894, mém. nos 32, 33; *Časopis math. fys. (Prague) 24 (1895), p. 25, 118.*

D'après *Chr. Zeller*[76]) l'expression

$$\sum_{\alpha=1}^{\alpha=m-1} \alpha\psi(m-\alpha, \alpha)$$

est égale à la somme des restes de la division de m par les nombres plus petits que m et cette somme a la même valeur pour $m = 2^x$ et pour $m = 2^x - 1$.

Il faut encore mentionner ici les nombreux résultats obtenus par *L. Gegenbauer*[77]). Nous citerons le suivant à titre d'exemple:

Si l'on désigne par $\mu_r(n)$ une fonction qui prend la valeur 0 quand n est divisible par une puissance à exposant r et la valeur 1 dans les autres cas, la somme

$$\sum_{(h)} \left[\frac{n}{h^r}\right] \mu(h),$$

étendue aux valeurs $h = 1, 2, \ldots, \left[\sqrt[r]{n}\right]$, est égale à la somme

$$\sum_{h=1}^{h=n} \mu_r(h)$$

qui est elle-même égale au nombre $Q_r(n)$ des nombres $\leqq n$ qui ne sont divisibles par aucune puissance à exposant r.

N. V. Bugajev[78]) a montré que l'on a

$$\sum_{(h)} Q_r\left[\frac{n}{h^r}\right] = n$$

si la somme est étendue à $h = 1, 2, \ldots, \left[\sqrt[r]{n}\right]$.

La formule

$$\sum_{h=1}^{h=n} \left[\frac{n}{h}\right](2h-1) = \sum_{h=1}^{h=n} \left[\frac{n}{h}\right]^2$$

se rencontre parmi celles de *L. Gegenbauer* qui l'attribue à *E. Cesàro*.

15. La fonction $[x]$. Rappelons que cette fonction a été définie (I 15, **1**) comme étant, pour chaque valeur réelle non entière de x, le nombre entier immédiatement inférieur à x, et pour chaque valeur entière de x le nombre x lui-même.

---

76) D'après une lettre écrite par *Chr. Zeller* à *M. Lerch* en 1888 et citée par *M. Lerch*, Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1894, mém. n° 11, p. 8. Voir aussi *M. Lerch*, id. 1894, mém. n° 33.

77) Voir, en particulier, Denkschr. Akad. Wien (math.), 49 I (1885), p. 1, 37; 49 II (1885), p. 105; 50 I (1885), p. 153.

78) C. R. Acad. sc. Paris 74 (1872), p. 449. Voir aussi *J. Hacks*, Acta math. 14 (1890/1), p. 329 où la formule sert à montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Si aucune des valeurs positives x, $2x$, $3x$, ..., nx n'est entière, on a, d'après *C. F. Gauss* [79]), la relation

(1) $$\sum_{h=1}^{h=n}[hx] + \sum_{k=1}^{k=[nx]}\left[\frac{k}{x}\right] = n[nx].$$

Si, en particulier, on prend pour x le nombre $\frac{p}{q}$ où p et q désignent deux nombres positifs impairs premiers entre eux, on a la relation

(2) $$\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(q-1)}\left[\frac{hp}{q}\right] + \sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(p-1)}\left[\frac{kq}{p}\right] = \frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2}.$$

Plus généralement [80]) si, a et b étant positifs et premiers entre eux, on désigne par $\varphi(a, b)$ la somme

(3) $$\varphi(a, b) = \sum_{h=1}^{h=\left[\frac{a}{2}\right]}\left[\frac{hb}{a}\right],$$

on a

$$\varphi(a, b) + \varphi(b, a) = \left[\frac{a}{2}\right]\left[\frac{b}{2}\right].$$

L'équation (2) a été généralisée par *Chr. Zeller* d'une façon différente; sa note [81]) contient en outre au sujet de la fonction $[x]$ plusieurs autres théorèmes semblables à quelques-unes des propositions obtenues par *V. Buniakovskij* [82]).

J. de Vries [83]) a démontré géométriquement des théorèmes du même genre.

D'après *Ch. Hermite* [84]) on a, pour tout $x > 0$ et tout nombre naturel n, la relation

$$\sum_{h=1}^{h=n-1}\left[x+\frac{h}{n}\right] = [nx];$$

---

79) Commentat. Soc. Gott. 16 (1804/8), math. p. 69 [1808]; Werke 2, Göttingue 1876, p. 3.

80) Commentat. Soc. Gott. recent. 4 (1816/8), math. p. 17 [1817]; Werke 2, Gött. 1876, p. 61.

81) Nachr. Ges. Gött. 1879, p. 243.

82) Bull. Acad. Pétersb. (3) 28 (1883), col. 257, 411 [1882]; (3) 29 (1884), col. 250, 503 [1883]; Mélanges math. astr. Acad. Pétersb. 6 (1881/8), p. 87/101, 113/34, 169/201, 317/40; (les démonstrations données ici p. 169/201 ne sont pas toutes insérées dans le Bulletin); C. R. Acad. sc. Paris 94 (1882), p. 1459.

83) K. Akad. Wetensch. Amsterdam, Verslagen natuurkundige Afdeeling 5 (1896/7), p. 218/24, 284/9.

84) Acta math. 5 (1884/5), p. 315.

cette propriété[85]) de la fonction $[x]$ est comprise dans un théorème démontré par *M. A. Stern*[86]). D'après *E. Catalan*[87]) une formule analogue

$$\sum_{h=0}^{h=n-1}\left[x+\frac{h}{n}\right]^k=[nx]$$

a d'ailleurs lieu pour tout entier positif k lorsque $0<x<1$.

M. A. Stern[88]) a aussi évalué les sommes

$$\sum_{h=0}^{h=n-1}(-1)^h\left[x+\frac{h}{n}\right],\qquad \sum_{h=0}^{h=n-1}h\left[x+\frac{h}{n}\right]\cdot$$

Si d est le p. g. c. d. des nombres naturels a, b, on a[89])

$$\sum_{h=1}^{h=b-1}\left[\frac{ha}{b}\right]=\sum_{k=1}^{k=a-1}\left[\frac{kb}{a}\right]=\frac{(a-1)(b-1)}{2}+\frac{d-1}{2},$$

formule de laquelle *J. Hacks*[90]) a déduit des relations caractéristiques pour les nombres premiers.

Outre cette formule on en trouve d'autres telles que[91])

$$\sum_{h=0}^{h=b-1}\left[ax+\frac{ha}{b}\right]=\sum_{k=0}^{k=a-1}\left[bx+\frac{kb}{a}\right]\cdot$$

D'après *J. Hacks*[92]) on a, quand p et q sont des nombres naturels impairs premiers entre eux,

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{1}{2}(p-1)}\left[\frac{hq}{p}+\frac{1}{2}\right]=\sum_{k=1}^{k=\frac{1}{2}(q-1)}\left[\frac{kp}{q}+\frac{1}{2}\right];$$

à cette formule sont liés des résultats intéressants qui sont dus à *M. A. Stern*[93]).

---

85) *M. A. Stern* [Acta math. 10 (1887), p. 53] a donné des relations analogues pour la fonction $\frac{[x]\cdot[x+1]}{2}$.

86) J. reine angew. Math. 102 (1888), p. 9.

87) Mém. Acad. Belgique 46 (1886), mém. n° 1, p. 14.

88) Acta math. 8 (1886), p. 93.

89) *M. A. Stern,* J. reine angew. Math. 102 (1888), p. 12.

90) Acta math. 17 (1893), p. 205.

91) Voir aussi *E. Cesàro,* Nouv. Ann. math. (3) 4 (1885), p. 560; *E. Busche,* Diss. Göttingue 1883.

92) Acta math. 12 (1888/9), p. 109; *E. Busche,* Diss. Göttingue 1883.

93) J. reine angew. Math. 106 (1890), p. 337. Cf. *L. Kronecker,* id. 106 (1890), p. 346.

M. A. Stern[94]) a aussi étudié les restes de la suite

$$\left[\frac{a}{b}\right],\ \left[\frac{2a}{b}\right],\ \cdots,\ \left[\frac{(b-1)a}{b}\right] \quad (\text{mod. } 4);$$

p, q désignant deux nombres positifs premiers entre eux, il a cherché combien de nombres de chacune des formes

$$4h,\quad 4h+1,\quad 4h+2,\quad 4h+3$$

sont contenus dans la suite

$$\left[\frac{2p}{q}\right],\ \left[\frac{4p}{q}\right],\ \cdots,\ \left[\frac{(q-1)p}{q}\right]$$

ou dans la suite

$$\left[\frac{p}{q}\right],\ \left[\frac{3p}{q}\right],\ \cdots,\ \left[\frac{(q-2)p}{q}\right].$$

J. Hacks[95]) a établi systématiquement des formules du même genre. Il part de l'équation générale de transformation de *G. Lejeune Dirichlet*[96])

$$\sum_{k=[\Psi(p)]+1}^{k=[\Psi(q)]} [\psi(k)]f(k) = qF[\Psi(q)] - pF[\Psi(p)] + \sum_{k=q+1}^{k=p} F[\Psi(k)],$$

où $f(x)$ désignant une fonction quelconque de x, on a posé

$$F[x] = f(1) + f(2) + \cdots + f([x]);$$

dans cette formule on suppose que $y = \Psi(x) > 0$ décroît quand x croît de la valeur positive q à la valeur positive p et l'on entend par $x = \psi(y)$ la fonction obtenue par inversion de la fonction $y = \Psi(x)$.

De cette équation générale de transformation on déduit[97]) pour $x > 0$ la formule de *Ch. Hermite*[98])

$$\sum_{k=1}^{k=[x]} t(k) = \sum_{k=1}^{k=[x]} \left[\frac{x}{k}\right] = 2\sum_{k=1}^{k=[\sqrt{x}]} \left[\frac{x}{k}\right] - [\sqrt{x}]^2.$$

---

94) J. reine angew. Math. 59 (1861), p. 146.

95) Acta math. 10 (1887), p. 1.

96) Ber. Akad. Berlin 1851, p. 20; Werke 2, Berlin 1897, p. 99; *E. Busche* a donné [Math. Ann. 53 (1900), p. 243] une nouvelle démonstration de cette formule; voir aussi Mitt. math. Ges. Hamburg 4, cah. 2 (1902), p. 63.

97) Cf. *G. Lejeune Dirichlet*, Abh. Akad. Berlin 1849, p. 69; Werke 2, Berlin 1897, p. 49. La formule de *Ch. Hermite* se rencontre déjà dans un mémoire de *E. Meissel* [J. reine angew. Math. 48 (1854), p. 306]. Voir aussi *F. Mertens*, J. reine angew. Math. 77 (1874), p. 292. Cette formule a été établie grâce à un procédé très simple par *Ch. Hermite* [Acta math. 2 (1883), p. 299] et par *E. Cesàro* [C. R. Acad. sc. Paris 96 (1883), p. 1029]. Cf. *L. Kronecker*, Zahlenth.[59]) 1, p. 338 et suiv.

R. Lipschitz[99]) a donné une extension de cette formule à la fonction $t_s(k)$ qui désigne le nombre des diviseurs de k qui sont des puissances à exposant s.

Quand la fonction $\Psi(x)$ croît, au lieu de décroître (quand x croît de $q > 0$ à $p > 0$), l'équation générale de *G. Lejeune Dirichlet* doit être remplacée par une autre qui a été indiquée par *J. Hacks*[100]).

De ces formules, qui sont fondamentales, *J. Hacks*[95]) a déduit pour plusieurs fonctions déterminées, en particulier pour les fonctions sommatoires

$$\sum_{h=1}^{h=n} t(h), \quad \sum_{h=1}^{h=n} \int (h),$$

diverses transformations indiquées déjà par *G. Lejeune Dirichlet* ou *R. Lipschitz* ainsi que la formule (1) de *C. F. Gauss*, les formules de *Ch. Zeller* et plusieurs autres formules dues pour la plupart à *V. J. Buniakovskij*[82]).

Si λ est *positif* et si p, q sont des nombres naturels quelconques, on a[101])

$$\sum_{h=0}^{h=[\lambda q]} \left[\frac{hp}{q}\right] + \sum_{k=0}^{k=[\lambda p]} \left[\frac{kq}{p}\right] = [\lambda p] \cdot [\lambda q] + \mathrm{L}, \tag{4}$$

où L est le nombre de fois que px et qx sont à la fois entiers quand x croît de 0 à λ.

J. J. Sylvester[102]) a indiqué un cas particulier de cette formule (4) d'où il a déduit la loi de réciprocité (I 15, **14**). Cette formule spéciale de *J. J. Sylvester* a été déduite par *M. A. Stern*[103]) de la formule (1)

98) Au sujet de cette formule de *Ch. Hermite,* voir encore *E. Busche,* J. reine angew. Math. 100 (1887), p. 459; Mitt. math. Ges. Hamburg 3 (1891/1900), p. 167 [1894]; id. p. 234 [1896]; *J. Schröder,* id. p. 186. Cf. *H. Ahlborn,* Progr. Hambourg 1881.

J. Schröder a donné [Mitth. math. Ges. Hamburg 3 (1891/1900), p. 219 [1895]] une extension de la formule de *Ch. Hermite* à la somme $\sum \left[\frac{x}{k}\right]^r$, où r est un nombre déterminé et où la somme est étendue à $k = 1, 2, \ldots, [x]$.

99) Acta math. 2 (1883), p. 301.

100) *E. Busche* a donné [J. reine angew. Math. 103 (1888), p. 118] une formule de transformation encore plus générale, du même genre. Il en a déduit la loi de réciprocité et il en a aussi fait usage plus tard dans un autre mémoire [J. reine angew. Math. 110 (1892), p. 338] dans lequel il a défini $[x]$ pour x complexe. Voir encore *E. Busche,* Mitt. math. Ges. Hamburg 3 (1891/1900), p. 333 [1898].

101) *J. Hacks,* Acta math. 10 (1887), p. 28.

102) C. R. Acad. sc. Paris 50 (1860). p. 732.

103) J. reine angew. Math. 59 (1861), p. 146

de *C. F. Gauss*. On en tire plusieurs conséquences intéressantes. Ainsi l'on a

$$\sum_{h=1}^{h=\frac{u(q-1)}{m}} \left[\frac{hq}{p}\right] + \sum_{k=1}^{k=\frac{u(p-1)}{m}} \left[\frac{kq}{p}\right] = \frac{u^2(p-1)(q-1)}{m^2},$$

pourvu que p et q soient positifs et premiers entre eux, que $\frac{p-1}{m}$, $\frac{q-1}{m}$ soient entiers et que $u \leqq m$. Pour $u = 1$ cette formule avait déjà été indiquée par *G. Eisenstein*[104]).

Pour des nombres positifs m, n dont d est le p. g. c. d., on a une formule du même type que la formule (4), à savoir

$$\sum_{h=1}^{h=\left[\frac{n}{2}\right]} \left[\frac{mh}{n}\right] + \sum_{k=1}^{k=\left[\frac{m}{2}\right]} \left[\frac{nk}{m}\right] = \left[\frac{m}{2}\right]\cdot\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{d}{2}\right].$$

Pour les nombres premiers positifs de la forme $p = 4s + 1$, on a diverses relations[95]) telles que

$$\sum_{h=1}^{h=p-1} \left[\frac{h^2}{p}\right] = \frac{(p-1)(p-2)}{3},$$

$$\sum_{h=1}^{h=p-1} [\sqrt{hp}] = \frac{(p-1)(2p-1)}{3},$$

. . . .

E. Busche[105]) a déterminé pour les fonctions $\varphi(p, q)$ de *C. F. Gauss*, définies pour des entiers *quelconques* p, q par la formule (3), les différences

$$\varphi(p + \lambda q, q) - \varphi(p, q),$$
$$\varphi(p, q + \lambda p) - \varphi(p, q)$$

pour tout nombre entier λ. Il appelle en général *changements* (*Veränderungen*) d'une fonction quelconque $F(p, q)$ les expressions des différences

$$F(p + \lambda q, q) - F(p, q),$$
$$F(p, q + \lambda p) - F(p, q)$$

pour tout nombre entier λ. Ceci posé, si deux fonctions $F_1(p, q)$, $F_2(p, q)$ ont les mêmes changements et si l'on a

$$F_1(p, p) = F_2(p, p)$$

pour tous les entiers p, les deux fonctions $F_1(p, q)$, $F_2(p, q)$ sont

104) J. reine angew. Math. 27 (1844), p. 281.

105) Id. 106 (1890), p. 65.

identiques pour tous les entiers p et q. On déduit de là les expressions des fonctions $F(p, q)$, $f(p, q)$ définies par les relations

$$F(p, q) = \varphi(p, q) + \varphi(q, p),$$
$$f(p, q) = \varphi(p, q) - \varphi(q, p).$$

On a d'abord

$$F(p, q) = \frac{p-1}{2}\,\frac{q-1}{2} - \operatorname{sgn}\frac{p-1}{2}\operatorname{sgn}\frac{q-1}{2},$$

où sgn a désigne l'unité positive ou négative suivant que le signe de a est positif ou négatif. Cette formule contient la loi de réciprocité des restes quadratiques (I 15, **14**). On voit ensuite que la différence

$$f(p, q) - \frac{p-q}{4},$$

qui ne peut être fonction *rationnelle* de p, q, peut être déterminée en partant de *l'algorithme d'Euclide* (I 15, **1**) relatif aux deux nombres p et q, au moyen d'une formule qui permet de calculer $\varphi(p, q)$ et, par suite, le *symbole* $\left(\frac{p}{q}\right)$ *de Legendre.*

E. Busche[106]) a indiqué une autre formule de transformation très générale relative aux diviseurs δ_m des nombres naturels m pour lesquels, $f(x)$ étant une fonction *croissante* avec x, on a

$$f(m) \leqq \delta_m \leqq a,$$

a étant un nombre fini déterminé. Parmi les multiples conséquences que l'on peut déduire de cette formule, les deux plus saillantes sont une nouvelle conception[107]) du *lemme de Gauss* (I 15, **16**)

$$\left(\frac{p}{q}\right) = (-1)^{\mu}$$

et une formule pour le nombre total des classes de formes quadratiques de déterminants [I 16, **13**, **20**] respectivement égaux à -1, $-2, \ldots, -n$.

G. Eisenstein[108]) a donné des expressions trigonométriques des nombres

$$\left[\frac{p}{q}\right], \quad \sum_{h=1}^{h=\frac{q-1}{2}}\left[\frac{hp}{q}\right],$$

pour le plus petit résidu de p (mod. q) ainsi que pour l'exposant μ

106) J. reine angew. Math. 100 (1887), p. 459. Voir encore Mitt. math. Ges. Hamburg 3 (1891/1900), p. 234 [1896].

107) J. reine angew. Math. 103 (1888), p. 120.

108) id. 27 (1844), p. 281.

du *lemme de Gauss*; *M. A. Stern*[109]) et *P. Tardy*[110]) ont publié des démonstrations de ces formules de *G. Eisenstein.*

M. Schaar[111]) et *A. Genocchi*[112]) ont établi des formules semblables à celles de *G. Eisenstein.*

On doit à *A. Pringsheim*[113]) un développement trigonométrique de la fonction $[x]$ et à *F. Rogel*[114]) des développements en série d'autres fonctions, entre autres celui de l'indicateur $\varphi(n)$.

16. Sommes de Gauss. Plusieurs questions d'arithmétique, telles que la loi de réciprocité et la détermination du nombre de classes des formes quadratiques de déterminant donné, sont en rapport avec les *sommes de Gauss*[115])

$$\varphi(m, n) = \sum_{s=0}^{s=n-1} e^{i\pi\frac{m}{n}s^2},$$

où m et n désignent deux nombres naturels quelconques[116]).

