

ZEITSCHRIFT  
FÜR  
MATHEMATIK UND PHYSIK.

BEGRÜNDET 1856 DURCH

O. SCHLÖMILCH.

---

FRÜHER HERAUSGEGEBEN VON O. SCHLÖMILCH (1856—1896),  
B. WITZSCHEL (1856—1859), M. CANTOR (1859—1896), E. KAHL (1860—1892).

---

GEGENWÄRTIG HERAUSGEGEBEN

VON

**DR. R. MEHMKE** UND **DR. M. CANTOR.**

---

45. BAND.

MIT IN DEN TEXT GEDRUCKTEN FIGUREN UND 2 LITHOGRAPHIERTEN TAFELN.



LEIPZIG,  
VERLAG VON B. G. TEUBNER.  
1900.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

# Inhalt.

<b>Arithmetik und Analysis.</b>		Seite
Neue Methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen einer unabhängigen Veränderlichen. Von <b>Karl Heun</b> . . . . .	23	23
Zur Darstellung des Bernoullischen Theorems in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Von <b>J. Eggenberger</b> . . . . .	43	43
Über die Vergleichung empirischer Formeln. Von <b>C. Runge</b> . . . . .	78	78
Über eine Verallgemeinerung der Rösselsprungaufgabe. Von <b>F. Fitting</b> . . . . .	137	137
Bemerkungen zu Bernhard Riemanns Vorlesungen über elliptische Funktionen. Von <b>H. Stahl</b> . . . . .	216	216
Die Bedingungen, unter denen $\int \frac{x^m + \mu dx}{\sqrt{1 + \varepsilon_1 x + \dots + \varepsilon_n x^n}}$ algebraisch ist. Von <b>P. Kokott</b> . . . . .	240	240
Note zum Artikel „Erweiterungen des Faktoriellensatzes“. Von <b>Louis Saalschütz</b>	333	333
Nachtrag zu meiner Herleitung der Interpolationsformeln. Von <b>W. Veltmann</b>	337	337
Eine allgemeine Eigenschaft der algebraischen Funktionen. Von <b>Rudolf Ziegel</b>	338	338
Bemerkungen zur Auflösung der Gleichungen vierten Grades. Von <b>Beuriger</b>	341	341
<b>Geometrie.</b>		
Lineare Lösung der Aufgaben über das Verbinden und Schneiden imaginärer Punkte, Geraden und Ebenen. Von <b>Josef Grünwald</b> . . . . .	10	10
Sur la formule de Taylor pour les formes géométriques. Par <b>M. C. Burali-Forti</b>	52	52
Über einige konforme Abbildungen. Von <b>H. E. Timerding</b> . . . . .	54	54
Über den sphärischen Kegelschnitt und seine abwickelbare Tangentenfläche. Von <b>G. Huber</b> . . . . .	86	86
Normale und Krümmungsmittelpunkt der polytropischen Kurven. Von <b>F. Kosch</b>	161	161
Ein Satz über hyperboloidisch gelegene Tetraeder. Von <b>Karl Doehlemann</b>	166	166
Über eine Eigenschaft der Hyperbel. Von <b>W. Fr. Meyer</b> . . . . .	170	170
Zur Konstruktion der konjugierten Durchmesser ebener Kegelschnitte. Von <b>Josef Adamczik</b> . . . . .	174	174
Berichtigungen zu Steiners gesammelten Werken. Von <b>R. Sturm</b> . . . . .	235	235
<b>Mechanik.</b>		
Synthetische Betrachtung eines in sich bewegten Fadens. Von <b>J. Jung</b> . . . . .	39	39
Über die Derivierte eines Vektors. Von <b>M. Fr. Daniëls</b> . . . . .	203	203
Synthetische Behandlung der gemeinen Kettenlinie. Von <b>J. Jung</b> . . . . .	229	229
Über Gebiete von Schraubengeschwindigkeiten eines starren Körpers bei verschiedener Zahl von Stützflächen. Von <b>P. Somoff</b> . . . . .	245	245

**Physik.**

Seite

- Die Bewegung der Ionen beim Zeemanschen Phänomen. Von **O. Blumenthal** 119  
 Die magnetische Energie eines Systems elektrischer Ströme. Von **Doerge** 339

**Angewandte Mathematik und Physik.**

- Die charakteristischen Parabeln des einfachen gleichmässig belasteten Balkens.  
 Von **Stanislaus Jolles** . . . . . 1  
 Dynamik der Kurbelgetriebe (Fortsetzung aus Bd. 44 und Schluss). Von  
**Hans Lorenz** . . . . . 57, 177  
 Beitrag zur Knick-Elastizität und -Festigkeit. Von **J. Kübler** . . . . . 307

---

Beilage zu Heft 5 und 6: Verzeichnis von Abhandlungen aus der angewandten  
 Mathematik, die im Jahre 1899 in technischen Zeitschriften erschienen  
 sind. Zusammengestellt von **R. Mehmke**.

---

# Die charakteristischen Parabeln des einfachen gleichmässig belasteten Balkens.

Von

STANISLAUS JOLLES

in Berlin.

Mit lithogr. Tafel I.

1. In den folgenden Untersuchungen liegen die den einfachen Balken angreifenden Lasten und Auflagerdrucke in einer vertikalen Ebene, sie dient als Zeichenebene für alle zu den Beweisen notwendigen geometrischen Konstruktionen. Bewegt sich nun über einen einfachen, gleichmässig belasteten horizontalen Balken  $AB$  von  $A$  auf  $B$  zu eine konzentrierte Einzellast  $-P$ , so finden sich bekanntlich die vertikalen Querschnitte  $\Sigma$ , in denen hierbei die Maximalmomente auftreten, nur innerhalb der durch die Querschnitte  $\Sigma_u, \Sigma_v$  bestimmten Strecke  $UV$  (s. Taf. I Fig. 1) der gefährlichen Querschnitte des Balkens. Während nämlich die Last  $-P$  von  $A$  nach  $U$  rückt, rückt der zugehörige Querschnitt  $\Sigma_x$  von der Mitte des Balkens aus ebenfalls auf  $U$  zu, und fällt mit  $\Sigma_u$  zusammen, sobald  $-P$  über  $U$  steht. Innerhalb der Strecke  $UV$  bleibt der Angriffspunkt  $X$  von  $-P$  stets über dem ihm entsprechenden gefährlichen Querschnitte, hinter  $V$  tritt aber von neuem eine Trennung ein, da  $\Sigma$  sich nunmehr wiederum nach der Mitte des Balkens bewegt, wenn  $-P$  den Weg  $VB$  zurücklegt. Entsprechend den von  $-P$  durchlaufenen Strecken  $AU, UV, VB$  unterscheidet man drei verschiedene Kategorien von Querschnitten  $\Sigma$ , denen auch für einen Polabstand  $h$  drei verschiedene Kurven der Maximalmomente zukommen. Der Strecke der gefährlichen Querschnitte entspricht nämlich, für ein beliebiges  $h$  bezogen auf eine Horizontale, als Kurve der Maximalmomente eine häufig benutzte von  $-P$  abhängige Parabel, den Strecken  $AU, VB$  hingegen, wie sich in (2) zeigt, je eine von  $-P$  völlig unabhängige Parabel. Diese durch den gleichförmig belasteten einfachen Balken allein bestimmten Kurven werden seine charakteristischen Parabeln für den Polabstand  $h$  genannt; sie treten auch als Kurven der Maximal-

## 2 Die charakteristischen Parabeln d. einfachen gleichmässig belasteten Balkens.

momente auf, wenn bei gleicher Polhöhe  $h$  über den vorliegenden gleichförmig belasteten einfachen Balken sich eine stetige, insbesondere eine gleichförmige Belastung vorschiebt.

2. Die über den einfachen gleichmässig belasteten Balken von  $A$  nach  $B$  zu vorrückende bewegliche Last  $P$  ruft in seinen vertikalen Querschnitten Maximal- und Minimal-Schubkräfte  $\eta$  und  $\eta'$  hervor, die in Fig. 1 (s. Taf. I) in üblicher Weise unter der Voraussetzung ermittelt sind, dass die bewegliche Last  $-P$   $P$  kg, die ständige gleichmässige Belastung f. d. l. M.  $g$  kg, und die Länge des einfachen Balkens  $l$  m beträgt.  $\eta$  und  $\eta'$  können sowohl positive wie negative Vorzeichen haben.

Steht  $-P$  über einem Querschnitte  $\sigma_x$  (s. Taf. I Fig. 1), so liefert das zugehörige Wertepaar  $\eta_x, \eta'_x$  die dieser Lage von  $-P$  entsprechende Schubkraftfläche, und folglich auch denjenigen Querschnitt  $\Sigma_x$  des einfachen Balkens, in dem nunmehr das Maximalmoment eintritt. Seine auf den Polabstand  $h$  bezogene Grösse

$$m_x = m_x^g + m_x^P$$

kann mit Hilfe der Parabeln  $\pi_g, \pi_P$  ermittelt werden, von denen die erstere eine zur Polhöhe  $h$  gehörige Seilkurve der ständigen gleichförmigen Belastung, die letztere eine der gleichen Polhöhe entsprechende Kurve der Maximalmomente der Einzellast  $-P$  darstellt.  $\pi_P$  ist nämlich der Ort der Ecken aller zu der beweglichen Last  $-P$  und der Polhöhe  $h$  gehörigen Seilpolygone, deren Schlusslinien bei ihrem Vorrücken von  $A$  auf  $B$  zu mit  $A'B'$  zusammenfallen,  $m_x$  also gleich der Strecke  $M_g M_P$ .

Der Endpunkt  $M_g$  von  $M_g M_P$  bleibt für jede Lage von  $-P$  auf der Parabel  $\pi_g$ , welche Kurven beschreibt aber  $M_P$ , wenn  $-P$  die Strecken  $AU, UV, VB$  durchläuft? Solange  $-P$  innerhalb der Strecke  $AU$  weilt, bestimmt der Schnittpunkt  $M''$  der Seite  $s$  des jeweiligen Schubkraftpolygons den Querschnitt  $\Sigma_x$  und  $M_g M_P$ . Hierbei bleibt  $s$  parallel zu  $H''J''$ , der Schubkraftlinie der gleichmässigen Belastung, und somit sind  $x$  und  $m$  entsprechende Strahlen zweier projektiven Büschel paralleler Strahlen. Nun ist der Büschel paralleler Strahlen  $x$  auch projektiv zum Strahlenbüschel  $B'$ , da beide perspektiv zur Parabel  $\pi_P$ , folglich ist auch der Büschel paralleler Strahlen  $m$  projektiv zum Büschel  $B'$ , und beide erzeugen, da sie nicht perspektiv liegen, einen Kegelschnitt und zwar eine Parabel  $\pi_u$  mit vertikaler Axenrichtung. Sie geht durch  $B'$ , den Mittelpunkten  $C'$  von  $A'B'$  und  $U_P$ , und diese Punkte samt der vertikalen Axenrichtung bestimmen sie eindeutig.  $\pi_u$  heisst die auf die Polhöhe  $h$  bezogene Parabel der Maximalmomente für die Strecke  $AU$  des einfachen Balkens  $AB$  unter der ständigen gleichmässigen Last von  $g$  kg f. d. l. M. und unter der beweglichen  $P$  kg schweren Last  $-P$ . Was  $\pi_u$  für die Strecke  $AU$ , ist die zu ihr kongruente durch die Punkte  $A', C' V_P$  und vertikale Axenrichtung bestimmte Parabel  $\pi_P$

für  $VB$ . Für die Strecke  $UV$  der gefährlichen Querschnitte fällt bekanntlich die Kurve der auf  $h$  bezogenen Maximalmomente mit der Parabel  $\pi_P$  zusammen.

Durchläuft der Angriffspunkt  $X$  von  $-P$  die Strecke  $AU$ , so überstreicht  $m_x$  das durch die Parabeln  $\pi_g, \pi_u$  und die Vertikalen  $m_a, m_u$  begrenzte Flächenstück, und zwar sind hierbei die von  $X$  und den Endpunkten  $M_a, M_P$  von  $m_x$  auf  $\pi_g, \pi_u$  beschriebenen Punktreihen projektiv. Ein analoger Satz gilt, wenn  $-P$  von  $V$  nach  $B$  zu fortschreitet.

3. Den beweglichen Einzellasten  $-P$  und  $-P_0$  ( $P > P_0$ ) entsprechen auf dem gleichmässig belasteten Balken  $AB$  je die Strecken  $\bar{UV}$  und  $U_0V_0$  gefährlicher Querschnitte (s. Taf. I Fig. 2a), und zwar ist  $U_0V_0$  ein Teil von  $UV$ . Gehört nun der vertikale Querschnitt  $\Sigma_x$  sowohl zu  $UV$ , als auch zu  $U_0V_0$ , so können auf  $AB$  die Angriffspunkte  $X$  und  $X_0$  der Lasten  $-P$  und  $-P_0$  derart bestimmt werden, dass jede von ihnen, wenn sie allein auf dem gleichmässig belasteten Balken steht, das zugehörige Maximalmoment im Querschnitte  $\Sigma_x$  hervorruft. Nach (2) gehen nämlich dann die Vertikalen  $x$  und  $x_0$ , auf denen  $X$  und  $X_0$  liegen, durch die Punkte  $X''$  und  $X''_0$ , in denen die durch  $M''$  gehende Parallele zu  $H''J''$  die Geraden  $H''K''$  und  $H''K''_0$  schneidet.

Für eine solche ausgezeichnete Lage der Angriffspunkte  $X$  und  $X_0$  ist  $X''Y'' = X''_0Y''_0$ , oder da diese Strecken die durch  $-P$  und  $-P_0$  hervorgerufenen Auflagerwiderstände  $P_B^x$  und  $P_{0B}^{x_0}$  messen,

$$P_B^x = P_{0B}^{x_0}.$$

Nun ist ein  $-P$  für den Angriffspunkt  $X$  entsprechendes Seilpolygon  $A'E'B'$ . Zu seiner Schlusslinie  $A'B'$  läuft im zugehörigen Kräfteplan (s. Taf. I Fig. 2b) durch den Pol  $O$  eine Parallele, welche die in  $A$  und  $B$  hervorgerufenen Auflagerdrucke  $P_A^x$  und  $P_B^x$  bestimmt. Für  $P_B^x$  gilt hierbei die Beziehung:

$$S'A': P_B^x = l : h,$$

nach der sich

$$P_B^x = S'A' \cdot \frac{h}{l}$$

ergiebt. In gleicher Weise folgt:

$$P_{0B}^{x_0} = S'_0A'_0 \cdot \frac{h}{l},$$

wenn das der Last  $-P_0$  für den Angriffspunkt  $X_0$  entsprechende Seilpolygon  $A'E'_0B'$  ist. Da aber  $P_B^x$  und  $P_{0B}^{x_0}$  einander gleich sind, so müssen nach den eben gefundenen Ausdrücken  $S'A'$  und  $S'_0A'_0$  zusammenfallen, d. h. die Einzellasten  $-P$  und  $-P_0$  im Querschnitte  $\Sigma_x$  des gleichmässig belasteten Balkens  $AB$  Maximalmomente von gleicher Grösse hervorrufen. Die Parabeln  $\pi_u$  und  $\pi_{0u}$ , sowie  $\pi_v$  und  $\pi_{0v}$  fallen also zusammen. Für den Polabstand  $h$  liegen hiernach die den beweglichen Einzellasten  $-P, -P_0, \dots$  entsprechenden Punkte  $U_P,$

4 Die charakteristischen Parabeln d. einfachen gleichmässig belasteten Balkens.

$U_{P_0}, \dots, V_P, V_{P_0}, \dots$  auf zwei kongruenten Parabeln  $\pi_u, \pi_v$ , welche die auf  $h$  bezogenen charakteristischen Parabeln des einfachen gleichmässig belasteten Balkens genannt werden.

4. Wächst die bewegliche Einzellast  $-P$ , so vergrössert sich der zugehörige gefährliche Querschnitt  $UV$ , hierbei nähert sich  $U_P$  (s. Taf. I Fig. 2a) auf der Parabel  $\pi_u$  ihrem Schnittpunkte  $T_u$  mit der durch  $A$  gehenden Vertikalen. Die Strecke  $A'T_u$  kann demnach als  $\lim_{-P=-\infty} m_u$  oder auch als  $\lim_{u=0} m_u$  berechnet werden. Nun ist:

$$\begin{aligned} \lim_{u=0} m_u &= \lim_{u=0} (m_u^g + m_u^P) = \lim_{u=0} m_u^P \\ &= \frac{1}{h} \cdot \lim_{u=0} u \cdot P_A^u, \end{aligned}$$

wenn  $P_A^u$  den Auflagerwiderstand darstellt, den  $-P$  in  $A$  hervorruft, sobald es über  $U$  steht.  $P_A^u$  hat aber den Wert  $\frac{P(l-u)}{l}$ , folglich ergibt sich, da im Grenzausdruck  $u^2$  gegen  $u$  vernachlässigt werden kann:

$$\lim_{u=0} m_u = \frac{1}{h} \cdot \lim_{u=0} u \cdot P.$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $A''U''H''$  und  $B''U''K''$  folgt ferner die Beziehung:

$$\frac{gl}{2} : u = - \left( P + \frac{gl}{2} \right) : -l + u,$$

und aus ihr:

$$P \cdot u = \frac{gl^2}{2} - gl \cdot u.$$

Also wird endlich:

$$\lim_{u=0} m_u = \frac{1}{h} \lim_{u=0} \left( \frac{gl^2}{2} - gl u \right) = \frac{1}{h} \frac{gl^2}{2}$$

oder, da  $\frac{gl^2}{8h}$  gleich der Pfeilhöhe  $f_g$  von  $\pi_g$  ist:

$$A'T_u = \frac{1}{h} \lim_{u=0} m_u = 4f_g;$$

d. h.:

Die charakteristischen Parabeln  $\pi_u, \pi_v$  schneiden die durch  $A'B'$  gehenden Vertikalen noch in zwei Punkten  $T_u, T_v$ , die von  $A'$  und  $B'$  um das Vierfache der Pfeilhöhe  $f_g$  abstehen. Sie berühren in  $A'$  beziehungsweise  $B'$  die Seilparabel  $\pi_g$  der ständigen gleichmässigen Belastung, und ihre Scheitel stehen von der Horizontalen  $A'B'$  um  $\frac{1}{2}f_g$  ab. Die Seilparabel  $\pi_g$  bestimmt die charakteristischen Parabeln  $\pi_u, \pi_v$ , und umgekehrt bestimmt eine von ihnen jene. Werden  $A'B'$  und  $A'A''$  als positive  $x$ - und  $y$ -Axen eines rechtwinkligen Koordinatensystemes mit dem Anfangspunkte  $A'$  aufgefasst, so lauten die Gleichungen von  $\pi_u$  und  $\pi_v$ :

$$y = \frac{g}{2h} (l - 2x)(l - x),$$

$$y = \frac{g}{2h} (2x - l) \cdot x.$$

5. Bewegt sich eine kontinuierliche Belastung über den gleichmässig belasteten Balken von  $A$  nach  $B$ , bis sie ihn völlig bedeckt, so entspricht jeder Lage ihres Anfangspunktes  $X$  ein vertikaler Querschnitt  $\Sigma_x$ , in dem das zugehörige Maximalmoment eintritt. Der Querschnitt  $\Sigma_x$  rückt hierbei zuvörderst von der Mitte  $C$  des Balkens aus dem Punkte  $X$  entgegen, bis er für einen Punkt  $W$  durch ihn hindurchgeht. Sowie  $X$  aber  $W$  überschreitet, ändert sich die Bewegungsrichtung von  $\Sigma_x$ , es folgt nunmehr dem Anfangspunkte  $X$ , bis er über  $B$  anlangt. Die Querschnitte  $\Sigma_x$  zeigen hiernach zu den Anfangspunkten  $X$  ein zwiefaches Verhalten. So lange  $X$  zwischen  $A$  und  $W$  bleibt, ist  $\Sigma_x$  ein Vertikalschnitt des von der beweglichen Last noch nicht bedeckten Balkenteils  $WB$ , tritt hingegen  $X$  beim Vorrücken der Last von  $A$  auf  $B$  zu über  $W$  hinaus, rückt  $\Sigma_x$  unter sie.

Im ersteren Falle bleibt nun Ort und Grösse der Maximalmomente, die den Punkten  $X$  entsprechen, ungeändert, wenn die je zwischen  $A$  und dem vorwärtsrückenden  $X$  gelegene bewegliche Last ersetzt wird durch eine gleich schwere durch ihren Schwerpunkt gehende Einzellast. Zu all diesen Einzellasten gehört aber beim gleichmässig belasteten einfachen Balken, sobald nur ihr Angriffspunkt zwischen  $A$  und dem zugehörigen  $\Sigma_x$  liegt, die auf die gegebene Polhöhe  $h$  bezogene charakteristische Parabel  $\pi_u$  als Kurve der Maximalmomente. Also gilt:

Bewegt sich über einen einfachen gleichmässig belasteten Balken  $AB$  von  $A$  auf  $B$  zu irgend eine kontinuierliche Belastung, die stets von  $A$  bis zu ihrem Anfangspunkte  $X$  den Balken bedeckt, so hat sie bis zum Punkte  $W$ , für den  $X$  in die Ebene des zugehörigen Maximalmomentes  $\Sigma_x$  fällt, die auf die Polhöhe  $h$  bezogene charakteristische Parabel  $\pi_u$  als Kurve der Maximalmomente. Analoges gilt für die charakteristische Parabel  $\pi_v$ , wenn die bewegliche kontinuierliche Last in gleicher Weise sich über den gleichmässig belasteten Balken von  $B$  nach  $A$  zu vorwärts schiebt.

6. Sobald die von  $A$  nach  $B$  zu sich vorschiebende stetige Belastung selbst gleichförmig ist, also etwa  $p$  kg f. d. l. M. wiegt, lässt sich die Kurve der Maximalmomente auch für den Teil  $WB$  des gleichmässig belasteten Balkens  $AB$ , bei dem  $\Sigma_x$  unter der beweglichen gleichförmigen Belastung liegt, recht anschaulich ermitteln. Die Seite  $H''_x X''$  (s. Taf. I Fig. 3a) der durch den Anfangspunkt  $X$  der beweglichen Belastung bestimmten Schubkraftfläche schneidet dann stets die Horizontale  $A''B''$  in einem Punkte  $M''_x$ , der in der Ebene des  $X$  zugeordneten Querschnittes  $\Sigma_x$  enthalten ist, und das in  $\Sigma_x$  auftretende zu  $X$  gehörige Maximalmoment  $h \cdot m_x = h(m''_x + m''_x)$  liefern die auf die Polhöhe  $h$  bezogenen Momentenflächen der ständigen und gerade in Frage kommenden beweglichen Belastung. In  $A$  ruft nun die von  $A$  bis  $X$  sich erstreckende bewegliche Last einen Auflagerdruck  $P_A^x$  hervor, dessen Grösse

6 Die charakteristischen Parabeln des einfachen gleichmässig belasteten Balkens.

im Kräfteplane (s. Taf. I Fig. 3b) die Strecke  $RT$  misst, wenn durch den Pol  $O$  des Kräfteplanes,  $OT$  parallel zur Tangente  $A'T'_p$ ,  $OR$  parallel zur Schlusslinie  $A'R'_x$  gezogen wird. Da aber auch  $RT$  parallel  $R'_xT'_p$  ist, sind die beiden Dreiecke  $ORT$ ,  $A'R'_xT'_p$  ähnlich, sie liefern somit die Beziehung:

$$R'_xT'_p : RT = l : h.$$

Aus ihr ergibt sich mit Rücksicht darauf, dass  $T''R''_x$  ebenfalls  $P''_A$  darstellt, endlich die Gleichung:

$$\alpha) \quad T''R''_x = R'_xT'_p \cdot \frac{h}{l}.$$

Rückt also der Anfangspunkt  $X$  der beweglichen gleichförmigen Last von  $A$  auf  $B$  zu vor, so beschreiben  $R''_x$  und  $R'_x$  auf den Vertikalen  $a$ ,  $b$  ähnliche Punktreihen. Zur Punktreihe  $b(R'_x \dots)$  ist der Strahlenbüschel  $A'$  perspektiv, zur Punktreihe  $a(R''_x \dots)$  hingegen die Punktreihe  $A''B''(M''_x \dots)$ , und zu dieser wiederum der Büschel paralleler Strahlen  $s_x$ . Er erzeugt also mit dem zu ihm projektiven Strahlenbüschel  $A'$  einen Kegelschnitt. Rückt  $X''$  auf der Parabel  $\pi''$  ins Unendliche, so fällt das zugehörige  $s_x$  mit der unendlich fernen Geraden zusammen, und der ihm entsprechende Strahl des Büschels  $A'$  mit  $a$ . Die unendlich ferne Gerade ist demnach eine Tangente des erzeugten Kegelschnittes und letzterer selbst eine durch  $A'$  und die Mitte  $C'$  von  $A'B'$  gehende Parabel  $\pi_{g+p}$  mit vertikaler Axenrichtung. Eine dritter leicht zu bestimmender Punkt dieser Parabel ist ihr Schnittpunkt  $S'$  mit  $b$ , er ist identisch mit demjenigen Punkte  $R'_x$ , der einem mit  $b$  zusammenfallenden Strahle  $s_x$  entspricht. Für ihn ist:

$$T''R''_x = pl + \frac{gl^2}{2},$$

also nach  $\alpha)$ :

$$S'T'_p = \frac{pl^2}{h} + \frac{gl^2}{2h} = 8f_p + 4f_g$$

oder, da  $T'_p$  sich um  $4f_p$  unterhalb  $B'$  befindet,

$$S'B' = 4(f_g + f_p).$$

Der Scheitel der gefundenen Parabel  $\pi_{g+p}$  steht hiernach um  $\frac{1}{2}(f_g + f_p)$  von der Horizontalen  $A'B'$  ab.

Aus dem für  $S'B'$  gefundenen Ausdrucke lässt sich übrigens der Schluss ziehen, dass die Parabel  $\pi_{g+p}$  für einfache, gleich lange, gleichmässig belastete Balken unverändert bleibt, wenn nur bei gleichem Polabstande  $h$  zwischen den Pfeilhöhen  $f_g$  und  $f_p$  von  $\pi_g$  und  $\pi_p$  die Beziehung  $f_g + f_p = \text{const.}$  besteht,  $g + p$  also den nämlichen Wert beibehält.

Aus der Parabel  $\pi_{g+p}$  geht die gesuchte Kurve der Maximalmomente  $\pi'_{g+p}$  (s. Taf. I Fig. 4a) hervor, sobald die  $m''_x$  (s. Taf. I Fig. 3a) soweit auf ihren Vertikalen verschoben werden, bis ihre auf  $\pi_{g+p}$  gelegenen Endpunkte  $M'_{g+p}$  auf die Horizontale  $A'B'$  fallen.  $\pi'_{g+p}$  ist also eine Parabel mit vertikaler Axenrichtung, bestimmt durch die

Punkte  $A'$ ,  $C_p$ , und denjenigen Punkt  $T'_{g+p}$ , der auf  $b$  um  $4(f_g + f_x)$  unterhalb  $B'$  liegt.

Mit Rücksicht auf (5) lässt sich das nunmehr erlangte Ergebnis folgendermassen aussprechen. Während der Anfangspunkt  $X$  der beweglichen gleichförmigen Belastung hintereinander die Strecken  $AW$  und  $WB$  (s. Taf. I Fig. 4a) auf dem einfachen gleichmässig belasteten Balken  $AB$  durchläuft, überstreicht das zugehörige  $m_x$  gleichzeitig erst das von den Parabeln  $\pi_g$ ,  $\pi_u$  und den Strecken  $f_g$ ,  $m_u$  und dann das von den Parabeln  $\pi_g$ ,  $\pi'_{g+p}$  und den Strecken  $m_w$ ,  $f_g + f_p$  begrenzte Flächenstück.

7. In (6) wird die Parabel der Maximalmomente  $\pi'_{g+p}$  ermittelt, indem man die Parabel  $\pi_{g+p}$  bestimmt und in  $\pi'_{g+p}$  überführt.  $\pi'_{g+p}$  lässt sich jedoch auch herleiten, ohne  $\pi_{g+p}$  zu Hilfe zu nehmen, wenn nur der leicht zu beweisende Satz als bekannt vorausgesetzt wird, dass zu gleicher Polhöhe gehörige Seilkurven eines einfachen gleichmässig belasteten Balkens Teile ein und derselben Parabel sind.

Zu den aufeinander folgenden Lagen des von  $A$  auf  $B$  vorrückenden Anfangspunktes  $X$  der beweglichen Last gehören hiernach auf die Polhöhe  $h$  bezogene kongruente Seilparabeln als Teil der Begrenzung der jeder einzelnen Lage entsprechenden Momentenfläche. Liegen nun diese Momentenflächen auf derselben Seite ihrer Schlusslinien, und fallen diese mit  $A'B'$  zusammen, so bilden ihre Grenzparabeln  $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_x, \dots$  einen Büschel kongruenter gleichgerichteter Parabeln mit dem Grundpunkte  $A'$ . Zu ihm ist der Strahlenbüschel seiner Tangenten im Punkte  $A'$  perspektiv, er schneidet folglich  $b$  in einer zum Parabelbüschel  $(\pi_1, \pi_2, \dots \pi_x, \dots)$  projektiven Punktreihe  $b(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \dots \mathfrak{X}_x, \dots)$ . Durch die entsprechenden Elemente  $\pi_x$  und  $\mathfrak{X}_x$  dieser beiden projektiven Gebilde sind zwei ähnliche Dreiecke  $ORT_x$  und  $A'B'\mathfrak{X}_x$  bestimmt, wenn berücksichtigt wird, dass im Kräfteplane (s. Taf. I Fig. 4b)  $OR$  und  $OT_x$  parallel zu  $A'B'$  und  $A'\mathfrak{X}_x$  laufen, d. h.  $RT_x$  den zugehörigen Auflagerdruck  $P_A^x$  in  $A$  misst. Es verhält sich demnach:

$$A'B' : B'\mathfrak{X}_x = OR : RT_x$$

oder

$$l : B'\mathfrak{X}_x = h : T''R''_x,$$

woraus sich

$$T''R''_x = B'\mathfrak{X}_x \cdot \frac{h}{l}$$

ergibt. Nach dieser Gleichung zwischen den Strecken  $T''R''_x$  und  $B'\mathfrak{X}_x$  beschreiben beim Vorrücken der beweglichen Last von  $A$  auf  $B$  zu,  $\mathfrak{X}_x$  auf  $b$  und  $R''_x$  auf  $a$  ähnliche Punktreihen. Zur Punktreihe

$$a(R''_1, R''_2, \dots R''_x, \dots)$$

ist der Büschel paralleler Strahlen

$$(R''_1 1'', R''_2 2'', \dots R''_x X'', \dots)$$

perspektiv, zu diesem wiederum die Punktreihe

$$A''B''(M''_1, M''_2, \dots M''_x, \dots),$$

und zu ihr der Büschel paralleler Strahlen  $(s_1, s_2, \dots s_x, \dots)$ . Letzterer ist somit projektiv zum Büschel kongruenter Parabeln  $(\pi_1, \pi, \dots \pi_x, \dots)$  und erzeugt mit ihm, da sein unendlich ferner Träger in den unendlich fernen Punkt der Parabel fällt, eine Parabel mit vertikaler Axenrichtung, die Parabel  $\pi'_{g+p}$ .

Hat  $g$  den Wert Null, schiebt sich also die bewegliche gleichförmige Belastung über einen einfachen unbelasteten Balken  $AB$  von  $A$  nach  $B$  zu vor, so fallen die parallelen Strahlen  $s_1, s_2, \dots s_x, \dots$  mit den Axen  $q_1, q_2, \dots q_x, \dots$  der ihnen entsprechenden Parabeln  $\pi_1, \pi_2, \dots \pi_x, \dots$  zusammen, und der Strahlenbüschel  $(s_1, s_2, \dots s_x, \dots)$  erzeugt mit dem zu ihm projektiven Büschel kongruenter Parabeln  $(\pi_1, \pi_1, \dots \pi_x, \dots)$  als Ort der auf  $h$  bezogenen momentanen Maximalmomente eine Parabel  $\pi'_p$ , die zugleich der Ort der Scheitelpunkte der Parabeln des Büschels ist.  $\pi'_p$  hat vertikale Axe und enthält die Punkte  $A', C_p$  und  $T'_p$ , es ist folglich kongruent zu den Parabeln des Büschels, insbesondere also zu  $\pi_p$ .

Die Büschel der Parabelaxen  $q_1, q_2 \dots q_x, \dots$  und der parallelen Strahlen  $s_1, s_2, \dots s_x, \dots$  sind nicht mehr identisch, sondern nur noch projektiv, sobald  $g > 0$  wird. Entsprechende Strahlen beider Gebilde schneiden dann die Geraden  $T''C''$  und  $A''B''$  in zwei projektiven zu dem Büschel paralleler Strahlen  $(R''_1 1'', R''_2 2'', \dots R''_x X'', \dots)$  perspektiven Punktreihen  $(Q''_1, Q''_2, \dots Q''_x, \dots)$  und  $(M''_1, M''_2, \dots M''_x, \dots)$ .

8.  $\pi'_{g+p}$  trifft die Horizontale  $A'B'$  ausser in  $A'$  noch in einem Punkte  $D'$ , durch den die Parabel  $\pi_d$  des Büschels  $(\pi_1, \pi_2, \dots \pi_x, \dots)$  geht. Ihr Scheitelpunkt liegt auf der Symmetrieaxe des Punktepaares  $A'D'$ , und diese geht als Axe von  $\pi_d$  nach (7) im Punkte  $Y''_d$  von  $T''C''$  durch die Mitte der zu  $E''C''$  parallelen Strecke  $R''_d D''$  und demnach in  $Y$  durch die Mitte von  $A''D''$ . Nun folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke  $A''Y''_d Y$  und  $C''E''A''$ :

$$YY''_d : A''Y = (g + p) \frac{l}{2} : \frac{l}{2},$$

und aus der der Dreiecke  $YC''Y''_d$  und  $A''C''T''$ :

$$YY''_d : \frac{l}{2} - A''Y = \frac{g l}{2} : \frac{l}{2}.$$

Somit hat, wenn  $YY''_d$  aus diesen Gleichungen eliminiert wird,  $Y$  von  $A''$  den Abstand:

$$A''Y = \frac{g}{2g+p} \frac{l}{2},$$

und endlich das gesuchte  $A'D'$  den Wert:

$$A'D' = \frac{f_g}{2f_g + f_p} \cdot l.$$

Ein beliebiger Punkt der Parabel  $\pi'_{g+p}$ , z. B. der Scheitelpunkt  $F'_{g+p}$ , kann aus ihrer Axenrichtung und den drei Punkten  $A', D', C_p$  durch das Pascal'sche Sechseck  $(\infty \in F'_{g+p} A'D'C_p)$  ermittelt werden, in

dem  $\infty \infty$  den doppelt zählenden Berührungspunkt der unendlich fernen Geraden darstellt; seine drei Paar Gegenseiten:

$$\infty \infty, A' D' - \infty F'_{g+p}, D' C_p - F'_{g+p} A', C_p \infty$$

schneiden sich auf der parallel zu  $A' B'$  laufenden Pascal'schen Geraden  $p$ .

Nun ist: 
$$\Delta Y' \S D' \sim \Delta C' C_p D',$$

also verhält sich: 
$$Y' D' : \S Y' = C' D' : C_p C',$$

oder mit Rücksicht auf den soeben gefundenen Wert von  $A' D'$ :

$$\frac{f_g}{2f_g + f_p} \cdot \frac{l}{2} : \S Y' = \frac{l}{2} - \frac{f_p}{2f_g + f_p} l : f_p,$$

d. h. es ist:

$$\S Y' = f_g.$$

Die Pascal'sche Gerade  $p$  ist hiernach die Scheiteltangente von  $\pi_g$ , und der Schnittpunkt  $(F'_{g+p} A', C_p \infty)$  der zugehörige Scheitelpunkt;  $\pi_g$  und  $\pi'_{g+p}$  haben also in  $A'$  die nämliche Tangente.

Als Pfeilhöhe  $f'_{g+p}$  von  $\pi'_{g+p}$  ergibt sich aus der Beziehung:

$$f_{g+p} : f_g = \frac{A' D'}{2} : \frac{l}{2}$$

$$f_{g+p} = \frac{f_g^2}{2f_g + f_p},$$

und endlich aus dem Verhältnis:

$$\frac{l}{2} : (2f_g + f_p) = l : B' T'_{g+p}$$

wiederum der schon in (6) gefundene Wert:

$$B' T'_{g+p} = 4(f_g + f_p).$$

# Lineare Lösung der Aufgaben über das Verbinden und Schneiden imaginärer Punkte, Geraden und Ebenen.

Von

Dr. JOSEF GRÜNWARD  
in Prag.

---

Durch v. Staudt sind bekanntlich die imaginären Elemente als vollberechtigt in die synthetische Geometrie eingeführt worden.\* Das Konstruieren mit imaginären Elementen aber ist, wenn man sich an die übliche Darstellungsweise hält, wie sie in den einschlägigen Lehrbüchern sich findet, eine ziemlich verwickelte Sache.

Um zwei imaginäre Gerade oder Punkte in der Ebene, welche in der von Staudt eingeführten Bezeichnungsweise durch harmonische Würfe in ihren reellen Trägern und den zugehörigen Durchlaufungssinn gegeben sind, zu schneiden bzw. verbinden, muss man sie nach dem üblichen Verfahren erst durch zwei harmonische Würfe darstellen, welche das gemeinsame Element der beiden gegebenen reellen Träger enthalten.

Es muss also bei diesem Verfahren mit den gegebenen Würfeln, bevor die eigentliche Konstruktion beginnt, eine Umformung vorgenommen werden; und man erkennt, dass — beim gegenwärtigen Stande unserer Kenntnis — diese Umformung sich nicht mit Hilfe des Lineals allein, sondern nur mit Zuhilfenahme eines Kreises bewerkstelligen lässt.\*\* Es werden daher nach der üblichen Methode die linearen Fundamentalkonstruktionen im imaginären Gebiet zurückgeführt auf lineare und quadratische Konstruktionen mit reellen Elementen. Hiernach ist klar, dass das übliche Verfahren weder in systematischer, noch auch in praktischer Beziehung befriedigen kann.

Eine recht naheliegende Bemerkung, die man indes in den einschlägigen Lehrbüchern vergebens sucht, führt zu einer Lösung der genannten beiden Fundamentalaufgaben, welche wohl allen billigen Anforderungen genügt.

---

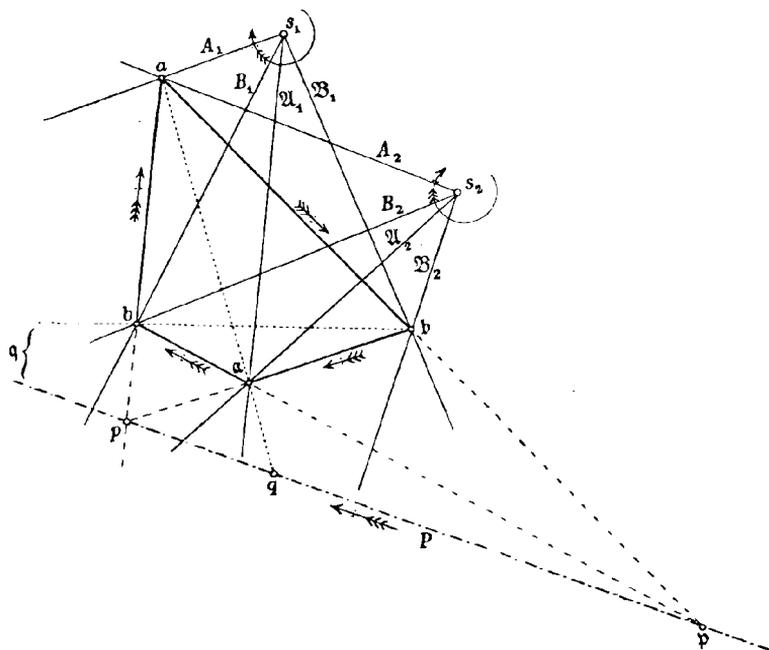
\* Beiträge zur Geometrie der Lage. Nürnberg 1856, § 7.

\*\* Der Verfasser behält sich vor, in einer weiteren Abhandlung zu zeigen, wie — auf Grund der hier entwickelten Methoden — die erwähnte Umformung dennoch ohne Zuhilfenahme eines Kreises, mit dem Lineale allein, durchgeführt werden kann.

Seien zwei imaginäre Gerade  $S_1$  und  $S_2$  in Staudtscher Weise durch harmonische Würfe in ihren reellen Trägern, den Punkten  $s_1$  und  $s_2$ , und den zugehörigen Durchlaufungssinn, der in der Figur 1 durch beigesetzte Pfeile angegeben ist, gegeben.

Wir bezeichnen die zwei sich trennenden Paare des Wurfes  $S_1$  beziehungsweise  $S_2$  mit  $A_1\mathcal{A}_1, B_1\mathcal{B}_1$  beziehungsweise mit  $A_2\mathcal{A}_2, B_2\mathcal{B}_2$ ;

Fig. 1.



und zwar so, dass die Aufeinanderfolge  $A_1\mathcal{A}_1B_1$ , beziehungsweise  $A_2\mathcal{A}_2B_2$ , dem gegebenen Durchlaufungssinn des betreffenden Wurfes entspricht.

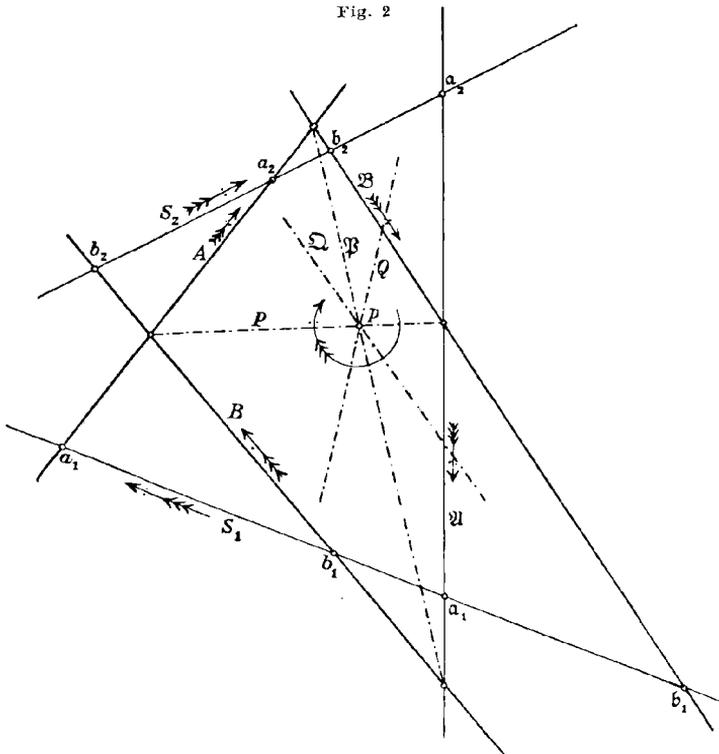
Schneiden sich dann die Geraden:  $A_1A_2$  in  $a$ ,  $B_1B_2$  in  $b$ ,  $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_2$  in  $\alpha$ ,  $\mathcal{B}_1\mathcal{B}_2$  in  $\beta$ ; ferner die Gegenseiten:  $a\beta$ ,  $\alpha b$  des Viereckes  $a\beta\alpha b$  im Punkte  $p$ , die Gegenseiten  $\alpha\beta$ ,  $\alpha b$  im Punkte  $p$ , so ist die

Verbindungsline  $pp = P$  der reelle Träger des gesuchten Schnittpunktes der imaginären Geraden  $S_1$  und  $S_2$ . Dieser Schnittpunkt selbst wird einschliesslich des Durchlaufungssinns durch denjenigen harmonischen Wurf, den  $S_1(A_1\mathcal{A}_1B_1\mathcal{B}_1)$ , oder auch durch denjenigen, den der Wurf  $S_2(A_2\mathcal{A}_2B_2\mathcal{B}_2)$  auf  $P$  ausschneidet, gegeben.

Beweis: Offenbar liegen die Punkte  $s_1, s_2, a, \alpha, b, \beta$  auf einem Kegelschnitte. Die Punktepaare  $a\alpha$  und  $b\beta$  bestimmen auf diesem eine krumme Involution zweiten Grades, deren Polaraxe, wie ohne weiteres ersichtlich, die Gerade  $P = pp$  ist.

Nun hat man den bekannten Satz: „Werden aus einem beliebigen Punkte eines Kegelschnitts die Paare einer auf demselben befindlichen krummen Involution auf die Polaraxe dieser Involution projiziert, so erhält man auf der Polaraxe die Involution konjugierter Pole des Kegelschnitts.“

Hieraus ergibt sich sofort, dass aus den Punkten  $s_1$  und  $s_2$  die Paare  $aa$ ,  $bb$  auf  $P$  in Punktepaare projiziert werden, welche alle der



nämlichen Involution — nämlich der Involution konjugierter Pole des Kegelschnitts  $(s_1 s_2 a a b b)$  — angehören. Die Würfe  $(A_1 \mathcal{A}_1 B_1 \mathcal{B}_1)$  und  $(A_2 \mathcal{A}_2 B_2 \mathcal{B}_2)$  induzieren also auf  $P$  dieselbe Involution. Man überzeugt sich auch, dass beide Würfe auf  $P$  denselben Durchlaufungssinn bestimmen. Und damit ist in der That gezeigt, dass die imaginären Geraden  $S_1$  und  $S_2$  sich in einem Punkte der reellen Geraden  $P$  schneiden; der gesuchte Schnittpunkt von  $S_1$  und  $S_2$  wird daher erhalten, indem man  $S_1$  oder  $S_2$  mit der reellen Geraden  $P$  schneidet, was zu beweisen war.

Das Prinzip der Dualität gestattet, sofort die Lösung der zweiten Fundamentalaufgabe zu geben, welche natürlich auch selbständig in ganz analoger Weise wie die der ersten begründet werden könnte.

Seien zwei imaginäre Punkte  $s_1$  und  $s_2$  in Staudt'scher Weise durch harmonische Würfe auf ihren reellen Trägern, den Geraden  $S_1$  und  $S_2$ , und den zugehörigen Durchlaufungssinn, der in der Figur 2 durch beigezeichnete Pfeile gekennzeichnet ist, gegeben.

Wir bezeichnen die zwei sich trennenden Paare des Wurfes  $s_1$  beziehungsweise  $s_2$  mit  $a_1 a_1$ ,  $b_1 b_1$  beziehungsweise mit  $a_2 a_2$ ,  $b_2 b_2$ , und zwar so, dass die Aufeinanderfolge  $a_1 a_1 b_1$  beziehungsweise  $a_2 a_2 b_2$  dem gegebenen Durchlaufungssinne des betreffenden Wurfes entspricht.

Verbinden wir  $\left\{ \begin{array}{l} a_1 a_2 \text{ durch die Gerade } A \\ b_1 b_2 \text{ " " " } B \\ a_1 a_2 \text{ " " " } \mathfrak{A} \\ b_1 b_2 \text{ " " " } \mathfrak{B} \end{array} \right\},$

ferner die gegenüberliegenden Eckpunkte

$[AB]$  und  $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}]$  des Vierseits  $AB\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  durch die Gerade  $P$ , die Eckpunkte

$[A\mathfrak{B}]$  und  $[\mathfrak{A}B]$  durch die Gerade  $\mathfrak{P}$ , so schneiden sich die Geraden  $P$  und  $\mathfrak{P}$  in einem Punkte  $p$ , welcher der reelle Träger der Verbindungsgeraden der beiden imaginären Punkte  $s_1$  und  $s_2$  ist.

Die gesuchte Verbindungsgerade selbst wird erhalten, indem man entweder den Wurf  $s_1(a_1 a_1 b_1 b_1)$  oder den Wurf  $s_2(a_2 a_2 b_2 b_2)$  mit dem jeweilig zugehörigen Durchlaufungssinne aus  $p$  projiziert.

Zu den beiden Lösungen der linearen Fundamentalaufgaben in der Ebene ist noch eine wichtige Bemerkung nachzutragen.

Bezeichnet man in  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Figur 1 die Schnittpunkte} \\ \text{Figur 2 die Verbindungsgeraden} \end{array} \right\}$  der beiden  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Geraden } [aa] \text{ und } [bb] \\ \text{Punkte } [A\mathfrak{A}] \text{ und } [B\mathfrak{B}] \end{array} \right\}$  mit  $\left\{ \begin{array}{l} \text{der Geraden } P \\ \text{dem Punkte } p \end{array} \right\}$  durch die Buchstaben  $\left\{ \begin{array}{l} q \text{ und } q \\ Q \text{ und } \Omega \end{array} \right\}$ , so kann  $\left\{ \begin{array}{l} \text{der Schnittpunkt} \\ \text{die Verbindungsgerade} \end{array} \right\}$  der imaginären  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Geraden } S_1 \text{ und } S_2 \\ \text{Punkte } s_1 \text{ und } s_2 \end{array} \right\}$  auch durch den harmonischen Wurf  $\left\{ \begin{array}{l} (p p q q) \\ (P \mathfrak{P} Q \Omega) \end{array} \right\}$  (mit dem durch die Reihenfolge  $\left\{ \begin{array}{l} p p q \\ P \mathfrak{P} Q \end{array} \right\}$  angegebenen Durchlaufungssinne) dargestellt werden.

Dass nämlich die beiden Würfe harmonisch sind, ist ohne weiteres klar; ebenso, dass die Punkte  $pp$  in Figur 1 konjugierte Pole des durch die Punkte  $s_1, s_2, a, a, b, b$  bestimmten Kegelschnitts sind. Aber auch die Punkte  $qq$  sind konjugierte Pole des Kegelschnitts, was daraus hervorgeht, dass die Punkte  $aa bb$  auf diesem ein harmonisches Quadrupel bilden. Die Geraden  $aa$  und  $bb$  sind nämlich aus dem soeben angeführten Grunde konjugierte Polaren des Kegelschnitts, während anderseits klar ist, dass jede der beiden Geraden die Gerade

$P$  zur konjugierten Polare hat; daher wird  $P$  von den Geraden  $[aa]$  und  $[bb]$  in konjugierten Polen geschnitten.

Die Punktepaare  $pp$  und  $qq$  gehören also der nämlichen Involution an, wie jene Punktepaare, welche von den sich trennenden Paaren des Wurfes  $S_1: (A_1 \mathfrak{A}_1 B_1 \mathfrak{B}_1)$  oder  $S_2: (A_2 \mathfrak{A}_2 B_2 \mathfrak{B}_2)$  auf  $P$  ausgeschnitten werden — nämlich der Involution konjugierter Pole des Kegelschnitts. Auch der Sinn des Wurfes  $(ppqq)$ , der durch die Aufeinanderfolge  $ppq$  gegeben ist, stimmt — wie man sich sofort überzeugt — mit dem Sinne überein, den die Würfe  $S_1(A_1 \mathfrak{A}_1 B_1 \mathfrak{B}_1)$  oder  $S_2(A_2 \mathfrak{A}_2 B_2 \mathfrak{B}_2)$  auf  $P$  induzieren.

Damit ist in der That gezeigt, dass der Schnittpunkt der imaginären Geraden  $S_1$  und  $S_2$  in Figur 1 durch den harmonischen Wurf  $(ppqq)$  dargestellt werden kann.

Analog, oder mit Hilfe des Prinzips der Dualität wird bewiesen, dass in Figur 2 die Verbindungsgerade der imaginären Punkte  $s_1$  und  $s_2$  durch den harmonischen Wurf  $(P\mathfrak{P}Q\Omega)$  dargestellt werden kann.

Die gemachte Bemerkung ist deshalb von Wichtigkeit, weil sie lehrt, dass, wenn man einmal  $\left\{ \begin{array}{l} \text{in Figur 1} \\ \text{in Figur 2} \end{array} \right\}$  die vier

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Punkte } a, a, b, b \\ \text{Geraden } A, \mathfrak{A}, B, \mathfrak{B} \end{array} \right\}$$

verzeichnet hat,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{der} \\ \text{die} \end{array} \right\}$  gesuchte imaginäre  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Schnittpunkt } [S_1 S_2] \\ \text{Verbindungsgerade } [s_1 s_2] \end{array} \right\}$

ohne Zuhilfenahme der  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punkte } s_1 \text{ und } s_2 \\ \text{Geraden } S_1 \text{ und } S_2 \end{array} \right\}$  bloss aus den ge-

nannten vier Elementen  $\left\{ \begin{array}{l} aab b \\ A \mathfrak{A} B \mathfrak{B} \end{array} \right\}$  sofort in einfachster Weise linear konstruiert werden kann.

Es legt dies den Gedanken nahe, die vier  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Punkte } aab b \\ \text{Geraden } A \mathfrak{A} B \mathfrak{B} \end{array} \right\}$  als eine neue Art der Darstellung

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{des imaginären Punktes } [S_1 S_2] \\ \text{der imaginären Geraden } [s_2 s_2] \end{array} \right\}$$

anzusehen und diese der gewöhnlichen Staudtschen Darstellung ergänzend zur Seite zu stellen.

In Figur 1 ist der Durchlaufungssinn des Wurfes  $(A_1 \mathfrak{A}_1 B_1 \mathfrak{B}_1)$ , welcher die imaginäre Gerade  $S_1$  bestimmt, durch einen Pfeil angegeben; die Reihenfolge, in der die vier Geraden des Wurfes in dem angegebenen Sinn aufeinander folgen, lautet:  $(A_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1 B_1)$ . Wir wollen nun festsetzen, dass von jetzt ab überall die Elemente eines harmonischen Wurfes, welcher mit dem zugehörigen Durchlaufungssinn ein imaginäres Element definiert, in der durch den Durchlaufungssinn bestimmten Reihenfolge angeordnet werden sollen.\* Die Würfe

\* Die so geordneten Würfe sind dann „ordentliche“ im Sinne Staudts.

$$S_1 : (A_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1 B_1) \quad \text{und} \quad S_2 : (A_2 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{A}_2 B_2)$$

bestimmen dann eine Reihenfolge der Punkte  $a, \alpha, b, \beta$ , nämlich  $(a\beta ab)$ .

Wir können nun mit voller Berechtigung das Viereck  $(a\beta ab)$  mit dem durch die Aufeinanderfolge der Punkte bestimmten Durchlaufungssinne als eine neue Darstellung des imaginären Punktes  $[S_1 S_2]$  ansehen, welche wir zur Unterscheidung von der gewöhnlichen Staudt'schen als die „krumme“ Darstellung desselben bezeichnen wollen. Die Verbindungsgerade der Schnittpunkte der Gegenseiten dieses Viereckes, der Punkte  $p$  und  $\rho$ , giebt den reellen Träger  $P$  des imaginären Punktes; eben diese Punkte mit den beiden Punkten  $q$  und  $q$ , welche von den Diagonalen des Viereckes auf  $[p\rho] = P$  ausgeschnitten werden, bilden den harmonischen Wurf, welcher in gewöhnlicher Staudt'scher Weise den imaginären Punkt darstellt. Der Durchlaufungssinn dieses Wurfes ist durch den Durchlaufungssinn des Viereckes bestimmt; am einfachsten findet man ihn wohl nach folgender Regel: man denke sich aus  $a$  die Punkte  $\beta, \alpha, b$  auf  $P$  projiziert, so erhält man auf  $P$  drei Punkte, deren Aufeinanderfolge den gesuchten Durchlaufungssinn angiebt.

Durch das Gesagte ist der Übergang von der „krummen“ zur gewöhnlichen Darstellung in einfachster Weise linear bewerkstelligt.

Das Analoge kann in Figur 2 geltend gemacht werden. Dort kann das Vierseit  $(A\mathfrak{B}\mathfrak{A}B)$  mit dem durch die Reihenfolge der Geraden bestimmten Durchlaufungssinne als „krumme“ Darstellung der imaginären Geraden  $[s_1 s_1]$  aufgefasst werden. Der Übergang von der „krummen“ zur gewöhnlichen Darstellung vollzieht sich hier in nachstehender Weise: Der Schnittpunkt  $p$  der beiden Diagonalen des Vierseits giebt den reellen Träger der imaginären Geraden. Die beiden Diagonalen  $P$  und  $\mathfrak{P}$  bilden zugleich mit den zwei Geraden  $Q$  und  $\mathfrak{Q}$ , welche die Schnittpunkte der Gegenseiten aus  $p$  projizieren, den harmonischen Wurf, welcher in gewöhnlicher Staudt'scher Weise die imaginäre Gerade darstellt. Der Durchlaufungssinn des letzteren Wurfes ist durch den Durchlaufungssinn des Vierseits bestimmt; am einfachsten findet man ihn wohl nach folgender Regel: man denke sich aus dem Punkte  $p$  die Schnittpunkte der Geraden  $A$  mit den Geraden  $\mathfrak{B}, \mathfrak{A}, B$  projiziert, so erhält man in  $p$  drei Strahlen, deren Aufeinanderfolge den gesuchten Durchlaufungssinn angiebt.

Die Zweckmässigkeit der hier dargelegten Auffassung wird ins volle Licht gesetzt durch den folgenden Abschnitt, welcher zum Gegenstand haben soll:

**Die linearen Konstruktionen mit imaginären Elementen  
im Raume.**

Durch Centralprojektion der Figuren 1 und 2 aus einem beliebigen reellen Punkte  $O$  des Raumes ergibt sich sofort,

1. wie man die zwei imaginären Ebenen

$$S_1^* : (A_1^* \mathfrak{B}_1^* \mathfrak{A}_1^* B_1^*) \quad \text{und} \quad S_2^* : (A_2^* \mathfrak{B}_2^* \mathfrak{A}_2^* B_2^*),$$

welche die Geraden  $S_1$  und  $S_2$  aus  $o$  projizieren, zum Schnitte bringt, und

2. wie man die zwei imaginären Strahlen  $s_1^* : (a_1^* b_1^* a_1^* b_1^*)$  und  $s_2^* : (a_2^* b_2^* a_2^* b_2^*)$ , welche die Punkte  $s_1$  und  $s_2$  aus  $o$  projizieren, durch eine Ebene verbindet.

In „krummer“ Darstellung erhält man für die gesuchte Schnittgerade, beziehungsweise die gesuchte verbindende Ebene: das Vierkant  $(a^* b^* a^* b^*)$ , beziehungsweise das Vierflach

$$(A^* \mathfrak{A}^* \mathfrak{B}^* B^*).$$

(Durch Beisetzung eines Sternchens  $*$  zu dem Namen  $\left\{ \begin{array}{l} \text{einer Geraden} \\ \text{eines Punktes} \end{array} \right\}$

wird hier wie auch im folgenden stets jene  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ebene} \\ \text{Gerade} \end{array} \right\}$  bezeichnet, welche  $\left\{ \begin{array}{l} \text{die betreffende Gerade} \\ \text{den betreffenden Punkt} \end{array} \right\}$  aus einem reellen Punkte  $o$  des Raumes projiziert.)

Es ist hieraus ohne weiteres klar, wie man überhaupt zwei imaginäre  $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ebenen} \\ \text{Gerade} \end{array} \right\}$ , welche einen reellen Punkt  $o$  gemein haben,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{zum Schnitte bringt} \\ \text{durch eine Ebene verbindet} \end{array} \right\}$ . —

Ein wesentlich neuer Begriff in der Theorie der imaginären Gebilde des Raumes gegenüber jenen der Ebene ist die sogenannte imaginäre Gerade zweiter Art, welche keinen reellen Punkt enthält, und durch welche keine reelle Ebene geht. Bezüglich der Theorie der imaginären Geraden zweiter Art sei verwiesen auf die „Beiträge zur Geometrie der Lage“ von Staudt, § 7, und insbesondere auf die klare Darstellung von Lüroth im achten Bande der mathematischen Annalen in der Abhandlung: „Das Imaginäre in der Geometrie...“ § 5. (Jahrgang 1875.)

Durch die oben auseinandergesetzte Auffassung gewinnt nun, wie sich zeigen wird, der Begriff der imaginären Geraden zweiter Art sehr an Anschaulichkeit.

Es seien in Staudtscher Weise zwei imaginäre Ebenen  $S_1$  und  $S_2$ , deren reelle Trägergeraden zu einander windschief sind, durch harmonische Würfe  $(A_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1 B_1)$  und  $(A_2 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{A}_2 B_2)$  in den reellen Trägergeraden  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  (mit dem durch die Aufeinanderfolge der vier Ebenen angedeuteten Durchlaufungssinne) gegeben. Diese beiden

Ebenen  $S_1$  und  $S_2$  schneiden sich in einer imaginären Geraden zweiter Art  $\gamma$ .

Wir stellen uns nun die Aufgabe:

1. Die imaginäre Gerade  $\gamma$  mit einer reellen Ebene  $E$  zu schneiden.
2. Dieselbe aus einem reellen Punkte  $o$  zu projizieren.

Als gelöst sehen wir eine solche Aufgabe nur dann an, wenn es gelungen ist, sie auf lineare Konstruktionen mit reellen Elementen zurückzuführen.

Wir bezeichnen die Schnittgeraden der Ebenen:

$$A_1 A_2 \text{ mit } a, \quad \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \text{ mit } \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \text{ mit } \alpha, \quad B_1 B_2 \text{ mit } b.$$

Die Geraden  $a, \mathfrak{b}, \alpha, b$  liegen offenbar auf einem einschaligen Hyperboloid, auf dem auch die Trägergeraden  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  sich befinden; und zwar so, dass  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  der einen,  $a, \mathfrak{b}, \alpha, b$  der andern Geradenschar des Hyperboloids angehören. Der Wurf ( $abab$ ) auf dem Hyperboloid ist natürlich harmonisch.

Es mögen im folgenden die  $\left\{ \begin{matrix} \text{Punkte} \\ \text{Geraden} \end{matrix} \right\}$ , welche durch den Schnitt beliebiger  $\left\{ \begin{matrix} \text{Geraden} \\ \text{Ebenen} \end{matrix} \right\}$  mit der Ebene  $E$  entstehen, einfach durch Beisetzung eines Accentues zu dem Namen der betreffenden  $\left\{ \begin{matrix} \text{Geraden} \\ \text{Ebene} \end{matrix} \right\}$  bezeichnet werden.

Dann schneidet die imaginäre Ebene  $S_1$  beziehungsweise  $S_2$  die reelle Ebene  $E$  in der imaginären Geraden

$$S_1' : (A_1' \mathfrak{B}_1' \mathfrak{A}_1' B_1') \text{ beziehungsweise } S_2' : (A_2' \mathfrak{A}_2' \mathfrak{B}_2' B_2').$$

Die imaginären Geraden  $S_1'$  und  $S_2'$  schneiden sich in einem imaginären Punkte, dessen „krumme“ Darstellung offenbar die folgende ist: ( $a' \mathfrak{b}' \alpha' b'$ ). Letzterer Punkt liegt sowohl in der Ebene  $S_1$  als auch in der Ebene  $S_2$ , und ist daher nichts anderes als der gesuchte Schnittpunkt der Ebene  $E$  mit der imaginären Geraden zweiter Art

$$\gamma = [S_1 \cdot S_2].$$

Man erhält also den Schnittpunkt einer reellen Ebene  $E$  mit der Geraden  $\gamma$  in „krummer“ Darstellung einfach dadurch, dass man den harmonischen Wurf ( $abab$ ) mit  $E$  schneidet.

Wir gehen nun an die Behandlung der zweiten Aufgabe, die Gerade  $\gamma$  aus einem reellen Punkte  $o$  zu projizieren.

Bezeichnen wir die vier Punkte, in denen die Gerade  $\left\{ \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{matrix} \right\}$  von den Ebenen  $\left\{ \begin{matrix} A_2 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{A}_2 B_2 \\ A_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_1 B_1 \end{matrix} \right\}$  geschnitten wird, der Reihe nach mit

$$\left\{ \begin{matrix} a_1 \mathfrak{b}_1 \alpha_1 b_1 \\ a_2 \mathfrak{b}_2 \alpha_2 b_2 \end{matrix} \right\}$$

so liegen die imaginären Punkte

$$\left. \begin{array}{l} \{ s_1 : (a_1 b_1 a_1 b_1) \} \\ \{ s_2 : (a_2 b_2 a_2 b_2) \} \end{array} \right\}$$

offenbar zugleich in den beiden Ebenen  $S_1$  und  $S_2$ , gehören daher unserer imaginären Geraden  $\gamma = [S_1 S_2]$  an. Die letztere kann daher als Verbindungsgerade der beiden imaginären Punkte  $s_1$  und  $s_2$  angesehen werden. Die Verbindungslinien  $a_1 a_2$ ,  $b_1 b_2$ ,  $a_1 a_2$ ,  $b_1 b_2$  homologer Punkte der beiden Würfe  $(a_1 b_1 a_1 b_1)$  und  $(a_2 b_2 a_2 b_2)$  sind — wie ohne weiteres klar — identisch mit den oben eingeführten Geraden  $a$ ,  $b$ ,  $a$ ,  $b$ .

Um nun den reellen Punkt  $o$  mit  $\gamma$  durch eine Ebene zu verbinden, verbinden wir  $o$  mit dem auf  $\gamma$  liegenden Punkte  $s_1 : (a_1 b_1 a_1 b_1)$  durch die imaginäre Gerade erster Art:  $s_1^x : (a_1^x b_1^x a_1^x b_1^x)$ , ebenso mit dem auf  $\gamma$  liegenden Punkte:  $s_2 : (a_2 b_2 a_2 b_2)$  durch die imaginäre Gerade erster Art:  $s_2^x : (a_2^x b_2^x a_2^x b_2^x)$ . Die verbindende Ebene der beiden letzteren Geraden — die „krumme“ Darstellung dieser Ebene ist nach dem am Eingange dieses Abschnittes Gesagten offenbar das Vierflach  $(a^x b^x a^x b^x)$  — ist die gesuchte Ebene, welche  $o$  mit  $\gamma$  verbindet. Man findet also die Ebene, welche  $\gamma$  aus  $o$  projiziert, in krummer Darstellung einfach dadurch, dass man den Wurf  $(a b a b)$  aus  $o$  projiziert.

Der Wurf  $(a b a b)$  der hyperboloidisch liegenden, harmonischen Geraden  $a$ ,  $b$ ,  $a$ ,  $b$  bestimmt sonach in einfachster Weise die sämtlichen auf  $\gamma$  liegenden Punkte, sowie die sämtlichen durch  $\gamma$  gehenden Ebenen; er giebt demnach eine vollkommen adäquate Darstellung unserer imaginären Geraden zweiter Art  $\gamma$ .

Die reellen Trägergeraden der auf  $\gamma$  liegenden Punkte und der durch  $\gamma$  gehenden Ebenen bilden ein und dasselbe Strahlensystem erster Ordnung und Klasse  $R$ . Die obigen Auseinandersetzungen setzen uns in den Stand, in der denkbar einfachsten Weise den durch einen beliebigen Punkt  $o$  gehenden, oder den in einer beliebigen Ebene  $E$  liegenden Strahl dieses Systems linear zu finden: den Strahl von  $R$  durch  $o$  findet man als den Durchschnitt der beiden Diagonalebene des Vierflachs  $(a^x b^x a^x b^x)$ ; den in  $E$  liegenden Strahl von  $R$  als die Verbindungsgerade der Schnittpunkte der Gegenseiten des Viereckes  $(a' b' a' b')$ .

Die Leitlinien des Strahlensystems  $R$  sind offenbar die Gerade  $\gamma : (a b a b)$  und ihre konjugiert-imaginäre:  $\bar{\gamma} : (a b a b)$ ; in der That enthält jeder Strahl des Systems einen Punkt von  $\gamma$  und desgleichen einen von  $\bar{\gamma}$ .

Die hier angestellten Betrachtungen sind von grosser Wichtigkeit für diejenigen Strahlensysteme erster Ordnung und Klasse überhaupt, welche keine reellen Leitlinien besitzen. Sei ein solches Strahlensystem durch vier seiner Strahlen (welche natürlich nicht ein und derselben hyperboloidischen Schar angehören dürfen) gegeben:  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ . Die beiden — als konjugiert-imaginär vorausgesetzten — Schnitt-

punkte der Geraden  $\sigma_1$  mit dem durch die Geraden  $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  bestimmten Hyperboloid seien durch die harmonischen Würfe:  $(a_1 b_1 a_1 b_1)$  und  $(a_1 b_1 a_1 b_1)$  dargestellt. Wir legen aus den Punkten  $a_1, b_1, a_1, b_1$  die Transversalen  $a, b, a, b$  über die Geraden  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$ : dieselben bilden ein harmonisches Quadrupel auf einem neuen Hyperboloid. Die Würfe:  $(abab)$  und  $(abab)$  stellen zwei konjugiert-imaginäre Gerade zweiter Art  $\gamma$  und  $\bar{\gamma}$  dar, welche nicht nur  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , sondern auch, da sie ja auf der andern Schar des durch die Geraden  $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  bestimmten Hyperboloids liegen, die Gerade  $\sigma_4$  schneiden. Das durch die vier Strahlen  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  bestimmte Strahlensystem hat daher die beiden konjugiert-imaginären Geraden  $\gamma: (abab)$  und  $\bar{\gamma}: (abab)$  zu Leitlinien, und ist also identisch mit demjenigen Strahlensystem, welches von den Trägergeraden der  $\left\{ \begin{array}{l} \text{auf } \gamma \text{ liegenden Punkte} \\ \text{in } \gamma \text{ liegenden Ebenen} \end{array} \right\}$  gebildet wird.

Haben wir einmal die beiden Leitlinien gefunden (was natürlich die Lösung einer quadratischen Aufgabe erfordert, nämlich: die beiden Schnittpunkte einer Geraden mit einem Hyperboloid zu finden), so können wir uns mit Hilfe des Wurfes  $(abab)$  nach der oben angegebenen Methode in der einfachsten Weise — und zwar linear — beliebig viele Strahlen des durch  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$  bestimmten Systems konstruieren. Eine anschaulichere Erzeugungsweise als die angegebene mit Hilfe des Wurfes  $(abab)$  giebt es wohl nicht. Dieselbe verdient besondere Beachtung deswegen, weil — wie bekannt — das allgemeine Strahlensystem erster Ordnung und Klasse in der Mechanik starrer Körper eine wichtige Rolle spielt. Ist der Freiheitsgrad der Bewegung eines starren Körpers 2, so kann ein beliebiger Punkt  $m$  desselben sich nur in einer gewissen Ebene  $M$  verschieben, wenn der Körper eine unendlich kleine Bewegung ausführt. Errichtet man in den Punkten  $m$  des Körpers auf den zugehörigen Ebenen  $M$  die Normalen  $\mu$ , so bilden diese ein Strahlensystem erster Ordnung und Klasse. Die Geraden dieses Systems zeichnen sich dadurch aus, dass eine beliebige längs einer von ihnen wirkende Kraft keinerlei Wirkung auf den Körper auszuüben vermag, vielmehr durch die Verbindungen, welche die Beweglichkeit des Körpers einschränken, aufgehoben wird. — Sind die Leitlinien des Systems reell, so übersieht man die Gesamtheit dieser ausgezeichneten Geraden ohne weiteres; für den Fall von imaginären Leitlinien hat es aber bisher an einer so anschaulichen Übersicht dieser ausgezeichneten Geraden, wie sie durch unsere Methode geliefert wird, gefehlt.

Nummehr kehren wir wieder zu unserer imaginären Geraden zweiter Art  $\gamma$  zurück, indem wir die Frage aufwerfen, wie viele Würfe hyperboloidisch liegender, harmonischer Geraden es giebt, welche ein und dieselbe imaginäre Gerade zweiter Art darstellen.

Es lässt sich zeigen, dass das erste Glied  $c$  eines Wurfes, welcher die Gerade  $\gamma: (abab)$  darstellen soll, mit einer gewissen Be-

schränkung willkürlich gewählt werden kann; die weiteren Glieder  $b$ ,  $c$ ,  $d$  des Wurfes sind dann schon vollständig bestimmt. Die angedeutete Beschränkung besteht darin, dass die angenommene Gerade  $c$  dem Strahlensysteme  $R$  der zur Geraden  $\gamma$  gehörigen reellen Träger nicht angehören darf. Der Grund hiervon ist klar: Würde eine der Geraden  $c$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  dem Strahlensysteme  $R$  angehören, so hätte man das Absurde, dass diese Gerade des Systems  $R$  von jenen  $\infty'$  Geraden des nämlichen Systems, welche die andere Schar des durch  $c$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  bestimmten Hyperboloids ausmachen, geschnitten würde, während wir doch wissen, dass zwei Gerade des Systems sich nicht schneiden können, da  $\left. \begin{array}{l} \text{durch jeden Punkt} \\ \text{in jeder Ebene} \end{array} \right\}$  nur eine Gerade des Systems  $\left. \begin{array}{l} \text{geht} \\ \text{liegt} \end{array} \right\}$ .

Sei also das erste Glied  $c$  des Wurfes mit der oben angegebenen Einschränkung willkürlich gewählt. Die Gesamtheit jener Geraden  $\tau$  des Strahlensystems  $R$ , welche die  $c$  schneiden, erfüllt eine hyperboloidische Schar. Wären die zu suchenden Geraden  $b$ ,  $c$ ,  $d$  des Wurfes ( $c b c d$ ) bekannt, so würden die Geraden der andern Schar des durch die Geraden  $c$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  bestimmten Hyperboloids dem Strahlensystem  $R$  angehören und ausserdem  $c$  schneiden, also mit der von den Geraden  $\tau$  gebildeten Schar identisch sein. Soll also ein Wurf ( $c c b d$ ), dessen erstes Glied vorgegeben ist, die Gerade  $\gamma$  darstellen, so sind die Geraden  $b$ ,  $c$ ,  $d$  nur unter den Geraden der andern Schar des durch die Geraden  $\tau$  bestimmten Hyperboloids zu suchen.

Sei nun  $\tau_1$  irgend eine der Geraden  $\tau$ ,  $c_1$  der Punkt, in welchem sie die Gerade  $c$  trifft. Man kann dann den auf unserer imaginären Geraden  $\gamma$  liegenden Punkt der  $\tau_1$  nur in ganz bestimmter Weise durch einen harmonischen Wurf ( $c_1 b_1 c_1 d_1$ ) darstellen, dessen erstes Glied  $c_1$  ist. Dementsprechend kann die Gerade  $\gamma$  auch nur in ganz bestimmter Weise durch einen harmonischen Wurf dargestellt werden, dessen erstes Glied  $c$  ist: nämlich durch jene vier Geraden ( $c b c d$ ) der andern Regelschar des durch die Geraden  $\tau$  bestimmten Hyperboloids, welche auf  $\tau_1$  den Wurf ( $c_1 b_1 c_1 d_1$ ) ausschneiden.

Damit ist in der That gezeigt, wie man einen harmonischen Wurf findet, der die Gerade  $\gamma$ : ( $a b a b$ ) darstellt, wenn das erste Glied  $c$  dieses Wurfes — mit der oben angegebenen Einschränkung — willkürlich angenommen wird, und dass es nur einen solchen Wurf giebt.

Der Übergang von der ursprünglichen Darstellung: ( $a b a b$ ) unserer imaginären Geraden zweiter Art  $\gamma$  zu einer neuen: ( $c b c d$ ) scheint nun freilich — wie aus der obigen Entwicklung hervorgeht — nicht mehr in linearer Weise durchführbar zu sein, sondern vielmehr die Ausführung einer wesentlich quadratischen Konstruktion zu

fordern.\* Anderseits tritt aber auch, so lange es sich nur um lineare Aufgaben mit imaginären Elementen handelt, niemals die Notwendigkeit ein, einen solchen Übergang zu machen.

Nachdem wir uns so über die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten einer imaginären Geraden zweiter Art durch harmonische Würfe hinreichend orientiert haben — es giebt wie man sieht  $\infty^4$  solcher Darstellungen einer und derselben Geraden —, wenden wir uns wieder unserem eigentlichen Gegenstande zu.

Die linearen Konstruktionen mit imaginären Elementen im Raume werden sämtlich auf lineare Konstruktionen mit reellen Elementen zurückgeführt sein, wenn dies bei den folgenden zwei Aufgaben allgemeinsten Natur gelungen sein wird:

I. Eine imaginäre Gerade zweiter Art  $\gamma : (a\bar{b}a\bar{b})$  mit einer imaginären Ebene  $S_3 : (A_3 B_3 \bar{A}_3 \bar{B}_3)$ , deren reelle Trägeraxe die Gerade  $\sigma_3$  ist, zum Schnitt zu bringen.

II. Dieselbe aus einem imaginären Punkte  $s_3 : (a_3 \bar{b}_3 a_3 \bar{b}_3)$  der auf der reellen Trägergeraden  $\sigma_3$  liegt, zu projizieren.

Wir lösen diese Aufgaben dadurch, dass wir sie auf einfachere Aufgaben, die in diesem Abschnitte bereits gelöst worden sind, zurückführen.

I. Um die erste Aufgabe zu lösen, projiziere man aus einem beliebigen (reellen) Punkte  $o$  der Trägeraxe  $\sigma_3$  die Gerade  $\gamma$  durch die imaginäre Ebene  $[o\gamma]$ ; und zwar stelle man die letztere in der gewöhnlichen Staudtschen Weise durch einen harmonischen Wurf in der ihr zugehörigen Trägergeraden, welche mit  $\sigma_3$  den Punkt  $o$  gemein hat, dar. Da die reellen Trägergeraden der beiden Ebenen  $S_3$  und  $[o\gamma]$  sich im Punkte  $o$  schneiden, kann man nach dem am Eingange dieses Abschnitts Gesagten die reelle Trägerebene  $E$  der Schnittgeraden dieser beiden Ebenen einfach dadurch finden, dass man die Schnittgeraden der gegenüberliegenden Flächen eines gewissen Vierkants mit einander verbindet. Die Ebene  $E$  enthält alles, was den Ebenen  $S_3$  und  $[o\gamma]$  gemeinsam ist, da sie ja durch den Schnitt dieser Ebenen hindurchgeht. Daher enthält sie auch den gesuchten Schnittpunkt von  $S_3$  mit der Geraden  $\gamma$ . Der letztere kann daher als Schnittpunkt der reellen Ebene  $E$  mit der Geraden  $\gamma$  aufgefasst und nach unserer früher angegebenen Methode konstruiert werden.

II. Analog gestaltet sich die Lösung der zweiten Aufgabe:

Man schneide die Gerade  $\gamma$  mit einer beliebig durch die reelle Trägergerade  $\sigma_3$  hindurchgelegten (reellen) Ebene  $E$  im Punkte  $[E\gamma]$ , und stelle diesen in gewöhnlicher Staudt'scher Weise durch einen harmonischen Wurf auf der zugehörigen Trägergeraden, welche natürlich mit  $\sigma_3$  in der Ebene  $E$  liegt, dar. Den reellen Träger  $o$  der Ver-

---

\* Der Verfasser gedenkt in einer folgenden Abhandlung zu zeigen, wie man dennoch diesen Übergang in rein linearer Weise bewerkstelligen kann.

bindungsgeraden der beiden Punkte  $s_3$  und  $[E\gamma]$  findet man nach dem früheren als den Schnittpunkt der Diagonalen eines gewissen Vierseits. Da die genannte Verbindungsgerade offenbar in der gesuchten projizierenden Ebene  $[s_3\gamma]$  liegt, so gilt das nämliche von dem Punkte  $o$ . Die gesuchte projizierende Ebene kann daher als verbindende Ebene des reellen Punktes  $o$  mit der imaginären Geraden  $\gamma$  aufgefasst und nach unserer früheren Methode konstruiert werden.

Alle linearen Konstruktionen mit imaginären Elementen im Raume lassen sich auf die bisher behandelten zurückführen. Zunächst erkennt man, dass die Aufgabe, eine imaginäre Gerade erster Art mit einer imaginären Ebene zu schneiden, oder aus einem imaginären Punkte zu projizieren, nach derselben Methode, nur noch etwas einfacher gelöst werden kann, wie wir sie bei der imaginären Geraden zweiter Art angewendet haben.

Die allgemeine Aufgabe, drei imaginäre

$$\left. \begin{array}{l} \{ \text{Punkte } s_1 s_2 s_3 \text{ durch eine Ebene zu verbinden} \} \\ \{ \text{Ebenen } S_1 S_2 S_3 \text{ zum Schnitt zu bringen} \} \end{array} \right\}$$

wird gelöst, indem man die Gerade

$$\left. \begin{array}{l} \{ [s_1 s_2] \text{ aus dem Punkte } s_3 \text{ projiziert} \} \\ \{ [S_1 S_2] \text{ mit der Ebene } S_3 \text{ schneidet} \} \end{array} \right\}$$

Es könnte vielleicht verwunderlich erscheinen, dass die Forderung, die linearen Konstruktionen mit imaginären Elementen auch auf nur lineare Konstruktionen mit reellen Elementen zurückzuführen, wie sie in dieser Arbeit vollständig gelöst ist, nicht schon früher erhoben und erfüllt worden ist. Die Ursache hiervon dürfte wohl darin zu suchen sein, dass man infolge des stets gleichzeitigen Auftretens von zwei konjugiert-imaginären Elementen sich daran gewöhnt hatte, beim Konstruieren mit imaginären Elementen das Vorkommen von quadratischen Aufgaben als etwas nicht weiter Befremdendes und nicht wohl zu Umgehendes hinzunehmen. Seit aber von Staudt die Trennung der zwei konjugiert imaginären Elemente durchgeführt wurde, wodurch das einzelne imaginäre Element für sich Selbständigkeit gewann, ist die oben ausgesprochene und erfüllte Forderung dringend geworden.

# Neue Methode zur approximativen Integration der Differentialgleichungen einer unabhängigen Veränderlichen.

Von

KARL HEUN

in Berlin.

---

Die Theorie der sogenannten mechanischen Quadraturen hat nach dem Erscheinen der *Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi* von Gauss so vielseitig das Interesse der Mathematiker und Astronomen erregt, dass sowohl die funktionentheoretische Seite des Problems\* als auch die formalen Ausgestaltungen derselben für die Zwecke der praktischen Störungsrechnungen erhebliche Erweiterungen erfahren haben. Dennoch ist gerade das spezielle Gauss'sche Verfahren und seine Verallgemeinerung durch Mehler und Heine nicht immer deutlich genug aus demjenigen Gesichtspunkt betrachtet worden, der in diesen Ideen den hohen praktischen Wert für die explizite Lösung vieler Probleme der angewandten Mathematik erkennen lässt. Der Gebrauch der Gauss'schen Formeln bei numerischen Rechnungen wird durch das Auftreten irrationaler Zahlen an Stelle der gleichmässig fortschreitenden rationalen Argumente so erschwert, dass gerade auf diesem Gebiete der etwa halb so genauen Methode des Cotesius fast ausnahmslos der Vorzug gegeben wurde. Zuweilen besitzt auch die zu integrierende Funktion innerhalb des Integrationsintervalles Unstetigkeitsstellen, wodurch die von Gauss so mühsam berechneten Quadraturkoeffizienten nicht mehr benutzt werden können. Der wesentliche Vorzug der relativ stärksten Näherungsfähigkeit der Gauss'schen Methode tritt erst dann hervor, wenn es nicht unmittelbar darauf ankommt, spezielle Quadraturen numerisch auszuführen, sondern wenn die Aufstellung

---

\* Man vergleiche die übersichtliche Darstellung der Quadraturmethoden von A. Voss in der Encyclopädie der math. Wissensch. Bd. II, A. 2. Leipzig 1899.

allgemeiner Formeln,\* welche variable Parameter (Amplitude beim einfachen Pendel, relative Entfernung der Fäden und Oscillationsamplitude beim Bifilarpendingel) enthalten, das nächste Ziel bildet. Das Verfahren liefert dann in vielen Fällen zweigliedrige allgemeine Formeln, welche innerhalb der Anwendungsgrenzen der Parameter den Bedürfnissen der Praxis vollkommen genügen, oft sogar den strengen Lösungen vorzuziehen sind, weil ihre numerische Auswertung eine einfachere ist.

Dieselbe Auffassung lässt sich auf die im folgenden mitgeteilte Integrationsmethode für Differentialgleichungen übertragen. Man muss jedoch hierbei beachten, dass die Analogie dieses Problems mit dem der Gauss'schen Quadratur keine vollständige ist.

Vor einigen Jahren hat Herr Runge auf einem eigentümlichen induktiven Wege eine dreigliedrige Näherungsformel\*\* zur approximativen Integration von Differentialgleichungen gefunden, welche sich der Simpsonschen Quadraturformel so eng als möglich anschliesst. Es erschien naheliegend, den umfassenderen Gauss'schen Gedanken auf das Gebiet der Differentialgleichungen zu übertragen, und es gelang mir, die Aufgabe unter diesem allgemeinen Gesichtspunkt mit Verwendung der einfachsten analytischen Hilfsmittel zu lösen. Das Runge'sche Resultat tritt natürlich bei dieser Behandlung als ein besonderer Fall auf. In dieser Weise lässt sich die Gesamtheit der Approximationsformeln einer beliebigen Näherungsordnung gewinnen und man kann ohne jede Schwierigkeit die einfachsten Formeln für den praktischen Gebrauch aussondern.

Da die Integration der Differentialgleichungen naturgemäss ein graphisches oder analytisches Fortsetzungsproblem ist, so erscheint es nicht befremdend, dass eine vorgeschriebene Annäherung hier nicht mehr — wie bei den Quadraturen — durch willkürliche Vermehrung der Gliederzahl der Formel, sondern im wesentlichen durch successive Substitutionen erreicht wird. Für jede Anschlussordnung giebt es eine Gruppe von Lösungen, welche die geringste Gliederzahl aufweisen. Bei den Anwendungen ist namentlich die Existenz zweigliedriger Formeln dritter Ordnung von Bedeutung, für welche auch im folgenden ein Zahlenbeispiel mitgeteilt ist.

Funktionentheoretische Betrachtungen habe ich in der vorliegenden Darstellung nur andeutungsweise berührt, weil durch ein näheres Eingehen auf dieselben den praktischen Zwecken nur in geringem Maße gedient wäre. Der Mathematiker weiss sich ohnedies beim Auftreten von singulären Stellen gegebenenfalls leicht zu helfen,

\* Ein Beispiel ist in meiner Programmabhandlung „Untersuchungen über die Gauss'sche Quadraturmethode“, Berlin 1892, mitgeteilt.

\*\* Runge, „Über die numerische Auflösung von Differentialgleichungen“. Math. Ann. Bd. 46, 167—178. Leipzig 1895.

während dem Mindergeübten allgemeine Vorschriften wenig nützen. Die Durchführung von Problemen aus der theoretischen Physik und technischen Mechanik, bei welchen die allgemeinen Integrationsmethoden versagen, ist in Bezug auf das Verhalten der Integralfunktionen, falls die Fortsetzung derselben nach den hier gegebenen Prinzipien bis in die Nähe einer singulären Stelle verlangt wird, wohl immer mit Benutzung der Riemannschen Methoden möglich.

Aus demselben Grunde ist auch die Frage der Fehlerschätzung der — bei den Quadraturmethoden nicht auftretenden — Fehlerhäufung nur kurz behandelt.

Die Lösung eines umfangreichen Problems aus der technischen Mechanik (Zugbewegung auf einem Geleise mit doppelt gekrümmter Bahnaxe) durch Anwendung der hier gegebenen Integrationsmethoden werde ich demnächst in einer besonderen Arbeit mitteilen.

1. Die Derivirten der abhängigen Veränderlichen. Die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung von der Form

$$1) \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

ist gleichbedeutend mit der Aufgabe, die Funktion  $y = F(x)$  von einer beliebigen Anfangsstelle  $x$ , für welche der Wert von  $y$  gegeben ist, bis zu einer beliebigen anderen Stelle  $x + \Delta x$  — der Gleichung 1) gemäss — graphisch oder analytisch fortzusetzen. Wir benutzen zur analytischen Behandlung das nächstliegende Hilfsmittel, die Taylor'sche Entwicklung in der Form

$$2) \quad y_{x+\Delta x} = y + y' \cdot \Delta x + \frac{1}{2!} y'' \cdot \Delta x^2 + \dots + \frac{1}{n!} y^{(n)} \cdot \Delta x^n + R_n,$$

wo  $R_n$  das Ergänzungsglied bedeutet, dem wir an dieser Stelle keine bestimmte Form vorzuschreiben brauchen.

Die successiven Derivirten  $y', y'' \dots$  sind aus der Gleichung 1) zu entnehmen. Um die definitive Darstellung derselben ohne unnütze Weitläufigkeiten zu gewinnen, mögen zur Abkürzung der Schreibweise die folgenden gebräuchlichen Symbole benutzt werden. Wir setzen

$$\frac{\partial^{\lambda+\mu}}{\partial x^\lambda \partial y^\mu} f(x, y) = f_{\lambda\mu} \quad \text{und} \quad Df = \left( \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} \right) f.$$

Dementsprechend ist

$$D^2 f = f_{20} + 2ff_{11} + f^2 f_{02}, \quad \text{etc.}$$

Hiernach ergibt sich durch direkte Ausführung der Differentiation und Elimination mit Hilfe der Gleichung 1):

$$3) \quad \begin{cases} y'' = Df, \\ y''' = \frac{d}{dx} Df = D^2 f + f_{01} Df, \\ y^{IV} = \frac{d}{dx} D^2 f + f_{01} Df + (f_{11} + f_{02} f) Df. \end{cases}$$

Nun ist aber  
und

$$f_{11} + ff_{02} = Df_{01},$$

$$\frac{d}{dx} D^2 f = D^3 f + 2 Df_{01} Df.$$

Folglich hat man endgiltig

$$4) \quad y^{IV} = D^3 f + f_{01} D^2 f + f_{01}^2 Df + 3 Df_{01} Df.$$

Die explicite Darstellung von  $y^V$  ist naturgemäss etwas mühsamer. Mit Benutzung der Formel

$$\frac{d}{dx} D^3 f = D^4 f + 3 D^2 f_{01} Df$$

erhält man zunächst

$$y^V = D^4 f + 3 D^2 f_{01} Df + f_{01} (D^3 f + 2 Df_{01} Df) \\ + Df_{01} D^2 f + f_{01}^2 (D^2 f + f_{01} Df) \\ + 2 f_{01} Df_{01} Df + 3 Df_{01} (D^2 f + f_{01} Df) + 3 Df \cdot \frac{d}{dx} Df_{01}.$$

Durch direkte Differentiation findet man

$$\frac{d}{dx} D_{01} = D^2 f_{01} + f_{02} Df.$$

Hierdurch nimmt  $y^V$  die folgende Form an

$$5) \left\{ \begin{aligned} y^V = & D^4 f + f_{01} D^3 f + f_{01}^2 D^2 f + f_{01}^3 Df \\ & + 4 Df_{01} D^2 f + 6 Df D^2 f_{01} + 7 f_{01} Df Df_{01} + 3 f_{02} Df Df. \end{aligned} \right.$$

Hätte man das Symbol  $D$  nicht eingeführt, so würde die Darstellung dieser Derivirten bereits 34 Glieder ergeben haben.

Aus den bisherigen Entwicklungen kann man erkennen, wie die weiteren Derivirten beschaffen sind und dass, mit Beziehung der kombinatorischen Zahlen, das allgemeine Gesetz der Anordnung der Glieder in der gewählten symbolischen Form ausdrückbar ist. Es erscheint jedoch für den vorliegenden Zweck nicht angebracht, hierauf weiter einzugehen, da bei der Ableitung der Integralformeln, soweit sie praktisch anwendbar sind, keine höheren Derivirten als die entwickelten berücksichtigt zu werden brauchen.

2. Die Problemstellung. Der Gauss'schen Quadraturmethode kann man die folgende Fassung geben. Wenn die Funktion  $y$  durch die Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

charakterisiert ist, so sollen die Zahlen  $\alpha$  und  $\varepsilon$  so bestimmt werden, dass

$$\Delta y = \sum_{v=1}^{v=n} \alpha_v f(x + \varepsilon_v \Delta x) \cdot \Delta x$$

eine möglichst genaue Anschlussdarstellung für  $y$  innerhalb des Intervalls  $\Delta x$  herstellt. Dieser Forderung entsprechen eine gewisse Anzahl von Bestimmungsgleichungen für die gesuchten Grössen  $\alpha$  und  $\varepsilon$ . Die



$$\sum \alpha = 1, \quad \sum \alpha \varepsilon = \frac{1}{2} \cdots \quad (a)$$

genügen. Eine vollständige Übereinstimmung bis zur dritten Ordnung ist auf diesem Wege nicht erreichbar. Die Gleichungen (a) enthalten  $2n$  Unbekannte. Folglich  $n \leq 1$ . Für  $n > 1$  müssen willkürliche Bedingungen hinzutreten. In dem einfachsten Falle  $n = 1$  erhalten wir  $\alpha = 1$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  und die entsprechende Approximationsformel

$$I) \quad \Delta y = f\left(x + \frac{1}{2} \Delta x, y + \frac{1}{2} f \cdot \Delta x\right) \cdot \Delta x$$

Setzen wir  $n = 2$ , so müssen die Gleichungen

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \alpha_1 \varepsilon_1 + \alpha_2 \varepsilon_2 = \frac{1}{2}$$

erfüllt sein.

Die willkürliche Annahme  $\alpha_1 = \alpha_2$  liefert die Formel:

$$II) \quad \Delta y = \frac{1}{2} \{f(x, y) + f(x + \Delta x, y + f \cdot \Delta x)\} \cdot \Delta x.$$

Für  $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}$ ,  $\varepsilon_2 = \frac{2}{3}$ , also für eine gleichmässige Teilung des Argumentintervalls folgt:

$$III) \quad \Delta y = \frac{1}{2} \left\{ f\left(x + \frac{1}{3} \cdot \Delta x, y + \frac{1}{3} f \cdot \Delta x\right) + f\left(x + \frac{2}{3} \Delta x, y + \frac{2}{3} f \cdot \Delta x\right) \right\} \cdot \Delta x.$$

Bei Benutzung eines rückwärtsliegenden Funktionalwertes empfiehlt es sich,  $\varepsilon_1 = -1$ ,  $\varepsilon_2 = +1$  zu setzen. Man erhält dann

$$IV) \quad \Delta y = \frac{1}{4} \{f(x - \Delta x, y - f \cdot \Delta x) + 3f(x + \Delta x, y + f \cdot \Delta x)\} \cdot \Delta x.$$

Der vorwärtsliegende Integrationswert hat also hier das dreifache Gewicht des rückwärtsliegenden.

Will man für  $n = 2$  den engsten Anschluss an die analoge Gauss'sche Quadraturformel erreichen, so nehme man zu den Gleichungen (a) noch die folgenden

$$\sum \alpha \varepsilon^2 = \frac{1}{3}, \quad \sum \alpha \varepsilon^3 = \frac{1}{4}$$

hinzu. Dann wird

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{4};$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} \sqrt{3}\right), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3} \sqrt{3}\right)$$

und man erhält die symmetrische Formel

$$V) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta y = \frac{1}{2} \{f(x + \varepsilon_1 \Delta x, y + \varepsilon_1 f \cdot \Delta x) \\ + f(x + \varepsilon_2 \Delta x, y + \varepsilon_2 f \cdot \Delta x)\} \Delta x, \end{array} \right.$$

worin  $\varepsilon_1 = 0.2113 \dots$ ,  $\varepsilon_2 = 0.7887 \dots$  zu nehmen ist.

Die Zahlwerte der  $\varepsilon$  sind dieselben, welche Gauss (Werke 3, 193) bei der entsprechenden Quadraturformel giebt. Der Fehler in dritter Ordnung (correctio proxima) ist bestimmt durch den Ausdruck

$$C_\xi = \frac{1}{3!} f_0, Df \cdot \Delta x^3.$$

Ist  $f(x, y)$  von  $y$  unabhängig, so wird  $f_{01} = f_{02} = 0$  und die Gleichung V) geht direkt in die Gauss'sche Formel über, womit aber auch zugleich das Gebiet der Differentialgleichungen verlassen ist.

Bei der Anwendung wird man sich am bequemsten der Gleichung I) bedienen, wenn man es nicht vorzieht, eine schärfer konvergierende Darstellung zu benutzen oder bei diesem geringen Genauigkeitsgrad zu der fast gleichwertigen graphischen Integration greift.

4. Approximationen dritter Ordnung. Die hierher gehörenden Formeln kommen am meisten für die Anwendungen in Betracht, da ihr Bau noch ein einfacher und doch bereits eine in vielen Fällen genügende Konvergenz vorhanden ist. Ihre allgemeine Form ist durch die Ausdrücke

$$\Delta y = \sum \alpha f(x + \varepsilon \Delta x, y + \Delta' y) \cdot \Delta x$$

$$\Delta' y = \varepsilon f(x + \varepsilon' \Delta x, y + \varepsilon' f \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$$

charakterisiert.

Die Entwicklung nach dem Taylorschen Satz giebt

$$6) \left\{ \begin{aligned} \Delta y &= \sum \alpha \cdot f \Delta x + \sum \alpha \{ \varepsilon f_{10} \Delta x + f_{01} \Delta' y \} \Delta x \\ &+ \frac{1}{2!} \sum \alpha \{ \varepsilon^2 \cdot f_{20} \Delta x^2 + 2 \varepsilon f_{11} \Delta x \Delta' y + f_{02} \Delta' y^2 \} \Delta x \\ &+ \frac{1}{3!} \sum \alpha \{ \varepsilon^3 f_{30} \Delta x^3 + 3 \varepsilon^2 f_{21} \Delta x^2 \Delta' y \\ &+ 3 \varepsilon \cdot f_{12} \Delta x \Delta' y' + f_{03} \Delta' y^3 \} \cdot \Delta x + \dots \end{aligned} \right.$$

und

$$\Delta' y = \varepsilon \cdot \left\{ f + \varepsilon' Df \cdot \Delta x + \frac{\varepsilon'^2}{2!} D^2 f \cdot \Delta x^2 + \dots \right\} \cdot \Delta x.$$

Folglich

$$\Delta' y^2 = \varepsilon^2 \{ f^2 + 2f Df \cdot \Delta x + \dots \} \Delta x^2,$$

$$\Delta' y^3 = \varepsilon^3 f^3 \Delta x^3 + \dots$$

Hiermit nimmt  $\Delta y$  die Form an

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sum \alpha f \cdot \Delta x + \sum \alpha \varepsilon Df \cdot \Delta x^2 \\ &+ \frac{1}{2!} \left\{ 2 \sum \alpha \varepsilon \varepsilon' f_{01} Df + \sum \alpha \varepsilon^2 D^2 f \right\} \Delta x^3 \\ &+ \frac{1}{3!} \left\{ 3 \sum \alpha \varepsilon \varepsilon'^2 f_{01} D^2 f + 6 \sum \alpha \varepsilon^2 \varepsilon' Df_{01} Df \right. \\ &\quad \left. + \sum \alpha \varepsilon^3 D^3 f \right\} \Delta x^4 + \dots \end{aligned}$$

Da das Glied  $f_{01}^2 Df$  in dem Faktor von  $\Delta x^4$  nicht vorkommen kann, so ist auf diesem Wege keine vollständige Näherung bis zum Gliede vierter Ordnung möglich. Nehmen wir also zunächst auf das vierte Glied keine Rücksicht, so erhalten wir die folgenden vier Bedingungsgleichungen für die  $\alpha$ ,  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$ :

$$7) \quad \sum \alpha = 1, \quad \sum \alpha \varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \sum \alpha \varepsilon^2 = \frac{1}{3}, \quad \sum \alpha \varepsilon \varepsilon' = \frac{1}{6}.$$

Für  $n = 2$  hat man sechs Unbekannte, so dass man zu diesen Gleichungen noch Bedingungen hinzufügen kann. Setzt man z. B.  $\varepsilon_1 = 0$ , so sind die übrigen Koeffizienten aus den Gleichungen

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \quad \varepsilon_2 \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_2^2 \alpha_2 = \frac{1}{3}, \quad \alpha_2 \varepsilon_2 \varepsilon'_2 = \frac{1}{6}$$

zu bestimmen. Es ergibt sich

$$\varepsilon_2 = \frac{2}{3}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{3}{4}, \quad \varepsilon'_2 = \frac{1}{3}$$

und hieraus resultiert die für die Anwendungen sehr bequeme Formel

$$VI) \quad \begin{cases} \Delta y = \frac{1}{4} \left\{ f(x, y) + 3f\left(x + \frac{2}{3} \Delta x, y + \Delta' y\right) \right\} \cdot \Delta x \\ \Delta' y = \frac{2}{3} f\left(x + \frac{1}{3} \Delta x, y + \frac{1}{3} f \cdot \Delta x\right) \cdot \Delta x. \end{cases}$$

Als Beispiel möge die Integration der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \sqrt{0.25 - (x - y)^2}}$$

dienen. Die Resultate sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

$x$	$f$	$x + \frac{1}{3} \Delta x$	$y + \frac{1}{3} f \cdot \Delta x$	$\Delta' y$	$y + \Delta' y$	$x + \frac{2}{3} \Delta x$	$\Delta y$	$y$	Corr.
0.0	0.6667	0.1	0.0667	0.1334	0.1334	0.2	0.2004	0.0000	
0.3	0.6711	0.4	0.2675	0.1350	0.3354	0.5	0.2032	0.2004	0.0001
0.6	0.6884	0.7	0.4721	0.1384	0.5420	0.8	0.2089	0.4036	0.0001
0.9	0.7092	1.0	0.6834	0.1440	0.7565	1.1	0.2182	0.6125	0.0001
1.2								0.8307	0.0001

Die Rechnung ist mit  $y = 0$  für  $x = 0$  begonnen und mit vierstelligen Logarithmen durchgeführt. Der Fehler nach vier Fortsetzungen ist verschwindend klein.

Die Annahme  $\alpha_1 = \alpha_2$  führt zu einer anderen zweigliedrigen Formel, welche den Vorzug der vollständigen Symmetrie besitzt.

Aus den Gleichungen

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 1, \quad \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 = \frac{2}{3}, \quad \varepsilon_1 \varepsilon'_1 + \varepsilon_2 \varepsilon'_2 = \frac{1}{3}$$

folgt dann für  $\varepsilon'_2 = \varepsilon'_1$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{3} \sqrt{3} \right), \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{3} \sqrt{3} \right), \quad \varepsilon'_1 = \varepsilon'_2 = \frac{1}{6} \sqrt{3}$$

und man erhält

$$\text{VII) } \begin{cases} \Delta y = \frac{1}{2} \{ f(x + \varepsilon_1 \Delta x, y + \Delta'_1 y) + f(x + \varepsilon_2 \Delta x, y + \Delta'_2 y) \} \Delta x \\ \Delta'_1 y = \varepsilon_1 f \left( x + \frac{1}{6} \Delta x, y + \frac{1}{6} f \cdot \Delta x \right) \Delta x \\ \Delta'_2 y = \varepsilon_2 f \left( x + \frac{1}{6} \Delta x, y + \frac{1}{6} f \cdot \Delta x \right) \Delta x \end{cases}$$

Für  $n = 3$  hat man neun unbekannte Grössen. Wir fügen deshalb willkürlich die Bestimmungen

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_3 = 1, \quad \varepsilon'_1 = 0, \quad \varepsilon'_2 = 0$$

hinzu und erhalten

$$\alpha_1 = \frac{1}{6}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{1}{6}, \quad \varepsilon'_3 = 1.$$

Die entsprechende Formel für  $\Delta y$  ist die von Herrn Runge gefundene, nämlich

$$\text{VIII) } \begin{cases} \Delta y = \frac{1}{6} \left\{ f(x, y) + 4f \left( x + \frac{1}{2} \Delta x, y + \frac{1}{2} f \cdot \Delta x \right) \right. \\ \quad \left. + f(x + \Delta x, y + f \cdot \Delta x) \right\} \Delta x \\ \Delta' y = f(x + \Delta x, y + f \cdot \Delta x) \Delta x. \end{cases}$$

Der mittlere Interpolationswert hat also das vierfache Gewicht der andern.

Die Annahme

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 = \alpha_3$$

gibt

$$\alpha_1 = \frac{2}{3}, \quad \alpha_2 = -\frac{1}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{2}{3}, \quad \varepsilon'_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_3$$

und die symmetrische Formel

$$\text{IX) } \begin{cases} \Delta y = \frac{2}{3} \left\{ f \left( x - \frac{1}{2} \Delta x, y - \Delta' y \right) - \frac{1}{2} f(x, y) \right. \\ \quad \left. + f \left( x + \frac{1}{2} \Delta x, y + \Delta' y \right) \right\} \\ \Delta' y = \frac{1}{2} f \left( x + \frac{1}{4} \Delta x, y + \frac{1}{4} f \cdot \Delta x \right) \Delta x. \end{cases}$$

Ebenso einfach erhält man für

$$\varepsilon_1 = -1, \quad \varepsilon_2 = 0, \quad \varepsilon_3 = 1, \quad \varepsilon'_2 = 0$$

aus den Bedingungsgleichungen die Werte der übrigen Koeffizienten, nämlich

$$\alpha_1 = -\frac{1}{12}, \quad \alpha_2 = \frac{2}{3}, \quad \alpha_3 = \frac{5}{12}, \quad \varepsilon'_1 = \varepsilon'_3 = \frac{1}{3}$$

und die Integrationsgleichung



Die Einsetzung in Gleichung (b) ergibt dann

$$\begin{aligned} \Delta y = & \sum \alpha \{ f + \varepsilon Df \cdot \Delta x + \frac{1}{2!} [\varepsilon^2 D^2 f + 2 \varepsilon \varepsilon' f_{01} Df] \Delta x^2 \\ & + \frac{1}{3!} [\varepsilon^3 D^3 f + 3 \varepsilon \varepsilon' f_{01} D^2 f + 6 \varepsilon \varepsilon' \varepsilon'' f_{01} Df \\ & + 6 \varepsilon^2 \varepsilon' Df Df_{01}] \Delta x^3 + \dots \} \Delta x. \end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, dass der vollständige Wert von  $y^v$  auf diesem Wege nicht zu erreichen ist. Die Vergleichung des vorstehenden Ausdrucks mit der direkten Taylorschen Entwicklung liefert die acht Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} \sum \alpha &= 1, & \sum \alpha \varepsilon &= \frac{1}{2}, \\ \sum \alpha \varepsilon^2 &= \frac{1}{3}, & \sum \alpha \varepsilon^3 &= \frac{1}{4}, & \sum \alpha \varepsilon \varepsilon' &= \frac{1}{6}, \\ \sum \alpha \varepsilon \varepsilon'^2 &= \frac{1}{12}, & \sum \alpha \varepsilon \varepsilon' \varepsilon'' &= \frac{1}{24}, & \sum \alpha \varepsilon^2 \varepsilon' &= \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Um eine einfache numerische Lösung dieser Gleichung zu gewinnen, setzen wir  $n = 3$  ( $n = 2$  ist nicht zulässig, da die  $\varepsilon'$  drei Gleichungen genügen müssen) und nehmen die Gleichungen

$$\sum \alpha \varepsilon^4 = \frac{1}{5}, \quad \sum \alpha \varepsilon^5 = \frac{1}{6}$$

zu den vier ersten hinzu. Hierdurch wird die Ordnung der Annäherung nicht beeinflusst, weil die notwendigen Bedingungen erfüllt sind. Aus der Gauss'schen Arbeit (Werke 3, 193) folgt dann sofort

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{5}{18}, & \alpha_2 &= \frac{4}{9}, & \alpha_3 &= \frac{5}{18}, \\ \varepsilon_1 &= 0,1127; & \varepsilon_2 &= 0,5; & \varepsilon_3 &= 0,8873. \end{aligned}$$

Die  $\varepsilon'$  bestimmen sich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha_1 \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1' + \alpha_2 \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2' + \alpha_3 \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_3' &= \frac{1}{6} \\ \alpha_1 \varepsilon_1^2 \cdot \varepsilon_1' + \alpha_2 \varepsilon_2^2 \cdot \varepsilon_2' + \alpha_3 \varepsilon_3^2 \cdot \varepsilon_3' &= \frac{1}{8} \\ \alpha_1 \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_1'^2 + \alpha_2 \varepsilon_2 \cdot \varepsilon_2'^2 + \alpha_3 \varepsilon_3 \cdot \varepsilon_3'^2 &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Die Auflösung derselben ergibt:

$$\varepsilon_1' = 1,2268, \quad \varepsilon_2' = -0,0798, \quad \varepsilon_3' = 0,5921.$$

Endlich folgt aus der Gleichung:

$$\alpha_1 \varepsilon_1 \varepsilon_1' \varepsilon_1'' + \alpha_2 \varepsilon_2 \varepsilon_2' \varepsilon_2'' + \alpha_3 \varepsilon_3 \varepsilon_3' \varepsilon_3'' = \frac{1}{24},$$

wenn wir  $\varepsilon_1'' = \varepsilon_3'' = 0$  setzen,  $\varepsilon_2'' = -2,3495$ .

Die entsprechende Approximationsformel vierter Ordnung heisst also:

$$X) \left\{ \begin{array}{l} \Delta y = \frac{1}{18} \left\{ 5f(x + \varepsilon_2 \Delta x, y + \Delta'_1 y) + 8f\left(x + \frac{1}{2} \Delta x, y + \Delta'_2 y\right) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \left. + 5f(x + \varepsilon_3 \Delta x, y + \Delta'_3 y) \right\} \Delta x, \\ \Delta'_1 y = \varepsilon_1 f(x + \varepsilon'_1 \Delta x, y + \Delta''_1 y) \Delta x, \\ \Delta''_1 y = \varepsilon'_1 f(x, y) \Delta x, \\ \Delta'_2 y = \frac{1}{2} f(x + \varepsilon'_2 \Delta x, y'' + \Delta''_2 y) \Delta x, \\ \Delta''_2 y = \varepsilon'_2 f(x + \varepsilon''_2 \Delta x, y + \varepsilon'' f \Delta x) \Delta x \\ \Delta'_3 y = \varepsilon'_3 f(x + \varepsilon'_3 \Delta x, y + \Delta''_3 y) \Delta x, \\ \Delta''_3 y = \varepsilon'_3 f(x, y) \Delta x. \end{array} \right.$$

Die Aufstellungen anderer Formeln derselben Ordnung wollen wir unterlassen, weil man sich dieselben gegebenen Falls, den speziellen Anforderungen entsprechend, ohne Schwierigkeit entwickeln kann.

6. Integration der Simultansysteme von Differentialgleichungen erster Ordnung. Die Gesamtheit der bisherigen Betrachtungen, welche sich unmittelbar auf eine Differentialgleichung erster Ordnung bezogen, lässt sich ohne weiteres auf ein System von der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y) \quad f(x, y, z) \quad g(x, y, z)$$

übertragen. Was zunächst die Bildung der Derivirten anlangt, so hat man

$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f + \frac{\partial f}{\partial z} g = Df,$$

$$z'' = \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} f + \frac{\partial g}{\partial z} g = Dg,$$

wo also

$$D = \frac{\partial}{\partial x} + f \frac{\partial}{\partial y} + g \frac{\partial}{\partial z}$$

gesetzt ist.

Hieraus folgt durch nochmaliges Differenzieren:

$$y''' = D^2 f + \frac{\partial f}{\partial y} Df + \frac{\partial f}{\partial z} Dg$$

und

$$z''' = D^2 g + \frac{\partial g}{\partial y} Df + \frac{\partial g}{\partial z} Dg.$$

Für die Näherungsformeln dritter Ordnung hat man nun den allgemeinen Ansatz:

$$\begin{aligned}\Delta y &= \sum \alpha f(x + \varepsilon \Delta x, y + \Delta' y, z + \Delta' z) \Delta x \\ \Delta' y &= \varepsilon f(x + \varepsilon' \Delta x, y + \varepsilon' f \cdot \Delta x, z + \varepsilon' g \cdot \Delta x) \Delta x \\ \Delta z &= \sum \alpha g(x + \varepsilon \Delta x, y + \Delta' y, z + \Delta' z) \Delta x \\ \Delta' z &= \varepsilon g(x + \varepsilon' \Delta x, y + \varepsilon' f \cdot \Delta x, z + \varepsilon' g \cdot \Delta x) \Delta x.\end{aligned}$$

Die Entwicklung von  $\Delta y$  und  $\Delta z$  ergibt dann

$$\begin{aligned}\Delta y &= \sum \alpha f \cdot \Delta x + \sum \alpha \{ \varepsilon f_{100} \cdot \Delta x + f_{010} \Delta' y + f_{001} \Delta' z \} \Delta x \\ &+ \frac{1}{2!} \sum \alpha \{ \varepsilon^2 f_{200} \Delta x^2 + 2 \varepsilon f_{110} \Delta x \Delta' y + 2 \varepsilon f_{101} \Delta x \Delta' z + f_{020} \Delta' y^2 \\ &\quad + 2 f_{011} \Delta' y \Delta' z + f_{002} \Delta' z^2 \} \Delta x + \dots\end{aligned}$$

und einen analogen Ausdruck für  $\Delta z$ .

Nach Einsetzung der Werte von  $\Delta' y$  und  $\Delta' z$  folgt unmittelbar

$$\begin{aligned}\Delta y &= \sum \alpha f \cdot \Delta x + \sum \alpha \varepsilon Df \cdot \Delta x^2 + \frac{1}{2!} \{ \alpha \varepsilon^2 D^2 f + 2 \alpha \varepsilon \varepsilon' (f_{010} Df \\ &\quad + f_{001} Dg) \} \cdot \Delta x^3 + \dots\end{aligned}$$

Die Übereinstimmung dritter Ordnung wird ganz ebenso wie früher erreicht, wenn man

$$\sum \alpha = 1, \quad \sum \alpha \varepsilon = \frac{1}{2}, \quad \sum \alpha \varepsilon^2 = \frac{1}{3}, \quad \sum \alpha \varepsilon \varepsilon' = \frac{1}{6}$$

setzt, und die früher entwickelten Formeln lassen sich demnach ohne Änderung der Koeffizienten auf ein beliebiges Simultansystem von Differentialgleichungen erster Ordnung übertragen.

7. Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

schreiben wir in der Form

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad \frac{dz}{dx} = f(x, y, z) = z'$$

und erhalten die Näherungsformeln dritter Ordnung:

$$\begin{aligned}\Delta y &= \sum \alpha z \cdot \Delta x + \sum \alpha \Delta' z \cdot \Delta x \\ \Delta z &= \sum \alpha f(x + \varepsilon \Delta x, y + \Delta' y, z + \Delta' z) \cdot \Delta x \\ \Delta' y &= \varepsilon (z + \varepsilon' z' \cdot \Delta x) \cdot \Delta x \\ \Delta' z &= \varepsilon f(x + \varepsilon' \Delta x, y + \varepsilon' z \cdot \Delta x, z + \varepsilon' z' \cdot \Delta x) \Delta x.\end{aligned}$$

3\*

Ganz analog verfährt man bei Gleichungen, welche höhere Derivierten enthalten. Es ist hierbei natürlich immer vorausgesetzt, dass die allgemeinen Integrationsmethoden versagen. Wendet man das hier gegebene Verfahren z. B. auf lineare Differentialgleichungen mit rationalen oder algebraischen Koeffizienten an, so ergeben sich Formeln, welche in einfacherer Weise aus den Reihenentwickelungen folgen. In der technischen Mechanik sind diese Näherungsformeln jedoch von grossem Wert.

8. Berücksichtigung der Unstetigkeitsstellen. Bei der näherungsweise Integration der einfachen Gleichung  $y' = f(x, y)$  tritt bei fortgesetzter Anwendung der Formeln häufig der Fall ein, dass  $y'$  grösser als die Einheit wird. Herr Runge empfiehlt in der angeführten Arbeit, alsdann die Variablen zu vertauschen. Bei Differentialgleichungen höherer Ordnung verlangt dieses Hilfsmittel natürlich eine Transformation, die gelegentlich unbequeme Rechnungen im Gefolge haben kann. Nähert man sich einer Unstetigkeits- oder Verzweigungsstelle ( $a$ ), was mir bisher praktisch nur bei einer Aufgabe aus der Induktionslehre vorgekommen ist, bei welcher hypothetisch punktuelle magnetische Pole vorausgesetzt waren, so wird man sich ohne Schwierigkeit durch Einführung einer neuen abhängigen Veränderlichen  $z$  durch die bekannte Substitution  $y = (x - a)^k \cdot z$  helfen können. Der Index  $k$  ist dann aus der Natur der Aufgabe bekannt oder muss versuchsweise passend angenommen werden. Bei dynamischen Problemen aus der technischen Mechanik, wo die Kraftfelder graphisch gegeben sind, scheinen derartige Schwierigkeiten — auch bei Berücksichtigung der Reibungen — nicht aufzutreten. Es ist deshalb verfrüht, jetzt schon Untersuchungen über diesen Punkt anzustellen.

9. Fehlerschätzung und Fehlerhäufung. Um eine obere Grenze für den Fehler einer Approximation  $m^{\text{ter}}$  Ordnung zu erhalten, würde — unter den hier gemachten Voraussetzungen — die Kenntnis von  $y^{(m+1)}$ , im Falle einer abhängigen Veränderlichen, ausreichen. Diese Derivirte ist aber hier nur mit einer gewissen Annäherung zu erhalten. Denken wir uns durch successive Fortsetzungen eine Darstellung der Funktion  $y$  in der Form

$$\begin{array}{ccccccc} x, & x + \Delta x, & x + 2\Delta x, & x + 3\Delta x \dots & & & \\ y_0, & y_1, & y_2, & y_3 \dots & & & \end{array}$$

berechnet, so erscheint es am naheliegendsten, zunächst die Differenzen  $\Delta y$ ,  $\Delta_2 y$  etc. für das Ende (oder den ganzen Verlauf der Funktion) zu bilden und daraus die Werte der  $(m+1)^{\text{ten}}$  Derivierten nach den bekannten Interpolationsformeln herzuleiten. Der so erhaltene Wert

ist aber wegen der Fehler, die den  $y$  anhaften, durch einen Fehler gleicher Ordnung getrübt. Immerhin gewinnt man auf diese Weise Resultate, welche eine gewisse Fehlerschätzung erlauben. In praktischen Fällen, auf die es hier nur ankommt, scheint mir ein einfacheres Verfahren genügende Sicherheit gegen übermäßig stark anwachsende Fehler, die hier gar nicht unmittelbar zu bemerken sind, zu gewähren. Man bestimmt nämlich durch Interpolation nur die fortlaufende Reihe der  $y'$  für die verschiedenen Intervalle und vergleicht die so erhaltenen Werte mit den entsprechenden, bereits bekannten Werten von  $f(x, y)$ . Ist diese Übereinstimmung eine gute, so hat man sicher keinen beträchtlichen Fehler und kann ohne Bedenken weiter integrieren. Wachsen jedoch die Abweichungen über die zulässigen Grenzen, dann muss man sich dazu bequemen, das Argumentintervall  $\Delta x$  von einer bestimmten (leicht erkennbaren) Stelle ab zu verkleinern und die Rechnung von hier an zu wiederholen. Alle diese Schwierigkeiten liegen natürlich im Begriff der Differentialgleichung, welche eine allgemeine Integration nicht zulässt. Bei Quadraturen treten sie nicht auf, weil man hier die zur Verwendung kommenden Ordinaten stets als exakte Werte annimmt.

10. Graphische Integrationsmethode. Anhangsweise möge noch ein ganz elementares, geometrisches Verfahren angeführt werden, welches mit dem vorstehend entwickelten in keinem Zusammenhang steht, aber zuweilen in Verbindung mit den analytischen Methoden bei der Durchführung technischer Aufgaben recht brauchbar ist. Nehmen wir nämlich in der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) = p$$

für  $p$  eine in gleichen Intervallen fortlaufende Wertreihe  $p_0$  (den Anfangswerten von  $x$  und  $y$  entsprechend)  $p_1, p_2$  etc. an, dann stellen die Gleichungen

$$p_0 = f(x, y),$$

$$p_1 = f(x, y), \dots$$

ein Kurvensystem vor, welches den Niveaulinien einer Landkarte vergleichbar ist. Die Integrallinie  $y = F(y)$  durchsetzt diese Kurven unter Winkeln, deren Tangenten  $p_0, p_1, \dots$ , sind.

Ist  $A$  der Ausgangspunkt der Integration, so ziehen wir von  $A$  aus einen Strahl unter dem Winkel, dessen Tangente  $p_0$  ist und zwar geschieht dies am bequemsten mit Hilfe eines Blättchens Pauspapier, auf welchem die Tangenten graphisch von 0—1 gehend auf einer Ordinaten am rechten Rande aufgetragen sind. Von der  $p_1 = f(x, y)$  entsprechenden Niveaukurve brauchen wir nur ein ganz kleines Stückchen  $PQ$  zu kennen. Bei einiger Übung trifft man leicht zwei nahe zusammenliegende Punkte  $PQ$ , so dass man die

geradlinige Verbindung dieser Punkte als Element der Niveau-kurve betrachten kann. Der Schnittpunkt  $B$  desselben mit dem Strahl ist der zweite Punkt der Integralkurve. So fährt man fort und gelangt zu einer oft recht gut brauchbaren graphischen Darstellung des Integralverlaufs. Dieses primitive Verfahren kann natürlich in der vorliegenden Form auf Neuheit keinen Anspruch machen, lässt sich aber mit Benutzung der graphischen Methoden von Lalanne, Lallemand und D'Ocagne ohne Schwierigkeit auf Simultansysteme von Differentialgleichungen ausdehnen und zur Lösung von dynamischen Problemen aus der technischen Mechanik verwerten, namentlich wenn die Zahlwerte, welche die Praxis an die Hand giebt, innerhalb weiterer Grenzen unsicher sind.

---

# Synthetische Betrachtung eines in sich bewegten Fadens.

Von

J. JUNG

in Pilsen.

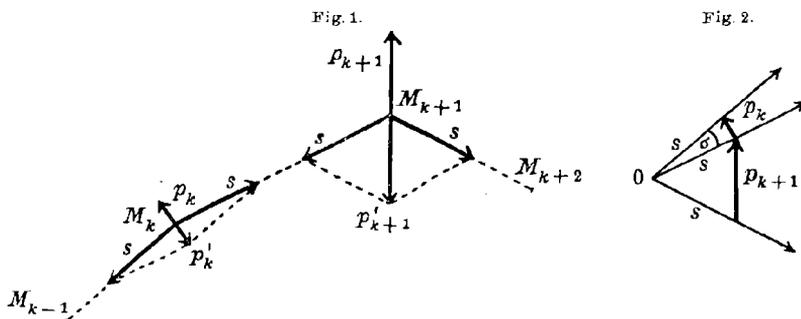
---

Dass ein vollkommen biegsamer, unausdehnbarer, homogener Faden entlang der Kurve sich bewegt, mit welcher er ursprünglich zusammenfiel, sobald ihm ein Antrieb dazu gegeben wird, vorausgesetzt, dass jene Kurvenform eine Gleichgewichtslage für ihn ist mit Rücksicht auf die von aussen her wirkenden Fernkräfte und die etwa stützenden völlig glatten Flächen, und dass an seinen freien Enden gewisse Tangentialkräfte wirken, falls er ungeschlossen ist, wird auf analytischem Wege abgeleitet beispielsweise im zweiten Bande von Rouths „Dynamik der Systeme starrer Körper“ (autorisierte deutsche Übersetzung von A. Schepp, Leipzig 1898, Teubner) auf Seite 447 fig. Bei der daselbst gegebenen Herleitung des Satzes aus den allgemeinen Differentialgleichungen für die Fadenbewegung unter Einfluss irgend welcher Kräfte kann die grosse Einfachheit des Problems einer solchen stationären Bewegung nicht in dem Maße zutage treten, wie bei der folgenden geometrischen Behandlung einer zunächst etwas anders gestellten Frage, nämlich der Frage nach demjenigen System von unendlich kleinen Kräften, welche in den Elementen eines Fadens von beliebiger Kurvenform normal angreifend vermöge der Verbindung ihrer Angriffspunkte durch den Faden einander stets das Gleichgewicht halten, sobald im Falle von Knickungen gewisse endliche Kräfte an den Stellen der letzteren angebracht werden ebenso wie an den etwa freien Fadenenden.

Als Antwort ergibt sich sofort, dass das fragliche Kräftesystem kein anderes ist als dasjenige der Fliehkräfte, die bei gleich rascher Bewegung aller Elemente des homogenen Fadens, also Verschiebung des Fadens in sich selbst, wirklich auftreten müssen. Sind dann noch andere Kräfte von aussen her angenommen, so wird allerdings das Beharren des in Bewegung gesetzten Fadens längs der anfangs schon mit ihm zusammenfallenden Raumkurve nur dann möglich sein, wenn für sich die äusseren Kräfte an dieser Form des Fadens im Gleich-

gewicht sind, da ja die von der Bewegung allein herrührenden Fliehkräfte in ihrer Wirkung auf den Faden einander aufheben, wie dessen Form auch sei.\*

Der Faden kann als Grenzfall einer Kette aus starren, geradlinigen Gliedern gelten, und so sei zunächst festgestellt, wann eine solche bei beliebiger Lage und Form im Gleichgewicht ist, falls in ihren Eckpunkten allein gewisse Kräfte angreifen, deren jede symmetrisch zu den beiden in ihrem Angriffspunkte aneinander stossenden Gliedern gerichtet sein soll. Jedenfalls muss die in der Ecke  $M_k$  (Fig. 1) angreifende Kraft  $p_k$  in die Ebene der anstossenden Glieder  $M_{k-1}M_k$ ,  $M_kM_{k+1}$  fallen, da sie der Resultierenden  $p'_k$  der mit diesen Gliedern zusammenfallenden Spannungen  $s$  entgegengesetzt und gleich



sein muss. Sie muss also die Richtung der (äusseren\*\*) Winkelhalbierenden haben. Die Kraft  $p_{k+1}$  in der folgenden Ecke  $M_{k+1}$  steht in derselben symmetrischen Lagenbeziehung zu den in  $M_{k+1}$  angreifenden Spannungen der dort zusammenstossenden Glieder, und da die Spannung in  $M_kM_{k+1}$  eben die eine Grösse  $s$  hat, so folgt, dass auch die Spannung in  $M_{k+1}M_{k+2}$  davon nicht verschieden sein kann. Alle Gliederspannungen sind mithin gleich gross. Die Grösse der Kräfte  $p$  aber hängt nur von den Winkeln zwischen den Richtungen je zweier auf einander folgenden Glieder ab; falls man einen Durchlaufungssinn der Kette einmal angenommen hat, kann man offenbar sagen: die Kraft  $p$  im gemeinsamen Punkte zweier Glieder ist parallel und der Länge nach gleich der Verbindungslinie der Endpunkte zweier von einem Punkte  $O$  aus parallel den Richtungen jener Glieder gezogenen Strecken von der Länge  $s$ . (Fig. 2.) Alle Kräfte  $p$  sind durch die Annahme einer einzigen bestimmt. Ist die Kette nicht geschlossen, so müssen noch Züge  $s$  an den Enden in der Richtung der dortigen Glieder wirken.

\* Diese einfache Bedeutung der Fliehkräfte insbesondere tritt hier im Gegensatze zur erwähnten analytischen Behandlung hervor.

\*\* Wegen der zunächst unwesentlichen Beschränkung auf Zugspannungen,

Je kürzer die Glieder nun sind und je zahlreicher, um so mehr wird die Kette einer, von einzelnen Knickungen etwa abgesehen, stetig gekrümmten, irgendwie geformten Raumkurve gleichen. Das Zusammenfallen der Richtungen der  $p$  mit den Ebenen der anstossenden Glieder bedeutet nunmehr, da die letzteren zu Fadenelementen werden, das Parallellaufen der Kräfte mit den Schmiegungebenen ihrer Angriffspunkte. Bei der schliesslich unendlichen Kleinheit der Winkel  $\sigma$  zwischen aufeinander folgenden Gliederrichtungen (Fig. 2) werden die Kräfte  $p$  der Grösse nach diesen Winkeln proportional, und bei gleicher Länge aller Fadenelemente folgt hieraus offenbar die Proportionalität zwischen den jetzt parallel den Hauptnormalen auswärts wirkenden Kräften und den reziproken Werten der Krümmungsradien an den zugehörigen Stellen. Haben alle Fadenelemente gleiche Maße, wie dies bei einem homogenen Faden zutrifft, so liegt also thatsächlich das eingangs erwähnte Flichkräftesystem vor.

Es sei nun  $m$  die Masse der Längeneinheit,  $v$  die Fadengeschwindigkeit,  $\lambda$  die Länge eines Elements,  $\rho$  der Krümmungsradius der betrachteten Stelle. Die von dem dortigen Element ausgeübte Flichkraft beträgt dann  $m\lambda \frac{v^2}{\rho}$ , und mit Rücksicht auf die Beziehung zwischen  $p$  und den Spannungsstrecken  $s$  (Fig. 2) muss dies gleich sein dem Produkte  $s\sigma$ . Daher ist

$$s = m \frac{\lambda}{\sigma} \frac{v^2}{\rho} = mv^2.$$

Dies ist also der Betrag der im ganzen Faden konstanten Zugspannung infolge seiner Bewegung, und tangentielle Zugkräfte von dieser Grösse müsste man an den etwa freien Enden anbringen, damit keine Bahnabweichung erfolge. Ebenso wären für den Fall von Richtungsunstetigkeiten die unendlich kleinen Rollen, über die daselbst der Faden gelegt zu denken ist, durch endliche Kräfte festzuhalten, die aus je zwei Komponenten von der Grösse  $mv^2$ , parallel den Tangenten beiderseits von der Richtungsunstetigkeit, sich zusammensetzen. — Sind Zugspannungen in dem von äusseren Kräften zu einer „Kettenlinien“-Form (im allgemeinsten Sinne) gezwungenen Faden bereits im Ruhezustand vorhanden, so kommt zu denselben infolge der betrachteten Bewegung der konstante Betrag  $mv^2$  als Summand hinzu. —

Zu dem Satze, dass jede beliebige Raumkurve für das zugehörige Flichkräftesystem eine Gleichgewichtsform darstellt, gelangt man unmittelbar auch durch folgendes graphostatische Verfahren, das für eine gegebene Fadenform überhaupt jedes System in den Fadenelementen angreifender, im allgemeinen unendlich kleiner Kräfte finden lässt, welche einander das Gleichgewicht halten. Man legt durch einen festen Raumpunkt gerade Linien parallel den sämtlichen Fadenelementen und zieht auf der hierdurch entstandenen Kegelfläche alle möglichen Kurven; jede derselben erscheint dann durch die Kegelerzeugenden in unendlich

viele Elemente zerlegt, welche der Grösse und Richtung nach die Kräfte darstellen, die man in den den Erzeugenden entsprechenden Elementen des Fadens angreifen lässt, um derart ein Kräftesystem der verlangten Art zu erhalten. Schneidet die Kurve auf dem Kegel alle Erzeugenden senkrecht, wie dies einem Normalkräftesystem entspräche, gehört sie also zugleich einer Kugelfläche mit dem Kegelscheitel als Mittelpunkt an, so ist das dadurch bestimmte Kräftesystem offenbar das der Fliehkräfte; denn seine einzelnen Kräfte sind proportional den Winkeln zwischen benachbarten Kegelerzeugenden, d. h. also, bei Einteilung des Fadens in gleich lange Elemente, proportional den reziproken Werten der zugehörigen Krümmungsradien. Die Lagenbeziehung der Kräfte zu den Fadenschmiegungebenen und die sich einstellende Zugspannung  $mv^2$  findet man ebenso ohne weiteres durch Betrachtung der nun vorliegenden räumlichen Konstruktion.

---

# Zur Darstellung des Bernoullischen Theorems in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von

Dr. J. EGGENBERGER

in München.

Sind  $p$  und  $q$  die einfachen und konstanten Wahrscheinlichkeiten zweier entgegengesetzter Ereignisse  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$ , so ist die Wahrscheinlichkeit  $P$  dafür, dass das Ereignis  $\varepsilon$  in einer sehr grossen Anzahl von  $\mu = m + n$  Versuchen eine Anzahl  $a$  von Malen, die zwischen

$$m \pm \lambda$$

liegt, eintritt, gegeben durch

$$P = \sum_{i=-\lambda}^{i=+\lambda} \frac{\mu!}{(m+i)!(n-i)!} p^{m+i} q^{n-i},$$

wobei noch vorausgesetzt sein möge, dass  $\frac{\mu!}{m!n!} p^m q^n$  der grösste Term der binomischen Entwicklung  $(p+q)^\mu$ , also  $p:q = m:n$  sei.

Diese Summe wurde schon von Jakob Bernoulli I. (1654–1695), dem Begründer der Theorie von der Wahrscheinlichkeit a posteriori, in seinem genialen Werke *ars conjectandi* (Basel 1713)\* gegeben. Ohne einen numerischen Wert für diese Summe zu suchen, wies Bernoulli mittels einer ihm eigentümlichen Analyse, die sich auf das Verhältnis der Summe der um das grösste Glied der binomischen Entwicklung gruppierten Terme zur Summe aller übrigen stützt, zur Evidenz nach, dass bei fortgesetzter Beobachtung nicht nur  $P$  immer grösser und grösser wird, sondern auch die Grenzen der Abweichung  $m \pm \lambda$  immer enger gezogen werden können und schliesslich für  $\mu = \infty$  mit Gewissheit angenommen werden darf, dass  $\lambda = 0$  und  $a = m$  wird, dass also das Verhältnis der Anzahl des Eintreffens des Ereignisses  $\varepsilon$  zur Gesamtzahl der Beobachtungen der wahren Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von  $\varepsilon$  gleichkommt, d. h.

$$\frac{m}{\mu} = p \quad \text{und} \quad \frac{n}{\mu} = q$$

gesetzt werden kann.

\* Neuerdings in deutscher Übersetzung von R. Haussner herausgegeben (Ostwalds Klassiker Nr. 107 und 108).

In seiner „Doctrine of chances“ suchte Abraham de Moivre (1667—1754) zuerst einen numerischen Wert für  $P$  und fand, wie ich an anderem Orte\* gezeigt habe, für den Spezialfall  $p = q = \frac{1}{2}$  die Reihe:

$$P = \frac{4}{\sqrt{2\pi\mu}} \left\{ \lambda - \frac{2\lambda^3}{1 \cdot 3\mu} + \frac{4\lambda^5}{2 \cdot 5\mu^2} - \frac{8\lambda^7}{6 \cdot 7\mu^3} + \frac{16\lambda^9}{24 \cdot 9\mu^4} \mp \dots \right\},$$

d. h. wenn man  $\gamma = \lambda \sqrt{\frac{2}{\mu}}$  setzt:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-y^2} dy$$

( $e$  = Basis der natürlichen Logarithmen).

Als Grenze der Abweichung  $\frac{m}{\mu} - \frac{1}{2}$  ergibt sich für diesen Fall

$$\pm \gamma \sqrt{\frac{1}{2\mu}}.$$

Moivre deutet zugleich an, dass für den Fall, wo  $p$  und  $q$  verschieden sind,

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-y^2} dy$$

wird, worin  $\gamma = \lambda \sqrt{\frac{1}{2\mu pq}}$  gesetzt ist und die Grenzen der Abweichung  $\frac{m}{\mu} - p$  zwischen  $\pm \gamma \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$  gelegen sind.

S. P. Laplace (1749—1827) gab dem Moivreschen Integralausdruck grössere Genauigkeit, indem er fand:

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}},$$

worin  $\gamma$  dieselbe Bedeutung und die Abweichung  $\frac{m}{\mu} - p$  sich innerhalb der nämlichen Grenzen bewegt wie im Moivreschen Ausdruck.

Dieser Ausdruck für  $P$  hat seit Laplace allgemeine Anwendung gefunden. Für das Integral sind Tafeln\*\* berechnet worden, welche für aufeinander folgende (bei Meyer nach der zweiten Dezimale) Werte von  $\gamma$  (die nur zwischen 0 und 3 liegen können) die zugehörigen Werte des Integrals geben.

\* Siehe meine Abhandlung: Beiträge zur Darstellung des Bernoullischen Theorems, der Gammafunktion und des Laplaceschen Integrals (Mitteilungen der Naturf. Ges., Bern 1893).

\*\* Meyers Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung, deutsche Ausgabe von Czuber (Teubner, Leipzig 1879) geben eine solche Tafel Seite 545 fgg.

Der Restterm  $\frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$ , für den auch  $\frac{\sqrt{\mu} e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi mn}}$  oder  $\frac{\gamma}{\lambda} \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{\pi}}$  gesetzt werden darf, muss jeweilen separat berechnet werden. Die Restfunktion wird freilich in Theorie und Praxis oft vernachlässigt, da dieselbe für grosse  $\mu$  nur sehr kleine Werte liefert.

Im Folgenden soll gezeigt werden, dass die Restfunktion mit dem Integral vereinigt werden kann, so dass

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt$$

wird und demnach direkt aus der Tafel der Integrationswerte gefunden werden kann.

Die Bernoullische Summe sei in folgender Weise dargestellt:

$$P = \sum_{i=-\lambda}^{i=+\lambda} \frac{\mu!}{(m-i)!(n+i)!} p^{m-i} q^{n+i} = y_{m-\lambda} + y_{m-\lambda+1} + \dots + y_{m-1} + y_m + y_{m+1} + \dots + y_{m+\lambda-1} + y_{m+\lambda},$$

worin  $y_m = \frac{\mu!}{m!n!} p^m q^n$  der grösste Term der binomischen Entwicklung sei. Dann wird:

$$P = \sum_{x=0}^{x=\lambda} (y_{m-x} + y_{m+x}) - y_m$$

- 1)  $\phantom{P} = \sum_{x=0, 1, 2, 3, \dots, \lambda} \varphi(x) - \frac{1}{2} \varphi(0)$
- 2)  $\phantom{P} = \sum_{x=1, 2, 3, \dots, \lambda-1} \varphi(x) + \varphi(\lambda) - \frac{1}{2} \varphi(0).$

Es soll nun die Funktion  $\varphi(x)$ , die wir in diesem Zusammenhange füglich als Moivresche bezeichnen können, näher bestimmt werden.

Mit Hilfe der Stirlingschen Formel, welche die Fakultät als Funktion ihrer Endzahl darstellt,

$$y! = y^y e^{-y} \sqrt{2\pi y} \quad (\lim y = \infty)$$

findet man für das allgemeine Glied unserer binomischen Entwicklung nach dem Vorgange von Laplace:

$$y_{m+x} = \frac{\mu!}{(m-x)!(n+x)!} p^{m-x} q^{n+x} = \left(\frac{\mu p}{m-x}\right)^{m-x+\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\mu q}{n+x}\right)^{n+x+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}},$$

woraus sich für das Maximalglied  $y_m$  ergibt:

$$y_m = \left(\frac{\mu p}{m}\right)^{m+\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{\mu q}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Nun hat schon Jakob Bernoulli I. gezeigt, dass diejenige Kombination der Zahlen  $m$  und  $n$  für das Eintreffen der Ereignisse  $\varepsilon$  und  $\varepsilon'$  ein Maximum von Wahrscheinlichkeit aufweist, worin  $\mu p = m$  und  $\mu q = n$  gesetzt werden kann (wahrscheinlichste Hypothese). Daher wird das Maximalglied

$$y_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$$

und

$$\begin{aligned} y_{m+x} &= y_m \left( \frac{1-x}{1-\frac{x}{m}} \right)^{m-x+\frac{1}{2}} \cdot \left( \frac{1}{1+\frac{x}{n}} \right)^{n+x+\frac{1}{2}} \\ &= y_m \left( 1-\frac{x}{m} \right)^{-m+x-\frac{1}{2}} \cdot \left( 1+\frac{x}{n} \right)^{-n-x-\frac{1}{2}} \\ &= y_m e^{\left( x-\frac{x^2-x}{2m} + \frac{-\frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{4}}{3m^2} \mp \dots \right) + \left( -x-\frac{x^2+x}{2n} + \frac{x^3+\frac{3x^2}{4}}{3n^2} \mp \dots \right)}, \end{aligned}$$

und bei Vernachlässigung der Glieder mit  $\frac{1}{m^2}$  und  $\frac{1}{n^2}$  in erster Näherung:

$$y_{m+x} = y_m e^{-\frac{x^2-x}{2m} - \frac{x^2+x}{2n}}$$

oder

$$= y_m \left( 1 - \frac{x^2-x}{2m} - \frac{x^2+x}{2n} \right),$$

ebenso wird .

$$y_{m-x} = y_m \left( 1 - \frac{x^2+x}{2m} - \frac{x^2-x}{2n} \right),$$

also

$$y_{m+x} + y_{m-x} = \varphi(x) = 2y_m e^{-x^2 \frac{\mu}{2m^2 n}}$$

oder

$$3) \quad \varphi(x) = \frac{2e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}}}{\sqrt{2\pi\mu pq}}.$$

Dies ist der Näherungswert der Moivreschen Funktion.

Die Summen in 1) und 2) sollen nun in Integrale übergeführt werden. Dazu dient die Euler-Maclaurinsche Summenformel für Reihen mit endlichen Differenzen. Da in unserem Falle das Inkrement = 1 ist, nimmt diese Formel folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \sum_{x=0, 1, 2, \dots, \lambda} \varphi(x) &= \int_0^{\lambda+1} \varphi(x) dx - \frac{1}{2} [\varphi(\lambda+1) - \varphi(0)] \\ &\quad + \frac{B_1}{2!} [\varphi'(\lambda+1) - \varphi'(0)] - \frac{B_2}{4!} [\varphi''(\lambda+1) - \varphi''(0)] \\ &\quad \pm \text{in inf.}, \end{aligned}$$

worin  $B_1, B_2, \dots$  die Bernoullischen Zahlen bedeuten.

Vernachlässigt man darin die Glieder mit den Derivationen von  $\varphi(x)$ , weil schon  $\varphi'(x)$  von der Ordnung  $\frac{1}{\mu^2}$  ( $\mu =$  sehr gross) ist, so bekommt man:

$$\sum_{x=0, 1, 2, \dots, \lambda} \varphi(x) = \int_0^{\lambda+1} \varphi(x) dx - \frac{1}{2} \varphi(\lambda+1) + \frac{1}{2} \varphi(0)$$

und

$$\sum_{x=0, 1, 2, \dots, \lambda-1} \varphi(x) = \int_0^{\lambda} \varphi(x) dx - \frac{1}{2} \varphi(\lambda) + \frac{1}{2} \varphi(0).$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke wird aus 1) und 2):

$$4) \quad P = \int_0^{\lambda+1} \varphi(x) dx - \frac{1}{2} \varphi(\lambda+1),$$

ebenso

$$5) \quad P = \int_0^{\lambda} \varphi(x) dx + \frac{1}{2} \varphi(\lambda).$$

Somit liegt der Wert von  $P$  zwischen

$$\int_0^{\lambda} \varphi(x) dx \quad \text{und} \quad \int_0^{\lambda+1} \varphi(x) dx.$$

Man setze:

$$P = \int_0^{\lambda+\sigma} \varphi(x) dx,$$

wo  $\sigma$  eine kleine Grösse, zwischen 0 und 1 gelegen, bedeutet, die nun bestimmt werden soll.

Zu diesem Zwecke soll

$$[\text{nach 5)}] \quad \int_{\lambda}^{\lambda+\sigma} \varphi(x) dx = \frac{1}{2} \varphi(\lambda)$$

nach Taylor entwickelt werden.

Setzt man

$$\alpha) \quad \int \varphi(x) = f(x),$$

dann wird

$$\begin{aligned} \int_{\lambda}^{\lambda+\sigma} \varphi(x) dx &= f(\lambda+\sigma) - f(\lambda) \\ &= f(\lambda) + \sigma f'(\lambda) + \frac{\sigma^2 f''(\lambda)}{2!} + \dots \text{in inf.} - f(\lambda) \\ &= \sigma f'(\lambda) + \frac{\sigma^2 f''(\lambda)}{2!} + \dots \end{aligned}$$

Weil aber nach  $\alpha$ )

folgt: 
$$f'(\lambda) = \varphi(\lambda), \quad f''(\lambda) = \varphi'(\lambda), \dots,$$

$$\int_{\lambda}^{\lambda+\sigma} \varphi(x) dx = \sigma \varphi(\lambda) + \frac{\sigma^2 \varphi'(\lambda)}{2!} + \dots$$

Weil  $\sigma < 1$ , ist die Entwicklung konvergent, und bei Vernachlässigung der Glieder mit  $\varphi'(\lambda)$ ,  $\varphi''(\lambda)$ ,  $\dots$ , weil schon  $\varphi'(\lambda)$  von der Ordnung  $\frac{1}{\mu^2}$  ist, erhält man in erster Näherung:

$$\int_{\lambda}^{\lambda+\sigma} \varphi(x) dx = \sigma \varphi(\lambda).$$

Es war aber auch

$$\int_{\lambda}^{\lambda+\sigma} \varphi(x) dx = \frac{1}{2} \varphi(\lambda),$$

daher

$$\sigma = \frac{1}{2}.$$

Nun wird

$$P = \int_0^{\lambda} \varphi(x) dx + \int_{\lambda}^{\lambda+\frac{1}{2}} \varphi(x) dx = \int_0^{\lambda+\frac{1}{2}} \varphi(x) dx.$$

Analog folgt aus (4):

$$\int_{\lambda+1}^{\lambda+1-\delta} \varphi(x) dx = -\frac{1}{2} \varphi(\lambda+1)$$

und durch Entwicklung des Integrals links ergibt sich ebenso  $\delta = \frac{1}{2}$  und

$$P = \int_0^{\lambda+1} \varphi(x) dx - \int_{\lambda+\frac{1}{2}}^{\lambda+1} \varphi(x) dx = \int_0^{\lambda+\frac{1}{2}} \varphi(x) dx.$$

Mit Berücksichtigung von Gleichung 3) folgt:

$$P = \frac{2}{\sqrt{2\pi\mu pq}} \int_0^{\lambda+\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2\mu pq}} dx.$$

Setzt man

wo 
$$\xi^2 = qx^2,$$

$$q = \frac{1}{2\mu pq}$$

ist, so ergibt sich nach einfacher Substitution:

6) 
$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma'} e^{-\xi^2} d\xi,$$

worin  $\gamma' = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \sqrt{q}$  ist.

Dies ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Wiederholungen des Ereignisses  $\varepsilon$  innerhalb der Grenzen

$$\mu p \pm \lambda = \mu p \pm \frac{\gamma}{\sqrt{e}} = \mu p \pm \gamma \sqrt{2\mu pq}$$

gelegen ist, oder die Wahrscheinlichkeit, dass die Grenzen der Abweichung  $\frac{m}{\mu} - p$  gleich  $\pm \gamma \sqrt{\frac{2pq}{\mu}}$  sind,  $\gamma = \lambda \sqrt{e}$  genommen.

Im Integral der Gleichung 6) sind die beiden Terme des Laplace'schen Integralausdrucks

$$P = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi\mu pq}},$$

vereinigt. Dabei hat sich die obere Grenze des Integrals

$$\gamma = \lambda \sqrt{\frac{1}{2\mu pq}} \quad \text{in} \quad \gamma' = \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{1}{2\mu pq}}$$

verändert. Bei Anwendungen des Theorems hat man somit  $\gamma'$  zu berechnen und findet den Wert  $P$  unmittelbar aus der oben erwähnten Tafel der Werte dieses Integrals.

An zwei Beispielen soll nun noch gezeigt werden, dass die beiden Ausdrücke Werte liefern, die nur ganz unerheblich von einander abweichen.

In Meyer, Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung\*, wird folgende Aufgabe behandelt.

Die günstigen Fälle für Knaben- und Mädchengeburten stehen im Verhältnis von 18 : 17; wenn nun während eines Jahres 14 000 Kinder geboren werden, welches ist die Wahrscheinlichkeit  $P$ , dass die Zahl  $m'$  der Knabengeburten 7363 nicht überschreitet und nicht kleiner ist als 7037?

Gegeben sind:  $m$  den Knabengeburten,  $n$  den Mädchengeburten günstige Fälle

$$m + n = \mu = 14\,000$$

$$m : n = 18 : 17$$

$$\mu : m = 35 : 18$$

$$m = 7200$$

$$n = 6800$$

$$m + \lambda = 7363$$

$$\lambda = 163.$$

Es wird die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass  $m'$  die Anzahl der zu erwartenden Knabengeburten zwischen  $7200 \pm 163$  gelegen ist.

\* Deutsche Ausgabe von Czuber, Seite 107 flg.

Nach dem Laplaceschen Ausdruck wird die Aufgabe wie folgt gelöst (Meyer):

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma} e^{-t^2} dt + \frac{\sqrt{\mu} e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi mn}}$$

$$= \Phi + \Psi.$$

Weil  $\gamma = \lambda \sqrt{\frac{1}{2\mu pq}} = \frac{\lambda \sqrt{\mu}}{\sqrt{2mn}}$ , wird

$$\log \gamma = \log \lambda + \frac{\log \mu - (\log 2 + \log m + \log n)}{2}$$

und

$$\gamma = 1.94912.$$

Für dieses  $\gamma$  folgt aus der Tafel der Integralwerte

$$\Phi = 0.99415.$$

Für die Berechnung von  $\Psi$  hat man

$$\Psi = \frac{\sqrt{\mu} e^{-\gamma^2}}{\sqrt{2\pi mn}} = \frac{\gamma}{\lambda} \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{\pi}},$$

$$\log \Psi = \log \frac{\gamma}{\lambda} - \log e^{\gamma^2} - \log \sqrt{\pi},$$

$$\Psi = 0.00015$$

und

$$P = \Phi + \Psi = 0.99430(8).$$

Mit Hilfe des Ausdrucks

$$P = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\gamma'} e^{-\xi^2} d\xi,$$

macht sich die numerische Rechnung einfacher wie folgt. Es ist

$$\gamma' = \frac{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\mu}}{\sqrt{2mn}}$$

$$\log \gamma' = \log \left(\lambda + \frac{1}{2}\right) + \frac{\log \mu - (\log 2 + \log m + \log n)}{2}$$

und

$$\gamma' = 1.95497,$$

wofür die Tafel giebt:

$$P = 0.994305.$$

Die beiden Resultate differieren somit erst in der sechsten Dezimale.

Als zweites Beispiel wählen wir folgende Aufgabe: Eine Krankenkasse zähle 1000 Mitglieder. Hat nun die Erfahrung gezeigt, dass während einer Reihe von Jahren die Zahl der Krankheitsfälle zur Zahl der Mitglieder im Verhältnis von 3:10 steht, welches ist dann die Wahrscheinlichkeit  $P$  dafür, dass die Zahl der Erkrankungen im nächsten Jahre  $m'$  zwischen 260 und 340 liege?

Hier ist

$$\begin{aligned}\mu &= m + n = 1000 \\ m &= 300 \\ n &= 700 \\ \lambda &= 40.\end{aligned}$$

Es wird die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass die Zahl der zu erwartenden Krankheitsfälle zwischen  $300 \pm 40$  gelegen sei. Nach dem Laplaceschen Ausdruck hat man wie vorhin

$$P = \Phi + \Psi.$$

Für den Wert  $\Phi$  berechnet sich  $\gamma$  wieder aus

$$\gamma = \frac{\lambda \sqrt{\mu}}{\sqrt{2mn}}$$

und ergibt

$$\gamma = 1.951800,$$

wofür die Integraltafel den Wert

$$\Phi = 0.99422$$

liefert. Der Wert  $\Psi$  ergibt sich aus

$$\Psi = \frac{\gamma}{\lambda} \frac{e^{-\gamma^2}}{\sqrt{\pi}}$$

und ergibt

$$\Psi = 0.00061.$$

Daher wird

$$P = \Phi + \Psi = 0,99483.$$

Mit Hilfe unseres vereinfachten Ausdrucks berechnet sich  $\gamma'$  aus

$$\gamma' = \frac{\left(\lambda + \frac{1}{2}\right) \sqrt{\mu}}{\sqrt{2mn}}$$

und es wird

$$\gamma' = 1.976197,$$

welchem Wert nach der Tafel ein Integrationswert von

$$P = 0,99481^*$$

entspricht.

Weil beim zweiten Beispiel  $\mu$  erheblich kleiner ist als beim ersten, zeigen die beiden Resultate desselben schon in der fünften Dezimale eine Abweichung, die aber ebenfalls belanglos ist.

Es steht demnach nichts im Wege, dem Laplaceschen Integralausdruck fortan die neue bequemere Form zu geben.

---

\* Bei der Bestimmung von  $P$  nach der Tafel des Integrals wurde die bekannte Newtonsche Interpolationsformel

$$P = P_1 + \delta \mathcal{A}_1 + \frac{\delta(\delta-1) \mathcal{A}_2}{2!} + \dots$$

verwendet.

## Sur la formule de Taylor pour les formes géométriques.

Par C. Burali-Forti à Turin.

M. Konrad Zindler\* dans la récénsion de mon livre *Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann* (Paris Gauthier-Villars 1897), fait, à propos de la démonstration de la formule de Taylor pour les formes géométriques, l'observation suivante: „Bei der Ableitung der Taylorsche Reihe nach derselben Methode ist freilich der Beweis nicht als vollständig zu betrachten, indem er im wesentlichen auf der Division durch eine geometrische Grösse beruht, die bekanntlich im allgemeinen nicht gestattet ist (vergl. Grassmann, A<sub>1</sub>, §§ 62, 63).

Dans la démonstration à laquelle l'A. fait allusion (mon livre No. 39 Théor. I) des passages relatifs aux définitions précédentes sont sous-entendus, mais n'est point sous-entendue l'opération division dont j'ai fait usage dans le seul cas où elle donne un résultat unique, résultat qui est un nombre (rapport de deux segments ou vecteurs d'une même droite, de deux triangles ou bivecteurs d'un même plan, de deux tétraèdres ou tri-vecteurs).

Je trouve convenable de reporter ici la démonstration en forme complète de la formule de Taylor, tandis que je saisis l'occasion pour remercier M. Konrad Zindler des appréciations favorables faites par rapport à mon livre.

**Théorème I** (mon livre No. 39). Si  $f(t)$  est une forme géométrique qui, pour une valeur de  $t$  ait les dérivées jusqu'à la  $n^{\text{ième}}$ , on aura pour cette valeur

$$1) \quad \begin{cases} f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \frac{h^2}{2!} f''(t) + \dots \\ \quad \quad \quad + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(t) + \frac{h^n}{n!} [f^{(n)}(t) + F], \end{cases}$$

où  $F$  est une forme de même ordre que  $f$ , fonction de  $h$  (et de la valeur considérée de  $t$ ), satisfaisant en outre à  $\lim_{h=0} F = 0$ .

Dem.: Étant, par hypothèse  $f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$  des formes géométriques bien déterminées, la forme  $F$ , fonction de  $h$  et de  $t$ , qui satisfait à la condition 1), est univoquement déterminée et est du même ordre que  $f$

$$\left[ F = \frac{n!}{h^n} [f(t+h) - f(t) - hf'(t) - \dots - \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(t)] \right].$$

Soit, par exemple  $f$  du premier ordre: étant  $\alpha$  un triangle (indépendant de  $t$  et de  $h$ ) quelconque, posons

\* Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 44.

2)  $\varphi(t) = f(t)\alpha;$

$\varphi(t)$  est une fonction numérique de  $t$  ayant les dérivées jusqu'à la  $n^{\text{ième}}$  car  $\varphi^{(n)}(t) = f^{(n)}(t)\alpha$ . Multipliant les deux membres de la 1) pour  $\alpha$  on a par la 2)

$$\begin{aligned} \varphi(t+h) &= \varphi(t) + h\varphi'(t) + \frac{h^2}{2!}\varphi''(t) + \dots \\ &+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\varphi^{(n-1)}(t) + \frac{h^n}{n!}[\varphi^{(n)}(t) + E\alpha]; \end{aligned}$$

mais  $\varphi$  est fonction numérique et donc en vertu de la formule de Taylor pour les fonctions numériques\* nous avons

\* Je reporte ici une démonstration très simple du Théorème de Taylor pour les fonctions numériques (analogue à celle donnée par M. Peano dans les *Appendici alle lezioni di analisi infinitesimale*, 1898).

Théorème. — Si  $f(t)$  est une fonction numérique qui, pour une valeur de  $t$  ait les dérivées jusqu'à la  $n^{\text{ième}}$ , on aura pour cette valeur de  $t$

$$\left\{ \begin{aligned} f(t+h) &= f(t) + hf'(t) + \frac{h^2}{2!}f''(t) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t) \\ &+ \frac{h^n}{n!}[f^{(n)}(t) + \varepsilon], \end{aligned} \right.$$

où  $\varepsilon$  est une fonction de  $h$  (et de la valeur considérée de  $t$ ) telle que

$$\lim_{h=0} \varepsilon = 0.$$

Dem.: — On an, par les hypothèses, que la fonction  $\alpha$  de  $h$  satisfaisante à la condition

1)  $f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t) + h^n\alpha$   
est bien déterminée, et on a

2) 
$$\alpha = \frac{f(t+h) - f(t) - hf'(t) - \dots - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(t)}{h^n}.$$

Le rapport des  $(n-1)^{\text{ièmes}}$  dérivées, par respect à  $h$ , du numérateur et dénominateur du second membre de la 2) est

$$\frac{f^{(n-1)}(t+h) - f^{(n-1)}(t)}{n!h};$$

pour un théorème bien connu sur la limite d'une fraction dont le numérateur et le dénominateur s'annule; on a

$$\lim_{h=0} \alpha = \frac{1}{n!} \lim_{h=0} \frac{f^{(n-1)}(t+h) - f^{(n-1)}(t)}{h} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(t).$$

On a donc

$$\alpha = \frac{1}{n!} [f^{(n)}(t) + \varepsilon]$$

ou

$$\lim_{h=0} \varepsilon = 0$$

que, par la 1), démontre le Théorème.

$$\lim_{h=0} F\alpha = 0,$$

car  $F\alpha$  est un nombre fonction de  $h$  (dans mon livre  $F\alpha$  est indiqué par  $F_1$ ). Mais cette formule subsiste quelque ce soit le triangle  $\alpha$  et donc, en vertu de la définition de limite d'une forme variable (mon livre No. 34):

$$\lim_{h=0} F = 0$$

ce qui démontre le théorème.\*

### Über einige konforme Abbildungen.

(Zusatz zu dem Aufsätze S. 320 des vorigen Bandes.\*\*)

Von Dr. H. E. Timerding in Strassburg i. E.

Die Mercatorsche Projektion einer Kugel auf eine Ebene wird so hergestellt, dass die Abscisse  $\xi$  eines Punktes in der Bildebene der geographischen Länge des entsprechenden Punktes auf der Kugel gleichgemacht und die Ordinate  $\eta$  aus der geographischen Breite  $\theta$  mit Hilfe der Gleichung berechnet wird:

$$\eta = \log \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right).$$

Wir können nun fragen, welche konforme Abbildung einer Ebene auf eine andere durch diese Funktion vermittelt wird, indem wir dem  $\eta$  und  $\theta$  komplexe Werte geben. Setzen wir also:

$$1) \quad V + iU = \log \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{u + iv}{2} \right),$$

wo  $U, V$  und  $u, v$  rechtwinklige Koordinaten in zwei verschiedenen Ebenen bezeichnen. Dann lässt sich aber leicht einsehen, dass wir genau diese Beziehung erhalten, indem wir für eine zweite Mercator-Projektion den Äquator durch einen Meridiankreis ersetzen und die Verwandtschaft ermitteln, in die so durch die Kugel die Ebenen der beiden Mercator Projektionen gebracht sind. Diese Beziehung muss eine durchaus wechselseitige sein und aus der obigen Gleichung 1) folgt demnach auch:

$$2) \quad v + iu = \log \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{U + iV}{2} \right).$$

Diese Abbildung ist die quere Abbildung zweier Streifen aufeinander. Zwei Streifen von der gleichen Breite  $\pi$  werden nämlich durch sie derart

\* Que cette démonstration est identique à celle que je donne dans mon livre resulte bien aisément aussi par la démonstration du Théor. II (No. 39 de mon livre) en considérant les fonctions  $\Phi, f^{(n)}(t)\alpha$ .

\*\* S. 320 Zeile 6 von unten, lies das erstemal  $\text{Sin}$  statt  $\text{Cos}$ .

aufeinander abgebildet, dass beidemale die unendlich fernen Teile des einen im Bilde auf zwei gegenüber liegende Randpunkte des anderen zusammenschumpfen und die Stücke, die links und rechts von der Verbindungslinie dieser Randpunkte liegen, den beiden kongruenten Teilstreifen entsprechen, in die der andere Streifen durch die Mittellinie seiner Randlinien zerfällt.

Allgemeiner ist die Abbildung:

$$1^*) \quad V + iU = k \log \operatorname{tang} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{u + iv}{2} \right),$$

die einen Streifen von der Breite  $\frac{\pi}{k}$  auf einem solchen von der Breite  $\pi$  abbildet.

Kombiniert man die Abbildung 1) mit der folgenden:

$$3) \quad X + iY = e^{V + iU},$$

durch die ein Streifen von der Breite  $2\pi$  auf der ganzen Ebene abgebildet wird, so erhält man, indem man noch

$$u \quad \text{für} \quad u + \frac{\pi}{2}$$

schreibt, die Abbildung

$$4) \quad X + iY = \operatorname{tang} \frac{u + iv}{2},$$

durch die ein Streifen von der Breite  $\pi$  auf dem Inneren eines Kreises vom Radius 1 abgebildet wird, indem er auf einen solchen gleichsam der Länge nach zusammengedrückt wird. Den Randlinien des Streifens entsprechen die beiden Hälften der Kreisperipherie.

Kombiniert man aber die Abbildung 3) mit derjenigen, die für  $k = 2$  aus 1\*) hervorgeht, so erhält man die neue Beziehung:

$$5) \quad \sqrt{X + iY} = \operatorname{tang} \frac{u + iv}{2},$$

durch die ein Streifen von der Breite  $\frac{\pi}{2}$  auf dem Inneren eines Kreises vom Radius 1 abgebildet wird, indem er in denselben gleichsam umgebogen wird. Der einen Randlinie des Streifens entspricht die ganze Peripherie, der anderen Randlinie ein Radius des Kreises in zweideutiger Weise.

Fügt man zu der Gleichung 5) noch die Relation:

$$6) \quad u + iv = \frac{\pi}{2} \sqrt{x + iy},$$

durch die der Streifen von der Breite  $\frac{\pi}{2}$  auf dem Inneren der Parabel

$$y^2 = 4(1 - x)$$

abgebildet wird, so ergibt sich

$$7) \quad \sqrt{X + iY} = \operatorname{tang} \frac{\pi}{4} \sqrt{x + iy}.$$

Diese Gleichung ist schon von Schwarz, in Crelles Journal Bd. 70, für die konforme Abbildung des Inneren einer Parabel auf dem Inneren

eines Kreises gegeben worden. Man vergleiche Cayley, Quarterly Journal, Bd. 20, S. 213, Gesammelte Werke, Bd. 12, S. 328.

Bei der queren Abbildung zweier Streifen aufeinander gehen die Längs- und Querlinien auf dem einen in Mercator-Kurven der ersten Ordnung auf dem anderen über, und zwar sind den Längslinien Mercator-Kurven des zweiten Typus zugeordnet, die alle durch die beiden den unendlich fernen Gebieten des anderen Streifens entsprechenden Randpunkte gehen. Die den Querlinien zugewiesenen Mercator-Kurven sind hierzu orthogonal und also vom ersten Typus.

Es mag bei dieser Gelegenheit erwähnt werden, dass diese Linien in der Physik, als Stromlinien und Kraftlinien, nicht selten auftreten. So ist die zugehörige Figur, auf experimenteller oder rechnerischer Grundlage, schon häufiger gegeben worden. Man findet sie u. a. bereits in einem Aufsatze von Auerbach, Wiedemanns Annalen Bd. 3, 1878, als Darstellung der elektrischen Stromlinien auf einem Cylinder oder einem ebenen, unendlich langen Streifen. Auch in der Kartographie kam man gelegentlich auf diese Kurven. Man sehe: Breusing, Das Verebnen der Kugeloberfläche etc., Tafel 4 Fig. 2. Die Figur 4 unseres Aufsatzes giebt Maxwell für die Kraftlinien in der Nähe des Randes einer Platte (Treatise on electricity and magnetism, I, Fig. 11). Herr Holzmüller bringt in Fig. 141 seiner Potentialtheorie (Leipzig, B. G. Teubner) dieselbe Figur.

Es könnte scheinen, als ob die Mercator-Kurven der ersten Ordnung noch eine weitere eminente praktische Bedeutung hätten. Die von Herrn Greenhill gebrauchte Bezeichnung als Sumnersche Linien stützt sich nämlich auf die von dem Bostoner Kapitän Sumner angegebene Methode, die Position eines Schiffes auf See durch die Beobachtung der Höhe zweier Gestirne zu einer genau bekannten Zeit zu bestimmen, eine Methode, die immer weitere Verbreitung erlangt. Dann ist auf der Seekarte allerdings der zu ermittelnde Ort als der eine Schnittpunkt zweier Mercator-Kreise bestimmt. In der Praxis handelt es sich immer um die möglichst angenäherte Berechnung dieser Kurven innerhalb des Bereiches, in dem der Ort unbestimmt ist, und hierzu sind besondere Methoden erforderlich, die von Thomson und anderen angegeben wurden.

# Dynamik der Kurbelgetriebe.

Von

Prof. Dr. HANS LORENZ

in Halle a. S.

Fortsetzung.

## Kapitel II.

### Die Energieaustausch.

9. Die kinetische Energie im Kurbelgetriebe. Die absolute Bestimmung der Massendrucke setzt, wie wir schon früher hervorgehoben haben, die Kenntnis der Winkelgeschwindigkeit der Kurbel und damit der Geschwindigkeit aller anderen Teile des Systems in jeder Lage desselben voraus. Diese Geschwindigkeiten werden nun ihrerseits bedingt durch den gesamten Energieaustausch, welchen das Kurbelgetriebe vermittelt. Tritt die in einem Zeitelement in das System eingeleitete Energie nicht sofort durch Überwindung von äusseren Widerständen wieder aus demselben heraus, so ruft der Rest einerseits eine Veränderung der potentiellen Energie (d. i. Veränderung der Höhenlage des Gesamtschwerpunktes), andererseits eine Änderung der totalen kinetischen Energie hervor. Ist endlich die Maschine nach Schlickscher Methode ausgeglichen, so fällt die Änderung der potentiellen Energie hinweg und es bleibt nur diejenige der kinetischen Energie zu berücksichtigen.

Diese kinetische Energie wollen wir zunächst als Funktion des Kurbelwinkels bestimmen. Für das einfache Schubkurbelgetriebe kommen wieder die drei Bestandteile, das Gleitstück, die Schubstange und die Kurbel mit allen lediglich rotierenden Massen in Betracht. Ist  $\varepsilon$  die momentane Winkelgeschwindigkeit,  $dK$  ein Gewichtselement der Kurbel im Abstände  $q$  von der Drehaxe, so haben wir die kinetische Energie dieses Elementes

$$dJ'' = \frac{dK}{2g} q^2 \varepsilon^2,$$

mithin, wenn  $k''$  den Trägheitsradius der gesamten rotierenden Masse bezogen auf die Drehaxe bedeutet, die kinetische Energie derselben

$$137) \quad J'' = \frac{K \cdot k''^2}{2g} - \varepsilon^2.$$

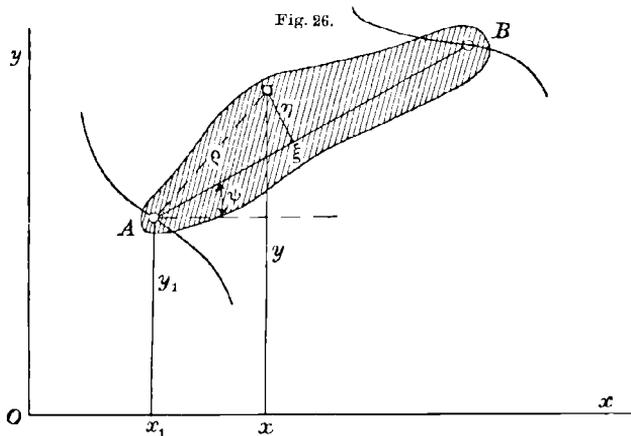
Ebenso einfach gestaltet sich die Berechnung der kinetischen Energie des Gleitstückes, dessen Gewicht wir wie früher mit  $P$  bezeichnen wollen. Wir erhalten mit Rücksicht auf Gleichung 3b)

$$138) \quad J_0 = \frac{P}{2g} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 = \frac{P}{2g} r^2 \varepsilon^2 \left( \sin \varphi + \frac{r}{2l} \sin 2\varphi \right)^2,$$

oder, wenn wir das mit  $r^2: l^2$  behaftete Glied vernachlässigen dürfen (s. § 1)

$$138a) \quad J_0 = \frac{P}{2g} r^2 \varepsilon^2 \sin^2 \varphi \left( 1 + \frac{2r}{l} \cos \varphi \right).$$

Etwas verwickelter gestaltet sich schon die Herleitung der kinetischen Energie der Schubstange, zu der wir gelangen, indem wir die Quadrate der beiden Geschwindigkeitskomponenten, Gleichung 8)



und 9), für jedes Element  $dG$  addieren und schliesslich integrieren. Wir wollen indessen hier einen etwas andern Weg einschlagen und betrachten wie in § 8 die ebene Bewegung eines Körpers, der in zwei Punkten  $A$  und  $B$  auf Leitkurven geführt wird (Fig. 26). Die Entfernung der beiden Punkte sei  $l$ , ihre momentanen Koordinaten  $x_1 y_1$  bzw.  $x_2 y_2$ , diejenigen eines beliebigen Punktes  $xy$ . Wir wollen nun die Lage dieser beliebigen Punkte  $P$  auf einen der beiden geführten z. B.  $A$  beziehen und wählen dazu die Linie  $AB$  als Abscissenaxe. Dann seien  $\xi$  und  $\eta$  die relativen Koordinaten, welche mit der Entfernung  $AP = \rho$  ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Nennen wir schliesslich die momentane Neigung der Linie  $AB$  gegen die  $x$ -Achse  $\psi$ , so bestehen die beiden Gleichungen

$$139) \quad \begin{cases} x - x_1 = \xi \cos \psi - \eta \sin \psi \\ y - y_1 = \xi \sin \psi + \eta \cos \psi. \end{cases}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten des Punktes  $P$  sind dann

$$140) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} - (\xi \sin \psi + \eta \cos \psi) \frac{d\psi}{dt} = \frac{dx_1}{dt} - (y - y_1) \frac{d\psi}{dt}, \\ \frac{dy}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + (\xi \cos \psi - \eta \sin \psi) \frac{d\psi}{dt} = \frac{dy_1}{dt} + (x - x_1) \frac{d\psi}{dt}. \end{cases}$$

Man erkennt, dass infolge der Einführung des Winkels  $\psi$  die Koordinaten  $x_2 y_2$  überhaupt nicht in den Formeln erscheinen, was nichts anderes besagt, als dass die Bewegung des Körpers auf eine Translation des Punktes  $A$  und eine gleichzeitige Drehung (gegeben durch den Winkel  $\psi$ ) in der Bewegungsebene reduziert werden kann. Durch Addition der Quadrate der beiden Geschwindigkeitskomponenten erhalten wir weiter

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{dt}\right)^2 - 2 \frac{d\psi}{dt} \left\{ (y - y_1) \frac{dx_1}{dt} - (x - x_1) \frac{dy_1}{dt} \right\} + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2\},$$

oder, indem wir das Wegelement des Punktes  $P$  mit  $ds$ , dasjenige von  $A$  mit  $ds_1$  bezeichnen und die Entfernung  $AP = \rho$  einführen

$$141) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 &= \left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 - 2 \frac{d\psi}{dt} \left\{ (y - y_1) \frac{dx_1}{dt} - (x - x_1) \frac{dy_1}{dt} \right\} \\ &+ \rho^2 \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2. \end{aligned} \right.$$

Daraus aber folgt für die kinetische Energie des ganzen Körpers, wenn wir mit  $k'$  dessen Trägheitsradius bezogen auf den Punkt  $A$  bezeichnen,

$$J' = \frac{G}{2g} \left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + \frac{Gk'^2}{2g} \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - \frac{1}{g} \frac{d\psi}{dt} \frac{dx_1}{dt} \int (y - y_1) dG + \frac{1}{g} \frac{d\psi}{dt} \frac{dy_1}{dt} \int (x - x_1) dG,$$

oder wegen Gleichung 139):

$$142) \quad \left\{ \begin{aligned} J' &= \frac{G}{2g} \left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + \frac{Gk'^2}{2g} \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \\ &- \frac{1}{g} \frac{d\psi}{dt} \frac{dx_1}{dt} \left( \sin \psi \int \xi dG + \cos \psi \int \eta dG \right) \\ &+ \frac{1}{g} \frac{d\psi}{dt} \frac{dy_1}{dt} \left( \cos \psi \int \xi dG - \sin \psi \int \eta dG \right). \end{aligned} \right.$$

Ist der ins Auge gefasste Körper symmetrisch in Bezug auf die Linie  $AB$ , so verschwinden die Integrale von  $\eta dG$  und wir können, wenn wir seinen Schwerpunktsabstand von  $A$  mit  $s'$  bezeichnen, schreiben

$$143) \quad \left\{ \begin{aligned} J' &= \frac{G}{2g} \left(\frac{ds_1}{dt}\right)^2 + \frac{Gk'^2}{2g} \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 \\ &- \frac{Gs'}{g} \frac{d\psi}{dt} \left( \frac{dx_1}{dt} \sin \psi - \frac{dy_1}{dt} \cos \psi \right). \end{aligned} \right.$$

Kehren wir nun zu unserer Schubstange zurück, deren Kreuzkopfzapfen mit  $A$  zusammenfallen möge. Da dieser Punkt sich nur geradlinig in der  $x$ -Richtung bewegt, so ist für denselben

$$\frac{ds_1}{dt} = \frac{dx_1}{dt} \quad \text{und} \quad \frac{dy_1}{dt} = 0.$$

Weiter aber ist der Winkel  $\psi$  identisch mit dem früher mit  $\beta$  bezeichneten Ausschlagwinkel der Stange gegen deren Mittellage, mithin haben wir, wenn  $\varphi$  den Kurbelwinkel und  $r$  den Kurbelradius bedeutet

$$l \sin \psi = r \sin \varphi,$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{r \cos \varphi}{l \cos \psi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{r \varepsilon \cos \varphi}{l \cos \psi}.$$

Infolge der Kleinheit des Ausschlagwinkels  $\psi$  dürfen wir statt dessen auch schreiben:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{r \varepsilon}{l} \cos \varphi \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi \right),$$

$$\left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 = \frac{r^2 \varepsilon^2}{l^2} \cos^2 \varphi \left( 1 + \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi \right)$$

und erhalten nach Einführung dieser Werte in Gleichung 143):

$$144) \quad \begin{cases} J' = \frac{G}{2g} \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \frac{Gk'^2}{2g} \frac{r^2 \varepsilon^2}{l^2} \cos^2 \varphi \left( 1 + \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi \right) \\ \quad - \frac{Gs'}{2g} \frac{r^2 \varepsilon}{l^2} \sin 2\varphi \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi \right) \frac{dx_1}{dt}. \end{cases}$$

Dieser Ausdruck ist mit demjenigen identisch, den man durch Addition der Quadrate von 8) und 9) sowie darauffolgende Integration erhalten würde, wenn man einerseits im letzten Gliede die kleine Grösse

$$\frac{1}{2} \frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi$$

vernachlässigt und weiterhin beachtet, dass das Vorzeichen von  $dx_1$  hier notwendig das entgegengesetzte von  $dx'$  in 8) in Folge der umgekehrten Richtung der Strecken  $x_1$  und  $x'$  in den Figuren 26 und 4 sein muss. Da man mit demselben Rechte auch die Grösse

$$\frac{r^2}{l^2} \sin^2 \varphi$$

im zweiten Gliede ohne erheblichen Fehler vernachlässigen darf, so kann die kinetische Energie der Schubstange hinreichend genau durch

$$144a) \quad J' = \frac{G}{2g} \left\{ \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 + \frac{k'^2}{l^2} r^2 \varepsilon^2 \cos^2 \varphi - \frac{s'}{l^2} r^2 \varepsilon \sin 2\varphi \frac{dx_1}{dt} \right\}$$

ausgedrückt werden. Daraus folgt aber, dass für die kinetische Energie die Möglichkeit einer Teilung der Schubstangenmasse in einen lediglich rotierenden und einen geradlinig

bewegten Betrag, wie wir sie für die Massendrucke als richtig erkannten, nicht existiert. Da trotzdem eine solche Massenverteilung für die Berechnung der kinetischen Energie nicht nur häufig in der Praxis vorgenommen wird und sogar in die Vorlesungen über Mechanik und Maschinenlehre übergegangen ist, so möchte ich nicht unterlassen, den dabei üblichen Gedankengang zu skizzieren. Derselbe beruht zunächst auf der richtigen aus 8) hervorgehenden Thatsache, dass die Vertikalgeschwindigkeit der einzelnen Schubstangenpunkte proportional ihrem Kreuzkopfabstande  $z$  ist. Weiterhin aber wird die ganz unzulässige Annahme gemacht, dass die Verschiedenheiten der Horizontalgeschwindigkeit der einzelnen Stangenpunkte vernachlässigt und dieselbe durchgehends

$$\frac{dx}{dt} = -r \varepsilon \sin \varphi$$

gesetzt werden dürfe, wobei man wohl übersehen hat, dass damit der Einfluss der Stangenlänge auf das Bewegungsgesetz des ganzen Systems überhaupt eliminiert wird. Jedenfalls verschwinden infolge dieser Annäherung alle mit  $\sin 2\varphi$  belasteten Glieder und unsere letzte Formel geht über in

$$J' = G \frac{r^2 \varepsilon^2}{2g} \left( \sin^2 \varphi + \frac{k'^2}{l^2} \cos^2 \varphi \right) = \frac{G r^2 \varepsilon^2}{2g} \left( 1 - \frac{k'^2}{l^2} \right) \sin^2 \varphi + G \frac{r^2 \varepsilon^2}{2g} \frac{k'^2}{l^2}.$$

Hierin\* bezeichnete man den Betrag

$$G \left( 1 - \frac{k'^2}{l^2} \right)$$

als den hin- und hergehenden,  $G \frac{k'^2}{l^2}$  dagegen als den rotierenden Teil der ganzen Schubstange. Noch bedenklicher wird dieses Verfahren dadurch, dass man mit den so erhaltenen ungenauen Werten auch noch die damit in gar keinem Zusammenhang stehenden Massendrucke berechnete.

Wir kehren nunmehr zu unserer Aufgabe zurück und erhalten aus den einzelnen Bestandteilen  $J_0$ ,  $J'$  und  $J''$  die gesamte kinetische Energie des einfachen Schubkurbelgetriebes unter Benutzung von Gleichung 5b) zu

$$144 \text{ b) } \left\{ \begin{aligned} J &= \frac{r^2 \varepsilon^2}{2g} \left\{ K \frac{k'^2}{r^2} + (P + G) \left( \sin \varphi + \frac{r}{2l} \sin 2\varphi \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + G \frac{k'^2}{l^2} \cos^2 \varphi \right. \\ &\quad \left. - G \frac{s' r}{l^2} \sin 2\varphi \left( \sin \varphi + \frac{r}{2l} \sin 2\varphi \right) \right\}, \end{aligned} \right.$$

\* Man erkennt, dass die obige Näherungsformel aus 144 a) auch mit Vernachlässigung der Differenz  $k'^2 : l^2 - s' : l$  abgeleitet werden kann. Die Grösse dieser Differenz bildet mithin ein Kriterium für die Zulässigkeit des oben genannten Näherungsverfahrens.

oder, da wir wieder nach erfolgter Quadrierung die mit  $\frac{r^2}{l^2}$  behafteten Glieder innerhalb der Klammer vernachlässigen dürfen,

$$144c) \left\{ \begin{array}{l} J = \frac{r^2 \varepsilon^2}{2g} \left\{ K \frac{k''^2}{r^2} + (P + G) \sin^2 \varphi \left( 1 + \frac{2r}{l} \cos \varphi \right) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + G \frac{k'^2}{l^2} \cos^2 \varphi - G \frac{s' r}{l^2} \sin \varphi \sin 2\varphi \right\}, \\ \text{oder} \\ J = \frac{r^2 \varepsilon^2}{2g} \left\{ K \frac{k''^2}{r^2} + G \frac{k'^2}{l^2} + \left( P + G - G \frac{k'^2}{l^2} \right) \sin^2 \varphi \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + 2 \frac{r}{l} \left( P + G - G \frac{s'}{l} \right) \sin^2 \varphi \cos \varphi \right\}. \end{array} \right.$$

Für das Kurbelschleifengetriebe wird  $r:l=0$ , ausserdem verschwindet  $G$  und es bleibt nur

$$144d) \quad J = \frac{r^2 \varepsilon^2}{2g} \left( K \frac{k''^2}{r^2} + P \sin^2 \varphi \right).$$

Aus diesen Formeln geht deutlich der Anteil der einzelnen bewegten Teile an der gesamten kinetischen Energie hervor. Auch bietet es keine Schwierigkeit, sie auf mehrkurblige Maschinen auszudehnen, worauf wir später zurückkommen werden. Dagegen dürften an dieser Stelle einige Bemerkungen über den Einfluss ausserhalb der Maschine befindlicher, aber mit ihr rotierender oder in anderweitig zwangsläufigem Verband mit dem betrachteten Getriebe bewegter Massen angebracht sein. Am einfachsten liegt der Fall zweifellos bei einer Maschine, aus der überhaupt keine kinetische Energie heraustritt, z. B. einer direkt mit einem Dynamoanker, einem Ventilator oder einer Centrifugalpumpe gekuppelten Dampfmaschine. Ein solcher Körper ist lediglich als fest mit der Maschinenwelle verbundener Bestandteil des ganzen Systems aufzufassen und mit seinem Trägheitsradius in unsere Formel einzuführen. Ähnlich einfach gestalten sich die Verhältnisse bei Kolbenpumpen und Kompressoren, welche mit der Antriebsmaschine entweder durch eine gemeinsame Welle oder auch durch eine gemeinsame Kolbenstange verbunden sind. Hier bilden Welle mit Kurbeln und Schwungrad das rotierende System.

Verwickelter liegen die Verhältnisse indessen schon bei den sogenannten Transmissionsdampfmaschinen für Fabrikbetriebe. Könnte man die zur Energieübertragung benutzten, selbst in meist rascher Bewegung befindlichen Seile oder Riemen als unausdehnbar betrachten und von einem Gleiten derselben auf den Seil- und Riemenscheiben absehen, so wäre auch hier die Rechnung eine sehr einfache, da die Winkelgeschwindigkeit jeder einzelnen Welle in jedem Momente derjenigen der Antriebsmaschine proportional wäre. Wäre also  $W$  das Gewicht einer solchen Welle mit allen auf ihr fest sitzenden Teilen (Riemscheiben, Kupplungen),  $k$  der Trägheitsradius der gesamten

Masse und  $\varepsilon'$  ihre momentane Winkelgeschwindigkeit, so hätte man hierfür nur den Betrag  $\frac{W}{2g} k^2 \varepsilon'^2$  und für eine Reihe solcher Wellen die Summe  $\frac{1}{2g} \Sigma W k^2 \varepsilon'^2$  dem ersten Gliede unserer Energiegleichung hinzuzufügen. Jede solche Winkelgeschwindigkeit  $\varepsilon'$  wird dann zu derjenigen  $\varepsilon$  der Antriebsmaschine in einem festen, durch die Durchmesser der beiderseitigen und etwa zwischengeschalteten Riemen- oder Seilscheiben gegebenen Verhältnisse stehen, welches wir mit  $\eta$  bezeichnen wollen. Damit kennen wir aber auch die Geschwindigkeiten  $u$  der Seile und Riemen vom Einzelgewichte  $S$ , so dass der von diesen herrührende Beitrag zur kinetischen Energie sich zu  $\frac{1}{2g} \Sigma S u^2$  berechnet. Im ganzen tritt mithin zu unserer obigen Formel die Summe

$$J_t = \frac{1}{2g} (\Sigma W k^2 \eta^2 \varepsilon^2 + \Sigma S u^2)$$

hinzu. Infolge des Gleitens und der Elastizität der Seile und Riemen wird natürlich dieser Wert ziemlich ungenau, sodass uns kaum etwas anderes als die Einführung eines Koeffizienten  $\xi < 1$  übrig bleiben dürfte, der angiebt, welcher Anteil der kinetischen Energie der Transmission als mit derjenigen der Antriebsmaschine schwankend anzusehen ist. Damit erhalten wir endlich als Zusatz zu unserer Formel:

$$145) \quad J_t = \frac{\xi}{2g} (\Sigma W k^2 \eta^2 \varepsilon^2 + \Sigma S u^2).$$

Ganz besonders klar tritt der Einfluss anderweitiger Massen in der Bewegung eines Eisenbahnzuges durch die Lokomotive hervor, wenn wir auch hier von der Elastizität der Kupplungen und der Puffer zwischen den einzelnen Fahrzeugen sowie von dem geringfügigen Gleiten der Lokomotivtreibräder absehen. Die kinetische Energie des ganzen Zuges (abgesehen von der Dampfmaschine auf der Lokomotive) besteht hier aus zwei Teilen, von denen einer auf die fortschreitende Geschwindigkeit des Zuges in der Bahn, der andere von der Rotation der Räder herrührt. Die Berechnung bietet ebenso wenig Schwierigkeiten, wie beim vorigen Beispiele und führt in diesem Fall auf einen so grossen Zusatzbetrag, dass dagegen die Bewegungsenergie der eigentlichen Dampfmaschine ganz zurücktritt. Ob damit noch die Möglichkeit grösserer Schwankungen in der Winkelgeschwindigkeit der Treibräder bestehen bleibt, hängt allerdings von deren Belastung, welche das Gleiten verhindert, ab und dürfte bei leicht gebauten Lokomotiven, sowie bei feuchten Schienen noch immer zu befürchten sein.

Eine praktische Probe dieser Überlegung ergibt die Betrachtung eines leicht geneigte Strecke unter abgestelltem Dampf und zunächst noch nicht anliegenden Bremsklötzen fahrenden Eisenbahnzuges. Man erkennt sofort, dass die Treibräder der Lokomotive sich hierbei

mit der Zuggeschwindigkeit selbst drehen, ebenso wie auch alle Räder der einzelnen Wagen. Daraus ergibt sich, dass der Vorgang der Energieübertragung von der Lokomotivmaschine auf den ganzen Zug ein nahezu vollkommen umkehrbarer ist und dass jedenfalls, wenn wir auch für diesen Fall die Gleichung 145) (worin nunmehr  $W$  das Gewicht einer Radaxe,  $k$  sein Trägheitshalbmesser,  $S$  das Wagengewicht und  $u$  die fortschreitende Geschwindigkeit bedeuten) benutzen, der Koeffizient  $\zeta$  sehr nahe  $= 1$  sein dürfte. Dann wird aber bei der grossen Masse insbesondere der  $\Sigma S$  die Winkelgeschwindigkeit  $\varepsilon$  während einer Umdrehung nur sehr geringe Schwankungen erleiden und dürfte praktisch in diesem Falle als konstant anzusehen sein.

Dieselbe Überlegung giebt uns auch Aufschluss über die Wirkung der Schiffskörper auf die Winkelgeschwindigkeit der Antriebsmaschine. Hier ist der Zusammenhang zwischen dem Wasser und Propeller — sei derselbe nun ein Schaufelrad oder eine Schraube — bei weitem nicht so innig, wie der durch das Fahrzeuggewicht vermehrte zwischen Rad und Schiene auf der Eisenbahn. Schleppt man daher ein Schiff, so wird erst nach Überschreiten einer bestimmten Geschwindigkeit der Propeller und mit ihm die Maschine sich zu drehen beginnen, niemals aber eine der Schiffsgeschwindigkeit entsprechende Umdrehungszahl erreichen. Bekanntlich tritt dieser Umstand bei dem von der eigenen Maschine getriebenen Schiff in einer Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Propellerumfang und Schiff, dem sog. Slip zu Tage. Der Energieaustausch zwischen der Maschine und dem Schiff kann darum nicht als ein umkehrbarer bezeichnet, also auch nicht erwartet werden, dass die Veränderungen in der Winkelgeschwindigkeit sich auf das ganze Schiff übertragen, bzw. dass die kinetische Energie das letzteren diese Schwankungen merklich vermindert. Dieselben dürften darum auch lediglich Veränderungen der treibenden Kraft und mit diesen z. B. bei Schraubenschiffen Longitudinal- und Transversalschwingungen des ganzen Schiffskörpers zur Folge haben.

Nach diesen Bemerkungen wollen wir noch die kinetische Energie für ein System von  $n$  parallelen Getrieben berechnen, deren Kurbeln gegen die erste um die Winkel  $\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n$  geschränkt sind. Zu diesem Zwecke wollen wir zunächst unsere letzte Gleichung 144c) dadurch umformen, dass wir

$$\sin^2 \varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\varphi,$$

$$2 \sin^2 \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \cos \varphi - \frac{1}{2} \cos 3\varphi$$

setzen und erhalten

$$144e) \left\{ \begin{aligned} J &= \frac{r^2 \varepsilon^2}{2g} \left\{ K \frac{k''^2}{r^2} + \frac{1}{2} \left( P + G + G \frac{k'^2}{l^2} \right) \right. \\ &\quad - \frac{1}{2} \left( P + G - G \frac{k'^2}{l^2} \right) \cos 2\varphi \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{r}{l} \left( P + G - G \frac{s'}{l} \right) (\cos \varphi - \cos 3\varphi) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Der Einfachheit halber sei hierin

$$146) \quad \frac{K}{g} \frac{k''^2}{r^2} = M_0,$$

$$147) \quad \frac{1}{2g} \left( P + G + G \frac{k'^2}{l^2} \right) = m,$$

$$148) \quad \frac{1}{2g} \left( P + G - G \frac{k'^2}{l^2} \right) = m',$$

$$149) \quad \frac{1}{2g} \left( P + G - G \frac{s'}{l} \right) = m'',$$

womit die obige Formel übergeht in

$$150) \quad J = \frac{r^2 \varepsilon^2}{2} \left\{ M_0 + m - m' \cos 2\varphi + m'' (\cos \varphi - \cos 3\varphi) \right\}.$$

Setzen wir hierin überall  $\varphi + \alpha$  statt  $\varphi$ , und summieren, so erhalten wir für die kinetische Energie eines Systems von  $n$  Getrieben mit demselben Kurbelradius  $r$

$$\begin{aligned} \Sigma J &= \frac{r^2 \varepsilon^2}{2} \left\{ M_0 + \Sigma m - \Sigma m' \cos 2(\varphi + \alpha) \right. \\ &\quad \left. + \Sigma m'' [\cos(\varphi + \alpha) - \cos 3(\varphi + \alpha)] \right\}, \end{aligned}$$

oder nach Auflösung der Winkelfunktionen

$$151) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma J &= \frac{r^2 \varepsilon^2}{2} M_0 + \Sigma m - \cos 2\varphi \Sigma m' \cos 2\alpha \\ &\quad + \sin 2\varphi \Sigma m' \sin 2\alpha \\ &\quad + \cos \varphi \Sigma m'' \cos \alpha - \sin \varphi \Sigma m'' \sin \alpha \\ &\quad - \cos 3\varphi \Sigma m'' \cos 3\alpha + \sin 3\varphi \Sigma m'' \sin 3\alpha. \end{aligned} \right.$$

Ist unser System nach Schlickscher Methode ausgeglichen, so verschwinden zunächst wegen Gleichung 29a) die Summen

$$\Sigma m'' \cos \alpha \quad \text{und} \quad \Sigma m'' \sin \alpha.$$

Weiter aber haben wir

$$152) \quad m' = \frac{l}{r} m'' + \frac{G}{2g} \left( \frac{s'}{l} - \frac{k'^2}{l^2} \right) = \frac{l}{r} m'' + m''',$$

also

$$\Sigma m' \cos 2\alpha = \frac{l}{r} \Sigma m'' \cos 2\alpha + \Sigma m''' \cos 2\alpha;$$

$$\Sigma m' \sin 2\alpha = \frac{l}{r} \Sigma m'' \sin 2\alpha + \Sigma m''' \sin 2\alpha.$$

Erstreckt sich nun der Ausgleich auch auf die Wirkung der Schubstange, so fallen nach Gleichung 30a) noch die Summen

$$\Sigma m'' \cos 2\alpha \quad \text{und} \quad \Sigma m'' \sin 2\alpha$$

fort und so bleibt

$$153) \quad \begin{cases} \Sigma m' \cos 2\alpha = \Sigma m''' \cos 2\alpha, \\ \Sigma m' \sin 2\alpha = \Sigma m''' \sin 2\alpha, \end{cases}$$

worin wegen 152)

$$m''' = \frac{G}{2g} \left( \frac{s}{l} - \frac{k'^2}{l^2} \right).$$

Wir können demnach für ein ausgeglichenes System statt 151) schreiben

$$154) \quad \left\{ \Sigma J = \frac{r^2 \varepsilon^2}{2} \left\{ M_0 + \Sigma m - \cos 2\varphi \Sigma m''' \cos 2\alpha + \sin 2\varphi \Sigma m''' \sin 2\alpha \right. \right. \\ \left. \left. - \cos 3\varphi \Sigma m'' \cos 3\alpha + \sin 3\varphi \Sigma m'' \sin 3\alpha \right\} \right.$$

und, wenn noch alle Schubstangen gleich dimensioniert sind,

$$154a) \quad \left\{ \Sigma J - \frac{r^2 \varepsilon^2}{2} \left\{ M_0 + \Sigma m - m''' \cos 2\varphi \Sigma \cos 2\alpha + m''' \sin 2\varphi \Sigma \sin 2\alpha \right. \right. \\ \left. \left. - \cos 3\varphi \Sigma m'' \cos 3\alpha + \sin 3\varphi \Sigma m'' \sin 3\alpha \right\} \right.$$

Hierin würden, wenn die oben erwähnte Vernachlässigung der Differenz

$$s : l - k'^2 : l^2$$

zulässig erscheint, die mit  $\cos 2\varphi$  und  $\sin 2\varphi$  behafteten Glieder verschwinden und nur die mit  $\cos 3\varphi$  und  $\sin 3\varphi$  behafteten Veränderungen der kinetischen Energie bedingen. Jedenfalls ergibt sich aus den obigen Entwicklungen deutlich der Einfluss der hin- und hergehenden Massen auf diese Energiegrösse, welcher bisher nicht immer richtig beurteilt worden ist.

10. Die potentielle Energie im Kurbelgetriebe. Die Bewegungen im Kurbelgetriebe haben naturgemäss Veränderungen in der Höhenlage der Schwerpunkte der einzelnen Getriebeteile sowie des Gesamtschwerpunktes zur Folge, die sich in der Aufnahme bzw. Abgabe von Energie durch das Getriebe geltend machen. Um diese Thatsache in unseren Berechnungen zum Ausdruck zu bringen, benötigen wir nur die Kenntnis der potentiellen Energie des Systems in ihrer Abhängigkeit von der Kurbelstellung. Wir bezeichnen dieselbe in irgend einer Lage mit  $V$  und können ihren Wert sofort ermitteln, indem wir das Gewicht jedes Einzelteiles mit seiner Schwerpunktshöhe über einem beliebigen, aber festen Horizont multiplizieren und alle diese Produkte addieren. Durch Hinzutreten einer Konstante  $C$  werden wir alsdann der Willkürlichkeit des gewählten Horizontes gerecht.

Wir betrachten zunächst wie in § 3 ein Getriebe, dessen Bewegungsebene vertikal stehen möge, während die Bewegungsrichtung des Gleitstückes mit dem Horizont den Winkel  $\gamma$  bildet (Fig. 27). Benutzen wir ferner die früher gebrauchten Bezeichnungen, d. i.  $h$  für die augenblickliche Höhe des Schwerpunktes des Gleitstückes (Kreuzkopfes)



Für ein System von  $n$  an derselben Welle angreifenden Getrieben mit den Schränkungswinkeln  $\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_n$  gegen die erste Kurbel haben wir zu berücksichtigen, dass dem Wege von 0 bis  $\varphi$  der ersten Kurbel ein Weg von  $\alpha_i$  bei  $\varphi + \alpha_i$  der  $i^{\text{ten}}$  Kurbel entspricht. Setzen wir nach der Summierung der so gebildeten Ausdrücke wieder die Summe aller konstanten Glieder = 0, so bleibt als Ausdruck für die potentielle Energie unseres Systems

$$157) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma V = \cos \varphi \cdot \sin \gamma \Sigma (Pr + Gr + Ks'') \cos \alpha \\ \quad + \sin \varphi \cdot \sin \gamma \Sigma (Pr + Gr + Ks'') \sin \alpha \\ \quad + \sin \varphi \cos \gamma \Sigma \left( Ks'' + Gs' \frac{r}{l} \right) \cos \alpha \\ \quad + \cos \varphi \sin \gamma \Sigma \left( Ks'' + Gs' \frac{r}{l} \right) \sin \alpha \\ \quad + \frac{1}{4} \cos 2\varphi \sin \gamma \Sigma \left( Pr + Gr - G \frac{s'r}{l} \right) \frac{r}{l} \cos 2\alpha \\ \quad + \frac{1}{4} \sin 2\varphi \sin \gamma \Sigma \left( Pr + Gr - G \frac{s'r}{l} \right) \frac{r}{l} \sin 2\alpha. \end{array} \right.$$

Wäre die Maschine nach Schlick ausgeglichen, so würden alle die einzelnen  $\Sigma$  verschwinden, d.h. die potentielle Energie erleidet alsdann keine Veränderungen und tritt in die Energiegleichung überhaupt nicht ein. Es liegt auf der Hand, dass wir auch auf diese Weise, d.h. aus der Unveränderlichkeit der potentiellen Energie die Schlickschen Bedingungsgleichungen hätten ableiten können.

Aus der allgemeinen Formel für das einzelne Getriebe können wir nunmehr sofort die potentielle Energie für zwei wichtige Spezialfälle gewinnen. Für horizontale oder liegende Maschinen wird nämlich  $\gamma = 0$  und 156) geht über in

$$156a) \quad V = \left( Ks'' + Gs' \frac{r}{l} \right) \sin \varphi.$$

Für vertikale oder stehende Maschinen, wie sie auf Schiffen vorwiegend verwendet werden, haben wir dagegen mit  $\gamma = 90^\circ$

$$156b) \quad \left\{ \begin{array}{l} V = (Pr + Gr + Ks'') \cos \varphi \\ \quad + \frac{1}{4} \left( Pr + Gr - G \frac{s'r}{l} \right) \frac{r}{l} \cos 2\varphi. \end{array} \right.$$

11. Die Arbeit der treibenden Kraft. Während wir die bisher gewonnenen Ausdrücke für die kinetische und potentielle Energie eines oder mehrer Kurbelgetriebe unmittelbar und mit beliebiger Genauigkeit aus der augenblicklichen Konfiguration des Systems ableiten konnten, ist dieses Verfahren auf die Arbeit der treibenden Kraft wenigstens im allgemeinen nicht mehr anwendbar. Es liegt dies einfach daran, dass diese Kräfte auch im Beharrungszustande sich nach Gesetzen ändern, welche mathematisch nicht definiert, sondern nur graphisch darstellbar sind. Beispielsweise in der

Dampfmaschine bleibt der Druck während der sogenannten Admissionsperiode nahezu konstant und nimmt in der darauffolgenden Expansionsperiode nach einem Gesetze ab, welches fast genau mit dem nach Mariotte benannten, für vollkommene Gase streng gültigen übereinstimmt. Kurz vor Beendigung eines Hubes wird das Auslassorgan geöffnet und der Druck nicht bis zum Hubende des Kolbens bis auf die Austrittsspannung, die bei Auspuffmaschinen wenig über dem Atmosphärendrucke, bei Kondensationsmaschinen etwas über der im Kondensator herrschenden meist niedrigen Spannung liegt. Während des Kolbenrückganges bleibt diese Austrittsspannung unverändert, bis das Auslassorgan wieder geschlossen und der noch im Cylinder befindliche Dampf im sog. schädlichen Raum komprimiert wird. Auch diese Zustandsänderung befolgt angenähert das Mariottesche Gesetz; nach ihrer Vollendung wird schliesslich durch Öffnen des Einlassorgans die Verbindung des Cylinderinnern mit der Dampfzufussleitung wieder hergestellt und damit der anfängliche Druck wieder erreicht. Kennt man nun diesen sogenannten Admissionsdruck sowie die Ausschubspannung, sind weiterhin diejenigen Stellen des Hubes genau festgelegt, an denen das Einlassorgan sowie das Auslassorgan geöffnet und geschlossen wird, so bietet die Konstruktion des theoretischen Verlaufes des Druckes mit der Kolbenstellung keine Schwierigkeiten. Leider hat dies Verfahren für die Praxis wenig Wert, da die fraglichen Öffnungen und Abschlüsse naturgemäss niemals momentan erfolgen können, mithin die Schnittpunkte der einzelnen Linien des so erhaltenen Diagramms nicht scharf, sondern als sanfte Übergänge erscheinen. Man ist darum auf solche Diagramme angewiesen, welche durch ein am Maschinencylinder angebrachtes Instrument, den sog. Indikator selbstthätig aufgezeichnet werden und ein ziemlich genaues Bild von den Änderungen des Druckes mit dem Kolbenwege geben. Da die Ordinaten in diesen Indikator diagrammen den Pressungen im Cylinder, die Abscissen dagegen den Kolbenwegen proportional sind, so ergibt die von der Druckkurve umschlossene Fläche ein Maß für die geleistete Arbeit.

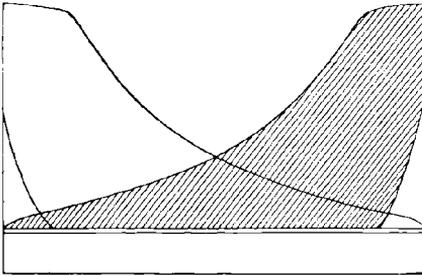
Handelt es sich, wie normal, um doppelt wirkende Maschinen, so steht dem besprochenen Diagramme ein meist gleichgestaltetes, aber in umgekehrter Lage befindliches, der anderen Cylinderseite entnommenes Diagramm gegenüber, dessen Ausschub- und Kompressionslinie zugleich den Gegendruck während der Admission und Expansion im ersten Diagramme darstellen. Dementsprechend müssen wir, um das wirkliche Kräftespiel in der Maschine zu verfolgen, diesen Gegendruck auch mit der eben erwähnten Drucklinie vereinigen und erhalten so aus zwei Indikator diagrammen (Fig. 28, siehe S. 70) das Kolbendruckdiagramm (Fig. 29, siehe S. 70), welches wie ersichtlich einen positiven und einen negativen Arbeitsbetrag für den Gesamthub enthält. Bezeichnet man nun den momentanen Kolbendruck

pro 1 qcm der Fläche  $F$  mit  $p$ , so ist die auf dem Wege  $-dx$  geleistete Arbeit  $-Fpdx$ , mithin die vom Totpunkte bis zur Kolbenstellung  $x$ , welche, wie früher, von der Mittellage aus gerechnet werden mag, geleistete Arbeit

$$L_x = -F \int_r^x p dx.$$

Hierin könnte man den Wert des Integrales durch Planimetrieren für jede Kolbenstellung bestimmen und hätte nur für den Kolben-

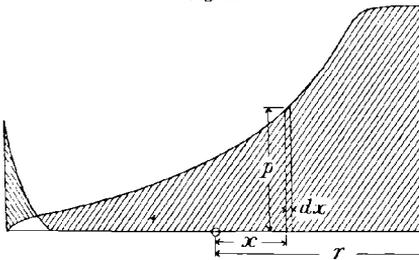
Fig. 28.



rückgang zu beachten, dass dort sich die Richtung der Kraft  $F'p$  umkehrt, also  $p$  das Vorzeichen wechselt. Gerade dieser Umstand erschwert nun die weitere Behandlung des Energieaustausches, da er uns zwingt, jeden Einzelhub für sich zu untersuchen.

Ganz besonders lästig wird dies Verfahren bei mehrcylindrigen Maschinen, sodass wir, um der mit dem Vorzeichenwechsel verbundenen Unstetigkeit ent-

Fig. 29.



hoben zu sein, statt der Kolbenkraft den durch dieselbe hervorgerufenen sogenannten Tangentialdruck  $T$  am Kurbelzapfen einführen wollen. Da die vom Tangentialdruck auf dem Wege  $r d\varphi$  geleistete Elementararbeit mit der von

der Kolbenkraft geleisteten Arbeit übereinstimmen muss, so haben wir in Figur 30:

$$T r d\varphi = -F p \cdot dx$$

oder, da laut Gleichung 1):

$$\frac{dx}{d\varphi} = -r \sin \varphi - l \sin \beta \frac{d\beta}{d\varphi}$$

und wegen 2)

$$\frac{d\beta}{d\varphi} = \frac{r \cos \varphi}{l \cos \beta}$$

158)

$$T = F \cdot p \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos \beta}.$$

Verlängert man nun die Axe der Schubstange über den Kurbelzapfen hinaus, bis sie die Normale auf der Bewegungsrichtung  $OC$  in  $A$

schneidet, so ist in dem rechtwinkligen Dreieck  $OAC$  der Winkel  $\sphericalangle OAC = 90 - \beta$ , also

$$\cos \beta = \sin O\hat{A}C = \sin O\hat{A}M$$

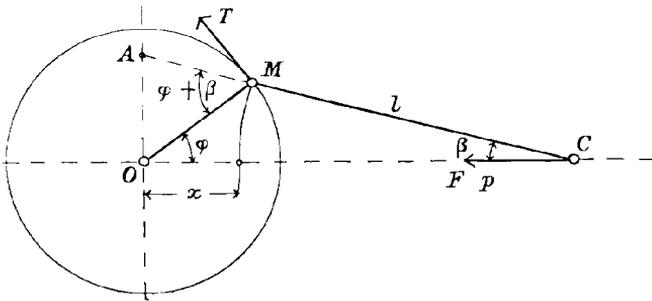
und weiter  $\sphericalangle OMA = \varphi + \beta$ , also

$$\sin(\varphi + \beta) = \sin O\hat{M}A.$$

Dies führt aber in  $\Delta OAM$  auf die Beziehung:

$$158a) \quad \frac{T}{Fp} = \frac{\sin OMA}{\sin OAM} = \frac{OA}{OM} = \frac{OA}{r}.$$

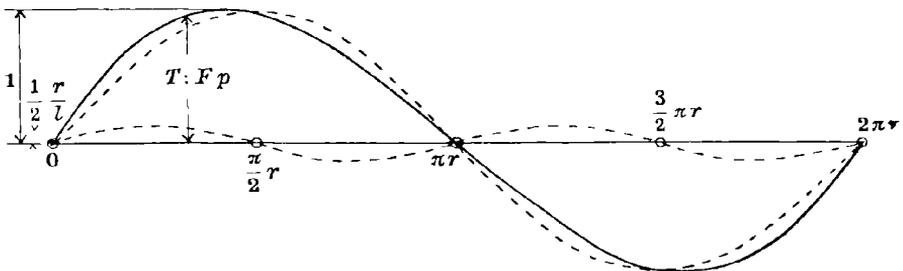
Fig. 30.



d.h. der Tangentialdruck verhält sich zum Kolbendruck wie das von der Schubstange abgeschnittene Stück des Lotes durch das Wellenmittel zum Kurbelradius.

Dieser übrigens schon längst bekannte und in der Technik benutzte Satz erlaubt uns nun eine äusserst bequeme Konstruktion des

Fig. 31.



Tangentialdruckdiagramms aus dem Kolbenkraftdiagramme (Fig. 29), wobei naturgemäss als Abscisse die Kurbelwege  $r\varphi$  und für den Kolbenrückgang das der Figur 29 entsprechende Gegendiagramm benutzt werden müssen.

Es erscheint übrigens zweckmässig, vor Ausführung dieser Konstruktion das Verhältnis (Gleichung 158a) zunächst als Funktion der Kurbelstellung zu verzeichnen, was in Fig. 31 geschehen ist, und zwar

für einen Wert  $r:l = 1:4$ . Man erkennt aus diesem Diagramm, dass sich der Verlauf des Verhältnisses  $T:F \cdot p$  auch mit grosser Annäherung durch

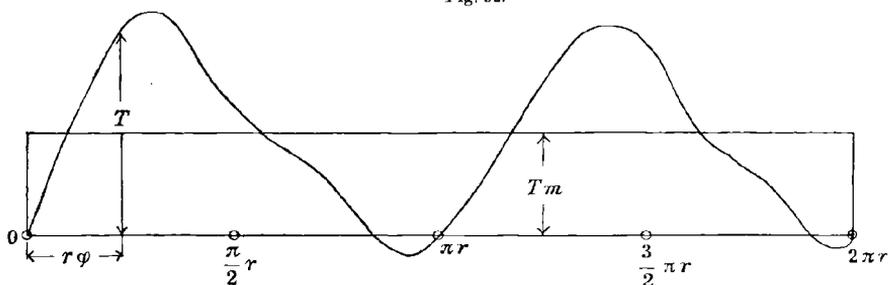
$$158b) \quad \frac{T}{F \cdot p} = \sin \varphi + \frac{1}{2} \frac{r}{l} \sin 2\varphi$$

in Übereinstimmung mit unserer früheren Näherungsgleichung 3b) darstellen lässt. Aus diesem Grunde habe ich auch die beiden Kurven

$$\sin \varphi \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \frac{r}{l} \sin 2\varphi$$

in das Diagramm (Fig. 31) eingetragen. Wäre der Kolbendruck  $F \cdot p$  konstant, wie es einer sog. Volldruckdampfmaschine ohne Kompression oder auch einer Wasserpumpe entspricht, so würde unsere Fig. 31, nachdem wir nach den dem Kolbenrückgang (von  $\pi r$  bis  $2\pi r$ ) entsprechenden Teil umgekehrt hätten, sofort deren Tangentialdruckdiagramm darstellen. Diese Umkehrung vollzieht sich in Wirklichkeit durch den Vorzeichenwechsel von  $F \cdot p$ , sodass wir für unser

Fig. 32.



Kolbendruckdiagramm (Fig. 29) ein Tangentialdruckdiagramm nach Fig. 32 erhalten würden. Dasselbe ist, wie ohne weiteres ersichtlich, infolge der Wirkung der endlichen Schubstangenlänge, für die beiden Hälften der Umdrehung nicht gleich gestaltet.

Im Beharrungszustande der Maschine wiederholt sich alsdann der durch Fig. 31 dargestellte Verlauf des Tangentialdruckes mit jeder Umdrehung, sodass wir es offenbar mit einer periodischen Funktion vom Kurbelwinkel  $\varphi$  zu thun haben. Als solche können wir aber den Tangentialdruck  $T$  durch eine Reihe von der Form

$$159) \quad \begin{cases} T = A_0 + A_1 \cos \varphi + A_2 \cos 2\varphi + A_3 \cos 3\varphi + \dots \\ \quad \quad \quad + B_1 \sin \varphi + B_2 \sin 2\varphi + B_3 \sin 3\varphi + \dots \end{cases}$$

ganz allgemein darstellen, worin die Koeffizienten  $A$  und  $B$  bekanntlich als Integrale von der Form

$$160) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{und} \\ A_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T \cos i \varphi d\varphi \\ B_i = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T \sin i \varphi d\varphi \end{array} \right.$$

erscheinen. Das konstante Glied  $A_0$  ergibt sich ebenfalls sofort durch Integration von  $F$  über die ganze Periode zu

$$160a) \quad A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T d\varphi = T_m,$$

d. h. als mittlerer Tangentialdruck. Da das Indikatordiagramm in seiner praktischen Gestalt nicht mathematisch exakt definiert ist, so gilt dies laut Gleichung 158) auch vom Tangentialdruckdiagramm. Deshalb ist es notwendig, die für die Bestimmung der Koeffizienten  $A$  und  $B$  notwendigen Integrationen graphisch auszuführen, was im allgemeinen keine Schwierigkeiten bietet, sondern nur etwas Sorgfalt und einen nicht unerheblichen Zeitaufwand erfordert.

Beispiel. Wie weit man im einzelnen Falle mit der graphischen Ermittlung der Koeffizienten  $A$  und  $B$  gehen muss, lässt sich ohne weiteres nicht sagen. Ich habe daher dieses Verfahren für das durch Fig. 32 vorgelegte Diagramm bis zu den Koeffizienten von  $\cos 4\varphi$  und  $\sin 4\varphi$  durchgeführt und zwar einfach durch die jeweils zu einer Figur vereinigten Kurven der  $\sin \varphi$  und  $\cos \varphi$ ,  $\sin 2\varphi$  und  $\cos 2\varphi$  u. s. w. und darauffolgender Planimetrierung derselben (Fig. 33 bis 36). Das Ergebnis ist die periodische Reihe

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_m} = & 1 + 0,12 \cos \varphi - 0,80 \cos 2 \varphi - 0,10 \cos 3 \varphi - 0,17 \cos 4 \varphi \\ & - 0,14 \sin \varphi + 0,66 \sin 2 \varphi + 0,16 \sin 3 \varphi + 0,02 \sin 4 \varphi. \end{aligned}$$

Eine Probe auf die Zulänglichkeit dieser Entwicklung ergibt die Berechnung der Werte von  $T$  für die Totlagen und die Mittellagen

$$\left( \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \frac{3}{2} \pi \right).$$

Man erhält für  $\varphi = 0$ :  $T_0 = 0,05 T_m$  statt  $0$ ,

für  $\varphi = \pi$ :  $T_\pi = 0,01 T_m$  „  $0$ ,

für  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ :  $T_{\frac{\pi}{2}} = 1,33 T_m$  „  $1,25 T_m$ ,

für  $\varphi = \frac{3}{2} \pi$ :  $T_{\frac{3}{2} \pi} = 1,93 T_m$  „  $1,85 T_m$ .

Der grösste Fehler beträgt also rund 6%, was bei der nur auf zwei Stellen durchgeführten Berechnung der Koeffizienten und der in der Kleinheit der Figuren begründeten Ungenauigkeit um so eher als befriedigend angesehen werden kann, als wir bei unseren sämtlichen Rechnungen bisher die mit  $r^2:l^2$  behafteten Glieder vernachlässigt haben, dieses Verhältnis aber für  $r:l = 1:4$  ebenfalls ca. 0,06 beträgt.