L. Kronecker[117]) a représenté ces sommes par le symbole

$$G\left(\frac{-mi}{n}\right).$$

Pour étudier les *sommes de Gauss* on peut se borner au cas où le premier des deux arguments de la fonction $\varphi(m, n)$ est un nombre pair. On voit immédiatement, en effet, que l'on a pour tout nombre naturel ou nul μ et pour tout nombre naturel ou nul ν

$$\varphi(2\mu + 1,\ 2\nu + 1) = 1,$$
$$\varphi(2\mu + 1,\ 2\nu) = \tfrac{1}{2}\varphi(4\mu + 2,\ 4\nu).$$

---

109) J. reine angew. Math. 59 (1861), p. 146.

110) Ann. mat. pura appl. (2) 3 (1869/70), p. 31.

111) Mém. couronnés et savants étrangers Acad. Bruxelles, in 4°, 23 (1848/50), éd. 1850, mém. n° 2; voir encore Mém. Acad. Belgique 24 (1850), mém. n° 5; 25 (1850), mém. n° 1.

112) Mém. couronnés et savants étrangers Acad. Bruxelles, in 4°, 25 (1851/3), éd. 1853, mém. n° 2.

113) Math. Ann. 26 (1886), p. 193.

114) Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1897, mém. n° 44 (désigné par erreur comme mém. n° 46 dans ce volume des Sitzgsberichte de Prague).

115) *C. F. Gauss,* Commentat. Soc. Gott. recent. 1 (1808/11), math. mém. n° 2 (1808); Werke 2, Göttingen 1876, p. 11. Il importe d'appeler l'attention sur ce que le sympole $\varphi(m, n)$ a ici un sens tout différent de celui qu'on lui a donné au n° **15**.

116) **M. Salvadori* [Esposizione delle teoria delle somme di Gauss e di alcuni teoremi di Eisenstein, Pise 1904; Thèse, Fribourg en Suisse] a donné un exposé systématique de la théorie des sommes de Gauss (Note de *G. Vivanti*).*

117) *L. Kronecker,* Monatsb. Akad. Berlin 1880, p. 686.

Comme pour un nombre naturel *impair* quelconque $\textsc{n}$ et pour tout nombre naturel $\textsc{m}$ on a

$$\varphi(2\textsc{m},\ 2^\alpha\textsc{n}) = \varphi(2\textsc{mn},\ 2^\alpha)\ \varphi(2\cdot 2^\alpha\textsc{m},\ \textsc{n}),$$

on peut aussi se borner au cas où le second des deux arguments de la fonction $\varphi(m, n)$ est ou bien une puissance de 2 ou bien un nombre impair.

Si m est *impair* et $\alpha > 1$ on a d'ailleurs

$$\varphi(2m,\ 2^\alpha) = \left(\frac{2}{m}\right)^\alpha 2^{\frac{\alpha}{2}}\left[1 + i(-1)^{\frac{m-1}{2}}\right];$$

si m était *pair* et $\alpha > 1$, on aurait, en posant $m = 2^\beta\cdot\mu$, où μ impair,

$$\varphi(2m,\ 2^\alpha) = 2^\alpha$$

ou

$$\varphi(2m,\ 2^\alpha) = 2^\beta\varphi(2\mu,\ 2^{\alpha-\beta})$$

suivant que $\alpha \geqq \beta$ ou que $\alpha < \beta$. On a aussi, que m soit pair ou impair,

$$\varphi(2m,\ 2) = 1 + (-1)^m.$$

Si n est impair et si m est premier relatif à n, on a

$$\varphi(2m,\ n) = +\left|\sqrt{n}\right|\left(\frac{m}{n}\right) i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2};$$

dans cette formule la détermination du signe du second membre a offert de sérieuses difficultés.

Si n et m n'étaient pas premiers relatifs, on commencerait par appliquer la formule

$$\varphi(2m,\ n) = d\cdot\varphi\left(2\frac{m}{d},\ \frac{n}{d}\right),$$

où d désigne le p. g. c. d. de m et de n.

Les formules que l'on vient de citer permettent d'évaluer dans tous les cas les *sommes de Gauss* au moyen de caractères quadratiques bien définis.

De toutes ces relations on déduit enfin l'égalité

$$(7)\qquad \sum_{s=0}^{s=n-1}\left(\frac{s}{n}\right) e^{\frac{2i\pi sm}{n}} = +\left|\sqrt{n}\right|\left(\frac{m}{n}\right) i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}$$

qui est celle dont on fait usage dans la détermination du nombre des classes des formes binaires quadratiques. Dans cette formule n est supposé impair et m premier relatif à n. Si m n'est pas premier relatif à n la formule subsiste pourvu qu'on remplace alors le symbole $\left(\frac{m}{n}\right)$ par zéro.

C'est à *C. F. Gauss*[118]) que l'on doit cette dernière relation (7), du moins dans le cas où m est un nombre premier impair p. Il y est parvenu en transformant, au moyen de deux séries particulières, la somme

$$1 + r + r^4 + r^9 + \cdots + r^{h^2} + \cdots + r^{(p-1)^2},$$

dans laquelle r désigne une racine $p^{\text{ième}}$ de l'unité, en un produit

$$\left(r - \frac{1}{r}\right)\left(r^3 - \frac{1}{r^3}\right)\left(r^5 - \frac{1}{r^5}\right) \cdots \left(r^{p-2} - \frac{1}{r^{p-2}}\right).$$

V. A. Lebesgue[119]), au moyen de la théorie des fonctions elliptiques, puis par des considérations plus élémentaires et, après lui, *A. L. Cauchy*[120]) et *L. Kronecker*[121]) ont obtenu le même résultat.

G. Lejeune Dirichlet[122]) a évalué les *sommes de Gauss* au moyen d'intégrales définies. On obtient aussi, en utilisant les transformations dont il a fait usage, la relation de réciprocité suivante qui a lieu pour deux nombres naturels quelconques λ, ν premiers entre eux,

$$\varphi(\varepsilon\lambda,\, 2\nu) = \left(\sqrt{\frac{2i\nu\varepsilon}{\lambda}}\right)\varphi(-2\varepsilon\nu,\, \lambda), \tag{8}$$

où ε peut être pris égal à $+1$ ou à -1 et où il faut ensuite prendre pour $\left(\sqrt{\frac{2i\nu\varepsilon}{\lambda}}\right)$ celle des déterminations de la racine carrée de $\frac{2i\nu\varepsilon}{\lambda}$ dont la partie réelle est positive[123]).

Dans les notations de *L. Kronecker* cette même relation (8) se présente sous la forme particulièrement élégante

$$(\sqrt{\varrho})\,\frac{G(\varrho)}{G\left(\frac{1}{\varrho}\right)} = 1, \tag{8a}$$

où l'on a écrit ϱ pour $\frac{2i\varepsilon\nu}{\lambda}$ et $\frac{1}{\varrho}$ pour $-\frac{i\varepsilon\lambda}{2\nu}$.

De la formule (8) ou (8a) on peut déduire la loi de réciprocité des restes quadratiques et les deux relations complémentaires.

On peut d'ailleurs obtenir la relation (8) et, en général, toutes

118) Commentat. Soc. Gott. recent. 1 (1808/11) math., mém. nº 2 [1808]; Werke 2, Göttingue 1876, p. 11.

119) J. math. pures appl. (1) 5 (1840), p. 42.

120) J. math. pures appl. (1) 5 (1840), p. 154; C. R. Acad. sc. Paris 10 (1840), p. 560; Œuvres (1) 5, Paris 1885, p. 152.

121) J. math. pures appl. (2) 1 (1856), p. 392; voir aussi *H. Teege*, Diss. Kiel 1900.

122) J. reine angew. Math. 17 (1837), p. 57; Werke 1, Berlin 1889, p. 257.

123) *L. Kronecker*, Monatsb. Akad. Berlin 1880, p. 686.

les expressions précédentes des *sommes de Gauss* par une voie tout autre que celle suivie par *G. Lejeune Dirichlet.*

A. L. Cauchy[124]) avait démontré que, si a et b sont deux nombres réels quelconques tels que leur produit ab soit égal à π, on a

$$(9)\qquad a^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{k=+\infty} e^{-k^2a^2}\right]=b^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{k=+\infty} e^{-k^2b^2}\right].$$

Lorsque *G. Lejeune Dirichlet* eut établi ses formules fondamentales concernant les *sommes de Gauss*, *A. L. Cauchy*[125]) démontra qu'elles résultaient aisément de sa formule (9) par un passage à la limite.

C. G. J. Jacobi[126]) avait, d'autre part, montré que cette formule (9) que l'on peut écrire, en posant

$$a^2=\pi x,\quad b^2=\frac{\pi}{x},$$

$$(10)\qquad \sqrt{x}\,\frac{1+2e^{-\pi x}+2e^{-4\pi x}+\cdots+2e^{-k^2\pi x}+\cdots}{1+2e^{-\frac{\pi}{x}}+2e^{-\frac{4\pi}{x}}+\cdots+2e^{-k^2\frac{\pi}{x}}+\cdots}=1,$$

rentre, comme cas particulier, dans les formules de transformation linéaire des fonctions thêta. Dès lors le lien entre les *sommes de Gauss* et la théorie des fonctions elliptiques était mis en évidence[127]).

L. Kronecker[128]) a indiqué qu'inversement la formule (10) peut se déduire de la relation (8^a) en sorte que les deux relations (8^a) et (10) seraient entièrement équivalentes et auraient toutes deux pour fondement le théorème fondamental de *A. L. Cauchy* sur l'évaluation des intégrales des fonctions de variables complexes, prises le long d'un contour fermé; *mais *M. Lerch*[129]) a remarqué que s'il est aisé de démontrer très simplement la proposition directe par la méthode de *L. Kronecker*, cette méthode est insuffisante pour prouver la proposition inverse, en sorte que cette question demande à être étudiée à nouveau.*

L. Kronecker[130]) a évalué directement, en s'appuyant seulement sur le théorème fondamental de *A. L. Cauchy* que l'on vient de rappeler,

124) Bull. Soc. philom. Paris (3) 4 (1817), p. 124; voir aussi *V. A. Lebesgue,* J. math. pures appl. (1) 5 (1840), p. 186.

125) J. math. pures appl. (1) 5 (1840), p. 154; C. R. Acad. sc. Paris 10 (1840), p. 560; Œuvres (1) 5, Paris 1885, p. 152.

126) Voir à ce sujet *V. A. Lebesgue,* J. math. pures appl. (1) 5 (1840), p. 186.

127) Voir par ex. *J. Tannery* et *J. Molk,* Eléments de la théorie des fonctions elliptiques 4, Paris 1902, p. 283/93.

128) Monatsb. Akad. Berlin 1880, p. 686.

129) *Math. Ann. 57 (1903), p. 554.*

130) J. reine angew. Math 105 (1889), p. 267.

l'expression de la *somme de Gauss*

$$(11)\qquad \varphi(2, n) = \sum_{k=0}^{k=n-1} e^{2i\pi\frac{k^2}{n}} = +|\sqrt{n}|\,\frac{i+i^{1-n}}{1+i}.$$

G. Landsberg[131]) a établi par des considérations analogues la formule de réciprocité (8).

La détermination du signe du radical dans la relation (7) a été effectuée d'une façon simple par *F. Mertens*[132]).

Séries et méthodes de Lejeune Dirichlet[133]).

17. L'identité d'Euler. *Parmi les séries de la forme

$$a_1 e^{-\lambda_1 z} + a_2 e^{-\lambda_2 z} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n z} + \cdots\cdots$$

ou encore[134])

$$(S)\qquad \frac{a_1}{c_1^z} + \frac{a_2}{c_2^z} + \cdots + \frac{a_n}{c_n^z} + \cdots\cdots,$$

en posant

$$c_1 = e^{\lambda_1},\ c_2 = e^{\lambda_2},\ \ldots,\ c_n = e^{\lambda_n},\ \ldots\ldots,$$

les plus importantes au point de vue des applications arithmétiques correspondent non à

$$\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \ldots,\ \lambda_n = n,\ \ldots\ldots$$

mais à

$$\lambda_1 = \lg_e 1,\ \lambda_2 = \lg_e 2,\ \ldots,\ \lambda_n = \lg_e n,\ \ldots\ldots$$

autrement dit à

$$c_1 = 1,\ c_2 = 2,\ \ldots,\ c_n = n,\ \ldots\ldots$$

C'est à ces séries[135])

$$(S')\qquad \frac{a_1}{1^z} + \frac{a_2}{2^z} + \cdots + \frac{a_n}{n^z} + \cdots\cdots$$

qu'on réserve généralement le nom de *séries de Lejeune Dirichlet*[136]).*

---

131) J. reine angew. Math. 111 (1893), p. 234. Voir encore *V. A. Lebesgue,* J. math. pures appl. (1) 5 (1840), p. 42; (1) 12 (1847), p. 497.

132) Sitzgsb. Akad. Berlin 1896, p. 217; voir aussi Sitzgsb. Akad. Wien 103 IIa (1894), p. 1005.

133) Pour plus de détails sur ce qui concerne ce chapitre et le suivant, on consultera *E. Landau,* Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen (2 vol.), Leipzig et Berlin 1909 (bibliographie détaillée).

134) Abh. Akad. Berlin 1837, math. p. 45; trad. par *O. Terquem,* J. math. pures appl. (1) 4 (1839), p. 393; Werke 1, Berlin 1889, p. 313.

Pour z non entier c_n^z a plusieurs valeurs; on prend par définition $c_n^z = e^{\lambda_n z}$.

135) Voir la remarque de la note 134. On rappelle que $\lg_e u$ désigne, quel que soit u, la détermination principale du logarithme naturel de u; les nombres $\lg_e n$ sont donc réels.

136) Il arrive même que ce nom est attribué plus spécialement aux séries (1) du n° 29.

Cette importance est la conséquence de l'identité générale suivante écrite dans un certain nombre de cas particuliers par *L. Euler*[137]):

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{n=+\infty} f(n) = \prod_{(p)} [1 + f(p) + f(p^2) + f(p^3) + \cdots],$$

où, dans le second membre, le produit est étendu à tous les nombres premiers p[138]); on suppose d'ailleurs que l'expression envisagée $f(n)$ soit telle que l'on ait

$$f(mm') = f(m)\, f(m')$$

pour tout couple de nombres naturels m, m' premiers entre eux, que

$$f(1) = 1$$

et que la série des valeurs absolues

$$1 + |f(2)| + |f(3)| + |f(4)| + \cdots\cdots$$

soit convergente.

Lorsqu'on choisit pour $f(n)$ une expression telle que pour *tout* couple de nombres naturels m, m' (premiers entre eux ou non) on ait

$$(2) \qquad f(mm') = f(m)\, f(m'),$$

le produit

$$\prod_{(p)} \frac{1}{1 - f(p)},$$

étendu à tous les nombres premiers $p > 1$, est égal au second membre de l'équation (1), en sorte que, dans ce cas, on a aussi une relation de la forme

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{n=+\infty} f(n) = \prod_{(p)} \frac{1}{1 - f(p)}.$$

Si l'on prend, en particulier, pour $f(n)$ la fonction

$$f(n) = \frac{1}{n^s},$$

où s est un nombre déterminé, on voit que, quand la partie réelle de s est > 1, la somme de la série

$$1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots + \frac{1}{n^s} + \cdots\cdots,$$

---

137) Comm. Acad. Petrop. 9 (1737), éd. 1744, p. 172/7 [1737]; Introd.[1]) 1, p. 221/52 (chap. 15), en partic. p. 225, 243, 248; trad. *J. B. Labey* 1, p. 206/33, en partic. p. 210, 226, 230. Voir aussi *L. Euler*, Opusc. analytica 2, S[t] Pétersbourg 1785, p. 240/56 [1775]; Commentat. Arith. 2, S[t] Pétersbourg 1849, p. 116/26.

138) Il est entendu qu'on ne fait pas figurer l'unité parmi les nombres premiers. On devra tenir compte de cette remarque dans tout ce qui suit.

où figurent tous les nombres naturels, et la valeur du produit infini

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{7^s}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{11^s}}\cdots\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\cdots\cdots,$$

où figurent tous les nombres premiers plus grands que 1, sont égales; c'est ce qu'exprime la relation

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{(p)}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}. \tag{4}$$

*L'intervention des nombres premiers dans ces formules est due évidemment à ce qu'ils sont les *éléments fondamentaux* dont est dérivé le *groupe* des nombres entiers, de sorte qu'on pourrait écrire des identités toutes pareilles où la somme serait étendue à une suite indéfinie de nombres positifs (rationnels ou irrationnels) quelconques donnés n, constamment et indéfiniment croissants (de manière qu'un nombre fini d'entre eux soit inférieur à une limite déterminée quelconque, le premier d'entre eux étant l'unité), et où le produit serait étendu à la suite infinie de nombres p convenablement choisis parmi les nombres n de façon que tout nombre n puisse être mis sous la forme

$$n=\prod_{(i)}p_i^{\alpha_i} \tag{5}$$

les α_i étant des entiers positifs.

Il n'est pas nécessaire que cette expression de n soit toujours unique. Mais, dans le cas contraire, le terme correspondant de la série (3) devra être multiplié par le nombre de représentations de n sous la forme (5).

Il peut même arriver que plusieurs des p soient égaux entre eux. C'est ce qui a lieu, au fond, dans les cas envisagés au n° **36**.

On pourrait dans tout ce qui va suivre se borner aux séries de la forme (S'). Toutefois nous n'opérerons pas ainsi tout d'abord, les propriétés fondamentales que nous allons indiquer s'étendant d'elles-mêmes et sans aucune difficulté aux séries plus générales (S) dans lesquelles $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots\ldots$ sont des nombres positifs croissant indéfiniment avec n, tandis que $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\ldots$ sont des nombres complexes quelconques (pouvant être réels ou imaginaires).*

18. Propriétés fondamentales des séries de Lejeune Dirichlet. *Nous envisagerons ici, conformément à ce qui a été dit au n° **1**, les relations qui existent entre les propriétés d'une série (S) et la nature des coefficients a_n. Elles servent le plus souvent à conclure de celle-là à ceux-ci. Mais elles peuvent également (voir par ex. n° **27**) être employées dans le but inverse. Il arrive même parfois que les deux méthodes sont combinées (cf. n° **51**).*

*Tout d'abord[139]) si la série (S) est convergente[140]) pour $z = z_0$, elle est aussi convergente[141]) pour toute valeur de z dont la partie réelle $\mathfrak{R}(z)$ est supérieure à la partie réelle de z_0.

Elle est uniformément convergente dans tout domaine limité, intérieur à la région où

$$\mathfrak{R}(z) > \mathfrak{R}(z_0)$$

[égalité exclue]. Elle peut être différentiée terme à terme dans les mêmes conditions.

Il en résulte:

A. A moins que la série (S) ne soit convergente quel que soit z, ou divergente quel que soit z (auxquels cas on aurait $\alpha = \pm \infty$), il existe[139]) une droite[140]) à laquelle on a donné le nom de *droite de convergence*

$$\mathfrak{R}(z) = \alpha,$$

(parallèle à l'axe purement imaginaire) telle que la série (S) soit toujours divergente pour $\mathfrak{R}(z) < \alpha$, toujours convergente pour $\mathfrak{R}(z) > \alpha$.

La série (S) représente[141]) une fonction analytique de z, laquelle est holomorphe en tout point intérieur à la région $\mathfrak{R}(z) > \alpha$.

Pour

$$\mathfrak{R}(z) = \alpha$$

la convergence de la série (S) reste douteuse, comme il arrive pour la série de Taylor sur la circonférence du cercle de convergence. Mais, contrairement à ce qui a lieu pour la série de Taylor, il n'arrive nécessairement ni que la droite de convergence contienne un point singulier de la fonction représentée ni même que de tels points, comme cela pourrait également avoir lieu dans certains cas, s'approchent indéfiniment de cette droite en s'éloignant indéfiniment de l'axe réel[142]). Cf. n^os^ **19**, 3° et 4°.*

139) *J. L. W. V. Jensen*, Tidsskrift math. Köbenhavn (Copenhague), (5) 2 (1884), p. 63/72.

140) *E. Cahen,* Thèse, Paris 1894, p. 20; Ann. Ec. Norm. (3) **11** (1894), p. 75.

141) Les conclusions du texte sont même exactes du moment que pour $z = z_0$ la somme des n premiers termes de la série reste inférieure en valeur absolue à un nombre fixe quel que soit n [cf. *R. Dedekind,* dans *G. Lejeune Dirichlet,* Vorlesungen über Zahlentheorie, (4^e^ éd.) Brunswick 1894, p. 380 (Suppl. IX); *E. Cahen*, Thèse[140]), p. 10].

142) Par ex. les séries (2) du n° **29** ont pour droite de convergence $\mathfrak{R}(z) = 0$ et sont régulières, non seulement sur toute cette droite, mais dans tout le plan.

*On a de plus la proposition:

A. En tout point

$$c = \alpha + i\beta$$

de la droite de convergence où la série converge, sa somme $F(z)$ est continue à droite[143]), c'est-à-dire qu'elle tend vers $F(c)$ lorsque z tend vers c par valeurs de la forme

$$c + t,$$

t étant réel et positif, ou même[144]) par valeurs de la forme

$$c + t + it_1,$$

t étant réel positif, t_1 réel et $\frac{t_1}{t}$ fini.

Cette proposition est la généralisation d'un théorème classique de *N. H. Abel* [I 6, 2] sur les séries entières[145]).

Le cas particulier de A:

A″. Si la série (S) se réduit à une somme d'un nombre fini de termes, elle reste finie dans toute région finie du plan,

doit être mentionné à part, malgré son évidence immédiate, car il a suffi aux recherches de *G. Lejeune Dirichlet* sur la progression arithmétique [voir n° **30**].*

*Lorsque la loi des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\ldots$ est connue, on détermine la droite de convergence à l'aide de:

B. L'abscisse de la droite de convergence, lorsque celle-ci est à droite de l'axe imaginaire[146]), a la valeur[147])

$$\alpha = \overline{\lim_{n=+\infty}} \left[\frac{1}{\lambda_n} \log_e |a_1 + a_2 + \cdots + a_n|\right].$$

Contrairement à ce qui a lieu pour la série de Taylor la convergence de la série (S) *n'est pas, en général, absolue* dans toute la région $\Re(z) > \alpha$. Mais, par contre,

---

143) *R. Dedekind,* dans *G. Lejeune Dirichlet*, Vorl. über Zahlentheorie, Brunswick 1863; (4ᵉ éd.) Brunswick 1894, p. 378/80 [Suppl. IX].

144) *E. Cahen,* Thèse[140]), p. 14/5; Ann. Ec. Norm. (3) 11 (1894), p. 86/7; *W. Schnee,* Diss. Berlin 1908, p. 29.

145) *O. Perron* [J. reine angew. Math. 134 (1908), p. 106/9] montre que la série est uniformément convergente, non seulement pour $\frac{|t_1|}{t} < M$, où M est fixe, mais pour $|t_1| < e^{Mt} - 1$ et cela jusqu'à $t = +\infty$.

146) Le théorème subsiste moyennant une restriction supplémentaire pour $\alpha = 0$. Voir *E. Landau,* Primzahlen[133]) 2, p. 732 en note.

147) *E. Cahen,* Thèse[140]), p. 17. Voir *E. Landau,* Primzahlen[133]) 2, p. 732. En partie déjà dans *J. L. W. V. Jensen*, C. R. Acad. sc. Paris 106 (1888), p. 833.

B′. Si le rapport $\frac{\log_e n}{\lambda_n}$ reste fini de sorte que[148])

$$\overline{\lim_{n=+\infty}} \frac{\log_e n}{\lambda_n} = r,$$

où r est un nombre fini positif ou nul (ce dernier cas étant par ex. celui des séries de Taylor) et que la série (S) ait une abscisse de convergence α, cette série (S) aura aussi une abscisse de convergence absolue: elle sera absolument convergente pour

$$\Re(z) > \alpha_1,$$

où α_1 vérifie l'inégalité

$$(1) \qquad \alpha_1 \leqq \alpha + r$$

laquelle s'écrit, pour les séries de Lejeune Dirichlet proprement dites (séries S′),

$$(1') \qquad \alpha_1 \leqq \alpha + 1 .$$

La différence $\alpha_1 - \alpha$ peut d'ailleurs prendre soit la valeur r [comme dans le cas de la série (2) du n° **29** par exemple], soit toute autre valeur (non négative) inférieure à r, y compris zéro [comme c'est le cas pour la série $\zeta(z)$ par exemple][149]).*

*On trouvera plus loin (n° **19**, 3°) des conditions moyennant lesquelles on a certainement $\alpha_1 - \alpha > 0$.

L'absence de point singulier sur la droite de convergence ne suffit pas à assurer[150]) cette inégalité.*

*La formule évidente

$$z \int_q^{+\infty} \frac{dx}{x^{z+1}} = \frac{1}{q^z}$$

donne ensuite[151]):

C. Si $F(z)$ est la fonction de z représentée par la somme de la série convergente (S), en sorte que

$$F(z) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} a_n e^{-\lambda_n z},$$

---

148) *E. Cahen*, Thèse[140]), p. 20.

149) *A. Pringsheim* [Math. Ann. 37 (1890), p. 38; voir aussi id. 33 (1889), p. 119; 35 (1890), p. 297] indique plusieurs formes de condition de convergence pour les séries (S); *E. Landau*, Primzahlen[133]) 1, p. 124/5; 2, p. 728/31.

150) *H. Bohr*, Nachr. Ges. Gött. 1909, p. 13 en note.

151) *B. Riemann*, Monatsb. Akad. Berlin 1859, p. 675; Werke, (2e éd.) publ. par *H. Weber*, Leipzig 1892, p. 149; trad. *L. Laugel*, Paris 1898, p. 170; publié aussi sous le titre: *B. Riemann*, Sur le nombres des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée, trad. par *L. Laugel*, Paris (s. d.) [1895], p. 12.

et si l'on désigne par le symbole

$$\sum^{\lambda_n \leqq u} a_n$$

la somme des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de la série (S) étendue aux indices n tels que $\lambda_n \leqq u$, on a

$$F(z) = z \int^{+\infty} \left(\sum^{\lambda_n < \log_e x} a_n \right) \frac{dx}{x^{z+1}},$$

où la limite inférieure de l'intégrale est e^{λ_1} ou tout autre nombre positif plus petit que e^{λ_1}.*

*Les séries de Lejeune Dirichlet satisfont à la condition envisagée au n° **1**, savoir

D_0. Lorsqu'on connaît la fonction $F(z)$, supposée développable en série de la forme (S), les quantités λ_n et a_n qui interviennent dans ce développement ne peuvent être choisies que d'une seule manière.

Ceci se reconnaît intuitivement en remarquant que le premier terme de la série en constitue la partie principale pour $z = +\infty$[152]), mais *B. Riemann*[153]) va plus loin et obtient les valeurs mêmes des c_n et des a_n par la proposition suivante:

D. Pour x positif et distinct des coefficients c_n, on a

$$(2) \qquad \sum^{c_n < x} a_n = \sum^{\lambda_n < \log_e x} a_n = \frac{1}{2 i \pi} \int_{a - i\infty}^{a + i\infty} \frac{F(z) x^z}{z} dz$$

où l'intégrale du second membre est prise le long d'une droite menée parallèlement à l'axe purement imaginaire par un point réel fixe $a > 0$, cette droite étant intérieure à la région de convergence de la série (S).

Les c_n sont donc les valeurs de x qui rendent l'intégrale en question discontinue et les a_n sont les variations brusques correspondantes.

Cette proposition que *B. Riemann*[153]) tirait du théorème de Fourier (II 28) est plus commodément démontrée en partant, avec

152) *G. Lejeune Dirichlet,* Zahlenth.[141]), publ. par *R. Dedekind,* (4e éd.) p. 228; voir aussi *P. Bachmann,* Analyt. Zahlenth.[11]), p. 61.

153) *B. Riemann,* Werke[151]), (2e éd.) p. 676; trad. *L. Laugel,* p. 171.

L. Kronecker[154]), de l'égalité

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^z}{z}\,dz = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 1 \\ 1 & \text{pour } x > 1 \end{cases} \tag{3}$$

dans laquelle a est un nombre positif.

La démonstration présente des lacunes chez *L. Kronecker* et même encore chez *E. Cahen*[155]). Elle a été rétablie par *J. Hadamard*[156]) moyennant l'hypothèse que le nombre r [cf. **B**′] existe et par *O. Perron*[157]) sans le secours de cette hypothèse[158]).*

*Le premier membre de (3) garde un sens même pour $x = 1$, si l'on particularise la loi suivant laquelle les limites supérieure et inférieure s'éloignent indéfiniment, en convenant de le considérer comme égal à

$$\frac{1}{2i\pi}\lim_{\alpha=+\infty}\int\limits_{a-i\alpha}^{a+i\alpha}\frac{x^z}{z}\,dz.$$

Il prend dans ces conditions pour $x = 1$ la valeur $\frac{1}{2}$. Moyennant cette convention le dernier membre de (2) garde aussi un sens pour $x = c_n$ et est égal à la moyenne arithmétique de ses valeurs pour $x = c_n - \varepsilon$ et $x = c_n + \varepsilon$.*

*A la proposition **D** il est souvent commode[159]) de substituer:

D′. Pour x positif ainsi que a et $\mu - 1$, on a[160])

$$\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^z F(z)}{z^\mu}\,dz = \frac{1}{\Gamma(\mu)}\sum^{c_n<x} a_n \log_e^{\mu-1}\left(\frac{x}{c_n}\right),$$

la droite $\Re(z) = a$ étant toujours supposée à l'intérieur de la région de convergence de la série (S).

---

154) *L. Kronecker,* Monatsb. Akad. Berlin 1878, p. 53.

155) *E. Cahen,* Thèse[140]), p. 21. Voir aussi *E. Phragmén,* Öfversigt Vetenskaps Akad. förhandl. (Stockholm) 48 (1891), p. 721; *H. von Mangoldt,* Sitzgsb. Akad. Berlin 1894, p. 888 [trad. *L. Laugel,* Ann. Ec. Norm. (3) 13 (1896), p. 68]; J. reine angew. Math. 114 (1895), p. 277.

156) *J. Hadamard,* Rend. Circ. mat. Palermo 25 (1908), p. 326/30, 395/6.

157) *O. Perron,* J. reine angew. Math. 134 (1908), p. 95/143.

158) Les raisonnements de *E. Phragmén*[155]) établissent déjà la formule lorsque la droite d'intégration est dans le domaine d'absolue convergence.

159) *J. Hadamard,* Bull. Soc. math. France 24 (1896), p. 119/220 en partic. p. 211/3. Voir aussi *E. Landau,* Math. Ann. 56 (1903), p. 657/9.

160) La proposition subsiste peut-être pour $0 < \mu < 1$, mais elle n'a pas été démontrée dans ce cas, où elle est d'ailleurs, au moins jusqu'ici, sans utilité.

Particulièrement, pour $\mu = 2$, on a

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{x^z F(z)}{z^2}\,dz = \sum^{c_n<x} a_n \log_e\left(\frac{x}{c_n}\right).$$

L'avantage de cette intégrale sur la précédente est qu'elle est absolument convergente, c'est-à-dire qu'elle garde un sens lorsqu'on y remplace chaque élément par sa valeur absolue[161]).*

La réciproque de la proposition D n'est pas exacte[162]). La proposition D elle-même permet néanmoins d'arriver à des conditions de possibilité[156]) pour le développement d'une fonction donnée en série de la forme (S); ces conditions se réduisent cependant au fond à des tautologies.

*Le cas où $F(z)$ présente sur sa droite de convergence un *pôle* est important et s'est présenté dès les recherches de *G. Lejeune Dirichlet*[163]) qui a démontré et employé la proposition[164]):

E. Dans la série

$$\frac{1}{c_1^z}+\frac{1}{c_2^z}+\cdots+\frac{1}{c_n^z}+\cdots\cdots,$$

soit X le nombre des valeurs de n pour lesquelles c_n est inférieur à un nombre donné positif quelconque x. Si le rapport $\frac{X}{x}$ tend, pour $x=+\infty$, vers une limite positive déterminée ω, le produit

$$(z-1)\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{1}{c_n^z}$$

tend vers cette même limite ω lorsque z tend vers 1 par valeurs supérieures à 1.*

Cette proposition a été étendue de plusieurs manières[165]). En particulier on a, lorsqu'on ne suppose pas les a_n égaux à 1,

---

161) *Ce fait, évident dans la région de convergence absolue de la série (S), subsiste dans la région de convergence relative, comme on le voit aisément à l'aide du n° **19**, 2°.*

162) **O. Perron*[157]); *E. Landau,* Primzahlen[183]) 2, p. 833/7.*

163) J. reine angew. Math. 19 (1839), p. 324; Werke 1, Berlin 1889, p. 411; J. math. pures appl. (2) 1 (1856), p. 80/1; J. reine angew. Math. 53 (1857), p. 130/2; Werke 2, Berlin 1897, p. 197/200.

164) Dans un mémoire sur des fonctions qu'il nomme *fonctions énumératrices*, *E. Cesàro* [Ann. mat. pura appl. (2) 14 (1886/7), p. 141] a déduit de la théorie des valeurs moyennes un cas particulier important de ce théorème. Voir aussi plusieurs applications à la théorie des valeurs moyennes n°s **52** et suiv.

165) *R. Dedekind,* dans *G. Lejeune Dirichlet,* Zahlenth.[141]), (4e éd.) p. 382;

E′. Si l'une ou l'autre des expressions

$$(4) \qquad \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{c_n}$$

ou

$$\frac{1}{\log_e c_n}\left[\frac{a_1}{c_1} + \frac{a_2}{c_2} + \cdots + \frac{a_n}{c_n}\right]$$

tend vers une limite déterminée ω lorsque n augmente indéfiniment, le produit

$$(5) \qquad (z-1)\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{a_n}{c_n^z}$$

tend vers cette même limite ω quand z tend vers 1 par valeurs supérieures à 1.

Mais il importe de remarquer[166]) que les réciproques de ces propositions ne sont pas exactes [voir n° **19**, 4°].

M. Lerch[167]), *E. Phragmén*[168]) et *E. Landau*[169]) ont énoncé dans le même ordre d'idées des conditions suffisantes pour que $z = 1$ soit un pôle[169]) simple de la fonction

$$F(z) = \sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{a_n}{c_n^z},$$

ce pôle étant le seul point singulier sur la droite de convergence. Le nombre ω calculé par l'un ou l'autre des moyens qui précèdent est alors évidemment le résidu. On obtient même ainsi une limite inférieure du rayon de convergence de la série qui développe

$$F(z) - \frac{\omega}{z-1}$$

suivant les puissances positives croissantes de $z - 1$.*

A. Pringsheim, Math. Ann. 37 (1890), p. 38, 51/60; *E. Landau*, J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 73/4; voir aussi *P. Bachmann,* Analyt. Zahlenth.[11]) 2, p. 62/7. Les limites supérieure et inférieure d'indétermination (II 1, 7) de $(z-1)F(z)$ sont comprises entre

$$\overline{\lim_{x=+\infty}}\,\frac{X}{x} \quad \text{et} \quad \underline{\lim_{x=+\infty}}\,\frac{X}{x},$$

où l'on a écrit X pour $\sum_{n=1}^{n=[x]} a_n$ [cf. *E. Landau,* Primzahlen[133]) 1, p. 115/8]. Voir aussi *E. Landau,* J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 146.

166) *G. Lejeune Dirichlet,* Zahlentheorie[141]), (4^e^ éd.) p. 310 en note.

167) *C. R. Acad. sc. Paris 128 (1899), p. 1310.*

168) *Öfversigt Vetensk. Akad. förhandl. (Stockholm) 49 (1892), p. 199.*

169) *Acta math. 30 (1906), p. 195; J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 77; lettre de *J. Franel* à *E. Landau,* citée par *E. Landau,* Rend. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 134/5.*

*Plus généralement *W. Schnee*[170]) démontre la proposition:

E″. Si l'on a

$$\lim_{n=+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{\lambda_n^k} = c,$$

k étant un nombre réel[171]) au moins égal à -1, et si

$$\lambda_n - \lambda_{n-1}$$

reste fini, la série $F(z)$ (qui, d'après B, a pour droite de convergence l'axe imaginaire) est telle que le produit

$$\frac{1}{\Gamma(k+1)} z^k F(z)$$

pour $k > -1$, ou

$$-\frac{1}{z \log_e z} F(z)$$

pour $k = -1$, tend vers c lorsque z tend vers zéro par valeurs réelles et positives [ou plus généralement par valeurs de la forme $t + it_1$, où t et t_1 sont soumis aux mêmes restrictions que dans A′].

Cette proposition paraît avoir été employée par *G. Lejeune Dirichlet*[172]) pour le cas de $k = 2$.*

**W. Schnee*[173]) étend de même aux séries de Lejeune Dirichlet plusieurs autres propriétés analogues des séries entières. *M. Riesz*[174]) généralise dans le même ordre d'idées la propriété d'après laquelle une série entière est convergente en tout point régulier de son cercle de convergence si elle est d'ordre [cf. II 8 et II 9] plus petit que 1. Il démontre[174]) que, quand la condition

$$\lim_{n=+\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{e^{\lambda_n c}} = 0$$

est remplie pour un nombre positif c, la série de Lejeune Dirichlet

$$a_1 e^{-\lambda_1 z} + a_2 e^{-\lambda_2 z} + \cdots + a_n e^{-\lambda_n z} + \cdots\cdot\cdot$$

est convergente en tout point régulier de la droite

$$\Re(z) = c.$$

De plus la convergence est uniforme dans tout intervalle de régularité.

170) *Diss. Berlin 1908, p. 34. *W. Schnee* considère même les valeurs imaginaires de k et des λ_n.*

171) *Ce cas ne se présente pas nécessairement dans E, car $(z-1)F(z)$ peut avoir une valeur finie pour $z = 1 + 0$ sans être holomorphe pour $z = 1$.*

172) Ber. Akad. Berlin 1838, p. 13; Werke 1, Berlin 1889, p. 353.

173) *Math. Ann. 66 (1909), p. 337/49.*

174) *C. R. Acad. sc. Paris 149 (1909), p. 909. C'est une généralisation d'un théorème de *P. Fatou*, id. p. 909/10.*

W. Schnee[175]) a étudié plus tard[175a]) certains cas où $F(z)$ a sur la droite de convergence un point singulier logarithmique, mais où, sauf en ce point singulier, $F(z)$ est régulière dans un demi-plan dépassant la droite de convergence.*

*A l'aide d'intégrales définies on peut ramener les séries de la forme (S') [n° **17**] aux séries de Maclaurin[176]) et inversement.

E. Cahen[177]) a même indiqué, pour les séries de Lejeune Dirichlet (S) prises au sens général, la propriété d'où découle cette relation, savoir:

F. Si l'on a comme précédemment

$$c_1 = e^{\lambda_1},\ c_2 = e^{\lambda_2},\ \ldots,\ c_n = e^{\lambda_n},\ \ldots\ldots,$$

la fonction

$$F(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{a_n}{c_n^z} = \sum_{n=1}^{n=+\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$$

est liée à la fonction analogue

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} a_n e^{-c_n z}$$

par la relation

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^{+\infty} x^{z-1}\, \Phi(x)\, dx.^*$$

*On obtient, en outre, avec *B. Riemann*[178]), le prolongement analytique de l'intégrale ainsi formée en remarquant que:

F'. La formule précédente peut encore s'écrire

$$F(z) = \frac{1}{2i\pi}\, \Gamma(1-z) \int_{(c)} x^{z-1}\, \Phi(-x)\, dx,$$

le contour d'intégration (c) étant formé d'un lacet (II 8) qui part de $x = -\infty$ et y revient après avoir tourné autour de l'origine et en suivant la partie négative de l'axe réel.*

*Inversement on peut exprimer $\Phi(z)$ à l'aide de $F(z)$ par une intégrale définie comme l'a montré *E. Cahen*[179]).*

---

175) *Diss. Berlin 1908, p. 57/9; Rend. Circ. mat. Palermo 27 (1909), p. 87/113.*

175a) *Rend. Circ. mat. Palermo 27 (1909), p. 92.*

176) *O. Schlömilch*, Z. Math. Phys. 3 (1858), p. 248; *B. Riemann*, Werke[151]), (2e éd.) p. 146; trad. *L. Laugel*, p. 166.