In unsere Energiegleichungen tritt indessen nicht der Tangentialdruck, sondern die auf dem Kurbelwege vom Totpunkte bis zum Winkel  $\varphi$  geleistete Arbeit ein, welche wir durch Integration von Gleichung 159) mit Rücksicht auf 160a) erhalten zu:

Fig. 33.

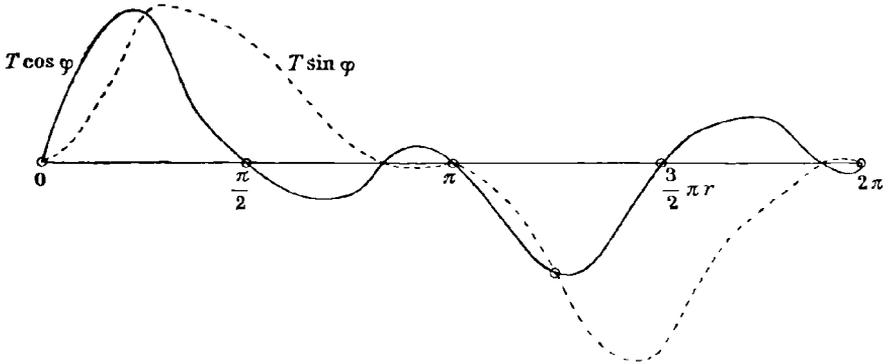
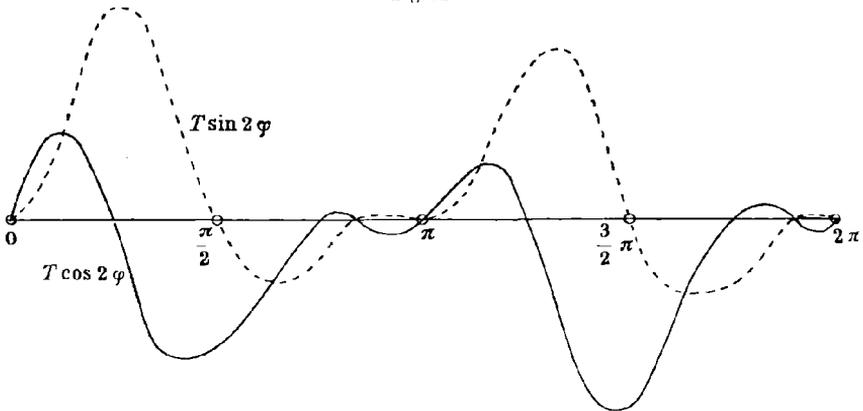


Fig. 34.



$$161) \quad \left\{ \begin{aligned} L &= r \int_0^{\varphi} T d\varphi = T_m r \varphi + r \left( B_1 + \frac{B_2}{2} + \frac{B_3}{3} \right) + \dots \\ &+ r \left( A_1 \sin \varphi + \frac{A_2}{2} \sin 2\varphi \right) + \dots \\ &- r \left( B_1 \cos \varphi + \frac{B_2}{2} \cos 2\varphi \right) + \dots \end{aligned} \right.$$

Greift ausser dem betrachteten Kurbelgetriebe noch ein anderes an derselben Welle an, so zwar, dass seine Kurbel der ersten um den Winkel  $\alpha$  vorancilt, so hat diese während des Weges der ersteren von  $0$  bis  $\varphi$  den Weg  $\alpha$  bis  $\varphi + \alpha$  durchlaufen.

Befolgt weiterhin der Tangentialdruck dieses neuen Kurbelmechanismus ebenfalls ein periodisches Gesetz, also:

$$159a) \quad \begin{cases} T_\alpha = A_0' + A_1' \cos(\varphi + \alpha) + A_2' \cos 2(\varphi + \alpha) + \dots \\ \quad \quad \quad + B_1' \sin(\varphi + \alpha) + B_2' \sin 2(\varphi + \alpha) + \dots \end{cases}$$

so ist auch hier die Integration von 0 bis  $\varphi$  zu erstrecken.

Fig. 35.

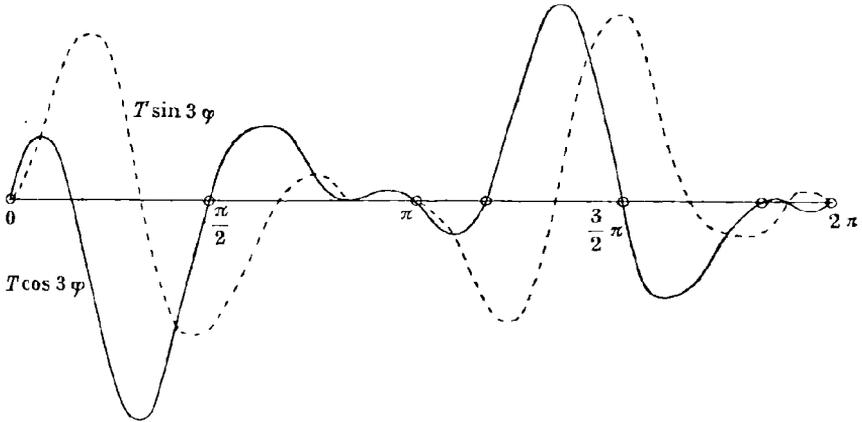
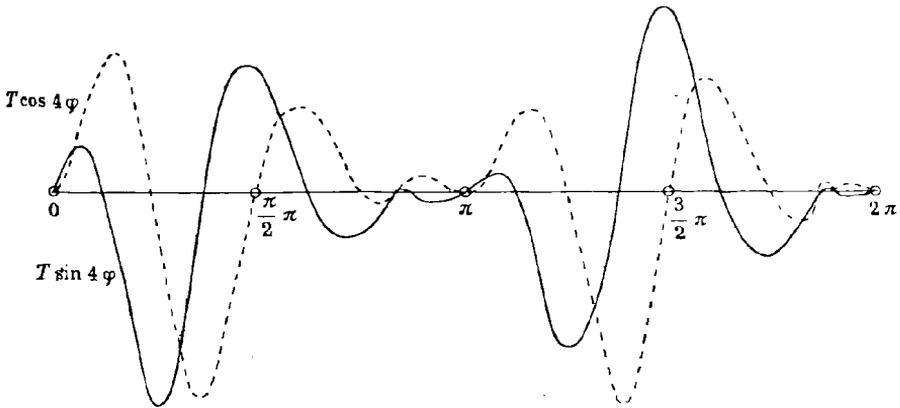


Fig. 36.



Für  $n$  solcher Getriebe erhält man alsdann einen resultierenden Tangentialausdruck von

$$161) \quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma T &= \Sigma A_0 + \cos \varphi \Sigma (A_1 \cos \alpha + B_1 \sin \alpha) \\ &\quad - \sin \varphi \Sigma (A_1 \sin \alpha - B_1 \cos \alpha) \\ &+ \cos 2 \varphi \Sigma (A_2 \cos 2 \alpha + B_2 \sin 2 \alpha) \\ &\quad - \sin 2 \varphi \Sigma (A_2 \sin 2 \alpha - B_2 \cos 2 \alpha) \\ &+ \dots \end{aligned} \right.$$

und damit, wenn wir mit  $\Sigma T_m = \Sigma A_0$  den resultierenden Mitteldruck bezeichnen, die Gesamtarbeit dieser Getriebe

$$162) \left\{ \begin{aligned} \Sigma L &= r \int_0^\varphi \Sigma T d\varphi = r\varphi \Sigma T_m + (\cos \varphi - 1) \Sigma (A_1 \sin \alpha - B_1 \cos \alpha) \\ &\quad + \sin \varphi \Sigma (A_1 \cos \alpha + B_1 \sin \alpha) \\ &\quad + (\cos 2\varphi - 1) 2 \Sigma (A_2 \sin 2\alpha - B_2 \cos 2\alpha) \\ &\quad + \dots \dots \dots \end{aligned} \right.$$

oder kürzer

$$162a) \left\{ \begin{aligned} \Sigma L &= \varphi \Sigma T_m r - (D_1 + D_2 + D_3) + \dots \\ &\quad - D_1 \cos \varphi + D_2 \cos 2\varphi + D_3 \cos 3\varphi + \dots \\ &\quad + E_1 \sin \varphi + E_2 \sin 2\varphi + E_3 \sin 3\varphi + \dots, \end{aligned} \right.$$

wobei die Bedeutung der Abkürzungen  $D$  und  $E$  sich aus dem Vergleich mit 162) ohne weiteres ergibt. Die graphische Darstellung dieser Funktion ergibt eine aufsteigende Kurve mit Schwankungen um eine Gerade, welche den gleichmässigen Zuwachs der Arbeit charakterisiert, also mit dem konstanten Mitteldruck als Grundlage zu zeichnen ist.

Bei Kurbelschleifengetrieben würde übrigens das Tangentialdruckdiagramm für beide Hälften der Umdrehung denselben Verlauf annehmen, wenn auch die Indikatordiagramme auf beiden Kolbenseiten gleich gestaltet sind.

Dies führt aber auf die Bedingung, dass

$$T_\varphi = T_{\varphi + \pi}$$

oder auch, da die entsprechenden Glieder der Reihe (159) für beide Werte identisch sein müssen, auf

$$\begin{aligned} \text{und} \quad & \cos k\varphi = \cos k(\varphi + \pi) \\ & \sin k\varphi = \sin k(\varphi + \pi), \end{aligned}$$

was nur möglich ist, wenn

$$\cos k\pi = +1$$

d.h.  $k$  eine ganze gerade Zahl ist. Mithin vereinfacht sich für diesen Fall die Reihe für den Tangentialdruck in

$$\begin{aligned} T &= A_0 + A_2 \cos 2\varphi + A_4 \cos 4\varphi + \dots \\ &\quad + B_2 \sin 2\varphi + B_4 \sin 4\varphi + \dots \end{aligned}$$

Daraus geht aber hervor, dass die Glieder mit ungeraden Vielfachen in der Formel 159) des Winkels  $\varphi$  lediglich vom Einflusse der Schubstange herrühren, und ihre Koeffizienten deshalb im Vergleich zu denjenigen mit geraden Vielfachen kleinere Werte annehmen dürften. Unser obiges Zahlenbeispiel bestätigt auch diese Forderung hinreichend.

Schliesslich dürfte noch die Bemerkung von Interesse sein, dass man ein ganz gleichförmiges Drehkraftdiagramm bei einer mehrkurbligen Maschine erhält, wenn es gelingt, die Koeffizienten  $D$  und  $E$  einzeln zum Verschwinden zu bringen, bezw. die Bedingungen

$$163) \quad \begin{cases} \Sigma(A_1 \cos \alpha + B_1 \sin \alpha) = 0, & \Sigma A_1 \sin \alpha - B_1 \cos \alpha = 0, \\ \Sigma(A_2 \cos 2\alpha + B_1 \sin 2\alpha) = 0, & \Sigma A_2 \sin 2\alpha - B_1 \cos 2\alpha = 0 \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

zu erfüllen. Dies bietet dann keine besonderen Schwierigkeiten, wenn die einzelnen Tangentialdruckdiagramme einander ähnlich, die ihnen zugehörigen Koeffizienten  $A$  und  $B$  also sämtlich den entsprechenden Mitteldrücken  $T_m$  proportional sind. Alsdann reduzieren sich die Bedingungen auf

$$163a) \quad \begin{cases} \Sigma T_m \cos \alpha = 0, & \Sigma T_m \sin \alpha = 0, \\ \Sigma T_m \cos 2\alpha = 0, & \Sigma T_m \sin 2\alpha = 0, \\ \vdots & \vdots \end{cases}$$

womit nur gesagt ist, dass die Arbeiten auf die einzelnen Cylinder der Maschine zu einander in demselben Verhältnis stehen müssen, wie die hin- und hergehenden Gewichte für den Fall des Ausgleichs der Massendrucke.

(Schluss folgt.)

## Über die Vergleichung empirischer Formeln.

Von  
C. RUNGE  
in Hannover.

---

In dem 42. Jahrgang dieser Zeitschrift 1897 (Seite 327 flg.) hat R. Mehmke verschiedene empirische Formeln mit einander verglichen, durch die man die Beziehung zwischen der elastischen Dehnung eines Materials und der dehnenden Kraft darstellt. R. Mehmke vergleicht die Formeln, indem er ihre Konstanten nach der Methode der kleinsten Quadrate aus den Beobachtungen bestimmt und jedes Mal den mittleren Fehler bildet.

Man kann aber auch, wie ich zeigen will, in allgemeiner Weise verfahren, um zu untersuchen, wie weit zwei verschiedene Formeln geeignet sind, dasselbe Gesetz darzustellen, ohne dass man es nötig hat, für jede besondere Reihe von Beobachtungen die Konstanten der Formeln zu ermitteln.

Soll z. B. die Formel  $\varepsilon = a\sigma^b$ ,

wo  $\varepsilon$  die elastische Dehnung,  $\sigma$  die Kraft darstellt und  $a$  und  $b$  positive Konstante bedeuten, mit der Formel

$$\varepsilon = \alpha\sigma + \beta\sigma^2$$

in dem Intervall  $\sigma = 0$  bis  $\sigma = s$  verglichen werden, so denke man sich die Konstanten  $a$  und  $b$  gegeben und suche die Konstanten  $\alpha$  und  $\beta$  so zu bestimmen, dass das Integral

$$\frac{1}{s} \int_0^s (\alpha\sigma + \beta\sigma^2 - a\sigma^b)^2 d\sigma$$

möglichst klein wird. Die Quadratwurzel aus dem Minimalwert können wir den mittleren Fehler der Formel  $\alpha\sigma + \beta\sigma^2$  bei der Darstellung von  $a\sigma^b$  in dem Intervall  $\sigma = 0$  bis  $s$  nennen.

Die Differentiation nach  $\alpha$  und  $\beta$  ergibt die Minimumbedingungen

$$\int_0^s (\alpha \sigma^2 + \beta \sigma^3 - a \sigma^{b+1}) d\sigma = 0,$$

$$\int_0^s (\alpha \sigma^3 + \beta \sigma^4 - a \sigma^{b+2}) d\sigma = 0,$$

oder, wenn man die Integrale ausführt:

$$\alpha \frac{s^3}{3} + \beta \frac{s^4}{4} - a \frac{s^{b+2}}{b+2} = 0,$$

$$\alpha \frac{s^4}{4} + \beta \frac{s^5}{5} - a \frac{s^{b+3}}{b+3} = 0,$$

oder

$$4\alpha + 3\beta s - 12 \cdot \frac{a s^{b-1}}{b+2} = 0,$$

$$5\alpha + 4\beta s - 20 \cdot \frac{a s^{b-1}}{b+3} = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$\alpha = \frac{12(2-b)}{(b+2)(b+3)} \cdot a s^{b-1}$$

$$\beta = \frac{20(b-1)}{(b+2)(b+3)} \cdot a s^{b-2}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} (\alpha \sigma + \beta \sigma^2 - a \sigma^b)^2 &= + \alpha \sigma (\alpha \sigma + \beta \sigma^2 - a \sigma^b) \\ &\quad + \beta \sigma^2 (\alpha \sigma + \beta \sigma^2 - a \sigma^b) \\ &\quad - a \sigma^b (\alpha \sigma + \beta \sigma^2 - a \sigma^b) \end{aligned}$$

und mithin ist wegen der Minimumbedingungen

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{1}{s} \int_0^s (\alpha \sigma + \beta \sigma^2 - a \sigma^b)^2 d\sigma = - \frac{\alpha \alpha}{s} \int_0^s \sigma^{b+1} d\sigma - \frac{\alpha \beta}{s} \int_0^s \sigma^{b+2} d\sigma \\ &\quad + \frac{\alpha^2}{s} \int_0^s \sigma^{2b} d\sigma \\ &= - a \cdot \alpha \cdot \frac{s^{b+1}}{b+2} - \alpha \beta \cdot \frac{s^{b+2}}{b+3} \\ &\quad + a^2 \frac{s^{2b}}{2b+1}. \end{aligned}$$

Setzt man hier die gefundenen Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} m^2 &= + a^2 s^{2b} \left( - \frac{12(2-b)}{(b+2)^2(b+3)} - \frac{20(b-1)}{(b+2)(b+3)^2} + \frac{1}{2b+1} \right) \\ &= \frac{a^2 s^{2b} (b-1)^2 (2-b)^2}{(2b+1)(b+2)^2(b+3)^2}, \end{aligned}$$

oder

$$\left( \frac{m}{a s^b} \right)^2 = \frac{(b-1)^2 (2-b)^2}{(2b+1)(b+2)^2(b+3)^2}.$$

$\frac{m}{as^b}$  drückt den mittleren Fehler in Bruchteilen der grössten elastischen Dehnung aus.

Es zeigt sich aus der Formel, dass der mittlere Fehler für  $b=1$  und für  $b=2$  verschwindet. Das hätte man in der That vorhersehen können. Denn für  $b=1$  und  $b=2$  ist die Form  $\alpha\sigma^b$  in der Form

$$\alpha\sigma + \beta\sigma^2$$

enthalten. Man braucht nur für  $b=1$ ,  $\alpha=a$  und  $\beta=0$  zu setzen und für  $b=2$ ,  $\alpha=0$  und  $\beta=a$ . Zugleich zeigt die Formel, dass der mittlere Fehler sehr klein wird, wenn  $b$  sehr nahe gleich 1 oder sehr nahe gleich 2 wird. In diesen Fällen macht es daher sehr wenig Unterschied, ob man die eine Formel nimmt oder die andere. R. Mehmke führt für die Dehnung des Gusseisens die aus den Beobachtungen von C. Bach berechnete Formel

$$\varepsilon = \frac{75 \cdot 600}{1381700} \sigma^{1,0863}$$

an. Hier ergibt sich

$$\frac{m}{as^b} = 0,0028.$$

Die grösste beobachtete Dehnung ist 51,31 ( $\varepsilon$  ist in  $\frac{1}{600}$  cm ausgedrückt und bezieht sich auf 75 cm Länge). Daher wird  $m$  in diesem Fall gleich 0,14. Wenn also Beträge von dieser Grössenordnung keine Rolle spielen, so kann man die Potenzformel durch die parabolische Formel ersetzen, die für manche Zwecke bequemer sein mag.

In ähnlicher Weise möge die hyperbolische Formel

$$\varepsilon = \frac{a\sigma}{1-b\sigma}$$

mit der parabolischen

$$\varepsilon = \alpha\sigma + \beta\sigma^2$$

in dem Intervall  $\sigma=0$  bis  $\sigma=s$  verglichen werden.

Das Quadrat des mittleren Fehlers  $m$  wird durch das Integral gegeben:

$$m^2 = \frac{1}{s} \int_0^s \left( \alpha\sigma + \beta\sigma^2 - \frac{a\sigma}{1-b\sigma} \right)^2 d\sigma.$$

Durch Differentiation nach  $\alpha$  und  $\beta$  erhalten wir die beiden Minimumbedingungen:

$$\int_0^s \left( \alpha\sigma^2 + \beta\sigma^3 - \frac{a\sigma^2}{1-b\sigma} \right) d\sigma = 0,$$

$$\int_0^s \left( \alpha\sigma^3 + \beta\sigma^4 - \frac{a\sigma^3}{1-b\sigma} \right) d\sigma = 0,$$

welche auf die Gleichungen führen:

$$4\alpha + 3\beta s - 12A = 0,$$

$$5\alpha + 4\beta s - 20B = 0.$$

Dabei sind der Kürze halber die Bezeichnungen gebraucht

$$A = \frac{1}{s^3} \int_0^s \frac{a\sigma^2}{1-b\sigma} d\sigma, \quad B = \frac{1}{s^4} \int_0^s \frac{a\sigma^3}{1-b\sigma} d\sigma.$$

Es wird dann

$$\alpha = 12(4A - 5B)$$

$$\beta = \frac{20}{s}(4B - 3A)$$

und

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{1}{s} \int_0^s \left( \frac{a\sigma}{1-b\sigma} - \alpha\sigma - \beta\sigma^2 \right) \frac{a\sigma}{1-b\sigma} d\sigma \\ &= \frac{1}{s} \left[ \int_0^s \frac{a^2\sigma^2}{(1-b\sigma)^2} d\sigma - \alpha s^3 A - \beta s^4 B \right] \\ &= \frac{1}{s} \left[ \int_0^s \frac{a^2\sigma^2}{(1-b\sigma)^2} d\sigma - 48s^3 A^2 + 120s^3 AB - 80s^3 B^2 \right] \end{aligned}$$

Schreibt man noch:

$$C^2 = \frac{1}{s^2} \int_0^s \frac{a^2\sigma^2 d\sigma}{(1-b\sigma)^2},$$

so ist

$$m^2 = s^2 [C^2 - 8(6A^2 - 15AB + 10B^2)].$$

Dabei ergibt sich:

$$A = \frac{a}{s^3 b^3} \left( l \frac{1}{1-bs} - bs - \frac{1}{2} b^2 s^2 \right),$$

$$B = \frac{a}{s^4 b^4} \left( l \frac{1}{1-bs} - bs - \frac{1}{2} b^2 s^2 - \frac{1}{3} b^3 s^3 \right)$$

$$C^2 = \frac{a^2}{s^2 b^2} \left( 2l(1-bs) + bs + \frac{bs}{1-bs} \right).$$

Für kleine Werte von  $bs$  ist es am zweckmässigsten, die Ausdrücke nach Potenzen von  $bs$  zu entwickeln.

Schreibt man  $bs = u$ , so ist

$$A = a \left( \frac{1}{3} + \frac{u}{4} + \dots \right)$$

$$B = a \left( \frac{1}{4} + \frac{u}{5} + \dots \right)$$

$$C^2 = a^2 \left( \frac{1}{3} + \frac{2u}{4} + \frac{3u^2}{5} + \frac{4u^3}{6} + \frac{5u^4}{7} + \dots \right).$$

Bei der Entwicklung von  $m^2$  verschwinden dann die ersten vier Glieder und es ergibt sich:

$$m^2 = a^2 s^2 \left[ \frac{u^4}{9 \cdot 25 \cdot 7} + \frac{u^5}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} + \dots \right]$$

und daher

$$m = a \cdot s \cdot \frac{b^2 s^2}{3 \cdot 5 \cdot \sqrt{7}} \left[ 1 + \frac{3 \cdot 5}{8} b s + \dots \right].$$

In dem von Mehmke gegebenen Beispiele ist z. B. die Längenveränderung  $\varepsilon$  von Gusseisen unter dem Druck  $\sigma$  durch die hyperbolische Formel dargestellt

$$\varepsilon = \frac{0,04685 \sigma}{1 - 0,0000918 \sigma}.$$

Der grösste bei den Beobachtungen vorkommende Wert von  $\sigma$  ist 998. Wir haben also rund

$$a s = 47,$$

$$b s = 0,092$$

und folglich rund

$$m = 0,01.$$

Da die Fehler der von Mehmke angeführten Beobachtungen diesen Wert von  $m$  erheblich übersteigen, so ist demnach zwischen der hyperbolischen und parabolischen Formel kein wesentlicher Unterschied in der Genauigkeit der Darstellung dieser Beobachtungen vorhanden.

Die beiden behandelten Vergleichungen

$$a \sigma^b \quad \text{mit} \quad a \sigma + \beta \sigma^2$$

und

$$\frac{a \sigma}{1 - b \sigma} \quad \text{mit} \quad a \sigma + \beta \sigma^2$$

hängen mit der Entwicklung nach Kugelfunktionen zusammen. Da wir es hier aber nur mit zwei Unbekannten  $\alpha$  und  $\beta$  zu thun haben, so lohnt es nicht, die Theorie der Kugelfunktionen ins Treffen zu führen, wenn man die Bekanntschaft mit der Theorie nicht voraussetzen will.

Es möge indessen auf den Zusammenhang der vorliegenden Fragen mit der Entwicklung nach Kugelfunktionen kurz hingewiesen werden.

Wenn eine empirische Formel

$$y = f(x)$$

mit einer andern empirischen Formel

$$y = g(x)$$

in dem Intervall  $x_1$  bis  $x_2$  verglichen werden soll, wo  $g(x)$  eine beliebige ganze rationale Funktion  $n^{\text{ten}}$  Grades bedeutet, so werde zunächst statt  $x$  die Veränderliche  $u$  durch die Gleichung

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2} \cdot u$$

eingeführt. Die Veränderliche  $u$  liegt dann zwischen den Grenzen  $-1$  und  $+1$ . Die Funktionen  $f(x)$  und  $g(x)$  mögen, nachdem die neue Veränderliche  $u$  eingeführt ist, mit  $F(u)$  und  $G(u)$  bezeichnet werden.

Es sei nun  $F(u)$  nach Kugelfunktionen entwickelt:

$$F(u) = c_0 + c_1 \chi_1 + c_2 \chi_2 + c_3 \chi_3 + \dots$$

so ist bekanntlich\*

$$c_\alpha = \frac{2^\alpha + 1}{2} \int_{-1}^{+1} F(u) \chi_\alpha du, \quad \int_{-1}^{+1} \chi_\alpha \chi_\beta du = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} \chi_\alpha \chi_\alpha du = \frac{2}{2^\alpha + 1}.$$

Daraus folgt, dass der mittlere Fehler  $m$

$$m^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [F(u) - (c_0 + c_1 \chi_1 + c_2 \chi_2 + \dots + c_n \chi_n)]^2 du$$

für die betreffenden Werte von  $c_0 c_1 \dots c_n$  kleiner ist als für alle anderen Werte. Denn die Minimumbedingungen werden eben

$$\int_{-1}^{+1} F(u) \chi_\alpha du - c_\alpha \int_{-1}^{+1} \chi_\alpha \chi_\alpha du = 0.$$

Soll also die ganze Funktion  $n^{\text{ten}}$  Grades  $G(u)$ , das Quadrat des mittleren Fehlers

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [F(u) - G(u)]^2 du$$

zum Minimum machen, so muss sein

$$G(u) = c_0 + c_1 \chi_1 + c_2 \chi_2 + \dots + c_n \chi_n.$$

Der Minimumwert von  $m^2$  lässt sich in die Form bringen

$$m^2 = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [F(u)]^2 du - \left[ c_0^2 + \frac{1}{3} c_1^2 + \frac{1}{5} c_2^2 + \dots + \frac{1}{2n+1} c_n^2 \right].$$

In den oben behandelten beiden Fällen tritt noch eine Komplikation hinzu. Die ganze rationale Funktion soll dort nämlich kein von  $x$  unabhängiges Glied haben oder, wie wir hier besser sagen würden, sie soll an der unteren Grenze des Intervalles also für  $u = -1$  verschwinden. Nun nehmen die Kugelfunktionen  $\chi_1, \chi_2, \chi_3 \dots$  für

\* Heine, Handbuch der Kugelfunktionen § 14 Gleichung 9a), 9b), 9c).

$u = -1$  bekanntlich\* die Werte  $-1, +1, -1, +1, \dots$  an. Folglich hat  $G(u)$  ausser der Minimumbedingung noch die weitere Bedingung zu erfüllen, dass, wenn es nach Kugelfunktionen entwickelt wird,

$$G(u) = c_0' + c_1' \chi_1 + c_2' \chi_2 + \dots + c_n' \chi_n,$$

die Koeffizienten die Gleichung erfüllen

$$c_0' - c_1' + c_2' - \dots \pm c_n' = 0.$$

Wir haben es also mit einem relativen Minimum zu thun. Es soll

$$\int_{-1}^{+1} [F(u) - G(u)]^2 du$$

möglichst klein werden, für solche Werte  $c_0' c_1' \dots c_n'$ , welche die Bedingung

$$c_0' - c_1' + \dots \pm c_n' = 0$$

erfüllen. Das führt nach Einführung einer Korrelate  $k$  auf die Lösungen:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} F(u) du - \frac{2}{1} c_0' - k &= 0, \\ \int_{-1}^{+1} F(u) \chi_1 du - \frac{2}{3} c_1' + k &= 0, \\ \vdots \\ \int_{-1}^{+1} F(u) \chi_n du - \frac{2}{2n+1} c_n' \mp k &= 0, \end{aligned}$$

oder, wenn wieder  $c_0, c_1, c_2 \dots$  die Koeffizienten der Entwicklung von  $F(u)$  nach Kugelfunktionen bezeichnen:

$$\begin{aligned} 2c_0 &= 2c_0' + k, \\ \frac{2}{3}c_1 &= \frac{2}{3}c_1' - k, \\ \vdots & \\ \frac{2}{2n+1}c_n &= \frac{2}{2n+1}c_n' \pm k, \end{aligned}$$

wobei  $k$  sich nun durch die Bedingungsgleichung ergibt:

$$\begin{aligned} c_0 - c_1 + c_2 - \dots \pm c_n &= k \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \frac{5}{2} + \dots + \frac{2n+1}{2} \right) \\ &= \frac{k(n+1)^2}{2}. \end{aligned}$$

---

\* Folgt sofort aus der Definition von  $\chi_\nu$  als Koeffizient von  $\alpha^\nu$  in der Entwicklung von  $\frac{1}{\sqrt{1-2\alpha u + \alpha^2}}$ . Heine, Handbuch der Kugelfunktionen § 4 Gleichung 1).

Der Minimumwert von  $m^2$  ist:

$$\begin{aligned}
 m^2 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [F(u)]^2 du - \left( c_0'^2 + \frac{1}{3} c_1'^2 + \dots + \frac{1}{2n+1} c_n'^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [F(u)]^2 du - \left( c_0^2 + \frac{1}{3} c_1^2 + \dots + \frac{1}{2n+1} c_n^2 \right) + \frac{k^2}{4} (n+1)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} [F(u)]^2 du - \left( c_0^2 + \frac{1}{3} c_1^2 + \dots + \frac{1}{2n+1} c_n^2 \right) \\
 &\quad + \left( \frac{c_0 - c_1 + c_2 - \dots \pm c_n}{n+1} \right)^2.
 \end{aligned}$$

Die erforderliche Rechnung beschränkt sich demnach darauf, die Koeffizienten der Entwicklung von  $F(u)$  nach Kugelfunktionen  $c_0 c_1 \dots c_n$  und den Wert von

$$\int_{-1}^{+1} [F(u)]^2 du$$

zu ermitteln. Dabei ist

$$c_v = \frac{2v+1}{2} \int_{-1}^{+1} F(u) \chi_v(u) du.$$

Hat man diese Werte ermittelt, so zeigt der Wert von  $m$ , mit welcher Genauigkeit die empirische Formel  $F(u)$  durch eine ganze rationale Funktion  $n^{\text{ten}}$  Grades  $G(u)$  ersetzt werden kann.

# Über den sphärischen Kegelschnitt und seine abwickelbare Tangentenfläche.

Von

Prof. Dr. G. HUBER

in Bern.

---

## Einleitung.

Die Definition des sphärischen Kegelschnittes wurde zuerst von Nic. Fuss aufgestellt, durch die konstante Summe der Radien vectoren nach zwei festen Punkten. (Nova acta petropolitana t. 3, 1781.) Weitere Eigenschaften desselben sind durch Schubert, Magnus und Gergonne am Ende des 18. Jahrh. aufgefunden worden. Eine vollständige Bearbeitung der sphärischen Kegelschnitte nach synthetischer Methode hat erst Chasles im Jahre 1830 geliefert. (Nouv. mém. de l'Académie roy. de Bruxelles t. VI.) Fast aus der gleichen Zeit datieren die synthetischen Untersuchungen Steiners in seiner „Systematischen Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander.“

Ebenfalls ausführlich sind die Arbeiten von Möbius und Gudermann über „Analytische Sphärik“. Beide beziehen die Punkte des sphärischen Kegelschnittes auf ein sphärisches Dreieck auf der Kugel als Koordinatendreieck. Die zugehörigen Koordinaten heissen sphärische Koordinaten und durch deren Einführung wird der Grad der Gleichung der Kurven auf den zweiten Grad reduziert. In der analytischen Geometrie des Raumes von Salmon-Fiedler befindet sich im Anhang eine Zusammenstellung der Hauptsätze über sphärische Kegelschnitte. Ferner zu erwähnen sind zwei Dissertationen über sphärische Kegelschnitte von Geisenheimer (Jena 1869) und H. Vogt (Breslau 1873), in welchen Gudermannsche Koordinaten zu Grunde gelegt sind. Im 14. Bd. von Crelles Journal hat Gudermann Inhalt und Bogen der sphärischen Ellipse durch zwei komplizierte Integrale dritter Art dargestellt. Eine Quadratur dieser Kurve wurde auch von Catalan ausgeführt (Liouville's Journ. tom 6). Eine elegante Rektifikation der sphärischen Ellipse hat Tortolini geliefert (Sopra la Rettificazione dell' Ellissi sferica etc. Roma 1846), wobei der Kurvenbogen durch ein

Legendresches Integral dritter Art und der ganze Umfang der Kurve durch elliptische Integrale erster und zweiter Art dargestellt wird.

Neuere, mir bekannte Untersuchungen über sphärische Kegelschnitte sind eingeschlossen in den allgemeineren Arbeiten über Raumkurven vierter Ordnung von Eberhard, „Über Steinersche Sekanten und Punktsysteme auf Raumkurven vierter Ordnung“ (Schlömilchs Zeitschrift, Bd. 32); „Harnack, Über die Darstellung der Raumkurven vierter Ordnung erster Spezies durch doppelt periodische Funktionen“ (Mathem. Annal. Bd. 12.)

In der vorliegenden Arbeit sind die Koordinaten eines Punktes des sphärischen Kegelschnittes durch elliptische Funktionen eines veränderlichen Parameters  $u$  dargestellt. Die Herleitung der bekannten Eigenschaften der Kurve, die sich vermittelt dieser Gleichungen leicht bewerkstelligen lässt, ist zum grössten Teil weggelassen, dagegen ist die Krümmung berücksichtigt worden. Ferner ist hauptsächlich die Quadratur und Rektifikation der sphärischen Ellipse ausgeführt; besonders die erstere führt auf einen sehr einfachen Ausdruck.

Ferner ist es mir gelungen, die Gleichungen der abwickelbaren Tangentenfläche des sphärischen Kegelschnittes mittelst zweier veränderlicher Parameter  $u, v$  in sehr einfacher Form durch elliptische Funktionen darzustellen. Die Parameterkurven  $u = \text{konst.}$  sind die Erzeugenden der Tangentenfläche, während die Kurven  $v = \text{konst.}$  ein System von Kurven achter Ordnung auf der Fläche repräsentieren, die sich als Kurven vierter Ordnung auf die drei Koordinatenebenen projizieren. Die Doppelkurven der Fläche in den drei Koordinatenebenen und in der unendlich fernen Ebene ergeben sich für vier spezielle Werte von  $v$ , nämlich  $v = 0, K, K + iK'$  und  $iK'$ ; sie lassen sich durch einfache Gleichungen vierten Grades in rechtwinkligen Koordinaten darstellen und leicht konstruieren (Fig. 2 u. 3).

Hieran schliessen sich noch einige andere Untersuchungen der Fläche, Aufstellung der Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung, Krümmung u. s. w. Ich hoffe damit einen kleinen Beitrag zur genaueren Kenntnis dieser Fläche geliefert zu haben.

### I. Der sphärische Kegelschnitt.

Der sphärische Kegelschnitt sei dargestellt als Schnittlinie der Einheitskugel:

$$1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

mit dem konzentrischen elliptischen Kegel:

$$2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

wo  $a > b$ . Die Koordinatenebenen sind die Hauptebenen des Kegels. Der Kegelschnitt besteht aus zwei kongruenten sphärischen Ellipsen,

oberhalb und unterhalb der  $(xy)$ -Ebene, mit den elliptischen Mittelpunkten  $Z$  und  $Z'$  auf der  $z$ -Axe und den hyperbolischen Mittelpunkten  $X, X'$  und  $Y, Y'$  auf den beiden anderen Axen (Fig. I).

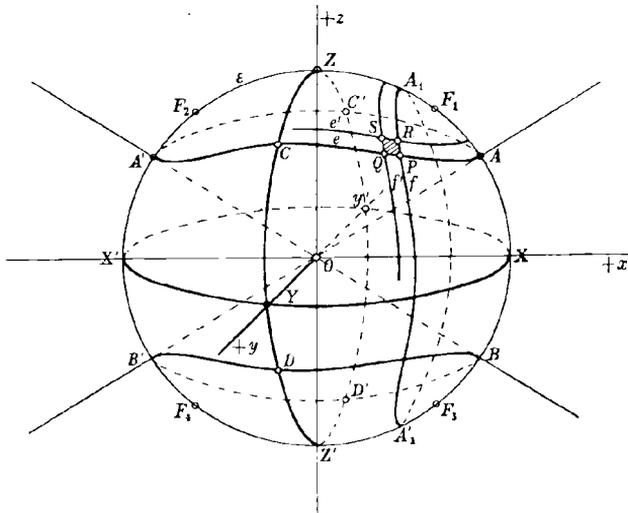
Die Gleichung des Kegels lässt sich auch schreiben:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Weil

$$\frac{a^2}{a^2+c^2} < 1, \quad \frac{c^2}{a^2+c^2} < 1$$

Fig. 1.



und ihre Summe = 1 ist, so kann man setzen:

$$3) \quad \frac{a^2}{a^2+c^2} = \sin^2 \alpha, \quad \frac{c^2}{a^2+c^2} = \cos^2 \alpha, \quad \text{also } \tan \alpha = \frac{a}{c},$$

wo  $0 < \alpha < 90^\circ$  ist. Ferner setze man:

$$\frac{b^2}{a^2+c^2} = \sin^2 \alpha - \sin^2 \varepsilon,$$

wobei  $\alpha > \varepsilon$  sein muss. Nun wird nach 3):

$$4) \quad \sin^2 \varepsilon = \frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}, \quad \cos^2 \varepsilon = \frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}, \quad \tan \varepsilon = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+c^2}}.$$

Die Gleichung des Kegels lässt sich nun schreiben:

$$5) \quad \frac{x^2}{\sin^2 \alpha} + \frac{y^2}{\sin^2 \alpha - \sin^2 \varepsilon} - \frac{z^2}{\cos^2 \alpha} = 0.$$

Für  $\alpha = 0$  reduziert sich der Kegel auf die  $(yz)$ -Ebene, für  $\alpha = \varepsilon$  auf die  $(xz)$ -Ebene und für  $\alpha = 90^\circ$  auf die  $(xy)$ -Ebene.

Für  $\varepsilon = 0$  wird  $a = b$ , der Kegel wird ein Kreiskegel und der sphärische Kegelschnitt reduziert sich auf zwei Kleinkreise der Kugel.

Durch Elimination von  $y$  aus 1) und 5) ergibt sich die Projektion des sphärischen Kegelschnittes auf die  $(xz)$ -Ebene als die Ellipse:

$$6) \quad \left(\frac{\sin \varepsilon}{\sin \alpha}\right)^2 x^2 + \left(\frac{\cos \varepsilon}{\cos \alpha}\right)^2 z^2 = 1.$$

Weil  $\varepsilon < \alpha$  und  $x$  stets  $< 1$  ist, so kann man

$$\frac{\sin \varepsilon}{\sin \alpha} x = \sin \varphi$$

setzen, wo  $\varphi$  ein veränderlicher Winkel bedeutet, dann folgt aus 6):

$$\frac{\cos \varepsilon}{\cos \alpha} z = \cos \varphi,$$

also wird:

$$x = \frac{\sin \alpha}{\sin \varepsilon} \sin \varphi, \quad z = \frac{\cos \alpha}{\cos \varepsilon} \cos \varphi,$$

als Koordinaten eines Punktes der Projektionsellipse. Die zugehörige Koordinate  $y$  des entsprechenden Punktes des sphärischen Kegelschnittes ergibt sich aus der Kugelgleichung als

$$y = \frac{1}{\sin \varepsilon \cos \varepsilon} \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \varepsilon} \cdot \sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varphi}.$$

Damit  $y$  reell werde, muss stets  $\sin^2 \varphi < \sin^2 \varepsilon$  sein.

Die räumlichen Koordinaten eines Punktes des sphärischen Kegelschnittes, als Funktionen von  $\varphi$  betrachtet, werden nun:

$$7) \quad \begin{cases} x = \frac{\sin \alpha}{\sin \varepsilon} \sin \varphi, & y = \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \varepsilon} \cdot \sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\sin \varepsilon \cos \varepsilon}, \\ & z = \frac{\cos \alpha}{\cos \varepsilon} \cdot \cos \varphi. \end{cases}$$

Für  $\varphi = \pm \varepsilon$  und  $\varphi = \pi \mp \varepsilon$  wird:

$$x = \pm \sin \alpha, \quad y = 0, \quad z = \pm \cos \alpha,$$

es sind dies die Scheitel  $A, A' B, B'$  der grossen Axen der beiden sphärischen Ellipsen; hieraus folgt, dass die Hauptbogen der Kugel

$$ZA = ZA' = Z'B = Z'B' = \alpha$$

sind, d.h.  $\alpha$  ist die halbe grosse Axe der sphärischen Ellipse.

Für  $\varphi = 0$  wird

$$x = 0, \quad y = \pm \frac{\sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \varepsilon}}{\cos \varepsilon}, \quad z = \pm \frac{\cos \alpha}{\cos \varepsilon},$$

es sind dies die in der  $(yz)$ -Ebene liegenden Scheitel  $C, C'$  bez.  $D, D'$  der kleinen Axen der beiden sphärischen Ellipsen.

Die Gleichungen der reellen, in der  $(xz)$ -Ebene liegenden Fokallinien des Kegels sind:

$$x = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}} z = \pm \operatorname{tang} \varepsilon \cdot z,$$

sie schneiden die Einheitskugel in den vier Brennpunkten des sphärischen Kegelschnittes, ihre Koordinaten werden:

$$8) \quad x = \pm \sin \varepsilon, \quad y = 0, \quad z = \pm \cos \varepsilon.$$

Bezeichnet man die Brennpunkte der oberhalb der  $(xy)$ -Ebene liegenden sphärischen Ellipse mit  $F_1$  und  $F_2$ , die der unterhalb der  $(xy)$ -Ebene liegenden mit  $F_3$  und  $F_4$ , so folgt, dass ihre Abstände von den Mittelpunkten  $Z$  und  $Z'$  gleich dem Bogen  $\varepsilon$  sind:

$$ZF_1 = ZF_2 = Z'F_3 = Z'F_4 = \varepsilon,$$

d. h.  $\varepsilon$  ist die Exzentrizität des sphärischen Kegelschnittes.

Für jeden Punkt  $P$  der obern sphärischen Ellipse gilt nun die Beziehung:

$$\operatorname{arc} F_1 P + \operatorname{arc} F_2 P = 2\alpha.$$

Um in den Gleichungen 7) für  $y$  die Quadratwurzel zu vermeiden, führen wir elliptische Funktionen ein.

Als abgebräuschten Modul wählen wir:

$$9) \quad x = \sin \varepsilon - \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}, \quad x' = \cos \varepsilon = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2}}$$

gleich komplementärer Modul und setzen bei Benützung der Gudermannschen Zeichen:

$$10) \quad \begin{cases} \sin \varphi = x s n u, & \cos \varphi = \sqrt{1 - x^2 s n^2 u} = d n u, \\ \sqrt{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varphi} = x c n u. \end{cases}$$

Für  $\varphi = 0$  ist dann auch  $u = 0$ . Bei demselben Modul setzen wir:

$$11) \quad \begin{cases} \sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = x s n t, & \text{also } \cos \alpha = d n t, \\ \sqrt{\sin^2 \alpha - \sin^2 \varepsilon} = i x c n t, \end{cases}$$

wo  $t$  zunächst eine Konstante bedeutet, von welcher die Axen des sphärischen Kegelschnittes abhängen. Aus obigem folgt:

$$11a) \quad \begin{cases} s n t = \frac{\sin \alpha}{x} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} > 1, & i c n t = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \\ d n t = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}}. \end{cases}$$

Wie gesehen ist  $\alpha$  ein Winkel zwischen  $\varepsilon$  und  $\frac{\pi}{2}$ . Für die untere Grenze  $\alpha = \varepsilon$ , also  $\sin \alpha = \sin \varepsilon = x$ , wird  $x s n t = x$ , also  $s n t = 1$  und  $t = K$ . Für die obere Grenze  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  wird  $\sin \alpha = 1$ , also  $x s n t = 1$   $s n t = \frac{1}{x}$ , somit  $t = K + i K'$ . Bezeichnen wir im folgenden immer

die imaginäre Periode der elliptischen Funktionen  $2iK'$  kurz mit  $2L$ , so finden wir, dass das konstante Argument  $t$  zwischen  $K$  und  $K + L$  liegt, es ist also komplex,  $t = K + vi$ , und  $icnt$  ist reell.

Die Gleichungen des sphärischen Kegelschnittes, als Funktionen der Variablen  $u$  betrachtet, werden nun:

$$12) \quad x = \kappa sn t sn u, \quad y = \frac{i\kappa}{\kappa'} cnt cn u, \quad z = \frac{1}{\kappa'} dnt dn u.$$

Für die Konstanten führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$snt = \lambda, \quad icnt = \mu, \quad dnt = \nu,$$

es ist dann

$$1 < \lambda < \frac{1}{\kappa}, \quad 0 < \mu < \frac{\kappa'}{\kappa} \quad \text{und} \quad 0 < \nu < \kappa'.$$

Die Gleichungen des sphärischen Kegelschnittes werden nun:

$$13) \quad x = \kappa \lambda sn u, \quad y = \frac{\kappa}{\kappa'} \mu cn u, \quad z = \frac{\nu}{\kappa'} dn u.$$

Geht  $u$  von 0 bis  $4K$ , so erhält man die oberhalb der  $(xy)$ -Ebene liegende sphärische Ellipse, geht  $u$  von  $2L$  bis  $2L + 4K$ , so erhält man die unterhalb liegende vom Mittelpunkt  $Z'$ .

Die Parameter  $u_i$  von vier Punkten der Kurve, welche in irgend einer Ebene liegen, genügen der Gleichung:

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0 \pmod{4K, 4L}.*$$

Für  $u = 0$  und  $2K$  wird

$$x = 0, \quad y = \pm \frac{\kappa}{\kappa'} \mu, \quad z = \frac{\nu}{\kappa'},$$

es sind dies die Scheitel  $C$  und  $C'$  der kleinen Axe.

Für  $u = K$  und  $3K$  wird

$$x = \pm \kappa \lambda, \quad y = 0, \quad z = \nu,$$

es sind dies die Scheitel  $A$  und  $A'$  der grossen Axe.

Die Koordinaten der Brennpunkte sind

$$x = \pm \kappa, \quad y = 0, \quad z = \pm \kappa'.$$

Aus den Gleichungen 13) der Kurve folgt:

$$\frac{dx}{du} = \kappa \lambda cn u dn u, \quad \frac{dy}{du} = -\frac{\kappa}{\kappa'} \mu sn u dn u,$$

$$\frac{dz}{du} = -\frac{\kappa^2}{\kappa'} \nu sn u cn u.$$

Die Gleichungen der Tangente im Punkte  $x, y, z$ , vom Argument  $u$ , des sphärischen Kegelschnittes werden:

$$\frac{\xi - x}{\lambda cn u dn u} = \frac{-\kappa'(\eta - y)}{\mu sn u dn u} = \frac{-\kappa'(\zeta - z)}{\kappa \nu sn u cn u},$$

oder:

\* A. Harnack, Über die Darstellung der Raumkurven vierter Ordnung 1. Spezies durch doppelt periodische Funktionen. Math. Ann. Bd. XII S. 47.

$$14) \quad \begin{cases} \mu sn u \cdot \xi + \lambda x' cn u \cdot \eta = \lambda \mu x, \\ \nu x sn u \xi + \lambda x' dn u \cdot \xi = \lambda \nu. \end{cases}$$

Die Gleichung der Normalebene in diesem Punkte wird:

$$15) \quad \frac{\lambda x' \cdot \xi}{sn u} - \frac{u \cdot \eta}{cn u} - \frac{\nu \cdot x \cdot \xi}{dn u} = 0,$$

d.h. alle Normalebenen der Kurve gehen durch den Kugelmittelpunkt, wie dies auch geometrisch klar, da der Kugelradius eine Normale der Kurve ist.

Die Gleichung der Schmiegungs- oder Osculationsebene wird:

$$16) \quad \mu \nu x x' sn^3 u \cdot \xi - \lambda \nu x cn^3 u \cdot \eta + \lambda \mu dn^3 u \cdot \xi = \lambda \mu \nu x'.$$

Die acht Scheitel des sphärischen Kegelschnittes sind Osculationspunkte der Kurve, die Schmiegungebenen in denselben sind stationäre Osculationsebenen; diejenigen in den Scheiteln  $C, C'$  der kleinen Axe treten auf für  $u = 0$  und  $2K$ , nämlich

$$\frac{\xi}{\nu x'} \mp \frac{x \eta}{x' \mu} = 1,$$

sie sind senkrecht zur  $(yz)$ -Ebene. Diejenigen in den Scheiteln  $A, A'$  der grossen Axe werden für  $u = K$  und  $3K$  erhalten:

$$\pm \frac{x}{\lambda} \xi + \frac{x'^2}{\nu} \xi = 1. \quad \cdot$$

Projiziert man den sphärischen Kegelschnitt von einem dieser Scheitel aus auf die Koordinatenebenen, so ist die Bildkurve von der dritten Ordnung. Nimmt man z.B. den vordern Scheitel  $C$  der kleinen Axe als Projektionscentrum und die  $(xy)$ -Ebene als Bildebene, so sind die Koordinaten des Bildpunktes, welcher dem Punkte vom Parameter  $u$  der Raumkurve entspricht:

$$x = \frac{\lambda x sn u}{1 - dn u}, \quad y = \frac{\mu x (cn u - dn u)}{x' (1 - dn u)},$$

womit die Bildkurve eindeutig auf den sphärischen Kegelschnitt bezogen ist. Durch Elimination von  $u$  ergibt sich die Gleichung der Bildkurve:

$$17) \quad \mu x' (xy + \mu x') x^2 + (x' y - \mu x) \lambda^2 y = 0.$$

Sie hat die Asymptote  $y = -\frac{\mu x'}{x}$ , ihr unendlich ferner Berührungspunkt ist Wendepunkt. Die Kurve besteht aus einem geschlossenen Blatt, welches die  $x$ -Axe im Nullpunkt berührt, und zwei kongruenten unendlichen hyperbolisch-parabolischen Ästen, symmetrisch zur  $y$ -Axe mit obiger Asymptote. Die Gleichungen der übrigen Projektionen sind von ähnlicher Form.

Der Radius der ersten Krümmung im Punkte  $(x, y, z)$  des sphärischen Kegelschnittes wird aus der Formel erhalten:

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}}.$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{du} &= \kappa \lambda \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u, & \frac{dy}{du} &= \frac{\kappa}{\kappa'} \mu \operatorname{sn} u \operatorname{dn} u, & \frac{dz}{du} &= -\frac{\kappa^2 \nu}{\kappa'} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u, \\ \frac{d^2x}{du^2} &= -\kappa \lambda \operatorname{dn} u (2 \operatorname{dn}^2 u - \kappa'^2), & \frac{d^2y}{du^2} &= -\frac{\kappa}{\kappa'} \mu \operatorname{cn} u (2 \operatorname{dn}^2 u - 1) \\ \frac{d^2z}{du^2} &= -\frac{\kappa^2}{\kappa'} \nu \operatorname{dn} u (1 - 2 \operatorname{sn}^2 u), & \frac{ds}{du} &= \kappa \sqrt{\lambda^2 - \operatorname{sn}^2 u}, \\ \frac{d^2s}{du^2} &= -\frac{\kappa \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\sqrt{\lambda^2 - \operatorname{sn}^2 u}}. \end{aligned}$$

Setzt man alle diese Werte ein, und reduziert, so ergibt sich der Krümmungsradius im Punkte  $u$ :

$$18) \quad \rho = \frac{\kappa(\lambda^2 - \operatorname{sn}^2 u)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\kappa^2(\lambda^2 - \operatorname{sn}^2 u)^3 + \lambda^2 \mu^2 \nu^2}}$$

Im Scheitel der kleinen Axe, für  $u = 0$ , wird

$$\rho = \frac{\kappa \lambda^2}{\sqrt{\kappa^2 \lambda^4 + \mu^2 \nu^2}} = \frac{\kappa \lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 - \nu^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^4 + b^2 c^2}}.$$

Im Scheitel der grossen Axe, für  $u = K$ , wird der Krümmungsradius:

$$\rho = \frac{\kappa \mu^2}{\sqrt{\lambda^2 \kappa'^4 + \kappa^2 \nu^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{b^4 + a^2 c^2}}.$$

Der Krümmungsmittelpunkt eines Kurvenpunktes  $u$  liegt im Schnittpunkt der Oskulationsebene mit der Durchschnittslinie zweier unendlich benachbarter Normalebene; diese Schnittlinie steht senkrecht auf der Oskulationsebene, und weil alle Normalebene durch den Kugelmittelpunkt laufen, so thut es auch diese Schnittlinie. Man findet also den Krümmungsmittelpunkt in einem Punkte des sphärischen Kegelschnittes, indem man vom Kugelmittelpunkt ein Lot auf die zugehörige Oskulationsebene fällt, der Fusspunkt ist der Krümmungsmittelpunkt.

Aus der Gleichung 16) der Oskulationsebene und den Gleichungen des Lotes vom Mittelpunkt aus, ergeben sich die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$19) \quad x = \frac{\kappa \lambda \mu^2 \nu^2}{N} \operatorname{sn}^3 u, \quad y = -\frac{\kappa \lambda^2 \mu \nu^2}{\kappa' N} \operatorname{cn}^3 u, \quad z = \frac{\kappa \lambda^2 \mu^2 \nu}{\kappa' N} \operatorname{dn}^3 u,$$

wobei  $N = \lambda^2 \mu^2 \nu^2 + \kappa^2 (\lambda^2 - \operatorname{sn}^2 u)^3$  ist. Eliminiert man aus diesen drei Gleichungen den variablen Parameter  $u$ , so ergibt sich die Gleichung eines Kegels sechsten Grades mit Scheitel im Kugelmittelpunkt:

$$20) \quad (\lambda^2 \kappa'^4 x^2 + \mu^2 y^2 - \kappa^2 \nu^2 z^2)^3 + 27 \lambda^2 \mu^2 \nu^2 \kappa^2 \kappa'^2 x^2 y^2 z^2 = 0.$$

Die Erzeugenden dieses Kegels stehen auf den Oskulationsebenen des sphärischen Kegelschnittes senkrecht, d.h. dieser Kegel durchschneidet die developpable Tangentenfläche des sphärischen Kegelschnittes überall rechtwinklig, und ihre Schnittlinie ist der Ort der

Krümmungsmittelpunkte desselben. Weil die Tangentenfläche, wie wir später sehen werden, von der achten Ordnung ist, so ist die Krümmungsmittelpunktkurve von der Ordnung  $8 \cdot 6 = 48$ .

Der Kegel hat die zwei Paar Erzeugenden, die in der  $(xz)$ - bez.  $(yz)$ -Ebene liegen zu Rückkehrkanten und die betreffenden Koordinatenebenen sind die Rückkehrtangentelebenen.

Die zweite Krümmung oder Torsion wird dargestellt durch die Formel

$$\frac{1}{r} = \frac{E}{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

dabei ist:

$$E = \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = -3\lambda\mu\nu \cdot x^4 sn u \cdot cn u \cdot dn u,$$

$$X = \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2z}{du^2} - \frac{dz}{du} \cdot \frac{d^2y}{du^2} = -\mu\nu x^3 sn^3 u,$$

$$Y = \frac{dz}{du} \cdot \frac{d^2x}{du^2} - \frac{dx}{du} \cdot \frac{d^2z}{du^2} = \frac{\lambda\nu x^3}{x'} cn^3 u,$$

$$Z = \frac{dx}{du} \cdot \frac{d^2y}{du^2} - \frac{dy}{du} \cdot \frac{d^2x}{du^2} = -\frac{\lambda\mu x^2}{x'} dn^3 u,$$

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = x^4 \{ \lambda^2 \mu^2 \nu^2 + x^2 (\lambda^2 - sn^2 u) \}^2.$$

Also wird die Torsion:

$$\frac{1}{r} = -\frac{3\lambda\mu\nu sn u cn u dn u}{\lambda^2 \mu^2 \nu^2 + x^2 (\lambda^2 - sn^2 u)^2}.$$

Für  $u = 0$ ,  $K$ ,  $2K$ ,  $3K$ , d. h. in den Scheiteln der beiden Axen des sphärischen Kegelschnittes ist die Torsion Null.

## II. Quadratur der sphärischen Ellipse.

Denken wir uns in den Gleichungen 12) des sphärischen Kegelschnittes die Grösse  $t$  als einen zwischen  $K$  und  $K + L$  liegenden veränderlichen Parameter, während die Variable  $u$  jedesmal von 0 bis  $4K$ , bez. von  $2L$  bis  $2L + 4K$  geht, so entspricht jedem Wert von  $t$  ein bestimmter sphärischer Kegelschnitt, oder zwei kongruente sphärische Ellipsen oberhalb und unterhalb der  $(xy)$ -Ebene. Wir erhalten also eine Schar sphärischer Kegelschnitte, oder eine doppelte Schar sphärischer Ellipsen, welche alle dieselben Brennpunkte haben, denn ihre Koordinaten

$$x = \pm x, \quad y = 0, \quad z = \pm x'$$

sind von  $t$  unabhängig, d. h. das System der sphärischen Kegelschnitte  $t = \text{konstant}$  ist konfokal.

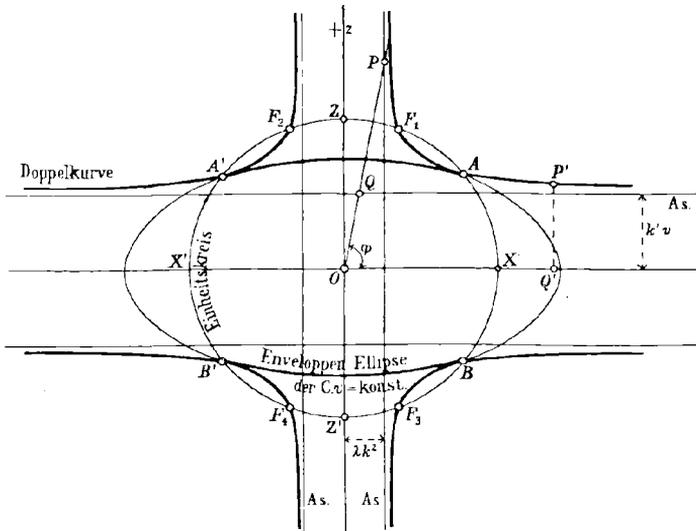
Die oberhalb der  $(xy)$ -Ebene liegende Schar sphärischer Ellipsen hat die gemeinschaftlichen Brennpunkte  $F'_1$ ,  $F'_2$  und den Mittelpunkt  $Z$  die unterhalb liegende Schar die Brennpunkte  $F_3$ ,  $F_4$  und den Mittelpunkt  $Z'$ .

Für die obere Grenze  $t = K + L$  reduziert sich der sphärische Kegelschnitt auf den doppelt gelegten Hauptkreis  $x^2 + y^2 = 1$  in der  $(xy)$ -Ebene, welcher die Doppelschar sphärischer Ellipsen trennt. Für die untere Grenze  $t = K$  reduzieren sich die beiden sphärischen Ellipsen auf die beiden Hauptkreisbogen  $F_1F_2$ , bez.  $F_3F_4$  zwischen den Brennpunkten in der  $(xz)$ -Ebene.

Wir denken uns nun in den Gleichungen 12) des sphärischen Kegelschnittes umgekehrt  $u = \text{konstant}$  zwischen 0 und  $K$  liegend und  $t$  als Variable, dann ist, weil

$$\sin \varphi = xsn u \quad \text{und} \quad \sin \alpha = xst$$

Fig. 2.



Doppelkurve in der  $(xz)$ -Ebene.

ist,  $\varphi = \text{konstant}$  und  $\alpha$  variabel. Man erhält die Gleichung des Kegels, welcher diese Kurve auf der Einheitskugel ausschneidet, indem man in der Kegelmgleichung 5)  $\alpha$  mit  $\varphi$  vertauscht, also:

$$22) \quad \frac{x^2}{\sin^2 \varphi} + \frac{y^2}{\sin^2 \varphi - \sin^2 \varepsilon} - \frac{z^2}{\cos^2 \varphi} = 0.$$

Nun ist  $\alpha > \varepsilon$  dagegen  $\varphi < \varepsilon$ , somit ist  $\sin^2 \varphi - \sin^2 \varepsilon$  negativ. Damit der Nenner des zweiten Gliedes positiv wird, schreiben wir:

$$\frac{y^2}{\sin^2 \varepsilon - \sin^2 \varphi} + \frac{z^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{x^2}{\sin^2 \varphi} = 0.$$

Dieser Kegel hat also die  $x$ -Axe als Kegelaxe und der von ihm ausgeschnittene sphärische Kegelschnitt hat die elliptischen Mittelpunkte  $X$  und  $X'$  und besteht aus zwei sphärischen Ellipsen, die symmetrisch zur  $(yz)$ -Ebene liegen.

Schreibt man die Gleichungen der beiden Kegel 5) und 22) in der Form:

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{x^2}{A'} + \frac{y^2}{B'} + \frac{z^2}{C'} = 0,$$

so ist:

$$A = \sin^2 \alpha, \quad B = \sin^2 \alpha - \sin^2 \varepsilon, \quad C = -\cos^2 \alpha,$$

$$A' = \sin^2 \varphi, \quad B' = \sin^2 \varphi - \sin^2 \varepsilon, \quad C' = -\cos^2 \varphi,$$

folgt:

$$A - A' = B - B' = C - C' = \sin^2 \alpha - \sin^2 \varphi,$$

d. h. die beiden Kegel sind konfokal; sie haben dieselben Fokallinien

$$x = \pm \operatorname{tang} \varepsilon \cdot z$$

und durchschneiden sich längs ihrer vier gemeinschaftlichen Erzeugenden rechtwinklig.

Die beiden zugehörigen sphärischen Kegelschnitte  $t = \text{konst.}$  und  $u = \text{konst.}$  sind also ebenfalls konfokal und durchschneiden sich rechtwinklig.

Nimmt der Parameter  $u$  der Reihe nach alle Werte an von 0 bis  $K$ , während die Variable  $t$  jedesmal alle Werte von  $K$  bis  $K + L$  und von  $3K$  bis  $3K + L$  durchläuft, so erhält man eine zweite Schar konfokaler sphärischer Kegelschnitte, oder eine Doppelschar von sphärischen Ellipsen, die zu verschiedenen Seiten der  $(yz)$ -Ebene liegen. Die rechts dieser Ebene liegende Schar hat die gemeinschaftlichen Brennpunkte  $F'_1, F'_3$  und Mittelpunkt  $X$ , die links liegende Schar die Brennpunkte  $F_2, F_4$  und Mittelpunkt  $X'$ . Für  $u = 0$  erhält man den Hauptkreis in der  $(yz)$ -Ebene, für die obere Grenze  $u = K$ , die in der  $(xz)$ -Ebene liegenden Hauptbogen  $F_1 F_3$ , bez.  $F_2 F_4$  zwischen den Brennpunkten.

Wir finden also:

Es stellen die Gleichungen 12:

$$x = x \operatorname{snt} s n u, \quad y = \frac{i u}{\kappa'} \operatorname{cnt} c n u, \quad z = \frac{1}{\kappa'} \operatorname{dnt} d n u,$$

1. wenn  $t = \text{konstant}$ , zwischen  $K$  und  $K + L$  liegt und  $u$  variabel, ein System konfokaler sphärischer Ellipsen dar, die paarweise symmetrisch zur  $(xy)$ -Ebene liegen; Brennpunkte  $F'_1, F'_2$  bez.  $F'_3, F'_4$ ;
2. wenn  $u = \text{konstant}$ , zwischen 0 und  $K$  liegt und  $t$  variabel, ein System konfokaler sphärischer Ellipsen dar, die paarweise symmetrisch zur  $(yz)$ -Ebene liegen, Brennpunkte  $F_1, F_3$  bez.  $F_2, F_4$ .

Beide Systeme sind zu einander konfokal und durchschneiden sich überall rechtwinklig, sie teilen daher die Kugeloberfläche in unendlich kleine Rechtecke ein und diese Einteilung benützen wir, um den

Flächeninhalt der sphärischen Ellipse zu finden, d.h. die Fläche des kleineren Kugelsegmentes, welches die Ellipse auf der Kugel abgrenzt.

Beide Systeme konfokaler Kegelschnitte werden auch erhalten, wenn  $t$  veränderlicher Parameter zwischen 0 und  $K + L$  und  $u$  die unabhängige Variable ist, und zwar das eine System für  $0 < t < K$ , das andere für komplexe Werte  $K < t < K + L$ .

Es seien nun  $e$  und  $e'$  zwei unendlich benachbarte sphärische Ellipsen des ersten Systems, den Parameterwerten  $t = \text{konst.}$  und  $t + dt = \text{konst.}$  entsprechend, ebenso seien  $f$  und  $f'$  zwei sphärische Ellipsen des zweiten Systems, den Parameterwerten  $u = \text{konst.}$  und  $u + du = \text{konst.}$  entsprechend. Diese vier Kurven bestimmen ein unendlich kleines Rechteck  $PQRS$  (Fig. 1) auf der Kugel, von den Seiten  $PQ = ds$  auf  $e$  und  $PR = ds'$  auf  $f$ . Das Flächenelement auf der Kugel ist dann

$$dF = ds \cdot ds'.$$

Nun ist:

$$23) \begin{cases} \frac{ds}{du} = \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} \\ = \sqrt{\alpha^2 sn^2 t cn^2 u dn^2 u - \frac{\alpha^2}{\alpha'^2} cn^2 t sn^2 u dn^2 u + \frac{\alpha^4}{\alpha'^2} dn^2 t sn^2 u cn^2 u} \\ ds = \alpha \sqrt{sn^2 t - sn^2 u} \cdot du. \end{cases}$$

Das Bogenelement  $ds'$  auf  $f$  wird aus  $ds$  erhalten, wenn Parameter  $t$  und Variable  $u$  mit einander vertauscht werden, also:

$$ds' = \alpha \sqrt{sn^2 u - sn^2 t} \cdot dt = i \alpha \sqrt{sn^2 t - sn^2 u} \cdot dt.$$

Das Flächenelement auf der Kugel wird also:

$$dF = i \alpha^2 (sn^2 t - sn^2 u) du dt = i (dn^2 u - dn^2 t) du \cdot dt.$$

Der Parameter  $t$  der sphärischen Ellipse  $e$  liegt nun, wie früher gesehen, zwischen  $K$  und  $K + L$ , wir können daher setzen:

$$t = K + v, \quad dt = dv, \quad \text{wo } 0 < v < K'.$$

Dann wird, wenn das positive Zeichen gewählt wird:

$$\begin{aligned} dF &= (dn^2 u - dn^2 t) du dv = dn^2 u \cdot du \cdot dv - dn^2 t \cdot du \cdot \frac{dt}{i}, \\ dF &= dn^2 u du \cdot dv + i dn^2 t du dt. \end{aligned}$$

Für  $t = K$ , also  $v = 0$ , und  $u$  variabel, ergibt sich der in der  $(xz)$ -Ebene liegende Hauptkreis; für  $u = 0$  und  $t$  und  $v$  variabel, der in der  $(yz)$ -Ebene liegende Hauptkreis. Integriert man daher obigen Ausdruck nach  $t$  von  $K$  bis  $t$ , nach  $v$  von 0 bis  $v$  und nach  $u$  von 0 bis  $u$ , so erhält man den Flächeninhalt des krummlinigen Rechtecks  $ZCPA_1$  (Fig. 1), begrenzt von den Hauptkreisbogen  $ZC$  und  $ZA_1$  und von den Bogen  $PC$  und  $PA_1$  der sphärischen Ellipsen  $e$  und  $f$ . Der Flächeninhalt dieses Rechtecks wird:

$$\begin{aligned}
 F &= \int_0^u dn^2 u \, du \int_0^v dv + i \int_K^t dn^2 t \, dt \int_0^u du \\
 &= v E a m u + i u E a m t - i u E \\
 &= v Z(u) + i u Z(t) + \frac{E}{K} u v + i u \frac{E}{K} t - i u E,
 \end{aligned}$$

bei Anwendung der Jacobischen Zeichen, und wenn  $K$  und  $E$  die vollständigen elliptischen Integrale erster und zweiter Art bedeuten. Ersetzt man im vorletzten Glied  $t$  durch  $K + vi$ , so fallen die drei letzten Glieder weg und es bleibt:

$$24) \quad \text{Rechteck } ZCPA_1 = F = vZ(u) + iuZ(t).$$

Dabei sind  $t = K + vi$  und  $u$  die Parameter der Begrenzungsellipsen  $e$  und  $f$ . Wird  $u = K$ , so fällt die sphärische Ellipse  $f$  mit dem in der  $(xz)$ -Ebene liegenden Hauptkreis zusammen,  $A_1$  fällt in den Scheitel  $A$  von  $e$  und das betrachtete Kugelrechteck wird zu dem von der sphärischen Ellipse  $e$  abgegrenzten Segmentquadranten  $ZAC$ . Der Inhalt desselben ergibt sich aus Gleichung 24) für

$$u = K \text{ zu } q = iKZ(t),$$

somit der Flächeninhalt der ganzen sphärischen Ellipse  $e$ :

$$25) \quad J = 4iKZ(t),$$

wo  $t$  aus der Gleichung  $snt = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$  bestimmt ist.

Für  $t = K + L$  fällt die sphärische Ellipse mit dem Hauptkreis in der  $(xy)$ -Ebene zusammen, ihr Inhalt  $J$  wird gleich der halben Einheitskugel, gleich  $2\pi$  und die Gleichung 25) wird:

$$4iKZ(K + L) = 2\pi,$$

somit

$$Z(K + L) = Z(K + iK') = -\frac{i\pi}{2K},$$

wie bekannt.

### III. Rektifikation der sphärischen Ellipse.

Setzt man im Bogendifferential der sphärischen Ellipse:

$$ds = \kappa \sqrt{sn^2 t - sn^2 u} \cdot du,$$

$$sn^2 u = z, \quad du = \frac{dz}{2snucnu \, dn u} = \frac{dz}{2\sqrt{z(1-z)(1-k^2 z)}},$$

so wird:

$$ds = \frac{\kappa}{2} \cdot \frac{sn^2 t - z}{\sqrt{z(1-z)(1-\kappa^2 z)(sn^2 t - z)}} \cdot dz.$$

Also die Länge des vom Scheitel  $C$  der kleinen Axe aus gezählten Bogens:

$$26) \quad s = \frac{\kappa}{2} \int_0^z \frac{(sn^2 t - z) dz}{\sqrt{z(1-z)(1-\kappa^2 z)(sn^2 t - z)}}.$$

Die Berechnung dieses elliptischen Integrals ist aber weitläufig, wir schlagen daher einen anderen Weg ein.

Die Gleichung des Kegels, welcher auf der konzentrischen Einheitskugel die sphärische Ellipse  $e$  ausschneidet, ist:

$$F = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

wo  $a > b$ . Im Mittelpunkt errichten wir auf jeder Tangentialebene desselben eine Normale, alle diese Normalen bilden einen zweiten konzentrischen Kegel zweiten Grades, welcher der Polarkegel des gegebenen heisst. Dieser schneidet die Einheitskugel in einer zweiten sphärischen Ellipse  $p$ , welche die Polarellipse der gegebenen,  $e$ , heisst.

Es sei  $(x', y', z')$  der Schnittpunkt der Normalen mit der Einheitskugel, also ein Punkt der Polarellipse  $p$ , dann sind die Richtungskosinusse der Normalen

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= x', & \cos \beta &= y', & \cos \gamma &= z', \\ \text{proportional zu} & & \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{2x}{a^2}, & \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{2y}{b^2}, & \frac{\partial F}{\partial z} &= -\frac{2z}{c^2}, \end{aligned}$$

also, wenn  $m$  einen Proportionalitätsfaktor bedeutet:

$$\begin{aligned} 27) \quad x' &= \frac{mx}{a^2}, & y' &= \frac{my}{b^2}, & z' &= -\frac{mz}{c^2}, \\ \text{somit} & & & & & \\ 28) \quad x &= \frac{a^2 x'}{m}, & y &= \frac{b^2 y'}{m}, & z &= -\frac{c^2 z'}{m}. \end{aligned}$$

Ist der Punkt  $x, y, z$  auf dem gegebenen Kegel zugleich ein Punkt der ersten Ellipse  $e$ , so gilt für ihn die Gleichung:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

setzt man die Werte 28) hier ein, so ergibt sich der Proportionalitätsfaktor:

$$29) \quad m = \sqrt{a^4 x'^2 + b^4 y'^2 + c^4 z'^2}.$$

Die Gleichungen 27) verbinden nun zwei entsprechende Punkte  $x, y, z$  und  $x', y', z'$  der beiden sphärischen Ellipsen  $e$  und  $p$ .

Setzt man die Werte 28) in der Gleichung des gegebenen Kegels ein, so ergibt sich die Gleichung des Polarkegels:

$$\begin{aligned} \text{oder:} & & a^2 x'^2 + b^2 y'^2 - c^2 z'^2 &= 0, \\ 30) \quad & & \frac{y'^2}{\left(\frac{1}{b^2}\right)} + \frac{x'^2}{\left(\frac{1}{a^2}\right)} - \frac{z'^2}{\left(\frac{1}{c^2}\right)} &= 0. \end{aligned}$$

Die Halbaxen dieses Kegels sind

$$A = \frac{1}{b}, \quad B = \frac{1}{a}, \quad C = \frac{1}{c},$$

weil  $a > b$ , so ist  $A > B$ , d. h. die zur  $(xy)$ -Ebene parallelen Schnittellipsen des Polarkegels haben ihre grosse Axe parallel zur  $y$ -Axe.

Wir führen nun analog wie früher in den Gleichungen 11a) elliptische Funktionen ein und setzen:

$$\text{Modul } k = \sqrt{\frac{A^2 - B^2}{A^2 + C^2}} = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}}.$$

Dieser ist von dem früheren Modul,  $\alpha = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}$ , verschieden.

$$31) \quad \begin{cases} sn^2 \tau = \frac{A^2}{A^2 - B^2} = \frac{a^2}{a^2 - b^2}, & cn^2 \tau = \frac{-b^2}{a^2 - b^2}, \\ dn^2 \tau = \frac{b^2}{b^2 + c^2}. \end{cases}$$

Der Parameter  $\tau$  ist komplex und liegt zwischen  $K$  und  $K + L$ , wie der frühere Parameter  $t$ , nur haben  $K$  und  $L$  hier andere Werte.

Die Gleichungen der Polarellipse  $p$  sind nun auf dieselbe Weise gebildet, wie die Gleichung 12) der Ellipse  $e$ , nur dass jetzt  $y'$  an die Stelle von  $x$  und  $x'$  an die Stelle des früheren  $y$  tritt, also:

$$32) \quad y' = k sn \tau sn w, \quad x' = i \frac{k}{k'} cn \tau cn w, \quad z' = \frac{1}{k'} dn \tau dn w,$$

wo  $k'$  der komplementäre Modul und  $w$  die Variable bedeutet.

Aus den Gleichungen 31) bilden wir den Ausdruck:

$$\frac{c^2}{a^2 - b^2} = k^2 \cdot \frac{a^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{b^2 + c^2}{a^2 - b^2} = k^2 \frac{sn^2 \tau cn^2 \tau}{dn^2 \tau},$$

und aus diesem und den zwei ersten Gleichungen 31) folgt die Proportion:

$$a^2 : b^2 : c^2 = sn^2 \tau : -cn^2 \tau : \frac{k^2 sn^2 \tau cn^2 \tau}{dn^2 \tau}.$$

Bedeutet  $l$  einen Proportionalitätsfaktor, so ist:

$$a^2 = l sn^2 \tau, \quad b^2 = -l cn^2 \tau, \quad c^2 = \frac{lk^2 sn^2 \tau cn^2 \tau}{dn^2 \tau}.$$

Setzt man im Proportionalitätsfaktor  $m$ , Gleichung 29), diese Werte und für  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  die Werte 32) ein, so ergibt sich:

$$m = \sqrt{\frac{l^2 k^2}{k'^2} \cdot \frac{sn^2 \tau cn^2 \tau}{dn^2 \tau} \cdot \{-sn^2 \tau dn^2 \tau cn^2 w + k'^2 cn^2 \tau dn^2 \tau sn^2 w + k^2 sn^2 \tau cn^2 \tau dn^2 w\}}$$

$$m = \frac{lik sn \tau cn \tau}{dn \tau} \sqrt{\frac{1}{k'^2} \{sn^2 \tau dn^2 \tau cn^2 w - k'^2 cn \tau dn^2 \tau sn^2 w - k^2 sn^2 \tau cn^2 \tau dn^2 w\}}$$

$$m = l \cdot \frac{ik sn \tau cn \tau}{dn \tau} \sqrt{sn^2 \tau \quad sn^2 w} = il \frac{k sn \tau cn \tau}{dn \tau} \cdot T,$$

wenn zur Abkürzung

$$\sqrt{sn^2 \tau \quad sn^2 w} = T$$

gesetzt wird.

Setzt man nun diesen Wert für  $m$ , die gefundenen Werte für  $a^2$ ,  $b^2$ ,  $c^2$  und die Werte 32) für  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$  in den Gleichungen 28) ein, so erhält man die Koordinaten  $x$ ,  $y$ ,  $z$  des Punktes der gegebenen

sphärischen Ellipse  $e$ , welcher dem Punkt  $x', y', z'$ , Gleichung 32), der Polarellipse  $p$  entspricht:

$$33) \quad x = \frac{sn\tau dn\tau cnw}{k'T}, \quad y = \frac{icn\tau dn\tau snw}{T}, \quad z = \frac{kicn\tau sn\tau dnw}{k'T}.$$

Bei variablem  $w$  sind dies die Gleichungen der gegebenen sphärischen Ellipse  $e$ , sie sind nicht so einfach, wie die früheren Gleichungen 12), dagegen sind sie bequemer zur Rektifikation der Kurve.

Für  $w = 0$  und  $2K$  wird

$$x = \pm \frac{dn\tau}{k'}, \quad y = 0, \quad z = \frac{ki}{k'} cn\tau,$$

es sind dies die Scheitel  $A$  und  $A'$  der grossen Axe, welche den Scheiteln der kleinen Axe der Polarellipse entsprechen.

Für  $w = K$  und  $3K$  wird

$$x = 0, \quad z = \pm dn\tau, \quad z = ksn\tau,$$

welches die Scheitel  $C$  und  $C'$  der kleinen Axe sind.

Die Variable geht also mit dem Nullwert vom Scheitel  $A$  der grossen Axe aus, während sie in der ersten Darstellung 11) vom Scheitel  $C$  der kleinen Axe ausging.

Aus den Gleichungen 33) folgt:

$$\frac{dx}{dw} = \frac{sn\tau cn^2\tau dn\tau snw dnw}{k'T^2}, \quad \frac{dy}{dw} = \frac{isn^2\tau cn\tau dn\tau cnw dnw}{T^2},$$

$$\frac{dz}{dw} = \frac{iksn\tau cn\tau dn^2\tau snucnu}{lT^2}.$$

Das Bogendifferential der gegebenen sphärischen Ellipse wird:

$$\left\{ \begin{aligned} ds^2 &= \frac{sn^2\tau cn^2\tau dn^2\tau}{T^2} \\ &\left\{ \frac{1}{k'^2} cn^2\tau sn^2w dn^2w - sn^2\tau cn^2w dn^2w - \frac{k^2}{k'^2} dn^2\tau sn^2w cn^2w \right\} dw^2 \\ &= \frac{sn^2\tau cn^2\tau dn^2\tau}{T^2} (sn^2w - sn^2\tau) dw^2 = \frac{-sn^2\tau cn^2\tau dn^2\tau}{T^2} dw^2, \end{aligned} \right.$$

also

$$ds = \frac{isn\tau cn\tau dn\tau}{sn^2\tau - sn^2w} dw.$$

Der vom Scheitel  $A$  der grossen Axe aus gerechnete Bogen der sphärischen Ellipse wird nun:

$$s = i \int_0^w \frac{sn\tau cn\tau dn\tau}{sn^2\tau - sn^2w} dw = \frac{i}{2} \int_0^w \frac{\partial}{\partial \tau} \text{Log}(sn^2\tau - sn^2w) dw.$$

Nun ist bei Gebrauch von Jacobischen Zeichen:

$$sn^2\tau - sn^2w = \frac{H(\tau+w)H(\tau-w)}{\Theta^2(\tau)\Theta^2(w)} \cdot \frac{\Theta^2(o)}{k}$$

$$\text{Log}(sn^2\tau - sn^2w) = \text{Log}H(\tau+w) + \text{Log}H(\tau-w) - 2\text{Log}\Theta(\tau) \\ + \text{Log} \frac{\Theta^2(o)}{k\Theta^2(w)}.$$

Partiell nach  $\tau$  differenziert und mit 2 dividiert:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \text{Log}(sn^2 \tau - sn^2 w) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \text{Log} H(\tau + w) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \text{Log} H(\tau - w) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \tau} \text{Log} \Theta(\tau) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} \text{Log} H(\tau + w) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} \text{Log} H(\tau - w) \\ &\quad - Z(\tau) \end{aligned}$$

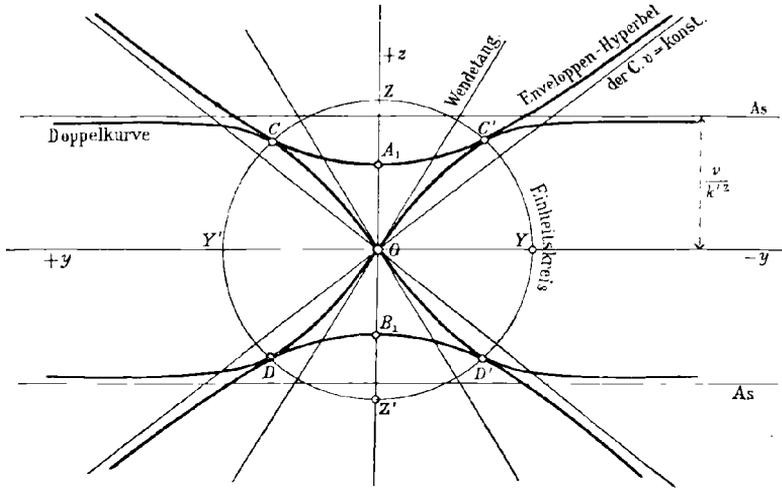
somit

$$s = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} \text{Log} \frac{H(\tau + w)}{H(\tau - w)} - Z(\tau),$$

$$s = i \int_0^w \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial w} \text{Log} \frac{H(\tau + w)}{H(\tau - w)} - Z(\tau) \right\} dw,$$

$$34) \quad s = \frac{i}{2} \text{Log} \frac{H(\tau + w)}{H(\tau - w)} - iw Z(\tau).$$

Fig. 3.



Doppelkurve in der  $(yz)$ -Ebene.

Man erhält den ersten Quadranten der sphärischen Ellipse für  $w = K$ , also

$$q = \frac{i}{2} \text{Log} \frac{H(\tau + K)}{H(\tau - K)} - iKZ(\tau).$$

Nun liegt aber der Parameter  $\tau$  zwischen  $K$  und  $K + L$ , so dass  $\tau = K + iv$ , dann wird:

$$q = \frac{i}{2} \text{Log} \frac{H(2K + iv)}{H(iv)} - iKZ(\tau).$$

Weil aber  $H(2K + vi) = -H(vi)$ , so wird

$$\text{Log} \frac{H(2K + iv)}{H(iv)} = \text{Log}(-1) = -i\pi,$$

also

$$q - \frac{\pi}{2} - iKZ(\tau).$$

Die ganze Länge der sphärischen Ellipse  $e$  wird

$$35) \quad U = 2\pi - 4iKZ(\tau).^*$$

Nun bedeutet aber  $4iKZ(\tau)$  nach Gleichung 25) den Inhalt der Polarellipse  $p$ , bezeichnen wir diesen mit  $J'$ , so wird obige Gleichung:

$$U + J' = 2\pi = \text{Oberfläche der Halbkugel.}$$

Es ist dies der bekannte Satz, dass der Umfang einer geschlossenen Figur auf der Kugel und der Inhalt der Polarfigur und umgekehrt, sich zu  $2\pi$  ergänzen. Dabei ist der Parameter  $\tau$  aus der Gleichung

$$\text{sn } \tau = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$$

bestimmt und der Modul

$$k = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}}.$$

#### IV. Die developpable Tangentenfläche des sphärischen Kegelschnittes.

Die sämtlichen Tangenten eines sphärischen Kegelschnittes bilden in ihrer Aufeinanderfolge eine abwickelbare Fläche, welche symmetrisch ist zu jeder der drei Koordinatenebenen. Die Erzeugenden der Fläche durchschneiden sich daher paarweise in den Koordinatenebenen und die Fläche besitzt in diesen drei Ebenen, sowie in der unendlich fernen Ebene je eine ebene Doppelkurve vierter Ordnung.

Bedeutet  $u$  und  $v$  zwei veränderliche Parameter, so lässt sich die abwickelbare Tangentenfläche darstellen durch die drei Gleichungen:

$$36) \quad x = \frac{\lambda \kappa \text{sn}^2 v}{\text{sn } u}, \quad y = \frac{\mu \kappa \text{cn}^2 v}{\kappa' \text{cn } u}, \quad z = \frac{v \text{dn}^2 v}{\kappa' \text{dn } u},$$

wo  $\lambda, \mu, \nu, \kappa, \kappa'$  die frühere Bedeutung haben, nämlich:

$$\lambda = \text{sn } t = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \mu = \text{icnt} = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad \nu = \text{dn } t = \frac{c}{\sqrt{a^2 + c^2}},$$

$$\kappa = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 + c^2}}, \quad \kappa' = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2}},$$

wobei  $a, b, c$  die Halbaxen des Kegels sind, der den betrachteten sphärischen Kegelschnitt aus der konzentrischen Einheitskugel ausschneidet.

---

\* Tortolini hat den Bogen und den Quadranten der sphärischen Ellipse durch ein Legendresches Integral dritter Art dargestellt. Vergl. Tortolini, *Sopra la Rettificazione dell'ellissi sferica etc.* Roma 1846.

Eliminiert man nämlich aus je zwei der Gleichungen 36) den Parameter  $v$ , so erhält man die Gleichungen 14) der Tangente des sphärischen Kegelschnittes im Punkte  $x, y, z$ , vom Parameter  $u$ .

Hieraus folgt:

Die Parameterkurven  $u = \text{konstant}$  sind die Erzeugenden der developpablen Tangentenfläche.

Der Parameter  $u$  durchläuft, wie beim sphärischen Kegelschnitt, einerseits die reellen Werte von 0 bis  $4K$ , andererseits alle komplexen Werte von  $2L$  bis  $2L + 4K$ .

Eliminiert man aus den Tangentengleichungen 14) auch den Parameter  $u$ , was ohne grosse Schwierigkeiten möglich ist, so ergibt sich die Gleichung der Tangentenfläche des sphärischen Kegelschnittes in rechtwinkligen Koordinaten:

$$37) \left\{ \begin{aligned} & [\mu^2 x^2 z^2 + \alpha'^4 \lambda^2 y^2 z^2 - \alpha^2 v^2 x^2 y^2 - \mu^2 v^2 (1 + \alpha^2) x^2 - \lambda^2 v^2 y^2 + \lambda^2 \mu^2 \alpha^4 z^2]^2 \\ & = 4 \alpha^2 x^2 (v^2 y^2 - \mu^2 z^2 - \mu^2 v^2) (\mu^2 v^2 x^2 + \lambda^2 v^2 y^2 - \alpha^2 \lambda^2 \mu^2 z^2). \end{aligned} \right.$$

Die Fläche ist vom achten Grade, der Nullpunkt und die unendlich fernen Punkte der drei Koordinatenachsen sind vierfache Punkte der Fläche, die wir später noch betrachten werden.

Wir untersuchen nun die Parameterkurven  $v = \text{konstant}$  auf der Fläche. In den Gleichungen 36) nehmen  $sn^2 v$ ,  $cn^2 v$  und  $dn^2 v$  alle möglichen reellen Werte an zwischen  $-\infty$  und  $+\infty$ , wenn der Parameter  $v$  die Seiten eines Rechtecks durchläuft, von den Ecken 0,  $K$ ,  $K + L$  und  $L$ . Jedem Werte von  $v$  auf einer Seite dieses Rechtecks entspricht eine bestimmte Kurve auf der Fläche, diese Kurve ist von der achten Ordnung und besteht aus acht gleichen, getrennten, unendlichen Zweigen, die symmetrisch zu den drei Koordinatenebenen in den acht Oktanten liegen. Die Projektion dieser Parameterkurve auf jeder der Koordinatenebenen wird daher eine ebene Kurve vierter Ordnung.

Den Ecken jenes Rechtecks,  $v = 0, K, K + L$  und  $L$  entsprechen bez. die in der  $(yz)$ ,  $(xz)$ ,  $(xy)$  und in der unendlich fernen Ebene liegenden Doppelkurven der Fläche.

Für  $v = u$  gehen die Gleichungen 36) der Tangentenfläche in die Gleichungen 13) des sphärischen Kegelschnittes über. Da nun  $u$  von 0 bis  $4K$  und von  $2L$  bis  $2L + 4K$  läuft, so kann  $v$  nur zwischen 0 und  $K$  gleich  $u$  werden, d. h. alle Parameterkurven  $v = \text{konst.}$  berühren den sphärischen Kegelschnitt, wenn  $v$  zwischen 0 und  $K$  liegt, also thun dies auch die Doppelkurven  $v = 0$  in der  $(yz)$ -Ebene und  $v = K$  in der  $(xz)$ -Ebene. Die erstere berührt den sphärischen Kegelschnitt in den Scheiteln der kleinen, die andere in den Scheiteln der grossen Axen.

Eliminiert man unter der Annahme  $v = \text{konst.}$ , aus je zwei der Gleichungen 36) die Variable  $u$ , so erhält man die Gleichung der Orthogonalprojektion dieser Parameterkurve auf eine der Koordinatenebenen. Wir wollen diese drei Projektionen der Reihe nach betrachten.

1. Projektion auf die  $(xy)$ -Ebene.

Gleichungen:

$$x = \frac{\lambda \kappa sn^2 v}{sn u}, \quad y = \frac{\mu \kappa cn^2 v}{\kappa' cn u},$$

oder:

$$38) \quad \kappa'^2 x^2 y^2 - \mu^2 \kappa^2 cn^4 v \cdot x^2 - \lambda^2 \kappa^2 \kappa'^2 sn^4 v \cdot y^2 = 0.$$

Diese Kurve vierter Ordnung hat den Nullpunkt und die unendlich fernen Punkte der  $x$  und der  $y$ -Axe zu doppelten Inflexionsknoten und zwar ist der erstere ein konjugierter Punkt; die Kurve ist somit rational. Sie besitzt je zwei zu den Koordinatenachsen parallele Asymptoten:

$$x = \pm \kappa \lambda sn^2 v \quad \text{und} \quad y = \pm \frac{\mu \kappa}{\kappa'} cn^2 v,$$

Diese sind die Inflexionstangenten in den unendlich fernen Inflexionsknoten. Die Kurve besteht aus vier kongruenten hyperbolischen Ästen in den vier äusseren Winkelräumen dieser vier Asymptoten.

Die Kurve entsteht durch Inversion vermittelt der quadratischen Transformation  $x = \frac{1}{\xi}$ ;  $y = \frac{1}{\eta}$  aus der Ellipse:

$$\lambda^2 \kappa^2 sn^4 v \xi^2 + \frac{\mu^2 \kappa^2}{\kappa'^2} cn^4 v \cdot \eta^2 = 1.$$

Den vier Scheiteln der Ellipse entsprechen die unendlich fernen Punkte und jedem Ellipsenquadranten entspricht ein hyperbolischer Ast der Parameterkurve, sie liegt ganz ausserhalb der Ellipse.

Weil  $sn u$  und  $cn u$  innerhalb des für  $u$  giltigen Intervalls beständig  $< 1$  bleiben, so kann man trigonometrische Funktionen einführen,

$$sn u = \sin \varphi, \quad cn u = \varphi,$$

dann werden die Gleichungen der projizierten Parameterkurve  $v = \text{konst.}$ :

$$x = \frac{\lambda \kappa sn^2 v}{\sin \varphi}, \quad y = \frac{\mu \kappa cn^2 v}{\kappa' \cos \varphi}.$$

Aus diesen Gleichungen lässt sich die Kurve einfach konstruieren. Man zieht die beiden Asymptoten

$$x = \lambda \kappa sn^2 v \quad \text{und} \quad y = \frac{\mu \kappa}{\kappa'} cn^2 v,$$

legt durch den Nullpunkt  $O$  einen Strahl unter dem Winkel  $\varphi$ , welcher die beiden Asymptoten bez. in den Punkten  $P$  und  $Q$  schneidet, dann sind  $OP = x$  und  $OQ = y$  die Koordinaten von vier symmetrisch zu den Axen liegenden Kurvenpunkten.

Wir erteilen dem Parameter  $v$  einige spezielle Werte:

- α) Für  $v = 0$  reduziert sich die Kurve auf  $x^2 = 0$ , die doppelt gelegte  $y$ -Axe und  $y = \pm \frac{\mu \kappa}{\kappa'}$ , es sind das die Projektionen der Tangenten in den Scheiteln der kleinen Axen des sphärischen Kegelschnitts.

- β) Für  $v = K$  reduziert sich die Kurve auf  $y^2 = 0$ , die doppelt gelegte  $x$ -Achse und  $x = \pm \lambda \kappa$ , es sind dies die Projektionen der Tangenten in den Scheiteln der grossen Axen.
- γ) Für  $v = K + L$  erhält man die in der  $(xy)$ -Ebene liegende Doppelkurve der Tangentenfläche:

$$39) \quad \kappa^2 x^2 y^2 = \mu^2 \kappa'^2 x^2 + \lambda^2 y^2$$

Asymptoten  $x = \pm \frac{\lambda}{\kappa}$ ,  $y = \pm \frac{\mu \kappa}{\kappa'}$ , ihre Gleichungen in trigonometrischer Form sind:

$$x = \frac{\lambda}{\kappa \sin \varphi}, \quad y = \frac{\mu \kappa}{\kappa' \cos \varphi}.$$

Die Doppelkurve besteht, wie die allgemeine Kurve dieser Schar, aus vier kongruenten hyperbolischen Ästen.

- δ) Für  $v = L$  fällt die Parameterkurve auf der Fläche und auch ihre Projektion auf die  $(xy)$ -Ebene samt den Asymptoten ganz ins Unendliche.

Bei veränderlichem Parameter  $v$  stellt die Gleichung 38) unendlich viele auf die  $(xy)$ -Ebene projizierte Parameterkurven dar, alle besitzen dieselben drei doppelten Inflexionsknoten, nämlich die unendlich fernen Punkte der  $x$ - und  $y$ -Achse und den Nullpunkt als konjugierten Punkt. Alle Kurven dieser Schar, für welche  $0 < v < K$ , umhüllen die Ellipse  $\mu^2 x^2 + \lambda^2 \kappa'^2 y^2 - a^2 b^2 x^2$ , welche die Projektion des sphärischen Kegelschnitts auf die  $(xy)$ -Ebene ist, d. h. die Projektion der Rückkehrkante der Tangentenfläche, denn für diese Werte von  $v$  berühren die Parameterkurven selbst die Rückkehrkante. Die Doppelkurve berührt jene Ellipse nicht.

## 2. Projektion auf die $(xz)$ -Ebene.

Gleichungen:

$$x = \frac{\lambda \kappa s n^2 v}{s n u}, \quad z = \frac{v d n^2 v}{\kappa' d n u},$$

oder:

$$40) \quad \kappa'^2 x^2 z^2 = \lambda^2 \kappa^4 \kappa'^2 s n^4 v \cdot z^2 + v^2 d n^4 v \cdot x^2.$$

Die unendlich fernen Punkte  $x$  und  $z$  Achse und der Nullpunkt sind doppelte Inflexionsknoten, der letztere ist konjugierter Punkt. Die Inflexionstangenten in den ersteren sind die vier Asymptoten

$$z = \pm \frac{v}{\kappa'} d n^2 v, \quad x = \pm \lambda \kappa s n^2 v.$$

Die Kurve ist rational und besteht wie die vorhergehende aus vier kongruenten, unendlichen hyperbolischen Ästen in den äusseren Winkelräumen der vier Asymptoten.

Schreibt man die Kurvengleichung in der Form:

$$x^2 (\kappa'^2 z^2 - v^2 d n^4 v) = \lambda^2 \kappa^4 \kappa'^2 s n^4 v \cdot z^2$$

und setzt

$$\kappa'^2 z^2 - v^2 d n^4 v = v^2 d n^4 v \cot g^2 \varphi,$$

so erhält man die Kurvengleichungen in trigonometrischer Form:

$$z = \frac{v d n^2 v}{\kappa' \sin \varphi}, \quad x = \frac{\lambda \kappa^2 s n^2 v}{\cos \varphi},$$

aus welchen sich die Kurve mittelst ihrer Asymptoten auf analoge Weise konstruieren lässt, wie die vorhergehende in der  $(xy)$ -Ebene. Sie entsteht durch Inversion aus der Ellipse

$$\lambda^2 \kappa^4 s n^4 v \cdot \xi^2 + \frac{v^2}{\kappa'^2} d n^4 v \cdot \xi^2 = 1.$$

Für  $v = 0$  reduziert sich die Kurve auf  $x^2 = 0$ , die doppelte  $z$ -Axe und  $z = \frac{v}{\kappa'}$ , die Projektionen der Tangenten in den Scheiteln der kleinen Axen des sphärischen Kegelschnitts.

Für  $v = K$  erscheint die in der  $(xz)$ -Ebene liegende Doppelkurve:

$$41) \quad x^2 z^2 = \lambda^2 \kappa^4 z^2 + v^2 \kappa'^2 x^2.$$

Asymptoten  $x = \pm \lambda \kappa^2$ ,  $z = \pm v \kappa'$ . Die Kurve hat dieselben drei doppelten Inflexionsknoten und besteht aus vier kongruenten, hyperbolischen Asten, wie die allgemeine Kurve. Sie geht durch die vier in der  $(xz)$ -Ebene liegenden Scheitel

$$A, A', B, B' \quad (x = \pm \lambda \kappa, z = \pm v)$$

der grossen Axen des sphärischen Kegelschnitts, welche auf dem Einheitskreis in der  $(xz)$ -Ebene liegen (Fig. 2).

Für die Koordinaten  $x = \pm \kappa$ ,  $z = \pm \kappa'$  der vier Brennpunkte des sphärischen Kegelschnitts ist die Gleichung 41) erfüllt, unabhängig von  $\lambda$  und  $v$ , d. h. die in der  $(xz)$ -Ebene liegenden Doppelkurven aller abwickelbaren Tangentenflächen, deren erzeugende sphärische Kegelschnitte (Rückkehrkanten) mit dem gegebenen konfokal sind, gehen alle durch die vier gemeinschaftlichen Brennpunkte.

Nur diejenigen Punkte der Doppelkurve, welche ausserhalb des Einheitskreises auf den Kurvenzweigen liegen, die sich längs der Asymptoten  $z = \pm \kappa' v$  ins Unendliche erstrecken, sind reelle Schnittpunkte der Erzeugenden der Tangentenfläche mit der  $(xz)$ -Ebene.

Durchläuft der Parameter  $v$  die Seiten des angegebenen Rechtecks, so stellt die Gleichung 40) unendlich viele auf die  $(xz)$ -Ebene projizierte Parameterkurven dar, welche alle die unendlich fernen Punkte der  $x$ - und  $z$ -Axe und den Nullpunkt zu gemeinschaftlichen doppelten Inflexionsknoten haben. Alle diese Kurven umhüllen die Ellipse

$$\frac{\kappa^2}{\lambda^2} x^2 + \frac{\kappa'^2}{v^2} z^2 = 1,$$

welche die Projektion des sphärischen Kegelschnittes auf die  $(xz)$ -Ebene ist. Die Berührungspunkte sind aber nur für die Kurven reell, für welche  $v$  zwischen 0 und  $K$  oder zwischen  $K$  und  $K + L$  liegt. Das

erste Intervall entspricht den Berührungspunkten auf den Ellipsenbogen  $AA'$  bez.  $BB'$ , welche die eigentliche Projektion des sphärischen Kegelschnittes sind, das zweite Intervall den beiden übrigen Bogen. Die Doppelkurve, welche in den Scheiteln  $A, A', B, B'$  der grossen Axen berührt, bildet die Grenze.

Für  $v = K + L$  reduziert sich die Projektion auf die Geraden

$$z^2 = 0 \quad \text{und} \quad x = \pm \lambda.$$

Für  $v = L$  fällt sie ganz ins Unendliche.

### 3. Projektion auf die $(yz)$ -Ebene.

Gleichungen:

$$y = \frac{\mu x c n^2 v}{x' c n u}, \quad z = \frac{v d n^2 v}{x' d n u},$$

oder:

$$42) \quad x'^4 y^2 z^2 = v^2 d n^4 v \cdot y^2 - \mu^2 x^4 c n^4 v \cdot z^2.$$

Der Nullpunkt ist doppelter Inflexionsknoten mit den Tangenten

$$\frac{z}{y} = \pm \frac{v d n^2 v}{\mu x^2 c n^2 v},$$

ebenso sind die unendlich fernen Punkte der  $z$ - und  $y$ -Axe doppelte Inflexionsknoten, der erste konjugierter Punkt, der zweite mit den Asymptoten

$$z = \pm \frac{v}{x'^2} d n^2 v.$$

Die Kurve besteht aus zwei zwischen diesen Asymptoten liegenden kongruenten unendlichen Zweigen, die sich im Nullpunkt durchschneiden.

Die Kurve entsteht durch Inversion aus der Hyperbel

$$\frac{v^2 d n^4 v}{x'^4} z^2 - \frac{x^4 \mu^2}{x'^4} c n^4 v \cdot y^2 = 1,$$

der eine Hyperbelast entspricht dem einen, der andere dem andern Kurvenzweig. Die Asymptoten der Hyperbel sind

$$\frac{z}{y} = \pm \frac{v d n^2 v}{x^2 \mu c n^2 v},$$

sie fallen mit den Inflexionstangenten im Nullpunkt der Parameterkurve zusammen.

Die Gleichung 42) lässt sich schreiben:

$$y^2 (x'^4 z^2 - v^2 d n^4 v) = - \mu^2 x^4 c n^4 v \cdot z^2.$$

Setzt man

$$x'^4 z^2 - v^2 d n^4 v = - v^2 d n^4 v \cos^2 \varphi,$$

was erlaubt ist, da die Kurve zwischen den Asymptoten

$$z = \pm \frac{v}{x'^2} d n^2 v$$

liegt, so erhält man die Gleichungen der Parameterkurve in trigonometrischer Form:

$$43) \quad z = \frac{v \, dn^2 v}{\kappa'^2} \cdot \sin \varphi, \quad y = \frac{\mu \, \kappa^2}{\kappa'^2} \, cn^2 v \cdot \text{tang } \varphi.$$

Hieraus ergibt sich eine einfache Konstruktion der Kurve. Man zieht um den Nullpunkt der  $(yz)$ -Ebene einen Kreis vom Radius

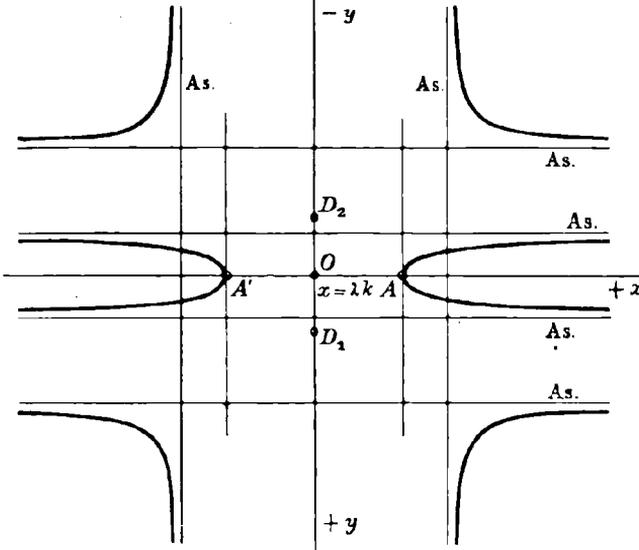
$$r = \frac{v}{\kappa'^2} \, dn^2 v,$$

welcher die zur  $y$ -Axe parallelen Asymptoten der gesuchten Kurve berührt, und legt zur  $z$ -Axe eine Parallele im Abstand

$$y = OS = \frac{\kappa^2 \mu}{\kappa'^2} \, cn^2 v.$$

Legt man nun durch  $O$  einen Strahl unter dem Winkel  $\varphi$  zur  $y$ -Axe, welcher den Kreis und die Parallele in  $P$  und  $Q$  schneidet,

Fig. 4.



Schnitt der Tangentenfläche mit Ebene  $z = v$ , durch die Scheitel  $A, A'$ .

so sind die Lote von  $P$  und  $Q$  zur  $y$ -Axe die Koordinaten  $y$  und  $z$  von vier symmetrisch zu den Axen liegenden Kurvenpunkten.

Für  $v = 0$  erhält man die in der  $(yz)$ -Ebene liegende Doppelkurve:

$$44) \quad \kappa'^4 y^2 z^2 = v^2 y^2 - \kappa^4 \mu^2 z^2,$$

oder

$$z = \frac{v}{\kappa'^2} \sin \varphi, \quad y = \frac{\mu \, \kappa^2}{\kappa'^2} \text{tang } \varphi.$$

Inflexionstangenten im Nullpunkt:

$$\frac{z}{y} = \pm \frac{v}{\mu \, \kappa^2}, \quad \text{Asymptoten } z = \pm \frac{v}{\kappa'^2}.$$

Die Kurve geht durch die vier Scheitel

$$C, C', D, D' \left( y = \pm \frac{\kappa \mu}{\kappa'}, \quad z = \pm \frac{v}{\kappa'} \right)$$

der kleinen Axen des sphärischen Kegelschnittes, welche in der  $(yz)$ -Ebene auf dem Einheitskreis liegen. Nur die Punkte der Doppelkurve ausserhalb dieses Einheitskreises sind reelle Durchstosspunkte der Erzeugenden der Fläche mit der  $(yz)$ -Ebene (Fig. 3).

Für  $v = K$  reduziert sich die Kurve auf die  $z$ -Axe,  $y^2 = 0$  und  $z = \pm v$ , die Projektionen der Tangenten in den Scheiteln der grossen Axen.

Für  $v = K + L$  reduziert sich die Kurve auf  $z^2 = 0$  und die imaginären Geraden  $y = \pm \mu i$ .

Die ganze Schar von projizierten Parameterkurven, die dem veränderlichen Parameter  $v$  entsprechen, umhüllen in der  $(yz)$ -Ebene die Hyperbel

$$\frac{z^2}{v^2} - \frac{y^2}{\mu^2} = 1,$$

welche die Projektion des sphärischen Kegelschnittes auf die  $(yz)$ -Ebene ist. Von  $v = 0$  bis  $x = K$  liegen die Berührungspunkte auf den Hyperbelbogen  $CC'$  bez.  $DD'$ , innerhalb des Einheitskreises, in den Scheiteln  $C, C', D, D'$  der kleinen Axen des sphärischen Kegelschnittes selbst berührt die Doppelkurve die Hyperbel. Von  $v = 0$  bis  $v = L$  liegen die Berührungspunkte ausserhalb dieser vier Punkte auf der Hyperbel bis ins Unendliche.

Für  $v = L$  (unendlich ferne Doppelkurve) schreiben wir die Kurvengleichung 42) in der Form:

$$\frac{x'^4 y^2 z^2}{dn^4 v} - v^2 y^2 - x^4 \mu^2 \left( \frac{cn v}{dn v} \right)^4 \cdot z^2.$$

Nun ist der wahre Wert

$$\left( \frac{cn v}{dn v} \right)_{v=L} = \frac{1}{x},$$

also wird obige Gleichung für  $v = L$  zu

$$0 - v^2 y^2 - x^4 \mu^2 \cdot \frac{1}{x^4} \cdot z^2 \quad \text{oder} \quad \frac{z}{y} = \pm \frac{v}{\mu},$$

es sind dies die Asymptoten der obigen Hyperbel. Die beiden Asymptoten der projizierten Parameterkurve fallen ins Unendliche. Die Projektion der unendlich fernen Doppelkurve auf die  $(yz)$ -Ebene besteht also aus den beiden Hyperbelasymptoten

$$\frac{z}{y} = \pm \frac{v}{\mu}$$

und der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden.

#### 4. Die Doppelkurve in der unendlich fernen Ebene $v = L$ .

Die Flächengleichungen 36) lassen sich schreiben:

$$\frac{x}{y} = \frac{i x' cn u}{\mu sn u} \left( \frac{sn v}{cn v} \right)^2, \quad \frac{y}{z} = \frac{\mu x dn u}{v cn u} \left( \frac{cn v}{dn v} \right)^2.$$

Nun ist

$$\lim_{v=L} \left( \frac{sn v}{cn v} \right)^2 = -1 \quad \text{und} \quad \lim_{v=L} \left( \frac{cn v}{dn v} \right) = \pm \frac{1}{\kappa},$$

somit werden die Gleichungen der unendlich fernen Doppelkurve:

$$\frac{x}{y} = -\frac{\lambda \kappa' cn u}{\mu sn u}, \quad \frac{y}{z} = \frac{\mu dn u}{v \kappa cn u}.$$

Durch Elimination von  $u$  ergibt sich die Gleichung des Richtungskegels derselben vom Scheitel  $O$  aus:

$$\mu^2 x^2 z^2 + \kappa'^4 \lambda^2 y^2 z^2 - \kappa^2 v^2 x^2 y^2 = 0,$$

welche Gleichung auch aus der Flächengleichung 37) nach bekannter Weise erhalten wird. Die drei Koordinatenachsen sind Doppelkanten des Kegels, die Tangentenebenen längs der  $x$ - und  $y$ -Axe sind bez.

$$\frac{z}{y} = \pm \frac{\kappa v}{\mu} \quad \text{und} \quad \frac{z}{x} = \pm \frac{\kappa v}{\lambda \kappa'^2},$$

diejenigen längs der  $z$ -Axe sind imaginär. Die unendlich ferne Doppelkurve besitzt also in den unendlich fernen Punkten der drei Koordinatenachsen drei doppelte Inflexionsknoten, und zwar ist derjenige auf der  $z$ -Axe ein konjugierter Punkt.

Alle vier Doppelkurven haben zu Asymptoten die Schnittlinien der Oskulationsebenen in den Scheiteln des sphärischen Kegelschnittes mit den betreffenden Koordinatenebenen; in jeder Asymptote schneiden sich zwei Oskulationsebenen.

Aus dem Vorhergehenden folgt:

1. Die Parameterkurve  $v = 0$  besteht aus der in der  $(yz)$ -Ebene liegenden Doppelkurve vierter Ordnung und den vier Tangenten in den Scheiteln der kleinen Axen des sphärischen Kegelschnittes.
2. Die Parameterkurve  $v = K$  besteht aus der Doppelkurve in der  $(xz)$ -Ebene und den vier Tangenten in den Scheiteln der grossen Axen.
3. Die Parameterkurve  $v = K + L$  besteht aus der Doppelkurve in der  $(xy)$ -Ebene und aus vier zur  $z$ -Axe parallelen imaginären Geraden.
4. Die developpable Tangentenfläche besitzt im Nullpunkt und in den unendlich fernen Punkten der drei Koordinatenachsen je einen vierfachen Punkt, diejenigen der  $x$ - und  $y$ -Axe sind Knotenpunkte, die beiden andern konjugierte Punkte.

Der Knotenkegel des Nullpunktes, dessen Erzeugende die Fläche in sechs zusammenfallenden Punkten berühren, hat zur Gleichung die gleich Null gesetzten Glieder niedrigster Ordnung der Flächengleichung 37), nämlich:

$$\{\mu^2\nu^2(1+\kappa^2)x^2 + \lambda^2\nu^2y^2 - \kappa^4\lambda^2\mu^2z^2\}^2 - 4\kappa^2x^2(\mu^2\nu^2x^2 + \lambda^2\nu^2y^2 - \kappa^2\lambda^2\mu^2z^2)\mu^2\nu^2 = 0,$$

ausgerechnet:

$$\kappa'^2\mu^2\nu^2x^2 + \lambda^2(\nu y \mp \kappa^4\lambda^2z^2)^2 = 0,$$

d. h. der Knotenkegel vierten Grades zerfällt in zwei konjugiert imaginäre Ebenenpaare, welche sich bez. in den beiden reellen Geraden

$$z = \pm \frac{\nu}{\kappa'^2\mu} y$$

durchschneiden, es sind dies die Inflexionstangenten im Knoten  $O$  der in der  $(yz)$ -Ebene liegenden Doppelkurve.  $O$  ist also konjugierter vierfacher Punkt der Fläche.

Um die Gleichung des Knotenkegels im unendlich fernen vierfachen Punkt der  $x$ -Axe zu erhalten, transformiert man diesen Punkt vermittelt der Substitution

$$x = \frac{1}{\xi}, \quad y = \frac{\eta}{\xi}, \quad z = \frac{\zeta}{\xi}$$

auf den Nullpunkt, verfährt wie vorhin und transformiert nachher wieder zurück. Der Kegel zerfällt in die vier Ebenen:

$$\mu z + \nu x y \pm \mu \nu \kappa' = 0,$$

$$\mu z - \nu x y \mp \mu \nu \kappa' = 0,$$

welche paarweise parallel und sämtlich parallel der  $x$ -Axe sind; sie schneiden die  $(xz)$ - und  $(xy)$ -Ebene in den zur  $x$ -Axe parallelen Asymptoten der in diesen Ebenen liegenden Doppelkurven.

Der Knotenkegel des unendlich fernen Punktes der  $y$ -Axe zerfällt in die vier Ebenen:

$$\nu \kappa x + \lambda \kappa'^2 z = \pm \lambda \nu,$$

$$\nu \kappa x - \lambda \kappa'^2 z = \mp \lambda \nu,$$

die parallel zur  $y$ -Axe sind, welche durch die zur  $y$ -Axe parallelen Asymptoten der in der  $(yz)$ - und  $(xy)$ -Ebene liegenden Doppelkurven gehen.

Der Knotenkegel im unendlich fernen Punkt der  $z$ -Axe reduziert sich auf

$$(\mu x \pm \lambda \mu \kappa^2)^2 + \lambda^2 \kappa'^4 y^2 = 0,$$

er zerfällt in zwei konjugiert imaginäre Ebenenpaare, welche sich in den zwei reellen Geraden  $y = 0$ ,  $x = \pm \lambda \kappa^2$  durchschneiden, es sind dies die zur  $z$ -Axe parallelen Asymptoten der in der  $(xz)$ -Ebene liegenden Doppelkurve.

Schneidet man die Tangentenfläche durch eine zur  $(xy)$ -Ebene parallele Ebene  $z = \nu$ , welche durch die Scheitel  $A, A'$  der grossen Axe der oberhalb der  $(xy)$ -Ebene liegenden sphärischen Ellipse geht, so enthält diese die Tangenten des sphärischen Kegelschnittes in diesen Punkten als Erzeugende der Tangentenfläche und die übrig bleibende Schnittkurve ist von der sechsten Ordnung.

Ihre Gleichungen ergeben sich aus den Flächengleichungen 36) für  $z = v$ :

$$x = \frac{\lambda(1 - \kappa' dn u)}{\kappa sn u}, \quad y = \frac{\mu(dn v - \kappa')}{\kappa cn u},$$

hieraus:

$$45) \quad x^2\{x^2(y^2 + \mu^2)^2 - 4\mu^2y^2\} = \lambda^2\{(1 + \kappa'^2)y^2 - \mu^2x^2\}^2.$$

Schnittpunkte mit der  $x$ -Axe:  $y^2 = 0$ ,  $x = \pm \lambda\kappa =$  Scheitel  $A, A'$ ,

„ „ „  $y$ -Axe:  $x^2 = 0$ ,  $\{(1 + \kappa'^2)y^2 - \mu^2x^2\}^2 = 0$ ,

also:

$$y = \pm \frac{\mu\kappa}{\sqrt{1 + \kappa'^2}}.$$

Diese beiden Doppelpunkte sind konjugierte Punkte. Die Kurve besitzt die sechs Asymptoten:

$$y = \pm \frac{\mu}{\kappa}(1 + \kappa'), \quad y = \pm \frac{\mu}{\kappa}(1 - \kappa'), \quad x = \pm \frac{\lambda}{\kappa}(1 + \kappa'^2).$$

Der unendlich ferne Punkt der  $x$ -Axe ist vierfacher Inflexionsknoten, derjenige der  $y$ -Axe doppelter.

Diese Schnittkurve besteht aus vier kongruenten hyperbolischen Ästen in den äusseren Winkelräumen der vier Asymptoten

$$x = \pm \frac{\lambda}{\kappa}(1 + \kappa'^2) \quad \text{und} \quad y = \pm \frac{\mu}{\kappa}(1 + \kappa')$$

und aus zwei unendlichen Ästen, die rechts und links der Scheiteltangenten  $x = \pm \lambda\kappa$  zwischen den Asymptoten

$$y = \pm \frac{\mu}{\kappa}(1 - \kappa')$$

verlaufen (Fig. 4).

Die zu den Koordinatenebenen parallelen Schnitte der Tangentenfläche durch irgend zwei andere Scheitel des sphärischen Kegelschnittes findet man ebenso einfach, ihre Gleichungen sind von ähnlicher Form, aber die Formen der Kurven sind verschieden.

### Sphärische Abbildung der Tangentenfläche.

Fällt man vom Mittelpunkt der Kugel Lote auf sämtliche Schmiegungebenen der Tangentenfläche des sphärischen Kegelschnittes, so bilden diese einen Kegel, der die Einheitskugel in einer Kurve schneidet, welche das sphärische Bild der Tangentenfläche ist.

Die Kurve besteht aus zwei gleichen, geschlossenen Zweigen, oberhalb und unterhalb der  $(xy)$ -Ebene, sie ist symmetrisch zu allen drei Koordinatenebenen.

Sind  $\alpha, \beta, \gamma$  die Richtungswinkel eines Lotes,  $X, Y, Z$  die Koordinaten seines Schnittpunktes mit der Einheitskugel, so folgt aus der Gleichung 16) der Schmiegungeebene, wenn man bemerkt, dass

$$\begin{aligned} \lambda^2\mu^2dn^6u + \lambda^2\nu^2x^2cn^6u + \mu^2\nu^2x^2\kappa'^2sn^6u \\ = \kappa'^2[\lambda^2\mu^2\nu^2 + \kappa^2(\lambda^2 - sn^2u)^3] \end{aligned}$$

ist:

$$46) \quad \begin{cases} X = \cos \alpha = \frac{\mu v \kappa \operatorname{sn}^3 u}{\sqrt{\lambda^2 \mu^2 v^2 + \kappa^2 (\lambda^2 - \operatorname{sn}^2 u)^3}}, \\ Y = \cos \beta = \frac{-\lambda v \kappa \operatorname{cn}^3 u}{\kappa' \sqrt{\lambda^2 \mu^2 v^2 + \kappa^2 (\lambda^2 - \operatorname{sn}^2 u)^3}}, \\ Z = \cos \gamma = \frac{\lambda \mu d u^3 u}{\kappa' \sqrt{\lambda^2 \mu^2 v^2 + \kappa^2 (\lambda^2 - \operatorname{sn}^2 u)^3}}. \end{cases}$$

Es sind dies, bei variablem  $u$ , die Gleichungen des sphärischen Bildes.

Projiziert man die Kurve auf eine Koordinatenebene, so fallen jedesmal zwei Hälften aufeinander, so dass die Ordnung der Projektionskurve nur die Hälfte ist von derjenigen der Raumkurve. Die Gleichung der Projektionen erhält man durch Elimination des Parameters  $u$  aus je zwei der Gleichungen 46), nämlich

In der  $(xy)$ -Ebene:

$$\begin{aligned} & \{(\lambda^2 \kappa'^2 - \mu^2 \kappa^2) X^2 + \kappa'^2 (\lambda^2 - v^2) Y^2 - v^2 \kappa^2\}^3 \\ & = 27 \lambda^2 \mu^2 v^2 \kappa^2 \kappa'^4 (X^2 + Y^2 - 1) X^2 Y^2. \end{aligned}$$

Diese Kurve sechster Ordnung hat auf jeder der Koordinatenachsen je zwei Rückkehrpunkte:

$$X = \frac{\pm \kappa v}{\sqrt{\lambda^2 \kappa'^2 - \mu^2 v^2}}, \quad Y = 0,$$

und

$$X = 0, \quad Y = \pm \frac{\kappa v}{\kappa' \sqrt{\lambda^2 - v^2}},$$

die betreffenden Axen sind die Rückkehrtangenten.

In der  $(xz)$ -Ebene:

$$\begin{aligned} & \{(\lambda^2 \kappa'^2 - v^2) X^2 + (\lambda^2 - v^2) \kappa'^2 Z^2 - \mu^2\}^3 \\ & = -27 \lambda^2 \mu^2 v^2 \kappa^2 \kappa'^2 (X^2 + Z^2 - 1) X^2 Z^2. \end{aligned}$$

Rückkehrpunkte:

$$X = \frac{\pm \mu}{\sqrt{\lambda^2 \kappa'^2 - v^2}}, \quad Z = 0, \quad Z = \frac{\pm \mu}{\kappa' \sqrt{\lambda^2 \kappa^2 + \mu^2}}, \quad Y = 0.$$

Die  $X$ - und  $Z$ -Axen sind Rückkehrtangenten.

In der  $(yz)$ -Ebene:

$$\begin{aligned} & \{(v^2 - \lambda^2 \kappa'^2) Y^2 + (\lambda^2 \kappa'^2 - \mu^2 \kappa^2) Z^2 - \lambda^2 \kappa'^2\}^3 \\ & = -27 \lambda^2 \mu^2 v^2 \kappa^2 \kappa'^4 (Y^2 + Z^2 - 1) Y^2 Z^2. \end{aligned}$$

Rückkehrpunkte:

$$Y = 0, \quad Z = \frac{\pm \lambda \kappa'}{\sqrt{\lambda^2 \kappa'^2 - \mu^2 \kappa^2}}; \quad Y = \frac{\pm \lambda \kappa'}{v^2 - \lambda^2 \kappa'^2}, \quad Z = 0.$$

Die sphärische Bildkurve selbst ist von der zwölften Ordnung. Benützt man zur Elimination von  $u$  alle drei Gleichungen 46), so erhält man den Kegel sechsten Grades vom Scheitel  $O$ :

$$(\lambda^2 \kappa'^4 X^2 + \mu^2 Y^2 - \nu^2 \kappa^2 Z^2)^3 + 27 \lambda^2 \mu^2 \nu^2 \kappa'^4 X^2 Y^2 Z^2 = 0,$$

welcher die Einheitskugel in einer Kurve schneidet, welche das sphärische Bild der Tangentenfläche ist. Die in der  $(XZ)$ -Ebene liegenden Erzeugenden desselben

$$Z = \pm \frac{\lambda \kappa'^2}{\nu \kappa} X$$

und ebenso die in der  $(YZ)$ -Ebene liegenden

$$Z = \pm \frac{\mu}{\nu \kappa} Y$$

sind Rückkehrkanten des Kegels. Dieser Kegel stimmt überein mit dem durch Gleichung 20) dargestellten Kegel, welcher die Tangentenfläche in der Kurve der Krümmungsmittelpunkte schneidet. Beide Kurven haben also in ihren Schnittpunkten mit der  $(xz)$ - und  $(yz)$ -Ebene je vier Rückkehrpunkte.

### Fundamentalgrößen erster Ordnung.

Die Gleichungen der developpablen Tangentenfläche sind:

$$x = \frac{\lambda \kappa \operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{sn} u}, \quad y = \frac{\mu \kappa \operatorname{cn}^2 v}{\kappa' \operatorname{cn}^2 u}, \quad z = \frac{\nu \operatorname{dn}^2 v}{\kappa' \operatorname{dn} u}.$$

Nun werden die Differentialquotienten nach  $u$  und  $v$ :

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\frac{\lambda \kappa \operatorname{sn}^2 v \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{sn}^3 u}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\mu \kappa \operatorname{cn}^2 v \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\kappa' \operatorname{cn}^2 u}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\nu \kappa^2 \operatorname{dn}^2 v \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\kappa' \operatorname{dn}^2 u},$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{2 \lambda \kappa \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} u}, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{2 \mu \kappa \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{\kappa' \operatorname{cn} u},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{-2 \nu \kappa^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{\kappa' \operatorname{dn} u}.$$

Die Fundamentalgrößen erster Ordnung, möglichst reduziert, werden:

$$47) \quad \left\{ \begin{aligned} E &= \sum \left( \frac{dx}{du} \right)^2 \\ &= \frac{\kappa'}{\kappa'^2} \operatorname{sn}^2 u \operatorname{cn}^2 u \operatorname{dn}^2 u \left( \frac{\kappa'^2 \lambda^2 \operatorname{sn}^4 v}{\operatorname{sn}^6 u} + \frac{\mu \operatorname{cn}^4 v}{\operatorname{cn}^6 u} + \frac{\nu^2 \kappa^2 \operatorname{dn}^4 v}{\operatorname{dn}^6 u} \right) \end{aligned} \right.$$

$$48) \quad \left\{ \begin{aligned} F &= \sum \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \\ &= -\frac{2 \kappa^2}{\kappa'^2} \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v \left( \frac{\lambda^2 \kappa'^2 \operatorname{sn}^2 v}{\operatorname{sn}^4 u} + \frac{\mu^2 \operatorname{cn}^2 v}{\operatorname{cn}^4 u} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu^2 \kappa^2 \operatorname{dn}^2 v}{\operatorname{dn}^4 u} \right) \end{aligned} \right.$$

$$49) \quad G = \sum \left( \frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 = 4 \kappa^2 \left( \frac{\operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \operatorname{dn} v}{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u} \right)^2 (\lambda^2 - \operatorname{sn}^2 u),$$

$$50) \quad \delta^2 = EG - F^2 = 4x^4 \frac{sn^2 v cn^2 v dn^2 v}{sn^4 u cn^4 u dn^4 u} (sn^2 u - sn^2 v)^2 \cdot \{\lambda^2 \mu^2 v^2 + x^2 (\lambda^2 - sn^2 u)^3\}.$$

Der Winkel  $w$ , unter welchem die Erzeugende  $u = \text{konst.}$  die Parameterkurve  $v = \text{konst.}$  schneidet, wird erhalten aus:

$$51) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tang } w = \frac{\delta}{F}, \\ - \frac{x'^2 sn u cn u dn u (sn^2 v - sn^2 u) \sqrt{\lambda^2 u^2 v^2 + x^2 (\lambda^2 - sn^2 u)^3}}{\lambda^2 x'^2 sn^2 v cn^4 u dn^4 u + \mu^2 cn^2 v sn^4 u dn^4 u + v^2 x'^2 dn^2 v sn^4 u cn^4 u}. \end{array} \right.$$

Für die Werte

$$u = 0, \quad K, \quad 2K, \quad 3K, \quad 2L, \quad 2L + K \text{ etc.}$$

wird  $w = 0$ , unabhängig von  $v$ , d. h. alle Parameterkurven  $v = \text{konst.}$  berühren die Tangenten in den acht Scheiteln des sphärischen Kegelschnitts im Unendlichen.

Für  $v = u$  wird ebenfalls  $w = 0$ , d. h. alle Parameterkurven  $v = \text{konst.}$  berühren den sphärischen Kegelschnitt, die Berührungspunkte sind aber, wie schon erwähnt, nur reell für

$$0 \leq v \leq K.$$

Ist im Ausdruck für  $\text{tang } w$  der Nenner

$$\lambda^2 x'^2 sn^2 v cn^4 u dn^4 u + \mu^2 cn^2 v sn^4 u dn^4 u + v^2 x'^2 dn^2 v sn^4 u cn^4 u = 0,$$

so wird  $w = 90^\circ$ . Diese Gleichung bestimmt eine Kurve auf der Fläche, längs welcher die Erzeugenden der Fläche  $u = \text{konst.}$ , die Parameterkurve  $v = \text{konst.}$  rechtwinklig durchschneiden. Berechnet man aus obiger Gleichung  $sn^2 v$  und daraus  $cn^2 v$  und  $dn^2 v$ , und setzt diese Werte in den Flächengleichungen ein, so werden die Gleichungen dieser Raumkurve:

$$52) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\lambda x sn^3 u}{N} (u^2 dn^4 u + v^2 x^2 cn^4 u), \\ y = - \frac{\mu x x' cn^3 u}{N} (\lambda^2 dn^4 u + v^2 x^2 sn^4 u), \\ z = \frac{v x' dn^3 u}{N} (u^2 sn^4 u - \lambda^2 cn^4 u), \end{array} \right.$$

wo

$$N = \mu^2 sn^4 u dn^4 u + v^2 x^4 sn^4 u cn^4 u - \lambda^2 x'^2 cn^4 u dn^4 u$$

ist.

### Fundamentalgrößen zweiter Ordnung.

Bildet man aus den Flächengleichungen die nach  $u$  und  $v$  genommenen zweiten Differentialquotienten, so erhalten die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung folgende Werte:

$$53) \quad \left\{ \begin{array}{l} D = \sum \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} \left( \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) \\ = 6 \lambda \mu v x^4 x'^2 \frac{sn v cn v dn v}{sn^2 u cn^2 u dn^2 u} (sn^2 u - sn^2 v)^2, \end{array} \right.$$

$$54) \quad \begin{cases} D' = \sum \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) = 0, \\ D'' = \sum \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} \left( \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \right) = 0. \end{cases}$$

Weil die Erzeugenden der developpabeln Tangentenfläche die eine Schar von Krümmungslinien sind, so ist der eine Hauptkrümmungsradius in jedem Punkt der Fläche unendlich gross, der andere ergibt sich als

$$55) \quad \rho = \frac{\delta^3}{G \cdot D} = \frac{(sn^2 u - sn^2 v)[\lambda^2 \mu^2 v^2 + \kappa^2 (\lambda^2 - sn^2 u)^3]^{\frac{3}{2}}}{3 \lambda \mu v \kappa'^2 sn^2 u cn^2 u dn^2 u (\lambda^2 - sn^2 u)}$$

Für  $v = u$ , d. h. für die Punkte des sphärischen Kegelschnitts, die Rückkehrkante, ist stets  $\rho = 0$ .

Für

$$u = 0, \quad K, \quad 2K, \quad 3K, \quad 2L, \quad 2L + K, \quad 2L + 2K \quad \text{und} \quad 2L + 3K$$

wird  $\rho = \infty$  für jeden Wert  $v$ , d. h. in den Punkten der Fläche längs der Tangenten in den acht Scheiteln des sphärischen Kegelschnitts sind beide Hauptkrümmungsradien unendlich gross. Die Tangentialebenen der Tangentenfläche durch diese acht Erzeugenden derselben sind stationäre Tangentenebenen, alle ebenen Schnitte senkrecht zu ihnen sind Hauptschnitte der Fläche, ihre Gleichungen wurden früher aufgestellt.

Für

$$snu = \lambda = snt, \quad \text{also} \quad u = t = K + vi,$$

wird  $\rho$  ebenfalls unendlich, aber die zugehörige Erzeugende der Fläche ist imaginär.

Für  $v = 0$ ,  $K$ ,  $K + L$ , erhält man den Krümmungsradius der Doppelkurven in den Koordinatenebenen.

Die Parameterkurven  $v = \text{konst.}$  sind konjugiert zu den Erzeugenden der Fläche. Die Asymptotenlinien fallen in jedem Punkt mit der durch diesen Punkt gehenden Erzeugenden der Fläche zusammen.

### Die Krümmungslinien.

Die eine Schar der Krümmungslinien der developpabeln Tangentenfläche des sphärischen Kegelschnitts besteht aus ihren Erzeugenden, die zweite Schar enthält man nach dem Satz (Joachimsthal, Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf die Theorie der Flächen):

Wenn sich eine Tangente längs einer Raumkurve hin bewegt, so beschreibt sie ihre developpable Tangentenfläche, und jeder Punkt derselben beschreibt eine Krümmungslinie auf der Fläche.

Als Gleichung der sphärischen Ellipse legen wir die zweite Form (33) zu Grunde, die wir bei der Rektifikation der Kurven benützten, nämlich:

$$x = \frac{sn\tau \, dn\tau \, cn\,w}{k' T}, \quad y = \frac{icn\tau \, dn\tau \, sn\,w}{T}, \quad z = \frac{kicn\tau \, sn\tau \, dn\,w}{k' T},$$

wo

$$T = \sqrt{sn^2\tau - sn^2w}, \quad sn\tau = \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad k = \frac{c}{a} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 + c^2}}$$

ist. Die Richtungskosinusse der Tangente im Punkte  $(x, y, z)$  der sphärischen Ellipse sind:

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds} = -\frac{icn\tau \, sn\,w \, dn\,w}{k' T}, \quad \cos \beta = \frac{sn\tau \, cn\,w \, dn\,w}{T},$$

$$\cos \gamma = \frac{k \, dn\tau \, sn\,w \, cn\,w}{k' T}.$$

Bedeutet [Gleichung 34]

$$s = \frac{i}{2} \text{Log} \frac{H(\tau + w)}{H(\tau - w)} - iw Z(\tau)$$

den vom Scheitel  $A$  der grossen Axe aus gemessenen Bogen der sphärischen Ellipse und  $l$  eine beliebige konstante Strecke, welche von  $A$  aus auf der sich abwickelnden Tangente abgetragen wird, so sind die Koordinaten des erzeugenden Punktes:

$$\xi = x + (l + s) \cos \alpha, \quad \eta = y + (l + s) \cos \beta, \quad \zeta = z + (l + s) \cos \gamma.$$

Setzt man für  $x, y, z, \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$  ihre Werte, so wird die Gleichung einer Krümmungslinie  $l = \text{konst.}$ :

$$57) \quad \begin{cases} \xi = \frac{1}{k' T} \{sn\tau \, dn\tau \, cn\,w - (l + s) icn\tau \, sn\,w \, dn\,w\} \\ \eta = \frac{1}{T} \{icn\tau \, dn\tau \, sn\,w + (l + s) sn\tau \, cn\,w \, dn\,w\} \\ \zeta = \frac{k}{k' T} \{icn\tau \, sn\tau \, dn\,w + (l + s) dn\tau \, sn\,w \, cn\,w\} \end{cases}$$

wo  $w$  die Variable bezeichnet.

Für  $w = 0$ , Scheitel  $A$  der grossen Axe wird  $T = sn\tau, s = 0$ :

$$\xi = \frac{dn\tau}{k'}, \quad \eta = l, \quad \zeta = \frac{k}{k'} icn\tau.$$

Für  $w = K$ , Scheitel  $C$  der kleinen Axe wird

$$T = icn\tau, \quad s = \text{Ellipsenquadrant} = \frac{\pi}{2} - iKZ(\tau) = q:$$

$$\xi = -(l + q), \quad \eta = dn\tau, \quad \zeta = ksn\tau.$$

Bei variablem  $l$  erhält man die ganze Schar von Krümmungslinien, es sind transcendente Linien, welche auf je einem der zwei Mäntel, aus welchen die Tangentenfläche besteht, spiralförmig ins Unendliche gehen.

# Die Bewegung der Ionen beim Zeemannschen Phänomen.\*

Von

OTTO BLUMENTHAL

in Frankfurt a.M.

Acceptieren wir für das Zeemannsche Phänomen die von Zeemann vorgeschlagene Erklärung,\*\* welche, ausgehend von der Helmholtz'schen Dispersionstheorie, die Schwingungen der elektrisch geladenen Ionen eines glühenden Dampfes und ihre Veränderung durch ein Magnetfeld betrachtet, so bestimmt sich die Bewegung eines solchen Ions bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems nach dem Biot-Savartschen Gesetz durch die Differentialgleichungen:

$$I. \quad \begin{cases} a) & \mu \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{\omega} (Cv - Bw) - h'x, \\ b) & \mu \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{\omega} (Aw - Cv) - h'y, \\ c) & \mu \frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\varepsilon}{\omega} (Bu - Av), \end{cases}$$

wo  $A, B, C$  die Komponenten der magnetischen Kraft,  $u, v, w$  die Komponenten der Geschwindigkeit des Ions,  $\mu$  seine Masse,  $\varepsilon$  seine wahre elektrische Ladung,  $\omega$  die Lichtgeschwindigkeit bezeichnen. Im Falle eines homogenen Magnetfelds haben wir insbesondere

$$I'. \quad \begin{cases} a) & \frac{d^2 x}{dt^2} = \gamma v - \beta w - hx, \\ b) & \frac{d^2 y}{dt^2} = \alpha w - \gamma u - hy, \\ c) & \frac{d^2 z}{dt^2} = \beta u - \alpha v, \end{cases}$$

---

\* Auszug aus der Bearbeitung einer von Herrn Geheimrat Riecke in Göttingen gestellten Staatsexamensaufgabe.

\*\* Verslagen van de gewone Vergaderingen d. Academic te Amsterdam, Wis-en natuurkundige afdeeling, deel V, 1897, p. 242 fig.

wo  $\alpha = \frac{A}{\omega} \frac{\varepsilon}{\mu}$ ,  $\beta = \frac{B}{\omega} \frac{\varepsilon}{\mu}$ ,  $\gamma = \frac{C}{\omega} \frac{\varepsilon}{\mu}$  Konstanten sind, und  $\frac{h'}{\mu} = h$  gesetzt ist.

Wir wollen in dieser Note die Bahnkurven der Ionen bei Zugrundelegung eines homogenen Magnetfeldes untersuchen, wollen aber dabei der grösseren Allgemeinheit halber die Kraft in der Richtung der  $x$ - und  $y$ -Axe verschieden annehmen, also von den Gleichungen

$$I'' \quad \begin{cases} \text{a) } \frac{d^2 x}{dt^2} = \gamma v - \beta w - h x, \\ \text{b) } \frac{d^2 y}{dt^2} = \alpha w - \gamma u - k y, \\ \text{c) } \frac{d^2 z}{dt^2} = \beta u - \alpha v \end{cases}$$

ausgehen. Wir können diese Erweiterung dahin deuten, dass wir die Veränderung einer Lissajousschen Figur, nicht mehr einer einfachen elliptischen Schwingung, durch ein homogenes Magnetfeld untersuchen. Dass die Verallgemeinerung auch für unser spezielles Problem nützlich ist, ergibt sich aus § 4.

Der einfachste Fall ist der, dass die magnetischen Kraftlinien der  $z$ -Axe parallel laufen, und dieser möge vorangestellt werden. Der allgemeine Fall lässt sich dann ohne Schwierigkeit auf diesen speziellen zurückführen.

### 1. Integration der Gleichungen, wenn die Kraftlinien der $z$ -Axe parallel sind.

Die Gleichungen I'' nehmen die einfachere Form an:

$$I''' \quad \begin{cases} \text{a) } \frac{d^2 x}{dt^2} = \gamma \frac{dy}{dt} - h x, \\ \text{b) } \frac{d^2 y}{dt^2} = -\gamma \frac{dx}{dt} - k y, \\ \text{c) } \frac{d^2 z}{dt^2} = 0. \end{cases}$$

Wir betrachten zunächst nur die Projektion der Bewegung auf die  $(xy)$ -Ebene. Aus a) und b) bilden wir eine Differentialgleichung für  $x$  allein. Wir differenzieren dazu a) nach  $t$ , berechnen aus der differenzierten Gleichung  $\frac{d^2 y}{dt^2}$  und setzen in b) ein; dann kommt:

$$\frac{d^3 x}{dt^3} = -(\gamma^2 + h) \frac{dx}{dt} - k \gamma y.$$

Die Gleichung wird abermals differenziert,  $\frac{dy}{dt}$  berechnet und in a) eingesetzt. Es folgt dann die gesuchte Gleichung für  $x$ :

$$II. \quad \frac{d^4 x}{dt^4} + (\gamma^2 + h + k) \frac{d^2 x}{dt^2} + h k x = 0,$$

und der nämlichen Gleichung genügt auch  $y$ . Wir erhalten daraus:

$$1) \quad \begin{cases} x = A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t + A_2 \cos q_2 t + B_2 \sin q_2 t, \\ y = C_1 \cos q_1 t + D_1 \sin q_1 t + C_2 \cos q_2 t + D_2 \sin q_2 t, \end{cases}$$

wo  $q_1^2, q_2^2$  Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$2) \quad q^4 - (\gamma^2 + h + k)q^2 + hk = 0$$

sind, also

$$3) \quad \begin{cases} q_1^2 = -\frac{1}{2} \sqrt{\gamma^4 + 2\gamma^2(h+k) + (h-k)^2} + \frac{1}{2}(\gamma^2 + h + k), \\ q_2^2 = +\frac{1}{2} \sqrt{\gamma^4 + 2\gamma^2(h+k) + (h-k)^2} + \frac{1}{2}(\gamma^2 + h + k). \end{cases}$$

Zur Bestimmung der Konstanten  $A, B, C, D$  setzen wir die Anfangsbedingungen

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad x'(0) = u_0, \quad y'(0) = v_0$$

fest, was die Gleichungen

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= x_0, & C_1 + C_2 &= y_0, \\ B_1 q_1 + B_2 q_2 &= u_0, & D_1 q_1 + D_2 q_2 &= v_0 \end{aligned}$$

liefert. Berücksichtigen wir ausserdem die aus I''' a) und I''' b) folgenden Gleichungssysteme

$$4) \quad \begin{cases} (h - q_1^2)A_1 = \gamma q_1 D_1, & (k - q_1^2)C_1 = -\gamma q_1 B_1, \\ (h - q_1^2)B_1 = -\gamma q_1 C_1, & (k - q_1^2)D_1 = \gamma q_1 A_1, \\ (h - q_2^2)A_2 = \gamma q_2 D_2, & (k - q_2^2)C_2 = -\gamma q_2 B_2, \\ (h - q_2^2)B_2 = -\gamma q_2 C_2, & (k - q_2^2)D_2 = \gamma q_2 A_2, \end{cases}$$

welche vermöge der aus 2) folgenden Relationen

$$5) \quad q_1^2 + q_2^2 = \gamma^2 + h + k, \quad q_1^2 q_2^2 = hk$$

identisch sind, so ergibt sich

$$6) \quad \begin{cases} A_1 = \frac{1}{q_2^2 - q_1^2} [\gamma v_0 - (h - q_2^2)x_0], \\ B_1 = \frac{1}{q_2^2 - q_1^2} \left[ -\frac{k(h - q_2^2)}{q_1 q_2^2} u_0 - \gamma \frac{k}{q_1} y_0 \right], \\ A_2 = \frac{1}{q_2^2 - q_1^2} [-\gamma v_0 + (h - q_1^2)x_0], \\ B_2 = \frac{1}{q_2^2 - q_1^2} \left[ \frac{k(h - q_1^2)}{q_2 q_1^2} u_0 + \gamma \frac{k}{q_2} y_0 \right], \\ C_1 = \frac{1}{q_2^2 - q_1^2} [-\gamma u_0 - (k - q_2^2)y_0], \\ D_1 = \frac{1}{q_2^2 - q_1^2} \left[ -\frac{h(k - q_2^2)}{q_1 q_2^2} v_0 + \gamma \frac{h}{q_1} x_0 \right], \\ C_2 = \frac{1}{q_2^2 - q_1^2} [\gamma u_0 + (k - q_1^2)y_0], \\ D_2 = \frac{1}{q_2^2 - q_1^2} \left[ \frac{h(k - q_1^2)}{q_2 q_1^2} v_0 - \gamma \frac{h}{q_2} x_0 \right]. \end{cases}$$

Um die erhaltenen analytischen Resultate geometrisch zu interpretieren, haben wir zuerst die Grössen  $q$  zu betrachten. Diese können reell, rein imaginär und konjugiert komplex sein. Von physikalischer Wichtigkeit ist nur der Fall positiver  $h$  und  $k$ , welcher reelle  $q$  liefert. Dieser ist nämlich beim Zeemannschen Phänomen immer realisiert. Wir werden uns daher im Folgenden auf diesen Fall beschränken. Die übrigen Fälle bieten übrigens keine besonderen Schwierigkeiten.

## 2. Die Bahnkurven im Falle positiver $h$ und $k$ .

### Die doppelelliptische Bewegung.

Wir behandeln vorweg den Fall, dass eine der Grössen  $h, k$  verschwindet.

$h = k = 0$  liefert die bekannte Kreisbewegung eines elektrischen Teilchens unter dem Einflusse eines homogenen Magnetfelds.\*

Den Fall  $k = 0$  erhalten wir aus unseren allgemeinen Formeln durch Grenzübergang, indem wir  $k = \varepsilon k_1$  setzen und höhere Potenzen von  $\varepsilon$  vernachlässigen. Wir finden so zunächst

$$q_1^2 = \varepsilon k_1 \frac{h}{\gamma^2 + h}, \quad q_2^2 = \gamma^2 + h.$$

Setzen wir dann diese Werte in die Gleichungen 1) und 6) ein, so ergibt sich in der Grenze  $\varepsilon = 0$ :

$$7) \quad \begin{cases} x = x_1 + x_2, \\ x_1 = A_1, \\ x_2 = A_2 \cos q_2 t + B_2 \sin q_2 t; \\ y = y_1 + y_2, \\ y_1 = C_1 + D_1' t \\ y_2 = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + h}} (B_2 \cos q_2 t - A_2 \sin q_2 t). \end{cases}$$

Das Wertepaar  $(x_1, y_1)$  stellt eine gleichförmige Bewegung längs einer Parallelen zur  $y$ -Axe dar, das Wertepaar  $(x_2, y_2)$  eine Bewegung auf einer auf die Koordinatenachsen als Hauptachsen bezogenen Ellipse mit dem Axenverhältnis

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{\gamma^2 + h}}{\gamma}.$$

Die Bewegung stellt sich daher im ganzen dar als Bewegung auf einer auf die Koordinatenachsen als Hauptachsen bezogenen Ellipse, deren Mittelpunkt gleichzeitig auf einer Parallelen zur  $y$ -Axe gleichförmig fortschreitet.

\* Siehe Riecke: „Über die Bewegung eines elektrischen Teilchens in einem homogenen magnetischen Felde und das elektrische Glimmlicht“. Wied. Ann. 1881, Bd. XIII, S. 191.

Die Werte  $A, B, C, D'$  berechnen sich leicht aus 6). Von Interesse ist nur der Wert

$$D_1' = \frac{h}{\gamma^2 + h} (v_0 + \gamma x_0).$$

Er zeigt, dass wir für  $v_0 + \gamma x_0 = 0$  einfache Bewegung auf einer Ellipse erhalten.

Der Fall  $h = 0$  ergibt sich aus dem vorhergehenden durch Vertauschung der Axen.

Sind  $h$  und  $k$  beide von 0 verschieden, so ist das Gleiche für  $q_1$  und  $q_2$  der Fall. Die Bewegung verläuft innerhalb eines endlichen Flächenstücks und ist periodisch, wenn  $q_1$  und  $q_2$  in rationalem Verhältnis stehen.

Um zu einer allgemeinen Darstellung der durch die Gleichungen 1) definierten Bewegung zu gelangen, setzen wir analog wie unter 7):

8) 
$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos q_1 t + B_1 \sin q_1 t, & x_2 = A_2 \cos q_2 t + B_2 \sin q_2 t, \\ y_1 = C_1 \cos q_1 t + D_1 \sin q_1 t, & y_2 = C_2 \cos q_2 t + D_2 \sin q_2 t, \end{cases}$$
  
so dass

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2.$$

Wir können dann  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  je als Punkt einer Ellipse deuten, welche den Koordinaten-Anfangspunkt zum Mittelpunkt hat. Bezeichnen wir die beiden Ellipsen mit  $E_1$  und  $E_2$ , die konstanten Sektoren-Geschwindigkeiten, mit welchen gemäss 8) die Punkte  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  auf ihnen entlang geführt werden, mit  $v_1$  und  $v_2$ , schliesslich die Anfangslagen für  $t = 0$  mit  $P_1$  und  $P_2$ , so lässt sich die Bewegung 1) folgendermassen kinematisch beschreiben:

Wir erhalten die gesuchte Bahnkurve, indem wir auf der Ellipse  $E_2$ , bei  $P_2$  beginnend, mit der konstanten Sektoren-Geschwindigkeit  $v_2$  einen Punkt wandern lassen, während gleichzeitig der Mittelpunkt der Ellipse  $E_2$  auf  $E_1$ , bei  $P_1$  beginnend, mit der konstanten Sektoren-Geschwindigkeit  $v_1$  gleitet.\*

Dieses allgemeine Schema wird in wesentlicher Weise vereinfacht durch den weiteren Satz:

Die Ellipsen  $E_1$  und  $E_2$  haben die Koordinatenachsen zu Hauptachsen.

Setzen wir nämlich

9) 
$$\begin{cases} x_1 = a_1 \sin(q_1 t + \vartheta_1), & x_2 = a_2 \sin(q_2 t + \vartheta_2), \\ y_1 = b_1 \cos(q_1 t + \vartheta_1), & y_2 = b_2 \cos(q_2 t + \vartheta_2), \end{cases}$$
  
so ist

---

\* Die Ellipsen  $E_1$  und  $E_2$  sind natürlich mit einander vertauschbar, so dass wir zwei kinematische Darstellungen unserer Bewegung haben. Da jedoch die Vertauschbarkeit der Ellipsen für das folgende belanglos ist, so genügt es, die eine Darstellung ins Auge zu fassen.

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{A_1}{B_1}, \quad \operatorname{tg} \varrho_1 = -\frac{D_1}{C_1},$$

und die Gleichungen 4) ergeben

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \operatorname{tg} \varrho_1,$$

$$\operatorname{tg} \vartheta_2 = \operatorname{tg} \varrho_2.$$

Wir erhalten daher die beiden Ellipsen in der Form

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{y_1^2}{b_1^2} = 1, \quad \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{y_2^2}{b_2^2} = 1,$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Die Winkel  $\varrho$  sind nur bis auf Vielfache von  $\pi$  bestimmt. Vergleichung der Vorzeichen von  $A_1$  und  $D_1$ ,  $B_1$  und  $C_1$  liefert die vollständige Bestimmung:

Bei positivem  $\gamma$  ist

$$10) \quad \varrho_1 = \vartheta_1 + \pi, \quad \varrho_2 = \vartheta_2,$$

die Ellipse  $E_1$  wird von dem Punkte  $(a_1 \sin \vartheta_1, -b_1 \cos \vartheta_1)$  aus in positivem, die Ellipse  $E_2$  von  $(a_2 \sin \vartheta_2, b_2 \cos \vartheta_2)$  aus in negativem Sinne durchlaufen. Bei negativem  $\gamma$  erhalten wir umgekehrten Umlaufungssinn.

Wir haben somit ein kinematisches Modell für unsere Bewegung konstruiert: Das Modell besteht aus zwei Ellipsen mit den Koordinatenachsen als Hauptachsen, deren eine mit ihrem Mittelpunkt auf der anderen gleitet, während sich der betrachtete Punkt mit umgekehrtem Durchlaufungssinn auf ihr bewegt. Jede mittelst dieses Modelles realisierbare Bewegung soll kurz als „doppelelliptische Bewegung“ bezeichnet werden. Wir fragen nun: „Ist die Bewegung unseres Ions die allgemeinste doppelelliptische Bewegung, oder ist sie nur eine spezielle?“

Ein vorläufiges Urteil verschaffen wir uns durch eine Konstanten-Abzählung: unser physikalisches Problem enthält die 7 willkürlichen Konstanten  $x_0, y_0, u_0, v_0, \gamma, h, k$ ; in die doppelelliptische Bewegung gehen 8 Konstanten ein:  $a_1, b_1, a_2, b_2, q_1, q_2, \vartheta_1, \vartheta_2$ . Wir können daraus schliessen, dass die Bewegung unseres Ions nur eine spezielle doppelelliptische Bewegung ist. Zum Zweck genauerer Untersuchung aber stellen wir die Differentialgleichungen der allgemeinen doppelelliptischen Bewegung auf. Wir haben nach 9):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -q_1^2 x_1 - q_2^2 x_2, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -q_1^2 y_1 - q_2^2 y_2.$$

Zur Elimination der  $x_1, y_1, x_2, y_2$  haben wir ausser den Definitionsgleichungen

$$x = x_1 + x_2, \quad y = y_1 + y_2$$

noch das Gleichungspaar:

$$\frac{dy}{dt} = \pm \left( \frac{b_1 q_1}{a_1} x_1 - \frac{b_2 q_2}{a_2} x_2 \right), \quad \frac{dx}{dt} = \mp \left( \frac{a_1 q_1}{b_1} y_1 - \frac{a_2 q_2}{b_2} y_2 \right),$$

wo bei positiver Umlaufung der Ellipse  $E_1$  das obere, bei negativer das untere Vorzeichen zu wählen ist. Die Elimination ergibt:

$$11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = \gamma_x \frac{dy}{dt} - hx, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \gamma_y \frac{dx}{dt} - ky, \\ h = q_1 q_2 \frac{\frac{q_1 b_2}{a_2} + \frac{q_2 b_1}{a_1}}{\frac{q_1 b_1}{a_1} + \frac{q_2 b_2}{a_2}}, \quad k = q_1 q_2 \frac{\frac{q_1 a_2}{b_2} + \frac{q_2 a_1}{b_1}}{\frac{q_1 a_1}{b_1} + \frac{q_2 a_2}{b_2}}, \\ \gamma_x = \pm \frac{q_2^2 - q_1^2}{\frac{q_1 b_1}{a_1} + \frac{q_2 b_2}{a_2}}, \quad \gamma_y = \mp \frac{q_2^2 - q_1^2}{\frac{q_1 a_1}{b_1} + \frac{q_2 a_2}{b_2}}. \end{array} \right.$$

Bei der Bewegung der Ionen ist aber nach I'''

$$\gamma_x = -\gamma_y,$$

und somit besteht zwischen den Konstanten der doppelelliptischen Bewegung in unserem Falle die Beziehung:

$$12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{q_1 b_1}{a_1} + \frac{q_2 b_2}{a_2} = \frac{q_1 a_1}{b_1} + \frac{q_2 a_2}{b_2}, \\ q_1 \left( \frac{b_1}{a_1} - \frac{a_1}{b_1} \right) + q_2 \left( \frac{b_2}{a_2} - \frac{a_2}{b_2} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Die Bewegung der Ionen ist eine spezielle doppelelliptische Bewegung, zwischen deren Konstanten die Beziehung 12) besteht.

Besonders übersichtlich wird die doppelelliptische Bewegung, wenn beide Ellipsen in Kreise übergehen. Wir wollen dann von „Doppelkreisbewegung“ sprechen. Die notwendige und hinreichende Bedingung für ihr Eintreten ist  $h = k$ , wie wir sogleich beweisen werden. Sie ist also auch physikalisch besonders wichtig und insbesondere beim Zeemannschen Phänomen realisiert. Die Notwendigkeit der Bedingung  $h = k$  erkennt man sofort aus den Gleichungen 11). Um zu sehen, dass sie auch hinreicht, setze man in die Ausdrücke

$$a_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2}, \quad a_2 = \sqrt{A_2^2 + B_2^2},$$

$$b_1 = \sqrt{C_1^2 + D_1^2}, \quad b_2 = \sqrt{C_2^2 + D_2^2}$$

die Werte

$$h = k = q_1 q_2, \quad \gamma = \pm (q_2 - q_1)$$

ein, welche sich für gleiches  $h$  und  $k$  aus 5) ergeben. Wir finden dann  $a_1 = b_1, a_2 = b_2$ .

Die Kreise werden mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten durchlaufen, die sich wie  $q_1$  zu  $q_2$  verhalten.

Wir erwähnen schliesslich, dass die Kurven der Doppelkreisbewegung in eine seit langem bekannte Kurvengattung eingehen. Jede Bahnkurve einer Doppelkreisbewegung lässt sich nämlich darstellen als Bahnkurve eines mit einem Kreise  $k'$  fest verbundenen Punktes, wenn  $k'$  auf einem grösseren Kreise  $k$  von innen abrollt.\* Die

\* Einfacher Beweis bei Schilling: „Über neue kinematische Modelle etc.“ diese Zeitschrift, Bd. 44.

Kurven der Doppelkreisbewegung sind somit cyklische Kurven\* und zwar Hypotrochoiden. Die Kurven der allgemeinen doppel-elliptischen Bewegung dagegen sind keine cyklischen Kurven.

### 3. Die Gestalt der Bahnkurven der doppel-elliptischen Bewegung.

Indem wir die Bewegung eines Ions geometrisch als doppel-elliptische Bewegung gedeutet haben, haben wir unsere Aufgabe noch nicht vollständig gelöst. Die doppel-elliptische Bewegung ist vielmehr

Fig. 1.

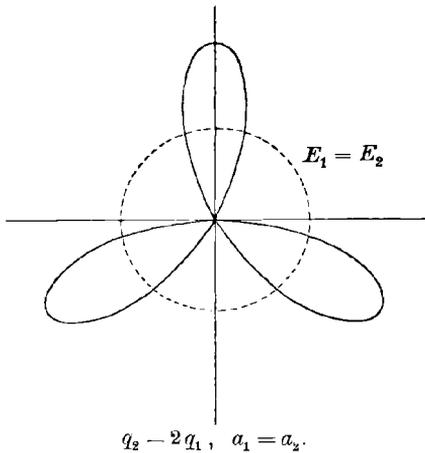
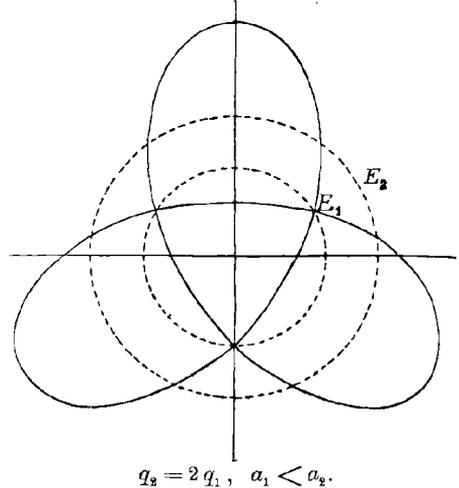


Fig. 2.



so formenreich, dass eine systematische Ableitung des Formenschatzes notwendig erscheint. Wir gehen zu diesem Zwecke aus von dem Falle der Doppelkreisbewegung. Der geometrisch-anschaulichen Betrachtung schicken wir zur Verifikation zwei analytische Resultate über das Auftreten von Spitzen und Wendepunkten bei der Doppelkreisbewegung voraus.

1. In welchen Fällen haben die Kurven der Doppelkreisbewegung Spitzen? Die Bedingungsgleichungen dafür lauten:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1 q_1 \cos(q_1 t + \vartheta_1) + a_2 q_2 \cos(q_2 t + \vartheta_2) = 0, \\ \pm \frac{dy}{dt} &= a_1 q_1 \sin(q_1 t + \vartheta_1) - a_2 q_2 \sin(q_2 t + \vartheta_2) = 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{a_1^2 q_1^2}{a_2^2 q_2^2} &= \frac{\sin^2(q_2 t + \vartheta_2)}{\sin^2(q_1 t + \vartheta_1)} = \frac{\cos^2(q_2 t + \vartheta_2)}{\cos^2(q_1 t + \vartheta_1)} = \frac{1 - \sin^2(q_2 t + \vartheta_2)}{1 - \sin^2(q_1 t + \vartheta_1)}, \\ \sin^2(q_2 t + \vartheta_2) &= \sin^2(q_1 t + \vartheta_1); \end{aligned}$$

daher haben wir als Bedingung für das Auftreten von Spitzen:

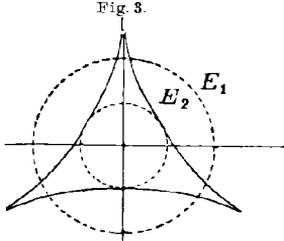
\* Ausführlich dargestellt von Burmester, Lehrbuch der Kinematik, Bd. I, S. 134 fig., wo jedoch die Erzeugung der Kurven durch Doppelkreisbewegung nicht berücksichtigt ist. Die Figuren 167, 168, 170, 177, 180 des Atlas stellen Kurven der Doppelkreisbewegung dar.

13)  $a_1 q_1 - a_2 q_2 = 0.$

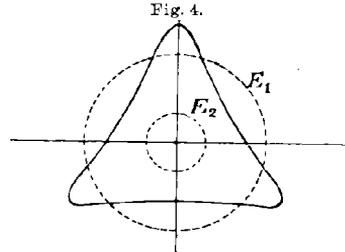
Man erkennt, dass die Bedingung auch hinreichend ist, und findet als zu den Spitzen gehörige Parameterwerte  $t$ :

$$t = \frac{(2k+1)\pi - \vartheta_1 - \vartheta_2}{q_1 + q_2}, \quad (k = 0, 1 \dots).$$

2. In welchen Fällen treten in den Kurven der Doppelkreisbewegung Wendepunkte auf?



$q_2 = 2q_1, \quad a_1 q_1 - a_2 q_2 = 0.$



$q_2 = 2q_1, \quad a_1 q_1 - a_2 q_2 > 0,$   
 $a_1 q_1^2 - a_2 q_2^2 < 0.$

Setzen wir in die Bedingung

$$y' x'' - x' y'' = 0$$

die Werte 9) der  $x$  und  $y$  ein, so ergibt sich, dass an den Wendepunkten die Gleichung erfüllt sein muss:

$$a_2^2 q_2^3 - a_1^2 q_1^3 + a_1 a_2 q_1 q_2 (q_2 - q_1) \cos[(q_1 + q_2)t + \vartheta_1 + \vartheta_2] = 0.$$

Wenn also Wendepunkte vorkommen sollen, muss

14)  $-1 < \frac{a_2^2 q_2^3 - a_1^2 q_1^3}{a_1 a_2 q_1 q_2 (q_2 - q_1)} < +1$

sein, und andererseits ist diese Bedingung auch hinreichend. Wir betrachten  $q_1, q_2$  und  $a_1$  als feste Grössen und suchen  $a_2$  so zu bestimmen, dass 14) erfüllt ist. Haben wir zunächst

13)  $a_1 q_1 - a_2 q_2 = 0,$

so hat der Bruch den Wert  $+1$ , er nimmt ab mit abnehmendem  $a_2$  und erreicht den Wert  $-1$ , wenn

14')  $a_1 q_1^2 - a_2 q_2^2 = 0.$

Für kleinere Werte von  $a_2$  können keine Wendepunkte mehr bestehen.

Die Parameter  $t$  der Wendepunkte finden sich, wenn

$$\frac{a_2^2 q_2^3 - a_1^2 q_1^3}{a_1 a_2 q_1 q_2 (q_2 - q_1)} = \cos \alpha$$

gesetzt wird, zu

$$t = \frac{(2k+1)\pi - \alpha - \vartheta_1 - \vartheta_2}{q_1 + q_2} \quad \text{und} \quad t = \frac{(2k+1)\pi + \alpha - \vartheta_1 - \vartheta_2}{q_1 + q_2}.$$

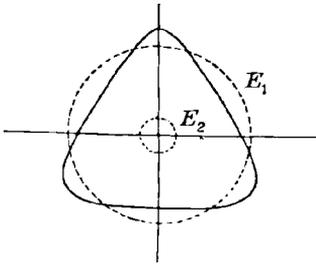
Für  $a_1 q_1 - a_2 q_2 = 0$  fallen daher die Wendepunkte mit den Spitzen zusammen. Dann treten an Stelle jeder Spitze zwei Wendepunkte auf, welche sich mit abnehmendem  $a_2$  von einander entfernen und für

$$a_2 = a_1 \frac{q_1^2}{q_2^2}, \quad (\alpha = \pi)$$

mit den von den benachbarten Spitzen herrührenden Wendepunkten verschmelzen. —

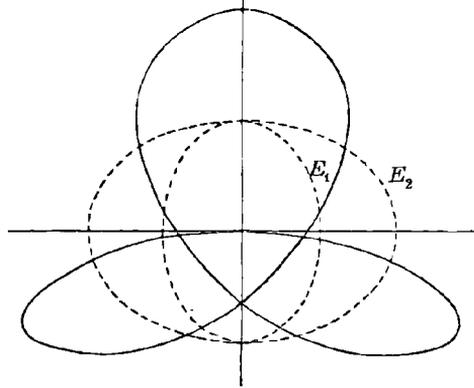
Wir gehen hiernach zur anschaulich-geometrischen Untersuchung der Doppelkreisbewegung über. Die Bahnkurven der Doppelkreisbewegung oscillieren zwischen zwei Kreisen vom Radius  $a_1 + a_2$  und  $|a_1 - a_2|$ . Diese Grenzkreise werden berührt, wenn  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$

Fig. 5.



$$q_2 = 2q_1, \quad a_1 q_1^2 - a_2 q_2^2 > 0.$$

Fig. 6.

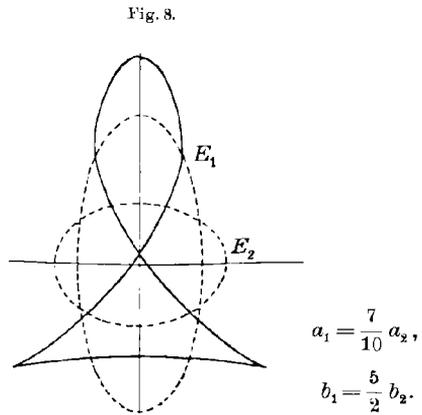
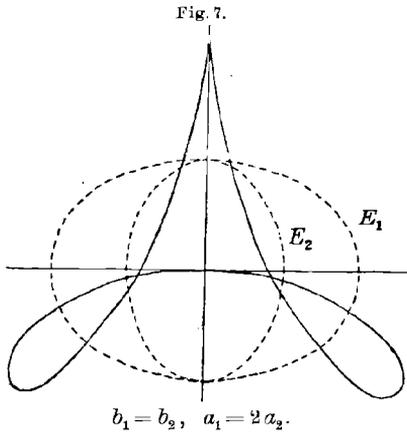


$$b_1 = b_2, \quad a_1 = \frac{a_2}{2}.$$

dasselbe bez. um  $\pi$  verschiedene Azimuth haben. Wir wollen insbesondere den Fall geschlossener Bahnkurven betrachten, also den Fall, dass  $q_1$  und  $q_2$  in einem rationalen Verhältniss  $\frac{m}{n}$  stehen ( $m$  und  $n$  relativ prime ganze Zahlen) und wollen fragen: In wieviel Punkten berührt die geschlossene Kurve den äusseren und den inneren Kreis? Die Kurve schliesst sich nach  $m$  Umläufen des Punktes  $(x_1, y_1)$  und  $n$  Umläufen des Punktes  $(x_2, y_2)$ . Denken wir uns  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$  auf dem gleichen Kreise laufend, so lautet unsere Frage: Wieviel Begegnungen und diametrale Stellungen finden im Verlaufe der  $m$  bez.  $n$  Umläufe statt? Ist  $(x_1, y_1)$  fest und durchläuft nur  $(x_2, y_2)$  seinen Kreis  $n$  mal, so erhalten wir  $n$  Begegnungen und  $n$  diametrale Stellungen; nun durchläuft aber  $(x_1, y_1)$   $m$  mal seinen Kreis und zwar in entgegengesetzter Richtung. Daher durchläuft  $(x_2, y_2)$  relativ zu  $(x_1, y_1)$  den Kreis  $m + n$  mal. Wir haben also  $m + n$  Begegnungen und diametrale Stellungen. Also:

Ist  $\frac{q_1}{q_2} = \frac{m}{n}$ , so werden die Grenzkreise  $|a_1 + a_2|$  und  $|a_1 - a_2|$   $m + n$  mal von der geschlossenen Bahnkurve berührt.

Gehen wir jetzt von dem einfachsten Falle aus, dass  $a_1 = a_2$  ist. Der innere Kreis reduziert sich auf den Nullpunkt. Ein zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen durch den Nullpunkt gelegener Kurventeil muss ein einfaches Oval sein, denn Wendepunkte und Spitzen können nach dem Früheren nicht auftreten, und eine leichte geometrische Betrachtung ergibt die Unmöglichkeit von Doppelpunkten. Alle diese Ovale müssen ferner nach Symmetrie einander kongruent sein. Die ganze Bahnkurve ist also eine Rosette um den Nullpunkt, welche, wenn  $\frac{q_1}{q_2} = \frac{m}{n}$  ist, aus  $m + n$  kongruenten Ovalen besteht (siehe Fig. 1). Stehen  $q_1$  und  $q_2$  in irrationalem Verhältnis, so approximieren wir  $\frac{q_1}{q_2}$  durch eine Reihe von Brüchen  $\frac{m_i}{n_i}$ . Die Bahn-



kurven für diese rationalen Verhältnisse nähern die Kurve für das irrationale Verhältnis in Bezug auf die  $m_i + n_i$  ersten Ovale immer genauer an, je grösser  $i$  ist.

Die übrigen Formen der Doppelkreisbewegung leiten sich aus dieser einfachsten folgendermassen ab. Ist zuerst  $a_2 > a_1$ , so erweitert sich der Nullpunkt zu einem Kreis, um welchen die einzelnen Ovale der Bahnkurve herumgreifen, so dass sie ihn mit der konkaven Seite berühren (siehe Fig. 2). Als Grenzfall ergibt sich für  $a_1 = 0$  eine Kreisbewegung mit Winkelgeschwindigkeit  $q_2$ . Ist  $a_2 < a_1$ , so erhalten wir zunächst Schleifenkurven, welche einen inneren Kreis mit der konvexen Seite berühren. Die Schleifen werden mit abnehmendem  $\frac{a_2}{a_1}$  kleiner, indem die Grenzkreise  $|a_1 + a_2|$  und  $|a_1 - a_2|$  sich näher rücken, schliesslich gehen sie in Spitzen über (siehe Fig. 3). Mit weiter abnehmendem  $\frac{a_2}{a_1}$  werden die Spitzen in bekannter Weise in Wendepunkte aufgelöst, so dass an Stelle jeder Spitze zwei „zusammengehörige“ Wendepunkte treten (siehe Fig. 4). Der weitere Fortgang ist dann der, dass die zusammengehörigen Wendepunkte sich

von einander entfernen, bis sie mit den von den benachbarten Spitzen herrührenden Wendepunkten zusammenfallen. In den Kurven wird demgemäss der gegen den inneren Grenzkreis konvexe Teil immer kleiner und verschwindet zuletzt vollständig. Die Bahnkurve wird eine überall konvexe Kurve ohne Singularitäten, welche zwischen den Grenzkreisen  $(a_1 + a_2)$  und  $(a_1 - a_2)$  oszilliert (siehe Fig. 5). Als Grenzfall ergibt sich für  $a_2 = 0$  eine einfache Kreisbewegung mit Winkelgeschwindigkeit  $q_1$ .\*

Zur Behandlung der allgemeinen doppelelliptischen Bewegung gehen wir abermals von unserer Rosettenkurve (siehe Fig. 1) aus. Deformieren wir die beiden gleichen Kreise  $|a_1|$  und  $|a_2|$  zu zwei kontinuierlichen Serien von Ellipsen  $E_1$  und  $E_2$ , so können wir hinsichtlich der entsprechenden Veränderungen unserer Kurven den Satz aufstellen: Die einzelnen Ovale der Rosette erleiden qualitativ die gleichen Veränderungen wie bei der Doppelkreisbewegung: sie vergrössern sich entweder analog Fig. 2 oder sie ziehen sich zusammen und gehen schliesslich in Spitzen über, welche ihrerseits sich wieder in Wendepunkte auflösen. Der wesentliche Unterschied zwischen der allgemeinen und der speziellen Bewegung aber besteht in Folgendem: während bei der Doppelkreisbewegung alle Ovale gleichzeitig und in gleicher Weise sich mit den Kreisen  $E_1$  und  $E_2$  veränderten, besteht diese Gleichberechtigung aller Ovale bei der allgemeinen doppelelliptischen Bewegung nicht mehr. Die einzelnen Ovale verändern sich mit variierendem  $E_1$  und  $E_2$  in verschiedener Weise; es können insbesondere die Fälle eintreten, dass einzelne Ovale sich nach Fig. 2 verändern, während andere sich in Spitzen- und Wendepunktkurven transformieren, und dass einzelne Ovale diesen Prozess bereits durchgemacht haben, während andere noch im Übergangszustand der Schleifenkurven sind.

Wir fragen insbesondere nach den Bedingungen für das Auftreten von Spitzen. Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{a_1}{a_2} = \alpha, \quad \frac{b_1}{b_2} = \beta, \quad \frac{q_2}{q_1} = q,$$

so erhalten wir die Bedingungsgleichungen

$$15) \quad \begin{cases} \alpha \cos(q_1 t + \vartheta_1) + q \cos(q_2 t + \vartheta_2) = 0, \\ \beta \sin(q_1 t + \vartheta_1) - q \sin(q_2 t + \vartheta_2) = 0. \end{cases}$$

Bei festgehaltenen  $q$ ,  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  sind hierdurch  $\alpha$  und  $\beta$  als Funktionen eines Parameters  $t$  dargestellt. Deuten wir also  $\alpha$  und  $\beta$  als rechtwinklige Koordinaten in der Ebene, so bilden die Wertepaare

---

\* Die Kurvenserie 1-5 zeigt auffallende Ähnlichkeit mit den Bahnkurven, welche die Spitze eines symmetrischen schweren Kreisels beschreibt (siehe Klein-Sommerfeld, Theorie des Kreisels, 2. Heft, 1898). Der Grund liegt darin, dass sich bei Darstellung in Polarkoordinaten  $r$ ,  $\varphi$  beide Male  $r$  als periodische Funktion von  $\varphi$  mit einer reellen Periode ergibt.

$(\alpha, \beta)$ , welche Spitzen liefern, eine Kurve  $S$ , welche insbesondere bei rationalem  $q$  algebraisch ist. Jede kontinuierliche Folge von Ellipsen  $E_1$  und  $E_2$  wird in dieser Ebene gleichfalls durch eine Kurve,  $E$ , repräsentiert. Sehen wir von dem Falle ab, dass  $E$  und  $S$  ein endliches Stück gemein haben, so können wir sagen: Jeder Schnitt der Kurven  $E$  und  $S$  bedeutet das Verschwinden einer Schleife unserer Ausgangskurve oder die Aufnahme einer neuen Schleife. — Genauere allgemeine Resultate lassen sich über die Kurve  $S$  nicht aufstellen: es lässt sich nur ein Gebiet der  $(\alpha\beta)$ -Ebene angeben, innerhalb dessen die Kurve vollständig verlaufen muss. Aus den Gleichungen 15) folgt nämlich durch Quadrieren und Substituieren

$$\alpha^2 - q^2 = (\alpha^2 - \beta^2) \sin^2(q_1 t + \vartheta_1),$$

daher

$$0 < \frac{\alpha^2 - q^2}{\alpha^2 - \beta^2} \leq 1.$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn entweder

$$16) \quad \alpha \geq q \geq \beta \quad \text{oder} \quad \alpha \leq q \leq \beta$$

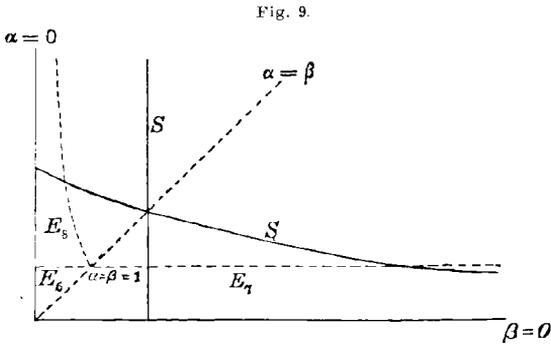
ist. Diese beiden Ungleichungen definieren zwei unendliche, längs eines Teiles der Geraden  $\alpha = \beta$  zusammenhängende Gebiete der  $(\alpha\beta)$ -Ebene, innerhalb deren die Kurve  $S$  vollständig liegen muss. Analytisch gesprochen, sind die Ungleichungen 16) notwendige, aber nicht hinreichende Bedingungen für das Auftreten von Spitzen.

Wir betrachten nun ein Kurvenstück  $E$  mit monotoner Tangente, welches von einem Punkte der die Doppelkreisbewegung repräsentierenden Geraden  $\alpha = \beta$  ausgeht und eine der beiden Axen, beispielsweise die  $\alpha$ -Axe, zur Asymptoten hat. Dem unendlich fernen Punkt des Kurvenstücks entspricht augenscheinlich die Lissajoussche Figur

$$x = a_1 \sin(q_1 t + \vartheta_1), \quad y = b_2 \cos(q_2 t + \vartheta_2),$$

denn wir haben an dem unendlich fernen Punkt  $\alpha = \infty, \beta = 0$ . Dem Ausgangspunkt entspreche die Doppelkreisbewegung mit den Konstanten  $a_1, b_2$ . Die Kurve repräsentiert dann Bewegungen mit den Konstanten  $a_1, a_2', b_1', b_2$ , wo  $a_1 > b_1', a_2' < b_2$  ist, d. h. Bewegungen, bei welchen von den beiden Ellipsen die eine verlängert, die andere abgeplattet ist. Diese Bewegungen sind von besonderer Wichtigkeit, weil nach 12) die Bewegungen der Ionen sämtlich diesen Typus aufweisen. Jede Ionenbewegung lässt sich daher als Übergangsfigur zwischen einer Doppelkreisbewegung und einer Lissajousschen Figur mit den gleichen Werten der  $q_1, q_2, \vartheta_1, \vartheta_2$  auffassen. Ist uns umgekehrt eine Kurve des Übergangstypus mit den Konstanten  $a_1, a_2, b_1, b_2$  ( $a_1 > b_1, a_2 < b_2$ ) vorgelegt, so haben wir eine einfache Methode, um uns über ihren geometrischen Charakter zu orientieren: wir verbinden den Punkt  $(\alpha, \beta)$  durch ein Kurvenstück  $E$  mit monotoner Tangente, welches die  $\alpha$ -Axe

zur Asymptoten hat, mit dem Punkte  $\alpha = \beta = \frac{a_1}{b_2}$  und betrachten die Schnittpunkte von  $E$  mit  $S$ . Beachten wir,



dass an jedem dieser Schnittpunkte Verlust oder Aufnahme einer Schleife eintritt, und behalten wir die Gestalt der resultierenden Lissajousschen Figur im Auge, so sind wir im Stande, die Kurve der doppelelliptischen Bewegung mit ziemlicher Genauigkeit qualitativ festzulegen.

Die Figuren 6, 7, 8 dienen zur Illustration des Gesagten. Es sind doppelelliptische Bewegungen, welche charakterisiert sind durch  $q=2$ ,  $\vartheta_1 = \vartheta_2$ , daher Übergangskurven zwischen Fig. 1 und Lissajousschen Figuren. Letztere sind der Reihe nach: eine Doppelschwingung längs der  $x$ -Axe, eine einfache Schwingung längs der  $x$ -Axe und eine Lemniskate, deren Brennpunkte auf der  $y$ -Axe liegen. Die obenstehende Zeichnung der  $(\alpha\beta)$ -Ebene, in welcher die Kurven  $E$  die Nummer der entsprechenden Figur als Indices tragen, zeigen den Verlauf des Übergangs an: in Fig. 6 bleiben die Schleifen stets erhalten und werden mit abnehmendem  $\alpha$  breiter und flacher, in Fig. 7 lösen sich die beiden noch restierenden Schleifen gleichzeitig in Wendepunkte auf, in Fig. 8 bleibt die Schleife der oberen Halbebene erhalten und geht in das obere Oval der Lemniskate über, während die Spitzenkurve der unteren Halbebene zur Wendepunktskurve und schliesslich zum unteren Oval der Lemniskate wird. Die Kurve  $S$  besteht aus einer Hyperbel,  $\beta(\alpha + \beta) = 8$ , und der Geraden  $\alpha = 2$ .

#### 4. Die räumliche Anordnung der Figuren. Fall beliebig gerichteter Kraftlinien.

Wir haben im Vorhergehenden nur die in der  $(xy)$ -Ebene entstehenden Figuren betrachtet. Die räumliche Anordnung der Bewegung erhalten wir wegen  $z = w_0 t + z_0$  einfach dadurch, dass wir die ebenen Figuren auf einem senkrechten Cylinder sich in die Höhe schrauben lassen.

Wir gehen nunmehr zu einem homogenen Magnetfeld mit beliebig gerichteten Kraftlinien über, haben also die Gleichungen I'' zu integrieren. Durch Differentiation der beiden ersten Gleichungen nach  $t$  und Substitution aus der letzten eliminieren wir die  $z$ -Koordinate und erhalten:

$$\text{II'.} \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = \gamma \frac{dv}{dt} - (\beta^2 + h)u + \alpha\beta v, \\ \frac{d^2 v}{dt^2} = -\gamma \frac{du}{dt} - (\alpha^2 + k)v + \alpha\beta u, \end{cases}$$

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}.$$

Diese Gleichungen unterscheiden sich von den Gleichungen I'''a), b) nur durch die Zusatzglieder  $\alpha\beta v$ ,  $\alpha\beta u$ . Durch eine Drehung des Koordinaten-Systems können wir ihnen vollständig die alte Form verleihen:

$$\text{III'.} \quad \frac{d^2 u_1}{dt^2} = \gamma \frac{dv_1}{dt} - h_1 u_1, \quad \frac{d^2 v_1}{dt^2} = -\gamma \frac{du_1}{dt} - k_1 v_1,$$

wo  $h_1$  und  $k_1$  positive Grössen sind. Der Drehungswinkel  $\varphi$  ist dabei gegeben durch

$$\text{tg } 2\varphi = \frac{2\alpha\beta}{(\beta^2 + h) - (\alpha^2 + k)}.$$

Wir können also den Satz aussprechen: „Die Figuren in der  $(xy)$ -Ebene sind auch bei beliebiger Richtung der Kraftlinien doppelelliptische Bewegungen, welche der Bedingung 12) unterworfen sind.“ Hervorzuheben ist, dass auch bei gleichen  $h$  und  $k$  die  $h_1$  und  $k_1$  verschieden sind, also auch in diesem Falle allgemeine doppelelliptische Bewegungen, nicht mehr Doppelkreisbewegungen auftreten. Hierdurch erweist sich unsere Einführung der doppelelliptischen Bewegung physikalisch als berechtigt.

Ein wesentlicher Unterschied gegen früher dagegen besteht hinsichtlich der  $z$ -Koordinate. Wir finden  $z$  nach Bestimmung von  $u$  und  $v$  durch zweimalige Quadratur: es hat sonach dieselben Periodizitätseigenschaften wie  $x$  und  $y$ , nur tritt infolge der Integration ein Translationsglied  $\alpha t$  hinzu.

### 5. Die numerischen Verhältnisse bei der Zeemannschen Versuchsanordnung.

Von besonderem Interesse werden diejenigen Bahnkurven sein, welche bei der Zeemannschen Versuchsanordnung thatsächlich von den Ionen durchlaufen werden.

Zeemann (l. c.) beschreibt diese als „Ellipsen, die sich langsam drehen.“ Wir haben die Berechtigung diese Ausdrucksweise zu untersuchen. Unserer Diskussion legen wir die ursprüngliche Zeemannsche Anordnung zu Grunde: wir beobachten glühende *Na*-Dämpfe, welche einem homogenen, der Strahlen-Richtung parallelen Magnetfeld von 22400 absoluten Einheiten ausgesetzt werden. Die

Bewegungsgleichungen sind die Gleichungen I''' mit  $h = k$ , es handelt sich um die numerischen Werte der Grössen  $h$  und  $\gamma$ .

Wir haben zuerst

$$h = \frac{4\pi^2}{\tau^2},$$

wo  $\tau$  die Schwingungsdauer der  $D$ -Linie, bez. einer der beiden  $D$ -Linien, bezeichnet. Indem wir uns hier wie im Folgenden auf einstellige Genauigkeit beschränken, nehmen wir für die Wellenlängen beider  $D$ -Linien den übereinstimmenden Wert

$$\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$$

an und berechnen daraus

$$\tau = \frac{\lambda}{\omega} = 2 \cdot 10^{-15}, \quad h = \pi^2 \cdot 10^{50} = 10^{31}.$$

Berechnen wir ferner

$$\gamma = \frac{C}{\omega} \frac{\varepsilon}{\mu}.$$

Für  $\frac{\varepsilon}{\mu}$  ergibt sich nach Rechnungen von Herrn Geheimrat Riecke aus der Verschiebung der  $D$ -Linien der Wert  $5 \cdot 10^{17}$ . Dies liefert

$$\gamma = 3 \cdot 10^{41}$$

und

$$q = \frac{q_2}{q_1} = \sqrt{\frac{\sqrt{\gamma^4 + 4\gamma^2 h} + (\gamma^2 + 2h)}{-\sqrt{\gamma^4 + 4\gamma^2 h} + (\gamma^2 + 2h)}} = \sqrt{\frac{1 + 10^{-4}}{1 - 10^{-4}}} = 1 + 10^{-4}.$$

Die bei der praktischen Ausführung des Zeemannschen Versuches auftretenden Kurven sind ausgezeichnet durch nahezu gleiche Werte der Parameter  $q_1$  und  $q_2$ . Die Werte der beiden Parameter selbst finden wir aus

$$h = q_1 \cdot q_2 = q \cdot q_1^2 = \frac{q_2^2}{q}:$$

$$q_1 = \sqrt{h} (1 - \vartheta \cdot 10^{-4}), \quad q_2 = \sqrt{h} (1 + \vartheta \cdot 10^{-4}),$$

$$\frac{1}{4} < \vartheta < \frac{3}{4}.*$$

Um die Werte der  $a_1$  und  $a_2$  zu erhalten, haben wir uns zunächst über die Anfangsbedingungen des Problems klar zu werden. Das Ion schwingt vor Einführung des Magnetfeldes in einer Ellipse, von der wir, ohne die Allgemeinheit der Resultate zu beeinträchtigen, voraussetzen können, dass sie die Koordinatenachsen zu Hauptachsen hat. Wir haben also vor Einführung des Magnetfeldes je nach dem Drehungssinn

$$x = \alpha \sin \sqrt{h} t, \quad y = \mp \beta \cos \sqrt{h} t.$$

Ferner ist augenscheinlich gleichgiltig, an welchem Punkte der Ellipse bei beginnender Wirkung des Magnetfeldes sich das Ion be-

\* Zur genaueren Bestimmung von  $\vartheta$  reicht unsere Genauigkeit nicht aus.

findet. Wir nehmen zur Bequemlichkeit diese Anfangslage auf der  $x$ -Axe an und erhalten daher die Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha, & y_0 &= 0, \\ u_0 &= 0, & v_0 &= \mp \sqrt{h} \beta. \end{aligned}$$

Dem oberen Vorzeichen entspricht eine Anfangsbewegung von dem Drehsinn der durch das Magnetfeld bei positivem  $\gamma$  hervorgerufenen Kreisbewegung, dem unteren Vorzeichen eine Anfangsbewegung von entgegengesetztem Drehsinn. Wir haben die beiden Fälle getrennt zu behandeln, wobei wir  $\gamma$  als positiv voraussetzen wollen.

Fig. 10.

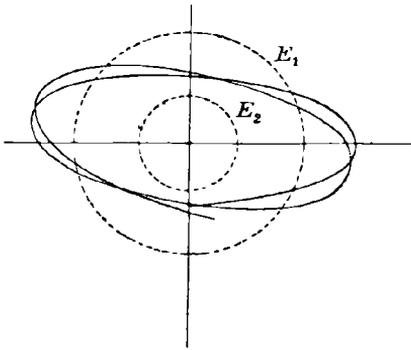
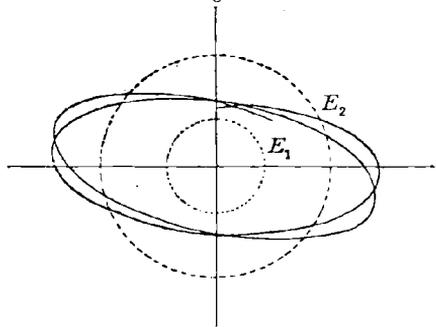


Fig. 11.



Im Falle des oberen Vorzeichens erhalten wir

$$\begin{aligned} 2a_1 &= |\beta - (1 + \vartheta \cdot 10^{-4})\alpha|, \\ 2a_2 &= \beta + (1 - \vartheta \cdot 10^{-4})\alpha \end{aligned}$$

und haben demnach  $a_1 = a_2$  einmal für  $\alpha = 0$ , d. h. im Falle linear längs der  $y$ -Axe polarisierten Lichtes, und dann nochmals für

$$\beta = \vartheta \cdot 10^{-4} \alpha,$$

d. h. im Falle einer ausserordentlich stark abgeplatteten Ellipse. Zwischen beiden Werten ist  $a_1 < a_2$ , die Kurven der Doppelkreisbewegung sind also vom Typus der Fig. 2. Wir ersehen aus Fig. 10,\* dass sie für mittlere Werte des Verhältnisses  $\frac{\alpha}{\beta}$  die Zeemannsche Bezeichnung „Ellipsen die sich langsam drehen“ zulassen.

Dagegen sehen wir auch sofort, dass diese Bezeichnung nicht immer giltig ist. In der That erhalten wir ja für  $\beta = \vartheta \cdot 10^{-4} \alpha$  Rosettenkurven, für noch kleineres  $\beta$  Spitzen- und Wendepunktskurven.

Ähnlich liegen die Verhältnisse im Falle des unteren Vorzeichens.

Hier ist

$$\begin{aligned} 2a_1 &= \beta + (1 + \vartheta \cdot 10^{-4})\alpha, \\ 2a_2 &= \beta - (1 - \vartheta \cdot 10^{-4})\alpha \end{aligned}$$

\* In den Figuren 10 und 11 ist  $q = 1,05$ .

Für  $\alpha = 0$  erhalten wir die Rosetten, welche dann in Schleifen-, Spitzen-, Wendepunkts- und überall konvexe Kurven übergehen, bis für

$$\beta = \alpha(1 - \delta \cdot 10^{-4})$$

einfache Kreisbewegung eintritt. Von da bis  $\beta = 0$  erhalten wir wieder überall konvexe Kurven und Wendepunktskurven. Die Fig. 11 stellt eine solche überall konvexe Kurve für mittlere Werte von  $\frac{\alpha}{\beta}$  dar; auch sie rechtfertigt die Zeemannsche Bezeichnung.

Wir können daher im ganzen die Zeemannsche Bezeichnung dahin kritisieren, dass wir sagen: Sie ist richtig für alle Ellipsen mit mittleren Exzentrizitäten, sie ist falsch für Ellipsen, deren Axenverhältnisse  $\frac{\alpha}{\beta}$  mit  $10^{-4}$  oder mit  $10^4$  vergleichbar sind.

Da im natürlichen Lichte alle Polarisationszustände realisiert sind, so werden bei Ausführung des Zeemannschen Versuches thatsächlich alle unsere Kurventypen als Bewegungskurven der Ionen auftreten.

# Über eine Verallgemeinerung der Rösselsprungaufgabe.

Von

Dr. F. FITTING

in M. - Gladbach.

## Einleitung.

Auf einem  $n$ -feldigen Schachbrette giebt es:

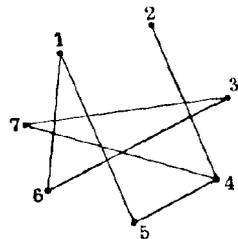
$n!$

verschiedene Wege von Feld zu Feld, auf welchen in ganz willkürlicher Reihenfolge jedes Feld, aber jedes nur einmal berührt wird. Man kann nun das Fortschreiten von bestimmten Feldern zu gewissen anderen als unerlaubt ausschliessen und fragen, wie viele solcher Wege dann noch übrig bleiben. Da eine erschöpfende Beantwortung dieser Frage auch eine Entscheidung über die Anzahl der Rösselsprünge, der Königszüge auf beliebig gestalteten Schachbrettern und überhaupt die Lösung aller ähnlichen Aufgaben vorbereitet, so schien sie, abgesehen von dem ihr an sich inwohnenden Interesse, schon aus diesem Grunde eine Bearbeitung wohl zu verdienen.

Da es bei unserer Aufgabe auf die gegenseitige Lage der  $n$  Felder ganz und gar nicht ankommt, so empfiehlt es sich, ihnen behufs handlicherer Darstellung  $n$  willkürlich liegende Punkte beliebig zuzuordnen. Die weitere dieser Arbeit zu Grunde gelegte Veranschaulichung der Data des Problems wird aus Fig. 1 ersichtlich:

Die Punkte 1 und 2, 2 und 6 etc. sind nicht durch gerade Linien verbunden. Damit werde dargestellt, dass ein Sprung von Punkt 1 nach Punkt 2, von Punkt 2 nach Punkt 6, oder umgekehrt, erlaubt ist. Derartige Bewegungsfreiheiten, durch die Zeichen  $\underline{12}$ ,  $\underline{21}$ ,  $\underline{26}$ ,  $\underline{62}$  angedeutet, sollen Wegelemente heissen, weil sie Teile der zu zählenden Wege sein können, und die Elemente  $\underline{12}$  und  $\underline{21}$  ausserdem noch durch das

Fig. 1.



Zeichen  $\widehat{12}$  und die Benennung Elementenpaar zusammengefasst werden. Dagegen sind z.B. die Punkte 1 und 6, 2 und 4 je durch eine Gerade verbunden: ein direkter Sprung zwischen diesen Punkten soll dadurch als unerlaubt ausgeschlossen werden.

Man kann danach die Vorstellung des Schachbrettes ganz fallen lassen und der Aufgabe folgende Fassung geben:

„Zeichnet man  $n$  Punkte und scheidet von den  $\frac{n(n-1)}{2}$  zwischen ihnen vorhandenen Wegelementen eine gewisse Anzahl dadurch aus, dass man eine Reihe von Punkten zu je zweien geradlinig verbindet, auf wie vielfache Weise lässt sich unter alleiniger Benutzung der restierenden Wegelemente von Punkt zu Punkt fortschreiten, so dass jeder Punkt, aber jeder nur einmal berührt wird?“

Unter einem Wege wird jede Aneinanderreihung der  $n$  Punkte verstanden, welche der Aufgabe entspricht.

Die in jedem besonderen Falle vorliegende Anordnung von Punkten und Geraden mag im Hinblick auf die dadurch gegebenen Wege ein Wegkomplex genannt werden.

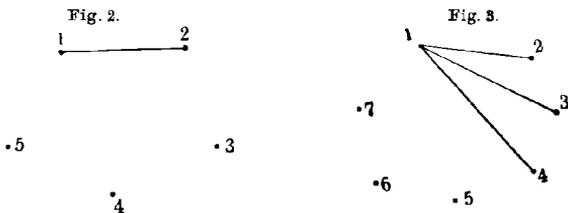
Die Summe sämtlicher Wege eines gegebenen Komplexes heisse die Wegezahl des Komplexes.

### Kapitel I.

#### Einfachere Fälle.

1. Es werde ein einziges Paar von Wegelementen ausgeschieden (in Fig. 2:  $\widehat{12}$ ).

Von den anfangs gezählten  $n!$  Wegen kommen alle in Wegfall, die die Elemente  $\widehat{12}$  und  $\widehat{21}$  enthalten. Diese Wege werden, wenn man die Gerade  $\widehat{12}$  als Punkt betrachtet, gezählt durch die doppelte



Anzahl der zwischen dem neuen Punkte  $\widehat{12}$  und den  $(n-2)$  übrigen bestehenden Wege; d. h. unter den  $n!$  Wegen giebt es

$$2(n-1)!$$

die das Elementenpaar  $\widehat{12}$  enthalten. Fallen diese fort, so bleiben

I)  $n! - 2(n-1)!$   
 Wege übrig.

2. Es mögen mehrere von demselben Punkte ausgehende Elementenpaare wegfallen (in Fig. 3:  $\widehat{12}$ ,  $\widehat{13}$ ,  $\widehat{14}$ ).

Sei die Anzahl der wegfallenden Elementenpaare allgemein  $a$ , so sind für jedes einzelne unter ihnen nach 1) von den ursprünglichen  $n!$  Wegen:  $2(n-1)!$  Wege in Abzug zu bringen, im ganzen also:

$$2a(n-1)!$$

Wollte man jedoch

$$n! - 2a(n-1)!$$

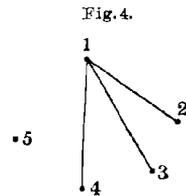
bilden, so wäre zu viel weggenommen: nämlich alle Wege, die z. B. die Wegstücke  $\overset{\rightarrow}{2}14$  und  $\overset{\rightarrow}{4}12$  in sich schliessen würden doppelt, einmal unter denen, die das Element  $\widehat{21}$  enthielten und dann noch einmal unter denen, die das Element  $\widehat{41}$  enthielten, abgezogen sein, müssen also einmal wieder addiert werden. Die Anzahl dieser wieder zu addierenden Wege wird analog dem bei 1) angewendeten Verfahren ermittelt, indem man die Wegteile  $213, 312, 214, 412$  etc. als Punkte nimmt. Da mit den  $a$  wegfallenden Elementenpaaren sich  $2\binom{a}{2}$  solcher Wegteile bilden lassen, und zwischen jedem einzelnen dieser als Punkte betrachteten Wegteile und den  $(n-3)$  übrigen Punkten  $(n-2)!$  Wege möglich sind, hat man wieder zu addieren:

$$2\binom{a}{2}(n-2)!$$

Wege. Danach das Resultat:

$$II) \quad n! - 2a(n-1)! + 2\binom{a}{2}(n-2)! = \binom{n-a}{2}(n-2)!$$

Vielleicht trägt die hier eingestreute Betrachtung eines einzelnen Falles dazu bei, über die Zielpunkte dieser Arbeit Licht zu verbreiten: Für  $n=5, a=3$  liefert II) die Zahl von 12 Wegen. Fig. 4 stellt den dazugehörigen Komplex dar, und thatsächlich lassen sich an ihm nur folgende 12 Wege herstellen:



21345	34512
21435	43512
21453	45312
21354	35412
21534	53412
21543	54312

Übrigens lässt dies Beispiel auch erkennen, dass die Wegezahl immer eine gerade Zahl sein muss.

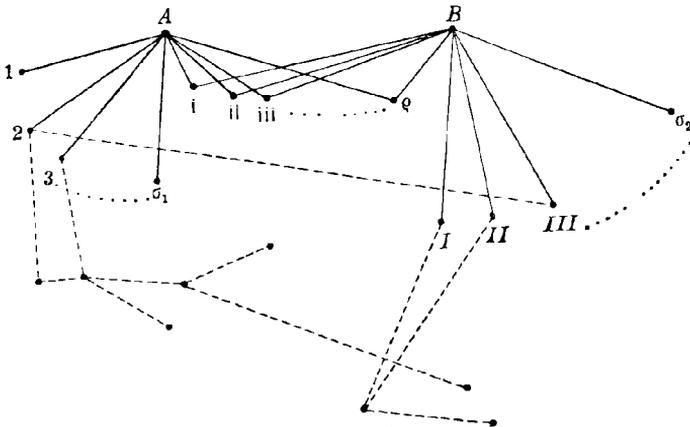




zeitig nach  $\varrho$  anderen Punkten — bereits fehlenden Elementenpaare vollzählig zur Darstellung bringen soll. Weitere Punkte und sonstige Geraden können als für das Folgende belanglos in beliebiger Zahl und Anordnung zur Figur hinzugedacht werden. (Durch einige punktierte Geraden an der Figur angedeutet.)

Unter den  $W_{(n, a)}$  Wegen werden solche vorhanden sein, in denen die Elemente des Paares als Teile vorkommen und solche, wo

Fig. 5.



dies nicht der Fall ist (indem zwischen  $A$  und  $B$  andere Punkte berührt werden). Für die Gesamtheit der ersteren werde ein passendes Zeichen, etwa  $\overset{\Delta}{\varphi}_{(n, a)}$  eingeführt; die anderen fassen alle Wege zusammen, die zwischen den  $n$  Punkten existieren, wenn ausser den früheren  $a$  Elementenpaaren auch das Paar  $\Delta$  noch wegfällt. Bezeichnet man deren Summe durch

$$W_{(n, a+1)},$$

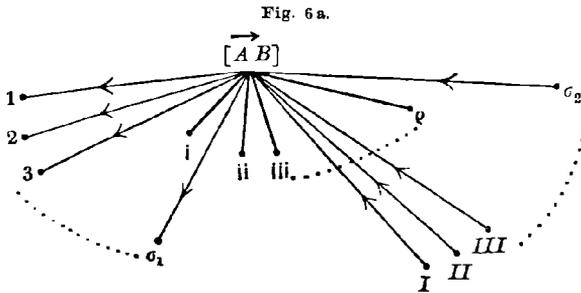
so gewinnt man die Gleichung (siehe Kap. II):

$$I. \quad W_{(n, a)} = \overset{\Delta}{\varphi}_{(n, a)} + W_{(n, a+1)}.$$

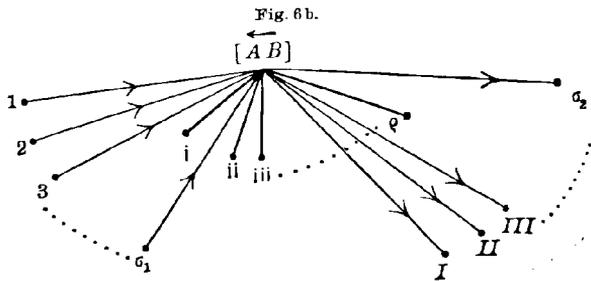
§ 2. Es werde eine andere Darstellung gesucht für  $\overset{\Delta}{\varphi}_{(n, a)}$ . Zu dem Zwecke ziehe man wiederum [siehe S. 138, 1.]  $A$  und  $B$  in einen einzigen Punkt  $[AB]$  zusammen (siehe Fig. 6a und b). Dann verschmelzen auch die von den Punkten  $i, ii, iii \dots \varrho$  nach  $A$  und  $B$  gezogenen Geraden je zu einer einzigen.

Man betrachte zuerst die Wege, die das Element  $\widehat{AB}$  enthalten (Fig. 6a deutet dies durch den Pfeil über  $[AB]$  an); um deren Anzahl an Fig. 6a, die einen Punkt weniger hat als Fig. 5, zu zählen, hat

man zunächst zu überlegen, wie die Verhältnisse der früheren Figur sich auf die neue übertragen lassen. Die Zahl und Anordnung der nicht von  $A$  oder  $B$  ausgehenden Geraden hat sich nach der Vereinigung dieser Punkte natürlich nicht geändert und ist ganz aus der Zeichnung weggelassen. Dagegen sind in Fig. 6a ausser den bereits erwähnten  $\rho$  Geraden auch die Elementenpaare  $\widehat{1B}, \widehat{2B} \dots \widehat{\sigma_2 B}$  und  $\widehat{A1} \dots \widehat{A\sigma_1}$  der Fig. 5 bezüglich mit den Geraden  $A1, \dots A\sigma_1$  und



$B1 \dots B\sigma_2$  derselben Figur verschmolzen. In Fig. 5 darf aber auf die Punkte  $1, 2 \dots \sigma_1$  das Wegelement  $AB$  nicht unmittelbar folgen, wohl aber dürfen auf dieses Wegelement jene Punkte folgen. Ähnliches gilt für  $I \dots \sigma_2$ . Dies musste auch in Fig. 6a angedeutet werden: es geschah durch die eingezeichneten Pfeile, deren Richtung anzeigt, dass von den Elementenpaaren  $\widehat{[AB]1}$ , u. s. w. nur die Elemente  $\widehat{[AB]1}$ , u. s. w. zur Bildung von Wegen benutzt werden dürfen.



Fasst man jetzt unter den  $\widehat{\varphi}_{(n, a)}$  Wegen auch die mit dem Elemente  $\widehat{BA}$  zu bildenden ins Auge, so ergibt die Wiederholung der vorigen Überlegung hier ohne weiteres, dass zu deren Aufstellung sämtliche Pfeilrichtungen der Fig. 6a gerade umzukehren sind (Fig. 6 b).

§ 3. Sämtliche in  $\varphi_{(n, a)}$  einbegriffene Wege können allgemein in drei Gruppen zerfallen:

1. Gruppe: Solche Wege, bei welchen keines der durch Pfeile gekennzeichneten Wegelemente beschriftet wird (etwa dadurch entstehend, dass immer abwechselnd von einem der in Fig. 6 dargestellten Punkte auf einen der hinzuzudenkenden übergegangen wird). Zur Zählung dieser Wege denke man die Pfeilrichtungen der Figuren 6 durch Gerade (d. h. wegfallende Wegelemente) ersetzt und bestimme die Menge aller an der so veränderten Fig. 6 zu bildenden Wege. Die Menge ist dann genau die Hälfte der verlangten, da nach Wegfall der Pfeilrichtungen in dem Punkte  $[AB]$  die Wegelemente  $\widehat{AB}$  und  $\widehat{BA}$  vereinigt gedacht werden können; für jedes dieser Wegelemente ist jene Menge einmal zu zählen.

Nun verwandelt sich aber die Ausgangsfigur 5 unmittelbar in die veränderte Fig. 6, wenn man nach Verschmelzung der Punkte  $A$  und  $B$  und dadurch bedingte Vereinigung der  $\varrho$  Geraden an ihren übrigen Punkten und Geraden nichts ändert. Diese Figur, auf deren Grundlage die Wege der verschiedenen Gruppen gezählt werden sollen, heiße die Verschmelzungsfigur von Fig. 5. Die Wegezählung ihres Komplexes werde durch das Zeichen

$$W_{\binom{n-1}{[\mathcal{A}]}, a-\varrho}$$

fixiert, in dem das unter der 1 stehende  $[\mathcal{A}]$  an das Zusammenziehen des Elementenpaares  $\mathcal{A}$  in einen Punkt,  $a - \varrho$  an das Verschwinden von  $\varrho$  Geraden erinnern soll. Das Zeichen  $W$  soll natürlich nicht besagen, dass

$$W_{\binom{n-1}{[\mathcal{A}]}, a-\varrho}$$

dieselbe Funktion von  $n - 1$  und  $a - \varrho$  ist, welche  $W_{\binom{n}{\mathcal{A}}, a}$  von  $n$  und  $a$  ist, sondern soll wieder im Sinne der Definition auf S. 141 verstanden werden.

Mit Benutzung des neuen Zeichens werden dann die Wege der Gruppe I gezählt durch

$$\text{II.} \quad 2W_{\binom{n-1}{[\mathcal{A}]}, a-\varrho}.$$

2. Gruppe: Solche Wege, bei deren Bildung nur eine der Pfeilrichtungen der Figuren 6a und 6b benutzt wird.

Werden die Wege, bei deren Bildung in Fig. 6a von  $[AB]$  z. B. nach 1 geschritten werden muss, und die aus Fig. 6b ebenso für die Pfeilrichtung von 1 nach  $[AB]$  sich ergebenden zusammengefasst, so sind dies die Wege, in denen die Elemente des Paares  $\overline{1[AB]}$  vor-

kommen müssen, die Elementenpaare  $\overline{2[AB]}$ ,  $\overline{3[AB]}$  u. s. w. aber von der Wegbildung ausgeschlossen sind. Mit Benutzung der eingeführten Zeichen lässt sich auf Grund von Formel I (S. 142) ihre Anzahl folgendermaßen aus der Verschmelzungsfigur von 5 gewinnen:

$$\varphi \begin{matrix} \textcircled{[AB]1} \\ (n-1, a-\varrho - \textcircled{[AB]1}) \end{matrix} = W \begin{matrix} (n-1, a-\varrho - \textcircled{[AB]1}) \\ \textcircled{[A]} \end{matrix} - W \begin{matrix} (n-1, a-\varrho) \\ \textcircled{[A]} \end{matrix}.$$

Das Zeichen  $a - \varrho - \textcircled{[AB]1}$  soll besagen, dass auch die Gerade  $[AB]1$  aus der Verschmelzungsfigur zu tilgen ist.

Durch Summierung über sämtliche an Stelle von Pfeilrichtungen der Figuren 6 zu setzende Elementenpaare findet man als Summe aller Wege der Gruppe II:

$$\text{III. } \sum_{t=1, \dots, \sigma_1, I, \dots, \sigma_2} W \begin{matrix} (n-1, a-\varrho - \textcircled{[AB]t}) \\ \textcircled{[A]} \end{matrix} - (\sigma_1 + \sigma_2) W \begin{matrix} (n-1, a-\varrho) \\ \textcircled{[A]} \end{matrix}.$$

3. Gruppe: Die Wege, zu deren Bildung zwei von den Pfeilrichtungen der Figuren 6 herangezogen werden; weil ja  $[AB]$  nur einmal berührt werden darf, können dies in jeder der beiden Figuren nur je eine nach  $[AB]$  hinweisende und eine von  $[AB]$  wegweisende Pfeilrichtung sein.

Durch eine Betrachtung, welche der eben für Gruppe 2 angestellten analog ist, wird leicht ersichtlich, dass hier alle Wege zu zählen sind, bei denen je ein Elementenpaar  $\textcircled{[AB]i}$  der Gruppe

$$\textcircled{[AB]1}, \dots, \textcircled{[AB]\sigma_1}$$

und je eines  $\textcircled{[AB]x}$  aus der Gruppe

$$\textcircled{[AB]I}, \dots, \textcircled{[AB]\sigma_2}$$

beschriftet werden muss, die übrigen Paare beider Gruppen aber von der Wegbildung ausgeschlossen sind. Formel IIa S.141 liefert dafür den Ausdruck:

$$W \begin{matrix} (n-1, a-\varrho - \textcircled{[AB]i} - \textcircled{[AB]x}) \\ \textcircled{[A]} \end{matrix} - W \begin{matrix} (n-1, a-\varrho - \textcircled{[AB]i}) \\ \textcircled{[A]} \end{matrix} - W \begin{matrix} (n-1, a-\varrho - \textcircled{[AB]x}) \\ \textcircled{[A]} \end{matrix} + W \begin{matrix} (n-1, a-\varrho) \\ \textcircled{[A]} \end{matrix}.$$

Die successive Summierung über sämtliche  $i$  und sämtliche  $x$  ergibt:

$$\text{IV. } \left\{ \begin{matrix} \sum_{1, 2, \dots, \sigma_1}^i \sum_{I, \dots, \sigma_2}^x W \begin{matrix} (n-1, a-\varrho - \textcircled{[AB]t} - \textcircled{[AB]x}) \\ \textcircled{[A]} \end{matrix} \\ - \sigma_2 \cdot \sum_{1, \dots, \sigma_1}^i W \begin{matrix} (n-1, a-\varrho - \textcircled{[AB]t}) \\ \textcircled{[A]} \end{matrix} - \sigma_1 \cdot \sum_{I, \dots, \sigma_2}^x W \begin{matrix} (n-1, a-\varrho - \textcircled{[AB]x}) \\ \textcircled{[A]} \end{matrix} \\ + \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot W \begin{matrix} (n-1, a-\varrho) \\ \textcircled{[A]} \end{matrix} \end{matrix} \right.$$

Es erübrigt noch, die Wegezahlen der drei Gruppen zu addieren. Dies ergibt nach Spaltung der Summe in III und der Vereinigung der zusammengehörigen Glieder:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{(n, a)}^{\mathcal{A}} &= \sum_{1, \dots, \sigma_1}^i \sum_{l, \dots, \sigma_2}^x W_{\lfloor \mathcal{A} \rfloor}^{(n-1, a-\varrho - \widehat{[AB]i} - \widehat{[AB]x})} \\ &+ (1 - \sigma_2) \cdot \sum_{1, \dots, \sigma_1}^i W_{\lfloor \mathcal{A} \rfloor}^{(n-1, a-\varrho - \widehat{[AB]i})} \\ &+ (1 - \sigma_1) \sum_{l, \dots, \sigma_2}^x W_{\lfloor \mathcal{A} \rfloor}^{(n-1, a-\varrho - \widehat{[AB]x})} + W_{\lfloor \mathcal{A} \rfloor}^{(n-1, a-\varrho)} \\ &+ (1 - \sigma_1)(1 - \sigma_2) W_{\lfloor \mathcal{A} \rfloor}^{(n-1, a-\varrho)} \end{aligned}$$

Durch Zurückgreifen auf Formel I) S. 142 erhält man schliesslich folgende Rekursionsformel:

$$\text{V.} \quad \left\{ \begin{aligned} W_{(n, a+1)}^{\mathcal{A}} &= W_{(n, a)} - \sum_{1, \dots, \sigma_1}^i \sum_{l, \dots, \sigma_2}^x W_{\lfloor \mathcal{A} \rfloor}^{(n-1, a-\varrho - \widehat{[AB]i} - \widehat{[AB]x})} \\ &+ (\sigma_2 - 1) \sum_{1, \dots, \sigma_1}^i W_{\lfloor \mathcal{A} \rfloor}^{(n-1, a-\varrho - \widehat{[AB]i})} \\ &+ (\sigma_1 - 1) \sum_{l, \dots, \sigma_2}^x W_{\lfloor \mathcal{A} \rfloor}^{(n-1, a-\varrho - \widehat{[AB]x})} \\ &- [(\sigma_1 - 1)(\sigma_2 - 1) + 1] W_{\lfloor \mathcal{A} \rfloor}^{(n-1, a-\varrho)}. \end{aligned} \right.$$

Für den Fall, dass  $\sigma_2 = 0$  (oder  $\sigma_1 = 0$ ), präsentiert sich die Formel in folgender vereinfachten Gestalt:

$$\text{Va.} \quad \left\{ \begin{aligned} W_{(n, a+1)}^{\mathcal{A}} &= W_{(n, a)} - \sum_{1, \dots, \sigma_1}^i W_{\lfloor \mathcal{A} \rfloor}^{(n-1, a-\varrho - \widehat{[AB]i})} \\ &+ (\sigma_1 - 2) W_{\lfloor \mathcal{A} \rfloor}^{(n-1, a-\varrho)}. \end{aligned} \right.$$

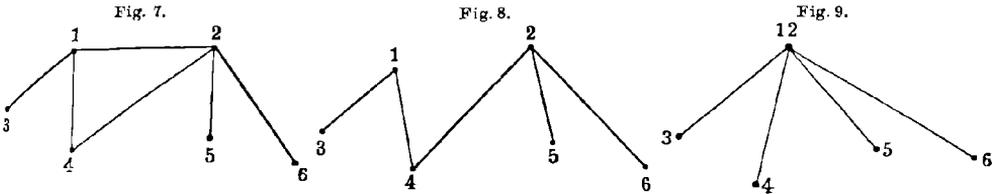
Die Formel lehrt Wegezahlen von Komplexen auf solche zurückführen, in denen weniger Elementenpaare von der Wegbildung ausgeschlossen sind, gestattet also eine successive Lösung des gesamten Problems.

#### § 4. Beispiel.

Es erscheint zweckmässig, den Sinn, die Anwendungsweise und die Richtigkeit dieser Formel zunächst an einem Beispiel ausführlicher zu erläutern.

Es sei beispielsweise  $W_{(n, a+1)}^{\mathcal{A}}$  die Zahl der Wege des Komplexes von Figur 7, die bestimmt werden soll, und 12 die hinzugefügte Gerade  $\mathcal{A}$ . Dann stellt Figur 8 den zu  $W_{(n, a)}$  gehörigen Komplex dar, Punkt 3 repräsentiert die Punktchar  $1 \dots \sigma_1$ , 5 und 6 die Punkt-

schar  $I \dots \sigma_2$  und 4 entspricht den Punkten  $1 \dots$  der Figur 5, d. h. es ist  $\sigma_1 = 1, \sigma_2 = 2, \rho = 1$ . Die Wegezahlen mit dem Argument  $\begin{matrix} n-1 \\ \mathcal{A} \end{matrix}$  werden sämtlich aus der Verschmelzungsfigur von Figur 7 gewonnen, die in Figur 9 dargestellt ist. Die Doppelsumme der Formel V wird



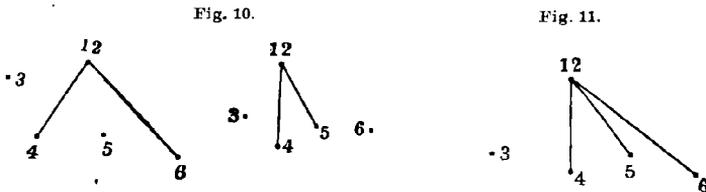
durch Zählung der Wege der beiden durch Figur 10 dargestellten Komplexe erhalten. Formel II (S. 139) liefert dafür:

$$2 \cdot 2 \binom{5-2}{2} (5-2)! = 72.$$

Das Glied  $(\sigma_2 - 1) \sum_{1 \dots \sigma_n}$  reduziert sich auf die Wegezahl des Komplexes Figur 11 und ist nach derselben Formel:

$$2 \cdot \binom{5-3}{2} (5-2)! = 12.$$

Kennt man also die Wegezahl  $W_{(n, a)}$  des durch Figur 8 repräsentierten Komplexes, welcher eine Gerade weniger enthält als der



von Figur 7, so ist auch  $W_{(n, a+1)}^{\mathcal{A}}$  gefunden. Es ist ersichtlich, dass sich dieses Rekursionsverfahren auf Grund von Formel V auch zur Zurückführung von  $W_{(n, a)}$  auf Komplexe mit noch weniger Geraden anwenden lässt. Auf diese Weise wurde gefunden:

$$W_{(n, a)} = 76,$$

woraus sich ergibt:

$$W_{(n, a+1)}^{\mathcal{A}} = 76 - 72 + 12 = 16,$$

und tatsächlich giebt es nur folgende Wege an Figur 7:



Deute ferner  $\sum_{1 \dots \sigma_1}^{i_1 i_2}$  an, dass die Summe über alle Kombinationen zu zweien der Zahlen  $1 \dots \sigma_1$  ohne Wiederholung zu erstrecken ist, so ist, wie einfache Überlegung zeigt, das Resultat dieser Summierung über VI erstreckt:

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{1 \dots \sigma_1}^{i_1 i_2} W(a - \varrho - \overbrace{[AB] i_1} - \overbrace{[AB] i_2}) - (\sigma_1 - 1) \sum_{1 \dots \sigma_1}^i W(a - \varrho - \overbrace{[AB] i}) \\ &+ \binom{\sigma_1}{2} W(a - \varrho). \end{aligned} \right.$$

Bezeichnet man mit  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  zwei beliebige Punkte der Schar  $1 \dots \sigma_2$ , so ergibt sich der analoge Ausdruck:

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{1 \dots \sigma_2}^{\kappa_1 \kappa_2} W(a - \varrho - \overbrace{[AB] \kappa_1} - \overbrace{[AB] \kappa_2}) - (\sigma_2 - 1) \sum_{1 \dots \sigma_2}^x W(a - \varrho - \overbrace{[AB] x}) \\ &+ \binom{\sigma_2}{2} W(a - \varrho). \end{aligned} \right.$$

Die Zusammenfassung der vorstehenden Ausführungen liefert die gesuchte neue Darstellung für  $\varphi_{(a, \varrho)}$  und sonach mittels Formel I (S. 142) folgende neue Rekursionsformel, bei deren Aufstellung das Argument  $n - 1$  überall wieder eingesetzt wurde:

$$\text{VII. } \left\{ \begin{aligned} &W(n, a + \overset{\Delta}{1}) = W(n, a) - W(n-1, a - \varrho - \sigma_1 - \sigma_2) \\ &+ \sum_{1 \dots \sigma_1}^{i_1 i_2} W(n-1, a - \varrho - \overbrace{[AB] i_1} - \overbrace{[AB] i_2}) \\ &- (\sigma_1 - 1) \sum_{1 \dots \sigma_1}^i W(n-1, a - \varrho - \overbrace{[AB] i}) \\ &+ \sum_{1 \dots \sigma_2}^{\kappa_1 \kappa_2} W(n-1, a - \varrho - \overbrace{[AB] \kappa_1} - \overbrace{[AB] \kappa_2}) \\ &- (\sigma_2 - 1) \sum_{1 \dots \sigma_2}^x W(n-1, a - \varrho - \overbrace{[AB] x}) \\ &+ \left[ \binom{\sigma_1}{2} + \binom{\sigma_2}{2} - 1 \right] W(n-1, a - \varrho). \end{aligned} \right.$$

C. Dritte Formel.

Setzt man  $\sigma_2 = 0$ , so wird in  $\Delta$ :

$$\overset{\Delta}{\varphi}_{(n, a)} = \sum_{1 \dots \sigma_1}^i W(a - \varrho - \overbrace{[AB] i}) - (\sigma_1 - 2) \cdot W(a - \varrho)$$

(das Argument  $n - 1$  kann wieder wegbleiben).

Aus  $B$  erhält man ebenso:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{G}^{A}(n, a) &= W_{(a-\varrho-\sigma_1)} - \sum_{1 \dots \sigma_1}^{i_1 i_2} W_{(a-\varrho - \overbrace{[AB] i_1} - \overbrace{[AB] i_2})} \\ &\quad + (\sigma_1 - 1) \sum_{1 \dots \sigma_1}^i W_{(a-\varrho - \overbrace{[AB] i})} \\ &\quad + \left[ 1 - \binom{\sigma_1}{2} \right] W_{(a-\varrho)}. \end{aligned} \right.$$

Nach Gleichsetzung der rechten Seiten ergibt sich leicht:

$$\text{VIII.} \left\{ \begin{aligned} W_{(a-\varrho-\sigma_1)} &= \sum_{1 \dots \sigma_1}^{i_1 i_2} W_{(a-\varrho - [AB] i_1 - [AB] i_2)} \\ &\quad - (\sigma_1 - 2) \sum_{1 \dots \sigma_1}^i W_{(a-\varrho - \overbrace{[AB] i})} + \binom{\sigma_1 - 1}{2} W_{(a-\varrho)}. \end{aligned} \right.$$

Da zu jedem  $W$  das Argument  $n-1$  hinzuzudenken ist, bezieht sich diese Formel auf Komplexe mit gleicher Punktzahl.

Sie ist auch auf direktem Wege zu gewinnen:

Sieht man irgend einen Punkt eines beliebigen Komplexes in Bezug auf die von ihm ausgehenden Elementepaare an und fasst eine Anzahl  $\sigma_1$  von ihnen noch besonders ins Auge, während  $\varrho$  die Zahl der von dem Punkte ausstrahlenden Geraden ist, so setzt sich die Anzahl sämtlicher Wege des Komplexes nur aus solchen Wegen zusammen, zu deren Bildung entweder keines, oder eins, oder zwei Elemente der  $\sigma_1$  Paare benutzt werden. Die Berechnung dieser Zahlen mit Hilfe der Formeln des Kapitels II führt auf Formel VIII.

#### Kapitel IV.

#### Formeln für Komplexgruppen, gewonnen mittels Formel V.

(Kapitel III, S. 146.)

Die aufgestellten Rekursionsformeln lösen zwar, da sie die successive Zurückführung der Wegezahl von Komplexen auf Wegezahlen von Komplexen mit einer geringeren Zahl von Geraden gestatten, theoretisch das Gesamtproblem, versagen aber praktisch wegen allzugrosser Umständlichkeit, sobald der Komplex sehr viele Gerade enthält. Deshalb ist der Besitz von Formeln erwünscht, durch welche die Zählung der Wege eines Komplexes direkt auf die von Wegen zurückgeführt werden kann, deren Komplexe eine Reihe von Geraden weniger enthält als der betrachtete.

Es folgt eine Verwirklichung dieses Gedankens durch Weiterführung der Rekursion V in einigen Spezialfällen.

I.

Die  $n$  Punkte des zuerst zu betrachtenden Komplexes sollen in zwei Gruppen zerfallen, von denen die erste einen beliebigen Unterkomplex bilde, während die zweite Gruppe von  $a$  Punkten weder mit der ersteren noch unter sich durch Geraden verbunden sei. Die Anzahl der hier möglichen Wege steht natürlich in funktioneller Beziehung zur Zahl  $a$ . Zieht man nun von einem der  $a$  Punkte nach  $\lambda$  anderen unter ihnen die Geraden, so ist die Wegezahl des neuentstandenen Komplexes ausser einer Funktion von  $a$  auch noch eine solche von  $\lambda$ , etwa

$$\Phi \binom{\lambda}{a}.$$

Für letztere Funktion geht die Rekursionsformel Va (S. 146) über in:

$$I. \quad \Phi \binom{\lambda}{a} = \Phi \binom{\lambda-1}{a} + (\lambda-3) \Phi \binom{\lambda-1}{a-1} - (\lambda-1) \Phi \binom{\lambda-2}{a-1},$$

mittels deren die Berechnung der Funktion  $\Phi \binom{\lambda}{a}$  leicht von der Kenntnis von  $\Phi \binom{0}{a}$  abhängig gemacht werden kann.

Dazu setze man:

$$II. \quad \Phi \binom{\lambda}{a} = \Phi \binom{0}{a} + f_1(\lambda) \Phi \binom{0}{a-1} + f_2(\lambda) \Phi \binom{0}{a-2} + \dots$$

wobei  $f_1(\lambda), f_2(\lambda), \dots$  noch zu bestimmende Funktionen von  $\lambda$  sind, und substituiere dies in I.

Die rechte Seite von I. wird dann gleich:

$$\begin{aligned} & \Phi \binom{0}{a} + f_1(\lambda-1) \Phi \binom{0}{a-1} + f_2(\lambda-1) \Phi \binom{0}{a-2} + f_3(\lambda-1) \Phi \binom{0}{a-3} + \dots \\ & + (\lambda-3) \left\{ \Phi \binom{0}{a-1} + f_1(\lambda-2) \Phi \binom{0}{a-2} + f_2(\lambda-1) \Phi \binom{0}{a-3} + \dots \right\} \\ & - (\lambda-1) \left\{ \Phi \binom{0}{a-1} + f_1(\lambda-2) \Phi \binom{0}{a-2} + f_2(\lambda-1) \Phi \binom{0}{a-3} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Die Gleichsetzung der beiden rechten Seiten und Koeffizientenvergleichung ergibt für die Funktionen  $f_1, f_2$  u. s. w. die Bestimmungsgleichungen:

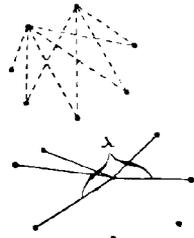
$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= f_1(\lambda-1) - 2, \\ f_2(\lambda) &= f_2(\lambda-1) + (\lambda-3) f_1(\lambda-1) - (\lambda-1) f_1(\lambda-2) \\ f_3(\lambda) &= f_3(\lambda-1) + (\lambda-3) f_2(\lambda-1) - (\lambda-1) f_2(\lambda-2) \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

aus denen mit Berücksichtigung von

$$f_1(0) = f_2(0) = f_3(0) = \dots = 0$$

(Folgerung aus Gleichung II) sich ergibt:

Fig. 12.





Also ergibt sich:

$$\Phi(a, \lambda) = \Phi(a, 0) - \lambda \{ \Phi(a-1, 0) + \Phi(a-1) \} + \lambda(\lambda-1) \Phi(a-2).$$

III.

Man füge diesmal zu dem Komplex mit  $\Phi(a)$  Wegen von  $\kappa$  Punkten des Unterkomplexes nach einem der  $a$  unverbundenen Punkte die Geraden hinzu, die aber gleichartig sein müssen (siehe Kapitel V, S. 157) und bezeichne mit  $\Phi(a, \kappa)$  die Wegezahl des neuen Komplexes, mit  $\Phi(a, \lambda)$  aber die des Komplexes, der entsteht, wenn man den eben verbundenen Punkt weiter mit  $\lambda$  der  $(a-1)$  übrigen Punkte verbindet. Für  $\Phi(a, \kappa)$  ergibt sich dann die Rekursionsformel:

$$\text{IV. } \begin{cases} \Phi(a, \kappa) = \Phi(a, \lambda-1) + (\lambda + \kappa - 3) \Phi(a-1, \kappa) \\ \quad - (\lambda - 1) \Phi(a-1, \kappa) - \kappa \Phi(a-1, \kappa-1). \end{cases}$$

Um auch hier die Rekursion auf Funktionen durchzuführen, die statt  $\lambda$  das Argument 0 aufweisen, setze man:

$$\text{V. } \begin{cases} \Phi(a, \lambda) = \Phi(a, 0) + \alpha^{1(\lambda, \kappa)} \Phi(a-1, \kappa) + \alpha^{2(\lambda, \kappa)} \Phi(a-2, \kappa) + \dots \\ \quad + \beta^{1(\lambda, \kappa)} \Phi(a-1, \kappa-1) + \beta^{2(\lambda, \kappa)} \Phi(a-2, \kappa-1) + \dots \\ \quad + \gamma^{1(\lambda, \kappa)} \Phi(a-1, \kappa-2) + \gamma^{2(\lambda, \kappa)} \Phi(a-2, \kappa-2) + \dots \end{cases}$$

Durch Einsetzen der aus V für

$$\Phi(a, \lambda-1), \quad \Phi(a-1, \lambda-1) \text{ u. s. w.}$$

erhältlichen Werte in IV. wird der Teil der rechten Seite von IV, der Glieder mit dem Argumente  $\kappa$  bekommt:

$$\begin{aligned} & \Phi(a, 0) + \alpha^{1(\lambda-1, \kappa)} \Phi(a-1, \kappa) + \alpha^{2(\lambda-1, \kappa)} \Phi(a-2, \kappa) \\ & \quad + \alpha^{3(\lambda-1, \kappa)} \Phi(a-3, \kappa) + \dots \\ & + (\lambda - \kappa + 3) \{ \Phi(a-1, 0) + \alpha^{1(\lambda-1, \kappa)} \Phi(a-2, 0) \\ & \quad + \alpha^{2(\lambda-1, \kappa)} \Phi(a-3, 0) + \dots \} \\ & - (\lambda - 1) \{ \Phi(a-1, 0) + \alpha^{1(\lambda-2, \kappa)} \Phi(a-2, 0) \\ & \quad + \alpha^{2(\lambda-2, \kappa)} \Phi(a-3, 0) + \dots \}. \end{aligned}$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten dieser Entwicklung mit denen der rechten Seite von V. ergeben sich für die Funktionen  $\alpha^1, \alpha^2$  u. s. w. die Differenzgleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha^1_{(\lambda, x)} &= \alpha^1_{(\lambda-1, x)} + x - 2, \\ \alpha^2_{(\lambda, x)} &= \alpha^2_{(\lambda-1, x)} + (\lambda + x - 3) \alpha^1_{(\lambda-1, x)} - (\lambda - 1) \alpha^1_{(\lambda-2, x)}, \\ &\vdots \\ \alpha^v_{(\lambda, x)} &= \alpha^v_{(\lambda-1, x)} + (\lambda + x - 3) \alpha^{v-1}_{(\lambda-1, x)} - (\lambda - 1) \alpha^{v-1}_{(\lambda-2, x)}, \end{aligned}$$

VI. deren Lösungen (unter Berücksichtigung von

$$\alpha^1_{(0, x)} = \alpha^2_{(0, x)} = \dots = 0)$$

sind:

$$\alpha^1_{(\lambda, x)} = \lambda(x-2), \quad \alpha^2_{(\lambda, x)} = \binom{\lambda}{2}(x-1)(x-2); \dots$$

allgemein:

$$\text{VIa.} \quad \alpha^v_{(\lambda, x)} = \binom{\lambda}{v} \frac{(x+v-3)!}{(x-3)!}.$$

Hieraus folgt, dass:

$$\text{VIb.} \quad \alpha^v_{(\lambda, x)} - \alpha^v_{(\lambda, x-1)} = v \binom{\lambda}{v} \frac{(x+v-4)!}{(x-3)!} = \lambda \cdot \alpha^{v-1}_{(\lambda-1, x)}$$

eine später zu verwendende Beziehung.

Der Teil der rechten Seite von IV, der beim Einsetzen Glieder mit dem Argumente  $x-1$  erhält, ist weiter:

$$\begin{aligned} &+ \beta^1_{(\lambda-1, x)} \Phi(a-1, x-1) + \beta^2_{(\lambda-1, x)} \Phi(a-2, x-1) \\ &\quad + \beta^3_{(\lambda-1, x)} \Phi(a-3, x-1) + \dots \\ &+ (\lambda + x - 3) \left\{ \beta^1_{(\lambda-1, x)} \Phi(a-2, x-1) \right. \\ &\quad \left. + \beta^2_{(\lambda-1, x)} \Phi(a-3, x-1) + \dots \right\} \\ &- (\lambda - 1) \left\{ \beta^1_{(\lambda-2, x)} \Phi(a-2, x-1) \right. \\ &\quad \left. + \beta^2_{(\lambda-2, x)} \Phi(a-3, x-1) + \dots \right\} \\ &- x \cdot \left\{ \Phi(a-1, x-1) + \alpha^1_{(\lambda-1, x-1)} \Phi(a-2, x-1) \right. \\ &\quad \left. + \alpha^2_{(\lambda-1, x-1)} \Phi(a-3, x-1) + \dots \right\}. \end{aligned}$$

Gleichsetzung der Koeffizienten mit solchen entsprechender Glieder der rechten Seite von V. gibt zunächst:

$$\begin{aligned} \text{VII.} \quad &\beta^1_{(\lambda, x)} - \beta^1_{(\lambda-1, x)} = -x, \\ \text{woraus:} \quad &\beta^1_{(\lambda, x)} = -\lambda x. \end{aligned}$$

Die allgemeine Funktionalgleichung für die Funktionen  $\beta$  ist:

$$\text{VIII. } \left\{ \begin{array}{l} \beta^{v}(\lambda, \kappa) - \beta^{v-1}(\lambda-1, \kappa) = (\lambda + \kappa - 3) \beta^{v-1}(\lambda-1, \kappa) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad - (\lambda - 1) \beta^{v-1}(\lambda-2, \kappa) - \kappa \cdot \alpha^{v-1}(\lambda-1, \kappa-2). \end{array} \right.$$

Die Bestimmung der genannten Funktionen kann auf folgende Weise durch Zurückführung auf die Funktionen  $\alpha$  geschehen:

Nach VIb ist:

$$\alpha^{v-1}(\lambda-1, \kappa-1) = \alpha^{v-1}(\lambda-1, \kappa) - (\lambda - 1) \alpha^{v-2}(\lambda-2, \kappa).$$

Dies in VIII. substituiert und gleichzeitig gesetzt:

$$\beta^{v}(\lambda, \kappa) = \kappa \cdot \alpha^{v-1}(\lambda, \kappa) \cdot \varphi(\lambda-v),$$

wo  $\varphi(\lambda-v)$  eine noch näher zu bestimmende Funktion bedeutet, führt auf:

$$\text{IX. } \left\{ \begin{array}{l} \varphi(\lambda-v) \kappa \alpha^{v-1}(\lambda, \kappa) - \kappa \alpha^{v-1}(\lambda-1, \kappa) \{ \varphi(\lambda-v-1) - 1 \} \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad = (\lambda + \kappa - 3) \kappa \cdot \alpha^{v-2}(\lambda-1, \kappa) \varphi(\lambda-v) - (\lambda - 1) \kappa \cdot \alpha^{v-2}(\lambda-2, \kappa) \\ \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \cdot \{ \varphi(\lambda-v-1) - 1 \}. \end{array} \right.$$

Diese Gleichung wird auf VI (S. 154) zurückgeführt, also identisch erfüllt, wenn:

$$\varphi(\lambda-v) = \varphi(\lambda-v-1) - 1,$$

woraus im Hinblick auf VII. folgt:

$$\varphi(\lambda-v) = -(\lambda - v - 1),$$

so dass also ist:

$$\text{X. } \beta^{v}(\lambda, \kappa) = -\kappa \cdot \alpha^{v-1}(\lambda, \kappa) (\lambda - v + 1).$$

Zur Bestimmung der Funktionen  $\gamma$  führen die Glieder mit den Argumenten  $(\kappa - 2)$ ; es sind:

$$\begin{aligned} & \gamma^{1}(\lambda-1, \kappa) \Phi \binom{0}{a-1, \kappa-2} + \gamma^{2}(\lambda-1, \kappa) \Phi \binom{0}{a-2, \kappa-2} \\ & \qquad \qquad \qquad + \gamma^{3}(\lambda-1, \kappa) \Phi \binom{0}{a-3, \kappa-2} + \dots \\ & + (\lambda + \kappa - 3) \cdot \left\{ \gamma^{1}(\lambda-1, \kappa) \Phi \binom{0}{a-2, \kappa-2} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \gamma^{2}(\lambda-1, \kappa) \Phi \binom{0}{a-3, \kappa-2} + \dots \right\} \\ & - (\lambda - 1) \left\{ \gamma^{1}(\lambda-2, \kappa) \Phi \binom{0}{a-2, \kappa-2} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \gamma^{2}(\lambda-2, \kappa) \Phi \binom{0}{a-3, \kappa-2} + \dots \right\} \\ & - \kappa \left\{ \beta^{1}(\lambda-1, \kappa-1) \Phi \binom{0}{a-2, \kappa-2} \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. + \beta^{2}(\lambda-1, \kappa-1) \Phi \binom{0}{a-3, \kappa-2} + \dots \right\} \end{aligned}$$



Führt man dies in Gleichung V (S. 153) ein, so erhält man folgendes Resultat für die ausgeführte Rekursion:

$$\Phi(a, \lambda, \kappa) = \sum_{0 \dots 0}^i \sum_{0 \dots 0}^{\nu-i} (-1)^i \Phi(a-\nu, \kappa-i)^0 \alpha_{(\lambda, \kappa)}^{\nu-i} \frac{\kappa!}{(\kappa-i)!} \binom{\lambda-\nu+i}{i},$$

oder, wenn man den Wert für  $\alpha_{(\lambda, \kappa)}^{\nu-i}$  aus Gleichung VIa einsetzt:

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{\Phi}(a, \lambda, \kappa) &= \sum_{0 \dots 0}^i \sum_{0 \dots 0}^{\nu-i} (-1)^i \binom{\lambda}{\nu-i} \frac{(\kappa+\nu-i-3)!}{(\kappa-3)!} \frac{\kappa!}{(\kappa-i)!} \binom{\lambda-\nu+i}{i} \\ &\quad \cdot \overline{\Phi}(a-\nu, \kappa-i)^0 \end{aligned} \right.$$

was sich noch folgendermaßen vereinfachen lässt:

$$\overline{\Phi}(a, \lambda, \kappa) = \sum_{0 \dots 0}^i \sum_{0 \dots 0}^{\nu-i} (-1)^i \frac{\lambda!}{(\lambda-\nu)!} \binom{\kappa}{i} \binom{\kappa-3+\nu-i}{\kappa-3} \overline{\Phi}(a-\nu, \kappa-i)^0.$$

Nur kurz erwähnt soll werden, dass diese Formel dazu dienen kann, Funktionen, die Wegezahlen von Komplexen ausdrücken, z. B.  $2 \binom{n-\alpha}{2} (n-2)!$  (S. 139) in merkwürdige Doppelsummen zu verwandeln.

### Kapitel V.

#### Studium der Formel VIII (S. 150).

Sämtliche von einem Punkte irgend eines Komplexes ausgehende Geraden können das Geradenbüschel dieses Punktes genannt werden. Sind nun die Geraden eines Büschels so beschaffen, dass alle Komplexe, in denen man eine beliebige von diesen Geraden in ein Elementenpaar verwandelt, dieselbe Wegezahl besitzen, so sollen sie gleichartig heißen. Die Wegezahl eines Komplexes ist offenbar eine Funktion jeder Anzahl gleichartiger Geraden in ihm.

Es werde jetzt die Formel VIII (Kapitel III, S. 150) näher betrachtet: Zunächst zeigt sich, dass die verschiedenen Veränderungen von  $W$  in dieser Formel sich immer nur auf das Geradenbüschel nach den Punkten  $1, \dots, \sigma_1$  beziehen. Man schreibt daher  $W$  besser als Funktion von  $\sigma_1$ ; deutet man durch Beibehalten von  $\varrho$  im Argument an, dass  $\varrho$  Geraden, die von demselben Punkte ausstrahlen, unverändert erhalten bleiben sollen, so kann die Formel folgendermaßen geschrieben werden:

$$\left\{ \begin{aligned} W_{(\varrho, 0)} &= \overline{W}_{(\varrho, \sigma_1)}(\sigma_1-1) - (\sigma_1-2) \sum_{1 \dots \sigma_1}^i \overline{W}_{(\varrho, \sigma - [\overline{AB}]i)} \\ &\quad + \sum_{1 \dots \sigma_1}^i i_2 \overline{W}_{(\varrho, \sigma - [AB]i - 1)}. \end{aligned} \right.$$

In der voranstehenden Formel dürfen die Geraden nach den Punkten  $1 \dots \sigma_1$  noch ungleichartig sein; ersetzt man sie durch

$\sigma$  gleichartige, so werden die Funktionen unter den beiden Summenzeichen unter sich gleich, und es entsteht die Formel:

$$\text{I.} \quad W_{(\varrho, 0)} = W_{(\varrho, \sigma)} \binom{\sigma-1}{2} - \sigma(\sigma-2)W_{(\varrho, \sigma-1)} + \binom{\sigma}{2}W_{(\varrho, \sigma-2)}.$$

Aus ihr wird ersichtlich, dass  $W_{(\varrho, \sigma)}$  sich durch  $W_{(\varrho, 0)}$ ,  $W_{(\varrho, 1)}$  und  $W_{(\varrho, 2)}$  ausdrücken lässt; setzt man zu dem Ende unter Weglassung von  $\varrho$ :

$$\text{II.} \quad W_{(\sigma)} = f_{1(\sigma)}W_{(2)} - f_{2(\sigma)}W_{(1)} + f_{3(\sigma)}W_{(0)},$$

wo  $f_{1(\sigma)}$ ,  $f_{2(\sigma)}$ ,  $f_{3(\sigma)}$  noch zu bestimmende Funktionen von  $\sigma$  sind, so findet man durch Einführung in I:

$$\begin{aligned} W_{(0)} &= W_{(2)} \left[ f_{1(\sigma)} \binom{\sigma-1}{2} - \sigma(\sigma-2)f_{1(\sigma-1)} + \binom{\sigma}{2}f_{1(\sigma-2)} \right] \\ &+ W_{(1)} \left[ f_{2(\sigma)} \binom{\sigma-1}{2} - \sigma(\sigma-2)f_{2(\sigma-1)} + \binom{\sigma}{2}f_{2(\sigma-2)} \right] \\ &+ W_{(0)} \left[ f_{3(\sigma)} \binom{\sigma-1}{2} - \sigma(\sigma-2)f_{3(\sigma-1)} + \binom{\sigma}{2}f_{3(\sigma-2)} \right] \end{aligned}$$

und erhält für  $f_{1(\sigma)}$ ,  $f_{2(\sigma)}$  und  $f_{3(\sigma)}$  die Bestimmungsgleichungen:

$$\text{III.} \quad \begin{cases} \text{a)} & 0 = f_{1(\sigma)} \binom{\sigma-1}{2} - \sigma(\sigma-2)f_{1(\sigma-1)} + \binom{\sigma}{2}f_{1(\sigma-2)} \\ \text{b)} & 0 = f_{2(\sigma)} \binom{\sigma-1}{2} - \sigma(\sigma-2)f_{2(\sigma-1)} + \binom{\sigma}{2}f_{2(\sigma-2)} \\ \text{c)} & 1 = f_{3(\sigma)} \binom{\sigma-1}{2} - \sigma(\sigma-2)f_{3(\sigma-1)} + \binom{\sigma}{2}f_{3(\sigma-2)}. \end{cases}$$

Setzt man in IIIa:

$$f_{1(\sigma)} = \sigma \cdot \varphi_{(\sigma)},$$

so hebt sich das Produkt  $\sigma(\sigma-1)(\sigma-2)$  aus der Gleichung, und es ergibt sich:

$$2\varphi_{(\sigma-1)} = \varphi_{(\sigma)} + \varphi_{(\sigma-2)},$$

eine Gleichung, deren allgemeine Lösung ist:

$$\varphi_{(\sigma)} = c_1 \sigma + c_2,$$

wo  $c_1$  und  $c_2$  zwei beliebige Konstanten sind.

Die Gleichungen IIIa und IIIb haben also zur allgemeinen Lösung:

$$f_{1(\sigma)} = f_{2(\sigma)} = \sigma(c_1 \sigma + c_2).$$

Nun muss aber vermöge Gleichung II sein:

$$f_{1(2)} = 1, \quad f_{1(1)} = 0,$$

$$f_{2(1)} = -1, \quad f_{2(2)} = 0.$$

Bestimmt man danach  $c_1$  und  $c_2$ , so findet man:

$$f_{1(\sigma)} = \binom{\sigma}{2}, \quad f_{2(\sigma)} = \sigma(\sigma-2).$$

Die Lösung von Gleichung IIIc gelingt auf folgendem Wege:

Da das in Kapitel I, 2. (S. 139) behandelte Büschel aus gleichartigen Geraden besteht, so muss die dort gefundene Funktion

$$2 \binom{n-a}{2} (n-2)!$$

der Formel I (S. 158) genügen, wodurch, wenn  $a = \sigma$  gesetzt wird, die identische Gleichung entsteht:

$$n(n-1) = 2 \binom{n-\sigma}{2} \binom{\sigma-1}{2} - \sigma(\sigma-2) \binom{n-\sigma+1}{2} + 2 \binom{\sigma}{2} \binom{n-\sigma+2}{2}.$$

Diese geht für  $n = 2$  über in:

$$\text{IV.} \quad 1 = \binom{\sigma-1}{2} \binom{\sigma-1}{2} - \sigma(\sigma-2) \binom{\sigma-2}{2} + \binom{\sigma}{2} \binom{\sigma-3}{2}.$$

Durch Vergleichung von IV. mit IIIc zeigt sich, dass

$$f_{3(\sigma)} = \binom{\sigma-1}{2} \quad ,$$

eine partikuläre Lösung der Gleichung IIIc ist, und zwar gerade die hier gesuchte, weil, wie es Gleichung II verlangt,

$$f_{3(1)} = f_{3(2)} = 0.$$

Das gesuchte Resultat ist demnach:

$$W_{(\sigma)} = \binom{\sigma}{2} W_{(2)} - \sigma(\sigma-2) W_{(1)} + \binom{\sigma-1}{2} W_{(0)}.$$

Es lässt sich in den merkwürdigen Satz formulieren:

Die Wegezahlen der Komplexe, die ein Büschel gleichartiger Geraden enthalten, lassen sich sämtlich als ein und dieselbe Funktion der Wegezahlen derjenigen drei Komplexe darstellen, in welchen 1) alle Geraden des Büschels fehlen, das Büschel 2) auf eine Gerade, 3) auf zwei Geraden reduziert ist.

Da bei der Frage nach den Rösselsprüngen eines Schachbretts die sogenannten geschlossenen Rösselsprünge besonders interessieren, so hätte man auch die vorstehenden Untersuchungen von Anfang an auf die Zahl der an jedem Komplexe existierenden geschlossenen Wege abzielen können. Dabei würde sich gezeigt haben, dass die vorstehenden Überlegungen auch auf diese Form der Aufgabe Anwendung finden.

Auch lassen sich die Rekursionsformeln des Kapitel III leicht so abändern, dass sie auf die „Hamiltonschen Rundreisen“ (Math. Mußestunden von H. Schubert, § 25) übertragen werden können.

## Kapitel VI.

**Angabe eines Weges zur allgemeinen Lösung der in Kapitel IV  
gestellten Aufgabe.**

Aus der Endformel des vorigen Kapitels ergibt sich leicht die folgende:

$$W_{(\lambda)} = W_{(0)} - \lambda [W_{(0)} - W_{(1)}] + \binom{\lambda}{2} [W_{(0)} - 2W_{(1)} + W_{(2)}],$$

wofür man nach Kapitel II unter Anwendung der dort eingeführten Bezeichnungsweise schreiben darf:

$$W_{(\lambda)} = W_{(0)} - \lambda W^1 + \binom{\lambda}{2} W^2.$$

Nun lässt sich aber  $W^1$  (welches besagt, dass sämtliche  $\lambda$  Geraden des Bündels, aus dem Komplex getilgt werden sollen, die Wegelemente aber, die an Stelle irgend einer dieser Geraden treten, in jedem Wege vorkommen müssen) durch Wiederholung des in Kapitel III zur Bestimmung von  $\overset{\Delta}{\varphi}_{(n, a)}$  angewendeten Verfahrens durch Wegezahlen von Komplexen ausdrücken, in denen keine der Geraden des Bündels vorkommt. Ganz analog lässt sich  $W^2$  behandeln (welches ausdrücken soll, dass nach Tilgung der  $\lambda$  Geraden die Wegelemente von irgend zwei dieser Geraden in jedem Wege vorhanden sein müssen).

Dadurch wird  $W_{(\lambda)}$  auf  $W_{(0)}$  zurückgeführt und damit die in Kapitel IV gestellte und für einige Spezialfälle dort durchgeführte wichtige Aufgabe allgemein gelöst.

# Normale und Krümmungsmittelpunkt der polytropischen Kurven.

Von

F. KOSCH,

Oberlehrer an der Königl. Oberrealschule zu Breslau.

Die polytropischen Kurven besitzen die charakteristische Eigenschaft, dass auf ihren Normalen durch zwei feste bestimmte Gerade ein Stück abgeschnitten wird, dass allemal durch die Kurve selbst halbiert wird. Da dieser Satz noch nicht bekannt zu sein scheint, so lasse ich seinen Beweis hier folgen und knüpfe zugleich eine einfache Konstruktion für den Krümmungsmittelpunkt daran an, die mit ihm im Zusammenhange steht.

In Bezug auf ihre Asymptoten lautet bekanntlich die Gleichung der polytropischen Kurve  $x^n y = x_0^n y_0$ ;

sie lässt sich leicht auf die Form bringen

$$1) \quad x^\lambda y^\mu = a,$$

und man kann die Konstanten  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $a$  so wählen, dass

$$\lambda + \mu = 1$$

wird, wobei  $\lambda$  und  $\mu$  positiv sein sollen.

Die Richtungskonstante der Tangente ist

$$2) \quad \frac{dy}{dx} = \text{tang } \tau = - \frac{\lambda}{\mu} \frac{y}{x},$$

und die Gleichung der Tangente im Kurvenpunkte  $P(xy)$  lautet

$$\eta - y = - \frac{\lambda}{\mu} \frac{y}{x} (\xi - x).$$

Es seien  $A_1$  und  $A_2$  die Schnittpunkte der Tangente mit den Koordinatenachsen (vergl. die umstehende Figur). Unter Berücksichtigung, dass  $\lambda + \mu = 1$  ist, findet man dann

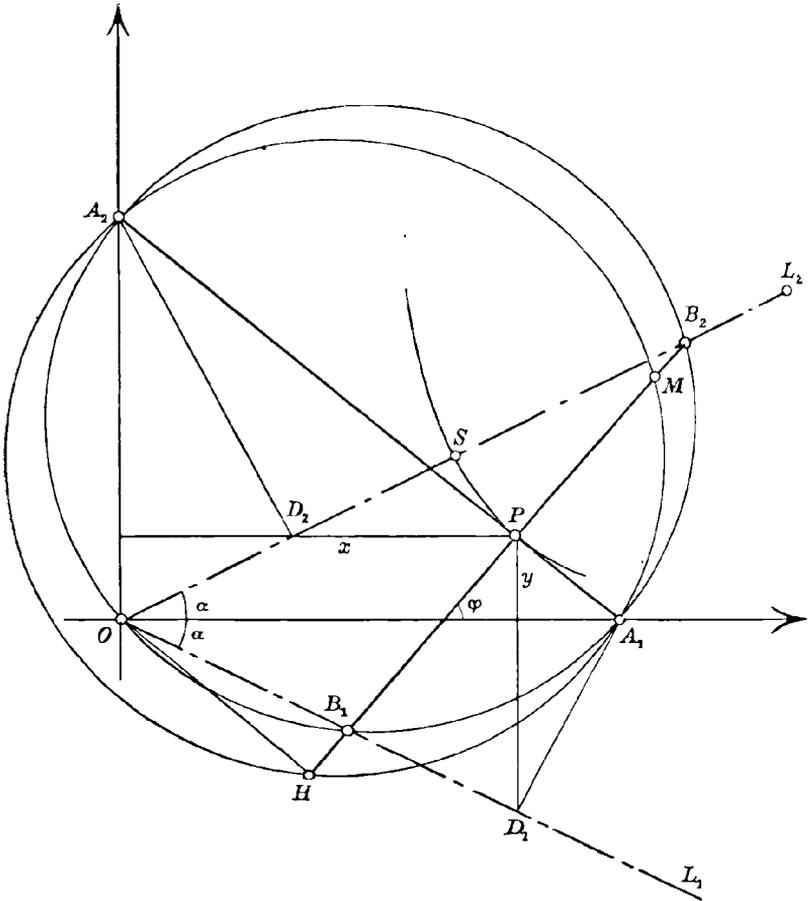
$$3) \quad \begin{cases} \overline{OA_1} = \frac{x}{\lambda}, \\ \overline{OA_2} = \frac{y}{\mu}. \end{cases}$$

Wir setzen nun

$$4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{tang}^2 \alpha = \frac{\mu}{\lambda}, \\ \text{also } \sin^2 \alpha = \mu \\ \cos^2 \alpha = \lambda, \end{array} \right.$$

und haben auch

$$5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \overline{OA_1} = \frac{x}{\cos^2 \alpha}, \\ \overline{OA_2} = \frac{y}{\sin^2 \alpha}. \end{array} \right.$$



Bezeichnen wir mit  $t$  die Länge  $A_1A_2$  der Tangente zwischen den Asymptoten, so haben wir

$$6) \quad t^2 = \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2} = \frac{x^2}{\cos^4 \alpha} + \frac{y^2}{\sin^4 \alpha}.$$

Die Abschnitte  $\overline{PA_1}$  und  $\overline{PA_2}$  auf der Tangente finden sich aus

$$\overline{PA_1} = \frac{y}{\sin \tau},$$

$$\overline{PA_2} = -\frac{x}{\cos \tau},$$

daher

$$\frac{\overline{PA_2}}{\overline{PA_1}} = -\frac{x}{y} \operatorname{tg} \tau = \frac{\lambda}{\mu}.$$

Dies giebt den bereits bekannten Satz:

Das zwischen den Asymptoten liegende Stück der Tangente wird im Berührungspunkt im Verhältnis der Exponenten geteilt.

Da  $A_1 A_2 = t$  gesetzt war, so ist auch

$$7) \quad \begin{cases} \overline{PA_2} = \lambda t, \\ \overline{PA_1} = \mu t. \end{cases}$$

Wir zeichnen den Umkreis des Dreiecks  $OA_1 A_2$ , errichten in  $P$  die Normale, die den Umkreis in  $B_1$  und  $B_2$  schneidet, und finden, da  $A_1 A_2$  Durchmesser dieses Kreises ist, dass

$$\overline{PB_1} = \overline{PB_2}.$$

Wir haben dann ferner

$$\begin{aligned} \overline{PB_1}^2 &= \overline{PB_2}^2 = \overline{PA_1} \overline{PA_2} = \lambda \mu t^2, \\ \text{oder} \\ 8) \quad \overline{PB_1} &= \overline{PB_2} = t\sqrt{\lambda\mu}. \end{aligned}$$

Denkt man sich nun die beiden Punkte  $B_1$  und  $B_2$  mit  $A_2$  verbunden, dann sieht man, dass

$$\operatorname{tang} \sphericalangle B_1 A_2 P = \operatorname{tang} \sphericalangle B_2 A_2 P = \frac{t\sqrt{\lambda\mu}}{\lambda t} = \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} = \operatorname{tang} \alpha$$

ist; d. h. es ist  $\sphericalangle B_1 A_2 P = \sphericalangle B_2 A_2 P = \alpha$ .

Zieht man endlich vom Koordinatenanfangspunkte  $O$  aus die beiden Geraden  $I_1$  und  $L_2$  nach den Punkten  $B_1$  und  $B_2$ , so hat man als Peripheriewinkel über gleichen Bogen

$$\sphericalangle B_1 O P = \sphericalangle B_2 O P = \alpha,$$

d. h. die beiden Geraden  $I_1$  und  $L_2$  haben eine feste Lage. Wir wollen sie analog ihrer Beziehung zur gleichseitigen Hyperbel die Axen der polytropischen Kurve nennen.

Wir haben nun die beiden Sätze gewonnen:

1. Das zwischen den Axen liegende Stück der Normale wird durch die polytropische Kurve halbiert.
2. Das von der Tangente und den beiden Asymptoten und das von der Normale und den beiden Axen gebildete Dreieck haben ein und denselben Umkreis.

Der Schnittpunkt  $S$  der Kurve mit der Axe  $L_2$  heisse der Scheitel. Für ihn ist

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tang} \alpha$$

und daher auch

$$\operatorname{tang} \tau = -\frac{\lambda}{\mu} \operatorname{tang} \alpha = -\operatorname{cot} \alpha,$$

d. h. die Kurve schneidet die Axe rechtwinklig.

Zieht man von  $P$  die Senkrechten auf die Asymptoten und bringt sie zum Schnitt mit den Axen in den Punkten  $D_1$  und  $D_2$ , errichtet man endlich in  $D_1$  und  $D_2$  Lote auf den Axen, so gehen diese, wie aus den Gleichungen 5 folgt, durch die Punkte  $A_1$  und  $A_2$ .

Versteht man unter  $\xi$  und  $\eta$  die Koordinaten von  $B_2$ , so ist

$$\xi = \overline{OB_2} \cos \alpha,$$

$$\eta = \overline{OB_2} \sin \alpha,$$

und mit Hilfe der Gleichung der Normale

$$\eta - y = \frac{\mu}{\lambda} \frac{x}{y} (\xi - x)$$

findet man dann

$$\overline{OB_2} = \frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha}$$

und analog

$$\overline{OB_1} = \frac{x}{\cos \alpha} + \frac{y}{\sin \alpha}.$$

Nun ist

$$\frac{x}{\cos \alpha} = OD_1 \quad \text{und} \quad \frac{y}{\sin \alpha} = OD_2,$$

daher gewinnen wir noch die einfachen Beziehungen

$$9) \quad \begin{cases} \overline{OB_2} = \overline{OD_1} + \overline{OD_2}, \\ \overline{OB_1} = \overline{OD_1} - \overline{OD_2}. \end{cases}$$

Wir gehen jetzt zur Berechnung des Krümmungsradius über. Es war

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\lambda}{\mu} \frac{y}{x},$$

daher

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{\lambda}{\mu} \frac{x \frac{dy}{dx} - y}{x^2} \\ &= -\frac{\lambda}{\mu} \frac{-\frac{\lambda}{\mu} y - y}{x^2} \\ &= \frac{\lambda}{\mu^2} \frac{y}{x^2}. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \varrho &= \frac{\left(1 + \frac{\lambda^2}{\mu^2} \frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\lambda}{\mu^2} \frac{y}{x^2}} \\ &= \frac{\frac{\lambda^3}{x^3} \left(\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\mu^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\lambda}{\mu^2} \frac{y}{x^2}} \end{aligned}$$

und unter Berücksichtigung von Gleichung 6)

$$\varrho = \frac{\lambda^2 \mu^2 t^3}{xy}.$$

Benutzt man ferner die Gleichungen 3) und 7), so hat man

$$\varrho = \frac{\overline{PA_1} \overline{PA_2} \cdot t}{\overline{OA_1} \cdot \overline{OA_2}}.$$

Fällt man nun vom Punkte  $O$  auf die Normale das Lot  $OH$ , so ist der Inhalt vom Dreieck  $OA_1A_2$  sowohl

$$\frac{1}{2} \overline{OA_1} \cdot \overline{OA_2} \text{ als auch } \frac{1}{2} t \cdot \overline{PH}.$$

Daher gewinnt man

$$\varrho = \frac{\overline{PA_1} \overline{PA_2}}{\overline{PH}},$$

und dieser Ausdruck führt zu folgender einfachen Konstruktion:

Man lege durch die drei Punkte  $HA_1A_2$  den Kreis, so geht dieser auch durch den Krümmungsmittelpunkt.

Für den Scheitelpunkt  $S$  fällt dieser Hilfskreis mit dem Umkreis des Dreiecks  $OA_1A_2$  zusammen; daher ist für ihn der Krümmungsmittelpunkt der Spiegelpunkt des Punktes  $O$  in Bezug auf die Scheiteltangente.

Um zu beweisen, dass die ermittelten Eigenschaften der Normale nur den polytropischen Kurven zukommen, gehen wir von der Bedingung aus, es sei

$$\overline{PB_1} = \overline{PB_2} = z.$$

Nennen wir  $\varphi$  den Winkel, den  $B_1B_2$  mit der  $x$ -Axe bildet, so ist

$$\text{tang } \alpha = \frac{z \sin \varphi + y}{z \cos \varphi + x}$$

und

$$\text{tang } \alpha = \frac{z \sin \varphi - y}{x - z \cos \varphi},$$

oder auch

$$z(\sin \varphi - \text{tang } \alpha \cos \varphi) = x \text{ tang } \alpha - y,$$

$$z(\sin \varphi + \text{tang } \alpha \cos \varphi) = x \text{ tang } \alpha + y,$$

woraus durch Division folgt:

$$\frac{\operatorname{tang} \varphi - \operatorname{tang} \alpha}{\operatorname{tang} \varphi + \operatorname{tang} \alpha} = \frac{x \operatorname{tang} \alpha - y}{x \operatorname{tang} \alpha + y},$$

oder

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{x}{y} \operatorname{tang}^2 \alpha.$$

Nun ist

$$\operatorname{tang} \varphi = -\cot \tau = -\frac{dx}{dy},$$

und wenn man setzt

$$\operatorname{tang}^2 \alpha = \frac{\mu}{\lambda},$$

so hat man

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \frac{\lambda}{\mu},$$

und dieser Differentialgleichung genügt nur die Gleichung der polytropischen Kurve

$$x^\lambda y^\mu = a.$$

### Ein Satz über hyperboloidisch gelegene Tetraeder.

Von Dr. Karl Doehlemann in München.

1. Ein bekannter Satz von Chasles\* lautet: Wenn die Verbindungslinien entsprechender Ecken zweier Tetraeder die Erzeugenden eines Hyperboloids sind, so liegen auch die Schnittlinien entsprechender Ebenen auf einem Hyperboloid. Hermes\*\* und Schur\*\*\* haben darauf bezügliche allgemeinere Theoreme angegeben. In neuester Zeit hat Kohn† den Begriff der schiefperspektiven Lage zweier Tetraeder aufgestellt. Er bezeichnet zwei Tetraeder als schiefperspektiv, wenn das eine in das andere durch eine gescharte Kollineation des Raumes übergeführt werden kann. Es gibt dann zwei Gerade, die Axen dieser Kollineation, welche sowohl die vier Verbindungslinien der Ecken, als auch die vier Schnittlinien entsprechender Ebenen der Tetraeder treffen und es zeigt sich weiter, dass die Existenz zweier solchen Geraden auch die hinreichende Bedingung für die schiefperspektive Lage abgibt.

Es entsteht nun die Frage: Kann es auch vorkommen, dass bei zwei hyperboloidisch gelegenen Tetraedern das Hyperboloid der Verbindungslinien der Ecken identisch wird mit dem Hyperboloid der Schnittgeraden entsprechender Ebenen? In diesem Falle giebt es dann unendlich viele Gerade, welche gleichzeitig diesen acht Geraden begegnen.

2. Das eine der beiden Tetraeder,  $ABCD$ , sei als Fundamentaltetraeder gewählt. Die Elemente irgend einer symmetrischen Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

\* Chasles: Aperçu historique, Note XXXII.

\*\* Hermes: Crelles Journal Bd. 56, 1858.

\*\*\* Schur: Mathematische Annalen Bd. 19, 1882.

† Kohn: Sitzungsberichte der Wiener Akademie 1898.

benutzen wir, um vier Punkte  $A', B', C', D'$  zu definieren in der Art, dass die vier Elemente der ersten Zeile die homogenen Koordinaten des Punktes  $A'$ , die der zweiten Zeile die des Punktes  $B'$  u. s. f. Dann bilden die vier Verbindungsgeraden  $AA', BB', CC', DD'$  die Erzeugenden eines Hyperboloids (Hermes l. c.) und die Gleichungen dieser vier hyperboloidischen Geraden  $a, b, c, d$  werden also:

$$1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x_2}{a_{12}} = \frac{x_3}{a_{13}} = \frac{x_4}{a_{14}} \\ \frac{x_1}{a_{21}} = \frac{x_3}{a_{23}} = \frac{x_4}{a_{24}} \\ \frac{x_1}{a_{31}} = \frac{x_2}{a_{32}} = \frac{x_4}{a_{34}} \\ \frac{x_1}{a_{41}} = \frac{x_2}{a_{42}} = \frac{x_3}{a_{43}} \end{array} \right.$$

Es ist jetzt das Hyperboloid  $H$  der vier Geraden  $a, b, c, d$  zu bestimmen. Wir benutzen dazu eine Form der Darstellung, welche Professor G. Bauer in seinen Vorträgen anwendet. Sind nämlich

$$p'_{ip}, p''_{ip}, p_{ip}$$

die homogenen Koordinaten von drei Geraden, so ist das durch dieselbe bestimmte Hyperboloid gegeben durch:

$$\left| \begin{array}{cccc} p_{12}x_2 + p_{13}x_3 + p_{14}x_4 & p_{21}x_1 + p_{23}x_3 + p_{24}x_4 & p_{31}x_1 + p_{32}x_2 + p_{34}x_4 & \\ p'_{12}x_2 + p'_{13}x_3 + p'_{14}x_4 & p'_{21}x_1 + p'_{23}x_3 + p'_{24}x_4 & p'_{31}x_1 + p'_{32}x_2 + p'_{34}x_4 & \\ p''_{12}x_2 + p''_{13}x_3 + p''_{14}x_4 & p''_{21}x_1 + p''_{23}x_3 + p''_{24}x_4 & p''_{31}x_1 + p''_{32}x_2 + p''_{34}x_4 & \end{array} \right| = 0.$$

Wendet man dies auf die Geraden  $a, b, c$  an, so erhält man das Hyperboloid

$$2) \quad \left\{ \begin{array}{l} H = a_{31}(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23})x_1x_2 + a_{24}(a_{14}a_{23} - a_{12}a_{34})x_1x_3 \\ + a_{23}(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24})x_1x_4 + a_{12}(a_{13}a_{24} - a_{14}a_{23})x_3x_4 \\ + a_{13}(a_{14}a_{23} - a_{12}a_{34})x_2x_4 + a_{14}(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24})x_2x_3 = 0. \end{array} \right.$$

Die in den Klammern stehenden Determinanten geben durch ihr Verschwinden die Bedingungen, dass sich zwei der Geraden  $a, b, c, d$  schneiden. Da wir voraussetzen, dass die Verbindungslinien  $a, b, c, d$  hyperboloidisch liegen, so müssen wir also diese Klammerausdrücke als von Null verschieden annehmen.

3. Andererseits bestimmen wir jetzt das Hyperboloid  $H'$ , auf dem die vier Schnittlinien  $a_1, b_1, c_1, d_1$  der Ebenen  $BCD$  und  $B'C'D'$   $ACD$  und  $A'C'D'$ ,  $ABD$  und  $A'B'D'$ , endlich  $ABC$  und  $A'B'C'$  liegen. Die vier Ebenen  $B'C'D', A'C'D', A'B'D', A'B'C'$  sind der Reihe nach:

$$3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 = 0, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 = 0, \\ \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \alpha_{34}x_4 = 0, \\ \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 + \alpha_{44}x_4 = 0, \end{array} \right.$$

wobei  $\alpha_{ik}$  die zu  $a_{ik}$  gehörige Unterdeterminante. Bringen wir diese Ebenen zum Schnitt mit den entsprechenden Seitenflächen des ersten Tetraeders, so sind die vier Geraden  $a_1, b_1, c_1, d_1$  bezw.

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \alpha_{14}x_4 &= 0, \\ x_2 &= 0, & \alpha_{21}x_1 & \quad \quad \quad \alpha_{23}x_3 + \alpha_{24}x_4 = 0, \\ x_3 &= 0, & \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 & \quad \quad \quad \alpha_{34}x_4 = 0, \\ x_4 &= 0, & \alpha_{41}x_1 + \alpha_{42}x_2 + \alpha_{43}x_3 & \quad \quad = 0. \end{aligned}$$

Für das durch diese vier Geraden bestimmte Hyperboloid  $H'$  erhält man dann unter Anwendung der gleichen Determinante und nach einigen leichten Umformungen

$$4) \quad \left\{ \begin{aligned} H' &= \alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{14}x_1^2 + \alpha_{21}\alpha_{23}\alpha_{24}x_2^2 + \alpha_{31}\alpha_{32}\alpha_{34}x_3^2 + \alpha_{41}\alpha_{42}\alpha_{43}x_4^2 \\ &+ \alpha_{12}(\alpha_{14}\alpha_{23} + \alpha_{24}\alpha_{13})x_1x_2 + \alpha_{13}(\alpha_{14}\alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{34})x_1x_3 \\ &+ \alpha_{14}(\alpha_{13}\alpha_{24} + \alpha_{12}\alpha_{34})x_1x_4 + \alpha_{23}(\alpha_{24}\alpha_{31} + \alpha_{34}\alpha_{21})x_2x_3 \\ &+ \alpha_{24}(\alpha_{23}\alpha_{41} + \alpha_{12}\alpha_{34})x_2x_4 + \alpha_{34}(\alpha_{32}\alpha_{41} + \alpha_{13}\alpha_{24})x_3x_4 = 0. \end{aligned} \right.$$

4. Stellen wir jetzt die Bedingungen dafür auf, dass das Hyperboloid  $H'$  der Schnittgeraden mit dem Hyperboloid  $H$  der Verbindungsgeraden zusammenfalle. Dann müssen zunächst in der Gleichung 4) die Glieder mit  $x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2$  verschwinden. Dies können wir auf zweierlei Weise erreichen: entweder setzen wir zwei  $\alpha$  mit verschiedenen Zeigern = 0 z. B.  $\alpha_{12} = 0$  und  $\alpha_{34} = 0$ , oder wir nehmen an, dass drei  $\alpha$  mit einem gemeinsamen Zeiger verschwinden, z. B.:

$$\alpha_{12} = 0, \quad \alpha_{13} = 0, \quad \alpha_{14} = 0.$$

Prüfen wir zunächst die letztere Annahme, so hat sie, vermöge der Gleichungen 3) sofort zur Folge, dass die Ebene  $B'C'D'$  mit der Ebene  $BCD$  und  $A'$  mit  $A$  zusammenfällt. Überdies verschwindet dann überhaupt die ganze Gleichung 4). Dadurch verliert diese Annahme, sofern sie eben nur einen Spezialfall vorstellt, ihr Interesse.

Bleiben wir also bei der ersten Voraussetzung, wonach

$$5) \quad \alpha_{12} = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_{34} = 0.$$

Dies hat zur Folge, dass in Gleichung 4) auch die Glieder mit  $x_1x_2$  und  $x_3x_4$  wegfallen. Das Gleiche muss demnach auch in der Gleichung 2) eintreten und da die Klammerausdrücke nicht verschwinden dürfen, so muss also sein

$$6) \quad \alpha_{34} = 0 \quad \text{und} \quad \alpha_{12} = 0.$$

Die geometrische Bedeutung der Bedingungen 5) und 6) ist sofort anzugeben:  $\alpha_{12} = 0$  bedeutet nach 3), dass die Ebene  $B'C'D'$  durch  $B$  und die Ebene  $A'C'D'$  durch  $A$  hindurchgeht. Vermöge  $\alpha_{34} = 0$  gehen die Ebenen  $A'B'D'$  und  $A'B'C'$  bezw. durch  $D$  und  $C$ . Endlich liegen vermöge der Bedingungen 6)  $A'$  in  $ACD$ ,  $B'$  in  $BCD$ ,  $C'$  in  $ABC$ ,  $D'$  in  $ABD$ . Dann sind aber die beiden Tetraeder  $ABCD$  und  $A'B'C'D'$  einander gleichzeitig ein- und umschrieben und zwar nach der von Möbius

gefundenen Art.\* Die den Ecken einer Fläche entsprechenden Ebenen schneiden sich immer in einem Punkte dieser Fläche. Es tritt dann auch eine Zuweisung der Ecken der beiden Tetraeder ein. Schreibt man die darnach einander zugeordneten Ecken der beiden Tetraeder unter einander, so ergibt sich für die beiden Tetraeder das Schema

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ B' & A' & D' & C' \end{array}.$$

5. Führt man in die Gleichungen von  $H$  und  $H'$  die Bedingungen 5) und 6) ein, so reduzieren sich dieselben auf die folgenden:

$$\begin{aligned} 7) & \quad a_{24} a_{14} a_{23} x_1 x_3 - a_{23} a_{13} a_{24} x_1 x_4 + a_{13} a_{14} a_{22} x_2 x_4 - a_{14} a_{13} a_{24} x_2 x_3 = 0, \\ 8) & \quad \alpha_{13} \alpha_{14} \alpha_{32} x_1 x_3 + \alpha_{14} \alpha_{13} \alpha_{42} x_1 x_4 + \alpha_{24} \alpha_{23} \alpha_{41} x_2 x_4 + \alpha_{23} \alpha_{24} \alpha_{31} x_2 x_3 = 0. \end{aligned}$$

Die gleichen Bedingungen reichen aber schon aus, um 7) und 8) identisch werden zu lassen. Dies ist ja der Fall, wenn

$$\frac{a_{24} a_{14} a_{23}}{\alpha_{13} \alpha_{14} \alpha_{32}} = - \frac{a_{23} a_{13} a_{24}}{\alpha_{14} \alpha_{13} \alpha_{42}} = \frac{a_{13} a_{14} a_{23}}{\alpha_{14} \alpha_{23} \alpha_{41}} = - \frac{a_{14} a_{13} a_{24}}{\alpha_{23} \alpha_{24} \alpha_{31}}$$

und diese Beziehungen sind erfüllt, da mit Rücksicht auf 5) und 6) und nach bekannten Determinantensätzen

$$9) \quad \begin{cases} a_{13} \alpha_{23} + a_{14} \alpha_{24} = 0, \\ a_{23} \alpha_{13} + a_{24} \alpha_{14} = 0, \\ a_{31} \alpha_{41} + a_{32} \alpha_{42} = 0, \\ a_{41} \alpha_{31} + a_{42} \alpha_{32} = 0. \end{cases}$$

Die Geraden  $a_1, b_1, c_1, d_1$  werden dann aber der Reihe nach:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & \alpha_{13} x_3 + \alpha_{14} x_4 &= 0, \\ x_2 &= 0, & \alpha_{23} x_3 + \alpha_{24} x_4 &= 0, \\ x_3 &= 0, & \alpha_{31} x_1 + \alpha_{32} x_2 &= 0, \\ x_4 &= 0, & \alpha_{41} x_1 + \alpha_{42} x_2 &= 0, \end{aligned}$$

und mit Bezug auf die Relationen 9) ergibt sich, dass dies die Geraden  $b, a, d, c$  sind. Es sind also nicht nur die Hyperboloide  $H$  und  $H'$  identisch, sondern es fallen überdies  $a_1, b_1, c_1, d_1$  bezw. mit  $b, a, d, c$  zusammen. Dies ist geometrisch ohne weiteres einzusehen, denn die Ebenen  $ABC$  und  $A'B'C'$  z. B. müssen sich in der Linie  $CC'$  schneiden, da  $ABC$  durch  $C'$  und  $A'B'C'$  durch  $C$  geht.

6. Zwei Möbiussche Tetraeder liegen bekanntlich auf dreifache Weise hyperboloidisch. Dementsprechend erhalten wir noch folgende zwei hyperboloidische Quadrupel:

$$AD', BC', CB', DA',$$

sowie

$$AC', BD', CA', DB'.$$

Der Beweis ergibt sich leicht unter Benutzung der Gleichungen 5), welche übrigens folgende Form annehmen:

\* Zwei Tetraeder können auch noch auf drei verschiedene andere Weisen einander gleichzeitig ein- und umschrieben sein, wie G. Bauer gezeigt hat: Sitzungsbericht der bayer. Akademie, 1897.

$$a_{33} a_{14} a_{24} + a_{44} a_{13} a_{23} = 0,$$

$$a_{11} a_{23} a_{24} + a_{22} a_{13} a_{24} = 0.$$

Aus der ersten derselben ist das Verhältnis  $\frac{a_{33}}{a_{44}}$ , aus der zweiten das Verhältnis  $\frac{a_{11}}{a_{22}}$  bestimmt, wenn man die übrigen  $a_{ik}$  mit Beachtung von 6) beliebig wählt.

Es hat sich also gezeigt:

„Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass in zwei hyperboloidisch gelegenen Tetraedern das Hyperboloid der Verbindungslinien zusammenfalle mit dem Hyperboloid der Schnittgeraden, ist die, dass die beiden Tetraeder einander nach der Möbius'schen Art gleichzeitig ein- und umschrieben sind. Es fallen dann und nur dann die ersten vier Geraden mit den letztgenannten je einzeln zusammen.“

München, März 1899.

### Über eine Eigenschaft der Hyperbel.

Von W. Fr. Meyer in Königsberg in Preussen.

Die aus den Elementen der Integralrechnung bekannte Formel

$$I. \quad 2 \int \sqrt{1+x^2} dx = x \sqrt{1+x^2} + l(x + \sqrt{1+x^2})$$

erlaubt eine einfache geometrische Deutung und führt so zu einer eleganten Eigenschaft der Hyperbel.

Es sei (vergl. die Figur)

$$1) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel,  $P(x, y)$  ein beliebiger Punkt von ihr (etwa im ersten Quadranten);  $PX, PY$  seine rechtwinkligen Koordinaten. Der Hyperbelbogen  $PS$  begrenzt, einmal zusammen mit den Strecken  $PX, XS$  eine Fläche  $J_x$ , andererseits mit den Strecken  $PY, YO, OS$  eine Fläche  $J_y$ . Zwischen beiden Flächen besteht offenbar die Relation:\*

$$2) \quad J_y + J_x = xy.$$

Die Formel I. geht daher über in

$$3) \quad J_y - J_x = ab \cdot l\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right).$$

Um die geometrische Bedeutung der rechten Seite von 3) zu erkennen, lege man durch  $P$  eine Parallele zur nicht anliegenden Asymptote, bis sie die anliegende in  $P_1$  trifft;  $PP_1$  werde mit  $\eta$ ,  $OP_1$  mit  $\xi$  bezeichnet.

Die Gleichung der Hyperbel in den schiefwinkligen Asymptotenkoordinaten  $\xi, \eta$  ist bekanntlich:

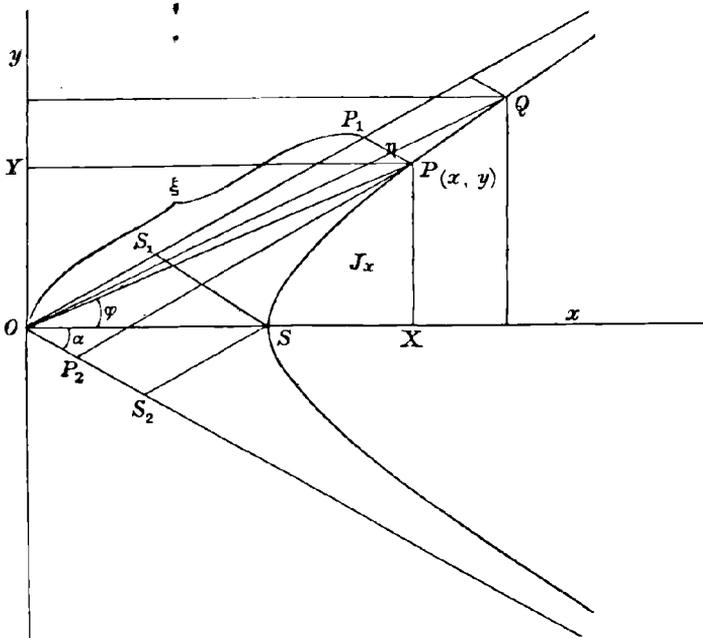
\* Diese Relation ist äquivalent mit der Formel  $d(xy) = x dy + y dx$ .

$$4) \quad \xi \eta = \frac{1}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{ab}{2},$$

wo  $\frac{ab}{2}$  der Inhalt des für die Hyperbel konstanten Parallelogramms ist, und  $\xi$  wird, in den rechtwinkligen Koordinaten  $x, y$  ausgedrückt:

$$5) \quad \xi = \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}} \cdot \frac{1}{\sin 2\alpha} = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{a^2 + b^2}{2ab} \\ = \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}.$$

Legt man also auch durch den Scheitel  $S$  eine Parallele  $SS_1$  zu  $PP_1$ , und bezeichnet die durch den Hyperbelbogen  $PS$  nebst den Strecken  $SS_1$ ,



$S_1P_1, P_1P$  begrenzte Fläche als „Asymptotenfläche“  $A$ ,\* so zeigt sich nach Einsetzung der Grenzen, dass

$$6) \quad A = \frac{ab}{2} \ln \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)$$

wird, somit wegen 3), als geometrischer Inhalt von I:

$$II. \quad J_y - J_x = 2A.$$

Um diese Thatsache noch einfacher zu formulieren, ziehe man den Radiusvektor  $OP = r$ , so begrenzt dieser, zusammen mit  $OS$  und dem

\*  $A$  ist übrigens inhaltsgleich mit der andern Asymptotenfläche, die man erhält, wenn man durch  $P$  und  $S$  Parallelen  $PP_2, SS_2$  zur andern Asymptote legt.

Hyperbelbogen  $SP$  eine Sektorfläche  $\Sigma$ , die „Mittelpunktssektor“ des Bogens  $SP$  heisse. Die Figur\* zeigt, dass

$$7) \quad \Sigma + J_x = \frac{1}{2}xy,$$

dadurch nimmt aber II. die Gestalt\*\* an:

$$\text{III.} \quad \Sigma = A.$$

Setzt man diese Relation für zwei, auf derselben Seite von  $S$  gelegene Punkte  $P, Q$  der Hyperbel an und subtrahiert, so kommt:

IV. „Für einen, den Scheitel nicht\*\*\* enthaltenden Hyperbelbogen ist der Mittelpunktssektor inhaltsgleich mit der Asymptotenfläche.“

Nummehr zeigen wir die Umkehrung, d. h. dass die Eigenschaft II (oder III oder IV) für die Hyperbel, genauer, für die Hyperbeln von gegebenen Axen- und Asymptotenrichtungen charakteristisch† ist.

Wir suchen alle Kurven, die der Forderung II genügen, d. h. die Differentialgleichung

$$\text{V.} \quad xy' - y = 2 \frac{dA}{dx}$$

erfüllen. Rechts führe man  $\xi(5)$  als Zwischenvariable ein, setze demnach:

$$8) \quad \frac{dA}{dx} = \frac{dA}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx}.$$

Um hier die beiden Faktoren rechts bequem darzustellen, führe man die Asymptotenrichtung explizite ein, i. e. die Grösse:

$$9) \quad \kappa = \operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

\* Die Formel 7) ist äquivalent mit der Integralformel

$$\int r^2 d\varphi = xy - 2 \int y dx.$$

\*\* Die Formel lässt sich auch (wenn man noch die Parallelen  $SS_2, PP_2$  zur andern Asymptote zieht) elementargeometrisch ableiten, damit aber auch die Integralformel I., falls man nur noch

$$\int \frac{dx}{x} = \iota x$$

zu Hilfe nimmt. In den Lehrbüchern wird die Formel I. in der Regel nur verifiziert.

\*\*\* Um auch den Fall mit zu umfassen, dass der Hyperbelbogen den Scheitelpunkt enthält, bedarf die Formulierung von IV. einer geringen Modifikation.

† Inhaltlich muss sich daher die Differentialgleichung V. mit

$$\frac{d(\xi \eta)}{dx} = 0$$

decken. In der That ergibt eine einfache Rechnung, dass

$$\frac{d(\xi \eta)}{dx} = \frac{1 + \kappa^2}{4 \kappa^2} \frac{d}{dx} (x^2 \kappa^2 - y^2)$$

ist.

Dann geht 1) über in

$$1') \quad x^2 \kappa^2 - y^2 = a^2 \kappa^2,$$

während  $\sin 2\alpha$  den Wert

$$10) \quad \sin 2\alpha = \frac{2\kappa}{1+\kappa^2}$$

annimmt. Dann wird

$$11) \quad \frac{dA}{d\xi} = \eta \sin 2\alpha = \frac{x\kappa - y}{\sqrt{1+\kappa^2}},$$

$$12) \quad \frac{d\xi}{dx} = (\kappa + y') \frac{\sqrt{1+\kappa^2}}{2\kappa},$$

somit

$$13) \quad \frac{dA}{dx} = \frac{1}{2\kappa} (x\kappa - y)(\kappa + y'),$$

$$14) \quad 2 \frac{dA}{dx} = \frac{1}{\kappa} (x\kappa^2 - yy') + (xy' - y).$$

Damit reduziert sich aber die Differentialgleichung V. auf:

$$15) \quad x\kappa^2 - yy' - 0$$

d. i. die Differentialgleichung der Hyperbeln 1') bei festem  $\kappa$ .

Das liefert den Satz:

VI. „Durch die Spitze  $O$  eines rechtwinkligen Axensystems  $Ox, Oy$  lege man zwei, gegen die  $x$ -Axe gleichgeneigte Gerade  $a_1, a_2$ , deren erstere den ersten Quadranten passieren möge.  $P$  sei ein fester Punkt im ersten Quadranten,  $Q$  ebendasselbst und auf der nämlichen Seite von  $a_1$  ein variabler Punkt. Soll dann für einen Bogen  $PQ$  stets der Mittelpunktssektor gleich der „ $a_1$ -Fläche“\* sein, so ist  $PQ$  Bogen der Hyperbel, die  $Ox, Oy$  zu Axen,  $a_1, a_2$  zu Asymptoten hat und durch  $P$  geht.“

Es ist unschwer, den Satz auf eine beliebige lineare Relation

$$16) \quad nJ_y - mJ_x - 2\kappa\rho A = 0$$

mit konstanten Koeffizienten  $n, m, \rho$  auszudehnen. Denn eine analoge Rechnung liefert die entsprechende Differentialgleichung in der Gestalt:

$$17') \quad y' = \frac{x \cdot \kappa^2 \rho + y(m - \kappa \rho)}{x(n - \kappa \rho) + y \rho},$$

die nach bekannter Methode sofort integrierbar ist, und umgekehrt gehört zu jeder Differentialgleichung

$$18) \quad y' = \frac{\alpha x + \beta y}{\gamma x + \delta y}$$

(bei geeigneter Einschränkung der Vorzeichen der Koeffizienten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ) eine lineare Relation 16) mit reell-geometrischer Bedeutung.

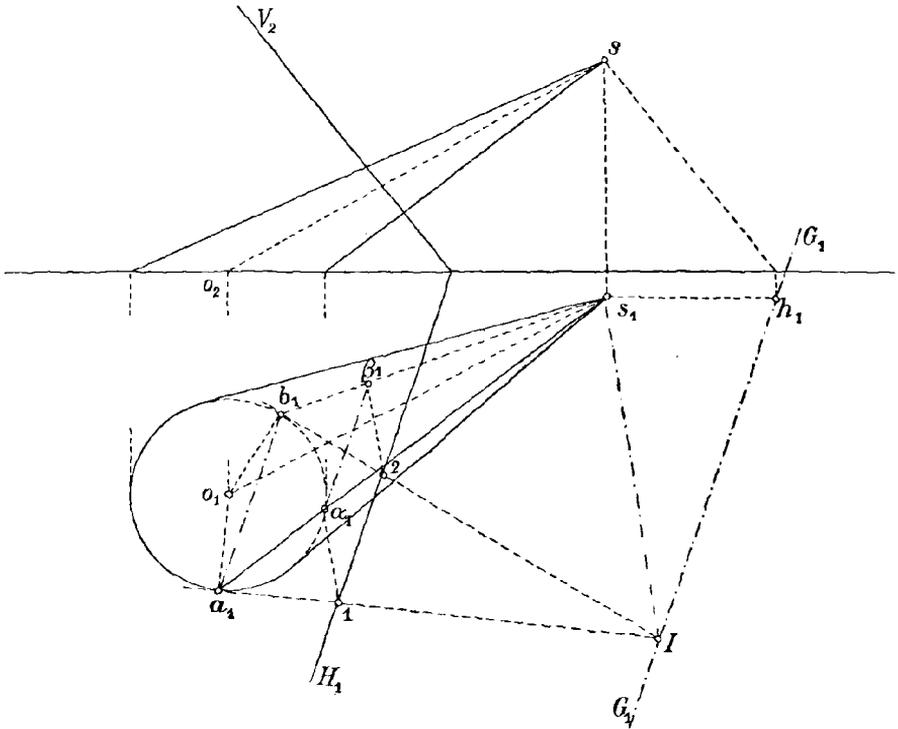
\* Die Bezeichnung „ $a_1$ -Fläche“ ist das Analogon zu „Asymptotenfläche“.

### Zur Konstruktion der konjugierten Durchmesser ebener Kegelschnitte.

Von Josef Adameczik, a.o. Professor a. d. k. k. Bergakademie in P $\check{r}$ ibram.

Für jeden ebenen Kegelschnitt ist die Schnittkurve, für die Kegelspitze als Centrum, perspektivisch kollinear zur Basis- oder Leitkurve der Kegel-  
fläche. Legt man durch die Kegelspitze eine zur Schnittebene parallele Ebene, so erhält man in der Spur dieser Ebene auf der Basisebene die zur Kollineationsaxe parallele Gegenaxe. Diese Gegenaxe entspricht dem Bilde

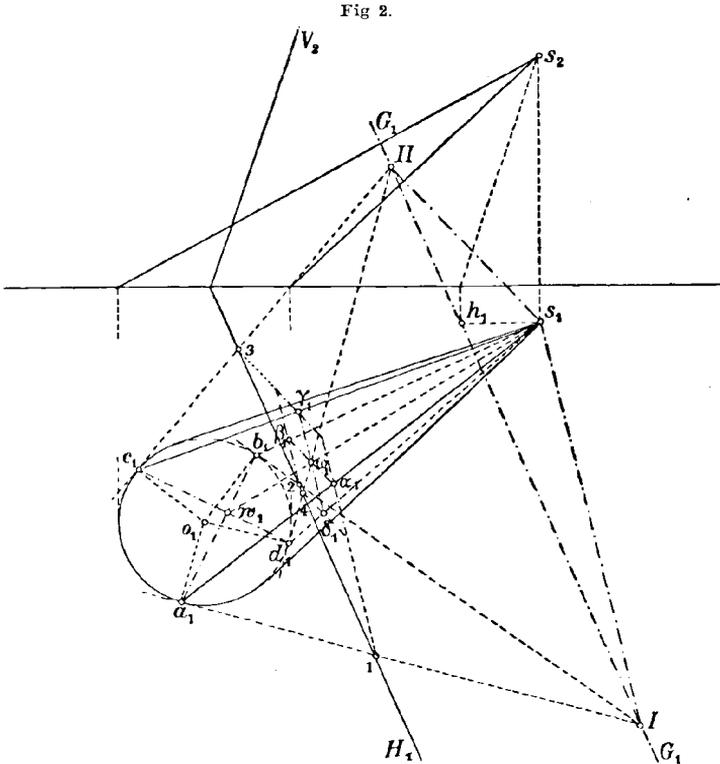
Fig. 1.



einer unendlich fernen Geraden der Schnittebene, sobald die Basisebene als Bildebene gedacht wird. Demnach werden zwei in der Schnittebene gezogene parallele Gerade ihren Verschwindungspunkt in dieser Gegenaxe haben müssen und dieser wird erhalten, wenn man durch das Centrum, also die Kegelspitze einen Parallelstrahl zu diesen Geraden zieht, bis derselbe die Gegenaxe im gesuchten Verschwindungspunkte trifft. Da sich die einander entsprechenden Geraden auf der Kollineationsaxe schneiden müssen, so erhält man auch sofort im Schnitte der gezogenen Geraden mit der Kollineationsaxe je einen weiteren Punkt der diesen Geraden entsprechenden Bilder in der Basisebene. Einander zugehörige Punkte auf diesen Geraden

werden leicht mittels der durch das Centrum gezogenen Kollineationsstrahlen (in unserem Falle Kegelerzeugende) erhalten. Die Tangenten in den Endpunkten eines Durchmessers einer Ellipse sind parallel. Demnach kann man nach dem Vorigen sofort irgend einen beliebigen Durchmesser eines Kegelschnittes konstruieren.

Man zieht von einem beliebigen Punkte I der Gegenaxe  $G_1$  (siehe Fig. 1) die zwei Tangenten an die Basiskurve, in den Berührungspunkten

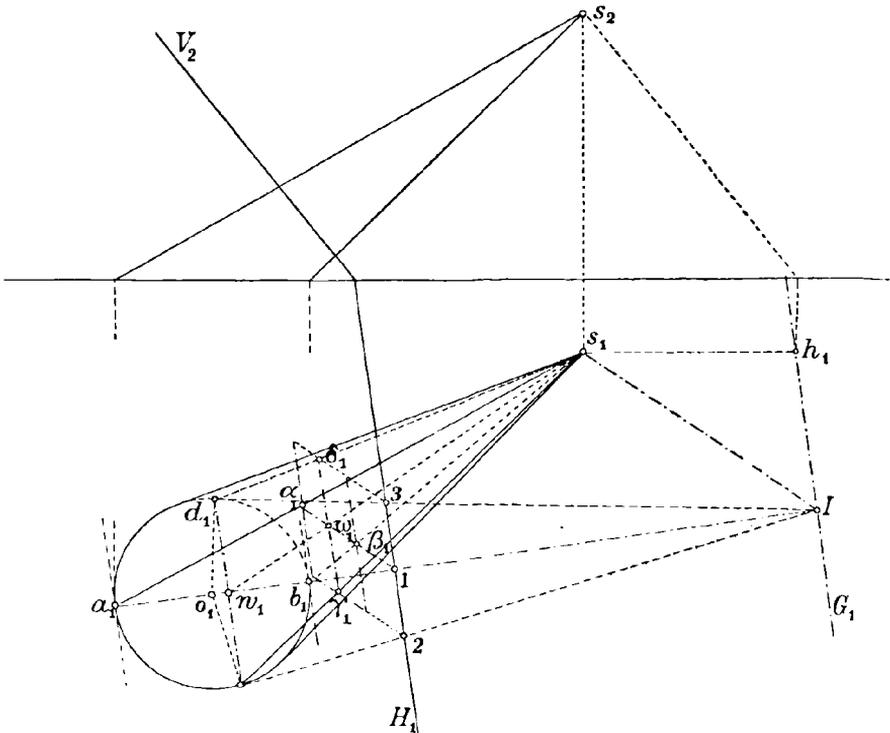


$a_1$  und  $b_1$  zieht man die zugehörigen Erzeugenden des Kegels, sowie durch die Schnittpunkte dieser Tangenten mit der Spur der Schnittebene (Kollineationsaxe) die zu  $s_1I$  parallelen Geraden (1) $\alpha_1$  und (2) $\beta_1$ . — Letztere entsprechen den Tangenten in den Endpunkten des Durchmessers  $\alpha_1\beta_1$ .

Um einen zweiten konjugierten Durchmesser zu erhalten, hat man nach durchgeführter obiger Konstruktion (siehe Fig. 2) nur  $s_1II$  parallel zum erhaltenen Durchmesser  $\alpha_1\beta_1$  zu ziehen, um im Punkte II der Gegenaxe jenen Punkt zu finden, von welchem aus die Tangenten an die Basiskurve  $IIc_1$  und  $II d_1$  zu ziehen sind, worauf man auf gleiche Weise wie vorher den konjugierten Durchmesser  $\gamma_1\delta_1$  erhält, da die Tangenten in  $\gamma_1$  und  $\delta_1$  eben parallel zu  $\alpha_1\beta_1$  erhalten werden.

Im allgemeinen wird es immerhin am zweckmässigsten sein, durch Ziehen der zur Spur der Schnittebene parallelen Tangenten an die Basiskurve (siehe Fig. 3) jene Punkte  $a_1$  und  $b_1$  zu erhalten, welche einerseits den höchsten Punkt  $\alpha_1$  und andererseits den tiefsten Punkt  $\beta_1$  der Schnittkurve ergeben, für welche also die Vertikalprojektionen der Tangenten horizontal erscheinen; man reicht dann auch bei dieser Konstruktionsmethode mit einem einzigen Hilfs-

Fig. 3.



punkte I der Gegenaxe aus. Dabei wird aber, wie sich jedermann leicht überzeugen kann, die Konstruktion des Parallelogramms der Schnittkurve mit viel grösserer Sicherheit und Genauigkeit erhalten, als wenn man den in allen Lehrbüchern beschriebenen Vorgang einhält, nach Erhalt des Durchmessers  $\alpha_1\beta_1$ , diesen in  $\omega_1$  zu halbieren, damit den zugehörigen Punkt  $w_1$  und aus diesem erst die Punkte  $c_1$  und  $d_1$  der Basis zu bestimmen. Dies führt bei einigermaßen ungünstigen Annahmen überhaupt nicht zu entsprechenden Resultaten, da die Konstruktionsfehler das Resultat entstellen. Die Drehung der Tangenten in der Nähe der Punkte  $\gamma_1$  und  $\delta_1$  erfolgt so rasch, dass ein Parallelismus der Tangenten (2) $\gamma_1$  und (3) $\delta_1$  mit dem Durchmesser  $\alpha_1\beta_1$  nach letzterer Methode wenigstens nicht so leicht zu erzielen ist, wie durch den hier beschriebenen, gewiss auch einfacheren Vorgang.

# Dynamik der Kurbelgetriebe.

Von

Prof. Dr. HANS LORENZ

in Halle a. S.

---

Schluss.

---

Dieser Satz ist übrigens als Vermutung bereits einmal ausgesprochen worden und zwar von dem schon genannten Ingenieur Fränzel am Schlusse einer Arbeit,\* welche Versuche über die Schwankungen der Winkelgeschwindigkeit von Schiffsmaschinen behandelte. Es entsteht nun die Frage, ob der Satz praktisch verwendbar ist. Bei der Beantwortung derselben dürfen wir nicht den Umstand aus den Augen verlieren, dass von den Bedingungsgleichungen 163a) nur eine beschränkte Zahl verwendbar sind, während die übrigen unberücksichtigt bleiben müssen. Man wird darum niemals ein vollkommen gleichförmig, d. h. geradlinig verlaufendes resultierendes Tangentialdruckdiagramm erwarten dürfen, sondern gewisse Schwankungen desselben in den Kauf nehmen müssen. Würden z. B. alle Einzeldiagramme den Verlauf von Fig. 32 haben, so lehrt unser Beispiel, dass nach der Beseitigung aller Glieder, welche mit Funktionen von  $\varphi$ ,  $2\varphi$  und  $3\varphi$  behaftet sind und schon die Erfüllung von sechs Bedingungsgleichungen erfordern, immer noch erhebliche Schwankungen durch die Funktionen mit  $4\varphi$  unausgeglichen bleiben. Ausserdem darf nicht vergessen werden, dass für den Massenausgleich auch die Bedingungen für das Verschwinden der Momente der Massendrucke eine Rolle spielen, während entsprechende Gleichungen für den Tangentialdruck nicht bestehen.

Dies zeigt sich besonders deutlich bei der Dreikurbelmaschine, welche gewöhnlich mit den Winkeln  $\alpha_2 = 120^\circ$ ,  $\alpha_3 = 240^\circ$  ausgeführt wird. Sind die hin- und hergehenden Massen aller drei Getriebe einander gleich, so verschwinden hierbei bis einschliesslich der Glieder von zweiter Ordnung die Massendrucke, aber die Massendruckmomente bleiben sogar in der ersten Ordnung noch unausgeglichen.

---

\* Umdrehungsgeschwindigkeiten der Schiffsmaschinen, Marine-Rundschau November 1897.

Bei gleicher Verteilung der Arbeiten auf alle drei Getriebe verschwinden ebenfalls die Schwankungen im Drehkraftdiagramm, soweit sie von Funktionen von  $\varphi$  und  $2\varphi$  abhängen, dagegen verschwindet nicht, wie es Gleichung 163a) fordert,

$$\Sigma T_m \cos 3\alpha = 3 T_m,$$

obwohl

$$\Sigma T_m \sin 3\alpha = 0$$

wird. Trotzdem darf man unter diesen Verhältnissen einen sehr gleichförmigen Verlauf des resultierenden Drehkraftdiagramms erwarten, wogegen nicht zu übersehen ist, dass man bei der praktischen Unmöglichkeit, die hin- und hergehenden Massen der Getriebe einander gleich zu machen, auf den Massenausgleich bei diesen Maschinen verzichten muss.

Für die Vierkurbelmaschine bildet naturgemäss der Ausgleich der Momente der Massendrucke, auch wenn derselbe, wie wir sahen, nur in Bezug auf diejenigen erster Ordnung erreichbar ist, eine weitere Einschränkung. Ausserdem erscheint es fraglich, ob die beiden Gleichungen

$$\Sigma T_m \cos 3\alpha = 0, \quad \Sigma T_m \sin 3\alpha = 0$$

oder, was nach der Folgerung aus 163a) auf dasselbe hinausläuft,

$$\Sigma q \cos 3\alpha = 0, \quad \Sigma q \sin 3\alpha = 0,$$

worin  $q$  das Verhältnis irgend einer der hin- und hergehenden Gewichte zu demjenigen des ersten Getriebes bedeutet, mit den beiden andern Gleichungen

$$\Sigma q \cos \alpha = 0, \quad \Sigma q \sin \alpha = 0,$$

$$\Sigma q \cos 2\alpha = 0, \quad \Sigma q \sin 2\alpha = 0$$

überhaupt verträglich sind, ganz abgesehen von den Gliedern mit höheren Vielfachen der Winkel, die wir gar nicht erst berücksichtigen wollen.

Zur Untersuchung dieser Frage wollen wir zunächst einmal die Grössen  $q$  aus den Gleichungen

$$1 + q_2 \cos \alpha_2 + q_3 \cos \alpha_3 + q_4 \cos \alpha_4 = 0,$$

$$q_2 \sin \alpha_2 + q_3 \sin \alpha_3 + q_4 \sin \alpha_4 = 0,$$

$$1 + q_2 \cos 3\alpha_2 + q_3 \cos 3\alpha_3 + q_4 \cos 3\alpha_4 = 0,$$

$$q_2 \sin 3\alpha_2 + q_3 \sin 3\alpha_3 + q_4 \sin 3\alpha_4 = 0$$

in derselben Weise eliminieren, wie früher aus den Gleichungen 55) bis 58).

Wir erhalten alsdann entsprechend Gleichung 62)

$$\left. \begin{aligned} & \sin \alpha_2 \sin 3(\alpha_3 - \alpha_4) + \sin 3\alpha_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_4) \\ & + \sin \alpha_3 \sin 3(\alpha_4 - \alpha_2) + \sin 3\alpha_3 \sin(\alpha_4 - \alpha_2) \\ & + \sin \alpha_4 \sin 3(\alpha_2 - \alpha_3) + \sin 3\alpha_4 \sin(\alpha_2 - \alpha_3) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Zerlegen wir nunmehr die Produkte mit Hilfe der Transformation

$$\sin u \cdot \sin v = \frac{1}{2} \cos(u - v) - \frac{1}{2} \cos(u + v),$$

so wird z. B. aus der ersten Reihe unserer Eliminationsformel:

$$\begin{aligned} & \cos 2(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) \cos(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) \\ & - \cos 2(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) \cos(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} & 2 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) \cos(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) - \cos(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) \\ & - 2 \cos^2(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) \cos(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) + \cos(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4). \end{aligned}$$

Verfahren wir ebenso mit den beiden letzten Reihen und setzen noch wie früher Gleichung 63):

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4) = 2 \cos^2 \frac{\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4}{2} - 1 = 2\xi^2 - 1,$$

$$\cos(\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4) = 2 \cos^2 \frac{\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4}{2} - 1 = 2\eta^2 - 1,$$

$$\cos(-\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = 2 \cos^2 \frac{\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4}{2} - 1 = 2\xi^2 - 1,$$

so geht unsere Gleichung über in

$$\xi^2 \eta^2 (\xi^2 - \eta^2) + \eta^2 \xi^2 (\eta^2 - \xi^2) + \xi^2 \xi^2 (\xi^2 - \xi^2) = 0,$$

oder auch

$$(\xi^2 - \eta^2)(\eta^2 - \xi^2)(\xi^2 - \xi^2) = 0.$$

Diese Gleichung kann also nur bestehen, wenn entweder

$$\xi = \pm \eta \quad \text{oder} \quad \eta = \pm \xi \quad \text{bezw.} \quad \xi = \pm \xi$$

wird, d. h. also, wenn wir uns der Bedeutung der Grössen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\xi$  nach Gleichung 63) erinnern, dass

$$\cos \frac{\alpha + \gamma}{2} = \pm \cos \frac{\alpha - \gamma}{2},$$

oder

$$\cos \frac{\alpha - \gamma}{2} = \mp \cos \frac{\beta - \delta}{2} \quad \text{bezw.} \quad \cos \frac{\beta - \delta}{2} = \mp \cos \frac{\alpha + \gamma}{2}$$

wird. Da alle diese Ergebnisse mit Gleichung 64), welche auch aus der Vereinigung der ersten vier Formeln 163a) hergeleitet werden konnte, unvereinbar sind, so erkennen wir, dass die Berücksichtigung der Bedingungen

$$\sum T_m \cos 3\alpha = 0, \quad \sum T_m \sin 3\alpha = 0$$

für die Vierkurbelmaschine unzulässig ist. Damit fällt aber, wenigstens für diese Maschinengattung wie für die Dreikurbelmaschine der oben abgeleitete Satz überhaupt, da, wie unser Beispiel (Fig. 32) lehrte, die Koeffizienten der Glieder mit  $3\varphi$  ungefähr von demselben Gewichte sind wie diejenigen von  $\varphi$ , und es unzulässig erscheint, unter solchen Gliedern willkürlich einzelne auszugleichen, während die Wirkung der andern bestehen bleibt.

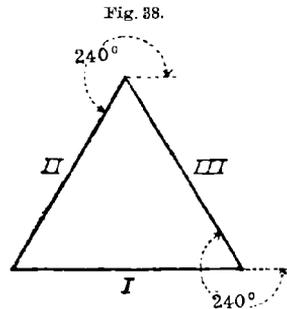
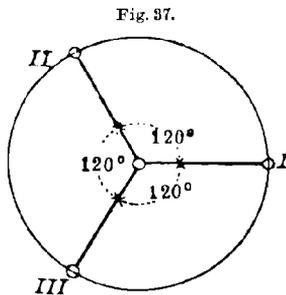
Alle diese Schwierigkeiten fallen dagegen fort, wenn man sich angesichts der überwiegenden Bedeutung der mit Funktionen von  $2\varphi$  behafteten Glieder im Tangentialdruckdiagramm damit begnügt, nur

diese im resultierenden Diagramm zum Verschwinden zu bringen, d. h. also ohne Rücksicht auf den nebenhergehenden Massenausgleich und die beiden Bedingungen

$$164) \quad \Sigma T_m \cos 2\alpha = 0, \quad \Sigma T_m \sin 2\alpha = 0$$

zu erfüllen. Im Grunde genommen heisst dies nichts anderes, als dass man im resultierenden Drehkraftdiagramm auf die Beseitigung der Wirkung der endlichen Schubstangenlänge und der untergeordneten Verschiedenheiten in der Form der Einzeldiagramme verzichtet.

Die Bedingungen 164) besagen dann, dass man einen möglichst gleichförmigen Verlauf des resultierenden Drehkraftdiagramms dann erwarten darf, wenn die auf die einzelnen Kurbeln entfallenden Arbeiten (oder bei gleichen Kurbelradien die mittleren Tangentialdrucke) sich durch Aneinanderreihen mit



den doppelten Kurbelwinkeln zu einem geschlossenen Polygon (Vieleck) vereinigen lassen.\*

Die Konstruktion dieses Polygons der mittleren Tangentialdrucke bzw. Arbeiten ist nun für alle praktischen Fälle sehr einfach und lässt, unbeschadet des Massenausgleichs, dem Konstrukteur einen weiten Spielraum für die Wahl einer passenden Arbeitsverteilung auf die einzelnen Getriebe und für die Kurbelwinkel. Es dürfte zweckmässig sein, die Anwendung des Polygons sogleich an einigen Beispielen zu erläutern. Für die Zweikurbelmaschine gibt es nur eine Lösung, nämlich die gleiche Verteilung der Arbeiten auf beide Kurbeln, welche miteinander einen Winkel von 90° bilden müssen. Dann ist der Doppelwinkel 180° und das Polygon geht in eine in sich zurücklaufende Gerade über.

Für die Dreikurbelmaschine mit Winkeln von 120°, welche Anwendung allein von praktischer Bedeutung ist (Fig. 37), ergibt die

\* Diesen Satz mit seinen praktischen Konsequenzen habe ich zuerst durch einen Vortrag: „On the uniformity of turning moments of marine engines“ vor der Institution of Naval Architects im April 1900 veröffentlicht. Der Vortrag ist in den Transactions dieser Gesellschaft für das Jahr 1900 abgedruckt und auch in die englischen Zeitschriften „Engineering“ und „Engineer“ übergegangen.

Aneinanderreihung ein gleichseitiges Dreieck (Fig.38), sodass man hierbei an die gleiche Arbeitsverteilung gebunden ist. Dass man damit günstige Tangentialdruckdiagramme erhält, ist hinlänglich bekannt, ebenso dass durch jede Abweichung von der gleichen Arbeitsverteilung das Tangentialdruckdiagramm eine Verschlechterung erfährt, wenn man nicht gleichzeitig eine entsprechende Änderung der Kurbelwinkel eintreten lässt.

Bei der Vierkurbelmaschine, welche ja infolge des hier möglichen Massenausgleiches ein höheres Interesse beansprucht, verfügt man über eine beliebig grosse Auswahl von Kurbelstellungen bezw. Arbeitsverteilungen. Ich will voraussetzen, dass die Kurbelwinkel vollständig — etwa durch die Bedingungen des Massenausgleiches — gegeben sind (siehe Fig.39). Alsdann erhält man in Fig.40 mit den Doppelwinkeln ein Viereck, welches zweckmässig so gezeichnet wird, dass die zwei im Kurbelkreise aufeinander folgenden Kurbeln entsprechenden Arbeiten als Polygonseiten sich gegenüber stehen. Von den Seiten dieses Vierecks sind alsdann zwei vollkommen willkürlich und man erhält durch die Längen von *I*, *II*, *III* und *IV*, bezw. durch die Verhältnisse derselben zu einander, auf die es ja allein an-

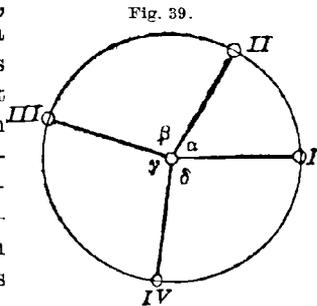
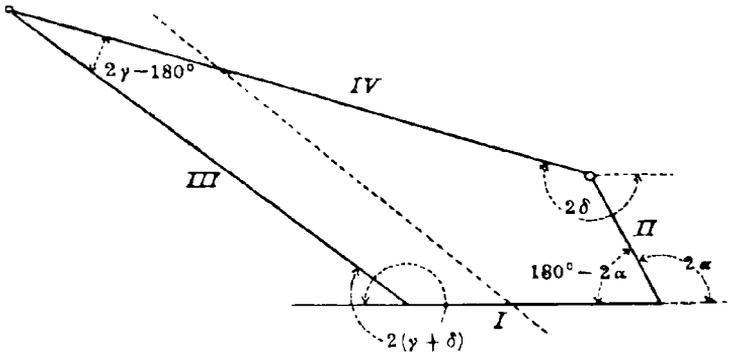


Fig. 40.

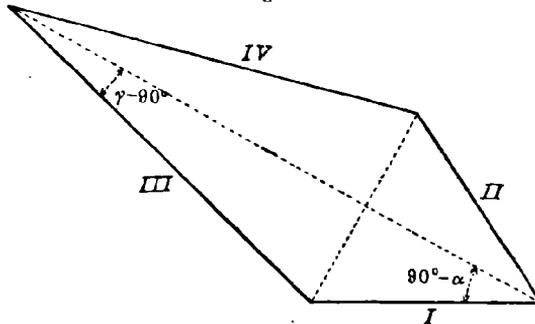


kommen kann, schon eine brauchbare Arbeitsverteilung, welche die Bedingungen 164) erfüllt und ohne weiteres neben dem Massenausgleich bestehen kann. Jede Parallele zu einer dieser vier Seiten ergibt naturgemäss ebenfalls eine brauchbare Arbeitsverteilung, woraus wir schliessen können, dass bei einer Vierkurbelmaschine mit gegebenen Kurbelwinkeln durch die Wahl des Verhältnisses zweier Arbeiten zu einander die ganze Arbeitsverteilung mit Rücksicht auf den günstigen Verlauf des

Drehkraftdiagramms bestimmt ist, ohne dass der Massenausgleich dadurch gestört wird.

Durch die in der Praxis allein übliche symmetrische Anordnung der Kurbeln (und damit nach Schlicks Bedingungen auch der Getriebeebenen unter einander) ist nun dieses Verhältnis gegeben. Das Polygon der Tangentialdrucke bzw. Arbeiten kann alsdann durch eine Diagonale in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegt werden, wie es in Fig. 41 geschehen ist. Da in diesen Dreiecken die beiden Winkel an den Spitzen  $180 - 2\alpha$  und  $2\gamma - 180^\circ$  sind, so ergibt sich mit  $\beta = \delta$

Fig. 41.



für die Verteilung der Arbeiten, welche wir der Kürze halber mit *I*, *II*, *III* und *IV* bezeichnen wollen, die Regel

$$165) \quad \frac{I}{III} = \frac{II}{IV} = \frac{\sin(\gamma - 90^\circ)}{\sin(90^\circ - \alpha)} = -\frac{\cos \gamma}{\cos \alpha}$$

und

$$166) \quad I = II, \quad III = IV.$$

Dieser Fall ist besonders wichtig für Dreifachexpansionsmaschinen, deren Niederdruckzylinder, um nicht zu grosse Dimensionen anzunehmen, geteilt werden muss, wodurch eine Vierkurbelmaschine entsteht. Man erkennt übrigens auch, dass, wenn das Verhältnis

$$I : III = II : IV$$

gegeben ist, durch Gleichung 165) und die Schlicksche Formel 65):

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$$

die beiden Winkel  $\alpha$  und  $\gamma$  selbst berechnet werden können. Für die Praxis wird man es indessen vorziehen, die Winkel aus dem Abstandsverhältnis der Getriebeebenen zu bestimmen und daraus erst mit 165) die Arbeitsverteilung berechnen. Jedenfalls ist dieses Verfahren höchst einfach und zur Vermeidung grosser Baulängen der Maschinen auch zweckmässig. Als Beispiel hierfür erwähne ich das Diagramm\* der

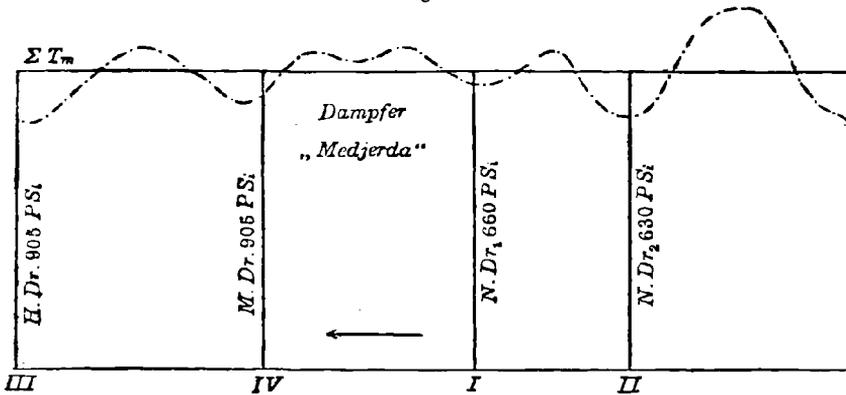
\* In der Figur sind die Linien, an denen die Arbeiten verzeichnet sind, mit den Abständen (in Bogenmaß, wenn die ganze Länge der Figur  $2\pi$  beträgt) der Kurbeln im Kurbelkreise von einander eingetragen, wobei, wie der Pfeil andeutet, die Hochdruckkurbel I vorausläuft.

Maschine des Dampfers „Medjerda“ (Fig. 42), bei welchem der Hoch- und Mitteldruckcylinder je 905  $PS_i$  (indizierte Pferdestärken), die beiden Niederdruckcylinder dagegen 660 bzw. 630  $PS_i$  leisteten, während die Kurbelwinkel

$$\alpha = 64,5^\circ, \quad \beta = \delta = 94,25^\circ \quad \text{und} \quad \gamma = 107^\circ$$

betragen. Die Bedingung 165) ist hier, wenn man für jeden der Niederdruckcylinder den Mittelwert 645  $PS_i$  einführt, fast genau er-

Fig. 42.



füllt und der Verlauf des Drehkraftdiagramms in der That ein sehr günstiger, obwohl die Erbauer, die Firma Wigham, Richardson & Co. in Newcastle upon Tyne (England) dazu nur durch Probieren, ohne Kenntnis unserer Formel 165) gelangten.

Bei Maschinen mit vierfacher Expansion ist es nun mit Rücksicht auf ein gleiches Temperaturgefälle des arbeitenden Dampfes in

Fig. 43.

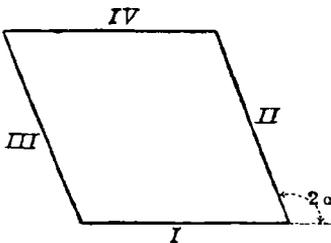
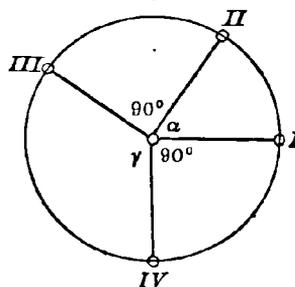


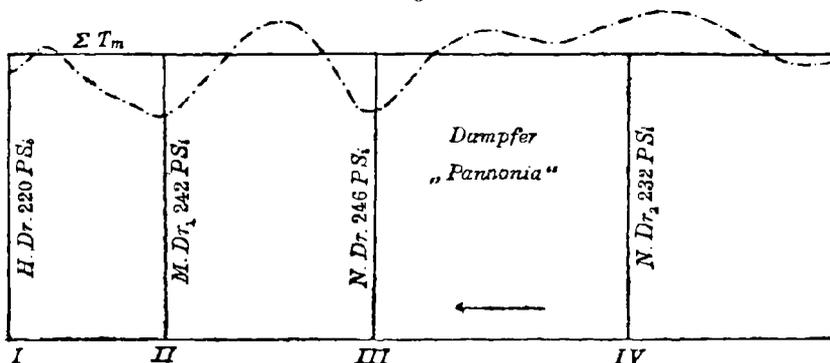
Fig. 44.



den einzelnen Cylindern häufig erwünscht, die Arbeiten auf alle Kurbeln gleichmässig zu verteilen, wodurch das Polygon der mittleren Tangentialdrucke in einen Rhombus übergeht (siehe Fig. 43). Da hierin je zwei Seiten einander parallel sind, so müssen die entsprechenden Kurbeln im Kurbelkreis nach 165) mit einander rechte Winkel bilden, wie dies in Fig. 44 angedeutet ist, d. h.: Sollen in einer Vierkurbel-

maschine die Arbeiten auf alle vier Kurbeln gleich verteilt sein, so fordert der günstigste Verlauf des resultierenden Drehkraftdiagramms zwei einander im Kurbelkreis gegenüberstehende rechte Winkel, während die Wahl eines der beiden andern Winkel, welche sich natürlich zu  $180^\circ$  ergänzen müssen, freisteht. Sind zwei rechte Winkel im Kurbelkreis gegeben, so kann man auch durch eine Parallele zu einer der Seiten in Fig. 43 eine andere Arbeitsverteilung erzielen, sodass also der letzte Satz in seiner Umkehrung nicht allgemein gilt. Indessen müsste alsdann immer  $I = IV$  und  $II = III$  sein, was infolge der Dimensionierung der Cylinder nur selten mit anderweitigen Forderungen (z. B. derjenigen des Verschwindens der Massendruckmomente) vereinbar erscheint, so dass es einfacher ist,

Fig. 45.



ein für allemal die beiden Winkel  $\beta = \delta = 90^\circ$  als an die gleiche Arbeitsverteilung geknüpft festzuhalten. Als Beispiel füge ich das Diagramm der aus den Werkstätten der schon oben genannten englischen Firma stammenden Maschine des Dampfers „Pannonia“ an, welche im Hochdruckcylinder  $220 \text{ PS}_i$ , im ersten Mitteldruckcylinder  $242 \text{ PS}_i$ , im zweiten  $232 \text{ PS}_i$  und im Niederdruckcylinder  $246 \text{ PS}_i$ , leistete, also eine nahezu gleiche Arbeitsverteilung besass, während die Kurbelwinkel  $\alpha = 70^\circ$ ,  $\beta = \delta = 90^\circ$  und  $\gamma = 110^\circ$  betrug. Auch hier wurde der, wie Fig. 45 zeigt, sehr gleichmäßige Verlauf des resultierenden Drehkraftdiagramms nur durch mühsames Probieren gewonnen, während man nach der obigen Regel unmittelbar dazu gelangt wäre.

Der gleichen Arbeitsverteilung auf alle vier Cylinder haftet indessen wegen der beiden rechten Winkel im Kurbelkreise ein Nachteil an, der nicht unterschätzt werden darf. Die aus (165) mit

$$I = II = III = IV$$

folgende Bedingungsungleichung

$$\cos \gamma = -\cos \alpha$$

führt nämlich mit der für den Massenausgleich zweiter Ordnung geltenden Formel

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}$$

auf  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ$ , eine Anordnung, welche, wie wir schon früher sahen, die Bedingungen für das Verschwinden der Massendruckmomente ebensowenig erfüllen kann wie z. B. die Dreikurbelmaschine mit Winkeln von  $120^\circ$ . Daraus geht hervor, dass man bei gleicher Arbeitsverteilung entweder auf den Massenausgleich zweiter Ordnung (nicht aber auf den viel wichtigeren erster Ordnung) oder aber auf die günstigste Form der resultierenden Tangentialkraft verzichten muss. Welcher von diesen beiden Gesichtspunkten die grössere Beachtung erheischt, kann natürlich nur von Fall zu Fall entschieden werden, wenn man es nicht vorzieht, bei Vierkurbelmaschinen überhaupt die gleiche Arbeitsverteilung fallen zu lassen und mit der Erfüllung von 165), also zwei Paaren gleich starker Getriebe auch dem Massenausgleich gerecht zu werden.

Sind diese Bedingungen oder auch allgemeiner die Gleichung 164) erfüllt, so bleiben doch noch, wie die Fig. 42 und 45 zeigen, Schwankungen im Verlaufe der Drehkraftkurve bestehen, welche von dem Einflusse der Schubstangenlänge und den Abweichungen der Form der Einzeldiagramme von der einfachsten Gestalt herrühren, die wir durch die zwei Schwingungen während jeder Umdrehung darstellende Funktion (vergl. die allgemeine Form 159)

$$159b) \quad T = T_m(1 - \cos 2\varphi)$$

definieren können. Bei der unberechenbaren Grösse und Form dieser Abweichungen erscheint es ganz nutzlos, über die durch unsere Vorschrift 164) nicht ausgeglichenen Schwankungen von vorn herein etwas auszusagen, so erwünscht dies auch vom praktischen Gesichtspunkte aus wäre. So viel ist natürlich einleuchtend, dass dieselben relativ um so geringer ausfallen, je mehr Kurbeln die Maschine enthält. Dagegen ist es möglich, diese Schwankungen in ihrer ungefähren Grösse voraus zu bestimmen, wenn die Gleichung 164) nicht erfüllt wird. Für mehrere Kurbeln erhält man nämlich aus 159b) für den resultierenden Tangentialdruck die Gleichung:

$$159c) \quad \Sigma T = \Sigma T_m - \cos 2\varphi \Sigma T_m \cos 2\alpha + \sin 2\varphi \Sigma T_m \sin 2\alpha$$

und daraus für das Maximum oder Minimum der Schwankungen von  $\Sigma T$  um die durch  $\Sigma T_m$  bestimmte Gerade

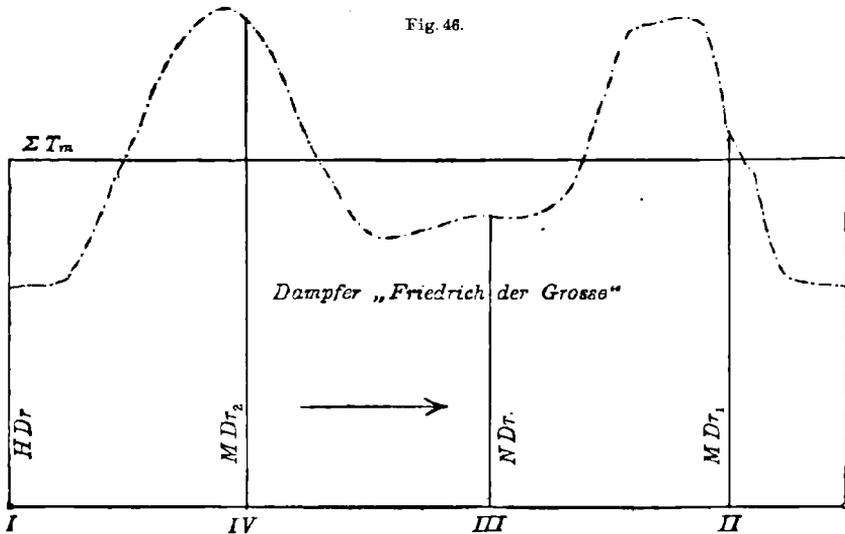
$$167) \quad \Sigma(T - T_m)_{\min.}^{\max.} = \pm \sqrt{(\Sigma T_m \cos 2\alpha)^2 + (\Sigma T_m \sin 2\alpha)^2}.$$

Wenn auch die so erhaltenen Werte infolge der Unberechenbarkeit der oben erwähnten Nebeneinflüsse auf keine grosse Genauigkeit Anspruch erheben dürfen, so erkennt man doch aus 159b), dass die Maxima und Minima je zweimal während jeder Umdrehung auftreten müssen. Dass diese Folgerung sich mit der Erfahrung deckt, geht

aus dem in Fig. 56 dargestellten Diagramm der Maschinen des Dampfers „Friedrich der Grosse“ hervor, bei denen eine angenähert gleiche Arbeitsverteilung vorlag, ohne dass im Kurbelkreis, wie unsere Bedingung 64) forderte, rechte Winkel enthalten sind. Die Kurbelwinkel sind vielmehr  $\alpha = 51,45^\circ$ ,  $\beta = \gamma = \delta = 102,85^\circ$ ,

womit sich der wenig günstige Verlauf der Drehkraftkurve hinreichend erklärt.

12. Die Widerstandsarbeit. Die in einer Maschine vom sogenannten motorischen Mittel, z. B. dem Dampfe angewendete (indizierte)



Arbeit, welche wir mit  $L_i$  bezeichnen wollen, dient nun einerseits zur Überwindung der Reibung und andererseits zur Leistung effektiver oder Nutzarbeit  $L_e$ . Das Verhältnis der Nutzarbeit zur indizierten bezeichnet man als den mechanischen Wirkungsgrad der Maschine. Während nun der Franzose Pambour, welcher sich wohl zuerst mit diesen Fragen beschäftigte, den Zusammenhang zwischen den beiden Arbeitsbeträgen, wenigstens für eine bestimmte Winkelgeschwindigkeit der Welle, als linear voraussetzte, ihm also etwa die Form

$$L_i = \alpha + \beta L_e$$

gab, findet man neuerdings häufig die Ansicht verbreitet, dass entweder die Reibungsarbeit der Maschine konstant, d. h. die Grösse

$$L_i - L_e = L_r = \text{const.}$$

unabhängig von dem Werte der beiden Einzelbeträge  $L_i$  und  $L_e$  sei, oder auch dass der mechanische Wirkungsgrad der Maschine

$$\eta = \frac{L_e}{L_i} = \text{const.}$$

sich nicht mit der Belastung ändere. Wenn man auch die Giltigkeit der letztgenannten Annahme an enge Belastungsgrenzen knüpfte, so ist sie doch schon angesichts des Umstandes nicht aufrecht zu erhalten, dass eine Maschine, ohne überhaupt nach aussen Arbeit abzugeben, doch zum Leergange indizierte Arbeit braucht, also hierbei mit einem Wirkungsgrad  $\eta = 0$  läuft. Auch die zweite Voraussetzung der Unabhängigkeit der Reibungsarbeit von der Maschinenbelastung lässt sich mit der Erfahrung nur in solchen Fällen in Einklang bringen, in denen für eine ganz ausgezeichnete Schmierung aller bewegten Organe gesorgt ist. Alsdann ist nämlich die Reibung als ein Widerstand aufzufassen, welchen die Teilchen der an den bewegten Organen haftenden Schmierflüssigkeit der Trennung von einander entgegensetzen. Dieser Widerstand ist aber bekanntlich unabhängig von dem durch die Belastung der Maschine ausgeübten Drucke (in den Gleitflächen), während andererseits eine Veränderlichkeit mit der Geschwindigkeit der Bewegung nicht erheblich ins Gewicht fällt.

Da nun auch die Pambour'sche Formel, welche aus der Zeit stammt, in der man nur mit geringer Expansion und fast ohne jede Kompression in den Maschinen arbeitete, der Form des Indikator-diagramms nicht gerecht wird und deshalb mit neueren Erfahrungen häufig im Widerspruche steht, so habe ich dieselbe durch die folgende Betrachtung erweitert, wobei ich ebenso wie Pambour von einer Einzeluntersuchung der verschiedenen Bestandteile des Reibungswiderstandes (in den Stopfbüchsen, der Gleitbahn, den Zapfen am Kreuzkopf und der Kurbel sowie dem Wellenlager und schliesslich der Steuerungsorgane) absehen zu können glaubte.

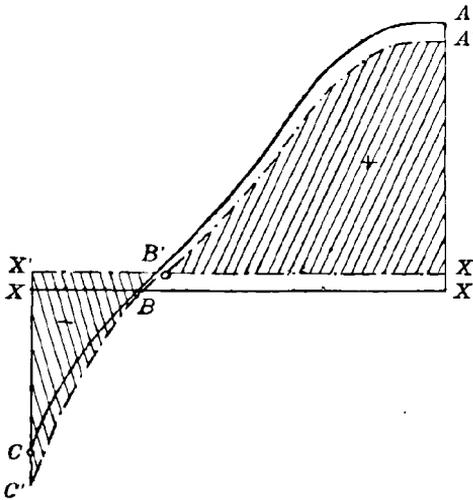
Aus Fig. 29, welche das sogenannte Kolbenkraftdiagramm darstellt, erkennt man nämlich, dass nicht während des ganzen Hubes des Kolbens positive Arbeit im Cylinder geleistet wird, sondern dass die Maschine gegen Ende des Hubes als Kompressor Arbeit verzehrt. Diese Arbeit muss die Maschine rückwärts dem Vorrate von kinetischer Energie in den Getriebeteilen, bezw. bei Vorhandensein mehrerer Cylinder von diesen und zwar stets erst durch Vermittelung der Getriebeteile entnehmen. Ausser einem konstanten Reibungswiderstande, welcher vorwiegend am Kolben und in der Stopfbüchse auftritt, wird demnach erst während der ersten Periode des Hubes von der positiven Arbeit ein Betrag abzuziehen sein, welcher zu dieser in einem bestimmten Verhältnisse steht und schliesslich zu der im zweiten Teile des Hubes aufzuwendenden negativen Arbeit ein entsprechender Betrag hinzutreten. Wenden wir auf diese Beträge die für die Reibung giltige Proportionalität mit der Belastung an, so brauchen wir nur während der ersten Hubperiode von den Ordinaten des positiven Diagrammteiles einen ihnen proportionalen Betrag abzuziehen, während der zweiten Periode dagegen den negativen Ordinaten einen entsprechenden Betrag hinzuzufügen. Auf diese Weise erhält man aus dem in Fig. 47 dargestellten Kolbenkraftdiagramm  $XBXABC$  (bei

dem im Gegensatz zu Fig. 29 nur die Kompression der Deutlichkeit halber etwas stärker angenommen und ausserdem sämtliche Ordinaten von der Basis XX entweder positiv oder negativ aus aufgezeichnet wurden) zunächst das Diagramm  $XBXA'BC'$ . Durch den konstanten Betrag des Reibungswiderstandes rückt schliesslich die Diagrammbasis einfach nach  $X'X'$  und man erhält nunmehr die Figur

$$X'B'X'A'B'C'$$

als Diagramm der treibenden Kraft mit Rücksicht auf die Reibungswiderstände.

Fig. 47.



Aus demselben ergibt sich das um die Reibung verminderte Tangentialdruckdiagramm wieder durch die in Fig. 30 ange deutete Konstruktion. Man erkennt übrigens, dass unser Verfahren im wesentlichen auf eine getrennte Anwendung der Pambourschen linearen Beziehung einmal auf den positiven, dann auf den negativen Bestandteil des Kolbenkraftdiagramms hinausläuft. Der analytische Zusammenhang zwischen der effektiven und indizierten Arbeit bezw. der

Wirkungsgrad lässt sich ebenfalls sofort angeben. Bezeichnet man den mittleren positiven Druck auf dem ersten Teile  $s'$  des Hubes mit  $p'$ , den negativen auf dem zweiten Teile  $s''$  mit  $p''$  gemessen in kg/qcm, die Kolbenfläche mit  $F$  und den konstanten Reibungswiderstand mit  $f$ , ebenfalls gemessen in kg/qcm, so ist zunächst die indizierte Arbeit

$$168) \quad L_i = F(p' s' - p'' s'')$$

und die effektive, wenn  $\delta$  einen kleinen Bruch bedeutet

$$169) \quad L_e = F p' s' (1 - \delta) - \frac{F p'' s''}{1 - \delta} - F f (s' + s''),$$

oder wegen der Kleinheit von  $\delta$  genügend genau

$$169a) \quad L_e = F(p' s' - p'' s'') - F(p' s' + p'' s'') \delta - F f (s' + s'').$$

Der mechanische Wirkungsgrad wird alsdann

$$170) \quad \eta = \frac{L_e}{L_i} = 1 - \frac{p' s' + p'' s''}{p' s' - p'' s''} \delta - \frac{f (s' + s'')}{p' s' - p'' s''}.$$

Die beiden Konstanten dieser Formel  $f$  und  $\delta$  müssen natürlich durch zwei Versuche, am besten durch einen Leerlaufs- und einen Bremsversuch ermittelt werden.

Beispiel. Die beiden Konstanten seien bei einer vorgelegten Maschine

$$f = 0,1 \text{ kg|qcm} \quad \text{und} \quad \delta = 0,06.$$

Arbeite die Maschine ohne jede Kompression, d. h. ohne negative Arbeit im Indikatordiagramm, so ist

$$p'' = 0, \quad s'' = 0.$$

Ist weiterhin der mittlere Druck  $p' = 2,5 \text{ kg|qcm}$ , während des Kolbenweges  $s' = 1$ , so ergibt sich ein mechanischer Wirkungsgrad von

$$\eta = 1 - \frac{2,5 \cdot 0,06 + 0,1}{2,5} = 0,9.$$

Lässt man dagegen dieselbe Maschine mit kleiner Füllung und hoher Kompression laufen, so dass  $p' = 4,5 \text{ kg|qcm}$  auf dem Kolbenwege

$$s' = 0,6 \quad \text{und} \quad p'' = 3,5 \text{ kg|qcm}$$

auf dem Wege  $s'' = 0,4$  (d. h.  $s' + s'' = 1$ ) wird, so erhält man zunächst einen mittleren Dampfdruck von

$$p_m = p' s' - p'' s'' = 1,3 \text{ kg|qcm}$$

also bei derselben Umdrehungszahl wie im ersten Falle nur

$$1,3 : 2,5 = 0,52$$

der früheren indizierten Leistung. Der mechanische Wirkungsgrad aber wird

$$\eta = 1 - \frac{4,1 \cdot 0,06 + 0,1}{1,3} = 0,734,$$

so dass die effektive Leistung sogar auf 0,424 derjenigen im ersten Falle herabsinkt.

Das wichtigste Ergebnis der vorstehenden Theorie der Reibungsarbeit für die Dynamik des Kurbelmechanismus ist der Umstand, dass sie, wenigstens für jede gegebene mittlere Winkelgeschwindigkeit unmittelbar durch die Form und den Inhalt des Indikatordiagramms bestimmt ist und daher durch die obige Konstruktion sofort im Tangentialdruckdiagramm, deren Ordinate dadurch die Werte  $T'$  annehmen, berücksichtigt werden kann. Dies gilt naturgemäss auch für mehrkurbelige Maschinen, so dass sich eine besondere Untersuchung derselben in Bezug auf die Reibungsverluste erübrigt. Wir werden demnach in der Folge bei einem vorgelegten Drehkraftdiagramm immer voraussetzen, dass in demselben die Reibung schon durch entsprechende Abzüge in Rechnung gezogen ist. Da hierdurch der allgemeine Verlauf der Tangentialkraft keine nennenswerte Änderung erfährt, so war es nicht nötig, die Reibung bei der Beseitigung der Schwankungen der Drehkraft besonders zu behandeln. Dieselbe ist vielmehr hierfür unbedenklich zu denjenigen Beträgen zu rechnen, deren Schwankungen ohnehin in Kauf genommen werden müssen.

Was schliesslich die Nutzarbeit betrifft, so ist dieselbe dann vollständig bestimmt, wenn das Gesetz des Nutzwiderstandes  $W$  am Kolben bzw. am Kurbelzapfen als Funktion der Kurbelstellung ana-

lytisch oder graphisch gegeben ist. In der Praxis wird meist das letztere der Fall sein, so dass man neben der Kurve des Tangentialdruckes eine solche des Nutzwiderstandes erhält. Ist in der ersteren schon die Reibung berücksichtigt, so muss der durch Planimetrieren festzustellende Inhalt beider Kurven über der ganzen Abscissenaxe (d. i.  $= 2\pi$ ), welcher, wie wir gesehen haben, ein Maß für die Arbeit bildet, im Beharrungszustande übereinstimmen, oder auch, es muss der mittlere Nutzwiderstand  $W_m$  gleich dem mittleren wirksamen Tangentialdruck  $T'_m$  bzw. bei mehrkurbligen Maschinen  $\Sigma T'_m$  sein. Wir werden sehen, dass in diesem Fall die Ermittlung der Winkelgeschwindigkeit für jede Kurbelstellung keine Schwierigkeiten bietet.

Solche treten erst auf, wenn der Nutzwiderstand selbst von der Winkelgeschwindigkeit abhängig ist. Dieser Fall tritt z. B. ein bei Dampfmaschinen, welche direkt mit dem Anker einer Dynamomaschine gekuppelt sind. Der Zusammenhang zwischen dem Nutzwiderstand und der Winkelgeschwindigkeit ist hierbei ein recht verwickelter, weil durch die Schwankungen der letzteren auch die Feldstärke berührt wird. Glücklicherweise kann man sich in diesem Falle immer durch Anwendung so schwerer Schwungmassen helfen, dass im Beharrungszustande die Schwankungen der Winkelgeschwindigkeit auf ein beliebig kleines Maß zurückgeführt werden und der Nutzwiderstand praktisch als konstant erscheint. Hat man es dagegen mit Schiffsmaschinen zu thun, welche vermittelst ihrer Kurbelwelle einen Schraubenpropeller bethätigen, so ist es unmöglich von den rotierenden Massen, deren Trägheitsmoment niemals auch nur annähernd so gross gemacht werden kann, wie dasjenige von Schwungrädern entsprechend starker stationärer Maschinen, einen hinreichenden Ausgleich der Schwankungen der Winkelgeschwindigkeit zu erwarten. In diesem Falle bleibt nichts weiter übrig als das Widerstandsgesetz selbst einzuführen und danach die Differentialgleichung zu integrieren. Streng genommen sollte man dieses Gesetz auf theoretischem Wege aus der Schraubenbewegung im Wasser mit Rücksicht auf die Ortsveränderung des Schiffskörpers, welche, wie wir oben gesehen haben, den Schwankungen der Umdrehungsgeschwindigkeit des Propellers gar nicht oder doch nur ganz unwesentlich beeinflusst wird, ableiten. Hierzu reicht indessen der augenblickliche Stand der technischen Hydrodynamik nicht aus, so dass man auf rein empirische Formeln angewiesen ist. Von allen derartigen Vorschlägen, welche mehr oder weniger theoretisch begründet sind, deckt sich am besten mit der Erfahrung der einfache Ausdruck

171)

$$W = C\varepsilon^2,$$

welcher, wie wir sehen werden, den Vorteil gewährt, dass sich die Differentialgleichung der Bewegung leicht integrieren lässt. Damit ist natürlich nicht gesagt, dass nicht unter Umständen verwickeltere Gesetze in Frage zu ziehen wären, etwa von der Form:

$$172) \quad W = f(\varphi, \varepsilon).$$

Sind die Schwankungen von  $\varepsilon$  nicht sehr gross, so können wir, unter  $\varepsilon_m$  den Mittelwert verstanden, mit

$$\varepsilon = \varepsilon_m + \Delta\varepsilon$$

nach dem Taylor'schen Lehrsätze auch angenähert schreiben

$$172a) \quad W = f(\varphi, \varepsilon_m) + \Delta\varepsilon \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon_m}.$$

Wir werden sehen, dass auch mit diesem Widerstandsgesetz die Differentialgleichung der Bewegung integrierbar wird bzw. sich analytisch auf dieselbe Form zurückführen lässt, welche aus Gleichung 171) hervorgeht. Andere Widerstandsgesetze, z. B. solche, in welche auch die Beschleunigung  $d\varepsilon:dt$  eintritt, hier zu behandeln, dürfte sich erübrigen, da für dieselben zunächst kein praktisches Bedürfnis vorliegt.

13. Die Änderungen der Winkelgeschwindigkeit bei gegebener Widerstandskurve. Wir setzen eine Maschine voraus, deren Dimensionen und sämtliche bewegte Massen ihrem Gewichte nach gegeben sind. Ebenso sei das resultierende Tangentialkraftdiagramm mit Rücksicht auf die Reibungsverluste bekannt, so dass es mit der Widerstandskurve vereinigt werden kann. Tragen wir dann noch in das Diagramm die Linie der Änderungen der potentiellen Energie ein, also die Werte von  $dV:d\varphi$  als Ordinaten an die zugehörigen Abscissen  $\varphi$  und addieren dieselben algebraisch zu den Differenzen  $T' - W$ , so ist der Zuwachs der kinetischen Energie  $J$  von einer Anfangslage ab, z. B. der inneren Totlage der Anfangskurbel, vollständig bestimmt durch die Energiegleichung

$$173) \quad J - J_0 = \int_0^\varphi \left( T' - W - \frac{dV}{d\varphi} \right) d\varphi.$$

Da unter den Integralzeichen lediglich Winkelfunktionen stehen, so bietet die Integration wenigstens auf graphischem Wege keine Schwierigkeiten und man erhält, wenn man das Integral der rechten Seite mit  $\Delta L$  bezeichnet,

$$173a) \quad J - J_0 = \Delta L,$$

womit die Aufgabe vom theoretischen Standpunkte aus erledigt ist.

Führt man dann für die kinetische Energie die früher entwickelten Ausdrücke 150), 151) bzw. 154) ein, welche sich kürzer in der Form schreiben lassen

$$174) \quad J = \varepsilon^2 U \quad \text{bzw.} \quad J_0 = \varepsilon_0^2 U_0,$$

worin  $U$  eine Winkelfunktion bedeutet, die für  $\varphi = 0$  in  $U_0$  übergeht, während hierfür die Winkelgeschwindigkeit  $\varepsilon = \varepsilon_0$  wird, so geht die Gleichung 173a) über in

$$173b) \quad \varepsilon^2 U - \varepsilon_0^2 U_0 = \Delta L.$$

Handelt es sich um die Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit  $\varepsilon$  für jede Kurbelstellung, so tritt sofort eine Schwierigkeit insofern auf, als in der Praxis niemals die Totpunktsgeschwindigkeit  $\varepsilon_0$ , sondern stets die mittlere Winkelgeschwindigkeit  $\varepsilon_m$ , definiert durch die mittlere Umdrehungsdauer  $t_m$

$$175) \quad \varepsilon_m = \frac{2\pi}{t_m}$$

gegeben bzw. vorgeschrieben ist. Wenn auch für zahlreiche Aufgaben der Unterschied von  $\varepsilon_m$  und  $\varepsilon_0$  nicht schwer ins Gewicht fällt, so erscheint es doch angebracht, prinzipiell ein etwas strengeres Verfahren an die Stelle der häufig zu findenden Gleichstellung beider Werte zu setzen, wobei wir die praktische Erfahrung benützen wollen, dass die Schwankungen von  $\varepsilon$  nur relativ kleine Beträge erreichen. Wir schreiben demnach

$$176) \quad \varepsilon = \varepsilon_m + \Delta\varepsilon$$

und erhalten für die Umdrehungsdauer wegen  $\varepsilon = \frac{d\varphi}{dt}$

$$t_m = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\varepsilon} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\varepsilon_m + \Delta\varepsilon}.$$

Ist nun  $\Delta\varepsilon$  sehr klein gegen  $\varepsilon_m$ , so haben wir statt dessen angenähert

$$t_m = \frac{1}{\varepsilon_m} \int_0^{2\pi} d\varphi - \frac{1}{\varepsilon_m^2} \int_0^{2\pi} \Delta\varepsilon d\varphi = \frac{2\pi}{\varepsilon_m} - \frac{1}{\varepsilon_m^2} \int_0^{2\pi} \Delta\varepsilon d\varphi.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit 175), so erkennt man, dass auf Grund unserer Annäherung

$$177) \quad \int_0^{2\pi} \Delta\varepsilon d\varphi = 0$$

wird. Diese Eigenschaft der Winkelgeschwindigkeit, dass man das Integral ihrer Schwankungen erstreckt über den ganzen Umfang des Kurbelkreises im Beharrungszustande vernachlässigen darf, erlaubt uns nun, auf einfache Weise die oben erwähnte Schwierigkeit zu umgehen. Wir erhalten nämlich aus 173b)

$$173c) \quad \varepsilon^2 = \varepsilon_0^2 \frac{U_0}{U} + \frac{\Delta L}{U}.$$

und daraus

$$178) \quad \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 d\varphi = \varepsilon_0^2 U_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{U} + \int_0^{2\pi} \frac{\Delta L}{U} d\varphi,$$

worin sich die Integrationen der rechten Seite, wie schon oben in 173) auf graphischem Wege leicht durchführen lassen. Führen wir auf der

linken Seite wieder unseren Ausdruck 176) ein, so erhalten wir unter Vernachlässigung des Quotienten  $\Delta^2 \varepsilon : \varepsilon_m^2$  angenähert

$$\int_0^{2\pi} \varepsilon^2 d\varphi = \varepsilon_m^2 \int_0^{2\pi} \left(1 + 2 \frac{\Delta \varepsilon}{\varepsilon_m}\right) d\varphi = 2\pi \varepsilon_m^2 + 2\varepsilon_m \int_0^{2\pi} \Delta \varepsilon d\varphi;$$

oder wegen 177)

$$177 \text{ a)} \quad \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 d\varphi = 2\pi \varepsilon_m^2.$$

Dies giebt aber in 178) eingeführt den gewünschten Zusammenhang

$$178 \text{ a)} \quad 2\pi \varepsilon_m^2 = \varepsilon_0^2 U_0 \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{U} + \int_0^{2\pi} \frac{\Delta L}{U} d\varphi$$

zwischen der mittleren und der Totpunktsgeschwindigkeit. Für stationäre Maschinen, bei denen die kinetische Energie der schweren Schwungmasse gegenüber derjenigen der hin- und hergehenden Teile stets weit aus überwiegt, kann man die letzte Gleichung noch wesentlich vereinfachen, indem man [siehe Gleichung 151])

$$U = U_0 \sim \frac{r^2}{2} \{M_0 + \Sigma(m - m' \cos 2\alpha + m'' \cos \alpha - m''' \cos 3\alpha)\}$$

setzt. Mit der Abkürzung

$$\int_0^{2\pi} \Delta L d\varphi = 2\pi \Delta L_m$$

erhält man alsdann statt 178 a)

$$178 \text{ b)} \quad \varepsilon_m^2 = \varepsilon_0^2 + \frac{\Delta L_m}{U_0}.$$

In derselben Weise kann man natürlich auch die zur Berechnung beliebiger Werte von  $\varepsilon$  dienende Formel 173 c) vereinfachen und erhält so angenähert

$$179) \quad \varepsilon^2 = \varepsilon_0^2 + \frac{\Delta L}{U_0}.$$

Danach wird die Winkelgeschwindigkeit ein Maximum, wenn der Arbeitsüberschuss  $\Delta L$ , dargestellt durch den über die Widerstandskurve hinausragenden Teil der Tangentialdrucklinie, einen Maximalwert erreicht hat, während ein Minimum eintritt, wenn der Flächenüberschuss der Widerstandskurve über die Tangentialkraftkurve am grössten geworden ist. Bezeichnen wir diese beiden Werte mit  $\varepsilon_{max}$  und  $\varepsilon_{min}$  sowie die entsprechenden Flächenüberschüsse mit  $\Delta L_1$  und  $\Delta L_2$ , so erhalten wir aus 179):

179a) 
$$\epsilon_{max}^2 - \epsilon_{min}^2 = \frac{\Delta L_1 - \Delta L_2}{U_0},$$
 oder, wenn wir angenähert setzen

180) 
$$\delta = \frac{\epsilon_{max} + \epsilon_{min}}{\epsilon_m} = \frac{\Delta L_1 - \Delta L_2}{2 \epsilon_m^2 U_0}.$$

Diese Grösse bezeichnet man wohl auch als den Ungleichförmigkeitsgrad oder kurz als die Ungleichförmigkeit der Maschine. Wird der Wert derselben ebenso vorgeschrieben, wie die mittlere

Fig. 48.

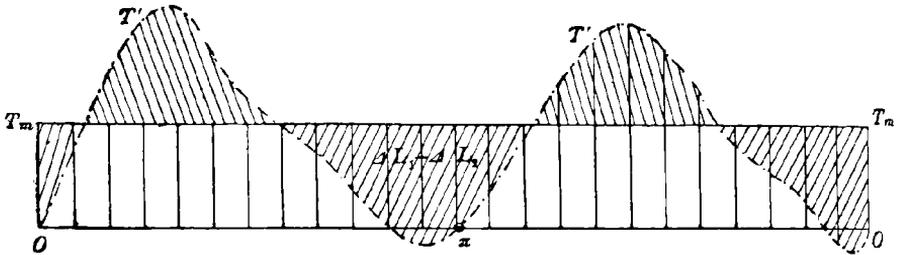
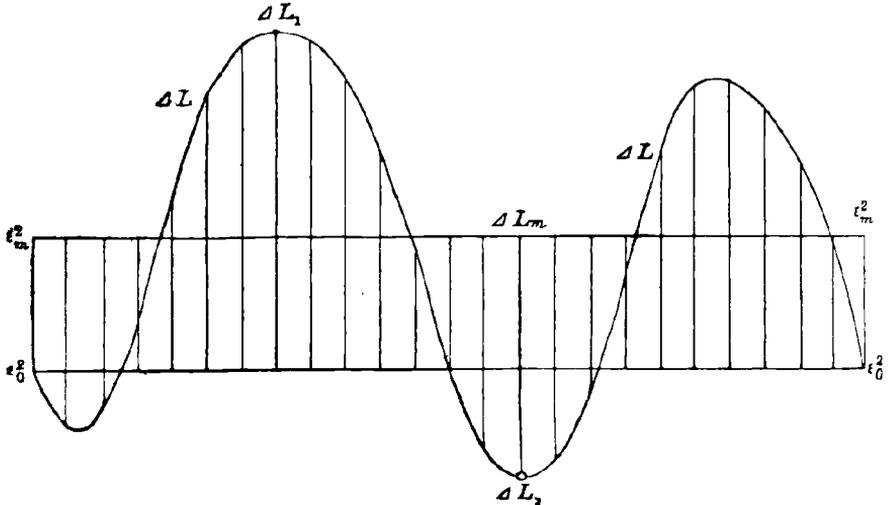


Fig. 49.



Winkelgeschwindigkeit, so ist man durch Gleichung 180) in den Stand gesetzt, die Grösse  $U_0$ , in welcher die Schwungradmasse die Hauptrolle spielt, zu berechnen. In der Praxis ist es üblich, die aus der so ermittelten Grösse  $U_0$  bei gegebenem Kurbelradius folgende Masse (reduziert auf den Kurbelzapfen) vollständig im Schwungrad unterzubringen, so dass der von den hin- und hergehenden Teilen, deren Massen erst nach ihrer Konstruktion festgestellt werden können, stammende Einfluss den schliesslichen Ungleichförmigkeitsgrad nur vermindern, d. h. aber verbessern kann.

Das hier durchgeführte Rechnungsverfahren läuft nun, da die Arbeitskurve  $T'$  immer, die Widerstandskurve dagegen in vielen Fällen lediglich durch Linienzüge gegeben sind, auf die graphische Auswertung der Integrale  $\Delta L$  hinaus. Dieselbe erfolgt am einfachsten durch Planimetrieren der einzelnen Streifen der schraffierten Fläche in Fig. 48 und Auftragen dieser Ergebnisse in einem besonderen Diagramm Fig. 49, welches dann in einem zunächst willkürlichen Maßstabe sogleich nach Formel 179) den Verlauf der Schwankungen von  $\epsilon^2$  angiebt. Der wiederum durch Planimetrieren bestimmten mittleren Höhe dieser Integralkurve entspricht sodann der Wert von  $\epsilon_m^2$ . Um nun die absolute Grösse z. B. der Differenz

$$\epsilon^2 - \epsilon_0^2 \text{ oder } \epsilon^2 - \epsilon_m^2$$

zu finden, braucht man nur das Verhältnis der entsprechenden Ordinatendifferenz in Fig. 49 durch die Summe der Ordinaten des Rechtecks  $OT_m T_n O$  in Fig. 48, welches die Gesamtarbeit  $L$  während einer Umdrehung darstellt, zu dividieren und dann dieses Verhältnis mit dem Quodienten  $L : U_0$ , worin  $L$  und  $U_0$  in mkg gegeben sein müssen, zu multiplizieren.

Ist umgekehrt die Ungleichförmigkeit

$$\epsilon_{max} - \epsilon_{min}$$

und ausserdem  $\epsilon_m$  sowie die effektive Leistung  $L$  der Maschine gegeben, so erhält man mit der vorstehend geschilderten Methode aus dem Tangentialkraftdiagramm die für die Schwungradmasse grundlegende Grösse  $U_0$ .

Beispiel. Das in Fig. 48 dargestellte Tangentialkraftdiagramm gehöre einer doppeltwirkenden Eincylindermaschine von  $N_e = 100$  effektiven Pferdestärken an, welche in der Minute  $n = 75$  Umdrehungen vollzieht; der Kurbelradius der Maschine sei  $r = 0,5$  m.

Aus der Umdrehungszahl folgt zunächst

$$\epsilon_m = \frac{\pi n}{30} = 7,854, \quad \epsilon_m^2 = 61,685$$

und die Arbeit während einer Umdrehung

$$L = \frac{N_e \cdot 60}{n} = 6000 \text{ mkg.}$$

Weiter ergibt sich aus Fig. 41 das Maximum  $\Delta L_1$  entspr.  $\epsilon_{max}^2$  und das Minimum  $\Delta L_2$  entspr.  $\epsilon_{min}^2$  und ebenso  $\Delta L_m$  entspr.  $\epsilon_m^2$ , so dass wir, indem wir die der Figur entnommenen Verhältniswerte einsetzen, die Formeln erhalten

$$\begin{aligned} \epsilon_0^2 &= \epsilon_m^2 - 0,054 \frac{L}{U_0} = \epsilon_m^2 - \frac{320}{U_0} \\ \epsilon_{max}^2 &= \epsilon_m^2 + 0,082 \frac{L}{U_0} = \epsilon_m^2 + \frac{492}{U_0} \\ \epsilon_{min}^2 &= \epsilon_m^2 - 0,098 \frac{L}{U_0} = \epsilon_m^2 - \frac{588}{U_0} \\ \epsilon_{max}^2 - \epsilon_{min}^2 &= 0,180 \frac{L}{U_0} = \frac{1080}{U_0}. \end{aligned}$$

In derselben Weise kann man die Winkelgeschwindigkeit für jede beliebige Stelle nunmehr aus dem bis zur entsprechenden Kurbelstellung erzielten Arbeitsüberschuss  $\Delta L$  im Verhältnis zur Gesamtarbeit  $L$  ermitteln, so dass die Aufgabe gelöst ist, wenn man

$$U_0 \sim \frac{r^2}{2} M_0$$

kennt. Hat z. B. das Schwungrad ein Gewicht von  $G_0 = 4000$  kg, und einen Trägheitsradius von  $k_0 = 2,5$  m, so ist

$$M_0 = \frac{G_0}{g} \cdot \frac{k_0^2}{r^2},$$

oder

$$U_0 = \frac{r^2}{2} M_0 = \frac{408 \cdot 6,25}{2} = 1275 \text{ mkg}$$

und wir erhalten aus unseren obigen Ausdrücken:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0^2 &= 61,685 - 0,251 = 61,434; & \varepsilon_0 &= 0,998 \cdot \varepsilon_m \\ \varepsilon_{max}^2 &= 61,685 + 0,368 = 62,053; & \varepsilon_{max} &= 1,003 \cdot \varepsilon_m \\ \varepsilon_{min}^2 &= 61,685 - 0,462 = 61,223; & \varepsilon_{min} &= 0,996 \cdot \varepsilon_m. \end{aligned}$$

Die Ungleichförmigkeit der Maschine wird demnach

$$\delta = \frac{\varepsilon_{max} - \varepsilon_{min}}{\varepsilon_m} = 0,007.$$

Soll dagegen umgekehrt aus der Ungleichförmigkeit und dem Drehkraftdiagramm die Schwungrasse ermittelt werden, so kann man sich natürlich wieder der hier benutzten Formeln bedienen; man erhält durch Elimination von  $\varepsilon_{max}$  und  $\varepsilon_{min}$  eine quadratische Gleichung für  $1:U_0$  bzw.  $U_0$ . Einfacher und bei hinreichender Genauigkeit auch zweckmäßiger erscheint indessen hierfür die Gleichung (180), welche allerdings auf der Annahme beruht, dass die mittlere Winkelgeschwindigkeit gleich dem Mittelwerte des Maximums und des Minimums gesetzt werden darf. Die Zulässigkeit dieser Annahme geht übrigens aus Fig. 49 hinreichend hervor.

Unsere in vorstehendem Beispiel praktisch vorgeführte Methode der Bestimmung der Winkelgeschwindigkeit für jede Kurbelstellung unterscheidet sich nun insofern von dem üblichen Radingerschen Verfahren, als wir die Veränderlichkeit der kinetischen Energie mit der Kurbelstellung  $\varphi$  gänzlich vernachlässigten, während man dieselbe sonst durch Vereinigung der Massendrücke mit dem wirksamen Kolbendruck im Indikatordiagramm berücksichtigt. Da nun die Massendrücke selbst wiederum nur unter der vorläufigen Annahme konstanter Winkelgeschwindigkeit berechnet und aufgezeichnet werden können, so dürfte, wenigstens im Falle schwerer Schwungrassen oder was auf dasselbe hinausläuft, geringer Ungleichförmigkeit, das hier entwickelte einfachere Verfahren vorzuziehen sein.

Anders liegt die Sache natürlich, wenn die hin- und hergehenden Massen im Vergleich zu der auf den Kurbelradius bezogenen rotierenden nicht mehr vernachlässigt oder doch als klein bezeichnet werden können. Alsdann bleibt nichts weiter übrig, als zunächst die Tot-

punktsgeschwindigkeit  $\varepsilon_0$  durch graphische Integration nach Gleichung 178a) aus  $\varepsilon_m$  zu ermitteln und dieses Verfahren auch auf Gleichung 173c) anzuwenden.

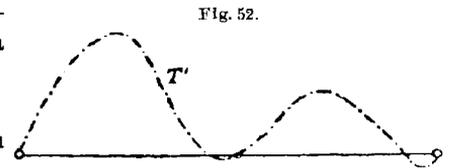
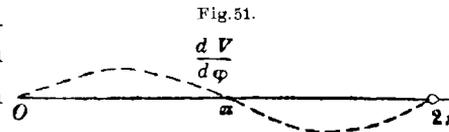
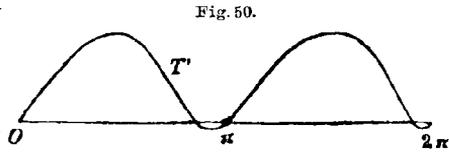
Bei stehenden Maschinen, welche zum Antriebe von Schiffen vorwiegend benutzt werden und bei ihrem geringeren Raumbedürfnis in neuerer Zeit auch für stationäre Zwecke eine grosse Verbreitung erlangten, spielen übrigens die Änderungen der potentiellen Energie, d.h. die Wirkungen der auf- und niedergehenden Gewichte eine grosse Rolle.

Diese Gewichte unterstützen beim Niedergange des Kolbens den Dampfdruck, während sie beim Aufgange Arbeit verzehren. Kombiniert man demnach, wie in Formel 173) angedeutet, das Diagramm der effektiven Dampfdrücke  $T'$  (Fig. 50) mit demjenigen der  $-\frac{dV}{d\varphi}$  (Fig. 51), so ergibt sich ein Diagramm (Fig. 52), auf welches unsere frühere einfache Darstellung der Tangentialdrücke etwa durch

$$T = T_m + A \cos 2\varphi + B \sin 2\varphi$$

nicht mehr passt. Erstrebt man demnach bei einer mehrkurbeligen Maschine einen möglichst gleichförmigen Gang, so erscheint die Befolgung der früher angegebenen Regeln für die Arbeitsverteilung allein noch nicht hinreichend, vielmehr ist die Beseitigung der Schwankungen der potentiellen Energie, d.h. die Erfüllung des Massenausgleiches hierfür unbedingt erforderlich. Erstreckt sich dieser Ausgleich ausserdem noch auf die Schwankungen zweiter Ordnung, so können auch die hauptsächlichsten Veränderungen der kinetischen Energie  $J$  mit der Kurbelstellung  $\varphi$  als beseitigt gelten und man ist, ohne dass die rotierenden Massen gegenüber den hin- und hergehenden gross zu sein brauchen, berechtigt, angenähert die Grösse  $U = U_0$  zu setzen. Inwiefern diese einzelnen Forderungen mit einander verträglich sind, haben wir übrigens schon oben in §11 diskutiert, so dass ich mich an dieser Stelle mit dem Hinweise auf die dortigen Ausführungen begnügen darf. Jedenfalls erkennt man, dass eine spezielle Behandlung der Mehrkurbelmaschine nunmehr nichts Neues bieten kann.

14. Die Änderungen der Winkelgeschwindigkeit bei einem von ihr abhängigen Nutzwiderstande. Wie schon früher erwähnt wurde, können wir in diesem Falle mangels der Kenntnis des von der gesuchten Winkelgeschwindigkeit selbst abhängigen Verlaufes der



Widerstandskurve  $W$  die in Gleichung 173) angedeutete Integration auf der rechten Seite nicht ausführen und müssen demnach auf die Differentialgleichung

$$181) \quad \frac{dJ}{d\varphi} = T' - W - \frac{dV}{d\varphi}$$

selbst zurückgreifen. Diese Gleichung gilt übrigens auch für den Fall, dass im Getriebe elastische Formänderungen auftreten, deren Schwingungsenergie alsdann in  $J$  mit enthalten ist, während die elastischen Spannungen zu  $dV: d\varphi$  hinzutreten. Wir wollen indessen von diesen Formänderungen und Schwingungen, welche die Behandlung des Problems ganz bedeutend erschweren, an dieser Stelle absehen bzw. die elastischen Formänderungen als verschwindend klein vernachlässigen. Setzen wir nunmehr, wie schon im vorigen Paragraphen,  $J = \varepsilon^2 U$  und führen als Widerstandsgesetz das durch Gleichung 171) gegebene ein, so erhalten wir statt 181)

$$\varepsilon^2 \frac{dU}{d\varphi} + U \frac{d\varepsilon^2}{d\varphi} = T' - \frac{dV}{d\varphi} - C\varepsilon^2$$

oder kürzer

$$182) \quad \varepsilon^2 \left( \frac{dU}{d\varphi} + C \right) + U \frac{d\varepsilon^2}{d\varphi} = T''.$$

Hierin sind die Ausdrücke

$$U, \quad \frac{dU}{d\varphi} + C \quad \text{und} \quad T'' = T' - \frac{dV}{d\varphi}$$

lediglich Funktionen des Kurbelwinkels  $\varphi$ . Hätten wir ein allgemeineres Widerstandsgesetz, z. B. 172), so könnten wir dasselbe, wie schon früher bemerkt, in der Erwartung geringer Schwankungen  $\Delta\varepsilon$  von  $\varepsilon$  auf die Form 172a) bringen. Ausserdem aber hätten wir dann unter Vernachlässigung von  $(\Delta\varepsilon)^2$

$$J = \varepsilon^2 U = \varepsilon_m^2 U + 2\varepsilon_m U \Delta\varepsilon, \\ \frac{dJ}{d\varphi} = \varepsilon_m^2 \frac{dU}{d\varphi} + 2\varepsilon_m \frac{dU}{d\varphi} \Delta\varepsilon + 2\varepsilon_m U \frac{d\Delta\varepsilon}{d\varphi}$$

und die Gleichung 181) würde übergehen in

$$182a) \quad \Delta\varepsilon \left[ 2\varepsilon_m \frac{dU}{d\varphi} + \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \right) \varepsilon_m \right] + 2\varepsilon_m U \frac{d\Delta\varepsilon}{d\varphi} = T' - f(\varphi, \varepsilon_m) - \frac{dV}{d\varphi}.$$

Auch hierin sind der Klammerausdruck der linken Seite, sowie  $U$  und die ganze rechte Seite lediglich Funktionen von  $\varphi$ , so dass, wenn wir uns  $\Delta\varepsilon$  noch durch  $\varepsilon^2$  ersetzt denken können, die Integration von 182a) auf diejenige von 182) zurückgeführt ist. Wir wollen uns daher in der Folge nur mehr mit der einfacheren Gleichung 182) beschäftigen. Multiplizieren wir dieselbe mit einer zunächst noch unbekanntem Funktion  $\Psi$  von  $\varphi$  als integrierendem Faktor, so geht sie über in

$$182b) \quad \varepsilon^2 \left( \frac{dU}{d\varphi} + C \right) \Psi + U \Psi \frac{d\varepsilon^2}{d\varphi} = T'' \Psi,$$

deren linke Seite als Differentialquotient von  $\varepsilon^2 U \Psi$  aufgefasst werden kann, wenn die Bedingungs-gleichung

$$\frac{d(U\Psi)}{d\varphi} = \left(\frac{dU}{d\varphi} + C\right)\Psi$$

oder

$$\frac{d\Psi}{\Psi} = \frac{C}{U} d\varphi$$

erfüllt ist. Daraus ergibt sich aber der Wert des integrierenden Faktors zu

$$183) \quad \Psi = \Psi_0 e^{c \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{U}}$$

wenn  $\Psi_0$  der Anfangsstellung  $\varphi = 0$  entspricht. Aus Gleichung 182 b) folgt nunmehr durch Integration nach  $\varphi$

$$184) \quad \varepsilon^2 U \Psi - \varepsilon_0^2 U_0 \Psi_0 = \int_0^\varphi T'' \Psi d\varphi$$

oder mit 183)

$$184a) \quad \varepsilon^2 U e^{c \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{U}} - \varepsilon_0^2 U_0 = \int_0^\varphi T'' e^{c \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{U}} d\varphi.$$

Wenn es gestattet ist,  $U = U_0$  zu setzen, was für ausgeglichene Mehrkurbelmaschinen beiläufig zutrifft, so darf man statt 184a) auch schreiben

$$184b) \quad U_0 \left( \varepsilon^2 e^{\frac{C\varphi}{U_0}} - \varepsilon_0^2 \right) = \int_0^\varphi T'' e^{\frac{C\varphi}{U_0}} d\varphi.$$

Während nun im Falle einer vorgelegten Widerstandskurve die mittlere Winkelgeschwindigkeit  $\varepsilon_m$  willkürlich gegeben, bezw. der Maschine vorgeschrieben werden konnte, richtet sich dieselbe hier nach dem Werte der Konstanten  $C$  des Widerstandsgesetzes. Für den mittleren effektiven Tangentialdruck, welcher mit dem mittleren Nutzwiderstand identisch sein muss, haben wir daher

$$T_m'' = W_m = \frac{C}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon^2 d\varphi,$$

oder wenn die Schwankungen  $\Delta\varepsilon$  von  $\varepsilon$  nur klein ausfallen, was praktisch immer angenommen werden darf, so folgt aus den Gleichungen 177) und 177a), welche alsdann auch hierfür giltig sind,

$$185) \quad T_m'' = W_m = C \varepsilon_m^2.$$

Diese Formel kann man auch dazu benutzen, um bei vorgeschriebener Leistung und mittlerer Winkelgeschwindigkeit die Konstante  $C$  zu ermitteln, welche z. B. bei Schiffsschrauben mit deren Steigung eng zusammenhängt. Für die Berechnung der Totpunktgeschwindigkeit  $\varepsilon_0$  ist übrigens, wenn  $C$  gegeben ist, die Kenntnis von  $\varepsilon_m$  hier nicht

notwendig, man erhält vielmehr schon aus 184) durch Integration zwischen 0 und  $2\pi$  für den Beharrungszustand, welcher durch

$$\varepsilon_2 \pi = \varepsilon_0$$

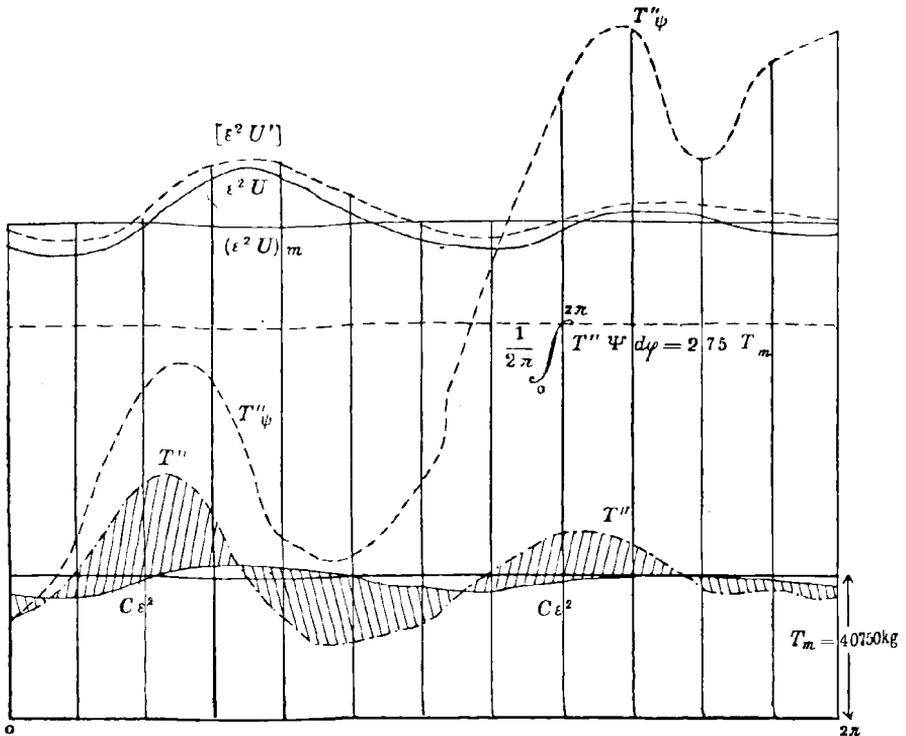
gekennzeichnet ist,

$$186) \quad \varepsilon_0^2 U_0 (\Psi_{2\pi} - \Psi_0) = \int_0^{2\pi} T'' \Psi d\varphi,$$

oder auch

$$186a) \quad \varepsilon_0^2 U_0 \left( e^{c \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{U}} - 1 \right) = \int_0^{2\pi} T'' e^{c \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{U}} d\varphi,$$

Fig. 53.



worauf dann die Bestimmung beliebiger Werte von  $\varepsilon$  aus 184) bzw. 184a) ohne weiteres möglich ist.

Bei der praktischen Anwendung der vorstehenden Formeln ist man natürlich, da  $T''$  nur empirisch in Gestalt einer Kurve vorliegt, auf graphische Integrationen angewiesen. Hierbei verfährt man, wie es in Fig. 53 geschehen ist, so, dass zunächst das Produkt  $T''\Psi$  ge-

bildet wird, wobei man übrigens unbedenklich  $\Psi_0 = 1$  setzen darf, da diese Konstante sich ja doch aus der Gleichung 184) bzw. 186) wegholt. Dieses Produkt giebt dann die in Fig. 53 gestrichelte ansteigende Linie an, deren über der Abscisse gelegenen Flächenstreifen ein Maß für das Integral der rechten Seite von 184) bildet. Dividiert man nunmehr die Gesamtfläche dieser Kurve mit  $\Psi_{2\pi} - 1$ , so erhält man in einem willkürlichen Maßstabe die Grösse  $\varepsilon_0^2 U_0$  und dann aus den einzelnen Flächenstreifen mit Hilfe von 184) alle andern Werte von  $\varepsilon^2 U$ . Diese Werte sind in Fig. 53 zu einer Kurve vereinigt worden, welche oberhalb derjenigen von  $T''$  verläuft. Dividiert man nun diese Ordinaten derselben mit den zugehörigen Werten von  $U$ , so erhält man eine weitere Kurve der  $\varepsilon^2$ , welche mit  $C$  multipliziert sofort die Widerstandskurve  $W = C\varepsilon^2$  ergibt. Im vorliegenden Falle wurde der Einfachheit halber  $U = U_0 = \text{const.}$  angenommen, wodurch erreicht wird, dass man mit dem Verhältnis der Mittelwerte  $(\varepsilon^2 U)_m$  und  $T''_m$  sofort die Widerstandskurve ableiten kann.

Beispiel. Wir setzen eine ausgeglichene Schiffsmaschine voraus, welche mit  $n = 100$  minutlichen Umdrehungen  $N = 4000 \text{ PS}_e$  leisten möge. Alsdann ist die mittlere Winkelgeschwindigkeit  $\varepsilon_m = 10,5$  und bei einem Kurbelradius von  $r = 0,7 \text{ m}$  der auf den Kurbelzapfen reduzierte mittlere Tangentialdruck

$$W_m = T_m = T''_m = \frac{75 \cdot N_i}{\varepsilon_m \cdot r} = 40750 \text{ kg}$$

und damit die Konstante des Propellerwiderstandes

$$C = \frac{W_m}{\varepsilon_m^2} = 373 \text{ kg.}$$

Die auf den Kurbelzapfen reduzierte rotierende Masse sei  $M = 1800$ , die hin- und hergehenden Massen seien so weit ausgeglichen, dass wir

$$U = U_0 = \frac{M}{2r} = \text{Const.}$$

setzen dürfen. Alsdann ergibt sich mit  $\Psi_0 = 1$

$$\Psi = e^{\frac{2rC}{M} \cdot \varphi} = e^{0,289 \varphi} = 1,336^\varphi.$$

Wir haben nun in Fig. 53 absichtlich ein willkürliches Diagramm mit sehr starken Schwankungen des Tangentialdruckes gewählt, so zwar, dass

$$T''_{max} = 1,68 T''_m \quad \text{und} \quad T''_{min} = 0,53 T''_m$$

wird. Der Mittelwert der Kurve der  $T'' \Psi$  ist ebenfalls in Fig. 53 eingetragen und ergibt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T'' \Psi d\varphi = 2,75 T''_m.$$

Weiter findet sich  $\Psi_{2\pi} = 6,166$ , also  $\Psi_{2\pi} - 1 = 5,166$ , also nach Gleichung 186 a)

$$\varepsilon_0^2 U_0 = \frac{2\pi \cdot 2,75 \cdot T''_m}{5,166} = 3,3 T''_m$$

und daraus sofort

$$\varepsilon_0^2 = 0,955 \varepsilon_m^2, \quad \varepsilon_0 = 0,97 \varepsilon_m.$$

Für die Ermittlung der Werte von  $\varepsilon^2$  wurde die ganze Figur in Streifen von  $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$  zerlegt und deren mittlere Ordinaten in Gleichung 184a) eingeführt. Das Ergebnis bildet die ausgezogene Kurve der  $\varepsilon^2 U$ , aus der dann diejenige der  $C\varepsilon^2$  sofort folgt. Man erkennt übrigens schon aus dem Verlaufe von  $\varepsilon^2 U$ , dass die Schwankungen des Quadrates der Winkelgeschwindigkeit sich in den Grenzen

$$\varepsilon_{max}^2 = 1,12 \varepsilon_m, \quad \varepsilon_{min}^2 = 0,94 \varepsilon_m$$

entsprechend den Werten

$$\varepsilon_{max} = 1,06 \varepsilon_m, \quad \varepsilon_{min} = 0,98 \varepsilon_m$$

halten. Im Vergleich zu den grossen Schwankungen der Drehkraft sind diejenigen der Widerstandskurve demnach sehr unbedeutend.

Die geringen Abweichungen der erhaltenen Widerstandskurve vom Mittelwerte  $W_m = T_m''$  führen auf die Vermutung, dass es praktisch zulässig sein dürfte, die Winkelgeschwindigkeit  $\varepsilon$  auch nach den Formeln des vorigen Paragraphen, also durch

$$\varepsilon^2 U - \varepsilon_0^2 U_0 = \int_0^{\varphi} (T'' - W_m) d\varphi = \Delta L$$

auf graphischem Wege zu ermitteln. In der That zeigt die auf diese Weise erhaltene über der Linie  $\varepsilon^2 U$  gestrichelt eingetragene und mit  $[\varepsilon^2 U]$  bezeichnete Linie, für welche noch dazu vorerst  $\varepsilon_0 \sim \varepsilon_m$  angenommen wurde, einen nur wenig abweichenden Verlauf. Dieses überaus einfache Verfahren ist also praktisch sehr wohl zulässig, vorausgesetzt, dass man nachträglich die ganze Linie um die Differenz

$$\varepsilon_0^2 U - (\varepsilon^2 U)_m$$

verschiebt bzw. diese Verschiebung in der Widerstandskurve selbst nachholt. Jedenfalls also sollte man nicht versäumen, bei Anwendung dieser Nährungsmethode dieselbe durch eine nochmalige Probe mit der durch sie erhaltenen Widerstandskurve zu kontrollieren, wenn man es nicht vorzieht, überhaupt das oben geschilderte exakte Verfahren durchzuführen.

# Über die Derivierte eines Vektors.

Von

M. FR. DANIELS

in Freiburg (Schweiz).

In der Kinematik von J. Somoff findet sich (S. 51–55) eine Methode zur Bestimmung der Projektionen auf drei bewegliche rektanguläre Koordinatenachsen  $O'\xi$ ,  $O'\eta$ ,  $O'\zeta$  von der geometrischen Derivierten eines Vektors  $\vec{u}$ .

Wir werden hier in einfacher Weise und auf anderem Wege die von Somoff gefundenen Formeln ableiten, und einige für die Mechanik wichtige Anwendungen davon machen. Wir bedienen uns dabei der Vektormethode, welche aus den Untersuchungen von Hamilton, Grassmann, de Saint-Venant<sup>1)</sup>, Resal<sup>2)</sup>, Somoff<sup>3)</sup>, Massau<sup>4)</sup>, Gibbs<sup>5)</sup>, Heaviside<sup>6)</sup>, Föppl<sup>7)</sup>, Demoulin<sup>8)</sup> u. a. hervorgegangen, nach dem Ausdruck Heaviside's<sup>9)</sup> als eine Art Quaternionenrechnung ohne Quaternionen betrachtet werden kann, die auf dem systematischen Gebrauch zweier Vektorenkombinationen beruht.

Die erste wird von Grassmann das innere Produkt, von Resal, Massau, Demoulin u. A. le produit géométrique, von Heaviside und Föppl das skalare Produkt genannt; wir schreiben es mit Föppl, dem wir in der Notation gefolgt sind,

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = AB \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}),$$

wo  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  die Vektoren,  $A$  und  $B$  ihre Tensoren sind.

1) Comptes Rendus 1846.

2) Traité de Cinématique Pure 1862.

3) Kinematik, übersetzt von A. Ziwet 1878.

4) Cours de Mécanique de l'Université de Gand. 1879.

5) On Vektoranalysis, Newhaven 1881.

6) Electrical Papers 1892.

7) Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität 1884. Geometrie der Wirbelbewegung 1897.

8) Mém. s. l'application d'une méthode vectorielle à l'étude de divers systèmes de droites 1894.

9) Electrical Papers Vol. II p. 521.

Die zweite Kombination wird von Massau u.A. moment géométrique, von Heaviside und Föppl das Vektorprodukt genannt und geschrieben  $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ .

Es ist  $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  ein neuer Vektor, senkrecht zu  $\mathfrak{A}$  und zu  $\mathfrak{B}$  mit einem Tensor gleich  $AB\sin(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$  und so gerichtet, dass  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$  im Raume ein Rechtssystem bilden. Sind  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$  die Projektionen von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  auf die drei rechtwinkligen Axen, welche die Einheitsvektoren  $i, j, k$  tragen, so ist

$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (A_2B_3 - A_3B_2)i + (A_3B_1 - A_1B_3)j + (A_1B_2 - A_2B_1)k.$$

Offenbar stellt nach der obigen Definition  $Vur$  die Geschwindigkeit eines Punktes vor, dessen Radius Vektor  $r$  ist, und der mit einer Winkelgeschwindigkeit, gleich dem Tensor von  $u$ , sich dreht um eine durch  $O$  gehende Axe, welche dem Vektor  $u$  parallel ist.

1. Für den Vektor  $\mathfrak{A} = A_1i + A_2j + A_3k$ , wo  $i, j, k$  drei unveränderliche Einheitsvektoren sind, ist bekanntlich die Derivierte in Bezug auf eine Variable  $t$

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt} = \frac{dA_1}{dt}i + \frac{dA_2}{dt}j + \frac{dA_3}{dt}k.$$

Es kommt aber oft vor, besonders in der Mechanik, dass die Einheitsvektoren  $l, m, n$  in den drei zu einander senkrecht stehenden Axen, in Bezug auf welche ein Vektor

$$1) \quad \mathfrak{B} = B_1l + B_2m + B_3n$$

zerlegt worden ist, selbst, sowie ihre skalaren Koeffizienten  $B_1, B_2, B_3$  Funktionen der unabhängigen Variablen  $t$  (gewöhnlich die Zeit) sind. Was wird in diesem Falle  $\frac{d\mathfrak{B}}{dt}$  oder  $\dot{\mathfrak{B}}$  sein?

Da die Axen zu einander senkrecht sind, so bestehen die Relationen:

$$1) \quad l^2 = 1, \quad m^2 = 1, \quad n^2 = 1,$$

$$2) \quad mn = 0, \quad nl = 0, \quad lm = 0,$$

welche differenziert noch die weiteren Beziehungen:

$$3) \quad \dot{l}l = 0, \quad \dot{m}m = 0, \quad \dot{n}n = 0,$$

$$4) \quad - \dot{m}n = -m\dot{n}, \quad \dot{n}l = -n\dot{l}, \quad \dot{l}m = -l\dot{m},$$

liefern.

Aus der Gleichung 1) folgt durch Differenzierung:

$$II) \quad \dot{\mathfrak{B}} = (B_1\dot{l} + B_2\dot{m} + B_3\dot{n}) + (\dot{B}_1l + \dot{B}_2m + \dot{B}_3n).$$

Im zweiten Teil des rechtsstehenden Ausdrucks sind nur die skalaren Koeffizienten  $B_1, B_2, B_3$  differenziert; wir wollen das durch  $[\dot{\mathfrak{B}}]$  oder  $\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t}$  andeuten.

Der erste Teil aber kann umgeformt werden. Durch Anwendung der für jeden Vektor geltigen Identität

$$\mathfrak{C} \equiv \mathfrak{C}l \cdot l + \mathfrak{C}m \cdot m + \mathfrak{C}n \cdot n$$

auf ihn geht er über in

$$(B_1 \dot{l}l + B_2 \dot{m}l + B_3 \dot{n}l)l + (B_1 \dot{l}m + B_2 \dot{m}m + B_3 \dot{n}m)m \\ + (B_1 \dot{l}n + B_2 \dot{m}n + B_3 \dot{n}n)n,$$

oder durch Hinzuziehung der Relationen 3) und 4) in

$$(B_3 \dot{n}l - B_2 \dot{l}m)l + (B_1 \dot{l}m - B_3 \dot{m}n)m + (B_2 \dot{m}n - B_1 \dot{l}n)n.$$

Es ist dies aber  $Vu\mathfrak{B}$ , wenn

$$u = \dot{m}n \cdot l + \dot{n}l \cdot m + \dot{l}m \cdot n.$$

Ist die Zeit  $t$  die unabhängige Variable, so ist  $u$  ein nur von Stand und Geschwindigkeit der beweglichen Axen abhängiger Vektor.

Es geht also II) über in

$$\text{III)} \quad \dot{\mathfrak{B}} = Vu\mathfrak{B} + [\dot{\mathfrak{B}}],$$

was symbolisch auch geschrieben werden kann

$$\dot{\mathfrak{B}} = \left( Vu + \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathfrak{B}.$$

Differenzieren wir den Vektor  $u$  selbst nach Gleichung III), so bekommen wir  $\dot{u} = Vu u + [\dot{u}]$ ; es ist also

$$\dot{u} = [\dot{u}].$$

2. Um den zweiten Differentialquotienten von  $\mathfrak{B}$  in Bezug auf  $t$  zu finden, differenzieren wir  $\mathfrak{B}$  noch einmal in der durch Gleichung III) gegebenen Weise. Wir bekommen dann:

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\dot{\mathfrak{B}}} &= \left( Vu + \frac{\partial}{\partial t} \right) \dot{\mathfrak{B}} = \left( Vu + \frac{\partial}{\partial t} \right) (Vu\mathfrak{B} + [\dot{\mathfrak{B}}]) = Vu Vu\mathfrak{B} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial t} Vu\mathfrak{B} + Vu \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{B} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathfrak{B}, \end{aligned} \right.$$

welche Gleichung symbolisch auch geschrieben werden kann:

$$\dot{\dot{\mathfrak{B}}} = \left( Vu + \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(2)} \mathfrak{B},$$

falls man nur bedenkt, dass

$$Vu \frac{d}{dt} \mathfrak{B} = Vu [\dot{\mathfrak{B}}] \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t} Vu\mathfrak{B} = Vu \dot{\mathfrak{B}} + Vu [\dot{\mathfrak{B}}]$$

nicht dieselbe Bedeutung haben und deshalb die beiden Symbole

$$Vu \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial t}$$

nicht commutativ sind.

Mit dieser Einschränkung ist, wie man jetzt leicht einsieht, die dritte Derivierte  $(\mathbf{V}\mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial t})^{(3)}\mathfrak{B}$  und die  $n^{\text{te}}$  Derivierte

$$(\mathbf{V}\mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial t})^{(n)}\mathfrak{B}.$$

Wir gehen jetzt dazu über, von der entwickelten Differentiationsformel einige für die Mechanik wichtige Anwendungen zu machen.

3. Mit einem sich bewegenden, festen Körper ist ein rechtwinkliges Axensystem  $(O'\xi\eta\zeta)$  verbunden, dessen Ursprung  $O'$  in Bezug auf drei feste Axen  $(Oxyz)$ , welche die Einheitsvektoren  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  tragen, die Koordinaten  $x_0y_0z_0$  hat. Die Lage eines Punktes  $P$  des Körpers, dem im beweglichen System die Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  zukommen, wird dann bestimmt durch den Vektor

$$\mathfrak{R} = (x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}) + (\xi\mathbf{l} + \eta\mathbf{m} + \zeta\mathbf{n})$$

oder

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 + \mathbf{r},$$

wenn  $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$  Einheitsvektoren in den Richtungen der drei beweglichen Axen  $O'\xi, O'\eta, O'\zeta$  sind.

Für die Geschwindigkeit finden wir dann, wenn wir bedenken erstens, dass die auftretenden  $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_0$  und  $\mathbf{r}$  Funktionen der Zeit  $t$  sind, zweitens, dass  $[\dot{\mathbf{r}}] = 0$  und deshalb  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{V}\mathbf{u}\mathbf{r}$  ist

$$\dot{\mathfrak{R}} = \dot{\mathfrak{R}}_0 + \mathbf{V}\mathbf{u}\mathbf{r}.$$

Der erste Teil  $\dot{\mathfrak{R}}_0$  ist für alle Punkte des Körpers derselbe, und stellt deshalb eine Translationsgeschwindigkeit vor; der zweite Teil  $\mathbf{V}\mathbf{u}\mathbf{r}$  ist die Geschwindigkeit, welche der Punkt haben würde, wenn der Körper mit einer Winkelgeschwindigkeit gleich dem Tensor von  $\mathbf{u}$  sich drehte um eine durch  $O'$  gehende und mit  $\mathbf{u}$  zusammenfallende Axe.

4. Die Beschleunigung des Punktes  $P$  wird gefunden, wenn  $\dot{\mathfrak{R}}$  von neuem in Bezug auf  $t$  nach Gleichung III) differenziert wird. Dabei können wir den Vektor  $\dot{\mathfrak{R}}$  nach den drei beweglichen Axen  $(O'\xi\eta\zeta)$  zerlegt denken, es wird dann

$$\dot{\mathfrak{R}} = (\mathbf{V}\mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial t})(\mathfrak{R}_0 + \mathbf{V}\mathbf{u}\mathbf{r}),$$

oder, da  $[\dot{\mathbf{r}}] = 0$  ist,

$$\dot{\mathfrak{R}} = \mathbf{V}\mathbf{u}\dot{\mathfrak{R}}_0 + [\dot{\mathfrak{R}}_0] + \mathbf{V}\mathbf{u}\mathbf{V}\mathbf{u}\mathbf{r} + \mathbf{V}\dot{\mathbf{u}}\mathbf{r}.$$

5. Sind nicht nur  $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$ , sondern auch die Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$  Funktionen der Zeit, m. a. W. bewegt sich der Punkt  $P$  in Bezug auf die beweglichen Axen, so ist der Vektor

$$[\dot{\mathbf{r}}] = \dot{\xi}\mathbf{l} + \dot{\eta}\mathbf{m} + \dot{\zeta}\mathbf{n},$$

der offenbar die Geschwindigkeit in der relativen Bewegung vorstellt, nicht mehr gleich Null, und  $\dot{\mathfrak{R}}$  wird in dem Falle:

$$\dot{\mathfrak{R}} = (\dot{\mathfrak{R}}_0 + \mathbf{V}u\mathbf{r}) + [\dot{\mathfrak{r}}],$$

ist also die Summe der Geschwindigkeit, welche ein momentan mit  $P$  zusammenfallender Systempunkt haben würde,  $\dot{\mathfrak{R}}_0 + \mathbf{V}u\mathbf{r}$  und der Geschwindigkeit in der relativen Bewegung  $[\dot{\mathfrak{r}}]$ .

6. Wollen wir wissen, wie die Beschleunigung der absoluten Geschwindigkeit zusammenhängt mit der Beschleunigung der relativen Geschwindigkeit, so brauchen wir den Ausdruck für die absolute Geschwindigkeit des Punktes  $P$

$$\dot{\mathfrak{R}} = \dot{\mathfrak{R}}_0 + \mathbf{V}u\mathbf{r} + [\dot{\mathfrak{r}}]$$

nur noch einmal nach der Differentiationsformel III) zu differenzieren.

Wir finden dann für die Beschleunigung der absoluten Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} \ddot{\mathfrak{R}} &= \left(\mathbf{V}u + \frac{\partial}{\partial t}\right) (\dot{\mathfrak{R}}_0 + \mathbf{V}u\mathbf{r} + [\dot{\mathfrak{r}}]) \\ \text{oder} \quad \ddot{\mathfrak{R}} &= \left(\mathbf{V}u + \frac{\partial}{\partial t}\right) \dot{\mathfrak{R}}_0 + \left(\mathbf{V}u + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(2)} \mathbf{r} \\ \ddot{\mathfrak{R}} &= \left(\mathbf{V}u + \frac{\partial}{\partial t}\right) \dot{\mathfrak{R}}_0 + \left(\mathbf{V}u\mathbf{V}u + \mathbf{V}u\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{V}u + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \mathbf{r} \\ \ddot{\mathfrak{R}} &= \left\{ \mathbf{V}u\dot{\mathfrak{R}}_0 + [\dot{\mathfrak{R}}_0] + \mathbf{V}u\mathbf{V}u\mathbf{r} + \mathbf{V}\dot{u}\mathbf{r} \right\} + 2\mathbf{V}u[\dot{\mathfrak{r}}] + [[\ddot{\mathfrak{r}}]]. \end{aligned}$$

Der erste in Klammern stehende Ausdruck ist die Beschleunigung des Systempunktes  $p$ , mit welchem der Punkt  $P$  momentan zusammentrifft; der Vektor  $[[\ddot{\mathfrak{r}}]]$ , wo die doppelten Klammern stehen, um anzugeben, dass in

$$\mathbf{r} = \xi\mathbf{l} + \eta\mathbf{m} + \zeta\mathbf{n}$$

nur  $\xi\eta\zeta$  zweimal in Bezug auf  $t$  differenziert werden sollen — stellt die Beschleunigung der relativen Geschwindigkeit vor. — Der Vektor

$$2\mathbf{V}u[\dot{\mathfrak{r}}]$$

endlich, der offenbar senkrecht steht zu  $u$  und  $[\dot{\mathfrak{r}}]$ , bildet die komplementäre oder zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung (Coriolis).

7. Es ist jetzt auch möglich, in einfacher Form die Beziehung zwischen den relativen und absoluten Beschleunigungen höherer Ordnung anzugeben.

So ist z.B. die Beschleunigung zweiter Ordnung der absoluten Geschwindigkeit

$$\ddot{\mathfrak{R}} = \left(\mathbf{V}u + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(2)} \dot{\mathfrak{R}}_0 + \left(\mathbf{V}u + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(3)} \mathbf{r}.$$

Es enthält die rechte Seite einen Teil,

$$\left(\mathbf{V}u + \frac{\partial}{\partial t}\right)^{(2)} \dot{\mathfrak{R}}_0 + \mathbf{V}u\mathbf{V}u\mathbf{V}u\mathbf{r} + 2\mathbf{V}u\mathbf{V}\dot{u}\mathbf{r} + \mathbf{V}\dot{u}\mathbf{V}u\mathbf{r} + \mathbf{V}\ddot{u}\mathbf{r},$$

der nur von  $\mathbf{r}$ , nicht von  $[\dot{\mathbf{r}}]$  und  $[[\ddot{\mathbf{r}}]]$  abhängt, der also allein übrig bleibt, wenn  $[\dot{\mathbf{r}}]$  und  $[[\ddot{\mathbf{r}}]]$  gleich Null gesetzt, m. a. W. der Punkt  $P$  als fest mit den beweglichen Axen verbunden gedacht wird. Es ist das die Beschleunigung zweiter Ordnung des Systempunktes  $p$ , mit welchem  $P$  momentan zusammen trifft. Ausserdem kommt vor

$$\left[ [[\ddot{\mathbf{r}}]] \right] \text{ oder } \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2},$$

und dieser Vektor ist offenbar die Beschleunigung zweiter Ordnung der relativen Geschwindigkeit. Was dann noch übrig bleibt

$$3 \left\{ \mathbf{V} \mathbf{u} \mathbf{V} \mathbf{u} [\dot{\mathbf{r}}] + 2 \mathbf{V} \mathbf{u} [\dot{\mathbf{r}}] + \mathbf{V} \mathbf{u} [[\ddot{\mathbf{r}}]] \right\}$$

ist die komplementäre Beschleunigung zweiter Ordnung.

Allgemein gilt für die Beschleunigung  $(n-1)$ ter Ordnung  $\mathfrak{R}^{(n)}$  der absoluten Geschwindigkeit  $\mathfrak{R}$

$$\mathfrak{R}^{(n)} = \left( \mathbf{V} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial t} \right)^{n-1} \mathfrak{R}_0 + \left( \mathbf{V} \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(n)} \mathbf{r},$$

wo der von  $[\dot{\mathbf{r}}]$ ,  $[[\ddot{\mathbf{r}}]]$  . . . u. s. w. unabhängige Teil die Beschleunigung derselben Ordnung des Systempunktes ist, der augenblicklich mit  $P$  zusammenfällt;  $\frac{\partial^n \mathbf{r}}{\partial t^n}$  die Beschleunigung  $n-1$ ter Ordnung der relativen Geschwindigkeit und der übrig bleibende Teil die komplementäre Beschleunigung  $(n-1)$ ter Ordnung vorstellt.

8. Sind  $v_x, v_y, v_z$  die Komponenten der absoluten Geschwindigkeit eines Punktes  $P$  in Bezug auf die beweglichen Axen — ist also

$$\mathfrak{R} = v_x \mathbf{l} + v_y \mathbf{m} + v_z \mathbf{n},$$

so bestehen nach Bour (Journal de Liouville, 2<sup>me</sup> Série t. VIII 1863) die Beziehungen

$$\begin{aligned} J_{ax} &= qv_x - rv_y + \frac{dv_x}{dt} \\ J_{ay} &= rv_x - pv_z + \frac{dv_y}{dt} \\ J_{az} &= pv_y - qv_x + \frac{dv_z}{dt}, \end{aligned}$$

wo  $J_{ax}, J_{ay}, J_{az}$ , die Projektionen der Beschleunigung von der absoluten Geschwindigkeit auf die beweglichen Axen sind.

Es können dieselben leicht durch die Differentiation nach Gleichung III) aus

$$\mathfrak{R} = v_x \mathbf{l} + v_y \mathbf{m} + v_z \mathbf{n}$$

gefunden werden. Wir bekommen nämlich

$$\mathfrak{R}^{\dot{}} = \mathbf{V} \mathbf{u} \mathfrak{R} + [\dot{\mathfrak{R}}],$$

und wenn wir bedenken, dass allgemein

$$\mathbf{V} \mathfrak{A} \mathfrak{B} = (A_2 B_3 + A_3 B_2) \mathbf{l} + (A_3 B_1 - A_1 B_3) \mathbf{m} + (A_1 B_2 - A_2 B_1) \mathbf{n}$$

und deshalb, sobald  $p, q, r$  die Projektionen von  $u$  auf  $O'\xi, O'\eta, O'\zeta$  sind,

$$\mathbf{V}u\mathfrak{R} = (qv_x - rv_y)\mathfrak{l} + (rv_x - pv_z)\mathfrak{m} + (pv_y + qv_z)\mathfrak{n}$$

ist auch noch

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\mathfrak{R}} &= \left( qv_x - rv_y + \frac{dv_x}{dt} \right) \mathfrak{l} + \left( rv_x - pv_z + \frac{dv_y}{dt} \right) \mathfrak{m} \\ &\quad + \left( pv_y - qv_z + \frac{dv_z}{dt} \right) \mathfrak{n}. \end{aligned} \right.$$

Es ist aber

$$\dot{\mathfrak{R}} = J_{ax}\mathfrak{l} + J_{ay}\mathfrak{m} + J_{az}\mathfrak{n},$$

und deshalb

$$J_{ax} = qv_x + rv_x + \frac{dv_x}{dt} \text{ u. s. w.}$$

9. Es ist klar, dass die Differentiation nach der Formel

$$\dot{\mathfrak{R}} = \mathbf{V}u\mathfrak{R} + [\dot{\mathfrak{R}}]$$

auch noch angewandt werden kann, wenn die Bewegung in einer Ebene oder parallel zu derselben stattfindet. In dem Falle lassen wir mit derselben die Ebenen  $xy$  und  $\xi\eta$  zusammenfallen. Es ist dann

$$z_0 = \xi = 0,$$

und weil wohl die Richtung von  $\mathfrak{l}$  und  $\mathfrak{m}$ , nicht aber die von  $\mathfrak{n}$  sich ändern kann — von einer Änderung des Tensors von  $\mathfrak{n}$  kann überhaupt keine Rede sein —, so ist  $\dot{\mathfrak{n}} = 0$ , deshalb auch  $\mathfrak{m}\dot{\mathfrak{n}} = -\dot{\mathfrak{m}}\mathfrak{n} = 0$  und

$$u = \dot{\mathfrak{m}} \cdot \mathfrak{n}$$

d. h. die Rotationsaxe fällt mit der Richtung  $\mathfrak{n}$  zusammen, steht also zur Ebene senkrecht. Das skalare Produkt eines beliebigen in der Ebene liegenden Vektors mit  $u$  ist deshalb Null.

Für einen Punkt  $P$  der beweglichen Figur, der bestimmt ist durch den Vektor

$$\mathfrak{R} = (x_0\mathfrak{i} + y_0\mathfrak{j}) + (\xi\mathfrak{l} + \eta\mathfrak{m}) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{r}$$

wird, da  $[\dot{\mathfrak{r}}] = 0$  ist, die Geschwindigkeit

$$5) \quad \dot{\mathfrak{R}} = \dot{\mathfrak{R}}_0 + \mathbf{V}u\mathfrak{r}$$

sein. Für den Punkt  $C$ , bestimmt durch den Vektor  $\mathfrak{r}_c$ , welcher der Gleichung

$$6) \quad \dot{\mathfrak{R}}_0 + \mathbf{V}u\mathfrak{r}_c = 0 \quad \text{oder} \quad \mathfrak{r}_c = \frac{1}{u^2} \cdot \mathbf{V}u\dot{\mathfrak{R}}_0$$

genügt, ist die Geschwindigkeit Null. Subtrahieren wir die Gleichung 6) von 5), so bekommen wir

$$\dot{\mathfrak{R}} = \mathbf{V}u(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c).$$

Die Geschwindigkeiten der verschiedenen Punkte der beweglichen Figur sind deshalb so, als ob dieselbe augenblicklich sich um eine



d. h. es sind die Geschwindigkeiten, womit sich der genannte Punkt auf den Kurven ( $c$ ) und  $c$  bewegt, gleich gross, oder: die Kurve  $c$  rollt ohne Gleitung auf der Kurve ( $c$ ).

11. Ein Punkt  $P$  der Figur beschreibt bei ihrer Bewegung in der Ebene eine Kurve, von der es leicht ist, den Krümmungsradius zu bestimmen.

Da nämlich die Geschwindigkeit des Punktes

$$\dot{\mathfrak{R}} = \mathbb{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c)$$

ist, wird seine Beschleunigung

$$\ddot{\mathfrak{R}} = \left( \mathbb{V}\mathfrak{u} + \frac{\partial}{\partial t} \right) \{ \mathbb{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c) \}$$

sein. Wollen wir die normale Komponente dieser Beschleunigung haben, so müssen wir skalar mit einem Einheitsvektor in der Richtung  $PC$ , d. i. mit  $\frac{\mathfrak{r}_c - \mathfrak{r}}{PC}$  multiplizieren; wir bekommen dann:

$$7) \quad \frac{(\mathfrak{r}_c - \mathfrak{r})\ddot{\mathfrak{R}}}{PC} = \frac{(\mathfrak{r}_c - \mathfrak{r})\mathbb{V}\mathfrak{u}\mathbb{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c)}{PC} + \frac{(\mathfrak{r}_c - \mathfrak{r})\frac{\partial}{\partial t}\mathbb{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c)}{PC}.$$

Für die normale Beschleunigung, welche links steht, kann bekanntlich geschrieben werden:

$$\frac{\dot{\mathfrak{R}}^2}{PM} \quad \text{oder} \quad \frac{\{ \mathbb{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c) \}^2}{PM} \quad \text{oder} \quad \frac{r^2 \cdot \overline{PC}^2}{PM},$$

wenn  $r$  der Tensor von  $\mathfrak{u}$  und  $M$  das Krümmungscentrum ist.

Für den ersten Term rechts können wir, da  $\mathfrak{u}$  und  $\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c$  zu einander senkrecht sind, schreiben:

$$\frac{u^2(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c)^2}{PC} \quad \text{oder} \quad \frac{r^2 \cdot \overline{PC}^2}{PC} \quad \text{oder} \quad r^2 \cdot \overline{PC},$$

und für den zweiten, wenn wir bedenken, dass

$$(\mathfrak{r}_c - \mathfrak{r})\mathbb{V}\mathfrak{u}(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c)$$

und  $[\dot{\mathfrak{r}}]$  Null sind, und dass die Vektoren  $\mathfrak{u}$ ,  $[\dot{\mathfrak{r}}_c]$  und  $(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c)$  ein Linkssystem bilden:

$$\frac{(\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c)\mathbb{V}\mathfrak{u}[\dot{\mathfrak{r}}_c]}{PC} \quad \text{oder} \quad \frac{u\mathbb{V}[\dot{\mathfrak{r}}](\mathfrak{r} - \mathfrak{r}_c)}{PC} \quad \text{oder} \quad -rv \sin \theta,$$

wenn  $v$  der Tensor der Geschwindigkeit  $[\dot{\mathfrak{r}}_c]$  und  $\theta$  der Winkel zwischen  $[\dot{\mathfrak{r}}_c]$  und  $\overline{CP}$  ist. Es geht dadurch, wenn wir noch

$$\overline{PM} = \overline{PC} - \overline{MC}$$

setzen, die Gleichung 7) über in:

$$\frac{r^2 \cdot \overline{PC}^2}{PC - \overline{MC}} = r^2 \cdot \overline{PC} - rv \sin \theta,$$

welche nach einer einfachen Reduktion, bei welcher wir  $\frac{v}{r} = k$  setzen, die bekannte Formel von Euler-Savary

$$\frac{1}{PC} - \frac{1}{MC} = \frac{1}{k \sin \theta}$$

liefert.

12. Ist mit den beweglichen Axen  $O'\xi\eta$  eine Kurve  $d$  fest verbunden (siehe Figur), so wird diese bei der Bewegung fortwährend eine andere Kurve ( $d$ ), ihre Enveloppe, berühren. Der Kontaktpunkt  $D$  ist kein fester Punkt der beweglichen Figur; er bewegt sich im Gegenteil auf der Kurve  $d$  mit der relativen Geschwindigkeit  $[\dot{\mathbf{r}}_d]$ , wie er auf der Enveloppe ( $d$ ) mit der absoluten Geschwindigkeit  $\mathfrak{R}_d$  fortschreitet.

Beide Geschwindigkeiten haben dieselbe Richtung, nämlich die der gemeinschaftlichen Tangente. Nun ist

$$\mathfrak{R}_d = \mathfrak{R}_0 + \mathbf{r}_d$$

und deshalb nach Gleichung III):

$$\mathfrak{R}_d = \mathfrak{R}_0 + V\mathbf{u}\mathbf{r}_d + [\dot{\mathbf{r}}_d]$$

oder, weil  $V\mathbf{u}\mathbf{r}_c + \mathfrak{R}_0 = 0$  ist:

$$\mathfrak{R}_d = V\mathbf{u}(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c) + [\dot{\mathbf{r}}_d].$$

Da  $\mathfrak{R}_d$  und  $[\dot{\mathbf{r}}_d]$  die Richtung der gemeinschaftlichen Tangente haben, so hat auch ihre Differenz

$$V\mathbf{u}(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c)$$

diese Richtung; die genannte Tangente steht also senkrecht zur Verbindungsgeraden  $\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c$ , d. i. senkrecht zu  $\overline{CD}$ .

Offenbar ist die Differenz

$$V\mathbf{u}(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c)$$

die Geschwindigkeit, womit die Kurve  $d$  auf der Kurve ( $d$ ) gleitet. Sie wird Null, wenn  $\mathbf{r}_d = \mathbf{r}_c$  ist, d. h. die Kurve der Momentancentra  $c$  ist die einzige, welche bei der Bewegung der Figur auf ihrer Enveloppe ( $c$ ) rollt ohne Gleitung.

Da  $[\dot{\mathbf{r}}_d]$  dieselbe Richtung hat wie

$$V\mathbf{u}(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c),$$

dürfen wir

$$[\dot{\mathbf{r}}_d] = m V\mathbf{u}(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c)$$

setzen, wo  $m$  ein skalarer Faktor ist; es wird dadurch

$$\mathfrak{R}_d = (1 + m) V\mathbf{u}(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c)$$

und wenn wir noch einmal nach Gleichung III) differenzieren:

$$8) \left\{ \begin{aligned} \dot{\mathfrak{R}}_d &= (1 + m) [V\mathbf{u} V\mathbf{u}(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c) + V\mathbf{u}(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c) + V\mathbf{u}([\dot{\mathbf{r}}_d] - [\dot{\mathbf{r}}_c])] \\ &\quad + m V\mathbf{u}(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c). \end{aligned} \right.$$

Projizieren wir diese Beschleunigung auf die Normale  $\overline{DC}$ , indem wir mit einem Einheitsvektor in dieser Richtung also mit  $\frac{\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_d}{\overline{DC}}$  skalar multiplizieren, so bekommen wir links die normale Komponente der Beschleunigung, für welche auch

$$\frac{\mathfrak{R}_d^2}{D\overline{M}_{(d)}} \quad \text{oder} \quad \frac{(1+m)^2 \{V u(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c)\}^2}{D\overline{M}_{(d)}} \quad \text{oder} \quad \frac{(1+m)^2 \cdot r^2 \cdot \overline{DC}^2}{D\overline{M}_{(d)}}$$

geschrieben werden kann, wo  $\overline{M}_{(d)}$  der Krümmungsmittelpunkt der Enveloppe ( $d$ ) ist. Der erste Term rechts wird

$$(1+m) \cdot r^2 \cdot \overline{DC},$$

der zweite und vierte werden Null, und der dritte wird:

$$\frac{(1+m)}{DC} \cdot (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_d) V u \{m V u(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c) - [\dot{\mathbf{r}}_c]\}$$

oder

$$\frac{(1+m)}{DC} \cdot (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_d) \{m u^2 (\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_d) - V u[\dot{\mathbf{r}}_c]\}$$

oder endlich noch

$$(1+m) \{m r^2 \cdot \overline{DC} - r v \sin \theta\}$$

wo  $v$ ,  $r$  und  $\theta$  wieder die oben angegebene Bedeutung haben. Die ganze Gleichung 8) wird dadurch:

$$\frac{(1+m)^2 \cdot r^2 \cdot \overline{DC}^2}{D\overline{M}_{(d)}} = (1+m)^2 \cdot r^2 \cdot \overline{DC} - (1+m) \cdot r v \sin \theta.$$

Vereinfachen wir diese Gleichung, indem wir wieder

$$\frac{v}{r} = k \quad \text{und} \quad D\overline{M}_{(d)} = \overline{DC} - \overline{M}_{(d)}\overline{C}$$

setzen, so bekommen wir

$$9) \quad \frac{1}{\overline{DC}} - \frac{1}{\overline{M}_{(d)}\overline{C}} = \frac{1+m}{k \sin \theta}.$$

Wird auf

$$[\dot{\mathbf{r}}_d] = m V u(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c)$$

nur die Operation  $\frac{\partial}{\partial t}$ , nicht die Operation  $V u$  angewandt, so bekommt man:

$$[[\dot{\mathbf{r}}]] = m V u(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c) + m V u([\dot{\mathbf{r}}_d] - [\dot{\mathbf{r}}_c]) + \dot{m} V u(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c),$$

und wenn dieselbe wieder mit dem Einheitsvektor  $\frac{\mathbf{r}_c - \mathbf{r}_d}{\overline{DC}}$  skalar multipliziert wird, so wird die linke Seite gleich der normalen Beschleunigung in der relativen Bewegung, also gleich

$$10) \quad \frac{[\dot{\mathbf{r}}_d]^2}{D\overline{M}_d} = \frac{m^2 \{V u(\mathbf{r}_d - \mathbf{r}_c)\}^2}{D\overline{M}_d} = \frac{m^2 \cdot r^2 \cdot \overline{DC}^2}{D\overline{M}_d},$$

wenn  $\overline{M}_d$  Krümmungscentrum der relativen Bahn des Punktes  $D$ , d. i. der Kurve  $\overline{d}$  ist.

Der erste und dritte Term rechts werden wieder Null, und für den zweiten findet man, in ganz ähnlicher Weise verfahrend wie oben

$$m^2 \cdot r^2 \cdot \overline{DC} = mrv \sin \theta.$$

Die Gleichung 10) geht dadurch über in:

$$\frac{m^2 \cdot r^2 \cdot \overline{DC}^2}{DM} = m^2 \cdot r^2 \cdot \overline{DC} - mrv \sin \theta,$$

oder, wenn wir wieder

$$D\overline{M}_d = \overline{DC} - \overline{M}_d C \quad \text{und} \quad \frac{v}{r} = k$$

setzen, in

$$11) \quad \frac{1}{\overline{DC}} - \frac{1}{\overline{M}_d C} = \frac{m}{k \sin \theta}.$$

Subtrahieren wir endlich 11) von 9), so bekommen wir:

$$\frac{1}{\overline{M}_d C} - \frac{1}{\overline{M}_{(d)} C} = \frac{1}{k \sin \theta},$$

was mit der oben gegebenen Euler-Savaryschen Gleichung den bekannten Satz liefert: Wenn eine Kurve  $d$  sich in ihrer Ebene bewegt, so fällt das Krümmungscentrum ihrer Enveloppe ( $d$ ) zusammen mit dem Krümmungscentrum der Trajektorie vom Krümmungsmittelpunkt der Kurve  $d$ .

13. Es lässt sich mit Hilfe der Gleichung III) auch in direkter einfacher Weise die bekannte Relation

$$\frac{1}{R_c} - \frac{1}{R_{(c)}} = \frac{1}{k}$$

beweisen, wo  $R_c$  und  $R_{(c)}$  die Krümmungsmittelpunkte sind von den Kurven  $c$  und  $(c)$  der Momentancentra.

Aus der früher gefundenen Gleichung

$$\mathfrak{R}_c = [\dot{r}_c]$$

folgt nämlich durch Anwendung der Gleichung III):

$$\mathfrak{R}_c = V_u[\dot{r}_c] + [[\dot{r}_c]]$$

und wenn wir diese mit einem Einheitsvektor in der Richtung der Normale  $CN$ , d. i. mit

$$-\frac{V_u[\dot{r}_c]}{TV_u[\dot{r}_c]} \quad \text{oder} \quad -\frac{V_u[\dot{r}_c]}{rv}$$

multiplizieren, so wird die linke Seite die normale Beschleunigung der absoluten Geschwindigkeit also  $\frac{(\mathfrak{R}_c)^2}{\mathfrak{R}_{(c)}}$  vorstellen; der erste Term rechts wird

$$\text{— } \frac{(V_{11} [\dot{r}_c])^2}{rv}$$

oder

$$\text{— } \frac{u^2 \cdot [\dot{r}_c]^2}{rv},$$

oder

$$\text{— } \frac{1}{k} \cdot [\dot{r}_c]^2,$$

und der zweite stellt die normale Beschleunigung der relativen Geschwindigkeit

$$\frac{[\dot{r}_c]^2}{R_c}$$

vor. Dividieren wir die ganze Gleichung durch  $[\dot{r}_c]^2$ , so bekommen wir also

$$\frac{1}{R_c} \text{— } \frac{1}{R_{(c)}} \text{— } \frac{1}{k}.$$



# Bemerkungen zu Bernhard Riemanns Vorlesungen über elliptische Funktionen.

Von  
H. STAHL  
in Tübingen.

---

Bei der Herausgabe dieser Vorlesungen (Leipzig 1899) habe ich eine Reihe von Erläuterungen und Ergänzungen hinzugefügt, die mit dem Text in enger Verbindung stehen. An dieser Stelle möchte ich noch ein paar Zusätze geben, die in erweitertem Sinne eine Ergänzung zu den Riemannschen Ausführungen bilden. Es sind dies Sätze über algebraische Funktionen und Anwendungen derselben auf das Abelsche Theorem und das Additionstheorem der elliptischen Funktionen in der Anordnung, wie sie auch in der Einleitung meiner „Theorie der Abelschen Funktionen“, Leipzig 1896, S. 2—5 kurz zusammengestellt sind, um das Verständnis der dort entwickelten analogen Teile in der Theorie der Abelschen Funktionen (Abschnitt II und III) zu erleichtern. Die Sätze an sich sind bekannt, es handelt sich nur um die Form, die ihnen hier gegeben wird.\*

Die Betrachtung schliesst unmittelbar an Abschnitt A §§ a und b in Riemanns Vorlesungen (citirt *R*) an und setzt nur die Kenntnis dieser beiden Paragraphen voraus.

## § I. Allgemeine Eigenschaften der Funktion $R(x, y)$ .

Im R. A § a wurde

$$1) \quad y = \sqrt{(x, k)} = \sqrt{x \cdot 1 - x \cdot 1 - k^2 x}$$

als Funktion von  $x$  untersucht und gezeigt, dass diese Funktion in der zweiblättrigen Verzweigungsfläche  $T$  einwertig ist.\*\* Unsere Aufgabe soll die Untersuchung gewisser algebraischer Funktionen sein, nämlich

---

\* Eine andere Fassung und Begründung derselben Sätze findet sich in Thomae, Abriss einer Theorie der Funktionen etc. (3. Aufl. Halle 1890, §§ 81—84 u. 107, 108).

\*\* Benutzt man noch die Abbildung der Fläche  $T$  mittels des elliptischen Integrals Gattung  $u$  (1) § 5 auf das Periodenparallelogramm, durch welche die Identität der rationalen Funktionen  $R(x, y)$  mit den doppelt periodischen Funktionen  $F(u)$  von  $u$  begründet wird, so erkennt man leicht die Analogie zwischen den Sätzen in §§ 1—3 mit den Sätzen von Liouville über doppelt periodische Funktionen (vergl. R. Abschnitt I § 1).

der rationalen Funktionen  $R(x, y)$  der beiden Variablen  $(x, y)$ , die durch die Gleichung 1) verbunden sind. Es gelten hier mit charakteristischen Abweichungen ähnliche Sätze, wie für eine rationale Funktion einer einzigen Variablen.

Eine rationale Funktion  $R(x, y)$  lässt sich mit Hilfe von 1) leicht auf die Form bringen

$$2) \quad R(x, y) = \frac{M + Ny}{P},$$

wo  $M, N, P$  ganze rationale Funktionen von  $x$  sind, die keinen Faktor mehr gemein haben. Es gelten nun folgende Sätze.

I. Eine Funktion  $R(x, y)$  ist eine eindeutige Funktion des Ortes in der Verzweigungsfläche  $T$  von  $y$ .

Da nämlich in der Fläche  $T$  sowohl  $x$  wie  $y$  eindeutige Funktionen des Ortes sind, so gilt dasselbe für den Ausdruck 2). Die Funktion  $R(x, y)$  hat demnach auch in der Umgebung eines jeden Punktes von  $T$  eine Entwicklung von demselben Charakter wie  $y$ , also eine Entwicklung nach Potenzen von  $(x - a)$  oder  $(x - a)^{\frac{1}{2}}$  oder  $x^{\frac{1}{2}}$ , je nachdem der Punkt  $(x, y)$  ein regulärer Punkt  $(a, b)$  oder ein Verzweigungspunkt  $(a, 0)$  oder der Verzweigungspunkt  $(x = y = \infty)$  ist. Die Funktion 2) wird ferner unendlich nur in einer endlichen Zahl von Punkten und in diesen nur in endlicher Ordnung, wie leicht zu sehen (vergl. auch Satz II). Die Entwicklungen in diesen Punkten enthalten daher auch nur eine endliche Zahl von unendlich werdenden Gliedern. Jede Entwicklung von  $R$  gilt innerhalb eines Konvergenzkreises, der durch den nächsten Unstetigkeitspunkt der Funktion  $R$  oder aber durch den nächsten Verzweigungspunkt von  $T$  geht. Wegen der Eindeutigkeit in  $T$  nennt man die Gesamtheit der rationalen Funktionen von  $(x, y)$  ein System von gleichverzweigten oder wie  $T$  verzweigten Funktionen.

Die beiden Werte von  $R(x, y)$ , die demselben Wert von  $x$  entsprechen, fallen immer und nur dann zusammen, wenn die beiden Werte von  $y$  zusammenfallen, d. h. also in den Verzweigungspunkten der Fläche  $T$ . Eine rationale Funktion  $M : P$  von  $x$  allein hat die Eigentümlichkeit, dass ihre Werte und Entwicklungen dieselben sind in zwei regulären, über einander liegenden Punkten von  $T$ , d. h. in zwei Punkten, die gleiches  $x$ , aber entgegengesetztes  $y$  haben. Eine Funktion der Form  $Ny : P$  hat die Eigentümlichkeit, dass ihre Werte und Entwicklungen in zwei solchen Punkten von  $T$  von entgegengesetztem Vorzeichen sind.

II. Die Zahl der  $0^1$  und  $\infty^1$  Punkte einer Funktion  $R(x, y)$  in der Fläche  $T$  ist die gleiche und heisst die Ordnung der Funktion  $R(x, y)$ .

Bei dieser Ausdrucksweise ist festzuhalten, dass in einem Punkte  $(a, b)$  von  $T$ , der kein Verzweigungspunkt ist, die Grösse  $x - a$ , in



nung, indes ist die Zahl der willkürlichen Koeffizienten der Funktion dann nicht mehr die grösste im Vergleich zu dieser Ordnung.

Geht man zur gebrochenen, rationalen Funktion  $R(x, y)$  über, so ist die allgemeinste Form derselben

$$4) \left\{ \begin{aligned} R(x, y) &= \frac{M + Ny}{P} \\ &= \frac{(a_0 + a_1 x + \dots + a_m x^m) + y(b_0 + b_1 x + \dots + b_{m-2} x^{m-2})}{c_0 + c_1 x + \dots + c_m x^m}. \end{aligned} \right.$$

Sind  $x'_1, x'_2, \dots, x'_m$  die Wurzeln von  $P = 0$ , so wird die Funktion 4)  $= \infty^1$  in jedem der Punkte

$$(x'_i, +y'_i) \quad \text{und} \quad (x'_i, -y'_i),$$

also im ganzen in  $2m$  Punkten von  $I$ . Sie wird  $= 0^1$  in den durch die Gleichungen

$$M^2 - N^2 \cdot (x, y) = 0 \quad \text{und} \quad M + Ny = 0$$

bestimmten Punkten, also ebenfalls in  $2m$  Punkten

$$(x^0_h, y^0_h) \quad (h = 1, \dots, 2m).$$

Die Funktion 4) ist also im allgemeinen von der Ordnung  $2m$ . Fallen einzelne der  $\infty^1$  Punkte mit  $0^1$  Punkt zusammen, so erniedrigt sich die Ordnung um die Zahl dieser Punkte. Ist der Grad von  $M, N, P$  in  $x$  ein anderer als der in 4) angegebene, so ist die Ordnung ebenfalls leicht zu bestimmen. Die Funktion hat aber dann nicht mehr die grösste Zahl von willkürlichen Koeffizienten im Vergleich zu ihrer Ordnung.

### § 2. Bildung von $R(x, y)$ aus den $0^1$ und $\infty^1$ Punkten.

An diese Sätze schliesst sich die Aufgabe, eine Funktion  $R(x, y)$  aus gegebenen Elementen zu bilden. Für eine rationale Funktion  $R(z)$  einer einzigen Variablen  $z$  gelten bekanntlich die zwei eng verbundenen Sätze:

Eine Funktion  $R(z)$  von der Ordnung  $m$  ist durch ihre  $m\infty^1$  und  $m0^1$  Punkte bis auf einen konstanten Faktor bestimmt; diese  $2m$  Elemente sind unabhängig von einander.

Eine Funktion  $R(z)$  von der Ordnung  $m$  ist durch ihre  $m\infty^1$  Punkte und die zugehörigen Residuen bis auf eine additive Konstante bestimmt; auch diese  $2m$  Elemente sind unabhängig von einander.

Entsprechend hat man hier die beiden Aufgaben, eine rationale Funktion  $R(x, y)$  zu bilden, wenn entweder ihre  $\infty^1$  und  $0^1$  Punkte oder ihre  $\infty^1$  Punkte und die zugehörigen Residuen gegeben sind. Es zeigt sich aber dabei, dass jedesmal nur ein Teil dieser Elemente willkürlich wählbar ist und es handelt sich daher weiter um eine Untersuchung der Abhängigkeit dieser Elemente von einander.

Die erste der beiden Aufgaben lautet:

Eine Funktion  $R(x, y)$  von der Ordnung  $m$  aus den  $m\infty^1$  und den  $m0^1$  Punkten zu bilden und die Bedingungsgleichungen zwischen diesen  $2m$  Punkten anzugeben.

Wir lösen die Aufgabe zuerst wieder für eine ganze rationale Funktion  $G(x, y)$ , deren  $\infty^1$  Punkte sämtlich in den Verzweigungspunkt  $x = \infty, y = \infty$  fallen. Die gesuchte Funktion hat die grösste Anzahl von willkürlichen Koeffizienten im Vergleich zu ihrer Ordnung, wenn sie von der Form 3) oder 3a) § 1 ist. Es sind daher wieder zwei Fälle zu unterscheiden.

Erstens sei  $m = 2n$ , also  $m$  gerade. Die  $0^1$  Punkte der Funktion seien

$$(x^0_i, y^0_i) \quad (i = 1, 2, \dots, 2n).$$

Dann ist für die gesuchte Funktion die Form 3) § 1 zu wählen, welche  $n + 1 + n - 1 = 2n$  homogene Koeffizienten  $a, b$  hat. Nun sind die  $2n - 1$  Verhältnisse dieser Koeffizienten bereits bestimmt durch die  $2n - 1$  ersten  $0^1$  Punkte

$$(x^0_i, y^0_i) \quad (i = 1, \dots, 2n - 1),$$

die beliebig gewählt werden können. Die so bestimmte Funktion  $G(x, y)$  enthält dann noch einen unbestimmten Faktor; sie ist aber, abgesehen von diesem Faktor, auch die einzige Funktion, die den gestellten Bedingungen genügt; denn gäbe es eine zweite solche Funktion, so hätte man in dem Quotienten beider eine Funktion, die in  $T$  eindeutig und nirgends mehr unendlich wäre. Eine solche Funktion ist aber nach bekannten Sätzen eine Konstante.

Nach dieser Betrachtung ist der letzte oder  $2n^{\text{te}}$   $0^1$  Punkt  $(x^0_{2n}, y^0_{2n})$  der Funktion durch die übrigen bestimmt und es muss zwischen den Koordinaten  $(x^0_i, y^0_i)$  der  $2n$   $0^1$  Punkte eine Relation bestehen. Um diese aufzustellen, hat man nur den Ausdruck 3) § 1, gebildet für die  $2n$   $0^1$  Punkte  $(x^0_i, y^0_i)$  gleich 0 zu setzen. Dies giebt  $2n$  Gleichungen, aus denen die Koeffizienten  $a, b$  zu eliminieren sind. Man erhält so die gesuchte Bedingung in Determinantenform, nämlich

$$1) \quad |1 \quad x_i^0 \dots x_i^{0n}, \quad y_i^0 \quad y_i^0 x_i^0 \dots y_i^0 x_i^{0n-2}| = 0 \quad (i = 1, \dots, 2n),$$

wenn man zur Abkürzung für eine  $2n$  Reihen von der Form 1) enthaltende Determinante nur die  $i^{\text{te}}$  Reihe anschreibt.

Ersetzt man in dieser Determinante  $(x^0_{2n}, y^0_{2n})$  durch die Koordinaten  $(x, y)$  eines variabeln Punktes, so stellt sie bis auf einen unbestimmt bleibenden, konstanten Faktor die gesuchte Funktion  $G(x, y)$  dar, gebildet aus den  $2n - 1$  ersten, willkürlichen  $0^1$  Punkten.

Zweitens sei  $m = 2n - 1$ , also  $m$  ungerade. Die  $0^1$  Punkte seien

$$(x_i^0, y_i^0) \quad (i = 1, \dots, 2n - 1).$$

Dann ist für die gesuchte Funktion die Form 3a) § 1 zu wählen. Auch hier zeigt sich, dass die Funktion schon durch die

$$m - 1 = 2n - 2$$

ersten  $0^1$  Punkte bis auf einen konstanten Faktor bestimmt ist und dass zwischen den  $2n - 1$   $0^1$  Punkten die Relation besteht:

$$2) \quad |1 \quad x_i^0 \dots x_i^{0n-1} \quad y_i^0 \quad y_i^0 x_i^0 \dots y_i^0 x_i^{0n-2}| = 0 \quad (i = 1, \dots, 2n - 1).$$

Zugleich folgt, dass eine ganze rationale Funktion  $G(x, y)$  nicht von der Ordnung  $m = 1$  sein kann; dann wäre nämlich  $n = 1$  und die Funktion 3a) § 1 eine Konstante.