177) Thèse[140]), p. 25.

178) Werke[151]), (2e éd.) p. 146; trad. *L. Laugel*, p. 166.

179) *Thèse[140]), p. 27.*

19. Autres propriétés des séries de Lejeune Dirichlet. *Les auteurs des recherches récentes sur cette théorie ont *été* conduits à compléter en plusieurs points les théorèmes précédents.*

1°) **H. Bohr*[180] a, du moins pour les séries (S'), complété la proposition **A** en montrant que cette proposition subsiste dans les méthodes modernes de sommation généralisée dues surtout à *E. Cesàro* et à *E. Borel* (II 2) et que celles-ci permettent d'étendre, parfois indéfiniment, le domaine d'existence de $F(z)$.

En appelant *sommable d'ordre r* une série telle qu'on arrive à un résultat en lui appliquant r fois l'opération de *E. Cesàro,* une série (S') a, pour chaque valeur du nombre naturel r, une *abscisse α_r de sommabilité d'ordre r*, telle que la série soit sommable d'ordre r pour

$$\Re(z) > \alpha_r$$

et non pour

$$\Re(z) < \alpha_r,$$

abscisse qui peut, comme α, être égale à $+\infty$ ou à $-\infty$. On a naturellement

$$\alpha_{r+1} \leqq \alpha_r \qquad \alpha_r \leqq \alpha.$$

Mais les différences

$$\alpha_r - \alpha_{r+1}$$

sont toutes inférieures à 1 et vont en décroissant constamment[181].*

2°) *D'autre part, comme l'a montré *E. Landau*[182], on peut limiter la croissance de $F(z)$ sur toute droite

$$\Re(z) = \beta$$

intérieure à la région de convergence non absolue[183], c'est-à-dire telle que

$$\alpha < \beta < \alpha_1,$$

α et α_1 ayant les mêmes significations que dans **B'**. On a

$$|F(\beta + it)| < B \cdot t^\gamma,$$

où B et γ sont deux constantes positives, la seconde pouvant recevoir toute valeur supérieure à

$$\frac{\alpha_1 - \beta}{\alpha_1 - \alpha}.$$

---

180) *C. R. Acad. sc. Paris 148 (1909), p. 75.*

181) **H. Bohr*, Nachr. Ges. Gött. 1909, p. 247/62; $\Re(z)$ désigne comme toujours la partie réelle de z.*

182) Rend. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 123; *J. Hadamard*, id. 25 (1908), p. 326/30. Cf. *E. Landau*, Primzahlen[135] 2, p. 784.

183) Sur une parallèle à l'axe purement imaginaire, intérieure à la région de convergence *absolue*, $F(z)$ reste évidemment finie.

Lors même qu'il n'y a pas de région de convergence absolue on peut affirmer[184]) que $\left|\frac{F(z+it)}{t}\right|$ tend vers zéro.*

3°) *Mais, de plus, une proposition qui, dans une certaine mesure peut être regardée comme la réciproque de la précédente, a été démontrée par *E. Landau*[185]), puis précisée par *W. Schnee*[186]) pour les séries de la forme (S'); elle s'étendrait d'ailleurs aisément à des séries plus générales de la forme (S). Voici cette proposition:

Si la série

$$(S') \qquad \frac{a_1}{1^z}+\frac{a_2}{2^z}+\cdots+\frac{a_n}{n^z}+\cdots\cdot\cdot$$

est absolument convergente pour $\Re(z)>1$ et si la fonction

$$F(z)=\sum_{n=1}^{n=+\infty}\frac{a_n}{n^z}$$

est régulière pour

$$\Re(z)\geqq\eta, \qquad \text{où} \quad 0<\eta<1,$$

et vérifie, sous la même condition, l'inégalité

$$(1) \qquad |F(z)|<B|z|^\gamma,$$

B et γ étant deux constantes positives, la série correspondante (S') est convergente au moins pour

$$\Re(z)\geqq 1-\frac{1-\eta}{\gamma'},$$

γ' étant une nouvelle constante pour laquelle *E. Landau* donne la valeur

$$2^{[\gamma]+1}.$$

On peut d'ailleurs prendre pour γ' la valeur plus petite donc plus avantageuse

$$1+\gamma;$$

c'est ce qu'a montré *W. Schnee*[186]) dans le cas où $\gamma=1$, puis *E. Landau*[187]) dans le cas général.

Les deux propositions 2°) et 3°) ont été généralisées par *M. Riesz*[188]) et *H. Bohr*[181]) lui-même au cas où l'on considère, au lieu de la convergence ordinaire, la sommation généralisée dont il a été parlé en 1°).*

4°) *Dans le même ordre d'idées, *E. Landau*[189]) complète d'une manière importante la proposition E'.

---

184) *E. Landau*, Primzahlen[135]) 2, p. 821.

185) Rend. Circ. mat. Palermo 26 (1908), p. 252/5. Cf. *E. Landau*, Primzahlen[135]) 2, p. 844/61.

186) Math. Ann. 66 (1909), p. 337; *E. Landau* [Rend. Circ. mat. Palermo 28 (1909), p. 113] simplifie la démonstration de *W. Schnee.*

187) Rend. Circ. mat. Palermo 28 (1909), p. 113.

188) *C. R. Acad. sc. Paris 148 (1909), p. 1658.*

On a dit plus haut que les réciproques de E, E′, E″ ne sont pas exactes. Les propositions E, E′, E″ s'appliquent en *supposant* démontrée l'existence d'une limite pour la quantité (4) du numéro précédent ou pour l'une des quantités analogues considérées en cet endroit: elles ne peuvent servir à établir cette existence même lorsqu'on en est assuré en ce qui regarde la quantité (5) du n° **18**.

Au contraire le résultat que *E. Landau* obtient pour les séries (S′) permet de prouver l'existence d'une limite pour la quantité (4) du n° **18** correspondante, soit

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Cette quantité tend, en effet, vers zéro si l'on sait:

1°) que la série est à coefficients réels et non toujours divergente;

2°) que a_n a une limite inférieure finie;

3°) que $F(z)$ est régulière pour $\Re(z) \geqq 1$ et vérifie, dans les mêmes conditions, l'inégalité (1), B et γ étant deux constantes[185]).

E. Landau[190]) va plus loin encore et parvient à prouver l'existence de la limite en question, autrement dit à donner une réciproque à E′, dans des cas assez étendus où $F(z)$ a un pôle, les a_n étant positifs.*

*En supposant connue la région de régularité de $F(z)$ et sa croissance pour les valeurs imaginaires de z, on obtient ainsi, pour chaque valeur de r, une limite inférieure de α_r et, comme l'établit *H. Bohr*[181]), une valeur précise de la limite vers laquelle tendent les α_r pour $r = +\infty$.*

5°) *Les séries de Lejeune Dirichlet *à coefficients a_n positifs* fournissent également à *E. Landau*[191]) cette conclusion, analogue à celle obtenue dans le cas plus simple des séries de Maclaurin, que le point où la droite de convergence coupe l'axe réel est un point singulier. Dans le cas des coefficients positifs a_n, par conséquent, le fait que la fonction $F(z)$ est régulière pour toutes les valeurs de z telles que $\Re(z) > \alpha$, entraîne, comme pour les séries de Maclaurin, la convergence pour ces mêmes valeurs de z de la série (S), une fois reconnu, bien entendu, que cette série n'est pas partout divergente et que sa somme représente $F(z)$.*

6°) *Ces mêmes séries à coefficients positifs a_n vérifient, d'après *J. Hadamard*[192]) et *E. Landau*[193]), des inégalités permettant de limiter

189) *Rend Circ. mat. Palermo 26 (1908), p. 228; Primzahlen[133]) 1, p. 259.*

190) *Primzahlen[133]) 2, p. 874/9.*

191) *Math. Ann. 61 (1905), p. 536.*

192) *Nouv. Ann. math. (4) 4 (1904), p. 529.*

193) Rend. Circ. mat. Palermo 26 (1908), p. 185.

la partie réelle et la valeur absolue de

$$F(z + 2it),$$

(où z et t sont réels) en fonction de $F(z)$ et de $F(z + it)$.*

7°) *La proposition (2°) a permis à *E. Landau*[194]) de montrer par un exemple, contrairement à *E. Cahen*, que le produit de deux séries de Lejeune Dirichlet (non absolument convergentes) peut être une série de Lejeune Dirichlet divergente, même en des points intérieurs au domaine de convergence simple commun (et non situés sur la frontière de ce domaine).

Par contre un théorème de *T. J. Stieltjes*[195]) prouve que la série-produit converge (comme dans le cas de la règle classique de multiplication pour les séries de Maclaurin) si l'une au moins des séries-facteurs est absolument convergente. Mais, en outre, comme l'a montré *E. Landau*[196]), la limite de convergence[197]) de la série-produit peut, en général, être reculée au delà des régions de convergence absolue des séries-facteurs, soit jusqu'à

$$\alpha'' = \alpha + \frac{\tau\tau'}{\tau + \tau'},$$

---

194) *Rend. Circ. mat. Palermo 26 (1908), p. 264. Le produit des deux séries de Lejeune Dirichlet

$$f(1)e^{-\lambda_1 z} + f(2)e^{-\lambda_2 z} + \cdots + f(n)e^{-\lambda_n z} + \cdots\cdots$$
$$g(1)e^{-\lambda_1 z} + g(2)e^{-\lambda_2 z} + \cdots + g(n)e^{-\lambda_n z} + \cdots\cdots$$

est, par définition, la série

$$h(1)e^{-\nu_1 z} + h(2)e^{-\nu_2 z} + \cdots + h(n)e^{-\nu_n z} + \cdots\cdots,$$

où $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n, \ldots\ldots$ sont toutes les sommes différentes

$$\lambda_l + \lambda_m \qquad \begin{pmatrix} l = 1,\ 2,\ \ldots\ldots \\ m = 1,\ 2,\ \ldots\ldots \end{pmatrix}$$

rangées par ordre de grandeur croissante et où, pour chaque indice n

$$h(n) = \sum_{\lambda_l + \lambda_m = \nu_n} f(l)\, g(m).$$

Pour les séries (S'), la série ainsi obtenue est celle qui est définie par les formules (1) et (1bis) du n° **21**. Cf. *E. Landau*, Primzahlen[133]) 2, p. 750/75.*

195) *Nouv. Ann. math. (3) 6 (1887), p. 210. Voir *E. Landau*, Rendic. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 86.*

196) *Rend. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 111/7; Primzahlen[133]) 2, p. 758/62. Énoncé en partie, sans démonstration par *T. J. Stieltjes*, C. R. Acad. sc. Paris 101 (1885), p. 369; Nouv. Ann. math. (3) 6 (1887), p. 215.*

197) **E. Landau* [Primzahlen[133]) 2, p. 755] donne aussi un énoncé relatif au cas où l'on connaît pour les séries-facteurs deux limites de convergence différentes. Voir [Primzahlen[133]) 2, p. 760] une amélioration du résultat pour certains types de séries (S) auxquels appartiennent les séries (S'). Voir aussi [Primzahlen[133]) 2, p. 766] une autre méthode permettant de constater la convergence de la série-produit.*

soit, lorsque $\tau' = \tau$, jusqu'à

$$\alpha + \frac{\tau}{2},$$

en désignant par

$$\alpha_1 \quad \text{et} \quad \alpha_1'$$

les deux limites de convergence absolue, par α une limite de convergence simple commune et en posant

$$\tau = \alpha_1 - \alpha, \quad \tau' = \alpha_1' - \alpha.$$

D'autre part, d'après *H. Bohr*[198]) et *M. Riesz*[199]), le produit de deux séries (S') convergentes est toujours sommable du premier ordre, sauf peut-être sur la droite limite: cette dernière restriction est indispensable[199]). Elle disparaît, au contraire[200]), si l'on utilise un autre mode de sommation généralisée employé occasionnellement par *H. Bohr*[200]) et systématiquement par *M. Riesz*[199]).*

*La multiplication terme à terme, en la supposant légitime, des deux séries

$$\frac{a_1}{c_1^z} + \frac{a_2}{c_2^z} + \cdots + \frac{a_n}{c_n^z} + \cdots\cdots$$

$$\frac{b_1}{c_1^z} + \frac{b_2}{c_2^z} + \cdots + \frac{b_n}{c_n^z} + \cdots\cdots$$

donne, en désignant par $F(z)$ et $G(z)$ les sommes de ces deux séries,

$$\lim_{\tau=+\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{+\tau} F(z_1 + it)\, G(z_2 - it)\, dt = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{a_n b_n}{c_n^{z_1+z_2}}. \tag{2}$$

Cette égalité, établie par *J. Hadamard*[201]) pour le seul cas où les deux séries sont absolument convergentes, a été étendue[202]) par *E. Landau*[203])

---

198) *Nachr. Ges. Gött. 1909, p. 255 (prop. XIV).*

199) *C. R. Acad. sc. Paris 149 (1909), p. 20.*

200) **M. Riesz*, C. R. Acad. sc. Paris 148 (1909), p. 1658/60; *H. Bohr*, Nachr. Ges. Gött. 1909, p. 258; Diss. Copenhague 1908.*

201) Acta math. 22 (1898/9), p. 60/3.

202) *E. Landau*, Rend. Circ. mat. Palermo 26 (1908), p. 269.

203) *L'égalité du texte est liée, comme le remarque *E. Landau* [Rend. Circ. mat. Palermo 26 (1908), p. 264], à une expression du coefficient a_1 relative à la série (S') et différente de D savoir

$$a_1 = \lim_{\omega=+\infty} \left[\frac{1}{\omega} \int_{t=0}^{t=\omega} f(a+it)\, dt\right],$$

laquelle a été étendue par *H. Bohr* [Nachr. Ges. Gött. 1909, p. 254] aux cas où l'abscisse a n'appartient pas à la région de convergence mais à celle de sommabilité d'ordre r.*

et par *W. Schnee*[204]) à certains cas de convergence simple, à savoir ceux où

$$z_1 > \alpha, \quad z_2 > \alpha_1',$$

ceux où

$$z_1 > \alpha_1, \quad z_2 > \alpha$$

et même ceux où

$$z_1 > \alpha, \quad z_2 > \alpha, \quad \frac{z_1 - \alpha}{\tau} + \frac{z_2 - \alpha}{\tau'} > 1.*$$

*Enfin les propriétés de l'intégrale considérée d'autre part par *S. Pincherle*[205]) et *M. Lerch*[206])

$$\int\limits_{x=x_0}^{x=+\infty} \Phi(x) \cdot x^{-z-1} dx,$$

propriétés établies par *E. Phragmén*[207]) et par *E. Landau*[208]) pour la démonstration d'un théorème de *P. L. Čebyšëv*, et auxquelles d'autres ont été récemment ajoutées par *W. Schnee*[209]) et par *H. Bohr*[210]), doivent être mentionnées à côté des précédentes, étant données les relations étroites qui existent entre l'intégrale en question et les séries de Lejeune Dirichlet, en vertu de **C** et de **F**.*

*On peut aussi conclure des propriétés des séries de Lejeune Dirichlet à celles des séries de factorielles (cf. n° **1**). On constate, en effet[211]) que la série

$$\frac{a_1}{z(z+1)} + \frac{2!\, a_2}{z(z+1)(z+2)} + \cdots + \frac{n!\, a_n}{z(z+1)\cdots(z+n)} + \cdots\cdots$$

a [les valeurs $z = 0, -1, -2, \ldots, -n$ mises à part] même abscisse

---

204) *La formule de la note 203 rentre comme cas particulier dans une formule générale que *W. Schnee* [voir *E. Landau,* Primzahlen[133]) 2, p. 788] envisage pour chacun des a_m. C'est une expression du coefficient a_m relative à la série (S') et différente de **D**, à savoir

$$a_m = \lim_{\omega = +\infty} \left[\frac{1}{2\omega} \int\limits_{t=-\omega}^{t=+\omega} e^{\lambda_m t i} f(a + it)\, dt \right]$$

expression qui subsiste *uniformément* pour tous les nombres naturels m pourvu que a soit situé à l'intérieur de la bande de convergence.*

205) *Ann. Ec. Norm. (3) 22 (1905), p. 20/1.*

206) *Acta math. 27 (1903), p. 345.*

207) *C. R. Acad. sc. Paris 114 (1892), p. 337; Öfversigt Vetensk. Akad förhandl. (Stockholm) 58 (1901), p. 189.*

208) *Math. Ann. 61 (1905), p. 527/50; Rendic. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 137.*

209) *Rend. Circ. mat. Palermo 27 (1909), p. 87/116 (§ 4).*

210) *Overs. Selsk. Forhandl. (Bull. Acad. Copenhague) 1908, p. 213/32.*

211) **E. Landau*, Sitzgsb. Akad. München 36 (1906), p. 167, 194.*

de convergence et aussi[181]) même abscisse de sommabilité d'ordre r que la série

$$\frac{a_1}{1^z} + \frac{a_2}{2^z} + \cdots + \frac{a_n}{n^z} + \cdots\cdots,$$

tandis que la série

$$a_1 \frac{z-1}{1!} + a_2 \frac{(z-1)(z-2)}{2!} + \cdots + a_n \frac{(z-1)(z-2)\cdots(z-n)}{n!} + \cdots\cdots$$

a [les valeurs $z = 1, 2, \ldots, n$ mises à part] même abscisse de convergence et aussi de sommabilité d'ordre r que la série

$$-\frac{a_1}{1^z} + \frac{a_2}{2^z} - \cdots + (-1)^n \frac{a_n}{n^z} + \cdots\cdots{}^*$$

20. La fonction $\zeta(s)$ de Riemann. La plus simple des séries de Lejeune Dirichlet est la fonction $\zeta(s)$ qui représente la valeur commune des deux membres de l'identité (4) du n° **17**. Avec *G. Lejeune Dirichlet* on envisage, dans cette identité

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{(p)} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}},$$

s comme une variable. Cette quantité jouera, dans ce qui va suivre, le rôle de la variable z introduite dans les calculs précédents.

Chacun des deux membres de l'égalité de *L. Euler* représente alors une fonction de s ayant une valeur finie et déterminée pour chaque valeur complexe (réelle ou imaginaire) de s dont la partie réelle est plus grande que 1; pour chacune de ces valeurs de s l'égalité de *L. Euler* subsiste, en sorte que l'on a, en désignant par $\zeta(s)$ la fonction que l'on envisage,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{(p)} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}.$$

On a pris l'habitude de désigner cette fonction $\zeta(s)$ sous le nom de *fonction de Riemann*[212]) parce que *B. Riemann* l'a étudiée de très près ainsi que nous allons le voir aux n^{os} **22** et suivants.