Wir kommen zur Lösung der Aufgabe für die allgemeine rationale Funktion, d. h. zur Bildung einer Funktion  $R(x, y)$  von der Ordnung  $m$  aus den  $m$   $0^1$  Punkten und den  $m$   $\infty^1$  Punkten

$$(x_i^0, y_i^0) \text{ und } (x'_i, y'_i) (i = 1, \dots, m).$$

Der Einfachheit halber nehmen wir wieder an, die gegebenen Punkte haben eine allgemeine Lage, sie sollen also nicht in Verzweigungspunkte von  $T$  fallen und ausserdem sollen nicht zwei von ihnen übereinanderliegende Punkte in den beiden Blättern von  $T$  sein.

Die gesuchte Funktion  $R(x, y)$  hat die grösste Zahl von willkürlichen Koeffizienten im Vergleich zu ihrer Ordnung, wenn sie von der Form 4) § 1 ist. Der Nenner  $P$  ist offenbar

$$3) \quad P = x - x'_1 \cdot x - x'_2 \dots x - x'_m.$$

Dieser Ausdruck wird aber  $= 0^1$  in den  $2m$  Punkten  $(x'_i, y'_i)$  und  $(x'_i, -y'_i)$  von  $T$ . In den letzten  $m$  Punkten  $(x'_i, -y'_i)$  muss daher auch der Zähler verschwinden. Dieser hat  $2m$  homogene Koeffizienten, von denen nur die  $2m - 1$  Verhältnisse in Betracht kommen. Lässt man nun den Zähler in 4) § 1 zunächst für die  $m$  Punkte  $(x'_i, -y'_i)$  und dann noch für die  $m - 1$  ersten  $0^1$  Punkte

$$(x_i^0, y_i^0) (i = 1, \dots, m - 1)$$

verschwinden, so ist er bis auf einen unbestimmt bleibenden, konstanten Faktor vollkommen bestimmt und damit ist auch der letzte  $0^1$  Punkt bestimmt. Es muss also zwischen den  $m$   $\infty^1$  Punkten und den  $m$   $0^1$  Punkten eine Relation bestehen. Auch hier ist die so bestimmte Funktion (abgesehen von dem konstanten Faktor) die einzige, die den gestellten Bedingungen genügt.

Die Relation zwischen den  $2m$   $0^1$  und  $\infty^1$  Punkten

$$(x_i^0, y_i^0) \text{ und } (x'_i, y'_i) (i = 1, \dots, m)$$

wird erhalten, indem man den Ausdruck  $M + Ny$  im Zähler von 4) § 1, gebildet für die  $2m$  Punkte  $(x'_i, -y'_i)$  und  $(x_i^0, y_i^0)$  gleich 0 setzt und aus diesen  $2m$  Gleichungen die  $2m$  Koeffizienten  $a, b$  eliminiert. Man erhält in ähnlicher Abkürzung wie bei 1) oder 2):

$$4) \quad \begin{vmatrix} 1 & x'_i & x_i'^2 & \dots & x_i'^m & -y'_i & -y'_i x'_i & \dots & -y'_i x_i'^{m-2} \\ 1 & x_k^0 & x_k^0{}^2 & \dots & x_k^0{}^m & +y_k^0 & +y_k^0 x_k^0 & \dots & +y_k^0 x_k^0{}^{m-2} \end{vmatrix} = 0$$

$$(i = 1, \dots, m) (k = 1, \dots, m).$$

Ersetzt man in der Determinante 4)  $(x_m^0, y_m^0)$  durch die variablen Koordinaten  $(x, y)$ , so stellt sie den Zähler der gesuchten Funktion  $R(x, y)$  dar bis auf einen konstanten Faktor. Zugleich ergibt sich die Folgerung, dass eine rationale Funktion in  $(x, y)$  von der ersten

Ordnung unmöglich ist. Denn für  $m = 1$  wäre  $P = x - x_1'$ ;  $N$  würde wegfallen,  $M$  wäre vom Grade 1 in  $x$  und da es für  $(x_1', -y_1')$  verschwinden müsste, wäre  $M = x - x_1'$ , also  $M = P$ , d. h. die Funktion wäre eine Konstante. Wir fassen den Inhalt dieses Paragraphen zusammen in den Satz:

I. Eine rationale Funktion  $R(x, y)$  von der  $m$  Ordnung kann nur bestehen, wenn  $m > 2$  ist. Die Funktion ist bis auf einen konstanten Faktor bestimmt, wenn von ihren  $m$   $0^1$  und  $m$   $\infty^1$  Punkten alle beliebig gegeben sind mit Ausnahme von einem. Der letzte der  $2m$  Punkte ist eindeutig durch die übrigen bestimmt. Die zwischen den  $2m$   $0^1$  und  $\infty^1$  Punkten bestehende Relation ist die Gleichung 4).

### § 3. Bildung von $R(x, y)$ aus den $\infty^1$ Punkten und Residuen.

Die zweite Aufgabe lautet:

Eine Funktion  $R(x, y)$  von der Ordnung  $m$  aus den  $m$   $\infty^1$  Punkten und den  $m$  zugehörigen Residuen zu bilden und die Bedingungsgleichungen zwischen diesen  $2m$  Elementen aufzustellen.

Die  $m$   $\infty^1$  Punkte seien  $(x_1', y_1'), \dots, (x_m', y_m')$  und die zugehörigen Residuen  $B_1, \dots, B_m$ . Es soll also im Punkte  $(x_i', y_i')$  der Ausdruck

$$R(x, y) - B_i : (x - x_i')$$

endlich sein oder, wie wir sagen, es soll im Punkte  $(x_i', y_i')$   $R(x, y)$  unendlich werden wie  $B_i : (x - x_i')$ .

Zur Lösung der Aufgabe benutzen wir die besondere rationale Funktion  $(y + y_i') : (x - x_i')$ . Diese ist von der zweiten Ordnung; sie wird  $= \infty^1$  im Punkte  $(x_i', y_i')$  und im Verzweigungspunkt  $(x = y = \infty)$ , da für diesen der Zähler  $y + y_i' = \infty^0$ , der Nenner  $x - x_i' = \infty^2$  ist. Dagegen bleibt die Funktion endlich im Punkt  $(x_i', -y_i')$ . Bildet man nun den Ausdruck

$$1) \quad \frac{B_1}{2y_1'} \frac{y + y_1'}{x - x_1'} + \dots + \frac{B_m}{2y_m'} \frac{y + y_m'}{x - x_m'} + C_0,$$

so hat man eine rationale Funktion von  $(x, y)$ , die in den Punkten

$$(x_1', y_1') \dots (x_m', y_m')$$

$\infty^1$  wird und zwar in  $(x_i', y_i')$  wie  $B_i : (x - x_i')$ . Damit dieselbe endlich bleibt im Punkt  $(x = y = \infty)$ , muss die Gleichung bestehen

$$2) \quad \frac{B_1}{y_1'} + \dots + \frac{B_m}{y_m'} = 0.$$

Ist diese Gleichung erfüllt, so stellt der Ausdruck 1) gerade die gesuchte Funktion  $R(x, y)$  dar, wobei die additive Konstante  $C_0$  unbestimmt bleibt. Bringt man 1) auf gleichen Nenner, so erhält man

für  $R(x, y)$  die frühere Form 4) § 1.<sup>1</sup> Zwischen den  $2m$  gegebenen Elementen  $(x_i', y_i')$  und  $B_i$  besteht auch hier eine Relation 2), so dass eines der gegebenen Elemente, etwa  $B_m$ , durch die übrigen  $2m - 1$  willkürlich wählbaren Elemente bestimmt ist. Auch hier zeigt sich, dass  $m \geq 2$  sein muss, weil für  $m = 1$  nach 2)  $B_1 = 0$ , also die Funktion 1) eine Konstante wäre.

Die Darstellung 1) giebt zugleich nochmals und in etwas einfacherer Form als früher die Bedingung, die zwischen dem  $m \infty^1$  und  $m \infty^1$  Punkten einer Funktion  $R(x, y)$  besteht. Denn bezeichnet man wie im vorigen Paragraphen die  $m \infty^1$  Punkte durch  $(x_i^0, y_i^0)$ , setzt den Ausdruck 1) gebildet für diese  $m$  Punkte  $= 0$  und eliminiert mit Hilfe von 2) die Grössen  $B_i$ , so erhält man die gesuchte Bedingung in der Form:

$$3) \quad \begin{vmatrix} \frac{y_1^0 + y_1'}{x_1^0 - x_1'} \dots \frac{y_1^0 + y_1'}{x_1^0 - x_1'} & 1 \\ \dots & \dots \\ \frac{y_m^0 + y_m'}{x_m^0 - x_m'} \dots \frac{y_m^0 + y_m'}{x_m^0 - x_m'} & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Betrachtungen geben den Satz:

I. Eine Funktion  $R(x, y)$  von der Ordnung  $m$  ist bis auf eine additive Konstante bestimmt, wenn ihre  $m \infty^1$  Punkte und von den  $m$  zugehörigen Residuen alle bis auf eines gegeben sind. Das letzte Residuum ist alsdann eindeutig bestimmt. Die zwischen den  $2m$  Elementen bestehende Relation ist die Gleichung 2); die Relation zwischen den  $\infty^1$  und  $0^1$  Punkten der Funktion die Gleichung 3).\*

Die letzte Untersuchung löst zugleich die Aufgabe:

Eine gegebene Funktion  $R(x, y)$  in Partialbrüche zu zerlegen oder von ihr die  $\infty^1$  Punkte und die zugehörigen Residuen zu bestimmen.

Die Lösung ist folgende. Man bringe die Funktion  $R(x, y)$  auf die Form  $M + Ny : P$ , wo  $M, N, P$  rationale Funktionen von  $x$  allein

\* Die Gleichung 2) ist im wesentlichen identisch mit dem Satze II in R. A § c. Denn bildet man die Integralfunktion

$$W = \int \frac{R(x, y)}{y} dx,$$

so wird dieselbe logarithmisch unendlich in den  $m$  Punkten

$$(x_1' y_1'), \dots, (x_m' y_m')$$

und zwar in  $(x_i' y_i')$  wie

$$\frac{B_i'}{y_i'} \log(x - x_i').$$

Die Gleichung 2) sagt daher aus: Die Summe der Koeffizienten, die zu den logarithmischen Unstetigkeitspunkten  $(x_i', y_i')$  des elliptischen Integrals  $W$  gehören, ist gleich Null.

sind. Alsdann bestimme man die Wurzeln  $x_i'$  des Nenners  $P = 0$  und sondere von den zu  $x_i'$  gehörigen beiden Wertepaaren  $(x_i', y_i')$  und  $(x_i', -y_i')$  dasjenige (etwa das letzte) ab, für das auch der Zähler  $M + Ny = 0$  wird. Das zu dem übrig bleibenden  $\infty^1$  Punkt  $(x_i', y_i')$  gehörige Residuum  $B_i$  ist bestimmt durch  $B_i = \lim_{x_i', y_i'} (x - x_i') R(x, y)$ . Der Ausdruck 1) stellt alsdann die Partialbruchzerlegung der Funktion  $R(x, y)$  dar.

Die Gleichung 4) § 2 oder 3) § 3 bezieht sich auf die  $0^1$  und  $\infty^1$  Punkte einer Funktion  $R(x, y)$  und giebt eine rationale Relation zwischen ihren Koordinaten an. Wir werden im § 4 zeigen, dass die Gleichung 2) zu einer zweiten, transcendenten Form dieser Abhängigkeit zwischen den  $0^1$  und  $\infty^1$  Punkten führt.

#### § 4. Das Abelsche Theorem für das Integral erster Gattung.

Am Schluss von § 3 wurde erwähnt, dass die Bedingungsgleichung 4) § 2 oder 3) § 3, die zwischen den Koordinaten der  $0^1$  und  $\infty^1$  Punkte

$$(x_i^0, y_i^0) \quad \text{und} \quad (x_i', y_i') \quad (i = 1, \dots, m)$$

einer rationalen Funktion  $R(x, y)$  besteht, sich noch in einer zweiten, transcendenten Form darstellen lasse. Um diese herzuleiten, führen wir statt  $R(x, y)$  eine andere rationale Funktion  $r = r(x, y)$  von derselben Ordnung  $m$  ein durch die Gleichung  $R = (r - \alpha) : (r - \beta)$ .  $r$  ist also eine rationale Funktion, die in den  $m$  Punkten  $(x_i^0, y_i^0)$  denselben Wert  $\alpha$ , in den  $m$  Punkten  $(x_i', y_i')$  denselben Wert  $\beta$  annimmt. Man bezeichne nun die  $m$  Punkte, in denen  $r$  denselben Wert  $\varrho$  annimmt, durch  $(x_i, y_i)$  und wende auf die Funktion  $P = (r - \alpha) : (r - \varrho)$  die Gleichung 2) § 3 an. Da die  $\infty^1$  Punkte von  $P$  die  $m$  Punkte  $(x_i, y_i)$  sind, so erhält man  $\sum A_i : y_i = 0$ , wenn  $A_i$  das Residuum von  $P$  für den Punkt  $(x_i, y_i)$  ist. Das Residuum lässt sich leicht bestimmen; es ist nämlich

$$\begin{aligned} A_i &= \lim_{x=x_i} (x - x_i) P = (\varrho - \alpha) \lim_{\substack{x=x_i \\ r=\varrho}} \frac{x - x_i}{r - \varrho} = (\varrho - \alpha) \left( \frac{dx}{dr} \right)_{x_i} \\ &= (\varrho - \alpha) \frac{dx_i}{d\varrho}. \end{aligned}$$

Lässt man den gemeinsamen Faktor  $(\varrho - \alpha) : d\varrho$  weg, so folgt die Gleichung ( $i = 1, \dots, m$ ):

$$1) \quad \sum_i \frac{dx_i}{2y_i} = \sum_i \frac{dx_i}{2\sqrt{(x_i, k)}} = 0.$$

Wenn also eine rationale Funktion  $r(x, y)$  von der Ordnung  $m$  denselben Wert  $\varrho$  annimmt in den  $m$  Punkten  $(x_i, y_i)$ , so besteht zwischen den Koordinaten dieser  $m$  Punkte und den  $m$  Differentialen  $dx_i$  (die eine gewisse Fortschrittsrichtung der Punkte  $(x_i, y_i)$  in der Fläche  $I$  angeben) eine Relation von der Form 1), unabhängig von dem jedesmaligen Wert von  $\varrho$ .

Das Differential  $du = \frac{dx}{2y}$  ist nach R. II. § 4(2) das elliptische Differential erster Gattung. Die Gleichung 1) heisst daher das Abelsche Theorem für das Differential erster Gattung. Dasselbe lautet:

I. Für das Differential erster Gattung ist die Summe der Differentiale, gebildet mit den  $m$  Punkten  $(x_i, y_i)$ , in welchen eine rationale Funktion  $r$  von der Ordnung  $m$  denselben Wert  $\rho$  annimmt, gleich 0.

Man kann noch weiter gehen. Dem Wert  $r = \rho$  entsprechen die  $m$  Punkte  $(x_i, y_i)$ , dem Wert  $r = \alpha$  die Punkte  $(x_i^0, y_i^0)$ , dem Wert  $r = \beta$  die Punkte  $(x_i', y_i')$ . Lässt man nun  $\rho$  eine kontinuierliche Reihe von Werten zwischen den Grenzen  $\beta$  und  $\alpha$  durchlaufen, so durchläuft jeder der Punkte  $(x_i, y_i)$  in der Fläche  $T$  eine bestimmte Kurve  $C_i$  zwischen den zugehörigen Punkten  $(x_i', y_i')$  und  $(x_i^0, y_i^0)$ . Wir setzen voraus, dass die  $m$  Kurven  $C_i$  sich unter einander und mit den Querschnitten  $a, b$  der Fläche  $T$  nicht schneiden. Summiert man alsdann die für alle Werte von  $\rho$  zwischen  $\beta$  und  $\alpha$  gebildeten Gleichungen 1) oder mit anderen Worten, integriert man 1) längs der Kurven  $C_i$  zwischen den Punktsystemen  $(x_i', y_i')$  und  $(x_i^0, y_i^0)$ , so erhält man

$$2) \quad \sum_i \int_{x_i', y_i'}^{x_i^0, y_i^0} \frac{dx}{2y} = \sum_i \int_{x_i', y_i'}^{x_i^0, y_i^0} \frac{dx}{2\sqrt{(x, k)}} = 0.$$

Dies ist die gesuchte transcendente Gleichung zwischen den  $m$   $0^1$  und  $\infty^1$  Punkten der rationalen Funktion  $R(x, y)$ . Man nennt diese Gleichung 2) das Abelsche Theorem für das Integral erster Gattung. Dasselbe lautet:

II. Für das elliptische Integral erster Gattung ist die Summe der  $m$  Integrale, genommen zwischen zwei Punktsystemen  $(x_i', y_i')$  und  $(x_i^0, y_i^0)$ , für welche eine rationale Funktion  $R(x, y)$  bez. die Werte  $\infty^1$  und  $0^1$  oder eine rationale Funktion  $r(x, y)$  bez. die Werte  $\beta$  und  $\alpha$  annimmt, gleich 0.

Wählt man statt der  $m$  unteren Grenzpunkte  $(x_i', y_i')$ , die dem Wert  $r = \beta$  entsprechen,  $m$  beliebige Anfangswerte, etwa  $(x, y) = (0, 0)$  und für die  $m$  oberen Grenzpunkte die Punkte  $(x_i, y_i)$ , die dem Wert  $r = \rho$  entsprechen, so nimmt die Gleichung 2) die Form an

$$\sum_i \int_0^{x_i} du = C,$$

die wir auch schreiben

$$3) \quad u_1 + u_2 + \dots + u_m = C,$$

wo  $C$  eine von 0 verschiedene Konstante ist. Dies giebt den Zusatz:

IIa) Für das Integral erster Gattung ist die Summe der  $m$  Integrale, erstreckt von einem beliebigen Anfangspunkt  $(0, 0)$  bis zu einem System von  $m$  Punkten  $(x_i, y_i)$ , in welchem eine rationale Funktion  $r(x, y)$  einen bestimmten Wert  $\varrho$  annimmt, konstant d. h. unabhängig von diesem Wert  $\varrho$ .

Die Hauptbedeutung des Abelschen Theorems für das Integral erster Gattung liegt in seiner Umkehrbarkeit oder in dem Satze:

III. Sind  $2m$  Punkte  $(x'_i, y'_i)$  und  $(x_i^0, y_i^0)$  in  $T$  so beschaffen, dass sie der Gleichung (2) genügen, so existiert immer eine (und abgesehen von einem konstanten Faktor nur eine) rationale Funktion  $R(x, y)$  von der Ordnung  $m$ , für welche die  $m$  Punkte  $(x'_i, y'_i)$  die  $\infty^1$  und die  $m$  Punkte  $(x_i^0, y_i^0)$  die  $0^1$  Punkte sind.

Wir unterdrücken den Beweis dieses Satzes,\* geben aber im folgenden Paragraph noch eine wichtige Anwendung desselben.

### § 5. Das Additionstheorem der elliptischen Funktionen.\*\*

Betrachtet man in dem Integral erster Gattung

$$1) \quad u = \int_0^x \frac{dx}{2y} = \int_0^x \frac{dx}{2\sqrt{(x, k)}},$$

dessen Periodizitätsmoduln  $2K$  und  $2iK'$  sind (R. II § 5),  $x$  und  $y$  als Funktionen von  $u$  und setzt

$$2) \quad x = f(u), \quad 2y = 2\sqrt{(x, k)} = f'(u),$$

so zeigt sich (vergl. R. II § 8), dass diese Funktionen eindeutige und doppelperiodische Funktionen der Variablen  $u$  sind mit den Perioden  $2K$  und  $2iK'$ . Solche Funktionen heissen elliptische Funktionen von  $u$ . Ebenso sind die Wurzelfunktionen

$$\sqrt{x}, \quad \sqrt{1-x}, \quad \sqrt{1-k^2x}$$

elliptische Funktionen von  $u$  mit etwas anderen Perioden. Man bezeichnet sie nach Jacobi durch

$$3) \quad \sqrt{x} = sn u, \quad \sqrt{1-x} = cn u, \quad \sqrt{1-k^2x} = dn u.$$

Die erste ist eine ungerade, die beiden anderen sind gerade Funktionen von  $u$  (R. II § 8).

Es gilt nun der Satz:

II. Die elliptische Funktion  $x = f(u)$  besitzt ein algebraisches Additionstheorem, d. h.  $f(u_1 + u_2)$  lässt sich

\* Vergl. hierzu meine Theorie der Abelschen Funktionen S. 151

\*\* Riemann giebt in R. IV § 14 eine anderer Herleitung dieses Theorems.

rational durch die Funktionen  $f(u_1)$ ,  $f(u_2)$ ,  $f'(u_1)$ ,  $f'(u_2)$  oder algebraisch durch die Funktionen  $f(u_1)$ ,  $f(u_2)$  allein darstellen.

Ein gleiches Additionstheorem gilt für die Funktion  $2y = f'(u)$ , für die drei Funktionen 3) und allgemein für jede doppelperiodische Funktion. Wir geben den Beweis für die Funktion  $\sqrt{x} = sn u$ .

Im einfachsten Fall ist  $R(x, y)$  eine ganze Funktion der dritten Ordnung, nämlich

$$R(x, y) = Ax + By + C,$$

wo  $A, B, C$  Konstanten sind.

Die drei  $O^1$  Punkte derselben  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  sind nach dem Abelschen Theorem einerseits durch eine algebraische Gleichung, nämlich (§ 2 Gleichung 2):

$$4) \quad |1 \ x_i \ y_i| = 0 \quad \text{oder} \quad |1, x_i \ \sqrt{(x_i, k)}| = 0 \quad (i = 0, 1, 2),$$

andererseits durch eine transcendente Gleichung, nämlich (§ 4 Gleichung 3)

$$5) \quad u_0 + u_1 + u_2 = c \quad (c \neq 0)$$

verbunden. Die Äquivalenz dieser beiden Bedingungsgleichungen 4) und 5) führt nun zum Beweis des Additionstheorems von  $sn u$ . Aus der Gleichung 4) folgt

$$\begin{aligned} & (x_1 - x_2)\sqrt{(x_0, k)} + (x_2 - x_0)\sqrt{(x_1, k)} + (x_0 - x_1)\sqrt{(x_2, k)} = 0, \\ \text{oder} \quad & (x_1 - x_2)^2(x_0, k) - [(x_0 - x_2)\sqrt{(x_1, k)} - (x_0 - x_1)\sqrt{(x_2, k)}]^2 = 0. \end{aligned}$$

Setzt man hierin  $z$  statt  $x_0$ , so hat man eine Gleichung dritten Grades in  $z$ , deren Wurzeln  $z = x_0, x_1, x_2$  sind. Daher besteht die identische Gleichung in  $z$ :

$$6) \quad \begin{cases} (x_1 - x_2)^2(z, k) - [(z - x_2)\sqrt{(x_1, k)} - (z - x_1)\sqrt{(x_2, k)}]^2 \\ = k^2(x_1 - x_2)^2(z - x_0)(z - x_1)(z - x_2). \end{cases}$$

Setzt man hierin  $z = 0$ , so folgt

$$k(x_1 - x_2)\sqrt{x_0 x_1 x_2} = x_1\sqrt{(x_2, k)} - x_2\sqrt{(x_1, k)},$$

oder durch Auflösung nach  $x_0$

$$7) \quad \frac{1}{k\sqrt{x_0}} = \frac{(x_1 - x_2)\sqrt{x_1 x_2}}{x_1\sqrt{(x_2, k)} - x_2\sqrt{(x_1, k)}} = \frac{x_1\sqrt{(x_2, k)} + x_2\sqrt{(x_1, k)}}{(1 - k^2 x_1 x_2)\sqrt{x_1 x_2}}.$$

Da nach 5)  $\sqrt{x_0} = sn u_0 = sn(c - u_1 - u_2)$ , also eine Funktion von  $u_1 + u_2$  ist, so kann man den Ausdruck 7) =  $\varphi(u_1 + u_2)$  setzen. Um die Funktion  $\varphi$  zu bestimmen, mache man, nachdem der Faktor  $\sqrt{x_1 x_2}$  weggehoben ist,  $u_2 = 0$  also  $x_2 = 0$ ,  $(x_2, k) = 0$ . Dann erhält man

$$\varphi(u_1) = \sqrt{x_1} = sn u_1,$$

also für 7) den Wert  $sn(u_1 + u_2)$ .

Hiernach folgt aus 7), wenn man die Funktionen 3) einführt,  
das Additionstheorem der Funktion  $sn u$

$$8) \quad sn(u_1 \pm u_2) = \frac{sn u_1 cn u_2 dn u_2 \pm sn u_2 cn u_1 dn u_1}{1 - k^2 sn^2 u_1 sn^2 u_2}.$$

Die unteren Zeichen ergeben sich, wenn man berücksichtigt, dass  $sn u$  eine ungerade,  $cn u$  und  $dn u$  gerade Funktionen von  $u$  sind.

Ebenso erhält man aus Gleichung 6), wenn man  $z = 1$  und  $z = \frac{1}{k^2}$  setzt, das Additionstheorem der Funktionen  $cn u$  und  $dn u$ , nämlich:

$$9) \quad cn(u_1 \pm u_2) = \frac{cn u_1 cn u_2 \mp sn u_1 sn u_2 dn u_1 dn u_2}{1 - k^2 sn^2 u_1 sn^2 u_2},$$

$$10) \quad dn(u_1 \pm u_2) = \frac{dn u_1 dn u_2 \mp k^2 sn u_1 sn u_2 cn u_1 cn u_2}{1 - k^2 sn^2 u_1 sn^2 u_2}.$$

#### Druckfehler in B. Riemann, Elliptische Funktionen.

S. III Z. 6 u. 7 v. u. lies Sommer 1861 und Winter 1861/62 statt Winter 1861/62 und Sommer 1862 (entsprechend S. IV und V und an späteren Stellen).

S. 54 Z. 18 v. o. lies Teil statt Teiler.

S. 64 Z. 3 v. u. am Rand zuzufügen: (15).

S. 81 Z. 7 v. o. lies  $= \Psi(x)\sqrt{(x, k)}$  statt  $= \Phi(x)\sqrt{(x, k)}$ .

S. 88 Z. 10 v. u. in der zweiten Gleichung 9) lies  $g_3$  statt  $g_2$ .

S. 88 Z. 3 v. u. lies  $g_2'^3$  statt  $g_2'^2$ .

S. 111 Z. 16 v. u. lies Gleichung 10) statt Gleichung 35).

S. 113 Z. 16 v. o. lies  $Z(u \pm iK')$  statt  $Z(u \pm K')$ .

S. 117 Z. 8 v. o. lies  $F(u + 2iK')$  statt  $F(u + 2K')$ .

S. 136 Z. 4 v. o. lies  $p(u)$  statt  $p'(u)$ .

S. 143 Z. 7 v. u. lies  $v =$  statt  $u =$ .

S. 143 Z. 4 v. u. lies  $\frac{\wp_1(v)}{\wp_1'}$  statt  $\frac{\wp_1(v)}{\wp_1}$ .

# Synthetische Behandlung der gemeinen Kettenlinie.

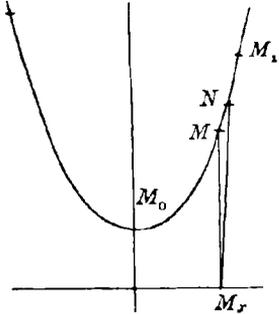
Von

J. JUNG

in Pilsen.

Der Ruhelage eines homogenen, an den Enden aufgehängten Fadens (Fig. 1), der „Kettenlinie“, entspricht folgende Hilfskonstruktion (Fig. 2): Denkt man den Faden in der Geraden  $a$  vertikal ausgespannt, wobei etwa dem linken Aufhängepunkte  $M_1$  das untere Ende  $M'_1$ , dem rechten  $M_2$  das obere Ende  $M'_2$  des Fadenbildes auf  $a$  entspricht, so schneiden sich die Geraden  $g'$  durch die Fadenbildpunkte  $M'$  parallel den Tangenten in den zugehörigen Fadenpunkten  $M$  sämtlich in einem Punkte  $O$ , dessen Abstände von den  $M'$  die bezüglichen Fadenspannungen der Grösse und Richtung nach darstellen, falls das Gewicht der Längeneinheit als Gewichtseinheit gewählt wird. Es ist ja die Spannung  $OM'$  für den Fadenpunkt  $M$  (mit dem Richtungssinn entsprechend der Bewegung von  $M_1$  nach  $M_2$ ) notwendigerweise die Resultierende aus der Spannung in  $M_2$  und dem Gewicht des Fadenstückes  $MM_2$ .

Fig. 1.



Überdies haben aber die Längen  $\overline{OM'}$  eine höchst einfache geometrische Bedeutung: sie sind die Ordinaten der Fadenpunkte  $M$  bezüglich einer bestimmten Horizontalen unterhalb des Kurvenpunktes  $M_0$  mit wagerechter Tangente. An der Ruhelage des beliebigen Fadenstückes  $M_a M_b$  (Fig. 3) wird offenbar nichts geändert, wenn man in  $M_a$  statt des Stückes  $M_1 M_a$  ein Stück  $M_a N_a$  aus demselben Fadestoffe und von der Länge  $\overline{M'_a O}$  vertikal herabhängend anknüpft, und ebenso in  $M_b$  statt des folgenden  $M_b M_2$  ein vertikal hängendes  $M_b N_b$  von der Länge  $\overline{M'_b O}$ , weil eben die Gewichte dieser (über unendlich kleine Rollen etwa) in  $M_a$  und  $M_b$  ziehenden Stücke den dortigen Spannungen gleich sind. Nun müssen aber die unteren Enden  $N_a, N_b$  in gleicher Höhe liegen; denn würde man ein geradliniges, gleich-

artiges Fadenstück  $N_a N_b$  zwischen sie einschalten und, um Gestaltsänderung zu verhüten, den ganzen nun geschlossenen Faden

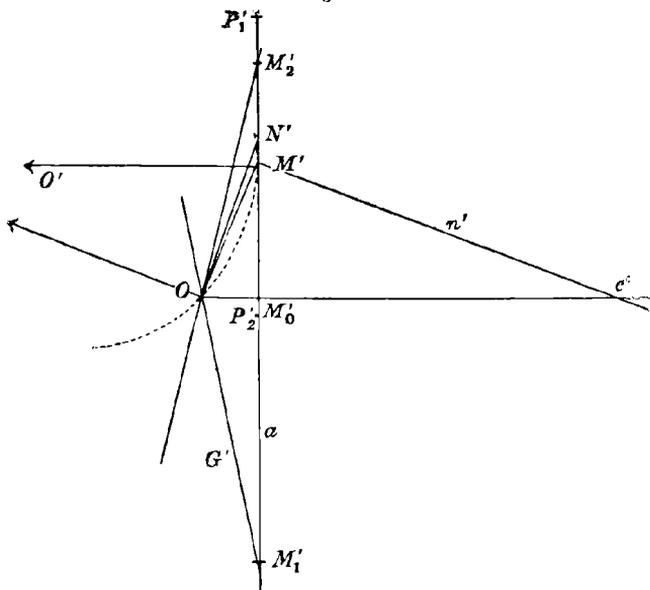
$$M_a M_b N_b N_a M_a$$

durch eine innen reibungslose, kongruente Röhre ziehen, so würde im Falle ungleich hoher  $N_a, N_b$  der Faden als Perpetuum mobile fortwährend im einen Sinne in sich selbst sich verschieben, weil eben der Fadenteil

$$N_a M_a M_b N_b$$

für sich im Gleichgewicht, daher ohne Kraftaufwand verschiebbar ist, so dass dem beständigen Abwärtsgleiten des Stückes auf der schiefen

Fig. 2.



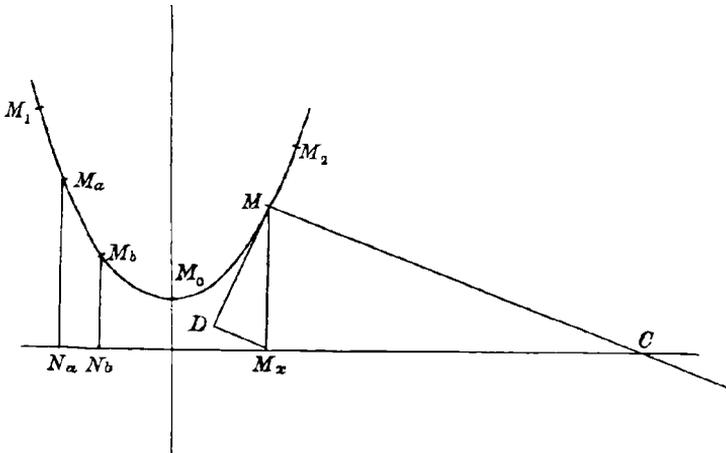
Ebene  $N_a N_b$  nichts entgegenwirkte. Vergl. Stevins Überlegung bei der schiefen Ebene behufs Ermittlung ihrer Gleichgewichtsgesetze.\*

Die dergestalt sich bietende Abscissenaxe verläuft also im Abstände  $OM_0$ , d. i. der Abstand zwischen  $O$  und  $a$ , unterhalb des tiefsten Kurvenpunktes  $M_0$ . Sie ist aber noch in anderer Hinsicht bedeutsam für die Kettenlinie. Wie erwähnt, laufen die Strecken von  $O$  zu den Bildpunkten auf  $a$  parallel den Tangenten der Fadenpunkte, und es schliessen daher zwei benachbarte derartige Strecken  $OM'$ ,  $ON'$  (Fig. 2) einen Winkel ein gleich dem Kontingenzwinkel, der zu dem Kurvenelemente  $MN$  (Fig. 1) gehört. Dieses Element aber ist längengleich mit dem Element  $M'N'$  auf  $a$  zwischen den Strecken parallel den Tangentenrichtungen. Man braucht daher bloss deren Durchschnittspunkt von  $O$  in einen Punkt  $O'$

\* Z. B. Mach, Die Mechanik in ihrer Entwicklung u. s. w.

bei Festhaltung des eingeschlossenen Winkels zu verlegen derart, dass  $M'N'$  senkrecht steht auf den einschliessenden Strecken  $O'M'$ ,  $O'N'$ , um sofort den Krümmungshalbmesser für  $M$  in Gestalt der Strecke  $\overline{O'M'}$  zu erhalten. Es wird also  $O$  auf dem Kreise durch  $O$ , welcher  $a$  in  $M'$  berührt, zu verschieben sein, bis der erreichte Punkt  $O'$  das andere Ende des Durchmessers mit  $M'$  als dem einen Ende bildet. Die erhaltene Strecke wird aber ohne weiteres auch von der Normalen  $n'$  durch  $M'$  zu  $OM'$  auf der Geraden  $OM'_0$  (senkrecht zu  $a$ ) abgeschnitten, in Gestalt der Strecke  $OC'$ , wo  $C'$  der Schnittpunkt von  $OM'_0$  und  $n'$  ist (Fig. 2).

Fig. 3.



Somit ist der Krümmungshalbmesser für den beliebigen Kurvenpunkt  $M$  gleich dem Durchmesser des Kreises durch  $M'$ , welcher in  $O$  die Parallele  $a'$  zu  $a$  berührt.

Klappt man nun das Dreieck  $OM'C'$  (Fig. 2) um und legt  $O$  auf  $M$  (Fig. 3),  $M'$  auf den Ordinatenfusspunkt  $M_x$  von  $M$ , so fällt  $M'C'$  mit der Abscissenaxe zusammen und  $OC'$  mit der auswärts gezogenen Kurvennormale in  $M$ ; ursprünglich stehen ja die Schenkel des Winkels  $M'OC'$  senkrecht auf je einem Schenkel von  $M_xMC$ , wo  $C$  den Schnittpunkt der Kurvennormale mit der Abscissenaxe bedeutet.

Also ist die letztere erfüllt von den Spiegelbildern aller Krümmungsmittelpunkte der Kettenlinie bezüglich der ihnen einzeln zugehörigen Kurventangenten. Oder: Das Stück jeder Kurvennormale zwischen Kurve und Abscissenaxe ist gleich dem Krümmungshalbmesser auf dieser Normalen.

Die Abscissenaxe ist also als „Leitlinie“ der Kettenlinie zu bezeichnen. Sie ist des weitern noch ausgezeichnet dadurch, dass sie im Verein mit der Ordinatenaxe (durch  $M_0$ ), der Ordinate des Kurvenpunktes  $M$  und dem Bogen  $M_0M$  ein dem Bogen proportionales Flächen-

stück begrenzt; d.h.: ist die Ordinate des tiefsten Punktes  $M_0$ , oder — was dasselbe ist — dessen Krümmungshalbmesser Längeneinheit, so ist der Maßzahl nach der Bogen  $M_0M$  gleich der Fläche zwischen Ordinatenaxe, Abscissenaxe, Kurve und Ordinate des Kurvenpunktes  $M$ . Es ist ja jedes unendlich schmale Dreieck  $M_xMN$  (Fig. 1), wo  $MN$  benachbarte Kurvenpunkte sind, symmetrisch kongruent dem entsprechenden Dreieck  $OM'N'$  (Fig. 2), da ja die Winkel  $M_xMN$  und  $OM'N'$  übereinstimmen, und gleich dem halben Flächenzuwachs beim Übergang von  $M$  zu  $N$ .

Projiziert man (Fig. 3) den Ordinatenfußpunkt  $M_x$  von  $M$  nach  $D$  auf die Tangente von  $M$ , so ist das Dreieck  $M_xMD$  symmetrisch kongruent dem Dreiecke  $OM'M'_0$  (Fig. 2), da ja

$$\overline{M_xM} = \overline{OM'} \quad \text{und} \quad \sphericalangle DMM_x = \sphericalangle M'_0M'O.$$

Folglich haben die Projektionen  $M_x$  aller Kurvenpunkte von den zugehörigen Tangenten einen gleichen Abstand von der Grösse des Krümmungshalbmessers im tiefsten Punkt der Kettenlinie. Dagegen ist die Projektion der Ordinate eines Punktes auf dessen Tangente stets gleich dem Bogen von diesem Punkte bis zum tiefsten Punkt.

Die Kurve der  $D$  erhält man also auch durch Abwickeln eines Fadens von der Kettenlinie mit dem freien Ende in  $M_0$ , sie ist daher eine Evolvente der Kettenlinie. Mit Rücksicht auf die Konstanz von  $DM_x$ , der „Tangente“ der  $D$ -Kurve, kann man sagen: Bei der Kettenlinienevolvente durch den tiefsten Punkt der Kettenlinie sind die Tangentenstücke bis zur Leitlinie der Kettenlinie sämtlich gleich dem Krümmungshalbmesser im tiefsten Punkte der letztern, sie ist eine „Tractorie“.

Der blosse Anblick der Hilfszeichnung (Fig. 2) zeigt die Beziehungen zwischen der Ordinate  $y$ , der Bogenlänge  $s$ , dem Tangenten-neigungswinkel  $\alpha$ , dem Krümmungshalbmesser  $\rho$  und der Fläche  $f$  bei der gewählten Längeneinheit:

$$f = \text{tg } \alpha = s, \quad \sec \alpha = y, \quad \rho = y^2 = 1 + s^2 = \sec^2 \alpha = 1 + f^2.$$

Um die Beziehung zwischen  $y$  und der Abscisse  $x$  zu finden, seien folgendermaßen zwei sehr einfache Hilfskurven (Fig. 4) eingeführt.\* Die eine ist der Ort des in  $M_0$  anfangs befindlichen Fadenendes, falls das Fadenstück  $M_0M$  vom jeweiligen Kettenlinienpunkte  $M$  aus vertikal aufwärts gespannt wird, die andere der Ort desselben bei Abwärtsspannung des Stückes  $M_0M$ . Von den drei Punkten mit gleicher Abscisse, deren einer ein Punkt  $M$  ist, während die andern,  $P_1, P_2$ , den beschriebenen Kurven angehören, liegt also  $M$  immer in der Mitte von  $\overline{P_1P_2}$ . Man frage nun nach der Tangentenrichtung in  $P_1(P_2)$ . Rückt

\* Vergl. die rechnende Ableitung von Gretschel, Elem. Ableit. d. Haupteigenschaften der Kettenlinie, Grunerts Archiv, 43. T.

$M$  nach dem benachbarten  $N$  auf der Kettenlinie, so gelangt das aufwärts geführte Fadenende von  $P_1$  nach  $Q_1$ , dessen Ordinatenzuwachs gegenüber  $P_1$  augenscheinlich gleich ist dem von  $N$  gegenüber  $M$ , jedoch vergrössert um die Verlängerung des Fadenstückes  $M_0M$ , also vergrössert um das Element  $MN$ . Oder: Man kommt von  $P_1$  zu  $Q_1$  durch Fortschreiten parallel der Tangente in  $M$  um das Element  $MN$  und hierauf um ebensoviele vertikal aufwärts, und von  $P_2$  zu  $Q_2$  ebenso durch schliessliches Abwärtsschreiten um  $\overline{MN}$ . Natürlich dürfen die Fortschritte bei gehöriger Richtung auch endlich lang bei gleicher Grösse untereinander sein, wenn man nur in Punkte auf den Tangenten in  $P_1(P_2)$  gelangen will, und man braucht also in der Hilfszeichnung (Fig. 2) nur von  $M'$  auf- und abwärts die Strecke  $\overline{OM}$  aufzutragen auf  $a$  bis  $P'_1, P'_2$ , um Strecken  $OP'_1, OP'_2$  von den verlangten Tangentenrichtungen zu erhalten. Bei  $\overline{OM'_0} = 1$  ist aber  $\overline{M'_0P'_1}$  zugleich Richtungskoeffizient der Tangente in  $P_1$ ,  $\overline{M'_0P'_2}$  der absolute Wert des offenbar negativen Richtungskoeffizienten für  $P_2$  bei positiver Abscisse, und da auch

$$\overline{M'_0P'_1} = \overline{M'_0M} + \overline{OM'}$$

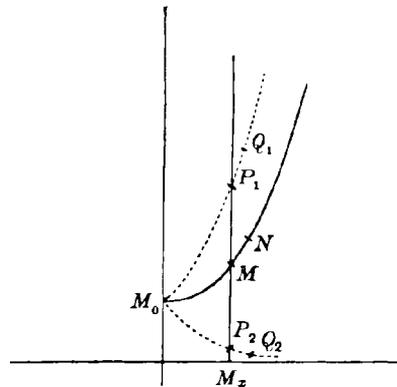
$$\overline{M'_0P'_2} = \overline{OM'} - \overline{M'_0M}$$

so sind  $M'_0P'_1, M'_0P'_2$  andererseits die Ordinaten von  $P_1$  und  $P_2$  selbst, und man kann sagen: Längs der Kurven  $P_1, P_2$  sind die Richtungskoeffizienten der Tangenten gleich den zugehörigen Ordinaten und zwar bei  $P_1$  mit demselben, bei  $P_2$  mit dem entgegengesetzten Vorzeichen.

Dasselbe ergibt sich auch so: die  $P_1$ -Kurve z. B. erhält man durch Summieren der Kettenlinienordinaten und der entsprechenden einer Kurve, deren Ordinaten die Bogenstücke, also, nach dem frühern, die Flächenstücke längs der Kettenlinie sind. Summiert man nun zusammengehörige Richtungskoeffizienten der Kettenlinie und der neuen Kurve, also die Bogen der erstern und deren Ordinaten (der Richtungskoeffizient der Flächeninhaltskurve ist ja Endordinate der Hauptkurve), so erhält man wieder die Ordinaten der  $P_1$ , aber diese sind zugleich Richtungskoeffizienten der Summenkurve, d. i.  $P_1$ . Gleiches gilt bei  $P_2$ .

Somit nimmt die Ordinatengrösse sowohl bei  $P_1$  als bei  $P_2$  bei konstantem, unendlich kleinem Abscissenzuwachs je einen konstanten Faktor an und daher auch bloss vom Abscissenzuwachs abhängige Faktoren bei endlicher Grösse des letztern. Der Logarithmus (in irgend einem

Fig. 4.



System) der Ordinate, welcher für  $x = 0$  verschwindet, wächst (nimmt ab) bei ein und demselben Abscissenfortschritt um ein und denselben Betrag, ist also der Abscisse proportional, so dass man für  $P_1$  jedenfalls hat

$$y = b^{k_1 x} = m^x,$$

für  $P_2$  aber

$$y = b^{-k_2 x} = n^{-x},$$

wo  $b$  die Basis der Logarithmen bedeutet und  $k_1, k_2, m, n$  positive Zahlen sind. Es kommt nur auf die Bestimmung von  $m$  und  $n$  an. Es ist ja der Richtungskoeffizient gleich bez. entgegengesetzt gleich der Ordinate, welche beim Wachsen der Abscisse um  $\xi$  einen Zuwachs

$$m^{x+\xi} - m^x = y(m^\xi - 1) \quad \text{bez.} \quad n^{-x-\xi} - n^{-x} = y(n^{-\xi} - 1)$$

erfährt. Also muss bestehen

$$m^\xi - 1 = \xi, \quad m = \lim_{\xi \rightarrow 0} [(1 + \xi)^{\frac{1}{\xi}}]_{\xi=0},$$

$$n^{-\xi} - 1 = -\xi, \quad n = \lim_{\xi \rightarrow 0} [(1 - \xi)^{-\frac{1}{\xi}}]_{\xi=0}.$$

Bei Beschränkung auf bloss elementare Mittel würde man die Gleichheit von  $m$  und  $n$  zeigen durch den Nachweis für

$$\frac{m}{n} = \lim_{\xi \rightarrow 0} [(1 - \xi^2)^{\frac{1}{\xi}}]_{\xi=0} = 1,$$

und dieser ist ja geliefert durch die Entwicklung

$$\frac{m}{n} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \left[ 1 - \xi + \frac{1(1-\xi)}{1 \cdot 2} \xi^2 - \dots \right]_{\xi=0},$$

worin der Bestandteil ausser 1 augenscheinlich kleiner ist als

$$\xi + \xi^2 + \xi^3 + \dots = \frac{\xi}{1-\xi},$$

was für  $\xi = 0$  verschwindet. Mit der Bezeichnung  $e$  für  $m$  und  $n$  ergibt sich somit die Kettenliniengleichung

$$y = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x})$$

bei Annahme der Längeneinheit gleich dem Krümmungshalbmesser im tiefsten Punkte. Hat dieser aber die Länge  $r$ , so hat man

$$y = \frac{r}{2} \left( e^{\frac{x}{r}} + e^{-\frac{x}{r}} \right)$$

als Gleichung der Kettenlinie bei Wahl der Leitlinie zur Abscissenaxe.

## Berichtigungen zu Steiner's Gesammelten Werken.

Von R. Sturm in Breslau.

In Steiner's Gesammelten Werken, für deren Herausgabe wir Geometer der Akademie der Wissenschaften in Berlin nicht dankbar genug sein können, besitzen wir eine äusserst wertvolle Fundgrube für Aufgaben aus der synthetischen Geometrie. Ich habe schon vielfach Themen für Dissertationen und Prüfungsarbeiten aus ihnen entnommen.

Bei der Herausgabe war es natürlich unmöglich, die grosse Fülle ohne Beweis mitgeteilter Sätze auf ihre Richtigkeit zu prüfen; und so sind denn eine Zahl von nicht richtigen Behauptungen stehen geblieben. Ich glaube, dass eine Liste von derartigen Irrtümern oder Versehen allen Geometern willkommen sein wird; auf Vollständigkeit kann sie selbstverständlich keinen Anspruch machen; sie veranlasst aber vielleicht Andere zu Ergänzungen.

Bd. I.: S. 9 Z. 19 u. v. ist hinzuzufügen: oder in einer Geraden (briefliche Mitteilung von Reye).

S. 11 ist VIII so zu verbessern: Der Ort des Scheitels ... besteht aus drei Kurven zweiten Grades, von denen jedoch nur zwei reell sind. Von diesen reellen Kurven liegt freilich beim Ellipsoid und zweimanteligen Hyperboloid die eine, eine Ellipse bzw. Hyperbel, im Innern, so dass von ihren Punkten nicht reelle Berührungskegel kommen; beim einmanteligen Hyperboloide aber kommen von allen Punkten beider reellen Kurven reelle Tangentialkegel. Vergl. auch Bd. II S. 724 Aufgabe erster Absatz, wo „eine Linie“ ein sehr unbestimmter Ausdruck ist (Mitteilung von Reye).

S. 128 Z. 10, 9 v. u. l.: so schneiden sich auch die beiden übrigen und zwar im allgemeinen in einem andern Punkte; vergl. Nr. 78 S. 454 desselben Bandes, wo der richtige Satz steht.

S. 151 Anm. Satz III ist nur richtig, wenn  $A$ ,  $B$  selbst zu zwei Kanten des Kegels parallel sind, und ebenso ist Satz IV nur richtig, wenn beide Kegelschnitte den unendlich fernen Kegelschnitt des Kegels zweimal treffen (Mitteilung von Reye).

S. 159 Lehrsatz 4. Es ist übersehen worden, dass bei Vielecken von gerader Seitenzahl es stets zwei Arten giebt; gerade die einfachere Art fehlt. Ferner fehlt beim Dreiecke das Doppelzeichen  $\pm$  vor  $2Rr$ , und ähnliches gilt beim Fünfeck. Die Formeln sind daher so zu vervollständigen bzw. umzuändern:

$$\text{I. für ein Dreieck: } (R^2 - a^2)^2 - 4R^2r^2 = 0;$$

$$\text{II. für ein Viereck erster Art: } R = a,$$

$$\text{für ein Viereck zweiter Art: } (R^2 - a^2)^2 - 2r^2(R^2 + a^2) = 0, \text{ wie bei Steiner;}$$

III. für ein Fünfeck:

$$(R^2 - a^2)^6 - 12(R^2 - a^2)^4 R^2 r^2 + 16(R^2 - a^2)^2 R^2 r^4 (R^2 + 2a^2) - 64 R^2 r^6 a^4 = 0;$$

IV. für ein Sechseck erster Art:  $(R^2 - a^2)^2 - 4r^2 a^2 = 0$ ,

für ein Sechseck zweiter Art wie bei Steiner;

V. für ein Achteck erster Art:  $(R^2 - a^2)^4 - 16R^2 r^4 a^2 = 0$ ,

für ein Achteck zweiter Art wie bei Steiner.

Vergl. meine *Liniengeometrie* Bd. I S. 35 erste Anmerkung.

S. 445 Z. 2 v. o. streiche: gleichseitiges (Mitteilung von Reye).

S. 527 Anm. 25). Im Originale stand: „Wenn vier beliebige feste Ebenen gegeben sind, von welcher krummen Fläche werden dann alle Geraden berührt, die von denselben in einem und demselben gegebenen Doppelverhältnisse geschnitten werden? Dieser Aufgabe steht eine andere zur Seite, welche?“

Damit ist natürlich die duale gemeint, in welcher vier Punkte gegeben sind und es sich um den Ort der Geraden handelt, von denen nach ihnen vier Ebenen von dem gegebenen Doppelverhältnisse gehen. Steiner hat sich insofern geirrt, dass der Ort nicht der Komplex der Tangenten einer Fläche ist; aber er hat doch wenigstens richtig einen Komplex, einen dreifach unendlichen Strahlenort, vermutet. Der Ort der fraglichen Geraden ist bekanntlich der sogenannte tetraedrale oder Reye'sche Komplex und zwar, wenn die Punkte des dualen Problems die Ecken des Tetraeders der Ebenen des ursprünglichen Problems sind, in beiden Fällen der nämliche.

Die Verbesserung in Anm. 25) ist weniger richtig, als was Steiner vermutete; denn erstens wird als Ort eine Kongruenz bezeichnet, also ein Ort von niedrigerer Mannigfaltigkeit, und dann findet noch eine Verwechslung der beiden dualen Probleme statt. Das Sekantensystem (oder besser die Kongruenz der Doppelsekanten) einer kubischen Raumkurve, welches fälschlich in der Anm. als Ort bezeichnet wird, ergibt sich, wenn fünf Punkte gegeben sind, durch alle Geraden, von denen Ebenen nach ihnen gehen, deren Büschel einem gegebenen Grundgebilde von fünf Elementen projektiv ist. Ersetzt man im ursprünglichen Steinerschen Probleme die vier Ebenen durch fünf, so ergibt sich die Kongruenz der Schmiegungsachsen (Schnittlinien von Schmiegungebenen) einer kubischen Raumkurve.

Vergl. hierzu: Reye, *Geometrie der Lage*, 1. Aufl. Abt. II 15. Vortrag, 3. Aufl. Abt. III 1. Vortrag, H. Müller, *Math. Annalen* Bd. 1 S. 413, R. Sturm, ebenda Bd. 6 S. 513, sowie meine *Liniengeometrie* Bd. I S. 9 und S. 333 fg.

Das in Anm. 25) gemachte Versehen ist leider übergegangen in den dritten Abdruck von Steiners *Systematischer Entwicklung* (Ostwalds *Klassiker der exakten Wissenschaften* Nr. 82, 83). Und in Schröters Buch über die Flächen zweiter Ordnung und die Raumkurven dritter Ordnung S. 233 steht auch als Ort der Geraden bei vier gegebenen Punkten die Kongruenz der Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve; es werden da

hintereinander ein richtiger und ein falscher Satz (durch „oder“ verbunden) als zwei verschiedene Fassungen der nämlichen Eigenschaft ausgesprochen.\*

Bd. II: S. 103 Z. 14 v. u. streiche „positiven“.

S. 114. Die in den letzten drei Zeilen behauptete Konstanz ist nur richtig, wenn überdies irgend zwei aus den Ecken gebildete Gruppen denselben Punkt mittlerer Entfernung haben. Findet bloss  $\Sigma \sin 2 A = 0$  statt, so treten an Stelle der Kreise gerade Linien, welche senkrecht sind zu den Verbindungslinien der Punkte mittlerer Entfernungen irgend zweier aus den Ecken gebildeten Gruppen von Punkten; vergl. Journal f. Math. Bd. 97 S. 61.

S. 163 Z. 2, 1 v. u. streiche: sie ist eine kürzeste Linie für die letztere.

S. 165 Z. 15, 16 v. o. l.: sind beide gleich gewunden (Mitteilung von Reye).

S. 176 Z. 12 v. u. lies 1 statt  $h$ .

S. 199. In Lehrsatz 23 ist die Umkehrung, nach welcher unter allen Figuren von gleichem Inhalt, deren Grenzlinie . . . besteht, das Kreisstück die kleinste Summe  $L$  jener Begrenzungslinien hat, vorsichtiger zu fassen, da nicht immer ein Kreisstück möglich ist; es ist die Bedingung hinzuzufügen: wenn aus jenen Begrenzungslinien und dem Inhalte ein Kreisstück möglich ist.

S. 201 Nr. 30, S. 254 Nr. 8 I und S. 261 Nr. 20, 21, sowie S. 734 Anm. 16) bis 18). Dem Lehrsatz: „Von allen Linien beliebiger Form, aber gegebener Länge  $L$ , welche zwei beliebige Punkte  $A, B$  auf den Schenkeln eines gegebenen Winkels verbinden, schliesst der Kreisbogen von dieser Länge um den Scheitel  $C$  des Winkels als Centrum die grösste Fläche ein“, (Sektorsatz) ist die Beschränkung hinzuzufügen, dass der Winkel ein konkaver sei; im Falle eines konvexen Winkels liefert eine andere Figur das Maximum (vergl. Journal f. Math. Bd. 96 S. 48).

S. 238 Nr. 64 I ist zu erwähnen, dass die Ergebnisse nur für ein solches einem Kreise eingeschriebenes Viereck gelten, das den Mittelpunkt des Kreises einschliesst. Hinsichtlich des anderen Falls, sowie auch des stumpfwinkligen Dreiecks (da in II der Satz auf das spitzwinklige beschränkt wird) vergl. a. eben a. Orte S. 64 — 66.

---

\* Es möge hier gestattet sein, auf zwei andere Mannigfaltigkeitsversehen in diesem sonst so wertvollen Buche aufmerksam zu machen:

Auf S. 240 — 241 wird eine Eigenschaft für 7 Punkte einer Raumkurve dritter Ordnung besprochen. Damit aber 7 Punkte derselben kubischen Raumkurve angehören, muss diese Eigenschaft in zwei verschiedenen Weisen (für zwei der 7 Punkte je als siebenten) erfüllt werden; denn dass 7 Punkte auf der nämlichen Raumkurve liegen, ist eine doppelte Bedingung.

Und S. 702 (und ähnlich S. 40 des Schröterschen Buches über die Raumkurven vierter Ordnung erster Spezies) steht: Der Büschel von Raumkurven vierter Ordnung in einem Flächennetze oder -bündel zweiter Ordnung ist ein Gebilde von einfach-unendlicher Mannigfaltigkeit; es muss natürlich: Bündel und doppelt-unendlich heissen.

S. 289 Z. 6 v. o. l.  $\sqrt{2}$  statt  $\sqrt{3}$ .

S. 306 Nr. IV. Bei diesem Satze, dem Analogon zum Sektorsatz, ist wohl auch eine Einschränkung notwendig.

S. 331 Z. 14 v. o. l.  $\frac{1}{3\sqrt{3}}$  statt  $\frac{4}{3\sqrt{2}}$  (Dörholt, Über einem Dreiecke ein- und umgeschriebene Kegelschnitte, Dissertation Münster 1884).

S. 347 Z. 16 v. u. l. nur  $r$  st. nur  $s$  und  $r$  (vergl. Rathke: Über zwei Konfigurationen von Punkten, Dissertation Marburg 1885).

S. 452. Vor Anfang der 4. Zeile v. o. ist entsprechend dem Original einzuschalten: Danach berührt die  $L^2$  nur noch den Kreis  $A^2$  reell doppelt bis  $l = u$  wird, wo sie ihn in  $U$  vierpunktig berührt und zum Krümmungskreise hat.

S. 460 Z. 16 v. o. l.  $>$  st.  $<$  (wie im Original).

S. 461. Die Formeln in den drei letzten Zeilen sind auf S. 790 falsch verbessert; sie lauten richtig:

$$\lambda^2 = \frac{b}{4ab} (4ab^2 - aa^2 + 5b^2 - bd^2),$$

$$\lambda_1^2 = \frac{b}{4ab} (4ab^2 - aa^2 + 5b^2 - bd^2),$$

$$\lambda_2^2 = \frac{a}{45b} (4ab^2 - aa^2 + 5b^2 - bd^2).$$

(Hinsichtlich der letzten drei Verbesserungen vergl. Fiedler, Acta mathematica Bd. 5 S. 331.)

S. 526 Z. 4 v. o. l. 20 st. 25 — Z. 17 v. o. l. zwölften st. sechsten.

S. 575 Z. 2 v. o. l.  $\frac{1}{2}(m-2)(m-3)$  st.  $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ .

S. 591 Z. 13 v. o. l. Die beiden Zahlen  $x$  und  $y$  sind:

$$x = \frac{1}{2}m(m-2)(m-3)(m+4), \quad y = m(m-2)(m-4)(m+2).$$

(Wegen dieser Verbesserungen vergl. man B. Sporer, Zeitschr. f. Math. Bd. 37 S. 67, 358, Bd. 40 S. 168, 169; ebenso Bd. 37 S. 346 eine Bemerkung zu der Anm. auf S. 586.)

Auf S. 495, 605 (Plückersche Formeln) hätte doch Plücker erwähnt werden müssen.

S. 659 ist der letzte Absatz der Abhandlung über die Flächen dritter Ordnung folgendermassen zu verändern: Es giebt doppelt unendlich viele Geraden  $D$ , deren zweite Polare sich auf eine Gerade  $d$  reduziert; die von Steiner erwähnten 100 Geraden, denen allein er diese Eigenschaft zuschreibt, zeichnen sich unter jenen durch die — freilich von ihm auch erwähnte — Eigenschaft aus, dass je viere dieselbe Gerade  $d$  zugehört (vergl. Salmon, Analytische Geometrie des Raums 1. Aufl. der Fiedler'schen deutschen Bearbeitung Bd. II S. 412; Cremona, Mémoire sur les surfaces du troisième ordre, Journal f. Math. Bd. 68 S. 53, 62; R. Sturm, Synthetische Untersuchungen über die Flächen 3. Ordnung S. 110, 168).

S. 663 Nr. 2 ist so zu verbessern: Nimmt man in jeder durch den Punkt  $p$  gehenden Geraden  $A$  einen solchen Punkt  $g$ , dessen Abstand von  $p$  der „mittlere Faktor“ zwischen den Abschnitten der Geraden ist, so dass:

$$pq^n = \pm pa_1 \cdot pa_2 \cdots pa_n$$

ist, so besteht der Ort dieses Punktes  $g$  aus zwei Kurven  $n^{\text{ter}}$  Ordnung:  $Q^n, Q'^n$ . Dieselben haben die durch  $p$  parallel zu den Asymptoten der  $C^n$  gezogenen Geraden zu  $n$ -punktig berührenden Asymptoten, berühren sich also auch untereinander in ihren unendlich fernen Punkten  $n$ -punktig. Im Falle eines geraden  $n$  ist  $p$  für beide Kurven Mittelpunkt, während wenn  $n$  ungerade ist, sie symmetrisch zueinander liegen in Bezug auf  $p$ . Jede der beiden Kurven hat mit  $C^n$  noch  $n(n-1)$  Punkte gemein. Auf den Geraden von  $p$  nach diesen  $2n(n-1)$  Punkten  $r$  gilt, wenn  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  die übrigen Schnitte mit  $C^n$  sind:

$$pr^{n-1} = \pm pa_1 \cdot pa_2 \cdots pa_{n-1}.$$

Dass durch die  $2n(n-1)$  Punkte  $r$  Kurven  $(2n-2)^{\text{ter}}$  Ordnung gehen, ist zu streichen, weil es selbstverständlich ist.

Der letzte Absatz von Nr. 2 lautet richtiger so:

Unter den Geraden durch  $p$  giebt es  $n$  solche, bei denen das Produkt  $pa_1 \cdot pa_2 \cdots pa_n$  einen extremen Wert annimmt. Sind diese Geraden sämtlich reell, so handelt es sich um lauter Minima, wenn alle Asymptoten von  $C^n$  reell sind; jedes Paar imaginärer Asymptoten von  $C^n$  bewirkt, dass an die Stelle eines Minimums ein Maximum tritt.

Diese  $n$  ausgezeichneten Geraden sind Normalen von  $Q^n$  und  $Q'^n$ , und zwar jede eine  $n$ -fache für jede der beiden Kurven derartig, dass, wofern die Gerade reell ist, bei ungeradem  $n$  auf jeder Kurve ein reeller Fusspunkt vorhanden ist, bei geradem  $n$  aber entweder nur zwei und dann auf derselben Kurve befindliche Fusspunkte reell sind oder kein einziger.

Der Punkt  $p$  ist nicht ein vielfacher singulärer Punkt, wie Steiner behauptet; er gehört keiner der beiden Kurven  $Q^n$  an.

S. 665 Z. 6, 7 v. o. ist die Frage nach der Enveloppe der Kreise keine richtige; denn es entsteht — in gleicher Weise bei der Hyperbel wie bei der Ellipse — ein Büschel von Kreisen.

S. 667 Z. 9 v. o. l.: so durchläuft der Punkt  $g$  eine Gerade.

(Vergl. hierzu: R. Molke, Über diejenigen Sätze Steiner's, welche sich auf die durch einen Punkt gehenden Transversalen einer Kurve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung beziehen, Dissertation Breslau 1897.)

S. 671 Z. 15, 16 v. o. l.  $r$  st.  $\alpha$  — Z. 25 v. o. l.  $A_1 B_1 C_1$  st.  $ABC$ .

S. 673 Z. 3 v. u. l.  $(d^2 - r^2)$  st.  $(r^2 - a_1^2 - d^2)$ .

S. 676 Z. 11 v. o. l. sämtlich Ellipsen oder sämtlich Hyperbeln.

S. 677 Z. 17 v. o. l.  $\frac{1}{16}$  st.  $4^4$ . ♦

(Man vergl. hierzu die oben erwähnte Dissertation von Dörholt.)

S. 680 Z. 11, 12 v. o. l. auch dem Vorzeichen nach gleiche Produkte der Halbaxenquadrate st. gleiches Axenprodukt — Z. 15 v. o. l. absolute Werte der genannten Produkte st. Axenprodukte.

S. 682 Z. 14 v. u. Die Umkehrung ist nicht richtig — Z. 1 v. u. „geometrisch konstruierbar“ kann nicht für alle Fälle gelten.

S. 683. Die zu den Fällen 16 bis 21 gehörigen Werte von  $L$  werden von Wiman (Zeitschr. f. Math. Bd. 40 S. 296) auf 22, 19, 26, 42, 33, 51 reduziert.

S. 690 Z. 13 v. o. l.  $\alpha\beta\gamma$  st.  $\alpha\beta\gamma$ .

S. 710 Z. 19 v. o. l.  $\mathfrak{R}_0\mathfrak{U}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0$  st.  $K_0\mathfrak{U}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{C}_0$  — Z. 8 v. u. l. Hyperbel  $H^2$ .

S. 713 Z. 7, 9 v. o. sind Maximum und Minimum zu vertauschen.

(Vergl. R. Pyrkosch, Über Ponceletsche Dreiecke, insbesondere solche, welche konfokalen Kegelschnitten ein- und umgeschrieben sind. Dissertation Breslau 1897.)

S. 728 letzter Absatz: Der dort geführte — aber nur für das spitzwinklige Dreieck geltende — Beweis rührt nicht von Steiner, sondern von H. A. Schwarz her. In ihm l.  $a\alpha$  und  $a_4\alpha_4$  st.  $a\alpha + a_4\alpha_4$ .

S. 739 Anm. 25) erster Absatz. Zur Feststellung der richtigen Zahl 3264 der fünf gegebene Kegelschnitte berührenden Kegelschnitte ist auch Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie S. 338 zu nennen.

Die in derselben Anmerkung auf Grund einer Notiz aus dem Nachlasse Steiner's besprochene Aufgabe: „Einem gegebenen Dreiecke ein anderes von kleinstem Umfange umzuschreiben“ hat doch wohl nicht die dort erwähnte Lösung; vielmehr bildet das gegebene Dreieck selbst die Lösung, und verliert damit das Problem alles Interesse.

Die Bedingungen unter denen  $\int \frac{x^n + \mu dx}{\sqrt{1 + \varepsilon_1 x + \dots + \varepsilon_n x^n}}$  algebraisch ist.

Von Oberlehrer P. Kokott in Gr. Strehlitz.

Wenn  $\int \frac{x^n + \mu dx}{\sqrt{1 + \varepsilon_1 x + \dots + \varepsilon_n x^n}}$  ( $n$  und  $\mu$  positiv) algebraisch ist, so kann man der algebraischen Funktion die Form

$C \cdot (p_{\mu+1} x^{\mu+1} + p_{\mu} x^{\mu} + \dots + p_2 x^2 + p_1 x - 1) \sqrt{1 + \varepsilon_1 x + \dots + \varepsilon_n x^n}$  geben. Durch Differentiation beider Seiten erhält man:

$$x^{n+\mu} = \frac{C}{2} [( \mu + 1 ) p_{\mu+1} x^{\mu} + \dots + 2 p_2 x + p_1] [1 + \varepsilon_1 x + \dots + \varepsilon_n x^n] \\ + \frac{C}{2} [p_{\mu+1} x^{\mu+1} + \dots + p_1 x - 1] [\varepsilon_1 + 2 \varepsilon_2 x + \dots + n \varepsilon_n x^{n-1}].$$

Durch Vergleichung der Koeffizienten erhält man:

$$\varepsilon_k p_1 + 2 \varepsilon_{k-1} p_2 + \dots + (\mu + 1) \varepsilon_{k-\mu} p_\mu + 1 + \frac{1}{2} \{ - (k+1) \varepsilon_{k+1} + k p_1 \varepsilon_k + \dots + (k-\mu) p_{\mu+1} \varepsilon_{k-\mu} \} = 0,$$

oder

$$(k+1) \varepsilon_{k+1} = p_1 (k+2) \varepsilon_k + p_2 (k+3) + \dots + p_{\mu+1} (k+\mu+2) \varepsilon_{k-\mu} \quad (k=0, 1, \dots, n-1).$$

Ausserdem ist:

$$p_1 (n+2) \varepsilon_n + p_2 (n+3) \varepsilon_{n-1} + \dots + p_{\mu+1} (n+\mu+2) \varepsilon_{n-\mu} = 0,$$

$$p_2 (n+4) \varepsilon_n + p_3 (n+5) \varepsilon_{n-1} + \dots + p_{\mu+1} (n+\mu+3) \varepsilon_{n-\mu+1} = 0,$$

⋮

⋮

⋮

$$p_\mu (n+2\mu) \varepsilon_n + p_{\mu+1} (n+2\mu+1) \varepsilon_{n-1} = 0,$$

$$C = \frac{1}{\varepsilon_n p_{\mu+1} \left( \frac{n}{2} + \mu + 1 \right)}.$$

Im ganzen erhält man  $n + \mu + 1$  Gleichungen mit  $n + \mu + 2$  Unbekannten. Es sei noch bemerkt, dass die letzten Gleichungen bis auf die Gleichung für  $C$  in dem allgemeinen Ausdruck für  $\varepsilon_{k+1}$  enthalten sind, wenn man  $\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2}, \dots, \varepsilon_{n+\mu}$  gleich Null setzt. Für die einzelnen  $\varepsilon$ -Grössen ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 &= 1 \\ \varepsilon_1 &= 2 p_1 \\ \varepsilon_2 &= 3 p_1^2 + 2 p_2 \\ \varepsilon_3 &= 4 p_1^3 + 6 p_2 p_1 + 2 p_3 \\ \varepsilon_4 &= 5 p_1^4 + 12 p_1^2 p_2 + 6 p_1 p_3 + 2 p_4 + 3 p_2^2 \\ &\vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \end{aligned}$$

Um den allgemeinen Ausdruck für  $\varepsilon_k$  als Funktion der  $p$ -Grössen zu finden, ist es zweckmässig  $p_q$  als eine Grösse  $q^{\text{ter}}$  Dimension aufzufassen; es ist dann klar, dass  $\varepsilon_k$  nur aus Gliedern von der Dimension  $k$  bestehen kann. Man hat also

$$\varepsilon_k = \Sigma C_q p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_{k+1}^{\lambda_{k+1}},$$

wobei  $\lambda_1 + 2\lambda_2 + (\mu + 1)\lambda_{\mu+1} = k$  ist. Um  $C_q$  zu finden, behaupten wir, dass man zur Summe der  $\lambda$ -Grössen 1 hinzuzählen muss, dann die Fakultät zu bilden hat und dieselbe durch das Produkt der Fakultäten der einzelnen  $\lambda$ -Grössen dividieren muss. Gesetzt, diese Regel gelte für alle Indices, welche gleich oder kleiner als  $k$  sind, dann gilt sie auch für  $k + 1$ . Man hat nämlich:

$$(k+1) \varepsilon_{k+1} = p_1 (k+2) \varepsilon_k + \dots + p_{\mu+1} (k+\mu+2) \varepsilon_{k-\mu} = \Sigma C_q p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_{\mu+1}^{\lambda_{\mu+1}}.$$

Hierbei muss  $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + (\mu + 1)\lambda_{\mu+1} = k + 1$  sein.

Fassen wir einen bestimmten Term  $p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \dots p_{\mu+1}^{\sigma_{\mu+1}}$  ins Auge, so ist derselbe entstanden aus dem Term

$$\begin{array}{ll} p_1^{\sigma_1-1} p_2^{\sigma_2} \dots p_{\mu+1}^{\sigma_{\mu+1}} & \text{aus der Entwicklung von } \varepsilon_k \\ p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2-1} \dots p_{\mu+1}^{\sigma_{\mu+1}} & \text{,, ,, ,, ,, } \varepsilon_{k-1} \\ p_1^{\sigma_1} \cdot p_2^{\sigma_2} \dots p_{\mu+1}^{\sigma_{\mu+1}-1} & \text{,, ,, ,, ,, } \varepsilon_{k-\mu} \end{array}$$

Der Koeffizient von  $p_1^{\sigma_1-1} p_2^{\sigma_2} \dots p_{\mu+1}^{\sigma_{\mu+1}}$  heisst nach der gemachten Voraussetzung

$$\frac{\sum \sigma!}{(\sigma_1-1)! \sigma_2! \dots \sigma_{\mu+1}!};$$

die andern entsprechend

$$\frac{\sum \sigma!}{\sigma_1! (\sigma_2-1)! \dots \sigma_{\mu+1}!} \text{ u. s. f.}$$

Der Koeffizient von  $p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \dots p_{\mu+1}^{\sigma_{\mu+1}}$  in  $\varepsilon_{k+1}$  heisst also:

$$\begin{aligned} & \frac{\sum \sigma!}{\sigma_1! \sigma_2! \dots \sigma_{\mu+1}!} \{ (k+2)\sigma_1 + (k+3)\sigma_2 + \dots + (k+\mu+2)\sigma_{\mu+1} \} \\ &= \frac{\sum \sigma!}{\sigma_1! \sigma_2! \dots \sigma_{\mu+1}!} \{ k \sum \sigma + \sum \sigma + k + 1 \} \\ &= \frac{(k+1)(\sum \sigma + 1)!}{\sigma_1! \sigma_2! \dots \sigma_{\mu+1}!} \end{aligned}$$

(Sollten in dem Term ein oder mehrere Grössen  $p$  nicht vorkommen, oder nur in der ersten Potenz enthalten sein, so ist der Beweis derselbe.)  $k+1$  fällt auf beiden Seiten weg; das Gesetz gilt für  $k=0, 1, 2$ ; folglich ist es allgemein giltig. Da  $n$  und  $\mu$  von einander völlig unabhängig sind, gilt die Formel für  $\varepsilon_k$  auch für  $n+1, n+2$  bis  $n+\mu$ . Nachdem wir so  $\varepsilon_k$  als Funktion von  $p_1, p_2 \dots p_{\mu+1}$  bestimmt haben, müssen wir jetzt diese Grössen selbst berechnen. Dazu dienen die Gleichungen:

$$\begin{array}{l} p_1(n+2)\varepsilon_n + p_2(n+3)\varepsilon_{n-1} + \dots + p_{\mu+1}(n+\mu+2)\varepsilon_{n+\mu} = 0, \\ \vdots \\ p_{\mu}(n+2\mu)\varepsilon_n + p_{\mu+1}(n+2\mu+1)\varepsilon_{n-1} = 0. \end{array}$$

Dieselben sind äquivalent mit

$$\varepsilon_{n+1} = 0, \quad \varepsilon_{n+2} = 0 \dots \varepsilon_{n+\mu} = 0;$$

da nur  $\mu$  Gleichungen zur Verfügung stehen, aber  $\mu+1$  Unbekannte zu berechnen sind, bleibt eine  $p$ -Grösse willkürlich; wir wählen dazu  $p_1$ .

$C$  ist endlich bestimmt durch die Gleichung:

$$C = \frac{1}{\varepsilon_n \left( \frac{n}{2} + \mu + 1 \right) p_{\mu+1}}$$

Wir erhalten also folgenden Satz:

Damit  $\int \frac{x^{n+\mu} dx}{\sqrt{1 + \varepsilon_1 x + \dots + \varepsilon_n x^n}}$  algebraisch sein kann, müssen die Koeffizienten des Radikals ganze ganzzahlige Funktionen von  $\mu$  Grössen sein, welche selbst wieder die Wurzeln von  $\mu$  nach dem Gesetze  $\varepsilon_k$  gebil-

deten Gleichungen sind. Diese Wurzeln sind die Koeffizienten desjenigen ganzen Polynoms, welches als Faktor vor das Radikal tritt. Der Koeffizient der ersten Potenz des Polynoms bleibt willkürlich.

**Anwendungen.**

Ist  $\mu = 0$ , so hat man:

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1 + \varepsilon_1 x + \dots + \varepsilon_n x^n}} = \frac{1}{\varepsilon_n \left(\frac{n}{2} + 1\right) p_1} (p_1 x - 1) \sqrt{1 + \varepsilon_1 x + \dots + \varepsilon_n x^n}.$$

Da  $p_2, p_3$  etc. gleich Null sind, so sind gar keine Bedingungsgleichungen vorhanden;  $p_1$  ist willkürlich;

$$\varepsilon_k = \frac{(k+1)!}{k!} p_1^k = (k+1) p_1^k;$$

lässt man noch  $p_1$  mit  $x$  in eine Grösse aufgehen, so erhält man:

$$\int \frac{y^n dy}{\sqrt{1 + 2y + 3y^2 + \dots + (n+1)y^n}} = \frac{1}{(n+1) \left(\frac{n}{2} + 1\right)} (y-1) \sqrt{1 + 2y + \dots + (n+1)y^n}.$$

Ist  $\mu = 1$ , so hat man:

$$\int \frac{x^{n+1} dx}{\sqrt{1 + \varepsilon_1 x + \dots + \varepsilon_n x^n}} = \frac{1}{\varepsilon_n \left(\frac{n}{2} + 2\right) p_2} (p_2 x^2 + p_1 x - 1) \sqrt{1 + \varepsilon_1 x + \dots + \varepsilon_n x^n}$$

Die Gleichung für  $p_2$  heisst dann

$$(n+2)p_1^{n+1} + (n+1)n p_1^{n-1} p_2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} p_1^{n-3} p_2^2 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} p_1^{n-5} p_2^3 + \dots = 0.$$

Dividiert man beide Seiten durch  $p_1^{n+1}$  und setzt man für

$$\frac{p_2}{p_1^2} = z,$$

so erhält man für gerade  $n$  von der Form  $2p$ , also ungerade  $n+1$  von der Form  $2p+1$ :

$$1 \binom{n+2}{1} + 2 \binom{n+1}{1} z + 3 \binom{n}{3} z^2 + \dots + (p+1) \binom{p+2}{p+1} z^p = 0.$$

Für ungerade  $n$  der Form  $2p-1$  also  $n+1 = 2p$  heisst die Bestimmungsgleichung für  $z$ :

$$1 \binom{n+2}{1} + 2 \binom{n+1}{2} z + 3 \binom{n}{3} z^2 + \dots + (p+1) \binom{p+1}{p+1} z^p = 0.$$



# Über Gebiete von Schraubengeschwindigkeiten eines starren Körpers bei verschiedener Zahl von Stützflächen.

Von

P. SOMOFF  
in Warschau.

## I. Die Grenzebenen erster Art.

1. In meiner früheren Arbeit: „Über Schraubengeschwindigkeiten eines festen Körpers bei verschiedener Zahl von Stützflächen“\* wurde eine Methode angedeutet, um mögliche Schraubenaxen und die Grenzen für die Parameterwerte der Schraubengeschwindigkeiten zu bestimmen, wenn ein starrer Körper sich auf feste Flächen stützt. Aber die Untersuchung von Gebieten aller möglichen Schraubenaxen, wie der Richtung so auch der Lage nach, bei verschiedener Zahl von Stützflächen, die Bestimmung der Bedingungen, bei welchen diese Gebiete sich möglichst zusammenziehen und endlich die Bestimmung der kleinsten Zahl von Stützflächen, welche den Körper festlegen können, und der dazu nötigen und hinreichenden Bedingungen wurde ausser Betracht gelassen. In der vorliegenden Arbeit werden diese Fragen in möglichst allgemeiner Weise beantwortet.

2. Es seien  $\xi, \eta, \zeta$  die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und  $\lambda, \mu, \nu$  ihre Momente auf geradlinige rechtwinkelige Koordinatenachsen ( $x, y, z$ ) bezogen, so dass

$$1) \quad \lambda = y\xi - z\eta, \quad \mu = z\xi - x\zeta, \quad \nu = x\eta - y\zeta$$

ist. Da die absolute Grösse der Winkelgeschwindigkeit keine Rolle spielt, so wollen wir dieselbe der Bequemlichkeit wegen gleich Eins setzen. Es mögen ebenso  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i, \lambda_i, \mu_i, \nu_i$  die Koordinaten der Normale  $n_i$  einer Stützfläche  $\Sigma_i$  in ihrem Berührungspunkte zur Körperfläche  $S_i$  bedeuten. Die positiven Richtungen von  $\omega$  und  $n_i$  werden wir so annehmen, wie es in dem oben citierten Aufsätze [§ 2]\*\* gethan wurde. Im Falle einer Stützfläche genügen die möglichen Schraubengeschwindigkeiten einer der Bedingungen [§ 3]:

\* Zeitschrift für Mathematik und Physik, 42. Band, 1897, S. 133, 161.

\*\* Der Kürze wegen werden wir weiter durch die Klammer [ ] die Citate aus der obengenannten Arbeit in der Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1897, bezeichnen, ohne jedesmal den Titel anzuführen.

$$\begin{aligned} 2) & \quad p \geq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \\ \text{oder} & \\ 3) & \quad p \leq \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \end{aligned}$$

wo  $p$  den Parameter der Schraubengeschwindigkeit,  $\delta_1$  den kürzesten Abstand zwischen der Normale  $n_1$  und der Schraubenaxe und  $\varphi_1$  den Winkel zwischen diesen Geraden bezeichnet, wobei dieser Winkel nach der im [§ 3] gegebenen Regel bestimmt werden muss. Die Bedingung 2) entspricht dem Falle, dass  $\omega$  mit der positiven Richtung der Stütznormale einen spitzen Winkel bildet und die Bedingung 3) dem Falle, dass dieser Winkel stumpf ist. Die bekannte Formel für das relative Moment zweier Vektoren benutzend, finden wir:

$$4) \quad \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = - \frac{\xi_1 \lambda + \eta_1 \mu + \xi_1 \nu + \lambda_1 \xi + \mu_1 \eta + \nu_1 \xi}{\xi_1 \xi + \eta_1 \eta + \xi_1 \zeta}.$$

Da im Falle 2)

$$\xi_1 \xi + \eta_1 \eta + \xi_1 \zeta > 0$$

und im Falle 3)

$$\xi_1 \xi + \eta_1 \eta + \xi_1 \zeta < 0$$

ist, so kann man beide Fälle in einer Ungleichheit

$$5) \quad (\lambda_1 + p \xi_1) \xi + (\mu_1 + p \eta_1) \eta + (\nu_1 + p \xi_1) \zeta + \xi_1 \lambda + \eta_1 \mu + \xi_1 \nu \geq 0$$

vereinigen.

**3.** Bei Betrachtung von zwei oder mehreren Stützflächen spielt eine wichtige Rolle die Ebene

$$6) \quad S_{ik} = A_{ik} \xi + B_{ik} \eta + C_{ik} \zeta + D_{ik} = 0,$$

wo

$$7) \quad \begin{aligned} A_{ik} = & (\eta_i \xi - \xi_i \eta) (\xi_k \xi + \eta_k \eta + \xi_k \zeta) \\ & - (\eta_k \xi - \xi_k \eta) (\xi_i \xi + \eta_i \eta + \xi_i \zeta), \end{aligned}$$

$$8) \quad \begin{aligned} B_{ik} = & (\xi_i \xi - \xi_i \zeta) (\xi_k \xi + \eta_k \eta + \xi_k \zeta) \\ & - (\xi_k \xi - \xi_k \zeta) (\xi_i \xi + \eta_i \eta + \xi_i \zeta), \end{aligned}$$

$$9) \quad \begin{aligned} C_{ik} = & (\xi_i \eta - \eta_i \xi) (\xi_k \xi + \eta_k \eta + \xi_k \zeta) \\ & - (\xi_k \eta - \eta_k \xi) (\xi_i \xi + \eta_i \eta + \xi_i \zeta), \end{aligned}$$

$$10) \quad \begin{aligned} D_{ik} = & (\xi_i \xi + \eta_i \eta + \xi_i \zeta) (\lambda_k \xi + \mu_k \eta + \nu_k \zeta) \\ & - (\xi_k \xi + \eta_k \eta + \xi_k \zeta) (\lambda_i \xi + \mu_i \eta + \nu_i \zeta). \end{aligned}$$

Wir werden sehen, dass solche Ebenen, wenn ein System paralleler Schraubenaxen gegeben ist, entweder mögliche Schraubenaxen mit verschiedener Richtung der Winkelgeschwindigkeit von einander trennen oder auch überhaupt mögliche Schraubenaxen begrenzen. In beiden Fällen werden wir diese Ebenen echte Grenzebenen erster Art nennen und mit dem Symbole  $S'_{ik}$  bezeichnen. Im Falle von  $m$  Stützflächen giebt es  $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$  Ebenen, welche durch die Gleichungen 6) bestimmt werden; nicht alle diese Ebenen sind aber echte Grenzebenen, wie wir es später sehen werden. Sind sie es nicht, so werden wir dieselben unechte Grenzebenen erster Art nennen und mit dem

Symbole  $S''_{ik}$  bezeichnen. Die Bezeichnung  $S_{ik}$  wollen wir für den Fall behalten, dass kein Unterschied zwischen den echten und unechten Grenzebenen gemacht wird.

4. Sind zwei Stützflächen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_2$  gegeben, so werden alle möglichen Schraubengeschwindigkeiten ausser der Ungleichheit 5) noch durch die folgende bestimmt:

$$11) (\lambda_2 + p\xi_2)\xi + (\mu_2 + p\eta_2)\eta + (\nu_2 + p\xi_2)\xi + \xi_2\lambda + \eta_2\mu + \xi_2\nu \geq 0.$$

Stellen wir uns die Parameterkugel [§ 5] mit dem Mittelpunkt im Anfangspunkte der Koordinaten vor. Durch zwei zu den Stütznormalen senkrechte Diametralebenen wird die Oberfläche derselben in vier sphärische Zweiseite geteilt, welchen vier verschiedene Zeichenverbindungen der Cosinuse

$$12) \quad \xi_1\xi + \eta_1\eta + \zeta_1\zeta, \quad \xi_2\xi + \eta_2\eta + \zeta_2\zeta$$

entsprechen. Jeder Punkt der Kugelfläche bestimmt eine Richtung der Winkelgeschwindigkeit auf den Schraubenaxen eines Parallelenbündels. Den Punkten der beiden Zweiseite, für welche beide Grössen 12) positiv oder negativ sind, entsprechen Parallelenbündel solcher Schraubenaxen, auf welchen die Winkelgeschwindigkeit die eine oder auch die andere Richtung haben kann, je nachdem der Parameter grösser oder kleiner als jede der beiden Grössen

$$13) \quad \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$$

ist [§ 5]. Den Punkten der zwei anderen Zweiseite entsprechen solche mögliche Schraubenaxen, deren Parameterwerte in den Grenzen 13) eingeschlossen sind und bei denen die Winkelgeschwindigkeit nur die eine von den beiden Richtungen haben kann.

Unter den Schraubenaxen eines Parallelenbündels, welche dem ersten und zweiten Gebiete auf der Parameterkugel entsprechen, giebt es solche, für welche die beiden Grenzen 13) der Parameterwerte zusammenfallen, so dass  $p$  alle möglichen Werte bekommen kann; diese Axen genügen der Bedingung

$$14) \quad \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = 0.$$

Wenn man die Formel 4) benutzt und die Ausdrücke 1) einführt, bekommt man:

$$15) \quad S_{12} = A_{12}x + B_{12}y + C_{12}z + D_{12} = 0,$$

wo die Koeffizienten nach dem Schema des § 3 gebildet sind. Diese Ebene ist, nach dem oben Gesagten, eine unechte Grenzebene  $S''_{12}$ , da jetzt auf jeder Axe die Winkelgeschwindigkeit beide Richtungen haben kann. Die Ebene trennt nur die Axen, für welche

$$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 > \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$$

ist, von den Axen, die der entgegengesetzten Ungleichheit genügen.

Wenden wir uns zu den zwei anderen Gebieten auf der Parameterkugel. Den Schraubenaxen, welche durch die Punkte dieses Gebietes be-

stimmt werden, entsprechen entgegengesetzte Zeichen der Grössen 12); und man kann leicht einsehen, dass jetzt parallele Schraubenaxen durch die Ebene 15) in der Weise getrennt werden, dass auf der einen Seite derselben Schraubenaxen mit der einen, auf der anderen Seite mit der entgegengesetzten Richtung der Winkelgeschwindigkeit liegen,  $(+\omega)$  und  $(-\omega)$ . Diese Ebene ist jetzt also eine echte Grenzebene  $S'_{12}$ . Auf jeder der Schraubenaxen des gegebenen Parallelenbündels, welche dieser Ebene selbst angehören, kann der Parameter nur einen bestimmten Wert annehmen, wobei aber beide Richtungen der Winkelgeschwindigkeit möglich werden.

5. Für das Folgende ist es wichtig zu bestimmen, auf welcher Seite der echten Grenzebene die Schraubenaxen mit der einen oder anderen Richtung der Winkelgeschwindigkeit,  $(+\omega)$  oder  $(-\omega)$ , liegen. Im Falle einer echten Grenzebene haben die Grössen 12) verschiedene Zeichen; und wenn  $\omega$  so gerichtet ist, dass

$$16) \quad \xi_1 \xi + \eta_1 \eta + \zeta_1 \zeta > 0, \quad \xi_2 \xi + \eta_2 \eta + \zeta_2 \zeta < 0,$$

so haben wir

$$17) \quad \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \leq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$$

und dem entsprechend

$$18) \quad A_{12}x + B_{12}y + C_{12}z + D_{12} \geq 0.$$

Bei entgegengesetzter Richtung von  $\omega$  finden wir ebenso:

$$19) \quad \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \geq \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$$

und folglich

$$20) \quad A_{12}x + B_{12}y + C_{12}z + D_{12} \leq 0.$$

Das erste Gebiet der Schraubenaxen wollen wir das Gebiet  $(+\omega)$ , das andere das Gebiet  $(-\omega)$  nennen.

Es seien  $\alpha_{12}$ ,  $\beta_{12}$ ,  $\gamma_{12}$  die Winkel, welche die Normale zur Ebene  $S'_{12}$  mit den Koordinatenaxen bildet, und  $P_{12}$  die Länge des auf diese Ebene vom Anfangspunkte gefällten Perpendikels; dann ist

$$21) \quad x_{12} \cos \alpha_{12} = A_{12}, \quad x_{12} \cos \beta_{12} = B_{12}, \quad x_{12} \cos \gamma_{12} = C_{12},$$

$$22) \quad x_{12} P_{12} = -D_{12},$$

wo

$$23) \quad x_{12} = \pm \sqrt{A_{12}^2 + B_{12}^2 + C_{12}^2} = \pm \sqrt{q_1^2 + q_2^2 - 2q_{12}q_1q_2}$$

und zur Abkürzung im Folgenden

$$24) \quad \xi_i \xi + \eta_i \eta + \zeta_i \zeta = q_i$$

$$25) \quad \xi_i \xi_k + \eta_i \eta_k + \zeta_i \zeta_k = q_{ik}$$

gesetzt und nach unserer früheren Annahme

$$26) \quad \xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2 = 1$$

ist. Was das Vorzeichen von  $x_{12}$  betrifft, so ist zu beachten, dass dem positiven Werte von  $x_{12}$  immer die Richtung der Normale von der Ebene in das Gebiet  $(+\omega)$  entspricht. Denn im Falle  $D_{12} > 0$ , liegt 19) der Anfangspunkt der Koordinaten im Gebiete  $(+\omega)$ , es ist aber zugleich 22)  $x_{12} < 0$  für die Richtung des Perpendikels

aus dem Anfangspunkte der Koordinaten auf die Ebene  $S'_{12}$ , also  $\alpha_{12} > 0$  für die Richtung von der Ebene in das Gebiet  $(+\omega)$ .

Es ist noch zu bemerken, dass für eine Schraubenaxe  $(\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu)$  eines Parallelenbündels  $(\xi, \eta, \zeta)$  wir folgendes Kriterium haben: sie gehört dem Gebiete  $(+\omega)$  oder  $(-\omega)$  an, je nachdem

$$27) \quad \begin{cases} \xi_2 q_1 - \xi_1 q_2) \lambda + (\eta_2 q_1 - \eta_1 q_2) \mu + (\zeta_2 q_1 - \zeta_1 q_2) \nu \\ + (\lambda_2 q_1 - \lambda_1 q_2) \xi + (\mu_2 q_1 - \mu_1 q_2) \eta + (\nu_2 q_1 - \nu_1 q_2) \zeta \end{cases}$$

positiv oder negativ ist. Es ist dabei zu beachten, dass bei Existenz einer echten Grenzebene  $q_1$  und  $q_2$  entgegengesetzte Zeichen haben (§ 4).

6. Im folgenden Paragraphen werden wir die Gebiete aller derjenigen Schraubenaxen betrachten, deren Parameterwerte innerhalb gegebener Grenzen eingeschlossen sind. Zu diesem Zwecke sind noch einige vorläufige Bemerkungen notwendig, die solche zu den Schraubenflächen normale Ebenen betreffen, welche die Stütznormalen enthalten und einer gegebenen Richtung parallel sind [§ 8]. Es sei

$$28) \quad A_i x + B_i y + C_i z + D_i = 0$$

die Gleichung einer solchen Ebene  $N_i$ . Da jede in dieser Ebene liegende Gerade der Bedingung

$$\delta_i \operatorname{tg} \varphi_i = 0$$

genügt, so sind nach der Formel 4):

$$29) \quad \begin{cases} A_i = \eta_i \zeta - \xi_i \eta, & B_i = \zeta_i \xi - \xi_i \zeta, & C_i = \xi_i \eta - \eta_i \xi, \\ D_i = -(\lambda_i \xi + \mu_i \eta + \nu_i \zeta). \end{cases}$$

Durch diese Ebene werden die Axen mit verschiedenen Zeichen  $\delta_i \operatorname{tg} \varphi_i$  von einander getrennt. Setzen wir

$$30) \quad \alpha_i \cos \alpha_i = A_i, \quad \alpha_i \cos \beta_i = B_i, \quad \alpha_i \cos \gamma_i = C_i, \quad \alpha_i P_i = -D_i,$$

so können wir für das Vorzeichen von

$$31) \quad \alpha_i = \pm \sqrt{1 - q_i^2},$$

ähnlich wie im § 5, folgende Regel bemerken: wenn  $q_i > 0$  ist, so entspricht der Richtung der Normale zur Ebene 28) in das Gebiet, wo

$$\delta_i \operatorname{tg} \varphi_i > 0$$

ist, der positive Wert von  $\alpha_i$ .

Um denjenigen Winkel  $\varepsilon_{12}$  zwischen zwei Normalebene  $N_1$  und  $N_2$  zu bestimmen, welcher die Grenzebene  $S'_{12}$  einschliesst, müssen wir in Acht nehmen, dass die Ebene  $S'_{12}$  die Durchschnittsgerade von  $N_1$  und  $N_2$  enthält und in demjenigen Gebiete liegt, wo beide Grössen 13) gleiche Zeichen haben, d. h. in den Gebieten  $(++)$  und  $(--)$ , [§ 7]. Da im Falle einer echten Grenzebene  $q_1$  und  $q_2$  entgegengesetzte Zeichen haben, so giebt uns die oben für  $\alpha_i$  angeführte Regel die Formel:

$$32) \quad \cos \varepsilon_{12} = \frac{q_{12} - q_1 q_2}{\sqrt{(1 - q_1^2)(1 - q_2^2)}}.$$

Endlich müssen wir noch die Formeln für die Winkel  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ , welche die Ebenen  $N_1$  und  $N_2$  mit  $S'_{12}$  bilden, hinschreiben. Mit Beachtung der nötigen Vorzeichen finden wir leicht:

$$33) \quad \begin{cases} \cos \varepsilon_1 = \frac{q_1 q_2 - q_2}{\sqrt{(1-q_1^2)(q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 q_2)}}, \\ \cos \varepsilon_2 = -\frac{q_2 q_1 - q_1}{\sqrt{(1-q_2^2)(q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 q_2)}}. \end{cases}$$

7. Zu unserer Aufgabe zurückkehrend, wollen wir zuerst solche Schraubenaxen eines Parallelenbündels bestimmen, für welche der Parameter zwischen gegebenen Grenzen

$$34) \quad p_1 \leq p \leq p_2$$

liegt und die Winkelgeschwindigkeit dabei beide Richtungen haben kann. Solche Axen können nur der echten Grenzebene  $S'_{12}$  angehören, da für dieselben die Grössen 13) zusammenfallen müssen. Die gesuchten Axen bilden in dieser Ebene einen Streifen von einer Breite, welche auf folgende Weise bestimmt werden kann. Es bezeichne  $h$  den Abstand einer dieser Axen von der ihnen parallelen Durchschnittsgeraden der Ebenen  $N_1$  und  $N_2$ , positiv gerechnet, wenn die Axe in dem Gebiete (+ +) liegt. Wir haben dann [§ 6]:

$$h = \frac{\delta_1}{\sin \varepsilon_1} = \frac{\delta_2}{\sin \varepsilon_2}.$$

Für die am Rande des Streifens liegenden Axen kann man aber schreiben:

$$\begin{aligned} \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 &= \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = p_1, \\ \delta_1' \operatorname{tg} \varphi_1' &= \delta_2' \operatorname{tg} \varphi_2' = p_2, \end{aligned}$$

wobei  $\varphi_1' = \varphi_1$ ,  $\varphi_2' = \varphi_2$ , wenn  $p_1$  und  $p_2$  dasselbe Zeichen haben, und

$$\varphi_1' = \pi - \varphi_1, \quad \varphi_2' = \pi - \varphi_2,$$

wenn die eine von den Grössen  $p_1, p_2$  positiv, die andere negativ ist [§ 2]. Da aber  $h$  und  $p$  immer dasselbe Zeichen haben, so ist:

$$35) \quad \begin{cases} h_1 = p_1 \frac{\operatorname{cotg} \varphi_1}{\sin \varepsilon_1} = p_1 \frac{\operatorname{cotg} \varphi_2}{\sin \varepsilon_2}, \\ h_2 = p_2 \frac{\operatorname{cotg} \varphi_1}{\sin \varepsilon_1} = p_2 \frac{\operatorname{cotg} \varphi_2}{\sin \varepsilon_2}, \end{cases}$$

wo  $\operatorname{cotg} \varphi_1, \operatorname{cotg} \varphi_2, \sin \varepsilon_1, \sin \varepsilon_2$  positiv gerechnet sind. Die Breite des Streifens ist also:

$$b = h_2 - h_1 = (p_2 - p_1) \frac{\operatorname{cotg} \varphi_1}{\sin \varepsilon_1} = (p_2 - p_1) \frac{\operatorname{cotg} \varphi_2}{\sin \varepsilon_2},$$

oder nach den Formeln 33):

$$b = (p_2 - p_1) \sqrt{\frac{q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 q_2}{1 - q_1^2 - q_2^2 - q_1^2 + 2q_1 q_2}}.$$

Auf jeder Axe dieses Streifens kann der Parameter nur einen bestimmten in den Grenzen 34) eingeschlossenen Wert annehmen.

8. Nach einer Bemerkung in [§ 7] liegen alle Axen, für welche die Differenz zwischen den Grenzwerten möglicher Parameter dieselbe ist, die Grenzwerte selbst aber beliebig bleiben, in einer der Grenzebene parallelen Ebene. Dabei ist die Entfernung zwischen den beiden Ebenen der gegebenen Differenz proportional. Das ist jetzt auch aus den Formeln der Paragraphen 3 und 4 ersichtlich. Indem wir nämlich die Bedingung

$$36) \quad \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 - \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = a$$

entwickeln, finden wir die Gleichung der genannten Ebene in der Form:

$$37) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\xi_2 \lambda + \eta_2 \mu + \zeta_2 \nu + \lambda_2 \xi + \mu_2 \eta + \nu_2 \zeta) (\xi_1 \xi + \eta_1 \eta + \zeta_1 \zeta) \\ & - (\xi_1 \lambda + \eta_1 \mu + \zeta_1 \nu + \lambda_1 \xi + \mu_1 \eta + \nu_1 \zeta) (\xi_2 \xi + \eta_2 \eta + \zeta_2 \zeta) \\ & = a (\xi_1 \xi + \eta_1 \eta + \zeta_1 \zeta) (\xi_2 \xi + \eta_2 \eta + \zeta_2 \zeta), \end{aligned} \right.$$

wo die laufenden Koordinaten in  $\lambda, \mu, \nu$  enthalten sind. Wir finden leicht, dass die Entfernung dieser Ebene von der Ebene  $S'_{12}$

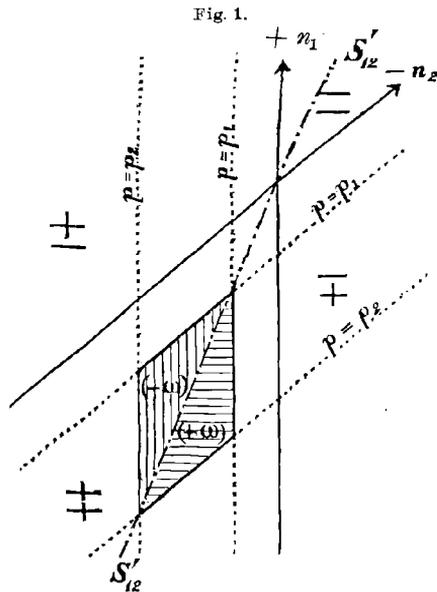
$$38) \quad \Delta_a = -a \frac{q_1 q_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 - 2q_{12} q_1 q_2}}$$

ist. Diese Formel zeigt zugleich, dass diejenigen Richtungen der Schraubenaxen, für welche die Entfernung  $\Delta_a$  bei gegebener Parameterdifferenz dieselbe ist, durch einen Kegel vierten Grades bestimmt werden.

9. Wir wollen jetzt voraussetzen, dass nicht nur die Differenz, sondern auch die Grenzwerte  $p_1, p_2$  selbst gegeben sind, und alle diejenigen Schraubenaxen aufsuchen, für welche die möglichen Parameterwerte in diese oder noch engere Grenzen

$$p_1 < p_1' < p < p_2' < p_2$$

eingeschlossen sind. Im Falle nur einer Stützfläche mit der Normale  $n_1$  würden alle Axen eines Parallelenbündels, für welche  $p \geq p_1$  ist, auf einer Seite der Ebene liegen, die der gegebenen Axenrichtung und der Normale  $n_1$  parallel ist und von der letzteren die Entfernung  $p_1 \cotg \varphi_1$  hat; alle Axen, welche der Bedingung 34) genügen, würden daher zwischen zwei solche Ebenen eingeschlossen sein, deren gegen-



seitige Entfernung  $\pm (p_2 - p_1) \cotg \varphi_1$  wäre. Ebenso müssten im Falle einer anderen Stützfläche mit der Normale  $n_2$  alle solche Schrauben-

axen zwischen zwei anderen, der Normale  $n_2$  parallelen Ebene liegen, deren Entfernung  $\pm (p_2 - p_1) \cotg \varphi_1$  gleich wäre. Sind also beide Stützflächen gegeben, so liegen alle gesuchten Schraubenaxen im Innern eines vierkantigen Prismas (Fig. 1), dessen Flächen von den genannten vier Ebenen gebildet werden. Eine von den Diagonalebene dieses Prismas fällt mit der Grenzebene  $S'_{12}$  zusammen, wie daraus ersichtlich ist, dass zwei entgegengesetzte Kanten desselben den Gleichheiten

$$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = p_1,$$

$$\delta'_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \delta'_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = p_2,$$

genügen, welche nur für die in der Grenzebene liegenden Axen möglich sind. Zwei andere Kanten des Prismas stellen solche Schraubenaxen dar, auf denen der Parameter alle Werte zwischen  $p_1$  und  $p_2$  annehmen kann. Auf allen anderen dem Prisma angehörenden Axen sind Parameterwerte möglich, welche zwischen engeren Grenzen  $p'_1, p'_2$  liegen, die in die gegebenen Grenzen  $p_1, p_2$  eingeschlossen sind.

**10.** Jetzt kann man sich das ganze System der Schraubenaxen vorstellen, für welche bei allen möglichen Richtungen derselben die Parameterwerte innerhalb gegebener Grenzen liegen. Wenn ein fester Körper sich nicht nur auf zwei feste Flächen stützt, sondern dieselben beständig berührt, so bildet bekanntlich das ganze mögliche Schraubenaxensystem einen Komplex zweiten Grades. Er wird von solchen Kongruenzen ersten Grades gebildet, welche Schraubenaxen mit einem und demselben Parameterwerte tragen. Stellen wir uns nun zwei dieser Kongruenzen vor: die Kongruenz ( $p_1$ ) und die Kongruenz ( $p_2$ ). In einem jeden Parallelenbündel giebt es eine Axe, welche der einen, und eine Axe, die der anderen Kongruenz angehört. Wenn der feste Körper sich nur auf zwei Flächen stützt, so bilden diese zwei Axen zwei entgegengesetzte Kanten des oben besprochenen Prismas, welches somit bestimmt wird, wenn man durch diese Kanten zwei den Normalen der Stützflächen parallele Ebenen zieht. Indem wir uns alle Paare paralleler Geraden der beiden Kongruenzen denken, bekommen wir eine Vorstellung von dem ganzen Systeme möglicher Schraubenaxen, deren Parameter nicht aus gegebenen Grenzen heraus-treten.

**11.** Zum Schlusse wollen wir die Hüllflächen der Grenzebenen und der ihnen parallelen Ebenen konstanter Parameterdifferenz bestimmen. Da die Lage der Grenzebene von der Richtung der entsprechenden parallelen Schraubenaxen abhängt, so umhüllen die Grenzebenen eine Fläche. Diese Fläche kann ohne weiteres angegeben werden, wenn man in Betracht zieht, dass alle in der Grenzebene liegenden Axen der Bedingung 14) genügen, also dem bekannten Komplex zweiten Grades angehören, dessen Singularitätenfläche in eine Linienfläche dritten Grades und in eine Ebene zerfällt.

Diese Fläche ist ein Cylindroid, welches alle Schrauben enthält, die zu allen möglichen Geschwindigkeitsschrauben des starren Körpers reziprok sind, wenn derselbe zwei feste Flächen beständig berührt.

Das kann auch unmittelbar gefunden werden, wenn man nur beachtet, dass jede Grenzebene, da sie untereinander parallele mögliche Schrauben des genannten Komplexes enthält, eine singuläre Ebene sein muss. Nimmt man den Anfangspunkt der Koordinaten in der Mitte des kürzesten Abstandes zwischen den Normalen  $n_1$  und  $n_2$  und die Koordinatenachsen nach den Halbierungsgeraden der Winkel zwischen denselben, so ist die Gleichung des Komplexes:

$$39) \quad (\lambda\eta - \mu\xi) \sin 2\vartheta_{12} + 2r_{12}\xi\eta = 0,$$

wo  $2\vartheta_{12}$  den Winkel zwischen den positiven [§ 2] Richtungen der beiden Normalen und  $2r_{12}$  den kürzesten Abstand derselben bezeichnen. Wenn wir hier

$$40) \quad \lambda = y\xi - z\eta, \quad \mu = z\xi - x\xi$$

setzen und  $\xi, \eta, \xi$  als konstant,  $x, y, z$  aber als laufende Koordinaten betrachten, so ist die Gleichung der Grenzebene:

$$41) \quad \xi\xi \sin 2\vartheta_{12} \cdot x + \eta\xi \sin 2\vartheta_{12} \cdot y - (\xi^2 + \eta^2) \sin 2\vartheta_{12} \cdot z + 2r_{12}\xi\eta = 0.$$

Und wenn man jetzt  $\xi:\eta:\xi$  als veränderlich betrachtet, bekommt man die Gleichung der Hüllfläche in der Form:

$$\text{oder} \quad \left| \begin{array}{ccc} -2 \sin 2\vartheta_{12} \cdot z, & 2r_{12}, & \sin 2\vartheta_{12} \cdot x \\ 2r_{12}, & -2 \sin 2\vartheta_{12} \cdot z, & \sin 2\vartheta_{12} \cdot y \\ \sin 2\vartheta_{12} \cdot x, & \sin 2\vartheta_{12} \cdot y, & 0 \end{array} \right| = 0$$

$$42) \quad \sin 2\vartheta_{12} \cdot (x^2 + y^2)z + 2r_{12}xy = 0.$$

Wir führen dieses bekannte Resultat an zum Vergleich mit einer anderen Hüllfläche, welche für den Fall, dass ein fester Körper sich auf zwei Flächen nur stützt, charakteristisch ist. Wir haben gefunden (§ 7), dass die Schraubenachsen einer gegebenen Richtung, für welche die Differenz zwischen den extremen Werten ihrer Parameter konstant ist, in einer der Grenzebene parallelen Ebene liegen. Alle solche Ebenen, welche derselben Parameterdifferenz entsprechen, umhüllen eine Fläche, die in einer einfachen Beziehung zur Fläche 41) steht. Bei der eben angenommenen Lage der Koordinatenachsen nimmt die Bedingung 36) folgende Form an:

$$\frac{(\lambda - r_{12}\eta) \cos \vartheta_{12} + (\mu + r_{12}\xi) \sin \vartheta_{12}}{\xi \cos \vartheta_{12} + \eta \sin \vartheta_{12}} - \frac{(\lambda + r_{12}\eta) \cos \vartheta_{12} - (\mu - r_{12}\xi) \sin \vartheta_{12}}{\xi \cos \vartheta_{12} - \eta \sin \vartheta_{12}} = a,$$

oder mit Ausschluss der Schraubenachsen, welche der Gleichung

$$\xi^2 \cos^2 \vartheta_{12} - \eta^2 \sin^2 \vartheta_{12} = 0$$

genügen, d.h. zu einer oder der anderen von den Normalen  $n_1, n_2$  senkrecht sind:

$$43) \quad (\lambda\eta - \mu\xi) \sin \vartheta_{12} + 2r_{12}\xi\eta + \xi^2 a \cos^2 \vartheta_{12} - \eta^2 a \sin^2 \vartheta_{12} = 0.$$

Dieser Komplex ist von derselben Art wie der Komplex 39); und aus demselben Grunde sind die Ebenen gleicher Parameterdifferenz seine singulären Ebenen. Die Gleichung einer solchen Ebene bekommt man, wenn man wieder die Ausdrücke 40) einführt und  $\xi, \eta, \zeta$  als konstant betrachtet. Die Gleichung ihrer Hüllfläche finden wir wieder in der Form der Determinante:

$$\begin{vmatrix} 2(a \cos^2 \vartheta_{12} - \sin 2\vartheta_{12} \cdot z), & 2r_{12}, & \sin 2\vartheta_{12} \cdot x \\ 2r_{12}, & -2(a \sin^2 \vartheta_{12} + \sin 2\vartheta_{12} \cdot z), & \sin 2\vartheta_{12} \cdot y \\ \sin 2\vartheta_{12} \cdot x, & \sin 2\vartheta_{12} \cdot y, & 0 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\sin 2\vartheta_{12} \cdot (x^2 + y^2)z + 2r_{12}xy + a \cos^2 \vartheta_{12} \cdot x^2 - a \sin^2 \vartheta_{12} \cdot y^2 = 0.$$

Durch eine Koordinatentransformation

$$x = x' \cos \alpha \cdot y' \sin \alpha, \quad y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha, \quad z = z' + h,$$

wo

$$44) \quad h = \frac{a}{2} \cotg 2\vartheta_{12}, \quad \tg 2\alpha = -\frac{a}{2r_{12}}$$

ist, nimmt die Gleichung der Fläche die Form

$$45) \quad \sin 2\vartheta_{12} \cdot (x'^2 + y'^2)z' + \sqrt{4r_{12}^2 + a^2} \cdot x'y' = 0$$

an. Sie ist also auch ein Cylindroid. Da alle Cylindroide ähnlich sind und der Koeffizient  $\sqrt{4r_{12}^2 + a^2}/\sin 2\vartheta_{12}$  die Höhe (die reelle Länge der Doppelgeraden) desselben bestimmt, so finden wir leicht, dass alle Flächen 45) aus der Fläche 42) durch eine Dilatation im Verhältnis  $\sqrt{4r_{12}^2 + a^2}/2r_{12}$  und durch eine Schraubenverschiebung, welche durch die Formeln 44) bestimmt wird, erhalten werden können.

Alles Gesagte zusammenfassend, bekommen wir eine volle und ziemlich anschauliche Vorstellung von dem ganzen Systeme möglicher Schraubengeschwindigkeiten eines festen Körpers, welcher sich auf zwei Flächen stützt, von denselben sich aber auch entfernen kann.

## II. Das System dreier Grenzebenen erster Art.

12. Bei einem festen Körper, welcher sich auf drei Flächen stützt, muss man zwei verschiedene Gruppen von möglichen Schraubenaxen unterscheiden\*, je nach den Richtungen derselben. Die Axen der ersten Gruppen bilden nur stumpfe oder nur spitze Winkel mit den positiven Richtungen der Stütznormalen; jede Gerade einer solchen Richtung erscheint dann als eine mögliche Schraubenaxe. Der anderen Gruppe gehören alle übrigen Geraden an, von welchen aber schon nicht alle die möglichen Schraubenaxen darstellen [§§ 11, 12 und 13].

Die drei Grenzebenen erster Art  $S_{23}, S_{31}, S_{12}$ , welche im Falle von drei Stützflächen bei jedem gegebenen Parallelenbündel von Geraden

\* In meiner im § 1 zitierten Arbeit werden diese Schraubenaxen in vier Gruppen geteilt, was jetzt aber unnötig ist.

denkbar sind, können als echte oder als unechte Grenzebenen erscheinen. Da für eine echte Grenzebene nötig ist, dass die gegebene Axenrichtung mit der einen von zwei Stütznormalen einen spitzen und mit der anderen einen stumpfen Winkel bildet, so haben wir bei den Schraubenaxen erster Gruppe nur unechte Grenzebenen; bei den Axen der zweiten Gruppe aber sind zwei von den Grenzebenen echte und die dritte eine unechte.

Unabhängig von der Richtung, welche die drei Grenzebenen bestimmt, haben dieselben folgende Haupteigenschaften.

1. Drei Grenzebenen  $S_{kl}, S_{li}, S_{ik}$ , welche von drei Stützflächen  $\Sigma_i, \Sigma_k, \Sigma_l$  abhängen, schneiden sich immer in einer Geraden  $\sigma_{ikl}$ , die der gegebenen Richtung der Schraubenaxen parallel ist; denn die Gerade, welche der Bedingung

$$46) \quad \delta_i \operatorname{tg} \varphi_i = \delta_k \operatorname{tg} \varphi_k = \delta_l \operatorname{tg} \varphi_l$$

genügt, gehört allen drei Grenzebenen an.

2. Wenn man eine Stützfläche  $\Sigma_i$  und die entsprechende Fläche des festen Körpers so abändert, dass die Stütznormale  $n_i$  sich selbst parallel bleibt, so bleibt auch jede der beiden Grenzebenen  $S_{li}, S_{ik}$ , welche von der Lage dieser Normale abhängen, sich selbst parallel; denn die Richtungen der Grenzebenen hängen nur von den Richtungen, nicht aber von den Lagen der Stütznormalen ab.

3. Da jede Grenzebene ein Cylindroid berührt (§ 11), so schneiden sich die einer gegebenen Richtung parallelen Tangentialebenen dreier Cylindroide, welche durch die drei paarweise genommenen Stütznormalen bestimmt werden, in einer Geraden  $\sigma_{ikl}$ .

4. Die Gerade  $\sigma_{ikl}$  stellt die Schraubenaxe eines gegebenen Parallelenbündels dar, welche allein möglich wäre, wenn der feste Körper sich von den drei Stützflächen nicht entfernen könnte.

Um die Lage der Geraden  $\sigma_{ikl}$  zu bestimmen, wenn ihre Richtung  $(\xi, \eta, \zeta)$  gegeben ist, wollen wir ihre Momente  $\lambda_{ikl}, \mu_{ikl}, \nu_{ikl}$  berechnen. Der Bedingung 46) gemäss und die Formeln 4), 10) und 24) zur Hilfe nehmend, kann man schreiben:

$$\begin{aligned} (\xi_k q_l - \xi_l q_k) \lambda_{ikl} + (\eta_k q_l - \eta_l q_k) \mu_{ikl} + (\zeta_k q_l - \zeta_l q_k) \nu_{ikl} &= D_{kl}, \\ (\xi_l q_i - \xi_i q_l) \lambda_{ikl} + (\eta_l q_i - \eta_i q_l) \mu_{ikl} + (\zeta_l q_i - \zeta_i q_l) \nu_{ikl} &= D_{li}, \\ (\xi_i q_k - \xi_k q_i) \lambda_{ikl} + (\eta_i q_k - \eta_k q_i) \mu_{ikl} + (\zeta_i q_k - \zeta_k q_i) \nu_{ikl} &= D_{ik}, \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} V_{ikl}(\xi \mu_{ikl} - \eta \nu_{ikl}) &= \xi_i D_{kl} + \xi_k D_{li} + \xi_l D_{ik}, \\ V_{ikl}(\xi \nu_{ikl} - \zeta \lambda_{ikl}) &= \eta_i D_{kl} + \eta_k D_{li} + \eta_l D_{ik}, \\ V_{ikl}(\eta \lambda_{ikl} - \xi \mu_{ikl}) &= \zeta_i D_{kl} + \zeta_k D_{li} + \zeta_l D_{ik}, \end{aligned}$$

wo

$$47) \quad V_{ikl} = \begin{vmatrix} \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \xi_k & \eta_k & \zeta_k \\ \xi_l & \eta_l & \zeta_l \end{vmatrix}$$

ist. Hieraus, die Beziehung

$$\xi \lambda_{ikl} + \eta \mu_{ikl} + \zeta \nu_{ikl} = 0$$

beachtend, finden wir:

$$48) \begin{cases} V_{ikl} \lambda_{ikl} = \eta (\xi_i D_{kl} + \xi_k D_{li} + \xi_l D_{ik}) - \zeta (\eta_i D_{kl} + \eta_k D_{li} + \eta_l D_{ik}), \\ V_{ikl} \mu_{ikl} = \zeta (\xi_i D_{kl} + \xi_k D_{li} + \xi_l D_{ik}) - \xi (\eta_i D_{kl} + \eta_k D_{li} + \eta_l D_{ik}), \\ V_{ikl} \nu_{ikl} = \xi (\eta_i D_{kl} + \eta_k D_{li} + \eta_l D_{ik}) - \eta (\xi_i D_{kl} + \xi_k D_{li} + \xi_l D_{ik}). \end{cases}$$

13. Wir wollen weiter für den Fall von drei Stützflächen nur die Schraubenaxen der zweiten Gruppe im Auge behalten und daher von den drei Grenzebenen  $S'_{23}$ ,  $S'_{31}$ ,  $S'_{12}$  zwei als echte voraussetzen. Ein Paar von Scheitelwinkeln, welche durch diese zwei Ebenen gebildet werden, schliesst alle möglichen Schraubenaxen der gegebenen Richtung ein, wobei der eine Winkel das Gebiet  $(+\omega)$ , der andere das Gebiet  $(-\omega)$  bestimmt [§ 13]. Es ist leicht einzusehen, dass dann die dritte, unechte Grenzebene immer innerhalb dieser beiden Gebiete liegt. Um das zu zeigen, wollen wir für die Richtung des Parallelenbündels von Schraubenaxen einen von den drei hier möglichen Fällen [§ 11] annehmen:

$$49) \quad q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0, \quad q_3 \leq 0.$$

Dann sind  $S'_{23}$  und  $S'_{31}$  echte Grenzebenen. Den Ungleichheiten 49) entsprechend haben wir jetzt für die möglichen Schraubenaxen des Gebietes  $(+\omega)$ :

$$50) \quad \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 \leq p \leq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3,$$

$$51) \quad \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 \leq p \leq \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3,$$

und für das Gebiet  $(-\omega)$  entgegengesetzte Ungleichheitszeichen. In beiden Fällen gehört die Schraubenaxe, für welche

$$\delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2$$

ist, die also in der unechten Grenzebene  $S''_{12}$  liegt, zur Zahl der möglichen Schraubenaxen; die Ebene  $S''_{12}$  geht also durch die Gebiete  $(+\omega)$  und  $(-\omega)$  hindurch.

14. Die relative Grösse des Bereiches möglicher Schraubenaxen gegebener Richtung hängt von der Grösse der Scheitelwinkel ab, welche von den zwei echten Grenzebenen gebildet werden und die möglichen Schraubenaxen einschliessen. Um die Grösse eines solchen Winkels  $\varepsilon_{12}$ , welcher bei Voraussetzung von 49) von den Ebenen  $S'_{23}$  und  $S'_{31}$  gebildet wird, zu finden, beachten wir das im § 5 über das Vorzeichen von  $\varkappa_{12}$  Gesagte. Den Richtungen der Normalen zu den Ebenen  $S'_{23}$ ,  $S'_{31}$ , in dem Gebiet  $(+\omega)$ , entsprechen den Ungleichheiten 50) und 51) gemäss:

$$\varkappa_{23} > 0, \quad \varkappa_{31} < 0;$$

da aber der Winkel zwischen diesen Normalen und der Winkel  $\varepsilon_{12}$  zusammen zwei Rechte bilden, so haben wir:



In den ersten zwei Ausdrücken ist das negative Zeichen gesetzt, weil nach der oben angewandten Regel des § 5 der positive Wert der Wurzel genommen werden muss, die Grösse  $q_3$  aber, durch welche Zähler und Nenner dividiert sind, negativ 49) vorausgesetzt wird.

Für den Punkt  $D$  ergibt sich

$$[\cos \varepsilon_{12}]_{q_1=0, q_2=0} = -q_{12},$$

und in den Punkten  $B$  und  $C$  wird  $\cos \varepsilon_{12}$  unbestimmt. Der wirkliche Wert von  $\cos \varepsilon_{12}$  hängt hier von dem Wege ab, auf welchem wir zu den Punkten  $B$  und  $C$  gelangen. Alle Linien ( $\varepsilon_{12}$ ) gehen also durch die Punkte  $B$  und  $C$  hindurch. Indem wir auf dem Wege  $DC$  von  $D$  nach  $C$  gehen, finden wir für diesen letzteren Punkt:

$$\cos \varepsilon_{12} = -q_{31};$$

auf dem Wege  $DB$ , von  $D$  nach  $B$  gehend, bekommen wir für den Punkt  $B$ :  $\cos \varepsilon_{12} = -q_{23}$ .

Aus den Formeln 52), 53) und 54) sieht man, dass auf den Grenzen eines Gebietes der Parameterkugel zwei von den Grenzebenen zusammenfallen. So z.B. sind im Gebiete  $BDC$ , welches den Bedingungen 49) entspricht, die Ebenen  $S_{13}$  und  $S_{31}$  echte Grenzebenen, und der Winkel zwischen ihnen wird durch die Formel 52) bestimmt. Auf der Seite  $DC$  dieses Dreiecks, für deren Punkte  $q_1 = 0$  ist, finden wir:

$$[\cos \varepsilon_{12}]_{q_1=0} = [\cos \varepsilon_{31}]_{q_1=0}, \quad [\cos \varepsilon_{23}]_{q_1=0} = 1.$$

Somit sehen wir, dass, ungleich die Kurve ( $\varepsilon_{12}$ ), für welche

$$\cos \varepsilon_{12} = a$$

ist, beim Übergange aus dem Gebiete  $BDC$  in das Nachbargebiet  $BED$  auf der Grenze  $DC$  ihre Bedeutung verliert, da die Ebene  $S_{31}$  eine echte Grenzebene zu sein aufhört, — ihre Rolle die Kurve ( $\varepsilon_{31}$ ) übernimmt, für welche  $\cos \varepsilon_{31} = a$  ist und die im Gebiete  $BDC$  keine entsprechende Rolle spielte. Ähnliche Wechselwirkung findet zwischen den Kurven ( $\varepsilon_{12}$ ) und ( $\varepsilon_{23}$ ) beim Übergange über die Grenze  $BD$  statt. Beim Übergange über die Grenze  $BC$  gelangen wir aber schon in das Gebiet der Schraubenaxen erster Gruppe, und dort verlieren alle drei Kurven ( $\varepsilon_{23}$ ), ( $\varepsilon_{31}$ ), ( $\varepsilon_{12}$ ) ihre Bedeutung, da alle drei Ebenen  $S_{23}$ ,  $S_{31}$ ,  $S_{12}$  unechte Grenzebenen werden.

16. Um Platz zu sparen wollen wir nur kurz, ohne Beweise, noch einige Eigenschaften der Winkel  $\varepsilon_{23}$ ,  $\varepsilon_{31}$ ,  $\varepsilon_{12}$  angeben.

Wenn die positiven Richtungen [§ 2] der drei Stütznormalen untereinander nur spitze Winkel bilden, so sind alle drei Winkel  $\varepsilon_{23}$ ,  $\varepsilon_{31}$ ,  $\varepsilon_{12}$  in den entsprechenden Gebieten der Parameterkugel stumpf.

Bei keiner Richtung der Stütznormalen kann ein solcher Winkel in dem ganzen ihm entsprechenden Gebiete spitz sein.

Keiner dieser Winkel kann im Innern eines der Gebiete der Parameterkugel gleich 0 oder  $\pi$  werden.

Maxima und Minima der Werte von  $\epsilon_{23}$ ,  $\epsilon_{31}$ ,  $\epsilon_{12}$  können nur auf den Grenzen der Gebiete der Parameterkugel existieren. Das Vorkommen derselben hängt von den Zeichen der Grössen  $q_{23}$ ,  $q_{31}$ ,  $q_{12}$  einerseits und der Grössen

$$q_{31} q_{12} - q_{23}, \quad q_{12} q_{23} - q_{31}, \quad q_{23} q_{31} - q_{12}$$

anderseits ab.

### III. Die Grenzebene zweiter Art.

17. Die Grenzebenen zweiter Art haben in der Frage der möglichst grossen Beschränkung der Verschiebungen eines starren Körpers und der Festlegung desselben eine sehr wesentliche Bedeutung. Da sie, wie wir gleich sehen werden, von vier Stütznormalen abhängen, so müssen wir uns zu dem Falle von vier Stützflächen wenden, wo diese Grenzebenen zum ersten Male auftreten.

Wir wollen die möglichen Schraubenaxen eines festen Körpers, welcher sich auf vier Flächen stützt, in drei Gruppen teilen.\*

Es mögen zu der ersten Gruppe solche Schraubenaxen gehören, deren Richtungen mit allen vier Stütznormalen nur spitze oder nur stumpfe Winkel bilden. Auf jeder dieser Axen kann der Parameter  $p$  alle Werte bekommen, welche ausserhalb des Intervalles zwischen dem kleinsten und dem grössten von den vier Produkten

$$58) \quad \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1, \quad \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2, \quad \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3, \quad \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$$

liegen, wobei auf jeder dieser Axen, je nach der Grösse des Parameterwertes, die eine und die andere Richtung der Winkelgeschwindigkeit möglich ist [§ 19]. In diesem Falle ist keine von den sechs überhaupt denkbaren Grenzebenen erster Art eine echte.

Zur zweiten Gruppe sollen solche Schraubenaxen gehören, welche mit der einen Stütznormale einen spitzen und mit den anderen drei einen stumpfen Winkel bilden, oder umgekehrt. Jeder Parameterwert liegt zwischen gewissen, im allgemeinen endlichen Grenzen [§ 20]. Alle Axen einer gegebenen Richtung werden durch drei echte Grenzebenen bestimmt und bilden ein geschlossenes oder nicht geschlossenes Prisma.

Die Axen der dritten Gruppe werden dadurch bestimmt, dass sie mit zwei Normalen einen spitzen und mit zwei anderen einen stumpfen Winkel bilden und bei gegebener Richtung durch vier echte Grenzebenen bestimmt werden, wobei die möglichen Parameterwerte wieder zwischen gewissen, im allgemeinen endlichen Grenzen liegen [§ 21].

18. Die Richtungen der Stütznormalen können so gewählt werden, dass alle Schraubenaxen der ersten Gruppe ausbleiben [§ 19]. Für das

\* Siehe die Anmerkung zum § 12.

Folgende ist dieser Umstand sehr wesentlich; wir wollen daher das analytische Merkmal des Verschwindens dieser Axen aufstellen. Die geometrische Bedingung dafür besteht darin [§ 18, S. 165], dass auf der Parameterkugel der negative Endpunkt einer jeden Stütznormalenrichtung innerhalb des sphärischen Dreiecks liegen muss, dessen Ecken durch die positiven Endpunkte anderer drei Normalenrichtungen gebildet werden. Offenbar ist es genügend, wenn diese Bedingung für eine der Normalen erfüllt wird. Solche Richtungen von vier Stütznormalen werden wir die Opposition derselben nennen. Es seien  $n_i, n_k, n_l, n_m$  die vier Stütznormalen und

$$59) \quad V_{klm}, \quad V_{ilm}, \quad V_{ikm}, \quad V_{ikl}$$

Determinanten, welche nach dem Schema 47) gebildet sind; wobei die Reihenfolge der Indices  $i, k, l, m$  immer der Reihenfolge der Zeilen

Fig. 3.

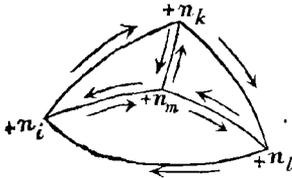
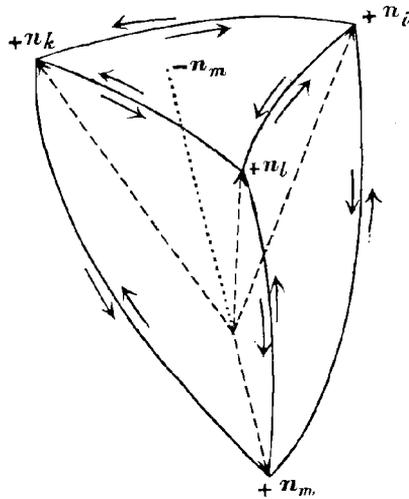


Fig. 4.



in den Determinanten entsprechend genommen werden soll. Den Normalen  $n_i, n_k, n_l$  entspricht auf der Parameterkugel ein sphärisches Dreieck  $(n_i, n_k, n_l)$ . Wenn man auf den Seiten dieses Dreiecks in der Richtung der Uhrzeiger herumgeht und dabei von  $n_i$  nach  $n_k$  und von  $n_k$  nach  $n_l$  gelangt, so ist  $V_{ikl} > 0$ . Fällt nun der positive Endpunkt der Richtung von  $n_m$  in das Gebiet des Dreiecks  $(n_i, n_k, n_l)$ , so haben alle vier Grössen 59) dasselbe Zeichen (Fig. 3), wenn aber der negative Endpunkt von  $n_m$  in diesem Dreiecke liegt, so haben  $V_{klm}, V_{ilm}$  und  $V_{ikm}$  das entgegengesetzte Zeichen von  $V_{ikl}$  (Fig. 4). Da bei einer Permutation von zwei nebeneinander liegenden Indices einer der Grössen 59) das Zeichen derselben geändert wird, so kann man, anstatt

$V_{ikl}$  die Determinante  $-V_{lki}$  nehmend, sagen, dass im Falle der Opposition der vier Stütznormalen alle vier Grössen

$$60) \quad V_{klm}, \quad V_{lim}, \quad V_{ikm}, \quad V_{lki}$$

dasselbe Zeichen haben.

Wenn weder der positive noch der negative Endpunkt von  $n_m$  ins Dreieck  $(n_i, n_k, n_l)$  fällt, so werden weder die Grössen 59) noch die Grössen 60) dasselbe Zeichen haben; das über diese Grössen Gesagte ist also die notwendige und hinreichende Bedingung der Opposition der Normale  $n_m$  gegen die drei anderen. Wenn sie erfüllt ist, so ist sie auch für die anderen Normalen erfüllt; denn es werden dann die in einer Zeile stehenden Grössen

$$61) \quad V_{lmi}, \quad V_{mki}, \quad V_{kli}, \quad V_{mlk}, \quad (n_i)$$

$$62) \quad V_{lmk}, \quad V_{mik}, \quad V_{ilk}, \quad V_{mli}, \quad (n_k)$$

$$63) \quad V_{kmi}, \quad V_{mil}, \quad V_{ikl}, \quad V_{mki}, \quad (n_l)$$

auch gleiche Zeichen haben.

19. Einem Systeme von vier Stütznormalen  $n_i, n_k, n_l, n_m$  entspricht eine Ebene  $P_{iklm}$ , welche wir die Grenzebene zweiter Art nennen werden. Sie soll durch das Zentrum der Parameterkugel gelegt werden und hat zu ihrer Gleichung

$$64) \quad L_{iklm}x + M_{iklm}y + N_{iklm}z = 0,$$

wo

$$65) \quad \left\{ \begin{array}{l} L_{iklm} = \begin{vmatrix} \lambda_i & \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \lambda_k & \xi_k & \eta_k & \zeta_k \\ \lambda_l & \xi_l & \eta_l & \zeta_l \\ \lambda_m & \xi_m & \eta_m & \zeta_m \end{vmatrix}, \quad M_{iklm} = \begin{vmatrix} \mu_i & \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \mu_k & \xi_k & \eta_k & \zeta_k \\ \mu_l & \xi_l & \eta_l & \zeta_l \\ \mu_m & \xi_m & \eta_m & \zeta_m \end{vmatrix}, \\ N_{iklm} = \begin{vmatrix} \nu_i & \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \nu_k & \xi_k & \eta_k & \zeta_k \\ \nu_l & \xi_l & \eta_l & \zeta_l \\ \nu_m & \xi_m & \eta_m & \zeta_m \end{vmatrix} \end{array} \right\},$$

sind. Unten werden wir sehen, dass diese Ebene eine besonders wichtige Rolle im Falle der Opposition von vier Normalen spielt; wir werden sie dann die echte Grenzebene zweiter Art nennen und für sie das Symbol  $P'_{iklm}$  gebrauchen. Wenn die vier Stütznormalen sich nicht in Opposition befinden, so werden wir diese Ebene eine unechte Grenzebene zweiter Art nennen und sie mit dem Symbole  $P''_{iklm}$  bezeichnen.

Unabhängig von der Rolle, welche die Ebene  $P_{iklm}$  im weiteren spielen wird, hat sie folgende kinematische Bedeutung. Wenn der feste Körper sich von den Stützflächen  $\Sigma_i, \Sigma_k, \Sigma_l, \Sigma_m$  nicht entfernen kann, so besitzt er zwei Freiheitsgrade, so dass alle seine möglichen Schraubenachsen ein Cylindroid bilden. Es seien  $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$  die Ko-

ordinaten und  $p$  der Parameter einer seiner Schrauben. Da diese Schraube zu denjenigen Schrauben reziprok ist, welche auf den Normalen  $n_i, n_k, n_l, n_m$  liegen und den Parameterwert Null haben, so kann man schreiben:

$$66) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\lambda_i + p \xi_i) \xi + (\mu_i + p \eta_i) \eta + (v_i + p \zeta_i) \zeta \\ \quad + \xi_i \lambda + \eta_i \mu + \zeta_i \nu = 0, \\ (\lambda_k + p \xi_k) \xi + (\mu_k + p \eta_k) \eta + (v_k + p \zeta_k) \zeta \\ \quad + \xi_k \lambda + \eta_k \mu + \zeta_k \nu = 0, \\ (\lambda_l + p \xi_l) \xi + (\mu_l + p \eta_l) \eta + (v_l + p \zeta_l) \zeta \\ \quad + \xi_l \lambda + \eta_l \mu + \zeta_l \nu = 0, \\ (\lambda_m + p \xi_m) \xi + (\mu_m + p \eta_m) \eta + (v_m + p \zeta_m) \zeta \\ \quad + \xi_m \lambda + \eta_m \mu + \zeta_m \nu = 0. \end{array} \right.$$

Durch Elimination von  $\lambda, \mu, \nu$  erhalten wir hieraus eine Gleichung für  $\xi, \eta, \zeta$  in Form einer Determinante, welche nach einigen einfachen Transformationen die Form des ersten Teiles der Gleichung 64) bekommt. Somit ist die Grenzebene zweiter Art allen Geraden des Cylindroids parallel, welcher die möglichen Schraubenaxen enthielte, wenn die Berührung des festen Körpers mit den vier Stützflächen obligatorisch wäre.

Wir wollen jetzt wieder annehmen, dass der feste Körper sich auf vier Flächen nur stützt. Wenn wir aus den paarweise genommenen Gleichungen 66)  $p$  eliminieren und die Ausdrücke für  $\lambda, \mu, \nu$  nach den Formeln 1) einführen, so bekommen wir die Gleichungen der sechs Grenzebenen erster Art, welche der gegebenen Axenrichtung  $(\xi, \eta, \zeta)$  entsprechen. Wenn diese Richtung der Bedingung 64) genügt, so existiert eine Schraubenaxe ( $p$ ), welche zugleich in allen diesen sechs Ebenen enthalten ist. Hieraus sehen wir, dass bei einer Richtung von Schraubenaxen, welche der Grenzebene zweiter Art parallel ist, alle sechs dieser Richtung entsprechenden Grenzebenen erster Art sich in einer Geraden schneiden. Unten (§ 22) werden wir zu demselben Resultate auf einem anderen Wege gelangen.

20. Die Gebiete möglicher Schraubenaxen von gegebener Richtung haben im Falle von vier Stützflächen folgende Eigenschaften. Wenn die Stütznormalen sich nicht in Opposition befinden, so ist das Gebiet der möglichen Schraubenaxen eines gegebenen Parallelenbündels bei keiner Richtung desselben geschlossen; sind aber die Stütznormalen in Opposition, so bilden alle solche Gebiete geschlossene Prismen. Um das zu zeigen, bemerken wir, dass diese oder jene Form des Gebietes nicht von der gegenseitigen Lage der Stütznormalen, sondern nur von ihren Richtungen abhängt. Das folgt aus der geometrischen Definition der Grenzebenen erster Art, nach welcher ihre Richtung nur von den Winkeln abhängt, welche zwei Stütznormalen mit der gegebenen Schraubenaxenrichtung bilden. Wenn nun die Stützflächen

und die entsprechenden Flächen des festen Körpers so abgeändert werden, dass die Stütznormalen sich selbst parallel bleiben, so bleibt ein nicht geschlossenes prismatisches Gebiet möglicher Schraubenaxen immer nicht geschlossen. Dagegen bleibt ein geschlossenes Gebiet immer geschlossen; es kann bei paralleler Verschiebung der Grenzebenen erster Art in eine Gerade zusammenschrumpfen und dann aus einem Gebiete  $(+ \omega)$  sich in ein Gebiet  $(- \omega)$  verwandeln oder umgekehrt, wird aber immer ein geschlossenes Prisma bilden.

Um also zu sehen, ob ein Gebiet geschlossen ist oder nicht, kann man dieses bei einer speziellen Lage der sich parallel bleibenden Stütznormalen betrachten. Die Antwort findet man aber leicht, wenn die Stütznormalen sich in einem Punkte schneiden. Wenn diese Normalen sich nicht in Opposition befinden, so kann man durch den Schnittpunkt der Normalen eine solche Ebene ziehen, dass die positiven Endpunkte aller Normalen auf einer Seite derselben sein werden. Um alle Axen, welche in dieser Ebene liegen, sind offenbar Drehungen möglich; es sind um dieselben natürlich auch andere Schraubenverschiebungen möglich, wenn die entsprechenden Parameter gewisse Bedingungen erfüllen. Jedenfalls sehen wir, dass dann auch unendlich entfernte Schraubenaxen möglich sind. Wenn aber die sich schneidenden Stütznormalen in Opposition sind, so sind für den festen Körper nur Drehungen möglich und zwar nur um solche Axen, welche durch den Schnittpunkt der Normalen gehen; d. h. für jede Axenrichtung zieht sich das prismatische Gebiet in eine Gerade zusammen. Daraus kann man schliessen, dass bei irgend einer anderen Lage der Stütznormalen, wenn nur dieselben in Opposition liegen, die prismatischen Gebiete geschlossen bleiben.

Damit in einem jeden Parallelenbündel die möglichen Schraubenaxen ein geschlossenes Prisma bilden, ist es notwendig und hinreichend, dass die vier Stütznormalen in Opposition liegen.

Da wir hauptsächlich die Frage über möglichst grosse Beschränkungen der Verschiebungen eines festen Körpers im Auge behalten, so wollen wir weiter die Opposition der vier Stütznormalen voraussetzen.

21. Bei dieser Voraussetzung werden keine Schraubenaxen erster Ordnung existieren; die zweite und die dritte Gruppe derselben müssen wir aber genauer betrachten, um die Bedeutung der Grenzebene zweiter Art für dieselben klar zu machen. Die Schraubenaxen der zweiten Gruppe, die einem Parallelenbündel angehören, werden, wie wir oben gesehen haben, von drei Grenzebenen erster Art in ein dreikantiges Prisma eingeschlossen, wobei die Winkelgeschwindigkeit der Schraubenverschiebung nur eine Richtung,  $(+ \omega)$  oder  $(- \omega)$ , haben kann. Wir wollen zeigen, dass das Erscheinen dieser oder jener von diesen Richtungen von der Lage des die gegebene Axenrichtung bestimmenden Punktes auf der Parameterkugel auf solche Weise abhängt, dass den

Punkten, welche auf der einen Seite der Grenzebene zweiter Art liegen, die Drehung  $(+\omega)$ , denen auf der anderen Seite dieser Ebene die Drehung  $(-\omega)$  entspricht. — Von den vier Kombinationen der Ungleichheitszeichen für  $q_1, q_2, q_3, q_4$  [§ 18], ist es genügend, nur eine zu betrachten; wir nehmen:

$$67) \quad q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0, \quad q_3 \geq 0, \quad q_4 \leq 0.$$

Dann sind  $S'_{14}, S'_{24}, S'_{34}$  echte Grenzebenen erster Art, welche sich paarweise in den Geraden  $\sigma_{234}, \sigma_{314}, \sigma_{124}$  schneiden (§ 12). Im Falle, dass die möglichen Schrauben das Gebiet  $(+\omega)$  bilden, muss jede dieser Geraden auch in Bezug auf die nicht durch dieselbe hindurchgehende echte Grenzebene erster Art im Gebiete  $(+\omega)$  (§ 4) liegen, z. B. muss die Gerade  $\sigma_{234}$  sich auf derjenigen Seite von  $S'_{14}$  befinden, welcher das Gebiet  $(+\omega)$  entspricht, wenn nur die zwei Stützflächen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_4$  in Betracht genommen werden. Ebenso, wenn das dreikantige Prisma das Gebiet  $(-\omega)$  enthält, so muss jede der drei Geraden  $\sigma_{234}, \sigma_{314}, \sigma_{124}$  in Bezug auf eine der Grenzebenen erster Art, welche diese Gerade nicht enthält, im Gebiete  $(-\omega)$  liegen. Somit besteht die Aufgabe in der Bestimmung des Zeichens für den ersten Teil der Gleichungen jeder der Ebenen  $S'_{14}, S'_{24}, S'_{34}$ , wenn darin die Koordinaten entsprechender Geraden  $\sigma_{234}, \sigma_{314}, \sigma_{124}$  eingesetzt werden. Für diese Koordinaten haben wir, ausser den die Richtung der Schraubenachsen bestimmenden Koordinaten  $\xi, \eta, \zeta$ , Ausdrücke, welche dem Schema 48) nachgebildet werden müssen. Der erste Teil der Gleichung für  $S'_{14}$  kann nach den Formeln des § 3 so geschrieben werden:

$$S'_{14} = (\xi_4 q_1 - \xi_1 q_4) \lambda + (\eta_4 q_1 - \eta_1 q_4) \mu + (\zeta_4 q_1 - \zeta_1 q_4) \nu + D_{14}.$$

Indem man hier die Momente der Geraden  $\sigma_{234}$ , welche aus den Formeln

$$V_{234} \lambda_{234} = (\eta \xi_2 - \xi \eta_2) D_{34} + (\eta \xi_3 - \xi \eta_3) D_{42} + (\eta \xi_4 - \xi \eta_4) D_{23},$$

$$V_{234} \mu_{234} = (\xi \xi_2 - \xi \xi_2) D_{34} + (\xi \xi_3 - \xi \xi_3) D_{42} + (\xi \xi_4 - \xi \xi_4) D_{23},$$

$$V_{234} \nu_{234} = (\xi \eta_2 - \eta \xi_2) D_{34} + (\xi \eta_3 - \eta \xi_3) D_{42} + (\xi \eta_4 - \eta \xi_4) D_{23},$$

bestimmt werden, eingesetzt und das Resultat mit  $(S'_{14})_{234}$  bezeichnet, bekommt man:

$$68) \quad \left\{ \begin{aligned} V_{234} (S'_{14})_{234} &= (q_1 V_{402} - q_4 V_{102}) D_{34} + (q_1 V_{403} - q_4 V_{103}) D_{42} \\ &\quad - q_4 V_{104} D_{23} + V_{234} D_{14}, \end{aligned} \right.$$

wo

$$V_{0ik} = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ \xi_k & \eta_k & \zeta_k \end{vmatrix}$$

bedeutet. Weiter haben wir die Identität:

$$69) \quad q_i V_{0ki} + q_k V_{0ii} + q_l V_{0ik} = V_{ikl}.$$

Es ist nämlich

$$70) \quad q_i V_{0ki} + q_k V_{0li} + q_l V_{0ik} = - \begin{vmatrix} 0 & \xi & \eta & \zeta \\ q_i & \xi_i & \eta_i & \zeta_i \\ q_k & \xi_k & \eta_k & \zeta_k \\ q_l & \xi_l & \eta_l & \zeta_l \end{vmatrix},$$

was durch einfache Determinantentransformation auf den Ausdruck  $V_{i ki}$  zurückgeführt werden kann. Die Formel 69) benutzend, kann man schreiben:

$$\begin{aligned} q_1 V_{402} - q_4 V_{102} &= V_{124} - q_2 V_{041}, \\ q^1 V_{403} - q_4 V_{103} &= V_{134} - q_3 V_{041}. \end{aligned}$$

Wenn man dieses in 68) einsetzt und den Zeichenwechsel, welcher von der Permutation der Indices abhängt (§ 18), beachtet, so erhält man

$$V_{234}(S'_{14})_{234} = V_{234} D_{14} + V_{314} D_{24} + V_{124} D_{34} - V_{041}(q_1 D_{34} + q_3 D_{42} + q_4 D_{23}).$$

Die Formel 10) giebt:

$$q_i D_{ki} + q_k D_{li} + q_l D_{ik} = 0;$$

also

$$71) \quad (S'_{14})_{234} = \frac{V_{234} D_{14} + V_{314} D_{24} + V_{124} D_{34}}{V_{234}}.$$

Die Formel 10) wieder benutzend, kann man schreiben:

$$\begin{aligned} &V_{234} D_{14} + V_{314} D_{24} + V_{124} D_{34} \\ &= (\lambda_4 \xi + \mu_4 \eta + \nu_4 \zeta) \begin{vmatrix} q_1 & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ q_2 & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ q_3 & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ 0 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix} - q_4 \begin{vmatrix} (\lambda_1 \xi + \mu_1 \eta + \nu_1 \zeta) & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ (\lambda_2 \xi + \mu_2 \eta + \nu_2 \zeta) & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ (\lambda_3 \xi + \mu_3 \eta + \nu_3 \zeta) & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ 0 & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Indem wir die erste dieser Determinanten der Determinante 70) ähnlich transformieren, finden wir, dass sie  $q_4 V_{123}$  gleich ist. Also

$$V_{234} D_{14} + V_{314} D_{24} + V_{124} D_{34} = - q_4 \begin{vmatrix} \lambda_1 \xi + \mu_1 \eta + \nu_1 \zeta & \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1 \\ \lambda_2 \xi + \mu_2 \eta + \nu_2 \zeta & \xi_2 & \eta_2 & \zeta_2 \\ \lambda_3 \xi + \mu_3 \eta + \nu_3 \zeta & \xi_3 & \eta_3 & \zeta_3 \\ \lambda_4 \xi + \mu_4 \eta + \nu_4 \zeta & \xi_4 & \eta_4 & \zeta_4 \end{vmatrix}.$$

Daher erhalten wir schliesslich:

$$72) \quad (S'_{14})_{234} = - \frac{q_4}{V_{234}} (L_{1234} \xi + M_{1234} \eta + N_{1234} \zeta) + - \frac{q_4}{V_{234}} P'_{1234},$$

wo  $L_{1234}$ ,  $M_{1234}$ ,  $N_{1234}$  nach dem Schema 65) gebildet sind. Um die analogen Ausdrücke für  $\sigma_{314}$  und  $\sigma_{124}$  zu bekommen, muss man nur beachten, dass der Index  $\binom{4}{\quad}$  seinen Platz nicht ändert, die ersten drei Indices aber eine cirkuläre Permutation erleiden. Die Koeffizienten von  $P'_{1234}$  bleiben dabei ungeändert; somit bekommen wir:

$$73) \quad (S'_{24})_{314} = - \frac{q_4}{V_{314}} P'_{1234},$$

$$74) \quad (S'_{34})_{124} = - \frac{q_4}{V_{124}} P'_{1234}.$$

Überhaupt ist es nützlich, folgende allgemeine Formel sich zu merken:

$$75) \quad (S'_{ik})_{klm} = - \frac{q_k}{V_{klm}} P'_{iklm};$$

und darauf zu achten, dass die Vertauschung der Indices ( $i$ ) und ( $k$ ) die Änderung des Zeichens nach sich zieht, d. h.

$$76) \quad (S'_{ik})_{klm} = - (S'_{ki})_{klm},$$

weil dabei die Zeichen aller Glieder in  $P'_{iklm}$  wechseln; während die Vertauschung der Indices ( $k$ ), ( $l$ ) und ( $m$ ) keinen Einfluss auf das Vorzeichen von  $(S'_{ik})_{klm}$  ausübt, da dabei die Zeichen der beiden Grössen  $V_{klm}$  und  $P'_{iklm}$  wechseln. Das ist übrigens auch selbstverständlich, da die genannten Indices nur die Gerade  $\sigma_{klm}$  angeben, deren Lage von der Reihenfolge dieser Indices nicht abhängt.

Zu unserer Aufgabe zurückkehrend, können wir jetzt das Merkmal 60) für die Opposition der Stütznormalen benutzen; danach haben die Grössen

$$77) \quad V_{234}, \quad V_{314}, \quad V_{124}, \quad V_{321}$$

dasselbe Zeichen; es hängt daher nur von dem Zeichen von  $P'_{1234}$  ab, ob das Gebiet ( $+\omega$ ) oder ( $-\omega$ ) erscheint, was zu beweisen war.

Man kann sich jetzt leicht überzeugen, dass die Ebene

$$78) \quad P'_{1234} = 0$$

dieselbe Rolle auch in anderen Fällen der Schraubenaxen zweiter Gruppe spielt, d. h., wenn ihre Richtungen einem der drei Systeme von Ungleichheiten:

$$79) \quad q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0, \quad q_4 \geq 0, \quad q_3 \leq 0,$$

$$80) \quad q_1 \geq 0, \quad q_3 \geq 0, \quad q_4 \geq 0, \quad q_2 \leq 0,$$

$$81) \quad q_2 \geq 0, \quad q_3 \geq 0, \quad q_4 \geq 0, \quad q_1 \leq 0,$$

oder den ihnen entgegengesetzten genügen. Dazu braucht man nur das am Schlusse des § 18 Gesagte zu beachten. Z. B. bei den Schraubenaxen, welche den Bedingungen 79) entsprechen, tritt die Normale  $n_3$  an Stelle von  $n_4$ ; in den Formeln 72), 73) und 74) wird daher statt  $q_4$  der Cosinus  $q_3$  stehen, und statt  $P'_{1234}$  muss jetzt  $P'_{1243}$  geschrieben werden, was nur zu einem Zeichenwechsel führt. Die Nenner dieser Formeln sind jetzt:

$$V_{243}, \quad V_{413}, \quad V_{123},$$

welche wegen der Opposition der Normalen ein und dasselbe, aber dem früheren entgegengesetzte Zeichen haben.

Ähnliches finden wir in den beiden übrigen Fällen, wo anstatt der ursprünglichen die Grössen:

$$q_2, \quad P'_{1432}, \quad V_{432}, \quad V_{312}, \quad V_{142},$$

$$q_1, \quad P'_{4321}, \quad V_{231}, \quad V_{341}, \quad V_{421},$$

zu setzen sind.

Somit sehen wir, dass in allen Fällen der Axen zweiter Gruppe das Erscheinen der Gebiete ( $+\omega$ ) oder ( $-\omega$ ) ausschliesslich durch das Zeichen von  $P'_{1234}$  bedingt wird. Und zwar müssen, der Formel 27) gemäss, zum Erscheinen des Gebietes ( $+\omega$ ) die Grössen 72), 73), 74) positiv sein; dazu müssen

$$P'_{1234}, V_{234}, V_{314}, V_{124}, V_{321}$$

dasselbe Zeichen haben. Da aber, wegen der Opposition der Stütznormalen die letzteren vier von diesen Grössen schon dasselbe Zeichen haben, so kann man die genannte Bedingung in allgemeiner Form so aussprechen:

für das Gebiet ( $+\omega$ ):

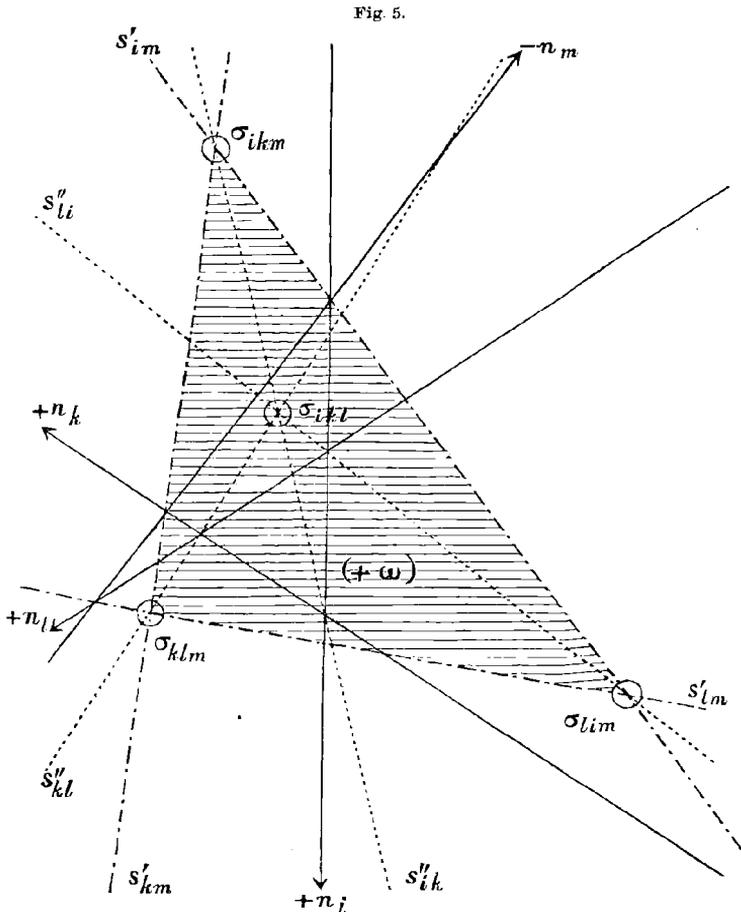
$$82) \quad V_{ikl} P'_{iklm} < 0,$$

für das Gebiet ( $-\omega$ ):

$$83) \quad V_{ikl} P'_{iklm} > 0.$$

**22.** Wir wissen, dass im Falle von drei Stützflächen die drei Grenzebenen erster Art sich in einer Geraden schneiden. Im Falle von vier Stützflächen haben wir für die Axen der zweiten Gruppe drei echte Grenzebenen erster Art,  $S'_{im} S'_{kl} S'_{lm}$  und drei unechte Grenzebenen  $S''_{kl}, S''_{li}, S''_{ik}$ . Wir wollen sehen, welche Lage diese drei letzteren Ebenen haben. Zu diesem Zwecke machen wir auf einer zu dem gegebenen Parallelenbündel von Schraubenaxen senkrechten Ebene die Abbildung des möglichen Axengebietes nach den Regeln von [§ 7]. Im betrachteten Falle stellt sich dieses Gebiet als ein Dreieck dar, dessen Seiten von den Spuren  $s'_{im}, s'_{km}, s'_{lm}$  dreier echten Grenzebenen erster Art gebildet werden. Die Ecken dieses Dreiecks sind die Spuren der Geraden  $\sigma_{klm}, \sigma_{lim}, \sigma_{ikm}$  (§ 12). Durch diese Ecken gehen auch die Spuren  $s''_{kl}, s''_{li}, s''_{ik}$  (Fig. 5) der drei unechten Grenzebenen. Nach dem im § 12 Gezeigten schneiden sich diese Geraden in einem Punkte  $\sigma_{ikl}$ , welcher notwendig im Innern des Dreiecks liegt; denn die unechte Grenzebene liegt (§ 13) immer in demjenigen Paare der von zwei echten Grenzebenen gebildeten Scheitelwinkel, welches das Gebiet möglicher Schraubenaxen enthält. Es soll die Gerade  $\sigma_{ikl}$  die Centralaxe der gegebenen Richtung genannt werden. Sie hat folgende Eigenschaft. Wenn man die Normale  $n_m$ , d. h. diejenige, welche auf die Lage aller drei echten Grenzebenen Einfluss hat, parallel verschiebt, so rücken auch die Ebenen  $S'_{im}, S'_{km}, S'_{lm}$ , sich selbst parallel bleibend fort (§ 20). Das Dreieck, welches das mögliche Axengebiet bestimmt, bleibt also sich selbst ähnlich; es kann dabei in einen Punkt zusammenschrumpfen; und wenn das geschieht, so fallen die Ecken des Dreiecks mit der Spur der Geraden  $\sigma_{ikl}$  zusammen. Wenn also alle sechs Grenzebenen erster Art sich in einer Geraden schneiden, so haben sie zur Schnittlinie die Centralaxe der gegebenen Richtung.

Wenn die Lagen der Stütznormalen willkürlich gegeben sind, so schneiden sich alle sechs Ebenen in einer Geraden nur bei solchen Richtungen der Schraubenaxen, für welche die Grössen 72), 73), 74) und die ihnen ähnlichen den anderen Fällen der Schraubenaxen zweiter



Gruppe entsprechenden und statt  $q_4$  die Faktoren  $q_1, q_2, q_3$  enthaltenden Grössen gleich Null werden. Wenn keine der Grössen  $q_1, q_2, q_3, q_4$  gleich Null ist, so muss die Bedingung 78) erfüllt werden, d.h. die Axenrichtungen müssen der Grenzebene zweiter Art parallel sein. Andererseits werden für die Schnittgerade der sechs Grenzebenen erster Art alle vier Grössen 58) einander gleich; diese Gerade stellt also eine Schraubenaxe dar, welche für den festen Körper möglich wäre, wenn er sich von vier Stützflächen nicht entfernen könnte. Daraus schliessen wir: Alle Axenrichtungen, für welche die sechs Grenzebenen erster Art sich in einer Geraden schneiden, sind der Grenz-

ebene zweiter Art parallel, und die Schnittgeraden gehören einem Cylindroid an.

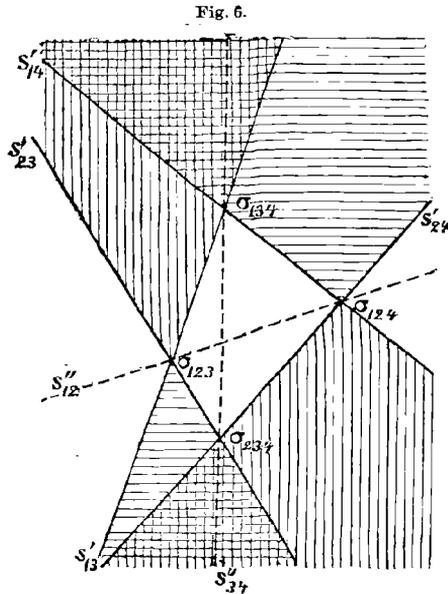
Offenbar ist dieser Schluss auch für die Schraubenaxen der dritten Gruppe richtig, zu deren Betrachtung wir jetzt übergehen.

**23.** Die Schraubenaxen der dritten Gruppe werden durch vier echte Grenzebenen bestimmt (§ 17). Die Opposition der Stütznormalen voraussetzend, können wir von Anfang an annehmen, dass jedes Gebiet möglicher Schraubenaxen einer gegebenen Richtung ein geschlossenes Prisma bildet. Von den Fällen, welche jetzt die Zeichen von  $q_1, q_2, q_3, q_4$  betreffen, werden wir den Fall betrachten, welcher den Ungleichheiten

$$q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0, \quad q_3 \leq 0, \quad q_4 \leq 0,$$

oder den umgekehrten entspricht. Dann sind  $S'_{13}, S'_{23}, S'_{14}, S'_{24}$  echte Grenzebenen erster Art. Im allgemeinen kann man sich

hier folgende drei Fälle vorstellen: 1. das Erscheinen eines geschlossenen Gebietes  $(+\omega)$  [Fig. 40], oder 2. eines geschlossenen Gebietes  $(-\omega)$  [Fig. 41] oder 3. vollkommenes Verschwinden möglicher Axen gegebener Richtung [Fig. 42]. In Wirklichkeit aber, wegen einiger Eigenschaften der Grenzebenen erster Art, ist die letztere Voraussetzung unzulässig\*. Um das zu zeigen, wollen wir die ebene Darstellung der Axengebiete zu Hilfe nehmen. Jedes Paar der Spuren  $(s'_{13}, s'_{23}), (s'_{14}, s'_{24})$  der echten Grenz-



ebenen teilt die ganze Ebene (Fig. 6) in vier Gebiete, welche wir so bezeichnen werden:  $(++)_3, (--)_3, (+-)_3, (-+)_3$  und  $(++)_4, (--)_4, (+-)_4, (-+)_4$ . Hier bedeutet z. B.  $(++)_3$  dasjenige Gebiet zwischen den Geraden  $s'_{13}$  und  $s'_{23}$ , welches in Bezug auf die Grenzebenen  $S'_{13}, S'_{23}$  das Gebiet  $(+)$  ist; ebenso bezeichnet z. B.  $(-+)_4$  dasjenige Gebiet zwischen den Geraden  $s'_{14}$  und  $s'_{24}$ , deren Punkten in Bezug auf die Ebene  $S'_{14}$  das Gebiet  $(-\omega)$  und in Bezug auf die

\* Die entsprechende Stelle in meiner in § 1 zitierten Arbeit [§ 21, S. 169 und 170], wo die Möglichkeit dieses Falles zugelassen wurde, muss geändert werden.

Ebene  $S'_{24}$  das Gebiet  $(+\omega)$  entspricht. Ausserdem ist in Bezug auf jedes Paar der Geraden  $s'_{13}, s'_{23}$ ,  $(s'_{14}, s'_{24})$  das Gebiet  $(+\omega)$  horizontal und das Gebiet  $(-\omega)$  vertikal schraffiert. Da das wirklich mögliche Schraubenaxengebiet nur durch solche Punkte bestimmt wird, welche den beiden Gebieten  $(+\omega)$  oder den beiden Gebieten  $(-\omega)$  gemein sind, so wäre für das vollkommene Verschwinden möglicher Schraubenaxen notwendig und hinreichend, dass die Schenkel der Winkel  $(++)_3$  und  $(++)_4$  sich nicht schneiden; und dasselbe muss auch für die Winkel  $(--)_3$  und  $(--)_4$  erfüllt werden. Dann wird jede der Geraden  $\sigma_{123}, \sigma_{124}, \sigma_{134}, \sigma_{234}$  in Beziehung zu den beiden sie nicht enthaltenden Grenzebenen folgenden Bedingungen genügen: sie wird in Bezug auf eine dieser Grenzebenen im Gebiete  $(+\omega)$  und in Bezug auf die andere Ebene im Gebiete  $(-\omega)$  liegen müssen. Umgekehrt, wenn diese Bedingungen erfüllt wären, so könnten die beiden Gebiete  $(+\omega)$  und  $(-\omega)$  keine gemeinschaftlichen Punkte haben. Man kann aber zeigen, dass die Erfüllung dieser Bedingungen nicht erreichbar ist. Dazu kann man die beiden unechten Grenzebenen  $S''_{12}$  und  $S''_{34}$  benutzen. Sie haben nämlich die Eigenschaft, dass die erstere von ihnen die Geraden  $\sigma_{123}$  und  $\sigma_{124}$  als Schnittlinie der Ebenen  $(S'_{13}, S'_{23})$  und  $(S'_{14}, S_{24})$ , und die andere die Geraden  $\sigma_{134}$  und  $\sigma_{234}$  als Schnittlinien der Ebenen  $(S'_{13}, S'_{14})$  und  $(S'_{23}, S'_{24})$  enthält. Dadurch ist die Lage der Ebenen  $S''_{12}$  und  $S''_{34}$  vollkommen bestimmt; und man bekommt ihre Spuren  $s''_{12}$  und  $s''_{34}$  (Fig. 6), wenn man die Geraden durch  $\sigma_{123}, \sigma_{134}$  und  $\sigma_{134}, \sigma_{234}$  zieht. Wir kennen aber die Eigenschaft der unechten Grenzebene, dass sie in denjenigen von zwei echten Grenzebenen gebildeten Scheitelwinkeln liegt, welche die möglichen Gebiete  $(+\omega)$  und  $(-\omega)$  darstellen; das kann aber nicht erfüllt werden, wenn die echten Grenzebenen eine für das vollkommene Verschwinden möglicher Schraubenaxen notwendige Lage haben. Dieses Verschwinden ist also unmöglich.

Auf dieselbe Weise kann man leicht einschen, dass das mögliche Gebiet von Schraubenaxen dritter Gruppe bei jeder Richtung derselben in ein vierkantiges Prisma eingeschlossen ist, d. h. es können z. B. die Grenzebenen keine solchen Lagen haben, wie es in Fig. 7 gezeichnet ist; denn dann könnten wieder die unechten Grenzebenen nicht die erforderliche Lage haben.

24. Es bleibt uns noch übrig, das Merkmal zu bestimmen, nach welchem man auch für die Schraubenaxen der dritten Gruppe die Gebiete  $(+\omega)$  und  $(-\omega)$  unterscheiden könnte. Die Bezeichnungen von § 21 benutzend, kann man sagen, dass das Gebiet  $(+\omega)$  den Bedingungen

$$(S'_{14})_{123} > 0, \quad (S'_{24})_{123} > 0$$

genügen muss; und das ist nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend, da die anderen zwei Bedingungen

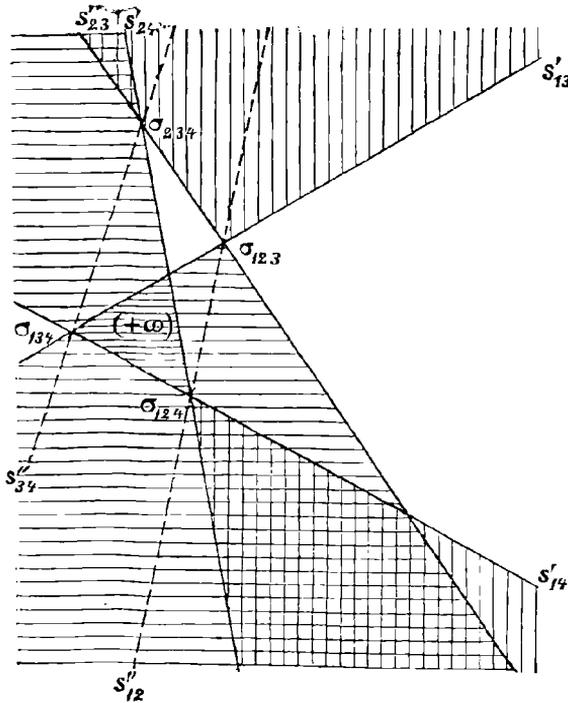
$$(S'_{13})_{124} > 0, \quad (S'_{23})_{124} > 0,$$

von selbst daraus folgen. Nach dem Schema 75) und 76) kann man schreiben:

$$(S'_{14})_{123} = - (S'_{41})_{123} = + \frac{q_1}{V_{123}} P'_{4123} = - \frac{q_1}{V_{123}} P'_{1234},$$

$$(S'_{24})_{123} = - (S'_{42})_{123} = - (S'_{42})_{213} = + \frac{q_2}{V_{213}} P'_{4213} = - \frac{q_2}{V_{123}} P'_{1234};$$

Fig. 7.



und wenn  $q_1$  und  $q_2$  positiv vorausgesetzt werden, finden wir für das Gebiet  $(+\omega)$

$$V_{123} \cdot P'_{1234} < 0,$$

und überhaupt für alle Schraubenachsen der dritten Gruppe:

$$V_{ikl} \cdot P'_{iklm} < 0,$$

und für das Gebiet  $(-\omega)$  das entgegengesetzte Ungleichheitszeichen.

Somit sehen wir, dass das Merkmal, welches die Formeln 82) und 83) aussprechen, auf alle Schraubenachsen anwendbar ist, wenn der feste Körper sich auf vier Flächen stützt und die Stütznormalen sich in Opposition befinden.

25. Alles in diesem Kapitel zusammenfassend, haben wir für den Fall von vier Stützflächen folgende Resultate.

Den vier Stütznormalen kann man solche Richtungen geben (Opposition), dass in jedem Parallelenbündel von Geraden die möglichen Schraubenaxen ein geschlossenes prismatisches Gebiet bilden, welches durch drei oder durch vier Grenzebenen erster Art umgeben ist.

In jedem solchen Gebiete hat die Winkelgeschwindigkeit der Schraubenverschiebung nur eine Richtung und die Parameterwerte sind in gewisse im allgemeinen endliche, für verschiedene Axen übrigen verschiedene Grenzen eingeschlossen.

Auf der Parameterkugel sind die Richtungen ( $+\omega$ ) von den Richtungen ( $-\omega$ ) durch die Grenzebene zweiter Art getrennt.

Die Richtung der Grenzebene zweiter Art hängt nicht nur von den Richtungen, sondern auch von den gegenseitigen Lagen der vier Stütznormalen ab.

Im Falle von vier Stützflächen giebt es keine solchen Parallelenbündel, in welchen keine Gerade eine mögliche Schraubenaxe darstellen könnte.

Es giebt solche Richtungen, nach welchen nur eine Schraubenaxe mit einem bestimmten Parameterwerte möglich ist. Alle solche Schraubenaxen sind der Grenzebene zweiter Art parallel und gehören einem Cylindroid an, das durch zwei solche Schrauben bestimmt wird, welche die zwei Transversalen der vier Stütznormalen sind und den Parameterwert Null haben.

Wenn die Stütznormalen nicht in Opposition sind, so kann man sich eine unechte Grenzebene zweiter Art als solche Ebene vorstellen, dass für alle ihr parallele Richtungen der Schraubenaxen die sechs Grenzebenen erster Art sich in einer Geraden schneiden. Diese Ebene wird später auch eine wichtige Rolle spielen.

#### IV. Grenzebenen zweiter Art bei fünf Stützflächen.

26. Die kleinste Zahl von Stützflächen, bei welcher die möglichen Schraubenaxen nicht jede beliebige Richtung haben können, ist fünf. Dieser Fall ist daher für das Endziel der ganzen Untersuchung wichtig.

Wir werden wieder drei Gruppen von Schraubenaxen, je nach den Zeichen von

$$84) \quad q_1, q_2, q_3, q_4, q_5,$$

unterscheiden. Für die Axen der ersten Gruppe haben alle diese Grössen gleiche Zeichen; für die Axen der zweiten Gruppe haben vier und für die Axen der dritten Gruppe drei von denselben gleiche Zeichen.

Wir werden weiter voraussetzen, dass vier von den Stütznormalen in Opposition sind, so dass alle Schraubenaxen der ersten Gruppe verschwinden (§ 18).

Im ganzen kann man sich fünf Grenzebenen zweiter Art vorstellen, indem man jedesmal vier von den fünf Stütznormalen miteinander verbindet; es sind aber nur zwei von diesen Ebenen echte Grenzebenen. Sind nämlich die Normalen  $n_1, n_2, n_3, n_4$  in Opposition und  $P'_{1234}$  die ihnen entsprechende Grenzebene zweiter Art, so wird die fünfte Normale,  $n_5$ , nur mit bestimmten drei von den ersten Normalen in Opposition sein und eine zweite Grenzebene zweiter Art bestimmen. Um die entsprechenden Normalen auszusuchen, muss man beachten, dass auf der Parameterkugel die positiven Endpunkte der den vier sich in Opposition befindenden Normalen parallelen Durchmesser dieser Kugel die Ecken von vier sphärischen Dreiecken sind, welche die ganze Kugelfläche bedecken. Daher wird der negative Endpunkt des der fünften Normale parallelen Durchmessers notwendig im Innern eines dieser Dreiecke liegen; dann sind die den Ecken desselben entsprechenden Stütznormalen die gesuchten (§ 18). Wir werden weiter annehmen, dass  $n_2, n_3, n_4$  diese Normalen sind, und dem entsprechend die zweite Grenzebene zweiter Art mit  $P'_{2345}$  bezeichnen. Die übrigen drei Grenzebenen können schon der Bedingung der Opposition nicht genügen, sind also unechte Grenzebenen zweiter Art und müssen so bezeichnet werden:  $P''_{1235}, P''_{1245}, P''_{1345}$ .

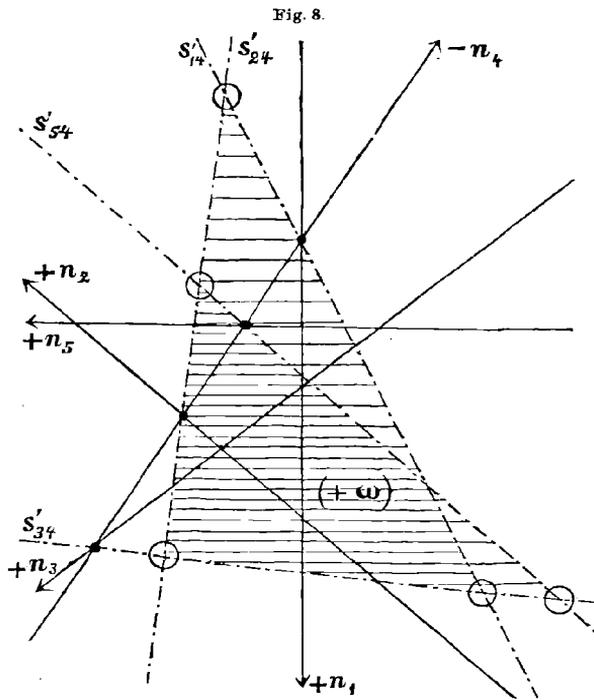
Um unter den fünf Grenzebenen zweiter Art die zwei echten aufzusuchen, wenn die Stütznormalen durch ihre Koordinaten gegeben sind, kann man das im § 18 über die Grössen 60) Gesagte benutzen. Jetzt haben wir nämlich zehn solcher Grössen. Wir stellen dieselben in fünf Gruppen zu vier Elementen nach dem Schema 60) zusammen und wählen solche Gruppen, in welchen die Elemente dasselbe Zeichen haben. Nehmen wir z. B. an, dass die Normalen  $n_1, n_2, n_3, n_4$  in Opposition sind; dann müssen wir die Kombinationen der Normalen  $(n_2, n_3, n_4, n_5), (n_3, n_4, n_1, n_5), (n_4, n_1, n_2, n_5)$  und  $(n_1, n_2, n_3, n_5)$  untersuchen, wobei wir finden werden, dass für die eine derselben die Grössen  $V_{k15}, V_{i15}, V_{ik5}, V_{lki}$  dasselbe Zeichen haben werden. Die dem entsprechende Ebene  $P_{ik15}$  wird die gesuchte echte Grenzebene zweiter Art sein.

27. Im Kapitel III haben wir gesehen, dass eine Grenzebene zweiter Art die Fläche der Parameterkugel in zwei Gebiete,  $(+ \omega)$  und  $(- \omega)$ , teilt. Die beiden Ebenen  $P'_{1234}$  und  $P'_{2345}$  schneiden sich auf der Parameterkugel in einem Durchmesser desselben und teilen die Kugelfläche in vier Gebiete, welche je nach dem Vorzeichen von  $\omega$  so bezeichnet werden können:  $(+ +)$   $(- -)$ ,  $(+ -)$  und  $(- +)$ . Jeden vier in Opposition liegenden Stütznormalen entspricht in einer zur gegebenen Axenrichtung senkrechten Ebene ein geschlossenes drei- oder viereckiges Gebiet, welches die möglichen Schraubenaxen bestimmt und welchem das eine oder das andere Zeichen der Winkelgeschwindigkeit entspricht. Im Falle von fünf Stützflächen erscheint also das mögliche Axengebiet als gemeinsamer Teil von zwei solchen

Drei- oder Vierecken, welchen dasselbe Zeichen von  $\omega$  entspricht. Dieses Gebiet kann also jetzt nur bei solchen Axenrichtungen existieren, welche auf der Parameterkugel durch die Punkte der Gebiete  $(++)$  oder  $(--)$  bestimmt werden. Wir brauchen also nur das Merkmal von § 24 auf jede der Ebenen  $P'_{1234}$ ,  $P'_{2345}$  anzuwenden, um die möglichen Axenrichtungen zu finden.

Wir sehen zugleich, dass mindestens fünf Stützflächen nötig sind, damit die möglichen Schraubenachsen nicht alle Richtungen haben können.

28. Die Bezeichnung  $P'_{1234}$  und  $P'_{2345}$  für die echten Grenzebenen beibehaltend, wollen wir jetzt die Schraubenachsen der zweiten



Gruppe näher betrachten und die Frage beantworten, ob für jede gegebene mögliche Axenrichtung die beiden in ebener Darstellung jetzt dreieckigen (§ 21) Gebiete auch wirklich immer einen gemeinschaftlichen Teil haben. Eine von den Grössen 84) hat jetzt das entgegengesetzte Zeichen von den vier anderen; diese Grösse kann aber weder  $q_1$  noch  $q_5$  sein, denn dann würden die Normalen  $n_1, n_2, n_3, n_4$  oder die Normalen  $n_2, n_3, n_4, n_5$  nicht in Opposition sein, was der Voraussetzung, dass die Ebenen  $P'_{1234}$  und  $P'_{2345}$  echte Grenzebenen sind, widerspricht. Es möge die gegebene Axenrichtung den Bedingungen

$$q_1 \geq 0, \quad q_2 \geq 0, \quad q_3 \geq 0, \quad q_5 > 0$$

$$q_4 \leq 0$$

oder den ihnen entgegengesetzten genügen. Die Grenzebenen erster Art, welche dann die beiden möglichen Axengebiete begrenzen, sind entsprechend:  $S'_{14}, S'_{24}, S'_{34}$  und  $S'_{24}, S'_{34}, S'_{54}$ . Wir sehen, dass die beiden Dreiecke zwei gemeinschaftliche Seiten  $s'_{24}, s'_{34}$  (die Spuren der Ebenen  $S'_{24}, S'_{34}$ ) besitzen. Und da in den beiden Gebieten die Winkelgeschwindigkeit, bei gegebener Axenrichtung, welche auf der Parameterkugel den Gebieten  $(+ +)$  und  $(- -)$  angehört, dieselbe Richtung hat, so sind auch die von den Seiten  $s'_{24}, s'_{34}$  eingeschlossenen Winkel der beiden Dreiecke gemeinsam. Daraus folgt die notwendige Existenz eines gemeinsamen Teiles der beiden Dreiecke (Fig. 8).

29. Bei den Schraubenaxen der dritten Gruppe kann man, nach der Zahl der Kombinationen von Ungleichheiten

$$q_i \geq 0, \quad q_k \geq 0, \quad q_l \geq 0,$$

$$q_m \leq 0, \quad q_n \leq 0,$$

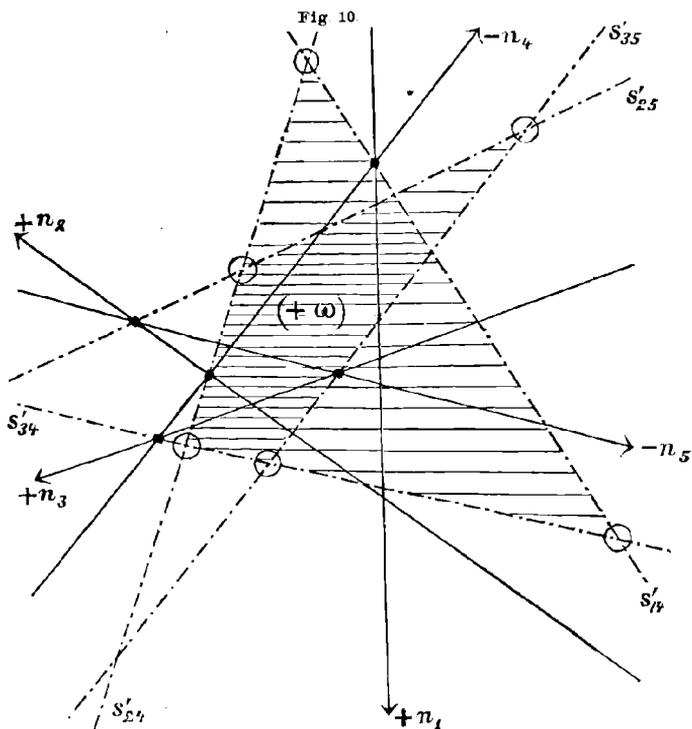
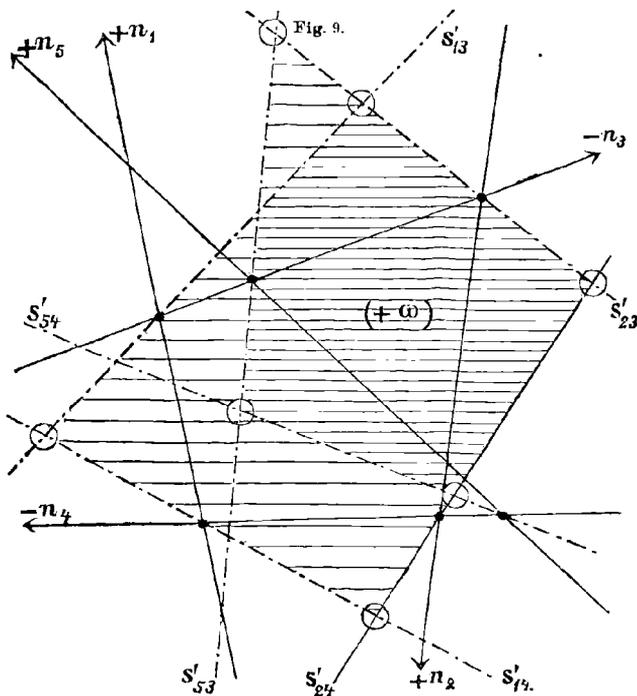
zehn Fälle unterscheiden. Und in Abhängigkeit davon, in welcher Beziehung diese Kombinationen zu den beiden Kombinationen von vier die Opposition bildenden Stütznormalen stehen, kann das mögliche Axengebiet auf dreierlei Weise gebildet werden: es kann in ebener Darstellung als gemeinsamer Teil 1. von zwei Vierecken, 2. von einem Viereck und einem Dreieck und 3. von zwei Dreiecken erscheinen. Der Unterschied in der Bildung des möglichen Axengebietes hängt davon ab, welche von den zehn Grenzebenen erster Art jetzt echte sein werden. Die frühere Voraussetzung, dass  $P'_{1234}$  und  $P'_{2345}$  echte Grenzebenen zweiter Art sind, beibehaltend, finden wir leicht, dass positiven Werten von  $q_1$  und  $q_5$  zwei Vierecke, verschiedenen Zeichen dieser Grössen ein Viereck und ein Dreieck und negativen Werten derselben zwei Dreiecke entsprechen. In der folgenden Tabelle sind alle hier möglichen Fälle zusammengestellt, wobei die echten Grenzebenen erster Art und die Zahlen (III) und (IV) der ihnen entsprechenden Seiten möglicher Axengebiete eingeschrieben sind:

	$q_1 \ q_5$	$q_2 \ q_3 \ q_4$		
1.	+ +	+ - -	$S'_{13} \ S'_{23} \ S'_{14} \ S'_{24}$	IV
			$S'_{23} \ S'_{24} \ S'_{53} \ S'_{54}$	IV
	+ +	- + -	$S'_{12} \ S'_{32} \ S'_{14} \ S'_{34}$	IV
			$S'_{32} \ S'_{34} \ S'_{52} \ S'_{54}$	IV
	+ +	- - +	$S'_{12} \ S'_{42} \ S'_{13} \ S'_{43}$	IV
			$S'_{42} \ S'_{43} \ S'_{52} \ S'_{53}$	IV

	$q_1 q_5$	$q_2 q_3 q_4$		
2.	+ -	+ + -	$S'_{14}$ $S'_{24}$ $S'_{34}$	III
			$S'_{24}$ $S'_{34}$ $S'_{25}$ $S'_{35}$	IV
	+ -	+ - +	$S'_{13}$ $S'_{23}$ $S'_{43}$	III
			$S'_{23}$ $S'_{43}$ $S'_{25}$ $S'_{45}$	IV
	+ -	- + +	$S'_{12}$ $S'_{32}$ $S'_{42}$	III
			$S'_{32}$ $S'_{42}$ $S'_{53}$ $S'_{54}$	IV
	- +	+ + -	$S'_{21}$ $S'_{31}$ $S'_{24}$ $S'_{34}$	IV
			$S'_{24}$ $S'_{34}$ $S'_{54}$	III
	- +	+ - +	$S'_{21}$ $S'_{41}$ $S'_{23}$ $S'_{43}$	IV
			$S'_{23}$ $S'_{43}$ $S'_{53}$	III
- +	- + +	$S'_{31}$ $S'_{41}$ $S'_{32}$ $S'_{42}$	IV	
		$S'_{32}$ $S'_{42}$ $S'_{52}$	III	
3.	- -	+ + +	$S'_{21}$ $S'_{31}$ $S'_{41}$	III
			$S'_{25}$ $S'_{35}$ $S'_{45}$	III

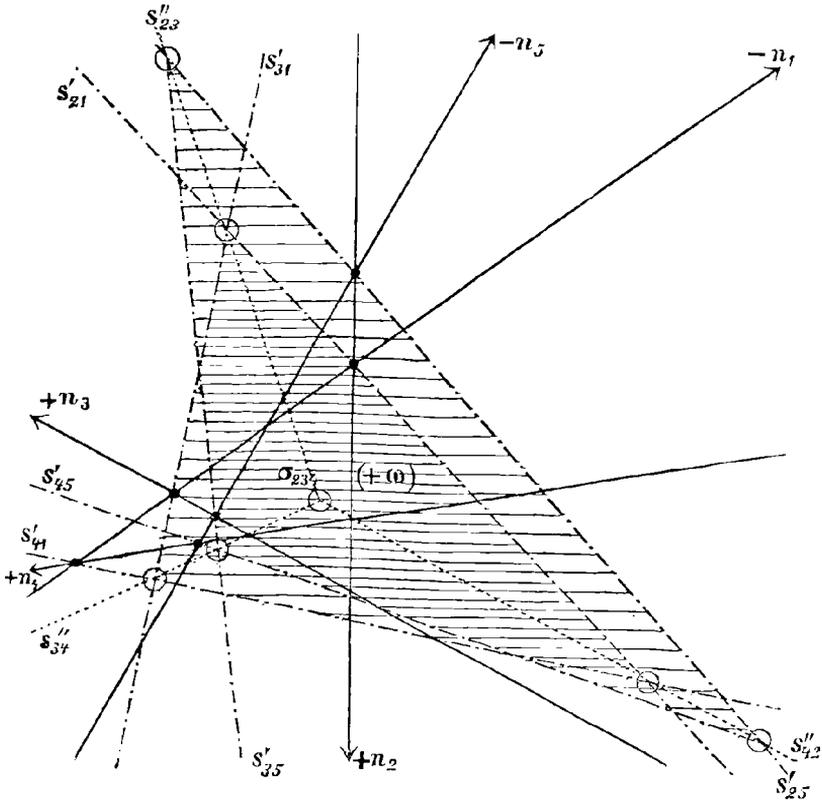
30. Es soll, ähnlich wie im § 28, gezeigt werden, dass auch bei den Schraubenaxen der dritten Gruppe die beiden Gebiete, welche zur Bestimmung der möglichen Axen dienen, auch wirklich immer einen gemeinsamen Teil haben. Wenn diese Gebiete beide viereckig sind oder das eine ein Viereck und das andere ein Dreieck darstellt, so ist das Gesagte auf dieselbe Weise ersichtlich wie in § 28: beide Figuren haben nämlich zwei gemeinschaftliche Seiten und einen und denselben von diesen Seiten eingeschlossenen inneren Winkel, da beide Figuren wieder einer solchen Richtung der Axen entsprechen, welche auf der Parameterkugel durch einen Punkt des Gebietes (+ +) oder (- -) bestimmt wird. In der Fig. 9 ist der Fall von zwei Vierecken und in der Fig. 10 der Fall von einem Viereck und einem Dreieck dargestellt.

Wenn aber beide Gebiete durch Dreiecke bestimmt werden, muss eine andere Betrachtung zu Hilfe genommen werden. Man kann dazu die in § 22 angeführten Eigenschaften der unechten Grenzebenen erster Art benutzen. Wir haben jetzt vier solche Ebenen:  $S''_{23}$ ,  $S''_{34}$ ,  $S''_{42}$ ,  $S''_{15}$ ; die Spuren der drei ersteren von denselben schneiden sich in einem Punkte, der Spur der Geraden  $\sigma_{234}$ , welcher im Innern jedes der beiden von den Spuren der ersten Grenzebenen erster Art,  $S'_{21}$ ,  $S'_{31}$ ,  $S'_{41}$  und  $S'_{25}$ ,  $S'_{35}$ ,  $S'_{45}$ , gebildeten Dreieck liegt (die letzte Zeile der Tabelle in § 29).



Daraus sieht man, dass diese Dreiecke notwendig einen gemeinsamen Teil haben müssen. Dieser Fall ist in Fig. 11 dargestellt.

Fig. 11.



31. In § 26 wurde schon bemerkt, dass im Falle von fünf Stützflächen ausser den zwei echten Grenzebenen zweiter Art noch drei unechte existieren. Für das Folgende werden einige Eigenschaften dieser letzteren Ebenen nötig sein.

Die drei unechten Grenzebenen zweiter Art schneiden sich mit den zwei echten Grenzebenen zweiter Art in einer Geraden. Wir wollen für die letzteren wieder die Bezeichnung  $P'_{1234}$ ,  $P'_{2345}$  benutzen. Bei einer der Ebene  $P'_{1234}$  parallelen Axenrichtung schneiden sich die sechs Grenzebenen erster Art  $S_{12}$ ,  $S_{13}$ ,  $S_{14}$ ,  $S_{23}$ ,  $S_{24}$ ,  $S_{34}$  in einer Geraden  $\sigma_{1234}$  (§ 22), welche den Bedingungen

$$85) \quad \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3 = \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$$

genügt. Ebenso bei einer der Ebene  $P'_{2345}$  parallelen Axenrichtung haben wir eine Gerade  $\sigma_{2345}$ , welche den sechs Ebenen  $S_{23}$ ,  $S_{24}$ ,  $S_{25}$ ,  $S_{34}$ ,  $S_{35}$ ,  $S_{45}$  angehört und den Gleichheiten

$$\delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3 = \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4 = \delta_5 \operatorname{tg} \varphi_5$$

genügt. Daher hat die Durchschnittsgerade der Ebenen  $P'_{1234}$  und  $P'_{2345}$  die Eigenschaft, dass unter den ihr parallelen Geraden eine solche Gerade  $\sigma_{12345}$  existiert, für welche

$$86) \quad \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3 = \delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4 = \delta_5 \operatorname{tg} \varphi_5$$

sind, und welche allen zehn echten oder unechten Grenzebenen erster Art angehört. Dieses zeigt aber, dass die genommene Axenrichtung auch den Ebenen  $P''_{1345}$ ,  $P''_{1245}$  und  $P''_{1235}$  parallel ist, so dass alle fünf Grenzebenen zweiter Art, welche zudem durch den Mittelpunkt der Parameterkugel gehen, sich in einer Geraden schneiden.

Die durch die Bedingungen 86) bestimmte Gerade  $\sigma_{12345}$  ist offenbar diejenige Schraubenaxe, welche dem festen Körper allein möglich bliebe, wenn derselbe sich nicht von den fünf Stützflächen entfernen könnte.

Eine andere Eigenschaft der drei unechten Grenzebenen zweiter Art, welche im Falle von sieben Stützflächen (§ 45) eine wichtige Bedeutung haben wird, besteht darin, dass alle diese Ebenen in demjenigen Paare der von den beiden echten Grenzebenen zweiter Art gebildeten Scheitelwinkel liegen, welches auf der Parameterkugel die möglichen Axenrichtungen bestimmt. Wählen wir z. B. eine der Ebene  $P''_{1235}$  parallele Richtung von Schraubenaxen. Man kann zeigen, dass dieselbe zu den möglichen Richtungen gehört. Unter den Geraden des gegebenen Parallelenbündels giebt es eine Gerade  $\sigma_{1235}$ , für welche

$$87) \quad \delta_1 \operatorname{tg} \varphi_1 = \delta_2 \operatorname{tg} \varphi_2 = \delta_3 \operatorname{tg} \varphi_3 = \delta_5 \operatorname{tg} \varphi_5$$

ist und welche den sechs Ebenen  $S_{12}$ ,  $S_{13}$ ,  $S_{15}$ ,  $S_{23}$ ,  $S_{25}$ ,  $S_{35}$  angehört. Wir wollen zeigen, dass sie eine mögliche Schraubenaxe ist. Die genommene Axenrichtung kann verschiedenen Gebieten auf der Parameterkugel gehören, je nach der Zeichenkombination der Grössen 84). Nehmen wir zuerst an, dass sie zu demjenigen Gebiete gehört, welches den Bedingungen 85) genügt und dass für die Gerade  $\sigma_{1235}$   $\delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$  die anderen Grössen 87) übertrifft. Der Ebene  $P'_{1234}$  entspricht dann auf einer zur gegebenen Richtung senkrechten Ebene die Abbildung des möglichen Axengebietes in Form eines Dreiecks, welches von den Spuren der Ebenen  $S'_{14}$ ,  $S'_{24}$ ,  $S'_{34}$  begrenzt wird und das Gebiet  $(+\infty)$  enthält. Die Spur der Geraden  $\sigma_{1235}$  liegt dann im Innern dieses Dreiecks, da sie mit der Spur der Geraden  $\sigma_{123}$ , welche diese Eigenschaft hat, zusammenfällt. Wenn wir das andere Gebiet, welches der Ebene  $P'_{2345}$  entspricht, betrachten, kommen wir zu demselben Schlusse: die Gerade  $\sigma_{1235}$  fällt mit der Geraden  $\sigma_{235}$  zusammen und liegt daher im Innern des von den Ebenen  $S'_{24}$ ,  $S'_{34}$ ,  $S'_{54}$  begrenzten Gebietes. Somit ist die Gerade  $\sigma_{1235}$  eine mögliche Schraubenaxe; die angenommene Axenrichtung gehört also auch zu den möglichen Richtungen. Zu einem ähnlichen Schlusse gelangen wir auch, wenn

wir voraussetzen, dass  $\delta_4 \operatorname{tg} \varphi_4$  kleiner als die Grössen 87) sei; der Unterschied kann nur darin bestehen, dass jetzt für die möglichen Schraubenaxen die entgegengesetzte Drehung ( $-\omega$ ) möglich ist (§ 4 und § 22). Wir haben bis jetzt solche Axenrichtungen betrachtet, welche den Bedingungen 85) genügen, d. h. für welche der Winkel ( $n_1 \omega$ ) mit derjenigen Normale,  $n_4$ , stumpf ist, die auf die Ebene  $P''_{1235}$  keinen Einfluss ausübt. Wenn eine andere, z. B. den Ungleichheiten

$$\begin{aligned} q_1 &\geq 0, & q_2 &\geq 0, & q_4 &\geq 0, & q_5 &\geq 0, \\ & & & & q_3 &\leq 0 \end{aligned}$$

entsprechende Richtung genommen wird, so besteht der Unterschied nur darin, dass jetzt auf der zu dieser Richtung senkrechten Ebene die Spur von  $\sigma_{1235}$  nicht im Innern, sondern auf der Grenze des möglichen Axengebietes liegen wird. In der That wird jetzt das der Ebene  $P'_{1234}$  entsprechende Gebiet durch die Spuren der Ebenen  $S'_{13}, S'_{23}, S'_{43}$  begrenzt; und die Spur der Geraden  $\sigma_{1235}$ , welche wieder mit der Geraden  $\sigma_{123}$  zusammenfällt, wird in derjenigen Ecke des Dreiecks liegen, in welcher sich die Spuren von  $S'_{13}$  und  $S'_{23}$  schneiden. Dieser Punkt ist aber auch die Ecke des anderen Dreiecks, welches der Ebene  $P'_{2345}$  entspricht und von den Spuren der Ebenen  $S'_{23}, S'_{43}, S'_{53}$  begrenzt wird; denn die Ebenen  $S'_{23}$  und  $S'_{53}$  schneiden sich in einer und derselben Geraden mit der Ebene  $S'_{13}$ , wie es aus den Gleichheiten 87) ersichtlich ist.

Ähnliche Resultate bekommt man, wenn das mögliche Axengebiet durch zwei Vierecke oder ein Viereck und ein Dreieck bestimmt wird, und sie können nicht nur für die Ebene  $P''_{1235}$ , sondern auch auf dieselbe Weise für die Ebenen  $P''_{1245}$  und  $P''_{1345}$  gezeigt werden.

**32.** Die Hauptresultate für den Fall von fünf Stützflächen können folgendermaßen ausgesprochen werden.

Die Richtungen der fünf Stütznormalen können so genommen werden, dass die möglichen Schraubenaxen bei jeder Richtung derselben geschlossene Prismen bilden.

Nicht alle Richtungen sind aber möglich; die möglichen Richtungen sind auf der Parameterkugel in ein Paar von Scheitelwinkeln eingeschlossen, welche durch zwei auf bestimmte Weise aus den fünf überhaupt möglichen Grenzebenen zweiter Art ausgewählten Ebenen gebildet werden.

Die drei übrigen Grenzebenen zweiter Art schneiden sich in einer Geraden mit den zwei ersteren und liegen in dem genannten Paare von Scheitelwinkeln.

Für jede mögliche Axenrichtung giebt es auch wirklich mögliche Schraubenaxen.

## V. Grenzebenen zweiter Art bei sechs Stützflächen.

**33.** Wir werden weiter keinen Unterschied zwischen den verschiedenen Gruppen der Schraubenaxen machen, da die Bedeutung

jeder Grenzebene zweiter Art für alle Gruppen dieselbe ist, wie es schon im vorhergehenden Kapitel klar gemacht wurde. Wir werden nur voraussetzen, dass unter den sechs Stütznormalen solche vier gefunden werden können, welche gegenseitig eine Opposition bilden. Danach können bei keiner Axenrichtung die Grössen

$$88) \quad q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$$

alle positiv oder alle negativ sein.

Die Zahl der echten Grenzebenen erster Art wird davon abhängen, wieviele von den Grössen 88) das den anderen entgegengesetzte Zeichen haben werden; es können somit unter den 15 überhaupt denkbaren Grenzebenen erster Art 5, 8 oder 9 echte sein.

Die Zahl der überhaupt denkbaren Grenzebenen zweiter Art ist, nach der Zahl von Kombinationen der zu vier genommenen Stütznormalen, auch 15. Für das Folgende ist es sehr wesentlich, die Zahl der echten Grenzebenen unter denselben zu bestimmen. Diese Zahl kann drei oder vier sein. Um das zu zeigen, wollen wir annehmen, dass die Normalen  $n_i, n_k, n_l, n_m$  in Opposition sind, so dass ihnen die echte Grenzebene zweiter Art  $P'_{iklm}$  entspricht. Wenn wir eine fünfte Normale  $n_r$  hinzufügen, so können wir unter den vier neuen Grenzebenen zweiter Art die zweite echte Ebene nach den Regeln von § 26 aufsuchen; es möge dieselbe  $P'_{klmr}$  sein. Wenn die sechste Normale,  $n_s$ , eingeführt wird, so kann man auf dieselbe Weise bestimmen: 1. diejenige Grenzebene zweiter Art, welche von den Normalen

$$89) \quad n_i, n_k, n_l, n_m, n_s$$

und 2. diejenige, welche von den Normalen

$$90) \quad n_k, n_l, n_m, n_r, n_s$$

abhängt. Hier können zwei Fälle eintreten. Es können bei der dritten Grenzebene ausser der Normale  $n_s$  diejenigen drei Normalen  $n_k, n_l, n_m$  Teil nehmen, welche auf die Lage der beiden ersten Grenzebenen,  $P'_{iklm}$  und  $P'_{klmr}$ , Einfluss haben; wir bekommen dann die Ebene  $P'_{klms}$ , und es ist klar, dass die vierte gesuchte Ebene mit ihr zusammenfallen wird, da unter den Normalen 90) wieder dieselben Normalen  $n_k, n_l, n_m$  mit  $n_s$  in Opposition sein werden, während die Normale  $n_r$  dabei nicht mitwirken kann; denn sie selbst ist mit den Normalen  $n_k, n_l, n_m$  in Opposition. Wir bekommen also nur drei verschiedene echte Grenzebenen zweiter Art:

$$91) \quad P'_{iklm}, P'_{klmr}, P'_{klms}.$$

Der zweite Fall wird dann auftreten, wenn bei der Bestimmung der dritten Ebene andere drei von den vier ersten Normalen, als bei der Bestimmung von  $P'_{klmr}$ , mitwirken. Es mögen z. B.  $n_i, n_l, n_m$  diese Normalen sein; sie geben die Ebene  $P'_{ilms}$ , und dann wird die vierte Ebene notwendig von dieser Ebene verschieden sein, da unter

den Normalen 90), welche zu ihrer Bestimmung dienen, die Normale  $n_i$  nicht vorkommt. Es sei diese Ebene  $P'_{lmrs}$ ; dann besteht das ganze System der echten Grenzebenen zweiter Art aus den Ebenen:

$$92) \quad P'_{iklm}, \quad P'_{klmr}, \quad P'_{ilms}, \quad P'_{lmrs}.$$

Keine andere von den Grenzebenen zweiter Art kann echt sein, da alle anderen zu vier genommenen Normalen nicht in Opposition sein können.

**34.** Die sechs Stütznormalen kombinieren sich bei der Bestimmung der echten Grenzebenen zweiter Art auf eine bestimmte Weise, wie es schon aus den Bezeichnungen 91) und 92) ersichtlich ist, jetzt aber noch besonders hervorgehoben werden soll, da dieser Umstand in der Frage über die Festlegung des starren Körpers durch Stütznormalen eine wichtige Rolle spielt.

Im Falle von drei echten Grenzebenen zweiter Art 91) kommen drei Normalen ( $n_k, n_i, n_m$ ) in der Bezeichnung aller dreier Ebenen vor, was dadurch bedingt wird, dass dort jede der drei übrigen Normalen mit den drei ersteren in Opposition steht.

Im Falle von vier echten Grenzebenen zweiter Art 92), nehmen zwei Normalen ( $n_i, n_m$ ) an der Bestimmung aller vier Ebenen Teil, während jede von den übrigen vier Normalen nur zweimal vorkommt. Um die Unmöglichkeit anderer Kombinationen der Normalen zu zeigen, wollen wir alle Fälle näher betrachten, welche bei der Einführung der fünften und sechsten Normale vorkommen können, nachdem die erste echte Grenzebene  $P'_{iklm}$  schon bestimmt ist. Bei der Einführung der fünften Normale,  $n_r$ , bekommen wir eine zweite echte Grenzebene, welche eine der folgenden Bezeichnungen haben kann:

$$P'_{klmr}, \quad P'_{ilmr}, \quad P'_{ikmr}, \quad P'_{iklr};$$

es sei  $P'_{klmr}$  diese Ebene. Wenn wir die sechste Normale,  $n_s$ , einführen, müssen wir mit ihr drei von den vier ersten und drei von den vier die zweite Grenzebene bestimmenden Normalen kombinieren. Dabei muss man den Fall, dass diese drei Normalen in den beiden Fällen dieselben sind, ausschliessen, da wir die Existenz von vier und nicht von drei echten Grenzebenen voraussetzen. Daher kann nur eine von den Ebenen

$$P'_{ilms}, \quad P'_{ikms}, \quad P'_{ikls}$$

als die dritte echte Grenzebene betrachtet werden. Da die vierte Grenzebene von  $n_s$  und von dreien der die zweite Grenzebene bestimmenden Normalen abhängt, so kann sie eine der folgenden drei Bezeichnungen annehmen:

$$P'_{lmrs}, \quad P'_{kmrs}, \quad P'_{klrs},$$

welche alle notwendig den Index ( $r$ ) enthalten müssen, da die Ebene  $P'_{klms}$  ausgeschlossen ist. Somit erhalten wir vorläufig neun Fälle für die Kombinationen der Indices in der Bezeichnung der echten Grenzebenen zweiter Art:

93)	1.	( <i>iklm</i> )	( <i>klmr</i> )	( <i>ilms</i> )	( <i>lmrs</i> )
94)	2.	( <i>iklm</i> )	( <i>klmr</i> )	( <i>ilms</i> )	( <i>kmrs</i> )
	3.	( <i>iklm</i> )	( <i>klmr</i> )	( <i>ilms</i> )	( <i>klrs</i> )
	4.	( <i>iklm</i> )	( <i>klmr</i> )	( <i>ikms</i> )	( <i>lmrs</i> )
95)	5.	( <i>iklm</i> )	( <i>klmr</i> )	( <i>ikms</i> )	( <i>kmrs</i> )
	6.	( <i>iklm</i> )	( <i>klmr</i> )	( <i>ikms</i> )	( <i>klrs</i> )
	7.	( <i>iklm</i> )	( <i>klmr</i> )	( <i>ikls</i> )	( <i>lmrs</i> )
	8.	( <i>iklm</i> )	( <i>klmr</i> )	( <i>ikls</i> )	( <i>kmrs</i> )
96)	9.	( <i>iklm</i> )	( <i>klmr</i> )	( <i>ikls</i> )	( <i>klrs</i> ).

Von ihnen sind aber in Wirklichkeit nur drei Fälle möglich. Die Wahl der echten Grenzebenen kann nämlich nicht von der Reihenfolge abhängen, in welcher die dieselben bestimmenden Stütznormalen auftreten; und es wird die Unmöglichkeit der sechs übrigen Fälle klar, wenn wir dieselben Grenzebenen, aber in anderer Reihenfolge als es oben gethan wurde, aufsuchen. Wenn wir z. B. den zweiten in der Tabelle gegebenen Fall 94) betrachten und mit den vier Normalen  $n_k, n_m, n_r, n_s$  anfangen, so müssen wir bei der Einführung der fünften Normale  $n_i$  für die zweite Grenzebene eine der vier Bezeichnungen

$$(imrs), (ikrs), (ikms), (ikmr)$$

annehmen, während keine von diesen Kombinationen in der Reihe 94) vorkommt. Ähnliches kann auch in den Fällen 3, 4, 6, 7 und 8 gezeigt werden. In den Fällen 1, 5 und 9 aber hängt die Bestimmung der echten Grenzebene nicht von der Reihenfolge, in welcher wir die Normalen heranziehen, ab. Diese Fälle 93), 95) und 96) sind die einzig möglichen. Die Indices haben aber in ihnen die oben angegebene Eigenschaft.

**35.** Um die echten Grenzebenen zweiter Art aufzusuchen, wenn die Stütznormalen durch ihre Koordinaten gegeben sind, können wir dasselbe Verfahren, welches in § 26 angegeben wurde, gebrauchen. Wenn  $P_{iklm}$  eine echte Grenzebene sein soll, so müssen

$$97) \quad V_{klmi}, \quad V_{lim}, \quad V_{ikm}, \quad V_{iki}$$

dasselbe Zeichen haben. Nehmen wir zuerst an, dass nur drei echte Grenzebenen 91) existieren. Statt der Bezeichnung  $P'_{iklm}$  wollen wir  $P'_{klmi}$  schreiben; dann müssen die zwölf Determinanten, unter welchen übrigens nur zehn verschieden sind,

$$98) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{mlk}, \quad V_{lik}, \quad V_{imk}, \quad V_{lmi}, \\ (V_{mlk}), \quad V_{lmr}, \quad V_{mkr}, \quad V_{kir}, \\ (V_{mlk}), \quad V_{lms}, \quad V_{mks}, \quad V_{kis}, \end{array} \right.$$

dasselbe Zeichen haben.

Im Falle von vier echten Grenzebenen 92) existieren ähnliche Bedingungen für 16 Determinanten, von welchen übrigens nur 12 ver-

schieden sind. Wenn man in den Bezeichnungen 92) die Indices folgendermaßen umstellt:

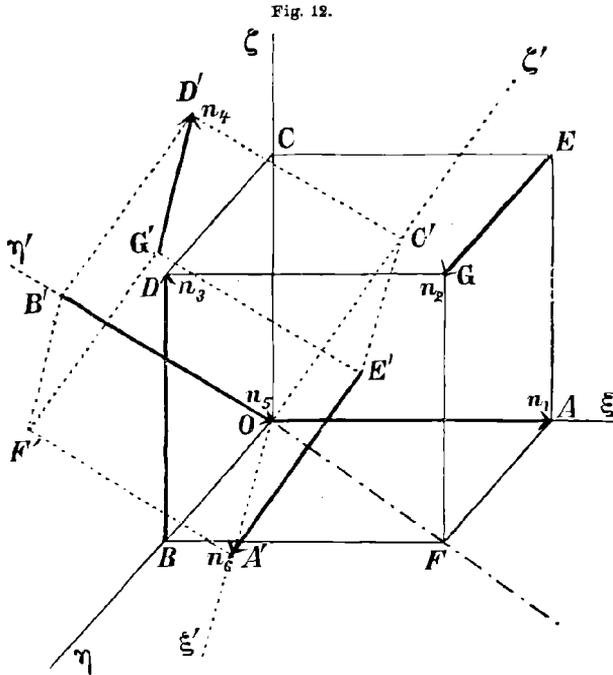
$$99) \quad P'_{iklm}, P'_{rklm}, P'_{islm}, P'_{rsim},$$

so kann man sagen, dass nicht nur vier in einer Reihe stehende Grössen, sondern alle 16 Grössen:

$$100) \quad \left\{ \begin{array}{l} V_{klm}, V_{ilm}, V_{ikm}, V_{lki}, \\ (V_{klm}), V_{irm}, V_{rkm}, V_{lkr}, \\ V_{slm}, (V_{ilm}), V_{ism}, V_{lsi}, \\ (V_{slm}), (V_{irm}), V_{rsm}, V_{ism}, \end{array} \right.$$

dasselbe Zeichen haben müssen.

In Wirklichkeit ist es notwendig, die Zeichen aller 20 Grössen von der Art  $V_{iki}$  zu bestimmen, die Bezeichnung aller 15 Grenzebenen



zweiter Art aufzuschreiben und von ihnen diejenigen drei oder vier auszuwählen, für welche vier jeder Grenzebene entsprechende Grössen 97) dasselbe Zeichen haben. Dann kann man noch die Indices in der Bezeichnung der gefundenen echten Grenzebenen so umstellen, dass 10 oder resp. 12 Grössen, 98) oder 100), alle positiv oder alle negativ werden.

Das folgende typische Beispiel wird nicht nur zur Beleuchtung des Gesagten dienen, sondern auch für das Weitere Bedeutung haben.

Es mögen die Normalen  $n_1, n_2, n_3$  in den sich nicht schneidenden Kanten  $OA, EG, BD$  eines Würfels  $OAFBDCGE$  liegen (Fig. 12); den Anfangspunkt der Koordinaten nehmen wir in einer Ecke desselben und die Koordinatenachsen den Normalen  $n_1, n_2, n_3$  parallel und gleichgerichtet an. Es soll jetzt der Würfel mit den Koordinatenachsen um den Anfangspunkt derselben so gedreht werden, dass die neue Lage der Koordinatenachsen gegen die frühere durch die Eulerschen Winkel

$$\varphi = \frac{\pi}{4}, \quad \psi = \frac{\pi}{4}, \quad \vartheta = \frac{\pi}{4}$$

bestimmt wird. Wir nehmen dann die drei anderen Normalen  $n_4, n_5, n_6$  in den Kanten  $G'D', B'O', E'A'$  des Würfels und der neuen Lage der Koordinatenachsen entgegengerichtet an. Die Kanten des Würfels gleich der Längeneinheit voraussetzend, bekommen wir für die Koordinaten der sechs Stütznormalen folgende Werte:

	$\xi$	$\eta$	$\zeta$	$\lambda$	$\mu$	$\nu$
$n_1$	1	0	0	0	0	0
$n_2$	0	1	0	-1	0	1
$n_3$	0	0	1	1	0	0
$n_4$	$-a^2(1-a)$	$-a^2(1+a)$	$-a^2$	$a^3(1+4a)$	$-a^3$	$-2a^4(1-2a)$
$n_5$	$a^2(1+a)$	$a^2(1-a)$	$-a^2$	0	0	0
$n_6$	$-a^2$	$a^2$	$-a$	$-a^3(1+2a)$	$a^3(1-2a)$	$2a^4$

wo  $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Nachdem wir die Werte der 20 Determinanten  $V_{ikl}$  ausgerechnet haben, stellen wir die Zeichen derselben in folgender Tabelle den 15 Grenzebenen zweiter Art entsprechend zusammen:

$(iklm)$	$V_{klm}$	$V_{lim}$	$V_{ikm}$	$V_{lki}$	
(1234)	-	-	-	-	$P'_{1234}$
(1235)	+	+	-	-	
(1236)	-	+	-	-	
(2345)	+	+	+	+	$P'_{2345}$
(1345)	+	-	-	-	
(1245)	-	-	-	+	$P'_{3456}$
(3456)	-	-	-	-	
(2456)	-	-	+	+	

$(iklm)$	$V_{klm}$	$V_{lim}$	$V_{ikm}$	$V_{lki}$	
(2356)	+	-	-	-	
(1256)	+	-	-	+	
(1356)	+	-	-	+	
(1456)	-	-	+	-	
(1246)	+	-	-	+	
(1346)	-	-	-	-	$P'_{1346}$
(2346)	-	-	-	+	

Hieraus finden wir, dass

101)  $P'_{1234}, P'_{2345}, P'_{3456}, P'_{1346}$   
echte Grenzebenen sind.

Es ist wesentlich zu beachten, dass bei einer Permutation der Indices in der Bezeichnung einer echten Grenzebene zweiter Art die Zeichen der ihr entsprechenden Grössen 97) nur alle auf einmal wechseln können; bei einer unechten Grenzebene aber können entweder alle oder nur zwei von den Grössen 97) ihre Zeichen wechseln und jedenfalls nur so, dass niemals die Zeichen aller vier Grössen gleich werden; denn die Wahl der echten Grenzebenen zweiter Art kann nicht davon abhängen, in welcher Reihenfolge die Indices der sechs Stütznormalen genommen werden. Wir können diese Bemerkung benutzen, um für alle Grössen 100) dasselbe Zeichen zu erhalten. Dazu ist es nur nötig, zwei Indices, 3) und 4), in  $P'_{2345}$  umzustellen. Weiter werden wir im Falle von vier echten Grenzebenen zweiter Art die Ebenen

102)  $P'_{1234}, P'_{2435}, P'_{3456}, P'_{1346}$   
betrachten und dabei im Auge behalten, dass alle Grössen 100) negativ sind.

**36.** Wenn die Stütznormalen solche Richtungen haben, dass nur drei echte Grenzebenen zweiter Art existieren, so wird das Gebiet möglicher Axenrichtungen auf der Parameterkugel durch ein sphärisches Dreieck bestimmt. Dieses Dreieck zieht sich in einen Punkt zusammen, wenn alle drei Ebenen

103)  $P'_{klmi}, P'_{klmr}, P'_{klms}$   
sich in einer Geraden schneiden. In § 31 wurde es bemerkt, dass, wenn die Richtung der Schraubenaxen zweien Grenzebenen zweiter Art, z. B.  $P'_{klmi}$  und  $P'_{klmr}$ , parallel ist, alle zehn den fünf Normalen,  $n_k, n_i, n_m, n_l$  und  $n_r$ , entsprechenden Grenzebenen erster Art sich in einer Geraden  $\sigma_{klmir}$  schneiden, die den Gleichheiten

104)  $\delta_k \operatorname{tg} \varphi_k = \delta_l \operatorname{tg} \varphi_l = \delta_m \operatorname{tg} \varphi_m = \delta_i \operatorname{tg} \varphi_i = \delta_r \operatorname{tg} \varphi_r$

genügt und diejenige Schraubenaxe darstellt, welche dem festen Körper allein möglich wäre, wenn er sich von den fünf Stützflächen nicht entfernen könnte. Daraus folgt, dass bei einer solchen Axenrichtung, welche allen drei Ebenen 103) parallel ist, alle 15 Grenzebenen erster Art sich in einer Geraden  $\sigma_{klmir}$  schneiden, die den Bedingungen

105)  $\delta_k \operatorname{tg} \varphi_k = \delta_l \operatorname{tg} \varphi_l = \delta_m \operatorname{tg} \varphi_m = \delta_i \operatorname{tg} \varphi_i = \delta_r \operatorname{tg} \varphi_r = \delta_s \operatorname{tg} \varphi_s$

genügt und dem festen Körper allein möglich bliebe, wenn er sich von den sechs Stützflächen nicht entfernen könnte. Andererseits ist es aber bekannt, dass dem festen Körper, welcher sechs Flächen berührt, nur dann eine Verschiebung möglich bleibt, wenn die Normalen in den Berührungspunkten einem Komplex ersten Grades angehören. Der analytische Ausdruck dieser Forderung besteht bekanntlich darin, dass die aus den Koordinaten der Normalen gebildete Determinante

106) 
$$D = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 & \xi_1 & \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \\ \xi_2 & \eta_2 & \xi_2 & \lambda_2 & \mu_2 & \nu_2 \\ \xi_3 & \eta_3 & \xi_3 & \lambda_3 & \mu_3 & \nu_3 \\ \xi_4 & \eta_4 & \xi_4 & \lambda_4 & \mu_4 & \nu_4 \\ \xi_5 & \eta_5 & \xi_5 & \lambda_5 & \mu_5 & \nu_5 \\ \xi_6 & \eta_6 & \xi_6 & \lambda_6 & \mu_6 & \nu_6 \end{vmatrix}$$

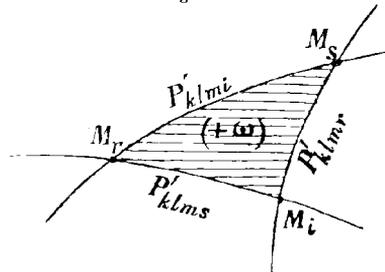
gleich Null ist. Die Gleichung

107)  $D = 0$

kann also als die Bedingung dafür, dass die drei Ebenen 103) sich in einer Geraden  $\sigma_{123456}$  schneiden, betrachtet werden.

Wenn diese Determinante nicht gleich Null ist, was wir weiter voraussetzen werden, so kann das Zeichen derselben dazu dienen, um diese oder jene Drehungsrichtung um die möglichen Schraubenaxen zu bestimmen. Erinnern wir uns des Merkmals, nach welchem auf der Parameterkugel die Gebiete  $(+\omega)$  und  $(-\omega)$  unterschieden werden (§ 21 und § 25), und wenden es auf solche Axenrichtungen, welche durch die Ecken des von den drei Ebenen 103) auf der Parameterkugel gebildeten Dreiecks bestimmt werden, an. Im Falle des Gebietes  $(+\omega)$  liegt jede Ecke dieses Dreiecks in Bezug auf die die gegenüberliegende Seite desselben enthaltende Grenzebene zweiter Art auch im Gebiete  $(+\omega)$  (Fig. 13).

Fig. 13.



Z.B. für die Koordinaten  $(\xi_i, \eta_i, \xi_i)$  des Punktes  $M_i$  haben wir die Gleichungen:

$$108) \quad P'_{klmr} = 0, \quad P'_{klms} = 0;$$

und wenn diese Koordinaten in  $P'_{klmi}$  eingesetzt werden, so müssen dieselben, der Formel 82) gemäss, der Bedingung

$$V_{klm} P'_{klmi} < 0$$

genügen. Für die entgegengesetzte Richtung der Winkelgeschwindigkeit, welche auf der Parameterkugel zu dem Gebiete  $(-\omega)$  gehört, bekommt man die entgegengesetzte Ungleichheit. Die Substitution der genannten Koordinaten in  $P'_{klmi}$  giebt einen Ausdruck, dessen Zähler die Determinante

$$109) \quad D_{irs}^{klm} = \begin{vmatrix} L_{klmi} & M_{klmi} & N_{klmi} \\ L_{klmr} & M_{klmr} & N_{klmr} \\ L_{klms} & M_{klms} & N_{klms} \end{vmatrix}$$

und dessen Nenner die Quadratwurzel aus der Quadratsumme der aus den Koeffizienten der Gleichungen 108) gebildeten Determinanten zweiten Grades ist. Die unten angegebene Ausrechnung der Determinante 109) wird uns zeigen 113), dass dieselbe sich nur durch einen Faktor von der Determinante  $D$  unterscheidet. Man bekommt dieselbe Determinante 109), wenn man statt  $M_i$  die Punkte  $M_r$  und  $M_s$  betrachtet. Wenn eine der Normalen  $n_i, n_r, n_s$ , z. B.  $n_i$ , sich selbst parallel weiterrückt, so dreht sich die Ebene  $P'_{klmi}$ , deren Lage nicht nur von den Koordinaten  $\xi_i, \eta_i, \zeta_i$ , sondern auch von den Koordinaten  $\lambda_i, \mu_i, \nu_i$  abhängt, um den Mittelpunkt der Parameterkugel, während die zwei anderen Grenzebenen ihre Lage behalten; dabei kann das Gebiet  $(+\omega)$  sich in das Gebiet  $(-\omega)$  verwandeln. Die Determinante  $D$  wechselt dabei ihr Zeichen. Die folgende Rechnung, welche auch zu anderem Zwecke nötig ist, wird uns zeigen, dass in der That diese Verwandlung durch den Zeichenwechsel von  $D$  bedingt wird. Nach den Formeln 95) kann man schreiben:

$$110) \quad \begin{cases} L_{klmi} = \lambda_k V_{lmi} + \lambda_l V_{mki} + \lambda_m V_{kli} + \lambda_i V_{mlk}, \\ M_{klmi} = \mu_k V_{lmi} + \mu_l V_{mki} + \mu_m V_{kli} + \mu_i V_{mlk}, \\ N_{klmi} = \nu_k V_{lmi} + \nu_l V_{mki} + \nu_m V_{kli} + \nu_i V_{mlk}, \end{cases}$$

und auf ähnliche Weise die sechs übrigen Elemente der Determinante 109) darstellen. Wenn man dann diese Determinante in 20 Determinanten von der Form

$$111) \quad B_{klm} = \begin{vmatrix} \lambda_k & \lambda_l & \lambda_m \\ \mu_k & \mu_l & \mu_m \\ \nu_k & \nu_l & \nu_m \end{vmatrix}$$

zerlegt, wobei als Faktoren die Produkte der zu drei genommenen Grössen  $V_{lmi}, V_{mki}, \dots$  oder Summen von solchen Produkten stehen werden, und wenn man die so erhaltenen Glieder mit Hilfe der Reduktionsformel

$$112) \quad V_{ikl} V_{imr} - V_{ilm} V_{klr} = V_{kim} V_{lir}$$

vereinfacht, findet man

$$113) \quad D_{irs}^{kim} = V_{123}^2 D.$$

37. Wenden wir uns jetzt zur Betrachtung des Gebietes möglicher Axenrichtungen im Falle von vier echten Grenzebenen zweiter Art. Es ist augenscheinlich, dass im Falle von drei echten Grenzebenen zweiter Art das vollkommene Verschwinden auf der Parameterkugel des Gebietes möglicher Axenrichtungen nicht erreichbar ist. Bei vier echten Grenzebenen kann dasselbe von Anfang an nicht behauptet werden; die Untersuchung wird aber zeigen, dass auch in diesem Falle das Gebiet möglicher Axenrichtungen nicht vollkommen verschwinden kann. Zu diesem Zwecke kann man eine Überlegung benutzen, welche der im § 18 angewandten und die zu den Stütznormalen senkrechten Ebenen betreffenden analog ist.

Vier Grenzebenen zweiter Art teilen die Oberfläche der Parameterkugel im allgemeinen in 14 Gebiete, so dass von den 16 überhaupt möglichen Zeichenverbindungen, von welchen die Möglichkeit oder Unmöglichkeit der Axenrichtungen abhängt, zwei Kombinationen fehlen.\* Wir wollen der Kürze wegen mit

$$114) \quad \begin{cases} P_i = a_i \xi + b_i \eta + c_i \zeta = 0, \\ P_k = a_k \xi + b_k \eta + c_k \zeta = 0, \\ P_l = a_l \xi + b_l \eta + c_l \zeta = 0, \\ P_m = a_m \xi + b_m \eta + c_m \zeta = 0, \end{cases}$$

die vier Grenzebenen zweiter Art bezeichnen, und es seien:

$$115) \quad P_i > 0, \quad P_k > 0, \quad P_l > 0, \quad P_m > 0,$$

oder auch die ihnen entgegengesetzten Ungleichheiten die Bedingungen, welchen das Gebiet möglicher Axenrichtungen auf der Parameterkugel genügt. Damit ein solches Gebiet nicht vorhanden sei, ist es notwendig und hinreichend, dass die Normalen zu den Ebenen 114), wenn diese Normalen den Ungleichheiten 115) entsprechend gerichtet sind, sich in Opposition befinden. Das in § 18 angegebene Merkmal kann jetzt in folgender Weise ausgesprochen werden. Setzen wir

$$\begin{vmatrix} a_k & a_l & a_m \\ b_k & b_l & b_m \\ c_k & c_l & c_m \end{vmatrix} = U_{klm},$$

so müssen die vier Grössen

$$U_{kim}, \quad U_{lim}, \quad U_{ikm}, \quad U_{lki}$$

dasselbe Zeichen haben. Es bleibt jetzt nur übrig zu untersuchen, ob diese Forderung für die Koeffizienten der vier echten Grenzebenen

\* Zum Vergleich: [§ 18] und § 18.

zweiter Art erfüllbar ist. Der Anschaulichkeit wegen können wir, ohne die Giltigkeit der Resultate zu vermindern, die Bezeichnungen 102) für die Grenzebenen annehmen, wie es schon in § 36 auseinander gesetzt wurde. Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
 U_{klm} &= \begin{vmatrix} I_{2435} & I_{3456} & L_{1346} \\ M_{2435} & M_{3456} & M_{1346} \\ N_{2435} & N_{3456} & N_{1346} \end{vmatrix}, \\
 U_{lim} &= \begin{vmatrix} L_{3456} & L_{1234} & L_{1346} \\ M_{3456} & M_{1234} & M_{1346} \\ N_{3456} & N_{1234} & N_{1346} \end{vmatrix}, \\
 U_{ikm} &= \begin{vmatrix} L_{1234} & L_{2435} & L_{1346} \\ M_{1234} & M_{2435} & M_{1346} \\ N_{1234} & N_{2435} & N_{1346} \end{vmatrix}, \\
 U_{lki} &= \begin{vmatrix} L_{3456} & I_{2435} & L_{1234} \\ M_{3456} & M_{2435} & M_{1234} \\ N_{3456} & N_{2435} & N_{1234} \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Wenn man die Elemente dieser Determinanten nach dem Schema 110) darstellt, jede Determinante in 20 Glieder, welche als Faktoren die Ausdrücke 111) enthalten, zerlegt und endlich die Reduktionsformel 112) benutzt, so bekommt man:

$$\begin{aligned}
 116) \quad U_{klm} &= V_{435} V_{346} D, \\
 117) \quad U_{lim} &= V_{346} V_{134} D, \\
 118) \quad U_{ikm} &= V_{134} V_{243} D, \\
 119) \quad U_{lki} &= V_{243} V_{436} D.
 \end{aligned}$$

Wir haben aber nach dem Schema 100) folgende Ungleichheiten

$$\begin{aligned}
 V_{435} V_{346} &> 0, \\
 V_{346} V_{134} &< 0, \\
 V_{134} V_{243} &> 0, \\
 V_{243} V_{436} &< 0,
 \end{aligned}$$

welche der Voraussetzung, dass

$$U_{klm}, U_{lim}, U_{ikm}, U_{lki}$$

alle positiv oder alle negativ sind, widersprechen. Daher ist das Verschwinden der Gebiete (+  $\omega$ ) und (-  $\omega$ ) auf der Parameterkugel unmöglich.\*

Einen ähnlichen Schluss kann man auch in den übrigen Fällen 95) und 96) machen, wo an Stelle der Ebenen 102) die Ebenen

\* Was die Reihenfolge der Indices betrifft, siehe § 35.

oder  
auftreten.

$$\begin{array}{cccc}
 P'_{1234}, & P'_{2435}, & P'_{2456}, & P'_{1246} \\
 P'_{1234}, & P'_{2435}, & P'_{2356}, & P'_{1236}
 \end{array}$$

**38.** In § 36 haben wir schon gesehen, dass wenn  $D = 0$  ist, die drei Ebenen 103), deren Existenz dort vorausgesetzt wurde, sich in einer Geraden schneiden, und dass dann bei der dieser Geraden parallelen Axenrichtung alle 15 Grenzebenen erster Art sich in einer Geraden  $\sigma_{123456}$  schneiden. Dasselbe finden wir auch für den in § 37 betrachteten Fall von vier Ebenen 102). Die Gerade  $\sigma_{123456}$  hat ausser der in § 36 gezeigten Bedeutung noch die folgende. Da jetzt die Gebiete  $(+ \omega)$  und  $(- \omega)$  auf der Parameterkugel sich in zwei Punkte zusammengezogen haben, so ist nur eine bestimmte Richtung möglicher Schraubenaxen übrig geblieben. Für diese Richtung giebt es jetzt auch nur eine mögliche Schraubenaxe, weil einerseits wegen der Opposition der Stütznormalen alle Axengebiete geschlossene Prismen bilden, anderseits aber die Grenzebenen erster Art sich in einer Geraden  $\sigma_{123456}$  schneiden, so dass diese Gerade die einzige mögliche Schraubenaxe darstellt. Der Eigenschaft der echten Grenzebenen erster Art gemäss (§ 4) hat der Parameter der Schraubengeschwindigkeit auf dieser Axe einen bestimmten Wert, und die Drehung ist nach beiden Richtungen möglich. Damit also dem festen Körper eine bestimmte Schraubenverschiebung übrig bleibe, ist es notwendig und hinreichend, 1. dass die Zahl der Stützflächen gleich sechs sei, 2. dass die Stütznormalen einem Komplexe ersten Grades angehören und 3. dass wenigstens vier von den Stütznormalen in Opposition seien.

**39.** Es bleibt jetzt übrig die Frage zu beantworten, ob für jede mögliche Axenrichtung auch ein mögliches Axengebiet existiert. Dazu muss man, wie es in § 28 und § 30 für den Fall von fünf Stützflächen gethan wurde, in den möglichen Axengebieten, welche jeder der echten Grenzebenen zweiter Art einzeln entsprechen, den gemeinsamen Teil aufsuchen. In ebener Darstellung wird derselbe, je nach der Zahl der genannten Ebenen, zu drei oder vier Figuren gehören. Diese Figuren sind Dreiecke oder Vierecke, je nach der Zahl der Grenzebenen erster Art; die Zahl der letzteren hängt aber von den Zeichen der vier Grössen  $q_i, q_k, q_l, q_m$  ab, da jede solche Ebene nur dann erscheint, wenn das ihr entsprechende Paar dieser Grössen entgegengesetzte Zeichen hat.

Alle in dieser Beziehung möglichen Fälle sind in der unten folgenden Tabelle (s.S.292), in welcher, um Raum zu sparen, die Benennung der Grenzebenen erster Art ausgelassen ist, zusammengestellt. Für die echten Grenzebenen zweiter Art sind der Anschaulichkeit wegen im Falle von vier Ebenen die Bezeichnungen  $P'_{1234}, P'_{1235}, P'_{1236}$ , und im Falle von vier Ebenen die Bezeichnungen 102) genommen.

	$q_1$	$q_2$	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$	$P'_{1234}$	$P_{1235}$	$P'_{1236}$	$P'_{1234}$	$P'_{2345}$	$P'_{3456}$	$P'_{1346}$
1	-	+	+	+	+	+	III	III	III	III	0	0	III
2	+	-	+	+	+	+	III	III	III	III	III	0	0
3	+	+	-	+	+	+	III	III	III	III	III	III	III
4	+	+	+	-	+	+	III	0	0	III	III	III	III
5	+	+	+	+	-	+	0	III	0	0	III	III	0
6	+	+	+	+	+	-	0	0	III	0	0	III	III
7	-	-	+	+	+	+	IV	IV	IV	IV	III	0	III
8	-	+	-	+	+	+	IV	IV	IV	IV	III	III	IV
9	-	+	+	-	+	+	IV	III	III	IV	III	III	IV
10	-	+	+	+	-	+	III	IV	III	III	III	III	III
11	-	+	+	+	+	-	III	III	IV	III	0	III	IV
12	+	-	-	+	+	+	IV	IV	IV	IV	IV	III	III
13	+	-	+	-	+	+	IV	III	III	IV	IV	III	III
14	+	-	+	+	-	+	III	IV	III	III	IV	III	0
15	+	-	+	+	+	-	III	III	IV	III	III	III	III
16	+	+	-	-	+	+	IV	III	III	IV	IV	IV	IV
17	+	+	-	+	-	+	III	IV	III	III	IV	IV	III
18	+	+	-	+	+	-	III	III	IV	III	III	IV	IV
19	+	+	+	-	-	+	III	III	0	III	IV	IV	III
20	+	+	+	-	+	-	III	0	III	III	III	IV	IV
21	+	+	+	+	-	-	0	III	III	0	III	IV	IV
22	-	-	-	+	+	+	III	III	III	III	IV	III	IV
23	-	-	+	-	+	+	III	IV	IV	III	IV	III	IV
24	-	-	+	+	-	+	IV	III	IV	IV	IV	III	III
25	-	-	+	+	+	-	IV	IV	III	IV	III	III	IV
26	-	+	-	-	+	+	III	IV	IV	III	IV	IV	III
27	-	+	-	+	-	+	IV	III	IV	IV	IV	IV	IV
28	-	+	-	+	+	-	IV	IV	III	IV	III	IV	III
29	-	+	+	-	-	+	IV	IV	III	IV	IV	IV	IV
30	-	+	+	-	+	-	IV	III	IV	IV	III	IV	III
31	-	+	+	+	-	-	III	IV	IV	III	III	IV	IV

Durch römische Ziffern ist die Zahl der Seiten der diesen Ebenen entsprechenden Gebiete möglicher Schraubenaxen angegeben. Von den

64 möglichen Zeichenkombinationen der Grössen  $q$  ist nur die Hälfte genommen, da die andere den entgegengesetzten Zeichen von  $q$  entsprechende Hälfte die entgegengesetzte Richtung derselben Schraubenaxen betrifft. Ausserdem sind die beiden Fälle, in welchen alle Grössen  $q$  positiv oder negativ sind und also keine Opposition der Normalen möglich ist, von der Betrachtung ausgeschlossen.

In Wirklichkeit werden einige der hier stehenden Fälle fehlen, da bei sechs Stützflächen die Parameterkugel durch die zu den Stütznormalen senkrechten Ebenen in 32 Gebiete geteilt wird, so dass nicht alle 64 Zeichenkombinationen für die Grössen  $q$  wirklich auftreten.

40. Wir wollen jetzt die möglichen Gebiete der Schraubenaxen im Falle von drei echten Grenzebenen zweiter Art näher untersuchen.

a) Die in der Tabelle unter Nr. 4, 5, 6, 19, 20 und 21 stehenden Fälle sind unmöglich, da dort für einige der zu vier genommenen Stütznormalen,  $(n_1 n_2 n_3 n_4)$ ,  $(n_1 n_2 n_3 n_5)$ ,  $(n_1 n_2 n_3 n_6)$ , die Grössen  $q$  gleiche Zeichen haben (z.B. in Nr. 4 die Grössen  $q_1, q_2, q_3, q_5$  und  $q_1, q_2, q_3, q_6$ ); das widerspricht aber der Voraussetzung, dass die betrachteten zu vier genommenen Stütznormalen sich in Opposition befinden.

b) In den Fällen 1, 2, 3 und 22 wird das Gebiet möglicher Axen durch den gemeinsamen Teil von drei Dreiecken bestimmt. Er kann hier auf zweierlei Weise gebildet werden. In den Fällen 1, 2 und 3 haben alle drei Dreiecke zwei Seiten  $s'_{21}, s'_{31}$  gemein; z.B. in Nr. 1 sind sie durch die Geraden

$$(s'_{21} s'_{31} s'_{41}), (s'_{21} s'_{31} s'_{51}), (s'_{21} s'_{31} s'_{61})$$

begrenzt. Da aber alle Dreiecke auf einer und derselben Seite von den Geraden  $s'_{21}$  und  $s'_{31}$  liegen, — denn die gegebene Axenrichtung ist eine mögliche, das Zeichen von  $\omega$  in allen Dreiecken also dasselbe — so haben die Dreiecke notwendig einen gemeinsamen Teil. Dieser Fall ist dem in § 28 betrachteten analog. In Nr. 22 haben die Dreiecke keine gemeinsamen Seiten; im Innern aller derselben giebt es aber einen Punkt, die Spur der Geraden  $\sigma_{456}$ , in welchem sich die unechten Grenzebenen  $S''_{56}, S''_{64}, S''_{45}$  schneiden, woraus die Existenz möglicher Schraubenaxen auch in diesem Falle ersichtlich ist. Man vergleiche § 30 und Fig. 11.

c) Zwei Dreiecke und ein Viereck treten in den Fällen 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17 und 18 auf. In allen diesen Fällen, welche den in den Figuren 9 und 10 von § 30 dargestellten analog sind, haben alle drei Gebiete zwei gemeinsame Seiten, woraus wieder die Existenz eines möglichen Axengebietes folgt. Z.B. für den Fall 9 sind die drei Gebiete durch folgende Seiten begrenzt:

$$(s'_{21} s'_{31} s'_{51}), (s'_{21} s'_{31} s'_{61}), (s'_{21} s'_{31} s'_{24} s'_{34}).$$

d) In den Fällen 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30 und 31 gehört das mögliche Axengebiet zwei Vierecken und einem Dreieck an. Die Existenz dieses Gebietes folgt daraus, dass alle drei Figuren zwei gemeinsame Seiten haben; z. B. im Falle 31 finden wir:

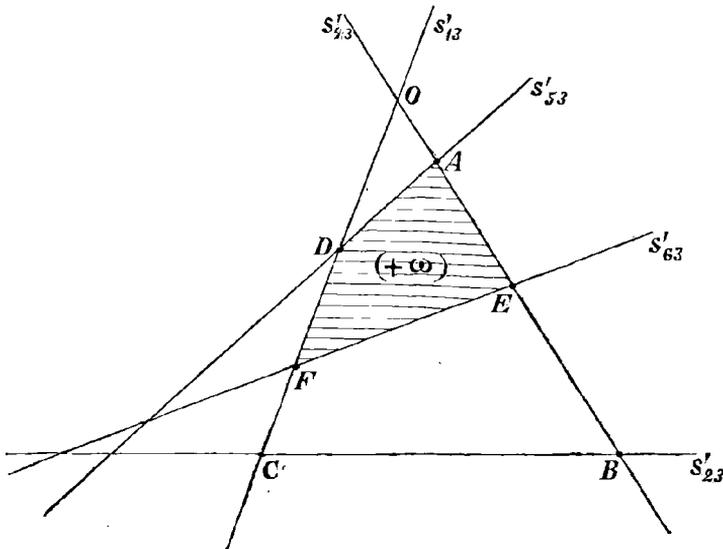
$$(s'_{21} s'_{31} s'_{41}), (s'_{21} s'_{31} s'_{25} s'_{35}), (s'_{21} s'_{31} s'_{26} s'_{36}).$$

e) Das Gebiet möglicher Axen wird in den Fällen 7, 8 und 12 durch drei Vierecke bestimmt, welche auch wirklich einen gemeinsamen Teil haben, da bei ihnen wieder zwei Seiten gemein sind, z. B. im Falle 12:

$$(s'_{21} s'_{13} s'_{32} s'_{43}), (s'_{12} s'_{13} s'_{52} s'_{53}), (s'_{12} s'_{13} s'_{62} s'_{63}).$$

41. Wenn von den Grenzebenen zweiter Art vier Ebenen echte sind, finden wir folgendes:

Fig. 14.



a) Die unter Nr. 1, 2, 5, 6, 7, 11, 14 und 21 angegebenen Fälle sind aus demselben Grunde unmöglich, wie die Fälle a) in § 40.

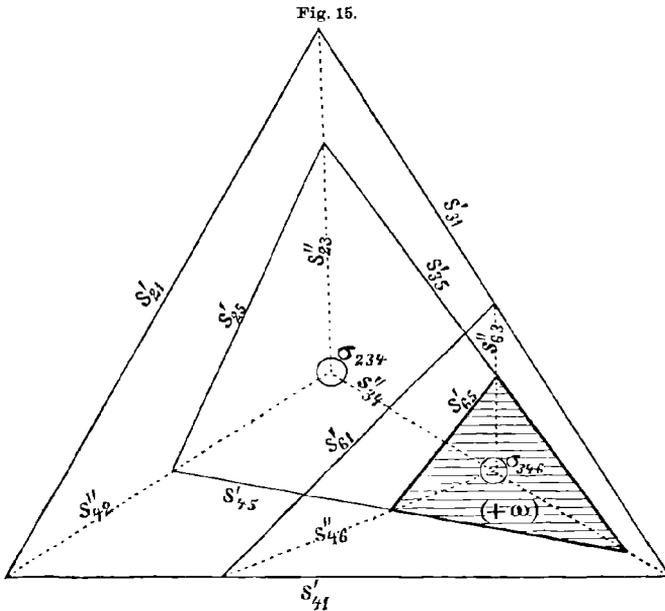
b) Wegen der in § 34 gezeigten Eigentümlichkeit, mit welcher die vier Kombinationen der die vier echten Grenzebenen bestimmenden Normalen auftreten, können keine solchen Fälle vorkommen, dass das mögliche Axengebiet durch drei Dreiecke und ein Viereck oder drei Vierecke und ein Dreieck bestimmt wird.

c) In den Fällen 3, 4, 10 und 15 gehört das mögliche Axengebiet vier Dreiecken an, wird aber in den zwei ersteren Fällen auf andere Weise gebildet als in den zwei übrigen: in den Fällen 3 und 4 existiert nämlich eine allen vier Dreiecken gemeinsame Seite  $s'_{43}$ , was

in den Fällen 10 und 15 nicht der Fall ist. Wir wollen den Fall 3 näher betrachten; die Seiten der vier Dreiecke sind dort (Fig. 14):

$$(s'_{13} s'_{23} s'_{43}), (s'_{23} s'_{43} s'_{53}), (s'_{43} s'_{53} s'_{63}), (s'_{13} s'_{63} s'_{43});$$

wobei wir zum voraus wissen, dass allen diesen Gebieten dasselbe Zeichen von  $\omega$ , z. B.  $(+\omega)$  entspricht, da wir ja nur mögliche Richtungen von Schraubenaxen betrachten. Nachdem wir das Dreieck  $OBC$  konstruiert haben, bemerken wir, dass die Gerade  $s'_{53}$  eine solche Lage haben muss, bei welcher sie mit den Seiten  $s'_{23}$  und  $s'_{43}$  ein geschlossenes Dreieck bilden kann. Dabei wird der Winkel  $ABC$  zu den beiden Dreiecken gehören; denn sonst würde das Zeichen von  $\omega$



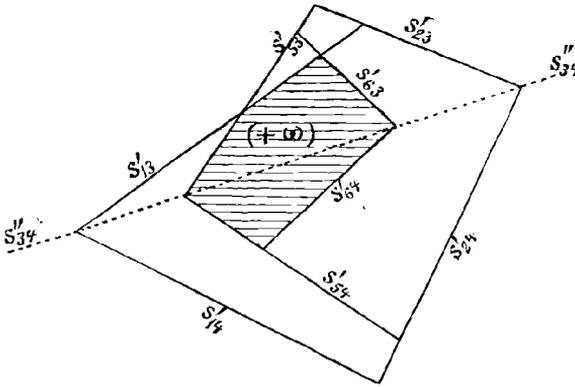
in diesen Dreiecken verschieden sein. Somit stellt das Gebiet  $ABCD$  das den beiden Dreiecken gemeinsame Gebiet dar. Weiter bemerken wir, dass die Gerade  $s'_{63}$  sowohl mit den Seiten  $s'_{13}$  und  $s'_{43}$  als auch mit den Seiten  $s'_{53}$  und  $s'_{43}$  geschlossene Dreiecke bilden und wieder ein Gebiet  $(+\omega)$  begrenzen muss. Dazu ist aber notwendig, dass die Ecken  $O$  und  $A$  sich auf derselben Seite von  $s'_{63}$  befinden; dann wird aber offenbar das ganze Gebiet  $ABCD$  oder ein Teil davon ( $AFFD$  in Fig. 14) zu allen vier Dreiecken gehören. Eine ähnliche Betrachtung ist auch im Falle 4 anwendbar.

In den Fällen 10 und 15 kann die vorige Überlegung nicht gebraucht werden; wir können aber die Eigenschaften der unechten Grenzebenen erster Art benutzen. Betrachten wir den Fall 10, in welchem die Seiten der vier Dreiecke die Geraden

$$120) \quad (s'_{21} s'_{31} s'_{41}), \quad (s'_{25} s'_{35} s'_{45}), \quad (s'_{35} s'_{45} s'_{65}), \quad (s'_{31} s'_{41} s'_{61})$$

sind. Wir konstruieren (Fig. 15) die ersten zwei Dreiecke, wobei wir beachten, dass (§ 30) die Ecken derselben auf den Geraden  $s''_{34}, s''_{42}, s''_{23}$ , den Spuren der unechten Grenzebenen, liegen müssen, und dass innerhalb der beiden Dreiecke der Punkt  $\sigma_{234}$ , die Spur der Durchschnittsgeraden der drei genannten unechten Grenzebenen, enthalten ist. Weiter bemerken wir, dass die zwei anderen Dreiecke 120) den Punkt  $\sigma_{346}$ , welcher die Spur der Durchschnittsgeraden der drei Ebenen  $S''_{467}, S''_{637}, S''_{34}$  ist, einschliessen. Endlich sehen wir noch, dass

Fig. 16.



diese Dreiecke mit den zwei ersteren entsprechend die Geraden  $s'_{35}, s'_{45}$  und  $s'_{31}, s'_{41}$  gemein haben, und dass den zwischen ihnen eingeschlossenen Winkeln der Dreiecke, wegen der vorausgesetzten Möglichkeit der genommenen Axenrichtung, dasselbe Zeichen von  $\omega$  entspricht. Daraus folgt, dass der Punkt  $\sigma_{346}$  innerhalb aller vier Dreiecke liegt, so dass dieselben notwendig einen gemeinsamen Teil besitzen.

Auf ähnliche Weise kann auch der Fall 15 untersucht werden.

d) Die Betrachtung der vorhergehenden Fälle zeigt in genügender Weise, wie die Existenz des möglichen Axengebietes auch in denjenigen Fällen bewiesen werden kann, wo zwei Dreiecke und zwei Vierecke auftreten. Es wird daher genügen darauf aufmerksam zu machen, dass diese Fälle auch in zwei Gruppen zerfallen. Zu der ersten Gruppe gehören die Fälle 8, 9, 12, 13, 17, 18, 19, 20, 22, 28 und 30, in welchen alle vier Figuren eine gemeinsame Seite haben, was davon abhängt, dass jetzt den Normalen  $n_3$  und  $n_4$ , welche in jeder der vier echten Grenzebenen zweiter Art auftreten, verschiedene Zeichen von  $q_3$  und  $q_4$  entsprechen. Diese Fälle können also auf dieselbe Weise wie die in der Abteilung c) dieses Paragraphen betrachteten und in Fig. 14 dargestellten untersucht werden. Zur zweiten

Gruppe gehören die Fälle 24, 25, 26 und 31, in welchen keine gemeinsame Seite der vier Figuren existiert. Jetzt haben diese Figuren, paarweise genommen, zwei zusammenfallende Seiten, was dem anderen, in Figur 15 dargestellten Falle der Abteilung c) dieses Paragraphen analog ist. Der Umstand, dass jetzt an Stelle zweier Dreiecke zwei Vierecke stehen, ist nicht wesentlich.

e) Die Fälle 16, 27 und 29, in welchen das mögliche Axengebiet vier Vierecken angehört, sind den oben betrachteten teilweise analog.

Im Falle 16, wo die Seiten der Vierecke durch die Geraden

$$121) (s'_{13} s'_{23} s'_{14} s'_{24}), (s'_{28} s'_{53} s'_{24} s'_{54}), (s'_{53} s'_{63} s'_{54} s'_{64}), (s'_{13} s'_{63} s'_{14} s'_{64})$$

gebildet werden, giebt es keine allen Figuren gemeinsame Seite, aber dafür ist die Gerade  $s''_{34}$ , die Spur der unechten Grenzebene erster Art  $S''_{34}$ , ihrer Lage nach die gemeinsame Diagonale aller vier Vierecke; denn sie enthält die Ecken dieser Vierecke:  $\sigma_{134}$  und  $\sigma_{234}$ ,  $\sigma_{234}$  und  $\sigma_{534}$ ,  $\sigma_{534}$  und  $\sigma_{634}$ ,  $\sigma_{634}$  und  $\sigma_{134}$  (§ 22). Dieses im Auge behaltend, wollen wir die Konstruktion der Vierecke der Reihe nach ausführen (Fig. 16) und dabei beachten, dass in allen diesen vier Gebieten  $\omega$  dasselbe Zeichen hat, da die genomene Axenrichtung als eine mögliche vorausgesetzt wird. Die ersten zwei von den Vierecken 121) haben offenbar einen gemeinsamen Teil, da zwei Paare ihrer Seiten gemeinsam sind. Das dritte Viereck hat mit dem zweiten zwei andere Seiten gemein, ausserdem können aber seine zwei anderen Seiten nur eine solche Lage haben, bei welcher sie mit zwei Seiten,  $s'_{13}$  und  $s'_{14}$ , des ersten Vierecks das vierte Viereck bilden, welchem dabei dasselbe Zeichen von  $\omega$  entsprechen muss. Dann werden alle Vierecke notwendig einen gemeinsamen Teil haben, welcher das mögliche Axengebiet bestimmt.

In den Fällen 27 und 29 liegt eine Seite eines jeden Vierecks auf einer und derselben Geraden  $s'_{34}$ . Im Falle 27, welchen wir näher betrachten wollen, haben die Seiten der Vierecke folgende Bezeichnung:

$$122) \left\{ \begin{array}{l} s'_{21} s'_{41} s'_{23} s'_{43}, (s'_{23} s'_{25} s'_{43} s'_{45}), (s'_{43} s'_{45} s'_{63} s'_{65}), \\ (s'_{41} s'_{61} s'_{43} s'_{63}). \end{array} \right.$$

Die Diagonalen sind die Spuren

$$123) (s''_{13}, s''_{24}) (s''_{24}, s''_{35}), (s''_{35}, s''_{46}), (s''_{46}, s''_{13})$$

der unechten Grenzebenen erster Art. Da in allen vier Vierecken  $\omega$  dasselbe Zeichen hat, so liegen sie alle auf einer und derselben Seite der Geraden  $s'_{34}$ ; dasselbe gilt auch von den Durchschnittspunkten der Diagonalen 123). Dieses beachtend, ziehen wir jetzt die Geraden

$$s'_{43}, s''_{13}, s''_{24}, s''_{35}, s''_{46}$$

und bilden die Vierecke 122). Es sei  $ABCD$  (Fig. 17) das erste derselben; das zweite Viereck,  $AGFE$ , hat mit ihm die Seiten  $s'_{23}$  und



2. Dementsprechend wird das Gebiet möglicher Axenrichtungen auf der Parameterkugel durch ein sphärisches Dreieck oder ein Viereck bestimmt und kann nicht nur in dem ersten, sondern auch im zweiten Falle niemals vollkommen verschwinden. Somit kann die vollkommene Festlegung des starren Körpers durch sechs Stützflächen nicht erreicht werden.

3. Bei jeder möglichen Axenrichtung giebt es auch notwendig ein Gebiet möglicher Schraubenaxen; dasselbe ist in einem vielkantigen Prisma, dessen Kanten der gegebenen Axenrichtung parallel sind, eingeschlossen. Dabei ist die Drehung um diese Axen nur in einer Richtung möglich.

4. Mit Hilfe von sechs Stützflächen kann man den festen Körper zwingen, nur eine Schraubenverschiebung um eine bestimmte Axe mit einem bestimmten Parameterwerte zu haben; dazu müssen die Stütznormalen einem und demselben Komplexe ersten Grades angehören und ihre Richtungen müssen so genommen werden, dass wenigstens vier von denselben eine Opposition bilden. Die Drehung um diese Axe ist dann nach beiden Richtungen möglich.

## VI. Die Festlegung des starren Körpers durch Stützflächen.

43. Wir werden jetzt sieben Stützflächen betrachten und solche Richtungen der Stütznormalen voraussetzen, dass wenigstens vier von denselben eine Opposition bilden. Dann ist die Zahl der echten Grenzebenen zweiter Art gleich vier oder sechs oder acht. Für das Folgende müssen wir uns klar machen, unter welchen Bedingungen diese Fälle eintreten können und auf welche Weise in diesen Fällen die Stütznormalen sich kombinieren.

Erster Fall. Die Zahl der echten Grenzebenen zweiter Art ist vier bei folgender Lage der Stütznormalen. Es seien  $n_1, n_2, n_3, n_4$  vier sich in Opposition befindende Normalen und  $P'_{1234}$  die ihnen entsprechenden echten Grenzebenen zweiter Art; fügen wir die Normale  $n_5$  hinzu und bestimmen nach bekannten Regeln (§ 26) diejenigen drei von den vier ersten Normalen, welche mit der fünften Normale eine Opposition bilden. Wenn  $n_1, n_2, n_3$  diese Normalen sind, so bekommen wir die Grenzebene  $P'_{1235}$ . Die sechste Normale  $n_6$  einfürend, müssen wir sehen, mit welchen drei Normalen aus der ersten und ebenso aus der zweiten Kombination derselben sie eine Opposition bildet. Wenn wir voraussetzen, dass die Normale  $n_6$  wieder mit  $n_1, n_2, n_3$  in Opposition ist, so erscheint die dritte Grenzebene  $P'_{1236}$ . Es ist klar, dass in Bezug auf die zweite Kombination der Normalen ( $n_1, n_2, n_3, n_5$ ) die Normale  $n_6$  ebenfalls mit den drei ersteren eine Opposition bildet, so dass dadurch keine neue Grenzebene erhalten wird. Wenn endlich die siebente Normale  $n_7$  dieselbe Eigenschaft in Bezug auf die vier ersteren Normalen besitzt, so bekommen wir die Grenzebene  $P'_{1237}$ ; die Verbindung von  $n_7$  mit der zweiten und dritten Gruppe der

Stütznormalen,  $(n_1, n_2, n_3, n_5)$  und  $(n_1, n_2, n_3, n_6)$ , giebt dann keine neue Grenzebene, so dass das ganze System derselben aus vier Ebenen

124)  $P'_{1234}, P'_{1235}, P'_{1236}, P'_{1237}$   
besteht.

Zweiter Fall. Von den ersten sechs Stütznormalen wollen wir voraussetzen, dass sie früheren Bedingungen genügen, d.h. die Grenzebenen  $P'_{1234}, P'_{1235}$  und  $P'_{1236}$  bestimmen. Wenn aber die Normale  $n_7$  mit der ersten Gruppe von vier Normalen auf eine andere Weise als früher die Opposition bildet, z.B. die Ebene  $P'_{2347}$  giebt, so wird sie auch mit den anderen zwei Gruppen von vier Normalen zwei neue Grenzebenen bestimmen. Dieselben müssen notwendig so bezeichnet werden:  $P'_{2357}$  und  $P'_{2367}$ ; denn die sechs Normalen  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_7$  entsprechen jetzt demjenigen Falle des vorhergehenden Kapitels, wo nicht drei Grenzebenen, wie es im ersten Falle war, sondern vier solche Ebenen auftreten. Von denselben haben wir aber schon drei Ebenen  $P'_{1234}, P'_{1235}$  und  $P'_{2347}$  gefunden; da die vierte Ebene nach unserer Voraussetzung nicht die Ebene  $P'_{1237}$  sein kann, so muss ihre Bestimmung notwendig von der Normale  $n_6$  abhängen, andererseits muss sie aber (§ 34) von denjenigen zwei Normalen abhängen, welche in jeder der drei ersteren Grenzebenen auftreten, in unserem Falle also von den Normalen  $n_2$  und  $n_3$ . Somit ist die gesuchte Ebene  $P'_{2357}$ . Eine ähnliche Überlegung zeigt uns, dass die dritte Gruppe der vier Normalen  $(n_1, n_2, n_3, n_6)$  mit der Normale  $n_7$  die Ebene  $P'_{2367}$  bestimmt. Das gesuchte System echter Grenzebenen zweiter Art besteht also aus den Ebenen:

125)  $P'_{1234}, P'_{1235}, P'_{1236}, P'_{2347}, P'_{2357}, P'_{2367}$ .

Dritter Fall. Er erscheint dann, wenn die ersten sechs Stütznormalen nicht drei, sondern vier echte Grenzebenen zweiter Art bestimmen. Wenn dieselben, wie im Beispiel des vorhergehenden Kapitels,

$P'_{1234}, P'_{2435}, P'_{3456}, P'_{1346}$

sind, dann wird die Verbindung der Normale  $n_7$  mit jeder Gruppe der diese Ebenen bestimmenden Normalen entweder zwei oder vier neue echte Grenzebenen geben. Wir erhalten zwei Ebenen, wenn  $n_7$  in Verbindung mit den ersten vier Normalen die Ebenen  $P'_{2347}$  und  $P'_{1347}$  bestimmt; dieser Fall aber wurde schon oben betrachtet. Nehmen wir also an, dass  $n_7$  mit  $n_1, n_2, n_3, n_4$  eine andere Kombination bildet und z.B. die Ebene  $P'_{1237}$  bestimmt; dann wird  $n_7$  mit der zweiten Gruppe der Normalen notwendig die Ebene  $P'_{2357}$  bestimmen, weil dazu ausser der Normalen  $n_5$  und  $n_7$  diejenigen zwei Normalen beitragen müssen, von welchen jede der drei Ebenen  $P'_{1234}, P'_{2345}, P'_{1237}$  abhängt. Aus demselben Grunde wird  $n_7$  mit der dritten Gruppe der Normalen  $(n_3, n_4, n_5, n_6)$  die Grenzebene  $P'_{3567}$  und mit der vierten Gruppe die Ebene  $P'_{1367}$  geben. Das ganze System wird also aus acht Ebenen

$$126) \quad \begin{cases} P'_{1234}, & P'_{2435}, & P'_{3456}, & P'_{1346}, \\ P'_{1237}, & P'_{2357}, & P'_{3567}, & P'_{1367}, \end{cases}$$

bestehen.

Alle anderen Voraussetzungen über die sieben Stütznormalen werden unumgänglich zu einem der drei betrachteten Fälle führen, und die Grenzebenen werden sich nur durch eine andere Numeration der Indices unterscheiden. Daher werden wir weiter die Bezeichnungen 124), 125) und 126), welche als typische Bezeichnungen betrachtet werden können, behalten.

44. Im Falle von vier echten Grenzebenen zweiter Art kann auf der Parameterkugel ein Gebiet möglicher Axenrichtungen existieren oder nicht. Beim Verschwinden desselben bleiben dem starren Körper keine Schraubenaxen möglich. Wir wollen die dazu nötigen Bedingungen aufsuchen. Wir können zu diesem Zwecke das in § 37 angegebene Verfahren benützen. Es sei  $V_{321} < 0$ ; dann werden, dem Schema 98) und den Bezeichnungen 124) gemäss, auch die Grössen

$$\begin{array}{ccc} V_{234}, & V_{314}, & V_{124} \\ V_{235}, & V_{315}, & V_{125} \\ V_{236}, & V_{316}, & V_{126} \\ V_{237}, & V_{317}, & V_{127} \end{array}$$

alle negativ sein. Nach der Regel, welche auf der Parameterkugel das Gebiet  $(+\omega)$  oder  $(-\omega)$  bestimmt und durch die Ungleichheiten 82) oder 83) ausgedrückt wird, haben wir also die Bedingungen:

$$P'_{1234} < 0, \quad P'_{1235} < 0, \quad P'_{1236} < 0, \quad P'_{1237} < 0$$

für  $(+\omega)$  und die entgegengesetzten für  $(-\omega)$ . Sollen diese Gebiete verschwinden, so müssen (§ 37)  $U_{klm}, U_{lim}, U_{ikm}, U_{lki}$  dasselbe Zeichen haben. Es ist jetzt aber:

$$U_{klm} = U_{567} = \begin{vmatrix} L_{1235} & L_{1236} & L_{1237} \\ M_{1235} & M_{1236} & M_{1237} \\ N_{1235} & N_{1236} & N_{1237} \end{vmatrix}$$

u. s. w. Die nach Art von § 36 ausgeführte Rechnung giebt, den Formeln 113) gemäss:

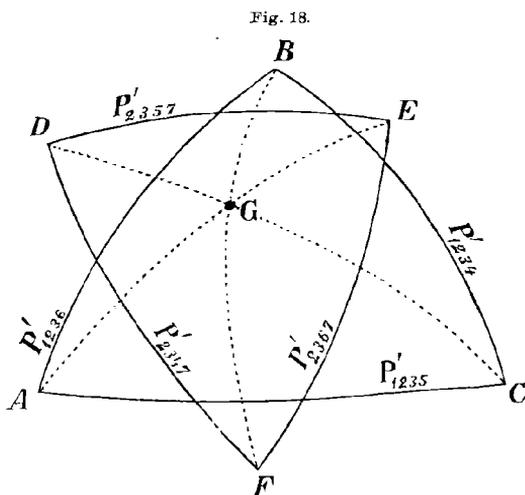
$$\begin{aligned} U_{klm} &= U_{567} = V_{123}^2 D_4, \\ U_{lim} &= U_{647} = -U_{467} = -V_{123}^2 D_5, \\ U_{ikm} &= U_{457} = V_{123}^2 D_6, \\ U_{lki} &= U_{654} = -U_{456} = -V_{123}^2 D_7, \end{aligned}$$

wo  $D_s$  eine Determinante sechsten Grades, welche aus den Koordinaten aller Stütznormalen ausser derjenigen von  $n_s$  gebildet ist, darstellt. Dabei wird vorausgesetzt, dass in den Zeilen aller vier Determinanten die Indices 1, 2, 3, . . . in wachsender Reihenfolge gestellt sind. Wir sehen jetzt, dass für das Verschwinden möglicher Axenrichtungen notwendig ist, dass zwei von den Determinanten  $D_4, D_5, D_6, D_7$  positiv und die zwei anderen negativ seien. Man kann also sagen: Die kleinste Zahl von Stützflächen, bei welcher die Festlegung

eines starren Körpers möglich ist, ist sieben. Diese Festlegung wird unter folgenden Bedingungen erreicht: 1. unter den Stütznormalen müssen sich vier solche vorfinden, dass sie eine Opposition bilden; 2. die drei übrigen Normalen müssen solche Richtungen haben, dass auf der Parameterkugel die negativen Endpunkte ihrer Richtungen im Gebiete eines sphärischen Dreiecks liegen, welches die positiven Endpunkte der Richtungen dreier von den vier ersten Normalen zu seinen Ecken hat; 3. wenn man vier Determinanten sechsten Grades aus den Koordinaten von Stütznormalen auf solche Weise bildet, dass dort jedesmal die Koordinaten derjenigen drei Normalen sich vorfinden, welche die Ecken des oben genannten Dreiecks bestimmen, so müssen zwei von diesen Determinanten das entgegengesetzte Zeichen von dem der zwei anderen haben.

Unten werden wir sehen, dass dieser Fall bei sieben Stützflächen der einzige ist, in welchem die vollkommene Tilgung möglicher Schraubenaxen erreichbar ist, so dass die oben angeführten Bedingungen nicht nur hinreichende, sondern auch notwendige sind. Die Erfüllung dieser Bedingungen ist aber immer möglich, weil wir überzählige Elemente für die Bildung der geforderten Zeichen der vier Determinanten haben; nämlich die Momente der Stütznormalen.

45. Nehmen wir jetzt an, dass sechs Grenzebenen zweiter Art 125) echte sind. Die drei Ebenen  $P'_{1234}$ ,  $P'_{1235}$  und  $P'_{1236}$



bestimmen auf der Parameterkugel ein sphärisches Dreieck  $ABC$  (Fig. 18), welches das Gebiet möglicher Axenrichtungen enthalten würde, wenn die siebente Stützfläche nicht vorhanden wäre; ebenso bestimmen die Ebenen  $P'_{2345}$ ,  $P'_{2357}$  und  $P'_{2367}$  ein anderes sphärisches Dreieck  $DEF$ , welches bei Abwesenheit der Normale  $n_1$  die möglichen Axenrichtungen enthalten würde. Zum Verschwin-

den aller möglichen Schraubenaxen ist es notwendig und hinreichend, dass diese zwei Dreiecke keinen gemeinsamen Teil besitzen. Man kann aber zeigen, dass diese Forderung in Wirklichkeit nicht erfüllt

werden kann. Dazu kann man die unechten Grenzebenen zweiter Art (§ 31) benutzen. Die fünf Normalen  $n_1, n_2, n_3, n_5, n_6$  bestimmen ausser den zwei echten Grenzebenen,  $P'_{1235}$  und  $P'_{1236}$ , drei unechte:

$$127) \quad P''_{2356}, \quad P''_{1356}, \quad P''_{1256};$$

ebenso entsprechen den fünf Normalen  $n_2, n_3, n_5, n_6, n_7$  ausser den zwei echten Grenzebenen,  $P'_{2357}$  und  $P'_{2367}$ , drei unechte:

$$128) \quad P''_{3567}, \quad P''_{2567}, \quad P''_{2356}.$$

Die eine Ebene,  $P''_{2356}$ , ist in den beiden Systemen 127) und 128) enthalten. Auf ähnliche Weise finden wir, dass den Ebenen  $P'_{1236}$ ,  $P'_{1234}$  und  $P'_{2367}$ ,  $P'_{2347}$  zwei Systeme von unechten Grenzebenen:

$$\begin{array}{ccc} P''_{2346}, & P''_{1346}, & P''_{1246}, \\ P''_{3467}, & P''_{2467}, & P''_{2346}, \end{array}$$

unter welchen eine,  $P''_{2346}$ , gemeinschaftlich ist, entsprechen. Endlich gehören zu den zwei Paaren echter Grenzebenen,  $P'_{1234}$ ,  $P'_{1235}$  und  $P'_{2347}$ ,  $P'_{2357}$ , zwei Systeme unechter:

$$\begin{array}{ccc} P''_{2345}, & P''_{1345}, & P''_{1245}, \\ P''_{3457}, & P''_{2457}, & P''_{2345}, \end{array}$$

in welchen beiden  $P''_{2345}$  vorkommt. Es wurde schon in § 31 gezeigt, dass im Falle von fünf Stützflächen die den zwei echten Grenzebenen entsprechenden unechten Grenzebenen zweiter Art die Schnittgerade der echten enthalten und in demjenigen Paare der von den letzteren gebildeten Scheitelwinkel liegen, welches auf der Parameterkugel das Gebiet der möglichen Axenrichtungen einschliesst. Daraus folgt, dass die Spuren der Ebenen

$$129) \quad P''_{2456}, \quad P''_{2346}, \quad P''_{2345}$$

auf der Parameterkugel sich im Innern der beiden Dreiecke  $ABC$  und  $DEF$  schneiden müssen, und zudem in einem und demselben Punkte  $G$ , weil die Ebenen 129) wieder einem Systeme von fünf Stütznormalen  $n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$  entsprechen (§ 31). Da dieser Punkt zu den beiden Gebieten  $ABC$  und  $DEF$  gehört, so haben dieselben notwendig einen gemeinsamen Teil. Man kann übrigens noch nicht unmittelbar behaupten, dass dieser gemeinsame Teil das Gebiet möglicher Axenrichtungen darstellt; denn es ist dazu noch notwendig, dass das Zeichen von  $\omega$  in beiden Gebieten dasselbe sei. Folgende Überlegung wird aber zeigen, dass diesen Gebieten, wenn sie nur einmal einander decken, nicht verschiedene Zeichen von  $\omega$  entsprechen können. Ziehen wir aus dem Systeme 125) die vier Ebenen  $P'_{1235}$ ,  $P'_{1236}$ ,  $P'_{2357}$ ,  $P'_{2367}$

heraus; diese Ebenen bilden das volle System der echten Grenzebenen zweiter Art im Falle von sechs Stützflächen mit den Normalen  $n_1, n_2, n_3, n_5, n_6, n_7$ . Auf der Parameterkugel bilden sie ein sphärisches Viereck, welches (§ 37) das Gebiet der möglichen Axenrichtungen für diese sechs Stützflächen bestimmt. Einerseits muss  $\omega$  in diesem Gebiete dasselbe Zeichen haben, wie im Gebiete  $ABC$ , da in ihnen der

Winkel zwischen  $P'_{1235}$  und  $P'_{1236}$  gemeinsam ist; anderseits muss aber das Zeichen von  $\omega$  dasselbe wie in  $DEF$  sein, weil dieses Gebiet mit dem Vierecke den Winkel zwischen  $P'_{2357}$  und  $P'_{2367}$  gemein hat. Daraus folgt aber, dass den Gebieten  $ABC$  und  $DEF$  nur ein und dasselbe Zeichen von  $\omega$  entsprechen kann. Der gemeinsame Teil beider Dreiecke bestimmt also in der That das Gebiet möglicher Axenrichtungen.

Man müsste noch zeigen, dass es für jede mögliche Axenrichtung auch ein Gebiet möglicher Schraubenaxen giebt; wir werden aber das nicht thun, da es auf ganz dieselbe Weise wie im vorigen Kapitel (§§ 40 und 41) geschehen kann.

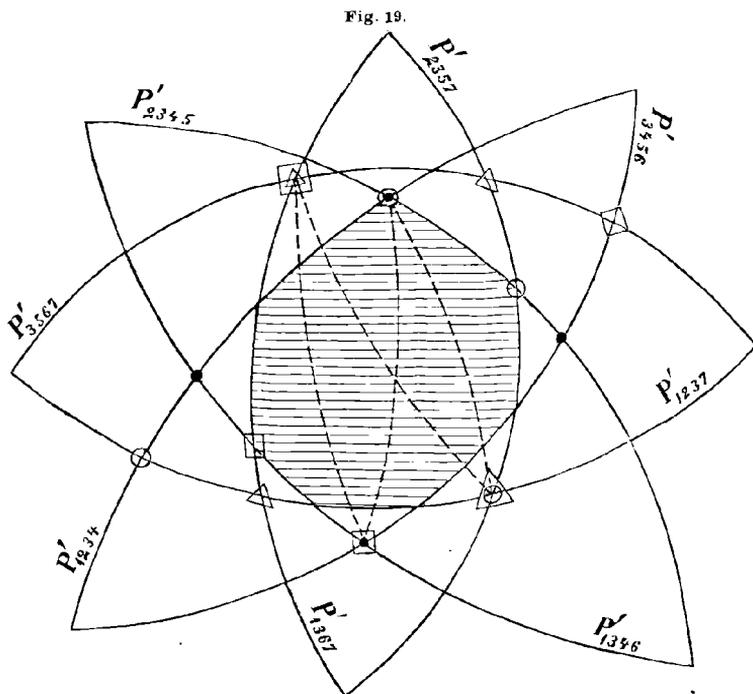
46. In dem letzten Falle, wo acht echte Grenzebenen zweiter Art auftreten, kann das vollkommene Verschwinden möglicher Schraubenaxen auch nicht erreicht werden. Um das zu zeigen, werden wir davon ausgehen, dass durch sechs Stützflächen die Festlegung nicht möglich ist. Acht Grenzebenen kann man auf sechsfache Weise so kombinieren, dass jedesmal vier von denselben das volle System echter Grenzebenen zweiter Art für sechs von den sieben Stützflächen darstellen. Dabei muss man die Regel (§ 34), nach welcher die Indices der sechs Normalen in der Bezeichnung der vier Grenzebenen auftreten, festhalten. Demgemäss bekommen wir folgende sechs Gruppen:

- |      |               |               |               |             |                |
|------|---------------|---------------|---------------|-------------|----------------|
| 130) | $P'_{1234}$ , | $P'_{2345}$ , | $P'_{3456}$ , | $P'_{1346}$ | (ohne $n_7$ ), |
| 131) | $P'_{1237}$ , | $P'_{2357}$ , | $P'_{3567}$ , | $P'_{1367}$ | (ohne $n_4$ ), |
| 132) | $P'_{1234}$ , | $P'_{2345}$ , | $P'_{2357}$ , | $P'_{1237}$ | (ohne $n_6$ ), |
| 133) | $P'_{1346}$ , | $P'_{3456}$ , | $P'_{3567}$ , | $P'_{1367}$ | (ohne $n_2$ ), |
| 134) | $P'_{1234}$ , | $P'_{1346}$ , | $P'_{1367}$ , | $P'_{1237}$ | (ohne $n_5$ ), |
| 135) | $P'_{2345}$ , | $P'_{2357}$ , | $P'_{3567}$ , | $P'_{3456}$ | (ohne $n_1$ ). |

Die siebente Gruppe, welche  $n_3$  nicht enthält, ist nicht möglich, da der Index 3 in der Bezeichnung aller acht Ebenen (26) steht Ausserdem sind auch andere Kombinationen unmöglich, da sie der in § 34 gezeigten Eigenschaft, dass dieselben zwei Indices in der Bezeichnung aller vier Ebenen einer Gruppe stehen, nicht genügen. Wir werden zuerst die Gruppen 130), 131), 132) und 133) betrachten. Die Ebenen 130) bestimmen auf der Parameterkugel ein Gebiet der bei sechs Stützflächen (mit den Normalen  $n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6$ ) möglichen Axenrichtungen. Dieses Gebiet hat die Form eines sphärischen Vierecks, dessen Ecken die Schnittpunkte der Spuren von  $P'_{1234}$  und  $P'_{2345}$ ,  $P'_{2345}$  und  $P'_{3456}$ ,  $P'_{3456}$  und  $P'_{1346}$ ,  $P'_{1346}$  und  $P'_{1234}$ , d. h. überhaupt diejenigen Paare von Grenzebenen sind, welche Gruppen von fünf Normalen entsprechen.\* Die Lage der Ebenen 130) ist in Fig. 19 dargestellt. Betrachten wir jetzt die Gruppe 132); sie ent-

\* So dass kein Schnittpunkt der Spuren von den Ebenen  $P'_{1234}$  und  $P'_{3456}$  oder  $P'_{2345}$  und  $P'_{1346}$  als Ecke dienen kann.

hält, ausser den zwei neuen Ebenen  $P'_{2357}$  und  $P'_{1237}$ , zwei frühere Ebenen  $P'_{1234}$  und  $P'_{2345}$ ; wir brauchen also, um das der Gruppe 132) entsprechende Viereck zu zeichnen, nur die Spuren der ersteren zwei Ebenen zu ziehen. Mit der Gruppe 131) führen wir die zwei übrigen von den acht echten Grenzebenen ein. Diese Ebenen  $P'_{1367}$  und  $P'_{3567}$  müssen zudem solche Lage haben, dass sie sowohl mit den Ebenen  $P'_{1237}$  und  $P'_{2357}$  als auch mit den Ebenen  $P'_{1346}$  und  $P'_{3456}$



133) Vierecke möglicher Axenrichtungen (bei sechs Stützflächen) bilden. Endlich muss man bei der Konstruktion beachten, dass auch die zwei übrigen Gruppen 134) und 135) Gebiete möglicher Axenrichtungen (bei sechs Stützflächen) geben müssen. In Fig. 19 sind der Anschaulichkeit wegen die Ecken eines jeden Vierecks durch besondere Zeichen angemerkt und ausserdem ist in jedem derselben eine Diagonale gezogen, welche die Spur einer der unechten Grenzebenen erster Art darstellt.

Wenn man allen genannten Forderungen genügt, so ist es nicht möglich, dass kein gemeinsamer Teil aller Vierecke existiert; im umgekehrten Falle würden nicht alle Vierecke die Gebiete möglicher den Gruppen von sechs Stützflächen entsprechenden Axenrichtungen geben, was der Voraussetzung, dass alle acht Ebenen 126) echte sind, widersprechen würde.

Dass allen Vierecken dasselbe Zeichen von  $\omega$  entspricht, davon kann man sich auf dieselbe Weise überzeugen, wie es im analogen Falle in § 45 geschah; wir können nämlich den Umstand benutzen, dass zwei in bestimmter Ordnung genommene Vierecke zu zweien gemeinsame Seiten haben, und dass dem zwischen denselben in den beiden Vierecken eingeschlossenen Winkel dasselbe Zeichen von  $\omega$  entspricht. Es ist also in der That das vollkommene Verschwinden möglicher Schraubenachsenrichtungen im Falle von acht echten Grenzebenen zweiter Art nicht erreichbar.

Man müsste noch zeigen, dass für jede der möglich gebliebenen Axenrichtungen auch ein Prisma existiert, welches mögliche Schraubenachsen enthält; wir werden aber das nicht thun, da es auf ganz dieselbe Weise wie für den Fall von sechs Stützflächen geschehen kann.

47. Alles Gesagte zusammenfassend, finden wir:

1. Wenn vier von den sieben Stützflächen den für die Opposition nötigen Bedingungen genügen, so werden vier oder sechs oder acht Gruppen von vier Stütznormalen in Opposition sein.

2. Im ersten dieser Fälle kann die Festlegung des starren Körpers durch sieben Stützflächen erreicht werden; dazu müssen die in § 44 gegebenen Bedingungen erfüllt werden.

3. Dieser Fall der Festlegung ist bei sieben Stützflächen der einzig mögliche; in den zwei anderen Fällen können die möglichen Schraubenachsen nicht vollkommen verschwinden.

Wenn wir alles in den vorhergehenden Kapiteln Gesagte in Betracht ziehen, so sehen wir, dass die kleinste Zahl von Stützflächen, bei welcher die Festlegung des starren Körpers erreicht werden kann, sieben ist.

Angesichts dieses Resultates brauchen wir unsere Untersuchung weiter nicht fortzusetzen. Im Falle von acht oder mehr Stützflächen kann natürlich die Festlegung bei weniger Begrenzungen für die Stütznormalen erreicht werden, und die Aufsuchung der dazu nötigen Bedingungen bietet keine Schwierigkeit. Die Untersuchung aber aller dabei auftretenden Fälle kann mit denselben Mitteln, welche in den zwei letzten Kapiteln gezeigt wurden, unternommen werden.

# Beitrag zur Knick-Elastizität und -Festigkeit.

Von

Baurat J. KÜBLER

in Esslingen.

Hierzu lithographierte Tafel II.

## A. Gewöhnlicher Fall der nicht stark federnden Stäbe.

Das Kapitel über die Knick-Elastizität und -Festigkeit ist merkwürdigerweise bis jetzt weit hinter dem hohen Grad einer befriedigenden Entwicklung zurückgeblieben, welchen die übrigen Kapitel der Festigkeitslehre bereits erfahren haben. Dies hat wohl seinen Grund in dem Umstand, dass in der Herleitung der Gleichung der elastischen Linie ein für diese besondere Belastungsart charakteristisches Glied bis jetzt nicht zum Ausdruck gekommen ist. Erwägt man nämlich, dass bei der Knickung im allgemeinen die eigentliche Biegung nur gering ist, so kommt man zu der Überzeugung, dass infolgedessen auch dieses — im allgemeinen also nur kleine — Biegemoment allein nicht den Ausschlag geben kann für die Formänderung des gedrückten Stabes, sondern dass dabei notwendigerweise auch der eigentliche Druck selbst — und zwar als der eigentlichen Biegung vollkommen ebenbürtig — zur Geltung kommen muss. In der Folge soll dies näher dargethan werden.

### Genaue Gleichung der elastischen Linie.

Die genaue Gleichung der elastischen Linie findet sich für den zentrisch gedrückten und ursprünglich geraden Stab, von der freien Knicklänge  $l$ , wie folgt: bezeichnet  $\epsilon_0 = \frac{P}{EF}$  die spezifische Zusammendrückung vom Druck  $P$  in einem beliebigen Querschnitt  $F$  des Stabes, (siehe Fig. 1, Taf. II) und ist  $d\varphi = \frac{ds}{r}$  der kleine Winkel, um welchen die beiden benachbarten und ursprünglich parallelen Querschnitte infolge der Biegung durch das Moment

$$M = P(f - y)$$

(siehe Fig. 2, Taf. II) gegen einander verdreht werden, so hat man, mit Rücksicht auf den gleichzeitigen Druck  $P$ , in dem beliebigen Ab-

stand  $\eta$  von der Biegungsaxe, als spezifische Zusammendrückung der Faser daselbst, aus  $d\varphi = \frac{ds(1-\varepsilon_0)}{r} = \frac{(\varepsilon-\varepsilon_0)ds}{\eta}$ :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + (1 - \varepsilon_0) \frac{\eta}{r}$$

und als spezifische Druckspannung:

$$\sigma = E\varepsilon = E \left\{ \varepsilon_0 + (1 - \varepsilon_0) \frac{\eta}{r} \right\}.$$

Aus den Gleichgewichtsbedingungen zwischen den inneren und äusseren Kräften ergibt sich damit für den betrachteten Querschnitt  $F$ :

$$P = \int \sigma dF = \int E \left\{ \varepsilon_0 + (1 - \varepsilon_0) \frac{\eta}{r} \right\} dF = EF\varepsilon_0$$

und

$$M = P(f - y) = \int E \left\{ \varepsilon_0 + (1 - \varepsilon_0) \frac{\eta}{r} \right\} dF \eta = (1 - \varepsilon_0) \frac{EJ}{r}$$

und zwar mit Rücksicht darauf, dass die Biegungsaxe durch den Schwerpunkt  $S$  des Querschnitts  $F$  geht und deshalb

$$\int \eta dF = 0 \quad \text{und} \quad \int \eta^2 dF = J$$

gleich dem Trägheitsmoment in Bezug auf diese Biegungsaxe zu setzen ist. Als Biegungsaxe ist unter sonst gleichen Umständen diejenige Axe anzusehen, in Bezug auf welche das kleinste Trägheitsmoment auftritt.

Mit der üblichen Abkürzung für

$$\frac{P}{EJ} = n^2 \quad \text{und} \quad \frac{J}{F} = i^2$$

hat man also:

$$\varepsilon_0 = \frac{P}{EF} = \frac{P}{EJ} \frac{J}{F} = n^2 i^2$$

und damit:

$$\frac{1}{r} = \frac{M}{EJ(1-\varepsilon_0)} = \frac{P}{EJ} \frac{f-y}{1-\varepsilon_0} = \frac{n^2}{1-n^2 i^2} (f-y)$$

$\varepsilon_0 = n^2 i^2$  ist, als die Zusammendrückung für die Längeneinheit, für alle hier in Betracht kommenden Baustoffe stets eine kleine Grösse, die ohne merklichen Fehler gegen 1 vernachlässigt werden kann.

Beachtet man noch, dass

$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{d\varphi}{dy} \frac{dy}{ds}, \quad \text{mit} \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi$$

also

$$\frac{1}{r} = \frac{d\varphi}{dy} \sin \varphi,$$

so heisst die Differentialgleichung der elastischen Linie noch genau genug ganz allgemein:

1)  $\sin \varphi \, d\varphi = n^2(f - y) \, dy.$

Durch erstmalige Integration findet sich, mit Rücksicht auf die hier einzuführende Integrationskonstante, aus:

$$\int_0^\varphi \sin \varphi \, d\varphi = \int_{y_0}^y n^2(f - y) \, dy:$$

2)  $1 - \cos \varphi = \frac{n^2}{2}(2fy - y^2) + n^2 i^2.$

Von der Richtigkeit der hier ganz besonders wichtigen Integrationskonstanten überzeugt man sich sofort, wenn man beachtet, dass

$$1 - \cos \varphi = \frac{ds}{ds} - \frac{dx}{ds} = \frac{d(s-x)}{ds} = \frac{d\Delta x}{ds}$$

gleichkommt dem verhältnismässigen Längenunterschied zwischen dem Längenelement  $ds$  des Stabes, in seiner ursprünglichen Länge, und dem dazu gehörigen Sehnelement  $dx$  nach der Deformation. Dieser Längenunterschied ist aber auch gleich dem Wege  $\frac{d\Delta x}{ds}$ , oder auch für die ganze Stablänge  $\frac{d\Delta a}{ds}$ , den bei der Deformation die Druckkraft  $P$  zurücklegt, und welcher sich zusammensetzt aus der Zusammendrückung  $\frac{n^2}{2}(2fy - y^2)$ , welche der Stab durch die Biegung vom Moment  $M = P(f - y)$  erfährt, und aus der Verkürzung  $n^2 i^2$  des Stabes vom Druck  $P$  selbst. Gleichung 2) ist also nichts anderes als die Gleichung der Formänderungsarbeit, in welcher ausser der Biegung auch die eigentliche Druckwirkung zur Geltung gekommen ist. Bei der geringen Biegung, um die es sich hier im allgemeinen überhaupt handelt, kommt die kleine Grösse  $n^2 i^2 = \varepsilon_0$  gegen die andere, gewöhnlich ebenfalls nur kleine Grösse  $\frac{n^2}{2}(2fy - y^2)$  sehr wohl in Betracht; sie ausser Acht lassen, würde also heissen, ein für die in Rede stehende Belastungsart geradezu charakteristisches Glied unterdrücken.

Mit Rücksicht auf diese eigentliche Druckwirkung  $n^2 i^2$  wird aber in der Stabmitte, d. i. für  $\varphi = 0$ , aus Gleichung 2) nicht mehr auch  $y = 0$ , — was der Fall sein würde, wenn nur die Biegungsspannung allein in Betracht käme — sondern

$$y = y_0 = f - \sqrt{2i^2 + f^2}.$$

Es fällt deshalb die elastische Linie nicht zusammen mit der deformierten Mittellinie des Stabes, auf welche die Kräfte und Momente bezogen sind, sondern erstere hat einen um  $y_0$  grösseren Pfeil als letztere (siehe Fig. 2 Taf. II), was bei der Bestimmung der weiteren Integrationskonstanten wohl zu beachten ist.

Zur unzweideutigen Klarlegung der Sachlage möchte ich hier noch ganz besonders hervorheben, dass im vorliegendem Fall sehr wohl zu unterscheiden ist zwischen: Elastischer Linie und Gebogener Mittellinie des Stabes. Unter elastischer Linie verstehe

ich die spannungslose, neutrale Mittellinie, d. i. die gebogene Mittellinie des Stabes, die frei ist von jeder Spannung, die im vorliegenden Fall also insbesondere frei ist von der eigentlichen Druckspannung  $n^2 i^2$ . Die Gleichung

$$\frac{dAx}{ds} = \frac{ds - dx}{ds} = 1 - \cos \varphi = \frac{n^2}{2} (2i^2 + 2fy - y^2)$$

ist aber die Gleichung dieser spannungslos gedachten elastischen Mittellinie, von welcher ausgegangen werden muss, wenn der hochwichtige Einfluss der eigentlichen Druckspannung nicht verloren gehen soll. Die beiden genannten Linien sind also nur insofern voneinander verschieden, als die in Fig. 2 (ausgezogene) gedrückte Mittellinie des Stabes in die (gestrichelte) elastische Linie übergeht, wenn man erstere von ihrer Druckspannung befreit; dies geschieht dadurch, dass man sie mit ihrer  $x$ -Axe eine Linksbewegung um  $y = y_0$  machen lässt, indem während dieser Prozedur die Stabenden festgehalten werden. Bei der Theorie der reinen Biegung ist dieser Unterschied nicht zu machen, weil dort beide Linien in eine einzige zusammenfallen. Übersieht man im vorliegenden Fall diesen für die in Rede stehende Belastungsart ganz besonders charakteristischen Unterschied, so heisst dies nichts anderes, als auf den Einfluss der eigentlichen Druckspannung  $n^2 i^2$  verzichten. Damit kommt man aber dann auf die Euler'sche Gleichung, die also aus diesem angeführten Grund unmöglich richtig sein kann.

Nach dieser Betrachtung erhält man aus Gleichung 2), die auch geschrieben werden kann:

$$1 - \cos \varphi = \frac{n^2}{2} (2i^2 + 2fy - y^2);$$

mit

$$\frac{dy}{ds} = \sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = n \sqrt{2i^2 + 2fy - y^2} \quad \text{mal} \\ \cdot \sqrt{1 - \frac{n^2}{4} (2i^2 + 2fy - y^2)},$$

oder auch

$$= 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2},$$

also

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{n}{2} \sqrt{2i^2 + 2fy - y^2},$$

als Integralgleichung für die deformierte Mittellinie des Stabes:

$$3) \int_{y_0}^{y_0+y} \frac{dy}{\sqrt{2i^2 + 2fy - y^2} \sqrt{1 - \frac{n^2}{4} (2i^2 + 2fy - y^2)}} = \int_0^s n ds = ns,$$

worin, wie oben bemerkt,

$$y_0 = f - \sqrt{2i^2 + f^2}$$

zu setzen ist. Die Integration dieser Gleichung 3) lässt sich in höchst einfacher und geschlossener Form ausführen für alle Fälle, die von praktischem Interesse sind. Denn weil innerhalb dieser Grenzen

$$\frac{n^2}{4}(2i^2 + 2fy - y^2)$$

verhältnismässig klein bleibt gegen 1, so kommt der Nebenfaktor

$$\sqrt{1 - \frac{n^2}{4}(2i^2 + 2fy - y^2)} = \cos \frac{\varphi}{2}$$

gegenüber dem Hauptfaktor

$$\sqrt{2i^2 + 2fy - y^2} = \frac{2}{n} \sin \frac{\varphi}{2}$$

im Nenner gar nicht praktisch zur Geltung. Nur für stark federnde Stäbe, wie dünne Drähte und dergl., oder auch für im Vergleich zu ihren Querdimensionen aussergewöhnlich lange Stäbe kann überhaupt dieser Nebenfaktor merklich von 1 verschieden werden; für alle übrigen Fälle, wie sie insbesondere in den praktischen Aufgaben der Knickfestigkeit auftreten, bleibt er aber immer von 1 nur so wenig verschieden, dass er — ohne wahrnehmbaren Fehler — geradezu gleich 1 gesetzt werden kann, was weiter unten gelegentlich noch thatsächlich bestätigt werden wird.

Ogleich dieser Nebenfaktor also für gewöhnlich geradezu = 1 zu setzen ist und er überhaupt nur für stark federnde Stäbe merklich von 1 abweichen kann und er somit für diese letzteren also recht eigentlich das charakteristische Merkmal bildet, so soll er nichtsdestoweniger, zur Erlangung ganz allgemein gültiger Resultate, bis auf weiteres mitgeführt werden, um so mehr, als dadurch keinerlei Schwierigkeit entsteht; denn selbst in den ungünstigsten Fällen kann für ihn noch ein sehr nahezu konstanter Mittelwert gesetzt werden, wie aus folgendem hervorgeht:

Dieser Nebenfaktor

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 - \frac{n^2}{4}(2i^2 + 2fy - y^2)}$$

erreicht nämlich seinen Höchstwert gleich 1 für  $\varphi = 0$ , d. i. in der Stabmitte, wo

$$y = y_0 = f - \sqrt{2i^2 + f^2}$$

wird. Von da ab wird er kleiner gegen die Stabenden hin und zwar nur unmerklich kleiner, wenn es sich nicht um schon besonders grosse Durchbiegungen  $f$ , d. i. um stark federnde Stäbe handelt. Seinen kleinsten Wert erreicht er bei den Stabenden selbst, d. i. für  $\varphi = \alpha$ , oder  $y = f$  und zwar mit

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{1 - \frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2)}$$

Da nun

$$\frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2) = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

immer nur ein echter Bruch ist, der höchstens einmal bis  $\sim 0,7$  anwachsen kann, wie gelegentlich weiter unten bestätigt werden wird,

so kann als Mittelwert für den — wie schon gesagt — nur für stark federnde Stäbe charakteristischen Nebenfaktor:

$$\sqrt{1 - \xi \frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)}$$

gesetzt werden, worin  $\xi$  einen Koeffizienten bedeutet, der im allgemeinen gleich  $\frac{1}{2}$  ist und im äussersten Fall einmal bis höchstens auf 0,64 anwachsen kann, wie gelegentlich weiter unten bestätigt werden wird.

Der so näher präzierte Mittelwert des Nebenfaktors:

$$\cos \frac{\varphi_m}{2} = \sqrt{1 - \xi \frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)}$$

soll in der Folge einfach mit  $\nu$  bezeichnet und mitgeführt werden, um — wie gesagt — ganz allgemein gültige Resultate zu erhalten; weiss man doch, dass er für gewöhnlich gleich 1 ist und überhaupt nur für besonders stark federnde Stäbe merklich von 1 abweichen kann.

Nach diesem kann also für Gleichung 3) gesetzt werden:

$$\int_{y_0}^{y_0+y} \frac{dy}{\sqrt{2i^2 + 2fy - y^2}} = ns\nu$$

und integriert:

$$\left\{ -\arcsin \frac{f-y}{\sqrt{2i^2+f^2}} \right\}_{y_0}^{y_0+y} = \arccos \frac{\sqrt{2i^2+f^2}-y}{\sqrt{2i^2+f^2}} = ns\nu,$$

oder

$$4) \quad y = \sqrt{2i^2 + f^2} (1 - \cos ns\nu).$$

Die Durchbiegung  $f$ .

Die Gleichung 4) stellt, wie oben betont, die deformierte Mittelnie des Stabes dar und zwar bezogen auf die ursprünglich gerade Stabaxe. Für  $s=0$  folgt daraus auch  $y=0$  und für die zusammengehörigen Werte von

$$s = \frac{l}{2} \quad \text{und} \quad y = f$$

ergibt sich die Bedingungsgleichung für den Pfeil  $f$  aus:

$$f = \sqrt{2i^2 + f^2} \left( 1 - \cos \frac{nl}{2} \nu \right) = \sqrt{2i^2 + f^2} \cdot 2 \sin^2 \frac{nl}{4} \nu$$

und daraus der allgemeine Ausdruck für die Durchbiegung  $f$ :

$$5) \quad f = i\sqrt{2} \frac{2 \sin^2 \frac{nl}{4} \nu}{\sqrt{1 - 4 \sin^4 \frac{nl}{4} \nu}}$$

oder gleich:  $f = i\sqrt{2} \operatorname{tg} \psi$  mit dem Hilfwinkel  $\psi$  aus:

$$\sin \psi = 2 \sin^2 \frac{n l}{4} \sqrt{\phantom{x}} = 1 - \cos \frac{n l}{2} \sqrt{\phantom{x}}$$

(siehe Fig. 2, Taf. II).

Aus dem Ausdruck  $f = i\sqrt{2} \operatorname{tg} \psi$  geht hervor, dass zur Erklärung des Vorganges bei der Knickung nicht nötig ist, willkürlich eine kleine Exzentrizität für die Druckkraft  $P$  anzunehmen, wie dies seit her mit richtigem Gefühl als Notbehelf geschehen ist, sondern dass diese Exzentrizität stets von vornherein schon vorhanden ist und selbst bei der sorgsamsten Fernhaltung aller Zufälligkeiten und Ungenauigkeiten den ganz bestimmten Wert von  $i\sqrt{2}$  hat. Diese Exzentrizität tritt übrigens in der Stabmitte auf und nicht an den Stabenden.

Die in richtiger Würdigung der zusätzlichen Stabpressung vom Druck  $P$  erhaltene genaue Gleichung 4) der deformierten Stabmittellinie weicht naturgemäss ganz wesentlich ab von der bis dahin bekannten

$$y = f(1 - \cos nx).$$

Insbesondere erhält man nicht mehr, wie aus dieser letzteren, für

$$y = f \quad \text{und} \quad x = \frac{l}{2}$$

die sogenannte Euler'sche Gleichung, aus

$$\cos \frac{n l}{2} = 0,$$

nämlich:

$$\frac{n l}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \text{d. i. mit} \quad n^2 = \frac{P}{EJ}: \quad P = \frac{\pi^2}{l^2} EJ,$$

in welcher, wie gesagt, nur die Biegungsspannung, nicht aber auch die ihr vollkommen gleichberechtigte, eigentliche Druckspannung zum Ausdruck gekommen ist — sondern:

$$f = \sqrt{2i^2 + f^2} \left( 1 - \cos \frac{n l}{2} \sqrt{\phantom{x}} \right)$$

woraus folgt mit  $y_0 = f - \sqrt{2i^2 + f^2}$ :

$$\frac{n l}{2} \sqrt{\phantom{x}} = \arccos \frac{-y_0}{\sqrt{2i^2 + f^2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{-y_0}{\sqrt{2i^2 + f^2}},$$

aus welcher Gleichung für den Pfeil  $f$  der Ausdruck von Gleichung 5):

$$f = i\sqrt{2} \operatorname{tg} \psi$$

sich ergibt.

### Die höchstens zulässige Druckspannung.

Mit der weiteren Bedingungsgleichung für die höchstens zulässige Gesamtdruckspannung  $k$ , welche für den Bruchquerschnitt in der Stabmitte statthaben muss, nämlich:

$$6) \quad k = \frac{P}{F} + \frac{Pf}{W}$$

oder

$$k = \frac{P}{F} \left( 1 + \frac{Ff}{W} \right)$$

ergibt sich mit den bekannten Abkürzungen für

$$\frac{J}{F} = i^2 \quad \text{und} \quad W = \frac{J}{e}:$$

$$\frac{Ff}{W} = \frac{ef}{i^2}$$

und daraus für den zulässigen Druck  $P$ :

$$P = \frac{kF}{1 + \frac{ef}{i^2}},$$

oder für den sogenannten Abminderungskoeffizienten  $\alpha$ :

$$\alpha = \frac{P}{kF} = \frac{1}{1 + \frac{ef}{i^2}},$$

oder auch für den Pfeil:

$$7) \quad f = \frac{i^2}{e} \frac{1 - \alpha}{\alpha} = \frac{i^2}{e} \left( \frac{1}{\alpha} - 1 \right).$$

In besonderen Fällen, wo, wie z. B. beim Gusseisen, nicht die zulässige Druckspannung  $k$ , sondern die viel kleinere zulässige Zugspannung  $-k_1$  den Ausschlag geben kann, tritt an die Stelle der Gleichung 6) die auf die höchstens zulässige Zugspannung  $-k_1$  bezügliche Gleichung 6a), nämlich:

$$-k_1 = \frac{P}{F} - \frac{Pf}{W},$$

oder

$$6a) \quad \alpha = \frac{P}{k_1 F} = \frac{\frac{k_1}{k}}{\frac{ef}{i^2} - 1}$$

und damit

$$P = \frac{k_1 F}{\frac{ef}{i^2} - 1}$$

und

$$7a) \quad f = \frac{i^2}{e} \frac{\frac{k_1}{k} + \alpha}{\alpha}.$$

Mit den Gleichungen 4), 5) und 6) bzw. 6a) ist alles bestimmt, was auf Knickfestigkeit Bezug hat, wenn nur noch die Materialkoeffizienten  $k$  und  $E$  des betrachteten Stabes und dessen Querschnittsform d. i.  $J$ ,  $F$  und  $W$  oder  $i$  und  $e$  bestimmt sind.

Der Abminderungskoeffizient  $\alpha$ .

Durch Gleichsetzung der beiden Werte für  $f$  in Gleichung 5) und 7) bzw. 5) und 7a):

$$f = i\sqrt{2} \operatorname{tg} \psi = \frac{i^2}{e} \frac{1-\alpha}{\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \frac{i^2}{e} \frac{\frac{k_1}{k} + \alpha}{\alpha}$$

erhält man für den Abminderungskoeffizienten  $\alpha$  aus:

$$8) \quad \frac{1-\alpha}{\alpha} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\frac{k_1}{k} + \alpha}{\alpha} = \frac{e\sqrt{2}}{i} \operatorname{tg} \psi.$$

Daraus ersieht man, dass die Querschnittsform durch den Ausdruck  $\frac{e\sqrt{2}}{i}$  charakterisiert ist.

Der Koeffizient der Querschnittsform.

Für die in der Praxis vorkommenden Querschnittsformen (siehe Fig. 4) variiert der Wert  $\frac{e\sqrt{2}}{i}$  etwa zwischen 2 bis 3,5 und damit folgt aus Gleichung 8):

$$\alpha = \frac{1}{\frac{e\sqrt{2}}{i} \operatorname{tg} \psi + 1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\frac{k_1}{k}}{\frac{e\sqrt{2}}{i} \operatorname{tg} \psi - 1},$$

oder:

$$9) \quad \alpha = \frac{1}{(2 \text{ bis } 3,5) \operatorname{tg} \psi + 1} \quad \text{bzw.} \quad \frac{\frac{k_1}{k}}{(2 \text{ bis } 3,5) \operatorname{tg} \psi - 1}.$$

In  $\sin \psi = 2 \sin^2 \frac{n l}{4} \sqrt{\quad}$  ist für die hier in Betracht kommenden Fälle für  $\sqrt{\quad} = 1$  zu setzen, also für  $\frac{n l}{4} \sqrt{\quad}$  einfach  $= \frac{n l}{4}$ , worin

$$n = \sqrt{\frac{P}{EJ}}.$$

Da mit wachsendem Druck  $P$  der Pfeil

$$f = i\sqrt{2} \operatorname{tg} \psi$$

im allgemeinen rascher anwächst als  $P$ , so entscheidet für das massgebende  $f$  der grösste Wert, den  $P$  annehmen kann, d. i. die Bruchkraft  $P_0$ . Ist  $k$  die zulässige Pressung bei  $m$ -facher Sicherheit gegen Bruch, also  $mk = k_0$  der Bruchkoeffizient des betrachteten Materials, so ist der Abminderungskoeffizient

$$\alpha = \frac{P}{kF} = \frac{mP}{mkF} = \frac{P_0}{k_0F}$$

oder auch gleich  $\frac{P_0}{mkF}$  zu setzen.

Was die Grösse  $\frac{nl}{4}\sqrt{\phantom{x}}$  betrifft, so kann

$$\sin \psi = 2 \sin^2 \frac{nl}{4}\sqrt{\phantom{x}}$$

gehen von 0 bis 1, oder  $\frac{nl}{4}\sqrt{\phantom{x}}$  von 0 bis  $\frac{\pi}{4}$ , entsprechend 0 bis 45°.

Beachtet man noch, dass mit  $\sqrt{\phantom{x}} = 1$ :

$$\frac{nl}{4}\sqrt{\phantom{x}} = \frac{nl}{4} = \frac{l}{4}\sqrt{\frac{P}{EJ}},$$

also gleich

$$\frac{l}{4}\sqrt{\frac{P}{mkF} \frac{mkF'}{EJ}} = \frac{l}{i}\sqrt{\alpha \frac{mk}{16E}}$$

und daraus:

$$10) \quad \frac{l}{i} = \left(\frac{nl}{4}\sqrt{\phantom{x}}\right) \sqrt{\frac{1}{\alpha} \frac{16E}{mk}}$$

gesetzt werden kann, so kann für jeden Stab der zulässige Druck  $P$  oder umgekehrt der erforderliche Querschnitt  $F$  ermittelt werden, wenn nur noch die speziell für diese Belastungsart charakteristische Materialkonstante

$$\frac{16E}{mk} = \frac{16E}{k_0}$$

bestimmt ist.

Die Materialkonstante für verschiedene Baustoffe.

I. Für Fluß- und Schweißisen kann gesetzt werden:

$$E = 2\,150\,000 \text{ bzw. } 2\,000\,000$$

und

$$k_0 = mk = 3\,800 \text{ bzw. } 3500.$$

Damit wird

$$\sqrt{\frac{16E}{mk}} = \sim 95,$$

für  $m = 4$  fache Sicherheit gegen Bruch würde dann sein  $k = 950$  bzw. 875 kg p. qcm.

II. Für Flußstahl mit

$$E = 2\,200\,000,$$

und

$$mk = 5\,500$$

wird

$$\sqrt{\frac{16E}{mk}} = \sim 80;$$

bei  $m = 4$  bzw. 5, also  $k = 1375$ —1100.

III. Für Tiegelflußstahl mit

$$E = 2\,200\,000$$

und

$$mk = 7200$$

wird

$$\sqrt{\frac{16E}{mk}} = \sim 70;$$

bei  $m = 4$  bzw. 5, also  $k = 1800$ —1400.

IV. Für Gusseisen mit

$$\begin{aligned}
 & \text{und} & E &= 850\,000 \\
 & \text{ist} & mk &= 7200 \quad \text{bzw.} \quad -m_1 k_1 = 1200 \\
 & & & \sqrt{\frac{16E}{mk}} = \sim 44; \\
 & \text{bei} & m &= 10, \text{ also } k = 720 \\
 & & m_1 &= 5, \quad -k_1 = 240.
 \end{aligned}$$

Bei Gusseisen, wo der zulässige Druckkoeffizient  $k$  etwa 3 mal so gross ist als der zulässige Zugkoeffizient  $-k_1$ , entscheidet, wie schon bemerkt, für längere Stäbe dieser Zugkoeffizient  $-k_1$ . Mit  $\frac{k_1}{k} = \frac{1}{3}$  erhält man aus Gleich. 9) also:

$$\alpha = \frac{1}{(2 \text{ bis } 3,5) \operatorname{tg} \psi + 1} \quad \text{bzw.} \quad = \frac{\frac{1}{3}}{(2 \text{ bis } 3,5) \operatorname{tg} \psi - 1}.$$

Der kleinere der hieraus sich ergebenden Werte von  $\alpha$  entscheidet und die Grenzscheide, wo die erste Formel durch die zweite ersetzt wird, ist bestimmt durch:

$$\begin{aligned}
 & 1 - \alpha = \frac{k_1}{k} + \alpha, \quad \text{d. i.} \quad \alpha = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{k_1}{k} \right) \\
 & \text{mit } \frac{k_1}{k} = \frac{1}{3} \text{ also auch } \alpha = \frac{1}{3}.
 \end{aligned}$$

V. Für Eichenholz mit

$$\begin{aligned}
 & E = 120\,000 \quad \text{und} \quad mk = 650, \\
 & \text{und Kiefernholz mit} \\
 & E = 100\,000 \quad \text{und} \quad mk = 500 \\
 & \text{ist} \\
 & \sqrt{\frac{16E}{mk}} = \sim 55 \\
 & \text{bei } m = 10, k = 65 \text{ bzw. } 50.
 \end{aligned}$$

Numerische Berechnung.

Nach Vorstehendem werden die folgenden Tabellenwerte ohne weiteres verständlich sein; man beachte dabei, dass in dieser Tabelle die oberen Wertreihen für

$$\frac{nl}{4} \sqrt{\phantom{x}}, \quad \sin \frac{nl}{4} \sqrt{\phantom{x}}, \quad \sin \psi, \quad \operatorname{tg} \psi, \quad \alpha \quad \text{und} \quad \left( \frac{nl}{4} \sqrt{\phantom{x}} \right) \sqrt{\frac{1}{\alpha}}$$

ganz allgemein gelten und unabhängig vom Material sind, und dass erst von da ab der für die in Rede stehende Belastungsart charakteristische Materialkoeffizient  $\sqrt{\frac{16E}{mk}}$  zur Bestimmung von  $\frac{l}{i}$  zum Ausdruck kommt.

Aus diesen Tabellenwerten sind die Diagramme für die hier behandelten 5 verschiedenen Baustoffe gebildet und in richtigem Maß-

stab aufgezeichnet — siehe Fig. 5 für Fluß- und Schweißbeisen —, so dass jeder in der Praxis vorkommende Fall genau genug daraus abgegriffen oder auch aus der daraus für den Abminderungskoeffizienten  $\alpha$  gebildeten Tabelle — Seite 320 — abgelesen werden kann, wie folgt:

Für einen konkreten Fall bestimme man zunächst den für die Querschnittsform charakteristischen Koeffizienten  $\frac{e\sqrt{2}}{i}$ , dessen Wert, wie schon bemerkt, etwa zwischen den Grenzen 2 bis 3,5 liegen wird, für welche Grenzen auch die Tabelle berechnet und die Diagramme aufgezeichnet sind. Hierauf bestimme man die Grösse  $\frac{l}{i}$ , worin  $l$  die freie Knicklänge des Stabes und

$$i = \sqrt{\frac{J}{F}}$$

den Trägheitsradius in Bezug auf die Biegungsaxe des Bruchquerschnitts bedeutet. Die Biegung erfolgt selbstredend um diejenige Axe, in Bezug auf welche das Trägheitsmoment  $J$  — unter sonst gleichen Umständen — am kleinsten ist. Die freie Knicklänge ist nach der Art der Befestigung der Stabenden in bekannter Weise richtig zu bemessen. Mit den so erhaltenen Werten kann alsdann aus dem betreffenden Diagramm oder aus der Tabelle durch schätzungsweise Interpolation in Bezug auf  $\frac{e\sqrt{2}}{i}$  der Wert des Abminderungskoeffizienten  $\alpha$  genau genug abgestochen oder aus der betreffenden Tabelle abgelesen werden. Hat man aber  $\alpha$ , dann folgt aus

$$\alpha = \frac{P}{kF}$$

entweder der zulässige Druck  $P = \alpha kF$ , oder auch der erforderliche Querschnitt

$$F = \frac{P}{\alpha k},$$

oder auch die grösste Anstrengung des Materials aus

$$k = \frac{P}{\alpha F}.$$

Selbstredend kann auch für jeden anderen Fall die Rechnung besonders durchgeführt werden; auch für beliebig andere Stoffe mit dem ihnen zukommenden Materialkoeffizienten

$$\sqrt{\frac{16E}{mk}},$$

wie dies in nachstehender Tabelle für eine geeignete Anzahl von Zwischenwerten thatsächlich ausgeführt worden ist.

Tafelringsche Zusammenstellung der Auskünfte der Dimensionen Berechnung.

	0°	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°	40°	42 1/4°	44°	45°
für $\frac{nl}{4} \sqrt{\text{im}}$ $\frac{\text{Winkelmaß}}{\text{Längenmaß}}$	0	0,0873	0,1745	0,2618	0,3491	0,4363	0,5236	0,6109	0,6981	0,7417	0,7679	0,7854
ist $\sin \frac{nl}{4} \sqrt{=}$	0	0,0872	0,1736	0,2588	0,3420	0,4226	0,5	0,5736	0,6428	0,6756	0,6947	0,7071
und damit $\sin \psi = 2 \sin^2 \frac{nl}{4} \sqrt{=}$	0	0,0152	0,0603	0,1340	0,2340	0,3572	0,5	0,6580	0,8264	0,9128	0,9652	1
also $\text{tg } \psi =$	0	0,0152	0,0604	0,1352	0,2406	0,3826	0,5774	0,8738	1,4677	2,2356	3,6891	∞
und daraus mit $\frac{e\sqrt{2}}{i} = (2 \text{ bis } 3,5) : \alpha = \frac{1}{1 + (2 \text{ bis } 3,5) \text{tg } \psi} =$	1	0,970	0,892	0,787	0,675	0,567	0,464	0,364	0,254	0,188	0,119	0
und event. für Gußeisen mit $\frac{k_1}{k}$ :	1	0,949	0,825	0,679	0,543	0,428	0,331	0,246	0,163	0,113	0,072	0
$\alpha = \frac{1}{1 + (2 \text{ bis } 3,5) \text{tg } \psi}$ bezw. $\frac{1}{(2 \text{ bis } 3,5) \text{tg } \psi - 1} =$	1	0,970	0,892	0,787	0,675	0,567	0,464	0,364	0,254	0,188	0,119	0
Also ist: $\left(\frac{nl}{4} \sqrt{\frac{1}{\alpha}}\right) \sqrt{\frac{1}{\alpha}} =$	0	0,0886	0,1848	0,2951	0,4247	0,5794	0,7689	1,0131	1,3851	1,7330	2,2200	∞
und event. für Gußeisen mit $\frac{k_1}{k} = \frac{1}{3}$	0	0,0896	0,1921	0,3177	0,4737	0,6671	0,9106	1,2316	1,7280	2,2075	2,8650	∞
I. für Fluß- und Schweißisen mit $\sqrt{\frac{16E}{mk}} = 95:$	0	8,4	17,6	28,0	40,3	55,0	73,0	96,2	131,6	164,6	211,0	∞
II. für Flußstahl mit $\sqrt{\frac{16E}{mk}} = 80:$	0	8,5	18,2	30,2	45,0	63,4	86,5	117,0	164,2	209,7	272,0	∞
III. für Tiegelstahl mit $\sqrt{\frac{16E}{mk}} = 70:$	0	7,1	14,8	23,6	34,0	46,3	61,5	81,0	110,8	138,6	177,6	∞
IV. für Gußeisen mit $\sqrt{\frac{16E}{mk}} = 44:$	0	7,2	15,4	25,4	37,9	53,4	72,9	98,6	138,2	176,6	229,2	∞
V. für Eichen- und Kiefernholz mit $\sqrt{\frac{16E}{mk}} = 55:$	0	6,2	12,9	20,6	29,7	40,5	53,8	70,9	97,0	121,3	155,4	∞
	0	6,3	13,4	22,3	33,2	46,7	63,8	86,2	121,0	154,5	200,5	∞
	0	3,9	8,1	13,0	18,7	25,5	33,8	44,6	74,0	105,3	146,2	∞
	0	3,9	8,5	14,0	20,8	29,3	40,4	56,8	107,8	147,6	202,0	∞
	0	4,9	10,2	16,2	23,4	31,9	42,3	56,7	76,2	96,3	122,0	∞
	0	4,9	10,6	17,5	26,0	36,7	50,1	67,7	95,0	121,4	157,6	∞

Tabelle für den Abminderungskoeffizienten  $\alpha = \frac{P}{k F}$ .

für $\sqrt{\frac{16 E}{m k}} =$	I.		II.		III.		IV.		V.	
	Fluß- und Schweißisen 95		Flußstahl 80		Tiegelstahl 70		Gußeisen 44		Holz 55	
für $\frac{e\sqrt{2}}{i} =$	2	3,5	2	3,5	2	3,5	2	3,5	2	3,5
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
für $\frac{l}{i} = 5$	0,99	0,98	0,98	0,96	0,98	0,96	0,95	0,93	0,97	0,95
10	0,96	0,94	0,94	0,91	0,93	0,89	0,86	0,79	0,89	0,84
15	0,92	0,88	0,89	0,83	0,86	0,80	0,75	0,68	0,81	0,73
20	0,87	0,81	0,83	0,76	0,80	0,72	0,65	0,58	0,73	0,65
25	0,81	0,74	0,77	0,68	0,73	0,64	0,57	0,49	0,66	0,57
30	0,76	0,68	0,71	0,63	0,67	0,58	0,51	0,43	0,59	0,50
35	0,72	0,63	0,66	0,57	0,62	0,53	0,45	0,38	0,53	0,44
40	0,68	0,59	0,61	0,53	0,57	0,49	0,41	0,33	0,48	0,40
45	0,64	0,54	0,57	0,49	0,53	0,45	0,36	0,29	0,44	0,37
50	0,61	0,51	0,54	0,45	0,49	0,42	0,31	0,25	0,41	0,34
55	0,57	0,48	0,50	0,42	0,46	0,39	0,27	0,22	0,37	0,31
60	0,54	0,45	0,47	0,39	0,43	0,36	0,24	0,20	0,33	0,28
65	0,51	0,42	0,44	0,36	0,40	0,33	0,21	0,17	0,31	0,26
70	0,49	0,40	0,42	0,34	0,38	0,31	0,19	0,15	0,28	0,24
75	0,46	0,38	0,39	0,32	0,35	0,29	0,17	0,14	0,26	0,22
80	0,44	0,36	0,37	0,31	0,33	0,27	0,16	0,13	0,24	0,20
85	0,42	0,34	0,35	0,29	0,30	0,25	0,15	0,12	0,21	0,18
90	0,39	0,32	0,33	0,27	0,28	0,24	0,14	0,11	0,20	0,17
95	0,37	0,31	0,31	0,26	0,26	0,23	0,13	0,10	0,18	0,16
100	0,35	0,29	0,29	0,24	0,24	0,21	0,12	0,09	0,17	0,15
105	0,34	0,28	0,27	0,23	0,23	0,20	0,11	0,08	0,14	0,13
110	0,32	0,26	0,26	0,22	0,21	0,19	0,10	0,08	0,14	0,13
115	0,31	0,25	0,24	0,21	0,20	0,18	0,09	0,07	0,12	0,11
120	0,29	0,24	0,23	0,20	0,19	0,17	0,08	0,07	0,12	0,11
125	0,28	0,23	0,22	0,19	0,18	0,16	0,08	0,06	0,12	0,11
130	0,26	0,22	0,20	0,18	0,16	0,15	0,07	0,06	0,10	0,10
135	0,25	0,21	0,19	0,17	0,15	0,14	0,06	0,05	0,10	0,10
140	0,24	0,20	0,18	0,16	0,15	0,14	0,06	0,05	0,09	0,09
145	0,23	0,19	0,17	0,15	0,14	0,13	0,05	0,05	0,09	0,09
150	0,21	0,18	0,16	0,14	0,13	0,12	0,05	0,05	0,08	0,08
155	0,20	0,18	0,14	0,13	0,13	0,12	0,04	0,04	0,08	0,08
160	0,19	0,17	0,14	0,13	0,12	0,11	0,04	0,04	0,07	0,07
165	0,18	0,16	0,13	0,12	0,12	0,11	0,04	0,04	0,07	0,07
170	0,17	0,16	0,13	0,12	0,10	0,10	0,04	0,04	0,07	0,07
175	0,16	0,15	0,12	0,11	0,10	0,10	0,04	0,04	0,07	0,07
180	0,16	0,15	0,12	0,11	0,09	0,09	0,03	0,03	0,06	0,06
185	0,15	0,14	0,10	0,10	0,09	0,09	0,03	0,03	0,06	0,06
190	0,14	0,13	0,10	0,10	0,08	0,08	0,03	0,03	0,06	0,06
195	0,14	0,13	0,09	0,09	0,08	0,08	0,03	0,03	0,06	0,06
200	0,13	0,12	0,09	0,09	0,08	0,08	0,03	0,03	0,05	0,05
210	0,12	0,11	0,08	0,08	0,07	0,07				
220	0,11	0,10	0,08	0,08	0,07	0,07				
230	0,10	0,10	0,07	0,07	0,06	0,06				
240	0,09	0,09	0,07	0,07	0,06	0,06				
250	0,08	0,08	0,06	0,06	0,05	0,05				
260	0,08	0,08	0,06	0,06	0,05	0,05				
270	0,07	0,07	0,05	0,05	0,04	0,04				
280	0,07	0,07	0,05	0,05	0,04	0,04				
290	0,06	0,06	0,05	0,05	0,04	0,04				
300	0,06	0,06	0,04	0,04	0,03	0,03				

**B. Besonderer Fall der stark federnden Stäbe.**

Das charakteristische Merkmal der stark federnden Stäbe, wie z. B. dünne Drähte, oder auch — im Vergleich zu ihren Querdimensionen — aussergewöhnlich lange Stäbe, besteht darin, wie bereits oben hervorgehoben wurde, dass der Nebenfaktor:

$$\sqrt{1 - \frac{n^2}{4}(2i^2 + 2fy - y^2)} = \sqrt{1 - \xi \frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2)}$$

merklich von 1 verschieden werden kann. Für die Praxis ist dies der Fall, wenn er z. B. mit seinem Mittelwert  $\sqrt{\quad}$  um mehr als etwa  $\frac{1}{2}\%$  d. i. = 0,005 von 1 abweichen könnte. Um dies überhaupt möglich zu machen, müsste aber, wie weiter unten gezeigt wird, die Durchbiegung  $f$  schon mindestens gleich  $\frac{1}{11}$  der freien Stablänge  $l$  werden können, was für die gewöhnlichen Fälle der Knickfestigkeit nicht mehr zulässig ist, oder doch im allgemeinen die Grenze bildet. Weicht aber dieser Nebenfaktor überhaupt merklich von 1 ab, so fragt es sich: in welchem mathematischen Zusammenhang steht diese Abweichung mit der Druckkraft  $P$  und den Stabdimensionen und insbesondere mit dem von diesen Grössen jedenfalls abhängigen Pfeil  $f$  selbst?

Dieser Zusammenhang findet sich durch folgende Betrachtung. Aus der Integralgleichung der deformierten Mittellinie des Stabes:

$$\int_{y_0}^{y_0+f} \frac{dy}{\sqrt{2i^2 + 2fy - y^2} \sqrt{1 - \frac{n^2}{4}(2i^2 + 2fy - y^2)}} = ns$$

erhält man durch Reihenentwicklung, und wenn die Integration auf die ganze Stablänge ausgedehnt wird, als genauen Wert dieses Integrals:

$$11) \frac{nl}{2} = \int_{y_0}^{y_0+f} \frac{dy}{\sqrt{2i^2 + 2fy - y^2}} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[ \frac{n^2}{4}(2i^2 + 2fy - y^2) \right] + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left[ \quad \right]^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \left[ \quad \right]^3 + \dots \right\}$$

Führt man die Integration aus und beachtet, dass für grössere Werte von  $f$ , um die es sich hier nur handelt, der Wert von

$$y_0 = f - \sqrt{2i^2 + f^2}$$

stets klein genug ist, so dass er mit der kleinen Grösse  $n^2 = \frac{P}{EJ}$ , oder gar mit deren höheren Potenzen multipliziert, gegenüber 1 nicht in Betracht kommt, so erhält man nach der Reduktionsformel:

$$\int (2i^2 + 2fy - y^2)^p dy = -\frac{f-y}{2p+1} \left( \right)^p + \frac{2p}{2p+1} (2i^2 + f^2) \int \left( \right)^{p-1} dy,$$

oder:

$$\int_{y_0}^{y_0+f} \left( \right)^p dy = \frac{2p}{2p+1} (2i^2 + f^2) \int_{y_0}^{y_0+f} \left( \right)^{p-1} dy$$

die Bedingungsgleichung:

$$12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{nl}{2} = \arccos \frac{\sqrt{2i^2 + f^2} - f}{\sqrt{2i^2 + f^2}} \text{ mal} \\ \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left[\frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)\right] + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 [ ]^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 [ ]^3 + \dots \right\} \end{array} \right.$$

Da nun aber auch aus der Gleichung

$$y = \sqrt{2i^2 + f^2} (1 - \cos ns\varphi)$$

für die zusammengehörigen Endwerte von  $y = f$  und  $s = \frac{l}{2}$ :

$$f = \sqrt{2i^2 + f^2} \left( 1 - \cos \frac{nl}{2} \varphi \right)$$

sich ergibt, oder:

$$13) \quad \frac{nl}{2} \sqrt{1 - \xi \frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)} = \arccos \frac{\sqrt{2i^2 + f^2} - f}{\sqrt{2i^2 + f^2}},$$

so folgt aus diesen beiden Gleichungen 12) und 13) als Wert für den charakteristischen Nebenfaktor  $\varphi$ :

$$14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1 - \xi \frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)} = \\ = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left[\frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)\right] + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 [ ]^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 [ ]^3 + \dots = \{I\}} \end{array} \right.$$

ferner folgt aus:

$$\frac{\sqrt{\frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)}}{\frac{nl}{2} = \{I\} \arccos \frac{\sqrt{2i^2 + f^2} - f}{\sqrt{2i^2 + f^2}}} = \sqrt{\frac{\frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)}{\frac{n^2}{4} l^2}}$$

Weil es sich hier nur um grössere  $f$  handelt und grössere  $f$  immer nur mit kleinen  $i$  verbunden sind, so ist sehr nahezu

$$\sqrt{\frac{\frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)}{\frac{n^2}{4} l^2}} = \frac{f}{l}$$

und also das Verhältnis der Durchbiegung  $f$  zur freien Knicklänge  $l$ :

$$15) \quad \frac{f}{l} = \frac{\sqrt{\frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2)}}{\{I\} \operatorname{arc} \cos \frac{\sqrt{2i^2 + f^2} - f}{\sqrt{2i^2 + f^2}}}$$

für grössere  $f$  mit denen, wie schon gesagt, auch immer nur kleine  $i$  verbunden sind, weicht

$$\operatorname{arc} \cos \frac{\sqrt{\quad} - f}{\sqrt{\quad}} = \operatorname{arc} \cos \frac{-y_0}{\sqrt{\quad}}$$

nicht merklich ab von  $\operatorname{arc} \cos 0 = \frac{\pi}{2}$ , so dass also für grössere  $f$  und insbesondere für den Bruch anstatt der Gleichung 15) auch gesetzt werden kann:

$$\frac{f}{l} = \frac{\sqrt{\frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2)}}{\frac{\pi}{2} \{I\}}$$

In nachfolgender Tabelle sind die nach den vorgenannten Gleichungen thatsächlich berechneten Resultate für die verschiedenen in Betracht kommenden Werte von

$$\frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2)$$

zusammengestellt:

Gewöhnlicher Fall der nicht stark federnden Stäbe			Stark federnde Stäbe							
für $\frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2) =$	0	$\frac{1}{50}$ =0,02	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
ist $\{I\} = 1 + \dots$	1	1,005	1,0265	1,0565	1,0911	1,1316	1,1803	1,2411	1,3212	1,4368
und damit $\{I\}^2 =$	1	1,01	1,0537	1,1162	1,1905	1,2805	1,3931	1,5403	1,7456	2,0644
$1 - \xi \frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2) = \frac{1}{\{I\}^2}$	1	0,99	0,9490	0,8959	0,8400	0,7809	0,7178	0,6492	0,5729	0,4845
oder auch										
$\sqrt{1 - \xi \frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2)}$	=1	0,995	0,974	0,947	0,917	0,884	0,847	0,806	0,757	—
und also $\xi =$	0,5	0,5	0,5100	0,5205	0,5333	0,5477	0,5644	0,5847	0,6101	0,6444
und $\frac{f}{l} =$	0	0,090	0,196	0,270	0,320	3,356	0,381	0,397	0,403	
$\cos \alpha =$	1	0,96	0,8	0,6	0,4	0,2	0	-0,2	-0,4	
$\frac{\Delta \alpha}{l} =$										
$= \frac{1}{2} \frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2)$	0	0,01	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	

Aus der vorstehenden Tabelle und ihrer graphischen Darstellung (siehe Fig. 6, Taf. II) ist zu ersehen, dass der Maximalwert, den  $f$  bzw.  $\frac{f}{l}$  überhaupt erreichen kann, bei etwa

$$\frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2) = 0,7$$

auftritt und zwar mit nahezu

$$\max. \frac{f}{l} = \sim 0,403.$$

Der Neigungswinkel  $\alpha$ , welchen die Stabenden mit der ursprünglich geraden, vertikalen Stabaxe bilden, ist bestimmt aus:

$$1 - \cos \varphi = \frac{n^2}{2}(2i^2 + 2fy - y^2);$$

für die zusammengehörigen Werte von  $y = f$  und  $\varphi = \alpha$  wird

$$16) \quad 1 - \cos \alpha = \frac{n^2}{2}(2i^2 + f^2)$$

nach den obigen Tabellenwerten nacheinander:

$$\cos \alpha = 1 \quad 0,96 \quad | \quad 0,8 \quad 0,6 \quad 0,4 \quad 0,2 \quad 0 \quad -0,2 \quad | \quad -0,4 \quad |.$$

Die Höhendifferenz  $\Delta a$  zwischen der Schenkel  $a$  des gebogenen Stabes und seiner ursprünglichen Länge  $\frac{l}{2}$  im geraden Zustand findet sich aus der ersten Integralgleichung:

$$1 - \cos \varphi = \frac{ds - dx}{ds} = \frac{d\Delta x}{ds} = \frac{n^2}{2}(2i^2 + 2fy - y^2),$$

woraus:

$$\overline{\Delta x} = \int_0^s \frac{n^2}{2}(2i^2 + 2fy - y^2) ds,$$

oder sehr nahezu, mit

$$y = \sqrt{2i^2 + f^2}(1 - \cos ns\sqrt{ })$$

auch gleich  $f(1 - \cos ns\sqrt{ })$  bei grösseren Werten von  $f$ :

$$\begin{aligned} \frac{l}{2} - a = \overline{\Delta a} &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{n^2}{2} y(2f - y) ds \\ &= \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{n^2}{2} (2i^2 + f^2) \sin^2 ns\sqrt{ } ds \\ &= \frac{n^2}{8} (2i^2 + f^2) l \left[ 1 - \frac{\sin nl\sqrt{ }}{nl\sqrt{ }} \right]. \end{aligned}$$

Für grössere  $f$ , um die es sich hier nur handelt, d. i. für stark federnde Stäbe, ist immer beim Bruch, nach früherem sehr nahezu:

$nl\sqrt{\phantom{x}} = \pi$ , also  $\sin nl\sqrt{\phantom{x}} = \approx 0$   
 und mithin einfach:

$$\overline{\Delta a} = \frac{l}{2} - a = \frac{n^2}{8} (2i^2 + f^2)l$$

oder

$$\frac{\overline{\Delta a}}{l} = \frac{1}{2} \frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2).$$

Die damit berechneten Werte sind in vorstehender Tabelle eingetragen und in der zugehörigen Fig. 6 (siehe Taf. II) maßstäblich dargestellt.

Da indes für den Fall des Bruchs im allgemeinen die Elastizitätsgrenze (Proportionalitätsgrenze) in der Gegend der Stabmitte überschritten wird, so wird thatsächlich für  $E$  ein etwas kleinerer Mittelwert zu setzen sein, der alsdann entsprechend grössere Werte von  $f$  zur Folge hat.

Insbesondere ersieht man aus dieser Tabelle, dass die Durchbiegung  $f$  schon ziemlich gross ausfallen muss, bis der für stark federnde Stäbe charakteristische Nebenfaktor  $\sqrt{\phantom{x}}$  überhaupt bemerkbar, d. i. merklich von 1 verschieden wird. Nach der zweiten Kolonne dieser Tabelle erreicht nämlich erst mit  $f = 0,09l$  d. i. bei etwa gleich  $\frac{l}{11}$  der massgebende Ausdruck

$$\frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)$$

den immerhin noch kleinen Wert von

$$\frac{1}{50} = 0,02,$$

so dass also — selbst bei diesem verhältnismässig schon grossen Wert von  $f$  — der Mittelwert des Nebenfaktors um nicht mehr als  $\frac{1}{2}\%$  d. i. 0,005 kleiner wird als 1.

Bei solch grossem  $f$  muss  $i$  aber schon so klein sein, dass  $2i^2$  gegen  $f^2$  nicht mehr in Betracht kommt und dies ist andererseits auch wieder nur möglich, wenn gleichzeitig  $\alpha$  sehr klein bleibt, wie man sich leicht durch folgendes überzeugt.

Es ist nämlich aus  $f = \frac{i^2}{e} \frac{1-\alpha}{\alpha}$ :

$$\frac{f}{i\sqrt{2}} = \frac{i}{e\sqrt{2}} \frac{1-\alpha}{\alpha} \quad \text{auch gleich} \quad \frac{0,5}{0,3} \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

und damit

$$\frac{f^2}{2i^2} = \left( \frac{i}{e\sqrt{2}} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^2 \quad \text{also} \quad \frac{2i^2 + f^2}{2i^2} = 1 + \left( \frac{i}{e\sqrt{2}} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^2$$

mithin

$$\frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2) = 2i^2 \frac{n^2}{4} \left\{ 1 + \left( \frac{i}{e\sqrt{2}} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^2 \right\}$$

und mit

$$n^2 i^2 = \epsilon_0 = \frac{P}{E F} \quad \text{auch gleich} \quad \frac{P}{k F} \frac{k}{E} = \frac{\alpha k}{E};$$

also

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2) &= \alpha \frac{k}{2E} \left\{ 1 + \left( \frac{i}{e \sqrt{2}} \frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^2 \right\} = \frac{k}{2E} \left\{ \alpha + \frac{i^2}{2e^2} \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \right\} \\ &= \frac{k}{2E} \left\{ \alpha + \frac{0,25}{0,09} \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

Die Klammergrösse  $\left( \alpha + \frac{0,25}{0,09} \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \right)$  wird z. B.:

für $\alpha = 1$ bzw.											
0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05		
$\left( \alpha + \frac{0,25}{0,09} \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} \right) = 1$ bzw.											
0,90	0,81	0,73	0,67	0,63	0,63	0,71	1,00	2,12	4,56		
0,90	0,80	0,71	0,62	0,54	0,48	0,45	0,49	0,83	1,67		∞

Daraus geht hervor, dass für alle Werte von  $\alpha = 1$  bis herab unter 0,1 die für den charakteristischen Nebenfaktor  $\nu$  entscheidende Grösse

$$\frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)$$

nicht wesentlich sich über den im allgemeinen sehr kleinen und deshalb gegen 1 zu vernachlässigenden Wert  $\frac{k}{2E}$  erheben kann. Erst von da ab, wie aus der Zahlenreihe für den Klammersausdruck hervorgeht, und zwar auch nur für schon wesentlich kleinere  $\alpha$  als  $\alpha = 0,1$ , macht sich die für den Nebenfaktor entscheidende Grösse

$$\frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)$$

überhaupt bemerkbar. Stark federnde Stäbe haben also stets einen sehr kleinen Abminderungskoeffizienten  $\alpha$  und derselbe wird — nach der zweiten Kolonne der Tabelle — erst mit

$$\frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2) \geq \frac{1}{50}$$

und weil  $\alpha$  sehr klein, für

$$\alpha + \frac{i^2}{2e^2} \frac{(1-\alpha)^2}{\alpha} = \frac{i^2}{2e^2} \frac{1}{\alpha} \quad \text{nahezu}$$

höchstens:

$$\alpha \leq \frac{0,25}{0,09} \frac{k}{2E} = \sim \frac{12,5}{4,5} \frac{k}{2E}$$

$\frac{k}{2E}$  ist selbst mit seinem Höchstwert  $\frac{k_0}{2E}$  beim Bruch noch sehr klein und zwar für Fluß- und Schweißstählen:

$$\frac{k_0}{2E} = \frac{1}{1140}$$

für Fluß- bez. Tiegelstahl:

für Gußeisen: 
$$\frac{k_0}{2E} = \frac{1}{800} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{600}$$

Holz: 
$$\frac{k_0}{2E} = \frac{1200}{2 \cdot 850\,000} = \sim \frac{1}{1400}$$

Genau genommen kann  $\alpha = \frac{P}{kF}$  niemals ganz auf 0 herabsinken, wenn nicht auch  $P = 0$  wird. Ist  $P$  aber nicht = 0, so kann  $\alpha$  niemals kleiner werden, als sich hierfür mit dem grössten möglichen Tabellenwert für

$$\frac{n^2}{4}(2i^2 + f^2) = \sim 0,7$$

ergiebt, d. i.

$$\alpha \geq \frac{1}{0,7} \frac{0,25}{0,09} \frac{k}{2E} = \sim \frac{0,36}{0,13} \frac{k}{2E},$$

für den praktischen Standpunkt allerdings so gut wie 0. Für stark federnde Stäbe ist also nach Vorstehendem der Abminderungskoeffizient

$$\alpha = \frac{P}{kF}$$

stets sehr klein, d. h. es kommt die eigentliche Druckspannung nicht zur Geltung im Vergleich zu der — wenigstens in der Nähe des Bruches herrschenden — Biegungsspannung. Weil gleichzeitig aber dann auch  $2i^2$  gegen  $f^2$  nicht aufkommen kann und deshalb auch

$$-y_0 = \sqrt{2i^2 + f^2} - f$$

nicht wesentlich von 0 abweicht, so wird die früher für den Pfeil  $f$  gefundene Bedingungsgleichung speziell für den Fall des Bruches:

$$\frac{n_0 l}{2} \sqrt{V} = \arccos \frac{\sqrt{2i^2 + f^2} - f}{\sqrt{2i^2 + f^2}} = \frac{\pi}{2},$$

oder sehr nahezu:

$$n_0^2 l^2 \left( 1 - \xi_0 \frac{n_0^2}{4} (2i^2 + f_0^2) \right) = \pi^2,$$

oder auch

$$\pi^2 = n_0^2 l^2 \left( 1 - \frac{\xi_0}{4} n_0^2 f_0^2 \right).$$

Mit derselben Annäherung erfolgt aber dann auch der Bruch bei:

$$\max M = P_0 f_0 = k_0 W; \quad n_0^2 = \frac{P_0}{E_0 J} \quad (\text{siehe Fig. 7}).$$

Setzt man den Wert

$$P_0 f_0 = E_0 J n_0^2 f_0 = k_0 W$$

in der obigen Gleichung ein, so erhält man für die Kraft  $P_0$ , welche den Stab zerknickt:

$$17) \quad P_0 = \frac{\pi^2}{l^2} E_0 J \left\{ 1 + \frac{\xi_0}{4} \left( \frac{1}{\pi} \frac{l}{e} \frac{k_0}{E_0} \right)^2 \right\};$$

oder auch

$$n_0^2 = \frac{\pi^2}{l^2} \{ 1 + \dots \}$$

und für den Pfeil  $f_0$ , bei welchem der Bruch erfolgt:

$$18) \quad f_0 = \frac{k_0 W}{P_0} = \frac{\frac{k_0}{E_0} \frac{l^2}{\pi^2 e}}{1 + \frac{\xi_0}{4} \left( \frac{1}{\pi} \frac{l}{e} \frac{k_0}{E_0} \right)^2};$$

oder auch:

$$f_0 = \frac{k_0}{E_0 n_0^2 e}.$$

Wie früher schon hervorgehoben wurde und durch die Tabellenwerte thatsächlich bestätigt wird, geht der Koeffizient  $\xi$  von 0,5 bis höchstens gleich 0,61, während

$$\frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)$$

in diesem Fall nahezu  $= \frac{n^2 f^2}{4}$  von 0 bis  $\sim 0,7$  geht und die Durchbiegung  $f$  gleichzeitig von 0 bis zu ihrem Höchstwert

$$\max f = \sim 0,404 l$$

anwächst. Unter der Voraussetzung, dass der Elastizitätsmodul  $E$  den gleichen Wert bis zum Bruch beibehalte, der ihm innerhalb der Proportionalitätsgrenze zukommt, würde also der grösste Wert, den  $f$  überhaupt annehmen kann, d. i.

$$\max f_0 = \sim 0,404 l$$

betragen; damit würde — für einen gegebenen Stab, mit

$$\max M = P_0 f_0 = k_0 W$$

die Kraft  $P_0$ , welche den Bruch herbeiführt, überhaupt höchstens werden können, aus:

$$n^2 l^2 \left( 1 - \xi \frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2) \right) = n^2 l^2 (1 - 0,61 \text{ mal } 0,7) = \pi^2:$$

$$19) \quad \max P_0 = \frac{\pi^2}{l^2} \frac{EJ}{0,573} = 1,7445 \frac{\pi^2}{l^2} EJ.$$

Da aber über die Prop.-Grenze hinaus der Elastizitätsmodul  $E$  kleiner wird, so ist für  $E$  beim Bruch im allgemeinen ein etwas kleinerer Mittelwert einzusetzen, wodurch in Wirklichkeit  $f_0$  entsprechend grösser, dagegen  $P_0$  entsprechend kleiner ausfällt.

### Gegenseitige Abhängigkeit von Druck und Biegung.

Innerhalb der Proportionalitätsgrenze ist die gegenseitige Abhängigkeit vom Druck  $P$  und der Durchbiegung  $f$  bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{f}{\sqrt{2i^2 + f^2}} = 1 - \cos \frac{nl}{2} \sqrt{\phantom{x}} = 2 \sin^2 \frac{nl}{4} \sqrt{\phantom{x}},$$

oder

$$\sin \frac{nl}{4} \sqrt{\phantom{x}} = \sqrt[4]{\frac{1}{4} \frac{f^2}{2i^2 + f^2}}$$

auch gleich

$$\sqrt[4]{\frac{1}{4} \frac{1}{1 + \frac{2i^2}{f^2}}} \quad \text{oder gleich} \quad \sqrt[4]{\frac{1}{4} \frac{\frac{f^2}{2i^2}}{1 + \frac{f^2}{2i^2}}}$$

A. Für nicht stark federnde Stäbe, wie sie in den praktischen Aufgaben der Knickfestigkeit gewöhnlich vorkommen, ist nach früherem

$$\frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)$$

immer sehr klein gegen 1, und also der charakteristische Nebenfaktor  $\sqrt{\phantom{x}}$  sehr nahezu = 1; für solche Stäbe ist daher  $f^2$  im allgemeinen vergleichbar mit  $2i^2$  oder doch nicht vielmal grösser und deshalb

$$\sin \frac{nl}{4} \sqrt{\phantom{x}}$$

gleich sehr nahezu

$$\sin \frac{nl}{4} = \sqrt[4]{\frac{1}{4} \frac{f^2}{2i^2 + f^2}} = \sqrt[4]{\phantom{x}},$$

oder

$$\frac{nl}{4} = \arcsin \sqrt[4]{\phantom{x}} = \sqrt[4]{\phantom{x}} + \frac{1}{6} \sqrt[4]{\phantom{x}}^3 + \dots = \sqrt[4]{\phantom{x}} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \sqrt[4]{\phantom{x}} + \dots \right\}$$

mithin

$$\frac{n^2 l^2}{16} = \frac{Pl^2}{16 EJ} = \arcsin^2 \sqrt[4]{\phantom{x}} = \sqrt[4]{\phantom{x}} \left\{ 1 + \frac{1}{6} \sqrt[4]{\phantom{x}} + \dots \right\}^2,$$

also:

$$P = \frac{16 EJ}{l^2} \arcsin^2 \sqrt[4]{\phantom{x}} = \frac{8 EJ}{l^2} \sqrt[4]{\frac{f^2}{2i^2 + f^2}} \left\{ 1 + \frac{1}{12} \sqrt[4]{\frac{f^2}{2i^2 + f^2}} + \dots \right\}^2$$

oder auch

$$P = \frac{8 EJ}{l^2} \sin \psi \left\{ 1 + \frac{1}{12} \sin \psi + \dots \right\}^3; \quad \text{mit } \operatorname{tg} \psi = \frac{f}{i\sqrt{2}}$$

$$\sin \psi = \sqrt[4]{\frac{f^2}{2i^2 + f^2}} \quad \text{geht von 0 bis höchstens} = 1$$

während der Druck  $P$  von 0 bis zu seinem Höchstwert  $P_0$  (beim Bruch) anwächst. Dabei ist zu beachten, dass die Grenze 1 überhaupt nur von sehr stark federnden Stäben und zwar nur beim Bruch erreicht werden kann. Bleibt dagegen der Druck  $P$  innerhalb der Proportionalitätsgrenze, oder gar innerhalb der zulässigen Inanspruchnahme, also bei  $m$ -facher Sicherheit gegen Bruch oder auch  $m_1$ -facher Sicherheit gegen die Proportionalitätsgrenze, so muss jedenfalls auch  $\sin \psi$  ein kleiner Bruch bleiben, so dass innerhalb dieser Grenzen nahezu der obige Klammerwert

$\{1 + \dots\}^2 = 1$  und  $\operatorname{tg} \psi = \frac{f}{i\sqrt{2}}$  anstatt  $\sin \psi$  gesetzt werden kann. Damit wird nahezu

$$20) \quad P = \frac{8EJ}{l^2} \frac{f}{i\sqrt{2}} \quad \text{oder auch} \quad \frac{f}{i\sqrt{2}} = \frac{Pl^2}{8EJ} \quad \text{auch} = \frac{n^2 l^2}{8}$$

d. h. für nicht stark federnde Stäbe ist innerhalb der üblichen Grenzen der Anwendung die Durchbiegung  $f$  nahezu proportional der Druckkraft  $P$ . Zum gleichen Resultat gelangt man mit dem allgemeinen Ausdruck für

$$f = i\sqrt{2} \frac{2 \sin^4 \frac{nl}{4} \sqrt{\phantom{x}}}{\sqrt{1 - 4 \sin^4 \frac{nl}{4} \sqrt{\phantom{x}}}},$$

wenn man beachtet, dass bei einem Druck  $P$  bei mindestens  $m = 4$ -facher Sicherheit gegen die Bruchkraft  $P_0$  für  $\sin \frac{nl}{4} \sqrt{\phantom{x}}$  nahezu der Bogen  $\frac{nl}{4} \sqrt{\phantom{x}}$  selbst gesetzt werden kann, also

$$\frac{f}{i\sqrt{2}} = \frac{n^2 l^2}{8} = \frac{Pl^2}{8EJ}$$

ist. Ferner ergibt sich aus  $k = \frac{P}{F} + \frac{Pf}{W}$  und  $\alpha = \frac{P}{kF}$  für

$$\frac{Pf}{W} = k - \frac{P}{F} = \frac{P}{J} f e; \quad \text{oder} \quad \frac{Pf}{J} = \frac{k - \frac{P}{F}}{e} = \frac{k}{e} (1 - \alpha)$$

und also in Verbindung mit der vorigen Gleichung:

$$\frac{f^2}{l^2} = \frac{i\sqrt{2}}{8E} \frac{Pf}{J} = \frac{i\sqrt{2}}{8E} \frac{k}{e} (1 - \alpha)$$

oder

$$21) \quad \frac{f}{l} = \sqrt{\frac{k}{4E} \frac{i}{e\sqrt{2}}} (1 - \alpha)$$

wodurch bestätigt wird, dass die Federung  $\frac{f}{l}$  unter diesen Umständen stets eine kleine Grösse bleibt, weil  $\sqrt{\frac{k}{4E} \frac{i}{e\sqrt{2}}}$  für alle hier in Betracht kommenden Baustoffe ziemlich klein ist; für  $\alpha = 1$  wird unter allen Umständen  $\frac{f}{l} = 0$ .

**B.** Für stark federnde Stäbe dagegen erhält man aus der von der Gleichung der elastischen Linie abgeleiteten Bedingungsgleichung:

$$\cos \frac{nl}{2} \sqrt{\phantom{x}} = \frac{\sqrt{2i^2 + f^2} - f}{\sqrt{2i^2 + f^2}} = \frac{-y_0}{\sqrt{2i^2 + f^2}} = \frac{i^2}{f^2}$$

nahezu, indem man beachtet, dass in diesem Fall immer  $2i^2$  klein ist gegen  $f^2$ , und also die höheren Potenzen von  $\frac{2i^2}{f}$  ausser acht gelassen werden können.

Damit hat man  $\frac{nl}{2} \sqrt{1 - \xi \frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)} = \arccos \frac{-y_0}{\sqrt{1 - \xi \frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{-y_0}{\sqrt{1 - \xi \frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)}} = \frac{\pi}{2} - \frac{i^2}{f^2}$   
 oder auch  $\frac{nl}{2} \sqrt{1 - \xi \frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)} = \frac{\pi}{2} - \frac{-y_0}{\sqrt{2i^2 + f^2}}$  oder im vorliegenden Falle nahezu auch

$$22) \quad \frac{nl}{2} \sqrt{1 - \xi \frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)} = \frac{\pi}{2} - \frac{i^2}{f^2}.$$

Gleichung 22) gilt für jedes  $n$  bzw.  $P$  innerhalb der Proportionalitätsgrenze. Speziell für den Bruch hat man daraus

$$23) \quad \frac{n_0 l}{2} \sqrt{1 - \xi_0 \frac{n_0^2}{4} (2i^2 + f^2)} = \frac{\pi}{2},$$

wo der Zeiger 0 sich auf den Bruch bezieht, also für

$$n_0 = \frac{P_0}{E_0 J}$$

zu setzen ist, und  $E_0$  ein dem Bruch entsprechend kleinerer Mittelwert von  $E$  bedeutet. Durch Division und Quadrierung der beiden Gleichungen 22) und 23) findet sich

$$\frac{n^2 \frac{1 - \xi \frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)}{1 - \xi_0 \frac{n_0^2}{4} (2i^2 + f^2)}}{n_0^2} = \left(1 - \frac{-2y_0}{\pi \sqrt{2i^2 + f^2}}\right)^2 = \frac{P}{P_0} \frac{E_0}{E} \frac{1 - \xi \frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)}{1 - \xi_0 \frac{n_0^2}{4} (2i^2 + f^2)} = \left(1 - \frac{4i^2}{\pi f^2}\right)^2$$

nahezu, oder:

$$24) \quad \frac{P}{P_0} = \frac{E}{E_0} \frac{1 - \xi_0 \frac{n_0^2}{4} (2i^2 + f_0^2)}{1 - \xi \frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)} \left\{1 - \frac{4i^2}{\pi f^2}\right\}^2.$$

$1 - \xi \frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)$  variiert nur von 1, bei  $\frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2) = 0$ , d. i. wenn nahezu  $n^2 = 0$  bzw.  $P = 0$  ist bis zu seinem kleinsten Wert beim Bruch  $= 1 - \xi_0 \frac{n_0^2}{4} (2i^2 + f_0^2)$  in diesem Fall auch  $= 1 - \xi_0 \frac{n_0^2 f_0^2}{4}$ , der überhaupt nicht unter  $\sim 0,573$  herabgehen kann. Aus diesem Grund

variiert also der Quotient  $\frac{1 - \xi_0 \frac{n_0^2}{4} (2i^2 + f_0^2)}{1 - \xi \frac{n^2}{4} (2i^2 + f^2)}$  nur zwischen 1 und  $\sim 0,573$

und diese Variation wird thatsächlich noch etwas geringer ausfallen durch das Hinzutreten des Faktors  $\frac{E}{E_0}$ , der von 1 ausgehend gleichzeitig um etwas anwächst. Da der andere Faktor  $1 - \frac{4i^2}{\pi f^2}$  nicht wesentlich von 1 abweichen kann, solange  $f$  in Betracht kommt, so kann innerhalb dieser Grenzen also  $P$  überhaupt nicht wesentlich kleiner werden als  $P = \sim 0,573 P_0$ , wobei im allgemeinen aber die Elastizitätsgrenze schon überschritten ist. Aus diesem Umstand ist es erklärt, dass bei stark federnden Stäben die Bruch-

kraft  $P_0$  nicht viel verschieden ist von derjenigen Kraft  $P$ , bei welcher überhaupt eine merkliche Durchbiegung aufzutreten beginnt, und dass also der Stab bei einer gewissen Belastung  $P$  fast plötzlich knickt, wie dies durch die Versuche von Baudirektor von Bach — siehe Bach: Elastizität und Festigkeit 1898, S. 220/21 — bestätigt wird.

Der zulässige Maximaldruck  $P$  bei  $m$ -facher Sicherheit gegen Bruch ist aus Gleichung 16)

$$P_0 = mP = \frac{\pi^2}{l^2} E_0 J \left\{ 1 + \frac{\xi_0}{4} \left[ \frac{1}{\pi} \frac{l}{e} \frac{k_0}{E_0} \right]^2 \right\}$$

also

$$25) \quad P = \frac{\pi^2 E_0 J}{l^2 m} \left\{ 1 + \frac{\xi_0}{4} \left[ \frac{1}{\pi} \frac{l}{e} \frac{k_0}{E_0} \right]^2 \right\},$$

worin, wie gesagt, für  $E_0$  ein etwas kleinerer Mittelwert von  $E$  zu setzen ist, der dem Umstand Rechnung trägt, dass beim Bruch in der Nähe der Stabmitte die Proportionalitätsgrenze überschritten wird. Ist  $m$  wie üblich = 4 bis 5 oder gar noch grösser, dann kann die mit diesem Druck  $P = \frac{P_0}{m}$  gleichzeitig auftretende Federung nicht gross sein, wie oben dargeguthan wurde. Es verhält sich also hiernach der eigentlich unter B fallende „stark federnde Stab“ innerhalb der genannten Grenzen einer vier- bis fünffachen Sicherheit — genau noch ebenso, wie der unter A fallende „mässig federnde Stab“. Denn so lange die Federung  $\frac{f}{l}$  in mässigen Grenzen bleibt, ist der charakteristische Nebenfaktor — praktisch genommen — so gut wie = 1 und deshalb ist innerhalb dieser Grenzen auch die Durchbiegung  $f = i\sqrt{2} \operatorname{tg} \psi$  zu setzen, wobei  $\sin \psi = 1 - \cos \frac{n l}{2} = 2 \sin^2 \frac{n l}{4}$ , wenn man hierin für  $n = \sqrt{\frac{P}{EJ}}$  und für  $P$  den vorhin gefundenen Wert einsetzt.

## Note zum Artikel „Erweiterungen des Faktoriellensatzes“.

Von

LOUIS SAALSCHÜTZ

in Königsberg i. Pr.

Mein Freund, Herr Professor W. Heymann, hat mir nach der Lektüre meiner jüngsten Veröffentlichung in dieser Zeitschrift\* einige Bemerkungen über die von mir a. a. O. aufgestellten Reihen  $\Phi(x, \mu)$  und  $F(x, \mu)$  und über ihren Zusammenhang mit seiner Auflösung der trinomischen Gleichungen\*\* mitgeteilt. Da dieselben auf die genannten Reihen ein neues Licht werfen und sich ausserdem durch Einfachheit auszeichnen, will ich ihren wesentlichen Inhalt dem mathematischen Publikum nicht vorenthalten, wobei ich mich jedoch meiner Bezeichnungen bediene.

I. Vor einer Reihe von Jahren hatte ich\*\*\* den in meiner oben genannten Veröffentlichung (C) als  $A_{(n)}$  reproduzierten Satz bewiesen:

$$1) \quad \sum_{k=0}^n \varphi_k(\mu) \varphi_{n-k}(\nu) = \varphi_n(\mu + \nu),$$

worin  $\varphi_k(\mu)$  die Bedeutung

$$2) \quad \varphi_k(\mu) = \mu \cdot \prod_{r=1}^{k-1} (\mu + r + k\gamma) : k!; \quad \varphi_0(\mu) = 1; \quad \varphi_1(\mu) = \mu$$

besitzt. Setzen wir nun

---

\* „Erweiterungen des Faktoriellensatzes“ Bd. 44 (1899) S. 340, weiterhin als Arbeit (C) zitiert. (Bitte daselbst S. 342 in der Zeile vor Gleichung 3)  $n!$  zu lesen, und S. 345 bei dem letzten Wurzelzeichen den Wurzelexponenten 3 zu ergänzen.)

\*\* Insbesondere „Die trinomische und quadrimische Gleichung in elementarer Behandlungsweise.“ Diese Zeitschrift Bd. 37 (1892) S. 90, weiterhin als Arbeit (B) zitiert.

\*\*\* In einem Artikel dieser Zeitschrift Bd. 32 (1887) S. 250, weiterhin als Arbeit (A) zitiert.

$$3) \quad \Phi(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\mu) x^k,$$

so folgt aus 1) unmittelbar

$$4) \quad \Phi(x, \mu) \Phi(x, \nu) = \Phi(x, \mu + \nu),$$

welcher Satz den in (A) gegebenen Beispielen zu Grunde liegt. Folglich ist, wenn wir  $\Phi(x, 1)$  als  $y$  bezeichnen:

$$5) \quad \Phi(x, \mu) = y^\mu.$$

Wir setzen ferner in (C):

$$6) \quad f_k(\mu) = \prod_{r=0}^{k-1} (\mu + r + k\gamma) : k!, \quad f_0(\mu) = 1,$$

und

$$7) \quad F(x, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(\mu) x^k.$$

Dann ist, wie Herr Heymann bemerkt,

$$8) \quad f_k(\mu) = \frac{(k+1) \varphi_{k+1}(\mu - \gamma - 1)}{\mu - \gamma - 1},$$

und daran knüpft er folgende Schlüsse:

Es ist:

$$9) \quad F(x, \mu) = \frac{1}{\mu - \gamma - 1} \frac{d\Phi(x, \mu - \gamma - 1)}{dx},$$

d. i. nach 5):

$$9a) \quad F(x, \mu) = \frac{1}{\mu - \gamma - 1} \frac{dy^{\mu - \gamma - 1}}{dx},$$

daher

$$F(x, \mu) \Phi(x, \nu) = y^{\mu + \nu - \gamma - 2} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\mu + \nu - \gamma - 1} \frac{dy^{\mu + \nu - \gamma - 1}}{dx},$$

also nach 9a):

$$F(x, \mu) \Phi(x, \nu) = F(x, \mu + \nu).$$

Diese Gleichung ist identisch mit meiner (C) 6), welche sich also a posteriori in obiger sehr einfacher Art beweisen lässt.

II. Ferner ist

$$\begin{aligned} \varphi_k(1 + \gamma) &= \frac{1 + \gamma}{k!} \prod_{r=1}^{k-1} [1 + r + (k+1)\gamma] \\ &= \frac{\prod_{r=1}^k [1 + r + (k+1)\gamma]}{(k+1)!} = \varphi_{k+1}(1). \end{aligned}$$

Mittels dieser von Heymann aufgefundenen Beziehung gelangt er mit Rücksicht auf 5) zu der Gleichung:

$$y^{\gamma+1} = \Phi(x, \gamma + 1) = 1 + \varphi_2(1)x + \varphi_3(1)x^2 + \varphi_4(1)x^3 + \dots,$$

während  $y$  selbst durch die Gleichung

$$10) \quad y = \Phi(x, 1) = 1 + x + \varphi_2(1)x^2 + \varphi_3(1)x^3 + \dots$$

gegeben ist.

Aus diesen beiden Gleichungen lassen sich sämtliche Funktionen  $\varphi_k(1)$  eliminieren und man erhält die Gleichung:

$$11) \quad y - xy^{1+\gamma} - 1 = 0,*$$

d. h. eine Wurzel dieser Gleichung für  $y$  und zwar diejenige, welche die Eigenschaft hat, dass

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{y-1}{x} = 1$$

ist, wird durch die Reihenentwicklung 10) dargestellt, und beliebige Potenzen derselben vermöge der Gleichungen 3) und 5).

Aus 9a) folgt  $F(x, 0)$ , wenn  $\mu = 0$  gesetzt wird und durch Differentiation von 11) nach  $x$  ergibt sich dann leicht die Gleichung

$$12) \quad F(x, 0) = \frac{1}{\gamma + 1 - \gamma \Phi(x, 1)},$$

welche mit derjenigen Gleichung in (C), die den Beispielen unmittelbar vorangeht, identisch ist. So oft sich 11) algebraisch auflösen lässt, muss sich

$$y = \Phi(x, 1)$$

also nach 12) auch  $F(x, 0)$  in geschlossenem Ausdruck darstellen lassen; dies ist für die Werte

$$\gamma = 1, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -1, -2,$$

welche ich in (C) angegeben habe, und ausserdem für die Werte:

\* Nimmt man  $n$  und  $s$  als gegebene positive ganze Zahlen an, setzt

$$y = \left(\frac{\eta}{\tau}\right)^n, \quad x = \sigma \xi, \quad \gamma = -\frac{s}{n}$$

und bestimmt die Konstanten  $\tau$  und  $\sigma$  durch die Gleichungen

$$\tau^n + 1 = 0, \quad \sigma = \tau^{n-s},$$

so entsteht aus 11) die Gleichung

$$\eta^n + \xi \eta^{n-s} + 1 = 0,$$

deren  $n$  Wurzeln nebst ihren  $m$ ten Potenzen durch die  $n$ -deutigen Reihen

$$\eta = \tau \left\{ 1 + \varphi_1 \left(\frac{1}{n}\right) \sigma \xi + \varphi_2 \left(\frac{1}{n}\right) \sigma^2 \xi^2 + \dots \right\} = \tau \Phi \left( \sigma \xi, \frac{1}{n} \right)$$

$$\eta^m = \tau^m \Phi \left( \sigma \xi, \frac{m}{n} \right)$$

gegeben sind. Diese Gleichung ist von Heymann im 31. Bd. dieser Zeitschrift (1886) nach ganz anderer Methode (Mac Laurinsche Reihe mit Benutzung einer Schlömilchschen Formel) und in anderer Bezeichnung zuerst aufgestellt [siehe besonders daselbst S. 225 Gleichung 4)] und in Arbeit (B) reproduziert worden.

und 
$$\gamma = 2, 3, -4, -3$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, -\frac{3}{2}$$

der Fall.

Schliesslich darf ich wohl die Hoffnung aussprechen, dass durch die hier mitgeteilten hübschen Entwicklungen meines Freundes Heymann das Interesse für meine eigene in Arbeit (C) dargelegte heuristische Methode zur Erlangung der Gleichung 6) und für die auf sie gegründeten weiteren Folgerungen, welche zu den Gleichungen 19) führen, nicht geschmälert werden wird, und möchte ich bei dieser Gelegenheit noch ergänzend bemerken, dass die Konvergenz der Reihen  $\Phi(x, \mu)$  und  $F(x, \mu)$  gemeinsam unter den folgenden Bedingungen stattfindet, wobei die drei Fälle

$$\gamma \geq 0, \gamma \leq -1, 0 > \gamma > -1$$

zu unterscheiden sind:

1. für positives  $\gamma$ , wenn

$$\frac{(1+\gamma)^{1+\gamma}}{\gamma^\gamma} \cdot x \leq 1;$$

2. für negatives  $\gamma = -\gamma'$ ,  $\gamma' \geq 1$ , wenn

$$\frac{(\gamma')^{\gamma'}}{(\gamma'-1)^{\gamma'-1}} x \leq 1;$$

3. für negatives  $\gamma = -\gamma'$ ,  $0 \leq \gamma' \leq 1$  (vergl. Heymann (B) § 5), wenn

$$(\gamma')^{\gamma'} (1-\gamma')^{1-\gamma'} x \leq 1. \quad \text{*}$$

Setzt man in diesem letzten Falle

$$\gamma = -\gamma' = -\frac{s}{n} \quad (s \text{ und } n > s \text{ positive ganze Zahlen),}$$

so zerfällt die unendliche Summe (von einem hinreichend grossen Glied-Index an) in Gruppen von je  $n$  Gliedern, deren Zeichenfolge sich wiederholt, und zwar, wenn  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n + 1$  oder  $-1$  bedeuten, in der Art:

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n), (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n), \text{ etc., wenn } s \text{ gerade,}$$

$$(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n), -(\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n), \pm \text{ etc., wenn } s \text{ ungerade.}$$

Die Konvergenzbedingungen lassen sich in das Zeichen

$$\frac{|1+\gamma|^{1+\gamma}}{|\gamma|^\gamma} \cdot x \leq 1$$

(so dass in der Basis der Absolutwert, im Exponenten der wirkliche Wert der betreffenden Grössen steht), zusammenfassen, und der Grenzwert 1 darf erreicht werden: für  $\gamma > 0$ , wenn  $x$  negativ, für  $\gamma < -1$ , wenn  $x$  positiv, für  $0 > \gamma > -1$ , wenn  $(-1)^s x^n$  negativ ist.

# Nachtrag zu meiner Herleitung der Interpolationsformeln.

Von

Prof. Dr. W. VELTMANN

in Poppelsdorf.

Band 44 Seite 303 dieser Zeitschrift.

Will man die Auflösung der Gleichungen durch Determinanten anwenden, so kann man zu den Ausdrücken für die Differenzteile in etwas einfacherer Weise gelangen. Wenn man

$$(x_m - x_0)(x_m - x_1) \dots (x_m - x_{n-1})$$

mit  $P_{mg}$  bezeichnet, so werden die Gleichungen 14) S. 307 die folgenden

$$\begin{aligned} r_0 &= y_0 \\ r_0 + P_{10} r_1 &= y_1 \\ r_0 + P_{20} r_1 + P_{21} r_2 &= y_2 \\ r_0 + P_{30} r_1 + P_{31} r_2 + P_{32} r_3 &= y_3 \\ \dots &\dots \\ r_0 + P_{n-1,0} r_1 + P_{n-1,1} r_2 + P_{n-1,2} r_3 + \dots + P_{n-1,n-2} r_{n-1} &= y_{n-1} \\ r_0 + P_{n0} r_1 + P_{n1} r_2 + P_{n2} r_3 + \dots + P_{n,n-2} r_{n-1} + P_{n,n-1} r_n &= y_n. \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$r_n = \frac{\delta_n y_n + \delta_{n-1} y_{n-1} + \dots + \delta_1 y_1 + \delta_0 y_0}{1 \cdot P_{10} \cdot P_{21} \cdot P_{32} \dots P_{n-1,n-2} \cdot P_{n,n-1}},$$

wo im Zähler die Koeffizienten der  $y$  mit  $\delta$  bezeichnet sind und

$$\delta_n = 1 \cdot P_{10} \cdot P_{21} \dots P_{n-1}, \quad n - 2$$

ist. Der Teil mit  $y_n$  wird also

$$= \frac{y_n}{P_{n,n-1}} = \frac{y_n}{(x_n - x_0)(x_n - x_1) \dots (x_n - x_{n-1})}.$$

In dem Ausdruck für  $r_n$  ist also der Koeffizient von  $y_n$  der reziproke Wert eines Produktes, dessen Faktoren man erhält, indem man von dem zu  $y_n$  gehörigen  $x$  sämtliche übrige  $x$  subtrahiert. Nun kann man die Reihenfolge der Wertepaare ändern, so dass statt  $y_n$  irgend ein anderes  $y$  das letzte wird. Der Ausdruck für  $r_n$  ändert sich dabei nicht, weil in der Funktion (Gleichungen 13)

$$\begin{aligned} f_n = r_0 + (x - x_0) r_1 + (x - x_0)(x - x_1) r_2 + \dots \\ + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) r_n \end{aligned}$$

$r_n$  wieder der Koeffizient der höchsten Potenz von  $x$  ist. Für dasjenige  $\delta$ , dessen  $y$  jetzt das letzte geworden ist, gilt also dieselbe Regel wie für  $\delta_n$ , somit gilt diese Regel allgemein.

## Eine allgemeine Eigenschaft der algebraischen Funktionen.

Von Rudolf Ziegel in Berlin.

Die algebraische Funktion  $y$  der unabhängigen Variablen  $x$  sei durch die irreduktible algebraische Gleichung

$$1) \quad A_0 y^m + A_1 y^{m-1} + \dots + A_m = 0$$

mit in  $x$  rationalen Koeffizienten  $A_0, A_1, \dots, A_m$  definiert.

Die Differentiation von 1) ergibt:

$$\frac{dy}{dx} \cdot \sum_{\mu=0}^{m-1} A_{\mu} \cdot (m - \mu) \cdot y^{m-\mu-1} + \sum_{\nu=0}^m \frac{dA_{\nu}}{dx} \cdot y^{m-\nu} = 0,$$

mit anderen Worten: es genügt  $y$  einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x),$$

unter  $f$  eine rationale Verbindung der beiden seiner Argumente verstanden.

Weit schwieriger als die Herleitung dieses bekannten Resultates scheint mir der direkte, d. h. aus der definierenden Gleichung 1) selbst folgende Beweis eines ähnlichen Satzes, der sich, soviel ich weiss, nirgends angegeben findet. Aus der Identität

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

folgt durch Integration:

$$x = \int \frac{dy}{y'}.$$

Da  $y$  von  $x$  algebraisch abhängt, so sind auch  $x$  und  $\frac{1}{y'}$  algebraische Funktionen von  $y$ . Daher ist nach einem zuerst von Abel\*, später nochmals von Liouville\*\* bewiesenen Theorem der Integralwert

$$x = g\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$$

eine rationale Funktion der Argumente  $y, \frac{dy}{dx}$ ; hieraus folgt:

Eine algebraische Funktion genügt stets einer algebraischen Differentialgleichung erster Ordnung, in der die unabhängige Variable nur in der ersten Potenz auftritt,

oder auch:

Zu jeder algebraischen Funktion lässt sich eine rationale Verbindung aus der Funktion selbst und ihrer ersten Ableitung bilden, deren Wert gleich der unabhängigen Variablen ist.

\* N. H. Abel, Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, Crelle's Journal Bd. 4 p. 264 (1829); Oeuvres complètes (Christiania 1881), Bd. 1 p. 550.

\*\* J. Liouville, Premier mémoire sur la détermination des intégrales dont la valeur est algébrique, Journal de l'école royale polytechnique, Cah. 22, p. 147 (1833).

## Die magnetische Energie eines Systems elektrischer Ströme.

Von Dr. Dörge in Giessen.

Ein System elektrischer Ströme repräsentiert einen gewissen Arbeitswert, der durch das Integral

$$\frac{1}{8\pi} \int H^2 d\tau,$$

erstreckt über den unendlichen Raum, gegeben ist.  $H$  bedeutet die magnetische Feldstärke an der Stelle des Volumelements  $d\tau$ . Diese Energie ist nachweisbar im Öffnungsstrom und muss entstanden sein, während die Ströme auf ihren definitiven Wert anstiegen. Hierauf basiert die folgende Ableitung.

Ist im einfachsten Falle ein Stromleiter mit der elektromotorischen Kraft  $E$ , der Selbstinduktion  $L$  und dem Widerstande  $w$  gegeben, so steigt der Strom nach dem Gesetze an:

$$E - L \frac{dj}{dt} = wj,$$

wo  $j$  die Stromstärke im Momente  $t$  ist.

Ist der Strom bis zu seinem Endwerte  $i$  angestiegen (theoretisch nach unendlich langer Zeit), so ist die von der elektromotorischen Kraft geleistete Arbeit:

$$E \int_0^{\infty} j \cdot dt.$$

Die entwickelte Stromwärme aber ist nach dem Jouleschen Gesetz

$$\int_0^{\infty} \left( E - L \frac{dj}{dt} \right) j dt,$$

folglich muss

$$L \int_0^{\infty} \frac{dj}{dt} j \cdot dt = \frac{1}{2} L i^2$$

die Energie des entstehenden magnetischen Feldes sein.

Dies Verfahren lässt sich ebenso leicht auf ein System beliebig vieler Leiter anwenden. Sind in diesem Falle die elektromotorischen Kräfte

$$E_1 E_2 \dots E_n,$$

die Koeffizienten der Selbstinduktion

$$L_{11} L_{22} \dots L_{nn},$$

die der gegenseitigen Induktion

$$L_{21} L_{31} \dots L_{n1}, \quad L_{1n} L_{2n} \dots L_{n-1n},$$

$w_1 w_2 \dots w_n$  die Widerstände der einzelnen Leiter, so ist:

$$\begin{aligned}
 E_1 - \sum_{p=1}^{p=n} L_{p1} \frac{dj_p}{dt} &= j_1 w_1 \\
 \cdot &\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\
 E_n - \sum_{p=1}^{p=n} L_{pn} \frac{dj_p}{dt} &= j_n w_n
 \end{aligned}$$

$j_1, j_2 \dots j_n$  sind die Stromstärken in den einzelnen Leitern zur Zeit  $t$ .

Die von den elektromotorischen Kräften geleistete Arbeit ist

$$\sum_{m=1}^{m=n} E_m \int_0^{\infty} j_m dt,$$

die entwickelte Stromwärme:

$$\begin{aligned}
 &\sum_{m=1}^{m=n} E_m \int_0^{\infty} j_m dt \\
 &- \left\{ \sum_{p=1}^{p=n} L_{p1} \int_0^{\infty} \frac{dj_p}{dt} j_1 dt + \dots + \sum_{p=1}^{p=n} L_{pn} \int_0^{\infty} \frac{dj_p}{dt} j_n dt \right\}.
 \end{aligned}$$

Der in Klammer stehende Ausdruck muss demnach die magnetische Energie des entstehenden Feldes sein. Nun ist:

$$L_{pp} \int_0^{\infty} \frac{dj_p}{dt} j_p dt = \frac{1}{2} L_{pp} i_p^2,$$

wenn  $i_p$  die definitive Stromstärke des Leiters  $p$  ist. Ferner ist

$$L_{pq} = L_{qp};$$

mithin lassen sich die Glieder, in denen  $p \neq q$ , paarweise zusammenfassen in Ausdrücke von der Form

$$L \left\{ \int_0^{\infty} \frac{dj_p}{dt} j_q dt + \int_0^{\infty} \frac{dj_q}{dt} j_p dt \right\} = L_{pq} i_q i_p.$$

So wird schliesslich aus der Energie des Systems:

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \{ L_{11} i_1^2 + L_{22} i_2^2 + \dots + L_{nn} i_n^2 \\
 &\quad + 2 L_{12} i_1 i_2 + \dots + 2 L_{1n} i_1 i_n \\
 &\quad \quad \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 &\quad \quad \quad + 2 L_{n-1n} i_{n-1} i_n \}.
 \end{aligned}$$

## Bemerkungen zur Auflösung der Gleichungen vierten Grades.

Von Oberlehrer Beuriger in Bonn.

### I.

In der Heilermannschen Zerlegung (diese Zeitschr. Bd. 44 S. 234) ist die zweite Wurzel in der zweiten Klammer der Gleichungen 7) mit dem doppelten Vorzeichen versehen. Eine elementare Überlegung liefert die Bedingungen, wann das positive und wann das negative Zeichen zu setzen ist.

Setze ich in

$$1) \quad f = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

$$(Ax + By + D)^2 - Af = (B^2 - AC)y^2 + 2(BD - AF)y + D^2 - AF,$$

so ist die rechte Seite ein vollständiges Quadrat, wenn

$$(BD - AE)^2 = (B^2 - AC)(D^2 - AF)$$

ist. Das zweite Glied dieses Quadrates hat dasselbe Vorzeichen, wie  $BD - AE$ . Also

$$Af = (Ax + By + D)^2 - (y\sqrt{B^2 - AC} + \sqrt{D^2 - AF})^2,$$

wenn  $BD - AE > 0$  ist,

$$Af = (Ax + By + D)^2 - (y\sqrt{B^2 - AC} - \sqrt{D^2 - AF})^2,$$

wenn  $BD - AE < 0$  ist.

Für  $BD - AE = 0$  ist das Vorzeichen beliebig, da dann entweder  $\sqrt{B^2 - AC}$  oder  $\sqrt{D^2 - AF}$  verschwindet.

Setzt man nun nach Heilermann

$$A = a, \quad B = b, \quad C = c - \lambda, \quad D = c + 2\lambda, \quad E = d \quad F = e,$$

$$x = \xi^2, \quad y = 2\xi,$$

so ergibt sich für  $\lambda$  die kubische Resolvente

$$\begin{vmatrix} a & b & c + 2\lambda \\ b & c - \lambda & d \\ c + 2\lambda & d & e \end{vmatrix} = 0$$

und für die Vorzeichen von der letzten Wurzel die Bedingung

$$\text{Vorzeichen } +, \text{ wenn } 2b\lambda > ad - bc,$$

$$\text{„ } -, \text{ „ } 2b\lambda < ad - bc,$$

$$\text{„ } \pm, \text{ „ } 2b\lambda = ad - bc.$$

In letzterem Falle zerfällt die Resolvente in ein Produkt aus zwei Determinanten:

$$\begin{vmatrix} a & b & c + 2\lambda \\ b & c - \lambda & d \\ c + 2\lambda & d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 2b & c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b^2 \\ e & d^2 \end{vmatrix}.$$

In derselben Weise ergibt sich für die zweite Zerfällung die Bedingung

$$\begin{aligned} \text{Vorzeichen } +, & \text{ wenn } bd - (c - \lambda)(c + 2\lambda) > 0, \\ \text{„ } - & \text{ „ } bd - (c - \lambda)(c + 2\lambda) < 0, \\ \text{„ } \pm & \text{ „ } bd - (c - \lambda)(c + 2\lambda) = 0 \end{aligned}$$

und es ist im letzten Falle:

$$\begin{vmatrix} a & b & c+2\lambda \\ b & c-\lambda & d \\ c+2\lambda & d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 2b & c & d \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} e & d & c \\ 0 & e & d \\ 2d & c & b \end{vmatrix}.$$

Ebenso ergibt sich für die dritte Zerfällung

$$\begin{aligned} \text{Vorzeichen } +, & \text{ wenn } 2d\lambda > be - cd, \\ \text{„ } - & \text{ „ } 2d\lambda < be - cd, \\ \text{„ } \pm & \text{ „ } 2d\lambda = be - cd \end{aligned}$$

ist und es ist im letzten Falle:

$$\begin{vmatrix} a & b & c+2\lambda \\ b & c-\lambda & d \\ c+2\lambda & d & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e & d & c \\ 0 & e & d \\ 2d & c & b \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b^2 \\ e & d^2 \end{vmatrix}.$$

Die drei Heilermannschen Zerfällungen können aber auch ohne Zweideutigkeit der Wurzeln in folgender Form geschrieben werden:

$$\begin{aligned} af &= (a\xi^2 + 2b\xi + c + 2\lambda)^2 \\ &\quad - \left( 2\xi\sqrt{b^2 - ac + a\lambda} + \frac{bc - ad + 2b\lambda}{\sqrt{b^2 - ac + a\lambda}} \right)^2 \\ &= (a\xi^2 + 2b\xi + c + 2\lambda)^2 \\ &\quad - \left( \frac{2\xi(bc - ad + 2b\lambda)}{\sqrt{(c + 2\lambda)^2 - ae}} + \sqrt{(c + 2\lambda)^2 - ae} \right)^2 \\ (c - \lambda)f &= [b\xi^2 + 2(c - \lambda)\xi + d]^2 \\ &\quad - \left( \xi^2\sqrt{b^2 - ac + a\lambda} + \frac{bd - (c - \lambda)(c + 2\lambda)}{\sqrt{b^2 - ac + a\lambda}} \right)^2 \\ &= [b\xi^2 + 2(c - \lambda)\xi + d]^2 \\ &\quad - \left( \frac{\xi^2[bd - (c - \lambda)(c + 2\lambda)]}{\sqrt{d^2 - ec + e\lambda}} + \sqrt{d^2 - ec + e\lambda} \right)^2 \\ ef &= [(c + 2\lambda)\xi^2 + 2d\xi + e]^2 \\ &\quad - \left( \xi^2\sqrt{(c + 2\lambda)^2 - ae} + \frac{d(c + 2\lambda) - be}{\sqrt{(c + 2\lambda)^2 - ae}} \right)^2 \\ &= [(c + 2\lambda)\xi^2 + 2d\xi + e]^2 \\ &\quad - \left( \frac{\xi^2[d(c + 2\lambda) - be]}{\sqrt{d^2 - e(c - \lambda)}} + 2\xi\sqrt{d^2 - e(c - \lambda)} \right)^2. \end{aligned}$$

Jedoch wird eine solche Zerlegung für den Fall, dass der Nenner Null wird, unbrauchbar.

Die obigen Bemerkungen gelten auch für die Zerlegungen bei Faà di Bruno.\* Nimmt man dort S. 220 Formel 36) in den Ausdrücken  $\varrho_1 \varrho_2 \sigma_1 \sigma_2 \tau_1 \tau_2$  die absoluten Werte der Wurzeln, so sind folgende Vertauschungen vorzunehmen:

in Formel 33:  $\varrho_1$  mit  $\varrho_2$  oder  $\sigma_1$  mit  $\sigma_2$ ,

wenn  $a_1 \lambda < a_0 a_3 - a_1 a_3$  ist;

in Formel 34:  $\tau_1$  mit  $\tau_2$  oder  $\sigma_1$  mit  $\sigma_2$ ,

wenn  $a_1 a_2 - \left(a_2 - \frac{\lambda}{2}\right)(a_2 + \lambda) > 0$  ist;

in Formel 35:  $\tau_1$  mit  $\tau_2$  oder  $\varrho_1$  mit  $\varrho_2$ ,

wenn  $a_3 \lambda < a_1 a_4 - a_2 a_3$  ist.

In den übrigen Fällen bleiben die Formeln 33, 34, 35 ungeändert.

## II.

Beziehungen zwischen den Wurzeln der Gleichung vierten Grades und den Wurzeln ihrer kubischen Resolvente.

Aus der Dimension der Glieder der kubischen Resolvente

$$1) \quad 4\lambda^3 - (ae - 4bd + 3c^2)\lambda + ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3 = 0$$

folgt, dass  $\lambda$  eine Funktion zweiten Grades der Wurzeln  $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$  der Gleichung

$$2) \quad f = a\xi^4 + 4b\xi^3 + 6c\xi^2 + 4d\xi + e = 0,$$

ist. Ändere ich nämlich das Vorzeichen von  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  und  $\xi_4$ , so ändern nur  $b$  und  $d$  in 2) ihre Vorzeichen. Die Resolvente bleibt unverändert. Es fehlen also in den Ausdrücken für  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\lambda_3$  die Glieder erster Dimension in  $\xi_1 \xi_2 \xi_3$  und  $\xi_4$  und ebenso ein von diesen unabhängiges Glied, da  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$  ist.

Nun liefert jede Zerfällung der Gleichung vierten Grades in die Differenz zweier Quadrate bezw. in ein Produkt von vier linearen Faktoren für  $\lambda_1, \lambda_2$  und  $\lambda_3$  dieselben Wurzeln, wenn auch in anderer Reihenfolge. Diese Reihenfolge sei

$$\text{für } \lambda_1 : \xi_1 \xi_2 | \xi_3 \xi_4, \quad \text{für } \lambda_2 : \xi_1 \xi_3 | \xi_2 \xi_4, \quad \text{für } \lambda_3 : \xi_1 \xi_4 | \xi_2 \xi_3,$$

so dass also  $\lambda_2$  und  $\lambda_3$  aus  $\lambda_1$  hervorgehen durch Vertauschung von  $\xi_2$  mit  $\xi_3$  bezw.  $\xi_4$ . Wir können also setzen:

$$3) \quad \begin{cases} \lambda_1 = m(\xi_1^2 + \xi_2^2) + n(\xi_3^2 + \xi_4^2) + p(\xi_1 \xi_2 + \xi_3 \xi_4) \\ \quad \quad \quad + q(\xi_1 \xi_3 + \xi_1 \xi_4 + \xi_2 \xi_3 + \xi_2 \xi_4), \\ \lambda_2 = m(\xi_1^2 + \xi_3^2) + n(\xi_2^2 + \xi_4^2) + p(\xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_4) \\ \quad \quad \quad + q(\xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_4 + \xi_2 \xi_3 + \xi_3 \xi_4), \\ \lambda_3 = m(\xi_1^2 + \xi_4^2) + n(\xi_2^2 + \xi_3^2) + p(\xi_1 \xi_4 + \xi_2 \xi_3) \\ \quad \quad \quad + q(\xi_1 \xi_2 + \xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_4 + \xi_3 \xi_4). \end{cases}$$

\* Faà di Bruno: Einleitung in die Theorie der binären Formen, übersetzt von Walther. Leipzig 1881. S. 220.

Da nun  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ , so folgt

$$4) \quad m = n = 0, \quad p = -2q.$$

Setzt man diese Werte in

$$\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \lambda_2 \lambda_3 = -\frac{ae - 4bd + 3c^2}{4}$$

bezw. in

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -\frac{ace + 2bcd - ad^2 - b^2e - c^3}{4}$$

ein und ersetzt die Koeffizienten durch ihre Ausdrücke in  $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ , so erhält man durch Vergleichung der Koeffizienten

$$5) \quad p = \frac{a}{6}, \quad q = -\frac{a}{12}.$$

[Da aber  $p = -2q$ , so genügt es, aus der grossen Anzahl von Gliedern zur Berechnung von  $p$  und  $q$  ein einziges hervorzuheben z. B. das Glied mit  $\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$ .] Es ergeben sich somit folgende Ausdrücke:

$$6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{a}{12} [2(\xi_1 \xi_2 + \xi_3 \xi_4) - (\xi_1 + \xi_2)(\xi_3 + \xi_4)] \\ \quad = \frac{a}{12} [(\xi_1 - \xi_4)(\xi_2 - \xi_3) - (\xi_1 - \xi_3)(\xi_4 - \xi_2)], \\ \lambda_2 = \frac{a}{12} [2(\xi_1 \xi_3 + \xi_2 \xi_4) - (\xi_1 + \xi_3)(\xi_2 + \xi_4)] \\ \quad = \frac{a}{12} [(\xi_1 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_4) - (\xi_1 - \xi_4)(\xi_2 - \xi_3)], \\ \lambda_3 = \frac{a}{12} [2(\xi_1 \xi_4 + \xi_2 \xi_3) - (\xi_1 + \xi_4)(\xi_2 + \xi_3)] \\ \quad = \frac{a}{12} [(\xi_1 - \xi_3)(\xi_4 - \xi_2) - (\xi_1 - \xi_2)(\xi_3 - \xi_4)]. \end{array} \right.$$


---

Historisch-litterarische Abteilung

der

Zeitschrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaktion

von

**Dr. R. Mehmke und Dr. M. Cantor.**

---

45. Band.

Mit in den Text gedruckten Figuren.



Leipzig,

Verlag von B. G. Teubner.

1900.

Druck von B. G. Teubner in Dresden

# Inhalt.

## I. Abhandlungen.

	Seite
Die Funktion des Auges bei Leonardo da Vinci. Von W. ELSÄSSER . . . . .	1
Zur Geschichte der Mathematik. Von E. WAPPLER . . . . .	7
Ein Nachtrag zu meinem Aufsätze in der Festschrift zu Moritz Cantor's 70. Geburtstage. Von M. CURTZE . . . . .	41
Zur Geschichte der Mathematik im 15. Jahrhundert. Von E. WAPPLER . . . . .	47
Hermann Heilermann. Von J. DIECKMANN . . . . .	57
Die wissenschaftlichen Kongresse in Paris im Sommer 1900. Von M. CANTOR . . . . .	58
Übersicht der wissenschaftlichen Arbeiten Ferdinand Minding's nebst bio- graphischen Notizen. Von A. KNESER . . . . .	113
Die Lehren des Claudius Ptolemaeus von den Bewegungen der Planeten. Von HAEBLER . . . . .	161

## II. Rezensionen.

### Geschichte der Mathematik.

Görland, Aristoteles und die Mathematik. Von M. CANTOR . . . . .	9
Schmidt, Heron's von Alexandria Druckwerke und Automatentheater griechisch und deutsch. Die Geschichte der Textüberlieferung. Griechisches Wort- register. Von M. CANTOR . . . . .	10
Curtze, Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii. Von M. CANTOR . . . . .	12
Bubnov, Gerberti opera mathematica. Von M. CANTOR . . . . .	13
Curtze, Nicolaus Copernicus. Von M. CANTOR . . . . .	14
Troels-Lund (L. Bloch), Himmelsbild und Weltanschauung im Wandel der Zeiten. Von M. CANTOR . . . . .	15
Gravelaar, John Napiers Werke. Von M. CANTOR . . . . .	15
Engel, Nikolaj Iwanowitsch Lobatschewsky. Von M. CANTOR . . . . .	16
Lange, Jacob Steiners Lebensjahre in Berlin. Von M. CANTOR . . . . .	17
Klussmann, Systematisches Verzeichnis der Abhandlungen 1891—1895. Von M. CANTOR . . . . .	96
Förster, Kalender und Uhren am Ende des Jahrhunderts. Von M. CANTOR . . . . .	96
Lampe, Die reine Mathematik in den Jahren 1884—1899. Von M. CANTOR . . . . .	97
Boyer, Histoire des mathématiques. Von M. CANTOR . . . . .	98
Gundermann, Die Zahlzeichen. Von M. CANTOR . . . . .	99
Staigmüller, Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften im klassischen Altertume. Von M. CANTOR . . . . .	100
v. Braunmühl, Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie I. Von M. CANTOR . . . . .	129
Favaro, Delle meccaniche lette in Padova l'anno 1594 da Galileo Galilei. Von M. CANTOR . . . . .	130
Schmidt und Stäckel, Briefwechsel zwischen Gauss und W. Bolyai. Von M. CANTOR . . . . .	130

<b>Philosophie, Didaktik.</b>		Seite
<b>Hoffmann, Stoll, Emmerich, Müsebeck</b> , Die Aufgaben des Aufgabenrepertoriums. Von M. CANTOR . . . . .		59
<b>Vailati</b> , Il metodo deduttivo come strumento di ricerca. Von B. NEBEL . . . . .		92
<b>Gneisse</b> , Deduktion und Induktion. Von M. CANTOR . . . . .		96
<b>Papperitz</b> , Die Mathematik an den deutschen technischen Hochschulen. Von M. CANTOR . . . . .		97

### Arithmetik, Analysis, Algebra.

<b>Schlesinger</b> , Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen II, 2. Von L. HEFFTER . . . . .		18
<b>Richter</b> , Arithmetische Aufgaben. Von E. JAHNKE . . . . .		30
<b>Fenkner</b> , Arithmetische Aufgaben A, I. Von E. JAHNKE . . . . .		33
<b>De Hensch</b> , Calcul différentiel. Von M. CANTOR . . . . .		59
<b>Mc. Mahon und Snyder</b> , Elements of the differential calculus. Von M. CANTOR . . . . .		61
<b>Murray</b> , An elementary course in the integral calculus. Von M. CANTOR . . . . .		61
<b>Fuhrmann</b> , Bauwissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung. Von M. CANTOR . . . . .		62
<b>Virgili und Garibaldi</b> , Introduzione alla economia matematica. Von M. CANTOR . . . . .		63
<b>Duncker</b> , Die Methode der Variationsstatistik. Von M. CANTOR . . . . .		63
<b>Bachmann</b> , Zahlentheorie IV, 1. Von W. FR. MEYER . . . . .		72
<b>Walter</b> , Invarianten und elliptische Modulfunctionen auf thermochemischem Gebiete. Von B. NEBEL . . . . .		93
<b>Mackay</b> , Arithmetic theoretical and practical. Von M. CANTOR . . . . .		131
<b>Grohmann</b> , Zweierlei Zinsfuß und Zinsfußwechsel im Kontokorrent. Von M. CANTOR . . . . .		131
<b>Fitz-Patrik et Chevrel</b> , Exercices d'arithmétique. Von M. CANTOR . . . . .		132
<b>Mansion</b> , Determinantentheorie. Von M. CANTOR . . . . .		132
<b>Serret-Harnack-Bohlmann</b> , Differential- und Integralrechnung II. Von M. CANTOR . . . . .		133
<b>Kiepert</b> , Integralrechnung. Von M. CANTOR . . . . .		134
<b>Junker</b> , Integralrechnung. Von M. CANTOR . . . . .		134
<b>Schubert</b> , Zwölf Geduldspiele. Von W. AHRENS . . . . .		141
<b>Peano (Bohlmann und Schepp)</b> , Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung. Von M. KRAUSE . . . . .		199
<b>Harkness und Morley</b> , A treatise on the theory of functions. Introduction to the theory of analytic functions. Von R. FRICKE . . . . .		203
<b>Weber</b> , Lehrbuch der Algebra II <sup>2</sup> . Von R. FRICKE . . . . .		205

### Synthetische, analytische, /deskriptive Geometrie.

<b>Darboux</b> , Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes I. Von H. WILLGROD . . . . .		25
<b>Reye</b> , Geometrie der Lage I <sup>4</sup> . Von CHR. BEYEL . . . . .		29
<b>Féaux</b> , Ebene Trigonometrie und elementare Stereometrie. Von E. JAHNKE . . . . .		31
<b>Bürklen</b> , Lehrbuch der ebenen Trigonometrie. Von E. JAHNKE . . . . .		32
<b>v. Lühmann</b> , Übungsbuch für Goniometrie und ebene Trigonometrie. Von E. JAHNKE . . . . .		33
<b>Tanner and Allen</b> , An elementary course of analytic geometry. Von M. CANTOR . . . . .		60

Inhalt.

V

	Seite
<b>Peschka</b> , Darstellende und projektive Geometrie I <sup>2</sup> . VON CHR. BEYEL . . . . .	64
<b>Ripert</b> , La dualité et l'homographie dans le triangle et le tétraèdre. VON CHR. BEYEL . . . . .	69
<b>Binder</b> , Die kotierte Darstellung auf einer Bildebene. VON CHR. BEYEL . . . . .	70
<b>Pözl</b> , Elemente der darstellenden Geometrie I. VON CHR. BEYEL . . . . .	71
<b>Rudio</b> , Analytische Geometrie des Raumes. VON M. CANTOR . . . . .	134
<b>Gerland</b> , Kurzer Abriss der darstellenden Geometrie. VON E. MÜLLER . . . . .	135
<b>Müller</b> , Leitfaden für die Vorlesungen über darstellende Geometrie. VON E. MÜLLER . . . . .	136
<b>Schmehl</b> , Die Elemente der darstellenden Geometrie. VON E. MÜLLER . . . . .	138
<b>Schuster</b> , Geometrische Aufgaben. VON W. GROSSE . . . . .	139

**Mechanik, Astronomie, Physik.**

<b>Poincaré</b> , Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste III. VON M. NOETHER	23
<b>Chappuis et Berget</b> , Cours de physique. VON H. WILLGRÖD . . . . .	27
<b>Witz</b> , Cours supérieur de manipulations de physique. VON H. WILLGRÖD . . . . .	27
<b>Fleming (Routin)</b> , Le laboratoire d'électricité. VON H. WILLGRÖD . . . . .	28
<b>Andrade</b> , Leçons de mécanique physique. VON H. WILLGRÖD . . . . .	28
<b>Bussler</b> , Die Elemente der mathematischen und der astronomischen Geographie. VON E. JAHNKE . . . . .	30
<b>Grunmach</b> , Die physikalischen Erscheinungen und Kräfte. VON B. NEBEL . . . . .	81
<b>Klein und Sommerfeld</b> , Über die Theorie des Kreisels. I und II. VON B. NEBEL.	81
<b>Klein</b> , The mathematical theory of the top. VON B. NEBEL . . . . .	82
<b>Fabry</b> , Leçons élémentaires d'acoustique et d'optique. VON B. NEBEL . . . . .	82
<b>Heydenreich</b> , Die Lehre vom Schuss und die Schusstafeln. VON B. NEBEL . . . . .	83
<b>Müller-Erbach</b> , Physikalische Aufgaben. VON B. NEBEL . . . . .	83
<b>Valentiner</b> , Oeuvres scientifiques de L. Lorenz I, 2. VON B. NEBEL . . . . .	84
<b>Love</b> , Theoretical mechanics. VON B. NEBEL . . . . .	84
<b>Routh (Schepp)</b> , Die Dynamik der Systeme starrer Körper. VON B. NEBEL	85
<b>Föppl</b> , Vorlesungen über technische Mechanik I und III. VON B. NEBEL . . . . .	85
<b>Januschke</b> , Das Prinzip der Erhaltung der Energie. VON B. NEBEL . . . . .	86
<b>Murani</b> , Luce e raggi Röntgen. VON B. NEBEL . . . . .	86
<b>Righi (Dessau)</b> , Die Optik der elektrischen Schwingungen. VON B. NEBEL	87
<b>Dellingshausen</b> , Grundzüge der kinetischen Naturlehre. VON B. NEBEL . . . . .	88
<b>Glinzer</b> , Grundriss der Festigkeitslehre. VON B. NEBEL . . . . .	89
<b>Fritsche</b> , Die Koeffizienten der GAUSS'schen allgemeinen Theorie des Erd- magnetismus für 1885. VON B. NEBEL . . . . .	89
<b>Kerntler</b> , Die elektrodynamischen Grundgesetze. Möglichkeit einer experi- mentellen Entscheidung. VON B. NEBEL . . . . .	89
<b>Majlert</b> , Essai sur les éléments de la mécanique des particules I. VON B. NEBEL	90
<b>Riecke</b> , Die Prinzipien der Physik und der Kreis ihrer Anwendung. VON B. NEBEL . . . . .	90
<b>Sinram</b> , Fragmente zum kosmischen Bewegungsgesetz, I und II. VON B. NEBEL	91
<b>Ernst</b> , Eine Theorie des elektrischen Stromes. VON B. NEBEL . . . . .	91
<b>Skwortzow</b> , Soleil, terre et électricité. VON B. NEBEL . . . . .	92, 220
<b>Wilczynski</b> , Hydrodynamische Untersuchungen mit Anwendungen auf die Theorie der Sonnenrotation. VON B. NEBEL . . . . .	92
<b>Korn</b> , Eine Theorie der Gravitation. VON B. NEBEL . . . . .	94
<b>Zehnder</b> , Die Mechanik des Weltalls. VON B. NEBEL . . . . .	94

a.\*

	Seite
Bach, Abhandlungen und Berichte. Von B. NEBEL . . . . .	95
Günther, Handbuch der Geophysik II <sup>2</sup> . Von P. TREUTLEIN . . . . .	206
Hankel, Elektrische Untersuchungen 21. Von B. NEBEL . . . . .	209
Fischer, Der Gang des Menschen, II. Teil. Von B. NEBEL . . . . .	209
Wüllner, Lehrbuch der Experimentalphysik IV, 1 <sup>5</sup> . Von B. NEBEL . . . . .	210
Lorenz, Die Ammoniak-Absorptionsmaschine. Von B. NEBEL . . . . .	210
Grunmach, Die physikalischen Erscheinungen und Kräfte. Von B. NEBEL . . . . .	211
Fortschritte der Physik, 1897, II und III. Von B. NEBEL . . . . .	211
Wildermann, Jahrbuch der Naturwissenschaften. Von B. NEBEL . . . . .	211
Boltzmann, Vorlesungen über Gastheorie II. Von B. NEBEL . . . . .	212
Wiedemann und Ebert, Physikalisches Praktikum. Von B. NEBEL . . . . .	213
Scheibner, Die Differentialgleichungen der Mondbewegung. Von B. NEBEL . . . . .	213
Föppl, Vorlesungen über technische Mechanik IV. Von B. NEBEL . . . . .	213
Schupmann, Die Medialfernrohre. Von B. NEBEL . . . . .	214
Pscheidl, Grundriss der Naturlehre. Von B. NEBEL . . . . .	214
Lorenz (Valentiner), Oeuvres scientifiques II, 1. Von B. NEBEL . . . . .	215
Routh, A treatise on dynamics of a partiell. Von B. NEBEL . . . . .	215
André, Traité d'astronomie stellaire I. Von B. NEBEL . . . . .	216
Köhler, Das Aluminium. Von B. NEBEL . . . . .	216
Rosenberger, Die moderne Entwicklung der elektrischen Prinzipien. Von B. NEBEL . . . . .	216
Sturm (Gross), Lehrbuch der Mechanik I. Von B. NEBEL . . . . .	217
Lochner, Grundlagen der Lufttechnik. Von B. NEBEL . . . . .	217
Zehnder, Die Entstehung des Lebens I. Von B. NEBEL . . . . .	218
Lippmann (Berget), Unités électriques absolues. Von B. NEBEL . . . . .	219
Janet, Premiers principes d'électricité industrielle. Von B. NEBEL . . . . .	219
Une excursion électrotechnique en Suisse. Von B. NEBEL . . . . .	219
Bäcklund, Inledning till teorien för de elektriska strömmarine. Von B. NEBEL . . . . .	220

---

Bibliographie . . . . .	Seite 34, 101, 143
Mathematisches Abhandlungsregister: 1. Januar bis 30. Juni 1899 . . . . .	151
„ „ 1. Juli bis 31. Dezember 1899 . . . . .	227

# Historisch-litterarische Abteilung.

---

## Die Funktion des Auges bei Leonardo da Vinci.

Von

Dr. WILHELM ELSÄSSER

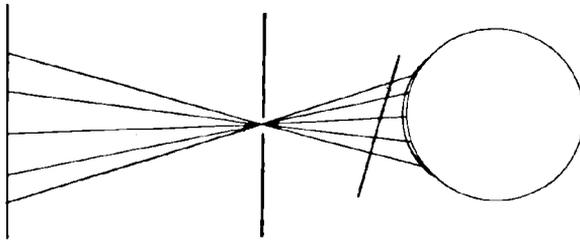
in Charlottenburg.

---

Seit den Veröffentlichungen von Venturi (*Essai sur les ouvrages physico-mathématiques de Léonardo da Vinci, Paris 1797*) ist fast allgemein Leonardo da Vinci für den Erfinder der Camera obscura in ihrer einfachsten Gestalt (der sog. Loch-Camera) gehalten worden. In einer jüngst der Pariser Académie des Inscriptions überreichten Abhandlung hat Eugène Müntz die von einigen Schriftstellern zu Gunsten anderer Forscher erhobenen Prioritätsansprüche abgewiesen und gezeigt, dass in der That Leonardo da Vinci das meiste Recht beanspruchen kann, als Erfinder jener Einrichtung zu gelten. Durch die Venturischen Berichte veranlasst, ist gleichzeitig die Meinung nebenher gegangen, dass Leonardo auch das menschliche Auge als eine solche Camera angesehen und gedeutet habe, derart, dass durch die Durchkreuzung der Lichtstrahlen in der engen Pupille des Auges ein Bild des Gegenstandes auf der gegenüberliegenden auffangenden Wand, d. h. der Netzhaut, entstehe. Die Venturische Stelle (dem Manuskript D der Bibliothek de l'Institut entnommen) lautet: „Die Erfahrung darüber, wie die Gegenstände ihre Bilder in das Auge und die wässerige Feuchtigkeit desselben senden, offenbart sich, wenn die Bilder der erleuchteten Gegenstände durch eine kleine Öffnung in eine dunkle Wohnung eintreten. Du wirst alsdann diese Bilder auf weissem Papier, welches nicht weit von der Öffnung in der gedachten Wohnung aufgestellt ist, auffangen und wirst alle erwähnten Gegenstände auf diesem Papier mit ihren eigentümlichen Gestalten und Farben erblicken, aber sie werden kleiner sein und das Oberste nach unten gekehrt, wegen der erwähnten Durchschneidung. Wenn diese Bilder von einem durch die Sonne erleuchteten Orte entstehen, werden sie wie auf dem Papier gemalt erscheinen. Letzteres muss sehr dünn sein und von der Rückseite betrachtet werden; das Loch muss in eine kleine, recht dünne Eisenplatte gemacht sein. Ebenso macht es der Strahl innerhalb der

Pupille.“ Die kurze Fassung dieser Stelle, soweit die Beziehungen zum Auge in Betracht kommen, und die Schlussbemerkung Leonardos lässt in der That vermuten, dass er nach dem vorher beschriebenen Prinzip an ein umgekehrtes Bild auf der Rückwand des Auges gedacht hat. Die einzelnen Schriftsteller, welche sich mit diesem Gegenstande — meist unter Übernahme des Venturischen Citats — beschäftigt haben, haben diese Vermutung mehr oder weniger deutlich zum Ausdruck gebracht, und auch Müntz scheint — nach einem mir vorliegenden Bericht über seine Abhandlung — die gleiche Auffassung zu vertreten. Demgegenüber erscheint es nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, dass Leonardo weder von einem umgekehrten Augenbilde etwas gewusst noch das Auge selbst in dem vorher beschriebenen Sinne als eine Camera aufgefasst hat. Dies lassen die im letzten Jahrzehnt in französischer Übersetzung veröffentlichten Manuskripte

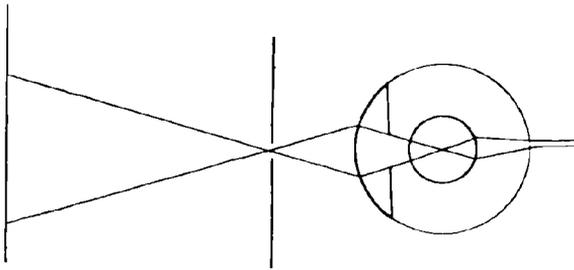
Fig. 1.



des Institut (Charles Ravaisson-Mollien) deutlich erkennen. In eingehender Darstellung beschreibt er hier die Funktion des Auges und seine Ansicht über das Entstehen des Augenbildes. Offenbar ist seine Auffassung beeinflusst durch seine häufigen Beobachtungen in der Camera und des für ihn jedenfalls zuerst überraschenden Auftretens von objektiven, auffangbaren Bildern beim Durchkreuzen der Lichtstrahlen in einem Punkte. Ein solches Bild schwebt ihm vor, wenn er es unternimmt, den Gang der Lichtstrahlen im Auge zu verfolgen, und indem er von der als selbstverständlich angenommenen Voraussetzung ausgeht, dass das Augenbild, da wir die Gegenstände in ihrer richtigen Lage sehen, aufrecht sein müsse, kommt er zu dem Schluss, dass dies nur möglich sei durch eine doppelte Durchkreuzung der Lichtstrahlen. Es ist hierbei aber wenig von Belang für ihn, ob der Durchschnittspunkt durch eine enge Öffnung gegeben ist oder ob er durch Brechung hervorgerufen wird. Ist z. B. die Pupille sehr eng, so bietet sie einen solchen Schnittpunkt dar (hierauf bezieht sich die von Venturi angegebene Stelle), bei Erweiterung derselben senkt sich aber der Durchkreuzungspunkt immer mehr in das Innere des Auges hinein, liegt indessen stets noch vor dem Krystallkörper, den er noch kugelförmig und in der Mitte des Augapfels befindlich zeichnet.

Überhaupt decken sich seine anatomischen Angaben und Zeichnungen des Auges noch ganz mit der Beschreibung, die Al-Hazen in seiner Optik davon giebt, und es scheint daher nicht, dass sich seine sonst sehr eingehenden und selbständigen anatomischen Untersuchungen auch auf dieses Organ erstreckt haben. An mehreren anderen Stellen zeichnet er den Gang der Strahlen so, dass die auf das Auge fallenden Lichtstrahlen durch die Brechung an der Oberfläche (der Hornhaut), also nicht erst durch die Pupille, gezwungen werden, durch einen Punkt (dem Centrum der Wölbung) zu gehen. Für die Durchkreuzung der Lichtstrahlen in einer feinen Öffnung giebt er einen ebenso hübschen wie historisch interessanten Beweis, der ihn zugleich zu der eigentlichen Deutung des Augenbildes führt. (Fig. 1.) „Das Auge, welches durch eine sehr kleine runde Öffnung die Strahlen der Gegenstände empfängt, die jenseits der Öffnung sich befinden, empfängt sie immer

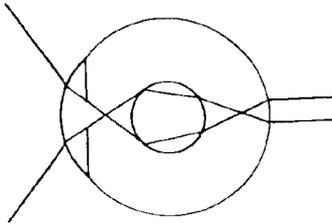
Fig. 2



in umgekehrtem Sinne, und trotzdem sieht die Sehkraft sie an der Stelle, wo sie wirklich sind. Dies kommt daher, dass die genannten Strahlen durch den Mittelpunkt des Krystallkörpers, der mitten im Auge liegt, hindurchgehen und dann nach der Rückwand dieses Körpers divergieren. Auf dieser Rückwand richten sich die Strahlen nach dem Gegenstand, der sie hervorgerufen hat und werden von dort durch das empfindende Organ (Sehnerv) dem sensus communis übertragen, der sie beurteilt. Dass dies so ist, beweist man auf folgende Weise: Man mache mit der Nadelspitze eine feine Öffnung in ein Papier und betrachte durch dieselbe die jenseitigen Gegenstände. Bewegt man nun zwischen Auge und Papier die Nadel quer von oben nach unten, so wird jenseits der Öffnung die Bewegung der Nadel ihrer wirklichen Bewegung entgegengesetzt erscheinen. Der Grund davon liegt darin, dass wenn die Nadel zwischen Papier und Auge die höchsten Strahlenlinien berührt, sie zugleich jenseits des Papiers die tiefsten bedeckt; und wenn die Nadel heruntergeht, so kommt sie schliesslich zur tiefsten Linie diesseits des Papiers, d. h. zugleich der höchsten Linie jenseits des Papiers.“ Es ist bemerkenswert, dass dieses Experiment, welches Leonardo ausdrücklich als neue Erfindung seinerseits für sich in Anspruch nimmt und charakterisiert, sich, in derselben Weise be-

schrieben, später bei Scheiner (*Oculus, hoc est fundamentum opticum, pars II, Experientia 2*) findet, ohne dass man annehmen darf, dieser habe von den früheren Versuchen Leonardos etwas gewusst. Für den letzteren bildet dieses Experiment (bei dessen Beschreibung übrigens, wie aus Zeichnung und Darstellung hervorgeht, die Pupille nicht als Kreuzungsstelle der Strahlen auftritt) die Grundlage für seine weitere Erklärung des Augenbildes. Er argumentiert in der folgenden Weise: Da auf alle Fälle das Bild im Auge aufrecht ist, so muss, wenn — wie bei dem Experiment — ein Kreuzungspunkt vor dem Auge liegt, ein zweiter innerhalb des Auges (Mittelpunkt des Krystallkörpers) liegen. (Fig. 2.) Fällt aber der vor dem Auge liegende Kreuzungspunkt fort, dann müssen beide Kreuzungspunkte innerhalb des Auges liegen. Beim gewöhnlichen Sehen unter Fortfall der Papieröffnung müssen sich daher die von den Gegenständen herkommenden Strahlen in zwei Punkten innerhalb des Auges durchschneiden. Von diesen liegt der eine in der Pupille oder mehr nach dem Innern des Auges zu; in Bezug auf die Lage des anderen Schnittpunktes kommt er zu keiner abschliessenden und sicheren Meinung, jedenfalls entsteht er

Fig 3.



durch Brechung im Krystallkörper, dessen Zweck es ist, ein nochmaliges Durchschneiden zu veranlassen und dadurch ein aufrechtes Bild des Gegenstandes herzustellen. Dieses Bild entsteht entweder auf der Rückseite des Krystallkörpers oder auf der innersten Haut des Augapfels an der Eintrittsstelle des Sehnerven, der es dem Intellekt übermittelt. (Fig. 3.) Die häutige Aus-

breitung des Sehnerven und die Funktion der Netzhaut ist ihm indessen noch nicht bekannt, auch die Eintrittsstelle des Sehnerven zeichnet er in der Augenaxe. Zur experimentellen Erforschung des Augenbildes empfiehlt er die Konstruktion eines künstlichen Auges in der Weise, dass man eine gläserne Hohlkugel, die an einer Stelle durch eine die Höhlung ausfüllende und mit einem Loch versehene Wandung in zwei Kammern geteilt sei, mit einer durchsichtigen Flüssigkeit füllen solle. Mitten in diese Hohlkugel werde dann eine kleine massive Glaskugel eingesetzt, dann müsse auf der gegenüberliegenden Wandung nach Abschluss des Seitenlichtes ein Bild des Gegenstandes sichtbar werden. Ob Leonardo selbst eine derartige Einrichtung konstruiert und Beobachtungen damit angestellt hat, und welches Resultat diese Beobachtungen gehabt haben, lässt sich aus den Manuskripten nicht erkennen, jede weitere Angabe darüber fehlt, ebenso muss es fraglich bleiben, ob er die Durchkreuzung der Lichtstrahlen bzw. die Umkehrung eines Bildes durch Brechung in einem kugelförmigen Körper experimentell untersucht hat. Den Gang der Strahlen, die durch eine Kugel ge-

brochen werden, zeichnet er an einigen Stellen ähnlich wie später Maurolycus (in seinen *Theoremata de lumine et umbra*), der die Umkehr durch eine Kugel beschreibt und mit Beziehung auf das Auge hervorhebt, dass die Natur bei dem humor chrySTALLINUS die Kugelform vermieden habe (er zeichnet sie linsenförmig mit verschiedenen starker Wölbung auf beiden Seiten), weil sonst ein umgekehrtes Bild im Auge entstehen würde. In Bezug auf die Form des Augenbildes steht er also noch auf demselben Standpunkt wie Leonardo da Vinci, erst Kepler zeigt in mustergiltig klarer Weise die Entstehung des umgekehrten Bildes auf der Netzhaut.

Dass auch die Grösse der Pupille für das Sehen von Bedeutung ist, zeigt Leonardo an mehreren Beispielen. Die Zusammenziehung und Ausdehnung der Pupille bei verschiedenen Helligkeitsgraden zeigt folgendes von ihm beschriebene Experiment: „Wenn du ein Experiment beim Menschen anstellen willst, fixiere scharf die Pupille seines Auges, halte eine angezündete Kerze ein wenig entfernt von ihm und lass ihn das Licht ansehen, indem du allmählich es seinem Auge näherst.“ (Das gleiche Experiment führt Scheiner in dem oben zitierten Werke an [Pupillae varietatis Exper. I].) Auch das von Scheiner (Exper. II) angegebene Experiment, nach welchem ein durch die feine Öffnung eines Kartenblatts beobachteter Gegenstand kleiner aber scharf erscheint, giebt er an und zeigt wie jener, dass der Glanz und die überschüssigen Strahlen der Sterne verschwinden, wenn sie durch eine solche feine Öffnung betrachtet werden. „Wenn du eine Öffnung in ein Papier machst, so klein wie möglich und wenn du es dem Auge soweit als möglich näherst, und durch das Loch einen Stern ansiehst, so kann er nur in einen kleinen Teil der Pupille Licht senden. Diese sieht dann den Stern so klein, dass fast nichts kleiner sein kann. Wenn du die Öffnung in der Nähe des Papierrandes machst, so kannst du zugleich mit dem einen Auge den Stern gross und mit dem andern sehr klein sehen. Ebenso wirst du den ganzen Sonnenkörper mit sehr geringem Glanz sehen, denn in demselben Maße wie die Grösse, vermindert sich auch der Glanz.“ In diesem Sinne ist auch die auf das vorher angegebene Experiment gegründete anderweitig gegebene Bemerkung aufzunehmen, dass eine kleine Pupille den Gegenstand kleiner sieht als eine grosse Pupille. Von Interesse ist ferner eine Bemerkung, die sich auf die Nachbilder im Auge bezieht: „Der Krystallkörper, welcher mitten im Auge sich befindet, verdichtet sich beim Auftreffen der hellen Gegenstände und verdünnt sich beim Auftreffen der dunkeln Gegenstände. Dass dies sich so verhält, offenbart sich, wenn das Auge sich schliesst, weil die im Auge bewahrten Bilder, welche von den hellen Gegenständen herrühren, dunkel gesehen werden und die dunkeln sich hell darstellen. Dies findet sich mehr bei den schwachen Augen als bei den starken.“ Ziemlich richtig zu deuten weiss er die von einem leuchtenden Körper ausschliessenden Lichtstrahlen, die sich besonders

bei teilweisem Schliessen des Auges zeigen. Er schreibt sie der Reflexion der Strahlen an der Feuchtigkeit der Augenlider zu. Zum Beweis für seine Ansicht führt er das folgende Experiment an: „Man beobachte die leuchtenden Körper durch eine feine Öffnung, dann verschwinden die Strahlen. Fixiert man den leuchtenden Körper und senkt das Auge, dann verschwinden die oberen Strahlen des Körpers, hebt man das Auge, dann verschwinden die unteren Strahlen.“ An einer anderen Stelle zeigt er, dass auch die Reflexion an den Augenwimpern hierbei beteiligt ist und dass die oberen Strahlen von der Reflexion an den unteren Augenwimpern herrühren und umgekehrt. Dies beweist er dadurch, dass er einen Stift von oben nach unten vor dem Auge vorbeiführt, dann werden durch denselben zuerst die unteren Strahlen fortgenommen. Schliesslich sei erwähnt, dass eine grosse Zahl von Irradiationserscheinungen an verschiedenen Stellen der Manuskripte beschrieben wird, ohne dass es indessen Leonardo gelingt, eine brauchbare Erklärung für diese Erscheinung zu geben.

Die von den meisten übrigen Aufzeichnungen abweichende Form, in welcher Leonardo einen grossen Teil der hier in Betracht kommenden Erscheinungen und Fragen behandelt, lässt erkennen, welche Bedeutung er der Untersuchung der Funktion des Auges beimisst. Während nämlich sonst die Manuskripte nur kurze und oft zusammenhanglose Mitteilungen enthalten, ist ein Band — der Band D der *Bibliothèque de l'Institut* — lediglich der Untersuchung des Auges gewidmet. Im ganzen genommen bedeuten seine Darstellungen zwar keinen erheblichen wissenschaftlichen Gewinn für die Theorie des Sehens, aber sie enthalten doch eine Reihe interessanter und gelungener Versuche, die überall den aufmerksamen und fleissigen Beobachter erkennen lassen, der den Ursachen der Erscheinungen und den ihnen zu grunde liegenden Gesetzen nachspürt. Auch insofern sind sie bemerkenswert, als hier — gegenüber den früheren vagen Ansichten über die Funktion des Auges — zum erstenmal die Idee eines reellen, objektiven, geometrisch nach den Gesetzen der geradlinigen Fortpflanzung und Brechung konstruierbaren Bildes auftaucht.

## Zur Geschichte der Mathematik.

Von

Dr. E. WAPPLER

in Zwickau.

---

Der Codex Lipsiensis 1470, auf den Herr Prof. Curtze in Thorn mich aufmerksam zu machen die Güte hatte, enthält auf Blatt 479 bis 493' eine lateinische Algebra, welche ein Auszug aus der „Dresdner Algebra“ ist. Dieser Auszug „kennzeichnet sich sofort als ein Kollegienheft“, denn am Schlusse heisst es: *Hec Liptziensi in studio informata sunt a Magistro Johanne de Egra anno salutis millesimo 486 in estate in habitacione sua burse Drawpitz pro fl duobus, qui faciunt 42 gl argenteos.* Hierdurch ist aber bewiesen, dass die „Dresdner Algebra“ wirklich die Grundlage zu einer algebraischen Vorlesung des Johann Widmann von Eger gebildet hat.

Das Stück, welches im Codex Lipsiensis Blatt 504—504' umfasst, hat den Titel: *Compendium vtile de censu et re incipit fauste.* Es ist ein Bestandteil der „Dresdner Algebra“ und steht hier unmittelbar vor den *Casus aporismatum.*

Der Algorithmus de datis (Blatt 498'—499), der Algorithmus de ap(p)licatis (Blatt 497—497'), die Regula de tali tela (Blatt 502'), das Exemplum regule falsi per re (Blatt 502'), der Algorithmus de additis et diminutis (Blatt 463'—464'), die (A)Rs radicum surdarum (Blatt 465'—466) der Leipziger Handschrift finden sich auch in der Dresdner Handschrift; die genannten Stücke stehen hier auf Blatt 290'—291, Blatt 293—293', Blatt 287', Blatt 354', Blatt 288—289 und Blatt 289'.

Aus dieser grossen Übereinstimmung glaube ich schliessen zu dürfen, dass der Codex Dresdensis C 80 mittelbar eine der Quellen für den Codex Lipsiensis 1470 gewesen ist.

Virgilius Wellendorffer aus Salzburg, der die meisten Stücke der Leipziger Handschrift eigenhändig geschrieben, hat auf Blatt 432 folgendes eingetragen:

*Concordia facta auditorum in 24 regulis algre, et ea, que pre-supponuntur, puta, algorithmum in minucijs, in proporcionibus algorithmum, in additis et diminutis algorithmum, in surdis algorithmum,*

in applicatis (algorithmum), ceteros denique illis finitis algorithmos, vt in datis, de duplici differencia, in probis, non oc(c)ultabit Magister Johannes de Egra, cras circa horam sextam et cetera post domici (!) secunda feria.

Daraus geht hervor, dass Widmann ausser über die 24 Regeln der Algebra noch über den Algorithmus in minucijs, in proporcionibus, in additis et diminutis, in surdis, in applicatis, in datis, de duplici differencia und in probis gelesen hat. Ich sage, Widmann hat gelesen, weil der Codex Lipsiensis sämtliche in der Vorlesungsanzeige genannte Stücke enthält.

Mit der Bruchrechnung und der Proportionslehre sind jedenfalls der Algorithmus minuciarum des Johannes de Lineriis und der Algorithmus proportionum des Nicole Oresme gemeint. Interessant ist, dass nicht nur diese beiden Schriften, sondern auch der Algorithmus de duplici differencia und der Algorithmus de probis im Codex Dresdensis enthalten sind.\* Es scheint also auch in nicht algebraischen Schriften die Dresdner Handschrift mittelbar eine der Quellen für die Leipziger Handschrift gebildet zu haben.

Zum Schluss gestatte ich mir einige von Widmann herrührende Notizen aus dem Codex Dresdensis und die gleichlautenden Stellen aus dem Codex Lipsiensis mitzuteilen. Es ist zu lesen im

Codex Dresdensis:

Item in duplacione dupletur vnaqueque quantitas signo nullo mutato (Blatt 288).

Sed in mediacione si numerus fuerit par alicuius quantitatis medietur simpliciter velutj in integris, si autem impar subscribatür binarius virgula interiecta ut patet in algorithmo de minucijs vulgaribus. Aliter potest fierj mediatio subscribendo dualitatem in medio virgula interiecta extensa per omnes quantitates id est subtus omnes quantitates. Summopere aduertendum est, quod in diuisione ista per uirgulam interiectam numquam habetur tercius numerus scilicet

Codex Lipsiensis:

In duplacione dupletur vnaqueque quantitas signo nullo mutato (Blatt 463').

(I)N mediacione si numerus fuerit par alicuius quantitatis medietur simpliciter velutj in integris, si autem impar subscribatur binarius virgula interiecta vt patet in algorithmo de minucijs vulgaribus. Item aliter potest fieri mediatio subscribendo dualitatem in medio virgula interiecta extensa per omnes quantitates, vbi summopere aduertendum est, quod in diuisione ista per uirgulam interiectam numquam habetur tercius numerus scilicet quocientis sicut in diuisione inte-

\* In der Leipziger Handschrift steht der Algorithmus minuciarum des Johannes de Lineriis auf Blatt 451—458, der Algorithmus proportionum des Nicole Oresme auf Blatt 466'—468 und Blatt 469—473', der Algorithmus de duplici differencia auf Blatt 500—501 und der Algorithmus de probis auf Blatt 533'. Die Dresdner Handschrift enthält der Reihe nach die genannten Stücke auf Blatt 280—285', Blatt 201—206, Blatt 291'—292 und Blatt 305'.

quocientis sicut in diuisione integrorum, sed ille numerus sic diuisus estmet quociens illius diuisionis (Blatt 228).

Notandum eciam, quod ex multiplicatione numeri in quodlibet aliud signum producit illud signum, in quod  $\emptyset$  multiplicatur. Vnde ex multiplicatione  $\varphi^e$  in  $\varphi^{am}$  fit  $z^3$ , ex  $\varphi$  in  $z$  fit  $\mathcal{C}$ , ex  $\varphi$  in  $\mathcal{C}$  fit  $z-z$ , ex  $z$  in  $z$  fit  $z-z$  et cetera (Blatt 288).

In diuisione ponatur diuidendus in superiori ordine et diuisor in inferiori uirgula interiecta et factum est (Blatt 288').

Extractio radicum fit, quemadmodum dictum est, per prepositionem punctorum vt habetur de surdis, nisi numeri essent rationales, quia tunc posset fieri ad modum integrorum uel minuciarum (Blatt 288').

grorum, sed ille numerus sic diuisus estmet quociens illius diuisionis (Blatt 464).

Notandum eciam, quod ex multiplicatione  $\emptyset$  in aliud signum quodlibet producit illud signum in quod multiplicatur  $\emptyset$ . Vnde ex multiplicatione  $\varphi$  in  $\varphi$  fit  $z$ , ex  $\varphi$  in  $z$  fit  $\mathcal{C}$ , ex  $\varphi$  in  $\mathcal{C}$  fit  $z-z$ , ex  $z$  in  $z$  fit  $z-z$  (Blatt 464).

(I)N diuisione ponatur diuidendus in superiori ordine et diuisor in inferiori ordine uirgula interiecta et factum est (Blatt 464).

(E)Xtractio radicum fit per punctorum prepositionem vt infirmiter dicitur (in) surdis, nisi numeri essent rationales, quia tunc posset fieri ad modum integrorum uel minuciarum (Blatt 464).

## Rezensionen.

**Aristoteles und die Mathematik** von Dr. ALBERT GÖRLAND. Marburg 1897.  
N. G. Elwert'sche Verlagsbuchhandlung. VII, 211 S.

Der Verfasser dieses aus einer 1897 mit dem Preise belohnten Bearbeitung einer Marburger Preisfrage entstandenen Buches verwahrt sich (S. 93) dagegen, als ob er der geschichtlichen Registrierung aller bei Aristoteles vorkommenden mathematischen Definitionen, Axiome und Lehrsätze ein spezifisches Interesse abzugewinnen verpflichtet sei. In der That schildert er uns keineswegs Aristoteles als Mathematiker, sondern Aristoteles als Dialektiker, als Philosophen, welcher, wie mit anderen Begriffsbildungen so auch mit denen des Raumes und der geometrischen Gebilde, der Zahl der Zeit und der Bewegung, der Stetigkeit, des Unendlichgrossen und des Unendlichkleinen sich abzufinden hatte. Herr Görland bedient sich dabei einer Sprache, welche dem philosophisch gebildeten Leser wahrscheinlich sehr verständlich ist. Der mathematische Leser muss dagegen nicht selten einige Mühe aufwenden, das Ausgesprochene „in sein geliebtes Deutsch zu übersetzen“, und wird dabei nicht geringere Schwierigkeit finden als Faust

dem wir unsere Worte entlehnten. Mit dem Satze (S. 113), die Null ( $\tau\acute{o}$  μηδέν) könne kein Verhältnis zur Zahl haben, dürfte vielleicht folgende Meinung zu verbinden sein. Aristoteles geht mit den Pythagoräern von der 2 als erster Zahl aus. Die 1 ist keine Zahl, *οὐκ ἔστι τὸ ἓν ἀριθμὸς*; das Nicht-einmal-eins, das ist τὸ μηδέν, kann folglich zur Zahl in keinem Verhältnisse stehen. Wichtig erscheint die Bemerkung (S. 95), dass Aristoteles den Satz kannte, dass die Aussenwinkel eines nach aussen konvexen geradlinigen ebenen Vielecks, welche entstehen, indem jede Vielecksseite nur einseitig, und zwar an jedem Eckpunkte nur eine Vielecksseite verlängert wird, zusammen vier Rechte betragen. Dieser Satz, welchen auch Blancanus (Aristotelis loca mathematica pag. 61—62) schon hervorgehoben hat, den wir aber vergassen in unseren Vorles. Gesch. Math. zu erwähnen, beweist, dass man schon vor Euklid von der Kenntnis der Winkelsumme des Dreiecks zu dem von der Winkelsumme des  $n$ -ecks übergegangen war, wenn auch dieser letztere Satz ebensowenig wie die von Aristoteles ausgesprochene Folgerung sich bei Euklid erhalten hat. Wie nahe des Aristoteles Auffassung des Unendlichgrossen unserer heutigen verwandt war, ist vielleicht am deutlichsten aus dem (S. 170, Note 3) mitgeteilten Ausspruche zu erkennen: *οὐδὲ μένει ἢ ἀπειρία ἀλλὰ γίνεται*, das Unendlich-grosse ist kein Bleibendes, sondern ein werdendes.

CANTOR.

Heronis Alexandrini Opera quae supersunt omnia Volumen I et Supplementum. Herons von Alexandria Druckwerke und Automaten-theater griechisch und deutsch, herausgegeben von WILHELM SCHMIDT. Mit 124 Figuren. LXX, 514 S. Supplementheft: Die Geschichte der Textüberlieferung. Griechisches Wortregister. Mit 6 Figuren. 182 S. W. SCHMIDT. Heron von Alexandria (Sonderabdruck aus den neuen Jahrbüchern für das klassische Altertum, Geschichte und deutsche Litteratur). Mit 39 Abbildungen auf 3 Tafeln: 15 S. Leipzig 1899 bei B. G. Teubner.