21. Lien des fonctions arithmétiques usuelles avec la fonction de Riemann. Plusieurs fonctions arithmétiques (n^{os} **9** et **10**) sont

---

212) Les valeurs de $\zeta(s)$ pour $s = 2, 3, \ldots, 35$ ont été données par *A. M. Legendre* [Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes 2, Paris 1826, p. 432]. Ces valeurs ont été revisées et calculées jusqu'à $s = 70$ par *T. J. Stieltjes*, Acta math. 10 (1887), p. 299. Voir aussi *E. Cahen*, Thèse[140]), p. 39.

liées intimement[213]) avec la fonction $\zeta(s)$ de *B. Riemann*[214]). Soient $f(n)$, $g(n)$ deux fonctions arithmétiques quelconques de n et $h(n)$ la fonction définie au moyen de ces deux fonctions par la relation

$$(1) \qquad h(n) = \sum_{(d)} f(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right)$$

où la somme est étendue à tous les diviseurs d de n; sous des conditions de convergence à déterminer [voir n° **19**, 7°)] on démontre que l'on a, pour tout nombre naturel s,

$$(1\,\mathrm{bis}) \qquad \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{h(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{f(n)}{n^s} \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{g(n)}{n^s};$$

et de cette relation on conclut, en particularisant convenablement les deux fonctions $f(n)$ et $g(n)$, que l'on a

$$(2) \qquad \frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s},$$

$$(3) \qquad \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s},$$

$$(4) \qquad \zeta^2(s) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{t(n)}{n^s},$$

$$(5) \qquad \zeta(s)\,\zeta(s-1) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\int(n)}{n^s},$$

$$(6) \qquad \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}.$$

Il faut encore ajouter l'égalité

$$(7) \qquad (1-2^{1-s})\zeta(s) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^s}$$

souvent avantageuse en ce que le second membre converge pour $\Re(s) > 0$ et non plus seulement pour $\Re(s) > 1$.

---

213) Voir *R. Lipschitz,* C. R. Acad. sc. Paris 89 (1879), p. 985; *G. Cantor,* Math. Ann. 16 (1880), p. 583; *E. Cesàro,* Mém. Soc. sc. Liége (2) 10 (1883), mém. n° 6, note 7, p. 62; *E. Cahen*[140]), Thèse, p. 31/4.

214) *N. W. Bervi* [Math. Sbornik (recueil Soc. math. Moscou) 18 (1896), p. 519/85 [1894]] a précisé les questions générales dont on peut aborder l'étude au moyen des fonctions de la théorie des nombres.

Voir aussi *N. V. Bugajev,* Bull. sc. math. (1) 10 (1876), p. 13; Math. Sbornik [recueil Soc. math. Moscou] 13 (1886/8), p. 757/77 [1887]; C. R. Acad. sc. Paris 120 (1895), p. 432/4. Une liste des travaux de *N. V. Bugajev* se trouve dans *E. Landau,* Primzahlen[158]) 2, p. 912.

Pour établir l'avant-dernière formule on fait usage de la relation

$$\varphi(n) = \sum_{(d)} d \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right),$$

où la somme est étendue à tous les diviseurs d de n [cf. n° **11**].

L'égalité particulièrement importante (2) se généralise avec *L. Kronecker*[215]) à toute fonction f satisfaisant à la condition (2) du n° **17**. En posant

$$F(s) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

on a, moyennant cette condition,

$$\frac{1}{F(s)} = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \mu(n) \frac{f(n)}{n^s}.$$

22. Propriétés de $\zeta(s)$ démontrées par Riemann. Extension de sa définition à tout le plan. *B. Riemann*[216]) fait reposer toute la théorie des nombres premiers sur l'étude de la fonction $\zeta(s)$ ainsi introduite.

Cette fonction est, en effet, en relation avec les nombres premiers par l'intermédiaire de **C** et de **D**.

Comme on a, p désignant toujours les nombres premiers successifs,

$$(1) \qquad \log_e \zeta(s) = \sum_{(p)} \frac{1}{p^s} + \frac{1}{2} \sum_{(p)} \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{3} \sum_{(p)} \frac{1}{p^{3s}} + \cdots\cdots,$$

on voit que la proposition **C** donne la formule

$$\frac{\log_e \zeta(s)}{s} = \int_{x=+1}^{x=+\infty} \frac{f(x)}{x^{s+1}}\, dx;$$

la proposition **D** fait connaître la quantité

$$(2) \qquad f(x) = \Pi(x) + \tfrac{1}{2}\Pi\left(x^{\frac{1}{2}}\right) + \cdots\cdots = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n} \Pi\left(x^{\frac{1}{n}}\right)$$

par la formule

$$f(x) = \frac{i}{2\pi \log_e x} \int_{s=a-i\infty}^{s=a+i\infty} \frac{d}{ds}\left(\frac{\log_e \zeta(s)}{s}\right) x^s\, ds,$$

où l'on peut prendre pour a un nombre réel quelconque supérieur à 1, x étant supposé distinct des nombres premiers et de leurs puissances.

---

215) Zahlenth.[59]) 1, p. 264 (22ième leçon).

216) Werke[151]), (2e éd.) p. 145/55; trad. *L. Laugel*, p. 165/76.

Cette dernière restriction disparaît d'ailleurs si l'on adopte la convention faite au n° **18** sur l'équation (2) de ce numéro; il faut alors remplacer $\Pi(x)$ par une fonction $F(x)$ égale à $\Pi(x)$ pour x non égal à un nombre premier et à $\Pi(x) - \frac{1}{2}$, c'est-à-dire à

$$\frac{\Pi(x+0) + \Pi(x-0)}{2},$$

pour x égal à un nombre premier, par conséquent écrire

$$(2') \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n} F\left(x^{\frac{1}{n}}\right).$$

Pour entreprendre cette étude, *B. Riemann* commence par transformer la série qui définit $\zeta(s)$ en une intégrale définie par la formule F (n° **18**). La fonction $\Phi(x)$ correspondante étant alors égale à $\frac{1}{e^x - 1}$, on a

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx.$$

Cette définition de $\zeta(s)$ n'a, comme la première, de sens que pour $\Re(s) > 1$. Mais en employant non plus F mais F′, *B. Riemann* constate que:

α. La fonction $\zeta(s)$ existe dans tout le plan et est une fonction méromorphe.

β. Elle a un seul pôle simple $s = 1$ avec un résidu égal à l'unité.

Plus précisément on a, aux environs de $s = 1$,

$$(1) \quad \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + C + c_1(s-1) + c_2(s-1)^2 + \cdots + c_n(s-1)^n + \cdots,$$

où C n'est autre chose que la constante d'Euler[217])

$$C = \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x e^x}\right) dx = \lim_{n=+\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log_e n\right),$$

dont la valeur approchée est

$$C = 0{,}5772156649.$$

Différents procédés[218]) ont été indiqués depuis[219]) pour parvenir au

217) Au sujet de cette constante voir l'article II 5.

218) Voir surtout *Ch. J. de la Vallée Poussin*, Mém. couronnés et autres mém. Acad. Bruxelles in 8°, 53 (1895/6), mém. n° 6, p. 24/9. Consulter aussi Interméd. math. 1 (1894), p. 133; 2 (1895), p. 153, 346 [Question 245]; 8 (1901), p. 192 [Question 2156]; 11 (1904), p. 5/6, 108 [Questions 2712, 2713].

219) *A. Piltz*, Diss. Iéna 1884.

même résultat, c'est-à-dire pour prolonger analytiquement $\zeta(s)$. Celui de *J. L. W. V. Jensen*[220]) consiste dans l'usage d'une relation fonctionnelle entre les termes de la suite infinie

$$\zeta(s),\ \zeta(s+1),\ \ldots,\ \zeta(s+n),\ \ldots\ldots;$$

le principe ainsi appliqué est au fond celui de *A. Piltz*[219]).

J. Hadamard[221]) indique d'autres relations fonctionnelles analogues à celle de *J. L. W. V. Jensen*, mais présentant cette particularité de pouvoir servir à elles seules à la définition de la fonction en question.

23. Propriétés de $\zeta(s)$ démontrées par Riemann (suite). La définition de $\zeta(s)$ étant ainsi généralisée, on peut démontrer la proposition que voici:

γ. En désignant par ζ la *fonction de Riemann* et par Γ l'intégrale eulérienne de seconde espèce, on a la relation

$$\zeta(1-s) = \frac{2}{(2\pi)^s} \cos\frac{\pi s}{2}\,\Gamma(s)\,\zeta(s)$$

qui a lieu pour toute valeur complexe de s.

Cette relation revient à dire que l'expression

$$\zeta(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{1}{2}s}$$

ne change pas quand on y remplace s par $1-s$.

Ce fait a été signalé par *B. Riemann*[222]). *La même relation se trouve cependant déjà dans *L. Euler*[223]) qui opère sur la fonction (nº **21**, 7)

$$(1-2^{1-s})\zeta(s).^*$$

*D'autres formules dues à *L. Euler*[224]), *H. Kinkelin*[225]), *C. J. Malmsten*[226]) et *O. Schlömilch*[227])* et des formules analogues données plus tard par

220) C. R. Acad. sc. Paris 104 (1887), p. 1156.

221) *Bull. Soc. math. France 37 (1909), p. 59.*

222) Werke[151]), (2e éd.) p. 147; trad. *L. Laugel*, p. 167; *B. Riemann*[151]), Sur le nombre de nombres premiers, p. 9.

223) *Hist. Acad. Berlin 17 (1761), éd. 1768 [1749], p. 83/106; Novi Comm. Acad. Petrop. 17 (1772), éd. 1773, p. 173/204 [1772]. Cf. *E. Landau*, Bibl. math. (3) 7 (1906/7), p. 69/79.*

224) *Hist. Acad. Berlin 17 (1761), éd. 1768, p. 83/106.*

225) Progr. Bâle 1862.

226) *Theoremata quaedam nova de integralibus definitis, Upsal 1842, p. 23; J. reine angew. Math. 38 (1849), p. 17.*

227) *Archiv Math. Phys. (1) 12 (1849), p. 415; Z. Math. Phys. 3 (1858), p. 130 (Texte et notes 223, 224, 226, 227 de *G. Eneström*).*

O. Schlömilch[228]) pour d'autres fonctions, sont, comme la précédente, contenues (nos **28**, **31**) dans une formule générale de transformation[229]) que nous rencontrerons plus loin (no 28). **E. Landau*[230]) a groupé et classé les divers résultats obtenus dans cette voie.*

*L'identité (4) du no **17**, permet de démontrer la proposition:

δ. La fonction $\zeta(s)$ ne peut s'annuler pour $\Re(s) > 1$ ou, par conséquent, en vertu de γ, pour $\Re(s) < 0$.*

24. Propriétés non démontrées par Riemann. L'expression

$$\tfrac{1}{2}s\,(s-1)\,\zeta(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\pi^{-\frac{1}{2}s}$$

est une fonction transcendante entière de s qui ne change pas quand on y remplace s par $1-s$. Quand on y remplace s par

$$s = \tfrac{1}{2} + it$$

elle se transforme en une fonction paire de t que l'on désigne généralement[230a]) par

$$\xi(t).$$

Au sujet de cette fonction, *B. Riemann* a énoncé[231]), mais sans démonstration suffisante, trois propositions dont voici les deux premières:

ε. Quel que soit le nombre positif $\mathfrak{T}$ que l'on envisage, il y a approximativement le nombre

$$\frac{\mathfrak{T}}{2\pi}\left(\log_e \frac{\mathfrak{T}}{2\pi} - 1\right)$$

de racines de l'équation

$$\xi(t) = 0$$

dont la partie réelle est comprise entre 0 et $\mathfrak{T}$.

θ. Si l'on désigne par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \ldots\ldots$ celles des racines en nombre infini de l'équation

$$\xi(t) = 0$$

---

228) Ber. Ges. Lpz. 29 (1877), math. p. 106; Z. Math. Phys. 23 (1878), p. 135.

229) *R. Lipschitz*, J. reine angew. Math. 54 (1857), p. 313; 105 (1889), p. 127.

230) Bibl. math. (3) 7 (1906/7), p. 69; J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 64.

230a) *E. Landau* [Primzahlen[138]) 1, p. 287/8] désigne toutefois cette fonction par $\Xi(t)$ et réserve le symbole ξ à la fonction de s

$$\xi(s) = \tfrac{1}{2}s(s-1)\zeta(s)\Gamma(\tfrac{1}{2})\pi^{-\frac{1}{2}}s,$$

de sorte que dans la notation de *E. Landau* on a

$$\Xi(t) = \xi(\tfrac{1}{2} + it).$$

231) Werke[161]), (2e éd.), p. 148; trad. *L. Laugel*, p. 168.

dont la partie réelle est positive, on a

$$\xi(t) = \xi(0) \prod_{k=1}^{k=+\infty} \left(1 - \frac{t^2}{\alpha_k^2}\right).$$

25. Intervention de la théorie des fonctions entières. On est arrivé à démontrer ces deux propositions en employant les principes de la théorie des fonctions transcendantes entières, telle qu'elle a été fondée par les travaux de *H. Poincaré*, puis par ceux de *J. Hadamard*, de *E. Borel* et de leurs successeurs.

Cette théorie sera exposée dans un article spécial [cf. II 9]. Nous nous contenterons, pour l'intelligence du sujet, de donner un aperçu de celles des définitions et propositions sur lesquelles on s'appuie ici.

Rappelons tout d'abord que si

$$z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots\ldots$$

sont les zéros, en nombre infini, d'une fonction transcendante entière $f(z)$, rangés par ordre de valeurs absolues croissantes, en sorte que, en posant pour chaque indice ν

$$r_\nu = |z_\nu|,$$

on ait, pour chaque indice ν,

$$r_{\nu+1} \geqq r_\nu,$$

on peut, en appliquant le théorème connu de *K. Weierstrass*[232]) concernant toute fonction transcendante entière [II 8] et supposant $r_1 > 0$, mettre cette fonction sous la forme

$$f(z) = e^{\mathrm{P}(z)} \prod_{\nu=1}^{\nu=+\infty} \left\{ \left(1 - \frac{z}{z_\nu}\right) e^{\mathrm{Q}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)} \right\},$$

où les deux facteurs d'une même accolade sont inséparables et où $\mathrm{P}(z)$ désigne une fonction entière de z, $\mathrm{Q}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)$ une fonction rationnelle entière de $\frac{z}{z_\nu}$.

Si E est le plus petit nombre naturel pour lequel la série

$$\frac{1}{r_1^{\mathrm{E}+1}} + \frac{1}{r_2^{\mathrm{E}+1}} + \cdots + \frac{1}{r_\nu^{\mathrm{E}+1}} + \cdots\cdots$$

est convergente, on peut prendre

$$\mathrm{Q}\left(\frac{z}{z_\nu}\right) = \frac{z}{z_\nu} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{\mathrm{E}}\left(\frac{z}{z_\nu}\right)^{\mathrm{E}}.$$

S'il existe un pareil nombre E indépendant de ν et si, en outre,

232) Abh. Akad. Berlin 1876, math. p. 33; trad. par *E. Picard*, Ann. Ec. Norm. (2) 8 (1879), p. 128; Werke 2, Berlin 1895, p. 100.

$P(z)$ se réduit à un polynome de degré n, on dit avec *E. Laguerre*[233]) que la fonction est de *genre fini* et que ce genre est égal au plus grand des deux nombres E et n[234]).

On appelle, d'après *E. Borel*[235]), *ordre réel* d'une fonction transcendante entière le plus petit nombre réel ϱ tel que la série

$$\frac{1}{r_1^{\varrho+\delta}} + \frac{1}{r_2^{\varrho+\delta}} + \frac{1}{r_3^{\varrho+\delta}} + \cdots + \frac{1}{r_\nu^{\varrho+\delta}} + \cdots\cdots$$

converge, tandis que la série

$$\frac{1}{r_1^{\varrho-\delta}} + \frac{1}{r_2^{\varrho-\delta}} + \frac{1}{r_3^{\varrho-\delta}} + \cdots + \frac{1}{r_\nu^{\varrho-\delta}} + \cdots\cdots$$

diverge, quelque petit que soit fixé le nombre positif δ. Au lieu *d'ordre réel, H. von Schaper*[236]) dit *exposant de convergence*[237]).

Il est clair que si ϱ n'est pas entier

$$\mathrm{E} = [\varrho] + 1$$

tandis que, si ϱ est entier, E peut être égal à ϱ ou à $\varrho + 1$.

Les seules données qui intéressent le présent article concernent les fonctions transcendantes entières

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{m=0}^{m=+\infty} a_m z^m$$

de genre fini; *H. von Schaper*[236]) les désigne sous le nom de *fonctions de Hadamard*[237]).

Une fonction transcendante entière $f(z)$ rentrera nécessairement dans cette catégorie s'il existe un nombre α tel que, si petit qu'on fixe le nombre positif δ, l'inégalité

$$(2) \qquad |a_m| < \frac{1}{(m!)^{\alpha-\delta}}$$

soit vérifiée pour *tous* les nombres m supérieurs à un certain nombre déterminé m_δ (dépendant en général de δ). Si un tel nombre α existe on convient de le prendre aussi grand que possible: cela revient à

233) C. R. Acad. sc. Paris 94 (1882), p. 160, 635; 95 (1882), p. 828; Œuvres 1, Paris 1898, p. 167, 171, 174.

234) *H. von Schaper* [Diss. Göttingue 1898, p. 24] donne au genre le nom de *hauteur.*

235) Acta math. 20 (1896/7), p. 362; Leçons sur les fonctions entières, Paris 1900, p. 26.

236) Diss. Göttingue 1898, p. 35.

237) **G. Vivanti* [Teoria delle funzioni analitiche, Milan 1901; Theorie der eindeutigen analytischen Funktionen, traduit par *A. Gutzmer*, Leipzig 1906] a tenté d'introduire une terminologie uniforme pour les fonctions transcendantes entières.*

supposer qu'il y a des nombres m aussi grands que l'on veut vérifiant l'inégalité

(2′) $$|a_m| > \frac{1}{(m!)^{\alpha+\delta}}.$$

Le nombre α étant ainsi défini, si l'on pose

$$\omega = \frac{1}{\alpha}, \quad r = |z|,$$

le nombre ω est dit l'*ordre apparent*[238]) de $f(z)$.

On constate alors que l'inégalité

(3) $$|f(z)| < e^{r^{\omega+\delta}}$$

est vérifiée pour *toute* valeur de r dépassant un nombre déterminé (qui dépend en général de δ), tandis qu'il y a en dehors de tout cercle de rayon aussi grand que l'on veut, et ayant son centre à l'origine, des points z pour lesquels l'inégalité

(3′) $$|f(z)| > e^{r^{\omega-\delta}}$$

est vérifiée. C'est ce que l'on exprime en disant que toute fonction d'ordre apparent fini ω est du *type* e^{r^ω}.

La réciproque est vraie: si une fonction entière $f(z)$ est du type e^{r^ω}, ses coefficients vérifient tous, à partir d'un certain rang, l'inégalité (2) et une infinité d'entre eux vérifient l'inégalité (2′).

Cela posé, *J. Hadamard* démontre que le genre est lié à l'ordre ω précédemment défini par la relation

(4) $$\mathrm{E} \leqq \omega \leqq \mathrm{E} + 1,$$

formule qui lorsqu'on connaît ω fait connaître E exactement si ω n'est pas entier, avec une hésitation d'une unité au plus dans le cas contraire. On en conclut la relation due à *H. Poincaré*[239])

$$\lim_{m=+\infty} |a_m| (m!)^{\frac{1}{\mathrm{E}+1}} = 0$$

D'une manière plus précise, l'*ordre apparent* précédemment défini est égal au plus grand des nombres ϱ et n, en appelant ϱ l'*ordre réel.*

Les trois nombres α, E, ϱ sont donc intimement liés les uns aux autres. En particulier pour toute fonction de genre fini n'ayant qu'un nombre *fini* de zéros, ou encore n'ayant *aucun* zéro, on a $\mathrm{E} = \frac{1}{\alpha}$. Pour toute fonction de genre fini dans laquelle la fonction rationnelle entière $\mathrm{P}(z)$, qui figure dans sa représentation sous forme de produit infini, est égale à zéro, on a $\varrho = \frac{1}{\alpha}$.

238) L'attribution [*H. von Schaper*, Diss. Göttingue 1898, p. 12] du nom d'*ordre* au nombre α et non à ω ne nous paraît pas justifiée.

239) Bull. Soc. math. France 11 (1882/3), p. 144.

Il résulte de ce qui précède que l'on dispose de deux méthodes, en général d'une application simple, pour obtenir le genre d'une fonction entière: on peut le déduire soit de la loi de décroissance des coefficients [formules (2) et (2')], soit de la loi de croissance de la fonction [formules (3) et (3')].

Dans les applications qui vont suivre, ce genre sera toujours égal à 0 ou à 1.

On a donné à ces résultats une série de compléments [cf. II 9] lesquels n'ont pas encore reçu d'application au sujet actuel. Toutefois une proposition énoncée à titre hypothétique par *E. Borel*[240]) serait intéressante à établir (en précisant au besoin les restrictions qu'elle comporte) en ce que l'évaluation qui en résulterait est celle même qui est donnée par la proposition ε [n° 24].

En appliquant ses propres résultats à la fonction $\xi(t)$ de *B. Riemann* (n° 24), *J. Hadamard*[241]) a montré que le *genre* de cette fonction, envisagée comme une fonction de t^2, est *nul*, ce qui n'est autre chose que la proposition θ.

Il en conclut aussi l'inégalité

$$\frac{1}{7{,}56} < \overline{\lim_{k=+\infty}} \frac{1}{|\alpha_k|} \frac{\log_e k}{k} < \frac{e}{4},$$

ce qui est d'accord avec ε mais est beaucoup moins précis.

La proposition ε a été établie d'une manière complète par *H. von Mangoldt*[242]) par une méthode directe[243]) mais non indépendante de la théorie générale précédente car elle suppose θ.

H. von Mangoldt[242]) montre qu'il n'y a pas de racines de l'équation

$$\xi(t) = 0$$

dont la partie réelle soit comprise entre 0 et 12; et, si $\mathfrak{T}$ désigne un nombre quelconque supérieur à 12, il obtient, pour la différence entre le nombre des racines de l'équation $\xi(t) = 0$ dont la partie réelle est comprise entre 0 et $\mathfrak{T}$ et l'expression approchée

$$\frac{\mathfrak{T}}{2\pi}\left(\log_e \frac{\mathfrak{T}}{2\pi} - 1\right)$$

de ce nombre de racines donnée par *B. Riemann* (n° 24), une limite

240) Acta math. 20 (1896/7), p. 394.

241) J. math. pures appl. (4) 9 (1893), p. 210/5.

242) J. reine angew. Math. 114 (1895), p. 255; un extrait de ce mémoire de *H. von Mangoldt* avait déjà paru: Sitzgsb. Akad. Berlin 1894, p. 883. Il a été traduit par *L. Laugel*, Ann. Ec. Norm. sup. (3) 13 (1896), p. 61/78.

243) Math. Ann. 60 (1905), p. 1.

supérieure de l'ordre[243]) de $(\log_e \mathfrak{T})^2$ tout d'abord[244]), puis[245]) une autre de $\log_e \mathfrak{T}$[246]).

La démonstration de *H. von Mangoldt* a été reprise avec certaines simplifications par *E. Landau*[247]).

26. La réalité des zéros de $\xi(t)$. Une dernière assertion émise, d'ailleurs plus hypothétiquement, par *B. Riemann*, savoir:

η. Les racines de l'équation $\xi(t) = 0$ sont réelles,
autrement dit:
les racines imaginaires de l'équation $\zeta(s) = 0$ ont pour partie réelle $\frac{1}{2}$,

n'a pu au contraire être établie jusqu'ici.

T. J. Stieltjes[248]) en avait annoncé une démonstration fondée sur la convergence de la série (n° **21**)

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}, \tag{1}$$

mais cette démonstration est perdue et la propriété indiquée de la série (1) paraît d'ailleurs, dans l'état actuel de la science, au moins aussi difficile[249]) à établir que l'assertion η elle-même.

J. L. W. V. Jensen[250]) a, lui aussi, annoncé qu'il possède une

---

244) Cette première limite supérieure indiquée par *H. von Mangoldt* est

$$0{,}34\ (\log_e \mathfrak{T})^2 + 1{,}34 \log_e \mathfrak{T} + 2{,}58.$$

Dans le mémoire de *H. von Mangoldt* on lit 1,35 au lieu du nombre exact qui est 1,34; la correction est effectuée d'après une indication donnée par *H. von Mangoldt* à *P. Bachmann* dès 1895.

245) *H. von Mangoldt*, Math. Ann. 60 (1905), p. 1.

246) **A. Piltz* [Diss. Iéna 1884, p. 26 en note] dit que la limite supérieure de l'ordre de $\frac{1}{\mathfrak{T}}$ indiquée par *B. Riemann* [Werke[151]), (2e éd.) p. 148; trad. *L. Laugel*, p. 169] est évidemment un lapsus, la différence en question ne pouvant tendre vers zéro puisqu'un des termes est entier, l'autre variant continument. Mais *E. Landau* [Math. Ann. 66 (1909), p. 420, note 2] observe que cet ordre $\frac{1}{\mathfrak{T}}$ peut être interprété comme celui de l'erreur relative, en sorte que, d'après *B. Riemann*, la limite supérieure serait $\frac{1}{\mathfrak{T}}$ de l'ordre véritable $\mathfrak{T} \log_e \mathfrak{T}$, ce qui est parfaitement exact.*

247) Math. Ann. 66 (1909), p. 419/45.

248) C. R. Acad. sc. Paris 101 (1885), p. 368/70.

249) Elle est en relation avec les propositions énoncées par *F. Mertens* (n° **55**) sur la fonction sommatoire de $\mu(n)$ à savoir que $\sigma(n)$ est de l'ordre de $\sqrt{n}$.

250) Acta math. 22 (1898/9), p. 359.

autre démonstration de ce que les racines de l'équation $\xi(t) = 0$ sont toutes réelles, mais cette démonstration n'a jamais été publiée.

$_*$Par contre, *Ch. J. de la Vallée Poussin*[251]) et, par une voie plus simple [qui revient au fond à l'emploi des inégalités mentionnées n° **19**, 3°], *J. Hadamard*[252]), puis *Ch. J. de la Vallée Poussin* lui-même[253]), ont établi que

η'. L'équation
$$\zeta(s) = 0$$
qui, d'après δ [n° **23**], n'a aucune racine
$$s = \sigma + it$$
telle que
$$\sigma = \Re(s)$$
soit plus grand que 1, n'en a non plus aucune telle que $\sigma = 1$.*

$_*$On n'est pas, quant à présent, à même d'assigner à σ une limite supérieure plus petite que 1 et indépendante de t. Mais *Ch. J. de la Vallée Poussin*[254]) et *E. Landau*[255]) ont complété η' en montrant que

η''. Pour tout zéro imaginaire
$$s = \sigma + it$$
de $\zeta(s)$, on a
$$(1 - \sigma)\log_e |t| > a, \tag{2}$$
où a est une certaine constante positive.*

$_*$D'autre part, *F. Mertens*[256]) complète η' à un autre point de vue en prouvant que $\zeta(1 + it)$ est non seulement différent de zéro, mais supérieur en valeur absolue à une certaine fonction de t. La limite inférieure ainsi trouvée a été ensuite réduite par *E. Landau*[257]); on a[258])

η'''. Pour $|t| > 3$, la quantité
$$\frac{1}{\zeta(1 + it)}$$

---

251) $_*$Ann. Soc. scient. Bruxelles 20² (1895/6), p. 220/42 [1896].*

252) $_*$Bull. Soc. math. France 24 (1896), p. 200/2.*

253) $_*$Ann. Soc. scient. Bruxelles 20² (1895/6), p. 395/7 [1896].*

254) $_*$Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 59 (1899/1900), mém. n° 1, p. 7/29; *E. Landau*, Math. Ann. 66 (1909), p. 440; Rend. Circ. mat. Palermo 26 (1908), p. 250. Cf. *E. Landau*, Primzahlen[133]) 1, p. 321.*

255) $_*$*E. Landau* [J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 98] démontre une proposition analogue mais moins précise, par une voie plus élémentaire.*

256) $_*$Sitzgsb. Akad. Wien 107 IIᵃ (1898), p. 1431.*

257) $_*$J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 64; Math. Ann. 56 (1903), p. 645; Nouv. Ann. math. (4) 6 (1906), p. 135; Rend. Circ. mat. Palermo 26 (1908), p. 169; Primzahlen[133]) 1, p. 169/80, 324/8.*

258) $_*$Voir encore *E. Landau*, Sitzgsb. Akad. Wien 112 IIᵃ (1903), p. 537.*

est supérieure en valeur absolue à

$$a' \log_e |t| \log_e \log_e |t|,$$

où a' est une constante.*

*Enfin *E. Landau*[259]) montre que

η^{IV}. Pour $(1-\sigma)\log|t| \leqq a$ et $|t| > 3$, on a

$$\left|\frac{1}{\zeta(\sigma+it)}\right| < \log_e^{a''}|t|,$$

$$\left|\frac{\zeta'(\sigma+it)}{\zeta(\sigma+it)}\right| < a''' \log_e |t| \log_e \log_e |t|,$$

a, a', a''' désignant encore des constantes positives.

Les propositions η''' et η^{IV} de *E. Landau* résument tout ce que l'on connaît avec certitude relativement à l'assertion η de *B. Riemann.**

J. P. Gram[260]) a calculé numériquement dix couples de racines de $\xi(t) = 0$ et montré que ces dix premières racines sont bien réelles. La première de ces racines a pour valeur

$$14{,}134725\ldots\ldots$$

E. Lindelöf[261]) en appliquant la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin, comme l'avait d'ailleurs déjà fait avant lui *H. Kinkelin*[225]), calcule assez rapidement les racines réelles de $\zeta(s)$ et, par conséquent, les racines de $\xi(t)$. Il a appliqué sa méthode aux dix premières racines; les résultats obtenus sont conformes à ceux de *J. P. Gram.*

27. Limite supérieure de $|\zeta(s)|$. La connaissance d'une limite supérieure pour la valeur absolue de $\zeta(s)$ dans la bande

$$0 \leqq \Re(s) \leqq 1$$

ou au voisinage de cette bande[262]), sans avoir pour la théorie la même importance fondamentale que celle de la limite inférieure, est cependant nécessaire pour certaines recherches. Une telle limite supérieure a été obtenue par *Hj. Mellin*[263]), puis réduite par *E. Landau*[264]) qui

---

259) *Rend. Circ. mat. Palermo 26 (1908), p. 245.*

260) *Overs. Selsk. Forhandl. (Bull. Acad. Copenhague) 1902, p. 3/16.*

261) *Acta math. 27 (1903), p. 305.*

262) *Pour $\Re(s) > 1 + \varepsilon$, où ε est un nombre positif fixe quelconque, $\zeta(s)$ est évidemment fini et la limitation de $|\zeta(s)|$ pour $\Re(s) < -\varepsilon$ s'en déduit immédiatement en vertu de γ [n° 23].*

263) *Acta Soc. scient. Fennicae 29 (1902), n° 4 [1900], p. 48/9.*

264) *Bull. Soc. math. France 33 (1905), p. 229/41; Rend. Circ. mat. Palermo 24 (1907), p. 124.*

obtient pour $|\zeta(\sigma + it)|$ une limite supérieure de l'ordre de

$$t^{\frac{3}{4}(1-\sigma)}\sqrt{\log_e t} \qquad \text{pour } \tfrac{1}{2} \leqq \sigma < 1$$

et de l'ordre de

$$t^{\frac{1}{4}(2-\sigma)}\sqrt{\log_e t} \qquad \text{pour } 0 < \sigma \leqq \tfrac{1}{2}$$

en se servant d'un résultat relatif à la fonction arithmétique $t(n)$ obtenu par *G. Voronoï* (cf. n° **56**).

Enfin *E. Lindelöf*[265]) réduit encore cette limite à l'ordre de

$$t^{\frac{1-\sigma}{2}} \log_e t$$

par des considérations de théorie des fonctions, en particulier par l'application d'une inégalité relative aux fonctions analytiques établie par *E. Lindelöf* et *E. Phragmén*[266]).

Hj. Mellin[267]) obtient, d'autre part, la limite supérieure demandée sur la droite limite et au voisinage de cette droite.*

*Ajoutons que la série (4) du n° **17** qui représente $\zeta(s)$ est[268]) *divergente* sur la droite de convergence $\Re(s) = 1$, mais qu'il n'en est pas de même (cf. n° **51**) pour le produit du second membre, ni[269]) pour la série, primitive de $\zeta(s)$,

$$\int [\zeta(s) - 1]\, ds = \sum_{n=2}^{n=+\infty} \frac{1}{n^s \log_e n}.$$

D'ailleurs[268]) la série

$$\frac{1}{1^{1+it}} + \frac{1}{2^{1+it}} + \cdots + \frac{1}{n^{1+it}} + \cdots \cdot \cdot$$

fait néanmoins connaître $\zeta(1 + it)$ en ce sens qu'on a

$$\zeta(1 + it) = \lim_{m=+\infty} \left[\sum_{n=1}^{n=m} \frac{1}{n^{1+it}} + \frac{1}{it\, m^{it}}\right].^*$$

*La formule (2) du n° **19** et la formule correspondante[203]) pour le

265) *Bull. sc. math. (2) 32 (1908), p. 341.*

266) *Acta math. 31 (1908), p. 381/406, en partic. p. 382.*

267) *Acta Soc. scient. Fennicae 29 (1902), n° 4 [1900], p. 48/9.*

268) **H. Kinkelin*[225]), Progr. Bâle 1862, p. 4, 8. Voir *O. Stolz*, Vorles. über allgemeine Arith. **2**, Leipzig 1886, p. 226/30. Extension aux idéaux chez *E. Landau,* J. reine angew. Math. 125 (1903), p. 110.*

**M. Riesz* [C. R. Acad. sc. Paris 148 (1909), p. 1658] prouve que

$$[\zeta(s)]^\lambda$$

est développable en série convergente pour $\Re(s) = 1$, $\lambda < 1$ (sauf, bien entendu, pour $s = 1$ lorsque $\lambda > 0$) tandis que pour $\lambda > 1$ elle n'est même pas sommable au sens de *H. Bohr* (n° **19**, remarque 1°).*

269) **E. Landau,* Sitzgsb. Akad. Wien 115 II^a (1906), p. 616.*

calcul des coefficients d'une série de Lejeune Dirichlet donnent[270]) une suite de théorèmes concernant les valeurs moyennes de fonctions dépendant de $\zeta(s)$, sur des parallèles à l'axe purement imaginaire.*

28. **Séries analogues à $\zeta(s)$.** Une première généralisation de $\zeta(s)$ consiste à considérer la série

$$\text{(1)} \qquad \frac{1}{(b+a)^s} + \frac{1}{(b+2a)^s} + \cdots + \frac{1}{(b+na)^s} + \cdots\cdots$$

qui, pour $b=0$, $a=1$, donne $\zeta(s)$ et pour laquelle on démontre aisément les propriétés α et β [n° 23].

R. Lipschitz[271]) et *M. Lerch*[272]) ont même considéré la série plus générale obtenue en multipliant les termes de la série (1) par les puissances successives d'un nombre complexe (réel ou imaginaire) de valeur absolue égale ou inférieure à l'unité. Par diverses méthodes, par exemple en utilisant F et F' [n° 18], ils arrivent à démontrer pour cette série et, par conséquent pour (1), la propriété correspondant à γ [n° 23].

La fonction $\mathfrak{K}(w, x, s)$ ainsi envisagée par *M. Lerch* est définie par la somme de la série

$$\frac{1}{w^s} + \frac{e^{2i\pi x}}{(w+1)^s} + \frac{e^{4i\pi x}}{(w+2)^s} + \cdots + \frac{e^{2ni\pi x}}{(w+n)^s} + \cdots\cdots,$$

où x est un nombre réel positif plus petit que 1, ou encore un nombre complexe tel que la partie réelle de $\frac{x}{i}$ soit positive. Cette fonction

$$\mathfrak{K}(w, x, s) = \sum_{n=0}^{n=+\infty} \frac{e^{2i\pi x}}{(w+n)^s},$$

envisagée comme une fonction de s, est transcendante entière, même si x est réel, quoique, dans ce cas, la droite de convergence soit la droite

$$\Re(s) = 0.$$

**M. Lerch*[273]) a étendu la formule de *B. Riemann* à d'autres fonctions analogues à la fonction $\zeta(s)$, quoique plus générales. De même *P. Epstein*[274]). Ces recherches sont en relation avec l'étude des formes quadratiques[275]).*

270) *J. Hadamard*[201]), Acta math. 22 (1898/9), p. 55; *E. Landau*, Rend. Circ. mat. Palermo 26 (1908), p. 169/302; Primzahlen[188]) 2, p. 799/819.

271) J. reine angew. Math. 54 (1857), p. 313; 105 (1889), p. 127.

272) Acta math. 11 (1887/8), p. 19.

273) *Rozpravy české Akad. 1 (1892) II, mém. n° 27, p. 523 (mémoire plus détaillé publié sous le titre: Základové theorie Malmsténovských řad); 2 (1893) II, mém. n° 4; 3 (1894) II, mém. n° 28; 4 (1895) II, mém. n° 1; Sitzgsb. böhm. Ges. Prag 1893, mém. n° 24.*

274) Math. Ann. 56 (1903), p. 615.

275) Voir nos 32 et suivants.

On observera que la série

$$\frac{1}{(w+1)^s} + \frac{1}{(w+2)^s} + \cdots + \frac{1}{(w+k)^s} + \cdots\cdots$$

avait déjà été étudiée par *H. Kinkelin*[225]) sous le nom de *série harmonique*; elle a été ensuite étudiée à nouveau par *E. Schröder*[276]) qui a donné à la fonction définie par sa somme

$$\sum_{k=1}^{k=+\infty} \frac{1}{(w+k)^s}$$

le nom de *fonction de Bernoulli.*

29. Séries de Lejeune Dirichlet proprement dites. Les deux séries précédentes ne permettent pas directement l'application de l'identité d'Euler [n° **17**]. Mais la première d'entre elles conduit aux séries de Lejeune Dirichlet proprement dites auxquelles l'identité d'Euler s'applique.

Dans la relation (2) du n° **17** remplaçons en effet $f(n)$ par $\frac{f(n)}{n^s}$: cette relation et, par conséquent, l'identité (3) ne seront pas troublées [le cas de $\zeta(s)$ correspond à $f(n) = 1$].

Pour obtenir ses séries, *G. Lejeune Dirichlet*[277]) prend pour $f(n)$ un *caractère* relatif au module M, M désignant un nombre naturel. On désigne ainsi [I 16, **25**] une certaine quantité $\chi(n)$ qui est nulle toutes les fois que n n'est pas premier avec M et qui, dans le cas contraire, est un produit de certaines racines de l'unité $\omega, \omega', \ldots$ élevées à des puissances qui dépendent de n. Cette quantité possède la double propriété:

1°) de ne pas changer lorsqu'on augmente n d'un multiple de M,

2°) de vérifier la relation (2) du n° **17** savoir

$$\chi(n)\chi(n') = \chi(nn').$$

Il y a d'ailleurs, pour un même module M, plusieurs espèces de caractères relatif au module M, différant entre eux par le choix des racines $\omega, \omega', \ldots$; le nombre de ces caractères est égal à $\varphi(M)$, c'est-à-dire à *l'indicateur* [I 15, **2**] de M.

A chacun de ces caractères correspond une série de Lejeune Dirichlet

$$Z(s, \chi) = \sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \tag{1}$$

---

276) Progr. Zurich 1867.