Nachdem in den 35 Jahren, welche bereits dahingegangen sind, seit Herr Hultsch die mathematischen Schriften Herons herausgab, die historisch-mathematische Forschung sich diesem Manne und seinen Werken mit grösserer Lebhaftigkeit als früher zugewandt hat, nachdem es geglückt ist eine arabische Bearbeitung der verlorenen Mechanik und eine griechische Handschrift der Metrica aufzufinden, wurde das Bedürfnis immer dringender, eine neue vollständige Ausgabe der Heronischen Werke zu besitzen, welche neben dem neu Aufgefundenen auch das früher schon Herausgegebene, und zwar ausser den mathematischen Schriften durchaus ungenügend Herausgegebene enthalte. Die Teubnersche Verlagshandlung nahm es auf sich, diesem Bedürfnis Befriedigung zu verschaffen und gewann eine Anzahl von besonders dazu berufenen Gelehrten, die Ausgabe zu besorgen. In dem ersten jetzt erschienenen Bande hat Herr Wilhelm Schmidt die Druckwerke und das Automatenwerk griechisch und in deutscher Übersetzung

herausgegeben; er hat im Anhange Herons Fragment über Wasseruhren, Philons Druckwerke, Vitruvs Kapitel zur Pneumatik beigegeben. Ein Supplementheft enthält die Geschichte der Textüberlieferung der im ersten Bande gedruckten Schriften. Endlich hat Herr Schmidt eine Art von Selbstanzeige des Bandes gebracht, welche aus der Zeitschrift, für die er sie verfasste, in Sonderabzügen erschienen ist. Druckwerke, bei denen der Luftdruck die bewegende Kraft bildet, Automatenwerke, welche durch Gewichte in Bewegung gesetzt sind, waren jedenfalls lange vor Heron in Übung. Automaten sind im 5. vorchristlichen Jahrhundert in der Litteratur erwähnt, über Pneumatik hat Philo von Byzanz im 3. Jahrhundert geschrieben, und Heron ist sicherlich erheblich jünger. Eine erste Frage geht nun dahin, ob Heron nur Kompilator war, ob er nur vereinigte, was Vorgänger von grösserer Erfindungskraft als ihr Eigentum in Anspruch zu nehmen berechtigt sind. Diese Frage dürfte kaum mit Sicherheit beantwortet werden können, solange die Vorgänger nicht alle bekannt sind, solange auch nicht alle Schriften Herons neu bearbeitet vorliegen, denn jede einzelne Schrift trägt dazu bei, erkennen zu lassen, wessen Geistes Kind ihr Verfasser war. Wir haben aus dem vorliegenden Bande nicht die Überzeugung schöpfen können, Heron sei so viel unbedeutender, als wofür wir ihn früher hielten, und darum hat die zweite erneut auftauchende Frage, wann wohl Heron gelebt habe, für uns noch immer eine hervorragende Wichtigkeit. Man suchte früher aus der Überschrift eines Heronischen Buches, in welcher er mit Ktesibios in Verbindung gebracht ist, eine Zeitbestimmung herzuleiten, und wir haben dieses Mittels uns selbst bedient, um daraus in Verbindung mit anderen Gründen die Zeit um 100 v. Chr. als Wirkungszeit Herons zu erhalten. Einwände, denen wir die Triftigkeit zuerkennen, zwingen dazu, eine Benutzung des Stoikers Posidonios durch Heron anzunehmen. Er muss also später als 90 v. Chr. gesetzt werden. Herr Mommsen glaubt Heron in einem von Cassiodor genannten Iron zu erkennen, der bei der Reichsvermessung unter Augustus mitwirkte, und diese fand 37—20 v. Chr. statt. Endlich ist in der Mechanik eine von Plinius als neu erwähnte Olivenpresse beschrieben, und ist diese Stelle echt, so muss die Mechanik etwa 55 n. Chr. verfasst sein. Augenscheinlich sind die beiden letzten Angaben nicht mit einander zu vereinigen, da eine mehr als 76 Jahre anhaltende Leistungsfähigkeit unglaublich wäre. Entweder war also Heron einer der Reichsvermesser, dann ist der Schluss der Mechanik unecht, oder die Stelle der Mechanik ist echt, dann muss Heron von Iron unterschieden werden. Herr Schmidt ist letzterer Ansicht und setzt Heron in die zweite Hälfte des ersten nachchristlichen Jahrhunderts. Metrologische von Herrn Hultsch ausgesprochene Bedenken sucht er zu entkräften. Für die mathematischen Schriften Herons hat die eine wie die andere Annahme zur Folge, dass sie von Columella und um so mehr von den Agrimensoren Trajans haben benutzt werden können. Eine Beeinflussung des Vitruvius durch Heron leugnet Herr Schmidt ebenso wie eine solche Herons durch Vitruvius auf sachlicher Grundlage, da beide zwar von ähnlichen, aber in wesentlichen

Punkten doch von einander abweichenden Dingen reden, so dass man nur zu behaupten berechtigt sei, sowohl Vitruvius als Heron setzten gewisse frühere Vorarbeiten voraus. Uns persönlich erscheint nur die Beeinflussung der Agrimensoren durch Heron geschichtlich so gut wie unentbehrlich, so dass wir, sofern diese gerettet ist, auf die etwas frühere oder spätere Lebenszeit Herons kein allzugrosses Gewicht legen.

CANTOR.

### Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii.

Ex interpretatione Gherardi Cremonensis in codice Cracoviensi 569 servata edidit MAXIMILIANUS CURTZE (Euclidis Opera omnia ediderunt J. L. Heiberg et H. Menge Supplementum). Leipzig 1899, B. G. Teubner. XXIX, 390 pag.

Schon 1887 machte Paul Tannery auf einen arabischen Codex in Leiden aufmerksam, welcher die Erläuterungen des An-Nairîzî zu den zehn ersten Büchern der Euklidischen Elemente enthaltend, als zweite Quelle für einen von Heron von Alexandria dem gleichen Werke gewidmeten Commentar zu gelten habe. Besthorn und Heiberg gaben 1893 und 1897 in arabischer Sprache und lateinischer Übersetzung den Leidner Codex bis zum Schlusse des I. Buches der Elemente heraus. Inzwischen hatte Max Curtze auf seiner an Funden überreichen Studienreise von 1896 in Krakau die vollständige durch Gerhard von Cremona in der zweiten Hälfte des XII. Jahrhunderts angefertigte lateinische Übersetzung des Commentars des An-Nairîzî entdeckt, und ihren Abdruck begrüssen wir heute aufs Freudigste. Der Leidner Codex enthält als Hauptbestandteil die sogenannte Hadschadsch-Übersetzung der sechs ersten Bücher der Euklidischen Elemente, und der Commentar An-Nairîzîs ist nur Beigabe. Der Übersetzung Gerhards aber lag nur der Commentar zum Grunde und zwar in seiner ganzen Ausdehnung. Durch den Krakauer Codex sind wir also vollständiger und besser als durch den Leidner mit An-Nairîzîs Erläuterungen und mit dessen Quellen bekannt geworden. An-Nairîzî stand zum Kalifen Almu'tadid (892—902) in naher Beziehung, lehrte also vor Abû'l Wafâ (940—998); dieser letztere kann also nicht zu den Quellen An-Nairîzîs gehört haben, sondern nur das umgekehrte Verhältnis ist denkbar, wo eine Übereinstimmung beider Schriftsteller sich zeigt, und An-Nairîzî muss alsdann, wenn er nicht selbst Erfinder war, aus einem älteren Araber oder, was wahrscheinlicher ist, aus einem Griechen geschöpft haben. Unter diesen aber benutzte er für die mehr philosophischen Bestandteile der Elemente, für die Erklärungen, Forderungen, Grundsätze, hauptsächlich Geminus und Simplicius, für die eigentlich mathematischen Bestandteile, für die Lehrsätze und Aufgaben, fast ausschliesslich Heron, und da noch im achten Buche ausdrücklich auf Heron abgehoben wird, so folgt, dass dieser einen mindestens bis zum achten Buche der Elemente reichenden Commentar verfasst hat, von welchem uns nunmehr höchst wertvolle Bruchstücke bekannt gegeben sind, aus denen wir Herons eigene mathematische

Bedeutung schätzen lernen könnten, wenn uns je ein Zweifel an derselben gekommen wäre. Von Heron rührt eine Konstruktion der Senkrechten in dem Endpunkte einer Strecke mit unveränderter Zirkelweite (pag. 55), von ihm vielleicht eine ähnlich zu vollziehende Teilung einer Strecke in beliebig viele gleiche Teile (pag. 74—75), welche später bei Abû'l Wafâ wiederkehrt, so dass es nun doch scheint, als hätten die Griechen bereits solche Konstruktionen geübt. Heron lehrte den Satz (pag. 78), dass, wenn man bei einem rechtwinkligen Dreiecke die Quadrate über den drei Seiten nach aussen zeichnet und die spitzen Dreiecksecken mit dem gegenüberliegenden Eckpunkte des anderen Kathetenquadrates verbindet, diese beiden Geraden sich auf der Senkrechten von der rechtwinkligen Dreiecksecke auf die Hypotenuse schneiden. Heron bewies den Satz (pag. 130), dass es von jedem Punkte ausserhalb eines Kreises zwei gleiche Berührungslinien an den Kreis gebe u. s. w. Nahezu alle diese Bemerkungen finden sich bereits in Curtzes Ausgabe hervorgehoben. Einen kleinen Zusatz möchten wir uns gestatten, mit welchem übrigens brieflicher Rücksprache zufolge Curtze gleichfalls einverstanden ist. Auf pag. 3 lin. 23—25 heisst es: *Aposedanius autem dixit, quod punctum est extremitas non habens dimensionem, aut extremitas lineae.* Die Lautverwandtschaft mit Posidonius von Rhodos legt die Vermutung nahe, dieser könne unter dem Namen Aposedanius verstanden werden müssen, eine Vermutung, welche durch folgende Erwägung nahezu Gewissheit wird. Herr Wilhelm Schmidt hat in seiner Einleitung zu Herons Druckwerken (Leipzig 1899 pag. XV—XVI) an mehreren Beispielen nachgewiesen, dass Heron von Alexandria Definitionen des Posidonius benutzt hat. Nun findet sich aber gerade die von Gerhard von Cremona übersetzte Definition des Punktes bei Heron (ed. Hultsch 1864, pag. 6 lin. 10—11). Sie kann daher sehr gut von Posidonius herrühren und bestätigt alsdann als neues Beispiel die von Schmidt ausgesprochene Behauptung.

CANTOR.

### Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica (972—1003).

Accedunt aliorum opera ad Gerberti libellos aestimandos intelligentesque necessaria per septem appendices distributa. Collegit, ad fidem codicum manuseriptorum partim iterum, partim primum edidit, apparatu critico instruxit, commentario auxit, figuris illustravit Dr. NICOLAUS BUBNOV, professor Kijoviensis. Berlin 1899, R. Friedländer & Sohn. CXIX, 620.

. Wenn wir nicht länger anstehen wollen, unsere Leser mit dem Erscheinen eines Buches bekannt zu machen, dessen Umfang wie dessen Inhalt ein langes und eingehendes Studium erfordert, bevor man zu einem gesicherten Urteile zu kommen vermag, so sprechen wir damit zugleich aus, dass wir selbst uns ein solches Urteil noch nicht bilden konnten. Darüber freilich sind wir uns klar, und jeder Freund geschichtlich-mathematischer Forschung wird uns wohl beistimmen, dass Herr Bubnov sich gerechtesten Anspruch auf Dank erworben hat, indem er zusammenfasste und in einem

Bande drucken liess, was vorher mit grosser Mühe zusammengesucht werden musste, teilweise (wie z. B. die Commentare zu Gerberts Rechnen auf dem Abakus) überhaupt noch nicht gedruckt war. Worüber wir uns dagegen noch im Zweifel befinden, das sind die Folgerungen, welche Herr Bubnov aus seinem Materiale zog, und welche die Anordnung derselben beeinflusste. Er hält nämlich, ähnlich wie Olleris es that, nur den Anfang der Gerbertschen Geometrie (die 13 ersten Kapitel der Pezschen Ausgabe) für echt; alles übrige (Kapitel 14—94 der Pezschen Ausgabe) sei eine Geometrie eines unbekanntem Verfassers. Der Beweis dafür wird darin gefunden, dass im Salzburger Codex zwischen beiden Abteilungen eine halbe Seite frei geblieben ist. Von einigen neu aufgefundenen Commentaren zu Gerberts Rechenregeln ist einer besonders merkwürdig, in welchem die *Rotula*, das Binglehen, nicht bloss als verschiebbares Zeichen benutzt wird, um erkennen zu lassen, bei welcher Zahlenordnung die Rechnung angelangt ist, sondern auch zur Ausfüllung leerer Kolumnen, also gleich der Null der Algorithmiker. Die Handschrift, aus welcher der Commentar abgedruckt ist, gehört freilich frühestens dem 16. Jahrhunderte an, wir sehen daher keinen Grund, warum der Commentar schon im 11. oder 12. Jahrhundert entstanden sein soll (Bubnov pag. 276 lin. 4 v. u.), und nicht von einem Algorithmiker herrühren könnte. Die Texte des Vitruvius Rufus und des Epaphroditus glaubt Herr Bubnov von einander trennen zu können. Der Auszug aus jedem der beiden beginne nämlich mit der Benutzung der aus geschriebenen Worte *Sic quaero*, und dann komme erst die Abkürzung S. Q. Die Abakusstelle in der sog. Geometrie des Boethius soll das Werk eines Fälschers aus dem 11. Jahrhundert sein. Insbesondere sei Architas in bewusster Fälschung statt Gerbert geschrieben u. s. w. Unsere Leser erkennen, dass man allen solchen Behauptungen gegenüber mit dem endgiltigen Zustimmung oder Ablehnen nicht vorsichtig genug sein kann.

CANTOR.

---

**Nicolaus Copernicus.** Eine biographische Skizze von M. CURTZE. Mit dem Bildnisse des Copernicus. (Sammlung populärer Schriften, herausgegeben von der Gesellschaft Urania zu Berlin.) Berlin 1899, Hermann Paetel. 84 S.

Dass eine von Max Curtze verfasste Biographie des Copernicus auf dem zuverlässigsten Quellenmaterial beruht und alles berücksichtigt, was an solchem von den verschiedensten Forschern, unter welchen Curtze selbst ein Löwenanteil zufällt, aufgefunden worden ist, braucht nicht erst besonders hervorgehoben zu werden. Die Schreibweise ist angenehm und insbesondere ohne jede Schwerfälligkeit, trotzdem zwar nicht die Beweisstellen für die aufgestellten Behauptungen, aber doch deren Fundorte in zahlreichen Fussnoten angegeben sind. So ist alles vereinigt, was der kleinen Druckschrift einen grossen Freundeskreis erwerben kann und wird.

CANTOR.

**Himmelsbild und Weltanschauung im Wandel der Zeiten** von TROELSLUND. Autorisierte, vom Verfasser durchgesehene Übersetzung von LEO BLOCH. Leipzig 1899, B. G. Teubner. V, 286 S.

Welcherlei Weltanschauung hat im 16. Jahrhundert in Nordeuropa sich eingebürgert, und woher stammte sie? So einfach diese Fragen sich aussprechen, so schwierig ist es beide und insbesondere die zweite genau zu beantworten. Sind doch die Kulturelemente, welche in der angegebenen Zeit an dem genannten Orte zusammen das bildeten, was die Weltanschauung ausmacht, ein buntes Gemisch verschiedenster Herkunft. Der Verfasser hat den kühnen Versuch gemacht, diese Elemente von Babylonien, von Ägypten, von Persien her, wo sie seiner Meinung nach ihre Wiege hatten, auf ihrer in Jahrtausenden vollzogenen Wanderung zu begleiten und so das zu schaffen, was man die Entwicklungsgeschichte der Religion und mit ihr der Naturwissenschaft nennen möchte. Ist es wirklich Geschichte, ist es Dichtung? Der wunderbare Glanz der Sprache weist auf das Letztere hin, und wenn wir auch weit entfernt davon sind, alles, was in dem Buche behauptet ist, für unbeweisbar zu erklären, unbewiesen ist manches.\* Eine beneidenswert glückliche Phantasie hat aus mehr oder weniger sicher gestellten geschichtlichen Thatsachen ein Gemälde hergestellt von einheitlichster Färbung. Wir haben selten ein Buch gelesen, welches uns vom ersten bis zum letzten Worte stärker in Fesseln gehalten hätte. Die Übersetzung liest sich, als wäre das Buch von Anfang an in deutscher Sprache geschrieben, gewiss das beste Lob, welches man einer Übersetzung erteilen kann.

CANTOR.

**John Napiers Werken** door N. L. W. A. GRAVELAAR. (Verhandelingen der Koninklijke Akademie von Westenschappen te Amsterdam. Eerste Sectie. Deel VI. Nr. 6.) Met Portret en 3 Platen. Amsterdam 1899, Johannes Müller. 160 pag.

Der Verfasser, welcher sich den Freunden geschichtlich-mathematischer Forschung schon durch eine Abhandlung über Pitiscus vorteilhaft bekannt gemacht hat, und welcher dem Referenten insbesondere durch lebenswürdige Briefe näher getreten ist, mittels deren er ihn auf Irrtümer in den Vorles. Gesch. Math. hinwies, ist nun mit einer Einzelschrift über den grossen schottischen Logarithmenerfinder hervorgetreten, die unseren Fachgenossen auf das wärmste empfohlen zu werden verdient. Es ist ja zweifellos wenig vorteilhaft für die Arbeit, dass sie in holländischer Sprache verfasst ist, aber ihrer Verbreitung in Deutschland, wo seit Fritz Reuters Eindringen in die breitesten Schichten die Kenntnis des Plattdeutschen sich so sehr verallgemeinert hat, wird jener Umstand kaum hinderlich sein.

---

\* An eine fünftägige Woche der alten Chaldäer glaubt niemand mehr. Die Thatsache, dass die Ägypter das Schaltjahr besaßen, ist durch das Edikt von Canopus festgestellt.

Herr Gravelaar hat ausführliche Auszüge aus sämtlichen Schriften Napiers gegeben: aus seiner Schrift über die Offenbarung Johannes, aus der *Descriptio*, aus der *Rabdologie*, aus der *Constructio*, endlich aus den 1839 erst aufgefundenen und dem Drucke übergebenen *Ars logistica* und *Algebra*. Referent ist besonders für die letzterwähnten Auszüge dankbar, da ihm die Ausgabe von 1839 nie zu Gesicht gekommen ist, und ebenso dürfte es manchem Fachgenossen in Deutschland gegangen sein. Herr Gravelaar hat überdies nicht versäumt, bei jeder Gelegenheit auf gleichzeitige und auf ältere Schriften hinzuweisen, ein Hinweis, der dazu dient, Napiers Stellung innerhalb der Geschichte der Mathematik deutlicher zu kennzeichnen.

CANTOR.

**Urkunden zur Geschichte der Nichteuklidischen Geometrie**, herausgegeben von FRIEDRICH ENGEL und PAUL STÄCKEL. I. NIKOLAJ IWANOWITSCH LOBATSCHESKY. Zwei geometrische Abhandlungen aus dem Russischen übersetzt, mit Anmerkungen und mit einer Biographie des Verfassers von FRIEDRICH ENGEL. Erster Teil: Die Übersetzung mit einem Bildnisse Lobatschefskijs und mit 194 Figuren im Texte. Zweiter Teil: Anmerkungen. Lobatschefskijs Leben und Schriften. Register. Mit 67 Figuren im Texte. Leipzig 1899, B. G. Teubner. XVI, 476 S.

Im Jahre 1895 gaben P. Stäckel und Fr. Engel gemeinschaftlich „Die Theorie der Parallellinien von Euklid bis auf Gauss“ heraus, ein vortreffliches Buch, welches wir im 41. Bande dieser Zeitschrift *Histor.-litterar. Abtlg.* S. 105—106 warm empfehlen durften. Beide Verfasser haben das leicht begreifliche Bedürfnis empfunden, die Lehren, deren Geschichte durch ihre Bemühungen zum erstenmale leicht übersehbar geworden war, noch weiter zu verfolgen, und die Teubnersche Verlagshandlung hat, wie schon so oft, ihre reichen buchhändlerischen Mittel dem wissenschaftlich hochinteressanten, wenn auch ausserhalb des gewöhnlichen Geleises liegenden Gegenstande zur Verfügung gestellt. Ohne die in der ersten Veröffentlichung von 1895 bewährte Gemeinschaft der Arbeit ganz bei Seite zu schieben, haben beide Verfasser nunmehr doch eine etwas schärfer ausgesprochene Arbeitsteilung eintreten lassen. Herr Engel hat die Schriften Lobatschefskijs, Herr Stäckel diejenigen Bolyais zur Herausgabe übernommen, und Herrn Engels Abteilung liegt heute in einem stattlichen Bande vollendet vor uns. Herr Engel war durch seine Kenntnis der russischen Sprache, über welche er wohl allein unter den gegenwärtig ausserhalb Russlands lebenden Mathematikern vollständig gebietet, zur Bekanntmachung der Lobatschefskijschen Schriften in erster Linie befähigt, und wer der nichteuklidischen Geometrie sein Interesse zuwendet, wird daher Herrn Engels Bemühungen doppelt dankbar anerkennen. Zeigt doch die heute zum ersten Male gebotene Übersetzung des grossen Originalwerkes „Neue Anfangsgründe der Geometrie“, wie wenig gerecht man Lobatschefskij werden konnte, so lange man auf dessen Veröffentlichungen in französischer

und in deutscher Sprache allein sein Urteil gründete. Für die Lebensgeschichte Lobatschefskijs hat Herr Engel die vortrefflichen Vorarbeiten Wassiljews benutzen können, ebenso aber auch briefliche Mitteilungen dieses liebenswürdigen Gelehrten, welche vorher der Öffentlichkeit noch nicht übergeben waren. Es ist weit mehr als eine einfache Lebensbeschreibung, womit man hier bekannt wird, es ist ein fesselndes, wenn auch nicht immer erfreuliches Stück Kulturgeschichte aus dem 19. Jahrhundert. Wenn wir Herrn Engels Anmerkungen erst zuletzt nennen, so geschieht es, weil in ihnen mehr als in dem ganzen übrigen Bande von Eigenarbeit des Verfassers zu erkennen ist. Man muss selbst mit ähnlichen Arbeiten sich beschäftigt haben, um würdigen zu können, wie sehr Herr Engel es verstanden hat, die mitunter verwischten Spuren der Geistesthätigkeit Lobatschefskijs wieder aufzufrischen, wie verhältnismässig leicht er jetzt das Lesen eines Werkes gemacht hat, das ihm selbst unsägliche Mühe bereitet haben muss.

CANTOR.

**Jacob Steiners Lebensjahre in Berlin 1821—1863.** Nach seinen Personalakten dargestellt von Professor Dr. JULIUS LANGE. Sonderdruck der Festschrift zur Erinnerung an das 75 jährige Bestehen der Friedrichs-Werderschen Oberrealschule (ehem. Gewerbeschule). Nebst einem Bildnis von J. Steiner, mit gütiger Erlaubnis der Verlags-handlung Georg Reimer in Berlin den gesammelten Werken entnommen. Berlin 1899, R. Gaertners Verlagsbuchhandlung (Hermann Heyfelder). 70 S.

Je genauer man mit Jacob Steiners geometrischen Leistungen bekannt geworden ist, um so höher ist die Anerkennung derselben gestiegen. Man kann leider nicht behaupten, dass Jacob Steiners menschliche Eigenschaften bei näherer Betrachtung gleichfalls immer neue Lichtseiten hätten erkennen lassen. Das haben schon die Veröffentlichungen J. H. Grafs dargethan, das zeigt sich noch deutlicher aus den uns vorliegenden Personalakten, welche allzugenu den gleichen Eindruck hervorbringen, den man aus der Geschichte des Verkehrs Steiners mit Schläfli gewinnen musste, als dass man die Gerechtigkeit der in ihnen enthaltenen Charakterschilderung anzweifeln könnte. Steiner schilt in seinen Briefen nach der Heimath auf die preussische Regierung wie auf die Berliner Mathematiker. In seinen Eingaben an die preussische Regierung rühmt er Berlin als seine freiwillig erkorene Heimath, und will den Verkehr mit den dortigen Fachgenossen sowie die dort sich bietenden litterarischen Hilfsmittel und Anregungen nicht entbehren können. Die preussische Regierung kommt Steiner entgegen, so viel sie es thun kann, und zieht wiederholt aus seinem unbotmässigen und streitsüchtigen Benehmen nicht die Folgerungen, welche einem weniger genialen Geometer gegenüber ganz gewiss gezogen worden wären. Jacobi und insbesondere Crelle erweisen sich als unermülich in der Vertretung von Steiners Interessen. Kurzum die unmittelbaren und mittelbaren Vorwürfe Steiners sind entkräftet und widerlegt.

CANTOR.

**Handbuch der Theorie der linearen Differentialgleichungen.** Von Professor Dr. LUDWIG SCHLESINGER. Zweiten Bandes zweiter (Schluss-) Teil. Leipzig 1898, B. G. Teubner. XIII u. 446 S.

Von dem grossen, 1895 begonnenen, 1897 mit dem ersten Teil des zweiten Bandes fortgesetzten Werk (vergl. die Referate der Zeitschr. f. Math. u. Phys. 1895 S. 166 fig. u. 1898 S. 56 fig.) liegt nunmehr unter der Jahreszahl 1898 bereits der abschliessende Band vor. Berücksichtigt man dabei die Fülle des Inhalts und die eindringende Beherrschung des Gegenstandes durch den Verfasser, so steht man vor einer wahrhaft bewundernswerten Leistung.

Um den vorliegenden Band mit wenigen Worten zu charakterisieren, so ist er in der Hauptsache ausschliesslich der Theorie der elliptischen Modulfunktion und der in Verallgemeinerung jener von Poincaré entwickelten Theorie der Fuchs'schen Funktionen gewidmet. Schon durch diese Homogenität des Inhaltes wirkt das Studium besonders anziehend. Aber auch noch aus einem anderen Grunde. Der Verfasser hat seit langen Jahren die Poincaréschen Theorien und alles, was damit zusammenhängt, eindringend durchforscht und davon in einer Reihe wichtiger Originalabhandlungen Zeugnis abgelegt. So kommt es, dass wir in der hier gegebenen Darstellung der grossen Theorie neben vielen eigenen Resultaten des Verfassers ein ganz besonders reifes Erzeugnis seiner Arbeit vor uns haben. Schliesslich krönt der Band das ganze Werk auch in dem Sinne, dass viele der früheren Ansätze jetzt eigentlich erst zur Geltung kommen, viele der früher aufgestellten Probleme jetzt ihre Beantwortung finden.

Bei der Fülle der eigenartigen Begriffe, mit denen operiert wird, können wir nur eine ganz summarische Wiedergabe des Inhaltes der einzelnen Abschnitte versuchen.

### XIII. Theorie der elliptischen Modulfunktion.

Auf dem von Gauss zum Eingang in die Theorie der elliptischen Funktionen benutzten Wege des arithmetisch-geometrischen Mittels, als dessen historische Quelle die Landensche Transformation erscheint, wird gezeigt, dass bei der Legendreschen Differentialgleichung, der die Periodizitätsmoduln des elliptischen Integrals erster Gattung mit dem Modul  $z = z^2$  genügen, die unabhängige Variable  $z$  eine eindeutige Funktion des Integralquotienten in der oberen Halbebene ist: die sogenannte elliptische Modulfunktion. Die Ausdehnung dieser Frage (Eindeutigkeit der unabhängigen Variablen als Funktion des Integralquotienten) auf die Gauss'sche Differentialgleichung überhaupt, die in der „kanonischen“ Form von drei Parametern  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  abhängt, geschieht im Anschluss an Schwarz, indem die  $z$ -Ebene durch den Integralquotienten  $\eta$  in einem Netz von Kreisbogendreiecken abgebildet wird. Eine Funktion  $\eta = s(\delta_1, \delta_2, \delta_3; z)$ , die eine  $z$ -Halbebene konform in einem Dreieck der  $\eta$ -Ebene mit den konkaven Winkeln  $\pi\delta_1, \pi\delta_2, \pi\delta_3$  abbildet, heisst Dreiecksfunktion. Sind  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  reziproke ganze Zahlen oder Null, so ist die Dreiecksfunktion eindeutig umkehrbar;

bei der Legendreschen Gleichung ist  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = 0$ ; die Modulfunktion ist also die eindeutige Umkehrung einer Dreiecksfunktion  $\eta = s(0, 0, 0; z)$ . Auf solchem Wege gelangt Schlesinger zu den wichtigsten Eigenschaften der Modulfunktion. Neben ihr werden noch zwei andere eindeutig umkehrbare Dreiecksfunktionen aufgestellt; die projektiven Gruppen, die diese Funktionen vertragen, lassen sich in einfacher Weise arithmetisch charakterisieren.

#### XIV. Theorie der eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunktionen.

Von der Modulfunktion wendet sich die Untersuchung nun zu dem allgemeineren Problem, wo nicht alle drei  $\delta = 0$  sind. Drei Arten von Dreiecksfunktionen werden unterschieden, je nachdem  $\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 < 1, = 1, > 1$ . Je nach dem Eintreten des einen oder anderen dieser Fälle ist das Quadrat des Radius  $C$  des sogenannten Orthogonalkreises für das Ausgangsdreieck  $> 0, = 0, < 0$ . Eine interessante geometrische Betrachtung führt Schlesinger zu Sätzen über die projektiven Substitutionen, welche jenen Kreis in der  $\eta$ -Ebene ungeändert lassen. Eine dabei auftretende Differentialinvariante wird als Linienelement auf einer Fläche vom konstanten Krümmungsmaß  $-C$  gedeutet, und dadurch finden die Substitutionen einer zu einer Dreiecksfunktion gehörigen projektiven Monodromiegruppe  $\mathfrak{G}$  eine anschauliche geometrische Auslegung. Für die Dreiecksfunktionen aller drei Arten ist die Gruppe  $\mathfrak{G}$  diskontinuierlich, die Umkehrfunktion eindeutig. Bei der dritten Art ist  $\eta$  sogar eine algebraische Funktion von  $z$ , deren einzelne Fälle in bekannter Weise den regulären Polyedern zugeordnet werden.

Die analytische Darstellung der Dreiecksfunktionen dritter Art führt auf die Theorie der Fuchsschen Primformen. Hieran schliessen sich Sätze über lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit algebraischen Integralen nach Fuchs, Klein und Schwarz. Namentlich findet hier die Fuchssche Methode, die durch rein rationale Prozesse darüber Auskunft giebt, wie sich eine vorgelegte lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung in Bezug auf jene Fragen verhält, ihren Platz.

Den Abschluss des inhaltreichen, vielfach originellen und in der Darstellung höchst eleganten Abschnittes bildet die Einführung des Poincaré'schen Prinzips. Dieses besteht in dem Gedanken, bei einer Funktion  $y$  von  $x$  mit den singulären Stellen  $a_1, a_2, \dots, a_\sigma$   $y$  und  $x$  als eindeutige Funktionen eines Parameters  $\eta$  darzustellen, indem die Funktion  $x$  von  $\eta$  die Werte  $a_1, a_2, \dots, a_\sigma$  „auslässt“, gerade wie die Exponentialfunktion  $e^\eta$  die Werte 0 und  $\infty$ .

#### XV. Theorie der Fuchsschen Funktionen.

Der Übergang von den eindeutigen Umkehrungen von Dreiecksfunktionen zu den Fuchsschen Funktionen kann durch den Übergang von der Gauss'schen Differentialgleichung zu einer Differentialgleichung zweiter Ordnung mit beliebig vielen singulären Stellen bezeichnet werden.

Eine diskontinuierliche projektive Gruppe  $\mathfrak{G}$ , deren Substitutionen einen reellen Kreis mit nicht verschwindendem Radius ungeändert lassen, heisst Fuchssche Gruppe, die zugehörige Funktion — wie also z. B. die Umkehrung einer Dreiecksfunktion erster Art — ist eine Fuchssche Funktion\*, eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, bei der die unabhängige Variable eine Fuchssche Funktion des Integralquotienten ist, eine Fuchssche Differentialgleichung (nicht identisch mit „Differentialgleichung der Fuchsschen Klasse“!)

Die Existenz solcher zu einer Gruppe der angegebenen Art gehörigen Fuchsschen Funktionen folgt unmittelbar aus früherem. Sie zeigen mannigfache Analogien mit den elliptischen Funktionen. Das Periodenparallelogramm ist ersetzt durch ein Kreisbogenpolygon, den Fundamentalbereich, der zu einer geschlossenen Fläche zusammengebogen das Geschlecht der Fuchsschen Funktion bestimmt. Auch die elliptischen  $\vartheta$ -Reihen finden ihr Seitenstück in den Fuchsschen  $\Theta$ -Reihen, deren Verhalten bei Anwendung der Substitutionen von  $\mathfrak{G}$  unmittelbar erkennbar ist. Ihre Konvergenz, die Entwicklung in der Umgebung der Doppelpunkte der Substitutionen, die Art und Anzahl ihrer Null- und Unendlichkeitsstellen im Fundamentalbereich finden eingehende Untersuchung. Besonders wichtig sind die sog. ganzen Thetafunktionen, die für keinen Wert innerhalb des Fundamentalbereichs unendlich werden. Jede Fuchssche Funktion kann als Quotient von ganzen rationalen Funktionen ganzer Fuchsscher Thetafunktionen dargestellt werden.

Eine andere Darstellung Fuchsscher Funktionen gründet sich auf den Begriff der Primformen, der auf beliebige Fuchssche Gruppen übertragen wird. Für solche Primformen gelten ähnliche Sätze wie bei endlichen Gruppen.

Die symmetrischen Fuchsschen Gruppen und Funktionen, bei denen das in bestimmter Weise gebildete Fundamentalpolygon durch eine „Diagonale“ in symmetrische Hälften zerfällt, die Spiegelbilder von einander in Bezug auf jene Diagonale sind, bilden die direkte Verallgemeinerung der eindeutig umkehrbaren Dreiecksfunktionen. Man kann dabei stets erreichen, dass sämtliche singuläre Stellen der zugehörigen Fuchsschen Differentialgleichung reell sind.

Das allgemeine Schottkysche Abbildungsproblem, das an ein mehrfach zusammenhängendes Kreisbogenpolygon anknüpft, führt endlich auf Fuchssche Funktionen höheren Geschlechtes, auf Kleinsche Gruppen und Funktionen und die zugehörigen Kleinschen Thetareihen.

---

\* Der Name „Fuchssche Funktion“ und die daran anschliessenden Bezeichnungen sind von Poincaré eingeführt worden. F. Klein und seine Schüler nennen Funktionen, die bei gewissen linearen Substitutionen ungeändert bleiben, „automorph“. Bei der grossen Verbreitung, die auch diese Bezeichnung gefunden hat, wäre ein Hinweis darauf in dem Handbuch entschieden am Platze gewesen.

### XVI. Das Poincarésche Prinzip und seine Anwendungen.

Wenn es gelingt, eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung, bei der die singulären Punkte beliebig und gewisse andere Parameter ganzzahlig festgelegt sind, eine sog. normale Differentialgleichung, durch geeignete Wahl der noch übrigen Parameter zu einer Fuchsschen Differentialgleichung zu machen, so ist das Poincarésche Prinzip in allgemeinsten Form zur Anwendung gebracht. Der Nachweis, dass dies und zwar nur auf eine Art möglich ist, wird durch eine Methode geführt, die sich auf die Theorie der Untergruppen der Fuchsschen Gruppen oder die Transformation der Fuchsschen Funktionen stützt. Durch Transformation einer Fuchsschen Funktion, wiederholte Anwendung der Transformation auf die transformierte u. s. f. ohne Ende, gelangt man zu einer Grenzfunktion  $\eta$  von  $z$ , deren Umkehrung gewisse  $z$ -Werte auslöst und dadurch das gedachte Problem löst.

Der Inhalt dieses Abschnittes, die Transformationstheorie der Fuchsschen Funktionen und was daraus folgt, ist zum allergrössten Teil Eigentum des Verfassers.

### XVII. Theorie der Fuchsschen Zetafunktionen.

Wenn die Integrale einer linearen Differentialgleichung beliebiger Ordnung mit rationalen Koeffizienten vermittelt einer hierzu geeigneten Fuchsschen Funktion  $z$  von  $\eta$  als eindeutige Funktionen von  $\eta$  dargestellt werden, so stehen sie zu dieser Funktion in einer analogen Beziehung, wie die bei Jacobi in dem Ausdruck des Integrals zweiter Gattung auftretende Funktion  $Z(u)$  zu  $\sin u$ . Deshalb heissen jene Funktionen von  $\eta$  in der Theorie der linearen Differentialgleichungen nach Poincaré Fuchssche Zetafunktionen. Der gegenwärtige letzte Abschnitt behandelt kurz gesagt die Integration von linearen Differentialgleichungen mit Hilfe von Zetafunktionen.

Der Existenzbeweis für die zu einer gegebenen Gruppe  $\Theta$  gehörigen allgemeinen Fuchsschen Zetafunktionen wird geliefert, falls die Gruppe  $\Theta$  gewisse „Konvergenzbedingungen“ erfüllt. Die aus den  $Z$ -Funktionen entstehenden  $Z$ -Formen zweier homogener Variablen  $u_1, u_2$  führen dann zu einer Gestalt der Differentialgleichung, bei der die Koeffizienten invariante, eindeutige Formen von  $u_1, u_2$  und damit Fuchssche Funktionen sind, während die Integrale eben jene  $Z$ -Formen sind.

Aus der Theorie der  $Z$ -Funktionen und dem Poincaréschen Prinzip folgt — wenigstens unter gewissen einschränkenden Bedingungen — die Existenz eines Systems von Funktionen und die Herstellbarkeit des allgemeinsten solchen, welches den von Riemann in seinem Nachlass aufgestellten Bedingungen genügt und worauf er die Theorie der linearen Differentialgleichungen zu gründen unternahm.

Nicht mit den  $Z$ -Funktionen in direktem Zusammenhang steht die jetzt folgende kurze Vorführung der neuesten Fuchsschen Untersuchungen

über lineare Differentialgleichungen, deren Monodromiegruppe eine aus einem Fundamentalsystem und den konjugierten Werten seiner Elemente gebildete bilineare Form ungeändert lässt. Wohl aber erscheinen hier diese Untersuchungen als direkte Verallgemeinerung des Satzes, dass bei einer Fuchsschen Differentialgleichung der Orthogonalkreis durch die Substitutionen der Gruppe ungeändert bleibt. — Eine kurze Betrachtung wird noch Differentialgleichungen mit algebraischen und mit doppeltperiodischen Koeffizienten gewidmet und zuletzt für die Laméschen Gleichungen spezialisiert.

Unsere gedrängte Übersicht giebt nur ein schwaches Bild von dem tatsächlichen Reichtum des Inhaltes.

Als „Nachwort“ publiziert der Verfasser den seiner Zeit mit Günther zusammen aufgestellten Arbeitsplan, um „den Einfluss, den Günther auf Plan und Ausführung des Handbuchs ausgeübt hat, im Zusammenhang hervortreten zu lassen“, und giebt die Punkte an, in denen er den Güntherschen Nachlass verwenden konnte.

Ein sorgfältig aufgestelltes Register der angewandten Bezeichnungen wird bei einer Benutzung des Werkes zur Orientierung über nur einzelne Fragen treffliche Dienste leisten.

Die Nachträge zum Litteraturnachweis der ersten Bände bestätigen in interessanter Weise — wenn es dessen bedürfte — die lebhafteste Thätigkeit, die fortgesetzt auf dem Gebiete der linearen Differentialgleichungen herrscht. Besonders sei dabei der an Poincaré anschliessenden Arbeiten von Horn gedacht, in denen die divergenten, formal genügenden Reihen zur asymptotischen Darstellung der Integrale benutzt werden. Inzwischen scheint die von der Pariser Akademie preisgekrönte Abhandlung von Borel neues, wohl auch für die linearen Differentialgleichungen in der eben bezeichneten Richtung wertvolles Material geliefert zu haben.

Beim Abschluss unseres Referates stehen wir nicht an zu erklären, dass Schlesinger nach unserer Meinung das zu Anfang seines grossen Unternehmens aufgestellte hohe Ziel in geradezu glänzender Weise erreicht hat. Es dürfte kaum eine nennenswerte Untersuchung auf dem bearbeiteten Gebiete geben, die nicht entweder in die Darstellung Schlesingers organisch verwoben worden wäre oder doch in kurzer Erwähnung ihren Platz darin angewiesen erhalten hätte. Die fundamentalen Arbeiten insbesondere von Fuchs und Poincaré erscheinen hier in einem Zusammenhang, der ihre Bedeutung sogleich ins rechte Licht stellt. In welcher Richtung auch immer eine Untersuchung über lineare Differentialgleichungen heute angestellt werden möge, man wird ohne eigenen Nachteil nicht wohl einer Benutzung von Schlesingers „Handbuch“ dabei entraten können!

LOTHAR HEFFTER.

H. POINCARÉ. **Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste.** T. III: Invariants intégraux. Solutions périodiques du deuxième genre. Solutions doublement asymptotiques. 414 S. gr.<sup>o</sup>. Paris 1899, Gauthier-Villars.\*

Der das Werk abschliessende dritte Band eröffnet (Kap. XXII—XXVI) mit einer Theorie und den Anwendungen der sog. „Integralvarianten“, einer rein mathematischen Theorie, welche schon in der dem Werke zu grunde liegenden Preisarbeit eines der ersten Kapitel gebildet hatte, und deren Ziel Stabilitätsbetrachtungen sind.

Um solche Ausdrücke für ein gegebenes System von Differentialgleichungen

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

zu bilden, werden hauptsächlich  $p$ -fache Integrale ( $p = 1, 2, \dots, n$ ) der Form

$$\int \Sigma A_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \dots dx_{i_p}$$

betrachtet, wo die  $A$  Funktionen von  $x_1, \dots, x_n$  sind, die Summe über die Kombinationen, ohne Wiederholung,  $i_1, \dots, i_p$  zu  $p$  aus den Zahlen  $1, 2, \dots, n$  auszudehnen und die Integration über irgend ein  $p$ -fach ausgedehntes Gebiet zu erstrecken ist, das mit  $t$  den Differentialgleichungen gemäss sich ändert. Wird der Ausdruck hierbei von  $t$  unabhängig, so heisst er „Integralinvariante“. Die einfachsten solcher sind bei den dynamischen Systemen:

$$\int^{(n)} M dx_1 \dots dx_n,$$

wenn  $M$  der Multiplikatorgleichung

$$\frac{\partial(M X_1)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial(M X_n)}{\partial x_n} = 0$$

genügt. Das mathematisch Interessanteste — und auch in der Preisschrift nur erst teilweise erwähnt — ist der enge Zusammenhang zwischen diesen Integralinvarianten und den Integralen, sowohl der obigen Differentialgleichungen selbst, als ihrer „ersten Variationsgleichungen“, welche aus ihnen durch Variation einer Lösung  $x_i$ , unter Beibehaltung nur der ersten Potenzen der Variationen  $\xi_i$ , für die  $\xi_i$  hervorgehen, und ferner ihre Beziehung zu den „charakteristischen Exponenten  $\alpha_k$ “ der letzten Gleichungen, wenn die  $x_i$  eine periodische Lösung bildeten (vergl. die Besprechung des I. Bandes). Leider ist der hier vorhandene Zusammenhang mit den Lieschen Betrachtungsweisen nicht berührt.

Herr Poincaré legt das Hauptgewicht auf die Anwendungen. Nach Betrachtungen über die Existenzbedingungen von Integralinvarianten im Fall periodischer Lösungen u. s. w. behandelt Kapitel 26 die Poissonsche Stabilität: ob nämlich das Körpersystem nach Ablauf von endlichen Zeitintervallen immer wieder seiner ursprünglichen Lage beliebig nahe komme?

\* Vergl. die Besprechungen der beiden ersten Bände dieser Zeitschrift, Band 38, S. 58 und Band 41, S. 148.

Bei dieser Fragestellung sind also z. B. in den Reihenentwickelungen für die grossen Axen auch Glieder der Form  $t \sin(\alpha t + \beta)$  zugelassen. An der Betrachtung von endlichen positiven Integralinvarianten bestätigt der Verfasser, dass diese Art der Stabilität für den früher betrachteten speziellen Fall des Dreikörperproblems (nicht aber für den allgemeinen Fall) im Allgemeinen, d. h. bei einem Umfang von Anfangswerten der Variablen, gegen den die ausgeschlossenen Werte sich verhalten wie die rationalen Zahlen zu den reellen, wirklich vorhanden ist.

Mit Kapitel XXVII tritt der Band wieder in eine vollständigere Diskussion des Verlaufs derjenigen Trajektorien ein, welche früher als „asymptotische Lösungen“ bezeichnet worden waren. Besonders wichtig ist die Existenz (Kapitel XXVIII) einer zweiten Art von periodischen Lösungen, welche sich um die zu grunde gelegte periodische Lösung von Periode  $T$  herumgruppieren (siehe ihre Bildung in Kapitel XXX): ihre Periode wird erst ein ganzes Vielfaches von  $T$ , und wenn der kleine Parameter  $\mu$  des Problems, nach dem die Entwickelungen gehen, abnimmt, verschwinden diese Lösungen nach und nach; in jedem noch so kleinen Stück eines gewissen Gebietes der Variablen existieren sie unendlich dicht. Das letzte Kapitel XXXIII behandelt, an XXVII anschliessend, den Nachweis gewisser „doppelt-asymptotischer“ Lösungen, die sich nämlich sowohl für  $t = +\infty$  als für  $t = -\infty$  an die periodische Ausgangslösung anschmiegen; Kapitel XXXII aber bespricht einige Schwierigkeiten, die bei der Ausdehnung auf das allgemeine Problem der drei Körper dadurch entstehen, dass auch periodische Lösungen mit zu betrachten wären, bei denen die beiden Planeten periodisch einander sehr nahe kämen.

Noch sind Kapitel XXIX und XXXI hervorzuheben mit ihren Betrachtungen über den Stabilitätscharakter der periodischen Lösungen beider Arten gegenüber der Frage nach Maximum oder Minimum des Integrals der kleinsten Wirkung, interessante mathematische Untersuchungen über Variation, bei denen man nur wieder die Beziehung zur Litteratur vermisst. Von ganz besonderem Interesse ist hierbei die Betrachtung der von G. H. Darwin im 21. Bande der Acta Mathem. als Resultate von numerischen Studien gegebenen merkwürdigen periodischen Bahnen, indem sie Herr Poincaré seiner Theorie der periodischen Lösungen der beiden Arten unter Ausblicken auf die analytischen Übergänge einzuordnen versteht. Hier wird man am besten beim Studium des im allgemeinen wenig übersichtlich geschriebenen Bandes anknüpfen.

Zweifellos konnten viele der vom Verfasser aufgeworfenen Fragen nicht vollständig erledigt werden. Aber in einem so dunkeln Gebiete, wo es sich um den ganzen Charakter der, wie man heute weiss, unendlich komplizierten Bahnverhältnisse in dem Problem der drei Körper handelt, ist jeder theoretische Einblick, ja jede neue Fragestellung und jeder neue Ansatz zur Beantwortung, an denen das Werk reich ist, vom höchsten Interesse. Und so muss dieses grosse Werk die ernste Forschung theoretisch und praktisch vielseitig beeinflussen.

M. NOETHER.

DARBOUX, GASTON. **Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes.** Tome I. 383 S. gr. 8<sup>o</sup>. Paris 1898, Gauthier-Villars et Fils.

Die Verallgemeinerung der Cartesiusschen Raumkoordinaten in rechtwinklige krummlinige Koordinaten, bei welchen das Koordinatensystem von drei Flächenscharen gebildet wird, die sich überall rechtwinklig schneiden, führt zur Aufsuchung der dreifach orthogonalen Systeme von Flächen, deren einzelne Familien von Herrn Darboux schon früher als Lamésche Familien bezeichnet sind. Der Bestimmung dieser Systeme, die somit ein grosses Interesse darbieten, ist, seit Bouquet im Jahre 1846 (*Liouvilles Journal* Bd. 11, pag. 446) den Beweis führte, dass nicht jede beliebig gestaltete Fläche einem solchen Systeme angehören kann, eine grosse Zahl von Arbeiten gewidmet und zwar schuf Lamé in seinen „*Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs applications*“ (Paris 1859) die Grundlage für alle weiteren Arbeiten. Am eingehendsten hat sich wohl Herr Darboux mit der Frage beschäftigt und keinen besseren Verfasser einer zusammenhängenden Behandlung konnte man sich für dieselbe wünschen, als den Verfasser der klassischen „*Leçons sur la théorie générale des surfaces*“.

Aus dem reichen Inhalte des Werkes, das der Natur der Sache nach vieles einzelne eingehend behandelt, sei nur einiges Hauptsächliche herausgenommen. Der erste uns jetzt vorliegende Band geht von den drei Gleichungen

$$\frac{\partial \alpha_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial \alpha_k}{\partial x} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial \alpha_k}{\partial y} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial z} \cdot \frac{\partial \alpha_k}{\partial z} = 0; \quad i, k = 1, 2, 3; \quad i \neq k$$

aus, denen die Parameter  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  der drei Familien genügen müssen, die sich gegenseitig unter rechtem Winkel schneiden und zwar nach dem Dupinschen Satze längs ihrer Krümmungslinien. Ist die allgemeine Lösung dieser Gleichungen auch bis jetzt nicht gefunden, so ist doch bei der grossen Zahl von besonderen Ergebnissen eine zusammenfassende Behandlung mit Freude zu begrüssen. Die drei Gleichungen lassen sich zunächst auf eine partielle Differentialgleichung dritter Ordnung zurückführen, die zuerst von Cayley aufgestellt wurde und die man in der Form einer sehr einfachen Determinante sechster Ordnung schreiben kann.

Die einfachsten Arten der dreifach orthogonalen Systeme sind diejenigen, welche als eine Schar eine solche von Ebenen enthalten. Um alle orthogonalen Systeme zu erhalten, deren eine Familie aus Ebenen besteht, lässt man eine bewegliche Ebene auf einer abwickelbaren Fläche rollen. Zeichnet man in der Anfangslage der Ebene zwei beliebige orthogonale Scharen von Linien, so erzeugt jede bei der Bewegung der Ebene eine Flächenschar des orthogonalen Systems. Die orthogonalen Systeme mit einer Schar von Kugeln ergeben sich aus den vorigen durch Inversion, da eine Schar von Kugeln, die einen Punkt gemeinsam haben, durch Inversion von diesem Punkte aus in eine Schar von Ebenen übergeführt wird, aus einer solchen Schar von Kugeln aber alle gleichartigen Scharen (nach der Benennung

von V. Rouquet diejenigen, für welche die Lösung von denselben Differentialgleichungen in  $X, Y, Z$  abhängt) ohne Integration ergeben.

Eine partikuläre Lösung der partiellen Differentialgleichungen dritter Ordnung der Laméschen Familien ist die Gleichung erster Ordnung

$$H = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}} = \varphi_0(u)(x^2 + y^2 + z^2) + \varphi_1(u)x + \varphi_2(u)y + \varphi_3(u)z + \varphi_4(u);$$

von welcher die Schar paralleler Ebenen und der daraus durch Inversion hervorgehenden spezielle Fälle sind. Von dieser Gleichung wird die allgemeine Lösung gegeben, zuvor aber der besondere Fall behandelt, dass die fünf Funktionen  $\varphi_i$  sich nur durch konstante Faktoren unterscheiden. In diesem Falle lassen sich die entsprechenden Laméschen Familien besonders leicht konstruieren. Alle Kreise, die auf einer beliebigen Fläche und einer festen Kugel senkrecht stehen, sind normal zu den Flächen, die die gesuchte Familie bilden.

Es werden sodann verschiedene Formen der partiellen Differentialgleichung aufgestellt, unter denen besonders diejenige weitere Anwendung findet, bei welcher die Gleichung der Flächenschar von der Form  $\varphi(x, y, z, u)$  ist. Unter Zugrundelegung derselben werden alle Laméschen Familien gesucht, die aus Flächen zweiten Grades bestehen.

Die in den vorhergehenden Kapiteln durchgeführten Methoden werden auf orthogonale Systeme mit  $n$ -Variablen ausgedehnt, aus denen sich auch die Krümmungslinien einer grossen Zahl von Flächen dritter Ordnung finden lassen.

Auch das zweite Buch „die krummlinigen Koordinaten“ beginnt mit dem Studium der orthogonalen Systeme in mehrdimensionalen Räumen. Die Formeln, welche Lamé in seinen „Leçons sur les coordonnées curvilignes“ gegeben hat, werden auf  $n$  Variablen ausgedehnt und der Herr Verfasser gelangt zu Ergebnissen, die er teilweise bereits in den Jahren 1866 und 1878 in den Annales de l'Ecole Normale gegeben hat. Im Falle des gewöhnlichen Raumes wird eine andere Methode angewendet, die sich auf die Bewegung eines beweglichen rechtwinkligen Triédriers gründet, der ja auch in seiner allgemeinen Flächentheorie ein breiter Raum gewidmet ist. Die erhaltenen Formeln werden auf die Aufsuchung derjenigen Laméschen Familien angewendet, die sich in unendlich kleine Quadrate teilen lassen. Die entstehenden Bedingungsgleichungen geben zur Aufstellung dreier typischen Fälle Anlass, von denen der zweite ausgeschieden werden muss, weil er keine Lösung des Problems liefert. Der erste Fall giebt uns nur bekannte Scharen aus Ebenen, Kugeln, Kegeln und Rotationsflächen zusammengesetzt, und vom dritten werden einige Spezialisierungen eingehend behandelt und darauf die isothermen Laméschen Systeme sowie einige andere, die in der Theorie der Wärme vorkommen, bestimmt.

H. WILLGRÖD.

CHAPPUIS, JAMES et ALPHONSE BERGET, **Cours de Physique à l'usage des candidats aux écoles spéciales.** Paris 1898, Gauthier-Villars et Fils. gr. 8<sup>o</sup>. 697 S.

Das Werk, welches nach der Ankündigung denen zum Studium dienen soll, die sich dem Aufnahmeexamen für die Ecoles Normale und Polytechnique unterziehen wollen, ist klar geschrieben, das Papier und der Druck sind, wie bei allen Büchern des angesehenen französischen Verlags, recht gut und Abbildungen unterstützen in grosser Zahl und guter Ausführung das Verständnis. Der Inhalt beschränkt sich nicht rein auf Experimentalphysik, doch tritt die mathematische Behandlung ausser in der Optik in wünschenswerter Weise zurück. Allerdings würde man in einem solchen Buche bei uns wohl die Anwendung der Differential- und Integralrechnung vermieden haben. In dem Abschnitte über Mechanik (225 S.) vermissen wir die Behandlung des Parallelogramms der Kräfte und der einfachen Maschinen, deren Gesetze als bekannt vorausgesetzt werden. An die Mechanik schliesst sich unmittelbar die Lehre von der Wärme (239 S.), was für eine eingehende Behandlung wohl nicht zu empfehlen sein dürfte, wenn auch im Schulunterrichte vielfach diese Reihenfolge gewählt wird. Diesen beiden ersten Teilen gegenüber treten die übrigen an Umfang bedeutend zurück. In der Optik (163 S.), bei welcher die Rechnung naturgemäss mehr im Vordergrunde steht, sind Interferenz und Polarisation nicht mit behandelt. Von der Elektrizitätslehre (39 S.) ist nur die Elektrostatik in Umrissen durchgeführt und die Lehre vom Magnetismus (19 S.) auf das Wesentlichste beschränkt. Das Kapitel der Akustik fehlt ganz, so dass von einer gleichmässigen Behandlung der einzelnen Teile der Physik nicht die Rede sein kann.

H. WILLGROD.

WITZ, M. AIMÉ. **Cours supérieur de manipulations de physique.** Deuxième édition revue et augmentée. Paris 1897, Gauthier-Villars et Fils. 8<sup>o</sup>. XVIII u. 472 S.

Das Werk verfolgt denselben Zweck wie bei uns der bekannte „Kohlrausch“, doch unterscheidet es sich von ihm in mannigfacher Weise. Der mathematische Apparat ist ein geringerer und so ist besonders in Magnetismus und Elektrizität die Zahl der Versuchsreihen eine viel kleinere, daneben ist der Beschreibung der Apparate ein breiter Raum gewährt. Jede Versuchsreihe gliedert sich übersichtlich auch äusserlich getrennt in Theorie derselben, Beschreibung der zur Anwendung kommenden Apparate, des Versuchsverfahrens und Zahlenangabe der Resultate, die vielfach klassischen Beispielen entnommen sind. Den „cours de manipulations de physique“ der ersten Auflage hat der Herr Verfasser in der zweiten in einen cours élémentaire und einen cours supérieur zerlegt, von denen der erste 37 einfache Bestimmungen des Gewichtes, der Dichtigkeit, von Widerständen u. s. w. enthält, während der zweite uns vorliegende in 74 Nummern diejenigen

Versuche umfasst, die eine grössere Geschicklichkeit erfordern oder bei denen die Theorie schwieriger ist. Da die Darstellungsweise eine leicht verständliche und ausführliche ist, kann das Buch mit grossem Nutzen im physikalischen Praktikum gebraucht werden.

H. WILLGRÖD.

---

FLEMING, J. A. **Le laboratoire d'électricité.** Traduit de l'anglais sur la 2<sup>e</sup> édition et augmenté d'un appendice par J. L. ROUTIN. Paris 1898, Gauthier-Villars et Fils. 8<sup>o</sup>. 152 S. u. 3 Taf.

Bei der hervorragenden Bedeutung der Elektrotechnik in neuerer Zeit macht sich das Bedürfnis nach einer besonderen Anleitung zum praktischen Arbeiten in diesem Gebiete geltend. Für die grundlegenden Bestimmungen dient die Schrift Flemings, die uns hier in einer französischen Übersetzung vorliegt. Die Kenntnis des theoretischen Teiles der Elektrizitätslehre wird beim Gebrauche des Buches vorausgesetzt. In ihm werden unter anderem Bestimmungen der Intensität eines magnetischen Feldes, von Widerständen, Prüfung von Ampèremetern, Voltmetern, Bogenlampen und Kraftleistungen behandelt. In einem Anhang sind vom Übersetzer noch einige Methoden hinzugefügt und zwei graphische Korrektions tafeln gezeichnet. Den einzelnen Versuchsreihen ist ein Verzeichnis der anzuwendenden Apparate vorausgeschickt und ein Schema zur Eintragung der beobachteten bez. berechneten Grössen beigegeben.

H. WILLGRÖD.

---

ANDRADE, JULES. **Leçons de mécanique physique.** Paris 1898, Société d'éditions scientifiques. gr. 8<sup>o</sup>. IX u. 413 S.

Um die Mechanik „dem unnützen Trägheitsvermögen der Körper zu entziehen“, benutzt der Verfasser nach dem Vorgange von Reech (*Mécanique fondée sur la nature flexible et élastique des corps*) die Erfahrungsthat sache, dass ein vollkommen biegsamer und ausdehnbarer Faden um so länger wird, je grösser die darauf wirkende Kraft ist, und misst die Grösse der Kraft nach der Grösse der Verlängerung. Zur Definition der Masse dient der Satz: Stossen zwei Körper mit den Geschwindigkeiten  $v$  und  $v'$  (kurz vor dem Stosse) zusammen und sind  $v + \Delta v$ ,  $v' + \Delta v'$  ihre Geschwindigkeiten kurz nach dem Stosse, so giebt es zwei positive Zahlen  $m$  und  $m'$ , welche die Gleichung  $mv + m'v' = 0$  erfüllen.  $m$  und  $m'$  sind die Massen der Körper. Nachdem im ersten Teile die „klassische Schule“ der Mechanik (Kepler, Galiläi, Newton, Gauss u. a.) und der Gegensatz zu den Anschauungen des Verfassers dargestellt ist, werden im zweiten Deformationen bez. Dilatation, Elastizität, Vibration, Wirbelfäden und im letzten die Theorie gerader Balken auf Stützpunkten behandelt. Einige Noten, unter anderem auch über Statik im nicht-euklidischen Raum machen den Schluss.

Das letzte Kapitel ist denjenigen Systemen gewidmet, für welche eine der Familien aus Flächen konstanten Krümmungsmasses besteht.

H. WILLGRÖD.

REYE. *Die Geometrie der Lage* (Vorträge). Erste Abteilung mit 90 Abbildungen im Text. Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig 1899, Baumgärtners Buchhandlung.

Reyes Vorlesungen über die Geometrie der Lage schliessen sich in würdiger Weise den älteren klassischen Schriften über synthetische Geometrie an und wir sehen daher mit Vergnügen dieses Buch wie einen alten, lieben Bekannten in vierter Auflage wiederkehren. Wer von Staudts Werk durchgearbeitet hat, weiss das Verdienst zu schätzen, welches sich vor einem Menschenalter Reye erwarb als er in gefälliger und eleganter Form und mit weiser Beschränkung das vortrug, was bei von Staudt oft schwer und dunkel erscheint. Seitdem ist das Wissensgebiet gewachsen und das Gewissen für eine strenge Beweisführung ist geschärft worden. Dem entspricht es, dass die vierte Auflage des Buches den doppelten Umfang haben wird wie die erste. Auch die wissenschaftliche Begründung hat sich vertieft.

Da das Buch in den älteren Auflagen bekannt und in jedermanns Hand ist, begnügen wir uns auf das hinzuweisen, was in der ersten Abteilung dieser vierten Auflage im Vergleiche mit der dritten Auflage neu hinzugekommen ist.

Vermehrt sind die Litteraturangaben, so dass der Leser aus denselben im grossen ganzen den Anschluss an die älteren Hauptwerke dieser Disziplin finden kann. Auch sind bei den Erklärungen öfter als früher die Ausdrücke, welche andere Autoren gebrauchen, nebenbei erwähnt.

Die ersten elf Vorträge sind — bis auf einige kleinere Einschaltungen — denen der dritten Auflage gleich. Im zwölften Vortrage werden die Involutionen und ihre metrischen Beziehungen zusammengestellt. Letztere sind in etwas anderer Weise behandelt wie früher und dabei ist die Rechtwinkelinvolution an die Spitze gestellt.

Ganz neu ist der 14., 15. und 16. Vortrag. Der 14. behandelt konfokale Kegelschnitte. In diesem Kapitel werden die von Chasles (1843) veröffentlichten Sätze über ähnliche oder — wie Reye sehr treffend sagt — über „vergleichbare“ Kegelschnittbogen bewiesen. Im 15. Abschnitte werden die Normalen und Krümmungskreise der Kegelschnitte in synthetischer Weise besprochen. Im 16. Vortrage wird das Büschel von Kegelschnitten untersucht, welches dieselbe Durchmesserinvolution hat (konzentrische homothetische Kegelschnitte). Parabeln werden als homothetisch definiert, wenn sie koaxial sind und wenn jeder Durchmesser in Bezug auf alle Parabeln denselben Pol hat. Für solche Parabeln wird gezeigt, dass sie kongruent sind. Die letzten drei Vorträge des Buches sind denen der dritten Auflage gleich.

Die Zahl der Konstruktionsaufgaben und Lehrsätze ist von 223 auf 247 gestiegen. In Nr. 88 sind eine Reihe von Kurven dritter und vierter Ordnung zusammengestellt, welche schon den Alten bekannt waren und welche durch Inversion aus einem Kegelschnitte abgeleitet werden können. Die Sätze 133 und 134 weisen auf Begriffe hin, welche erst in der zweiten Abteilung des Buches behandelt werden. Neu sind die letzten Nummern

242—247. Werden die linearen Systeme und Gewebe von Kegeln zweiter Ordnung aus einem beliebigen Punkte des Raumes projiziert, so entstehen lineare Systeme und Gewebe von konzentrischen Kegeln zweiter Ordnung. Über diese werden in den erwähnten Schlussnummern einige besonders bemerkenswerte Sätze hervorgehoben.

Die Zahl der Figuren ist ebenfalls vermehrt worden. Immerhin sind deren noch nicht so viele, dass dem Leser das Zeichnen erspart wird. Und das ist gut so. Selbst zeichnen macht wissend in diesen Dingen — und es freut uns, dass der Autor an verschiedenen Stellen auf die Notwendigkeit des Konstruierens hinweist. Wir wünschen schliesslich, dass auch die neue Auflage der Reyeschen Vorträge in gleicher Weise wie die alten den geometrischen Sinn wecken und fördern und der zeichnenden Geometrie viele neue Freunde werben möge.

CHR. BEYEL.

FR. BUSSLER. **Die Elemente der mathematischen und der astronomischen Geographie.** Für die Prima höherer Lehranstalten. Dresden-Berlin 1897, L. Ehlermann. 71 S. M. 1. 50.

„Die Anordnung des Stoffes ist so getroffen, dass zunächst die Verhältnisse der Erde und die durch ihre Axendrehung bewirkte scheinbare Bewegung der Himmelskugel behandelt werden; hieran schliesst sich die Darstellung der astronomischen Koordinatensysteme und Zeitmaße. Ein Rückblick auf die historische Entwicklung der Astronomie führt auf den Gegensatz des Kopernikanischen zum Ptolemäischen System; in dem ersteren, durch Keplers Gesetze vervollständigt und durch Newtons Gravitationsgesetz erklärt, wird die richtige Darstellung der Bewegungen der Himmelskörper erkannt und damit das Fundament für die moderne Astronomie gefunden. Es folgt die Beschreibung unseres Sonnensystems, also des Zentralkörpers selbst, seiner Planeten mit ihren Monden, der Kometen und Meteorite; den Schluss bildet die Erörterung des Wenigen, was wir einigermaßen sicher über die Fixsternwelt wissen.“

„Eine Anzahl von Aufgaben mit kurz angedeuteter Lösung ist an geeigneter Stelle in den Text eingeflochten, um ein vollständig klares Verständnis zu gewinnen, und historische Notizen, die bis zur Gegenwart reichen, sind vielfach beigelegt.“

Den Fachgenossen, welche ihren Schülern die astronomischen Grundbegriffe und eine gedrängte Übersicht über das Wissenswerte aus der Astronomie mitgeben wollen, kann das Buch empfohlen werden.

E. JAHNKE.

A. RICHTER. **Arithmetische Aufgaben** für Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungen. Leipzig 1898, B. G. Teubner. 149 S.

Die Ausarbeitung der Sammlung ist, wie der Verfasser im Vorwort mitteilt, auf Wunsch der Verlagsbuchhandlung unternommen worden, welche

„die Anwendungen der Mathematik auf die Verhältnisse des wirklichen Lebens und der thatsächlichen Naturvorgänge“ in den jetzt bestehenden Büchern nicht genügend berücksichtigt glaubt. Diese Anwendungen sind, wie üblich, der Geometrie, Physik, Chemie und mathematischen Geographie entnommen. Insofern die Sammlung auf diesen Gebieten neues Übungsmaterial heranschafft, ist ihr Wert durchaus anzuerkennen, und kann sie den Fachgenossen nur warm empfohlen werden. Wenn aber der Verfasser im Vorwort der Meinung Ausdruck geben will, als ob seine Sammlung die Anwendungen stärker berücksichtige als längst bestehende und wohl bewährte Sammlungen, so vermag Referent einer solchen Behauptung nicht völlig zuzustimmen. Andererseits ist darauf hinzuweisen, dass die rein algebraischen Aufgaben, an denen doch die Operationen und Methoden einzuüben sind, nicht überall (vergl. z. B. quadratische Gleichungen) in hinreichender Menge vorhanden sind, und ferner dass die Massenverteilung, wenn dieser Ausdruck erlaubt ist, eine recht ungleiche ist. Während sich in den Kapiteln über Gleichungen ersten und zweiten Grades ausreichendes Übungsmaterial vorfindet, sind u. a. die Kapitel über Zinseszinsrechnung und Gleichungen dritten Grades recht spärlich bedacht. Es darf wohl dem Wunsch Ausdruck gegeben werden, dass diesen Übelständen bei einer zweiten Auflage der, wie schon hervorgehoben, in vieler Hinsicht wertvollen Sammlung abgeholfen werde.

Die Resultate sind in einem besonderen Heft erschienen, das bei den Anwendungen zum Teil ausführliche Erläuterungen, auch Zeichnungen enthält; dasselbe ist nicht für Schüler bestimmt und wird nur an Lehrer gesandt.

E. JAHNKE.

**B. FÉAUX. Ebene Trigonometrie und elementare Stereometrie.** Siebente den Lehrplänen von 1892 entsprechend verbesserte Auflage, besorgt von F. BUSCH. Paderborn 1898, F. Schöningh. S. 1—98, 99—187. M. 1. 50.

Die neue Auflage des vorliegenden Buches ist durch eine eingehendere Behandlung der Trigonometrie des rechtwinkligen Dreiecks und einen vorbereitenden Lehrgang in der Körperlehre erweitert worden. Ausserdem ist nach dem Vorgange von Martus und Holzmüller eine Anleitung zum Zeichnen in der Parallelprojektion eingeschaltet worden.

Der erste Teil, welcher die ebene Trigonometrie behandelt, zeichnet sich durch grosse Übersichtlichkeit aus, die u. a. durch eine Reihe von Formeltabellen erzielt wird. Weiter verdient hervorgehoben zu werden, dass die einzelnen Fundamentalaufgaben je an einem Beispiel erläutert und die numerische Rechnung vollständig mitgeteilt wird. Besonders wertvoll ist die aus dem Lehrbuch von Lieber-Lühmann übernommene Tabelle von 36 vollständig berechneten schiefwinkligen Dreiecken zu Zahlenbeispielen für die Dreiecksaufgaben.

Nicht einverstanden ist Referent mit der Erörterung des allgemeinen Funktionsbegriffs, wie sie im ersten Paragraphen gegeben wird. Das Ver-

ständnis der Schüler für die trigonometrischen Funktionen dürfte wohl kaum Schaden leiden, wenn die daselbst aufgestellte Definition einer Funktion unterdrückt wird. Der erste Paragraph giebt noch Anlass zu dem zweiten Wunsche, dass die Ausdrucksweise an verschiedenen Stellen knapper gefasst werden möchte.

Gegenstand des zweiten Teiles ist die elementare Stereometrie. Hier verdienen volles Lob die Figuren, welche ausserordentlich anschaulich gezeichnet sind.

Das Buch kann den Fachgenossen warm empfohlen werden.

E. JAHNKE.

O. BÜCKLEN. **Lehrbuch der ebenen Trigonometrie** mit Beispielen und 280 Übungsaufgaben für höhere Lehranstalten und zum Selbstunterricht. Heilbronn a. N. 1897, Schröder. 122 S. M. 1. 50.

„Der Bestimmung des Buches entsprechend hat der Verfasser sein Hauptziel in stufenmässiger Entwicklung, klarer Darlegung, planmässiger Übung und übersichtlicher Anordnung gesucht“ und, wie sogleich hinzugefügt werden mag, auch gefunden. Es ist ein Büchlein entstanden, das in seiner Art ausgezeichnet genannt zu werden verdient.

Die goniometrischen Funktionen werden zuerst am rechtwinkligen Dreieck für spitze Winkel erklärt und durch Berechnung dieses und des gleichschenkligen Dreiecks, des regelmässigen Vielecks eingeübt; dann erst wird zu der allgemeinen Auffassung der Funktionen geschritten. Bei der Ableitung der ersten Beziehung am schiefwinkligen Dreieck geht der Verfasser von der Figur aus; um die übrigen zu gewinnen, wird entweder der geometrische oder der analytische Weg eingeschlagen, je nachdem der abzuleitende Satz mehr jenen oder diesen Charakter trägt.

Bemerkenswert ist ferner, dass die trigonometrische Analysis, sowie die graphische Lösung goniometrischer Gleichungen genügende Berücksichtigung gefunden hat.

An Übungsstoff hat der Verfasser soviel gegeben, als zur Einübung des Lehrstoffes notwendig ist, ohne etwa die Benutzung grösserer Aufgabensammlungen seitens des Lehrers überflüssig machen zu wollen. Hierbei mag noch die zweckmässige Anordnung der Rechnung und die Angabe von Rechenvorteilen hervorgehoben werden.

Endlich möchte Referent noch die Knappheit im Ausdruck lobend erwähnen, welche das Büchlein allenthalben aufweist. Gleich die ersten Kapitel legen hiervon Zeugnis ab. Referent kann dem Verfasser darin nur zustimmen, dass er sich entschlossen hat, Neubildungen, wie sie schon vielfach im Gebrauch sind, wie Inkreis, Ankreis, Gegenkathete, Ankathete u. s. w., aufzunehmen, da sie die für den Unterricht so wünschenswerte Knappheit im Ausdruck wesentlich zu steigern gestatten.

Das Büchlein dürfte sich ganz besonders für Gymnasien und Realschulen sowie auch zum Selbstunterricht eignen.

E. JAHNKE.

**F. v. LÜHMANN, Übungsbuch für den Unterricht in der Goniometrie und der ebenen Trigonometrie.** Berlin, Simion. 81 S. M. 1.60.

Der als Herausgeber der wertvollen Sammlung trigonometrischer Aufgaben bekannte Verfasser bietet, was die trigonometrischen Aufgaben des vorliegenden Buches anbetrifft, einen kleinen Auszug aus den betreffenden Abschnitten der genannten grösseren Sammlung. Dieselben sind indessen nicht, wie dort, sachlich, sondern methodisch geordnet, sodass die Aufgaben derselben Gruppe an die Leistungsfähigkeit der Schüler ungefähr gleiche Anforderungen stellen.

In Betreff der Goniometrie enthält das Buch für jede Definition, jede Regel, jede Formel genügenden Übungsstoff. Doch ist zu beachten, wie der Verfasser im Vorwort richtig ausführt, dass die Goniometrie im Schulunterricht nur Mittel zum Zweck sein darf, dass daher für sie eine ausreichende Anzahl recht leichter Übungsaufgaben genügt.

Hervorgehoben zu werden verdient das Kapitel der Aufgaben, die auf quadratische Gleichungen führen. Hier schlägt der Verfasser zur Lösung eine goniometrische Behandlung vor, welche durch Einführung eines Hilfswinkels die Gleichung in eine reciproke verwandelt. Dieses Verfahren bietet in der That häufig den Vorteil, dass der Schüler weniger Logarithmen aufzuschlagen braucht, als wenn er die algebraische Lösung logarithmisch berechnen will.

Am bemerkenswertesten scheint dem Referenten der letzte Abschnitt des Buches zu sein. Er enthält eine Anleitung für die Determination trigonometrischer Aufgaben. Es ist dies ein Gegenstand, für den bisher nur wenig Übungsmaterial vorliegt, wohl aus dem Grunde, weil die Determination meistens auf bedeutende Schwierigkeiten führt. Und doch ist dieselbe ein ausgezeichnetes Hilfsmittel, um die Schüler zum logischen Denken anzulernen, bezw. ihre Denkfähigkeit zu erproben. E. JAHNKE.

**H. FENKNER, Arithmetische Aufgaben.** Unter besonderer Berücksichtigung von Anwendungen aus dem Gebiete der Geometrie, Physik und Chemie. Ausgabe A. Vornehmlich für den Gebrauch in Gymnasien, Realgymnasien und Ober-Realschulen. Teil I: Pensum der Unter-Tertia, Ober-Tertia und Untersekunda. Dritte, mit besonderer Berücksichtigung der Anforderungen bei der Abschlussprüfung umgearbeitete Auflage. Berlin 1898, O. Salle. M. 2.20.

Die erste Auflage dieser Sammlung ist bereits an dieser Stelle besprochen worden unter Anerkennung der Besonderheiten, welche sie vor den meisten der damals vorliegenden Sammlungen auszeichneten. Sie erschien nämlich zu einer Zeit, wo die für die Tertia und Sekunda berechneten Sammlungen nur wenige Anwendungen auf Geometrie und Physik brachten. Seitdem und seit dem Erscheinen der wertvollen Wrobelschen Sammlung ist eine Sturmflut von Aufgabensammlungen hereingebrochen,

die sich in der Verwertung neuer Anwendungsgebiete zu überbieten suchen.

Die dritte Auflage unterscheidet sich von der ersten dadurch, dass infolge der neuen Lehrpläne die Abschnitte über die arithmetischen und geometrischen Reihen sowie Zinseszins- und Rentenrechnung fortgefallen sind. Dafür sind jedoch fast alle übrigen Kapitel um eine grössere Anzahl von Aufgaben bereichert worden. Im besonderen haben die Abschnitte über die quadratischen Gleichungen einen weiteren Zuwachs an solchen Aufgaben erfahren, die für die Abschlussprüfung geeignet sein dürften.

E. JAHNKE.

## Bibliographie.

### Periodische Schriften.

- American Journal of Mathematics. Vol. XXI, Nr. 4. Baltimore, John Hopkins University. Vol. XXI complete M. 22.
- Annalen der kaiserl. Universitäts-Sternwarte in Strassburg. 2. Bd. Karlsruhe, Braun. M. 20.
- Annals of Mathematics. Vol. XII, Nr. 6. Charlottesville Va., University of Virginia. Vol. XII complete M. 10.
- Berichte der sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-physikal. Klasse. Mathem. Tl. 1899. III. und IV. Leipzig, B. G. Teubner. M. 3. 20.
- Ephemeriden, astronomisch-nautische, für das Jahr 1901. Über Veranlassung der Marinesektion des kaiserl. und königl. Reichs-Kriegsministeriums herausgegeben von dem kaiserl. königl. astronomisch-meteorolog. Observatorium in Triest. 14. Jahrg. Triest, Schimpff. kart. M. 2. 70.
- Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1898. Dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 54. Jahrg. 1. Abt. Physik der Materie. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 26.
- Jahrbuch, nautisches, oder Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1902 zur Bestimmung der Zeit, Länge und Breite zur See nach astronomischen Beobachtungen. Herausgegeben vom Reichsamt des Innern. Berlin, Heymann. kart. M. 1. 50.
- Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 28. Bd. Jahrg. 1897. 2. Heft. Berlin, Reimer. M. 6.
- Jahresbericht des Centralbureaus für Meteorologie und Hydrographie im Grossherzogtum Baden, mit den Ergebnissen d. meteorologischen Beobachtungen und der Wasserstandsanzzeichnungen am Rhein und an seinen grösseren Nebenflüssen für das Jahr 1898. Karlsruhe, Braun. M. 6.
- Jahresbericht der deutschen Mathematikervereinigung. 7. Bd. 2. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. M. 8.
- Mathematical Questions and Solutions from the Educational Times. Ed. by D. BIDDLE. Vol. 71. London, Hodgson. Sh. 6. 6.
- Opgaven, wiskundige, met de oplossingen door de leden van het Wiskundig Genootschap. Deel VII stuk 7 en VIII stuk 1. Amsterdam.

- Sitzungsberichte, Wiener. Mathem.-naturw. Klasse I. Abt. 107. Bd. 8—10. Heft.  
Wien, Gerolds Sohn. M. 9.
- Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 34. Jahrg. 2. Heft. Leipzig,  
Engelmann. M. 2.
- Dasselbe. I. Abt. 108. Bd. 1.—4. Heft. Ebenda. M. 3. 40.
- Dasselbe. Abt. IIa. 108. Bd. 1. und 2. Heft. Ebenda. M. 3. 10.
- Dasselbe. Abt. IIb. 108. Bd. 1.—3. Heft. Ebenda. M. 1. 90.
- Zeitschrift, physikalische. Herausgegeben von E. RIECKE und H. TH. SIMON. 1. Jahrg.  
Oktober 1899 bis September 1900. 52 Nummern. Leipzig, Hirzel.  
Vierteljährlich M. 5.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

#### Unterricht.

- BERTELLI, TIMOTEO, Ricerche storiche sulla pila di Volta. Monza, Artigianelli.  
(Estratto.)
- BOUCHE-LECLERQ, A., L'astrologie grecque. Paris. Fr. 20.
- BRÄUNMÜHL, A. v., Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie. 1. Teil. Von  
den ältesten Zeiten bis z. Erfindung d. Logarithmen. Leipzig, B. G. Teubner.  
M. 9.
- CONTINI, D. ATTILIO, Da Volta a Marconi. Conferenza. Messina, Trimarchi.
- GALILEI GALILEO, Delle meccaniche lette in Padova l'anno 1594, per la prima  
volta pubblicate ed illustrate da Antonio Favaro. Venezia, Ferrari. (Estr.)
- GAUSS, CARL FRIEDR., und BOLYAI, WOLFG., Briefwechsel. Herausgegeben von  
FRZ. SCHMIDT und PAUL STÄCKEL. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 16.
- GUNDERMANN, GHOLD, Die Zahlzeichen. Programm. Giessen, Ricker. M. 2.
- KOHLRAUSCH, F., Gustav Wiedemann. Nachruf. (Aus: Verhandlungen d. deutschen  
physikal. Gesellsch.) Leipzig, Barth. M. —. 60.
- LACOUR, P., Historisk Matematik. 2te, gennemsette udgave. (In 10 hefter).  
Kjöbenhavn. Heft 6—8. M. 2. 40.
- LALANDE, P. A., Quid de mathematica vel rationali vel naturali senserit Baconus  
Verulamius. Parisiis. Fr. 7. 50.
- LAMPE, E., Die reine Mathematik in den Jahren 1884—1899. Nebst Aktenstücken  
zum Leben von Siegfried Aronhold, weil. Professor d. Mathematik (1860 bis  
1883) an d. königl. technischen Hochschule zu Berlin. Mit seinem Bildnisse.  
Ein Gedenkblatt z. 100jähr. Jubelfeier der königl. technischen Hochschule zu  
Berlin. Berlin, Ernst & Sohn. M. 1. 60.
- MARTINI, TITO, Intorno alle scoperte di Alessandro Volta. Discorso. (Estr.)  
Venezia, Ferrari.
- MORGAN, A. DE, On the Study and Difficulties of Mathematics. New edition.  
Chicago, The Open Court Publishing Co. § 1. 25.
- PAPPERITZ, ERWIN, Die Mathematik an d. deutschen techn. Hochschulen. Beitrag  
zur Beurteilung einer schwebenden Frage des höheren Unterrichtswesens.  
Leipzig, Veit & Co. M. 1. 50.
- RIGHI, AUG., Volta e la pila. Lettura (Estr.). Como, Ostinelli di Bertolini  
Nani e Co.

#### Reine Mathematik.

- BIANCHI, LUIGI, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Übersetzt von MAX LUKAT.  
3. (Schluss-)Liefg. Leipzig, B. G. Teubner. M. 4. (kompl. M. 22. 60.)
- BRIGGS, W., Second Stage Mathematics. 2nd ed. London, Clive. Sh. 3. 6.
- BURNSIDE, W. S., and PANTON, A. W., Theory of Equations. Vol. 1. 4. edit.  
London, Longmans. Sh. 2. 6.

- DETER, JOHNS., Mathematisches Formelbuch für höhere Unterrichtsanstalten. Neu herausgegeben von ARNDT, ERDM. 4. Aufl. Berlin, Rockenstein. M. — 90, geb. M. 1. 25.
- Repetitorium der Differential- und Integralrechnung. 3. Aufl. Ebenda. M. 1. 60, geb. M. 2.
- Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. 1. Teil. Reine Mathematik. Herausgegeben von H. BURKHARDT und W. FR. MEYER. 2. Bd. Analysis. Redigiert von H. BURKHARDT. 1. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. M. 4. 80.
- Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften. I. Bd. 1. Teil 3. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. M. 3. 80.
- EICHORN, A., Sammlung von mathematischen Formeln u. Regeln zum Gebrauche an höheren Lehranstalten. Lüneburg, Herold & Wahlstab. M. —. 50.
- FATTOR, L., Sulla serie di Fibonacci: Nota. Venezia, Visentini.
- Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmal in Göttingen. (D. HILBERT: Grundlagen der Geometrie. — E. WIECHERT: Grundlagen der Elektrodynamik.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 6.
- FRANSEN, A. E., Om Dirichlets problem for eqvationen  $\Delta u = 0$  och liknande uppgifter for allmännare eqvationer. Upsala. M. 2.
- GAUSS, F. G., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Handtafel. Ster.-Dr. 3. Aufl. Halle, Strien. M. —. 60.
- Dasselbe für Dezimalteilung des Quadranten. 2. Aufl. Ebenda. M. —. 80.
- GERLACH, RUD., Die Metrik in projektivischen Koordinaten. Dissertation. Zürich, Rascher. M. 2. 60.
- GOERING, WILH., Die Auffindung der rein geometrischen Quadratur des Kreises und die Teilung jedes beliebigen Winkels und Kreises in eine beliebige Anzahl gleicher Teile. Dresden, Gewerbebuchhandlung. M. 1.
- GOETTLER, JOH., Untersuchungen über den allgemeinen Raumconnex. Programm. München, Kellerer. M. 1.
- HAAS, AUG., Lehrbuch der Integralrechnung. 2. Tl. Anwendung der bestimmten Integrale auf Quadratur, Rektifikation, Komplanation und Kubatur, sowie Aufgaben aus der Mechanik und Technik. Mit 246 vollständig gelösten Aufgaben nebst ausführl. Formelverzeichnis. (Kleyers Encyklopädie.) Stuttgart, Maier. M. 9.
- D. HILBERT, Grundlagen der Geometrie. Siehe unter „Festschrift“.
- HOCHHEIM, FRZ., Über eine Art der Erzeugung der Kurven dritter Klasse mit einer Doppeltangente. Leipzig, B. G. Teubner. M. 1. 60.
- HOLZMÜLLER, GUST., Elemente der Stereometrie. 1. Teil. Die Lehrsätze und Konstruktionen (Sammlung Schubert, IV). Leipzig, Göschen. geb. M. 5. 40.
- JOHNSTON, W. J., An elementary treatise on Analytical Geometry. With numerous examples. London, Clarendon Press. Sh. 6.
- KLEYER, A., Aufgabensammlung. 1395—1398. Heft. Stuttgart, Maier. à M. —. 25.
- KRAHE, A., Apuntes de algebra superior, adaptados à los programas de las escuelas especiales de ingenieros por J. Salmeron y Garcia. Madrid. Fr. 12. 50.
- KRYLOFF, A. N., Lehrbuch der sphärischen Trigonometrie für Navigationsschulen (russisch). St. Petersburg. M. 2.
- MANSION, P., Einleitung in die Theorie der Determinanten für Gymnasien und Realschulen. Aus der dritten französischen Auflage übersetzt. Leipzig, B. G. Teubner. M. 1.
- MININ, A. P., Aufgabensammlung aus der Differential- und Integralrechnung (russisch). St. Petersburg. M. 2.
- MORALE, MICH., La rigata razionale d'ordine  $n$  dello spazio a quattro dimensioni e sua rigata trasversale, con particolare considerazione al caso di  $n = 5$ . Palermo, tip. Matematica.

- MORALE, MICH., Tre metodi per la costruzione di superficie rigate nello spazio a 4 dimensioni. Palermo, tip. Matematica.
- MÜLLER, HUB., Die Elemente der ebenen Trigonometrie, mit einer Sammlung von Aufgaben und deren Lösungen. 3. Aufl. Metz, Scriba.  
M. — 80, geb. M. 1. 20.
- PASCAL, ERN., Repertorio di matematiche superiori: definizioni-formole, teoremi, cenni bibliografici. II (Geometria). Milano, Ulrico Hoepli.
- PUND, OTTO, Algebra mit Einschluss der elementaren Zahlentheorie. (Sammlung Schubert, VI.) Leipzig, Göschen. geb. M. 4. 40.
- RIEMANN, BERNH., Elliptische Funktionen. Vorlesungen. Mit Zusätzen herausgegeben von HERM. STAHL. Leipzig, B. G. Teubner. M. 5. 60.
- ROHRBACH, C., Vierstellige logarithmisch-trigonometrische Tafeln, nebst einigen physikal. und astronom. Tafeln, für den Gebrauch an höheren Schulen zusammengestellt. 2. Aufl. Gotha, Thienemann. kart. M. — 60.
- SAINT-LOUP, Note sur les carrés magiques. Besançon, Jacquin.
- SERRET, J.-A., Lehrbuch der Differential- und Integral-Rechnung. Deutsch von AXEL HARNACK. 2. Aufl. Von GEO. BOHLMANN. 2. Bd. Integralrechnung. Leipzig, B. G. Teubner. M. 8. (kompl. M. 18.)
- SERVANT, M., Essai sur les séries divergentes (thèse). Paris, Gauthier-Villars.
- SICKENBERGER, ADF., Leitfaden der elementaren Mathematik. 2. und 3. Teil. München, Ackermann.  
2. Planimetrie. 4. Aufl. M. 1. 50, kart. M. 1. 65.  
3. Stereometrie. Trigonometrie. 3. Aufl. M. 1. 20, kart. M. 1. 35.
- SCHAFOSCHNIKOFF, N. A., Lehrgang der ebenen Trigonometrie nebst einer Sammlung trigonometrischer Aufgaben (russisch). 7. Aufl. Moskau. M. 2. 70.
- SCHUBERT, HERM., Elementare Arithmetik und Algebra. (Sammlung Schubert, I.) Leipzig, Göschen. geb. M. 2. 80.
- SCHULTZ, E., Leitfaden der Planimetrie für gewerbliche Lehranstalten. 1. Teil. 2. Aufl. Essen, Bädeker. geb. M. — 75.
- SCHUSTER, M., Geometrische Aufgaben. Ein Lehr- und Übungsbuch zum Gebrauch beim Unterricht an höheren Schulen Ausgabe A. Für Vollanstalten. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 2.
- SONNET, H., et FRONTEBA, G., Elements de géometrie analytique. 9. éd. Paris, Hachette et Co. Fr. 8.
- SPITZ, CARL, Lehrbuch der ebenen Geometrie, nebst einer Samml. von 800 Übungsaufgaben zum Gebrauch an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. (Hierzu eine Beigabe: Erläuternde Tafel mit erklärend. Text von K. TRAUB.) 10. Aufl. Leipzig, Winter. M. 4. 50.
- STOLZ, OTTO, Grundzüge der Differential- und Integralrechnung. 3. Teil. Die Lehre von den Doppelintegralen. Eine Ergänzung zum ersten Teile des Werkes. Leipzig, B. G. Teubner. M. 8.
- STRÖHMFELD, GUST., Universal-Multiplikationstafel für Multiplikationen mit mehrstelligen Faktoren, zugleich benützlich für Division mit zweistelligem Divisor und vielstelligem Dividendus. Ravensburg, Maier. M. 1. 50.
- WILSON, F. N., Some mathematical curves and their graphical construction. (3. part of Theoretical and practical graphics.) New York, Macmillan. § 1. 50.

### Angewandte Mathematik.

- APPEL, P., Les mouvements de roulement en dynamique. Avec deux notes de M. HADAMARD. Paris, Carré et Naud. Fr. 2.
- BOUSSINESQ, J., Aperçu sur la théorie de la bicyclette. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 1.
- Complément à une étude récente concernant la théorie de la bicyclette. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 1.

- COFFIN, J. H. C., Navigation and nautical astronomy. 7th ed. New York, Van Nostrand & Co. Cloth \$ 3. 50.
- CZUBER, EMAN., Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. Bericht. (Jahresbericht der deutschen Mathematikervereingung, 7. Bd 2. Heft.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 8.
- DOMOGAROFF, A., Elemente der Mechanik. 2. Teil. Kinematik (russisch). St. Petersburg.
- Fixpunkte, die, des Schweizerischen Präzisionsnivelements. Les repères du nivellement de précision de la Suisse. Herausgegeben durch das eidgenöss. topograph. Bureau. 9. Lieferung. Bern, Schmidt & Francke. M. 3. 20.
- GERLAND, ERNST, Kurzer Abriss der darstellenden Geometrie zum Gebrauche in Vorlesungen, beim Unterricht und zum Selbststudium. Leipzig, Engelmann. kart. M. 4.
- Handwörterbuch der Astronomie. 18. Lieferung. Breslau, Trewendt. M. 3. 60.
- HARRISON, JOSEPH, and BAXANDALL, G. A., Practical Plane and Solid Geometry for advanced Students, including Graphic Statics. London, Macmillan. Sh. 4. 6.
- JENSEN, J. A. D., Grundrids af laeren om ebbe og flod. Kjöbenhavn. M. 1. 20.
- JORDAN, W., Hilfsstafeln für Tachymetrie. 2. Aufl. Stuttgart, Metzler. M. 8.
- KLINKERFUES, W., Theoretische Astronomie. 2. Aufl. Von H. BUCHHOLZ. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 34, geb. M. 36.
- LAUSSEDAT, A., Recherches sur les instruments, les méthodes et le dessin topographiques. (En 2 volumes.) Vol. I: Aperçu historique sur les instruments et les méthodes; la topographie dans tous les temps. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 15.
- MIDDLETON, REGINALD E., and CHADWICK, OSBERT. A treatise on Surveying. In 2 parts. Part 1. London, Spon. Sh. 3. 6.
- MÜLLER, CARL HEINR., Der logarithmische Rechenstab. Stabrechnen für die Oberklassen höherer Schulen. Programm. Frankfurt a. M., Auffahrt. M. 1.
- MÜLLER, REINHOLD, Leitfaden für die Vorlesungen über darstellende Geometrie an der herzogl. technischen Hochschule zu Braunschweig. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 2. 50.
- PERRY, J., The steam engine and gas and oil engines; a book for the use of students who have time to make experiments and calculations. London, Macmillan. Sh. 7. 6.
- PIGNATARI, GIACINTO, Piani ed ellissi centrali nei sistemi di forma invariabile. Napoli, Gennaro M. Priore.
- POINCARÉ, H., Cinématique et mécanismes; potentiel et mécanique des fluides. Cours professé à la Sorbonne, rédigé par A. GUILLET. Paris, Carré et Naud.
- PORETZKY, P., Sept lois fondamentales de la logique mathématique. Kazan. M. 3. 50.
- POTERIN DU MOTEL, H., Théorie des assurances sur la vie. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 25.
- PROCHASKA, CARL, Praktische Anleitung z. Durchführung von Gebietsvermessungen und Terrainaufnahmen bei Anwendung eines tachymetrischen Aufnahmeverfahrens. Wien, Spielhagen & Schurig. kart. M. 4. 40.
- RENZ, F., Positionen der Jupitertrabanten. Nach photographischen Aufnahmen berechnet. 1. Teil. Oppositionen 1891 1895. (Aus: Mémoires de l'académie imp. des sciences de St. Pétersbourg.) Leipzig, Voss. M. 9.
- ROBINSON, J. L., First book in dynamics. London, Longmans. Sh. 2.
- — First book in statics. London, Longmans. Sh. 2.
- — First book in statics, with examples. London, Longmans. Sh. 3.
- SCHILLING, FR., Über neue kinematische Modelle sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyklischen Kurven. Halle, Schilling. M. 1. 20.

- SCHMEHL, CHR., Die Elemente der darstellenden Geometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Zwei Teile. Giessen, Roth. à M. 2, geb. à M. 2.50, in einem Band M. 4, geb. M. 4.60.
- SCHUBERT, FRZ., Die darstellende Geometrie an maschinentechnischen Lehranstalten, Gewerbe- und Fachschulen. 2. Teil. Die darstellende Geometrie, einschliesslich der Elemente der Projektionslehre, Schattenlehre, Axonometrie und Perspektive. (Stereometrisches Linearzeichnen.) Mittweida, Polyt. Buchhandlung. geb. M. 5.50.
- SCHÜRMAN, F., Kleine praktische Geometrie. 16. Aufl. Moers, Spaarmann. M. 1.58.
- STECHELT, CARL, Die Vorausberechnung der Sonnenfinsternisse und ihre Verwertung zur Längenbestimmung. (Aus: Archiv der deutschen Seewarte.) Hamburg, Friederichsen & Co. M. 3.50.
- STRUVE, HERM., Beobachtungen der Marstrabanten in Washington, Pulkowa und Lick-Observatory. (Aus: Mémoires de l'acad. imp. des sciences de St. Pétersbourg.) Leipzig, Voss. M. 4.
- TINSLEY, G. W., The mechanics of a cyclone. Columbus, Ind. \$ — 25.
- VELTMANN, W., und KOLL, OTTO, Formeln der niederen und höheren Mathematik sowie für die Teilung der Grundstücke und für Tracierungsarbeiten. Zum Gebrauch beim geodätischen Studium und in der geodätischen Praxis. 3. Aufl. Bonn, Strauss. geb. M. 4.
- VODUČEK, M., Neue Theorie der Mondbewegung. Programm. Laibach, Fischer. M. 1.50.
- VOGLER, CH. AUG., Geodätische Übungen für Landmesser und Ingenieure. 2. Aufl. 1. Teil. Feldübungen. Berlin, Parey. geb. M. 9.
- WARTH, O., Graphische Tabellen zur Bestimmung der Querschnitte bei Holz- und Eisenkonstruktionen des Hochbaues. Leipzig, Gebhardt. geb. M. 4.
- WENZELY, J., Lehrbuch der kaufmännischen Arithmetik. 4. Aufl. II. Teil. Leipzig, Renger. M. 2, geb. M. 2.30.
- ZEUNER, G., Vorlesungen über Theorie der Turbinen, Ventilatoren und Centrifugalpumpen, mit vorbereitenden Untersuchungen aus der technischen Hydraulik. Leipzig, Felix. M. 10.

### Physik und Meteorologie.

- Beobachtungen aus dem magnetischen Observatorium der kaiserl. Marine in Wilhelmshaven. 5. Teil. Stündliche Variations-Beobachtungen d. Horizontal-Intensität während der Jahre 1889—1895. Nebst den Bestimmungen der Inklination während derselben Zeit. Berlin, Mittler & Sohn. M. 5.
- BRYK, ERNST, Kurzes Repetitorium der Physik (Experimentalphysik). (Breitenstein's Repetitorium Nr. 35.) 3. Aufl. Leipzig, Barth. M. 1.80.
- BÜNGER, E., Was muss man von der Elektrizität wissen? Berlin, Steinitz. M. 1.
- BUBBURY, S. H., A treatise on the kinetic theory of gases. London, Clay. Cloth Sh. 8.
- CEDERBOM, J. E., Problemer till mekaniske värmeläran jämte deres uträkning. Stockholm. M. 6.
- CHAPPUIS, J., et BERGET, A., Leçons de physique générale. (En 3 volumes.) Vol. II: Électricité et magnétisme. 2<sup>e</sup> édition, entièrement refondue. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 13.
- CHWOLSON, O. D., Lehrbuch der Physik. Bd. 3. Wärme. (Russisch). St. Petersburg. M. 15.
- GÉRARD, E., Leçons sur l'électricité. Tome 1. 6. édit. Paris, Gauthier-Villars Fr. 12.
- GRAETZ, L., Die Elektrizität und ihre Anwendungen. 8. Aufl. (Doppelauf.) Stuttgart, Engelhorn. M. 7, geb. M. 8.

- HAUGHTON, S., *Manual of optics*. New edition, enlarged by J. Warren. London. Cloth Sh. 2. 6.
- HOLMAN, S. W., *Matter, energy, force and work. A plain presentation of fundamental physical concepts and of the vortex-atom and other theories*. New York, Macmillan Co. Cloth \$ 2. 50.
- JAMIN, J., *Cours de physique de l'École polytechnique. Deuxième supplément par M. BOUTY: Progrès de l'électricité: oscillations hertziennes, rayons cathodiques et rayons X*. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 3. 50.
- LESS, EMIL, *Die wissenschaftlichen Grundlagen von Wetterprognosen für kurze und solche für etwas längere Zeiträume. Antrittsvorlesung. (Aus: Das Wetter.)* Berlin, Salle. M. 1.
- MÖLLER, M., *Witterungskalender. Teil II/III. Erläuterungen*. Braunschweig, Limbach. M. 2.
- PAULSEN, A., *Nautisk Meteorologi til brug for Navigationsskoler. 2. forandrede udgave*. Kjöbenhavn. M. 1. 80.
- SCHOENTJES, H., *Cours de physique expérimentales de l'Université de Gand. 2<sup>e</sup> édition. Partie II: Chaleur, magnétisme, électricité, lumière et chaleur rayonnante*. Paris. Fr. 10.
- STEINMETZ, CHARLES PROTEUS, *Theorie und Berechnung der Wechselstromerscheinungen. Deutsche Ausgabe. 1. Hälfte*. Berlin, Reuther & Reichard. M. 4.
- SUTER, W. N., *Handbook of Optics*. London, Macmillan. Sh. 5.
- TURPAIN, A., *Recherches expérimentales sur les oscillations électriques*. Paris, Hermann. Fr. 6.
- WEINHOLD, F., *Physikalische Demonstrationen. Anleitung zum Experimentieren im Unterricht an Gymnasien, Realgymnasien, Realschulen und Gewerbeschulen. 3. Aufl.* Leipzig, Quandt & Händel. M. 9.
- WIECHERT, E., *Grundlagen der Elektrodynamik. Siehe unter „Reine Mathematik, Festschrift.“*
- WIESENGRUND, BERNH., *Die Elektrizität. Ihre Erzeugung, prakt. Verwendung und Messung. 4. Aufl. Teilweise bearbeitet von RUSSENER*. Frankfurt a. M., Bechhold. M. 1.
- WITZ, A., *Thermodynamique, à l'usage des ingénieurs. 2<sup>e</sup> éd.* Paris, Gauthier-Villars. Fr. 2. 50.
- WÜLLNER, ADPH., *Lehrbuch der Experimentalphysik. 5. Aufl. 4. Bd. Die Lehre von der Strahlung. 2. Halbbd.* Leipzig, B. G. Teubner. M. 7.

# Historisch-litterarische Abteilung.

---

## Ein Nachtrag zu meinem Aufsatz in der Festschrift zu Moritz Cantors 70. Geburtstage.

(Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Neuntes Heft.  
S. 41—63.)

Von

MAXIMILIAN CURTZE

in Thorn.

---

In meiner Abhandlung: „Der Tractatus quadrantis des Robertus Anglicus in deutscher Übersetzung aus dem Jahre 1477“ habe ich darauf hingewiesen, dass der Arbeit des Robertus noch ein Anhang cosmographischen Inhaltes angefügt ist, von welchem es mir damals unmöglich war das lateinische Original nachzuweisen. Dieses aufzufinden ist mir im Codex August. 76,1 der Herzoglichen Bibliothek zu Wolfenbüttel gelungen. Dort findet sich der lateinische Text des fraglichen Anhangs auf Blatt 42<sup>r</sup>, col. 2, Zeile 17 bis Blatt 45<sup>r</sup>, col. 2 unter dem Titel: „Tractatus de quantitibus terre et stellarum.“ Da dieser lateinische Text ebenfalls von Interesse sein dürfte, er liefert mehrfach Berichtigungen und Ergänzungen des deutschen Textes, lasse ich ihn hier nachfolgen mit einigen als Fussnoten gesetzten Bemerkungen. Er lautet also folgendermaßen:

Tractatus de quantitibus terre et stellarum  
et primo de terra.\*

42.

39. Ptholomeus et alii sapientes posuerunt corpus terre communem mensuram, qua metiebantur stellarum corpora, et posuerunt medietatem dyametri terre communem mensuram, qua stellarum ipsarum a centro terre longitudines mensurabant.

---

\* Die Paragraphenzahlen sind die der deutschen Übersetzung.

Hist. - litt. Abt. d. Zeitschr. f. Math. u. Phys. 45. Band. 1900. 2. u. 3. Heft.

42'1. 40. Fuit possibile mensurare dyametrum, cum declaratum sit, quod centrum spere terre est centrum celi. Ideo enim necesse est, ut sit rotunditas terre equedistans rotunditati celi. Cum ergo perreximus in superficie terre sub eodem meridiano, eunti quidem versus septentrionem addetur in elevatione poli ab horizonte; et eunti versus meridiem minuetur ab ea. Per hoc itaque invenimus quantitatem ambulationis nostre in terra, que fit proportionalis portioni unius gradus de rotunditate celi, si mensuraverimus spacium inter duo loca, quorum elevationes devient uno gradu. Cum enim multiplicaverimus illam quantitatem per 360, qui est numerus graduum celi, exhibit circulus dividens in duo media speram terre, et cum illum diviserimus per 3 et septimam, quod est proportio circumferentie ad dyametrum, quod exhibit, erit dyameter spere terre.

2. 41. Expertum est in diebus **Maymonis**,\* quod portio unius gradus de rotunditate terre continet quatuor milia cubitos geometricos, quorum quisque continet pedem unum et semis. Cum igitur multiplicaverimus portionem unius gradus in 360, quod est summa rotunditatis orbis, aggregabitur, quod rotunditas terre continet 20400; et cum hec rotunditas divisa fuerit per 3 et septimam, exhibit quantitas dyametri terre, que est 6500 miliaria fere.

De quantitate corporis Lune et Solis in aspectu  
secundum corpora eorum ad quantitatem ipsius  
terre.

43,1. 42. Ptholomeus ostendit de Luna, quod dyameter corporis eius, cum est in longitudine longiore suorum orbium, est equalis dyametro corporis Solis in aspectu; ostendit eciam, quod dyameter corporis Solis occupat de circulo 31 minuta et terciam partem unius minuti, id est viginti secunda fere. Deinde dicit, quod longitudo Solis a centro terre est 1210 per quantitatem, qua medietas terre est unum; et quod longitudo extremitatis pyramidis umbre a centro terre est 368 per illam quantitatem; et quod longitudo centri circuli brevis Lune a centro terre, cum fuerit idem centrum in auge sui circuli egressse cuspidis, est 59 illius quantitatis.

43. Dixit ergo Geber: ostensa est per hoc proportio cuiusque dyametrorum duorum luminarum ad dyametrum terre. Proportio igitur dyametri Lune ad dyametrum terre est proportio (unius) ad tria et duas quintas: proportio dyametri Solis ad dyametrum terre est proportio quinque et medii ad unum. Proportio vero dyametri Solis ad dyametrum Lune est proportio 18 et duorum quintarum et dimidii ad unum.\*\*

\* Hier ist also die richtige Form des Namens **Māmūn** überliefert.

\*\* Die im deutschen Texte verdorbene Stelle ist hier richtig überliefert. Es ist also, wenn wir die Länge der drei Durchmesser bezüglich durch *L*, *E*, *S* bezeichnen:

$$L : E = 1 : 3\frac{2}{5} = 5 : 17,$$

44. Dixit etiam Geber, quod ex hiis ar|guitur, quod proportio 2 |  
 corporis Lune ad corpus terre est sicut proportio unius ad 39 et  
 quartam fere; et proportio corporis Solis ad corpus terre est proportio  
 166 ad unum fere. Et proportio corporis Solis ad corpus Lune est  
 proportio 6644 et medii ad unum.\*

45. Ptholomeus monstravit mensuram duorum corporum, scilicet  
 Solis et Lune, sed non dixit mensuram reliquarum stellarum. Illius  
 vero scientia facilis est secundum illius similitudinem, qua operatus  
 est in Sole et Luna. Secundum enim illius similitudinem, qua  
 operatus est Ptholomeus in Sole et Luna, facilis est scientia mensurare  
 corpora stellarum reliquarum.

46. Dyameter enim corporis Mercurii in aspectu, secundum quod  
 probatur, est 15a pars dyametri Solis; et dyameter Veneris est 10a 43',1 |  
 pars dyametri Solis; et dyameter Martis est 20a pars dyametri Solis;  
 et | dyameter Iovis 12a pars est dyametri Solis; et dyameter Saturni  
 est 18a pars dyametri Solis; et uniuscuiusque stellarum fixarum VIa  
 dyametri est 20a pars dyametri in aspectu Solis.\*\*

#### De quantitate dyametrorum aliarum planetarum.

47. Quantitates vero dyametrorum earum secundum dyametrum  
 terre sunt ille. Dyameter corporis Mercurii est 18a pars dyametri  
 terre; et dyameter Veneris est tertia pars tercię partis; et dyameter  
 Martis est similis dyametro terre semel et sexta et forte verius\*\*\*  
 septima; dyameter Jovis equalis dyametro terre quater et semis et  
 14a unius vicis;† et dyameter Saturni est equalis dyametro terre  
 quater et semis et unius modica.†† Et dyameter cuiusque stellarum

also

$$E : S = 1 : 5 \frac{1}{2} = 2 : 11,$$

$$L : S = 10 : 187 = 1 : 18 \frac{7}{10} = 1 : 18 \frac{1}{2} \frac{2}{5}.$$

\* Es ist  $L^3 : E^3 = 125 : 4913 = 39 \frac{38}{125}$ , also näher  $\frac{1}{3}$  als  $\frac{1}{4}$ ; weiter ist

$$E^3 : S^3 = 1332 = 1 : 166 \frac{3}{8},$$

also nahezu 1 : 166; endlich ist

$$L^3 : S^3 = 1000 : 6539203 = 1 : 6539, 203,$$

hier ist also die Rechnung der Handschrift unrichtig.

\*\* Diese Stelle ist wohl so aufzufassen: Nach Nr. 49b, welche im deutschen  
 Texte ausgelassen ist, wird die Grösse der Sterne erster Klasse in 6 Teile ge-  
 teilt, diese Teile sind jedenfalls unter dem VIa dyametri gemeint. In  
 dem Exemplare, welches der deutschen Übersetzung zu Grunde lag, war wohl  
 statt VIa diametri, IVa diametri geschrieben und dieses als 15 gelesen  
 worden.

\*\*\* Das Wort verius hat der Übersetzer nicht berücksichtigt.

† Die Worte quater et semis et 14a unius vicis sind, wohl durch den  
 Abschreiber, im deutschen Texte fortgeblieben.

†† modica ist natürlich falsch übersetzt.

fixarum maximarum est equalis dyametro terre quater et semis et sexta unius vicis.\*

48. Est ergo mensura corporum harum stellarum ita. Corpus Mercurii est pars una 22000 corporis terre; Veneris est 37 pars terre; | et Martis est simile terre semel et semis et medietati octava unius vicis; et Jovis est equale terre 95<sup>es</sup>; et Saturni est simile terre nonagesies et semel. Stellarum vero fixarum maximarum unaqueque equalis est terre centies octies. Omnium quidem stellarum fixarum longitudo a centro terre est una, sed earum magnitudines sunt diverse.

49. Dicta antem est magnitudo 15 magnarum, que sunt in magnitudine prima.

Earum ergo, que sunt in magnitudine secunda, unaqueque est 90<sup>es</sup>\*\* equalis terre; et omnis earum, que sunt in magnitudine tertia, est equalis terre 70<sup>es</sup> bis; et omnis earum, que sunt in magnitudine quarta, est equalis terre quinquagesies quater; omnis earum, que sunt in magnitudine quinta, est equalis terre 36<sup>es</sup>; et omnis earum, que sunt in magnitudine sexta, est equalis terre 18<sup>es</sup>. Et si que minores sunt, non videntur.

44,1. 49b. Quantitates stellarum, que sunt post primam magnitudinem iam determinate sunt secundum aspectum, nec non secundum comparisonem ad dyametrum terre. Sed quia divisa est | magnitudo stellarum prime magnitudinis in sex partes, quarum una ablata fit magnitudo secunda, duabus autem ablatis fit <tertia, tribus ablatis> fit quarta, quatuor fit quinta, quinque fit sexta, quare non fit visibile, quod fit ultra.\*\*\*

50. Potest ergo ex hoc haberi mensura dyametrorum earum ad dyametrum terre. Erit ergo dyameter stellarum secunde magnitudinis ad dyametrum terre, sicut sunt quater† et semis, et hoc est re modica minus dyametro Saturni. Stellarum vero tertie magnitudinis, quater et sexta fere; quarte ter et quatuor quinte fere;†† quinte ter et quarta et 18a unius vicis fere; sexte bis et quarta et octava unius vicis.

51. Medietas dyametri terre, qua stellarum ratiocinatur longitudo, est 3250 miliaria. Cum ergo propinquior longitudo Lune a terra sit 33 vicibus et semis equalis medietati terre dyametri, hoc est 109037 miliaria et medietas unius miliarii, et longitudo longior Lune, que | 2. est equalis propinquiori longitudini Mercurii est 66 et sexta vicis unius equalis medietati dyametri terre, quod est 218540 miliaria. Et

\* Hier ist quater mit quarta verwechselt, et sexta unius vicis aber ist ausgefallen.

\*\* Auch diese Zahl ist nicht im deutschen Texte.

\*\*\* Der ganze Abdruck 49b findet sich nicht im deutschen Texte, war also wohl auch in der Vorlage weggelassen worden.

† Im deutschen Texte weggelassen, jedenfalls durch Schuld des Abschreibers bei Anfang einer neuen Columne.

†† Der Übersetzer hat quatuor quinte fere nicht verstanden.

longitudo longior Mercurii, que est propinquior Veneris est 167<sup>es</sup> 2 | equalis medietati dyametri terre,\* quod est 542750 miliaria. Longitudo autem eius longior, scilicet Veneris, que est propinquior longitudo longiori Solis, est 604<sup>es</sup> equalis medietati dyametri terre et semis fere, quod est 1963000 miliaria. Et longitudo longior Solis, que est longitudo propinquior Jovis, est 1220<sup>es</sup> equalis medietati dyametri terre, quod est 3965000 miliaria. Et longitudo Martis longior, que propinquior est Jovis, 8876<sup>es</sup> equalis est dyametri medietati terre, quod est 28847000 miliaria. Longitudo vero longior Jovis, que est propinquior Saturni, est quatuor decies et quadragesies quinquies equalis medietati dyametri terre, quod est 46816250 miliaria. Et longitudo longior Saturni, que est equalis longitudini stellarum fixarum, est vigesies milies et centies decies equalis medietati dyametri terre, quod est 65375500 miliaria.\*\* Gradus autem dicitur, quantum 44',1 | ad miliaria vel stadia extrahitur ab Alfragano 9<sup>o</sup> capitulo. Dixit enim, ibi quod 56 miliaria et due tercię unius miliaris respondent in terra cuilibet gradui celi.

52. Videatur ergo, quot sunt gradus in latitudine prime climatis, sic.\*\*\* Polus elevatur, veluti dicitur in principio primi, per 12 gradus et dimidium et quartam partem unius, in fine vero per 20 gradus et dimidium. Subtrahas minus de maiori, et erunt in differentia 7 gradus et dimidium et quarta, que sunt latitudo primi climatis, quantum ad gradus celi. Postea unicusque istorum 56 miliaria multiplicando per 7, et provenient 392. Deinde da<sup>t</sup> cuilibet gradui duas tercias, et erunt 14, et medietas gradus habebit 28 miliaria et unam terciam, que addantur prioribus miliaribus miliaria, et tercię terciis, et erunt 420 et 15 tercię. Restabitque quarta unius gradus, cui competunt<sup>††</sup> 14 miliaria et dimidia tercię, de qua non curetur. Sed miliaria miliaribus 2 | addantur prioribus, et erunt 434 miliaria. Et quia 15 tercię ibi valent 5 integra, pro his sumantur 5 et addantur prioribus, et erunt 439 miliaria in primo climate in rei veritate, et quia deficit nisi 1 de 440, qui est numerus famosus, complete supponitur.

53. De aliis climatibus sic operare dando semper gradui 56 et duas tercias, medietati 28 et unam terciam, quarte parti 14 et dimidium terciam, et tercię parti gradus 19, visa tamen latitudinem

\* Nachdem zunächst in der Zahl 109037 die zweite Null im deutschen Texte weggelassen war, ist der Übersetzer dann von longior lune (Z. 35 a. v. S.) gleich auf quod est 542750 miliaria überggesprungen, so dass die zwischenliegenden Worte ausgefallen sind. Die beiden ersten Zahlen sind falsch angegeben.

\*\* Auch hier ist, wohl durch Schuld des Abschreibers, der deutsche Text verunstaltet.

\*\*\* Der Übersetzer hat das sic fälschlich zum folgenden Satze gezogen.

† Der Übersetzer hat de statt da gelesen.

†† Die Worte quarta bis competunt sind vom Abschreiber im deutschen Texte ausgelassen.

climatis prius.\* Latitudo vero secundi climatis est 7 graduum tantum in celo, cui per predicta correspondent 397 miliaria recta operando, sed quia non deficiunt nisi tria a 400, qui est numerus famosus, complete supponitur. Latitudo vero tercii climatis in celo <est> 6 graduum et dimidie tercie unius, que valent in terra 350 miliaria. Latitudo vero quarti climatis in celo est 5 graduum et tercie unius, que valent in terra 302. Sed quia iste numerus | non est numerus famosus, et est prope 300, ille supponitur.\*\* Latitudo vero quinti climatis est 4 graduum et dimidii in celo, que valent in terra 252. Latitudo sexti climatis est trium graduum et dimidii et plus quam quarta, que valent 212; sed quia iste numerus non est famosus ponitur pro eo miliaria 210.\*\*\* Latitudo septimi climatis est 3 graduum et quarte unius in celo, que valent in terra 184. Sed iste non est in libro, sed proximus ei maior, scilicet 185, quia quoddam modicum remansit.

| 45, 1.

55. Nota, quod orientales sunt antipodes occidentalium; ibi semper oritur sol, hic semper occidit.

55. Mirabile est de centro mundi, ad quod cadunt omnia ponderosa. Ibi vero estimo infernum esse in maiori distantia, quam possibile sit, et hoc, ne fetor ad superos possit redundare. Ad illum locum cadunt omnia ponderosa, sed ad firmamentum ascendunt levis|sima, quia ad infernum facilis est lapsus, ad celos difficilis ascensus. Facilis et plana est via ducens ad inferos, difficilis et stricta ducens ad celos. Multa descendunt, pauca ascendunt.

56. Homo posset circuire ab oriente ab eodem loco ad eundem vel per terram vel per navigium, per terram eiusdem temperantie eundo ad occasus ab oriente iterum redeunt ab oriente vel e converso, sed non versus septemtrionem, quia inveniret perpetua frigora, nec versus meridiem, quia inveniret torridam zonam.

57. Poli zodyaci secundum Thebit† non sunt firmi aut fixi, immo titubant et inclinantur, titubant et elevantur sicut barcha in mari, sicut potest videri in spera.

*Explicit liber.*

\* Hier war der Text des Übersetzers ein anderer als der unserer Handschrift.

\*\* Auch hier ist ein wesentlicher Unterschied zwischen den Lesarten des lateinischen Originals und der Übersetzung.

\*\*\* Ebenso ist hier ein wesentlicher Unterschied zwischen beiden Lesarten.

† Die Worte secundum Thebit fehlen in der Übersetzung. Es ist die bekannte Trepidationstheorie gemeint.

## Zur Geschichte der Mathematik im 15. Jahrhundert.

Von

Dr. E. WAPPLER

in Zwickau.

---

Die Handschrift C 80 der Königlichen öffentlichen Bibliothek zu Dresden enthält auf Blatt 301'—303 eine mathematische Vorlesung aus der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts. Diese Vorlesung hat der Magister Gottfried Wolack aus Bercka 1467 und 1468 in Erfurt gehalten. Über Wolack berichten die Akten der Erfurter Universität, dass er 1457 inscribiert und 1462 zum Rektor gewählt wurde. Da aus der Wolackschen Vorlesung, die sich auch in München und Leipzig findet, zu ersehen ist, was um die Mitte des 15. Jahrhunderts in der Mathematik gelehrt wurde, so dürfte ein vollständiger Abdruck derselben vielleicht mit Dank aufgenommen werden.

|Incipit regula proporcionum cum suis.

Bl. 301'.

Prima regula dicitur de tri apud Italos per apocopam, id est quasi de tribus, quia tres in se continet numeros; aurea, quia ad plures questiones familiarissima; vtilis, quia cetere fere regule ad ipsam tamquam ad primum principium ducuntur; dicitur eciam proporcionium, quia in ipsa debet fieri proporcio et determinata numerorum adequacio. Fit enim hec regula, cum ponuntur numeri duo noti, et per tercium, eciam notum, fit questio de quarto ignoto. Cuius tota vis sive difficultas in modo scribendi consistit. Nam precium sub precio et res sub re semper scribatur, et fiat multiplicatio per contradictoriam et diuisio per contrariam uel subcontrariam. Exempli gracia 11 oua sunt empta 9 denarijs, quanti constat(!) 5 oua? Disponantur hij numeri taliter:

$$\begin{array}{r} 11 \quad 9 \\ \quad 5 \quad 0 \end{array}$$

11 dant 9, quot 5? Duc 5 in 9, proueniunt 45, que per primum, scilicet 11, diuide, et sunt empta 5 oua 4 denarijs cum  $\frac{1}{11}$  denarii, qui est quartus ignotus sic se habens ad 5 sicut 9 ad 11.

Si autem queritur: 11 ova sunt empta 9 denarijs, quot ova valent 5 denarios(!)? Disponantur numeri sic:

$$\begin{array}{r} 11 \quad 9 \\ (0) \quad 5 \end{array}$$

11 ova dant 9 denarios(!), quid 5 denarii? Ducatur primus in quartum, scilicet 11 in 5, et proueniunt 55, que diuide per secundum, scilicet per 9, et proueniunt 6 cum  $\frac{1}{9}$ , tercius numerus ignotus, et totidem ova valent 5 denarii. In hac regula si numerus primus secundo fuerit maior, tercius erit maior quarto. Si vero primus minor fuerit secundo, eciam tercius minor erit quarto, et si equalis, equalis. Secunda regula dicitur de tri transmūtata, in qua eciam, semper scribatur res sub re et precium sub precio, et fiet multiplicatio contrarie siue subcontrarie et diuisio contradictorie. In hac enim si primus fuerit maior tercio, secundus necessario erit minor quarto et econuerso. Si primus fuerit minor tercio, secundas erit maior quarto. Exempli gracia emi 8 vlnas panni pro tunica in latitudine trium vlnarum, venalis est alius pannus duarum vlnarum latus; queritur, quot vlnas de illo pro subductura recipiam, qui equalis sit priori panno. Disponantur figure sic:

$$\begin{array}{r} 3 \quad 8 \\ 2 \quad (0) \end{array}$$

Dicendo latitudo trium vlnarum dat mihi octo in longitudine, quantum dat mihi latitudo duarum vlnarum? Due ergo primum in secundum, scilicet 3 in 8, et proueniunt 24, que per tertium, scilicet per 2, diuide, et proueniunt 12. Tantum ergo de secundo recipiam. Et sicut se habet primus ad tertium, ita quartus ad secundum.

Item quando maldrum tritici valet 5  $\text{lib}$ , panis 1  $\text{s}$  10 ponderabit vncias; queritur, quantum ponderabit panis idem maldro 8  $\frac{1}{2}$   $\text{lib}$  soluente? Age secundum regulam, et patet, quod 5  $\frac{15}{17}$ .

Tercia regula dicta de tri dupla quasi regulam de tri duplans tali elucescit exemplo. Vigiuti lucei sunt empti pro 100  $\text{s}$  et 8 alleca pro 20  $\text{s}$ ; queritur, 3 lucei quot valent alleca? Vide ergo primo, quot  $\text{s}$  valeant 3 lucei per primam regulam, et patet, quod 15. Demum vide, quot alleca valent 15  $\text{s}$ , et patet, quod 6. De primo ergo ad vltimum, 6 alleca valent 3 luceos.

lucei	$\text{s}$	alleca	$\text{s}$
20	100	8	20
3	15	6	15

Verbi gracia similiter exemplum conuertendo sic querendo 20 lucei valent 100  $\text{s}$ , 8 alleca valent 20  $\text{s}$ ; 6 alleca quot valent luceos?

Item emi 10 quartas vini pro 50  $\mathfrak{s}$ , 6 quartas cereuisie pro 20  $\mathfrak{s}$ ; queritur, quot quartas cereuisie habemus pro tribus quartis vini? Vide per primam, tres quartas(!) vini quot valent  $\mathfrak{s}$ , et habes, quod 15. Vide secundo, pro 15  $\mathfrak{s}$  quot quartas cereuisie, et patet, quod quatuor cum  $\frac{1}{2}$  cereuisie. Et stabunt figure sic:

quarte vini	$\mathfrak{s}$	(quarte cereuisie)	( $\mathfrak{s}$ )
10	50	6	20
3	15	$4\frac{1}{2}$	15

Quarta regula dicta mercatorum uel sodalitates, quia pluribus mercatoribus eorum bona commiscentibus est vtilissima, tali claret exemplo. Sint 3 uel multi, quorum primus imponat 20 fl, secundus 24 fl, tercius 30 fl, et cum his lucrantur 100; queritur, quantum cuilibet secundum sui quotum cedere debeat. Si hoc vis scire, collige summam omnium, et fiunt 74, que serua pro diuisore; deinde multiplica primi pecuniam, scilicet 20, per 100, et proueniunt 2000, que per diuisorem, scilicet 74, diuide, et proueniunt 27 et  $\frac{1}{37}$ , et tantum habebit primus de lucro. Deinde multiplica pecuniam secundi, scilicet 24, per lucrum, et proueniunt 2400, que diuide per 74, et proueniunt 32 et  $\frac{16}{37}$ . Deinde multiplica pecuniam terciij per lucrum, et proueniunt 3000, quibus per 74 diuisis proueniunt 40 et  $\frac{20}{37}$ , et tantum habebit tercius. Bl. 302.

Ad idem. Fusa est campana ex quatuor libris auri, 10 argenti, 20 cupri. Fracta campana vna pars de 10 libris venalis est; queritur, quantum in eadem porcione de auro, argento et cupro sit. Operare secundum regulam vt prius. Jungantur omnia pondera, et proueniunt 34, que serua pro diuisore, deinde multiplica quodlibet pondus seorsum per pondus, quod habet porcio venalis, scilicet 10, productum diuidendo per diuisorem, scilicet 34, et patebit propositum.

Quinta regula dicta de tempore, quia, in ea tempus quoddam ducitur, tali claret exemplo. Sint tres uel plures socij, quorum primus imponat 9 florenos, secundus 12, tercius 15, primus ad duos annos, secundus ad tres annos, tercius ad quatuor annos, et superluc(r)ati sunt 20 florenos; queritur, quantum cuilibet secundum sui impositionem et secundum temporis quotam cedat. Multiplica tempus cuiuslibet per suam impositionem et producta separatim scribe, dehinc per omnia operare vt in predicta regula. Exempli gracia multiplica impositionem primi, scilicet 9, per suum tempus, scilicet 2, et sunt 18, que scribe primo loco. Deinde multiplica impositionem secundi, scilicet 12, per suum tempus, scilicet 3, et proueniunt 36, que scribe secundo loco. Deinde multiplica impositionem terciij scilicet 15, per suum tempus, scilicet quatuor, proueniunt 60, que

tercio loco scribe. Hec tria producta simul aggregata, et proueniunt 114, que pro diuisore serua. Deinde primum productum, scilicet 18, per lucrum communem, scilicet 20, multiplica, per diuisorem seruatum diuidendo et proueniunt  $(3 \text{ cum } \frac{3}{19})$ . Deinde secundum productum, scilicet 36, per lucrum communem scilicet 20, multiplica, per diuisorem seruatum diuidendo et proueniunt)  $6 \text{ cum } \frac{6}{19}$  vnus floreni, et tantum secundo cedit. Postremo productum tertium, scilicet 60, per lucrum multiplicando, scilicet 20, et per communem diuisorem diuidendo et proueniunt  $10 \text{ cum } \frac{10}{19}$ .

Sexta regula dicta equalitatis, qui emibilium pondus invenire docet, isto patet exemplo. Dominus dat famulo suo 20 nouos grossos, vt pro hijs emat muscatum, zinciber et piper, ita quod non minus aut plus quam 20 nouos expendat et tamen portet tantum pondus de vna specie sicut de alia. Queritur, quomodo sit agendum. Consideretur precium cuiuslibet speciei, ex quibus fac vniam summam, per quam diuide pecuniam a domino datam, scilicet 20 nouos, resoluendo tamen prius nouos in denarios, quia denarij sunt in diuisore, et patet quesitum. Verbi gracia ponam, quod vnus loto de(!) muscati valeat 16  $\text{s}$  et zinciberis 8, piperis vero 6  $\text{s}$ . Hec precia coniungam, et proueniunt 30, per que diuide pecuniam a domino datam, scilicet 180  $\text{s}$ , et proueniunt 6 lotones de qualibet specie.

Item quidam vadit ad campsores volens cambi(a)re florenos(!), petit ab eo nouos grossos, antiquos grossos et  $\text{s}$  in numero equali de quolibet genere, supposito, quod florenis(!) valeat 39 nouos. Queritur, quot de quolibet genere obtinebit. Hoc facio sic resoluendo primo florenum in  $\text{s}$ , et proueniunt 351, que diuidendo per 13 aggregatum ex valore horum trium, scilicet noui, antiqui et  $\text{s}$  et proueniunt in quociente 27 de quolibet genere. Et sic semper debent resolui in minimam monetam.

Septima regula vsure dicta uel de quinque, quia quinque in se continet numeros; vsure, quia ad vsuram uel lucrum applicanda est, tali claret exemplo. 20 fl 8 annis dant 5 fl, quot dant 30 fl in 10 annis? Scribantur hij quinque numeri per ordinem sic:

20	8	5
30	10	0

Quo facto videas in regula de tri disponas ducendo primum in secundum et productum erit primus numerus regule de tri, tertius sic Bl. 302'. inuariatus | erit secundus numerus regule de tri, quartus in quintum productus erit tertius, scribaturque diligenter capitale sub capitali, tempus sub tempore, lucrum sub luero, quodlibet sub sua denominatione. Verbi gracia duco 20, scilicet capitale, in 8, suum tempus, et proueniunt 160, qui erit primus numerus regule de tri, 5 erit se-

cundus; deinde duco 30 in 10, secundum capitale in tempus suum, et proueniunt 300, que sunt tercius terminus. Modo iuxta regulam de tri operando 9 et  $\frac{3}{8}$  fl proueniunt, et tantum lucrantur 30 fl in 10 annis.

Item sunt 100 homines, vna pars viri, alia mulieres, tertia virgines, et habebunt dare 100(!) florenos inequaliter, quia vir vnus duos dabit florenos, mulieres vero 1 florenum, virgines vero quelibet  $\frac{1}{2}$  florenum. Queritur, quot erunt viri et quot mulieres et quot virgines. Fac sic. Primo diuide florenum in albos 30, et tunc vir dat 60 albos, mulier 30, virgo 15. Quibus simul collectis fiat diuisor, primus numerus de tri, 100 secundus numerus et cetera ut in regula mercatorum, et stabit sic totum:

Primus numerus	homines
(105)	100
vir 60	$57\frac{1}{7}$ vires(!)
mulier 30	$28\frac{4}{7}$ mulieres
virgo 15	$14\frac{2}{7}$ virgines

Si vero florenum(!) valet albos 24, tunc staret sic

84	100
v 48	$57\frac{1}{7}$
m 24	$28\frac{4}{7}$
u 12	$14\frac{1}{7}$ (!)

Octana regula dicta denominacionis, quia docet inuenire numerum in diuersas denominaciones diuisibilem, vt tres socij debent diuidere 12 florenos, quorum primus capiet  $\frac{1}{2}$ , secundus  $\frac{1}{3}$ , quartus(!)  $\frac{1}{4}$ . Queritur, quantum cuilibet cedat. Si hoc vis scire, quere numerum tales partes habentem ducendo primam denominacionem in secundam et productum in terciam et sic de alijs. Quo facto vide via diuisionis, que sit secunda pars tocius producti et illam ascribe primo, deinde que sit tertia pars, quam ascribe secundo, vltorius que sit quarta pars, et hanc ascribe tercio et sic de alijs. Quos omnes in vnam summam collige, que sit diuisor, et pecunia diuidenda multiplicatur, et tunc fiat totum more regule mercatorum. Exempli gracia primus habebit  $\frac{1}{2}$ , secundus  $\frac{1}{3}$ , tercius  $\frac{1}{4}$ , dico(!) has denominaciones in se inuicem, et fiant 24, cuius media pars est 12, quam ascribe primo, eius tertia pars est 8, quam da secundo, eius quartam partem,

scilicet 6, ascribe tercio. Coniunge hos numeros, scilicet 12, 8, 6, et fiunt 26, diuisor. Deinde multiplica 12, primum numerum, per pecuniam diuidendam, scilicet 12, et proueniunt 144, que diuidam per 26, et proueniunt 5 cum  $\frac{7}{13}$  vnus floreni, et tantum habebit primus de 12 florenis. Deinde multiplica 8 per 12 et diuide per 26, et proueniunt 3 (cum)  $\frac{9}{13}$  vnus floreni, et tantum habebit secundus de 12. Vltimo multiplica 6 per 12, et procedunt 72, que diuidam per 26, et procedunt 2 cum  $\frac{10}{13}$  vnus floreni, et tantum habebit tercius et sic de alijs.

	diuisor	
	26	12
$\frac{1}{2}$	12	$5\frac{7}{13}$
$\frac{1}{3}$	8	$3\frac{9}{13}$
$\frac{1}{4}$	6	$2\frac{10}{13}$

Nona regula dicta regula extremi, quia communiter in extremis fieri solet, tali patet exemplo. Quidam agonizans, ne intestatus decederet, sic suum ordinauit testamentum, quod vxor sua, quam reliquit grauidam, si pareret masculum, ipsa reciperet terciam partem bonarum, et  $\frac{2}{3}$  reciperet filius. Si vero pareret femellam, filia recip(er)et  $\frac{1}{3}$  de bonis et mater  $\frac{2}{3}$ . Adueniente tempore partus enixa est filium et filiam. Posito, quod defunctus reliquisset 100 florenos. Queritur, quantum cuilibet personarum cedat. In hoc casu maxime attendenda est voluntas defuncti, qui voluit, quod mater in duplo plus recipisset quam filia et filius in duplo plus quam mater. Quia ergo vbique est proportio dupla, quere igitur talem proportioem in tribus tercijs. Ponatur 1 pro primo, binarius pro secundo et quaternarius pro tercio, que aggregentur, et habebitur diuisor, et per omnia operandum est vt in regula mercatorum.

	7	100
filius	4	$57\frac{1}{7}$
mater	3(!)	$28\frac{4}{7}$
filia	1	$14\frac{2}{7}$

Decima regula dicta equalitatis parcium tali claret exemplo. Quidam legauit filijs suis summam, quam habent apud camporem, hoc modo, ut primus capiat 1 florenum et 10 partem remanencium florenorum, secundus duos et 10 partem remanencium, tercius tres florenos et cetera, vltimus autem capiat totum residuum. Modo re-

deunt filij equale pondus portantes pecuniarum. Queritur, quot fuerint filij et quot floreni. Considera partem, quam portant equaliter, scilicet 10, a qua subtrahere unitatem, et habebis numerum filiorum, quem ulterius in se multiplica, et habebis numerum florenorum. Dico ergo, quod habet 9 filios et 81 florenos, quilibet autem porta(v)it 9 florenos.

Vndecima regula dicta regula spacij, quia in ea fit intencio de spacio, tali claret exemplo. Pater et filius ibant Romam. Patre ambulante 6 miliaria, sed filio 9, quia iuuenis, pater tamen prius exiuit et precessit filium in 100 miliaribus. Queritur, quot miliaribus(!) diebus et quot miliaria filius ambulet ante (quam) patrem apprehendat. Diuide spacium, quod pater precesserit, per excessum | velocioris, Bl. 303. scilicet 3, et habebis quesitum. Nam quociens ostendit, in quot diebus conueniunt. Si autem scire volueris, in quoto miliari, multiplica numerum dierum per numerum velocioris, et patet, quod post 33 dies et  $\frac{1}{3}$  vnus diei transitis 300 miliaribus conuenerunt.

Duodecima regula dicta conuentus, quia de conuentu tractat. Exempli gracia duo sunt fratres, quorum vnus est Lubeck, alter Erfordie. Exiens Lubeck transit omni die 6 miliaria tendens versus Erfordiam. Sed alter Erfordie exiens transit omni die 5 miliaria versus Lubeck. Illo tamen supposito, quod ambo incipiunt iter vna die, et quod distancia sit inter eos 60 miliarium. Queritur, in quota die conueniunt. Adde motum vnus diei ad motum alterius diei, scilicet 5 ad 6, et sunt 11, et per illud productum diuide distanciam, et inuenies, quot(!) conueniunt post 5 dies et  $\frac{5}{11}$  vnus diei. Si velis scire, quot miliaria quilibet transit antequam alteri obueniat, multiplica numerum dierum per iter diei cuiuslibet, et venit petitum, et patet, quod ambulans de Lubeck versus Erfordj (am) transiuit 32 (et)  $\frac{8}{11}$  vnus miliaris, alter vero Erfor(d)j(e) exiens transiuit 27 (et)  $\frac{3}{11}$  vnus miliaris.

Hiis finiunt 12 regule de tri, que posteris concor(d)es sunt. Possunt autem in infinitas applicari per ingenium habentem.

Sequuntur nonnullae regule difficultatem regule de trie addentes.

Regula gradacionis dicetur autem gradacionis, quia gradatim pertransitus in ea fit secundum progressionem naturalem. Duo tendunt Romam, scilicet *A* et *B*. *A* vadit omni die 7 miliaria, *B* vero prima die ambulat vnum miliare, secunda duo, tertia tria et sic consequenter secundum progressionem naturalem. Queritur, in quo die *B* consequitur *A*. Dupla iter sine motum vniformiter ambulantis, et a duplato subtrahere unitatem, et patet dies in qua conueniunt. Dico ergo, quod *B* consequitur *A* 13 diebus transactis et 91 miliaribus, hoc patet multiplicando 13 per 7.

Regula compositionis. Sartor quidam 3 habet famulos. Sit sartor *A*, primus famulus *B*, secundus *C*, tercius *D*. *A* potest tunicam integram in die perficere, *B* in duobus diebus, *C* in tribus diebus *D* in quatuor. Queritur, in quanto tempore omnes vnam et eandem tunicam possent perficere. Considera tempus maximum, quod est quatuor dies, in quo *D* perficit tunicam. Illud diuide per tempus cuiuslibet, et quocientes omnes aggrega. Aggregatum pone pro secundo termino regule de tri, tempus maximum prius consideratum pro primo termino. Dicas ergo sic: in quatuor diebus fiunt 8 tunice et  $\frac{1}{3}$  vnus tunice, in quanto tempore fit vna tunica? Ducam primum in tercium, scilicet 4 in 1, et proueniunt 4, et diuidam per secundum, scilicet 8 et  $\frac{1}{3}$  siue  $\frac{25}{3}$ , et proueniunt  $\frac{12}{25}$  vnus diei, et in tanto tempore possunt omnes simul perficere vnam tunicam. Simile est de tonna trium ducillarum.

	dies	tunice
	4	$8\frac{1}{3}$
	0	1
<i>A</i>	1	4
<i>B</i>	2	2
<i>C</i>	3	$1\frac{1}{3}$
<i>D</i>	4	1

Turris edificata est tali ingenio, quod eius  $\frac{1}{4}$  est in terra, eius  $\frac{1}{5}$  est in aqua, et habet turris 100 pedes vltra superficiem aque in ere. Queritur, quot pedum sit turris in toto. Quere numerum, in quo sunt quite et parte precise, et ille numerus in presenti 20 censetur. Dic igitur: turri diuisa in 20 partes de illis erunt 5 in terra et quatuor in aqua. Sequitur, quod erunt 11 in ere super aquam. Age igitur per regulam. 11 partes faciunt 100 pedes, quot dant 20 partes? Et inuenies 181 pedes et  $\frac{9}{11}$  vnus pedis.

Hec Erfordie a Magistro Gotfrido Wolack de Bercka informata anno 1468 currente in estate pro  $\frac{3}{4}$  vnus floreni renensis, qui tunc fuerunt 30 noui grossi, et anno immediate precedenti informata fuerunt pro floreno renensi.

Die Abhandlung, welche wir haben abdrucken lassen, hat Johann Widmann von Eger zum Teil durchkorrigiert. Es liegt daher die Vermutung nahe, dass Widmann nach dieser Abhandlung unterrichtet hat. Eine Stütze hierfür finden wir noch darin, dass Codex Lipsiensis 1470 neben mehreren Vorlesungen von Widmann auch die Regula porporcionum cum suis enthält.

Verschiedene Notizen, die sich auf die Regeldetri beziehen, hat Widmann in die Dresdner Handschrift eingetragen. Die längste von diesen Notizen steht auf Bl. 301 und hat folgenden Wortlaut:

Item res omnis venalis, et omnia, que ipsis attinent, duobus modis et quatuor numeris disponuntur. Horum vero numerorum primus iuxta Arabes Almuzaar, id est primus propositus, nuncupatur. Alter vero Alzazar, id est secundus, per primum dinotus appellatur. Tercius Almute, id est ignotus, quartus Altemon, id est per primum et secundum dinotus. Sed et hij quatuor numeri sic disponuntur, ut eorum primus, qui est Almuzaar, ultimo, qui est Altemon, opponatur. Horum eciam quatuor numerorum tres semper noti ac certi ponuntur, quartus vero ignotus ponitur et incertus, et ipse est ille, cum quo quantum inquiritur. Talis quoque ad hanc artem regula datur, ut in omni hac inquisitione tres numeri, qui noti ac certi positi sunt, considerentur, quoque eorum duo semper ad inuicem oppositi inuenientur. Horum ergo duorum vnus est in altero multiplicandus et eorum multiplicacionis summa per tertium notum ac certe positum, qui ignoto opponitur, erit diuidendus. Nam quod ex diuisione exierit, erit numerus, de quo dubitabatur, et ipse ei numero opponitur, per quem facta est diuisio. Sed ne per hanc artem aliquis errorem incurrere arbitretur, tale damus exemplum. Secundum ergo primum modum sic dicas: 10 pro 6, quot pro 4? Vide nunc, quomodo secundum quod diximus, prefati numeri disponuntur. Nam quoniam 10 dixisti, numerum Almuzaar pronunciaisti, et quando pro 6 dixisti, numerum Alzazar protulisti, et quando quot dixisti, Almuthemon siue magulū, id est ignotum, nunciaisti, et quando pro quatuor dixisti, Althemon edidisti. Vide ergo qualiter eorum tres, id est 10 et 6 et 4, noti ac certi ponuntur, et quomodo de quarto, adhuc incognito, dubitatur. Si ergo ad regulam prius datam respexeris, primum in ultimo, id est 10 in 4, multiplicabis, sunt omnino oppositi noti ac certi, et quod ex multiplicatione excreuerit, id est 40, per alium notum ac certum, Alzazar, id est per 6, oportet diuidere, et erunt 7 siue  $6\frac{2}{3}$  vnus maghulis, id est incognitum designantes et huiusmodi numerus numero senario est oppositus, qui arabice Alzazar nominatur. Secundus modus huius astis est, ut dicas: 10 pro 8, quot pro 4? 10 ergo Almuzaar, qui numero Almuthemon ignoto, cum quantum acquiritur, est oppositus, et 8 designat numerum Alzazar, qui numero Althemon opponitur, qui sunt(!) quatuor. Primum ergo numerorum cognitorum atque oppositorum in alium multiplica, id est 4 in 8, et fiet 32, hunc ergo numerum per alium cognitum diuide, qui est Almuzaar, id est 32 per 10 diuide, et exeund tres et quinta, Althemon designantes, qui videlicet eo numero, per quem diuiditur, oppositus. His ergo duobus modis omnia, que venalia dicuntur, absque errore possunt tractari, si deus voluerit.

... homo in vinea 30 diebus pro 10 conducitur, ex quibus operatus est 6 diebus, quantum ergo precium tocius debet accipere? Expositum huius est, quod iam manifestum est, quod 6 dies quintam mensem(!) adimplent, et hoc, quod ei ex precio contigerit, sit secundum quod ipse ex mense sit operatus. Quod autem diximus, sic exponitur. Quoniam quando mensem dixisti, id est 30 dies, Almusaar protulisti, et quando dixisti 10, dixisti Alzazaar, et quando dixisti 6 dies, Almuthemon pronuciasti, et quando dixisti quantum precij ei contigerit, Althemon nunciasti. Multiplica ergo Alzazaar, 10, per Almuthemon, qui ei opponitur, id est 6, et fiet 60, et quod ex multiplicatione excreuerit, super(!) 30, id est super(!) Almuzaar, diuide, et erunt 2 dragmata, et ipsa Althemon, id est pars, que homini contingit. Huiusmodi ergo modo quicquid nisi(!) positum fuerit ex rebus venalibus ac alijs siue ponderibus siue ex omnibus, que hijs attinent, agendum est.

Die Notiz, welche wir soeben mitgeteilt haben, findet sich auch in der Leipziger Handschrift 1470 und in der Wiener Handschrift 4770. Letztere Handschrift ist vielleicht die Quelle, aus der die fragliche Notiz stammt.

Codex Vindobonnensis 4770 enthält auf Bl. 1—12' die Algebra des Mohammed ben Musa, welche weder mit der Ausgabe durch Libri noch mit der durch Boncompagni übereinstimmt. Ein Abschnitt davon ist nun die Notiz, welche wir oben reproduziert haben.

## † Hermann Heilermann.

Am 23. September 1899 starb zu Godesberg a. Rh. Dr. Hermann Heilermann, Realgymnasialdirektor a. D. und Geheimer Regierungsrat, wohl der älteste Mitarbeiter dieser Zeitschrift. Geboren am 15. Januar 1820 als Sohn eines Bauerngutbesitzers im Kreise Recklinghausen in Westfalen, hat er das hohe Alter von nahezu 80 Jahren erreicht. Er studierte in Münster unter Gudermann, in Berlin unter Jacobi, Dirichlet u. a. Mathematik und Naturwissenschaften. Nach mehrjähriger Thätigkeit an den Gymnasien zu Koblenz und Trier übernahm er anfangs der fünfziger Jahre die Leitung der Provinzial-Gewerbeschule zu Trier. In dieser Stellung schrieb er die leider zuerst wenig bekannt gewordene Programmarbeit (Ostern 1855): „Zerlegung der homogenen quadratischen, kubischen und biquadratischen Funktionen zweier Veränderlichen in Faktoren.“ In dieser Arbeit findet sich zum ersten Male die kubische Resolvente der biquadratischen Gleichung in Determinantenform, welche später unter dem Namen der Cayley-Aronhold'schen Determinante bekannt geworden ist.

Oktober 1864 wurde er nach Essen zur Errichtung und Leitung einer (lateinlosen) Realschule II. Ordnung berufen, aus der sich später das Realgymnasium verbunden mit höherer Bürgerschule entwickelte. Im Januar 1895 feierte er sein 50jähriges Dienstjubiläum, wobei er zahlreiche Ehrungen seitens der Staats- und städtischen Behörden, sowie seitens seiner Schüler, Freunde und Mitbürger empfing. Eine neu angelegte Strasse in Essen wurde nach ihm Heilermannstrasse benannt.

Ausser mehreren in weiten Kreisen hochgeschätzten Handbüchern, welche hauptsächlich Unterrichtszwecken dienten, veröffentlichte er eine Reihe wissenschaftlicher Arbeiten, namentlich aus dem Gebiete der Funktionentheorie, aus der Lehre von den Kegelschnitten und den Gleichungen dritten und vierten Grades, sämtlich in dieser Zeitschrift. Noch kurz vor seinem Tode brachte sie (Jahrg. 44, Heft 4) eine kleine Mitteilung: „zur Auflösung der Gleichungen vierten Grades“, über welche er dem Unterzeichneten schrieb, dass es wahrscheinlich die letzte seiner Hand sein würde.

Als Mensch ein ausgezeichneter Charakter, ein vortrefflicher Lehrer und Leiter, ein treuer Freund, der Wissenschaft ein begeisterter Anhänger, ist er heimgegangen; „integer vitae scelerisque purus“, wie das Jubiläumslied ihn feierte.

Prof. Dr. JOS. DIEKMANN.

## Die wissenschaftlichen Kongresse in Paris im Sommer 1900.

---

Wir haben (Bd. 44, Historisch-litterarische Abteilung Seite 111) unsere Leser auf die vom 6. bis zum 12. August stattfindende Mathematikerversammlung hingewiesen. Ergänzend können wir hinzufügen, dass am ersten und am vorletzten Tage der Versammlung allgemeine Sitzungen stattfinden, für welche jetzt schon Vorträge angesetzt sind, am 6. August Vorträge der Herren M. Cantor und Volterra, am 11. August solche der Herren Mittag, Leffler und Poincaré.

Noch zwei andere Kongresse dürfen wir heute anzeigen. Vom 23. zum 28. Juli findet der Congrès d'Histoire des sciences statt, welcher für die Freunde geschichtlicher Forschung in der Mathematik eine besondere Anziehungskraft besitzen dürfte. An der Spitze des Organisationsausschusses steht Herr Paul Tannery.

Zwischen die beiden genannten Versammlungen schiebt sich dann vom 2. zum 7. August der Philosophenkongress, welcher eine Gliederung in vier Abteilungen vorgesehen hat, deren dritte als Logique et Histoire des science bezeichnet ist. Auch dort kommen, wie das versandte ausführliche Programm erkennen lässt, zahlreiche den Mathematiker fesselnde Fragen zur Verhandlung, für welche bereits Berichterstatter gewonnen sind, deren Namen wir allerdings noch nicht anzugeben in der Lage sind, so wenig wie die Namen derjenigen Gelehrten aus allen Ländern, welche eingewilligt haben, sich an einem sogenannten Comité de Patronage zu beteiligen.

M. CANTOR.

## Rezensionen.

---

**Sammlung der Aufgaben des Aufgaben-Repertoriums** der ersten 25 Bände der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht unter Mitwirkung von Prof. Dr. STOLL, systematisch geordnet von Dr. E. EMMERICH und C. MÜSEBECK und herausgegeben von J. C. V. HOFFMANN, Begründer des Aufgaben-Repertoriums und der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. Leipzig 1898, B. G. Teubner. XII, 399 S.

In einem Vorworte erzählt Herr Hoffmann, wie er 1874 in dem V. Bande seiner Zeitschrift angefangen habe, ein Aufgaben-Repertorium zu eröffnen, wie dieses allmählich zu immer grösserer Bedeutung sich entwickelte und eine besondere Leitung beanspruchte, welche theils nach, theils neben einander den Herren Binder, v. Lühmann, Lieber, Müsebeck anvertraut war, und in ihnen Persönlichkeiten, deren Namen besonders in Schulmännerkreisen von bestem Klange war und ist. Als Aufgabensteller wirkten zahlreiche Mitarbeiter, unter welchen die Herren Schlömilch mit 167, Emmerich mit 122, Stoll mit 95 Aufgaben die fleissigsten waren. Die jetzt veröffentlichte nach dem Inhalte der Aufgaben geordnete Zusammenstellung giebt den Wortlaut sämtlicher Aufgaben und dazu die Angabe von Band und Seite der Zeitschrift, wo man die Auflösung, beziehungsweise die Auflösungen zu suchen hat. Von besonderem Nutzen wird dadurch der Band für solche Besitzer, welche in der Lage sind, über sämtliche Jahrgänge der Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht zu verfügen.

CANTOR.

---

**Cours d'Analyse** par F. DE HENSCH, docteur en sciences physiques et mathématiques, professeur d'analyse à l'École militaire de Bruxelles. **Calcul différentiel.** Bruxelles 1898. Alfred Castaigne éditeur. 274 p.

Aus dem Vorworte erfahren wir, dass der Verfasser, der in Frankreich zur Übung gewordenen, auch anderwärts da und dort sich einbürgernden Sitte folgend, seinen Schülern an der Kriegsschule in Brüssel autographierte Vorlesungshefte in die Hand zu geben pflegte, welche er nunmehr habe

5\*

drucken lassen. Als Quellen habe der Verfasser die besten vorhandenen Lehrbücher benutzt. Wir begreifen es vollständig, dass Herr de Hensch nicht an ein fremdes Werk sich vollständig anschloss, dass er bald mehr den einen, bald mehr den anderen Entwicklungsgang vorzog und dementsprechend seine Vorlagen wechselte. Die meisten Lehrer der Differentialrechnung dürften ähnlich verfahren. Ob man alsdann das aus sechs guten Büchern zusammengestellte siebente gute Buch einem Verleger zum Drucke übergeben, ob dieser es übernehmen soll, das ist Sache des Verlegers, und dieser wieder wird seine Entschliessungen vermutlich mit Rücksicht auf die Schülerzahl der Anstalt, an welcher der Verfasser des Buches wirkt, treffen. Ob das Buch auch ausserhalb der betreffenden Anstalt Käufer findet, ist Glückssache. Die Kritik thut solchen Werken gegenüber ihre Schuldigkeit, wenn sie auf das Erscheinen aufmerksam macht und bezeugt, dass wirklich eine gute Zusammenstellung vorliegt, da leider aus sechs guten Büchern auch ein nicht gutes siebentes Buch entstehen kann. Diese Angst braucht den Kauf des uns heute vorliegenden Bandes nicht zu beeinträchtigen. Von feineren Untersuchungen, welche in einer Elementarvorlesung selten berührt werden, erwähnen wir das Verweilen bei der Frage, ob eine Funktion in einem bestimmten Punkte eine Ableitung besitze oder nicht. Mit dem Fehlen der Jacobischen Bezeichnung partieller Differentiation durch geschwungene  $\partial$  können wir uns nicht befreunden und vermuten, es werde vielen Lesern ebenso ergehen.

CANTOR.

---

**An elementary course of analytic geometry** by J. H. TANNER, assistant professor of mathematics in Cornell University and JOSEPH ALLEN formerly instructor in the college of the city of New York. New York, Cincinnati, Chicago. American Book Company. XX, 390 p.

Das ungewöhnlich fasslich geschriebene, dabei aber keineswegs auf Strenge der Darstellung Verzicht leistende kleine Lehrbuch der analytischen Geometrie ist in erster Linie für beginnende Ingenieure und Architekten bestimmt. Es enthält nicht die auf harmonische Teilung bezüglichen Sätze, mit ihrer Ausnahme aber das Wichtigste über die Gerade und die Kurve zweiten Grades in der Ebene und Weniges über analytische Geometrie des Raumes. Als ein wesentlicher Vorzug darf die Sorgfalt gelten, mit welcher der Leser fortwährend auf bestimmte Beispiele hingewiesen wird, so dass das Können nicht hinter dem Wissen zurückbleibt. Zu rühmen ist auch, dass den Sätzen wiederholt mehrere in verschiedener Lage gezeichnete Figuren beigegeben sind, deren Buchstaben so gewählt wurden, dass der gedruckte Satz auf alle diese Figuren zugleich bezogen werden kann. Die Pascalsche Schnecke (S. 318) rührt, beiläufig bemerkt, nicht von Blaise Pascal, sondern von dessen Vater Etienne Pascal her.

CANTOR.

**Elements of the differential calculus** by JAMES MC. MAHON, A. M. (Dublin) assistant professor of mathematics in Cornell University and VIRGIL SNYDER, Ph. D. (Göttingen), instructor in mathematics in Cornell University. New York, Cincinnati, Chicago. American Book Company. XIV, 337 p.

Für die Schüler der Cornell University geschrieben, teilt diese Differentialrechnung die Vorzüge, welche der analytischen Geometrie von Tanner und Allen nachzurühmen waren. Die Darstellung ist bei aller Knappheit von einer beneidenswerten Klarheit, sie geht auch an wirklichen Schwierigkeiten nicht achtlos vorüber, sie ist vielmehr bestrebt, dieselben zu erörtern, soweit dieses mit Schülern am Beginne des mathematischen Studiums möglich ist. Von geometrischen Hilfsmitteln ist in umfassender Weise Gebrauch gemacht, wenn auch analytische Entwicklungen keineswegs vermieden sind. In ersterer Beziehung möchten wir auf das XIV. Kapitel über Asymptoten und auf das XVIII. Kapitel über die Zeichnung von durch ihre Gleichung gegebenen Kurven besonders rühmend aufmerksam machen. Von sinnentstellenden Druckfehlern ist uns S. 92 das Fehlen des Anfangsgliedes 1 in der Reihenentwicklung für  $e^{\sin x}$  aufgefallen.

CANTOR.

**An elementary course in the integral calculus** by DANIEL ALEXANDER MURRAY Ph. D., instructor in mathematics in Cornell University, formerly scholar and fellow of Johns Hopkins University, author of „Introductory course in differential equations“. New York, Cincinnati, Chicago. American Book Company XIV, 288 p.

Das der Gebrauchsfolge nach dritte mathematische Lehrbuch der Cornell University, die Integralrechnung von Murray, sollte ursprünglich in Herrn Hutchinson einen Mitverfasser erhalten, und wie der analytischen Geometrie, wie der Differentialrechnung aus dem Zusammenwirken je zweier Schriftsteller kein Schaden erwuchs, so wäre gewiss auch die in Gemeinschaft herausgegebene Integralrechnung ein einheitliches Buch geworden. Um so mehr musste dieses der Fall sein, nachdem aus Gründen, welche wir nicht kennen, Herr Murray sich allein der gestellten Aufgabe unterzog. Die Aufgabe der Integration ist doppelter Auffassung fähig, entweder als Summenbildung oder als inverse Operation des Differenzierens. Anders ausgesprochen: man kann vom bestimmten Integrale zum unbestimmten gelangen oder vom unbestimmten Integrale zum bestimmten. Im ersten Kapitel lehrt Herr Murray die erste, im zweiten die zweite Auffassung kennen. Dann erst kommen die eigentlichen Integrationen und deren geometrische Anwendungen, welche letztere zwischen die ersteren in scheinbar etwas unsystematischer Weise eingeschaltet sind, sowohl zwischen die Auswertung einfacher Integrale, als zwischen die mehrfachen Integrale. Zwei Kapitel sind der näherungsweise Integration und den Integralkurven gewidmet. Den Schluss des Buches bildet das Unentbehrlichste aus der

Lehre von der Integration der Differentialgleichungen. Wie eng der Verfasser die Grenzen des hier zu Behandelnden gesteckt hat, mag man daraus entnehmen, dass von singulärer Integration nur in einem ganz kurzen Zwischensatze die Rede ist.

CANTOR.

**Bauwissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung** (2. Hälfte S. 181—384) von Dr. ARWED FUHRMANN, Geheimer Hofrat, ordentlicher Professor an der Königl. Technischen Hochschule Dresden. Berlin 1899, Wilhelm Ernst & Sohn.

Das Erscheinen der ersten Hälfte dieses dritten Teils der auf im Ganzen sechs Teile berechneten Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik haben wir Bd. 44, Hist. litt. Abtlg. S. 120 angezeigt. In der zweiten Hälfte werden die Anwendungen der Differentialrechnung auf den Hochbau zu Ende geführt. Die meisten Aufgaben dieses zweiten Halbtails sind solche, in welchen grösste oder kleinste Werte gesucht werden, und auch ohne Techniker zu sein wird man leicht die Wichtigkeit dieser Aufgaben für die Praxis, aber auch das Interesse erkennen, welches sie dem Anfänger bieten müssen, ein Interesse, an welchem auch der angehende Universitätsmathematiker teilnehmen wird.

CANTOR.

**Introduzione alla economia matematica** dei professori F. VIRGILII e C. GARIBALDI. Con 19 incisioni. Milano 1899. (Manuali Hoepli) XII, 210 p.

Als Referent den Titel des neuen Bändchens aus der Sammlung Hoepli las, freute er sich in die Lage versetzt zu sein, sich in Kürze mit den Anwendungen bekannt machen zu können, welche neuere Nationalökonomien von den Lehren der Mathematik zu machen lieben, aber diese Freude sollte nicht lange anhalten, da das Buch keineswegs das leistet, was wir von ihm erwarteten. Das soll keineswegs einen Tadel des Buches einschliessen. Wir hätten unsere Erwartungen anders einrichten sollen, dann wären wir nicht enttäuscht worden. Unseren Lesern möchten wir das gleiche Gefühl ersparen, indem wir den Inhalt des Bändchens deutlicher kennzeichnen. Es ist nicht ein Überblick über nationalökonomische Lehren für den Mathematiker, sondern ein Überblick über mathematische Lehren für den Nationalökonom. Ein amerikanischer Schriftsteller Irving Fischer hat 1897 ein Sedebändchen von 84 Seiten *A brief introduction to the infinitesimal Calculus designed especially to aid in reading mathematical economics and statistics* herausgegeben, und dieses hat den Herren Virgilio und Garibaldi gewissermassen als Muster gedient, nur dass sie weiter zurückgriffen und auch aus den niedrigeren Teilen der Mathematik das Unentbehrlichste in ihren Leitfaden aufnahmen. Ausserdem enthält dieser

eine geschichtlich bibliographische Einleitung über diejenigen national-ökonomischen Schriften, welche sich mathematischer Hilfsmittel bedienen haben.

CANTOR.

**Die Methode der Variationsstatistik** von GEORG DUNCKER in Hamburg-Uhlenhorst. (Sonderdruck aus dem Archiv für Entwicklungsmechanik Bd.VIII, Heft 1.) Mit acht Figuren im Text. Leipzig 1899, Engelmann. 75 S.

Bei organischen wie bei anorganischen Naturgebilden giebt es individuelle Erscheinungen, welche, die Formeinheit nicht beeinträchtigend, so oder so auftreten können und ein Individuum von dem anderen unterscheiden lassen. Man nennt die Möglichkeit solcher individuell verschiedenen Eigenschaften die Variabilität der betreffenden Formeinheit, wenn man nicht vorzieht, eben dieses Wort Variabilität für die Wahrscheinlichkeit unter einer gegebenen Anzahl von Individuen oder Varianten das in Frage stehende Merkmal anzutreffen aufzusparen. Das Merkmal kann ein meristisches, d. h. der Zählung unterworfenes sein. Eine Blume hat so und so viele Blumenblätter, bald mehr bald weniger u. s. w. Alsdann liegt es sehr nahe, Beobachtungen über eine grosse Anzahl von Varianten, etwa über  $n$  Varianten, anzustellen und zu notieren, dass  $n_1$  mit dem meristischen Merkmal  $m_1$ ,  $n_2$  mit dem meristischen Merkmale  $m_2$ , . . .  $n_v$  mit dem meristischen Merkmale  $m_v$  versehen sind, und darin besteht die Variationsstatistik. Die Summe  $n_1 + n_2 + \dots + n_v$  muss  $n$  betragen und

$$\frac{n_1 m_1 + n_2 m_2 + \dots + n_v m_v}{n} = M$$

ist das arithmetische Mittel,

$$\sqrt[n]{(m_1^{n_1} \cdot m_2^{n_2} \cdot \dots \cdot m_v^{n_v})} = G$$

das geometrische Mittel der einer Varianten zukommenden Variationen. Trägt man die  $m$  in gleichen Abständen auf einer Abscissenaxe auf und errichtet in jedem so bezeichneten Punkte das entsprechende  $n$  als Ordinate, verbindet dann die Ordinatenendpunkte geradlinig, so erhält man das Variationspolygon. Die vorher von uns definierte Länge  $M$ , die im allgemeinen nicht ganzzahlig ist, lässt sich auch auf der Abscissenaxe vom Nullpunkte aus auftragen und führt zu einem eindeutig bestimmten Punkte  $M$  der Abscissenaxe, welchen Herr Duncker den Schwerpunkt des Variationspolygons nennt. In ihm wird die Schwerpunktsordinate errichtet, deren Länge sich aus der Gleichung der Variationskurve bestimmt, welche den Grenzfall des Variationspolygons bildet, und deren Form je nach der allgemeinsten Gestalt des Variationspolygons eine verschiedene ist. Jedesmal aber kommen Exponentialgrößen in ihr vor. Unter den gezogenen Folgerungen dürften zwei am wichtigsten sein, welche der Verfasser auf S. 56 durch gesperrten Druck hervortreten liess: 1. Individuelle oder spontane Variation findet nach dem Gesetz der Wahrscheinlichkeit von Kombinationen statt.

2. Die individuelle Variation eines Merkmales ist in den meisten Fällen abhängig von derjenigen anderer; es besteht ausgedehnte Korrelation zwischen den verschiedenen Merkmalen der Individuen.

CANTOR.

PESCHKA. **Darstellende und projektive Geometrie** nach dem gegenwärtigen Stande dieser Wissenschaft mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse höherer Lehranstalten und das Selbststudium. Erster Band. Zweite umgearbeitete und erweiterte Auflage. Mit einem Atlas von 43 lithographierten Tafeln. Leipzig und Wien 1899, Franz Deuticke.

Das vorliegende, gross angelegte Werk erschien in den Jahren 1883 bis 1885 zum ersten male bei C. Gerolds Sohn in Wien. Bald darauf zeigte es die Verlagsbuchhandlung zu sehr herabgesetzten Preisen an und nun liegt die zweite Auflage vor, welche bei Fr. Deuticke verlegt ist. Die Beurteilung, welche das Buch damals fand, war nicht durchweg zustimmend. Darauf mag sich die Stelle in der neuen Vorrede beziehen, in welcher der Verfasser „jenen wahren Freunden der Wissenschaft dankt, welche das Werk eingehend und objektiv beurteilten“.

Die neue Auflage wird als umgearbeitete und erweiterte angekündigt. Der letztere Ausdruck hat uns etwas erschreckt. Die erste Auflage umfasste schon vier starke Bände und wir fürchten, dass bei solchen Werken von einer gewissen Grenze an die Zunahme der Seitenzahl mindestens direkt proportional zur Abnahme der Leserschaft ist. Wir wollen aber dem Leser nicht Angst machen und bemerken daher ausdrücklich, dass die Sprache des Buches leicht und klar ist. Infolge davon liest es sich schnell. Der Techniker, für den die darstellende Geometrie nur Mittel zum Zweck ist, wird sich bald in demselben orientieren und finden, was er brauchen kann und was nicht. Wer aber mehr verlangt, mag sich Autoren zuwenden, welche knapper im Ausdrucke und anregender sind — aber vielleicht zuweilen an Dunkelheiten leiden.

Was die Umarbeitung des Buches betrifft, so ist diese für einige Teile des ersten Bandes eine sehr wesentliche und wir finden, dass das Werk dadurch gewonnen hat.

Die allgemeine Anordnung ist dieselbe geblieben, so dass im ersten Bande wieder die Methodenlehre behandelt wird und die Centralprojektion an den Anfang gestellt ist. Sie bildet den ersten Abschnitt.

Wir erwähnen zunächst, dass in II\* die litterale Bezeichnung und manche Benennung geändert ist.  $p$  ist jetzt die Projektion eines Punktes ( $P_c$  in I).  $BE$  ist Bildebene ( $B$  in I),  $DK$  Distanzkreis ( $D_k$ ). Die Worte: Bildflächtrace, Fluchttrace sind meistens verschwunden und durch Bildflächspur, Bildflächdurchstosspunkt, Fluchtspur ersetzt. Der Spurpunkt

\* Mit I sei die erste, mit II die zweite Auflage bezeichnet.

von I heisst nun Gegenpunkt.\* Sonderbarer Weise wird aber der Kreis, welcher die analoge Rolle wie der Gegenpunkt spielt, bald Spurkreis, bald Gegenkreis genannt. Winkel, die früher — wie allgemein üblich — griechische Buchstaben trugen, werden jetzt auch mit  $N_b$ ,  $n_b$  bezeichnet. Es scheint nach dem Gesagten, dass der Autor mit seiner früheren Bezeichnung nicht immer zufrieden war und da bedauern wir, dass er sich nicht in dieser Beziehung dem bekannten Werke von Fiedler angeschlossen hat; denn in diesem ist die einheitliche, systematische und praktische Bezeichnung eine mustergiltige. Punkt, Gerade, Ebene; Winkel, parallele Gebilde, Original, Umlegung und Bild treten da durch ihre Bezeichnung auf den ersten Blick hervor. Dieses ist für das gezeichnete Bild sehr wertvoll.

Im zweiten Kapitel des ersten Abschnittes ist die Gleichsetzung von projektiv und deskriptiv (S. 54 v. I) unterdrückt. Doch werden auch jetzt noch alle Beziehungen, welche nicht metrisch sind, einfach projektiv genannt. Da späterhin mit dem Worte projektiv ganz genau definierte Begriffe verbunden werden, so finden wir es nicht ganz korrekt, jetzt schon das Wort in einem so unbestimmten Sinne vorweg zu nehmen. Zudem genügt es ja vollständig den metrischen Problemen diejenigen gegenüber zu stellen, welche sich auf die Lagenverhältnisse beziehen.

Die in I eingeführte Einteilung von Punkt, Gerade und Ebene als Gebilde 1., 2. und 3. Stufe (S. 30) ist in II aufgegeben worden. Damit ist ein Gegensatz mit der bekannten v. Staudtschen Klassifikation der Gebilde vermieden.

Im dritten Kapitel des 1. Abschnittes war in I zu lesen, dass bei der Darstellung in Centralprojektion eine Strecke nur dann in wahrer Grösse erscheint, wenn sie in der Bildebene liegt. Der Satz ist jetzt teilweise ergänzt (S. 51). Immerhin bleibt zu bemerken, dass es noch weitere Lagen giebt, in denen Bild und Original gleich sind (Involution).

Vollständig umgearbeitet ist das vierte Kapitel des I. Abschnittes, welches die „projektive“ Geometrie\*\* behandelt. Sehr zu begrüssen ist es, dass jetzt die projektiven Beziehungen ohne beständige Vermengung mit der Centralprojektion besprochen werden. Von Reihen und Büscheln ausgehend, schreitet der Verfasser zu den involutorischen Lagen und zur Kollineation ebener Systeme fort. Dann macht er Anwendungen auf den Kreis, die Kegelschnitte, die polare Reziprocität und schliesst mit Aufgaben aus der Centralprojektion.

Neben die alten Bezeichnungen werden manche neue gesetzt.

Reihen auf derselben Geraden heissen koaxial, konjektivisch oder konlokal. Büschel, die einen Kreis erzeugen, heissen projektivisch gleich.\*\*\* Paare einer Involution heissen konjugiert, polar konjugiert. Für Potenz

\* S. 23 blieb die alte Benennung stehen.

\*\* Weiterhin heisst es wieder projektivisch.

\*\*\* Eine Bemerkung über den Sinn wäre dabei nicht überflüssig.

wird auch das Wort Modul gebraucht. Die symmetrische Punktinvolution wird Spiegelinvolution genannt etc. Wir haben den Eindruck, dass in dieser Häufung von teilweise selbst gemachten Benennungen zuweilen des Guten zuviel geschieht.

Wir bemerken zu dem Kap. 4 noch, dass jetzt in korrekter Weise (S. 162) vom vollständigen Viereck und Vierseit (in I oder) gehandelt wird. Auf S. 132 von I hiess es, dass kollineare Ebenen durch ein Paar entsprechender Punkte und 1 Paar entsprechender Geraden oder durch 2 Paare entsprechender Geraden bestimmt seien. Dieser Satz ist nun durch Hinzufügung des Kollineationscentrums berichtigt. Leider blieb die Begründung\* stehen, welche zu dem falschen Satze in I führte. Bei einigen mehrdeutigen Kegelschnittaufgaben ist die Stellung des Problems irreführend. So heisst es S. 206: Ein Kegelschnitt ist durch drei seiner Punkte und zwei seiner Tangenten gegeben. Nach der in der Geometrie gebräuchlichen Sprechweise ist aber ein Kegelschnitt durch diese Stücke nicht gegeben. (Ebenso S. 203 und 207.)

Der zweite Abschnitt des Buches war in I überschrieben: Klinographische oder schiefe Projektion. Jetzt trägt er die Hauptüberschrift: Freie Parallelprojektion, und den Untertitel: Klinographische oder schiefe und orthogonale Projektion. Im übrigen wird in dieser Studie fast genau wie in I eine schiefe Parallelprojektion mit einer Gegenebene (Distanzebene) behandelt. Nachdem die Centralprojektion ausführlich besprochen ist, lassen sich ja nach demselben Recepte viele solcher Projektionsarten „machen“. Ihre Durchführung ist eine interessante Übung. Ob sie dagegen in einem Lehrbuche einen so breiten Raum verdient wie hier, dürfte fraglich sein. Im Vergleiche zu I ist dieser Abschnitt dadurch etwas abgekürzt, dass ein Kapitel über affine Figuren gestrichen und in die projektive Geometrie verarbeitet wurde.

Der dritte Abschnitt über „kotierte Projektion und kotierte Ebenen“ ist ganz neu. Nachdem der Autor seine Arbeiten über diesen Gegenstand (1876 und 1882) zitiert hat, führt er auch De la Gournerie an. Es wäre wohl nicht unpassend, dem letzteren Namen auch eine Jahreszahl (1860) hinzuzufügen und ältere französische Autoren anzuführen. Diese behandeln den Gegenstand gewöhnlich weniger schematisch, aber mit mehr Betonung der praktischen Anwendungen auf die Topographie, als es hier geschieht.

Der vierte Abschnitt von II enthält die „Darstellungsmethoden mittels zweier Projektionen“ und beginnt mit der Orthogonalprojektion. Im Vergleiche mit I sind viele Bezeichnungen geändert und an Neubildung von Wörtern ist kein Mangel.  $BE$ ,  $AE$  oder  $VE$  heisst nun die vertikale (erste) Projektionsebene,  $GE$ ,  $HE$  die horizontale (zweite) und  $KE$  oder  $PE$  die dritte. Aus den „Halbierebenen“ des 2. und 4. Quadranten sind in II Medianebenen, Koïncidenz und Symmetrieebenen geworden. Mit ihnen hängen Median-

---

\* Da drei Punkte immer durch einen Punkt und eine Gerade ersetzt werden können.

spuren (auch Hauptspuren) und Medianaxen zusammen. In besonderen Absätzen wird von den „Incidenzen“ von Punkten, Geraden und Ebenen gesprochen. Wir können uns mit diesen fremden Benennungen für Dinge, welche ja verhältnismässig wenig vorkommen, nicht sehr befreundet. Wir glauben überdies, dass eine deutsche, wenn auch längere Bezeichnung, welche das räumliche Bild hervorruft, in der darstellenden Geometrie allen diesen scheinbaren Abkürzungen vorzuziehen ist. Halbierungsebene des II. Quadranten, Schnitt mit dieser Ebene — das ist allgemein verständlich und giebt eine bessere Vorstellung wie Medianebene, Medianspur etc.

Nicht gerade notwendig halten wir die Unterscheidung von Geraden erster und zweiter Art oder Lage. Es handelt sich dabei um Linien, welche die  $x$ -Axe rechtwinklig kreuzen. Je nachdem eine solche Linie von vorn nach hinten steigt oder fällt, soll sie von der ersten oder zweiten Art sein. Ebenen sind erster oder zweiter Art, je nachdem ihre Seitenrissspur erster oder zweiter Art ist.

Neu und sehr nützlich sind im ersten Kapitel des vierten Abschnittes einige Überlegungen über das Sichtbare und Unsichtbare im Grundriss, Aufriss und bei Schattenkonstruktionen. Dabei wird eine besondere Definition für die Punkte von zwei windschiefen Geraden eingeführt, welche auf einer projizierenden Linie liegen. Die Bilder von zwei solchen Punkten fallen in einen Punkt zusammen und dieser heisst „Deckpunkt“. Das Wort kollidiert mit der von Reuschle eingeführten Bezeichnung der Deckelemente, unter denen Punkte mit zwei zusammenfallenden Projektionen verstanden sind. Wir würden daher das Wort „scheinbarer Schnittpunkt“ (nach Fiedler) vorziehen.

Im zweiten Kapitel des vierten Abschnittes wird — wie in I — aus Grund- und Aufriss eine schiefe Projektion auf die Aufrissebene abgeleitet. In einem dritten, neuen Kapitel wird gezeigt, wie man aus Grundriss und Aufriss ein centralprojektives Bild auf die Aufrissebene herstellt. In beiden Kapiteln handelt es sich im wesentlichen darum, einen Punkt und seinen Grundriss in gegebener Richtung oder aus einem Centrum auf die Aufrissebene zu projizieren. Die Bilder sind die Vertikalspuren der Projektionsstrahlen. Wir glauben, dass sich einzig von diesem Gesichtspunkte aus die Darstellung viel einfacher gestalten würde, als wenn man besondere sogenannte Projektionsdreiecke benutzt, wie es hier geschieht. Gerne würden wir es auch sehen, wenn nun der Verfasser einen umfassenden Gebrauch von den vorausgegangenen theoretischen Erörterungen über projektive Geometrie machen würde. Die neuen Grundrisse sind natürlich affin resp. kollinear mit den alten Grundrissen u. s. f. Benutzt man diese Beziehungen, welche nur nebenbei erwähnt werden, so lässt sich nicht nur die Darstellung übersichtlicher entwickeln, sondern es wird auch die praktische Konstruktion vereinfacht und durch viele Proben bereichert.

In einem weiteren und zwar neuen Kapitel des vierten Abschnittes wird einiges über perspektivische Maßstäbe gesagt und als per-

spektivische Axonometrie betitelt. Dasselbe beschränkt sich auf kurze Andeutungen.

Das letzte Kapitel behandelt — wie in I — eine sogenannte orthographische Parallel-Perspektive. An Stelle der Grundrissebene wird eine unter  $\varphi$  gegen die vertikale Projektionsebene geneigte Ebene  $GE$  eingeführt. Das Objekt wird zuerst orthogonal auf diese projiziert. Von diesem Bilde wird eine Orthogonalprojektion auf die Aufrissebene gezeichnet.

Der fünfte Abschnitt über Axonometrie wird — wie in I — mit dem Beweise des Pohlkeschen Satzes begonnen. Dann aber ist die klinographische (warum nicht schiefe?) und die orthographische Axonometrie eingehender wie früher besprochen und es werden auch einige technische Objekte im axonometrischen Bilde dargestellt. Je nach der Anzahl der Maßstäbe wird die Axonometrie als trimetrische, dimetrische und isometrische bezeichnet. Die Bilder von Grundriss, Aufriss, Seitenriss heissen „Nebenbilder“. Wir würden axonometrischer Grundriss, Aufriss, Seitenriss — im Gegensatze zum axonometrischen Bilde — bezeichnender finden. Zum Schlusse des Abschnittes sind noch einige Aufgaben über die Bestimmung der wahren Grössen aus den axonometrischen Bildern besprochen.

Der sechste Abschnitt behandelt die „Lagenänderungen von räumlichen Gebilden“ (Transformationen). Bei den grundlegenden Erklärungen sind einige Berichtigungen vorgenommen worden. Zwar wird noch an der Unterscheidung zwischen einfacher und doppelter Drehung (um Axe oder Punkt) festgehalten. Aber es wird jetzt bewiesen, dass die letztere sich auf eine Drehung um eine Axe (nicht um zwei wie in I) zurückführen lässt. Auch ist jetzt die allgemeine Lagenveränderung auf eine Parallelverschiebung und auf eine Drehung um eine Axe reduziert.

Dem Abschnitte über Transformation ist in II ein Schlusskapitel über die Projektionsart angehängt, welche der Verfasser Parallelogrammprojektion oder  $\pi$  Projektion nennt. Zwei Ebenen sind unter  $\omega$  geneigt und schneiden sich in  $x$ . Eine dritte Ebene steht zu  $x$  senkrecht und schneidet die zwei Ebenen resp. in  $y$  und  $z$ . Nun wird eine neue Projektionsmethode in der Weise gemacht, dass die Punkte in der Richtung von  $y$  auf  $xz$  und in der Richtung von  $z$  auf  $xy$  projiziert werden. In I war die Besprechung dieser Methode einem Abschnitte eingereiht, der besondere Darstellungsarten behandelte. Dieser Abschnitt ist nun weggefallen.

Der siebente Abschnitt über Polyeder führt auch jetzt den Titel: „Gebilde, welche aus einer endlichen Anzahl ebener Flächenstücke zusammengesetzt sind“ und beginnt mit einer ausführlichen Auflösung aller Fälle eines Dreikantes. Bei der Besprechung des Polyeders ist die Frage nach der Sichtbarkeit der einzelnen Teile neu bearbeitet und berichtigt. Der Satz: „Sind die Eckpunkte einer Kante sichtbar, so ist es auch die Kante“ findet sich nicht mehr. Gerne hätten wir auch das Wort „Developpierung“ verschwinden sehen. An der Darstellung der regulären Körper, der Schnitte von Pyramiden, Prismen und der Durchdringung dieser Körper ist nichts geändert. Einige allgemeine Betrachtungen über

den Schatten von ebenen Figuren und „von durch Ebenen begrenzten Körpern“ sind neu hinzugefügt.

Der achte Abschnitt über centrische Kollineation und Reliefperspektive war in I unter dem Abschnitte über besondere Darstellungsmethoden behandelt worden. Jetzt ist er an den Schluss des ersten Bandes gestellt, etwas durchsichtiger entwickelt und an einigen Stellen berichtigt. Der Reliefperspektive, welche früher eigentlich nur im Titel „Reliefprojektion“ angedeutet war, sind nur einige allgemeine Erörterungen gewidmet. Der Abschnitt wird mit dem Satze über drei Raumsysteme  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$  geschlossen, von denen je zwei centrisch collinear liegen und deren Centra Punkte einer Geraden sind. Bei diesem Satze wäre es noch nötig zu bemerken, dass die Kollineation zwischen  $\Sigma_1$  und  $\Sigma_3$  diejenige sein muss, welche durch die Kollineationen von  $\Sigma_1 \Sigma_2$  und  $\Sigma_2 \Sigma_3$  vermittelt wird. Ohne diese Voraussetzung gilt der Satz nicht.

Was im Anhang über die Anwendung der verschiedenen Projektionsarten gesagt ist, findet sich ebenso in I.

Zum Schluss erwähnen wir noch einige Worte und Redewendungen, welche uns aufgefallen sind. Sehr oft findet sich das Wort „weitere“. Häufig nimmt der Verfasser eine Sache „anstandslos“ oder „ohne Anstand“ an. Zuweilen ist von „prinzipiellen“ Aufgaben die Rede. Die Wörter „behufs“, „insolange als“ muten uns etwas altmodisch an. Merkwürdig ist auch die Art, wie der Verfasser das Wort „zu etwas übergehen“ gebraucht. Er sagt: „Wir übergehen auf den konstruktiven Teil“ oder „Übergeht ein Paar von Punkten in ein anderes“ und dergleichen mehr.

Wir wünschen nun, dass der grosse Fleiss des Verfassers, der sich auch in der Ausführung der schönen Tafeln bekundet, durch eine dritte Auflage belohnt werde. Dann hoffen wir, dass in derselben die Systematik nicht erweitert, sondern konzentriert werden möge. Dadurch würde Raum gewonnen, um durch Aufgaben und praktische Beispiele die Theorie zu beleben und zu zeigen, wie durch die projektive Geometrie die Genauigkeit und Durchsichtigkeit der Konstruktionen erhöht werden kann.

Dr. CHR. BEYEL.

L. RIPERT, commandant du génie en retraite. **La dualité et l'homographie dans le triangle et le tétraèdre.** Paris 1898, Gauthier-Villars.

Der Verfasser hatte im *Intermédiaire des mathématiciens* zwei Fragen gestellt (Bd. IV, Nr. 1114, 1142), welche sich auf das Dreieck und Tetraeder beziehen. Am Schlusse dieses Bandes teilt der Redakteur F. Lemoine mit, dass diese Fragen und einige andere (Nr. 1141, 1143) in der obigen Broschüre von Ripert eine Beantwortung finden. Die Broschüre erschien dann als Supplementheft zum fünften Bande des „*Intermédiaire*“. Der Verfasser will in derselben zeigen, dass das Gesetz der Dualität auch für die metrischen Verhältnisse in viel weiterem Umfange gültig sei als bis jetzt angenommen wurde. Zunächst soll dies für einige Beispiele aus der

„Geometrie des Dreiecks“ nachgewiesen werden. Dieser wird dann eine „Geometrie des Tetraeders“ gegenüber gestellt und es werden duale Beziehungen hervorgehoben.

Wir möchten die kleine Schrift ein geistreiches Feuilleton nennen, voll von anregenden Fragen und originellen Gedanken. Der Verfasser will nach keiner Richtung etwas abgeschlossenes bieten, sondern nur Definitionen aufstellen, Wege zeigen und diesen besondere Namen geben. Gegen den Vorwurf, als ob in letzterer Hinsicht zu viel geschehe, wird ein treffendes Wort von L. Lemoine zitiert: „Will man sich im Labyrinth einer Stadt zurechtfinden, so muss man den Strassen Namen geben. Ähnlich verhält es sich in der Geometrie.“ Wir sagen nichts gegen diesen Ausspruch, empfehlen aber Vorsicht in der Bildung von neuen Worten und fügen hinzu, dass wir eine Stadt mit grossen, breiten Strassenzügen und klarer Anlage einer solchen mit vielen kleinen Gassen vorziehen. Und so freuen wir uns auch, wenn wir in der Geometrie einen guten Plan erkennen. Wir glauben nun, dass für die „Geometrie des Tetraeders“ in der vorliegenden Schrift die Grundlinien eines solchen Planes zu sehen sind, der unsere volle Beachtung verdient.

CHR. BEYEL.

---

Prof. W. BINDER. Die kotierte Darstellung auf einer Bildebene (mit zwei Figurentafeln) nebst einem Vorschlage: Zur einheitlichen Bezeichnung in der darstellenden Geometrie. Wiener-Neustadt 1897 und 1898.

Diese kleine Schrift erschien als Beilage zu den Jahresberichten der Real- und Gewerbeschule in Wiener-Neustadt. Die österreichischen „Instruktionen“ für den Unterricht in der darstellenden Geometrie verlangen „die Durchführung der Elementaraufgaben zuerst auf einer Bildebene.“ Im Sinne dieser Weisung giebt der Verfasser die Konstruktionen in kotierter Darstellung auf einer Bildebene. Die Methode, nach welcher er dabei verfährt, ist sehr ansprechend und zeigt den geschickten Schulmann; Stereometrische Sätze und Definitionen sind an passender Stelle eingeschoben, von der Affinität wird vielfach Gebrauch gemacht und wir glauben daher gern, dass der Verfasser in seiner langjährigen Thätigkeit mit diesem Lehrgange gute Erfahrungen machte.

Im einzelnen sei folgendes bemerkt: Die in Nr. 32 angeführte Bedingung für zwei sich schneidende Gerade dürfte wohl schon früher hervorgehoben werden. Der Verfasser schreibt stets das „Intervalle“. Wir denken „Intervall“ genügt. Unter Strahlenbüschel versteht man jetzt allgemein die Geraden durch einen Punkt. Der Zusatz: „centrales“, welcher den Gegensatz zu „Parallelstrahlenbüschel“ ausdrücken soll, scheint uns überflüssig. Das Wort Strahlensystem wird in der Litteratur in anderem Sinne gebraucht als es beim Verfasser geschieht. Da es sich um eine Definition handelt, liesse sich schon auf dieser Stufe das Wort Involution

einführen. Was den Vorschlag für einheitliche Bezeichnung betrifft, so sind wir sehr damit einverstanden, dass Punkte, Gerade und Ebenen durch verschiedene Schriftgattungen unterschieden werden. Im einzelnen würden wir aber die Fiedlersche Bezeichnung vorziehen. Für die Ebenen kleine griechische Buchstaben einzuführen, scheint uns unthunlich, da diese allgemein für Winkel verwendet werden. Die mancherlei Striche, welche der Verfasser vorschlägt, verlieren sich bei Zeichnungen, welche aus Strichen aller Art bestehen. Immerhin freut uns jeder Vorschlag, welcher uns einer definitiven Lösung dieser Fragen näher bringt.

Dr. CHR. BEYEL.

---

WENZELAUS PÖZL. *Elemente der darstellenden Geometrie zum Schulgebrauche zusammengestellt. Erster Teil. Geradlinige ebene Gebilde. Neue Ausgabe. München 1897, Th. Ackermann.*

Das vorliegende Büchlein soll ein Leitaden für den ersten Unterricht in der darstellenden Geometrie sein. Die Einteilung ist eine übersichtliche und klare. An die Definitionen und Sätze schliessen sich in guter Auswahl die bekannten Elementaraufgaben an. Kreise und Ellipsen sind dabei ausgeschlossen.

Wir glauben, dass der Verfasser bei seinem Lehrgange etwas zu viel mit allgemeinen Begriffen arbeitet und zu wenig die Raumanschauung in den Vordergrund stellt. Einige Beispiele mögen dies beweisen. Von Anfang an wird das Wort „Deckgeraden“ für Linien eingeführt, welche in derselben projizierenden Ebene liegen. Bei der Konstruktion einer Geraden mit einer Ebene wird dann gesagt: „Man konstruiere zu der Geraden eine in der gegebenen Ebene liegende Deckgerade.“ Wir gestehen, dass dadurch die Konstruktion für alle Fälle auf die eleganteste „Formel“ gebracht ist, aber diese ruft keine räumliche Vorstellung und verfehlt daher auf dieser elementaren Stufe ihren Zweck. Bei der Bestimmung von wahren Grössen wird mit der „Methode des Projizierens auf die eigene Ebene“ begonnen und es wird zuerst die Transformation einer Projektionsebene besprochen und spezialisiert. Wir denken, dass der Schüler ein viel anschaulicheres Bild vom Raumvorgange erhält, wenn man ihm sofort von der „Umklappung“ redet. Diese wird erst im Schlusskapitel behandelt (im Zusammenhange mit der Affinität), nachdem die Hauptaufgaben über wahre Grössen gelöst sind.

Wir bemerken noch einige Einzelheiten.

Abweichend von dem gewöhnlichen Gebrauche dreht der Verfasser die Aufrissebene und die Seitenrissebene in die Grundrissebene. Ein besonderes der sieben Kapitel widmet er der „gelehnten“ Geraden. Darunter wird eine Gerade verstanden, welche die  $x$ -Axe rechtwinklig kreuzt. „Gelehnte Ebene“ ist eine Normalebene zur  $x$ -Axe.

In der Bezeichnung schliesst sich der Autor keinem grösserem Werke ganz an; doch ist er konsequent. Punkte werden mit kleinen, Gerade mit

grossen Buchstaben bezeichnet. Die Projektionen tragen die Indices 1, 2, 3. Die Axen, für welche die Buchstaben  $x, y, z$  allgemein angenommen sind, werden als  $1\mathfrak{A}_2, 1\mathfrak{A}_3$  und  $2\mathfrak{A}_3$  unterschieden. Spuren heissen  $S_1, T_2; M_1, N_2$  u. s. f. Wir finden diese Bezeichnungsweise etwas schwerfällig.

Die beigelegten Holzschnitte geben nur die Hauptmomente der Konstruktionen und entsprechen so dem Zwecke eines „Leitfadens“ vollkommen.

Dr. CHR. BEYEL.

S. BACHMANN. Versuch einer Gesamtdarstellung dieser Wissenschaft in ihren Hauptteilen. Vierter Teil. Die Arithmetik der quadratischen Formen. Erste Abteilung. Leipzig 1898, B. G. Teubner. VIII und 668 S.

Über die beiden ersten Teile des Bachmannschen Unternehmens, die „Elemente der Zahlentheorie“ und die „Analytische Zahlentheorie“ ist vom Referenten in dieser Zeitschrift Bd. 40 berichtet worden. Als dritten Teil des Ganzen sieht der Verfasser seine bekannte, 1872 erschienene „Kreisteilung“ an, deren Neubearbeitung er sich vorbehält.

Der vierte Teil, dessen erster Band vorliegt, ist dem eigentlichen Kerne der höheren Zahlentheorie gewidmet, der Theorie der quadratischen Formen  $F_2$  mit einer beliebigen Zahl von Unbestimmten. Getreu seinem pädagogischen Prinzipie stellt der Verfasser eine ausführliche Diskussion der ternären  $F_2$  (kürzer „ $C_2$ “) voran, (S. 7—271) ehe er die  $F_2$  von  $n$  Variablen in Angriff nimmt.

Ein zweiter Band soll von der Reduktion der  $F_2$  handeln, in enger Verbindung mit rein analytischen und geometrischen Gesichtspunkten (Einführung des Stetigen, Gittertheorie).

Das erste Kapitel enthält als zweckmässige Einleitung die algebraischen Grundlagen und Grundformeln für die Äquivalenz zweier  $C_2$  resp. einer  $C_2$  mit sich selbst. Hierbei wird direkt an art. 266—285 der *disquisitiones Arithmeticae* von Gauss angeknüpft. Der Urform

$$\left\{ \begin{aligned} f(x, x', x'') = f(x) = f_x = f &= ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 \\ &+ 2bx'x'' + 2b'x''x + 2b''xx' \end{aligned} \right.$$

wird konsequent die „adjungierte“ Form  $F$  gegenübergestellt, was ungezwungen zu der Unterscheidung zwischen „bestimmten“ („definierten“) und „unbestimmten“ („indefinierten“)  $f$  führt. So ergibt sich weiter mit den einfachsten Hilfsmitteln die „Grundformel“ (S. 10):

$$1) \quad f_x^2 f_y^2 - f_{xy}^2 = DF_{ux} - f_{xy}$$

(nebst ihrer adjungierten), wo  $f_{xy}$  die bekannte Polarenbildung von  $f$  ist,  $D$  die Determinante von  $f$ , und die  $u$  die aus den  $x$  und  $y$  gebildeten zweireihigen Determinanten („Linienkoordinaten“) bedeuten.

Sodann wird  $f$  einer linearen unimodularen Substitution  $S$  unterworfen, wodurch  $f$  in  $f_1$  übergehen möge. Umgekehrt giebt es (S. 18) bei beliebig gegebenen  $f, f_1$  noch eine  $\infty^3$ -Schar von  $S$ , die die Überführung leisten;

man erhält aber nach Hermite (1853/54) schon dadurch alle, dass man eine von ihnen mit den  $\infty^3 S$ , die  $f$  in sich („automorph“) transformieren, zusammensetzt. Zur Aufstellung eben dieser  $\infty^3$  automorphen  $S$  wird einmal eine bisher wenig beachtete Herleitung von G. Cantor (Habilitationsschrift, Halle 1869) mitgeteilt, die, was erlaubt ist, als intermediäre Form die „Normalform“  $x_1, x_3 - x_2^2$  zu Grunde legt, dann aber auch eine kürzere und direkte Herleitung, ohne Benutzung einer Zwischenform, aus den Transformationsrelationen gegeben. Historisch ist dabei zu bemerken, dass Hermite die fragliche Aufgabe zwar „im allgemeinen“ erledigt hat, indessen für einen gewissen Ausnahmefall eine Lücke offen liess, die erst Bachmann 1873 ausfüllte; andererseits ist die Cantorsche Methode eine für alle Fälle gültige. Hierzu hätte der Verfasser noch erwähnen können, dass die Originalabhandlung Hermites im *Cambr. and Dublin Math. Journal* Bd. 9 (1854) steht, wo die Methode auch auf  $n$  Variable ausgedehnt wird; ausserdem hätten die sich anschliessenden Arbeiten Cayleys berücksichtigt werden können, die die Hermitesche Methode sehr viel mehr ins einzelne verfolgen (vergl. jedoch einige Nachträge auf S. 398).

Das zweite Kapitel bringt die grundlegenden arithmetischen Sätze und Begriffe. Der Verfasser beschränkt sich der leichteren Darstellung halber auf  $C_2$  mit ungerader Determinante  $D$ , und daher auch unter den primitiven Formen auf die „eigentlichen“, für die die Koeffizienten  $a, a', a'', 2b, 2b', 2b''$  von  $f$  den grössten gemeinsamen Teiler  $\sigma = 1$  haben.

Haben dann die Koeffizienten  $A, A', A'', B, B', B''$  von  $F$  den grössten gemeinsamen Teiler  $\Omega$ , so wird  $D$  durch  $\Omega^2$  teilbar,

$$2) \quad D = \Omega^2 \Delta.$$

Nach Eisenstein (1847) werden nunmehr die  $C_2$  der Determinante  $D$  in „Ordnungen“ zusammengefasst, für die jeweils  $\Omega, \Delta$  dieselben Werte haben (S. 42). Dabei ist die stillschweigende Voraussetzung, dass alle auftretenden Buchstaben (also die Koeffizienten von  $f$ , die Elemente von  $S$  u. s. f.) ganze Zahlen sind. Umgekehrt entspricht jedem quadratischen Teiler  $\Omega$  von  $D$  thatsächlich auch eine Ordnung. Formen derselben Klasse, die also untereinander äquivalent sind, gehören auch zu derselben Ordnung; umgekehrt ist die Anzahl der verschiedenen Formenklassen der Ordnung  $(\Omega, \Delta)$  eine endliche, wie vermöge einer besonderen „Reduktion“ von  $f$  nach Gauss bewiesen wird. Es wird mit Recht der wichtige Umstand betont, dass im Sinne der früheren „algebraischen“ Äquivalenz eine  $C_2$  nur die eine Invariante  $D$  besitzt, dagegen im Sinne der jetzigen „arithmetischen“ Äquivalenz die beiden Invarianten  $\Omega, \Delta$ , während  $D$  erst als eine aus ihnen abgeleitete Invariante erscheint (S. 44).

Der Verfasser wendet sich zu der Einführung des ebenfalls Eisenstein zu verdankenden fundamentalen Geschlechtsbegriffes, die in einfachster Weise aus der Grundformel 1) hergeleitet wird. Gibt man nämlich den Veränderlichen  $(x), (y)$  Werte, für die  $f$  nicht teilbar wird durch  $\omega$ , wo  $\omega$  irgend ein Primfaktor von  $\Omega$  ist, so folgt aus 1) sofort:

$$3a) \quad \left(\frac{f(x)}{\omega}\right) = \left(\frac{f(y)}{\omega}\right),$$

unter der Klammer  $\left(\frac{f}{\omega}\right)$  das Legendresche Symbol verstanden. Also hat  $f$  bez.  $\omega$  einen durch den Wert von  $\left(\frac{f}{\omega}\right)$  bestimmten (quadratischen) „Charakter“. Wendet man analog 1) auf die adjungierte primitive „reziproke“ Form  $\mathfrak{F} = \frac{F}{\Omega}$  an bez. eines Primfaktors  $\delta$  von  $\Delta$ , so hat man ebenso:

$$3b) \quad \left(\frac{\mathfrak{F}(x)}{\delta}\right) = \left(\frac{\mathfrak{F}(y)}{\delta}\right),$$

d. h. auch bez.  $\delta$  kommt der Form  $f$  ein durch den Wert von  $\left(\frac{\mathfrak{F}}{\delta}\right)$  bestimmter Charakter zu. Alle so resultierenden Einzelcharaktere von  $f$  definieren zusammengenommen den „Charakter“ von  $f$ , und alle  $f$  derselben Ordnung, welche gleichen Charakter haben, bilden ein „Geschlecht“ von Formen (S. 53). Ist  $\mu$  resp.  $\nu$  die Anzahl der  $\omega$  resp.  $\delta$ , die nicht in  $\Delta$  resp.  $\Omega$  aufgehen, während  $\rho$  die Anzahl der  $\Omega$ ,  $\Delta$  gemeinsamen Primfaktoren ist, so ist die Anzahl aller überhaupt denkbaren Geschlechter der Ordnung  $(\Omega, \Delta)$ , wie leicht abzuzählen gleich  $2^{\mu+\nu+2\rho}$ , während die Frage nach der wirklichen Existenz aller dieser Geschlechter auf später verschoben wird.

Um den Leser möglichst allseitig zu orientieren, begründet der Verfasser die Theorie der Geschlechter noch auf einem gänzlich anderen Wege, im Anschluss an die Preisarbeit von Minkowski (1887), auf Grund eines auch sonst sehr nützlichen Satzes von St. Smith (1867). Danach giebt es, falls  $N$  eine beliebig gegebene ganze Zahl ist, in der Klasse von  $f$  stets eine Form  $\varphi$  mit der Reziproken  $\Phi$ , so dass für sämtliche gleichstellige Koeffizienten die Kongruenzen herrschen (S. 54):

$$4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi \equiv \alpha x^2 + \alpha' \Omega x'^2 + \alpha'' \Omega \Delta x''^2 \\ \Phi \equiv \alpha' \alpha'' \Omega \Delta x^2 + \alpha'' \alpha \Delta x'^2 + \alpha \alpha' x''^2 \\ 1 \equiv \alpha \alpha' \alpha'' \end{array} \right\} \text{ mod. } N.$$

Nimmt man dann  $N = \Omega \Delta$ , so ergeben sich die obigen Charaktereigenschaften von  $f$  ganz von selbst (S. 59).

Das dritte Kapitel tritt an das Problem heran, die sämtlichen „Darstellungen“ einer gegebenen Zahl resp. einer gegebenen binären (quadratischen) Form durch eine  $C_2$  zu liefern, und schliesst sich direkt an Gauss an (Disq. art. 278—285). Die erste Aufgabe ist in der zweiten enthalten; letztere wiederum kommt (S. 88) auf folgende zwei Fundamentalaufgaben zurück; erstens: über die Äquivalenz oder Nichtäquivalenz zweier Formen derselben Ordnung zu entscheiden; zweitens im Falle der Äquivalenz alle ganzzahligen Transformationen der einen in die andere anzugeben. Da die erste Aufgabe des allgemeinen Hilfsmittels der Reduktion bedarf, bleibt sie dem zweiten Bande vorbehalten; die zweite dagegen, die man noch so vereinfachen kann, dass man nach allen ganzzahligen automorphen  $S$  einer  $C_2$  fragt, wird sofort (Kap. IV) in Angriff genommen und auf Grund der

früher entwickelten algebraischen Hilfssätze durchgeführt. Die Lösung wird dadurch erheblich erleichtert (S. 91), dass es gestattet ist, die vorgelegte  $C_2$  durch eine andere, passend ausgewählte Form  $C'_2$  der nämlichen Klasse zu ersetzen; diese Auswahl geschieht dann so, dass  $C'_2$  den Smithschen Kongruenzen in gewisser Weise zu genügen hat. Die bestimmten  $C_2$  unterscheiden sich dabei insofern wesentlich von den unbestimmten, dass die ersteren nur eine endliche Zahl ( $\vartheta$ ), die letzteren dagegen eine unendliche Menge automorpher  $S$  zulassen (S. 93); bei den letzteren werden aus einer ersten gefundenen Lösung nach einer einfachen Regel (S. 96) alle übrigen bestimmt. Die Pellsche Gleichung aus der Theorie der binären quadratischen Formen hat hier ihr Analogon in:

$$5) \quad t^2 + F_{\nu^2} = 1 \text{ resp. } 4.$$

Im nächsten Kapitel wird im wesentlichen eine Rekapitulation (siehe die Analytische Zahlentheorie des Verfassers, 9. Abschn.) der Theorie der Geschlechter der binären Formen gegeben, soweit sie hier erforderlich ist zur Behandlung der Darstellbarkeit der binären Formen durch ternäre. Der Verfasser unterlässt aber hierbei nicht (S. 127), auch einer gänzlich anderen und prinzipiell wichtigen Definition des Geschlechtes einer  $C_2$  zu gedenken, die von Eisenstein (1852) angebahnt und von Smith ausgeführt ist, einer Definition, die auf dem neuen Hilfsmittel einer (unimodularen) Substitution mit rationalen Koeffizienten  $r_{ik}$  beruht. Wird eine solche Substitution, wenn auch noch der Generalnenner der  $r$  prim ist zu  $2\Omega\Delta$ , mit  $\Sigma$  bezeichnet, so besteht das Kriterium des gleichen Geschlechtes für zwei  $C_2$  der Ordnung  $(\Omega, \Delta)$  darin, dass sie durch eine  $\Sigma$  ineinander überführbar sind.

Das sechste Kapitel ist den positiven Formen  $C_2$  der Ordnung  $(\Omega, \Delta)$  gewidmet, für die also  $\Omega$  positiv ausfällt. Und zwar wird für diesen Fall sofort zur Aufstellung des dritten und wichtigsten der Eisensteinschen Begriffe, des „Maßes“ geschritten. Man unterwerfe eine  $C_2$  allen unimodularen  $S$ , so resultieren alle mit  $C_2$  äquivalenten Formen, und zwar, wie man leicht sieht, jede gleich oft, nämlich  $\vartheta$ -mal, wenn  $\vartheta$ , wie oben, die (endliche) Anzahl der automorphen  $S$  von  $C_2$  bezeichnet. Ganz abweichend von dem Verhalten der binären Formen, wo die entsprechende Anzahl  $\tau$  nur von der Determinante  $D$  abhängt und für positive primitive Formen im allgemeinen gleich  $\frac{1}{2}$  ist, ist hier  $\vartheta$  mit  $C_2$  selbst veränderlich; die Klasse von  $C_2$  wird also um so „dichter“ an Formen sein, je kleiner  $\vartheta$ , oder je grösser  $\frac{1}{\vartheta}$  ist, d. h. die Anzahl der Formen einer Klasse ist proportional mit dem Bruche  $\frac{1}{\vartheta}$ , der somit Maß (Dichtigkeit, weight) der Klasse oder jeder  $C_2$  der Klasse genannt wird (S. 134). Die Summe  $\sum \frac{1}{\vartheta_i}$  der Maße mehrerer Klassen  $C$ , z. B. der eines Geschlechtes oder einer Ordnung, heisst das Maß des Geschlechtes resp. der Ordnung. Maß der Darstellung einer Zahl ist das Maß der darstellenden Form,

Maß der Darstellung einer binären Form durch eine ternäre das Produkt beider Maße, endlich Maß eines Systems von Darstellungen die Summe der bez. Maße. Über diesen Begriff des Maßes werden einige Sätze abgeleitet, die dann sofort auf die  $C_2$  der Ordnung  $(1, 1)$  angewendet werden; letztere bilden nur eine Klasse, repräsentiert durch

$$f = x^2 + x'^2 + x''^2,$$

wo zugleich  $\mathfrak{F} = f$ .

Hieran schliessen sich die Legendreschen und Gauss'schen Sätze über die Darstellung einer Zahl, die nicht von der Form  $4n$  oder  $8n + 7$  ist, als Summe dreier Quadrate, mit Hinzuziehung der von Dirichlet gegebenen Vereinfachungen, sowie der Beweis des berühmten Fermatschen Satzes, dass sich jede positive ganze Zahl als Summe von vier Quadratzahlen darstellen lässt (S.150), und seiner Verallgemeinerung, dass jede ganze Zahl als Summe von  $n$  (oder weniger) Polygonalzahlen  $n^{\text{ter}}$  Ordnung darstellbar ist (S.154).

Kap. 7 geht zur Betrachtung der positiven  $C_2$  überhaupt wieder zurück, um allgemein das Maß eines Geschlechts und sodann einer Ordnung solcher Formen zu ermitteln. Es ist historisch von Interesse, dass Eisenstein, der die Aufgabe zuerst löste (1852), selbst angiebt, er sei zu seinen Resultaten gelangt bei dem vergeblichen Bemühen, die scheinbar weit näher liegende Aufgabe der Bestimmung der Klassenanzahl zu erledigen. Von prinzipieller Wichtigkeit ist dabei der Eisensteinsche Hilfsbegriff der reduzierten Substitutionen. Indem wir uns hier auf  $n = 3$  beschränken, sei  $S$  eine Substitution von positivem Modul  $M$ . Alle aus  $S$  durch Zusammensetzung mit allen unimodularen Substitutionen  $T$  entstehenden Substitutionen  $U = ST$  bilden die „Klasse der mit  $S$  äquivalenten“ Substitutionen. Wenn  $S$  gegeben, so giebt es immer nur eine „reduzierte“  $T$  von der Art, dass  $U$  die Form hat:

$$6) \quad U = \begin{pmatrix} \delta & 0 & 0 \\ \varepsilon' & \delta' & 0 \\ \eta'' & \vartheta'' & \delta'' \end{pmatrix},$$

wo  $\delta'$ ,  $\delta'$ ,  $\delta''$  positive ganze Zahlen sind, deren Produkt  $= M$  ist, während  $\varepsilon'$ ,  $\eta''$ ,  $\vartheta''$  den Bedingungen genügen:

$$7) \quad 0 < \varepsilon' < \delta', \quad 0 < \left\{ \begin{matrix} \vartheta'' \\ \eta'' \end{matrix} \right\} < \delta'',$$

oder kürzer: „In jeder Klasse äquivalenter Substitutionen giebt es stets eine einzige reduzierte Substitution“ (S.164). Nun ist leicht zu sehen, dass aus einer  $C_2$  von der Determinante 1 vermöge einer geeigneten ganzzahligen  $S$  das  $D$ -fache einer  $C'_2$  mit beliebig vorgeschriebener Determinante  $D$  hergeleitet werden kann. Es ist aber von Bedeutung, die sämtlichen  $S$  der gemeinten Art zu ermitteln; hierbei darf man sich dann auf die reduzierten beschränken (S.168); deren Anzahl ergibt sich einfach als  $\Pi(d+1)$ , wo  $d$  alle  $n$  Primfaktoren von  $D$  durchläuft, d. i.

die Summe aller Teiler von  $D$  (S. 171). Soll auch  $C'_2$  eine gegebene Form sein, so erhält man das Kriterium für die Lösbarkeit der Aufgabe, dass  $C'_2$  einem bestimmten Geschlecht  $G$  anzugehören hat (S. 174). Somit ergibt sich  $\frac{24 \cdot 2^x}{3}$  als Anzahl der reduzierten Substitutionen vom Modul  $D^2$ , die  $C_2$  in das  $D$ -fache einer Form der Klasse von  $C'_2$  verwandeln; kombiniert man dies Resultat mit dem der S. 171, so erhält man die Eisensteinsche Formel (S. 175) für das Maß  $M$  des Geschlechtes  $G$ :

$$8) \quad M = \frac{1}{24 \cdot 2^x} \Pi(d+1).$$

Mit Benutzung der analytischen Methoden Dirichlets lässt sich das Ergebnis nach Smith und Minkowski noch wesentlich verallgemeinern. Es liegt dabei das fruchtbare Prinzip zu Grunde, das Maß eines Systemes von Darstellungen gewisser, von  $\Omega$  und  $\Delta$  abhängiger Zahlen durch Formen  $\mathfrak{F}$  nach zwei Summationsmethoden abzuführen: durch Vergleichung ergibt sich dann unmittelbar das Maß des Geschlechtes (S. 191), und daraus auch ohne Schwierigkeit das Maß  $M$  der Ordnung ( $\Omega, \Delta$ ) selbst (S. 196).

War bisher nur von bestimmten  $C_2$  die Rede, so berichten die beiden folgenden Kapitel, die den Schluss des ersten Abschnitts bilden, über einzelne Untersuchungen aus der schwierigeren und noch weniger entwickelten Theorie der unbestimmten  $C_2$ . Hier drängt sich als erste Aufgabe auf die ganzzahlige Auflösung der Gleichung  $C_2 = 0$ , die wiederum auf die der einfacheren:

$$9) \quad ax^2 + a'x'^2 + a''x''^2 = 0$$

zurückkommt (S. 198). Man darf annehmen, dass  $a, a', a''$  zu je zweien relativ prim und ohne quadratische Teiler sind, und überdies

$$D = aa'a'' > 0$$

ist. Dann stellte schon Legendre (1784) mittels eines Reduktionsverfahrens von Lagrange (1767) als Kriterium der ganzzahligen Auflösbarkeit von 9) auf, dass  $-a'a''$ ,  $-a''a$ ,  $-aa'$  resp. von  $a, a', a''$  quadratische Reste sind (S. 202). Der Verfasser zieht es aber vor, das Verfahren von Gauss (Disq. Art. 294) anzugeben, das direkt aus der Theorie der  $C_2$  geschöpft ist, sowie bez. der Ableitung aller Lösungen aus einer einzigen einige nicht unwesentliche Ergänzungen von Cantor und Dedekind.

Das obige Kriterium ist übrigens um so interessanter, als es die Grundlage bildete für den ersten (noch unvollständigen) Beweis, der für das quadratische Reziprozitätsgesetz von Legendre (1785) gegeben ist; andererseits enthält jenes Kriterium nach Arndt (1859) einen so durchsichtigen Beweis für den Gauss'schen Satz von der Duplikation der (binären) Klassen (siehe die „Elemente der Zahlentheorie“), dass man beide That-sachen geradezu als äquivalent betrachten kann (S. 221).

Die ganzzahlige Auflösung von 9) zieht auch die rationale Auflösung der Gleichung

$$10) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0$$

nach sich; das letztere Problem war auf elementarem Wege schon von Euler und vollständig von Lagrange (1767) behandelt worden.

Das Schlusskapitel des ersten Abschnitts beschäftigt sich mit der Klassenanzahl eines Geschlechtes von unbestimmten  $C_2$ . Die Eisensteinsche Vermutung (1851), dass jedes Geschlecht unbestimmter  $C_2$  nur aus einer einzigen Klasse bestehe, haben die Untersuchungen des leider kürzlich verstorbenen Arnold Meyer (1871, 1888) in gewissem Umfange bestätigt. Der Verfasser hat sich bemüht, aus den nicht einfachen Darlegungen A. Meyers das herauszugreifen, was auch für einen weniger vorgebildeten Leser verständlich ist. Das Hauptresultat lautet, dass zwei unbestimmte  $C_2$  einer Ordnung  $(\Omega, \Delta)$  für die  $\Omega, \Delta$  relativ prim sind, derselben Klasse angehören, sobald sie desselben Geschlechtes sind, d. i. jedes Geschlecht solcher  $C_2$  besteht in der That nur aus einer einzigen Klasse (S. 251), (ein Satz, den A. Meyer auch auf  $n$  Variable ausgedehnt hat). Dadurch erfährt zugleich die Theorie der automorphen  $S$  einer unbestimmten  $C_2$  eine wesentliche Ergänzung, insofern eine gewisse dort auftretende Hilfgleichung immer ganzzahlige Lösungen besitzt (S. 256).

Bei der Besprechung des zweiten Abschnitts, der von den

$$F_2(x_1 x_2 \dots x_n)$$

handelt, müssen wir uns kürzer fassen, da allein eine Erklärung einer grossen Reihe von verwickelten Fundamentalbegriffen einen zu grossen Raum beanspruchen würde. Minkowski hat die Theorie der  $F_2$  in voller Allgemeinheit behandelt; der Verfasser zieht es aber vor, wie bei den  $C_2$ , die Beschränkung auf  $F_2$  mit ungeraden Determinanten eintreten zu lassen, und schiebt zudem behufs leichteren Verständnisses die Theorie der linearen Formen  $F_1$  als Grundlage voraus, wie sie von Smith (1861) und besonders eingehend von Frobenius (1879, 1880) entwickelt worden ist.

Nach einleitenden algebraischen Hilfssätzen über Determinanten und Zusammensetzungen bilinearer Formen werden im Kapitel 2 die „Elementarteiler von Zahlensystemen“ auseinandergesetzt. Man geht am zweckmässigsten aus von der Frage nach allen ganzzahligen Lösungen der  $m$  ganzzahligen Gleichungen:

$$11) \quad a_{\alpha_1} x_1 + a_{\alpha_2} x_2 + \dots + a_{\alpha_n} x_n = a_{\alpha} \quad (\alpha = 1, 2, \dots, m).$$

Das Schema der Koeffizienten  $a_{i k}$  heisst ein „rechteckiges“ Zahlensystem  $a$  vom „Typus  $m n$ “. Verschwinden alle Determinanten  $(r + 1)^{\text{ten}}$  Grades des Systems  $a$ , nicht aber alle Determinanten  $r^{\text{ten}}$  Grades, so heisst  $r$  nach Frobenius der „Rang“ des Systems. Ist  $d_x$  der grösste (positive) gem. Teiler aller Determinanten  $x^{\text{ten}}$  Grades des Systems  $a$  und setzt man  $e_x = \frac{d_x}{e_{x-1}}$ , so sind die positiven ganzen Zahlen

$$e_1 e_2 \dots e_r \quad (e_{r+1} = e_{r+2} = \dots = 0)$$

nach Sylvester und Weierstrass die „Elementarteiler“ des Systems  $a$ .

Mit Hilfe dieser und anschliessender Begriffe wird im Kap. 3 ein beliebiges System linearer Gleichungen auf den Fall unabhängiger Gleichungen zurückgeführt; aus einer ersten „Fundamentallösung“ werden alle übrigen hergeleitet. Der Verfasser unterlässt es nicht, für das letztere Theorem einen weiteren Beweis von Stieltjes (1890/91) vorzuführen, der der Elementarteiler nicht bedarf; er beruht darauf, dass die aus einem Zahlensystem  $m(m + \mu)$  zu bildenden Determinanten durch gewisse Identitäten mit einander verknüpft sind (S. 327).