277) Abh. Akad. Berlin 1837, math. p. 45; trad. par *O. Terquem*, J. math. pures appl. (1) 4 (1839), p. 393; Werke 1, Berlin 1889, p. 315; Zahlenth.[141]), (4e éd.) p. 324 (Suppl. VI). Voir aussi *C. J. Malmsten*, J. reine angew. Math. 38 (1849), p. 1.

qui, en vertu de la seconde propriété (2°) mentionnée à l'instant, vérifie l'identité (3) du n° **17** et est par conséquent égale au produit

$$(1') \qquad Z(s,\chi) = \prod_{(p)} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}$$

étendu à la suite des nombres premiers, $\chi(p)$ étant d'ailleurs nulle, en vertu de ce qui a été dit plus haut, pour les nombres premiers qui figurent dans M.

D'autre part, en vertu de la propriété (1°) des caractères, les séries de Lejeune Dirichlet se ramènent à la série (1) du n° **27**.

*Parmi les caractères relatifs à un module M, il faut mettre à part ceux que *Ch. J. de la Vallee Poussin*[278]) appelle les uns *incomplets*, les autres *impropres* et qui correspondent à certains cas où les racines de l'unité $\omega, \omega', \ldots$ ne sont pas toutes primitives pour leurs degrés respectifs: ils sont tels que les séries qui en dérivent se ramènent aisément à des séries de Lejeune Dirichlet relatives à des modules inférieurs à M (et diviseurs de M).

De ce nombre est, en particulier, le *caractère principal* qui correspond à

$$\omega = \omega' = \cdots = 1,$$

ce qui donne, par conséquent,

$$\chi(n) = 1$$

quel que soit n premier avec M. La série correspondante, une fois transformée en un produit de la forme (1'), ne diffère du produit qui définit $\zeta(s)$ que par suppression des facteurs premiers (en nombre fini) qui figurent dans M.

La série correspondant au caractère principal converge, comme $\zeta(s)$, pour $\Re(s) > 1$. Les autres séries de Lejeune Dirichlet convergent, quoique non absolument, pour $\Re(s) > 0$, grâce au fait que tout caractère non principal vérifie l'équation

$$\sum_{(n)} \chi(n) = 0$$

dans laquelle la somme est étendue à $\varphi(M)$ valeurs de n, premières à M et incongrues par rapport à M.*

Parmi les séries de Lejeune Dirichlet dont nous venons de parler figurent les séries de la forme

$$(2) \qquad \sum_{(n)} \left(\frac{M}{n}\right) \frac{1}{n^s},$$

278) Ann. Soc. scient. Bruxelles 20^2 (1895/6), p. 319 [1896].

où $\left(\frac{M}{n}\right)$ est le symbole de Legendre-Jacobi défini dans la théorie des restes quadratiques [I 15, **13**, **15**]. Ces séries qui ont été reprises par *H. Kinkelin*[279]) et par *A. Hurwitz*[280]) correspondent au cas où les racines $\omega, \omega', \ldots$ ont chacune l'une des valeurs *réelles* $+1$ ou -1.

Inversement, tout caractère *réel* (c'est-à-dire tel que $\chi(n)$ soit réel pour toute valeur de n) correspond à

$$\omega^2 = \omega'^2 = \cdots = 1$$

et la série qui en dérive peut se ramener à la série (2) où (sauf pour la série correspondant à l'un de ces caractères) M est remplacé par un de ses sous-multiples.

Les autres caractères, et par conséquent les autres séries (1), sont *imaginaires conjugués deux à deux.*

L'exemple le plus simple de séries de Lejeune Dirichlet *réelles* est fourni par la série de *O. Schlömilch*[281]) qui correspond à $M = 4$,

$$1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n-1)^s} + \cdots .^*$$

30. Applications aux progressions arithmétiques. *L. Euler*[282]) avait déjà montré que l'on peut déduire de l'égalité[283])

$$(3) \qquad \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{(p)} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

du n° **17** le théorème d'après lequel la suite naturelle des nombres contient une infinité de nombres premiers. Si, en effet, elle n'en contenait qu'un nombre fini, le produit qui figure dans le second membre de cette égalité resterait fini et déterminé quand $s > 1$ tend vers 1, tandis que la somme qui figure dans le premier membre augmenterait indéfiniment puisque pour $s = 1$ la série

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots .$$

est divergente[283a]).

279) Progr. Bâle 1862, p. 19.

280) Z. Math. Phys. 27 (1882), p. 86.

281) Archiv Math. Phys. (1) 12 (1849), p. 415; Z. Math. Phys. 3 (1858), p. 130.

282) Introd.[1]) 1, p. 235; trad. *J. B. Labey* 1, p. 218.

283) $_*$*L. Euler* [Comm. Acad. Petrop. 9 (1737), éd. 1744, p. 172/4 [1737]] s'était servi de cette égalité pour démontrer que le nombre des nombres premiers est plus grand que le nombre des nombres carrés, d'où il résulte immédiatement que le nombre des nombres premiers est infini (Note de *G. Eneström*).*

283a) $_*$*G. Foussereau* [Ann. Ec. Norm. (3) 9 (1892), p. 31/4] tire de cette même égalité (3) une première indication sur la distribution des nombres premiers.*

En appliquant de même **A**″ [nº 18] aux séries qui viennent d'être définies, *G. Lejeune Dirichlet*[284]) a démontré que toute progression arithmétique

$$Mx + N,$$

où M et N sont premiers entre eux[285]), contient une infinité de nombres premiers[286]).

---

284) Abh. Akad. Berlin 1837, math. p. 45; trad. par *O. Terquem*, J. math. pures appl. (1) 4 (1839), p. 393; Werke 1, Berlin 1889, p. 315.

A. M. Legendre [Hist. Acad. sc. Paris 1785, M. p. 465/559] avait *énoncé* ce théorème en 1788 et il avait essayé [Essai sur la théorie des nombres (2ᵉ éd.), Paris 1808, p. 404] de le démontrer par un procédé d'induction dont la fausseté a été établie par *A. Dupré* [Examen d'une proposition de Legendre relative à la théorie des nombres, Paris 1859; C. R. Acad. sc. Paris 48 (1859), p. 487]. *C. Moreau* [Nouv. Ann. math. (2) 12 (1873), p. 323/4] et *A. Piltz* [Diss. Iéna 1884] ont démontré la fausseté du procédé de *A. M. Legendre* sans connaître les travaux de *A. Dupré.*

**G. Vacca* [Bolletino bibl. storia mat. 9 (1906), p. 49] a remarqué que le théorème dont il s'agit a été énoncé avant *G. Lejeune Dirichlet* par *L. Euler,* Opusc. analytica 2, Sᵗ Pétersbourg 1785, p. 241 [1775]; Commentat. arith. 2, Sᵗ Pétersbourg 1849, p. 116/26 (Note de *G. Loria*).*

*Il convient toutefois d'observer que dans ces recherches de *L. Euler* on *suppose* essentiellement que la suite dont il s'agit contient au moins *un* nombre premier; *L. Euler* semble donc avancer ici que chaque suite infinie

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots\ldots$$

du type envisagé contenant un nombre premier en contient une infinité; mais on ne voit pas qu'il se soit préoccupé de savoir si effectivement *chaque* progression arithmétique

$$Mx + N$$

(où M et N sont premiers entre eux) en contient *un* (Note de *G. Eneström*).*

285) *V. A. Lebesgue* [J. math. pures appl. (1) 8 (1843), p. 51; Exercices d'Analyse numérique, Paris 1859, p. 91] a démontré arithmétiquement le théorème pour la progression

$$2kx + 1,$$

où k est un nombre premier.

D'ailleurs quel que soit le nombre entier k le théorème ainsi particularisé se démontre par voie purement arithmétique.

Voir au sujet de ce théorème *J. A. Serret,* J. math. pures appl. (1) 17 (1852), p. 186 [1851]; *A. Genocchi,* Ann. mat. pura appl. (2) 2 (1868/9), p. 256; Atti Accad. Torino 11 (1875/6), p. 929; C. R. Acad. sc. Paris 98 (1884), p. 411; *A. Lefébure,* C. R. Acad. sc. Paris 98 (1884), p. 293; *A. S. Bang,* Tidsskrift math. Köbenhavn (Copenhague) (5) 4 (1886), p. 70/80, 130/7; *E. Wendt,* J. reine angew. Math. 115 (1895), p. 85; *K. Zsigmondy,* Monatsh. Math. Phys. 3 (1892), p. 265; *Michael Bauer,* Mathematikai és Physikai lapok (Budapest) 14 (1905), p. 313; trad. allem. J. reine angew. Math. 131 (1906), p. 265. Voir encore *E. Lucas,* Amer. J. math. 1 (1878), p. 291.

286) *G. Lejeune Dirichlet* a aussi démontré le théorème pour les progressions à éléments complexes [Abh. Akad. Berlin 1841, math. p. 141; Werke 1, Berlin 1889, p. 509].

Toutefois, pour arriver à ce résultat, une difficulté nouvelle est à surmonter. Il faut établir que, pour $s = 1$, les séries

$$Z[s, \chi(n)]$$

correspondant aux caractères non principaux, c'est-à-dire celles qui restent finies, sont en outre *différentes de zéro*. C'est ce que *G. Lejeune Dirichlet*[287]) fait aisément pour les séries correspondant aux caractères imaginaires; pour les séries réelles il part de ce que celles-ci peuvent se ramener à la série (2) du n° **29** et applique les résultats obtenus par lui dans la théorie des formes quadratiques (n° **33**). Des démonstrations plus directes ont été indiquées d'abord par *F. Mertens*[288]) à l'aide de théorèmes élémentaires sur la multiplication des séries[289]); puis par *Ch. J. de la Vallée Poussin*[290]), *H. Teege*[291]) et *E. Landau*[292]).

---

287) Abh. Akad. Berlin 1837, math. p. 45, 81 (§ 4, 10); J. math. pures appl. (1) 4 (1839), p. 402, 417; Werke 1, Berlin 1889, p. 324, 339.

288) Sitzgsb. Akad. Wien 104 IIa (1895), p. 1093, 1158; 106 IIa (1897), p. 254; 108 IIa (1899), p. 32; J. reine angew. Math. 117 (1897), p. 169.

289) Voir encore la démonstration de *F. Mertens* [Sitzgsb. Akad. Wien 109 IIa (1900), p. 415] concernant le nombre infini de nombres premiers dans les formes binaires quadratiques.

G. Torelli* [Atti Accad. sc. fis. mat. [Naples] (2) 11 (1899/1902), mém. n° 1, p. 155 [1900]; publié aussi comme tirage à part sous le titre: Sulla totalità dei numeri primi fino ad un limite assegnato, Naples 1901, p. 155] et plusieurs autres auteurs avaient tenté de montrer qu'en outre l'égalité (3) du n° **17, dans laquelle on prend

$$f(n) = \frac{\chi(n)}{n^s},$$

subsiste pour $s = 1$ en sorte que l'on a

$$\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\chi(n)}{n} = \prod_{(p)} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p}}. \tag{1}$$

Mais cette égalité (1) n'a été démontrée en toute rigueur que par *E. Landau* [Math. Ann. 61 (1905), p. 532; Primzahlen[158]) 1, p. 449].

Bien entendu, la convergence du produit infini qui figure au second membre n'étant pas absolue, on doit spécifier l'ordre (évidemment l'ordre naturel) dans lequel les nombres premiers qui interviennent doivent être rangés.

Le raisonnement de *G. Torelli*, s'il était correct, prouverait même la convergence du produit (1') et son égalité à la série (1) pour $\Re(s) > \frac{1}{2}$, proposition qui a été quelquefois employée, à tort dans l'état actuel de la science.*

290) Mém. couronnés et autres mém. Acad. Belgique in 8°, 53 (1895/6), p. 24/9; plus complet et précisé: Ann. Soc. scient. Bruxelles 20² (1895/6), p. 281 [1896]; 21² (1896/7), p. 251.

291) Mitt. math. Ges. Hamburg 4, n° 1 (1901), p. 1.

F. Mertens n'a pas seulement simplifié les démonstrations de *G. Lejeune Dirichlet*; il a aussi complété, en le précisant conformément à la doctrine de *L. Kronecker* (I 3, **10**), le théorème d'après lequel toute progression arithmétique contient une infinité de nombres premiers quand le premier terme et la raison sont premiers entre eux: il a, en effet, non seulement montré qu'à chaque terme de rang donné d'une progression arithmétique donnée (dont le premier terme et la raison sont premiers entre eux) correspond un intervalle tel que le nombre premier immédiatement supérieur au terme de rang donné soit compris dans cet intervalle, mais il a, en outre, donné un procédé permettant de fixer, au moyen d'un nombre fini d'opérations, cet intervalle [dans lequel se trouve donc *au moins un* nombre premier[293]] contenu dans la progression. C'est d'ailleurs ce qu'avait fait *L. Kronecker*[294] lui même dans son enseignement; mais la limite de *F. Mertens*, également obtenue sans le secours de propriétés de $Z(s, \chi)$ autres que celles qu'avait établies *G. Lejeune Dirichlet*[295], est plus avantageuse[296].

31. Extension des propriétés de $\zeta(s)$ aux séries précédentes. Pour établir l'existence d'une infinité de nombres premiers dans la progression arithmétique, les propriétés les plus immédiates des séries $Z(s, \chi)$ suffisent en y adjoignant l'inégalité

$$Z(1, \chi) \gtrless 0.$$

Pour obtenir les lois asymptotiques de fréquence de ces nombres premiers dont il sera question plus loin, il faut étendre à ces séries les propriétés précédemment indiquées de $\zeta(s)$.

Cette extension n'offre d'ailleurs aucune difficulté, les séries $Z(s, \chi)$ se ramenant à la série (1) du n° **28**. La propriété correspondant à la relation γ [du n° **23**], telle qu'elle résulte des recherches de *H. Kinkelin*[297], *C. J. Malmsten*[298], *R. Lipschitz*[299] et *M. Lerch*[300], complétées

292) Sitzgsb. Akad. Berlin 1906, p. 214; Rend. Circ. mat. Palermo 26 (1908), p. 297. Cf. *E. Landau*, Primzahlen[133] 1, p. 424/35.

293) Sitzgsb. Akad. Wien 106 IIª (1897), p. 254.

294) Zahlenth.[59] 1, p. 480/96.

295) Pour les progressions arithmétiques à termes complexes, voir *F. Mertens*, Sitzgsb. Akad. Wien 108 IIª (1899), p. 517.

296) *Les principes de la théorie des idéaux fournissent de l'inégalité $Z(1, \chi) \gtrless 0$ une démonstration extrêmement simple [*R. Dedekind*, dans *G. Lejeune Dirichlet*, Zahlenth.[141], (4ᵉ éd.) p. 625]. De tels principes intervenant d'une manière très naturelle ici, la démonstration ainsi obtenue est, sinon aussi élémentaire, du moins aussi directe qu'on peut le désirer (Note de *E. Maillet*).*

et simplifiées par *J. Hadamard*[301]), consiste en ce que, à des facteurs de forme connue près, une série $Z(s, \chi)$ est changée, par le changement de s en $1-s$, en la série conjuguée (qui coïncide avec elle s'il s'agit d'une série réelle).

*La propriété correspondant à θ [n° **24**] s'étend d'elle-même à la série (1) du n° **28** et, par conséquent, aux séries de Lejeune Dirichlet[302]). L'extension de ε a été faite par *E. Landau*[303]), celle de η' par *J. Hadamard*[304]) et *Ch. J. de la Vallée Poussin*[305]), celle de η'', η''', η^{IV} par *E. Landau*[306]).*

32. Etude analytique des formes quadratiques. *G. Lejeune Dirichlet* a montré que l'on peut étudier les propriétés des formes quadratiques en prenant comme point de départ une double évaluation du nombre des nombres naturels représentables par les formes binaires proprement primitives

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

de déterminant donné (cf. I 16, **13**)

$$\Delta = b^2 - ac.$$

Soit, pour des valeurs entières de x, y que l'on se réserve de préciser, $\mathrm{N}(m)$ le nombre de représentations du nombre naturel m par la forme binaire quadratique proprement primitive

$$\Phi_i = a_i x^2 + 2b_i xy + c_i y^2$$

de déterminant

$$\Delta = b_i^2 - a_i c_i.$$

Quelle que soit la fonction Ψ que l'on envisage, on a toujours une

297) Progr. Bâle 1862.

298) *C. J. Malmsten*[226]), J. reine angew. Math. 38 (1849), p. 1.

299) J. reine angew. Math. 105 (1889), p. 127.

300) Acta math. 11 (1887/8), p. 19.

301) Bull. Soc. math. France 24 (1896), p. 203/9; Procès-verbaux Soc. sciences Bordeaux 1896/7, p. 41/5. Cf. *E. Landau*, Primzahlen[138]) 1, p. 483/98.

302) L'énoncé est le même que celui de la proposition θ lorsqu'on peut introduire la variable t^2 [n° **24**] ce à quoi on peut parvenir pour une série de Lejeune Dirichlet réelle ou pour le produit de deux séries de Lejeune Dirichlet conjuguées.

Si l'on garde la variable s, les séries considérées dans ce n° **30** sont par rapport à cette variable s, de genre *un*.

303) *Math. Ann. 66 (1909), p. 435/40.*

304) *Bull. Soc. math. France 24 (1896), p. 199/220.*

305) *Ann. Soc. scient. Bruxelles 20² (1895/6), p. 281/397 [1896].*

306) *Sitzgsb. Akad. Wien 117 IIª (1908), p. 1095.*

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.

ÉLÉMENTS
DE LA
THÉORIE DES NOMBRES

CONGRUENCES. FORMES QUADRATIQUES. NOMBRES INCOMMENSURABLES. QUESTIONS DIVERSES.

Par É. CAHEN,
Ancien Élève de l'École Normale supérieure,
Professeur de Mathématiques spéciales au Collège Rollin.

UN VOLUME GRAND IN-8 DE VIII-403 PAGES; 1900.......... 12 FR.

Préface.

L'Ouvrage que nous offrons ici au public a pour but de combler une lacune singulière. Il n'existe, en effet, aucun Traité moderne, français, de la Théorie des nombres. Et cependant, tout le monde sait l'extrême importance de cette Théorie, base de toutes les Mathématiques, et dont il faut absolument connaître les principaux résultats pour entreprendre une recherche d'ordre tant soit peu élevé....

La première difficulté qu'éprouve l'Auteur d'une Théorie des nombres, c'est de délimiter son sujet. Qu'est-ce, en effet, que la Théorie des nombres? Il semble d'abord que ce soit tout simplement la Théorie des *nombres entiers*. Mais cette définition est trop vaste. En effet, la notion de nombre entier suffit pour donner la définition des nombres fractionnaires et incommensurables. Il faut donc se restreindre et dire que la Théorie des nombres est la théorie des nombres entiers, *en tant seulement qu'ils sont entiers*. Mais il est évident alors que la Théorie des nombres fractionnaires ou incommensurables, en tant qu'ils sont fractionnaires ou incommensurables, est étroitement liée à la précédente. En fait, il est pratiquement impossible d'étudier l'une de ces Théories indépendamment des deux autres....

En résumé, la Théorie des nombres étudie les propriétés des nombres, en tant que ces nombres sont *entiers*, *fractionnaires ou incommensurables*. Elle cherche à distinguer ces nombres, à les classer, à étudier leurs propriétés particulières. Mais les propriétés qui appartiennent à tous les nombres, par exemple celles qui constituent le calcul algébrique et toutes ses conséquences, échappent à la Théorie des nombres....

Cet Ouvrage contient sous forme de Notes l'exposé de quelques questions particulièrement importantes ou intéressantes, et qui ne rentrent point dans le cadre précédent.

Telles sont les matières qui nous ont paru devoir entrer dans les *Éléments de la Théorie des nombres*. Nous réservons pour le Traité plus complet, que nous aurons peut-être le plaisir de publier un jour, des matières plus difficiles et qui d'ailleurs, étant encore l'objet des travaux de nombreux géometres, ne présentent pas ce caractère définitif que doit avoir un Traité didactique.