Weiterhin erweist es sich als vorteilhaft, einem ersten Gleichungssysteme  $A_\alpha = 0$  ein zweites  $B_\beta = 0$  zu „adjungieren“, von der Art, dass die Determinanten des einen Koeffizientensystems proportional sind den „komplementären“ Determinanten des zweiten Koeffizientensystems (S. 335). Der Verfasser hätte hier erwähnen dürfen, dass diese Methode der Adjunktion den Invariantentheoretikern durch Brill und Clebsch seit 1872 (in der Theorie der Kombinanten) geläufig ist.

Daran knüpft sich die Behandlung der auf Hermite zurückgehenden umgekehrten Aufgabe, alle Systeme eines gegebenen Typus aufzustellen, deren Determinanten gegebene Werte haben (S. 338).

Den Schluss des Kapitels bildet die Entscheidung über die Äquivalenz zweier Systeme von  $m$  Linearformen d. i. die gegenseitige Überführbarkeit vermöge einer unimodularen  $S$ ; sie müssen alsdann ein- und dasselbe „reduzierte“ Formensystem besitzen.

Eine in vielfacher Hinsicht analoge Untersuchung gestatten die linearen Kongruenzen (Kap. 4). Nunmehr erst gelangt der Verfasser zur Theorie der  $F_2$  selbst, der wiederum eine algebraische Einleitung (Kap. 5) vorausgeht. Hier findet der bekannte Satz von Weierstrass über die Äquivalenz bilinearer Scharen (S. 378) seine Stelle, ferner die Sätze über die „Fundamentalgleichung“ einer Substitution (S. 383), die Herstellung der automorphen  $S$  einer  $F_2$  nach Hermite und Frobenius (S. 402), die Kanonisierung der  $F_2$  (S. 409) im Zusammenhange mit dem Trägheitsgesetze (S. 417). Für das ganze Kapitel vergl. die historische, vom Verfasser nicht erwähnte Darstellung des Referenten in seinem „Invariantenberichte“, Deutsche Math. Vereinigg. I 1892, S. 106 fg.

Nach diesen ausführlichen Vorbereitungen werden die  $F_2$  selbst in Angriff genommen. Das sechste Kapitel enthält die einfacheren Sätze über die Klassen, Ordnungen und Geschlechter der  $F_2$ . Ist

$$F_2 = \Sigma a_{\alpha\beta} x_\alpha x_\beta,$$

so sei  $d_0$  der grösste gem. Teiler der  $a$ ; die Zahlen

$$\frac{a_{\alpha\alpha}}{d_0} \quad \text{und} \quad 2 \frac{a_{\alpha\beta}}{d_0} \quad (\alpha \geq \beta)$$

haben dann den gem. Teiler 1 oder 2: je nachdem setzt man  $\sigma_1 = 1$  oder 2. Jeder  $F_2$  sind eine Anzahl von quadratischen „Begleitformen“ zugeordnet, deren Koeffizienten gewisse Unterdeterminanten der Determinante der  $a$

sind (bez. der Begleitform hätten neuere Untersuchungen von Rados erwähnt werden können). Bildet man für diese Begleitformen die entsprechenden Zahlen  $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}, c_2 \dots c_{n-1}$ , so bilden alle  $d$  und  $c$  nebst dem Trägheitsindex  $\tau$  die „arithmetischen Invarianten“ von  $F_2$ , die für alle Formen einer Klasse dieselben sind.

Alle (primitiven, für die  $d_0 = 1$ )  $F_2$  mit denselben Invarianten bilden eine „Ordnung“  $O$ ; solcher giebt es eine endliche Anzahl, deren jede eine endliche Anzahl von Klassen enthält (S. 427). Die  $d$  werden zweckmässig durch gewisse andere Invarianten  $O$  ersetzt.

Wendet man die „Grundformel“, die ganz analog zu 1) ist, auf die (primitiven) Begleitformen von  $F_2$  an, so kommen diesen und damit  $F_2$  selbst nach Smith bestimmte quadratische „Geschlechts-Charaktere“ zu (S. 455), die den Primfaktoren der Invarianten  $O$  entsprechen. Eine umfassendere Definition des Geschlechts von Minkowski, die auf der Darstellung gewisser Zahlen durch die Begleitformen beruht (S. 456), kann hier nur angedeutet werden. Nachdem das Kap. 7 einige Hilfssätze über quadratische Kongruenzen entwickelt hat, wird im Kap. 8 eine abermalige neue und noch zweckmässigere Definition des Geschlechts gegeben: zwei Klassen heissen gleichen Geschlechts, wenn sie nach jedem Modul kongruent sind (S. 516). Kap. 9 ist der schwierigen Theorie der Darstellungen einer  $F_2$  von  $\nu < n$  Variablen durch eine  $F_2$  von  $n$  Variablen gewidmet. Die hierdurch gewonnenen Gesichtspunkte werden zum Beweise des Hauptsatzes verwendet, dass die als denkbar bezeichneten Geschlechter auch wirklich existieren (S. 591), in der Beschränkung auf den einfacheren Fall, wo die Determinante von  $F_2$  ungerade und die erste  $\sigma$ -Invariante gleich 1 ist.

Das Schlusskapitel handelt vom Maße der positiven ( $\tau = 0$ )  $F_2$ , mit Anwendungen auf Darstellungen einer Zahl als Summe von 4 und einer ungeraden als Summe von 5, 6, 7, 8 Quadraten. Ist, wie früher bei den  $C_2$   $t(F)$  die (endliche) Anzahl der automorphen  $S$  einer  $F_2$ , so wird der Wert  $\frac{1}{t(F)}$  als Maß von  $F_2$  oder der Klasse von  $F_2$  eingeführt (S. 597); das Maß einer Ordnung oder eines Geschlechtes ist wiederum die Summe aller Maße der in der Ordnung resp. dem Geschlechte enthaltenen Klassen. Den eigentlichen Kern des Kapitels bildet die Ableitung des allgemeinen Ausdrucks, den Minkowski für das Maß eines beliebigen Geschlechts geliefert hat, bei dem die Bedeutung der einzelnen Teile, aus denen sich der Ausdruck des Maßes zusammensetzt, klar hervortritt (S. 623 u. flg.). Indem wir uns mit diesen kurzen genetischen Hinweisen begnügen, fassen wir unsere Gesamtmeinung dahin zusammen, dass der Verfasser seiner Aufgabe, die im wesentlichen eine pädagogische war, bis auf die etwas mangelhaften Litteraturangaben vollkommen gerecht geworden ist. Selbst ein Student in jüngeren Semestern dürfte im stande sein, den klaren Darlegungen des Buches zu folgen. Wir freuen uns im voraus auf die in Aussicht stehenden Fortsetzungen und möchten den

Verfasser bitten, in der Fortführung seines überaus nützlichen Unternehmens trotz vieler Schwierigkeiten nicht zu erlahmen. W. FR. MEYER.

**Die physikalischen Erscheinungen und Kräfte, ihre Erkenntnis und Verwertung im praktischen Leben.** Von L. GRUNMACH. Sonderabdruck aus dem „Buch der Erfindungen, Gewerbe und Industrie“. Leipzig 1898, Verlag von Otto Spamer. 427 S.

Wer immer sich für die Fortschritte der Physik interessiert, der findet in dem vorliegenden Sonderabdruck aus dem Buch der Erfindungen, Gewerbe und Industrien nicht nur reichliche Nahrung, sondern auch neue Anregungen, wozu namentlich die Behandlung des Stoffes und die zahlreichen Abbildungen sehr viel beitragen. Die bedeutendsten Physiker sind im Bild wiedergegeben, und die wichtigsten Vorgänge aus ihrem Leben werden mitgeteilt. Zwischen den älteren Bildern von Wilh. Weber und Werner Siemens ist ein Jugendbildnis von Michael Faraday eingeschaltet. Wir halten dies nicht für richtig, zumal dieses Bild Faradays Wesen nicht erkennen lässt. Da aber ein gutes Bild von Faraday aus seiner späteren Zeit existiert, so hätte dieses hier aufgenommen werden sollen. — Die Errungenschaften der Physik sind in den letzten Jahrzehnten für das öffentliche Leben von einer solch einschneidenden Wirkung geworden, dass die Beschäftigung mit Physik als ein notwendiges Bildungsmittel anzusehen ist. Zur Verbreitung physikalischer Bildung ist das vorliegende Buch sehr zu empfehlen.

B. NEBEL.

F. KLEIN und A. SOMMERFELD. **Über die Theorie des Kreisels.** Heft I. Die kinematischen und kinetischen Grundlagen der Theorie. Leipzig 1897, Verlag von B. G. Teubner. 196 S.

—— Heft II. Durchführung der Theorie im Falle des schweren symmetrischen Kreisels. Leipzig 1898, Verlag von B. G. Teubner. 316 S.

Von dem in drei Heften erscheinenden Werke liegen die beiden ersten vor; davon enthält das erste Heft die grundlegenden Betrachtungen über die Prinzipien der Mechanik, soweit sie bei dem Kreiselprobeme in Betracht kommen. Das zweite Heft umfasst eingehend die mathematische Seite der Theorie, und zwar die explizite Darstellung der Bewegung des schweren symmetrischen Kreisels durch elliptische Funktionen. Das dritte Heft soll zeigen, inwiefern sich die im zweiten Hefte entwickelte reine Theorie der Kreiselpbewegung mit der Erfahrung deckt, beziehungsweise welche Änderungen vorgenommen werden müssen, um die Theorie weiter auf die Physik und Astronomie anwenden zu können. Sodann sollen die an dem speziellen Beispiele gewonnenen Gesichtspunkte für die Auffassung der allgemeinen

Mechanik nutzbringend verwertet werden. Den Schluss werden einige Streifzüge in das Gebiet der modernen theoretischen Physik bilden. — Verfasser hebt auch den längst bekannten aber keineswegs abgestellten Fehler hervor, dass wegen der abstrakten Vortragsweise an unseren Schulen sich die Schüler bei der Behandlung eines speziellen Problems häufig sehr ungeschickt anstellen. Während man bisher diesem Mißstand durch Übungsstunden zu begegnen bestrebt war, so bricht der Verfasser mit der bestehenden Methode, indem er die einschlägigen Gebiete der Mechanik an der Hand eines speziellen Beispiels behandelt, wodurch der Vortrag viel nachhaltiger auf den Schüler wirkt. Um aber die an sich sehr interessante Theorie der Kreiselbewegung nicht von vornherein unübersichtlich zu machen, muss die Definition des Kreisels enger gefasst werden, als dies im gewöhnlichen Leben der Fall ist, namentlich ist es die Festlegung eines Punktes der Symmetrieaxe im Raume. — Nicht unerwähnt sei, dass der Verfasser auch die ausländische, insbesondere die englische Litteratur über den vorliegenden Gegenstand berücksichtigt. — Hoffentlich erscheint auch in Kürze das dritte Heft, wodurch ein Werk zum Abschluss gelangt, das in seiner Eigenart in Deutschland bahnbrechend zu wirken vermag.

---

B. NEBEL.

**The mathematical theory of the top, lectures delivered on the occasion of the sesquicentennial celebration of Princetown University, by FELIX KLEIN. With illustrations. New-York 1897, Charles Scribners Son. 74 S.**

Die vier nunmehr im Druck erschienenen Vorlesungen wurden am 12.—15. Oktober 1896 anlässlich des Jubiläums der Princetown Universität gehalten und beziehen sich auf eine neue Behandlungsweise der Theorie des Kreisels, welche der Verfasser in Verbindung mit A. Sommerfeld in einem grösseren Werke zur Zeit in Deutschland erscheinen lässt. Das Problem wird derart behandelt, dass sich die Resultate nicht allein auf eine besondere Klasse von Fällen in der Dynamik anwenden lassen, sondern dass auch die Astronomie und Physik Nutzen daraus ziehen kann. Die Definition des Kreisels weicht von der landläufigen hinsichtlich spezieller Annahmen ab, wozu insbesondere die Festlegung eines Punktes der Symmetrieaxe im Raume gehört.

---

B. NEBEL.

**Leçons élémentaires d'acoustique et d'optique, à l'usage des candidats au certificat d'études physiques, chimiques et naturelles. Par CH. FABRY. Paris 1898, Gauthier-Villars et fils. 356 S. 7 Fr. 50 c.**

Verfasser stellte sich in dem vorliegenden Werke die Aufgabe, diejenigen Teile der Physik, die sich mittels schwingender Bewegungszustände erklären lassen, nämlich die Akustik und Optik, in zusammenfassender Form zur Darstellung zu bringen, und zwar in einer Weise, dass sie von

jedem, der die Elementarmathematik beherrscht, leicht verstanden werden kann. Der Schwerpunkt bei dieser Behandlungsweise wurde mehr auf den Nachweis des logischen Zusammenhanges der Thatsachen und Gesetze gelegt, als auf eine erschöpfende Beschreibung der einzelnen Probleme und der zu ihrer Darstellung nötigen Apparate. Um aber stets Fühlung mit der Wirklichkeit zu haben, fügte der Verfasser eine Reihe von Zahlenbeispielen an geeigneten Stellen ein. — Das erste Kapitel behandelt ganz im allgemeinen die Vibrationsbewegungen, deren einfachste Anwendung die das zweite Kapitel umfassende Akustik darbietet. In dem dritten Kapitel werden die grössere Schwierigkeiten darbietenden Probleme der Optik dem eingehenden Studium unterzogen. Besondere Rücksicht ist auf die Studierenden genommen, welche sich auf das Examen für Physik, Chemie und Naturwissenschaften vorbereiten.

B. NEBEL.

---

**Die Lehre vom Schuss und die Schusstafeln.** Auf dienstliche Veranlassung bearbeitet von HEYDENREICH. Berlin 1898, Verlag von Ernst Siegfried Mittler & Sohn. I. 67 S., II. 109 S. und 79 S., ballistische Tafeln und Rechenmuster.

Das vorliegende Werk ist aus rein praktischen Bedürfnissen entstanden, da für den zweijährigen Unterricht in der Ballistik an der vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule zur Zeit ein militärisches Handbuch fehlte, in welchem die Grundzüge der Ballistik und die Schusstafeln und deren Einrichtungen sachgemäss behandelt werden. Die Theorie wird nur insoweit berücksichtigt, als sie durch die praktischen Schiessversuche gestützt wird. Die höhere Mathematik wurde absichtlich ausgeschlossen, um jedem Offizier das Studium zu erleichtern. Er soll in den Stand gesetzt werden, die Leistungen irgend einer Geschützart zu beurteilen und Grundsätze für neue Geschütze bezw. Geschosse aufstellen zu können. Insbesondere soll er sich ein klares Bild von den Leistungen der neuesten unserer Geschützarten machen können, die natürlich der Öffentlichkeit nicht preisgegeben werden können. In erster Linie wird das Buch ein vademecum für den Offizier sein.

B. NEBEL.

---

**Physikalische Aufgaben** für die oberen Klassen höherer Lehranstalten und für den Selbstunterricht. Von W. MÜLLER-ERZBACH. Zweite, umgearbeitete und vermehrte Auflage. Berlin 1898, Verlag von Julius Springer. 167 S. Preis Mk 2.40.

Verfasser war bestrebt, dem an sich kurz bemessenen Physikunterricht dadurch aufzuhelfen, dass er den Übungsstoff in der Mathematik aus der Physik wählt und dadurch gleichzeitig den mathematischen Unterricht anregender gestaltet. Durch eine derartige sachgemässe Behandlung kann ein Lehrer wahre Wunder bei seinen Schülern erzielen, sodass die Mathe-

matik an Gymnasien nicht, wie es früher der Fall war, von den meisten Schülern gehasst würde. Um dem Lehrer die Auswahl zu erleichtern, hat der Verfasser grosse Sorgfalt auf die Einteilung verwendet, so dass in jedem Zweig der Physik die schwierigeren Aufgaben von den einfacheren leicht gefunden werden können. Durch die in den Lösungen vielfach enthaltenen Fingerzeige ist der strebsame Schüler befähigt, das Buch ohne die Hilfe des Lehrers verwenden zu können. Das Buch sei bestens empfohlen.

B. NEBEL.

**Oeuvres scientifiques de L. Lorenz.** Revues et annotées par H. VALENTINER. Publiées aus frais de la fondation Carlsberg. Tome premier. Deuxième fascicule. Copenhague 1898, Librairie Lehmann & Stage. 318 S.

Der zweite Teil des ersten Bandes umfasst vier Arbeiten, von denen die beiden ersten sich auf experimentelle und theoretische Untersuchungen über die Brechungskoeffizienten beziehen. In der dritten Arbeit teilt der Verfasser seine Theorie der Dispersion mit und leitet die allgemeinen Gesetze auf eine neue Weise ab, ohne sich auf seine früheren Arbeiten zu stützen. Auch in der letzten Arbeit über das reflektierte und gebrochene Licht in einer transparenten Sphäre werden die Formeln auf eine neue und zugleich einfachere Methode abgeleitet, dass eine Bezugnahme auf die vorhergehende Arbeit nicht erforderlich ist. — Die von dem Herausgeber hinzugefügten Bemerkungen sind hinter jeder einzelnen Arbeit eingeschaltet.

Mögen auch die weiteren Teile dieser wissenschaftlichen Werke in Bände einem grösseren Leserkreis zugänglich gemacht werden!

B. NEBEL.

**Theoretical mechanics, an introductory treatise on the principles of dynamics with applications and numerous examples by A. E. H. LOVE.** Cambridge 1897: At the university press. 379 S. Preis 12 sh.

Das Buch ist in erster Linie für Studierende bestimmt, die, im Besitz der ersten Kenntnisse der höheren Mathematik, in die Mechanik eingeführt werden sollen. Der erste Teil enthält die wichtigsten Definitionen und behandelt die verschiedenen Arten der Bewegung. Der zweite Teil umfasst die Prinzipie der Mechanik. Der dritte und letzte Teil zieht einzelne spezielle Probleme in Betracht, wobei die Methoden der Behandlungsweise und die Anwendung der Prinzipie besonders berücksichtigt werden. Zahlreiche, an passenden Stellen eingestreute Übungsbeispiele haben den Zweck, den Studierenden mit den neuen, ihm noch ungewohnten, abstrakten Lehren vertraut zu machen. Das Buch sei jedem Studierenden bestens empfohlen.

B. NEBEL.

**Die Dynamik der Systeme starrer Körper** in zwei Bänden mit zahlreichen Beispielen von EDWARD JOHN ROUTH. Autorisierte deutsche Ausgabe von ADOLF SCHEPP. Mit einem Vorwort von Prof. Dr. FELIX KLEIN in Göttingen. Leipzig 1898, Verlag von B. G. Teubner.

Erster Band: Die Elemente. Mit 57 Figuren im Text. 472 S.

Zweiter Band: Die höhere Dynamik. Mit 38 Figuren im Text. 544 S.

Die deutsche Ausgabe erfolgte im wesentlichen nach der 6. Auflage des englischen Originals und wird durch ein Vorwort von Prof. Felix Klein in Deutschland eingeführt, in welchem die eigenartigen Verhältnisse erwähnt werden, vermöge deren ein in England weit verbreitetes und in hohem Ansehen stehendes Buch in Deutschland nahezu unbekannt sein kann. Im wesentlichen liegt der Unterschied in der Unterrichtsmethode. Während in England der Nachdruck auf die Durcharbeitung der einzelnen Anwendungen gelegt wird, so bevorzugt der Deutsche in seinem Unterricht den systematischen Aufbau, um einen allgemeinen Überblick zu gewinnen, wobei zur eigenen selbständigen Ideenbildung angeregt wird. Bei der deutschen Behandlungsweise der Mechanik wird dem Studierenden die Lösung spezieller Probleme zunächst schwierig; er stellt sich gleichsam mit dem ihm in die Hände gegebenen Handwerkszeug etwas ungeschickt an. In dieser Beziehung ist das englische Werk eine vorzügliche Ergänzung für den deutschen Unterricht, indem der Schüler durch die zahlreichen Beispiele mit der Materie aufs Innigste vertraut gemacht wird. Durch das Werk von Routh erhält aber der Deutsche eine Fülle wertvoller Anregungen, die ihm vor Augen führen, wie unumgänglich notwendig es ist, auch die ausländische Litteratur zu verfolgen. — Durch die Bemerkungen und Notizen von H. Liebmann und Felix Klein wird auch die nicht englische Litteratur berücksichtigt, und das Buch für den Leser in angenehmster Weise ergänzt. — Namentlich den Studierenden an unseren technischen Hochschulen sei das Routhsche Werk aufs Wärmste empfohlen.

B. NEBEL.

**Vorlesungen über Technische Mechanik.** Von AUGUST FÖPPL. Leipzig, Verlag von B. G. Teubner.

Dritter Band: Festigkeitslehre. Mit 78 Figuren im Text. 1897. 472 S.

Erster Band: Einführung in die Mechanik. Mit 78 Figuren im Text. 1898. 412 S.

Das vorliegende Werk schliesst sich eng an die Vorlesungen des Verfassers an, wobei sich namentlich die Ansprüche genau nach den allmählich zunehmenden mathematischen Kenntnissen richten. Da die Vorlesungen in vier Teile zerfallen, so wird auch das Werk in vier Bänden erscheinen, von denen der erste eine Einführung in die Mechanik enthält, während die drei übrigen die graphische Statik, die Festigkeitslehre und die Dynamik zum Gegenstand haben. In erster Linie werden die Bedürfnisse der Praxis berücksichtigt; darüber wesentlich hinauszuweisen, hält der Verfasser

für bedenklich bei den grossen, an den Techniker gestellten Anforderungen. Wer sich eingehender mit einzelnen Problemen zu beschäftigen wünscht, der wird auf die ausführlichen Handbücher verwiesen. Diese enthalten für die meisten Studierenden viel zu viel, so dass sie sich mehr abgestossen als angezogen fühlen und dem Gegensatz zwischen Theorie und Praxis huldigen. Was der Verfasser bietet, soll den Anspruch auf Gründlichkeit machen dürfen, damit der Studierende auf einem guten Fundament weiter bauen kann. Deshalb sind die angezogenen Beispiele durchgerechnet. Sehr zu wünschen wäre es, dass auch der zweite und vierte Band in Bände erscheint, damit die, welche die Vorlesungen nicht hören können, in der Benutzung des Werkes nicht zu sehr hintangehalten sind.

B. NEBEL.

---

**Das Prinzip der Erhaltung der Energie** und seine Anwendung in der Naturlehre. Ein Hilfsbuch für den höheren Unterricht. Von HANS JANUSCHKE. Mit 95 Figuren im Text. Leipzig 1897, Verlag von B. G. Teubner. 455 S.

In dem vorliegenden Buch zeigt der Verfasser, dass das Energieprinzip in der gesamten Physik gilt, und bringt es daher in allen Gebieten derselben zur Anwendung. Derartige Versuche sind nicht neu, auch wirkt eine derartige Studie an sich recht fruchtbringend. Wird aber ein solches Buch dem Schulunterricht zu Grunde gelegt, wie es nach dem Vorwort der Fall ist, so können wir uns damit solange nicht einverstanden erklären, solange die überwiegende Mehrzahl der heutigen Physiker dieser Auffassung noch nicht beigetreten ist. Der Schüler soll nicht auf der Hochschule zur Erkenntnis kommen, dass er bis jetzt einen Privatweg geführt worden ist, über dessen Gangbarkeit sich die Öffentlichkeit noch nicht entschieden hat. Die Einheit der Kraft heisst Dyne. Der deutsche Sprachgebrauch kennt keine Volumseinheiten. Die zahlreichen, in den Text aufgenommenen Aufgaben, die in der Mehrzahl aus anderen Aufgabensammlungen stammen, tragen wesentlich zur gründlichen Beherrschung des Stoffes bei.

B. NEBEL.

---

ORESTE MURANI. **Luce e raggi Röntgen**, con prefazione del R. FERRINI, con 15 Tavole e 157 incisioni intercalate. Milano 1898, Ulrico Hoepli.

Das in zehn Kapitel zerfallende Buch beginnt mit dem Wesen des Lichtes, seinen verschiedenen Eigenschaften und Gesetzen, wobei auch die Hertz'schen Versuche eingehend behandelt werden. Mit der Fluoreszenz schliesst das erste Kapitel. Das zweite Kapitel umfasst die zahlreichen Erscheinungen, die bei der elektrischen Entladung in verdünnten Gasen auftreten. Das dritte Kapitel ist der Entstehung der Röntgenstrahlen gewidmet und enthält einige Abbildungen, aus denen sich der Unterschied gegenüber den bisherigen Lichtstrahlen zu erkennen giebt. In dem vierten

Kapitel werden die verschiedenen optischen Eigenschaften der Röntgenstrahlen durch Versuche erläutert und eine Reihe typischer Röntgenröhren mitgeteilt. Die photographische Fixierung der mittels Röntgenstrahlen erhaltenen Abbildungen und deren praktische Verwendbarkeit bilden den Gegenstand des fünften Kapitels. Die folgenden Kapitel sind gerichtet auf die besonderen Untersuchungen einzelner Forscher und die zu der Erzeugung der Röntgenstrahlen nötigen Apparate. Rühmend anzuerkennen ist die Litteraturangabe nach jedem einzelnen Kapitel. Wer sich mit dem Gebiet der Röntgenstrahlen bekannt zu machen wünscht, dem sei das vorliegende Buch bestens empfohlen.

B. NEBEL.

**Die Optik der elektrischen Schwingungen.** Experimental-Untersuchungen über elektromagnetische Analoga zu den wichtigsten Erscheinungen der Optik. Von A. RIGHI. Nebst Zusätzen des Verfassers ins Deutsche übertragen von B. DESSAU. Mit 40 Abbildungen. Leipzig 1898, O. R. Reisland. 267 S. Preis M. 6.

In dem vorliegenden Buch sind im wesentlichen die in verschiedenen Zeitschriften veröffentlichten Untersuchungen des Verfassers vereinigt, denen in der deutschen Ausgabe noch einige neue hinzugefügt sind. Nach vielfachen Versuchen gelang es, solche Apparate zu konstruieren, die wesentlich kürzere Wellen lieferten als die Hertz'schen Apparate, wodurch es ermöglicht war, die den wichtigsten Erscheinungen der Optik analogen bei den elektromagnetischen Wellen zu studieren. Zunächst macht uns der Verfasser mit der Konstruktion und der Herstellungsweise der von ihm verwendeten Apparate vertraut und untersucht in den folgenden Kapiteln an den elektromagnetischen Wellen die Interferenzerscheinungen, insbesondere auch die, welche den optischen Interferenzversuchen mit dünnen Platten analog sind. Sehr interessant sind die Versuche, welche die Beugungerscheinungen in der Optik nachahmen, an die sich die Erscheinungen anschliessen, die von dielektrischen Massen mit Hilfe der Beugung erzeugt werden. Die Absorption der elektromagnetischen Wellen durch verschiedene nicht metallische Körper, wie Holz und Spiegelglas, lehrt, dass sich diese Stoffe jenen Wellen gegenüber als nicht vollkommen transparent verhalten. Die Analogie mit der Optik dehnt sich auch auf isotrope und anisotrope Körper aus, was sich aus der Reflexion der Wellen zu erkennen giebt. Hierher gehören auch die Versuche, durch welche mittels Reflexion an Metallplatten circular oder elliptisch polarisierte elektromagnetische Wellen erzielt worden sind. Daran reihen sich die Versuche, welche die Brechung und Totalreflexion zum Gegenstand haben, sowie die den optischen Erscheinungen an Prismen, Linsen, totalreflektierenden Prismen, der durch Totalreflexion erzeugten circularen und elliptischen Polarisation durchaus gleichen Vorgänge. Auch die Doppelbrechung der elektromagnetischen Wellen liess sich an Tannenholz, an Krystallen, insbesondere an dem Selenit nachweisen. Bei diesen Versuchen wurden aber die häufig not-

wendigen mathematischen Erörterungen nicht ausser acht gelassen; sechs diesbezügliche Beilagen sind dem Buche beigegeben. Dem Verfasser gebührt das grosse Verdienst, den experimentellen Nachweis erbracht zu haben, dass, abgesehen von der grossen Verschiedenheit der Wellenlängen, das Verhalten der elektromagnetischen Wellen identisch ist mit dem der Lichtwellen, wodurch die Hypothese von der elektromagnetischen Natur der Lichterscheinungen ungemein gekräftigt wird. Die der deutschen Übersetzung beigefügten beiden inzwischen erschienenen Abhandlungen betreffen die Bestimmung des Brechungskoeffizienten des Selenits für elektromagnetische Wellen und seine Orientierung in einem homogenen elektrischen Felde. — Von welchem grossem Wert das Buch sowohl für die Physik im allgemeinen, als auch für den Experimentator ist, der die Versuche nachmachen will, darüber ein Wort zu verlieren, erscheint gänzlich überflüssig.

B. NEBEL.

**Grundzüge der kinetischen Naturlehre.** Von Baron N. DELLINGSHAUSEN.  
Heidelberg 1898, Carl Winters Universitätsbuchhandlung. Preis M. 10.  
520 S.

In dem vorliegenden Buche machte der Verfasser den Versuch, seine in früheren Werken ausgesprochenen Theorien in eine mathematische Form zu bringen, wodurch sie nach Kant erst zur eigentlichen Wissenschaft werden. Ermutigt durch die Erfolge der Physik, nach welchen sich der Schall, das Licht, die Wärme, die Elektrizität als Bewegungszustände darstellen lassen, unternimmt es der Verfasser, die ganze Naturlehre auf Bewegung aufzubauen, und zwar begnügt er sich nicht damit, die sämtlichen Naturerscheinungen durch Bewegungen zu erklären, sondern er ist bestrebt, auch die Verschiedenheit und Veränderlichkeit der Körper auf die Bewegungen zurückzuführen. Eine atomistische Theorie mit ihrem Drum und Dran giebt es demnach nicht mehr. Die Grundlage der kinetischen Naturlehre bildet die auf Erfahrung beruhende Thatsache der Bewegung, wozu aus der Mechanik die allgemeinen Bewegungsgesetze benützt werden. Dabei tritt die „Kraft“ nur als ein Rechnungswert auf und die „Masse“ als ein konstanter Koeffizient. Vollständig aufgenommen wird die mechanische Wärmetheorie. Am interessantesten ist natürlich, die Verschiedenheit und Veränderlichkeit der Körper durch Bewegungen zu erklären, durch welche in den Körpern ein bestimmter Arbeitsvorrat begründet wird. Der innere Arbeitsvorrat der Körper wird unter der Form einer Energie dargestellt, weil dadurch der Begriff der Kraft ganz ausgeschlossen wird und weil dazu nur eine als gegeben vorauszusetzende Geschwindigkeit und ein konstanter Koeffizient als Masse erforderlich ist. Zur Lösung einer derartigen Aufgabe ist aber zunächst die Verständigung über die Form der inneren Bewegungen erforderlich, weshalb diese den Anfang des Buches bilden. — Leider hat der unerbittliche Tod dem Verfasser zu früh die Feder aus der Hand genommen, so dass das Werk nicht

in allen Teilen vollendet ist; gleichwohl hat aber der Sohn als Herausgeber auch die unvollendeten Abschnitte mit aufgenommen, um dem Werke die Originalität zu wahren, und damit andere leichter darauf aufbauen können. Das Buch wirkt sehr anregend und ist daher fruktifizierend auch für denjenigen, welcher sich den darin niedergelegten Anschauungen nicht anzuschliessen vermag.

\_\_\_\_\_ B. NEBEL.

**Grundriss der Festigkeitslehre.** Zum Gebrauch an Handwerkerschulen insbesondere Baugewerk- und Maschinenbauschulen, sowie zum Selbstunterricht. Bearbeitet von Dr. E. GLINZER. Zweite, verbesserte und vermehrte Auflage. Mit 98 in den Text gedruckten Figuren und mehreren Tafeln sowie mit zahlreichen Übungsbeispielen und Aufgaben. Dresden 1898, Verlag von Gerhard Kührtmann. 148 S.

Die zweite Auflage des Buches ist nicht nur überarbeitet, sondern auch nach einigen Richtungen, die durch das praktische Bedürfnis hervorgetreten sind, erweitert worden. Durch die zahlreichen Übungsbeispiele ist es dem Schüler leicht, sich eine gewisse Sicherheit bei den Belastungsberechnungen anzueignen, ohne unter den Formeln zu leiden. Das Buch ist daher in den betreffenden Schulen mit grossem Nutzen zu verwenden.

\_\_\_\_\_ B. NEBEL.

**Über die Bestimmung der Koeffizienten der Gauss'schen allgemeinen Theorie des Erdmagnetismus für das Jahr 1885 und über den Zusammenhang der drei erdmagnetischen Elemente untereinander.** Von H. FRITSCHE. St. Petersburg 1897. 85 S.

Verfasser führt den Nachweis, dass man nicht bei der Berechnung der von Gauss seiner Zeit mit Recht nur auf die Zahl 24 beschränkten Koeffizienten stehen bleiben dürfe, wie dies bei Erman und Petersen, Petersen und Neumayer, sowie Quintus Icilius der Fall war, sondern dass man in der Berechnung der Koeffizienten solange weiter gehen müsse, bis durch Hinzuziehung von neuen Koeffizienten der Unterschied zwischen Rechnung und Beobachtung nicht mehr vermindert wird und die Reste einen möglichst zufälligen Verlauf zeigen. Dies trifft ein beim Übergange von  $P^{VI}$  zu  $P^{VII}$ . Der Verfasser hat im ganzen 63 Koeffizienten berechnet, wobei er nicht die Methode der kleinsten Quadrate, sondern die der kleinsten und grössten Koeffizienten benützt hat. Das Lesen des Buches ist erschwert durch die etwas mangelhafte Lithographie der Handschrift des Verfassers.

\_\_\_\_\_ B. NEBEL.

**Die elektrodynamischen Grundgesetze und das eigentliche Elementargesetz.** Von FRANZ KERNTLER. Budapest 1897, Buchdruckerei der Pester Lloyd-Gesellschaft. 68 S.

und

**Die Möglichkeit einer experimentellen Entscheidung zwischen den verschiedenen elektrodynamischen Grundgesetzen.** Nachtrag zu der Abhandlung: „Die elektrodynamischen Grundgesetze und das eigentliche Elementargesetz.“ Von FRANZ KERNTLER. Budapest 1898, Buchdruckerei der Pester Lloyd-Gesellschaft. 18 S.

Der Verfasser sucht das von ihm gefundene, aus dem Stefanschen Gesetz abgeleitete Elementargesetz dahin zu prüfen, dass das Experiment die Entscheidung zwischen den verschiedenen elektrodynamischen Grundgesetzen liefern soll. Der Nachweis soll geführt werden an zwei verschieden grossen Quadraten, von denen das grosse feste in der Ebene des magnetischen Meridians liegt, während das kleine bewegliche Quadrat mit seinem Mittelpunkt in dem des grossen liegt. Unter Voraussetzung bestimmter Stromstärken soll nun das Drehungsmoment, welches das kleine Quadrat bei seiner durch den Erdmagnetismus bestimmten Lage von dem Quadrate erhält, nach den verschiedenen Gesetzen berechnet und dann mit dem Experiment verglichen werden. Schliesslich wird noch angedeutet, in welcher Weise sich das Experiment etwa anstellen liesse. B. NEBEL.

**Essai sur les éléments de la mécanique des particules.** Par H. MAJLERT. 1<sup>re</sup> Partie Statique particulière avec 14 planches. Neuchatel 1897, Attinger frères et Paris, Gauthier-Villars et fils. 242 S. Preis 10 Fr.

In dem ersten Kapitel stellt der Verfasser die Definitionen derjenigen Grössen zusammen, mit denen in den folgenden Kapiteln operiert wird. Es ist dies um so nötiger, da die Begriffe vielfach verschieden aufgefasst werden. Die Definition der Masse in der Physik und Chemie weicht von der der Mechanik wesentlich ab, auch die Astronomie hat ihre besondere Definition für die Masse. Das zweite Kapitel beschäftigt sich mit den Anordnungen der Elementarkugeln, mit den Atomen und ihrer Systematik und mit der inneren Struktur der Körper. Die einfachen Moleküle und die Aggregatzustände der einfachen Körper bilden den Gegenstand des dritten Kapitels. Das vierte Kapitel ist den chemischen Verbindungen gewidmet, während das fünfte Kapitel die Untersuchungen über die starren Körper und die Einwirkung mechanischer Kräfte auf die festen Körper enthält. In dem letzten Kapitel finden wir die Elementarbegriffe der Physik und Mechanik. Die Betrachtungen sind im wesentlichen geometrischer Natur, die durch zahlreiche, sauber durchgeführte Zeichnungen unterstützt werden.

B. NEBEL.

**Festrede** im Namen der Georg-Augustus-Universität zur akademischen Preisverteilung am 2. Juni 1897, gehalten von EDUARD RIECKE. Die Prinzipien der Physik und der Kreis ihrer Anwendung. Göttingen 1897, Vandenhoeck & Ruprecht. 40 S. Preis 30 Pfg.

Den Ausgang bildet Galilei, dem wir durch die Entdeckung der Beschleunigung bei der Fallbewegung das Prinzip der Masse verdanken.

Daraus folgen die Begriffe der Arbeit und der lebendigen Kraft, denen eine wichtige Rolle in dem Satz von der Erhaltung der Energie zukommt, der durch Mayer verallgemeinert worden ist. Von dem Prinzip der kleinsten Wirkung wird an der Hand eines Beispielles nur eine annähernde Vorstellung von seinem Inhalt gegeben, während von der strengen Herleitung jetzt abgesehen wird. Die Rede ist in etwas erweiterter Form gedruckt und zwar sind die hinzugefügten Teile durch kleinere Schrift kenntlich gemacht worden. Der zweite Teil der Broschüre enthält Universitätsangelegenheiten, Preisverteilungen u. s. w.

B. NEBEL.

---

**Fragmente zum kosmischen Bewegungsgesetz (Incitations-Theorie) und zur Mechanik des Himmels** von A. SINRAM. Hamburg 1897, Lucas Gräfe & Sillem. 31 S. Preis M. 1.

**Fragmente II zum kosmischen Bewegungsgesetz (Incitations-Theorie) und zur Mechanik des Himmels** von A. SINRAM. (Berichtigungen und Ergänzungen der Fragmente vom 1. Mai 1897.) Hamburg 1897, Lucas Gräfe & Sillem. 14 S.

Verfasser will die Newtonsche Gravitationstheorie durch seine Wärme- und Kältetheorie ersetzen und zwar geht er von der Annahme aus, dass es nur eine einzige Kraft gebe, nämlich die das Universum durchziehenden Wärmeschwingungen, wodurch eine die Kälte belebende und Bewegung erzeugende Ursache in die Erscheinung tritt. Es sei also die Wärme in Verbindung mit der Kälte als das perpetuum mobile und als die autokratische Herrscherin im Raume anzusehen. „Incitations-Theorie“ wird diese neue Theorie genannt, weil nach ihr durch die Wirkung der Wärmeausstrahlung in den kalten Weltraum eine Erweckung, Wachrufung, Erregung, Belebung der ruhenden Thätigkeit der kalten Weltäthermoleküle und mit dieser Erweckung und Lebendigmachung der schlummernden Kältemoleküle die Erzeugung der Kältekraft stattfindet. Die Berechnung zur Aufstellung einer solchen Theorie wird gestützt auf das Dovesche Bild von der ruhig brennenden Lichtflamme, zu der von allen Seiten ein Zuströmen der kälteren Teile stattfindet. Dieses Bild wird auf unser Sonnensystem übertragen. Die vom Verfasser auf rotem Zettel erbetene Meinungsäußerung lautet kurz: „Mir fehlt der Glaube.“

B. NEBEL.

---

**Eine Theorie des elektrischen Stromes auf Grund des Energieprinzipes** von Dr. CH. ERNST. München 1897, Verlag von Dr. H. Lüneburg. 64 S. Preis M. 2.

Da ein elektrischer Strom in jeder Strombahn Energie produziert, konsumiert und transportiert, so ist er als Energiestrom anzusehen. Als Einheit der Energie wird diejenige gewählt, welche in dem in der Praxis eingeführten elektrischen Maßsystem üblich ist, nämlich ein Joule. Daraus

7\*

folgt unmittelbar die Einheit des Effektes. Ausgehend von der produzierten Wärmeenergie, werden die verschiedenen Gesetze aufgesucht, nach denen die verschiedenen Energien in einer Strombahn erzeugt und verbraucht werden und zwar werden die wichtigsten Sätze des Elektromagnetismus und der Elektrodynamik sämtlich aus dem Faradayschen Induktionsgesetze deduktiv abgeleitet. Absichtlich wurde der Begriff der Elektrizitätsmenge vermieden, um nicht die Bedeutung einer materiellen Quantität damit zu verknüpfen. Daher wurde auch die Stromstärke nicht mit Hilfe der Elektrizitätsmenge definiert. Für den Techniker hat eine solche Darstellung des elektrischen Stromes auf Grund des Energieprinzipes etwas Bestrickendes, da für ihn die Energie der *nervus rerum* ist.

B. NEBEL.

---

DOT. GIOVANNI VAILATI. *Il metodo deduttivo come strumento di ricerca.*

Lettura d'introduzione al corso di Lezioni sulla Storia della Meccanica tenuto all'Università di Torino, l'anno 1897/98. Torino, Roux Frassati e Co. 44 S. Prezzo L. 1.50.

Im wesentlichen handelt es sich um eine geschichtliche Studie, die bis auf Aristoteles zurückgreift.

B. NEBEL.

---

*Soleil, terre et électricité.* (Un chapitre de la théorie nouvelle de l'univers.) Par le Prof. Jv. SKWORTZOW. Kharkow 1898. 8 S.

Nach des Verfassers Ansicht giebt es auf der Erde, sowie auf den übrigen Körpern des Weltalls nur eine Fundamentalform der Energie, die sich mit dem Begriff der Elektrizität deckt. Alle anderen Energieformen, die Wärme nicht ausgeschlossen, seien daraus abgeleitete Formen und hätten somit sekundären Charakter. Die Sonne kann demnach die Erde nicht unmittelbar erwärmen und beleuchten, sondern sie ist nur im stande, durch elektromagnetische Induktionswirkungen Störungen in dem Gleichgewicht der Energie hervorzurufen, d. h. Potentialunterschiede zu ergänzen, auf die dann die Erwärmung der Luft zurückzuführen sei. So schön auch eine solche, auf eine einzige Energie beschränkte Theorie ist, so wirkt sie nicht überzeugend. Warum soll die Sonne nur die eine Ur-Energieform besitzen, während bei den übrigen Weltkörpern, insbesondere bei der Erde verschiedene, allerdings sekundäre Energieformen vorhanden sind, die hinsichtlich der Quantität nicht zu unterschätzen sind?

B. NEBEL.

---

**Hydrodynamische Untersuchungen** mit Anwendungen auf die Theorie der Sonnenrotation. Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde von der philosophischen Fakultät der Friedrich-Wilhelm-Universität zu Berlin. Genehmigt und nebst den beigefügten

Thesen öffentlich zu vertheidigen am 3. Juli 1897 von E. J. WILCZYNSKI.  
Berlin 1897, Mayer und Müller. 36 S.

Die vorliegende Untersuchung schliesst sich an eine frühere an, welche sich mit der Gestalt eines flüssigen Körpers beschäftigt, dessen Teilchen sich gegenseitig nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, und welche mit nicht überall notwendig gleichmässiger Winkelgeschwindigkeit um eine im Raume feste Axe rotieren. Die Fundamentalgleichungen wurden früher für reibungslose Flüssigkeiten aufgestellt. Nun wird auch die Reibung berücksichtigt, dabei ergibt sich, dass die wichtigsten, für reibungslose Flüssigkeiten geltenden Sätze ihre Giltigkeit behalten. Im dritten Kapitel werden die ausgeführten Untersuchungen in Zusammenhang mit der Sonnenrotation gebracht und dabei drei Arbeiten über diese von anderen Autoren einer Kritik unterzogen. Die beiden letzten Kapitel behandeln Numerisches über den Einfluss der Reibung, die Periodizität der Sonnenflecken, sowie die Niveauunterschiede der umkehrenden Schicht, der Flecken- und Fackelregionen. Die mathematischen Resultate dieser Arbeit lassen sich noch verschiedenartig anwenden und bilden die Grundlage für interessante rein theoretische Untersuchungen, auf die hier nicht näher eingegangen werden kann.

B. NEBEL.

**Invarianten und elliptische Modulfunktionen auf thermochemischem Gebiete.** Ein Beitrag zur Lehre von der chemischen Energie von Prof. Dr. ARWED WALTER. Beilage zum Jahresbericht des königl. Realgymnasiums zu Tarnowitz, Ostern 1897. Programm Nr. 228. Leipzig 1897, Metzger und Wittig. 40 S.

Wieder ist es einmal die Mathematik, die im stande ist, ein Hindernis zu beseitigen, das selbst die bedeutendsten Chemiker mit ihrem bisherigen Rüstzeug nicht zu überwinden vermochten. Ist es doch neuerdings Ostwald, der trotz der gesunden Anschauungen eines Lothar Meyers die bestimmte Ansicht ausspricht, dass keine Aussicht darauf besteht, den gesamten Energievorrat eines Körpers kennen zu lernen. Durch das in der theoretischen Chemie bisher unbekanntes mathematisches Prinzip der Klasseninvarianten gelingt es, dem bisherigen grossen Mangel an Bestimmtheit in der theoretischen Thermochemie abzuhelpfen. Des beschränkten Raumes wegen vermag der Verfasser nur in kurzen Zügen die wichtigsten Momente seiner Untersuchungen mitzuteilen. Mit der Einführung des Begriffes von dem „ergoplexotischen Zustand“ soll das Vorhandensein der Anreicherung mit grösseren Quantitäten von Arbeitsvermögen, einer Aufspeicherung der Energie ausgedrückt werden. Die vom Verfasser berechneten Zahlengrössen sind von überraschender Genauigkeit, die gesteigert werden, wenn die dazu erforderlichen Fundamentalgrössen noch sicherer auf experimentellem Wege ermittelt worden sind. Die vorliegenden Untersuchungen beanspruchen das höchste Interesse der theoretischen Chemiker.

B. NEBEL.

**Eine Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik.** Von Dr. ARTHUR KORN. Zweite Auflage. Berlin 1898, Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung. 277 S. Preis M. 6.

Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten nicht nur durch die infolge der Weiterentwicklung der Theorie bedingten Veränderungen und Vereinfachungen, sondern auch durch eine systematischere Behandlungsweise des Ganzen. Der erste Teil: Grundlagen der Hydrodynamik und Theorie der Gravitation hat eine eingehendere Behandlung erfahren. Der zweite Teil: Theorie der elektrischen Erscheinungen zerfällt in die beiden Abschnitte ponderomotorische und elektromotorische Wirkungen. Die Theorie stützt sich auf die Wechselwirkung pulsierender Kugeln unter der Annahme, dass auf unserem Sonnensystem ein periodischer Druck lastet, welcher, bei der nahen Inkompressibilität des Zwischenmediums, die Pulsationen der mit viel grösserer Kompressibilität begabten Massenteilchen mit gleicher Schwingungsdauer und Phase verstehen lässt. Bei der Anwendung dieser mechanischen Theorie auf die elektrischen Erscheinungen ist unter anderen Arbeiten namentlich die von Reiff von grosser Wichtigkeit, da hier die Reibung in Flüssigkeiten zu einer Theorie der Induktion benützt worden ist. In dem Anhang, welcher die Theorie Maxwells und ihre Einwirkung auf neuere Theorienbildungen zum Gegenstand hat, wird von einer Gegenüberstellung der Vorzüge der hydrodynamischen Theorie gegenüber der Maxwellschen Theorie abgesehen, vielmehr weist der Verfasser darauf hin, dass man mit Hilfe mechanischer Vorstellungen in den Geist der Maxwellschen Theorie einzudringen habe, und macht auf die Gefahren aufmerksam, welche bei der Bildung von Theorien ohne mechanische Vorstellungen auftreten können. So lange man mit dem Prinzip der Erhaltung der Energie arbeitet, vermeidet man die Klippen, die mit dem allgemeineren Hamiltonschen Prinzip verbunden sind. Aus der heutigen Betrachtung der Naturerscheinungen muss die Mystik unter allen Umständen wegbleiben bezw. entfernt werden.

B. NEBEL.

**Die Mechanik des Weltalls in ihren Grundzügen.** Dargestellt von L. ZEHNDER. Freiburg i. B., Leipzig und Tübingen 1897, Verlag von J. C. B. Mohr (Paul Siebeck). 176 S. Preis M. 3.

Verfasser geht bei seiner Mechanik des Weltalls von sehr einfachen Annahmen aus, indem er einen dreimensionalen, unbegrenzten Raum zu Grunde legt und die darin vorhandene Materie sowohl in ihren kleinsten Teilen, als auch in ihrer Gesamtmasse sich räumlich begrenzt denkt. Dabei soll sich die Materie gegenseitig anziehen, d. h. kurz gesagt, sie gravitiere. Der Äther wird angesehen als eine Masse, die eine, wenn auch sehr geringe Dichte besitzen soll. Die Ätheratome sollen aus Kugeln bestehen, die zusammen Wellenbewegungen ausführen, die sich uns äusserlich als

Licht zu erkennen geben. Wesentlich verschieden von diesen Wellenbewegungen seien die zitternden Bewegungen des Äthers, auf die das Wesen der Elektrizität zurückgeführt wird. Licht und Elektrizität lassen sich demnach nicht in einander überführen, selbst wenn wir sehr grosse Wellenlängen für das Licht und sehr kleine Wellenlängen für die Elektrizität zu erzeugen im stande wären. Die Annahmen haben nichts Gezwungenes und in einfachster Weise werden die Gründe der Physik und Chemie in qualitativer Hinsicht erklärt. Die Untersuchungen der quantitativen Ergebnisse dieses Systems behält sich der Verfasser noch vor. Die zweite Hälfte des Buches ist der Betrachtung unseres Sonnensystems gewidmet, die mit unserer Erde beginnt und mit der Zukunft der Erde wieder schliesst. Nach den Betrachtungen des Verfassers ergibt sich, dass die beiden sich bis jetzt noch scheinbar gegenüber stehenden Theorien: die Huyghenssche Undulationstheorie des Lichtes und die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und des Magnetismus mit einander verträglich sind, was als ein wesentlicher Fortschritt zu betrachten ist.

B. NEBEL.

---

**Abhandlungen und Berichte.** Aus Anlass der Feier des zwanzigjährigen Bestehens des württembergischen Bezirksvereins deutscher Ingenieure zusammengestellt und diesem gewidmet von C. BACH. Mit zahlreichen Textabbildungen und 14 Tafeln. Stuttgart 1897, Arnold Bergsträsser Verlagsbuchhandlung. 297 S.

Die Entstehung der mit der Technischen Hochschule in Stuttgart verbundenen Materialprüfungsanstalt, die dem Verfasser unterstellt ist, ist in der Hauptsache dem thatkräftigen Eingreifen des württembergischen Bezirksvereins deutscher Ingenieure zu verdanken. Anlässlich der Jubelfeier dieses Vereins bringt der Verfasser eine Reihe seiner Untersuchungen, die in jener Anstalt ausgeführt, und bisher zerstreut veröffentlicht worden sind, in einem stattlichen Bande als Zeichen der Dankbarkeit dar. Aus diesen Untersuchungen ergibt sich deutlich zu erkennen, von welchem hohen Nutzen die Materialprüfungsanstalt für die Technik ist, nicht nur für die Praxis allein, sondern auch für die Theorie, die auf zielbewusst angestellten Versuchen basiert. Der Verfasser liefert den Beweis, dass sich auch mit beschränkten Mitteln bei Aufwendung der nötigen Energie tüchtiges erreichen lässt, und dass es nicht nötig ist, von vornherein glänzend ausgestattete Institute zu besitzen, um überhaupt etwas leisten zu können.

B. NEBEL.

**Systematisches Verzeichnis der Abhandlungen**, welche in den Schul-  
schriften sämtlicher an dem Programmtausche teilnehmenden Lehr-  
anstalten erschienen sind. Bearbeitet von Dr. RUDOLF KLUSSMANN.  
Nebst zwei Registern. 3. Bd. 1891—1895. Leipzig 1899, B.G. Teubner.  
VII, 342 S.

Die Nützlichkeit des Klusmannschen Programmverzeichnisses ist allzu  
anerkannt, als dass darüber noch ein Wort gesagt werden müsste. Die  
Bemerkung mag genügen, dass in dem neuen Bande die Titel von 223  
mathematischen Programmen auf S. 38—43 und S. 238—247 angegeben  
sind, und dass die systematische Anordnung es gestattet, sich mit leichter  
Mühe zurechtzufinden.

---

CANTOR.

**Deduction und Induction**, eine Begriffsbestimmung von KARL GNEISSE.  
Strassburg 1899, J. H. Ed. Heitz (Heitz & Mündel). 39 S.

Jeder Mathematiker weiss ganz gut, was unter Deduktion und was  
unter Induktion zu verstehen ist. Zwischen dem Wissen und dem un-  
zweideutig Aussprechen liegt aber nicht selten eine ziemlich weite Gedanken-  
kluft. Manchmal besteht die Schwierigkeit darin, dass zwei Begriffe so  
eng mit einander verknüpft auftreten, dass man den einen auf den andern  
zurückzuführen und jenen dann als erfahrungsgemäss gegeben vorauszusetzen  
in der Lage ist und man darüber in Zweifel geräth, welchem der beiden  
das Erstlingsrecht zustehe. Richtung und gerade Linie sind Beispiele  
solcher Begriffe. Herr Gneisse bestimmt die Gerade aus der Richtung;  
Andere, wozu wir uns selbst rechnen, halten den Begriff der Geraden für  
den einfacheren und nennen Richtung die Art wie eine Gerade im Raume  
sich ausdehnt u. s. w. Auch Deduktion und Induktion sind schwer zu de-  
finierende Begriffe. Herr Gneisse gelangt am Schlusse seiner Entwicklung  
zu folgenden Sätzen: Induktion und Deduktion setzen beide einen Begriff  
voraus und wollen ihn wie seine Erscheinungen durch ein mit ihm not-  
wendig verknüpftes Merkmal näher bestimmen. Die Induktion findet es  
in dem neuen stätigen Merkmal, das sie an diesen seinen Erscheinungen  
feststellt. Die Deduktion findet es in dem Merkmal, das mit einem höheren  
Begriffe notwendig verknüpft ist, unter den sie jenen subsummiert. Das  
von Herrn Gneiss benutzte Wort *stätig* bedeutet regelmässig wiederkehrend  
und hat mit Stetigkeit nichts zu thun.

---

CANTOR.

**Kalender und Uhren am Ende des Jahrhunderts** von Prof. Dr. WIL-  
HELM FOERSTER, Geh. Regierungsrat und Direktor der Königl. Stern-  
warte in Berlin. Braunschweig 1899, George Westermann. 79 S.

Der Verfasser dieser im besten Sinne des Wortes volkstümlichen Schrift  
ist in zwei Eigenschaften ziemlich allgemein bekannt: als hervorragender  
Astronom und als Meister in der Handhabung der deutschen Sprache. Wo

er die dem Einen geläufigen Kenntnisse dem Anderen zur Verarbeitung überlässt, muss ein Kunstwerk entstehen, und als solches dürfen wir die beiden vor uns liegenden Abhandlungen bezeichnen. Die erste behandelt den Kalender, die Reformen desselben durch Caesar, durch Papst Gregor XIII, die hoffentlich in Bälde bevorstehende Annahme des Gregorianischen Kalenders durch die Anhänger der griechisch-katholischen Kirche, Vorschläge zur Osterrechnung der Zukunft. Die zweite Abhandlung schildert die unter Mitwirkung der Elektrizität erzielte oder zu erzielende Übereinstimmung zahlreicher Uhren mit einer nach dem Lauf der Gestirne geregelten Centraluhr. Wenn wir die kleine Schrift als volkstümlich bezeichneten, so wollten wir freilich damit nicht sagen, sie sei so leicht geschrieben, dass jeder Leser sie sofort verstehen müsse. Dazu ist der Gegenstand denn doch ein zu feiner. Aber so leichtverständlich, als er gemacht werden kann, dürfte er durch Herrn Foersters Bearbeitung geworden sein.

CANTOR.

---

**Die Mathematik an den deutschen technischen Hochschulen.** Beitrag zur Beurteilung einer schwebenden Frage des höheren Unterrichtswesens von Dr. ERWIN PAPPERITZ, Professor der Mathematik und darstellenden Geometrie an der königl. sächs. Bergakademie zu Freiberg. Mit einer Tafel. Leipzig 1899, Veit & Comp. IV, 68 S.

Unsere Zeit ist nicht arm an Widersprüchen! Mit dem Bestreben, für die technischen Hochschulen das Recht zur Doktorernennung zu erlangen, ein Bestreben, welches im Oktober 1899 seine Befriedigung fand, ging zeitlich Hand in Hand der Wunsch, den technischen Lehrgegenständen an jenen Hochschulen auf Kosten der Mathematik einen breiteren Spielraum eingeräumt, den mathematischen Unterricht beschränkt zu sehen. Herr Papperitz hat diesen Wunsch so unparteiisch, als es einem Mathematiker überhaupt möglich ist, geprüft und zu diesem Zwecke die Frage gespalten: Ist die Mathematik an den technischen Hochschulen grundlegendes Fach oder Hilfswissenschaft? Wird ihr eine verhältnismässig zu lange Unterrichtszeit gewidmet? In ersterer Beziehung entscheidet sich der Verfasser dahin, die Mathematik in dem Umfange, in welchem sie zur Zeit an jenen Anstalten getrieben wird, sei geradezu unentbehrlich. In zweiter Beziehung belegt er durch statistische Angaben die Behauptung, die durch den Mathematikunterricht beanspruchte Zeit sei keineswegs eine übermässige. Herr Papperitz kleidet schliesslich seine Ansichten in 10 Thesen, welche aber in unserer kürzeren Einkleidung der Hauptsache nach enthalten sind.

CANTOR.

---

**Die reine Mathematik in den Jahren 1884—1899** nebst Aktenstücken zum Leben von Siegfried Aronhold weiland Professor der Mathematik (1860—1883) an der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin, mit seinem Bildnisse. Ein Gedenkblatt zur hundertjährigen

Jubelfeier der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin, gewidmet von Dr. E. LAMPE, Geh. Regierungsrat, Professor der Mathematik an der Königl. Technischen Hochschule zu Berlin. Berlin 1899, Wilhelm Ernst und Sohn. 48 S.

Die mathematische Entwicklung eines eben erst abgelaufenen Zeitraumes zu schildern und die Schilderung auf einen sehr knapp bemessenen Umfang zusammen zu drängen, ist ein doppelt schwieriges Unternehmen. Aus einer solchen Darstellung selbst wieder das Wichtigste auszuziehen, wollen wir nicht einmal versuchen. Wir begnügen uns mit der Bemerkung, dass Herr Lampe sich der Aufgabe, welche er sich stellte, gewachsen erwiesen hat, und dass wir mit grossem Vergnügen an der Hand seiner Aufzeichnungen jene 15 Jahre mathematischen Lebens rasch neuerdings durchlebten und zum kräftigen Früchte tragenden Baume sich auswachsen sahen, wovon vor anderthalb Jahrzehnten kaum erste Keime sich aus dem Boden hervorwagten. In dem mit der ersten Abhandlung in losester Weise verbundenen Aktenstücken zum Leben Aronholds begrüßen wir wertvolle Ergänzungen unseres Wissens von den Erlebnissen des deutschen Begründers der Invariantenlehre.

CANTOR.

**Histoire des mathématiques** par JACQUES BOYER. Paris 1900, Carré & Naud. XI, 260 pag.

Wenn Herr Boyer das Wagnis unternommen hat, eine Geschichte der Mathematik, die sich bis auf die allerneuste Gegenwart erstreckt, auf so kleinen Raum zusammenzudrängen, so musste er von Anfang an sich grundsätzliche Beschränkungen auferlegen. Die wesentlichste derselben besteht in dem Festhalten einer durchaus elementaren Darstellungsweise, in dem Verbannen jeder irgend höheren Formel. Dass er darin sich treu geblieben ist, muss man zugestehen. Die Schreibweise ist leicht, ist unterhaltend und wird die Leser, welche Herr Boyer sich vorzugsweise wünscht, Leser, die noch nicht wissen, sondern erst lernen wollen, gewiss zu fesseln vermögen. Auch werden ihnen und nicht weniger solchen Lesern, die schon wissen, die zahlreichen Porträts von Mathematikern willkommen sein, deren Quellen stets gewissenhaft angegeben sind. Nun bleibt noch eine Frage zu beantworten: ob die Leser, welche erst lernen wollen, aus Herrn Boyer's Buche überall Richtiges lernen? Leider können wir diese Frage nicht unbedingt bejahen. Eine Menge von Irrtümern ist uns begegnet, vermutlich meistens Flüchtigkeitsfehler, aber immerhin Fehler, und wir hoffen, Herr Boyer werde sich nur freuen, aufmerksam gemacht zu werden, wo er unter anderen bei einer neuen Ausgabe die bessernde Hand anlegen muss. Es scheint uns z. B. unerlässlich, dass Oresme, dass Albert Girard, dass Torricelli aufgenommen werden, dass von Bürgi's Miterfindung der Logarithmen, von Stifels Erfindung der Binomialkoeffizienten die Rede sei, und dieselben nicht bald Tartaglia (p. 97), bald Vieta (p. 133) zugeschrieben werden. Es scheint uns notwendig, bei gemeinsamer Nennung zweier Schriftsteller

die Zeitfolge inne zu halten, also nicht von Newton und Descartes, von Pascal und Desargues u. s. w. zu reden, wie es an vielen Stellen geschieht, und wodurch der Leser um so leichter irre geleitet wird, mit je weniger Vorkenntnissen er an das Buch heranging. Es muss von Pascals Methode der vollständigen Induktion (Schluss von  $n$  auf  $n + 1$ ) die Rede sein. Unter den zahlreichen kleineren Irrtümern und Lücken seien einige wenige genannt. p. 3: Die Tafeln von Senkereh enthalten neben den Quadrat-zahlen auch die Kubikzahlen. p. 4: Ahmes war nicht auf 1000, sondern auf 1700 v. C. zu setzen. p. 6: Die Ägypter rechneten mit  $\pi = \left(\frac{16}{9}\right)^2$ . p. 14: Nicht Euklid I sondern V wird auf Eudoxus zurückgeführt. p. 23: Woher weiss der Verfasser, dass Euklid in Athen studiert hat? p. 30: Nicht erst Boethius, sondern schon Valerius Maximus (unter Kaiser Tiberius) hat Euklid von Megara für den Verfasser der Elemente gehalten. p. 53: Serenus war aus Antinoëia, wie Heiberg gezeigt hat, nicht aus Antissa. p. 80: Statt Berlinus muss hier und im Register der Name Bernelinus heissen. p. 111: Harriot hat weder  $a^2$  und  $a^3$  geschrieben, noch hat er die Gleichungen auf 0 gebracht. p. 122: Cavalieri gehörte nicht dem Orden der Jesuiten, sondern dem der Jesuiten an, der von jenem sehr verschieden ist. p. 154: Wer war Kuhnius, bei welchem Leibniz Mathematik gehört haben soll? p. 240 ist von Steiner's Synthetischer Geometrie von 1867 die Rede, während Steiner 1863 starb und seine bahnbrechenden Schriften bereits 1832 und 1833, einzelne Abhandlungen seit 1826 veröffentlichte.

CANTOR.

**Die Zahlzeichen.** Von Dr. GOTTHOLD GUNDERMANN, Professor der klassischen Philologie an der Landesuniversität. Programm, Sr. Königl. Hoheit dem Grossherzoge von Hessen und bei Rhein Ernst Ludwig zum 25. August 1899 gewidmet vom Rektor und Senat der Landesuniversität. Giessen 1899, v. Münchow'sche Hof- und Universitäts-Druckerei (Otto Kindt). 49 S.

Die ungemein inhaltreiche Abhandlung besteht aus zwei räumlich allerdings nicht scharf getrennten Teilen. Erstens sind Zahlzeichen der verschiedensten Völker und aus den verschiedensten Zeiten abgedruckt, wobei immer die letzterschienenen Einzeluntersuchungen als Quelle dienen. Zweitens hat Herr Gundermann aus diesem Materiale seine Folgerungen gezogen. Der erste Teil, die Materialiensammlung, wird mit allgemeinem Danke begrüsst werden, dem sich auch anschliessen wird, wer dem zweiten Teile nicht unbedingt zustimmen vermag. Wir bekennen zu diesen Zweifeln zu gehören, wollen aber trotzdem die Schlußsätze zum Abdruck bringen, in welchen Herrn Gundermann's Lehre gipfelt: Ein älteres einfaches System, die Zahlen durch Striche zu bezeichnen, ist allmählich, aber nie ganz zurückgedrängt worden durch ein neues System, das von allen Kulturvölkern der antiken Welt angenommen wurde: die Buchstaben eines Alphabets bezeichneten in ihrer Reihenfolge 1—9 die Einer, 10—18 die

Zehner, 19—27 die Hunderter, 28 ein Tausend, 29 zehn Tausend. Aus diesem System entwickelt sich schrittweise ein neues, das nur einzelne Grundzeichen festhält, die übrigen abstösst. Das vollständige System lebt verborgen weiter und kommt nochmals zu grosser Blüte. Durch das Ziffersystem, den Abkömmling eines vollständigen Systems, werden alle früheren Systeme verdrängt. Wir möchten unsere Zweifel in eine Frage zusammendrängen. Wenn Herrn Gundermann's Lehre richtig ist, so muss in uralter Zeit eine völkergemeinsame Anordnung der Buchstaben bestanden haben. Auf welcher Grundlage baute diese sich auf?

---

CANTOR.

**Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften im klassischen Altertume.** Von Dr. H. STAIGMÜLLER, Professor am Königl. Realgymnasium in Stuttgart. Stuttgart 1899, Hofbuchdruckerei Carl Liebich. 40 S.

Dem hochmütigen Absprechen aller richtigen naturwissenschaftlichen Ansichten bei den Griechen, der Behauptung, dieses Volk habe nur an leeren Spekulationen sich erfreut und Beobachtungen abgelehnt, tritt Herr Staigmüller in diesem Programme entgegen. Er zeigt, dass Beobachtungen des Sternenhimmels, wie sie Hipparch bereits anstellte, keineswegs zu verachten sind. Er zeigt aber auch, dass Spekulationen von jeher die grössten Entdeckungen einzuleiten im stande waren und oftmals zu denselben führten, indem sie bestimmte Beobachtungen veranlassten. Herr Staigmüller hat, um diesen Satz durch ein Beispiel zu belegen, die Frage nach den antiken Vorläufern des Copernicus in erneuerte Erwägung gezogen. Pythagoras, Plato, Herakleides sind die Männer, deren kosmische Anschauungen ganz besonders geprüft werden. Die Widersprüche, welche sich in den Berichten über Plato und in seinen eigenen Schriften oder in Schriften nahor Schüler finden, werden aus der Furcht erklärt, dem Schicksale eines Sokrates zu verfallen. Plato war aus Vorsicht dunkel, aber der Wissende konnte und sollte in seinen zweideutigen Äusserungen die Wahrheit erkennen.

CANTOR.

# Bibliographie.\*

## Periodische Schriften.

- Abhandlungen der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften. Mathem.-physikal. Klasse. 21. Bd. München, Franz. M. 14.
- Annalen der Physik. 4. Folge. 1.—3. Bd. oder Jahrg. 1900. 12 Nummern. Leipzig, Barth. M. 38.
- Annalen der schweizerischen meteorologischen Centralanstalt 1897. Der schweizer. meteorolog. Beobachtungen 34. Jahrg. Zürich, Füssli & Beer. M. 18.
- Annuario astro-meteorologico, con effemeridi nautiche per l'anno 1900 (anno XVIII). Venezia, tip. Società M. S. fra compositori tipografi, 1899. L. 1. 50.
- Arbeiten, astronomisch-geodätische. Veröffentlichung der königl. bayer. Kommission für die internationale Erdmessung. 4. Heft. München, Franz. M. 10.
- Arbeiten, die astronomischen-geodätischen, des kaiserl. und königl. militär-geographischen Institutes in Wien. Publikationen für die internationale Erdmessung. XIII—XVI. Bd. Wien, Lechner. à M. 10.
- Berichte der sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Mathem.-phys. Klasse. II. Mathem. Teil. 1899. V. u. VI. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2. 80.
- Berichte, mathematische und naturwissenschaftliche, aus Ungarn. 16. Bd. 1898. Budapest, Kilián's Nachf. M. 7.
- Decaden-Monatsberichte (vorläufige Mitteilung) des königl. sächs. meteorolog. Institutes. 1898. 1. Jahrg. Chemnitz, Büzl. M. 2.
- Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen an den Landesstationen in Bosnien und der Hercegovina im Jahre 1897. Wien, Hof- u. Staatsdruckerei. M. 20.
- Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1898. Dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 54. Jahrg. 2. Abt. Physik d. Äthers. Braunschweig 1899, Vieweg & Sohn. M. 34.
- Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1899. Dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 54. Jahrg. 3. Abt. Kosmische Physik. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 22.
- Gezeitentafeln für das Jahr 1901. Herausgegeben vom Reichsmarineamt. Mit 14 Blättern in Steindruck, enthalten. Darstellungen der Gezeitenströmungen in der Nordsee, im Englischen Kanal und der Irischen See. Berlin, Mittler & Sohn. M. 1. 50.
- Jahrbuch, Berliner astronomisches, für 1892 mit Angaben für die Opposition der Planeten (1)—(440) für 1900. (Der Sammlung Berliner astronomischer Jahrbücher 127. Bd.) Berlin, Dümmler. M. 12.
- Jahrbuch der Astronomie und Geophysik. Enthaltend die wichtigsten Fortschritte auf den Gebieten der Astrophysik, Meteorologie und physikal. Erdkunde. 10. Jahrg. 1899. Leipzig, Mayer. kart. M. 7.
- Jahrbuch des königl. sächs. meteorolog. Institutes. XV. Jahrg. 1897. 3. Abt. Chemnitz, Büzl. M. 10.

\* Wo kein Erscheinungsjahr angegeben, ist es 1900.

- Jahrbuch, deutsches meteorologisches, für 1898. Beobachtungs-System der deutschen Seewarte. XXI. Jahrg. (23. Jahrg. der meteorolog. Beobachtungen in Deutschland.) Hamburg, Friedrichsen & Co. M. 13.
- Jahrbuch, deutsches meteorologisches, für 1898. Meteorolog. Station I. Ordnung in Magdeburg. Jahrbuch der meteorolog. Beobachtungen der Wetterwarte der Magdeburger Zeitung im Jahre 1898. XVII. Bd. XVIII. Jahrg. Magdeburg, Fabersche Buchdruckerei. kart. M. 6.
- Jahresbericht über die Fortschritte der Mathematik. 28. Bd. Jahrg. 1897. 3. (Schluss-) Heft. Berlin, Reimer. M. 12. 40.
- Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. 3. Bd. 10. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. M. —. 80.
- Mitteilungen, mathematisch-naturwissenschaftliche, im Auftrag des mathem.-naturwissenschaftl. Vereins in Württemberg herausgegeben von O. BÖCKLEN und E. WÖLFFING. 2. Serie. 2. Bd. 3 Hefte. Stuttgart, Metzler. M. 3.
- Publikationen der v. KUFFNER'schen Sternwarte in Wien. V. Bd. Wien, Frick. M. 20.
- Publikationen der Sternwarte des eidgenöss. Polytechnikums in Zürich. 2. Bd. Zürich, Schulthess & Co. M. 12.
- Rundschau, astronomische. Herausgeg. von d. Manora-Sternwarte in Lussinpiccolo (Österreich). 2. Bd. 10 Hefte. Lussinpiccolo, Manora-Sternwarte. Postfrei M. 12; einzelne Hefte M. 1. 35.
- Sitzungsberichte, Wiener. Mathem.-naturw. Klasse. I. Abt. 108. Bd. 6. u. 7. Heft. Wien, Gerolds Sohn. M. 2. 60.
- Dasselbe. Abt. IIa. 108. Bd. 8. Heft. Ebenda. M. 5. 20.
- Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft. 2. Jahrg. 1900. Leipzig, Barth. M. 4.
- Veröffentlichung des königl. preussischen geodätischen Institutes. Neue Folge. Nr. 1. Die Polhöhe von Potsdam. 2. Heft. Berlin, Stankiewicz. M. 5.
- Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorolog. Instituts. 1895. 3. Heft. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. u. III. Ordnung im Jahre 1895. Beobachtungssystem des Königreichs Preussen und benachbarter Staaten. Berlin, Asher & Co. M. 11.
- Dasselbe. Ergebnisse der Niederschlags-Beobachtungen in den Jahren 1890 und 1896. Ebenda. M. 18.
- Veröffentlichungen des königl. preussischen meteorolog. Instituts. 1899. 1. Heft. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung im Jahre 1899, zugleich deutsches meteorolog. Jahrbuch für 1899. Beobachtungssystem des Königreichs Preussen und benachbarter Staaten. Berlin, Asher & Co. M. 3. 50.
- Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellschaft. 34. Jahrgang. 3. Heft. Leipzig 1899, Engelmann. M. 2.
- Vierteljahrsschrift der astronomischen Gesellschaft. 34. Jahrgang. 4. Heft. Leipzig, Engelmann. M. 2.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

- AL-BATTĀNĪ sive Albatenus, Opus astronomium ad fidem codicis escurialensis arabice editum, latine versum, adnotationibus instructum a Carolo Alphonso Nallino. Pars III textum arabicum continens. Mediolani Insubrum 1899, apud Ulrichum Hoeplium.
- BOYER, JACQUES, Histoires des Mathématiques. Paris, Carré & Naud. Fr. 5.
- CANTOR, MOR., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 2. Bd. 2. Halbbd. Von 1550 — 1668. 2. Aufl. Leipzig 1899, B. G. Teubner. M. 12.
- HEYDWEILLER, A., Die Entwicklung der Physik im 19. Jahrh. Vortrag. Berlin, Parey. M. 1.

- KÖNIG, WALT., Goethes optische Studien. Festrede zur Feier von Goethes 150. Geburtstag. Frankfurt a. M., Koenitzer. M. 1.
- KUGLER, FRZ. XAV., Die babylonische Mondrechnung. Zwei Systeme der Chaldäer über den Lauf des Mondes und der Sonne. Auf Grund mehrerer von J. N. STRASSMAIER S. J. kopierten Keilinschriften des brit. Museums. Mit einem Anhang über chaldäische Planetentafeln. Freiburg i. B., Herder. M. 24.
- LAAR, J. J. VAN, J. D. van der Wals. Ein Lebensabriss. Leipzig, Barth. M. 1. 60.
- LEIBNIZ, G. W. V., Briefe an den Astronomen der „Societät der Wissenschaften“ Gottfried Kirch aus den Jahren 1702—1707. Der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin zu ihrem 200jähr. Jubiläum gewidmet vom königl. Joachimsthalischen Gymnasium. Berlin, Reimer. M. —. 60.
- Raccolta voltiana edita per cura della società storica comense e del comitato per le onoranze a Volta. Como, Bertolini, Nani e C. L. 7.
- OLBERS, WILH., sein Leben und seine Werke. Im Auftrage der Nachkommen herausgegeben von C. SCHILLING. 2. Bd. Briefwechsel zwischen Olbers und Gauss. 1. Abt. Berlin, Springer. M. 16.
- THOMPSON, SILVANUS P., Michael Faradays Leben und Wirken. Übersetzt von AGATHE SCHÜTTE, und HEINRICH DANNEEL. Halle, Knapp. M. 8.
- WASSILIEF, A., und DELAUNAY, N., P. L. Tschebyschef. — P. L. Tschebyschef und seine wissenschaftlichen Leistungen, von A. WASSILIEF. — Die Tschebyschefschen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen, von N. DELAUNAY. Mit einem Bildnis Tschebyschefs in Heliograv. Leipzig, B. G. Teubner. M. 4.
- Wie studiert man Mathematik und Physik? Von einem Lehrer der Mathematik. 2. Auflage. Leipzig 1899, Rossberg. M. —. 60.

### Reine Mathematik.

- ALASIA, CRISTOFORO, Geometria e trigonometria della sfera. Milano, Hoepli.
- MAFFIOTTI, G. B., Il planimetro a scure di H. PRYZZ: teoria e pratica. Torino, Paravia e C., 1899. L. 1. 60.
- BÖGER, RUD., Ebene Geometrie der Lage. (Sammlung Schubert VII.) Leipzig, Göschen. geb. M. 5.
- BOHNERT, F., Ebene und sphärische Trigonometrie. (Sammlung Schubert III.) Leipzig, Göschen. geb. M. 2.
- BOREL, E., Nouvelles leçons sur la théorie des fonctions. Leçons sur les fonctions entières. Paris. M. 3.
- BOSSE, L., v. MÜLLER, H., Algebra. Mit Aufgaben und 5stelliger Logarithmentafel. Berlin, Parey. M. 1. 80.
- BRANDENBURGER, C., Anwendung der elliptischen Funktionen auf durch algebraische Funktionen vermittelte konforme Abbildungen. Dissert. Zürich 1899.
- BRAUN, J., Das Fortschrittsgesetz der Primzahlen durch eine transcendente Gleichung exakt dargestellt. Programm. Trier 1899.
- BULLART, W. G., On the general classification of plane quartic curves. Dissert. Worcester 1899.
- BURALI-FORTI, C., Les propriétés formales des opérations algébriques, Turin. M. 1.
- CAHEN, E., Eléments de la Théorie des nombres. Congruences. Formes quadratiques, nombres incommensurables. Questions diverses. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 12.
- CAYLEY, A., An elementary treatise on elliptic functions. 2d ed. Cambridge, Deighton, Bell & Co. 7 s. 6 d.
- COX, HOMERSHAM, A rudimentary treatise on the integral calculus. London, Crosby Lockwood and Son. 1 s. 6 d.
- DEHN, MAX, Die Legendre'schen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck. Diss. Leipzig, B. G. Teubner. M. 1. 20.

- DÖLP, H., Aufgaben zur Differential- und Integralrechnung nebst den Resultaten und den zur Lösung nötigen theoretischen Erläuterungen. 8. Aufl. Von EUG. NETTO. Giessen, Ricker. geb. M. 4.
- DÖLP, H., Die Determinanten, nebst Anwendung auf die Lösung algebraischer und analytisch-geometrischer Aufgaben. Elementar behandelt. 5. Aufl. Darmstadt 1899, Roether. M. 2.
- DUDEENING, WILH., Über die durch eine allgemeine dreigliedrige algebraische Gleichung definierte Funktion und ihre Bedeutung für die Auflösung der algebraischen Gleichungen von höherem als vierten Grade. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2. 40.
- EHRRHARDT, H., Neues System der Flächenberechnung und Flächenteilung mit Hilfe einer planimetrischen Tafel, welche zugleich als Produkten- und Quadrat-tafel dient, nebst einer Sinustafel. Stuttgart, Wittwer. M. 3, kart. M. 3. 50.
- Encyclopädie der math. Wissensch. I. Tl. 1. Bd. 4. Heft. Leipzig 1899, B. G. Teubner. M. 4. 80.
- Examen-vragen, Wiskundige, van de examens B der polytechnische school te Delft. Delft, Waltman Jr. F. 1. 25.
- FELDBLUM, M., Über elementar-geometrische Konstruktionen. Diss. Göttingen 1899.
- Fonctions elliptiques, Principales formules de la théorie des, Tableau résumé, publié par les Nouvelles Annales des Mathématiques. Paris. M. —. 80.
- FORSYTH, ANDREW RUSSEL, Theory of differential equations. Part. 2. Vols. 2 and 3, Cambridge, Univ. Press. 20 s.
- FRANCK, P., Über die Flächeninhalte und Bogenlängen von Fusspunktkurven und Rollkurven. Diss. Leipzig 1899.
- FREGE, G., Über die Zahlen des Herrn H. Schubert. Jena, Pohle. M. 1. 20.
- GANTER, H., und RUDIO, F., Die Elemente der analytischen Geometrie. Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten, sowie zum Selbststudium. Mit zahl-reichen Übungsbeispielen. 1. Tl. Die analyt. Geometrie der Ebene. 4. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 3.
- GECK, ERWIN, Über die singulären Punkte algebraischer Flächen. Dissertation. Tübingen, Pietzcker. M. 1.
- GEER, P. VAN, Leerboek der analytische meetkunde. Tweede deel. Oppervlakken en ruimtekrommen. Leyden, Sythoff. F. 2. 90.
- GRACE, J. H., and ROSENBERG, F., The elements of co-ordinate geometry. Part. 2, The conic. London 1899, Clive. 4 s. 6 d.
- GRAF, J. H., and GUBLER, ED., Einleitung in die Theorie der Bessel'schen Funktionen. 2. Heft. Die Bessel'sche Funktion zweiter Art. Bern, Wyss. M. 3. 20.
- GRASSMANN, ROB., Die Differential- und Integralrechnung bei Vermeidung der Trugschlüsse, eine höchst leichte Wissenschaft. Stettin, Grassmann. kart. M. —. 40.
- Die Funktionenlehre namentlich die Differential- und Integralrechnung in strenger Formelentwicklung. (Neue Titelausgabe von „Die Folgelehre“, 1895.) Ebenda. M. 1. 75.
- GRASSMANN, H., Schraubenrechnung und Nullsystem. Festschrift. Halle 1899.. M. 1. 50
- HEIDKE, P., Über Kreisteilungsgleichungen vom Primzahlgrad
- $$p = p_1^{\pi_1} \cdot p_2^{\pi_2} \cdot p_3^{\pi_3} \cdot \dots \cdot p_\mu^{\pi_\mu} + 1 \quad (\mu > 1).$$
- Dissertation. Greifswald 1899.
- HEINECK, C., Invariante Kurvenintegrale bei infinitesimalen Transformationen in drei Veränderlichen  $x, y, z$  und deren Verwertung. Dissert. Leipzig 1899.
- HENTSCHEL, O., Ausführung einiger konformen Abbildungen. I. Programm. Salz-wedel 1899.
- HERFF, E., Die Maxima und Minima einer verwandelbaren Funktion. Programm. Sigmaringen 1899.

- HESSENBERG, G., Über die Invarianten linearer und quadratischer Differentialformen und ihre Anwendung auf die Deformation der Flächen. Dissert. Berlin 1899.
- HINN, G. A., Die Anwendung unendlicher Produkte in der Funktionentheorie. Programm. Sächsisch-Regen 1899.
- E. JENSEMA, Een krommenbundel van den derden en krommenet van den vierden graad. Dissert. Groningen, Hoitsema.
- JUNG, H., Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschliesst. Dissert. Marburg 1899.
- KIEPERT, LUDW., Grundriss der Differential- und Integralrechnung. II. Th. Integralrechnung. 7. Aufl. des gleichnamigen Leitfadens von weil. MAX STEGEMANN. Hannover 1899, Helwing. M. 11. 50, geb. M. 13.
- KIRSTEIN, O., Konstruktion eines räumlichen Polarsystems aus einem Polartetraeder und drei Paar konjugierten Punkten. Programm. Meseritz 1899.
- KLAS, ADF., Die Dreiteilung und Fünfteilung des Winkels auf dem Wege der elementaren Geometrie, allein mit Zirkel und Lineal gelöst und dargelegt. Wiesbaden 1899, Fergler. M. 1. 20.
- KLUG, LEOP., Die kubische Involution. (Aus: Medicin.-naturw. Mitteilungen.) Kobzsvár. Wien, Eisenstein & Co. M. 1. 50.
- KNESER, ADF., Lehrbuch der Variationsrechnung. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 8.
- KOCH, K., Zerlegbare Modelle für Krystallographie und Sphärik und andere Gebiete. Programm. Cannstatt 1899.
- KÜLMEL, F., Bewegungen und Umlegungen der Ebene bei projektiver Maßbestimmung. Untersuchungen zur nichteuklidischen Geometrie. Lehr- und Schauenburg & Co. M. 2. 50.
- KOWALEWSKI, G., Die primitiven Transformationsgruppen in fünf Veränderlichen. Habilitations-Schr. Leipzig 1899.
- LAURENT, H., Cours de mathématique, professé à l'institut agronomique. Paris, Carré & Naud. cart. Fr. 7.
- LIEBMANN, H., Über die Verbiegung der geschlossenen Flächen positiver Krümmung. Habilitations-Schr. Leipzig 1899.
- LUDWIG, B. v., Über die Notwendigkeit der Beschränkung des Jacobi'schen Umkehrproblems auf Abel'sche Integrale erster Gattung. Dissert. Halle.
- MANSION, P., Elemente der Theorie der Determinanten. Mit vielen Übungsaufgaben. 3. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2. 60.
- MANCHESTER, J. E., Über Singularitäten ebener Kurven. Dissert. Tübingen 1899.
- Matriculation model answers, mathematical from June, 1893, to June, 1899. London 1899. Clive. 2 s.
- MEHLING, A., Über diejenigen Flächen, die äquidistante infinitesimale Biegungen gestatten. Dissert. Würzburg 1899.
- MEYER, W. F., Rapporto sui progressi della teoria proiettiva degli invarianti nell'ultimo quarto di secolo. Traduzione dal Tedesco da G. VIVANTI con aggiunte dell'autore. Napoli 1899. M. 6. 80.
- DE MORGAN, A., Elementary illustrations of the differential and integral calculus. London 1899. Paul Trübner & Co. 5 s.
- MÜLLER, OTTO, Tavole di logaritmi con cinque decimali. 6. ed., aumentato delle tavole dei logaritmi d'addizione e sottrazione, per cura di Michele Rajna. (Manuali Hoepli.) Milano, Hoepli.
- MURRAY, D. A., Plane trigonometry for college and secondary schools. London, Longmans. 5 s.
- NETTO, EUG., Vorlesungen über Algebra. 2. Bd. 2. (Schluss-) Lieferung. Leipzig, B. G. Teubner. M. 10, 2. Bd. kompl. M. 16.

- Oeuvres complètes de Christiaan Huygens, publiées par la Société hollandaise des sciences. T. VIII. Correspondance 1676—1684. (Avec un portrait.) La Haye, Nyhoff, 1899. F. 15.
- Oss, S. L. van, Das regelmässige Sechshundertzell und seine selbstdeckenden Bewegungen (Verhand. koninkl. Akad. van wetensch.) Amsterdam, Müller. F. 1.
- ОТТИ, H., Eigenschaften der Besselschen Funktionen zweiter Art. Dissertation. Bern 1899.
- PEARCE, B. O., A short table of integrals. Revised ed. Boston, Ginn & Co. 1899. § 1.
- RÖLLNER, F., a) Beweis eines Gesetzes der gleichzeitig gleichschnellen Rotationen, b) Über Ähnlichkeit und Symmetrie als grundlegende Prinzipien der Geometrie. Programm. Römerstadt 1899.
- ROTHROCK, D. A., Invariants of the finite continuous groups of the plane. Dissert. Leipzig 1899.
- ROUCHÉ, E., et COMBEROUSSE, C. DE, Traité de géométrie. 7. éd., revue et augmentée par E. ROUCHÉ. (2 volumes.) Vol. I.: Géométrie plane. Paris. M. 6. 80.
- RYDBERG, C. F., Geometriskä uppgifter, gifna i de skriftliga afgangsexamina på reallinien h. t. 1879—v. t. 1898. Med svar och anvisningar. Stockholm. 80 öre.
- SASSENFELD, J., Die Hauptsätze der Elementarmathematik für das Gymnasium. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet. (Enth. Planimetrie, Trigonometrie, Logarithmen, Stereometrie, Einleitung in die analytische Geometrie der Ebene.) Trier, Löwenberg. M. 3. 70.
- Lehr- und Übungsbuch der Arithmetik und Algebra für das Gymnasium. Trier, Löwenberg. M. 1. 80, geb. M. 2. 30.
- SCHWEINER, W., Zur Theorie des Legendre-Jacobi'schen Symbols  $\left(\frac{m}{n}\right)$ . (Abhandl. königl. sächs. Ges. d. Wissensch. math.-phys. Klasse, 25. Bd. Nr. VI.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 1. 80.
- Шиффъ, Вѣра, Сборникъ упражненій и задачъ по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ. Часть II. Приложенія анализа безконечно-малыхъ къ геометріи и интегрированіе дифференціальныхъ уравненій. St. Petersburg.
- SCHIFF, WERA VON, Sammlung von Übungen u. Aufgaben aus der Differential- und Integralrechnung. Th. II. Anwendungen der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie und Integration der Differentialgleichungen. 3 Rubel.
- SCHOOTEN, C., Analytische meetkunde in de ruimte. (Lijnen, vlakken en oppervlakken van den 2den graad.) Delft, Waltman Jr. F. 2.
- SCHUBERT, HERM., Arithmetik und Algebra. (Sammlung Göschen Nr. 47.) Zweiter Abdruck. Leipzig, Göschen. geb. M. —. 80.
- SCHWERING, KARL, Trigonometrie für höhere Lehranstalten. 2. Aufl. Freiburg i. B., Herder. M. —. 80.
- SERRET, J. A., Cours de calcul différentiel et intégral 5. éd. 2 volumes. Paris. M. 21.
- SIMON, MAX, Analytische Geometrie der Ebene. (Sammlung Schubert VIII.) Leipzig, Göschen. M. 6.
- СОЛОМОНЪ, Г., Аналитическая геометрія двухъ измѣреній.  
SOLOMON, G., Analytische Geometrie der Ebene. 2. Aufl. Moskau. 3 Rubel.
- Аналитическая геометрія трехъ измѣреній.  
Analytische Geometrie des Raumes. 2. Aufl. Moskau. 2 Rubel.

- SPORER, B., Zur Ableitung allgemeiner Eigenschaften algebraischer Kurven. Programm. Ehingen 1899.
- STENDER, H., Invariante Flächen und Kurven bei konformen Gruppen des Raumes. Dissertation. Leipzig 1899.
- Stereoscopic views of solid geometry figures. 93 cards in a pasteboard box. Boston 1899, Heath. \$ 0. 60.
- TCHÉRYCHEFF, P.L., Oeuvres. Publiées par les soins de A. Markoff et N. Sonin. (2 volumes.) Vol. I. Avec portrait. St. Pétersbourg 1899. (Gleichzeitig in russischer Sprache erschienen.) M. 17. 50.
- UTH, K., Planimetrie. Leitfaden mit Konstruktionsaufgaben und Übungssätzen. 6. Aufl. Von R. Franz. Kassel, Hühn. geb. M. 2.
- WEINER, F., Eine Anwendung der Hermite'schen  $U$ -Funktionen. Programm. Wien 1899.
- WEISBACH, JUL., Tafel der vielfachen Sinus und Cosinus sowie der vielfachen Sinus versus von kleinen Winkeln, nebst Tafel der einfachen Tangenten. 6. Ausgabe. Berlin, Weidmann. M. 1.
- WELL, G. J., VAN DE, Oplossingen der wiskundige opgaven van de examens  $B$  der polytechnische school te Delft. Met nieuwe opgaven. Dl. II. Examen  $B$  2. Deventer, Kluwer. F. 5. 25.
- WELLS, W., New higher algebra. Boston 1899, Heath. Halfleather. \$ 1. 25.
- WESTFAL, J. E. v., On a category of transformation groups in three and four dimensions. Dissertation. Leipzig 1899.
- WETH, R., Über eine Verallgemeinerung der Gauss'schen Differentialgleichung. Programm. Basel 1899.
- WITTING, A., Geometrische Konstruktionen, insbesondere in begrenzter Ebene. Programm. Dresden 1899.
- WOLFF, H., Über die Anzahl der Zerlegungen einer ganzen Zahl in Summanden. Dissert. Halle 1899.

### Angewandte Mathematik.

- ALASIA, CRISTOFORO, Calcolo grafico ed applicazioni della statica grafica. Città di Castello 1899. Lapi. L. 4.
- ALBRECHT, TH., Bericht über den Stand der Erforschung der Breitenvariation am Schlusse des Jahres 1899. Herausgegeben vom Centralbureau der internationalen Erdmessung. Berlin, Reimer. M. 3.
- ARETIN, THDR. FRH. v., Handbuch zum Abstecken von Kurven sowie zur Bestimmung der Winkel (ohne Mess-Instrumente). 3. Aufl. München, Ackermann. M. 1. 60.
- BAKER, WM., Elementary dynamics. London 1899, Bell. 3 s. 6 d.
- BARBERA, LU., Critica del newtonianismo ovvero delle cause dei moti planetari. Bologna, Cenerelli. L. 8.
- BARR, J. H., Kinematics of machinery; a brief treatise on constrained motions of machine elements. New York 1899, Wiley. Cloth \$ 2. 50.
- BJERKNES, V., Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. Bjerknæs' Theoric. I. Bd. Leipzig, Barth. M. 10, geb. M. 11. 50.
- BODA, MART., Die Schaltungstheorie der Blockwerke. (Aus: Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens.) Wiesbaden, Kreidel. M. 8.
- BRUNO, K., Der Stoss elastischer Kugeln. Programm. Klagenfurt 1899.
- CHOURA, JOH., Leitfaden für den Unterricht in der darstellenden Geometrie an den kaiserl. und königl. Militärakademien. Parallel- und Centralperspektive. Kotierte Projektionen. Wien, Seidel & Sohn. M. 4. 80.
- EGGERS, WILH., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 1. Teil. Die Elemente. Leipzig, Seemann & Co. kart. M. 1. 50.

- Ergebnisse, die, des Präzisionsnivelements in der österr.-ungar. Monarchie. Süd-östlicher Teil. Herausgeb. vom kaiserl. und königl. militär-geograph. Institute. Wien, Lechner. M. 3.
- FALLER, OTTO, Eine neue Anschauung über die Reibung. Vorläufige Mitteilung. Vortrag. München 1899, Ackermann. M. —. 40.
- Fixpunkte, die, des schweizerischen Präzisionsnivelements. Les repères du nivellement de précision de la Suisse. Herausgegeben durch das eidgenöss. topograph. Bureau. 10. Lieferung. Bern, Schmid & Francke. M. 4.
- FLIEGNER, ALB., Die Umsteuerungen mit dem einfachen Schieber in rein zeichnerischer Behandlungsweise. 2. Aufl. der „Umsteuerungen der Lokomotiven“. Zürich, Schulthess. M. 5.
- FOERSTER, W., und BLENCK, E., Populäre Mitteilungen zum astronomischen und chronologischen Teile des preussischen Normalkalenders für 1901. Berlin, königl. statist. Bureau. M. 1.
- FOERSTER, W., und LEHMANN, P., Die veränderlichen Tafeln des astronomischen und chronologischen Teils des preussischen Normalkalenders für 1901. Nebst einer allgemeinen statist. Beilage von E. BLENCK u. A. PETERSILIE. Berlin, königl. statist. Bureau. M. 5.
- GOUDIN, J.-B., Études comparatives sur la poussée des terres et sur les murs de soutènement. Paris, Dunod. Fr. 2.
- GRACES, F., Zahlenbeispiele zur statischen Berechnung von Brücken und Dächern. Durchgesehen von G. BARCKHAUSEN. Wiesbaden 1899, Kreidel. M. 8.
- GRAVES, JOHN, Solutions to the examples in a Treatise on elementary hydrostatics. Cambridge 1899, Univ. Press. 5 s.
- GROSSMANN, LUDW., Die Mathematik im Dienste der Nationalökonomie. 11. Lieferg. Wien, Selbstverlag. M. 5.
- GUBATZ, LÜDCKE, WEIGEL, 301 Aufgaben aus der darstellenden Geometrie für Maschinenbauer, Kesselschmiede und verwandte Gewerbe. Mit kurzen praktischen Lösungen. Leipzig, Seemann & Co. kart. M. 2. 25.
- HAGEN, I. G., S. J., Atlas stellarum variabilium. Series II, compectens stellas variables intra limites declinationis  $0^\circ$  et  $+25^\circ$ , etc. Berlin, Dames. Subskriptionspr. M. 46, Einzelp. M. 55. 20.
- Handwörterbuch der Astronomie. 19. Lieferung. Breslau 1899, Trewendt. M. 3. 60.
- Dasselbe. 20. Lieferung. Ebenda. M. 3. 60.
- HECHT, KARL, Lehrbuch der reinen und angewandten Mechanik für Maschinen- und Bautechniker. 2. Bd. Die Festigkeitslehre. Dresden, Kühnmann. M. 9, geb. M. 10.
- HERTZ, HEINRICH, The principles of mechanics. Presented in a new form. With an introduction by H. von Helmholtz. Authorised english translation by D. E. Jones and J. T. Wally, London, Macmillan. 10 s.
- LENGAUER, I., Geometrische Wahrscheinlichkeitsprobleme. Progr. Würzburg 1899.
- LORENTZ, B., Grösse und Masse der Weltkörper. Programm. Kalksburg 1899.
- MÖBIUS, A. F., Astronomie. Grösse, Bewegung und Entfernung der Himmelskörper. 9. Aufl. Bearb. von WALT. WISLICENUS. (Sammlung Göschen Nr. 11.) 2. Abdruck. Leipzig, Göschen. geb. M. —. 80.
- ORFF, KARL v., Über die Hilfsmittel, Methoden und Resultate der internationalen Erdmessung. Festrede. München, Franz. M. 2.
- PASCAL, Traité des ponts métalliques. Calcul des poutres et des ponts par la méthode ordinaire et par la statique graphique. Nouvelle édition entièrement refondue. Paris, Béranger. Fr. 15.
- PEDROCCO, ANDREA. Materia e forza. Scie 1899, tip. Fadiga.
- RITTER, AUG., Lehrbuch der technischen Mechanik. 8. Aufl. Leipzig, Baumgärtner. M. 20, geb. M. 22.

- SAILER, ENGELB., Die Aufgaben aus der darstellenden Geometrie, welche bei der Prüfung für das Lehramt der Mathematik und Physik an den königl. bayer. humanist. und technischen Unterrichtsanstalten in den Jahren 1873 - 1893 gestellt wurden. München 1899, Ackermann. M. 2.
- SCHLOTKE, J., Lehrbuch der darstellenden Geometrie. 2. Teil. Schatten- und Beleuchtungslehre. 2. Aufl. Dresden 1899, Kühnmann. M. 2.
- SCHMIDT, J., Anleitung zur Konstruktion von Sonnenuhren. Progr. Plan 1899.
- SCHORR, R., Bemerkungen und Berichtigungen zu Carl Rümker's Hamburger Sternkatalogen 1836-0 und 1850-0. 2. Serie. (Mitt. Hamb. Sternw. Nr. 5 = 4. Beiheft. z. Jahrb. der Hamburg-wissensch. Anstalten XVI, 1898.) Hamburg, Gräfe & Sillen. M. 2.
- SCHUBERT, HERM., Mathematische Musestunden. Eine Sammlung von Geduldspielen, Kunststücken und Unterhaltungsaufgaben mathem. Natur. 2. Aufl. 3 Bände (1. Zahl-Probleme. — 2. Anordnungs- und Wahrscheinlichkeitsprobleme. — 3. Reiseprobleme und geometrische Probleme.) Leipzig, Göschen. à M. 4.
- SCHULTZ, E., Mathematische und technische Tabellen für Baugewerkschulen und für den Gebrauch in der Praxis. 4. Aufl. Unter Mitwirkung von E. DIECKMANN. Ausg. mit Logarithmen. Essen 1899, Baedeker. kart. M. 1.50; mit Anleitung M. 1.75.
- SILBER, O. II. P., Praktische Schattenkonstruktionen und Perspektiven, Isometrie, Dachdurchdringungen und Dachausmittlungen. 21 Tafeln in farb. Lithographiedruck nebst einem Vorwort. 2. Aufl. Berlin, Frantz. M. 6.  
in Mappe M. 7.50.
- SPARRE, Magnus de, Etude du mouvement des projectiles dans les cas ou la résistance de l'air est supposée proportionnelle au cube de vitesse. Paris, Berger-Levrault. Fr. 2.
- STURM, CHR., Lehrbuch der Mechanik. (Cours de mécanique.) Übersetzt von THDR. GROSS. 2. Bd. Berlin, Calvary & Co. M. 8, geb. M. 9.
- TALLQVIST, H., Grunderna af potential teorin med användning pa elektrostatiken och magnetismen. Helsingfors 1899. M. 5.
- Verhandlungen der vom 3. bis 12./X. 1898 in Stuttgart abgehaltenen Konferenz der internationalen Erdmessung. Zugleich mit den Spezialberichten über die Fortschritte der Erdmessung und den Berichten der Vertreter der einzelnen Staaten über die Arbeiten in ihren Ländern. — Comptes-rendus des séances de la 12. conférence générale de l'association géodésique internationale. (Deutsch und französisch.) 2 Bde. Berlin 1899, Reimer. M. 12.
- VODUŠEK, M., Neue Theorie der Mondbewegung. Programm. Laibach 1899.
- WHITTAKER, E. T., Report on the progress of the solution of the problem of three bodies. (Rep. Brit. Ass.) London. M. 2.
- WÜST, ALB., Anleitung zum Gebrauch des Taschen-Rechenschiebers für Techniker. 4. Aufl. Mit einem Rechenschieber. Halle, Hofstetter. kart. M. 1.25.

### Physik und Meteorologie.

- ALMY, JOHN E., Über die Entladungspotentiale in festen und tropfbarflüssigen Dielektriciis. Dissert. Berlin, Mayer & Müller. M. 1.20.
- ASSMANN, RICH., Beiträge zur Erforschung der Atmosphäre mittels Luftballon. Unter Mitwirkung von A. BERSON, H. GROSS, V. KREMSER und R. STÜRING herausgegeben. Berlin, Mayer & Müller. M. 4.
- BÄCKLUND, A. V., Elektrodynamik. Efter Författarens universitets-Föreläsningar. Lund 1899. Kr. 6.
- BAMLER, K., Strassburger Temperaturmittel nach 100jährigen Beobachtungen. Dissert. Strassburg 1899.

- BECKMANN, ERNST, Neue Vorrichtungen zum Färben nichtleuchtender Flammen (Spektrallampen). (Abhandl. k. sächs. Ges. d. Wiss., math.-phys. Klasse, 26. Bd. Nr. I.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 2.
- BÖRNER, H., Physikalisches Unterrichtswerk für höhere Lehranstalten sowie zur Einführung in das Studium der neueren Physik in 2 Stufen. 1. Stufe. I. Vorschule der Experimental-Physik. 3. Aufl. Berlin, Weidmann. geb. M. 1. 80.
- BÜNGER, G., Was muss man von der Elektrizität wissen? Berlin 1899. Steinitz. M. 1.
- BÜTSCHLI, O., Untersuchungen über Mikrostrukturen des erstarrten Schwefels, nebst Bemerkungen über Sublimation, Überschmelzg. und Übersättigg. des Schwefels und einiger anderer Körper. Leipzig, Engelmann. M. 11.
- COTTON, A., Le phénomène de Zeeman. Paris, Carré & Naud. Fr. 2.
- DRUDE, PAUL, Lehrbuch der Optik. Leipzig, Hirzel. M. 10, geb. M. 11. 20.
- EDER, J. M., und VALENTA, E., Normal-Spektren einiger Elemente zur Wellenlängenbestimmung im äussersten Ultraviolett. (Aus: Denkschriften d. königl. Akad. d. Wiss.) Wien, Gerold's Sohn. M. 3. 90.
- — — Das Spectrum des Brom. (Aus: Denkschriften d. königl. Akad. d. Wissensch.) Ebenda. M. 2. 20.
- EWERS, P., Zur Mechanik der Kanal- und Kathodenstrahlen. Diss. München 1899.
- FALB'S, RUD., Neuer Wetterkalender und Verzeichnis der kritischen Tage für 1900, Januar bis Juni. Berlin 1899, Steinitz. M. 1.
- FELICI, RICCARDO, Über die mathematische Theorie der elektrodynamischen Induktion. Übers. von B. DESSAU. Herausgeb. von E. WIEDEMANN. (Ostwald's Klassiker Nr. 109.) Leipzig, Engelmann. M. 1. 80.
- FRANCKE, KARL, Einige neue Eigentümlichkeiten von festen Körpern, besonders von Metallen. (Naturwiss. Vorträge Nr. VIII.) München, Seitz & Schauer. M. 1.
- GARTEN, SIEGFR., Beiträge zur Physiologie des elektrischen Organs der Zitterrochen. (Abhandl. königl. sächs. Gesellsch. d. Wiss., mathem.-phys. Klasse, 25. Bd. Nr. V.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 5.
- HEINKE, C., Energetische Streifzüge. Eine Studie über physikal. Probleme. Leipzig, Hirzel. M. 1. 40.
- Jahrbuch, deutsches meteorologisches, für 1898. Beobachtungssystem d. meteorologischen Station I. Ordnung. Aachen. IV. Jahrgang. Karlsruhe, Braun. M. 5.
- JUNGE, KURT, Über die magnetischen Kraftlinien Faradays. Programm. Leipzig, Hinrichs. M. 1. 20.
- KERNFLER, FRZ., Die Unität des absoluten Maßsystems in Bezug auf magnetische und elektrische Grössen. Budapest. (Leipzig 1899, B. G. Teubner.) M. 1. 50.
- KOHLRAUSCH, FRDR., Kleiner Leitfaden der praktischen Physik. Leipzig 1899, B. G. Teubner. geb. M. 4.
- LECHATLIER, H., et BOUDOUARD, O., Mesures des températures élevées. Paris, Carré & Naud. cart. Fr. 5.
- LEDUCHOWSKI, JOH. GRAF, Wetterprognose, gültig für Niederösterreich, Teile von Oberösterreich, Südmähren und Westungarn, bezw. für ganz Österreich-Ungarn. IV. Jahrg. 1900. 12 Nrn. Wien, Braumüller. à M. —. 20.
- LIESEGANG, R. ED., Photographische Physik. (Mit Ausnahme der Optik.) Düsseldorf 1899, Liesegang. M. 2.
- LOMMEL, E. V., Lehrbuch der Experimentalphysik. 6. Aufl. Herausgeb. von WALT. KÖNIG. Leipzig, Barth. M. 6. 40, geb. M. 7. 20.
- MACH, E., Die Prinzipien der Wärmelehre. Historisch-kritisch entwickelt. 2. Aufl. Leipzig, Barth. M. 10, geb. M. 11.

- MATTHIESSEN, LUDW., Theorie der atmosphärischen Refraktion und Totalreflexion der Schallwellen und ihre Bedeutung für die Nautik (Nova Acta Bd. 74 Nr. 4). Leipzig 1899, Engelmann. M. 1. 50.
- MAURER, HANS, Erdmagnetische Beobachtungen in Deutsch-Ostafrika. (Aus dem Archiv der deutschen Seewarte.) Hamburg, Friederichsen & Co. M. 2. 50.
- OBERMAYER, ALB. V., Leitfaden für den Unterricht in der Physik an der techn. Militär-Akademie mit besonderer Berücksichtigung ausgewählter Kapitel, insbesondere der Mechanik. Wien, Braumüller. M. 13. 40, geb. M. 14.
- OSTWALD, W., Dampfdrucke ternärer Gemische. (Abhandlungen königl. sächs. Ges. d. Wissensch., math.-phys. Klasse, 25. Bd. Nr. VII.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 2.
- PERNER, J. M., Ein Versuch, der richtigen Theorie des Regenbogens Eingang in die Mittelschulen zu verschaffen. 2. Aufl. mit einem Zusatz. (Aus: Zeitschr. für die österr. Gymnasien.) Wien, Gerold's Sohn. M. —. 80.
- POLIS, P., Niederschlagskarte der mittleren Rheinprovinz und der Nachbargebiete. 9 Karten. Mit Text auf dem Umschlage. Stuttgart 1899, Engelhorn. M. 9.
- PUSCHL, K., Über Strahlung, Temperatur und spezifische Wärme. Programm. Seitenstetten 1899.
- REINGANUM, M., Theorie und Aufstellung einer Zustandsgleichung. Dissert. Göttingen 1899.
- RIVISTA di fisica, matematica e scienze naturali. Anno I, 1900. Direttore PIETRO MAFFI. Pavia, tip. fratelli Fusi. L. 12 l'anno.
- RODET, Berechnung der Leitungen für Mehrphasenströme. Übersetzt von M. LACHMANN. Leipzig, Leiner. M. 2. 75.
- SCHUBERT, J., Der jährliche Gang der Luft- und Bodentemperatur im Freien und in Waldungen und der Wärmeaustausch im Erdboden. Berlin 1899, Springer. M. 2. 40.
- SCHWARZSCHILD, K., Beiträge zur photographischen Photometrie der Gestirne. Habilitationsschrift. München 1899.
- SIEVEKING, HERM., Über Ausstrahlung statischer Elektrizität aus Spitzen. Dissert. Freiburg i. Br. 1899, Speyer & Kaerner. M. 1. 50.
- SINGER, M., Beobachtungen über das Lichtklima von Prag und seiner Umgebung. Programm. Prag 1899.
- SERVUS, H., Witterungs-Prognosen für das Jahr 1900. Berlin, Staude. M. —. 50.
- STEWART, R. WALLACE, Text-book of magnetism and electricity. (Vol. 4 of Tutorial physics.) 4th ed. London, Clive. 3 s. 6 d.
- THOMAS, PAUL A., Der longitudinale Elastizitätskoeffizient eines Flussoisens bei Zimmertemperatur und bei höheren Temperaturen. Dissert. Jena 1899, Costenoble. M. 2.
- THOMPSON, SILVANUS P., Polyphase electric currents and alternate current motors. 2nd. and enlarged ed. London, Spon. 21 s.
- VIGNERON, EUG., et LETHEULE, P., Mesures électriques. Essais de laboratoire. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 2. 50.
- VOLKMAN, P., Einführung in das Studium der theoretischen Physik insbesondere in das der analytischen Mechanik, mit einer Einleitung in die Theorie der physikal. Erkenntnis. Vorlesungen. Leipzig, B. G. Teubner. M. 14.
- VOLLER, A., Das Grundwasser in Hamburg. Mit Berücksichtigung der Luftfeuchtigkeit, der Niederschlagsmengen u. s. w. 7. Heft, enth. Beobachtungen aus dem Jahre 1898. (1. Beiheft zum Jahrb. der Hamburg. wissensch. Anstalten, XVI, 1898.) Hamburg, Gräfe & Sillem. M. 3. 50.
- WALLON, E., Leçons d'optique géométrique à l'usage des élèves de mathématiques spéciales. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 1. 75.

- WARBURG, E., Referat über die Wärmeeinheit, erstattet in der gemeinschaftl. Sitzung der Sektionen für Physik und angewandte Mathematik und Physik am 22./IX. 1899 auf der Naturforscherversammlung in München. Leipzig, M. — .60.
- WEBER, ROBERT, Problèmes sur l'électricité. Recueil gradué contenant toutes les parties de la science électrique. 3<sup>e</sup> édition, revue et considérablement augmentée. Paris, Béranger. Fr. 6.
- WILKANDER, AUG., Lärobok i fysik för de allmänna och tekniska läroverken. III. Läran om magnetismen och elektriciteten. 3. uppl. Lund, Gleerup. Kr. 2. 50.
- WIRZ, Beiträge zur Klimatologie des Grossen Belchen. Auf Grund des vom meteorolog. Landesdienst gelieferten Beobachtungsmaterials bearbeitet. Programm. Gebweiler 1899.
- ВОСЬКОВЪ, А. И., Метеорологія. Для средн. учебн. заведеній и для Практической жизни. St. Petersburg.
- ВОЛЪКОФФ, А. J., Meteorologie. Für Mittelschulen und für das praktische Leben. 1 Rubel.
- ZACH, P. S., Die periodische Wiederkehr der Hochfluten, Nassen und Dürren. (Fortsetzung und Schluss.) Programm. Budweis 1899.
- ZEEMAN, P., Experimentele onderzoekingen over deelen kleiner dan atomen, Rede. Amsterdam, Scheltema en Holkema. F. 0. 50.

# Historisch-litterarische Abteilung.

---

## Übersicht der wissenschaftlichen Arbeiten Ferdinand Minding's nebst biographischen Notizen.

Von

ADOLF KNESER.

---

In den vierzehn Jahren, die seit dem Tode Minding's verflossen sind, ist weder in einer mathematischen Zeitschrift noch in den Publikationen der Akademie, der er angehörte, eine zusammenfassende Darstellung seines Lebenswerks erschienen. Eine solche dürfte, abgesehen von ihrem Interesse für die Kreise der alten Universität Dorpat, unter deren Forschern und Lehrern Minding eine der ersten Stellen einnimmt, auch für ein grösseres mathematisches Publikum erwünscht sein; handelt es sich doch um einen Mathematiker, der, obwohl in den letzten Jahren seines Lebens den wissenschaftlichen Tagesfragen fernstehend, doch einen nachhaltigen Einfluss auf die Entwicklung verschiedener Disciplinen ausgeübt hat, und dessen Arbeiten die unverkennbaren Zeichen einer eigentümlichen und starken wissenschaftlichen Persönlichkeit tragen.

Die Zusammenstellung der folgenden Übersicht ist wesentlich dadurch erleichtert worden, dass dem Verfasser von Fräulein Agnes Minding ein sorgfältig gearbeitetes Verzeichnis der Arbeiten ihres Vaters sowie biographisches Material gütigst zur Verfügung gestellt wurde. Auf das Verzeichnis, welches am Schluss mit einigen Ergänzungen abgedruckt ist, beziehen sich im folgenden Text die eingeklammerten Zahlen.

### I. Differentialgeometrie.

Die neuere Entwicklung der allgemeinen Theorie der krummen Flächen beginnt bekanntlich mit Gauss' *Disquisitiones circa superficies curvas*; Minding auf als der erste Nachfolger bezeichnet werden, der, wenn auch auf des Meisters Bahnen wandelnd, in wesentlichen Punkten

über Gauss hinausgegangen ist. Er erkennt die Bedeutung der geodätischen Krümmung zunächst an dem Problem der Kurven kürzesten Umrings, d. h. an der auf beliebige krumme Flächen übertragenen isoperimetrischen Aufgabe (Nr. 2). Er zeigt sodann (Nr. 5), dass die geodätische Krümmung wie das Gauss'sche Krümmungsmaß eine Biegungsinvariante ist, d. h. bei einer Biegung der Fläche ohne Dehnung ungeändert bleibt. In einer späteren Arbeit (Nr. 23) geht er näher auf das Problem der Biegung ein, giebt die ersten konkreten Beispiele für Scharen von Biegungen nicht abwickelbarer Flächen, insbesondere der Regelflächen, der Schraubenflächen (Nr. 24), welche keine geraden Linien enthalten, und der Rotationsflächen, wobei auch die durch Verbiegung der Kugel entstehenden Rotationsflächen erwähnt werden.

Tragen diese auf wenigen Blättern gegebenen Resultate dazu bei, die abstrakte Gauss'sche Theorie zu beleben und eröffnen sie eine noch heute nicht erschöpfte Quelle lohnender Spezialuntersuchungen, so ist eine weitere Arbeit (Nr. 25) von prinzipieller Bedeutung, wie schon die Überschrift zeigt: „Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene Flächen auf einander abwickelbar sind.“ Es gelingt Minding, diese Frage vollständig zu beantworten. Über die Möglichkeit der Abwicklung kann durch blosse Differentiation und Elimination, ohne dass Integrationen nötig wären, entschieden werden; die Argumentation ist im wesentlichen dieselbe, wie sie neuerdings mittels der Beltrami'schen Differentialparameter geführt wird. Minding bemerkt dabei, dass sich zwei wesentlich verschiedene Fälle darbieten können: in dem einen sind unendlich viele Abwickelungen möglich, deren wirkliche Ausführung die Integration einer Differentialgleichung erster Ordnung erfordert; in dem andern Falle ist nur eine diskrete Menge von Abwickelungen möglich, welche ohne Integration realisiert werden können. An diese allgemeine Theorie schliessen sich spezielle Resultate des oben beschriebenen Charakters, so der schöne Satz (Nr. 27), dass, wenn zwei Flächen auf unendlich viele Arten aufeinander abgewickelt werden können, unter ihren Deformationen auch Rotationsflächen vorkommen. Besondere Aufmerksamkeit wird den Flächen konstanten Krümmungsmaßes zugewandt; ihr Linienelement wird bestimmt, die Rotationsflächen unter ihnen beschrieben und der Satz bewiesen, dass sie bei gleichem Krümmungsmaß auf unendlich viele Arten aufeinander abgewickelt werden können. Später (Nr. 28) folgt die wichtige, wenn auch nahezu evidente Bemerkung, dass die Grundformeln der sphärischen Trigonometrie durch eine einfache Substitution in die entsprechenden Formeln für die geodätischen Dreiecke auf Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes übergehen.

Gehören die bisher erwähnten Arbeiten nahe zusammen, so sind aus späterer Zeit zwei vereinzelt Beiträge zur Differentialgeometrie zu erwähnen. In einem kurzen Aufsatz (Nr. 38) wird eine für die

Geodäsie wichtige Annäherungsformel Bessel's auf beliebige Flächen ausgedehnt; allgemein werden die Kurven betrachtet, welche bei der Gauss'schen Abbildung durch parallele Normalen den Meridianen und Breitenkreisen der Kugel entsprechen; dabei zeigt sich, dass diese Kurven nur auf den Minimalflächen und den Monge'schen surfaces moulures sich senkrecht schneiden. Das auf die Minimalflächen bezügliche Resultat steht in enger Beziehung zu den für die moderne Theorie dieser Flächen fundamentalen Untersuchungen von Bonnet. Die Gratulationschrift der Universität Dorpat zu Wilhelm Struve's 50jährigem Doktorjubiläum (Nr. 48) enthält elegante Entwicklungen formaler Natur, durch welche unter anderem der jetzt sehr bekannte Ausdruck der mittleren Krümmung

$$\frac{GD + ED'' - 2FD'}{(\sqrt{EG - F^2})^3},$$

wie es scheint zum ersten Mal, erhalten wird. Minding wiederholt später (Nr. 55) den Beweis dieser Formel, giebt sodann im Fall eines isometrischen Koordinatensystems  $p, q$ , d. h. wenn  $E = G, F = 0$ , für das Quadrat der mittleren Krümmung den Ausdruck:

$$\frac{1}{E^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 y}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial q^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} \right)^2 \right],$$

der, gleich Null gesetzt, die Beziehung der Minimalflächen zur Theorie der Funktionen komplexen Arguments unmittelbar ersichtlich macht. Minding leitet mit wenigen Strichen die Formeln von Monge ab, und giebt einen allgemeinen Ansatz zur Behandlung der Aufgabe, alle durch eine gegebene Kurve gehenden Minimalflächen zu finden; die Kurve erhält auf der Fläche die Eigenschaft, eine der beiden isometrischen Koordinaten konstant zu machen.

## II. Variationsrechnung.

Das Problem der Kurven kürzesten Umrings, d. h. der kürzesten Kurven, welche auf einer gegebenen Oberfläche einen vorgeschriebenen Flächeninhalt umspannen, hat Minding in den Anfängen seiner Thätigkeit wie in seinem hohen Alter beschäftigt, wie die Bände 6 und 86 des Crelle'schen Journals bezeugen (Nr. 3, 56, 57, 58, 60). Er findet zunächst (Nr. 3), dass diese Kurven konstante geodätische Krümmung besitzen; er bestimmt (Nr. 56) ihre Gleichung auf Rotationsflächen; besonders interessant ist es aber, dass er bei dieser Aufgabe die sogenannten diskontinuierlichen Lösungen betrachtet, d. h. Kurven, die das gesuchte Minimum liefern, dabei aber aus Teilen von verschiedenen analytischen Kurven bestehen. Minding hat zwei Thatsachen an Beispielen erläutert, die von Steiner ohne Beweis als allgemein giltig ausgesprochen waren; erstens das neuerdings sogenannte Gesetz von der Erhaltung der isoperimetrischen Konstante, welches bei der

Kurve kürzesten Umrings besagt, dass in verschiedenen, analytisch nicht zusammenhängenden Teilen die geodätische Krümmung dieselbe sein muss; zweitens den Satz, dass die verschiedenen Teile einer diskontinuierlichen Lösung im allgemeinen sich berührend zusammenschließen. Interessante Einzelaufgaben behandelt eine auf den Fall der Kugel beschränkte Notiz (Nr. 57).

Auch an dem seinerzeit vielerörterten Problem der Transformation der zweiten Variation der einfachen Integrale arbeitet Minding in einer Abhandlung (Nr. 44) mit, welche einen formal rechnerischen Charakter trägt.

### III. Differentialgleichungen erster Ordnung.

In mehreren Abhandlungen über die Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung (Nr. 35, 45, 47, 50) bewegt sich Minding auf den Bahnen, welche Euler in seiner Integralrechnung eingeschlagen hat, und sucht Klassen integrierbarer Differentialgleichungen erster Ordnung dadurch zu finden, dass eine bestimmte Form des integrierenden Faktors vorausgesetzt wird. Es gelingt ihm, einige der schwierigsten von Euler durchgeführten Integrationen ihres rätselhaften Charakters zu entkleiden und zu verallgemeinern, indem er aus bekannten Partikulärlösungen Vorteil zu ziehen und aus ihnen den Multiplikator zusammensetzen sucht. Ein solches Verfahren hat besonders da Erfolg, wo es leicht ist, Partikulärlösungen von der Form

$$y = \alpha x + \beta$$

zu finden; z. B. hat die Gleichung

$$Mdx + Ndy = 0,$$

wenn  $M$  und  $N$  Polynome zweiten Grades in  $x$  und  $y$ , und  $y_1, y_2, y_3$  lineare Partikulärlösungen sind, einen Multiplikator von der Form

$$(y - y_1)^{\alpha_1}(y - y_2)^{\alpha_2}(y - y_3)^{\alpha_3}.$$

Dieser Satz enthält als besonderen Fall die von Jacobi\* gegebene Integration der Gleichung

$$A dx + B dy + C(x dy - y dx) = 0,$$

in welcher  $A, B, C$  lineare Funktionen von  $x$  und  $y$  sind; hier kann, wie Minding bemerkt, das allgemeine Integral aus drei partikulären von der oben angegebenen Form zusammengesetzt werden. Als ein weiteres Resultat sei noch angeführt, dass obige Differentialgleichung integriert wird, wenn  $A, B, C$  homogene Funktionen von  $x$  und  $y$  und die Dimensionen der beiden ersten gleich sind.

Diese Untersuchungen haben lange Zeit hindurch keine Beachtung gefunden. Kurz vor der umfangreichen Arbeit Nr. 47 erschien Riemann's Abhandlung über die hypergeometrische Reihe, und durch sie wurde

\* Werke Bd. 4 S. 257.

die Aufmerksamkeit der Mathematiker von den Eulerschen Methoden und Gesichtspunkten völlig abgelenkt. Später haben von Minding unabhängig Darboux\* und Elliot\*\*, ausdrücklich an Minding anknüpfend Heymann,\*\*\* Sonin† und Korkin†† verwandte Untersuchungen veröffentlicht.

#### IV. Algebraische Funktionen und Abelsche Integrale.

Unter den auf die algebraischen Funktionen bezüglichen Arbeiten (Nr. 10, 11, 13, 30) ist die letzte besonders hervorzuheben, welche erschien, ehe Abel's grosse Abhandlung in dem Archiv der Pariser Akademie wieder aufgefunden war. Minding beschäftigt sich hier mit der genauen Formulierung des Abelschen Theorems, insbesondere mit der Gestalt der in ihm auftretenden algebraisch-logarithmischen Ausdrücke, dann aber auch mit der fundamentalen Frage nach der geringsten Anzahl Abelscher Integrale, auf welche eine Summe von beliebig vielen mittelst des Abelschen Theorems reduziert werden kann. Brill und Noether charakterisieren in ihrem Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen††† die erwähnte Abhandlung, „die nach Form und Inhalt sogar viel Ähnlichkeit mit der Pariser Abhandlung von Abel besitzt“, in folgender Weise. „Steht somit Minding's Arbeit, die ihre Probleme durchaus den publizierten Abhandlungen Abel's entnimmt, auch hinsichtlich der Allgemeinheit der Resultate hinter Abel's Pariser Arbeit zurück, so ist doch erstaunlich, wie tief der geistvolle Forscher in Abel's Gedankengang und in den Kreis seiner Hilfsmittel eingedrungen ist, und wie viele wesentliche Ergebnisse Abel's er in gewissem Sinne antizipiert hat. Auch ist zuzugeben, dass in Bezug auf Durchsichtigkeit, Kürze und zweckmässige Anordnung der Beweisführung die Arbeit hinter der Abel's nicht zurücksteht. Wie Abel besitzt Minding im wesentlichen den Geschlechtsbegriff.“ Erinnern wir uns, dass es sich hier um diejenige Arbeit Abel's handelt, in welcher das Abel'sche Theorem, nach Jacobi's Ausspruch die grösste mathematische Entdeckung seiner Zeit, entwickelt ist, so wird man die ganze Bedeutung einer solchen Kritik seitens der sachverständigsten Beurteiler ermessen. Erwähnt sei noch, dass Brill und Noether für Minding die Priorität Puiseux gegenüber hinsichtlich der Trennung der verschiedenen Entwicklungen einer algebraischen Funktion in der Umgebung einer singulären Stelle in Anspruch nehmen.

---

\* Bulletin des sciences math. 1878.

\*\* Annales de l'école normale 1890.

\*\*\* Bd. 27 dieser Zeitschrift.

† Bulletin de l'académie de St. Pétersbourg 1895.

†† Math. Annalen Bd. 48.

††† Jahresberichte der deutschen Mathematikervereinigung Bd. III, 1892/93.

So ehrenvoll hiernach die Stelle ist, welche Minding in der Geschichte der Theorie der algebraischen Funktionen einnimmt, so ist doch seiner Arbeit auf diesem Gebiete der verdiente Erfolg lange Zeit vorenthalten geblieben, da die neu aufkommende funktionentheoretische Methode das Interesse der auf diesem Gebiet arbeitenden Mathematiker absorbierte.

Beiläufig sei noch auf einige kleinere Beiträge zur Theorie der Elimination hingewiesen (Nr. 26, 29, 32).

### V. Allgemeine Dynamik.

Die Gratulationsschrift der Universität Dorpat zum fünfundzwanzigjährigen Jubiläum der Sternwarte Pulkowa (Nr. 49) scheint infolge der Art ihrer Veröffentlichung in Westeuropa unbeachtet geblieben zu sein, muss aber ihrem Werte nach sehr hoch gestellt werden; ihr Inhalt steht nämlich in engster Beziehung zu den später erschienenen Arbeiten von Lipschitz\* und Beltrami\*\* über quadratische Differentialformen, welche den wichtigsten Fortschritt der allgemeinen Dynamik seit Jacobi bedeuten. Minding beginnt damit, dass er eine Identität von der Form

$$\sum_{i,k}^{1,2} a_{ik} dp_i dp_k = dV^2 + L_1^2 + \dots + L_{n-1}^2$$

ansetzt, in welcher  $p_i$  die Parameter eines dynamischen Systems,  $V$  eine unbekannte,  $a_{ik}$  gegebene Funktionen derselben bedeuten, und  $L$  lineare, im allgemeinen nicht integrable Differentialformen sind:

$$L_m = C_{mn} dp_m + C_{m,m+1} dp_{m+1} + \dots + C_{mn} dp_n.$$

Durch Elimination der Grössen  $C$  ergibt sich für  $V$  eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche mit der Jacobi-Hamiltonschen zusammenfällt, wenn in der gewöhnlichen Bezeichnung der Dynamik die Gleichung

$$\sum a_{ik} dp_i dp_k = (U + h) T dt^2$$

besteht. Für die Grössen  $C$  ergeben sich, und hierin weicht Minding von seinen Nachfolgern wesentlich ab, rationale Ausdrücke durch die Ableitungen der Funktion  $V$ , und es wird gezeigt, dass die Differentialgleichungen

$$L_1 = L_2 = \dots = L_{n-1} = 0$$

bei Voraussetzung der Gleichung der lebendigen Kraft

$$T = U + h$$

die gewöhnlichen Lagrange'schen Grundgleichungen der Dynamik zur Folge haben. Speziell sind jene Gleichungen und damit die Lagrange-

\* Crelles Journal Bd. 74, 1871.

\*\* Memorie di Bologna ser. 2 t. 8, 1869.

schen erfüllt, wenn in  $V$  eine hinreichende Anzahl von Konstanten  $\alpha$  vorkommen, und die Gleichungen

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \text{const.}$$

angesezt werden. Endlich ergibt sich noch

$$V = 2 \int T dt,$$

und die Gleichungen  $L = 0$  machen die Minimumeigenschaft des Integrals

$$\int \sqrt{\sum a_{ik} dp_i dp_k} = \int \sqrt{dV^2 + L_1^2 + \dots + L_{n-1}^2},$$

d. h. das Prinzip der kleinsten Aktion in der Euler-Jacobischen Form evident. Hiermit erscheint, wie Minding selbst hervorhebt, die Jacobi-Hamiltonsche Methode im engsten Zusammenhang mit derjenigen Transformation des Linienelements einer beliebigen Fläche, auf welcher die Gauss'sche Theorie der geodätischen Linien beruht:

$$E dp^2 + 2 F dp dq + G dq^2 = dr^2 + m^2 d\varphi^2.$$

Gewisse von Gauss an diese Transformation geknüpfte Differentialbeziehungen erscheinen geradezu als die einfachsten Fälle der Jacobi-Hamiltonschen Theorie. In der Erkenntnis dieses Zusammenhangs nähert sich Minding der für die moderne Dynamik fundamentalen Anschauung, in welcher die Bahnkurven eines dynamischen Systems als die geodätischen Linien einer gewissen Mannigfaltigkeit erscheinen, deren Linienelement durch eine quadratische Differentialform definiert ist.

Übrigens sei ausdrücklich erwähnt, dass sich von dem wichtigen modernen Begriff der orthogonalen Lage bezüglich einer Differentialform bei Minding keine Andeutung findet.

An speziellen Aufgaben der Dynamik behandelt Minding einige auf schwingende Fäden bezügliche Fragen (Nr. 40, 41); er veröffentlichte ferner ein Referat über die Entwicklung der Mechanik (Nr. 33).

## VI. Statik.

Der mit elementaren Mitteln operierenden Statik starrer Körper gehört ein schöner Satz an, der neuerdings vorzugsweise als das Mindingsche Theorem bezeichnet wird. Minding beginnt mit der Frage (Nr. 15, 17), worin bei Kräften beliebiger Richtung das Analogon des Centrums eines Systems paralleler Kräfte besteht. Dreht man letztere um ihre Angriffspunkte, ohne die Intensitäten zu ändern, so geht ihre Resultante durch einen festen Punkt. Um dies Resultat zu verallgemeinern, bringt Minding ein beliebiges Kraftsystem auf eine gewisse Normalform, wobei der Begriff der Centralebene auftritt, und erhält dann folgendes Resultat.

Dreht man die Kräfte, ohne ihre Angriffspunkte, gegenseitigen Neigungen und Intensitäten zu ändern, so giebt es unendlich viele Lagen, in welchen das Kraftsystem durch eine einzige Resultante ersetzt werden kann; alle diese Resultanten schneiden zwei feste Kegelschnitte, die sich in fokaler Lage befinden, bilden also nach der neueren Bezeichnung eine Strahlenkongruenz von einfachem algebraischem Charakter. Natürlich kann man auch den Körper drehen, und die Richtung jeder einzelnen Kraft festlassen; die beiden Kegelschnitte sind dann im Körper fest. Dieses Theorem, dessen Beweis später (Nr. 51) zu höchster Einfachheit gebracht wurde, bildet die Grundlage der Lehre vom astatischen Gleichgewicht; die Anwendungen auf die Magnetsadel, bei welcher die Kegelschnitte in einen Kreis und seine Axe ausarten, hat Minding selbst behandelt (Nr. 20). Die eigentliche Bedeutung der ganzen Untersuchung wird man darin finden können, dass sie den allgemeinen Begriff des Kraftsystems in reichhaltiger Weise spezifizieren lehrt, d. h. neue Merkmale nachweist, nach welchen die Kraftsysteme in wohldefinierte Gruppen auseinander treten. Die Unterscheidungen, um die es sich hier handelt, machen sich zwar in den Formeln der analytischen Mechanik nicht merklich, sind darum aber nicht minder wichtig, besonders für die praktischen Anwendungen.

Während eines Zeitraumes von 30 Jahren nach der Publikation seines Theorems sah sich Minding einmal zu einer Prioritätsreklamation (Nr. 42) veranlasst, hatte aber im übrigen, wie er selbst sagt (Nr. 51), den Eindruck, dass seine Untersuchung unbekannt geblieben sei. Bei ihrem Erscheinen an der Pariser Akademie freundlich aufgenommen (Nr. 16), fand sie vollen Erfolg, d. h. eine über sie selbst hinausführende Fortentwicklung erst von den siebziger Jahren an. Hier sind an erster Stelle die Untersuchungen von Darboux\* über das astatische Gleichgewicht zu nennen, bei welchen besonders die oben bezeichnete Strahlenkongruenz als spezieller Fall einer allgemeineren erkannt wurde. Dann haben auch in England Routh,\*\* Tait u. a. Minding's Theorem nach verschiedenen Richtungen bearbeitet. In Deutschland hatte Möbius bald nach Minding's ersten statischen Untersuchungen verwandte, übrigens nicht ganz einwurfsfreie Entwicklungen spezielleren Charakters gegeben, die ihn zum Begriff der Gleichgewichtssachsen führten; dieselben fanden aber Jahrzehnte hindurch ebensowenig Beachtung wie das Mindingsche Theorem, da das Interesse der Mathematiker vorwiegend abstrakteren Gegenständen zugewandt war.

Als ein schönes Einzelresultat sei die Ableitung der Gleichung der sphärischen Kettenlinie erwähnt (Nr. 14).

\* Sur l'équilibre astatique. Paris 1871.

\*\* Analytical Statics II S. 165.

## VII. Lehrbücher.

Das Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung (Nr. 19) enthält für den modernen Leser als interessantesten Abschnitt einen ausführlichen Beweis für die Existenz des bestimmten Integrals, der, wenn man den Integranden von vornherein als gleichmässig stetig voraussetzt, auch nach den heutigen Begriffen als streng zu bezeichnen ist. Minding bildet die den Integralwert annähernd darstellenden Summen für eine Teilung des Integrationsgebiets, bei welcher die Teilintervalle nicht gleich zu sein brauchen; sodann betrachtet er die analoge Summe, welche bei weiterer Zerlegung der Teilintervalle erhalten wird; endlich hebt er hervor, dass zu zwei ganz beliebigen Teilungen stets eine dritte gefunden werden kann, unter deren Teilpunkten diejenigen der beiden ersten Teilungen enthalten sind. Die Differenzen der zugehörigen Annäherungssummen zeigen, dass, wenn alle Teilintervalle unendlich abnehmen, die Summen selbst sich einer festen Grenze annähern.

Wenngleich für die Grundgedanken dieses Beweises die Priorität Cauchy zu gebühren scheint,\* so muss es doch Minding als Verdienst angerechnet werden, dass er zuerst in einem Lehrbuch, sogar in einem zunächst für eine technische Anstalt bestimmten, bei der Begründung der Integralrechnung klare Begriffe an Stelle verwaschener Vorstellungsbilder zu setzen suchte.

Weniger gelungen, wenn auch als ernster Versuch interessant erscheint der Beweis der Formel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x},$$

der etwa auf gleicher Höhe mit dem von Serret gegebenen steht. Im übrigen sieht man an der sorgfältigen Untersuchung der Konvergenz und der häufig durchgeführten Bestimmung des Restgliedes den Einfluss Dirichlet's, dessen Ratschläge in der Vorrede ausdrücklich erwähnt werden. Hervorzuheben sind noch der Abschnitt über mechanische Quadratur und eine eingehende Darstellung der Fourierschen Methode zur angenäherten Auflösung der Gleichungen.

Das Lehrbuch der Mechanik (Nr. 22) wird am besten dadurch charakterisiert, dass es die zweite Form der Lagrange'schen Grundgleichungen nicht benutzt, in der Statik alles auf eine Anzahl axiomatisch hingestellter Sätze gegründet wird, in der Dynamik aber alle Aufgaben durch direkte Anwendung des D'Alembert'schen Prinzips und der daraus abgeleiteten Flächen- und Schwerpunktssätze gelöst werden. Die Statik enthält eine Darstellung der oben erwähnten eigenen Untersuchungen des Verfassers; der Begriff des Mittelpunktes nicht paralleler Kräfte wird schon benutzt, um die Zusammensetzung

\* Pringsheim, Encyclopädie der Math. Wiss. IA 3 S. 65.

paralleler Kräfte mittels eines Grenzübergangs abzuleiten. Die bei periodischen Bewegungen und Figuren häufig auftretenden Differentialgleichungen

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = f(x)$$

werden besonders sorgfältig diskutiert, was z. B. zu einer wesentlich verbesserten Theorie der elastischen Feder führt. In der Dynamik ist als eigentümlich hervorzuheben, dass mehrere Aufgaben mit Berücksichtigung der Reibung eingehend behandelt werden; diese Entwicklungen verdienen, bei den langsamen Fortschritten der Theorie der Reibung, noch heute volle Beachtung. Unübertroffen ist z. B. die über Euler und Coriolis hinausgehende Darstellung der Bewegung einer schweren Kugel auf einer reibenden schiefen Ebene, in welcher Minding besonders den Übergang aus der Bewegung, in welcher Gleiten und Rollen vereint ist, zur rein rollenden diskutiert.

In den Integraltafeln (Nr. 39), die Minding, obwohl nicht mehr im preussischen Staatsdienst stehend, auf Veranlassung des preussischen Handelsministeriums bearbeitete, zeigt sich naturgemäss weniger Originalität als zuverlässige Arbeit und geschickte Auswahl des Stoffes. Nachfrage nach diesem Werk ist noch heute im Buchhandel vorhanden.

Das Lehrbuch der Arithmetik (Nr. 8) ist wohl der erste in Deutschland unternommene Versuch, die Ergebnisse der *Disquisitiones arithmeticae* und der späteren Abhandlungen von Gauss weiteren Kreisen zugänglich zu machen; die Grundlagen der Theorie der quadratischen Reste und Formen werden gegeben, und das Reziprozitätsgesetz nach der fünften Methode von Gauss abgeleitet.

### VIII. Allgemeine Bemerkungen.

Schon die vorliegende Übersicht der wichtigsten Arbeiten Minding's zeigt die grosse Vielseitigkeit seines wissenschaftlichen Schaffens; dieser Eindruck verstärkt sich noch, wenn man die zahlreichen kleineren Beiträge zur Arithmetik und Algebra, zur Kombinationslehre, zur Wahrscheinlichkeitstheorie, Dioptrik und Integralrechnung mit ins Auge fasst. So verschieden aber auch die Gegenstände sein mögen, alle diese Arbeiten haben gewisse Vorzüge gemein. Überall findet man eine sorgfältige und geschmackvolle Darstellung, in welcher der Einfluss der hohen Allgemeinbildung des Verfassers unverkennbar ist; nur an wenigen Stellen bleibt die Argumentation an Strenge hinter den modernen Anforderungen zurück. Sodann ist der sichere Takt bemerkenswert, mit welchem Minding stets nur solche Probleme auswählt, denen eine wirkliche, dauernde Bedeutung zukommt. Nirgends finden sich Verirrungen in das Gebiet der leeren Formalitäten, nirgends konstruierte Aufgaben, durch welche etwa einer toten Theorie ein täuschender

Schimmer von Leben verliehen werden sollte. Andererseits muss ein Umstand erwähnt werden, der für den äusseren Erfolg vieler Arbeiten für lange Zeit hinderlich war: die moderne Theorie der Funktionen komplexen Arguments kommt nirgends vor; wo mit komplexen Variablen überhaupt operiert wird, geschieht es etwa in der Weise, wie in der Abhandlung von Gauss über konforme Abbildung. Ihren Methoden und Hilfsmitteln nach sind daher die Arbeiten von Minding am nächsten den analytischen Arbeiten von Dirichlet und Kummer verwandt. Auch die speziellen analytischen Gebilde, welche etwa seit den dreissiger Jahren dieses Jahrhunderts in der Entwicklung der reinen Analysis eine bevorzugte Rolle spielten, die elliptischen und Abelschen Funktionen sowie die hypergeometrischen Reihen werden von Minding nirgends eingehend behandelt. Bedenkt man nun, dass seine wissenschaftliche Thätigkeit in die Zeit fiel, in welcher sich die Funktionentheorie unter dem Einfluss von Cauchy, Riemann und Weierstrass glänzend entfaltete, so wird die ungünstige Stellung mancher Arbeiten von Minding zu der vorwaltenden Interessensrichtung seiner Zeit offenbar. Um so erfreulicher und bezeichnend für den echten Wert dieser Arbeiten ist es, dass einige von ihnen, wie oben bemerkt, gerade in neuester Zeit wirksam in die Entwicklung verschiedener Disziplinen, besonders der Differentialgeometrie und der Statik, eingegriffen haben, während für die auf die allgemeine Dynamik und die Differentialgleichungen bezüglichen Aussicht ist, künftig noch einen grösseren Einfluss zu gewinnen.

### IX. Biographische Notizen.

Ernst Ferdinand Adolph Minding wurde am 11. Januar 1806 in der damals zu Preussen gehörigen Stadt Kalisch als Sohn des preussischen Stadtgerichtsassessors Gottlieb Minding geboren. Er besuchte von seinem siebenten Lebensjahr an das Gymnasium zu Hirschberg in Schlesien, wo sein Vater sich niedergelassen hatte und im Jahre 1816 starb. Im April 1824 erhielt Minding ein in allen Fächern vorzügliches Reifezeugnis; sein Direktor ermahnt ihn besonders, seine erfolgreichen Studien im Hebräischen fortzusetzen. Er bezog für zwei Semester die Universität Halle, um „Schulwissenschaften“ zu studieren, und hörte Vorlesungen philologischen und philosophischen Inhalts sowie eine über Physik. Im Frühling 1825 siedelte er an die Universität Berlin über, in deren philosophischer Fakultät die Geisteswissenschaften und einige Zweige der experimentellen Naturwissenschaft blühten, die Glanzzeit der Mathematik aber noch nicht angebrochen war. So kam es, dass Minding aus dem Bereich der Wissenschaft, deren Zierde er werden sollte, während seiner ganzen Studienzeit nur ein einziges Kolleg, die Statik bei Dirksen hörte; er ist also, wie Jacobi, in der Mathematik durchaus Autodidakt gewesen. Weit mehr

beschäftigten ihn auch in Berlin philosophische und philologische Studien; er hörte vier grosse Vorlesungen bei Hegel, Geschichte der germanischen und romanischen Völker bei Ranke, Griechische Altertümer bei Böckh, lateinischen Stil und Proserz bei Lachmann; dazu kamen einzelne naturwissenschaftliche Vorlesungen bei Erman, Mitscherlich, Encke.

Im August 1827 wurde Minding exmatrikuliert; im nächsten Jahr finden wir ihn als wissenschaftlichen Hilfslehrer am Gymnasium zu Elberfeld, wo er bis zum Juli 1829 in Mathematik, Geschichte und Deutsch unterrichtet. Er promoviert sodann in Halle auf eine mathematische Dissertation hin. Nach Berlin zurückgekehrt, begann er im Sommersemester 1831 seine akademische Lehrthätigkeit mit einer Vorlesung über den barycentrischen Kalkül nach dem Werke von Möbius. Als Kollegen fand er Dirichlet vor, mit dem er in lebhaften wissenschaftlichen Verkehr trat. Die beiden jungen Privatdozenten waren die Pioniere der modernen Mathematik an der Universität, welche Jahrzehnte hindurch in dieser Wissenschaft eine beherrschende Stellung einnehmen sollte. Auch zu Alexander von Humboldt knüpften sich persönliche Beziehungen, die dazu führten, dass Minding's grundlegende Untersuchungen über Statik an der Pariser Akademie Beachtung fanden. In einem für die Eigenart des grossen Polyhistoren bezeichnenden Briefe vom 31. Oktober 1835 schreibt Humboldt an Minding, „dass es mir eine angenehme Pflicht gewesen ist, Ihren gewiss sehr interessanten Aufsatz der Akademie der Wissenschaften zu übergeben. Ich habe mit eigener Hand das Endresultat abgeschrieben, und gegen meine Gewohnheit sogar leserlich. Sie werden den Satz in mehreren hiesigen Journalen abgedruckt gefunden haben. Poncelet, Poisson, Libri sind zu Kommissaren ernannt. Ich habe auf den ersteren besonders gedrungen, weil ich Einfluss auf ihn ausübe und ich glaubte, er müsse Ihnen angenehm sein. Meine Gesundheit hält sich trotz vieler Arbeit und gesellschaftlicher Zerstreuungen, welche meine hiesige Lage notwendig macht, sehr gut.“ Im Jahre 1834 wurde Minding, ohne von der Universität zu scheiden, Dozent für Kurvenlehre, analytische Dynamik und Analysis an der königl. allgemeinen Bauschule. Seine Lehrthätigkeit an diesem Institut veranlasste ihn zur Abfassung seiner Lehrbücher der Differentialrechnung und Mechanik. Seine Erfolge fanden bei den Leitern der Anstalt, insbesondere bei Beuth lebhaftes Anerkenkung, was bei seinem Scheiden ausgesprochen wurde.

Im Herbst 1843 wurde Minding von der russischen Regierung an die Universität Dorpat berufen. Hier verbrachte er die letzten vier Jahrzehnte seines Lebens in angenehmen äusseren Verhältnissen, umgeben von einem geistig angeregten Kreise von Freunden und Kollegen. Nach 25jähriger Amtsthätigkeit wurde er, den damals geltenden Ordnungen gemäss, von seinen Kollegen auf weitere fünf Jahre wiedergewählt, und derselbe Vorgang wiederholte sich noch

zweimal. Nach 40jähriger Thätigkeit legte er sein Amt freiwillig nieder. In dieser langen Zeit hat Minding eine fruchtbare Lehrthätigkeit geübt, in welcher nacheinander Senff und Helmling seine nächsten Kollegen waren. Je länger je mehr machte sich Minding's Einfluss auf einer grossen Anzahl wissenschaftlicher Institute geltend; gegen das Ende seiner Laufbahn fanden sich an der Sternwarte Pulkowa, am Riga'schen Polytechnikum, an den Gymnasien und Realschulen der baltischen Provinzen und verstreut über ganz Russland bis nach Tiflis hin Männer in leitenden Stellungen, welche sich mit dankbarer Anerkennung als seine Schüler bekannten. Von Vertretern der reinen Mathematik, welche in weiteren Kreisen bekannt geworden sind, erwähnen wir unter Minding's Schülern Karl Peterson und Axel Harnack. Ersterer, aus Riga stammend, hörte in den fünfziger Jahren bei Minding und Senff; seine Arbeiten über Differentialgeometrie, welche sich auf denselben Bahnen wie diejenigen Minding's bewegen, haben nach langer Vergessenheit neuerdings lebhaftere Anerkennung\* gefunden. Peterson war später einer der Begründer der Moskauer mathematischen Gesellschaft. Die Laufbahn Harnack's, der von 1869 bis 1873 in Dorpat studierte, ist bekannt.

Bald nachdem Minding nach Russland übergesiedelt war, kam er in freundschaftliche Beziehungen zu den Gelehrten der Petersburger Akademie; besonders mit Bunjakowskij verband ihn eine durch mehrfache gegenseitige Besuche genährte Freundschaft, die bis in das höchste Alter beider Männer andauerte. Nachdem Minding für seine Untersuchungen über Differentialgleichungen (Nr. 47) auf einen Bericht von Ostrogradskij hin\*\* von der Akademie einen der Demidow'schen Preise erhalten hatte, ernannte sie ihn im Jahre 1864 zum korrespondierenden, im Jahre 1879 bei seinem 50jährigen Doktorjubiläum zum Ehrenmitgliede. Bei dieser Gelegenheit wurden Minding die üblichen Ehrenbezeugungen und Beweise der Dankbarkeit seiner Schüler in reichem Maße zu Teil, die glücklichste Fügung für sein hohes Alter aber war, was die Petersburger Akademie in ihrem Gratulations schreiben hervorhob: „quod singulari quodam divini numinis favore tibi contigit, ut labentibus annis haud diminueretur tuorum laborum ubertas neque ingenii tui acumen hebesceret aut debilitaretur: novissimae tuae quaestiones eandem referunt sagacitatem, eundum mentis vigorem, idemque acumen quo florentissimae aetatis opera tua commendantur.“

Die volle Kraft seines Geistes und die Vielseitigkeit seiner Interessen behielt Minding bis zuletzt; er starb am 1./13. Mai 1885. Er gehörte zwar nicht zu den Persönlichkeiten, die im öffentlichen Leben

\* Stäckel, Math. Annalen Bd. 49 S. 255.

\*\* Dreissigste Verteilung der Demidow'schen Prämien, St. Petersburg 1861, (russ.) Seite 49.

der kleinen Universitätsstadt die erste Rolle spielen; aber die Lauterkeit seines Charakters, die Selbständigkeit seines eindringenden Urteils in wissenschaftlichen wie politischen Dingen, endlich eine auf humanistischer Grundlage ruhende hohe Bildung, der nichts Menschliches fremd war, haben ihm stets einen gewählten Freundeskreis geschaffen und ein ehrenvolles Andenken auch ausserhalb der Wissenschaft gesichert.

### Chronologisches Verzeichnis der Arbeiten von Ferdinand Minding.

Abkürzungen: Cr. J. für Journal für die reine und angewandte Mathematik, herausgegeben von A. L. Crelle, später von C. W. Borchardt. Bull. (a) für Bulletin de la classe physico-mathématique de l'académie des sciences de St. Pétersbourg; Bull. (b) für Bulletin de l'académie des sciences de St. Pétersbourg. Mel. für Mélanges mathématiques et astronomiques tirés du Bulletin de l'académie des sciences de St. Pétersbourg. Die Jahreszahlen bezeichnen die Zeit des Erscheinens.

1. De valore integralium duplicium quam proxime inveniando. (Dissertation.) Halle 1829.
2. Über die Kurven kürzesten Perimeters auf krummen Flächen. Cr. J. Bd. 5 S. 297—304. 1830.
3. Auflösung einiger Aufgaben der analytischen Geometrie mittelst des baryzentrischen Kalküls. Cr. J. Bd. 5 S. 397—401. 1830.
4. Über die Berechnung des Näherungswertes doppelter Integrale. Cr. J. Bd. 6 S. 91—95. 1830.
5. Bemerkung über die Abwicklung krummer Linien von Flächen. Cr. J. Bd. 6 S. 159—161. 1830.
6. Observatio pertinens ad solutionem aequationum inderminatarum secundi gradus. Cr. J. Bd. 7 S. 140—142. 1831.
7. Selbstankündigung der „Anfangsgründe der reinen Zahlenlehre.“ Cr. J. Bd. 7 S. 414—416. 1831.
8. Anfangsgründe der höheren Arithmetik. Berlin, Verlag G. Reimer, 1832.
9. Théorème relatif à une certaine fonction transcendante, Cr. J. Bd. 9 S. 295 bis 296. 1832.
10. Sur les intégrales de la forme  $\int \frac{dx P \sqrt[3]{p}}{c-x}$   $p$  et  $P$  étant deux polynômes entiers. Cr. J. Bd. 10 S. 195—199. 1833.
11. Addition à l'article 12, cahier précédent. Cr. J. Bd. 10 S. 292. 1833.
12. Sur la somme des carrés de toutes les droites, qui, à partir d'un point donné, coupent sous un angle déterminé une courbe algébrique. Cr. J. Bd. 11 S. 20 bis 25. 1834.
13. Recherches sur la sommation d'un certain nombre de fonctions transcendentes, dont les dérivées sont déterminées par des équations algébriques du troisième degré. Cr. J. Bd. 11 S. 373—383. 1834.
14. Beantwortung der im 11. Bande dieses Journals S. 200 vorgelegten Frage Nr. 4. Cr. J. Bd. 12 S. 179—180. 1834.
15. Untersuchung betreffend die Frage nach einem Mittelpunkt nicht paralleler Kräfte. Cr. J. Bd. 14 S. 289—315. 1835.
16. Recherches sur ce qu'il y a d'analogie au centre des forces parallèles, dans un système de forces non parallèles. Der Pariser Akademie vorgelegt. Bericht von Poisson, Libri, Poncelet. Comptes rendus 1835, S. 232.

17. Über den Ort sämtlicher Resultanten eines der Drehung unterworfenen Systemes von Kräften. Als Fortsetzung der Untersuchung über den Mittelpunkt nicht paralleler Kräfte; Bd. 14, Heft 4. Cr. J. Bd. 15 S. 27—38. 1836.
18. Einige Sätze über die Veränderungen, welche ein System von Kräften durch Drehung derselben erleidet; nebst einer Anwendung auf das Seilpolygon. Cr. J. Bd. 15 S. 313—316. 1836.
19. Handbuch der Differential- und Integralrechnung und ihrer Anwendungen auf Geometrie und Mechanik. Erster Teil, enthaltend die Differential- und Integralrechnung nebst Anwendung auf die Geometrie. Berlin, Verlag von F. Dümmler, 1836.
20. Bemerkung über astatiche Magnetsadeln. Poggendorff's Annalen der Physik. Bd. 40 S. 151—153. 1837.
21. Beweis eines geometrischen Satzes. Cr. J. Bd. 16 S. 351. 1837.
22. Handbuch der Differential- und Integralrechnung und ihrer Anwendungen auf Geometrie und Mechanik. Zweiter Teil, enthaltend die Mechanik. Handbuch der theoretischen Mechanik. Berlin, Verlag von F. Dümmler, 1838.
23. Über die Biegung gewisser Flächen. Cr. J. Bd. 18 S. 297—302. Bemerkung über eine Erweiterung S. 302. 1838.
24. Über die Biegung krummer Flächen. Cr. J. Bd. 18 S. 365—368. 1838.
25. Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaße. Cr. J. Bd. 19 S. 370—387. 1839.
26. Bemerkungen über die Wurzeln algebraischer Gleichungen. Cr. J. Bd. 20 S. 168—170. 1840.
27. Über einen besonderen Fall bei der Abwicklung krummer Flächen. Cr. J. Bd. 20 S. 171—172. 1840.
28. Beiträge zur Theorie der kürzesten Linien auf krummen Flächen. Cr. J. Bd. 20 S. 323—327. 1840.
29. Über die Bestimmung des Grades einer durch Elimination hervorgehenden Gleichung. Cr. J. Bd. 22. S. 178—183. Sur le degré de l'équation finale qui résulte de l'élimination. Liouville Journal de mathématiques sér. 1 Bd. 6 S. 412—418. 1841.
30. Propositiones quaedam de integralibus functionum algebraicarum unius variabilis, e principis Abelianis derivatae. Cr. J. Bd. 23 S. 255—274. 1842.
31. Die Einrichtung der Klassenlotterie mit Freilosen in Hinsicht auf ihren durchschnittlichen Erfolg für Unternehmer und Spieler arithmetisch beleuchtet. Ein Beitrag zur politischen Arithmetik. Berlin 1842, Verlag Veit & Co.
32. Développement d'une expression symétrique du degré d'une équation résultant de l'élimination. Bull. (a) 275—288. 1843. Entwicklung eines symmetrischen Ausdruckes für den Grad der durch Elimination hervorgehenden Gleichung. Cr. J. Bd. 31 S. 1—11. 1846.
33. Mechanik. Dove's Repertorium der Physik Bd. 5 S. 1—87. 1844.
34. Erwiderung auf den Artikel 23 im 26. Bande dieses Journals. Cr. J. Bd. 27 S. 379—380. 1844.
35. Bemerkungen zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen zwei veränderlichen Grössen. Bull. (a) Bd. 4 S. 378—382. 1845. Cr. J. Bd. 40 S. 361—365. 1850.
36. Ein neuer Ausdruck des Hauptsatzes der Dioptrik. Bull. (a) Bd. 5 S. 113 bis 115. 1845. Poggendorff's Annalen der Physik Bd. 70 S. 268—272. 1847.
37. Über den Umlauf des Springers auf dem Schachbrette (sogenannten Rösselsprung). Bull. (a) Bd. 6 S. 209—220. 1847. Cr. J. Bd. 44 S. 73—82. 1852.
38. Über einige Grundformeln der Geodäsie. Bull. (a) Bd. 8 S. 88—92. 1849. Cr. J. Bd. 44 S. 66—72. 1852.
39. Sammlung von Integralfeln zum Gebrauch für den Unterricht an der Königl. Allgemeinen Bauschule und dem Königl. Gewerbeinstitut. Berlin 1849, in Kommission bei Carl Reimarus (Gropius).

40. Auflösung einer Aufgabe aus der *Mécanique analytique* von Lagrange. Bull. (a) Bd. 12 S. 75—84. 1854. Mel. Bd. 1 S. 580—592. 1853.
41. Über die Schwingungen eines freihängenden, biegsamen Fadens. Cr. J. Bd. 50 S. 243—262. 1855.
42. Über einige Lehrsätze der Statik. Grunert's Archiv für Mathematik Bd. 27 S. 214—223. 1856.
43. Über den Wert des Integrals  $\int_0^{\infty} \frac{\sin x^m}{x^n} dx$ , wenn  $m$  und  $n$  positive ganze Zahlen sind und  $m > n$  oder  $m = n$  ist. Grunert's Archiv für Mathematik Bd. 30 S. 171—184. 1858.
44. Über die Transformationen, welche in der Variationsrechnung zur Nachweisung grösster oder kleinster Werte dienen. Cr. J. Bd. 55 S. 300—309. 1858.
45. Extrait d'une lettre adressée à M. Liouville. Liouville, Journal de mathématiques sér. 2 Bd. 4 S. 273—281. 1859.
46. Über eine angebliche Berichtigung der Formel für barometrische Höhenmessung. Kämtz Repertorium der Meteorologie Bd. 2 S. 32—35. 1862.
47. Beiträge zur Integration der Differentialgleichung erster Ordnung zwischen zwei Veränderlichen. Mémoires de l'académie des sciences de St. Pétersbourg Bd. 5 Nr. 1 S. 1—95. 1862. Jzslédowanija ob integrirowanii differencjalnych urawnenij perwago porjadka s dwumja peremennymi. Druckerei der Akademie der Wissenschaften. St. Petersburg 1862.
48. De curvatura superficierum quaestiones (Gratulationsschrift). Dorpat 1863.
49. Disquisitio de formae, in quam geometra britannicus Hamilton integralia mechanices analyticae redegit, origine genuina (Gratulationsschrift). Dorpat 1864.
50. Quelques remarques analytiques à l'occasion de l'ouvrage de Mr. le Prince S. S. Ourousof. Bull. (b) Bd. 9 S. 39—55. 1866. Mel. Bd. 3 S. 655—666. 1866.
51. Démonstration d'un théorème de statique. Bull. (b) Bd. 12 S. 233—239. 1868. Mel. Bd. 4 S. 245—252. 1872.
52. Über eine bei Beobachtung der Sternschnuppen vorkommende Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Bull. (b) Bd. 13 S. 203—208. 1869. Mel. Bd. 4 S. 325—333. 1872.
53. Über das Bildungsgesetz der Zähler und Nenner bei Verwandlung der Kettenbrüche in gewöhnliche Brüche. Bull. (b) Bd. 13 S. 524—528. 1869. Mel. Bd. 4 S. 343—349. 1872.
54. Zur Methode der kleinsten Quadrate. Bull. (b) Bd. 16 S. 305—308. 1871. Mel. Bd. 4 S. 711—715. 1872.
55. Über die mittlere Krümmung der Flächen. Bull. (b) Bd. 20 S. 531—537. 1875. Mel. Bd. 5 S. 248—256. 1881.
56. Über die Kurven kürzesten Umrings auf Umdrehungsflächen. Bull. (b) Bd. 21 S. 252—261. 1876. Mel. Bd. 5 S. 297—308. 1881.
57. Einige isoperimetrische Aufgaben. Bull. (b) Bd. 24 S. 398—409 187. Mel. Bd. 5 S. 443—458. 1881.
58. Zur Theorie der Kurven kürzesten Umrings auf krummen Flächen. Bull. (b) Bd. 25 S. 190—193. 1878. Mel. Bd. 5 S. 575—579. 1881.
59. Eine Anwendung der Differenzenrechnung. Bull. (b) Bd. 25 S. 225—229. 1878. Mel. Bd. 5 S. 581—588. 1881.
60. Zur Theorie der Kurven kürzesten Umrings, bei gegebenem Flächeninhalt, auf krummen Flächen. Cr. J. Bd. 86 S. 279—289. 1879.

## Rezensionen.

---

**Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie.** Von Dr. A. v. BRAUNMÜHL, ordentl. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu München. Erster Teil. Von den ältesten Zeiten bis zur Erfindung der Logarithmen. Mit 62 Figuren im Text. Leipzig 1900, B. G. Teubner. VII, 260 S.

Wenn Herr v. Braunmühl es für nötig hält, sich in dem Vorworte gewissermaßen zu entschuldigen, dass er eine Sondergeschichte der Trigonometrie veröffentliche, nachdem eine Geschichte der Mathematik im allgemeinen kaum erst erschienen sei, so muss der Verfasser jener Geschichte der Mathematik von seiner Seite die neue Ergänzung zu seinen eignen Arbeiten aufs Freudigste willkommen heissen. Bietet sie doch ein zusammenhängendes Bild, von dem nur einzelne Teile in der Geschichte der Mathematik zerstreut herumliegen, und bietet sie doch zugleich so viel Neues, dass der Referent gern gesteht, manches aus ihr gelernt zu haben, was verdient hätte auch in der Geschichte der Mathematik einen Platz zu finden und in einer Neubearbeitung insbesondere des ersten Bandes, wenn eine solche möglich werden sollte, gewiss berücksichtigt werden wird. Wir meinen vorzugsweise die graphisch-trigonometrischen Methoden der Griechen und die trigonometrischen Eigenleistungen der Araber. Aber auch für den zweiten Band hat Herr v. Braunmühl Ergänzendes aufgefunden, und wir bedauern lebhaft das, was S. 183—185 über Maurice Bressieu als Vorgänger von Torporley gesagt ist, nicht rechtzeitig kennen gelernt zu haben, um es noch dem Vorworte zur zweiten Auflage des zweiten Bandes einverleiben zu können. Auch dem fleissigsten Forscher entgehen mitunter ganz wichtige Dinge, und ein neidloses Zusammenwirken wird geradezu zur Notwendigkeit. Von diesem Gesichtspunkte aus sei es uns gestattet, Herrn v. Braunmühl auf wenige Punkte aufmerksam zu machen. Auf S. 19 ist *τρήματα* in *τρήματα*, auf S. 49 und 50 Raska in Ruska zu verbessern; letzterer Druckfehler ist um so peinlicher, als er auch in das Register sich fortgesetzt hat. Die S. 64 zur Veröffentlichung empfohlene Kreisquadratur des Ibn. Al-Haitam ist durch Herrn Suter in der Ztschr. Math. Phys. 44, Hist. litter. Abt. S. 33 bis 47 dem Drucke übergeben. Zu S. 200 ist nachzutragen, dass in der Prager Universitätsbibliothek eine von Tycho Brahe herrührende Sinustafel gefunden worden ist, über welche Herr Studnička in einem am 13. Oktober 1899 der Königl. Böhm. Gesellsch. d. Wissensch. vorgelegten Aufsätze berichtet hat.

CANTOR.

**Delle Meccaniche lette in Padova l'anno 1594 da Galileo Galilei per la prima volta pubblicate ed illustrate da ANTONIO FAVARO.** Venezia 1899, Tipografia Carlo Ferrari. 26 pag.

In der 1899 dem Unterzeichneten von 32 wissenschaftlichen Freunden gewidmeten Sammlung histor.-mathematischer Abhandlungen hat Herr Favaro auf eine Handschrift im Besitze des Fürsten Thurn und Taxis in Regensburg hingewiesen, wahrscheinlich ein Vorlesungsheft der Mechanik, welches Galilei 1594 seinen Vorlesungen in Padua zu Grunde legte und seinen Schülern zur Abschrift mittheilte. Herr Favaro hat jetzt dieses Heft in den Abhandlungen der gelehrten Gesellschaft von Venedig und daraus als Sonderabdruck veröffentlicht. Galilei behandelt in italienischer Sprache die fünf einfachen Maschinen: Hebel (*lieva*), Haspel (*argano*), Rolle (*taglia*), Schraube (*vite*), Keil (*conio*), dann deutet er zum Schlusse die Möglichkeit der Vereinigung mehrerer unter ihnen an. Die Behandlung ist so einfach als möglich. Rührt das Heft wirklich von Galilei her, so besitzt es dadurch Interesse. Wäre Herr Favaro's Annahme irrig, zu welcher Anzweiflung freilich kaum ein Grund vorliegt, so wäre damit Galilei um keinen besonderen Ruhmestitel ärmer.

CANTOR.

### Briefwechsel zwischen Carl Friedrich Gauss und Wolfgang Bolyai.

Mit Unterstützung der Ungarischen Akademie der Wissenschaften herausgegeben von FRANZ SCHMIDT und PAUL STÄCKEL. Leipzig 1899, B. G. Teubner. XIII, 208 S.

Im 43. Bande dieser Zeitschrift Histor.-litterar. Ablg. S. 209—210 wurde der erste Band von Wolfgang Bolyai's Werken angezeigt, von welchen die Ungarische Akademie eine glänzende Ausgabe veranstaltet. Noch bevor der zweite Band die Presse verliess, ist ein nicht minder glänzend ausgestatteter Ergänzungsband in unsere Hände gelangt, der den in der Überschrift abgedruckten Titel führt. Es sind im ganzen 42 Briefe, 18 von Gauss an Bolyai, 24 von Bolyai an Gauss, und erstrecken sich von Ende September 1797 bis Anfang Februar 1853. Dazu kommen dann noch Briefe anderer Persönlichkeiten, die sich auf die beiden Jugendfreunde beziehen, und Anmerkungen des Herausgebers. Der eigentlich wissenschaftliche Inhalt der Briefe, der für die Geschichte der Lehre von den Parallellinien besondere Wichtigkeit besitzt, ist schon wiederholt ausgebeutet. Dagegen ist für die persönlichen Verhältnisse beider Briefschreiber eine neue reiche Quelle eröffnet, wenn deren Ergebnis auch, soweit es Bolyai betrifft, nur den traurigen Eindruck verstärken kann, welchen das verpfuschte Leben eines Menschen, dessen Anfänge zu den höchsten Hoffnungen berechtigt hatte, hervorruft. Zu den Persönlichkeiten, über welche nicht unwichtige neue Thatsachen durch den Briefwechsel bekannt werden, gehört Friedrich Wilhelm August Murhard. Gauss warnt Bolyai vor ihm als einem durchaus unzuverlässigen Menschen, der sich Unredlichkeiten niedriger Art zu Schulden kommen liess. Es scheint, als ob Murhard 1798 in der

Hoffnung auf Erlangung einer Professur nach Österreich reiste, und erst als diese Hoffnung zu nichte wurde, die Reise in das ferne Morgenland fortsetzte, von wo er bekanntlich 1799 nach Kassel zurückkehrte. CANTOR.

**Arithmetic theoretical and practical** by JOHN STURGEON MACKAY, M. A., L. L. D. Fellow of the Royal Society of Edinburgh; head mathematical master in the Edinburgh Academy. London and Edinburgh 1899, W. & R. Chambers, limited. XI, 472 pag.

Wenn ein Mathematiker wie Herr Mackay ein Lehrbuch aller-elementarsten Inhaltes herausgibt, so kann man sich, selbst wenn es sich um Dinge handelt, die seinem gewohnten Gedankenkreise fern liegen, immerhin auf eine interessante Behandlung gefasst machen, und diese Hoffnung hat uns nicht getäuscht. Wir haben das Lehrbuch der Rechenkunst mit Vergnügen gelesen und mancherlei daraus gelernt, was englischen Schriften vielleicht gemeinsames Eigentum ist, uns aber nicht als solches bekannt war. Um unseren Lesern ein Beispiel davon zu geben, wählen wir die Zinsberechnung (pag. 297) für den Fall, dass das Kapital  $K$  während  $t$  Tage zu  $p$  % zinstragend angelegt ist und den Zins  $Z$  liefert. In Deutschland nimmt man in solchen Fällen das Jahr zu 360 Tagen an. Nicht so in England, wo das Jahr auch bei der Zinsabrechnung mit 365 Tagen auftritt, die Rechnung aber gleichwohl sich durch einen Kunstgriff ziemlich einfach gestaltet. Zunächst ist  $Z = \frac{tpK}{36500} = \frac{2tpK}{73000}$ . Nun ist aber ziemlich genau  $\frac{1}{73} = 0,0137$  und demzufolge  $Z = \frac{2tpK}{100000} \cdot 1,37$ .

Aber  $1,37 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}$  und daraus folgt die Regel: man bilde das doppelte Produkt von Kapital, Tagen und Zinsfuß, addiere dazu sein Drittel, dessen Zehntel und das Zehntel dieses Zehntels und schneide fünf Dezimalstellen ab, so erhält man den Zins. Von Dingen, die uns nicht neu waren, denen zu begegnen wir uns aber freuten, erwähnen wir, dass die Subtraktion durchweg additiv erfolgt, also mittels der österreichischen Subtraktion, wie man dieses Verfahren in Deutschland zu nennen pflegt; dass irrationale Quadratwurzeln als gemeinsame Grenze zweier Zahlreihen auftreten, deren eine aus zunehmenden, die andere aus abnehmenden Zahlen besteht; dass die Lehre von den periodischen Dezimalbrüchen in einiger Vollständigkeit behandelt ist. CANTOR.

**Zweierlei Zinsfuß und Zinsfußwechsel im Kontokorrent** von EDUARD GROHMANN, Professor an der Gremial-Handelsfachschule der Wiener Kaufmannschaft. (Aus der Sammlung handelswissenschaftlicher Abhandlungen herausgegeben von der Handels-Akademie Leipzig, Dr. jur. Ludwig Huberti.) Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. Verlag der Handelsakademie Leipzig. 48 S.

Bei der Zinsabrechnung in den Kontokorrenten werden regelmässig zweierlei Zinsfusse zu Grunde gelegt, ein niedriger Zinsfuss, so oft das Bankgeschäft Einlagen des Kunden zu verzinsen hat, ein höherer, so oft es ihm Kredit auf kürzere oder längere Zeit gewährt. Ferner kommt es nicht selten vor, dass infolge von Veränderungen im allgemeinen Geldstande innerhalb des halben Jahres, über welches das Kontokorrent sich erstreckt, der Zinsfuss herüber wie hinüber sich erhöht oder ermässigt. Beides will berücksichtigt sein und kann dem ungeübten Rechner gewisse Schwierigkeiten bereiten. Herr Grohmann zeigt nun, wie man jene Rechnung zu vollziehen hat.

CANTOR.

**Exercices d'arithmétique.** Énoncés et solutions par J. FITZ-PATRICK, ancien professeur de mathématiques, et GEORGES CHEVREL, directeur de l'institution Charlemagne à Tours. Avec une préface de M. JULES TANNERY, sous-directeur des études scientifiques à l'école normale supérieure. Deuxième édition considérablement augmentée et suivie d'exercices proposés, de notions et exercices d'arithmétique commerciale. Paris 1900, A. Hermann. XIV, 680 pag.

Wir haben im 40. Band Histor. litterar. Abtlg. S. 65 — 66 die erste Auflage von 1893 besprochen und deren Vorzüge hervorgehoben, denen allerdings der Absatz des Buches nicht entsprochen zu haben scheint. Wir sind zu dieser bedauernden Äusserung berechtigt, weil bei näherem Zuschauen die gegenwärtige zweite Auflage sich bis S. 483 einschliesslich als unverändert erweist mit neugedrucktem Titelblatte. Die Behauptung bedeutender Vermehrung ist dennoch wahr, denn S. 485 — 680, also mehr als 12 Druckbogen, sind neu hinzugekommen. Ihr Inhalt besteht teils aus weiteren Aufgaben ohne hinzugefügte Auflösungen, teils aus gelösten kaufmännischen Aufgaben mit vorausgeschickten Erläuterungen. Dieser Anhang besitzt die gleichen Vorzüge, welche wir an dem ihm vorhergehenden Teile lobten. Fesselnde Aufgaben sind gestellt, und an ihre Auflösung knüpfen sich Bemerkungen von praktischem Werte. Wir wünschen dem Buche, es möge in seiner neuen Gestalt besser als seither französischen Lesern gefallen, da der Absatz eines derartigen Werkes doch der Hauptsache nach in seinem Vaterlande erzielt werden muss.

CANTOR.

PAUL MANSION, Introduction à la théorie des déterminants avec de nombreux exercices à l'usage des établissements d'instruction moyenne. 3. Édition. Gand 1899, Hoste. 38 S.

PAUL MANSION, Einleitung in die Theorie der Determinanten für Gymnasien und Realschulen. Aus der dritten französischen Auflage übersetzt. Leipzig 1899, B. G. Teubner. 40 S.

PAUL MANSION, Éléments de la théorie des déterminants avec de nombreux exercices. 6. Édition revue et augmentée. Paris 1900, Gauthier-Villars. 91 S.

PAUL MANSION, Elemente der Determinanten mit vielen Übungsaufgaben. Dritte vermehrte Auflage. Leipzig 1899, B. G. Teubner. 101 S.

Der grössere und der kleinere Mansion. Unter den diesen Namen entsprechenden Bezeichnungen sind in Frankreich wie in Deutschland die beiden Schriften rühmlich bekannt, welche wir in neuen Auflagen heute anzeigen. Die Häufigkeit dieser Auflagen zeugt für die Beliebtheit der ungemein handlichen Schriften, deren grössere noch von sehr geringem Umfange bei reichem Inhalte ist. Wir können diese Beliebtheit nur eine in hohem Grade verdiente nennen.

CANTOR.

J. A. SERRET, Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung mit Genehmigung des Verfassers deutsch bearbeitet von AXEL HARNACK, zweite durchgesehene Auflage mit Unterstützung der Herren H. LIEBMANN und E. ZERMELo herausgegeben von GEORG BOHLMANN. Zweiter Band: Integralrechnung. Mit 55 in den Text gedruckten Figuren. Leipzig 1899, B. G. Teubner. XII, 428 S.

Der erste Band ist im 43. Bande dieser Zeitschrift *Histor. litterar. Abtlg.* S. 54—55 angezeigt. Im zweiten Bande wird man nicht weniger als in seinem Vorgänger das Bestreben wahrnehmen, dem neuesten Standpunkte der Wissenschaft gerecht zu werden, ohne den Serret'schen Untergrund ganz zu verlassen. Herrn Bohlmann's eigenem Standpunkte, wie er ihn an anderem Orte in einer kritischen Übersicht über die Lehrbücherliteratur gezeichnet hat, entspricht es, dass vornehmlich und im Gegensatze zur sogenannten Arithmetisierung der Mathematik mit geometrischen Begriffsbildungen gearbeitet ist. War in dem 11. Kapitel des I. Bandes der Zugang zur Lehre von den Funktionen komplexer Veränderlichen eröffnet, so führt das 8. Kapitel des II. Bandes tiefer in diese Lehre ein, ohne dass ein besonderes Lehrbuch der Funktionentheorie dadurch entbehrlich gemacht würde. Das 4. Kapitel von den Eulerschen Integralen hat manche Erweiterung erfahren; wir erwähnen die sehr lehrreiche graphische Darstellung der Gammafunktion (S. 184). Vermisst haben wir eine Berücksichtigung der Prym'schen Arbeit über die Gammafunktion, die doch mindestens in den Bemerkungen auf S. 420 hätte genannt werden sollen.

CANTOR.

**Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung. II. Teil: Integral-Rechnung.** Von Dr. LUDWIG KIEPERT, Geheimer Regierungsrat, Professor der Mathematik an der technischen Hochschule zu Hannover. Siebente verbesserte und vermehrte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von weil. Dr. MAX STEGEMANN, mit 139 Figuren im Texte. Hannover 1900, Helwing. XX, 617 S.

Der wesentlichste Unterschied gegen die vorhergehende Auflage von 1896 besteht in der Aufnahme der Gaußschen angenäherten Quadratur, welche S. 346—355 im Anschlusse an die Simpsonsche Regel gelehrt ist.

Die Verlagshandlung hat sich zu einer Neuerung entschlossen, welche der gegenwärtig schon weiten Verbreitung des Werkes nur förderlich sein kann. Sie stellt den Lehrern, welche den Kiepert ihren Vorlesungen zu Grunde legen, beliebig viele Gratisexemplare der am Schlusse abgedruckten Formelsammlung zur Verteilung an ihre Zuhörer zur Verfügung.

CANTOR.

**Höhere Analysis, zweiter Teil. Integralrechnung** von Dr. FRIEDRICH JUNKER, Professor am Realgymnasium und der Realanstalt in Ulm. Mit 87 Figuren. Leipzig 1899, G. J. Göschensche Verlagshandlung. (Sammlung Göschen.) 205 S.

Was im 44. Bande dieser Zeitschrift *Histor.-litter. Abtlg.* S. 156 über Herrn Junker's in der Sammlung Göschen erschienene Differentialrechnung gesagt wurde, gilt mit geringen Wortänderungen auch für dessen Integralrechnung. Sie giebt die Anleitung zum Integrieren, zur Anwendung von Integrationen auf die Quadraturen, Komplanationen, Kubaturen, Rektifikationen, Auffindung von Schwerpunkten. Sie zeigt auch, wie Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Veränderlichen integriert werden können. Kurzum das kleine Büchelchen beschäftigt sich mit dem, was für den gewöhnlichen Gebrauch unumgänglich notwendig ist. Falsches ist uns, abgesehen von Druckfehlern, an denen kein Mangel ist, nichts aufgefallen, dagegen ist das Eingehen auf Schwierigkeiten streng vermieden. Der Leser muss oft auf Treu und Glauben annehmen, wovon ihm nicht einmal gesagt wird, dass ein Beweis erforderlich und möglich ist, wie z. B. den Fundamentalsatz der Algebra (S. 24). Etwa in gleicher Linie steht (S. 180) die Behauptung, der integrierende Faktor  $\mu$  der Differentialgleichung  $Mdx + Ndy = 0$  lasse sich stets so bestimmen, dass die Bedingung erfüllt ist  $\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$ . Freilich hinkt (S. 182) die Bemerkung nach, die Bestimmung von  $\mu$  aus der partiellen Differentialgleichung  $\mu \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) = N \frac{\partial \mu}{\partial x} - M \frac{\partial \mu}{\partial y}$  [so heisst die Gleichung 7 nach Entfernung der Druckfehler!] sei gewöhnlich schwieriger als die Integration der gegebenen Gleichung selbst. Dabei bleibt der Leser immer noch in dem Wahne,  $\mu$  könne unter allen Umständen bestimmt werden.

CANTOR.

**Analytische Geometrie des Raumes.** Zweiter Teil der Elemente der analytischen Geometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium, mit zahlreichen Übungsbeispielen von Dr. FRANZ RUDIO, Professor am Polytechnikum in Zürich. Mit zwölf Figuren im Texte. Zweite verbesserte Auflage. Leipzig 1899, B. G. Teubner. X, 184 S.

Wenn wir bei Besprechung der ersten Auflage (Bd. 37, *Hist. litter. Abtlg.* S. 67—68) voraussagten, das Buch werde sich so viele Freunde als Leser gewinnen, so bestätigt die eingetretene Notwendigkeit eines

Neudruckes unser damaliges Urteil. Die in der zweiten Auflage eingetretenen Verbesserungen sind vielleicht richtiger als Vermehrungen zu bezeichnen. So hat die Anzahl der Aufgaben sich von 458 auf 482 erhöht. Im 6. Kapitel ist die Behandlung der Oberflächen zweiten Grades eine ausführlichere geworden, so dass das Buch in seiner jetzigen Gestalt mehr noch als früher dem Bedürfnisse von Polytechnikern zu genügen imstande ist. Das Hinzutreten eines alphabetischen Sachregisters erfüllt sicherlich weitverbreitete Wünsche.

CANTOR.

**Kurzer Abriss der darstellenden Geometrie** zum Gebrauche in Vorlesungen, beim Unterricht und zum Selbststudium von Dr. ERNST GERLAND, Professor an der Königl. Bergakademie zu Clausthal. Mit einem Block von 26 lithographierten Tafeln. Leipzig 1899, Wilh. Engelmann. Text 8<sup>o</sup>, 49 S.

Den Hauptwert des vorliegenden Werkchens sieht der Verfasser, nach dem Vorworte zu urteilen, in den 26 lithographierten Tafeln, auf denen, ausser einigen Erklärungsfiguren, Angaben für Aufgaben sich befinden, die der Lernende auf den Tafeln selbst durchzeichnen, eventuell auch tuschen soll. Frühere Versuche dieser Art haben meines Wissens keinen Anklang gefunden; denn den einzigen mit Recht anzuführenden Nutzen dieser Methode, dass die Schüler geeignete Aufgaben im richtigen Maßstabe zeichnen, erzielt der Lehrer besser, indem er ihnen durch Maße bestimmte Aufgabenskizzen in die Hand gibt. Wenn der Verfasser meint, dass durch solche Tafeln „der Lernende gezwungen ist, alle Zeichnungen selbst auszuführen“, dann täuscht er sich. Ich glaube vielmehr, dass dadurch zum Kopieren erst recht Gelegenheit geboten wird, denn jeder folgende Jahrgang kann alle 26 Tafeln von dem vorhergehenden mechanisch abzeichnen, sogar abpausen, weil die Aufgaben so genau als möglich übereinstimmen. Wenn aber der Verfasser den angeführten Satz fortsetzt: „statt sie nach bisher herrschendem Gebrauche bereits ausgeführt vorzufinden“, so spricht er in dieser Allgemeinheit eine schwere ungerechtfertigte Beschuldigung aus. Die Blockform der Tafeln macht ferner den im technischen Zeichnen üblichen Gebrauch der Reißschiene unmöglich und zwingt den Zeichner beim Ausführen eines Blattes, das nachfolgende mit dem Zirkel zu zerstechen.

Die zeichnerische Ausführung der Tafeln lässt viel zu wünschen übrig. Vor allem fällt die inkorrekte Zeichnung aller vorkommenden Ellipsen auf (Fig. 141, 211 (!), 212 (!), 213), deren sich ein darstellender Geometer nicht schuldig machen dürfte; in den Figuren 76, 126, 215 stimmen Aufriss und Grundriss ziemlich schlecht überein.

Ebenso wenig Gutes kann von dem Text gesagt werden. Wie dieses Büchlein zum Selbststudium brauchbar sein soll, ist gänzlich unverständlich. Die Andeutungen zur Lösung sind meist so spärlich und oft so unzutreffend oder unklar, dass selbst ein Fachmann nicht immer sogleich

verstehen wird, wie sich der Verfasser die Lösung dachte. Dazu kommt noch eine beträchtliche Zahl von Ungenauigkeiten und Fehlern, wie z.B. in

§ 27 „Ist eine Gerade keiner der Projektionsebenen parallel, so konvergieren (?) ihre Projektionen gegen die Axe.“

§ 63 und anderen „affin liegende Figuren“ statt perspektivisch liegende affine Figuren.

§ 131, wo der in Fig. 117 dargestellte Körper als eine Kombination des Würfels mit dem Oktaëder bezeichnet wird, während es, nach dem Grundrisse zu urteilen, eine Kombination dieser beiden Körper mit dem Rhombendodekaëder ist,

§ 166, wo von der orthogonalen Axonometrie im Gegensatze zur Orthogonalprojektion gesprochen und behauptet wird, dass sie „den Körper in einer Weise darstellt, wie wir ihn aus endlicher Entfernung zu sehen gewohnt sind,“

§ 167, wo „die isometrische Projektionsmethode, auch Vogelperspektive oder Cavalierperspektive genannt“ wird.

Ein wahres Unikum einer „Erklärung“ bringt

§ 199: „die Fluchtpunkte von parallelen Linien, welche die Falllinien der Ebene unter einem anderen Winkel wie  $45^{\circ}$  schneiden, heissen Teilungspunkte“.

Falsch ist in der Erklärung § 223 die Behauptung, dass die Linien gleicher Helligkeit (einer beliebigen Fläche!) „von der Linie oder dem Punkte grösster Helligkeit, der Glanzkante, gleichen Abstand haben,“ ferner in § 225 die Angabe, dass die „Linie kleinster Helligkeit“, d. h. die Eigenschaftengrenze, für einen Rotationskegel ebenso gefunden werde wie für einen Rotationscylinder, unerfüllbar die Forderung im § 224, dass das Licht längs einer Linie einfallen soll, „die mit den drei Koordinatenebenen Winkel von  $45^{\circ}$  macht.“

Ich will die Geduld des Lesers nicht missbrauchen und nur noch hinzufügen, dass ich die Anschaffung dieses Werkes meinen Schülern nicht empfehlen würde.

E. MÜLLER.

**Leitfaden für die Vorlesungen über darstellende Geometrie** an der herzogl. technischen Hochschule zu Braunschweig von Prof. Dr. REINHOLD MÜLLER. Als Manuskript gedruckt. Braunschweig 1899. Fr. Vieweg & Sohn. 8<sup>o</sup>. 88 S.

Vorliegendes Büchlein hat nach den Worten des Verfassers ausschliesslich den Zweck, von seinen Hörern im Zusammenhange mit den Vorlesungen zur Wiederholung des Gelehrten benutzt zu werden. Es soll das Nachschreiben der Vorträge, nicht aber das wichtige Nachzeichnen der Figuren ersparen; sie sind deshalb möglichst vermieden. Durch eine musterhaft kurze und klare Schreibweise, verbunden mit einer konsequent angewendeten Bezeichnung hat es der Verfasser zustande gebracht, das für den Techniker unbedingt Wissensnötige aus der darstellenden Geometrie

samt den erforderlichen Begründungen auf diesen engen Raum zusammen zu drängen und dabei doch so verständlich zu bleiben, dass nach Hinzufügung einiger weiterer Figuren, meiner Meinung nach, das Büchlein nicht nur von seinen Hörern, sondern auch von anderen Studierenden mit Erfolg benutzt werden könnte.

Das Büchlein verdient aber meiner Ansicht nach noch ein allgemeineres Interesse deshalb, weil es eine der wenigen Veröffentlichungen ist, aus denen man ersehen kann, in welchem Umfange und nach welcher Methode die darstellende Geometrie an einer technischen Hochschule wirklich gelehrt wird. Als unterscheidende Merkmale von den an anderen Hochschulen eingehaltenen Lehrgängen fällt vor allem die Nichtverwendung der projektiven Geometrie und die Bevorzugung der rechtwinkligen Projektion auf. Der Vortragende stellt sich dadurch auf einen weniger hohen wissenschaftlichen Standpunkt, wird aber die Techniker nicht durch zu viele, mit der darstellenden Geometrie oft nur in losem Zusammenhang stehende Theorie abschrecken. Aus der projektiven Geometrie verwendet der Verfasser nur die Begriffe Affinität und Kollineation, beruft sich an anderen Stellen auf die Ergebnisse der analytischen Geometrie oder stellt eine kleine Rechnung an. Um z. B. in Nr. 106 zu beweisen, dass durch Rotation einer Geraden um eine zu ihr windschiefe Axe ein Umdrehungshyperboloid entsteht, leitet er die Gleichung der Meridiankurve ab. Die die Ellipse betreffenden Konstruktionen werden erklärt, indem er die Ellipse als affine Kurve des Kreises betrachtet. Die „Papierstreifenkonstruktion“ der Ellipse, sowie die Konstruktion ihrer Axen aus zwei konjugierten Durchmessern folgen daraus (Nr. 67, 68) auf elementar-geometrischem Wege. Auf die Behandlung der allgemeinen Fläche zweiten Grades muss natürlich der Verfasser verzichten, ebenso z. B. auf die genauere Untersuchung der Regelflächen und die Verwendung derjenigen darauf bezüglichen Konstruktionen, welche Kenntnisse aus der projektiven Geometrie erfordern. Dadurch wird jedoch viel Zeit für die Durcharbeitung praktisch wichtigerer Dinge gewonnen.

Von den zwei Abschnitten des Büchleins „die Parallelprojektionen“ und „die Centralprojektion“ nimmt der erste mit 76 S. den überwiegend grössten Raum ein, und das meiste davon bezieht sich auf die „senkrechte Projektion“. Die schiefe Projektion tritt eigentlich nur am Anfang und Ende des Abschnittes auf. Am Anfang wird sie soweit erläutert, dass der Studierende imstande ist, anschauliche Skizzen (Erläuterungsfiguren) methodisch herzustellen; am Ende wird der Pohlkesche Satz bewiesen; zwischendurch wird hie und da auch die Darstellung von Gebilden in schiefer Projektion kurz erwähnt oder die Lösung von Aufgaben bei Darstellung in schiefer Projektion angedeutet. In der Vorrede bemerkt der Verfasser, dass er die schiefe Projektion in Vortrag und Übungen in umfangreicherem Maße anwende, als es in dem Leitfaden zum Ausdruck gelange. Was die senkrechte Projektion anbelangt, so kommen nach der Besprechung der Darstellung von Punkten, geraden Linien und Ebenen auf zwei (nicht gleich drei!) zu einander senkrechte Ebenen,

wie üblich, ebenflächige Gebilde, Kreis und Kugel, Kegel-, Cylinder-, Um-drehungs-, Schrauben- und windschiefe Flächen zur Besprechung. In einem Kapitel über Beleuchtungslehre werden die Bestimmungen der Isophoten krummer und der Helligkeit ebener Flächen mittels der Normalkugel erklärt, ferner kurz die Grundbegriffe der kotierten Projektion angeführt und endlich die senkrechte Axonometrie erläutert, die meines Erachtens vollkommen durch die schiefe Projektion zu ersetzen wäre. Lobend hervorzuheben ist die durchgehende Anwendung von Seitenrissen als Konstruktionsprinzip zur Zurückführung komplizierter Aufgaben auf einfache, ferner manche treffende Bemerkung über Konstruktionsvereinfachungen. Die bei jeder Flächenklasse besprochenen Schattenbestimmungen könnten vielleicht, aus manchen pädagogischen Gründen, in ein Kapitel vereinigt werden. In Nr. 109 vermisste ich die Ermittlung der Rückkehrpunkte des scheinbaren Umrisses einer beliebigen Rotationsfläche und in Nr. 111 eine Bemerkung über den Verlauf ihrer Eigenschattengrenze, wenn der Meridian aus mehreren sich berührenden Teilkurven z. B. Kreisbögen besteht. In Nr. 81 sollte des schnelleren Verständnisses halber die Bedeutung des Buchstaben A aus Nr. 79 nochmals angegeben sein.

Im zweiten Abschnitt wird (etwas zu kurz!) erläutert, wie man aus den gegebenen senkrechten Projektionen eines Gegenstandes sein perspektivisches Bild ermittelt, dann das wichtigste aus der freien Perspektive. Der Anhang über Reliefperspektive (2 S.) soll den Studierenden auf einen allgemeineren Standpunkt stellen, insbesondere zeigen, wie die Nichtregel-fächen zweiten Grades als Relief der Kugel hervorgehen.

Diese Vorträge, verbunden mit gut geleiteten Übungen, in denen mehr praktische Beispiele bearbeitet werden, bilden, meiner Meinung nach, einen Lehrgang, der den von hervorragenden Vertretern der Technik erhobenen Forderungen vollkommen entspricht.

E. MÜLLER.

**Die Elemente der darstellenden Geometrie.** Zum Gebrauche an höheren Lehranstalten sowie zum Selbststudium. Mit zahlreichen Übungsbeispielen. Bearbeitet von Prof. Dr. CHR. SCHMEHL, Lehrer an der Grossherzogl. Oberrealschule zu Darmstadt. Giessen 1899, E. Roth. 2 Teile 8<sup>o</sup>. I. Teil 95 S., II. Teil 94 S.

Dass von den gebräuchlichen Lehrbüchern der darstellenden Geometrie ein Teil sich in dem eigentlichen Stoffe zu sehr beschränkt und dafür in den rein technischen Anwendungen zu weit geht, der andere Teil in zu wissenschaftlicher Weise abgefasst ist, um zur Einführung in diese Disziplin dienen zu können, war für den Verfasser der Beweggrund zur Abfassung dieses Buches. Als Vorbilder hätten ihm die in den österreichischen Realschulen eingeführten guten Lehrbücher dienen können, welche den Gegenstand fast in demselben Umfang behandeln und aus einer Jahrzehnte langen Lehrerfahrung hervorgegangen sind.

Was den Inhalt anbelangt, so behandelt der I. Teil die Darstellung von Punkten, geraden Linien, Ebenen und Körpern in orthogonaler Projektion, die Lösung der Grundaufgaben über Punkte, Geraden und Ebenen, die Konstruktion ebener Schnitte von Prismen, Pyramiden, Kegeln, Cylindern und Kugeln sowie die zugehörigen Abwickelungen. Der II. Teil behandelt die Durchdringungen der angeführten Körper und die Schattenkonstruktionen an ihnen, die Elemente der Perspektive und der Axonometrie. Die Weglassung der so wichtigen Rotationskörper scheint mir ungerechtfertigt, da ihre konstruktive Behandlung keine besonderen Schwierigkeiten bietet, den geometrischen Gesichtskreis der Schüler aber sehr erweitert.

In Bezug auf die Darstellung hätte sich der Verfasser vielleicht etwas kürzer fassen können; insbesondere brauchten viele aus dem stereometrischen Unterrichte bekannte Begriffe keiner nochmaligen Erklärung, wenn das Buch nicht wieder den Nebenzweck erfüllen sollte, zum „Selbststudium“ zu dienen. Beiden Anforderungen wird nie ein Buch vollkommen gerecht werden. Ferner hätte der Verfasser die Grundgedanken der Konstruktionen mehr hervorheben sollen, deren Erfassen doch erst die Herrschaft über den Stoff giebt; das Buch würde dadurch das Ansehen einer blossen Aneinanderreihung von Aufgaben nicht erhalten haben, das es jetzt in einzelnen Teilen besitzt. Beim Unterrichtsgebrauche wird das Wort des Lehrers diesem Mangel leicht abhelfen können. Ziemlich ausführlich ist die Perspektive behandelt. Die in § 3, VI, C (S. 70 fig.) gelehrt Methode zur freien perspektivischen Darstellung von Gegenständen, an denen drei aufeinander senkrecht stehende Kanteneinrichtungen auftreten, war mir neu und verdient allgemeinere Beachtung.

Über kleine Versehen, die mir aufgestossen sind, gehe ich hinweg und will von pädagogischen Einwänden nur den einen erwähnen, dass für unterrichtliche Zwecke auf die Unterscheidung des Eigen- und Schlag-schattens (vergl. II. T. Fig. 53—56) Wert gelegt werden sollte, wenn auch manche Architekten (keineswegs alle!) bei ihren Schattenkonstruktionen in dieser Hinsicht keinen Unterschied machen.

Trotz der angeführten Mängel kann das Buch für den Gebrauch an nicht technischen höheren Lehranstalten empfohlen werden. Leider ist die darstellende Geometrie noch nicht einmal an allen Realschulen Deutschlands Unterrichtsgegenstand.

E. MÜLLER.

**Geometrische Aufgaben.** Ein Lehr- und Übungsbuch zum Gebrauche beim Unterricht an höheren Schulen, bearbeitet von Prof. Dr. M. SCHUSTER, Oberlehrer an d. Oberrealschule zu Oldenburg. Verlag von B. G. Teubner. Ausgabe A für Vollanstalten, geb. 2 M. Ausgabe B, geb. 1,60 M.

Herbart, auf den sich auch der Verfasser mehrfach beruft, hat einmal gesagt: „Langeweile ist die Todsünde des Lehrers“ und es unterliegt keinem Zweifel, dass der dogmatische Anfangsunterricht vielen Tausenden den Weg zur Mathematik für die ganze Zeit ihres Lebens verlegt hat, wenn der Lehrer es nicht verstand, das Interesse über alle Klippen und Fährlich-

keiten der Definitionen, Zergliederungen und Euklidischen Beweise hinaus wachzuhalten. Schuster will durch die Hand, durch Zirkel und Lineal, sich den Zugang zum Verständnis beim Schüler frei halten; er will durch planvoll angeordnete und geschickt gruppierte Aufgaben dem Schüler das Gefühl des Könnens geben und dann in der so erzielten frohen Siegestimmung, im Elan, das Gebäude der Lehrsätze aufrichten. Dabei wird auch, da der Schüler fortwährend mit Maßeinheiten operiert, das arithmetische Denken geübt und eine befruchtende Wechselwirkung der beiden Teilgebiete erzielt. Man könnte der vorliegenden Sammlung, die mit grossem Fleiss und pädagogischem Geschick zusammengestellt ist, den Vorwurf des „Zu viel“ an Aufgaben machen. Der systematische Aufbau des Gebäudes, der doch auch das ästhetische Bedürfnis befriedigen soll, tritt hinter dem mächtigen Gerüst mit seinen Arbeitsetagen, seinen Längs- und Quergängen reichlich zurück und es fragt sich, ob, wenn der Schüler selbst nur dieses Buch in der Hand hat, bei ihm der Eindruck eines ganzen zusammenhängenden Lehrgebäudes dauernd wacherhalten werden und jenes unbedingt sichere Vertrauen auf die Zuverlässigkeit geometrischer Ergebnisse befestigt werden kann. Das wird ja wesentlich mit von der Individualität des unterrichtenden Lehrers abhängen, könnte aber vielleicht auch besser gesichert werden, wenn sich der Verfasser entschliesse, bei einer Neuauflage noch mehr Aufgabenballast zu entfernen, um ganz sicher dem Ziele zusteuern zu können.

So sind z. B. die Aufgaben Seite 13 für den Quartanar meines Erachtens zu schwer und müssten mit anderen aus späteren Abschnitten, für die das gleiche zutrifft, etwa am Schlusse des Buches zur etwaigen Benutzung bei Wiederholungen bereit gestellt werden. Sehr richtig wird der Begriff der Parallelität und Kongruenz nicht gleich im Anfang gebracht. Die letztere wird auf dem Begriffe der ein- und zweideutigen Konstruktionen durch „Ortslinien“ (nicht „geometrischen Ort“) aufgebaut. Die Sätze über unvollständige Kongruenz (S. 36) halte ich an dieser Stelle für nicht angebracht. Die früher (siehe Schraders Lehrbuch) so hochgeschätzte, später oft verworfene Symmetrie (man lese Machs populäre Vorträge) kommt zu ihrem Recht. Auf Seite 52 finden sich achtzehn nette Dreiecksaufgaben aus gegebenen Punkten; bei der Anwendung des Pythagoras, für den besonders ein sehr anschaulicher Beweis gegeben wird, ist (Seite 57) bereits das Ausziehen der Quadratwurzel vorausgesetzt, was für Untertertia etwas reichlich früh erscheint. Beim Begriff der inneren und äusseren Teilung werden zur Verdeutlichung Bewegungsgleichungen gestellt; bewegen sich die Körper in entgegengesetzter Richtung, so entspricht ihr Treffpunkt dem inneren Teilpunkt und umgekehrt. Bei gleicher Geschwindigkeit bleibt das Teilverhältnis dasselbe und man hat die vier harmonischen Punkte, deren Begriff auffallender Weise erst im Primapensum (S. 122) gegeben wird. Dort (S. 137) findet sich auch erst der Begriff der Ähnlichkeitspunkte und Ähnlichkeitsstrahlen, den meines Erachtens jeder Untersekundaner verstehen kann, dem man die ersten Gesetze der Spiegel- und Linsenbilder doch auch

gibt. Hier kann man sogar experimentell die vier harmonischen Punkte darstellen, ebenso beim ein- und zweiarmligen Hebel: wirken die Kräfte nach gleicher Richtung, so liegt der Unterstützungspunkt innen, wirken sie entgegengesetzt, so liegt er aussen und man hat den einarmigen Hebel. Kein Schüler, der dies verstanden hat, wird je weder das Hebelgesetz noch die entsprechende Figur der inneren und äusseren Teilung einer Strecke nach gegebenem Verhältnis vergessen.

Dr. GROSSE-Bremen.

### Zwölf Geduldspiele etc. Von Prof. Dr. H. SCHUBERT. Leipzig 1899, Göschen.

Die vorliegende neue Ausgabe ist ein Wiederabdruck des 1895 (Berlin, Dümmler) unter gleichem Titel erschienenen Buches. Der Autor wendet sich in erster Linie an Nicht-Mathematiker, und das Buch erscheint für die Aufgabe, auch Laien in die Theorie einer Anzahl der wichtigsten und interessantesten Geduldspiele einzuführen, besonders geeignet, ist aber auch für den Fachmann wegen mehrerer eigener Untersuchungen des Autors von grossem Interesse. Immerhin muss man bedauern, dass die neue Ausgabe ohne vorherige Revision erfolgt ist und daher aus der ersten eine Reihe von Unrichtigkeiten übernommen hat, welche zwar an sich den Wert des Ganzen nicht erheblich beeinträchtigen, immerhin, zumal bei dem in Aussicht genommenen weiteren Leserkreis, nicht belanglos sein dürften. Unterzeichneter fühlt sich daher veranlasst, diese Fehler hier einmal richtig zu stellen. S. 23 wird „der Fall  $n = 4$ “, d. h. die folgende Aufgabe: „16 Personen spielen zu je 4 Whist, also an 4 Tischen; wie sind an 5 Abenden hintereinander die Kombinationen der Spieler zu treffen, wenn am Ende jede Person gerade je einen Abend mit jeder der 15 anderen an einem Tisch gespielt haben soll?“ für unlösbar erklärt. Dies ist nicht richtig, vielmehr versagt hier nur die von Herrn Schubert angegebene und für andere Fälle brauchbare Methode; man findet sogar sehr leicht Lösungen, wie z. B. die folgende:

I.	II.	III.	IV.	V.
1, 2, 3, 4	1, 5, 9, 13	1, 6, 10, 14	1, 7, 11, 15	1, 8, 12, 16.
5, 6, 7, 8	2, 6, 11, 16	2, 5, 12, 15	2, 8, 9, 14	2, 7, 10, 13.
9, 10, 11, 12	3, 7, 12, 14	3, 8, 11, 13	3, 5, 10, 16	3, 6, 9, 15.
13, 14, 15, 16	4, 8, 10, 15	4, 7, 9, 16	4, 6, 12, 13	4, 5, 11, 14.

Die S. 110 über das Solitärspiel auf einem Spielbrett von 41 Löchern gemachten Angaben entsprachen schon beim Erscheinen der ersten Ausgabe nicht mehr dem damaligen Stande der Theorie dieses Spiels (s. Lucas, *Récréations mathématiques*, 1891, t. I, Note V, pag. 232).

In dem Kapitel der „Umfüllungsaufgaben“ (S. 119) gibt Herr Schubert an, dass für die beiden angegebenen Methoden „die erreichbaren sowohl wie die unerreichbaren Zahlen übereinstimmen“. Dies ist unrichtig, vielmehr liefert z. B. für den von Herrn Schubert als Beispiel behandelten Fall  $a = 20$ ,  $b = 13$ ,  $c = 9$  die zweite Methode die für die erste unerreichbare Zahl 16, wie folgendes Schema zeigt:

<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
(20)	(13)	(9)
20	0	0
7	13	0
7	4	9
16	4	0

Rezensent verzichtet jedoch darauf, hier ausführlicher auf diese Verhältnisse einzugehen, und muss sich dies für eine passendere Gelegenheit vorbehalten.

Dazu kommen noch einige kleinere Ungenauigkeiten und Druckfehler, so muss die

S. 79 Z. 20 v. o. angegebene Zahl in 1 307 674 368 000 verbessert werden.

S. 98 muss in der ersten Figur das Mittelfeld leer sein.

S. 140, Z. 11 v. u. muss es heissen: „0, 1, 2 oder 4 Lösungen“.

S. 141, Z. 9 u. 13 v. u. lies *RQ* statt *QR*.

W. AHRENS.

# Bibliographie.

---

## Periodische Schriften.

- Abhandlungen der königl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Mathem.-physik. Klasse. 20. Bd. In der Reihe der Denkschriften der 71. Bd. 2. Abteilung. München, Franz. M. 12.
- Beobachtungen, astronomische, auf der königl. Universitäts-Sternwarte zu Königsberg. 38. u. 39. Abt. Königsberg, Koch. Je M. 12. 50.
- Berichte der sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Mathem.-phys. Klasse. 51. Bd. 1899. I. Leipzig, B. G. Teubner. M. 1. 50.
- Dasselbe. 52. Bd. 1900. I. Ebenda. M. —. 80.
- Bibliotheca mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathem. Wissenschaften. Herausgegeben von GUST. ENESTRÖM. 3. Folge. 1. Bd. 4 Hefte. Leipzig, B. G. Teubner. M. 20.
- Denkschriften der kaiserl. Akademie der Wissenschaften. Mathematisch-naturw. Klasse. 68. Bd. Wien, Gerold's Sohn. geb. M. 86.
- Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. 29. Bd. Jahrg. 1898. (In drei Hefen.) 1. Heft. Berlin, Reimer. M. 13.
- Jahresbericht, astronomischer. Mit Unterstützung der astronomischen Gesellschaft herausgegeben von WALT. F. WISLICENUS. 1. Bd. enthält die Litteratur des Jahres 1899. Berlin, Reimer. M. 17.
- Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 8. Bd. 1. Hft. I. Die Chronik der Vereinigung für das Jahr 1899. II. Die auf der Versammlung zu München gehaltenen Vorträge. Leipzig, B. G. Teubner. M. 8.
- Jahresbericht, 8., des Sonnblick-Vereines für das Jahr 1899. Wien, Gerold & Co. M. 3.
- Publikationen des astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. Nr. 40. (12. Bds. 2. Stück.) WILSING, J., Untersuchungen über das Spektrum der Nova Aurigae. Leipzig, Engelmann. M. 2.
- Sitzungsberichte der königl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Klasse. Jahrg. 1899. Prag, Řivnáč. M. 18.
- Sitzungsberichte, Münchner, Mathem.-phys. Klasse. 1899. III. Heft. München, Franz. M. 1. 20.
- Dasselbe. 1900. I. Heft. Ebenda. M. 1. 20.
- Sitzungsberichte, Wiener. Mathem.-naturw. Klasse. Abt. II b. 108. Bd. 8—10. Heft. Wien, Gerold's Sohn. M. 3. 80.
- Tijdschrift, Nederlandsch, voor meteorologic. Red.: A. J. MONNÉ en CHR. A. C. NELL. No. 1. Groningen, Noordhoff. Per jrg. (12 nrs.) F. 3. 60.
- Verhandlungen der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte. 71. Versammlung zu München. 17—23. IX. 1899. II. 1. Naturwissenschaftl. Abteilungen. Leipzig, Vogel. M. 6.

- Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorolog. Instituts. 1899. 2. Heft. Ergebnisse der Beobachtungen an den Stationen II. und III. Ordnung im Jahre 1899, zugleich deutsches meteorologisches Jahrbuch für 1899. Beobachtungssystem des Königr. Preussen und benachbarter Staaten. Berlin, Asher & Co. M. 3. 50.
- Dasselbe. Ergebnisse der Gewitter-Beobachtungen im Jahre 1897. Ebenda M. 3.
- des königl. astronomischen Rechen-Instituts zu Berlin. Nr. 11 und 12. Berlin, Dümmler. Je M. 1. 20.
- Veröffentlichung des königl. preuss. geodätischen Institutes. Neue Folge. Nr. 2. und 3. Berlin, Stankiewicz. Nr. 2 M. 10. Nr. 3 M. 14.
- Veröffentlichungen der königl. Sternwarte zu Bonn. Nr. 4. KÜSTNER, F., Beobachtungen von 4070 Sternen zwischen  $0^{\circ}$  und  $18^{\circ}$  nördlicher Deklination am Repsoldschen Meridiankreise der Bonner Sternwarte, unter Mitwirkung von C. MÖNNICHMEYER ausgeführt und bearbeitet. Bonn, Cohen. M. 10.

### Geschichte der Mathematik und Physik.

#### Allgemeines.

- BOUTROUE, P., L'imagination et les mathématiques, selon Descartes. (Bibliothèque de la Faculté des lettres de l'Université de Paris, Nr. 10.) Paris, Alcan. Fr. 2.
- KNAUFF, FRZ., Die Physik des Heron von Alexandria. Programm. Berlin, Gaertner. M. 1.
- MÖBIUS, P. J., Über die Anlage zur Mathematik. Leipzig, Barth. M. 7. geb. M. 8. 50.
- PROTA, PIETRO, Della calamita e dell' inventore della bussola nautica: studio. Napoli, tip. Sorrentino.
- ROHN, KARL, Die Entwicklung der Raumanschauung im Unterricht. Festrede. Programm. Dresden, Dressel. M. —. 80.
- THIRION, J., L'évolution de l'astronomie chez les Grecs. Bruxelles, Lagaert. Fr. 3. 50.
- VOLTA, ALESS., juniore, Alessandro Volta e il suo tempo: conferenza, coll'aggiunta della lettera inedita del Volta al p. Barletti (1777) sulla pistola elettrica. Milano, Carrara. L. 2.

#### Reine Mathematik.

- ABEL, N. H., Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen (1829). Herausgegeben von ALFRED LOEWY (Ostwalds Klassiker Nr. 111). Leipzig, Engelmann. kart. M. —. 90.
- ANDOYER, H., Leçons sur la théorie des formes et la géométrie analytique supérieure, à l'usage des étudiants des facultés des sciences. Tome I. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 15.
- Auflösungen von Aufgaben aus Dr. WÖCKELS Geometrie der Alten. Nürnberg, Korn. M. —. 60.
- BEINHORN, J., Zur Theorie der quadratischen Formen. Dissertation. Marburg.
- BÖGER, RUD., Elemente der Geometrie der Lage, für den Schulunterricht bearbeitet. Leipzig, Göschen. kart. M. —. 90.
- BRÜCKNER, MAX, Vielecke und Vielfache. Theorie und Geschichte. Leipzig, B. G. Teubner. kart. M. 16.
- CALINON, A., Etude de géométrie numérique. Paris, Berger-Levrault. Fr. 2.
- CAUCHY, AUGUSTIN LOUIS, Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen (1825). Herausgegeben von P. SRÄCKEL (Ostwalds Klassiker Nr. 112). Leipzig, Engelmann. kart. M. 1. 25.

- Compléments d'algèbre élémentaire. Variations des fonctions du 1<sup>er</sup> degré, du 2<sup>e</sup> degré et bicarrées. Paris, Belin. Fr. 2.
- Complete solutions to papers in mathematics (2<sup>nd</sup> stage), 1887 to 1899. Science and Art Examinations. London, Moffatt and Paige. 2 s. 6 d.
- DESCLAUX, G., Cours primaire de trigonométrie pratique. Paris, Hachette. cart. Fr. 1.
- EGGERT, Osw., Was muss man von der elementaren Geometrie wissen? Allgemeinverständliche Einführung. Berlin, Steinitz. M. 1.
- Encyclopädie der mathem. Wissenschaften. I. Teil. 1. Bd. 5. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. M. 6. 40.
- Dasselbe. 2. Bd. 2. und 3. Heft. Ebenda. M. 7. 50.
- Ермаковъ, В. П., Аналитическая геометрія. Курсъ лекцій, чит. въ Унив. св. Владимира и въ политехн. Институтъ въ 1900 г. Часть 2-я. Геометрія трехъ измѣреній. ЖЕРМАКОВЪ, W. P., Analytische Geometrie. Vorlesungen, gehalten an der Universität und am polytechn. Institut zu Kiew im Jahr 1900. 2. Teil. Geometrie des Raumes. Kiew. 2 Rubel.
- Интегральное исчисленіе. Курсъ лекцій. Части I-я и 2-я. Integralrechnung. Vorlesungen. Tl. 1 u. 2. Kiew. 3 Rubel.
- ERNST, A., Deux années d'algèbre dans l'enseignement primaire supérieur. Paris, Collin. Fr. 2.
- FABRI, ERMANN, Il teorema dell' integrale di Cauchy: contributo alla storia critica dell' analisi. Bologna, stab. tip. Zamorani e Albertazzi.
- FAERBER, CARL, Irrationale Zahlen und Verhältnisse inkommensurabler Grössen. Programm. Berlin, Gaertner. M. 1.
- FELDBLUM, MICH., Über elementar-geometrische Konstruktionen. Dissertation. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. M. 1. 30.
- FRECH, F., Kegelschnittaufgaben in geometrischer Behandlung. Programm. Deutsch-Krone.
- FRICKE, R., Kurzgefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik mit Berücksichtigung der Anwendungen. Analytisch-funktionen-theoretischer Teil. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 14.
- GAUSS, F. G., Vierstellige logarithmische und trigonometrische Tafeln. Schulausgabe. Halle, Strien. geb. M. 1. 60.
- HAENTZSCHEL, EMIL, Über die verschiedenen Grundlegungen in der Trigonometrie. Programm. Berlin, Gaertner. M. 1.
- HAGEN, JOH. G., S. J., Synopsis der höheren Mathematik. 3. Bd. Differential- und Integralrechnung. (In 6 Lieferungen.) 1. Lieferung. Berlin, Dames. M. 5.
- HAMILTON, J. G., A first geometry book. A simple course of exercises based on experiment and discovery. London, Arnold. 1 s.
- HAUCK, GUIDO, Lehrbuch der Stereometrie. Auf Grund von Dr. Ferd. Kommerell's Lehrbuch neu bearbeitet und erweitert. 8. Aufl. (7. der Neubearbeitung). Tübingen, Laupp. geb. M. 2. 90.
- HOЧЕВАР, FRZ., Geometrische Übungsaufgaben für das Obergymnasium. 2. Heft. Trigonometrie und analytische Geometrie. 3. Aufl. Leipzig, Freytag. geb. M. —. 80.
- HÖLDER, OTTO, Anschauung und Denken in der Geometrie. Akademische Antrittsvorlesung. Mit Zusätzen, Anmerkungen und einem Register. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2. 40.
- Intermediate Science mixed mathematics. Papers, being the questions set at the University of London from 1879 to 1899. (University tutorial series.) London, Clive. 2 s. 6 d.