L'Ouvrage se termine par des Tables numériques : Tables de nombres premiers, de racines primitives, d'indices, de diviseurs linéaires de formes quadratiques.

Ne voulant pas allonger inutilement, nous avons passé rapidement sur les théories élémentaires ou sur celles développées dans d'autres Ouvrages; par exemple, sur les premières propriétés des nombres entiers et sur la définition des nombres incommensurables. Nous ne pouvions les passer complètement sous silence, sans laisser une lacune dans l'Ouvrage. Nous avons d'ailleurs, en cela, suivi l'exemple des plus illustres géomètres, Legendre, Lejeune-Dirichlet, etc., qui, dans leurs Théories des nombres, n'ont pas jugé indigne d'eux de commencer au début même, à la définition du nombre entier....

Nous avons, dans toutes les questions, donné des exemples numériques. Ceci nous semble d'une grande importance. Il ne suffit pas de démontrer qu'un nombre existe, il faut savoir le calculer.

Tous ces calculs exigent l'emploi des Tables que nous avons placées à la fin du Volume.

En publiant ce Traité, nous avons pensé être utile à tous les étudiants en Mathématiques, à tous ceux qui, ayant besoin de la Théorie des nombres, sont obligés actuellement d'aller la chercher dans des Ouvrages étrangers qu'ils ne lisent souvent que difficilement. Peut-être aussi intéresserons-nous ce que nous appellerons les *mathématiciens amateurs*. Nous voulons dire ceux, officiers, ingénieurs, etc.,qui, ayant une instruction solide et le goût de la Science mathématique, prennent plaisir à s'en occuper, dans les loisirs que leur laisse leur profession. A ceux-là, la Théorie des nombres, plus difficile peut-être, mais exigeant moins d'études préalables que la plupart des autres Théories modernes, réservera de grandes jouissances. On sait, en effet, l'attrait particulier qu'exerce cette Science. L'Auteur serait heureux s'il parvenait à procurer, à ceux qui liront cet Ouvrage, un plaisir égal à celui qu'il a éprouvé à le composer.

Table des matières.

Symbole de Jacobi. Résolution de la congruence du deuxième degré à une inconnue. — CHAP. V. *Les nombres incommensurables.* Définition des nombres incommensurables. Opérations sur ces nombres. Développement des nombres incommensurables en fractions continues. Distinction entre les nombres commensurables et les incommensurables. Recherche des racines commensurables des équations algébriques. Nombres algébriques. Théorème de Liouville. Classification des nombres incommensurables. Nombres algébriques du second degré. — CHAP. VI. *Les formes quadratiques binaires.* Formes quadratiques binaires. Formes contenues l'une dans l'autre. Notions sur les substitutions linéaires à coefficients entiers. Substitutions modulaires. Groupes de substitutions. Congruences de substitutions. Formes équivalentes. Classes de formes. Résolution des trois problèmes du n° 305 pour les formes à discriminant positif. Equation de Pell pour un discriminant positif. Résolution des problèmes du n° 305 pour les formes à discriminant négatif. Equation de Pell pour un discriminant négatif. Recherche des nombres représentables par une forme. Analyse indéterminée du second degré. Réduction des formes quadratiques à des formes linéaires.

Notes. Sur les différents systèmes de numération. — Sur les nombres premiers. — Sur la décomposition des nombres en facteurs premiers. — Suites de Brocot et de Farey. — Sur le calcul des racines primitives des nombres premiers. — Sur la fraction approchant le plus d'un nombre a et dont le dénominateur est plus petit qu'un entier m. — Sur le groupe modulaire. — Sur les fonctions numériques. — Sur les nombres entiers imaginaires.

Tables. Table des nombres premiers de 1 à 10000. — Table des racines primitives et des indices pour les nombres premiers de 1 à 200. — Table des formes linéaires des facteurs impairs des formes quadratiques $x^2 + Dy^2$ de $D = 1$ à $D = 101$. — Table des formes linéaires des facteurs impairs des formes quadratiques $x^2 - \Delta y^2$ de $\Delta = 2$ à $\Delta = 101$.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS,
QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

Envoi franco dans toute l'Union postale contre mandat-poste ou valeur sur Paris.

COURS DE GÉOMÉTRIE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES.

LEÇONS
SUR LES
SYSTÈMES ORTHOGONAUX
ET LES COORDONNÉES CURVILIGNES,

Par G. DARBOUX,
Membre de l'Institut, Doyen de la Faculté des Sciences,
Professeur de Géométrie supérieure à l'Université de Paris.

DEUX VOLUMES GRAND IN-8, SE VENDANT SÉPARÉMENT :

Tome I : Volume de IV-338 pages; 1898.................. **10 fr.**
Tome II.................................... (*En préparation.*)

Préface du Tome I.

L'Ouvrage dont je publie aujourd'hui le premier Volume est consacré à l'exposition d'une théorie qui trouve son origine dans les travaux de Lamé, mais qui, dans ces derniers temps, a été l'objet d'un assez grand nombre de recherches.

Dans les *Leçons sur la théorie des surfaces*, j'avais déjà fait connaître, d'une manière incidente, différentes propriétés des systèmes triples orthogonaux et des coordonnées curvilignes; mais j'avais réservé le développement régulier et systématique des théories qui se rattachent à ce beau sujet pour le nouveau Traité dont je commence aujourd'hui la publication.

Extrait de la Table des Matières du Tome I.

34588 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55

INTRODUCTION

A LA

THÉORIE DES NOMBRES TRANSCENDANTS

ET DES

PROPRIÉTÉS ARITHMÉTIQUES

DES FONCTIONS,

PAR

EDMOND MAILLET,

Ingénieur des Ponts et Chaussées, Répétiteur à l'École Polytechnique.

GRAND IN-8 (25 × 16) DE V–275 PAGES; 1906.... .... 12 FR.

Extrait de la Préface.

Dans cet Ouvrage d'Arithmétique, j'ai cherché à exposer, sous une forme aussi simple que possible, soit certains résultats connus, soit des résultats nouveaux relatifs à la théorie des nombres transcendants, c'est-à-dire des nombres qui ne sont racines d'aucune équation algébrique à coefficients entiers. J'espère avoir pu, en ne donnant cependant que des propriétés en grande partie nouvelles dans la forme ou dans le fond, rendre mon travail presque entièrement accessible aux étudiants. Une partie peut être lue par un élève de Mathématiques spéciales, le tout par un polytechnicien ou un licencié ès sciences mathématiques.

Pour ne pas faire un Ouvrage trop volumineux, je me suis dispensé de traiter en détail bien des questions qui appellent des recherches plus étendues ou qui ont été approfondies ailleurs. Afin que l'on puisse se mettre au courant de la littérature du sujet, si on le désire, ce qui n'est pas nécessaire pour la lecture de l'Ouvrage, j'ai ajouté un index bibliographique. Il est court, car l'étude des nombres transcendants est un sujet presque entièrement neuf, où il y a d'autre part beaucoup à faire.

Comme les matières de cette Introduction se rattachent par plus d'un point à la théorie des fonctions entières, j'ai complété l'index bibliographique par des renseignements très sommaires suffisants pour permettre au lecteur d'aborder cette dernière; enfin, j'y ai signalé quelques Mémoires relatifs aux fonctions transcendantes, qui présentent certaines analogies avec les nombres transcendants.

Table des Matières.

38821 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS, 55, quai des Grands Augustins.

tonées. **Remarques sur le théorème de M. Sturm.** Sur *la décomposition* d'un nombre en quatre carrés. Remarques sur un Mémoire de M. Cayley relatif aux déterminants gauches. Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées. Sur le nombre des racines d'une *équation* algébrique comprises entre des limites données. Sur le nombre limité d'irrationnalités auxquelles se réduisent les racines des équations à coefficients entiers complexes d'un degré et d'un discriminant donnés. Sur l'invariabilité du nombre des carres positifs et des carrés négatifs dans la transformation des polynomes homogenes du second degré. Sur les formes cubiques à deux indéterminées. Lettre à Cayley sur les formes cubiques. Extrait d'une Lettre à J.-J. Sylvester. Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes. Remarque sur un théorème de Cauchy. Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques.

Extrait de l'Avertissement du Tome II.

Comme pour le premier Volume, nous suivons à peu près dans le Tome II l'ordre chronologique. Les Mémoires ici reproduits vont de 1858 à 1872; nous y avons joint des Notes publiées par Hermite dans différents Ouvrages, quelques pages de son *Cours d'Analyse* de l'École Polytechnique, et une Lettre de M. Tannery se rapportant aux fonctions modulaires.

Table des Matières du Tome II.

42682 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Les théories générales, pour prendre dans la Science un droit de cité définitif, ont le plus souvent besoin de s'illustrer par des applications particulières. Dans plusieurs domaines, celles-ci ne sont pas toujours faciles à trouver, et l'on pourrait citer, dans les Mathématiques modernes, plus d'une théorie confinée, si j'ose le dire, dans sa trop grande généralité : au point de vue artistique, qui joue un rôle capital dans les Mathématiques pures, rien n'est plus satisfaisant que le développement de ces grandes théories; cependant de bons esprits regrettent cette tendance, qui a peut-être ses dangers. On ne peut, pour Galois, émettre un pareil regret; la résolution algébrique des équations lui a fourni, dès le début, un champ particulier d'applications où le suivirent depuis de nombreux géomètres, parmi lesquels il faut citer au premier rang M. Camille Jordan.

Les travaux de Galois, sur les équations algébriques, ont rendu son nom célèbre, mais il semble qu'il avait fait, en Analyse, des découvertes au moins aussi importantes. On a la conviction qu'il était en possession des résultats les plus essentiels sur les intégrales abéliennes que Riemann devait obtenir vingt-cinq ans plus tard. Nous ne voyons pas sans étonnement Galois parler des périodes d'une intégrale abélienne relative à une fonction algébrique quelconque : pour les intégrales hyperelliptiques, nous n'avons aucune difficulté à comprendre ce qu'il entend par *période*, mais il en est autrement dans le cas général, et l'on est presque tenté de supposer que Galois avait tout au moins pressenti certaines notions sur les fonctions d'une variable complexe, qui ne devaient être développées que plusieurs années après sa mort. Les énoncés sont précis; l'illustre auteur fait la classification en trois espèces des intégrales abéliennes, et affirme que, si n désigne le nombre des intégrales de première espèce linéairement indépendantes, les périodes seront en nombre $2n$. Le théorème relatif à l'inversion du paramètre et de l'argument dans les intégrales de troisième espèce est nettement indiqué, ainsi que les relations entre les périodes des intégrales abéliennes; Galois parle aussi d'une généralisation de l'équation classique de Legendre, où figurent les périodes des intégrales elliptiques, généralisation qui l'avait probablement conduit aux importantes relations découvertes depuis par Weierstrass et par M. Fuchs. Nous en avons dit assez pour montrer l'étendue des découvertes de Galois en Analyse; si quelques années de plus lui avaient été données pour développer ses idées dans cette direction, il aurait été le glorieux continuateur d'Abel et aurait édifié, dans ses parties essentielles, la théorie des fonctions algébriques d'une variable telle que nous la connaissons aujourd'hui.

Table des Matières.

32182. — Paris. Imp. GAUTHIER-VILLARS, quai des Grands-Augustins, 55.

Abréviations

Dans les publications de l'academie des sciences de Paris, **H.** signifie Histoire; **M.** signifie mémoires.

I_3 = renvoi au tome premier; troisième volume.

(I 2, 19 = renvoi au tome premier, article 2, numéro 19.

Dans les Notes, un nombre α en exposant indique un renvoi à la note α du même article.

(2) 8 (1812), éd. 1816, p. 57 [1810] = deuxième série, tome ou volume 8, année 1812, édité en 1816, page 57, lu ou signé en 1810.

La transcription des lettres russes a lieu conformément à l'orthographe tchèque.

En particulier *č* se prononce *tch, c* se prononce *tz, š* se prononce comme *ch* dans *chat, ž* se prononce comme notre *j* dans *je, j* se prononce comme notre *y* dans *essayer*.

Abh. = Abhandlungen.
Acad. = Academie.
Accad. = Accademia.
Akad. = Akademie.
Alg. = Algebre, Algebra.
Allg. = Allgemeine.
Amer. = American.
Ann. = Annalen, Annales, Annali.
Anw. = Anwendung.
appl. = appliqué.
arit. = aritmetica.
arith. = Arithmetik, arithmetique.
assoc. = association.
Aufs. = Aufsätze.
Avanc. = Avancement.
Ber. = Berichte.
Bibl. Congrès = bibliothèque du Congrès.
Bibl. math. = Bibliotheca mathematica.
Brit. = British.
Bull. = Bulletin.
Bull. bibl. = Bulletino bibliografico.
cah = cahier.
Cambr. = Cambridge.
car. = carton.
cf. = comparez.
chap. = chapitre.
chim. = chimie, chimique.
circ. = circolo.
circul. = circular.
col. = colonne.
Comm. = Commentarii.
Commentat. = Commentationes.
Corresp. = Correspondance.
C. R. = Comptes rendus.
déf. = definition.
Denkschr. = Denkschriften.
Diss. = Dissertation.
Ec. — Ecole.
éd. = édite à, édité par, édition.
Edinb. = Edinburgh.
Educ. = Educational.
elem. = elementare.
élém. = élémentaire.
ex. = exemple.
extr. = extrait.
fasc. = fascicule.
fig. = figure.
fis. = fisica.
fol. = folio.
Géom. = Géométrie.
Ges. = Gesellschaft.
Gesch. = Geschichte.
Giorn. = Giornale.
Gött. = Göttingen, Göttingue.
Gymn. = Gymnasium.
Hist. = Histoire.
id. = idem, ibidem.
imp. = imprimé.
inscr. = inscription.
inst. = institution.
interméd. = intermédiaire.
intern. = international.
introd. = introduction.
Ist. = Istituto.
J. = Journal.
Jahresb. = Jahresbericht.
Lehrb. = Lehrbuch.
Leop. = Leopoldina.
Lpz., Lps. = Leipzig.
Mag. = Magazine.
Méc. = Mécanique.
med. = medicinisch.
Mém. = Mémoire.
métaph. = métaphysique.
Mitt. = Mitteilung.
Monatsh. = Monatshefte.
Monatsb. = Monatsberichte.
ms., mss. = manuscrit, manuscrits.
Nachr. = Nachrichten.
nat. = naturelle.
naturf. = naturforschende.
naturw. = naturwissenschaftlich.
norm. = normale.
nouv. = nouveau, nouvelle.
num. = numérique.
numism. = numimatique.
Op. = Opera.
Opusc. = Opuscule.
Overs. = Oversight.
p. = page.
p. ex., par ex. = par exemple.
partic. = particulier.
Petrop., Pétersb. = Saint Pétersbourg.
philol. = philologie.
philom. = philomatique.
philos. = philosophique.
phys. = physique.
pl. = planche.
polyt. = polytechnique.
pontif. = pontificia.
posth. = posthume.
Proc. = Proceeding.
progr. = programme.
prop. = proposition.
publ. = publié.
Quart. = Quarterly.
R. = reale, royal.
Recent. = Recentiores.
Rendic. = Rendiconto.
réimp. = réimprimé.
sc. = sciences.
Schr. = Schriften.
scient. = scientifique.
s. d. = sans date.
sect. = section.
Selsk. = Selskabs.
sign. = signature.
Sitzgsb. = Sitzungsberichte
s. l. = sans lieu.
spéc. = spéciale.
suiv. = suivante.
sup. = supérieure.
suppl. = supplément.
soc. = société.
theor. = theoretische.
trad. = traduction.
Trans. = Transactions.
Unterh. = Unterhaltung.
Ver. = Vereinigung.
Verh. = Verhandlung.
Vetensk. = Vetenskabs.
Viertelj. = Vierteljahresschrift.
vol. = volume.
Vorles. = Vorlesung.
Wiss. = Wissenschaft, wissenschaftlich.
Z. = Zeitschrift

GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

Quai des Grands-Augustins, 55, PARIS (6e)

ANDOYER (H.), Leçons élémentaires sur la Théorie des formes et ses applications géométriques. In-4 (28-23) autographié de VI-184 pages; 1898 8 fr.

— **Leçons sur la Théorie des Formes et la Géométrie analytique supérieure.** In-8. (25-16) de VI-508 pages; 1900 .... 15 .

CAHEN (E), Éléments de la théorie des nombres. *Congruences. Forn s quadratiques. Nombres incommensurables.* In-8 (25-16); 1900 .... 12 r.

LUCAS (ÉDOUARD), Théorie des nombres. *Le calcul des nombres entit s Le calcul des nombres rationnels. La divisibilité arithmétique.* In-8 (25-1 avec 78 figures; 1891 .... 15 fr.

MAILLET (EDMOND), Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions. In-8 (25-16) de v-275 p.; 1906 .... 12 fr.

STIELTJES (T.-J.), Essai sur la Théorie des nombres. Premiers éléments. *Sur la divisibilité des nombres. Congruences. Équations linéaires indéterminées. Systèmes de congruences linéaires.* In-4 (28-23); 1895 .... 3 fr. 50 c.

B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

Poststraße 3

AHRENS, W., mathematische Unterhaltungen und Spiele. 2., vermehrte und verbesserte Auflage. In 2 Bänden. gr. 8. In Leinwand geb.
I. Band. Mit 200 Figuren im Text. [IX u. 400 S.] 1910. n. *M.* 7.50. II. Band. [Erscheint im Herbst 1910.]

— **Scherz und Ernst in der Mathematik.** Geflügelte und ungeflügelte Worte. [X und 522 S.] gr. 8. 1904. In Leinwand geb. n. *M.* 8.—.

BAUER, G., Vorlesungen über Algebra. 2., verbesserte Auflage. Herausgegeben im Auftrage des Mathematischen Vereins München von K. Doehlemann. Mit dem Bildnis Gustav Bauers als Titelbild und 11 Figuren im Text. [VI u. 366 S.] gr. 8. 1910. Geh. n. *M.* 11.—, in Leinwand geb. n. *M.* 12.—.

MINKOWSKI, H., Geometrie der Zahlen. [VIII u. 256 S.] gr. 8. 1910. Geh. n. *M.* 9.—, in Leinwand geb. n. *M.* 10.—. Auch in 2 Lieferungen:
I. Lieferung. [240 S.] 1896. Geh. n. *M.* 8.—. II. Lieferung. [VIII u. S. 241—256.] 1910. Geh. n. *M.* 1.—.

POINCARÉ, H., sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände aus der reinen Mathematik und der mathematischen Physik. Gehalten zu Göttingen vom 22.—28. April 1909. Mit 6 Figuren im Text. [IV u. 60 S.] gr. 8. 1910. Geh. n. *M.* 1.80, in Leinwand geb. n *M.* 2 40.
I. Über die Fredholmschen Gleichungen. II. Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf die Flutbewegung des Meeres. III. Anwendung der Integralgleichungen auf Hertzsche Wellen. IV. Über die Reduktion der Abelschen Integrale und die Theorie der Fuchsschen Funktionen. V. Über transfinite Zahlen. VI. La mécanique nouvelle.

STAUDE, G., analytische Geometrie des Punktepaares, des Kegelschnittes und der Fläche zweiter Ordnung. In 2 Bänden. gr. 8.
I. Band. Mit 181 Figuren im Text. [X u. 548 S.] 1910. Geh. n. *M.* 20.—, in Leinwand geb. n. *M.* 22.—
II. — [Erscheint Ostern 1910.]

VOLKMANN, P., erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart. Allgemein wissenschaftliche Vorträge. 2., vollständig umgearbeitete und erweiterte Auflage. A. u. d. Titel: Wissenschaft und Hypothese. Band IX.) [XXIII u. 454 S.] 8. 1910. In Leinwand geb n. *M.* 6.—.