- JAHNKE, EUGEN, Über dreifach perspektivische Dreiecke in der Dreiecksgeometrie. Programm. Berlin, Gaertner. M. 1.
- KAMBLY und ROEDER, Stereometrie und sphärische Trigonometrie. Vollständig nach den preuss. Lehrplänen von 1892 umgearbeitete Ausgabe der Stereometrie und der sphärischen Trigonometry von KAMBLY. Lehraufgabe der Prima. Mit Übungsaufgaben und einem Anhang: Der Koordinatenbegriff und einige Grundeigenschaften der Kegelschnitte. 2. Aufl. (27. der Kambly'schen Stereometrie.) Breslau, Hirt. geb. M. 2.
- KILLING, WILH., Lehrbuch der analytischen Geometrie in homogenen Koordinaten. 1. Tl. Die ebene Geometrie. Paderborn, Schöningh. M. 4.
- LAGRANGE und CAUCHY, Zwei Abhandlungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (1772 und 1819). Herausgegeben von GERH. KOWALEWSKI. (Ostwald's Klassiker Nr. 113.) Leipzig, Engelmann. kart. M. 1.
- LANGÉ, J., Synthetische Geometrie der Kegelschnitte nebst Übungsaufgaben für die Prima höherer Lehranstalten. 2. Aufl. Berlin, Müller. geb. M. 1. 50.
- LAURENT, H., L'élimination. („Scientia“, partie physico-mathématique Nr. 7.) Paris, Carré et Naud. Fr. 2.
- LAVAGGI, Calcolo infinitesimale: lezioni dettate nell' anno 1899—1900 nella r. università di Parma, compilate per cura di Savino Buroni. Disp. 1—54, 55—79. Parma, lit. Zaffèri.
- LIÉHEAUX, G., Questions d'examen et réponses. Baccalauréat classique (1<sup>ère</sup> partie). Mathématiques. Paris, Hachette. Fr. 2. 50.
- LORENTZ, H. A., Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung und der Anfangsgründe der analytischen Geometrie. Mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Studierenden der Naturwissenschaften. Unter Mitwirkung des Verfassers übersetzt von G. C. SCHMIDT. Leipzig, Barth. M. 10, geb. M. 11.
- MC. GINNIS, M. A., The universal solution numerical and literal equations. By which the roots of equations of all degrees can be expressed in terms of their co-efficients. London, Sonnenschein. 5 s.
- MEIGEN, FRITZ, Lehrbuch der Geometrie. („Technische Lehrhefte“, Abt. C, Mathematik. 4. Heft.) 2. Aufl. Hildburghausen, Pezoldt. M. 2; geb. M. 2. 40.
- MOKEL, A., et BECOURT, L., Choix d'épures de géométrie. Paris, Hachette. Fr. 6.
- OPITZ, R. G., Die Kramp-Laplacesche Transcendente und ihre Umkehrung. Programm. Berlin, Gaertner. M. 1.
- OSTER, B., Über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit  $n$  unabhängigen Variablen. Dissertation. Berlin.
- PICARD, EMILE, Sur le développement, depuis un siècle, de quelques théories fondamentales dans l'Analyse mathématique (conférences faites à Clark-University, Etats-Unis). Paris, Colin. Fr. 1. 50.
- PRANG, C., Einführung in die Theorie und den Gebrauch der Determinanten. Berlin, Mayer & Müller. kart. M. 1. 40.
- SCHAEKKE, O., Über Kegelschnitte im Raum. Programm. Frauenfeld.
- SCHRÖDER, THDR., Auflösungen von Aufgaben aus der ebenen Geometrie. Programm. Nürnberg, Schrag. M. —. 60.
- SCHÜLKE, A., Vierstellige Logarithmen-Tafeln, nebst mathemat., physikal. und astronom. Tabellen. Für den Schulgebrauch zusammengestellt. 3. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. M. —. 60.
- SCHWERING, KARL, und KRIMPHOFF, WILH., Ebene Geometrie. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet. 3. Aufl. Freiburg i. B., Herder. M. 1. 60.
- SCHWERING, KARL, Stereometrie für höhere Lehranstalten. Nach den neuen Lehrplänen bearbeitet. 2. Aufl. Freiburg i. Br., Herder. M. —. 80.
- СШАШКО, Ф., Тригонометрия. Изд. 5-е  
SSIMASCHKO, F., Trigonometrie. 5. Aufl. St. Petersburg. 1 Rubel.

- TEEGE, H., Über die  $(p-1)/2$ -gliedrigen Gauss'schen Perioden in der Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zu anderen Teilen der höheren Arithmetik. Dissertation. Kiel.
- THIEME, H., Die Umgestaltung der Elementar-Geometrie. Programm. Posen.
- TROTHA, THILO v., Die kubische Gleichung und ihre Auflösung für reelle, imaginäre und komplexe Wurzeln. Ein Versuch. Berlin, Ernst & Sohn.  
M. 2. 50.
- VINTEJOUX, F., Eléments d'arithmétique, de géométrie et d'algèbre. Corrigé des exercices par G. MANUEL. Paris, Hachette.  
Fr. 2.
- WEBER, ED. v., Vorlesungen über das Pfaffsche Problem und die Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (Teubners Sammlung von Lehrbüchern auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen. 2. Bd.). Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 24.
- WEBER, HEINR., Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Nach Riemanns Vorlesungen in vierter Auflage neu bearbeitet. 1. Bd. Braunschweig, Vieweg & Sohn.  
M. 10.
- WIESE, B., und LICHTBLAU, W., Sammlung geometrischer Konstruktionsaufgaben zum Gebrauch an Seminarien sowie zum Selbstunterricht. 2. Aufl. Hannover, Meyer.  
M. 2, kart. M. 2. 25.

### Angewandte Mathematik.

- ANDRÉ, CH., Traité d'astronomie stellaire. Tome II: Etoiles doubles et multiples, amas stellaires. Paris. Gauthier-Villars.  
Fr. 14.
- Astronomical and physical researches made at Mr. WILSON'S Observatory, Darmona, Westmeath. London, Wesley.  
15 s.
- BALL, SIR ROBERT STAWELL, A treatise on the Theory of Screws. Cambridge, University Press.  
18 s.
- BARDELLI, A., Istruzione per l'uso del regolo a calcolo. Torino, Bardelli e Co.
- BARTL, J., Die Berechnung der Zentrifugalregulatoren. Leipzig, Felix. M. 3. 50.
- Determinazione della differenza di longitudine tra Napoli e Milano mediante osservazioni fatte nel 1888 dal prof. EMANUELE FERGOLA e dal dott. MICHELE RAJNA, calcolate e discusse dal prof. FILIPPO ANGELITTI e dal dott. MICHELE RAJNA. Firenze, Istituto geografico militare edit.
- FÖPPL, AUG., Vorlesungen über technische Mechanik. 1. Bd. Einführung in die Mechanik. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner.  
geb. M. 10.
- Dasselbe. 3. Bd. Festigkeitslehre. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 12.
- FOSCHINI, A., Equerre à calcul graphique (nouvelle invention) à l'usage des ingénieurs etc. Rome, impr. Forzani et Co.
- GEIGENMÜLLER, R., Leitfaden und Aufgabensammlung zur Mechanik. Für technische Fachschulen und den Selbstunterricht bearbeitet. 1. Teil. Elementarmechanik. 4. Aufl. Mittweida, Polytechnische Buchhandlung. geb. M. 5. 50.
- HAACK, R., Schiffswiderstand und Schiffsbetrieb. Nach Versuchen auf dem Dortmund-Ems-Kanal . . . bearbeitet. Berlin, Asher & Co.  
geb., Tafeln in zwei Mappen, M. 120.
- Handwörterbuch der Astronomie. 21. Lieferung. Breslau, Trewendt. M. 3. 60.
- HERRMANN, GUST., Die graphische Theorie der Turbinen und Kreiselpumpen. 2. Aufl. Berlin, S. Simion.  
geb. M. 8.
- HERTZER, H., Die geometrischen Grundprinzipien der Parallelprojektion. 3. Aufl. Berlin, Spaeth.  
geb. M. 2. 50.
- KECK, WILH., Vorträge über Mechanik als Grundlage für das Bau- und Maschinenwesen. I. Teil. Mechanik starrer Körper. 2. Aufl. Hannover, Helwing.  
M. 10, geb. M. 11. 50.
- KLEJBER, MAX, Katechismus der angewandten Perspektive. Nebst Erläuterungen über Schattenkonstruktion und Spiegelbilder. (Weber's illustrierte Katechismen Nr. 137.) 3. Aufl. Leipzig, Weber.  
geb. M. 3.

- KOESTER, F.**, Die Gesetze des Drachenflugs in Darstellung und Berechnung. Berlin, Mayer & Müller. M. 1. 80.
- LAUENSTEIN, R.**, Die Mechanik. Elementares Lehrbuch für techn. Mittelschulen und zum Selbstunterricht. 4. Aufl. Stuttgart, Bergsträsser. geb. M. 5.
- Die graphische Statik. Elementares Lehrbuch für technische Unterrichtsanstalten und zum Gebrauch in der Praxis. 6. Aufl. Ebenda. geb. M. 6.
- MASONI, UDALRIGO**, Corso di idraulica teoretica e pratica. Seconda ediz. notevolmente ampliata. Napoli, Pellerano. L. 14.
- Nivellements-Ergebnisse, die, der trigonometrischen Abteilung der königl. preuss. Landesaufnahme. 13. (Schluss-) Heft. Berlin, Mittler & Sohn. kart. M. 1.
- PIETSCH, C.**, Katechismus der Nivellierkunst. (Webers illustrierte Katechismen Nr. 59.) 5. Aufl. Leipzig, Weber. geb. M. 2.
- REULEAUX, F.**, Lehrbuch der Kinematik. 2. Bd. Die praktischen Beziehungen der Kinematik zur Geometrie und Mechanik. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 25.
- SAINT-PAUL, B.**, Cubatures des terrasses et mouvement des terres. Paris, Vve. Dunod. Fr. 4. 50.
- SANDERS, L. A.**, Normal I-Träger von Nr. 8 bis Nr. 55. Graphische Tabelle zur Bestimmung der Normalprofile bei 8 verschiedenen Belastungs- und Auflagerungsarten etc. Amsterdam, de Bussy. F. 3.
- SCHMIDT, R.**, Beiträge zum Gesetze der kleinen Zahlen. Dissertation. Göttingen.
- SCHRÖDER, MAX**, Schlagschattenlehre (Unterrichts-Werke Methode Hittenkofer Nr. 9). 4. Aufl. Strelitz, Hittenkofer. M. 1.
- Übungsblätter dazu M. 2. 40.
- SMOLIK'S, F.**, Elemente der darstellenden Geometrie. Ein Lehrbuch für Oberrealschulen. Neu bearbeitet von Jos. F. HELLER. 2. Aufl. Leipzig, Freitag. geb. M. 4.
- STURM, RUD.**, Elemente der darstellenden Geometrie. 2. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 5. 60.
- СУСЛОВЪ, Г. К., ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ. Т. I.**
- SSUSLOFF, G. K.**, Grundzüge der analytischen Mechanik. Bd. I. Kiew. 3 Rubel 75 K.
- TODD, MABEL LOOMIS**, Total eclipses of the sun. New and revised edition by DAVID P. TODD. London, Low. 3 s. 6 d.
- TORKA, JOH.**, Grundlage der Getriebelehre. Eine Geometrie der Bewegung. 1. Heft. Berlin, Mewes. M. 2.
- VECCHI, V.**, Geometria descrittiva: lezioni dettate nella r. università di Parma nell' anno 1899—1900, compilate per cura di Ezio Beggi. Disp. 1—34, 35—46. Parma, lit. Zafferri.
- WAGNER, ROB.**, Graphische Ermittlung der Grunderwerbsflächen, Erdmassen und Böschungflächen von Eisenbahnen und Strassen. Ein neues Verfahren für allgemeine und besonders für ausführliche Vorarbeiten. Stuttgart, Wittwer. kart. M. 4.
- WALDECK, ERNST**, Was muss man von der Mechanik und Wärmelehre wissen? Gemeinverständlich dargestellt. Der Physik I. Teil. Berlin, Steinitz. M. 1. 50.
- WERNICKE'S** Lehrbuch der Mechnik in elementarer Darstellung, mit Anwendungen und Übungen aus den Gebieten der Physik und Technik. Braunschweig, Vieweg & Sohn. 1. Mechanik fester Körper. Von ALEX. WERNICKE. 4. Aufl. 1. Abt. Einleitung. Phoronomie. Lehre vom materiellen Punkte. M. 4. 2. Flüssigkeiten und Gase. Von RICH. VATER. 3. Aufl. M. 5.
- WIEN, W.**, Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig, Hirzel. M. 8, geb. M. 9.

**Physik und Meteorologie.**

- Abhandlungen, wissenschaftliche, der kaiserl. Normal-Aichungs-Kommission. (Fortsetzung der „Metronomischen Beiträge.“) 2. Heft. PRATO, F., Die Dichte, Ausdehnung und Kapillarität von Lösungen reinen Rohrzuckers in Wasser. Unter Mitwirkung von J. DOMKE und H. HARTING untersucht und bearbeitet. Berlin, Springer. M. 7.
- BATELLI, A., e STEFANINI, A., Esposizione critica della teoria della dissociazione elettrica. Lucca, tip. Baroni. L. 6.
- BEUCKE, KARL, Über die optischen Täuschungen. Programm. Berlin, Gaertner. M. 1.
- BLASEL, C. M. J., Über die elektrischen Fundamentalgrößen und das Ohm'sche Gesetz. Programm. Leobschütz.
- CADY, W. G., Über die Energie der Kathodenstrahlen. Dissertation. Berlin.
- CARDANI, PIETRO, Fisica generale, meteorologia, elettricità: lezioni dettate nella r. università di Parma nell' anno 1899—1900, compilate per cura del dott. P. MORETTO. Disp. 1—19. Parma, lit. Zaffèri.
- Fisica matematica: lezioni dettate nell' anno scolastico 1899—1900 nella r. università di Parma e compilate per cura di Savino Buroni. Disp. 1—16, 17—30. Parma, lit. Zaffèri.
- CATCHPOOL, EDMUND, The tutorial physics. Vol. I. A textbook of sound. 3<sup>rd</sup> ed. (University tutorial series.) London, Clive. 3 s. 6 d.
- COHN, EMIL, Das elektromagnetische Feld. Vorlesungen über die Maxwell'sche Theorie. Leipzig, Hirzel. M. 14, geb. 15. 60.
- COLSON, R., Traité élémentaire d'électricité, avec les principales applications. 3<sup>e</sup> éd. entièrement refondue. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 3. 75.
- DAHLANDER, G. R., Elektriciteten. Nyaste uppfinningar och forskningar. Stockholm, Bonnier. 75 öre.
- DISB, E., Le previsioni del tempo da Virgilio ai dì nostri. La sismologia moderna. (Piccolo biblioteca di scienze moderne Nr. 25.) Torino, fratelli Bocca. L. 3.
- ESTEL, V., Zur Geschichte der Farbenlehre. Programm. Chemnitz.
- FALB'S RUD., Neuer Wetterkalender und Verzeichnis der kritischen Tage für 1900, Juli-Dezember. Berlin, Steinitz. M. 1.
- FOVEAU DE COURMELLES, L'électricité et ses applications. („Livres d'or de la science“ Nr. 19.) Paris, Schleicher frères. Fr. 1.
- GAHL, R., Studien zur Theorie der Dampfdrucke. Dissertation. Göttingen.
- GLADBACH, PHPP., Witterungsprognose des August 1900 f. die nördliche Schweiz und für Mitteleuropa. Nebst einer Beilage: Der Wolkengürtel Europas. Eine neue graphische Darstellung der „Regenmengen“ im Juli und August 1900, sowie im Dezember 1899 und 23. V. bis 23. VI. 1900 darstellend. Basel, Schwabe. M. —. 65.
- GRAETZ, L., Kurzer Abriss der Elektrizität. 2. Aufl. Stuttgart, Engelhorn. geb. M. 3.
- GRAVELIUS, Pflichten der Meteorologie in Bezug auf die Landwirtschaft. Vortrag. Dresden, Schönfeld. M. —. 40.
- GRÜNEISEN, E., Über die Bestimmung des Wärmeleitvermögens der Metalle und über das Verhältnis desselben zur elektrischen Leitfähigkeit bei Kupfer, Eisen und einer Nickel-Kupferlegierung. Dissertation. Berlin.
- HAAS, Einführung in die Elektrizitätslehre. 12 gemeinverständliche Vorträge. Leipzig, Leiner. M. 1. 50.
- HARDIN, WILLETT L., Die Verflüssigung der Gase, geschichtlich entwickelt. Übersetzt von J. TRAUBE. Stuttgart, Enke. M. 6.
- HERBERTSON, A. J., The monthly rainfall over the land surface of the globe. Dissertation. Freiburg.
- HERTZ, HEINR., Über die Beziehungen zwischen Licht und Elektrizität. Vortrag. 10. und 11. Aufl. Bonn, Strauss. M. 1.

- HOLITSCHER, PAUL, Experimentelle Untersuchungen über den remanenten Magnetismus des Eisens. Dissertation. Zürich, Zürcher & Furrer. M. 2.
- HURST, GEORGE H., Colour: A handbook of the theory of colour. London, Scott Greenwood. 7 s. 6 d.
- KÄMMERER, Die Dielektrizitätskonstanten in ihrer Bedeutung für die Theorie der Elektrizität u. in ihrer experimentellen Bestimmung. Progr. Sondershausen.
- KELLNER, H., Über einige Methoden und Apparate zur Bestimmung der optischen Konstanten des Fernrohrs. Dissertation. Jena.
- KLEIBER, JOH., Lehrbuch der Physik. Zum Gebrauch an realist. Mittelschulen bearb. Mit zahlreichen Fig. u. Übungsaufgab. München, Oldenbourg. geb. M. 4.
- KÖRNER'S Lehrbuch der Physik. Für höhere Lehranstalten bearbeitet von A. RICHTER. Wien, Deuticke. geb. M. 6.
- KRÜGER, R., Die Kondensation der permanenten Gase. Programm. Stralsund.
- LARMOR, JOSEPH, Aether and matter. A development of the dynamical relations of the aether to material systems on the basis of the atomic constitution of matter. Including a discussion of the influence of the earth's motion on optical phenomena. Cambridge, University Press. 10 s.
- MASCART, Traité de magnétisme terrestre. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 15.
- MAYRHOFFER, G., Über die Änderungen der Stromform eines normalen Wechselstromes durch Grätzsche Aluminiumzellen. Programm. Rosenheim.
- MASINI, ALB., Influenza della compressione sulla forza elettromotrice delle coppie a selenio: studio sperimentale. Bologna, tip. lit. Pongetti.
- MIDDEL, T., Deformation durch Erwärmung als Ursache für die thermische Veränderung der Empfindlichkeit von Wagen. Dissertation. Greifswald.
- MILLER, ANDR., Theoretisches über einen Influenzversuch. Progr. München, Kellerer. M. 1.
- MÖLLER, M., Witterungskalender. Eine nach Monaten geordnete Zusammenstellung der Witterung für die Beurteilung der Wetterlage der Monate Mai bis September 1900. Braunschweig, Limbach. M. —. 50.
- MÜLFARTH, P., Über Absorption von Gasen an Glaspulver. Dissertation. Bonn.
- POYNTING, J. H., and THOMSON, J. J., A textbook of physics. Sound. 2<sup>nd</sup> edition. London, Griffin. 8 s. 6 d.
- RAOULT, F. M., La tonométrie. („Scientia“, partie physico-mathématique Nr. 8.) Paris, Carré et Naud. Fr. 2.
- REICH, M., Über elektrische Leitung reiner Substanzen. Dissertation. Berlin.
- REINHARDT, W., Ausgewählte Kapitel aus der Elektrotechnik. Die elektrischen Maschinen und die elektrischen Strassenbahnen, mit einer Einleitung: Über die Grundbegriffe der Elektrizität. Programm. Frankfurt.
- ROBEL, ERNST, Die Sirenen. Ein Beitrag zur Entwicklungsgeschichte der Akustik. IV. Teil. Die Analyse der Sirenenklänge. Progr. Berlin, Gaertner. M. 1.
- ROHRBECK, E., Die Berechnung elektrischer Leitungen, insbesondere der Gleichstrom-Verteilungs-Netze. Leipzig, Leiner. M. 2. 50.
- RUSSNER, JOHS., Elementare Experimentalphysik für höhere Lehranstalten 1. Teil. Mechanik fester Körper. Hannover, Jänecke. geb. M. 3. 60.
- STREHL, KARL, Theorie d. allgem. mikrosk. Abbildung. Erlangen, Blaesing. M. —. 60.
- THOMSON, J. J., Die Entladung der Elektrizität durch Gase. Aus dem Englischen von PAUL EWERS. Ergänzt und mit einem Vorwort versehen von H. EBERT. Leipzig, Barth. M. 4. 50, geb. M. 5. 50.
- VILLARI, EM., Lezioni di fisica sperimentale. Parte I (Magnetismo ed elettricità). Napoli, soc. coop. Tipografica.
- WALDECK, ERNST, Was muss man von der Akustik und Optik wissen? Allgemeinverständlich dargestellt. Der Physik. II. Teil. Berlin, Steinitz. M. 1. 50.

# Mathematisches Abhandlungsregister.

1899.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

## A.

### Analytische Geometrie der Ebene.

1. Sur quelques droites dépendant les unes des autres. Buysens, Degueuldre, Droz-Farny, Merlin, Rose. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 166.
2. Théorème relatif à un carré. A. Droz-Farny. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 70.
3. Lieu du centre du cercle circonscrit à un triangle variable, mais de périmètre constant ou de surface constante. Déprez, Emmerich, E. N. Barisien. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 167.
4. Lieu des centres de similitude de deux cercles circonscrits à des triangles variables. Déprez. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 27.
5. Propriété éde la lemniscate. G. Gérard, Déprez, Emmerich, Rose. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 209.
6. Über Pseudotrochoiden. E. Wölffing. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 139.
7. Sur la spirale logarithmique. G. Pirondini. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 153.  
Vergl. Dreiecksgeometrie. Kegelschnitte.

### Analytische Geometrie des Raumes.

8. Kürzeste und geradeste Linien im Möbius'schen Nullsystem. H. Liebmann. *Mathem. Annal.* LII, 120.
9. Über kürzeste Integralkurven einer Pfaff'schen Gleichung. R. v. Lilienthal. *Mathem. Annal.* LII, 417.  
Vergl. Oberflächen. Oberflächen zweiten Grades.

### Ausdehnungslehre.

10. Beweis einiger Determinantensätze mittels der Grassmannschen Ausdehnungslehre. Emil Müller. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 28.

## B.

### Bestimmte Integrale.

11. Über das Dirichlet'sche Integral. T. Brodén. *Mathem. Annal.* LII, 177.
12. Über bilineare Relationen zwischen hypergeometrischen Integralen höherer Ordnung. Arth. Hirsch. *Mathem. Annal.* LII, 130.
13. Sur la détermination de certaines intégrales. E. N. Barisien. Sér. 2, IX, 161.  
Vergl. Quadratur.

## C.

### Combinatorik.

14. Relation entre des nombres de combinaisons. Emmerich. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 173.
15. Encore une relation entre des nombres de combinaisons. Emmerich. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 237.

**Complanation.**

16. Sur les figures cylindriques. C. E. Wasteels. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 9.  
Vergl. Maxima und Minima 136. Oberflächen 145.

**Cylinderfunktionen.**

17. Sur le produit de deux fonctions cylindriques. N. Nielsen. *Mathem. Annal.* LII, 228.  
18. Sur le développement du zéro en séries de fonctions cylindriques. N. Nielsen. *Mathem. Annal.* LIII, 582.

**D.****Determinanten.**

19. Eine Determinantenformel. E. Schulze. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 167.  
Vergl. Ausdehnungslehre.

**Differentialgleichungen.**

20. Über eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter. J. Horn. *Mathem. Annal.* LII, 271.  
21. Über lineare Differentialgleichungen mit einem veränderlichen Parameter. J. Horn. *Mathem. Annal.* LII, 340.  
22. Beitrag zur graphischen Integration der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung. E. Czuber. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 41.  
Vergl. Funktionalgleichung. Mechanik 137.

**Differentialquotient.**

23. Stetigkeit und Differentialquotient. E. Steinitz. *Mathem. Annal.* LII, 58.

**Dreiecksgeometrie.**

24. Formules relatives au triangle. Delahaye. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 66.  
25. Sur deux transversales rectangulaires menées par l'orthocentre d'un triangle. J. Neuberg. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 162.  
26. Sur la droite d'Euler. A. Droz-Farny, R. Buysens, Déprez, G. Gérard. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 75.  
27. Sur les droites de Simson des sommets d'un carré inscrit dans une circonférence par rapport à un triangle inscrit dans la même circonférence. Colart. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 204.  
28. Sur le triangle formé par les droites passant par les côtés d'un triangle donné dans des points fixés des trois sommets au moyen d'arcs de cercle de même rayon. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 42. [Vergl. Bd. XLIV Nr. 36.]  
29. Longueurs des côtés d'un triangle calculées à l'aide des longueurs des tangentes au cercle inscrit parallèles au côtés. Degueldre, Sintzoff, Van Dorsten, Soons, Emmerich, Barisien, Delahaye. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 150.  
30. Propriété d'un triangle et du cercle circonscrit. R. Buysens, Droz-Farny. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 28.  
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 2.

**E.****Elastizität.**

31. The elastic curve under uniform normal pressure. A. G. Greenhill. *Mathem. Annal.* LII, 465.

**Ellipse.**

32. Triangles inscrits dans une ellipse et circonscrits à un cercle concentrique. E. N. Barisien. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 224, 248, 269.  
33. Paradoxe concernant l'enveloppe des ellipses homofocales. E. N. Barisien. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 91.  
34. Lieu du point d'intersection de deux tangentes d'une ellipse. J. Déprez. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 18.

35. Ellipse lieu du centré des symédianes d'un triangle variable. G. Gérard. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 99.
36. Soient  $M, N$  les points de contact des tangentes d'un point  $P$  à une ellipse donnée. Trouver le lieu du point  $P$  tel que la droite d'Euler du triangle  $PMN$  soit parallèle à un axe de symétrie de l'ellipse. V. Cristesco, Barisien. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 145.
37. Sur une courbe du septième degré dérivant de l'ellipse. Buysens, Barisien, Déprez. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 146.
38. Propriétés du triangle dont un côté est une corde d'une ellipse et le sommet opposé le point de l'ellipse d'où une perpendiculaire au grand axe rencontre l'intersection de cet axe avec la corde nommée. R. Buysens. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 233.
39. Propriété du triangle dont les sommets sont les deux foyers et un point d'une ellipse. J. Déprez. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 235.
40. Relations entre deux ellipses. Droz-Farny. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 255.
41. Propriété de la corde d'une ellipse menée d'un point de la courbe perpendiculairement à son rayon vecteurs partant du centre. Cristesco, Droz-Farny. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 258.

**F.****Formen.**

42. Über die Charakteristik einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante. A. Loewy. *Mathem. Annal.* LII, 588. [Vergl. Bd. XLIV Nr. 296.]  
Vergl. Invariantentheorie 111.

**Funktionalgleichung.**

43. On a functional equation treated by Abel. P. Hayashi. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 346.

**Funktionen.**

44. Continuité au sens analytique et continuité au sens vulgaire. P. Mansion. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 129.
45. Über eine Veranschaulichung von Funktionen einer komplexen Variablen. Loth. Heffter. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 235.
46. Zur Transformation der Querschnitte Riemannscher Flächen. J. Wellstein. *Mathem. Annal.* LII, 433.
47. Zur Theorie der Funktionenklasse  $s^3 = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$ . J. Wellstein. *Mathem. Annal.* 440.
48. A proof of Noether's fundamental theorem. Charl. A. Scott. *Mathem. Annal.* LII, 593.
49. Zur Theorie der Bernoullischen Zahlen. K. Schwing. *Mathem. Annal.* LIII, 171.
50. Erweiterung des Faktoriellensatzes. L. Saalschütz. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 340.
51. Formeln zur Transformation der Kugelfunktionen bei linearer Änderung des Koordinatensystems. Ad. Schmidt. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 327.
52. Über analytische Funktionen mehrerer Veränderlichen. Osgood. *Mathem. Annal.* LII, 462.  
Vergl. Bestimmte Integrale. Combinatorik. Cylinderfunktionen. Determinanten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Gleichungen. Interpolation. Invariantentheorie. Reihen. Substitutionen. Thetafunktionen.

**G.****Geodäsie.**

53. Zum Vorwärtseinschneiden mit drei Richtungen. E. Hammer. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 228.

**Geometrie (höhere).**

54. Sur une transformation géométrique. H. Brocard. *Mathesis*, Sér. 2, IX, Supplément. — Petit Bois ebenda.

55. Sur la transformation pseudonewtonienne. V. Retali. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 246.
56. Sur les transformations quadratiques involutives. L. Ripert. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 185, 217.
57. Sur une corrélation plane. V. Retali. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 78.
58. Über perspektive Affinität zweier Räume. A. Beck. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 85.
59. Über die kubischen Raumkurven, welche die Tangentenfläche einer gegebenen kubischen Raumkurve in 4, 5 oder 6 Punkten berühren. Gust. Kohn. *Mathem. Annal.* LII, 293.
60. Sur une cubique circulaire. V. Retali. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 87.
61. Propriété d'une cubique. V. Retali. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 148.
62. Construire une courbe rationnelle du troisième degré, étant donnés trois points collinéaires avec leurs tangentes et le point double. V. Retali. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 168.
63. Un nuovo teorema sopra le quartiche piane generali. G. Scorza. *Mathem. Annal.* LII, 457.
64. Sur une quartique. V. Jerabek. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 15. — J. Neuberg ebenda 17.
65. Über doppelt zentrische Vierecke. Chr. Beyel. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 237.
66. Sur la trisectrice de Maclaurin. V. Jerabek. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 61.
67. Courbes polaires réciproques des épicycloïdes et hypocycloïdes. V. Jerabek. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 112.
68. Applications de l'inversion. L. Orlando. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 112.
69. Sur deux courbes dont une est engendrée au moyen de l'autre. Merlin, J. Neuberg. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 275.
70. Problèmes de construction. Stuyvaert. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 33.  
Vergl. *Analytische Geometrie der Ebene* 1. *Dreiecksgeometrie*. *Funktionen* 48. *Geschichte der Mathematik* 87. *Kegelschnitte*. *Winkelteilung*.

#### Geschichte der Mathematik.

71. La marche successive dans la fusion des notions de la fraction et du quotient. V. V. Bobynin. *Biblioth. math.* 1899, 81.
72. Heron's Ausziehung der irrationalen Kubikwurzeln. G. Wertheim. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, hist. litt. Abtlg. 1.
73. Sur l'histoire de l'arithmétique arabe. Carra de Vaux. *Biblioth. math.* 1899, 33.
74. Notizen über arabische Mathematiker und Astronomen. H. Suter. *Biblioth. math.* 1899, 86, 118.
75. Die Kreisquadratur des Ibn el-Haitam. H. Suter. *Zeitschr. Mathem. Phys.* XLIV, Hist. litt. Abtlg. 33.
76. Beitrag zur Geschichte der konstruktiven Auflösung sphärischer Dreiecke durch stereographische Projektion. S. Haller. *Biblioth. math.* 1899, 71.
77. Über Ysak Sohn des Salomo. G. Eneström. *Biblioth. math.* 1899, 94. — M. Steinschneider ebenda 119.
78. Die Mathematik bei den Juden. M. Steinschneider. *Biblioth. math.* 1899, 1, 37, 97. [Vergl. Bd. XLIV, Nr. 69.]
79. Remarque sur l'époque où le mot *plus* a été introduit comme terme d'addition. G. Eneström. *Biblioth. math.* 1899, 105.
80. Über den Ursprung der Bezeichnung der Unbekannten durch den Buchstaben  $x$ . G. Wertheim. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, Hist. litt. Abtlg. 48.
81. Ein wiedergefundener Diophantuskodex. E. Gollob. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, Hist. litt. Abtlg. 137.
82. Ein von Fermat herrührender Beweis. G. Wertheim. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, Hist. litt. Abtlg. 4.
83. Über das Wort *hodie* in Leibnizens Brief vom 21. Juni 1677. G. Eneström. *Biblioth. math.* 1899, 63. — M. Cantor. Ebenda 95.
84. Sur la découverte de l'équation générale des lignes géodésiques. G. Eneström. *Biblioth. math.* 1899, 19.
85. Berkeley's Analyst and its critics. G. A. Gibson. *Biblioth. math.* 1899, 65.

86. Remarque sur l'origine de la formule  $i \log i = -\frac{\pi}{2}$ . G. Eneström. *Biblioth. math.* 1899, 46.
87. Un trattato sulle curve piane algebriche pubblicato senza nome d'autore. G. Loria. *Biblioth. math.* 1899, 10.
88. Bemerkungen zu Lambert's Theorie der Parallelinie. P. Stäckel. *Biblioth. math.* 1899, 107.
89. Zur Bibliographie der Parallelentheorie. P. Stäckel. *Biblioth. math.* 1899, 47.
90. Die Entdeckung der einseitigen Flächen. P. Stäckel. *Mathem. Annal.* LII, 598.
91. Pour la bibliographie de la théorie des opérations distributives. S. Pincherle. *Biblioth. math.* 1899, 13.
92. Die Tschebyscheff'schen Arbeiten in der Theorie der Gelenkmechanismen. N. Delaunay. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, Hist. litt. Abtlg. 101.
93. Nécrologue de Félix Dauge (24 V. 1829 — 23. VII 1899). P. Mansion et J. Neuberg. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 177.
94. Die Mathematikerversammlung im Jahre 1900. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, Hist.-litt. Abtlg. 111.

#### Gleichungen.

95. Symmetrische Funktionen. P. Gordan. *Mathem. Annal.* LII, 501.
96. Divisibilité d'un polynôme par un autre. Van Dorsten, Emmerich. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 169.
97. Über die verschiedenen Wurzeln einer algebraischen Gleichung und deren Ordnungen. L. Baur. *Mathem. Annal.* LII, 113.
98. Beitrag zur Auflösung der Gleichung vierten Grades. H. Heilermann. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 234.
99. Racines d'une équation du quatrième degré. Seligmann. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 97.
100. Discussion d'un système de trois équations quadratiques. Sintsof. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 120.
101. Elimination de deux inconnues entre trois équations quadratiques. Rose. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 212.
102. Elimination de trois inconnues entre trois équations quadratiques. Goldenberg, Déprez. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 261.
103. Résoudre un système de trois équations quadratiques à trois inconnues. Emmerich. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 230.

#### Graphisches Rechnen.

104. Beispiele graphischer Tafeln mit Bemerkungen über die Methode der flucht-rechten Punkte. R. Mehmke. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 56.  
Vergl. Differentialgleichungen 22.

#### H.

##### Hyperbel.

105. Sur l'hyperbole équilatère. E. N. Barisien. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 163.
106. Théorème sur l'hyperbole. G. Gérard. *Mathesis*, Sér. IX, 64.
107. Quand deux paraboles sont inscrits dans un triangle, par les six points de contact on peut faire passer une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes des deux paraboles. V. Retali, Gob, Déprez, Mandart, Buysens. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 118.
108. Enveloppe de certaines hyperboles. G. Gérard, Retali. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 210.

#### I.

##### Interpolation.

109. Die Interpolation. W. Veltmann. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 303.

##### Invariantentheorie.

110. Zur Funktionen- und Invariantentheorie der binomischen Gebilde. J. Wellstein. *Mathem. Annal.* LII, 70.

111. Über eine Invariante der trilinearen ternären Form. M. Pasch. *Mathem. Annal.* LII, 127.

#### Kegelschnitte.

112. Sur les coniques homothétiques passant par deux points fixes. J. Déprez. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 113.
113. Sur le point de Frégier. G. Gérard. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 136.
114. Théorèmes relatifs au point de Frégier. G. Gérard. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 143.
115. Sur deux faisceaux de coniques. Degueudre. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 190.
116. Remarques sur le triangle. L. Ripert. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 63.
117. Conique enveloppée par le cercle des neuf points d'un triangle variable à sommet fixe. Déprez, Ripert. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 205.
118. Enveloppe de certaines coniques. G. Gérard. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 277.
119. Lieu des centres des coniques passant par trois points donnés et ayant leurs axes parallèles à deux directions rectangulaires données. Boutin, Barisien, Déprez, Colart, Mandart, Droz. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 46.
120. Relations entre deux coniques. Déprez. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 259.
121. Trois coniques et un cercle circonscrits à un même triangle. A. Droz-Farny. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 142.
122. Sur une conique engendrée au moyen d'une autre. E. N. Barisien, Déprez, Retali. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 207.
123. Propriétés d'une ellipse et de deux circonférences dont une passe par un foyer de l'ellipse ayant son centre sur l'ellipse même. R. Buysens. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 253.
124. Lieu du pied de la normale menée du point  $O$  à une conique qui touche les côtés de l'angle  $MON$  aux points donnés  $M$  et  $N$ . E. N. Barisien. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 172.
125. Tangente commune à une ellipse et à une circonférence tangente à cette ellipse. J. Déprez. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 250.  
Vergl. Ellipse. Hyperbel. Kreis. Parabel.

#### Kinematik.

126. Über neue kinematische Modelle sowie eine neue Einführung in die Theorie der cyklischen Kurven. Friedrich Schilling. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 214.
127. Einfaches Beispiel eines Punktsystems, das bei seiner Bewegung einer nicht holonomen Bedingung unterworfen ist. H. Liebmann. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 355.
128. Sur les tangentes des trajectoires de deux points mobiles. Meurice. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 201.
129. Enveloppe d'une droite. J. Neuberg. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 205.
130. Zur Bestimmung der Axe der Schraubung, durch die ein starrer Körper aus einer gegebenen Lage in eine zweite gebracht werden kann. R. Mehmke. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 176.  
Vergl. Geschichte der Mathematik 92.

#### Kreis.

131. Circonférence décrite par le centre isogone d'un triangle variable. Emmerich. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 232.
132. Centre de similitude des cercles circonscrits à deux triangles. Soons, Déprez. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 50. — Ripert *ibid.* 51.
133. Sur le cercle tangent à trois cercles donnés. L. Orlando. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 160.  
Vergl. Dreiecksgeometrie.

#### M.

#### Maxima und Minima.

134. Généralisation d'un problème de minimum classique. G. Loria. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 131.

135. Sur le maximum de certaines expressions formées par les projections d'une longueur donnée sur les côtés d'un triangle. E. Cesàro. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 238.
136. Rechercher le maximum de la surface totale d'un cône inscrit dans une sphère de rayon  $R$ . Ploumen. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 227.  
Vergl. Oberfläche 145.

**Mechanik.**

137. Über einige bei Schwingungsproblemen auftretende Differentialgleichungen. M. Abraham. *Mathem. Annal.* LII, 81.
138. Dynamik der Kurbelgetriebe. Hans Lorenz. *Zeitschr. Math.* XLIV, 1, 65, 177.
139. Die Bestimmung der Geschwindigkeit nach den Methoden der Photogrammetrie. K. Henn. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 18.  
Vergl. Elastizität. Geschichte der Mathematik 92. Kinematik. Maxima und Minima 135. Optik. Pendel. Schwerpunkt.

**O.****Oberflächen.**

140. Elementares über die Dupin'sche Cykliden und die Grundlagen der Krümmungstheorie. G. Holzmüller. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 194.
141. Sopra le superficie algebriche che contengono un fascio di curve razionali. Fed. Enriques. *Mathem. Annal.* LIII, 449.
142. On a class of surfaces whose asymptotic lines can be found by simple integrations. P. Hayashi. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 349.
143. Démonstration géométrique d'une propriété des lignes asymptotiques d'une surface réglée. A. Demoulin. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 159.
144. Über die Wellenfläche. O. Böklen. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 289.
145. Über die Konstantenbestimmung bei einer cyklischen Minimalfläche. G. Juga. *Mathem. Annal.* LIII, 167.  
Vergl. Complanation. Geschichte der Mathematik 84, 90.

**Oberflächen zweiten Grades.**

146. Die Deformation einer gradlinigen Fläche zweiten Grades ohne Änderung der Längen ihrer Geraden. Friedr. Schur. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 62.
147. Über eine Eigenschaft der Flächen zweiten Grades. D. Sintzow. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 351.
148. Sur la sphère de douze points. Ripert. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 90. [Vergl. Bd. XLIV Nr. 138.]
149. Sur un tétraèdre conjugué à une quadrique donnée. Stuyvaert. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 121.

**Optik.**

150. Einführung in die geometrische Optik. F. Meisel. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 298.

**P.****Parabel.**

151. Lieux des projections du foyer d'une parabole sur ses normales et sur les normales à la développée. Déprez. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 25. — Mandart, Stuyvaert, Droz-Farny ebenda 26.
152. Le foyer et une normale d'une parabole étant donnés le sommet décrit une cissoïde, le sommet et une normale étant donnés le foyer décrit une cissoïdale d'ellipse. Neuberg, G. Gérard, Droz-Farny, Barisien, Audibert. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 71.
153. Sur un lieu se rapportant à une parabole. Ripert. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 53.
154. Lieux géométriques se rapportant à des paraboles. Droz-Farny, Buysens, Stuyvaert, Déprez, Hacken. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 44.

**Pendel.**

155. Über die Verwendung zweier Pendel auf gemeinsamer Unterlage zur Bestimmung der Mitschwingung. R. Schumann. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 102.

**Planimetrie.**

156. Démonstration nouvelle du théorème que l'angle extérieur d'un triangle est plus grand que chacun des angles intérieurs opposés. Volkof. Mathesis, Sér. 2, IX, 162.
157. Démonstration générale de second théorème de Legendre. De Tilly. Mathesis, Sér. 2, IX, 5.
158. Sur la somme des angles dans un triangle. De Tilly. Mathesis, Sér. 2, IX, 265.
159. Inscription du pentagone régulier. M. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, IX, 200.
160. Construction du polygone de dix-sept côtés. G. Fontené. Mathesis, Sér. 2, IX, 179.
161. Théorème sur deux sécantes rectangulaires menées par un point d'intersection de deux cercles donnés. G. Gérard. Mathesis, Sér. 2, IX, 29.
162. Calculer en fonction des côtés le rapport des segments déterminés sur un côté d'un pseudocarré par la perpendiculaire abaissée du milieu du côté opposé. Francq, Tiete. Mathesis, Sér. 2, IX, 27.
- Vergl. Geschichte der Mathematik 88, 89.

**Q.****Quadratur.**

163. Aire de quelques figures à périmètre curviligne. C. Vandeveldé. Mathesis, Sér. 2, XI, 100.
164. Aire de la podaire de la Kreuzcurve. V. Cristesco. Mathesis, Sér. 2, IX, 47. — Krahé. *ibid.* 48. — Colart *ibid.* 49.
165. Aire de la courbe enveloppée par la polaire du centre d'une ellipse par rapport à un cercle variable. R. Buysens. Mathesis, Sér. 2, IX, 77.
166. Rapport des aires des courbes enveloppes de deux droites variables dans une ellipse. R. Buysens. Mathesis, Sér. 2, IX, 101.

**R.****Reihen.**

167. Sur la théorie des séries. J. Franel. Mathem. Annal. LII, 529.
168. Sur le produit des  $n$  premiers nombres. H. Mandart. Mathesis, Sér. 2, IX, 221.
169. Über hypergeometrische Funktionen, deren letztes Element speziell ist. W. Heymann. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 280.
170. Sur la formule du binôme. Godefroid. Mathesis, Sér. 2, IX, 39.
171. Application du binôme de Newton. M. Stuyvaert. Mathesis, Sér. 2, IX, 199.

**S.****Schwerpunkt.**

172. Neue Konstruktion für den Umfangs-Schwerpunkt eines Dreiecks. L. Geusen. Zeitschr. Math. Phys. XLIV, 339.
173. Centre de gravité d'un certain triangle. Retali, Orlando, Emmerich, Neuberg. Mathesis, Sér. 2, IX, 211.

**Sphärik.**

174. Constructions sphériques à la règle et au compas. E. Barbarin. Mathesis, Sér. 2, IX, 57, 81.
175. Sur les triangles sphériques. J. Neuberg. Mathesis, Sér. 2, IX, 163.
176. Propriété d'un triangle sphérique dont les côtés sont inférieurs à un quadrant. Emmerich, P. Mansion. Mathesis, Sér. 2, IX, 273.

177. Longueur de la bisectrice d'un angle d'un triangle sphérique. Emmerich. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 52. — Déprez *ibid.*, 113.  
Vergl. Geschichte der Mathematik 76. Oberflächen zweiten Grades 148.

**Stereometrie.**

178. Sur le parallélepède. Stuyvaert. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 64. [Vergl. Bd. XLIV Nr. 165.]  
179. Théorème sur des volumes dérivant d'un tétraèdre quelconque donné. Emmerich, Buysens, Déprez, Merlin, Droz-Farny. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 165.

**Substitutionen.**

180. Die algebraische Lösung des Problems der Substitutionsgruppen. P. Hoyer. *Mathem. Annal.* LII, 550.  
181. Über die Darstellung der symmetrischen und alternierenden Vertauschungsgruppen als Kollineationsgruppen von möglichst geringer Dimensionenzahl. A. Wiman. *Mathem. Annal.* LII, 243.  
182. Beweis des Satzes, dass diejenigen endlichen linearen Substitutionsgruppen, in welchen einige durchgehends verschwindende Koeffizienten auftreten, intransitiv sind. H. Maschke. *Mathem. Annal.* LII, 363.  
183. The structure of the linear homogeneous groups defined by the invariant  $\lambda_1 \xi_1^r + \lambda_2 \xi_2^r + \dots + \lambda_m \xi_m^r$ . Dickson. *Mathem. Annal.* LII, 561.  
184. Note on the simple group of order 504. W. Burnside. *Mathem. Annal.* LII, 174.  
185. Über eine einfache Gruppe von 504 Operationen. Rob. Fricke. *Mathem. Annal.* LII, 321.

**Thetafunktionen.**

186. Über allgemeine Thetaformeln. A. Krazer. *Mathem. Annal.* LII, 369.

**T.****Trigonometrie.**

187. Sur certaines identités. M. Stuyvaert. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 198.  
188. Transformation d'une expression trigonométrique. J. Neuberg. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 260.  
189. Propriété des angles qu'une médiane d'un triangle fait avec les côtés adjacents. Plakhowo, Déprez, Barisien, G. Gérard, Emmerich, Soons. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 125.  
190. Discussion d'un système de trois équations trigonométriques. J. Neuberg. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 95.  
191. Si  $\tan \alpha$ ,  $\tan \beta$ ,  $\tan \gamma$  sont les racines de l'équation

$$A_0 x^3 + 3 A_1 x^2 + 3 A_2 x + A_3 = 0,$$

chercher l'équation ayant pour racines

$$\tan(\alpha + \beta), \quad \tan(\beta + \gamma), \quad \tan(\gamma + \alpha).$$

A. Droz-Farny. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 23. — Fairon etc. ebenda 24.  
Vergl. Sphärik. Winkelteilung.

**W.****Winkelteilung.**

192. Über Winkelteilung mittels Araneiden. W. Heymann. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 263.

**Z.****Zahlenrechnen.**

193. Une règle à calcul. Lambert. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 91.  
194. Sur les tables des chiffres constants de Mr. Calza, destinées à faciliter les multiplications et les divisions. G. C. Baravelli. *Zeitschr. Math. Phys.* XLIV, 50.

195. Calcul approché d'une racine carrée. G. Frattini. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 89.  
Vergl. Geschichte der Mathematik 72. Graphisches Rechnen.

**Zahlentheorie.**

196. Zur Theorie der Moduln. E. Steinitz. *Mathem. Annal.* LII, 1.  
197. Méthode pour la décomposition des grands nombres en facteurs premiers.  
E. Barbette. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 241.  
198. Fractions décimales périodiques obtenues sans division. Moreau. *Mathesis*,  
Sér. 2, IX, 266.  
199. Répartition de  $4p^2+1$  en 3 carrés, lorsque  $p > 3$  est nombre premier, et  
de  $p^2+1$  en 3 et 4 carrés, lorsque  $p > 5$  est nombre premiers. G. de  
Rocquigny. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 164.  
200. Questions d'arithmologie. G. de Rocquigny. *Mathesis*, Sér. 2, IX, 36.
-

# Historisch-litterarische Abteilung.

## Die Lehren des Claudius Ptolemaeus von den Bewegungen der Planeten.

Von

ALWIN HAEBLER. †

Die gesamte Überlieferung des klassischen Altertums, die sich auf die Erscheinungen am Himmel bezieht, zerfällt in drei Gruppen, je nachdem sie mathematischer, physischer oder mythographischer Natur ist. Von diesen drei Gruppen bedürfen die beiden ersten zu ihrem Verständnis keiner weiteren Auseinandersetzung; es handelt sich hier einerseits um die Grösse und die Gestalt der Gestirne, ihre Bewegungen, ihre Umlaufzeiten, ihre gegenseitigen Entfernungen und was sonst noch zum weiten Gebiete der rechnenden Astronomie gehört, andererseits um den Stoff, woraus die Gestirne bestehen, und um die physikalische Erklärung aller am Himmel selbst oder in der Atmosphäre beobachteten Erscheinungen — die Meteorologie bildet hier eine Unterabteilung der physischen Astronomie —, während die besondere Bedeutung des mythographischen Teiles der astronomischen Litteratur allerdings nicht sofort schon aus dem Namen klar zu erkennen ist.

Ein Himmelsatlas, wo die einzelnen Sterne zu anschaulichen, dem Namen des Sternbildes entsprechenden Figuren verbunden sind, stellt sozusagen ein Bilderbuch zu einem beträchtlichen Teil der antiken Sage dar; viele der bekanntesten Erscheinungen der griechischen Mythologie treten uns da in figürlicher Darstellung entgegen, und man bedenkt dabei nicht immer, welch bedeutsames Stück uralter Überlieferung hier selbst der modernsten Bearbeitung zu Grunde liegt. Dabei ist beachtenswert, dass die Helden des trojanischen Krieges unter den Sternbildern gar nicht vertreten sind, während der Argonautenzug nicht unberücksichtigt geblieben ist, und da andererseits auch schon bei Homer einige von den bekanntesten Sternbildern erwähnt werden (*Πηλιάδες, Τάδες, Ὠρίων, Βοώτης, Ἄρκτος*), so hat man vielleicht nicht mit Unrecht geschlossen, dass die Griechen die Mehrzahl ihrer Sternbilder schon im 13. Jahrh. v. Chr. besessen haben, jedenfalls muss um die Zeit vom Astronomen Eudoxus (c. 409—356) der ganze in Griechenland sichtbare Sternenhimmel mit mythologischen Bildern bedeckt gewesen sein (Wolf, Handbuch der Astronomie I, S. 408).

Wir können nicht mit einiger Sicherheit mutmassen, welche besonderen Umstände das Griechenvolk veranlasst haben mögen, die Sterngruppen am Himmel in Beziehung zu setzen zu seiner nationalen Sage\*, ja es mehren sich sogar neuerdings die Anzeichen dafür, dass die griechischen Sternbilder wenigstens des Tierkreises auf orientalischen Einfluss zurückgehen könnten.\*\* Doch dem sei wie ihm wolle, jedenfalls ist jenes Verfahren von weitreichender Bedeutung gewesen, denn das Interesse für die Erscheinungen am Himmel wurde durch eine solche Verbindung der Sage mit den Sternbildern in weite Volkskreise getragen und der Dichter, der Dolmetscher der nationalen Empfindung, hatte nicht zu fürchten, er werde von seinem Volke nicht verstanden werden, wenn er einmal in sein Lied irgend welche Beziehung auf den Sternenhimmel einflocht. So ist es denn auch nicht zu verwundern, dass sich das allgemeinere Interesse für den sagenumwobenen Sternenhimmel schon seit der frühesten Zeit bis in das späte Altertum bei den griechischen und römischen Dichtern in mannigfaltiger Bezugnahme auf die Sternbilder offenbart; dabei wird man allerdings wohl auch festzuhalten haben, dass in der späteren Zeit wenigstens dieses gelehrte astronomische Beiwerk lediglich durch die Rücksicht auf die konventionelle Übung in der Dichtkunst veranlasst war, aber nicht durch ein besonders hohes Maß astronomischen Verständnisses, das etwa der Dichter bei seinem Publikum vorausgesetzt hat. Dass wir mit vollem Recht in solchem gelehrten Flitterwerk besonders der späteren Römerzeit nur ein unentbehrliches Requisite aus der eben nicht besonders reich ausgestatteten Vorratskammer der römischen Dichtung erblicken, die unter dem Einfluss des Alexandrinismus ebenfalls im Flittergold eines gelehrten Aufputzes der harmlos-unbefangenen Laienwelt gern imponieren wollte, das beweisen zur Genüge die zahlreichen, ganz ungläublichen Versehen, die z. B. für die Sternauf- und -untergänge bei Ovid von berufenster Seite nachgewiesen worden sind.\*\*\*

Aber auch noch in einer andern Hinsicht ist die bei den antiken Dichtern beliebte Bezugnahme auf die Sternbilder des Himmels von Bedeutung gewesen. In einer Zeit, wo man vor allem darauf bedacht war, das Verständnis der nationalen Dichter durch gelehrte Kommentare zu fördern, musste ganz von selbst das Bedürfnis entstehen, auch die mythologischen Beziehungen der Sternbilder weiteren Kreisen darzulegen, und dies führte zur Ausbildung einer besonderen mythographischen Litteratur, der Katasterismen. Kein Geringerer als Eratosthenes ist es gewesen, der hier mit seinem vorbildlichen Beispiel voranging, und wir haben heute noch einen wertvollen Auszug

\* Nichts anzufangen ist mit der Notiz bei Plin. Hist. nat. II, 31.

\*\* Epping, *Astronomisches aus Babylon*, 1889; Jensen, *Die Kosmol. der Babyl.*, 1890.

\*\*\* Ideler „Über den astronomischen Teil der *Fasti* des Ovid“ (*Abhandlungen der Berl. Akad.* 1822/23 [1825], S. 137 — 169).

aus seinem *Καταστερισμοί* betitelten Werke. Eine mustergiltige, alles einschlägige Material behandelnde Ausgabe verdanken wir Carl Robert (Eratosthenis Catasterismorum reliquiae, Berlin 1878).\*

Wenn wir oben die astronomische Litteratur des Altertums in drei Hauptgruppen schieden, so ist es andererseits nur naturgemäss, dass nicht immer eine scharfe Scheidung der Grenzen eingehalten werden konnte, sondern gelegentlich auch eine Verschmelzung der verschiedenen Arbeitsgebiete eintrat. Wir beobachten das bereits an dem bedeutendsten astronomischen Gedichte des Altertums, an den *Φαινόμενα* des Arat, die im wesentlichen auf den Arbeiten des Eudoxus von Knidos beruhen müssen. Wenn auch hier das meiste sich auf die Sternbilder bezieht, so berührt sich das Gedicht in seinen mannigfaltigen Bemerkungen über die verschiedenen Himmelskreise doch auch ganz eng mit dem, was oben als mathematische Astronomie bezeichnet worden ist. Zum Glück besitzen wir auch hier eine abschliessende Ausgabe von Ernst Maass (Berlin 1893), die vorbereitet worden ist durch sein grundlegendes Werk *Aratea* (Berlin 1892).

Einen hervorragenden Anteil an der weiteren Ausgestaltung der astronomischen Lehren hat im Altertume auch die Philosophie gehabt, von der ja die Physik einen der wichtigsten Teile auch dann noch immer bildete, als durch Sokrates und seine Schule erkenntnistheoretische und ethische Fragen mehr in den Vordergrund gerückt worden waren. Insbesondere können Plato und Aristoteles bei einer geschichtlichen Betrachtung der Astronomie nicht unberücksichtigt bleiben, zumal da die wichtigen Fortschritte, die sich an den Namen des Eudoxus von Knidos knüpfen, auf eine unmittelbare Anregung seines Lehrers Plato zurückgeführt werden.\*\* Nicht minder bedeutsam haben die Pythagoreer auf die Entwicklung der Astronomie eingewirkt durch die Ausbildung des *σφαιρικὸς λόγος* und durch die Lehre von der Kugelgestalt der Erde. Leider ist uns nur von ihrer jedenfalls hochwichtigen Litteratur herzlich wenig erhalten, und so sind wir für die Beurteilung der Förderung, die die Astronomie der griechischen Philosophie verdankte, immer wieder auf die erhaltenen Schriften von Plato und Aristoteles angewiesen. Gewiss verdient jener einen hervorragenden Platz auch in der Geschichte der Mathematik, nur sind seine Lehren von den Bewegungen der Gestirne gerade an den entscheidenden Stellen vielfach in die dunkle Mystik seiner dichterischen Darstellung gehüllt, so dass man zu keiner ganz klaren, unbestrittenen Vorstellung von seinen Ideen gelangen kann. Aristoteles hingegen, mit der nüchternen Klarheit seines alles durchdringenden Geistes, hat

\* Vergl. dazu neuerdings Mythogr. Graeci vol. III fasc. I Ps. Eratosth. catasterismi rec. Alex. Olivieri. Leipzig, Teubner, 1897; Heinrich Küentzle, Über die Sternsagen der Griechen. I. Heidelberger Dissertation. Karlsruhe 1897.

\*\* Kommentar von Simplicius zur Aristotelischen Schrift *περὶ κόσμου*; Ausg. von Heiberg S. 488.

sich mit den mathematischen Lehren weniger befasst, dafür aber die Physik des Weltalls zu einem vorläufigen Abschluss gebracht; damit begnügte sich im wesentlichen das spätere Altertum, nur in Neben- dingen hat es gelegentlich aus eigener Kraft Neues hinzuzufügen vermocht.

An die Werke von Plato und besonders Aristoteles schliesst sich im späteren Altertum die weitverzweigte Thätigkeit der gelehrten Kommentatoren wie Alexander von Aphrodisias, Johannes Philoponus, Simplicius, Olympiodor, Proklus, die uns bei aller redseligen Breite ihrer Paraphrasen doch oft recht wertvolle Bemerkungen hinterlassen haben. Mit Unterstützung der Berliner Akademie sind bisher in mustergiltiger Ausgabe erschienen die besonders gehaltvollen Kommentare des Simplicius zur Aristotelischen Physik (besorgt von Diels, Berlin 1882) und zur Schrift *περὶ κόσμου* (besorgt von Heiberg 1894); aus älterer Zeit ist daneben zu nennen die von Julius Ludwig Ideler bearbeitete Ausgabe der Aristotelischen Meteorologie nebst den erhaltenen Kommentaren (Leipzig 1834/36).

Besondere Aufmerksamkeit hat auch die Stoische Schule der Physik des Himmels und der Meteorologie geschenkt, und wir besitzen noch ein wertvolles Denkmal ihrer Forschung und Lehre in den zwei Büchern der *Κυκλική θεωρία μετεώρων* von Kleomedes (Ausg. von H. Ziegler 1891). Dagegen haben die Epikureer auf demselben Gebiete sich weniger hervorgethan, sondern vielfach recht wunderliche Anschauungen zu Tage gefördert, denen daher auch keine nachhaltige Wirkung in der späteren Zeit beschieden gewesen ist. Das Material ist heute leicht zugänglich gemacht worden durch die erschöpfende Sammlung von Usener (Epicurea, Lips. 1887, Teubner).

Naturgemäss findet sich auch schon in den Werken der griechischen Philosophen gar vieles, was bereits auf das Gebiet der mathematischen Astronomie hinüberführt, da ja überhaupt in der freien Forschung feste, unverrückbare Grenzen der wissenschaftlichen Arbeitsteilung schwer einzuhalten sind. Aber es bildet doch immer einen bedeutsamen Unterschied, ob solche Fragen der rechnenden Astronomie nur gelegentlich im Laufe einer philosophischen Auseinandersetzung gestreift werden, oder ob von vornherein die Absicht vorliegt, ein abgeschlossenes System auf exakter mathematischer Grundlage aufzubauen, wie es z. B. in der *Μεγάλη σύνταξις* des Claudius Ptolemaeus der Fall ist. Solche Erwägungen haben uns veranlasst, eine Reihe von Astronomen zu einer besonderen Gruppe zusammenzufassen, die das gemeinschaftliche Streben verbindet, mit Hilfe von mathematischen Lehrsätzen die Rätsel des Himmels einer befriedigenden Lösung zuzuführen, oder, wie es gewöhnlich heisst, mit Zugrundelegung von bestimmten mathematischen Voraussetzungen, *διασῶσαι τὰ φαινόμενα*. Nach einem bereits oben S. 163 berührten Fragmente, das nach Simplicius auf den Peripatetiker Sosigenes zurückgeht, hätte Plato in seiner

Schule zuerst die astronomische Forschung in solche Bahnen gelenkt, was bei seiner Hochachtung vor der Mathematik im Grunde ja auch ganz natürlich erscheint.

Nun giebt es aber freilich auch in dieser dritten Gruppe mancherlei Spielarten, je nachdem die Mathematik entweder ausschliesslich oder überwiegend oder nur einigermaßen die Darstellung beeinflusst. Die Verhältnisse liegen hier ähnlich wie auf dem Gebiete der geographischen Litteratur Griechenlands. Die Werke von Eratosthenes und Hipparch beruhten sicher auf einer unerschütterlichen Grundlage der exakten Mathematik, Strabo dagegen verlangt in der Geographie von der Mathematik gerade nur so viel, als zum Verständnis der allgemeinen mathematisch-physikalischen Grundlagen unentbehrlich ist; alles, was darüber hinausgeht, erscheint ihm in einem für das grössere Publikum berechneten Werke ganz entschieden von Übel.

Im späteren Altertume fasste man unter dem Namen *ὁ μικρὸς ἀστρονόμος* eine Reihe von mathematischen und astronomischen Monographien zusammen, durch deren gründliches Studium man das schwere Rüstzeug zur Bewältigung der Ptolemäischen *Μεγάλη σύνταξις* gewinnen sollte. Dazu gehörten nach der Zusammenstellung von Manitius: von Euklid (ca. 300 v. Chr.) die *Λεδομένα*, die *Ὀπτικά*, die *Κατοπτρικά*, die *Φαινόμενα*; von Theodosius aus Tripolis (130 n. Chr.) die drei Bücher *Σφαιρικά*, die Schrift *περὶ οἰκήσεων*, die zwei Bücher *περὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν*; von Antolycus aus Pitana (ca. 330 v. Chr.) die Schrift *περὶ κινουμένης σφαίρας*, die zwei Bücher *περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων*; von Aristarch aus Samos (ca. 280 v. Chr.) die Schrift *περὶ μεγεθῶν καὶ ἀποστημάτων ἡλλίου καὶ σελήνης* und von Hypsikles aus Alexandrien (ca. 180 v. Chr.) der *Ἀναφορικός*. Die genannten Schriften galten etwa vom dritten Jahrhundert an als der wie es scheint allgemein angenommene Kanon für die mathematischen Vorstudien, die die schwierigere *Μεγάλη σύνταξις* zur unerlässlichen Vorbedingung machte. Von den meisten der genannten Schriften haben wir jetzt bequeme Texte erhalten durch Hultsch, Heiberg und Manitius; ein andres, inhaltlich ebenfalls hierhergehöriges Werk, die drei Bücher der Sphärik von Menelaus aus Alexandrien (ca. 100 n. Chr.), die eine sphärische Trigonometrie enthalten, ist nur in hebräischen und arabischen Übersetzungen auf uns gekommen.

Das Natürlichste wäre, hier gleich Hipparch und Ptolemaeus nebst seinen Kommentatoren anzureihen, die in der Art ihrer Forschung und Darstellung mit den Genannten eng verwandt sind. Da aber jene aus äusseren Zweckmässigkeitsgründen bei unserem flüchtigen geschichtlichen Überblick den Schluss bilden sollen, so schieben wir hier eine andere Unterabteilung ein, diejenigen Schriftsteller, die im sogenannten Uranologium des Jesuiten Petavius vereinigt sind (erschieden zum ersten Male 1630); es sind das vor allem Geminus mit seiner *Εἰσαγωγή εἰς τὰ φαινόμενα* und Achilleus mit seiner Schrift *εἰσαγωγή εἰς τὰ*

*Ἀράτου φαινόμενα.* Wie in dem Titel der letzten Schrift ausdrücklich gesagt ist, knüpft man hier vielfach wieder an das astronomische Lehrgedicht von Arat an, daneben werden aber auch insbesondere bei Geminus sehr viele Fragen der mathematischen Astronomie behandelt, nur dass hier nicht so viele mathematische Vorkenntnisse zum vollen Verständnis notwendig sind, als wie z. B. bei Ptolemaeus.

Wenn wir von den Pythagoreern der älteren Zeit absehen, so hat die Reihe der ausgesprochenen Mathematiker unter den Astronomen wohl mit Eudoxus begonnen, von dem zwar nur noch einzelne Bruchstücke erhalten sind, aber doch in so beträchtlicher Zahl und von so erheblichem Umfang, dass zuletzt Künssberg sein Sphärensystem zu voller Anschauung hat bringen können (Dinkelsbühl, Programm 1888). Nach Eudoxus ist vor allem Hipparch zu nennen, vielleicht der bedeutendste Astronom des Altertums überhaupt, aus dem Ptolemaeus sicher viel entnommen hat. Seine Hauptwerke sind uns verloren gegangen, und so können wir die ungewöhnliche Förderung, die die Astronomie und die Geographie ihm zu verdanken hatten, nur aus späteren Werken ersehen, die aus ihm geschöpft haben. Auch er hat, trotz seiner sonstigen Vorliebe für mathematische Berechnungen und Konstruktion, in drei erhaltenen Büchern, die Manitius in der Bibliotheca scriptorum Gr. et Rom. Teubneriana Leipz. 1894 herausgegeben hat, die Phaenomena des Arat und Eudoxus eingehend behandelt und vielfach berichtigt. Nachdem zuletzt auch von Geminus eine eigene Ausgabe ebenfalls von Manitius 1898 an demselben Orte erschienen ist, steht uns nun hier alles einschlägige Material in handlicher Form zur Verfügung, und wir sind nicht mehr angewiesen auf die schwerfälligen Folianten des Jesuiten Petau.

Das Gleiche gilt freilich durchaus nicht von den recht zahlreich erhaltenen Werken des Claudius Ptolemaeus, den wir nun an dieser Stelle einreihen müssen. Weil sich in den Angaben der Handbücher über die Ausgaben der Ptolemaeischen Schriften und ihrer Kommentatoren mancherlei Irrtümer eingeschlichen haben, die dann leicht vertrauensselig von dem Nachfolger übernommen werden, so empfiehlt es sich hier, die einschlagenden Fragen mit mehr Ausführlichkeit zu behandeln.

Im Lexikon von Suidas lesen wir: *Πτολεμαῖος, ὁ Κλαύδιος μηχανικός, Ἀλεξανδρεὺς, φιλόσοφος γενουὸς ἐπὶ τῶν χρόνων Μάρκου τοῦ βασιλέως. οὗτος ἔγραψε Μηχανικά βιβλία γ'. Περὶ φάσεων καὶ ἐπισημασιῶν ἀστέρων ἀπλανῶν βιβλία β'. Ἄπλωσιν ἐπιφανείας σφαιράς. Κανόνα πρόχειρον. Τὸν μέγαν Ἀστρονόμον ἦτοι Σύνταξιν καὶ ἄλλα.* Nicht ausdrücklich sind also hier genannt von den zweifellos echten Schriften des Ptolemaeus die Geographie, die Harmonik, die Optik, die Schriften, welche betitelt sind *περὶ κριτηρίου καὶ ἡγεμονικοῦ, περὶ ἀναλήματος, ὑποθέσεις καὶ πλανωμένων ἀρχαί;* endlich dürfen wir zu den echten Werken wohl auch die *Τετραβιβλος* rechnen, denn der Grundstock muss hier von Ptolemaeus herrühren, selbst wenn daneben

noch spätere fremde Zusätze und Erweiterungen angenommen werden müssten.

Im allgemeinen ist nun Ptolemaeus von den bedeutenderen Schriftstellern des Altertums sicherlich derjenige, dem sich die kritische Thätigkeit der berufsmässigen Philologen, Mathematiker und Astronomen am wenigsten zugewandt hat. Die Gründe hierfür liegen nahe genug, das Studium des Ptolemaeus, besonders seiner astronomischen Schriften, erfordert eben eine nicht gerade sehr häufige Vereinigung von Kenntnissen verschiedener Art, so dass der Almagest vielen für immer ein verschlossenes Buch mit sieben Siegeln bleibt. Das ist aber für jeden wahren Freund der Wissenschaft insofern lebhaft zu bedauern, weil die *Μεγάλη σύνταξις* als das eigentliche Meisterstück der wissenschaftlich-methodischen Forschung des Altertums bezeichnet werden kann, mögen die Voraussetzungen, von denen sie ausgeht, noch so verkehrt sein und demgemäss auch die Ergebnisse, zu denen dann die strenge Methode notwendig gelangen musste.

Gleichwie von dem astrologischen Werke Tetrabiblos giebt es auch von der *Μεγάλη σύνταξις* bis jetzt nur zwei vollständige Ausgaben,\* eine aus dem Jahre 1538, in Basel bei Johannes Walderus erschienen, und eine zweite, die in Paris von dem französischen Abbé Halma besorgt worden ist (die beiden Bände tragen die Jahreszahlen 1813 und 1816). Während jener jetzt ziemlich selten gewordene Foliant zugleich auch den Kommentar von Theon aus Alexandrien enthält, soweit wir ihn überhaupt noch besitzen, bietet die Pariser Ausgabe zugleich eine französische Übersetzung und wertvolle Noten zu Ptolemaeus von Delambre. Diese zweite Ausgabe, die heutzutage ebenfalls nur noch schwer zu beschaffen ist, hat viel Anerkennung bei den eigentlichen Astronomen gefunden, ist aber dafür bei den Philologen auf um so mehr Widerspruch und Ablehnung gestossen. Wer besonders die folgenden Bände aus eigener Anschauung kennt, die sich an die beiden ersten, die *Μεγάλη σύνταξις* enthaltenden Bände anschliessen, wird sich über das absprechende Urteil der damaligen Hellenisten, wie es bei Brunet konstatiert wird, nicht im geringsten wundern. Abbé Halma hat nämlich mit staatlicher Unterstützung im Anfange dieses Jahrhunderts eine zusammenfassende Ausgabe der wichtigsten astronomischen Schriften des Altertums veranstalten wollen und die Sammlung eröffnet mit dem Almagest. Über die Fortsetzung hat sich in die meist gebrauchten Handbücher der modernen Zeit ein bedauerlicher Irrtum eingeschlichen, der hoffentlich nach unserer Berichtigung in Zukunft verschwinden wird. Wie gesagt, füllen die 13 Bücher der *Μεγάλη σύνταξις* die beiden ersten Bände. Der dritte Band erschien 1819 und führt den Haupttitel *Chronologie de Ptolémée*, daneben den speziellen Titel

\* Eine neue griechische Textausgabe in der Bibliotheca Teubneriana wird durch Heiberg herausgegeben. Ihr erster Band (1898) umfasst die ersten sechs Bücher.

*Κλαυδίου Πτολεμαίου, Θεώνος κ. τ. λ. κανὼν βασιλειῶν καὶ φάσεις ἀπλανῶν καὶ Γεμίνου εἰσαγωγή εἰς τὰ φαινόμενα.* Der vierte, weniger starke Band erschien 1820 unter dem Haupttitel „Hypothèses de Ptolémée etc.“, der spezielle Titel lautet *Κλ. Πτολεμαίου ὑποθέσεις καὶ πλανωμένων ἀρχαὶ καὶ Πρόβλου Διαδόχου ὑποτυπώσεις*. Es folgten dann vier weitere Bände, die es vorzugsweise mit dem Kommentator des Almagest, Theon aus Alexandrien, zu thun haben. Der fünfte Band der Sammlung, erschienen 1821, führt den Haupttitel *Commentaire de Théon* und den speziellen Titel *Θέωνος Ἀλεξανδρέως ὑπόμνημα εἰς τὸ πρῶτον τῆς Πτολεμαίου μαθηματικῆς συντάξεως* für den ersten Teil des Bandes, während der zweite Teil den Sondertitel führt *Θέωνος Ἀλ. ὑπόμνημα εἰς τὸ δεύτερον κτλ.* und der dritte Teil den Spezialtitel *Ἀράτου Σολέως φαινόμενα, Θεώνος σχόλια, Ἑρατοσθένους καταστειρισμοί, Λεοντίου σφαῖρα* et Germanici Caesaris Phaenomena. Man ersieht schon aus diesem Beispiele, wie wenig der Haupttitel dem wirklichen Inhalt des Bandes mit seinen drei Teilen entspricht. Viel grösser und schlimmer wird aber nun der Wirrwarr in den drei folgenden Bänden, die man also als Band 6, 7 und 8 der ganzen Sammlung bezeichnen muss; davon trägt der 6. Band die Jahreszahl 1822, der 7. die Jahreszahl 1823, der 8. die Jahreszahl 1825. Nun tritt auch hier wieder in dem mir vorliegenden Exemplare scheinbar als Haupttitel für alle drei Bände auf „Commentaire de Théon“, daneben aber trägt der 6. Band aus dem Jahre 1822 noch zwei Sondertitel, die vollständig so lauten: „*Θέωνος Ἀλεξανδρέως ὑπόμνημα. Commentaire de Théon d'Alexandrie, sur le livre III de l'Almageste de Ptolémée; Tables manuelles des mouvements des astres*“ und (auf einem neuen Titelblatt) „*Θέωνος Ἀλεξανδρέως ὑπόμνημα εἰς τοὺς Πτολεμαίου προχειροὺς κανόνας*“. Hier ist jener erste Spezialtitel ganz falsch in seiner ersten Hälfte, denn von dem eigentlichen Kommentar Theons zum Almagest findet sich in dem 6. Bande kein einziges Wort, vielmehr ist festzuhalten, dass von diesem Hauptkommentar bloss die beiden ersten, allerdings weitaus wichtigsten Bücher von Halma herausgegeben worden sind (im 5. Bande, wie oben bemerkt wurde). Auch der angeführte Haupttitel ist so unpassend wie möglich für die Bände 6—8 gewählt worden, denn bei einer Bezeichnung wie *Θέωνος ὑπόμνημα* kann niemand an etwas anderes als wie an Theons Kommentar zum Almagest denken, wovon aber in allen drei Bänden gar nichts zu lesen ist. Wenn also Wolf in seinem Handbuch der Astronomie (I, 533) schreibt: „leider sind drei andere, den Kommentar von Theon und verschiedene Tafeln enthaltende Bände, welche Halma von 1822 bis 25 folgen liess, um dann 1828 mit der „Géographie mathématique“ abzuschliessen, fast nicht mehr zu beschaffen“, so hat er sich offenbar ebenfalls durch die falschen Titel irreführen lassen. Halma hat anfangs jedenfalls alles herausgeben wollen, was uns vom Kommentar des Theon aus Alexandrien zum Almagest erhalten ist, vermutlich ist

er aber später durch eine Erklärung Letronnes (*Journal des Savants* 1818, 266) bestimmt worden, von diesem Vorhaben abzustehen. Dafür hat er aber einige wichtige Manuskripte der Pariser Nationalbibliothek zum Abdruck gebracht, die hauptsächlich astronomische und chronologische Tabellen der verschiedensten Art enthalten, daneben aber sozusagen eine Gebrauchsanweisung für die Benutzung derselben, wenn es sich um die Lösung bestimmter astronomischer Aufgaben handelt. Halma hat wohl nicht unrecht, wenn er vermutet, dieses Tabellenmaterial gehe in seinem letzten Ursprunge noch auf Ptolemaeus selbst zurück und sei dann von den Astronomen der folgenden Zeit, insbesondere aber von Theon aus Alexandrien erweitert, berichtigt und bis auf die eigene Gegenwart fortgeführt worden. — Wie schon oben aus dem Wolfschen Citate zu ersehen ist, hat dann im Jahre 1828 das grosse litterarische Unternehmen Halmas seinen Abschluss gefunden mit der Herausgabe der *Geographie von Ptolemaeus*.

Es muss der unbestrittene Ruhm der Franzosen bleiben, dass sie am Anfange unsres Jahrhunderts der antiken Astronomie ihre besondere Aufmerksamkeit geschenkt und zur Aufhellung so manches dunklen Punktes wesentlich mit beigetragen haben. Allen voran leuchtet hier als glänzendes Vorbild Delambre, ein Mann, der in ganz ungewöhnlicher Weise philologische Sprachkenntnis und die gründlichste mathematische Bildung zum schönsten und segensreichsten Bunde vereinigte; wer die beiden ersten Bände seiner *Histoire de l'astronomie* durchgearbeitet hat, wird ihm gern jenes ehrenvolle Zeugnis ausstellen, mag er auch noch so oft an überflüssigen Betrachtungen, die gelegentlich mit unterlaufen, einigen Anstoss genommen haben. Die Teilnahme Delambres an den Arbeiten von Halma hat diese in fruchtbarster Weise gefördert; dafür darf aber andererseits die Bemerkung nicht unterdrückt werden, dass einzelne Bände des grossen Pariser Unternehmens in typographischer Korrektheit geradezu das Unglaublichste leisten; sie sind zum Teil wahre Monstra philologischer Unfähigkeit und typographischer Liederlichkeit, was um so mehr Verwunderung verdient, weil die einzelnen Teile, mit staatlicher Unterstützung gedruckt, vielfach höchstgestellten Personen, z. B. Mitgliedern der königlichen Familie, gewidmet sind. Dass die französische Übersetzung sich oft sehr grosse Freiheiten gestattet und geradezu zur Paraphrase wird, soll bei einem so schwierigen Texte, wie ihn Ptolemaeus meistens bietet, nicht weiter getadelt werden (freilich kommen gelegentlich auch geradezu falsche Übersetzungen vor); in den Augen eines Philologen wiegen viel schwerer die zahllosen falschen Accente der griechischen Worte und dann andererseits die oft ganz falsche Abtheilung der einzelnen Satzglieder durch eine verkehrte Interpunktion, was man beides besonders im 4. Bande in auffälligster Weise bemerken kann. Wolf hat recht, wenn er darüber klagt, dass

die einzelnen Bände, und zwar besonders die späteren, nur so schwer zu beschaffen seien. Ich habe, dank dem freundlichen Entgegenkommen der Direktion der Königlichen öffentlichen Bibliothek zu Dresden-Neustadt, auch die Bände selbst einsehen und benutzen können, die auf der Leipziger Universitätsbibliothek fehlen, und dabei hat sich in mir besonders angesichts der typographischen Jämmerlichkeit des 4. Bandes immer wieder der Verdacht geregt, am Ende liege mir gar nicht der letzte, endgültige Abdruck vor. Im Ernste kann man aber bei einem Buche einer öffentlichen Bibliothek an eine solche Erklärung doch wohl kaum denken. Hier kommt es thatsächlich vor, dass z. B. am Schlusse einer längeren Periode die Konstruktion eines absoluten Genitivs mit den dazu gehörigen Satzgliedern von dem vorhergehenden Teile der Periode durch einen Punkt getrennt und dann mit grossem Anfangsbuchstaben als selbständiger Satz angefügt wird.

Derartige Ungeheuerlichkeiten sind aber nicht bloss auf den 4. Band beschränkt, sondern kehren auch anderwärts wieder. So findet sich ein sehr bezeichnendes Beispiel für die Akribie der recensio im Anfange vom zweiten Teil des 5. Bandes, der den Theonschen Kommentar zum zweiten Buche des Almagest enthält. Der Text beginnt hier mit den Worten *Διεξελθὼν ὁ Πτολεμαῖος ἐν τῷ πρώτῳ τῆς συντάξεως τὰ περὶ τῶν ἐν τῷ παντὶ καθόλου ὀφειλόντα προληφθῆναι, τουτέστιν ὅτι* — es folgt dann eine Angabe des Inhaltes der ersten Hälfte vom ersten Buche und am Ende der zwölften Zeile ein Punkt, noch ehe ein Verbum finitum zum einleitenden Partizip *διεξελθὼν* vorgekommen ist. Die 13. Zeile lautet dann mit grossem Anfangsbuchstaben *Ἔτι δὲ καὶ ἐπὶ τῶν κατὰ μέρος διαλαβῶν*, und es folgt darauf eine Aufzählung des Inhaltes vom zweiten Teile des ersten Buches ohne einen regierenden Hauptsatz bis zur achten Zeile der folgenden Seite, wo dann endlich mit den Worten *ἐξῆς ἐν τούτῳ τῷ βιβλίῳ δευτέρῳ τυγχάνοντι* der Hauptsatz zum ganzen Abschnitt vorbereitet wird. Noch ehe derselbe aber beginnt, setzt der Herausgeber hinter *τυγχάνοντι* einen Punkt und beginnt dann mit Einrückung eine neue Zeile *Βούλεται περὶ τῶν καθ' ἑκάστην ὀρισμένην τινα κτλ.* Vergleicht man damit die Ausgabe von 1538, so bemerkt man, dass sie ganz richtig das Hauptverbum des Ganzen *βούλεται* in unmittelbaren Zusammenhang mit dem Vorhergehenden bringt, was natürlich das allein richtige Verfahren ist. Man begreift hier einfach den französischen Herausgeber nicht. Wollte er hier die Übersicht über die lange Periode der zwei ersten Sätze erleichtern, so durfte er doch auf keinen Fall die Worte des eigentlichen Hauptsatzes *ἐξῆς ἐν τούτῳ τῷ βιβλίῳ δευτέρῳ τυγχάνοντι* durch einen Punkt und Abbrechung der Zeile von dem dazu gehörigen Verbum *βούλεται* trennen, sondern musste schon mit jenem Passus die neue Zeile beginnen.

Besonders die griechische Accentuation ist eine arge Crux für den französischen Herausgeber, und es wirkt schliesslich nur noch erheiternd,

wenn man z. B. Formen begegnet wie ἀποδείκνυντες (zwei Accente, nur nicht der richtige) in der dritten Zeile der ersten griechischen Textseite vom 4. Bande. In der richtigen Erkenntnis seiner Unsicherheit hat der Herausgeber sodann in der folgenden Schrift des nämlichen Bandes die Accente überhaupt weggelassen, was freilich nicht ausschliesst, dass gelegentlich aus alter Gewohnheit doch noch hier und da ein vereinzelter Accent gesetzt wird, der wiederum nicht immer richtig ist.

Ich habe die typographische Unzulänglichkeit der Pariser Ausgabe an einigen drastischen Beispielen darlegen wollen, womit natürlich das materielle Verdienst des Unternehmens nicht im mindesten geschmälert werden soll. Aber man kann sich denken, welcher unerfreulichen Eindruck solcherlei Texte auf einen philologisch geschulten Leser machen müssen, bei dem schliesslich alles in allem doch noch die aufrichtige Dankbarkeit über das Gebotene mit all seiner formalen Unvollkommenheit überwiegen muss. Denn von dem, was die ganze Sammlung enthält, ist eigentlich nur was sich auf Arat und Geminus bezieht in anderweitiger Bearbeitung leicht zu beschaffen, sowie von den Schriften des Ptolemaeus die *Φάσεις ἀπλανῶν ἀστέρων*, die in der Wachsmuthschen Ausgabe des Joh. Laurentius Lydus „De Ostentis“ (Leipzig 1863) Aufnahme gefunden haben; alles übrige liegt (von der Geographie abgesehen) entweder zum ersten Male im Druck vor oder findet sich nur in alten Ausgaben des 16. Jahrhunderts, die ungemein selten geworden sind.

Eine editio princeps stellen dar die Bände 6—8, die *Μεγάλη σύνταξις* (1. und 2. Bd.) und die zwei Bücher vom Kommentar Theons (5. Bd.) waren das erste und letzte Mal vorher gedruckt worden zu Basel 1538.

Eine eigne Bewandnis hat es mit dem Inhalte des 4. Bandes. Die erste, hier aufgenommene Schrift, die *ὑποθέσεις καὶ πλανωμένων ἀρχαί* von Ptolemaeus, die P. Tannery in seinen *Recherches sur l'histoire de l'Astronomie ancienne* (1893) bei der Behandlung der Ptolemaeischen Lehre von den Planeten in erster Linie berücksichtigt hat und die in einem wichtigen später zu behandelnden Punkte von der Darstellung im *Almagest* erheblich abweicht, soll bereits 1620 einmal vom Engländer Bainbridge zusammen mit der *Sphaera* des Proclus herausgegeben worden sein. Die zweite, im gleichen Bande enthaltene Schrift von Proclus, deren Titel richtiger wohl lautet *Ἐπιτύψεις τῶν ἀστρονομικῶν ὑποθέσεων*, bietet eine recht geschickte Zusammenfassung von alle dem, was in der Astronomie der Alten zur Behandlung kam, und zwar ohne das Verständnis durch die Aufnahme von schwierigeren Auseinandersetzungen der Mathematik zu beeinträchtigen; sie führt so leicht und bequem in das Studium der alten Astronomie ein wie kaum eine zweite Schrift und verdiente schon um deswillen eine neue Bearbeitung, zumal da der fehlerreiche Pariser

Druck nicht einmal Accente aufweist und die andere Ausgabe des Jahres 1540, wie es scheint, ein ganz seltenes Buch geworden ist. — Von der nämlichen Schrift des Proclus ist bald nach der editio princeps eine lateinische Übersetzung des Georgius Valla aus Plazentia erschienen, die freilich den griechischen Text mit erstaunlicher Willkür behandelt und von Halma richtig charakterisiert worden ist mit den Worten „La version, ou pour mieux dire, la paraphrase latine des Hypotyposes, par Valla, n'est rien moins qu'exacte et fidèle. Il a retranché, changé, ajouté et expliqué à son gré, sans presque aucun égard pour le texte grec, qui n'étant pas mis à côté de cette interprétation beaucoup trop libre, n'a pu jusqu'à présent en faire reconnaître les licences et les fautes. Il y introduit Pline dont Proclus ne parle nullement et l'arabe Alfergan qui vécut plus de deux siècles après cet auteur“ (Bd. IV, S. 10). Unter solchen Verhältnissen kann natürlich die lateinische Übersetzung absolut keinen Ersatz leisten für das griechische Original. Sie ist übrigens zusammen mit der lateinischen Übersetzung des Almagest von Georgius Trapezuntius zu Basel 1551 bei Heinrich Peter erschienen.

Zum Abschluss nur noch wenige Bemerkungen über die anderen kleineren Schriften von Ptolemaeus.

Der von Suidas erwähnte *Καὼν πρόχειρος* liegt offenbar mit zu Grunde den mannigfachen Tabellen, die Halma in Bd. VI—VIII herausgegeben hat und mit denen teilweise der Name von Ptolemaeus auch direkt in Verbindung gebracht wird (Halma VI, S. I fig. und IX).

Die Schrift *Ἀπλωσις ἐπιφανείας σφαιράς*, die eine stereographische Projektion lehrt, liegt uns im Originaltext nicht mehr vor, sondern nur in einer Rückübersetzung aus dem Arabischen ins Lateinische, die Rudolf von Brügge 1144 (nicht 1544, wie oft fälschlich zu lesen ist) verfasst und die der Baseler Drucker Johannes Valderus (Walderus) zum ersten Male 1536 in einem Sammelbände herausgegeben hat, der den Titel führt *Sphaerae atque astrorum coelestium ratio, natura et motus: ad totius mundi fabricationis cognitionem fundamenta* (S. 232 bis 274). Nach Wolfs Annahme ist diese Schrift vielleicht gar nicht dem Ptolemaeus, sondern dem Hipparch zuzuweisen (Handbuch etc. II, S. 71).

Von den bei Suidas nicht genannten Schriften des Ptolemaeus ist noch die ebenfalls nur in lateinischer Rückübersetzung aus dem Arabischen erhaltene Optik zu nennen, die zu Turin 1885 erschienen ist unter dem Titel *L'Ottica di Claudio Tolomeo da Eugenio Ammiraglio di Sicilia — Scrittore del Secolo XII ridotta in Latino sovra la traduzione Araba di un testo Greco imperfetto etc. pubblicata da Gilberto Govi*.

Was endlich von der Schrift über die Sonnenuhren (*περὶ ἀναλήμματος*) erhalten ist, hat neuerdings (1895) Heiberg zusammengestellt im 12. Supplement zum 40. Jahrgang der Zeitschrift für Mathematik und Physik.

Über das astrologische Werk *Τετραβιβλος* (1535 und 1553 in Nürnberg und Basel erschienen) vergl. meine Abhandlung „Astrologie im Altertum“ (Zwickau 1879, S. 29 fig.) und Franz Boll „Studien über Claudius Ptolemaeus“ (21. Supplementband der Jahrbücher für klass. Philol., S. 111 fig.)

An Ptolemaeus schliessen sich an die beiden Kommentatoren Theon aus Alexandrien (nicht zu verwechseln mit dem viel älteren Theon aus Smyrna, von dem Th. H. Martin 1849, E. Hiller 1898 und J. Dupuis 1892 Ausgaben besorgt haben) und Proklus, jener das bedeutendste Schulhaupt im vierten Jahrhundert zu Alexandrien, der Vater der hochgebildeten, aber unglücklichen Hypatia, dieser der vielseitige und schriftstellerisch ungemein thätige Lehrer an der Hochschule zu Athen. Was von astronomischen Schriften dieser beiden Gelehrten für unsere besonderen Zwecke in Betracht kommt, ist bereits erwähnt worden. Am meisten verdient Hervorhebung, dass auch bis zum heutigen Tage der Kommentar von Theon zum Almagest, wenn wir von der Pariser Ausgabe der beiden ersten Bücher absehen (Bd. V), einzig und allein in dem fehlerreichen Drucke der Baseler Ausgabe von 1538 vorliegt.

Nach der Hypotyposis des Proklus sind es im wesentlichen folgende zehn Hauptpunkte gewesen, mit denen sich die Astronomie des Altertums beschäftigt hat (Halma IV, S. 66 fig.):

- I. Man bemerkte, dass Sonne, Mond und die fünf anderen Planeten, wie wir im Sinne des Altertums sagen müssen, sich bald schneller, bald langsamer in der Ekliptik bewegen und dass die vier Viertel des Tierkreises nicht in gleicher Zeit von ihnen zurückgelegt werden (die sogenannte erste Anomalie).
- II. Der Mond und die fünf anderen Planeten bewegen sich bald nördlich, bald südlich von der Ekliptik, während die Sonne diese so gut wie niemals verlässt.
- III. Die fünf Planeten Venus, Merkur, Mars, Jupiter, Saturn beschleunigen gelegentlich ihre Bewegung, dann vermindern sie dieselbe und stehen dazwischen scheinbar auch ganz still; so sieht man, wie sie sich in der Richtung nach Osten bewegen, dann zu scheinbarem Stillstand gelangen und schliesslich eine rückläufige Bewegung nach Westen einschlagen (die sogenannte zweite Anomalie, an der Sonne und Mond keinen Anteil haben).
- IV. Während Mars, Jupiter und Saturn in jedem beliebigen Abstände von der Sonne und selbst in Opposition zu ihr erscheinen, entfernen sich Venus und Merkur von ihr niemals mehr als  $60^\circ$  (Merkur ist noch näher an die Sonne gebannt als Venus) und erscheinen als Morgen- und Abendstern.
- V. Die Planeten erscheinen unserem Auge bald grösser, bald kleiner, sie müssen also in der unendlichen Tiefe des Weltalls der Erde bald näher, bald ferner sein; dafür spricht auch die Thatsache,

dass bei Sonnenfinsternissen gelegentlich der Mond die Sonnenscheibe ganz verdeckt und ein anderes Mal in dem Momente, wo das menschliche Auge, sowie die Mittelpunkte der Sonnen- und Mondscheibe eine gerade Linie bilden, einen Ring der Sonnenscheibe unbedeckt lässt.

- VI. Bald sind die Planeten der Sonne ganz nahe (d. h. haben gleiche Länge wie die Sonne) und werden trotzdem gesehen, bald werden sie unsichtbar, obwohl sie sich von der Sonne weit entfernt haben (die Erklärung hierfür wird gefunden in der grösseren oder geringeren Neigung der Planetenbahn gegen die Ebene der Ekliptik).
- VII. Was die Aufeinanderfolge der Planeten betrifft, so kann es keinem Zweifel unterliegen, dass der Mond der Erde am nächsten ist und dass jenseits der Sonne Mars, Jupiter, Saturn in dieser Reihenfolge in immer weiterem Abstände um den Mittelpunkt des Weltalls kreisen; das beweist schon unter anderem die Dauer ihres Umlaufes. Merkur und Venus haben die nämliche Geschwindigkeit wie die Sonne und erscheinen bald im Osten, bald im Westen von ihr, daher ist es ungemein schwierig, festzustellen, welches das Verhältnis ihres Abstandes von der Erde und dem Weltcentrum ist.
- VIII. Behandelt wird die Excentricität der Planeten- und insbesondere der Sonnenbahn.
- IX. Die Sphäre der Fixsterne ist in einer sehr langsamen Rotation um eine von der Weltaxe verschiedene Axe in der Richtung nach Osten begriffen (die sogenannte Präcession der Tag- und Nachtgleichen).
- X. Das Verhältnis von Sonne und Mond zu einander bei den Verfinsterungen und bei den einzelnen Phasen.

Das sind nach der zusammenfassenden Übersicht des letzten Vertreters der griechischen Astronomie die Hauptpunkte, die die antike Forschung beschäftigt haben. Es ist nun bekannt, dass es auch in Griechenland schon früh Vertreter einer heliocentrischen Weltanschauung gegeben hat, die aber doch keine allgemeinere Zustimmung gefunden haben können. Somit drängt sich uns ganz von selbst die Frage auf: wie hat man es zu erklären, dass die richtigere Erkenntnis, die einzelne gefunden hatten, bald so vollständig wieder in den Hintergrund gedrängt wurde und man es nicht der Mühe für wert erachtete, die angeregten Fragen einer gründlichen mathematischen Prüfung zu unterwerfen?

Dass man von dem Grundirrtum einer im Weltcentrum befindlichen Erdkugel nicht loskam und sich aller besseren Einsicht zum grössten Teile hartnäckig verschloss, hängt zusammen mit dem massgebenden Einfluss, den die Aristotelische Physik sehr schnell gewonnen haben muss. Es war ja für jeden zunächst ganz einleuchtend, wenn Aristoteles lehrte, bei der Entstehung der Welt hätten sich die vier Elemente

nach dem Verhältnis ihrer Schwere so gesondert und geordnet, dass das schwerste Element der Erde sich im Mittelpunkte der Welt zu einer massiven Erdkugel zusammenballte, um die sich dann wieder in Kugelgestalt das nächst schwere Element des Wassers lagerte u. s. f. Nur bei der Kugelgestalt befinden sich alle einzelnen Teile im gegenseitigen Gleichgewichte, und nach dem als selbstverständlich angenommenen Zug der Schwere nach dem Weltmittelpunkte, dem alles unterworfen war, konnte die Sonne mit ihrem leichtesten Elemente des Feuers natürlich in diesem Teile des Kosmos keinen Platz angewiesen erhalten.

Ganz anderes lehrten bekanntlich die Pythagoreer, die ein Centralfeuer annahmen und die Erde um diesen Mittelpunkt wie die anderen Planeten kreisen liessen. Allein die Aristotelische Physik entsprach dem allgemeinen Menschenverstande mehr, und so wurde sie denn auch in diesem Hauptteile von den Stoikern angenommen und durch diese im wesentlichen auf die folgenden Zeiten fortgepflanzt. Sie beherrscht auch Ptolemaeus in seinem astronomischen Hauptwerke.

Andrerseits reichten sich, wie es scheint, religiöse Mystik und philosophisch-mathematische Spekulation die Hand, um einen zweiten Hauptirrtum des Altertums zu begründen, von dem man sich ebensowenig in jenen Zeiten hat losreissen können. Die Pythagoreer, soweit wir jetzt nachprüfen können die frühesten Vertreter der Kugelgestalt der Erde und des Weltalls in Griechenland, müssen den Gestirnen, d. h. den Planeten, eine göttliche Natur verliehen haben, und da nun dem Göttlichen nur das Vollkommenste eigen sein kann und von den Flächenfiguren sowie von den Körpern nach der Anschauung der antiken Spekulation der Kreis und die Kugel das Vollkommenste darstellen, und da endlich auch der *κυκλική κίνησις* die grösste Vollkommenheit innewohnt, so ergab sich ganz von selbst die Lehre: die Planeten müssen die Gestalt einer Kugel besitzen, gerade wie die Erde und der Kosmos, und ihre Bahnen um einen Mittelpunkt können nur kreisförmige Linien darstellen. Solche Anschauungen müssen in Griechenland wie ein mathematisches Axiom und eine Art religiöses Dogma gegolten haben, nur so erklärt es sich, dass man auf ellipsenförmige Planetenbahnen nicht gekommen ist, d. h. mit klarem Bewusstsein und sicherer wissenschaftlicher Erkenntnis, denn unbewusst hat das Altertum eigentlich die Ellipse als Planetenbahn in der Epicyclentheorie bereits besessen. Man beachte die wichtige Stelle bei Geminus Kap. 1, 18 f.: *Ἐπιζητεῖται οὖν ἐν τούτοις, πῶς ἴσων ὄντων τῶν τεσσάρων μορίων τοῦ ζῳδιακοῦ κύκλου ὁ ἥλιος ἰσοταχῶς κινούμενος διὰ παντός ἐν ἀνίσοις χρόνοις διαπορεύεται τὰς ἰσᾶς περιφερείας. Ὑπόκειται γὰρ πρὸς ὅλην τὴν ἀστρονομίαν ἡλιόντε καὶ σελήνην καὶ τοὺς πέντε πλανήτας ἰσοταχῶς καὶ ἐγκυκλίως καὶ ὑπεραντίως τῷ κόσμῳ κινεῖσθαι. Οἱ γὰρ Πυθαγόρειοι πρῶτοι προσελθόντες ταῖς τοιαύταις ἐπιζητήσεσιν ὑπέθεντο ἐγκυκλίους καὶ ὁμαλὰς ἡλίου καὶ σελήνης καὶ τῶν*

ἔ' πλανητῶν ἀστέρων τὰς κινήσεις. τὴν γὰρ τοιαύτην ἀταξίαν οὐπροσεδέξαντο πρὸς τὰ θεῖα καὶ αἰώνια, ὡς ποτὲ μὲν τάχιον κινεῖσθαι, ποτὲ δὲ βράδιον, ποτὲ δὲ ἐστηκέναι, οὓς δὴ καλοῦσι στηριγμοὺς ἐπὶ τῶν ε' πλανητῶν ἀστέρων. Οὐδὲ γὰρ περὶ ἀνθρώπου κόσμιον καὶ τεταγμένον ἐν ταῖς πορείαις τὴν τοιαύτην ἀνωμαλίαν τῆς κινήσεως προσδέξαιτο ἂν τις· αἱ γὰρ τοῦ βίου χρεῖαι τοῖς ἀνθρώποις πολλάκις αἰτίαι γίνονται βραδυτῆτος καὶ ταχυτῆτος· περὶ δὲ τὴν ἄφθαρτον φύσιν τῶν ἀστέρων οὐδεμίαν δυνατὸν αἰτίαν προσαχθῆναι ταχυτῆτος καὶ βραδυτῆτος. Δι' ἦντινα αἰτίαν προέτειναν οὕτω, πῶς ἂν δι' ἐγκυκλίων καὶ ὀμαλῶν κινήσεων ἀποδοθῆί τὰ φαινόμενα.

Nach dem oben S. 163 angeführten Citate aus Simplicius, wozu Plato seinen Schülern die Aufgabe stellte, welche Annahmen nötig seien, um die Erscheinungen am Himmel zu erklären, darf man vielleicht vermuten, dass schon damals gewisse Anomalien der Planetenbewegungen festgestellt waren, die man mit den bisher angenommenen Bewegungen nicht zu erklären vermochte. Jedenfalls bringt Simplicius das System von Eudoxus in direkte Verbindung mit jener Anregung Platos, und man sieht jenem sofort an, dass es die Absicht verfolgte, mit seinen vielen Sphären, deren Zahl in der Weiterbildung durch Kallippos schliesslich noch um 7 vermehrt wurde — wozu noch 22 (Wolf, Geschichte der Astron. S. 41) „rückwirkende“ Sphären kamen —, jene beobachteten Unregelmässigkeiten und Störungen zu erklären. Nun bemerkt aber der nämliche Simplicius in seinem Kommentar zur Schrift *Περὶ κόσμου* ganz richtig (Heiberg, S. 32): *Οἱ γὰρ περὶ Εὐδόξου καὶ Κάλλιππου καὶ μέχρι τοῦ Ἀριστοτέλους τὰς ἀνελιπτύσας σφαιράς ὑποθέμενοι ὁμοκέντρος τῷ παντὶ δι' ἐκείνων ἐπειρῶντο σώζειν τὰ φαινόμενα περὶ μὲν τὸ τοῦ παντός κέντρον πάσας λέγοντες κινεῖσθαι τὰς σφαιράς, τῶν δὲ ἀπογείων καὶ περιγείων καὶ τῶν δοκούντων προποδισμῶν καὶ ὑποποδισμῶν καὶ τῶν ἐν ταῖς κινήσει φαινόμενων ἀνωμαλιῶν τὰς αἰτίας οὐκ ἰσχύοντες κατ' ἐκείνας τὰς ὑποθέσεις ἀποδιδόναι.* Man sieht daraus, die Sphärentheorie von Eudoxus und seinen Nachfolgern musste schliesslich aufgegeben werden, weil sie die wechselnde scheinbare Bewegung der Planeten (bald in der Richtung nach Osten, bald in der Richtung nach Westen) sowie den wechselnden Abstand der Planeten von der Erde im Perigeum und Apogeum nicht erklären konnte. Auch ohne besondere Instrumente hat man im Altertum feststellen können, dass die Planeten dem menschlichen Auge bald grösser, bald kleiner erscheinen.

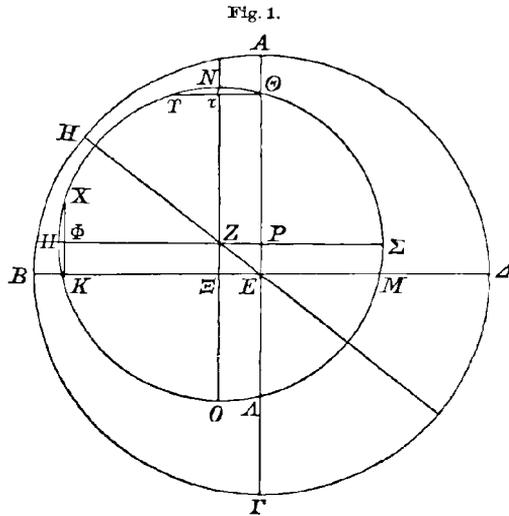
Da war es nun eine wichtige Entdeckung von Hipparch, die der astronomischen Spekulation einen neuen kräftigen Anstoss gab. „Er fand nämlich etwa 150 v. Chr., dass die Jahreszeiten ungleiche Länge haben, indem statt den  $91\frac{1}{4}$  Tagen, welche bei gleicher Länge auf jede derselben kommen würden, dem Frühlinge  $94\frac{1}{2}$ , dem Sommer  $92\frac{1}{2}$ , dem Herbst 88 und dem Winter 90 Tage zufallen“ (Wolf, Gesch. S. 46). Man hätte demnach annehmen müssen, dass die Sonne die vier

ganz gleichen Viertel ihrer Jahresbahn mit wechselnder Schnelligkeit, durchlaufe, wenn die Sonnenbahn und die Fixsternsphäre mit den Tierkreiszeichen denselben Mittelpunkt (die Erde) haben. Das verstieß aber vollständig gegen jenes Grundgesetz, dass die göttliche Weltordnung ganz entschieden eine *ἐγκύκλιος* und *ὁμαλὴ κίνησις* der Planeten verlange und so verfiel denn Hipparch auf die Excentricität der Sonnenbahn, bei der dann auch Ptolemaeus Beruhigung fasste, weil bei der Sonne bloss die sogenannte erste Anomalie beobachtet wird und diese hauptsächlich durch die Excentricität der Sonnenbahn ihre volle Erklärung findet. Ptolemaeus bekennt sich ebenfalls zu jenem Axiom der antiken Spekulation mit den Worten: *πρόθεσιν μὲν καὶ σκοπὸν ἡρούμεθα δεῖν ὑπάρχειν τῷ μαθηματικῷ δεῖξαι τὰ φαινόμενα ἐν τῷ οὐρανῷ πάντα δι' ὁμαλῶν καὶ ἐγκυκλίων κινήσεων ἀποτελούμενα* (Almag. III, c. 2; Halma vol. I 165).

Die Darlegung lautet nun bei Ptolemaeus (Halma, 185 flg.) folgendermassen:

Es stelle *ABΓΔ* die Ekliptik dar mit dem Centrum *E*, und man ziehe rechtwinklig zu einander die beiden Durchmesser *ΑΓ* und *ΒΔ*,

so dass *A* und *Γ* die Punkte der Äquinoktien sind und *B* nebst *Δ* die Punkte des Sommer- und Winter- solstitiums (*A* Frühlings-, *B* Sommers-, *Γ* Herbst-, *Δ* Winterspunkt). Der excentrische Kreis mit dem Mittelpunkte *Z* stelle hingegen die Sonnenbahn dar, dann ergibt sich, dass die Sonne für den Beobachter auf der Erde im Centrum *E* mehr Zeit braucht, um den Bogen *ΑΒΓ* zurückzulegen, als den Bogen *ΓΔΑ*, desgleichen mehr Zeit, um den Bogen *ΑΒ* zurückzulegen, als den Bogen *ΒΓ*.



Das erklärt sich auf folgende Weise. Allerdings sind die Bogen *ΑΒ*, *ΒΓ*, *ΓΔ*, *ΔΑ* an sich ganz gleich; wenn nun aber das menschliche Auge in *E* die Sonne sich auf dem excentrischen Kreise mit dem Mittelpunkte *Z* bewegen sieht, so entsteht notwendig für das menschliche Auge eine unregelmässige Scheinbewegung, denn dem Beobachter auf der Erde scheint die Sonne in den Punkten *A*, *B*, *Γ*, *Δ* der Ekliptik dann zu stehen, wenn sie in ihrer eignen excentrischen Bahn in den Punkten *ΘΚΑΜ* angelangt ist. Da sich aber die Sonne

auf ihrem excentrischen Kreis ganz regelmässig bewegt, so braucht sie natürlich verschiedene Zeit, um die verschiedenen Bogen  $\Theta K$ ,  $KA$ ,  $AM$ ,  $M\Theta$  zurückzulegen, während sie nämlich in der ungleichen Zeit auf der Ekliptik die unter sich gleichen Bogen  $AB$ ,  $BI$ ,  $IA$ ,  $AA$  zurückzulegen scheint. Die Beobachtung hatte nun hierfür die Zahlenwerte  $94\frac{1}{2}$ ,  $92\frac{1}{2}$ , 88 und 90 Tage ergeben, woraus sich die Länge der Bogen in Graden berechnen lässt. Die  $\delta\mu\alpha\lambda\eta\ \kappa\acute{\iota}\nu\eta\sigma\iota\varsigma$  der Sonne beträgt nach den Tabellen von Ptolemaeus in Sexagesimalbrüchen für  $94\frac{1}{2}$  Tage:

$$\begin{array}{r} 90^d = 88^\circ 42' 25'' 49''' 48'''' 46''''' 30'''''' \\ 4^d = 3^\circ 56' 33'' 8''' 52'''' 50''''' 4'''''' \\ \frac{1}{2}^d = 0^\circ 29' 34'' 8''' 36'''' 36''''' 15'''''' \\ \hline 94\frac{1}{2}\ \text{Tag} = 93^\circ 8' 33'' 7''' 18'''' 12''''' 49'''''' \end{array}$$

Für  $92\frac{1}{2}$  Tage Sommerszeit:

$$\begin{array}{r} 90^d = 88^\circ 42' 25'' 49''' 48'''' 46''''' 30'''''' \\ 2^d = 1^\circ 58' 16'' 34''' 26'''' 25''''' 2'''''' \\ \frac{1}{2}^d = 0^\circ 29' 34'' 8''' 36'''' 36''''' 15'''''' \\ \hline 92\frac{1}{2}\ \text{Tag} = 91^\circ 10' 16'' 32''' 51'''' 47''''' 47'''''' \end{array}$$

Ptolemaeus setzt dafür die Werte  $93^\circ 9'$  und  $91^\circ 11'$  in die Rechnung ein, so dass also der Bogen  $\Theta KA$   $184^\circ 20'$  lang ist; folglich betragen  $\Theta N$  und  $OA$  zusammen  $4^\circ 20'$ , jedes allein die Hälfte, also  $2^\circ 10'$ , und da  $\Theta T$  senkrecht zu  $NO$  gezogen ist, beträgt der Bogen  $\Theta T$  ebenfalls  $4^\circ 20'$  und die dazu gehörige Sehne  $\Theta T$   $4^p 32'$  ( $2\frac{32}{60}$ ), wenn der Diameter des excentrischen Kreises zu 120 angenommen wird. Demnach  $\Theta\tau = 2^p 16'$  ( $2\frac{16}{60}$ ).

Ferner der Bogen  $\Theta NIK = 93^\circ 9'$ , der Bogen  $\Theta N = 2^\circ 10'$  und da Bogen  $NI = 90^\circ$ , so ergibt sich für den Bogen

$$IK\ 93^\circ 9' - (90^\circ + 2^\circ 10'), \text{ d. i. } 59'.$$

Das Doppelte beträgt der Bogen  $KIX$ , also  $1^\circ 58'$ , wozu eine Sehne ( $K\Phi X$ ) gehört von  $2^p 4'$  ( $2\frac{4}{60}$ ) Einheiten, deren 120 auf den Durchmesser gehen, also  $K\Phi$  und  $\Phi X$  jedes  $1^p 2'$ ; somit auch  $Z\Xi = 1^p 2'$ . Nun ist aber auch  $\Xi E$  bekanntlich  $= \Theta\tau$  oder  $2^p 16'$ ; mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes ist nun in dem rechtwinkligen Dreiecke  $E\Xi Z$  auch die Hypotenuse  $ZE$ , d. h. die Excentricität der Sonnenbahn leicht zu berechnen. Sie beträgt  $2^p 29\frac{1}{2}'$ , somit vom Radius des excentrischen Kreises (zu 60 Einheiten gerechnet) annähernd  $\frac{1}{24}$ .

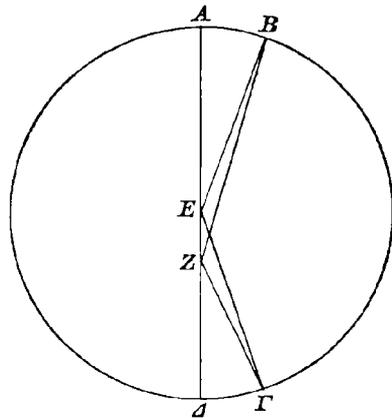
Somit ist durch die Annahme der Excentricität die wichtige Unterscheidung von wahren und scheinbaren Bewegungen in die Astronomie eingeführt, bei der wir noch etwas länger verweilen müssen. Mit ihrer Hilfe wurde alles, was den Charakter des Unregelmässigen trug, für eine Täuschung der Sinne, für blossen Schein

erklärt, und so rettete man das unentbehrliche Dogma von der absoluten Regelmässigkeit der Weltordnung. Der Gedanke ist wahrhaft genial und gereicht seinem Begründer, den wir doch wohl in Hipparch suchen müssen, zu hohem Ruhme.

Nun bedurfte aber die rechnende Astronomie eines sicheren Mittels, um bei einer gegebenen Excentricität einer Planetenbahn das Verhältnis der *ὁμαλή (ἀκριβής) κίνησις* zur *ἀνώμαλος (φαινομένη) κίνησις* festzustellen; sie fand dasselbe in einem rechnerischen Verfahren, das *προσθαφαίρεσις* genannt wird. Der Ausdruck ist gebildet wie ein anderes bei Ptolemaeus vorkommendes Wort *ἀξιομείωσις* aus zwei entgegengesetzten Begriffen *πρόσθεσις* (Addition) und *ἀφαίρεσις* (Subtraktion), während es im Passowschen Lexikon ganz thörichterweise mit *πρόσθε* in Verbindung gebracht und mit „das Zuvorwegnehmen“ übersetzt wird — wieder ein recht schlagender Beweis von der Unzuverlässigkeit unserer Lexika, wenn es sich um technische Begriffe handelt.

In Figur 2 bezeichnet *E* den Mittelpunkt des excentrischen Kreises, auf dem sich ein Planet mit stets gleicher Geschwindigkeit bewegt,

Fig. 2.



und *Z* den Mittelpunkt der Welt, also die Erde, den Standort des Beschauers, so dass also in *A* das Apogäum, in *D* das Perigäum sich befindet. Nun durchlaufe der Stern auf dem excentrischen Kreise die gleichen Bogen *AB* und *ΓΔ* in der gleichen Zeit. Diesen gleichen Bogen entsprechen natürlich auch die gleichen Centriwinkel *AEB* und *ΓΕΔ*. Für den Beobachter in *Z* wird aber der Bogen *AB* dem Winkel *AZB* und der Bogen *ΓΔ* dem Winkel *ΓΖΔ* entsprechen, die natürlich ungleich sind, und zwar ist *ΓΖΔ* um *ΕΓΖ* grösser als *AEB*, da die beiden Centriwinkel bei *E* gleich sind und  $\Gamma Z \Delta = \Delta E \Gamma + E \Gamma Z$  ist (Halma S. 171).

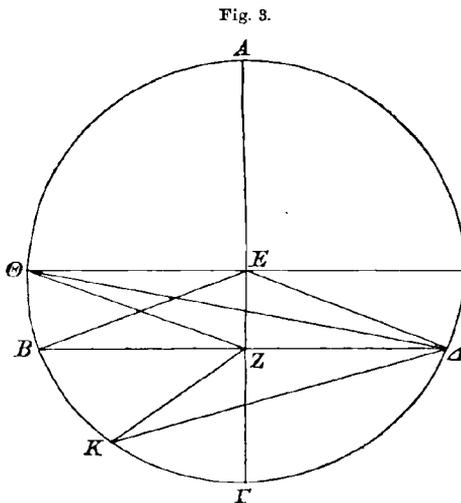
Somit bezeichnet der Winkel *ΕΓΖ* die Differenz zwischen der wahren Bewegung um den Mittelpunkt *E* und der scheinbaren Bewegung für den Beobachter in *Z*. Ebenso leuchtet ganz von selbst ein, dass die Bewegung im Apogäum für den Beobachter in *Z* stets geringer erscheint als die gleiche Bewegung im Perigäum *Δ*, da ja der Winkel *ΔΖΓ* stets grösser ist als der Winkel *AZB* (Halma S. 172 *ἀεὶ συμβέβηκε τὴν ἐλαχίστην κίνησιν κατὰ τὸ ἀπογειότατον παρακολουθεῖν, τὴν δὲ μεριστὴν κατὰ τὸ περιγειότατον, ἐπεὶ καὶ πάντοτε ἢ ὑπὸ AZB γωνία ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΖΓ*).

Es wird nun die Frage aufzuwerfen sein, wenn der Winkel  $E\Gamma Z$  am grössten sein wird, d. h. die Differenz zwischen der *ὀμαλή* (*ἀκριβής*) und der *φαινομένη* (*ἀνώμαλος*) *κίνησις*. Darauf giebt Ptolemaeus (Halma 174) die Antwort: *Λέγω δὴ πρῶτον, ὅτι καθ' ἑκατέραν αὐτῶν* — nämlich bei der Annahme einer excentrischen Bahn oder eines Epicykels, dessen Mittelpunkt sich um das Weltcentrum bewegt — *ἢ μείσθη διαφορὰ γίνεται τῆς ὀμαλῆς κινήσεως παρὰ τὴν φαινομένην ἀνώμαλον, καθ' ἣν καὶ ἡ μέση πάροδος τῶν ἀστέρων νοεῖται, ὅταν ἡ φαινομένη διάστασις ἀπὸ τοῦ ἀπογείου τεταρτημόριον ἀπολαμβάνη καὶ ὅτι ἀπὸ τοῦ ἀπογειοτάτου μέχρι τῆς εἰρημένης μέσης παρόδου χρόνος μείζων ἐστὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης ἐπὶ τὸ περιγείοτατον. Ὅθεν συμβαίνει κατὰ μὲν τὴν τῶν ἐκκέντρων ὑπόθεσιν αἰεὶ καὶ κατὰ τὴν τῶν ἐπικύκλων δὲ, ὅταν αἱ ἀπὸ τῶν ἀπογείων αὐτῶν μεταβάσεις εἰς τὰ προηγούμενα γίνωνται, τὸν ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης κινήσεως ἐπὶ τὴν μέσην χρόνον μείζονα γίνεσθαι τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης ἐπὶ τὴν μείσθη διὰ τὸ κατὰ τὸ ἀπόγειον ἐν ἑκατέρᾳ τὴν ἐλαχίστην πάροδον ἀποτελεῖσθαι κατὰ δὲ τὴν εἰς τὰ ἐπόμενα τῶν ἐπικύκλων τὰς ἀπὸ τοῦ ἀπογείου ποιούσας περιαγωγὰς τῶν ἀστέρων ἀνάπαλιν τὸν ἀπὸ τῆς μείστης κινήσεως ἐπὶ τὴν μέσην χρόνον μείζονα γίνεσθαι τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης ἐπὶ τὴν ἐλαχίστην, διὰ τὸ καὶ ἐνταῦθα κατὰ τὸ ἀπόγειον τὴν μείστην πάροδον ἀποτελεῖσθαι.*

Wir haben diese wichtige Stelle im Wortlaut unverkürzt aufgenommen, obwohl sie auch die Epicyklenhypothese behandelt, von

der noch später die Rede sein wird. Was die Annahme excentrischer Planetenbahnen betrifft, so wird also in der angeführten Stelle behauptet, die Differenz der wahren und scheinbaren Bewegung, d. h. in der Figur 2 der Winkel  $E\Gamma Z$ , werde am grössten, wenn die scheinbare Entfernung vom Apogäum  $90^\circ$  beträgt. In Figur 3 sei  $AB\Gamma A$  die excentrische Planetenbahn mit dem Centrum  $E$  und in  $Z$  auf der Erde der Standort des Beobachters, ferner  $BZA$  senkrecht auf dem Durchmesser  $AE\Gamma$  und der Planet stehe im Punkte  $B$  und  $A$ , weil dann für den Beobachter in  $Z$  die Bogen  $AB$  und  $AA$  die

scheinbare Grösse von  $90^\circ$  haben (die Winkel  $AZB$  und  $AZA$  betragen  $90^\circ$ ). Dann beträgt die Differenz der scheinbaren, ungleichen



Bewegung und der wahren, gleichmässigen Bewegung in  $B$  und  $A$  am meisten, d. h.  $EBZ > E\Theta Z$  und  $> EKZ$ . Der Winkel  $AEB$  giebt die wahre Bewegung an, der Winkel  $AZB (= 90^\circ)$  die scheinbare, und der Winkel  $EBZ$  die Differenz von beiden; es wird nun behauptet, dass  $EBZ$  grösser ist als  $E\Theta Z$  und als  $EKZ$ . Nachdem die notwendigen Hilfslinien gezogen worden sind, ergibt sich folgendes. In jedem Dreieck liegt der grössten Seite der grösste Winkel gegenüber,  $\Theta Z$  ist aber grösser als  $Z\Delta$ , folglich Winkel  $\Theta AZ > \Delta\Theta Z$ ; ferner  $E\Delta\Theta = E\Theta\Delta$ , folglich  $E\Delta Z (= EBZ) > E\Theta Z$ .

Anderseits  $\Delta Z > KZ$ , also auch  $ZK\Delta > Z\Delta K$ ;  $E K\Delta = E\Delta K$ , folglich  $E\Delta Z (= EBZ) > EKZ$ .

Dass aber der Bogen  $AB$ , von dem es heisst *περιέχει τὸν ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης κινήσεως ἐπὶ τὴν μέσην χρόνον*, grösser ist als der Bogen  $B\Gamma$  (*ἣτις περιέχει τὸν ἀπὸ τῆς μέσης κινήσεως ἐπὶ τὴν μεγίστην χρόνον*), bedarf keines weiteren Beweises (Halma S. 176).

An letzter Stelle ist nun noch zu ermitteln, wieviel der Winkel  $EBZ$  für die scheinbare Bewegung der Sonne beträgt, deren Excentricität  $EZ$  oben S. 178 zu  $\frac{1}{24}$  Radius  $EB$  berechnet worden ist. Denken wir uns um das Dreieck  $EBZ$  einen Kreis geschlagen mit dem Diameter  $EB$ , so beträgt  $EZ$   $\frac{1}{24}$  von  $BE$ , d. h. wenn  $BE$  zu 120 Einheiten angenommen wird, gleich 5 Einheiten. Mit Hilfe der Sehnentafeln findet man aber, dass dann zur Sehne  $EZ$  von 5 Einheiten ein Bogen von  $2^\circ 23'$  gehört. Somit beträgt also der Winkel  $EBZ$   $2^\circ 23'$  und der Punkt  $B$  ist auf der excentrischen wahren Sonnenbahn vom Apogeum  $92^\circ 23'$  entfernt und  $A$  liegt zwar auf dem  $270^\circ$  der scheinbaren Sonnenbahn, aber auf dem  $267^\circ 37'$  der wahren Sonnenbahn (Halma 188 fig.).

Der Winkel der *προσθαφαίρεσις* ( $EBZ$ ) wird bei seiner Annäherung an das Perigeum  $\Gamma$  und an das Apogeum  $A$  immer kleiner und beträgt in  $A$  und  $\Gamma = 0^\circ$ ; auf der Strecke  $A\Gamma$  ( $1^\circ - 180^\circ$ ) findet man die scheinbare Bewegung, indem man den Betrag der Prosthaphaeresis von dem Betrage der wahren Bewegung abzieht, während der Betrag für die Strecke  $\Gamma A$  ( $181^\circ - 360^\circ$ ) zu gleichem Zwecke addiert werden muss.

Das eigentliche Verbum für diese Umrechnung der wahren und scheinbaren Bewegung vermittelt der *προσθαφαίρεσις* ist *διακρίνειν*. Theon im Kommentar zum 3. Buche (S. 171): *τὸ γὰρ τὴν διαφορὰν τῆς ὀμαλῆς κινήσεως καὶ τῆς ἀνωμάλου λαμβάνειν τὴν ὀμαλὴν ἐστὶ διακρίνειν τῆς ἀνωμάλου*.

Schliesslich werden in einem eignen *κανόνιον* *τῆς ἡλιακῆς ἀνωμαλίας* die einzelnen Beträge der Prosthaphaeresis für die Grade der excentrischen Bahn zusammengestellt, im ersten und letzten Viertel ( $1^\circ - 90^\circ$ ;  $270^\circ - 360^\circ$ ) in Abständen von 6 zu  $6^\circ$ , in den beiden andern Vierteln in Abständen von 3 zu  $3^\circ$  (Halma S. 201).

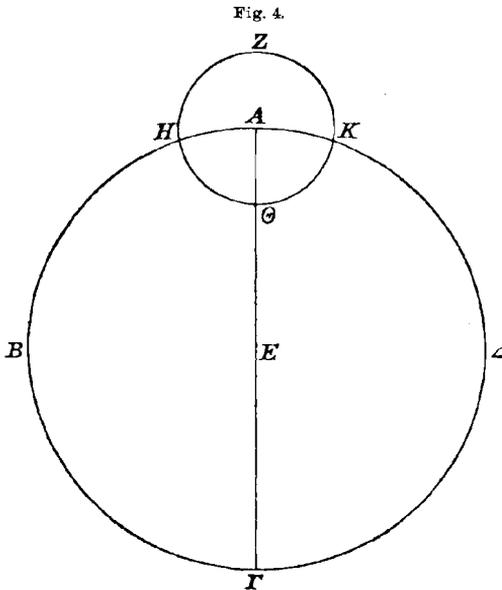
So kann man die sogenannte erste Anomalie der Sonnenbewegung mit Hilfe der Excentricität der Bahn erklären. Eine andere Möglichkeit

der Erklärung bietet der Epicykel, zu dem wir nunmehr übergehen wollen.

Die Theorie der Nebenkreise geht nach dem ausdrücklichen Zeugnis von Ptolemaeus auf Apollonius zurück und wurde dann vermutlich von Hipparch mit der Lehre von den excentrischen Bahnen verbunden; systematisch hat dann diese Verbindung der beiden Annahmen Ptolemaeus in seiner Lehre von den Planetenbewegungen ausgebildet. Während man nämlich bei der Sonne mit der einen oder der andern Annahme ganz allein auszukommen vermag, wird bei den grösseren Unregelmässigkeiten der anderen Planeten eine Verbindung beider Theorien ganz notwendig.

Zunächst gilt es zu beweisen, dass auch bei der Annahme eines Epicykels in gleicher Zeit scheinbar ungleiche Bogen von einem in regelmässiger Bewegung begriffenen Planeten zurückgelegt werden können.

In Figur 4 stellt der Kreis  $ABTA$  die Ekliptik dar mit dem Mittelpunkte  $E$  und dem Diameter  $AET$ , der Kreis  $ZHOK$  aber den



Epicykel, dessen Mittelpunkt  $A$  sich gleichmässig auf der Bahn  $ABTA$  bewegt, während der Planet selbst mit gleicher Geschwindigkeit die Bahn  $ZHOK$  durchläuft. Bewegt sich nun das Centrum des Epicykels von  $A$  nach  $B$ , so wird für das Auge des Beobachters in  $E$  der Planet nur dann im Mittelpunkte  $A$  zu stehen scheinen, wenn er sich in  $Z$  oder  $O$  (im Apogeeum oder Perigeeum des Epicykels) befindet, sonst nicht. Hat sich nun gleichzeitig der Epicykel von  $A$  nach  $B$  bewegt und der Planet selbst auf dem Epicykel von  $Z$  nach  $H$ , so wird die scheinbare Bewegung um den Bogen  $AH$  grösser

sein als die wahre von  $A$  nach  $B$ , oder wenn sich der Planet gleichzeitig nach der entgegengesetzten Richtung von  $Z$  nach  $K$  bewegt, um den Bogen  $AK$  kleiner.

Weiter ersieht man aus der Figur, dass unter der Voraussetzung, Epicykel und Planet bewegen sich gleichzeitig nach derselben Richtung, die scheinbare Bewegung am grössten ist vom Apogeeum des Epicykels an; bewegen sich dagegen Epicykel und Planet nach der entgegengesetzten Richtung, so ist die scheinbare Bewegung im Apogeeum am kleinsten (Halma S. 171fig.).

Für die Erklärung der scheinbaren Bewegung der Sonne macht es aber thatsächlich nichts aus, ob man die Excentricität der Sonnenbahn oder Bewegung der Sonne auf einem Epicykel annimmt, wenn das nämliche Verhältnis besteht einerseits zwischen Excentricität und Radius des excentrischen Kreises, anderseits zwischen Epicykelradius und Ekliptikradius, und wenn in der gleichen Zeit der Planet den Epicykel und das Epicykelcentrum die Ekliptik in der nämlichen Richtung zurücklegt (Halma S. 173).

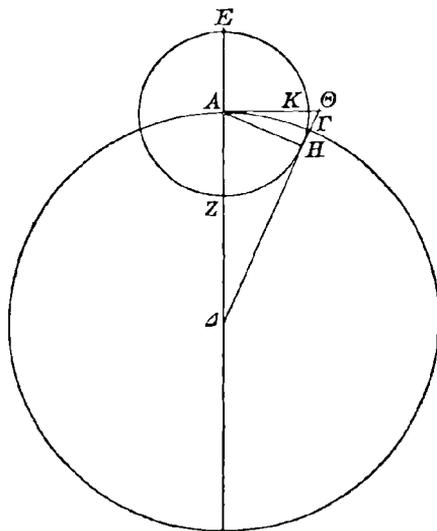
Bei der Epicykeltheorie kommt es vor allem darauf an, ob sich der Planet auf dem Epicykel und der Epicykel selbst nach der gleichen oder entgegengesetzten Richtung bewegen; ist das erstere der Fall, so ist die scheinbare Bewegung im Apogeum am grössten (im andern Falle am kleinsten) und die Zeit von der grössten Bewegung bis zur mittleren Bewegung beträgt mehr als die Zeit von der mittleren Bewegung bis zur geringsten Bewegung (im andern Falle ist die Zeit von der geringsten Bewegung bis zur mittleren grösser als die von der mittleren bis zur grössten; Halma S. 174). Nehmen wir an, dass Planet und Epicykel sich nach der nämlichen Richtung bewegen, so haben wir betreffs der Zeitdauer wieder das nämliche Resultat wie bei der Annahme einer excentrischen Bahn.

Es bleibt nun auch für die Epicykelannahme zu beweisen, dass gleichwie bei der Excentricität der Bahnen die grösste Differenz zwischen wahrer und scheinbarer Bewegung eintritt, wenn der scheinbare Abstand vom Apogeum des Epicykels  $90^\circ$  beträgt (Halma S. 174, s. oben).

In Figur 5 stelle  $H$  den Punkt dar, wo der Stern für den Beschauer in  $A$   $90^\circ$  vom Apogeum  $E$  entfernt zu sein scheint; man ziehe nun  $AH$  und ihre Verlängerung schneide die Hauptbahn in  $\Gamma$ , verbinde ferner  $H$  mit  $A$ , dann ist  $\triangle H\Gamma A$  eine Tangente des Epicykels und  $\angle AHA = 90^\circ$ .

Die gleiche (wahre) Bewegung des Planeten vom Apogeum an stellt dar der Winkel  $\angle EAH$ , die Differenz zwischen wahrer und scheinbarer Bewegung der Winkel  $\angle AHA$ ; nun ist aber  $\angle EAH = \angle AHA + \angle AHA$ , also bezeichnet  $\angle AHA$  die scheinbare Bewegung vom Apogeum an und ist nach der Voraussetzung  $= 90^\circ$ . Demnach ist  $\triangle H\Gamma A$  thatsächlich die

Fig. 5.



Tangente des Epicykels und der Winkel  $AA\Gamma$  die grösste mögliche Differenz zwischen wahrer und scheinbarer Bewegung (Halma S. 176 fig.). Ferner ist der Bogen  $EH$ , d. h. die Zeit von der geringsten Bewegung bis zur mittleren, falls der Epicykel und der Planet sich in entgegengesetzter Richtung bewegen, grösser als der Bogen  $HZ$ , d. h. die Zeit von der mittleren Bewegung bis zur schnellsten Bewegung, und zwar um das Doppelte von  $AI$ . Denn zieht man  $AK\Theta$  senkrecht zu  $AA$ , so sind die Winkel  $KAI$  und  $AA\Gamma$  gleich und Bogen  $KH$  = Bogen  $AI$ ; um denselben Betrag ist aber Bogen  $EKH$  grösser und Bogen  $HZ$  kleiner als ein Viertel des Epicykels.

Schliesslich ist auch noch für die Epicyklentheorie zu bemerken, dass das nämliche Gesetz für die Prosthaphaeresis gilt wie bei den excentrischen Bahnen, falls sich Epicykel und Planet in derselben Richtung bewegen; der Betrag wird bei der Epicyklenhälfte Apogeum-Perigeum ( $1^\circ$ — $180^\circ$ ) von der scheinbaren Bewegung abgezogen, um die wahre Bewegung zu ermitteln, bei der andern Hälfte ( $181^\circ$ — $360^\circ$ ) addiert.

Im vierten Kapitel des dritten Buches wird als Ergebnis der Beobachtung festgestellt, dass bei der Sonne bloss die erste Anomalie vorhanden ist und die Zeit von der geringsten Bewegung bis zur mittleren Bewegung mehr beträgt als die Zeit von der mittleren Bewegung bis zur grössten Bewegung. Diese Thatsache ist entweder zu erklären durch die Annahme einer excentrischen Bahn, wie oben ausführlich dargelegt wurde, oder durch die Annahme eines Epicykels, auf dem sich die Sonne selbst in der Richtung nach Westen bewegt. Die Entscheidung trifft Ptolemaeus mit den Worten *εὐλογώτερον δ' ἂν εἴη περιφερῆσαι τῇ κατ' ἐκκεντρότητα ὑποθέσει ἀπλουσιέρα οὕση καὶ ὑπὸ μᾶς, οὐχὶ δὲ ὑπὸ δύο κινήσεων συντελουμένη* (Halma S. 183 fig.). Das Apogeum der excentrischen Sonnenbahn liegt  $65^\circ 30'$  östlich vom Punkte der Frühlingsäquinoktien (Halma IV, S. 45; in Figur 1 also  $AH = 65^\circ 30'$ ); vergl. auch Wolf, Geschichte der Astronomie S. 46.

Hier dürfte es nun angezeigt sein, ehe wir zur Betrachtung der übrigen Planetenbahnen übergehen, auf einen Punkt hinzuweisen, der, soviel ich sehen kann, bei der geschichtlichen Betrachtung der Planetenbewegungen in den deutschen Bearbeitungen ganz unberücksichtigt geblieben ist, während ihm allerdings die Franzosen Delambre im Anfange des Jahrhunderts und neuerdings Tannery die gebührende Aufmerksamkeit geschenkt haben. Ich meine die sogenannte Breitenbewegung der Planeten.

In jedem modernen Handbuche der Astronomie ist die Rede von der Neigung der einzelnen Planetenbahnen gegen die Ekliptik; sie beträgt bei Merkur  $7^\circ$ , bei Venus  $3^\circ 23'$ , bei Mars  $1^\circ 51'$ , bei Jupiter  $1^\circ 19'$ , bei Saturn  $2^\circ 29'$ . Der Mond kommt für uns hierbei nicht in Betracht, da er ja um die Erde sich bewegt, und die Sonne tritt weder nördlich noch südlich bedeutend aus der Ekliptik heraus. Wenn man nun vom

Standpunkte der modernen Erkenntnis aus die Frage aufwirft, wie man sich im Altertum die Thatsache erklärte, dass die genannten Planeten (und für das Altertum dürfen wir da den Mond nicht ausschliessen) sich bald nördlich bald südlich von der Ekliptik bewegen, so bleiben die deutschen Darlegungen der Ptolemaeischen Weltanschauung die Antwort darauf schuldig, obwohl in der antiken Litteratur auch diese Frage gründlich behandelt worden ist. Auf sie bezieht sich sogar die ganze erste Hälfte des 13. Buches der *Μεγάλη σύνταξις*, von anderen Stellen ganz zu schweigen. Wir können uns diese Lücke in der deutschen Berichterstattung bloss daraus erklären, dass Ptolemaeus in allen Büchern ausser dem 13. von der Neigung der Planetenbahnen gegen die Ekliptik vollständig absieht, weil er in jenen Büchern die Längenbewegung der Planeten behandelt und hierbei von der geringen Neigung der Bahnen gegen einander ganz absehen zu dürfen glaubt, wie er ausdrücklich mehrmals versichert (Halma II S. 159 fig. 368. 371). Es wird im folgenden noch eingehender darüber gehandelt werden.

Schon beim Monde, zu dessen Betrachtung wir nun übergehen, wird die Sache aber von Bedeutung. Für die folgenden Ausführungen hat uns besondere Dienste geleistet die Dissertation von Paul Kempf „Untersuchungen über die Ptolemaeische Theorie der Mondbewegung“ (Berlin 1878).

„Das erste Ziel, welches die Astronomen zu erreichen suchten, war, einen umfassenden Cyklus zu finden, in welchem sich alle Ungleichförmigkeiten — des Mondlaufes — periodisch wiederholten. Die Chaldäer gaben dafür die bekannte Periode von 18 Jahren 10 Tagen oder vielmehr von  $6585\frac{1}{3}$  Tagen: Hipparch jedoch fand dieselbe nicht genau genug und ersetzte sie durch die andere von 126007 Tagen 1 Stunde. In diesem Zeitraume fand er 4267 synodische Monate, 4573 Perioden der Anomalie, 4612 siderische Umläufe —  $7\frac{1}{2}^{\circ}$  und 345 Sonnenjahre weniger  $7\frac{1}{2}^{\circ}$ . Die beiden ersten Zahlen durch den gemeinschaftlichen Divisor 17 teilend, fand er noch, dass 251 synodische Monate gerade gleich 269 Restitutionen der Anomalie seien, und endlich entsprachen nach ihm 5458 synodische Monate 5923 Umläufen des Argumentes der Breite“ (Kempf S. 2 fig.).

„Aus diesen Daten ergeben sich nun leicht die mittleren Bewegungen des Mondes“: Dauer eines synodischen Monats

$$29^{\circ} 31' 50'' 8''' 20'''' ,$$

der Mond hat in dieser Zeit durchlaufen

$$389^{\circ} 6' 23'' 1''' 24'''' 2''''' 30'''''' 57'''''' ,$$

somit beträgt die mittlere tägliche Bewegung

$$13^{\circ} 10' 34'' 58''' 33'''' 30''''' 30''''''$$

in der Länge. Es beträgt ferner die mittlere tägliche Bewegung der Anomalie

$$13^{\circ} 3' 53'' 56''' 29'''' 38''''' 38'''''' .$$

Es beträgt ferner die mittlere tägliche Bewegung des Arguments der Breite

$$13^{\circ} 13' 45'' 39''' 40'''' 17''''' 19''''''.$$

„Ptolemaeus bringt an diesen Hipparchischen Zahlen nur noch unbedeutende Korrekturen an und entwirft dann mit ihnen Tafeln für die mittleren Bewegungen des Mondes, wonach man leicht für jeden Zeitpunkt den mittleren Mondort berechnen kann.“ (Kempf S. 4.)

„Ptolemaeus unterscheidet in dem Mondlaufe zwei Ungleichheiten; da jedoch die zweite in den Syzygien ganz verschwindet und die erste gerade aus Mondfinsternissen, also aus Beobachtungen in der Opposition bestimmt werden soll, so kann man die Untersuchung derselben auch ohne Kenntnis der zweiten ausführen.“ (S. 4.)

Wir haben bei der Sonne gesehen, dass zur Erklärung der ersten Anomalie sowohl die Annahme einer excentrischen Sonnenbahn wie eines Epicykels, dessen Mittelpunkt um das Weltcentrum rotiert, ganz den gleichen Dienst leisten, zumal da bei der Sonne das Gestirn die Epicykelbahn in derselben Zeit durchläuft als wie das Epicykelcentrum die Bahn um das Weltcentrum. „Da aber der Mond früher an denselben Punkt der Ekliptik wiederkehrt als (in das Apogäum des Epicykels d. h.) in dieselbe Lage zur Apsidenlinie, so wird eine Komplikation in der Darstellung der Mondbewegung durch den excentrischen Kreis notwendig, wenn man sie mit der durch den Epicykel in Einklang bringen will“ (S. 6). Bei der Erklärung der ersten Ungleichheit allein hat aber Ptolemaeus die Wahl zwischen den beiden Annahmen eines Epicykels und eines excentrischen Kreises und er entscheidet sich schliesslich für die epicyklische Hypothese, indem er sich den excentrischen Kreis für die Erklärung der zweiten Ungleichheit vorbehält\* (S. 6 fig.).

Die Grösse des Epicykelradius wird berechnet mit Hilfe von Mondfinsternissen:

„Die erste der drei babylonischen Finsternisse ereignete sich im ersten Jahre des Mardocepadas in der Nacht vom 29. zum 30. des Monats Thoth. Die Finsternis war eine totale und begann eine gute Stunde nach Aufgang, d. h. etwa  $4\frac{1}{2}$  Stunde vor Mitternacht, da die Nacht damals zwölf Stunden dauerte. Die Mitte der Finsternis trat, da sie total war, etwa  $2\frac{1}{2}$  Stunden vor Mitternacht in Babylon ein. Alexandrien liegt nach den Angaben der Alten  $50^m$  westlicher als Babylon, also haben wir für die Mitte der Finsternis nach Alexandrinischer Zeit  $3^h 20^m$  vor Mitternacht. Ebenso erhalten wir für die zweite Finsternis die Nacht vom 18. zum 19. Thoth im zweiten Jahre des Mardocepadas. Die Mitte trat für Alexandrien  $50^m$  vor Mitternacht ein. Für die dritte endlich finden wir die Nacht vom 15. zum 16. Phamenoth desselben Jahres  $4^h 20^m$  vor Mitternacht.

\* Das folgende angeschlossen an Kempf S. 9—14.

Die Sonnenörter für die drei Finsternisse ergeben sich zu  $11^{\circ} 24' 30''$ ;  $11^{\circ} 13' 45''$ ;  $5^{\circ} 3' 15''$ . Mithin die Mondörter  $174^{\circ} 30' 163^{\circ} 45'$ ;  $333^{\circ} 15'$  (Differenz  $180^{\circ}$ ).

Für die Zwischenzeiten zwischen den einzelnen Finsternissen erhält Ptolemaeus mit Berücksichtigung der Zeitgleichung  $354^d 2^h 34^m$  und  $176^d 20^h 12^m$  (genauer ist  $13^m$ ). Berechnet man hiermit die mittlere Bewegung des Mondes in Länge und Anomalie, so findet man für die erste Zwischenzeit  $345^{\circ} 51'$  und  $306^{\circ} 25'$  (genauer 24), für die andere  $170^{\circ} 7'$  (8) und  $150^{\circ} 26'$ . Der wahre Unterschied in Länge ist aber zwischen den beiden ersten Orten  $349^{\circ} 15'$ , zwischen den beiden anderen  $169^{\circ} 30'$ . Es ist daher in dem ersten Intervalle die wahre Bewegung um  $3^{\circ} 24'$  grösser als die mittlere und in dem zweiten um  $0^{\circ} 37'$  kleiner; d. h. es ist der Unterschied der beiden ersten Mittelpunktsgleichungen gleich  $3^{\circ} 24'$ ; der der beiden anderen gleich  $0^{\circ} 37'$ .

Es sei nun (Fig. 6)  $D$  das Centrum visionis, die Erde  $K$  der Epicykelmittelpunkt, ferner  $ABC$  die Punkte, in welchen sich der Mond während der drei Finsternisse befand. Dann geht aus dem Gesagten hervor

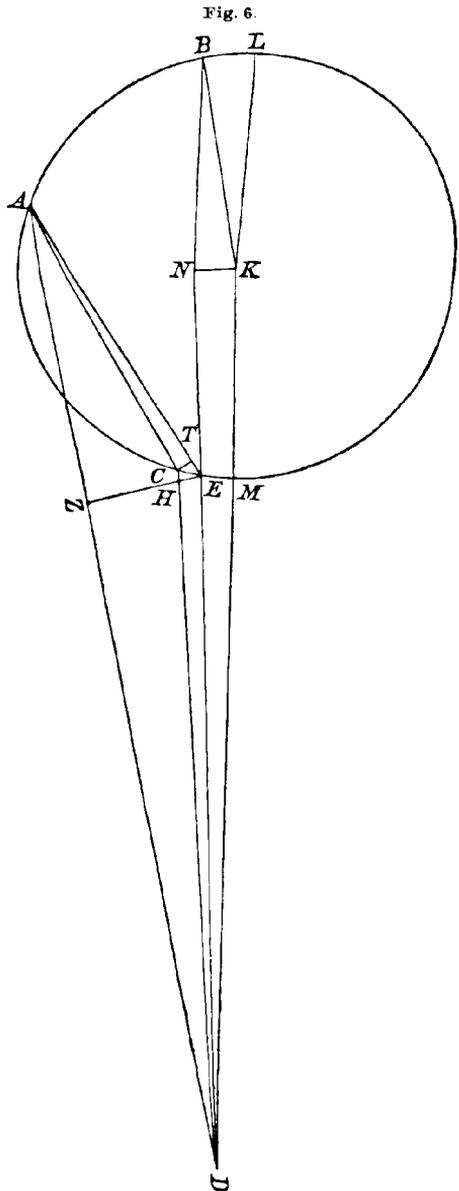
$$\angle ADB = 3^{\circ} 24',$$

$$\angle CDB = 0^{\circ} 37',$$

also

$$\angle ADC = 2^{\circ} 47'.$$

Ferner Bogen  $BA = 360^{\circ} - 306^{\circ} 25' = 53^{\circ} 35'$ , Bogen  $AC = 150^{\circ} 26' - 53^{\circ} 35' = 96^{\circ} 51'$ , Bogen  $BC = 150^{\circ} 26'$ . Aus den vorliegenden Daten soll das Verhältnis von  $DK:LK$  berechnet werden.



Fällen wir von  $E$  auf  $AD$  und  $CD$  die Lote  $EZ$  und  $EH$  und von  $C$  auf  $AE$  das Lot  $CT$ , dann ist  $\angle EDZ = 3^\circ 24'$ ; aus der Sehnentafel ergibt sich  $EZ = 7^p 7' \frac{DE}{120}$ .

Ferner ist

$$\begin{aligned} \angle AEB &= \frac{1}{2} AKB = \frac{1}{2} 53^\circ 35' = 26^\circ 47' 30''; \\ \angle EDA &= 3^\circ 24' \\ \hline \angle EAD &= 23^\circ 23' 30'', \end{aligned}$$

folglich  $EZ = 47^p 38' 30 \frac{AE}{120}$ . Mithin wenn  $EZ = 7^p 7' \frac{DE}{120}$ , so ist

$$AE = \frac{120^p}{47^p 38' \frac{1}{2}} \cdot 7^p 7' \frac{DE}{120} = 17^p 55' 32'' \frac{DE}{120}.$$

Nun ist  $\angle BDC = 0^\circ 37'$ , also Sehne  $EH = 1^p 17' 30'' \frac{DE}{120}$ .  
 $\angle BEC = \frac{150^\circ 26'}{2} = 75^\circ 13'$ ,  $\angle CDE = 0^\circ 37'$ , also  $\angle ECD = 74^\circ 36'$ ,  
 woraus folgt Sehne  $EH = 115^p 41' 29'' \frac{EC}{120}$ . Wenn aber

$$EH = 1^p 17' 30'' \frac{DE}{120},$$

so ist  $EC = 1^p 20' 23'' \frac{DE}{120}$ .

$$\angle AEC = \frac{96^\circ 51'}{2} = 48^\circ 25' \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \angle TCE = 41^\circ 34' 30''.$$

Also die dazu gehörigen Sehnen

$$CT = 89^p 46' 13'' \frac{CE}{120}; \quad ET = 79^p 37' 55'' \frac{CE}{120}$$

$$CT = 1^p 0' 8'' \frac{DE}{120}; \quad ET = 0^p 53' 21'' \frac{DE}{120} \left( \text{da } EC = 1^p 20' 23'' \frac{DE}{120} \right),$$

$$AE = 17^p 55' 32'' \frac{DE}{120}, \text{ folglich}$$

$$AT (= AE - ET) = 17^p 55' 32'' - 0^p 53' 21'' = 17^p 2' 11'' \frac{DE}{120}.$$

Nun ist  $AC^2 = AT^2 + CT^2 = 1^p 0' 16'' + 290^p 14' 19'' = 291^p 14' 35''$ ;  
 daraus ergibt sich  $AC = 17^p 3' 57'' \frac{DE}{120}$ . Andererseits ist aber auch  
 $AC = \text{Bogen } AEC = 89^p 46' 14''$  nach der Sehnentafel, wenn der  
 Durchmesser des Epicykels  $2r = 120^p$  ist. Aus der Vergleichung  
 dieser beiden Resultate ergibt sich

$$\left. \begin{aligned} DE &= 631^p 13' 48'' \\ CE &= 7^p 2' 50'' \end{aligned} \right\} \text{ wenn } r = 60^p \text{ ist.}$$

Der Bogen über  $CE$  wird somit (nach der Sehntafel)  $CAE = 6^{\circ} 44' 1''$  und da Bogen  $BAC = 150^{\circ} 26'$  war, so ist Bogen  $BCE = 157^{\circ} 10' 1''$  ( $150^{\circ} 26' + 6^{\circ} 44' 1''$ ); die Sehne  $BE$  mithin  $= 117^{\circ} 37' 52''$ . Es ist dies kleiner als der Durchmesser 120, folglich liegt das Centrum des Epicykels ausserhalb des Kreisabschnittes  $BACE$ , wie auch in der Figur angenommen worden ist.

Nun ist  $BD = BE + ED$ ; ferner  $BD \cdot DE = LD \cdot DM$ , wenn  $M$  das Perigeum,  $L$  das Apogeum des Epicykels ist, oder

$$BD \cdot DE = DL(LD - LM) = LD^2 - LD \cdot LM.$$

Andererseits ist  $DK^2 = LK^2 + LD^2 - LM \cdot LD = LK^2 + BD \cdot DE$ .

Es ist

$$\begin{array}{l} BD = 748^{\circ} 51' 20'' \\ DE = 631^{\circ} 13' 48'' \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{(oben berechnet, desgl. } BE; \\ \text{die Summe ergibt } BD). \end{array} \right.$$

Das Produkt

$$= 472700^{\circ} 5' 32'' \quad (BD \cdot DE)$$

$$LK^2 = 3600^{\circ} 0' 0''$$

$$DK^2 = 476300^{\circ} 5' 32''$$

$$DK = 690^{\circ} 8' 42'',$$

während der Epicykelradius  $= 60$  ist. Setzen wir daher  $DK = 60^{\circ}$ , so wird der Epicykelradius  $= 5^{\circ} 12,978'$ , oder wie Ptolemaeus sagt  $r = 5^{\circ} 13' \xi\gamma\mu\sigma\tau\alpha$ .

Im Anschluss daran wird weiter die Entfernung des Punktes  $B$  vom Apogeum und die Mittelpunktsgleichung für die zweite Finsternis, also die Winkel  $LKB$  und  $LDB$  berechnet,  $= 12^{\circ} 24'$  und  $0^{\circ} 59'$ . (Kempf S. 13 u. 14.)

Für unsere gegenwärtigen Zwecke bleibt nun nur noch zu berechnen die Excentricität der Bahn des Mondes; das geschieht im vierten Kapitel des fünften Buches. Das Ergebnis beträgt: Excentricität  $= 10^{\circ} 19'$ , wenn der Diameter  $= 120$  Einheiten gesetzt wird. (Kempf S. 23 fig.)

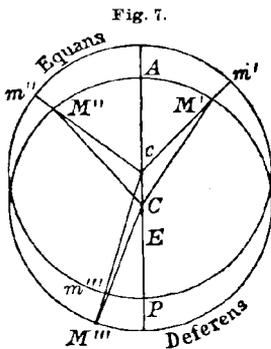
Wolf (Handbuch I, S. 452): „Schliesslich ist für Ptolemaeus das Ergebnis, soweit es für unsere Zwecke in Betracht kommt, dahin zusammenzufassen, „dass der Mond den Epicykel in einem anomalistischen Monat ( $27^d 13^h 18^m 37,44^s$ ) durchläuft, während gleichzeitig der Mittelpunkt des Epicykels sich in einem zweiten, dem sogenannten deferierenden Kreise, gleichförmig in einem drakonitischen Monat ( $27^d 5^h 5^m 35,81^s$ ) um die Erde bewegt; dabei ist der Deferens gegen die Ekliptik um die zu  $5^{\circ} 0'$  bestimmte Neigung der Mondbahn geneigt und seine Knotenlinie besitzt eine retrograde Bewegung, die dem Überschusse der Bewegung in Beziehung auf die Knoten über die Bewegung in Länge entspricht.“ (Ptolemaeus, Hypotheseis, Ilalma IV S. 46.)

Wolf (Handbuch I, S. 528 fig.): „Wir haben somit gesehen, in welch geschickter Weise Hipparch — und nach seinem Vorgange Ptolemaeus — erste Theorien der Sonne und des Mondes aufzustellen

wussten, um auf diesem Wege das gewünschte Ziel in befriedigender Weise zu erreichen“. Dazu das nötige Quellenmaterial *Almagest IX, cap. 2* (*Halma S. 118/119*).

Zunächst berechnet nun Ptolemaeus die *μέση κίνησις* der fünf übrigen Planeten und geht dann im fünften Kapitel (*S. 156 fig.*) über zu den allgemeinen Voraussetzungen seiner Theorie. Zur Verfügung stehen ihm nur die Excentricität der Planetenbahnen und die Epicykeln. Mit diesen Hilfsmitteln der Erklärung sucht er sich nun in der Weise abzufinden, dass er (*S. 157*) annimmt, die Planeten selbst bewegen sich auf einem Epicykel, aber nicht wie der Mond von Ost nach West, sondern von West nach Ost, weil ihre schnellste Bewegung im Apogeum stattfindet, nicht im Perigeum wie beim Monde. Andererseits lehrt die Beobachtung der fünf Planeten, „τὸν ἀπὸ τῆς ἐλαχίστης κινήσεως ἐπὶ τὴν μέσην χρόνον μείζονα γιννόμενον ἀεὶ τοῦ ἀπὸ τῆς μέσης ἐπὶ τὴν μεγίστην“, und diese Thatsache wird am natürlichsten erklärt durch die Annahme, dass das Centrum des Epicykels sich auf der excentrischen Bahn von West nach Ost bewegt.

Allein auch das genügte Ptolemaeus noch nicht, da er konstatieren musste, „pour chacun de ces astres — die fünf Planeten gemeint — l'inégalité, qu'on trouve par les plus grandes différences d'anomalie



Zodiacale, est presque double de l'inégalité qui provient de la grandeur de l'excentricité causée par les progressions de l'épicycle dans les plus grandes et moindres distances (d'où il suit, que le centre des moyens mouvements est placé à une distance qui n'est que la moitié de la ligne qui joint le centre de l'excentrique et du zodiaque ou moitié de l'excentricité)... Also le cercle exentrique sur lequel est toujours porté le centre de l'épicycle est décrit d'un centre qui est le point du milieu entre le centre du zodiaque et celui qui rend uniforme la circonvolution de l'épicycle; parceque pour chacun de ces astres... (Fortsetzung vorhin)“ — *S. 210 Halma*; vergl. *S. 158*. Dazu *Wolf (Handbuch S. 530)*: „Ptolemaeus entschloss sich, den bisherigen excentrischen Kreis zwar als Equans beizubehalten, und sich einen Punkt in demselben gleichförmig bewegen zu lassen — dagegen als Deferens oder als Träger des Epicykels einen zweiten jenem gleichen Kreis einzuführen, dessen Centrum die Mitte zwischen Erde und Centrum des Equans einnahm und von dem aus er die für eine gewisse Zeit im Equans erhaltene Lage *m* nach *M* auf den Deferens übertrug. Er scheint allerdings nicht bemerkt zu haben, dass er durch diese Konstruktion das bis dahin so ängstlich festgehaltene Grundprinzip verletzte; denn wenn auch die  $\angle m'cm''$  und  $m''cm'''$  den Zwischenzeiten proportional angenommen werden, so

sind es eben die  $L M' C M''$  und  $M'' C M'''$  nicht mehr, und es ist also die Bewegung im Deferens nicht mehr eine gleichförmige.“

Nur noch zwei Punkte verdienen eine Hervorhebung, dass nämlich das Apogeum und Perigeum der excentrischen Kreise an der Bewegung der Fixsternsphäre nach Osten hin ( $1^\circ$  in 100 Jahren) teilnehmen, sowie dass noch eine besondere Thatsache beim Merkur vorliegt, da derselbe bei einem Umlaufe um die Erde zweimal im Perigeum gerade wie der Mond beobachtet wurde. Der letztere Umstand führte zu der Annahme, dass beim Merkur das Centrum des Deferens nicht festliegt, sondern während eines Umlaufes des Planeten um die Erde gleichzeitig in der Richtung von Ost nach West einen Kreis um den Mittelpunkt des Equans beschreibt (also  $C$  rotiert von Ost nach West um  $c$ ). — Halma S. 158 fig., S. 171 fig., 175.

Des weiteren stellt dann Ptolemaeus schliesslich fest, in welchem Teile das Apogeum der Planetenbahnen anzusetzen ist, wieviel ihre Excentricität beträgt und wie gross der Radius des betreffenden Epicykels ist.

	Apogeum	Excentricität	Radius des Epicykels.
♃	$3^\circ 11' 45''$	$\frac{6}{60} : 0,1$ (Tannery 0,2)	$\frac{39\frac{1}{2}}{60} R = 0,65833 \dots$
♄		$\frac{2\frac{3}{4}}{60} : 0,0458333$	$\frac{11\frac{1}{2}}{60} R = 0,19166 \dots$
♅		$\frac{3\frac{5}{12}}{60} : 0,05694$ (2)	$\frac{6\frac{1}{2}}{60} R = 0,10833 \dots$
♆		$\frac{6}{60} : 0,1$ (Tannery 0,05)	$\frac{22\frac{1}{2}}{60} R = 0,375$ (Tannery anders)
♁		$\frac{2\frac{1}{2}}{60} : 0,05$ (Tannery anders)	$\frac{43\frac{1}{10}}{60} R = 0,71944$ (Tannery anders).

In den Erörterungen, die sich auf die Bewegung der Planeten ( $\ell$ ) in der Länge beziehen, lässt Ptolemaeus die Neigung der Planetenbahnen gegen die Ekliptik ganz ausser acht, weil der geringe Betrag derselben für jene Frage so gut wie gar nicht in Betracht kommt (Halma II S. 368: *μηδευιᾶς ὡς ἔφαμεν διὰ τοῦτο γινομένης ἀξιολόγου παραλλαγῆς περὶ τὴν κατὰ μῆκος πάροδον ἢ τὰς ἀποδείξεις τῶν ἀνωμαλιῶν μέχρι γε τῶν τηλικούτων ἐγκλίσεων*). So erklärt es sich wohl, dass häufig in geschichtlichen Betrachtungen der Ptolemaeischen Theorie von der Bewegung der Planeten in der Breite gar nicht gesprochen wird; gleichwohl muss sich doch jedem, der in den wichtigsten Annahmen der modernen Astronomie bewandert ist, der Gedanke aufdrängen: wie suchte man denn im Altertume die Erscheinungen zu erklären, die sich für uns aus der Neigung der Planetenbahnen gegen die Ekliptik ergeben, d. h. den Stand der Gestirne bald nördlich bald südlich von der Ekliptik? In den Büchern 9—12 wird immer angenommen, die einzelnen Ebenen der Planetenbahnen fallen mit der Ekliptik zusammen, dabei hebt aber Ptolemaeus zu wiederholten Malen

ausdrücklich hervor, diese Annahme widerspreche der Wirklichkeit, man könne sie indessen einstweilen gelten lassen, weil der geringe Betrag der Neigung kaum in Betracht komme.

Wie gesagt, Ptolemaeus hat alles gethan, um einer falschen Annahme vorzubeugen, im 13. Buche aber will er in der ersten Hälfte das nachholen, was bisher ausser acht geblieben ist, nämlich die Bewegung der Planeten in der Breite (*κατὰ πλάτος*) feststellen.

Über diese neue Bewegung, deren Betrachtung uns nun im folgenden beschäftigen soll, habe ich eine eingehendere Erörterung nur bei Delambre (im zweiten Bande seiner *L'Histoire de l'Astronomie*) und bei Tannery (*Recherches sur l'histoire de l'Astronomie ancienne*) gefunden, die aber nicht in jeder Hinsicht befriedigen; ausserdem kommt auch noch in Betracht, dass Tannery seinen Auseinandersetzungen nicht die *Μεγάλη σύνταξις*, sondern die *Ἐποθέσεις* zu Grunde gelegt hat, die hier in einem Hauptpunkte merkwürdigerweise vom astronomischen Hauptwerke abweichen. Überdies findet sich zu dem betreffenden Abschnitte in der Halmaschen Ausgabe folgende Note von Delambre (S. 25): *Cette traduction, qui rend fidèlement le sens de l'auteur, en abrégant ses longueurs, modifie quelques unes de ses expressions trop vagues, trop incomplètes et trop obscures. Tout ce chapitre est difficile à entendre, impossible à retenir. On ne peut se faire une idée bien précise de toute cette théorie qu'en examinant les tables où elle est renfermée. Cette remarque s'applique plus ou moins à tout ce qui suit jusqu'aux tables.*“

Andererseits findet sich, gleichsam um die verwickelte Schwierigkeit seiner Theorie zu entschuldigen, ein höchst charakteristischer Erguss bei Ptolemaeus, den Delambre in seinem geschichtlichen Werke frei so wiedergibt (S. 395): *Que personne n'imagine que ces hypothèses soient difficiles, en voyant les embarras de nos machines; car il ne faut pas comparer les choses humaines aux divines — Alors tout nous paraîtra plus simple que ce qui le paraît le plus parmi nous, parce qu'il sera impossible d'y soupçonner le moindre travail ni la moindre difficulté.*“

Je dunkler und schwerverständlicher die Auseinandersetzungen von Ptolemaeus sind, um so grösserer Vorsicht wird es bedürfen bei der Prüfung des Ptolemaeischen Textes.

Wir haben auszugehen von den Beobachtungen und sorgfältig darauf zu achten, welche Schlüsse für die Theorie daraus abgeleitet werden.

### 1. Beobachtung (Halma II S. 368).

Wenn eine genaue Berechnung (*διευκρινημένος*) des Punktes, wo sich das Epicykelcentrum auf der excentrischen Bahn befindet, sowie eine genaue Berechnung, wo der Planet sich auf seinem Epicykel befindet, ergibt, dass beide Male der Abstand  $90^\circ$  (*τεταρτημόριον*) beträgt, einmal vom Apogeum bis Perigeum der excentrischen Bahn (*βόρειον καὶ*

νότιον πέρας τοῦ ἐκκέντρον), das andere Mal vom Apogeum-Perigeum des Epicykels (ὁ δὲ τοῦ οὐκείου ἀπογείου), dann erscheint der Planet genau in der Ekliptik.

Daraus ergibt sich erstens: die Ebenen der Ekliptik und des excentrischen Kreises sind so gegeneinander geneigt, dass der Mittelpunkt des Zodiakus auf der gemeinsamen Geraden liegt, in der sich die beiden Ebenen schneiden, und dass diese senkrecht steht zur Linie Apogeum-Perigeum der excentrischen Bahn, zweitens: die Ebenen des Epicykels und der excentrischen Bahn sind so gegeneinander geneigt, dass die Gerade, in der sie sich schneiden, senkrecht steht zur Linie Apogeum-Perigeum des Epicykels.

Diese Annahme gilt für alle fünf Planeten.

## 2. Beobachtung (Halma II S. 368: Πάλιν δὲ ἐπὶ μὲν τῶν τριῶν etc.).

Wenn Mars, Jupiter, Saturn sich in dem ἀπογειότερον τμήμα des excentrischen Kreises befinden, stehen sie nördlich von der Ekliptik und zwar am meisten nördlich im Perigeum des Epicykels; wenn sie sich in dem περιγειότερον τμήμα des excentrischen Kreises befinden, stehen sie südlich von der Ekliptik (dazu fügt Theon in seinem Kommentar S. 412 ergänzend: πάλιν τῶ πλείστῳ νοτιώτεροι, ὅταν ἐν τοῖς περιγειοτέροις τῶν ἐπικύκλων τυγχάνωσιν, ἢ περὶ πρὸς τοῖς ἀπογειοτέροις). Ferner beobachtet man, dass die βορειότατα πέριτα (das können aber wohl nicht die Linien Apogeum-Perigeum sein — zur Berichtigung von S. 192 —) bei der Bahn des Saturn und Jupiter im Anfange der Krebssehren liegen, bei Mars am Ende des Krebses und zwar σχεδὸν περὶ αὐτὸ τὸ ἀπογειότατον.

Daraus ergibt sich, dass die excentrischen Bahnen an den entsprechenden Teilen des Zodiakus nach Norden geneigt sind, die entgegengesetzten nach Süden und dass die Perigeen der Epicyklen nach derselben Seite geneigt sind wie die excentrischen Bahnen, da wo sie sich befinden; nämlich wie Theon S. 412 erläuternd hinzufügt ἐπὶ μὲν τῶν βορειῶν τοῦ ἐκκέντρον ἐπὶ τὰ βόρεια, ἐπὶ δὲ τῶν νοτιῶν ἐπὶ τὰ νότια. Die Durchmesser der Epicyklen aber, die senkrecht stehen zum Epicykeldurchmesser Apogeum-Perigeum, bleiben stets der Ekliptik parallel.

## 3. Beobachtung (Halma S. 369 Ἐπὶ δὲ Ἀφροδίτης καὶ Ἑρμοῦ etc.).

Wenn Venus und Merkur im Apogeum oder Perigeum des excentrischen Kreises sich befinden, dann unterscheiden sich die Planetenbewegungen im Apogeum und im Perigeum des Epicykels hinsichtlich der Breite (κατὰ πλάτος) voneinander nicht, sondern stets um den gleichen Betrag finden sie statt nördlicher bei der Venus, südlicher bei dem Merkur.

Für den Fall der grössten Elongation (κατὰ τὰς μεγίστας ἀποστάσεις) des Planeten im Apogeum oder Perigeum des excentrischen Kreises beträgt der Unterschied in der Breite bei der östlichen und westlichen

Elongation ziemlich viel, und zwar steht im Apogeum des excentrischen Kreises ♀ nördlicher als der excentrische Kreis, im Perigeum südlicher als der excentrische Kreis: bei ☿ ist es umgekehrt. Ich lese die offenbar korrupte Stelle S. 369 flg. so: *Αἱ δὲ κατὰ τὰς μεγίστας ἀποστάσεις αὐτῶν πάροδοι ἀλλήλων μὲν τῷ πλείστῳ διαφέρουσι τοῦτέστιν αἱ ἔφωι τῶν ἐσπερίων κατὰ τὰ ἀπόγεια καὶ περιγεια* (S. 370) *τῆς παρὰ* (Theon liest dafür *περὶ*) *τὸν ἑκκεντρον διαφορᾶς εἰς τὰ ἐναντία τῷ ἴσῳ πάλιν τῆς ἐπομένης καὶ ἐσπερίου μεγίστης ἀποστάσεως* — d. h. bei der grössten östlichen und westlichen Elongation — *ἐπὶ μὲν τοῦ τῆς Ἀφροδίτης κατὰ τὸ ἀπόγειον τοῦ ἑκκεντρον βορειοτέρας γινομένης καὶ κατὰ τὸ περιγείον νοτιωτέρας, ἐπὶ δὲ Ἑρμοῦ τὸ ἐναντίον κατὰ τὸ ἀπόγειον νοτιωτέρας καὶ κατὰ τὸ περιγείον βορειοτέρας.*

Ergiebt die genaue Berechnung, dass das Epicykelcentrum sich im Knoten der Ekliptik und der excentrischen Bahn befindet, dann ergeben sich zwei Möglichkeiten: 1. der Planet befindet sich auf seinem Epicykel einen Quadranten entfernt vom Apogeum und Perigeum seines Epicykels — grösste Elongation — und erscheint dann beide Male in der Ekliptik; 2. der Planet befindet sich im Apogeum oder Perigeum des Epicykels, dann ist beide Male der Breitenunterschied sehr beträchtlich, da ♀ im Knoten des Halbkreises  $1^{\circ}$ — $180^{\circ}$  vom Apogeum des excentrischen Kreises an gerechnet (*ἐπὶ τοῦ κατὰ τὸ ἀφαιρετικὸν ἡμικύκλιον συνδέσμου*) südlich von der Ekliptik steht, im Knoten des Halbkreises  $180^{\circ}$ — $360^{\circ}$  nördlich von der Ekliptik; entgegengesetzt ist es bei ☿ (er steht im *ἀφαιρετικὸν ἡμικύκλιον*-Knoten nördlich, im entgegengesetzten südlich von der Ekliptik).

Die hier aufgeführten Beobachtungen führen zu folgendem Ergebnis (S. 370: *ὥστε καὶ ἐκ τούτου συνάγεσθαι, διότι αἱ μὲν τῶν ἑκκεντρον ἐγκλίσεις* etc.): bei ♀ und ☿ bewegen sich entsprechend den Umläufen der Epicyklen auch die excentrischen Bahnen auf und nieder und zwar fallen sie, wenn der Epicykel in die Knoten kommt, mit der Ebene der Ekliptik zusammen, aber in dem Apogeum und Perigeum des excentrischen Kreises wird der Epicykel der Venus stets am weitesten nach Norden gehoben und der Epicykel des Merkur am tiefsten nach Süden hinabgedrückt. Dabei wird im Epicykel der Diameter Apogeum-Perigeum am meisten geneigt gegen den excentrischen Kreis in den beiden Knoten, der dazu senkrecht stehende Diameter des Epicykels  $90^{\circ}$ — $270^{\circ}$ , an den die grösste Elongation geknüpft ist, am meisten geneigt zu der excentrischen Bahn im Apogeum und Perigeum des excentrischen Kreises. Jene Neigung ist die *ἐγκλισις*, diese die *λόξωσις*.

Das ist im wesentlichen der Inhalt des ersten Kapitels vom 13. Buche der *Μεγάλη σύνταξις*. Im dritten Kapitel — auf das zweite ist noch später zurückzukommen — wird dann die Grösse der Neigung der excentrischen Bahn gegen die Ekliptik und des Epicykels gegen die excentrische Bahn berechnet und zwar auf „*τοῦ διὰ τῶν πόλων*

τοῦ ἐγκλινομένου καὶ ὀρθοῦ πρὸς τὸ τοῦ διὰ μέσων ἐπίπεδον γραφομένου μεγίστου κύκλου (S. 376).

1. (S. 376: ὅταν μὲν γὰρ κατὰ τὰ ἀπόγεια καὶ περιγεια etc.)

Die Centren der Epicykeln von ♀ und ☿ befinden sich im Apogäum und Perigäum der excentrischen Bahn und der Planet selbst steht im Apogäum oder im Perigäum seines Epicykels, dann sollte der Abstand der Planeten von der Ekliptik beide Male gleichviel betragen (bei ♀ nach Norden, bei ☿ nach Süden). Beobachtungen haben ergeben, dass ♀ stets ca.  $\frac{1}{6}^{\circ}$  nördlich von der Ekliptik steht, ☿ stets  $\frac{3}{4}^{\circ}$  südlich von der Ekliptik. Da nun bei den gemachten Annahmen der Planet selbst, im Apogäum-Perigäum seines Epicykels befindlich, in der Ebene des excentrischen Kreises steht, so bezeichnen natürlich jene Werte die Neigung der excentrischen Bahnen von ♀ und ☿ gegen die Ekliptik.

2. (S. 376: Περὶ δὲ τὰς μεγίστας τοῦ ἡλίου διαστάσεις etc.)

Die Centren der Epicykeln von ♀ und ☿ befinden sich im Apogäum und Perigäum der excentrischen Bahn und der Planet selbst befindet sich in der grössten Elongation, d. h. also an den Enden des Epicykeldurchmessers  $90^{\circ}$ — $270^{\circ}$ ; dann beträgt der Unterschied in dem nördlichen und südlichen Abstände von der Ekliptik im Mittel etwa  $5^{\circ}$ . Die Hälfte davon ( $2\frac{1}{2}^{\circ}$ ) ergibt die *λόξωσις* des Epicykeldurchmessers  $90^{\circ}$ — $270^{\circ}$  im Apogäum und Perigäum des excentrischen Kreises.

3. (S. 377: ὅταν δὲ κατὰ τοὺς συνδέσμους καὶ τὰς etc.)

Das Centrum des Epicykels befindet sich in den beiden Knoten und Venus steht im Apogäum des Epicykels, denn steht sie  $1^{\circ}$  nördlich oder  $1^{\circ}$  südlich von der Ekliptik, je nachdem das Epicykelcentrum in dem einen oder in dem andern Knoten sich befindet; steht dagegen Venus im Perigäum des Epicykels unter der nämlichen Voraussetzung, so beträgt der Abstand von der Ekliptik  $6\frac{1}{3}^{\circ}$  nördlich oder südlich, je nach dem Knoten, in dem sich das Epicykelcentrum befindet. Daraus ergibt sich, dass die Neigung des Epicykeldurchmessers Apogäum-Perigäum (*ἐγκλισις*) gegen die in den Knoten zusammenfallenden Ebenen des excentrischen Kreises und der Ekliptik  $2\frac{1}{2}^{\circ}$  beträgt.

Steht Merkur unter der gleichen Voraussetzung im Apogäum des Epicykels, so steht er südlicher oder nördlicher von der Ekliptik, je nach dem Knoten, in dem sich das Epicykelcentrum befindet,  $1\frac{3}{4}^{\circ}$ ; im Perigäum des Epicykels  $4^{\circ}$ .

4.

Schon oben ist dargelegt worden, dass unter der gleichen Voraussetzung, wenn der Planet in der grössten Elongation am Ende des Epicykeldiameters  $90^{\circ}$ — $270^{\circ}$  steht, der Planet alsdann in der Ekliptik sich befindet (d. h. die *λόξωσις* ist gleich Null). Vergl. S. 368: ὅταν

ὅ τε τοῦ διευκρινημένου μήκους καὶ ὁ τῆς διευκρινημένης ἀνωμαλίας ἀριθμὸς ἐκάτερος ἅμα τεταρτημόριον ἔγγιστα ἀπέχη... κατ' αὐτοῦ τοῦ περὶ τὸν διὰ μέσων ἐπιπέδου φαίνεσθαι τοὺς ἀστέρας).

Wir müssen noch einmal zurückkommen auf die Bewegung der beiden sich rechtwinklig schneidenden Diameter des Epicykels Apogeum-Perigeum und (senkrecht dazu)  $90^{\circ}$ — $270^{\circ}$  bei allen fünf Planeten bez. bei ♀ und ☿. Im zweiten Kapitel wird deren Bewegung auf und nieder ausführlich dargestellt, dabei heisst es, die Epicykel-Diameter Apogeum-Perigeum kommen an einem bestimmten Punkte genau in die Ebene des excentrischen Kreises zu liegen und dann παραφέρονται ὑπὸ κυκλίσκων παρακειμένων φέρ' εἰπεῖν τοῖς περιγείοις αὐτῶν πέρασι, συμμέτρων μὲν τῇ τηλικαύτη (S. 372) πρὸς τὸ πλάτος παραχωρήσει, ὀρθῶν δὲ πρὸς τὰ τῶν ἐκκέντρων ἐπίπεδα καὶ τὰ κέντρα ἐχόντων ἐν αὐτοῖς, περιστρεφομένων δ' ὀμαλῶς καὶ ἀκολούθως ταῖς κατὰ μήκος παρόδοις, ἀπὸ τῆς ἐτέρας τῶν κατὰ τὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν τε καὶ τῶν ἐπικύκλων ἀρχῆς ὡς πρὸς τὰς ἄρκτους καθ' ὑπόθεσιν („ils portent le planète vers les ourses, par exemple“) καὶ συμπαραγόντων τὰ ἐπίπεδα τῶν ἐπικύκλων, κατὰ μὲν τὴν ἐπὶ τὸ πρῶτον τεταρτημόριον στροφῆν ἐπὶ τὸ βορειότατον δηλονότι πέρασ, κατὰ δὲ τὴν ἐξῆς ἐπὶ τὸ τοῦ ἐκκέντρου πάλιν ἐπίπεδον, κατὰ δὲ τὴν ἐπὶ τὸ τρίτον ἐπὶ τὸ νοτιώτατον πέρασ, κατὰ δὲ τὴν ἐπὶ τὸ λείπον ἀποκατάστασιν ἐπὶ τὸ τῆς ἀρχῆς ἐπίπεδον. Dieses Auf- und Niedergehen des Epicykel-Diameters Apogeum-Perigeum beginnt mit dem Aufsteigen aus der Ebene des excentrischen Kreises nach Nord bei ♄ im aufsteigenden Knoten, bei ♀ im Perigeum der excentrischen Bahn, bei ☿ im Apogeum.

Der zum Diameter Apogeum-Perigeum senkrecht stehende Epicykel-Diameter  $90^{\circ}$ — $270^{\circ}$  bleibt bei ♄ stets parallel zur Ekliptikebene; anders bei ♀ und ☿, wo ebenfalls an diesen Diameter die grösste Elongation geknüpft ist: (S. 372) ἐπὶ δὲ Ἐρμοῦ καὶ Ἀφροδίτης καὶ αὐταὶ γινόμεναι πάλιν ἀπὸ τινος ἀρχῆς ἐν τῷ τοῦ διαμέσων ἐπιπέδῳ παραφέρονται ὑπὸ κυκλίσκων παρακειμένων τοῖς ἐπομένοις φέρ' εἰπεῖν αὐτῶν πέρασι, συμμέτρων μὲν πάλιν τῇ τηλικαύτη κατὰ πλάτος παραχωρήσει, ὀρθῶν δὲ πρὸς τὸ τοῦ διὰ μέσων ἐπίπεδον καὶ τὰ κέντρα ἐχόντων ἐπὶ τῶν διαμέτρων τῶν (S. 373) παραλλήλων τῷ τοῦ διὰ μέσων ἐπιπέδῳ, περιστρεφομένων δὲ ἰσοταχῶς τοῖς ἄλλοις ἀπὸ τῆς ἐτέρας τῶν κατὰ τὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων αὐτῶν τε καὶ τῶν ἐπικύκλων ἀρχῆς ὡς πρὸς τὰς ἄρκτους πάλιν καθ' ὑπόθεσιν καὶ συμπαραγόντων τὰ πρὸς ἐσπέραν πέρατα τῶν ἐκκειμένων διαμέτρων κατὰ τὴν αὐτὴν τάξιν δηλονότι τῇ προειρημένη. Bei der Venus beginnt das Aufsteigen des östlichen Endes vom Diameter  $90^{\circ}$ — $270^{\circ}$  bei dem Knoten κατὰ τὸ προσθετικὸν ἡμικύκλιον, beim Merkur im Knoten κατὰ τὸ ἀφαιρετικὸν (sc. ἡμικύκλιον; jenes der Halbkreis vom Perigeum bis zum Apogeum der excentrischen Bahn, dieses der Halbkreis vom Apogeum bis zum Perigeum).

Bezeichnet  $\kappa$  das Apogeum,  $\lambda$  das Perigeum vom Epicykeldiameter Apogeum-Perigeum, ferner  $\mu$  das östliche,  $\nu$  das westliche Ende des Epicykeldiameter  $90^\circ$ — $270^\circ$ , so ergibt sich für

**Venus.** Apogeum des excentrischen Kreises:  $\kappa\lambda$  in der Ebene des excentrischen Kreises und bei  $\mu\nu$  die grösste *λόξωσις* ( $\mu$  nördlich,  $\nu$  südlich von der excentrischen Kreisbahn).

Absteigender Knoten (*κατὰ τὸ ἀφαιρευτικὸν ἡμικύκλιον*):  $\kappa$  südlich,  $\lambda$  nördlich vom excentrischen Kreise (grösste *ἔγκλισις*);  $\mu\nu$  ganz in der Ebene des excentrischen Kreises (*λόξωσις* =  $0^\circ$ ).

Perigeum des excentrischen Kreises:  $\kappa\lambda$  in der Ebene des excentrischen Kreises (*ἔγκλισις* =  $0^\circ$ ),  $\mu\nu$  weist die grösste *λόξωσις* auf ( $\mu$  südlich,  $\nu$  nördlich von der excentrischen Bahn).

Aufsteigender Knoten (*κατὰ τὸ προσθετικὸν ἡμικ.*): grösste *ἔγκλισις* bei  $\kappa\lambda$  ( $\kappa$  nördlich,  $\lambda$  südlich von der excentrischen Bahn),  $\mu\nu$  in der Ebene des excentrischen Kreises (*λόξωσις* =  $0^\circ$ ).

Für **Merkur** hat man nur überall die Begriffe „nördlich“ und „südlich“ für die Bezeichnungen  $\kappa\lambda\mu\nu$  zu vertauschen.

Mit der gegebenen Erklärung stimmt auch überein der Kommentar von Theon zu der betreffenden Stelle und die dazu gehörigen Erläuterungen von Delambre (*Hist. de l'Astron. anc.* II, S. 615).

Es entsteht nun die Frage, wie wir uns die *κυκλίσεις* denken sollen, die, wie es scheint, mit ihrer vollen Umdrehung (*περιφορά*) um ein noch unbestimmtes Centrum die Auf- und Niederbewegung der Epicykelebene hervorrufen. Das eine Mal sind sie angebracht (*παράκεινται*) am Perigeumsende des Diameters Apogeum-Perigeum, stehen senkrecht zur Ebene des excentrischen Kreises, die sie halbiert; das andere Mal am östlichen Ende des Diameters  $90^\circ$ — $270^\circ$ , stehen senkrecht zur Ebene der Ekliptik, die sie ebenfalls halbiert. Ptolemaeus scheint im zweiten Kapitel sagen zu wollen, dass die Bewegung der beiden Diameter aus der Ebene des excentrischen Kreises das eine Mal, sowie aus der Ebene der Ekliptik das andere Mal bis zur höchsten nördlichen oder südlichen *ἔγκλισις* (beim Diameter Apogeum-Perigeum) oder *λόξωσις* (bei dem Diameter  $90^\circ$ — $270^\circ$ ) — eine Bewegung, die er richtig *παράφορά* nennt, d. h. auf und nieder — bewirkt wird durch eine volle Bewegung des *κυκλίσεως* um die Länge eines Quadranten des *κυκλίσεως*. Denn er spricht mit Beziehung auf den *κυκλίσεως* von einer Bewegung, die er *περιφορά* nennt, d. h. doch wohl eine volle Kreisbewegung um einen Mittelpunkt. Nun bewegt sich aber der Epicykel auf einem Kreise, der excentrisch zur Ekliptik ist, so dass die vier Teile der Bahn Apogeum bis zum absteigenden Knoten, absteigender Knoten bis zum Perigeum, Perigeum bis zum aufsteigenden Knoten, aufsteigender Knoten bis zum Apogeum ungleich werden in Beziehung auf die Ekliptik. Andererseits sollen die Hebung und Senkung der beiden Diameter mit Beziehung auf die Ebenen des excentrischen Kreises und der Ekliptik die Folge einer ganz gleichmässigen

Bewegung (*ὁμαλὴ κίνησις*) des *κυκλίσκος* sein, und so bleibt nichts anderes übrig, als dass der *κυκλίσκος* bei seiner *περιφορᾷ* sich nicht um sein eignes Centrum bewegt, sondern um einen anderen Punkt, dessen Abstand vom Centrum des *κυκλίσκος* genau entspricht dem Abstand des Mittelpunktes vom excentrischen Kreise vom Mittelpunkte des Zodiacus. Nur so kann erreicht werden, dass die vier gleichen Viertel des *κυκλίσκος* in ungleichen Zeiten die betreffenden Diameter um gleichen Betrag heben und senken mit Beziehung auf die Ebenen der excentrischen Planetenbahn und der Ekliptik, gleichwie durch die Excentricität der Planetenbahn bewirkt wird, dass der Planet auf seinem Epicykel gleiche Strecken der Ekliptik in ungleichen Zeiten durchläuft.

So ist schliesslich Ptolemaeus auch zur Annahme einer excentrischen Bewegung gezwungen beim *κυκλίσκος*, und wir verstehen es, dass ihn selbst angesichts solcher Kompliziertheit seiner Theorie der Breitenbewegung ein gewisser Schrecken befallen hat, dem er eben in der oben angeführten Stelle (S.192) lebhaften Ausdruck verliehen hat.

Wir verstehen nun auch, warum er in seiner späteren Schrift *Ἐποθέσεις* (Halma IV) diese verwickelte Theorie durch eine neue, einfachere ersetzt hat, die Tannery in seinen *Recherches* etc. ganz allein berücksichtigt hat.

In dieser Schrift ist in Beziehung auf die Breitenbewegung zwischen den fünf Planeten kein Unterschied gemacht, sondern für alle folgendes System aufgestellt.

Zunächst ist die Rede von einer Epicykelsphäre, in der wieder drei *κυκλίσκοι* unterschieden werden. In der Ebene der geneigten (*λοξός*) excentrischen Bahn liegt der erste *κυκλίσκος*, der sich nicht bewegt, sondern festliegt, so dass die verlängerte Linie zwischen dem Epicykelcentrum und dem Centrum des Equans (*περὶ ὃ κινεῖται ἰσοταχῶς*) immer in denselben Punkten den *κυκλίσκος* schneidet, nämlich im Apogäum und im Perigeum des Epicykels. Ein zweiter *κυκλίσκος*, der mit dem ersten allem Anschein nach zusammenfällt, obwohl das nicht direkt gesagt wird, ist in beständiger, gleichmässiger Bewegung begriffen um das Epicykelcentrum in der Richtung von Ost nach West. Ein dritter *κυκλίσκος* ist gegen die Ebene des zweiten *κυκλίσκος* geneigt um so viel, als wie die Neigung des Epicykels gegen die Ebene des excentrischen Kreises in der ersten Theorie von Ptolemaeus beträgt; auf diesem dritten *κυκλίσκος* bewegt sich nun der Planet in der Richtung von West nach Ost.

Wie Ptolemaeus dazu gekommen ist, für die Erklärung der Breitenbewegung der Planeten jene erste, verwickelte Theorie preiszugeben und die vereinfachte der *Ἐποθέσεις* zu setzen, vermögen wir nicht zu sagen.

## Recensionen.

---

**Differentialrechnung und Grundzüge der Integralrechnung.** Von ANGELO GENOCCHI. Herausgegeben von GIUSEPPE PEANO. Autorisierte deutsche Übersetzung von G. BOHLMANN und A. SCHEPP. Mit einem Vorwort von A. MAYER. Leipzig 1898/99.

Das im Jahre 1884 von Peano neu herausgegebene Genocchische Werk „Calcolo differenziale e principii di calcolo integrale“ fand von vornherein in unseren mathematischen Kreisen eine äusserst freundliche Aufnahme und günstige Beurteilung. In ihm wurde zum ersten Male mit Hilfe der einfachen Funktionen

$$f(x, y) = (y^2 - 2px)(y^2 - 2qx)$$

die Fehlerhaftigkeit der alten Theorie über die Maxima und Minima der Funktionen zweier Veränderlichen klargestellt und sodann eine einwandfreie Theorie dieses Gegenstandes entwickelt. Wie Herr A. Mayer in dem Vorwort zu der deutschen Ausgabe bemerkt, können alle die schönen und zum grossen Teile fundamentalen Arbeiten von Scheeffer, Stolz und V. von Dantscher über die Theorie der Maxima und Minima von Funktionen zweier und mehrerer Variablen im Grunde zunächst auf das Peanosche Werk zurückgeführt werden. Daneben besass das Buch noch andere Vorzüge. Die Darstellung war im allgemeinen präzise und streng, eine grosse Menge althergebrachter Fehler war in ihm vermieden, so dass ihm in unserer deutschen Litteratur nur wenige ältere oder gleichzeitige Werke ebenbürtig an die Seite gestellt werden konnten.

In der nunmehr vorliegenden deutschen Übersetzung, die noch durch fünf Anhänge von Herrn Peano vergrössert worden ist, treten jene Vorzüge für diejenigen deutschen Leser, welche der fremden Sprache nicht völlig mächtig sind, noch klarer und deutlicher hervor. Das Peanosche Buch ist kein Werk für Anfänger, dazu tritt die prinzipielle Seite des Gegenstandes zu sehr in den Vordergrund, es ist ferner kein Lehrbuch im gewöhnlichen Sinne des Wortes, da die üblichen geometrischen Anwendungen sehr in den Hintergrund treten und auch sonst nicht alle Gegenstände gleichmässig eingehend und ausführlich behandelt werden — innerhalb dieser Grenzen kann es aber auch heute noch als eine wichtige Erscheinung unter den vorhandenen Lehrbüchern über Differential- und Integralrechnung

bezeichnet werden, dessen Übersetzung sich sicherlich als nützlich erweisen wird.

Freilich vollkommen ist das Werk auch innerhalb der angegebenen Grenzen nicht zu nennen. Thatsächlich finden sich in ihm einige Fehler und Unebenheiten, die als zeitgemäss nicht angesehen werden können. Es soll das etwas näher ausgeführt werden.

So sind, um sogleich mit einem wichtigen Gegenstand zu beginnen, die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für die Entwicklung einer Funktion einer veränderlichen Grösse in eine Taylorsche Reihe auf Seite 70 nicht einwandfrei angegeben worden. Dieselben lauten thatsächlich anders und sind in voller Strenge zuerst von Pringsheim im 44. Bande der Mathematischen Annalen entwickelt worden.\* Analog sind die Betrachtungen über die Entwicklung einer Funktion mehrerer Veränderlichen auf S. 137 nicht als einwandfrei zu bezeichnen. Die Theorie der unendlichen Produkte ferner, wie sie auf S. 92 flg. entwickelt wird, dürfte kaum noch zeitgemäss erscheinen. Der Logarithmus hat mit den unendlichen Produkten wenig oder gar nichts zu thun, seine Hinzunahme verdunkelt thatsächlich die eigentliche Theorie. Es möge in Bezug hierauf vor allem auf eine Arbeit von Pringsheim im 33. Bande der Math. Annal. verwiesen werden. S. 94 Z. 8 von unten muss „von Null verschiedenen“ fortfallen.

Wenig glücklich erscheint auch S. 119 die Definition der Stetigkeit einer  $n$ -dimensionalen Punktmenge mit Hilfe stetiger Parameter-Darstellung der Koordinaten, schon aus dem Grunde, weil sie für den Fall  $n = 1$  nicht zu gebrauchen ist. Die Möglichkeit, irgend zwei Punkte einer stetigen Punktmenge durch einen der Menge angehörenden Weg zu verbinden, dürfte zweckmässiger als eine Folge der Stetigkeit und nicht als definierende Eigenschaft anzusehen sein. Jedenfalls hätte nicht übergangen werden dürfen, dass eine Fundamenteleigenschaft stetiger Mengen in der Zugehörigkeit ihrer Grenzpunkte besteht.\*\*

Der Satz über die Umkehrbarkeit der Reihenfolge der Differentiationen S. 127 erscheint mir unnötig weit und nicht völlig präzis gefasst zu sein. Erstens brauchen nicht alle Ableitungen zweiter Ordnung als stetig vorausgesetzt zu werden, damit die Gleichung

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

besteht. Dann aber ist nicht gesagt, inwieweit die Existenz und Stetigkeit vorausgesetzt wird, ob nur in dem Punkte  $x, y$  oder auch in dessen Umgebung, so dass der Umfang der geforderten Voraussetzungen ziemlich dunkel erscheint. Beim Beweise benutzt wird die Stetigkeit von  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  nur in dem betreffenden Punkte, dagegen die Existenz von  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,

\* Vergl. hierüber: Encykl. der Math. Wissensch. Bd. II, S. 79, 80.

\*\* Vergl. hierüber: Encykl. der Math. Wissensch. Bd. II, S. 45—47.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  für alle Punkte einer gewissen Umgebung von  $x, y$ . Mir scheint, dass die Darstellung dieses Satzes in einigen anderen Lehrbüchern besser und präziser ist.

Etwas Ähnliches gilt von dem Satze 105 auf S. 129 fig.

Bei dem Beweise des Satzes 110 wird auf S. 140 Z. 1 — 4 von oben eine Schlussform gebraucht, die als strenge nicht bezeichnet werden kann. Es wird da geschlossen, dass  $y$  eine stetige Funktion von  $x$  ist, weil  $x_1$  beliebig klein gemacht werden kann. Das genügt aber nicht — es muss vielmehr gezeigt werden, dass zu unendlich kleinen Werten von  $h$  unendlich kleine Werte  $x_1$  gehören.

Der Beweis der Sätze auf S. 213 bis S. 217 dürfte als zu umständlich zu bezeichnen sein. Benützt man den Cauchyschen Doppelreihensatz, wonach die Glieder einer absolut konvergierenden zweifach unendlichen Reihe beliebig angeordnet werden können, so ergibt sich ganz unmittelbar die Existenz des Taylorschen Satzes mitsamt der gliedweisen Differenzierbarkeit von  $f(x) = \sum u_n x^n$ .

Freilich fehlt jener Cauchysche Satz in dem Buche ganz, wie denn überhaupt auf den Unterschied von bedingter und unbedingter Konvergenz unendlicher Reihen mit keinem Worte eingegangen wird. In diesem völligen Verschweigen eines unentbehrlichen Fundamentalbegriffes der Reihenlehre dürfte eine empfindliche Lücke des Buches zu erblicken sein.

Mit der ganzen Anordnung der Lehre vom unbestimmten und bestimmten Integral kann ich mich nicht einverstanden erklären. Wenig zweckmässig scheint es mir, dass der Existenzbeweis zunächst für das unbestimmte Integral einer stetigen Funktion geführt und an dieses letztere späterhin die Definition des bestimmten Integrals geknüpft wird. Thatsächlich haben die Methoden der sogenannten unbestimmten Integration mit jenem Existenzbeweise nicht das geringste zu thun. Und die Frage nach der allgemeinen Existenz lässt sich viel einfacher und vollständiger im Anschluss an die Definition des bestimmten Integrals als Summengrenze erledigen, wobei dann überhaupt die Beziehungen zwischen dem bestimmten und unbestimmten Integrale sich natürlicher und präziser ergeben als bei der Peanoschen Darstellungsweise.

Die Herleitung der Gleichung

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = \int_{t_0}^{t_1} f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt$$

S. 230, 280 fig. ist durchaus unzulänglich. Die Gleichung selbst ist in der angegebenen Allgemeinheit überhaupt nicht richtig, sie gilt zunächst nur bei umkehrbarer Eindeutigkeit und Stetigkeit von  $x = \varphi(t)$ . Bezüglich des zumeist vorkommenden Falles, dass die Gleichung  $x = \varphi(t)$  keine eindeutige Auflösung  $t = \psi(x)$  besitzt, fehlt jede nähere Erörterung.

Schliesslich ist auch die Reihenentwicklung der bestimmten Integrale S. 300 fig. nicht einwandfrei. Der Satz Ende der Seite 300: Hat dann

$\int_a^b R_n dx$  den Grenzwert Null, so erschliesst man die Reihenentwicklung

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b u_0 dx + \dots$$

ist nicht stichhaltig, er wird erst richtig, wenn die Integrierbarkeit von  $f(x)$  ausdrücklich vorausgesetzt wird. Endlich sind die Sätze 213 und 214 dem Wortlaute nach äusserst ähnlich, die Beweise dagegen wesentlich verschieden. Es herrscht hier eine Unklarheit, die jedenfalls hätte gehoben werden müssen.

Die gemachten Bemerkungen haben nicht den Zweck, den Wert des verdienstvollen Werkes zu beeinträchtigen. Dasselbe ist vor 15 Jahren geschrieben und zwar auf Grund von Vorlesungen, die noch weitere Jahre zurückreichen — es ist daher nicht zu erwarten, dass dasselbe auch heute noch nach jeder Richtung hin vollkommen sei oder gar die Kritik aller kommenden Zeiten in allen seinen Teilen gleichmässig ertragen könne. Jene Bemerkungen sollen vielmehr auf eine Lücke aufmerksam machen, die bei dieser deutschen Ausgabe leicht hätte vermieden werden können. In einigen ähnlichen Fällen, wie bei der Übersetzung und Herausgabe der Serretschen Differential- und Integralrechnung durch Harnack und der Dinischen Funktionentheorie durch Lüroth und Schepp sind von den Übersetzern Berichtigungen und Zusätze gemacht worden, welche den Wert der Werke ungemein erhöht haben. Derartiges fehlt bei dem Peanoschen Werke, ja nach der Vorrede des Herrn A. Mayer könnte es scheinen, als wenn Berichtigungen überhaupt unnötig wären. Die Herren Übersetzer Bohlmann und Schepp begnügen sich mit der Bemerkung, dass von einer wesentlichen Erweiterung der in den Anmerkungen gegebenen historischen Notizen Abstand genommen ist und verweisen dieserhalb auf die Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. Ein derartiger Hinweis hat etwas Missliches. Erstens hat nicht jeder Leser des Buches die Encyclopädie zur Hand, und zweitens enthält die letztere zwar die Sätze aber nicht deren Beweise, kann daher niemals ein wirkliches Lehrbuch ersetzen. Soll das Peanosche Werk wirklich zu einem gleichmässig vollkommenen und zeitgemässen Führer auf dem Gebiete der Grundlagen der Differential- und Integralrechnung werden, so bleibt nichts anders übrig, als auch bei ihm, ohne seine Grundlage zu ändern, an geeigneten Stellen Berichtigungen und Zusätze anzubringen.

M. KRAUSE.

**A treatise on the theory of functions**, by J. HARKNESS (Bryn Mawr College, Pennsylvania) and F. MORLEY (Haverford College, Pennsylvania), London, Macmillan (1893). IX und 507 S.

**Introduction to the theory of analytic functions**, by J. HARKNESS and F. MORLEY, London, Macmillan (1898). XVI und 336 S.

Das erste der beiden vorliegenden Werke giebt eine Darstellung der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen, welche sowohl in Bezug auf die grundlegenden Lehren wie in den Einzelausführungen mit grosser Gründlichkeit und Sachkenntnis durchgeführt ist. Das Buch ist als Lehrbuch durchaus zu empfehlen, es vermittelt eine abgerundete und einheitliche Auffassung der Theorie der Funktionen einer komplexen Variablen. Zugleich vermeidet dasselbe in glücklicher Weise die Gefahr der Einseitigkeit, welche sich bisher so häufig in den Darstellungen der Funktionentheorie als verhängnisvoll erwies. Sind doch die bei dieser Gelegenheit oft genannten Unterschiede in den Auffassungen Riemanns und Weierstrass' z. B. noch in dem übrigens hochgeschätzten Werke von Forsyth weniger zur inneren Berührung als zur äusseren Aneinanderreihung gelangt; und auch in der deutschen Lehrbuchlitteratur ist man erst in neuester Zeit an die gleichmässige Berücksichtigung der verschiedenen Standpunkte herangegangen.

Was die Stoffauswahl im grossen angeht, so sei folgende Bemerkung gestattet. Nach Entwicklung der Theorie der Riemannschen Flächen wendet sich die Darstellung zu den elliptischen und Abelschen Funktionen. Ein anderes Gebiet von Funktionen auf Riemannschen Flächen, welche im Vergleich zu den Abelschen Funktionen vielleicht elementarer und für die Anwendungen wichtiger sind, kommt nicht zur Geltung: nämlich die hypergeometrischen Funktionen, sowie überhaupt die Funktionen, welche linearen Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten genügen. Es ist unzweifelhaft, dass diesen Funktionen in einer ausführlichen Darstellung der Funktionentheorie schon jetzt ihre Stelle neben den elliptischen und Abelschen Funktionen gebührt. Doch soll diese Bemerkung mehr nur die Stellung des vorliegenden Buches gegenüber der modernen Funktionentheorie charakterisieren, und es soll in keiner Weise ein Tadel ausgesprochen sein, dass die Verfasser bei ihren Ausführungen allein die elliptischen und Abelschen Funktionen wählen.

Die Bezeichnungen und die Ausdrucksweise im einzelnen sind stets strenge und wissenschaftliche; sie halten Schritt mit dem Ziele der ganzen Darstellung, welche die einzelnen Gegenstände in ihrer vollen wissenschaftlichen Bedeutung geben will. Eine beiläufige Bemerkung sei wegen des Begriffs der „semikonvergenten Reihen“ (S. 64) gestattet. Diese Benennung wird nicht in dem sonst verbreiteten Sinne gebraucht, sondern bezeichnet einfach eine „bedingt konvergente“ Reihe. Diese Abweichung von dem allgemeinen Brauch ist, wenn auch die Verfasser dabei nicht allein dastehen, nicht zweckmässig.

Das zweite Kapitel, welches reelle Funktionen behandelt, hat nur eine mehr beiläufige Bedeutung; die Darstellung geht im übrigen nur auf die analytischen Funktionen einer komplexen Variablen aus. Sie gründet sich zunächst auf die im dritten Kapitel entworfene Theorie der Potenzreihen. Im vierten Kapitel, die algebraischen Funktionen, findet sich ein ausgedehnter Exkurs in das Gebiet der ebenen Kurven, die singulären Punkte betreffend; diese Entwicklungen sollen zur Grundlage für die Verzweigungstheorie der algebraischen Funktionen dienen.

Es ist überraschend, dass die Theorie der Riemannschen Flächen, welche sich hier unmittelbar angeschlossen hätte, von den Verfassern zunächst zurückgestellt wird. Vielmehr kommen jetzt erst die Theorie der komplexen Integrale und die Grundlagen der Cauchyschen Funktionentheorie zur Darstellung. Bei den weittragenden Ansätzen, welche namentlich auch für die Bildungsgesetze der analytischen Funktionen hier entspringen, gelingt es, gleich einige Angaben über Produkt- und Partialbruchdarstellungen nach Weierstrass zu machen.

Es folgt nun eine ausführliche Behandlung der Riemannschen Flächen für algebraische Funktionen, wobei die Theorie der zugehörigen Integrale hier nur in den Grundlagen entwickelt wird, während die Weiterführung erst ganz am Ende des Werkes folgt.

Die Theorie der elliptischen Funktionen ist auf den Begriff der doppelten Periodizität gegründet und unter fast ausschliesslicher Bevorzugung der Weierstrassschen Funktionen dargestellt. Die Transformationstheorie bleibt natürlich ausserhalb der Betrachtung. Auch das algebraische Fundament der Theorie der elliptischen Funktionen kommt nur kurz zur Geltung; speziell wird die Abbildung der zerschnittenen Riemannschen Fläche auf ein Parallelogramm, welche sich völlig einwurfsfrei nur schwierig entwickeln lässt, nicht mit voller Ausführlichkeit behandelt.

Weiterhin bedienen sich die Verfasser einer etwas merkwürdigen Disposition. Am leichtesten zugänglich erscheint ihnen hier die Theorie der Thetareihen mit zwei Argumenten; diese Theorie wird demnach jetzt zunächst entwickelt. Vorteilhaft ist dies insofern, als auf diese Weise in der Theorie der Abelschen Integrale und Funktionen (letztes Kapitel) die Einführung der Thetafunktionen keine Unterbrechung mehr nötig macht. Getrennt sind diese beiden Kapitel noch durch eine anderweitige, übrigens sehr wertvolle Entwicklung, welche Probleme der konformen Abbildung und Existenztheoreme der zugehörigen Funktionen nach Riemann, Schwarz, Neumann u. a. behandelt.

Es ist ein beredetes Zeugnis für die beifällige Aufnahme des besprochenen Werkes, dass sich die Verfasser wenige Jahre nach dessen Erscheinen zur Herausgabe des zweiten in der Überschrift genannten Werkes entschlossen haben.

Dieses Buch erscheint für das einführende Studium sehr geeignet. Eingehende Theorien, wie die der Abelschen Funktionen, bleiben hier abseits; und die Darstellung ist überall nur auf die Gewinnung der Grundlagen,

nicht auf Spezialuntersuchungen gerichtet. Elementarere Entwicklungen über konforme Abbildungen an Beispielen nehmen dafür einen weit breiteren Raum ein als im erstgenannten Werke. So ist ein besonderes Kapitel der geometrischen Theorie der Exponentialfunktion und des Logarithmus gewidmet, und sogar zwei Kapitel (das dritte und fünfte) handeln von der Transformation der Kreisverwandschaft. Die Theorie der elliptischen Funktionen beschränkt sich hier ganz auf die Anfänge der transcendenten Theorie nach Weierstrass auf Grund des Begriffs der doppelten Periodizität. Auch die Theorie der algebraischen Funktionen wird nur in ihren ersten Anfängen skizziert und an einigen elementaren Beispielen ausgeführt, von denen  $y^2 = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)$  das komplizierteste ist. Den Beschluss bilden Ausführungen über die Cauchysche Theorie, an welche bereits ein früheres Kapitel herangeführt hatte, sowie über die reellen Bestandteile komplexer Funktionen.

R. FRICKE.

---

**Lehrbuch der Algebra.** VON HEINRICH WEBER, Professor der Mathematik an der Universität Strassburg. Zweite Auflage, zweiter Band. Braunschweig 1899, Vieweg & Sohn. XVI und 856 S.

Der zweite Band von Webers Algebra ist in erster Auflage 1896 erschienen und wurde im Jahrgang 43 dieser Zeitschrift hist.-litterar. Abteil. S. 26 flg. ausführlich besprochen. Wie vom ersten Bande, so ist in äusserst kurzer Zeit auch vom zweiten eine Neuauflage nötig geworden, welche jetzt vorliegt. Bei der reifen und durchgearbeiteten Form, welche bereits die erste Auflage des fraglichen Werkes besass, wird man weitgehende Abänderungen hier nicht zu erwarten haben. Immerhin hat der Verfasser keine Mühe gespart, durch kleinere Abänderungen in der Disposition den Überblick zu erhöhen. Es wird kaum nötig sein, hierauf im einzelnen hinzuweisen.

Dagegen muss sehr hervorgehoben werden, dass der Verfasser durch ausführliche Berücksichtigung neuerer wichtiger Fortschritte der Gruppentheorie und Arithmetik sein Werk zu einem durchaus modernen fortgebildet hat. In dieser Hinsicht sind in dem allgemeinen gruppentheoretischen Abschnitte neuere Untersuchungen Dedekinds hinzugekommen, welche die von letzterem so benannten Hamiltonschen Gruppen betreffen. Eine weit reichere Begründung hat vor allem der Abschnitt über die linearen Gruppen gewonnen, insofern der Verfasser hier ausführlich auf die ausgezeichneten Untersuchungen von Frobenius aus den Jahren 1896 und 1897 über Gruppencharaktere, Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitution u. s. w. eingeht.

Nicht minder wichtig sind die Ergänzungen, welche die zahlen-theoretischen Abschnitte gewonnen haben. Hier war vor allem das Erscheinen des berühmten „Berichtes über die Theorie der algebraischen Zahlen“ von Hilbert massgeblich. Der Verfasser hat, wie er im Vorwort bemerkt, geschwankt, ob er sich nicht für die ganze Behandlung der

Abelschen Körper unter Zurückstellung seiner eigenen früheren Methode an Hilbert anschliessen sollte. Indessen schien es rätlich, hiervon abzusehen. Jedenfalls aber ist Hilberts Bericht auf den neunzehnten Abschnitt, welcher die Beziehungen eines Körpers zu seinen Teilern behandelt, von bedeutendem Einfluss gewesen. Auch die Minkowskischen Methoden, welche übrigens auch schon in der ersten Auflage herangezogen waren, finden jetzt im zwanzigsten Abschnitt eine breitere Behandlung.

Fortgefallen gegenüber der ersten Auflage sind die Anwendungen auf die quadratischen Körper. Der Verfasser hat sich hierzu zum Zwecke der Raumersparnis entschlossen. Indessen sollen diese Entwicklungen darum unverloren sein; denn sie werden in der beabsichtigten Fortsetzung des Werkes ihre Stelle finden. Diese Fortsetzung, in welcher vor allem die komplexe Multiplikation der elliptischen Funktionen zur Darstellung kommen dürfte, wird von den Freunden des vorliegenden Werkes mit besonderer Spannung erwartet werden.

R. FRICKE.

**Handbuch der Geophysik.** Von Dr. SIEGMUND GÜNTHER. Zwei Bände. Zweite gänzlich umgearbeitete Auflage. Zweiter Band mit 230 Abbildungen (im Text). Stuttgart 1899, Verlag von FERD. ENKE. 8°. XIV, 1009 S.

Bei unserer Besprechung der neuen Auflage des ersten Bandes erwähnten wir schon (Bd. 44, S. 127 flg.), dass im Interesse einer gleichmässigen Stärke beider Bände des Werkes die vierte Abteilung mit ihren vier Kapiteln, von den magnetischen und elektrischen Erdkräften handelnd, aus dem zweiten in den ersten Band übertragen worden sei. Trotz dieser Übertragung ist der vorliegende zweite Band um volle 25 Druckbogen gewachsen, so dass sich die ungleiche Stärke beider Bände eben auch in der neuen Auflage wieder eingestellt hat. Aus dieser Äusserlichkeit ersieht man, dass der Verfasser gewiss von einer durchaus erweiterten Auflage seines Werkes sprechen darf — ob auch von einer gänzlich umgearbeiteten Auflage, dürfte bestritten werden.

Denn vor allem sind die zwei, schon bei oberflächlichem Durchblättern in die Augen fallenden Eigentümlichkeiten des Werkes völlig gewahrt geblieben: nämlich die Menge der je am Ende der einzelnen Kapitel gegebenen Citate und die streng durchgeführte Rücksichtnahme auf die geschichtliche Entwicklung der jeweils darzustellenden Lehren. Ja diese Besonderheiten treten in der neuen Auflage sogar in verstärkter Weise hervor: an Stelle der früheren etwa 3000 Angaben von Belegstellen und Litteraturnachweisungen sind jetzt deren gegen 9000 getreten und geben offenkundiges Zeugnis von der Mühe und Sorgfalt, mit der der Verfasser die neuesten Forschungen und Darstellungen des Stoffgebietes berücksichtigt, mit der er zugleich auch erneut die frühere Litteratur durchgearbeitet und verwertet hat. In der That wird jeder, der das vorliegende Handbuch benützt, auch um für Nach-

studien sich Rats zu erholen, dem Verfasser Dank wissen für die reichlichen Nachweise und wird sich einen sogar anscheinenden Überfluss hieran gern gefallen lassen. Und in Bezug auf den zweiten Punkt, die Darlegung geschichtlicher Entwicklung der betreffenden Lehren, ist ebenfalls der Charakter des Werkes erhalten geblieben, ja durch ein an vielen Stellen erfolgtes reichlicheres Gliedern des Stoffes und etwas ausführlichere Darstellung hat das Werk nach dieser Seite ebenfalls gewonnen.

Während so die genannte in allen Arbeiten des Verfassers zu findende lobenswerte Eigentümlichkeit auch in der vorliegenden zweiten Auflage einer Erdphysik wieder hervortritt, ist auch die Anordnung des Stoffes im grossen und ganzen erhalten geblieben. Wie früher, so behandelt auch jetzt die fünfte Abteilung (S. 1—375) die Lehre von der Atmosphäre, die sechste (S. 375—559) die Ozeanographie und ozeanische Physik, die siebente (S. 559—659) die dynamischen Wechselbeziehungen zwischen Meer und Land, endlich die achte (S. 659—946) das Festland mit seiner Süsswasserbedeckung. In der Lehre von der Luftpöhle der Erde wurde das frühere zehnte Kapitel „Angewandte Meteorologie“ in zwei zerlegt, die die „Praktische Meteorologie“ und die „Hygienische Meteorologie“ behandeln.

Im einzelnen freilich ist ungemein vieles geändert, umgestellt, erweitert und verbessert worden. Wir führen nur die am meisten ins Auge fallenden Abänderungen und Ergänzungen hier an. So wurden die allgemeinen Eigenschaften der Atmosphäre eingehender behandelt und klarer gegliedert, neue Aufnahme fanden die Hochstationen und Luftballonfahrten (S. 85), neue Behandlung die Dämmerungserscheinungen (S. 106) und die Lehre von der Luft- und Gewitterelektrizität (S. 157); die Kapitel von der Bewegung der Luft (S. 178 flg.) und von den Klimaänderungen (S. 318 flg.) erscheinen wie neu bearbeitet. Neu aufgenommen ist auch die Berücksichtigung des Plankton sowohl als Verursachers und Trägers des Meeresleuchtes wie als Bodenbildners (S. 391), eingehender betrachtet die künstliche Beruhigung der Wellen (S. 453 flg.), klarer und ausgeführter die Lehre von den modernen Theorien über die Gezeiten (S. 472), übersichtlicher gestaltet die Lehre von Grund und Ursache der Meeresströmungen (S. 512 flg.). Eine fast neue Darstellung erfuhr auch die Lehre vom Meereis (S. 531 flg.), insbesondere durch stärkere Hervorhebung der erdkundlichen Seite des Gegenstandes, sowie die Lehre von den Strandverschiebungen und von den neuesten Theorien zu deren Erklärung (S. 570 flg.). Auch die Darstellung von Bildung und Wanderung der Dünen, sowie von der Wechselwirkung zwischen Pflanzenwuchs und Landbildung (S. 620) erscheint zum guten Teil in neuem Gewande, nicht minder die Lehre von den Korallenbauten und deren Weiterbildung (S. 641 flg.); eine Gliederung und Kennzeichnung der Haupttypen von Inseln ist neu hinzugekommen (S. 640). Die stärkste Umwandlung hat wohl die achte Abteilung erfahren, die vom Festland und seiner Süsswasserbedeckung handelt: die Lehren der Geognosie, dann die

von der Bodenplastik im allgemeinen, auch die vom fließenden Wasser der Erde sind stark erweitert und an vielen Stellen in neuer Darstellung gegeben.

In rascher Übersicht über den starken Band haben wir die wesentlichsten Abänderungen und Ergänzungen der vorliegenden zweiten Auflage in aller Kürze erwähnt. Wir haben noch beizufügen, dass eine eingehende Inhaltsübersicht, eine alphabetische Aufzählung der vorkommenden Schriftstellernamen und ein Schlüssel für die vielen abgekürzten Verweisungen auf Zeitschriften und sonstige Litteratur den Gebrauch dieses Handbuchs sehr erleichtern und seinen Wert erhöhen; leider konnte wegen der grossen Stärke des Bandes diesem nicht auch noch ein Sachverzeichnis beigegeben werden.

Für eine etwaige neue Auflage bringen wir abermals unsern Wunsch nach mässigerem Gebrauch von Fremdwörtern vor. Ist die Zahl derer, die in einem wissenschaftlichen Werke gebraucht werden müssen, an sich schon überaus gross, so sollte in Verwendung vermeidbarer weitestgehende Zurückhaltung geübt werden. Dass partizipieren, aptieren, signalisieren (nicht im Sinn von Zeichen geben!) und ähnliche immer wiederkehren, erweist nicht deren Berechtigung; warum Naturkräfte gerade destruktiv und konstruktiv genannt werden müssen, um zerstörend und aufbauend zu wirken, weshalb Kraftanstrengungen der Natur gerade kataklysmatischer Charakter zugeschrieben werden muss, ist nicht einzusehen; auch wäre z. B. die fluviale Korrasion ganz gut deutsch zu sagen. Auch in der Aufnahme von unnötig künstlich gebildeten Fremdausdrücken anderer Schriftsteller dürfte Maass gehalten werden — oder sind etwa in potamogenen und thalassogenen Neulandstreifen besondere Geheimnisse verborgen oder sind in bradyseismischen Bewegungen Entdeckungen besonderer Art zu finden, die nicht deutsch zu benennen wären? Derselben „Kategorie“ gehören die äolischen und die subaerischen Bildungen an, die der Verfasser selbst als „synonym“ erklärt und deren Verwendung im ersten Kapitel der achten Abteilung er verspricht, thatsächlich aber gar nicht nötig hat. Dass der Verfasser das umgebende „milieu“ selbst als Umwelt ersetzt, zeigt, dass er ganz wohl deutsch schreiben könnte.

Der vorliegende Band ist mit Abbildungen versehen, die meist deutlich darstellen, was sie zeigen sollen; nur wäre zuweilen eine andere Stellung im Druck zu wünschen (z. B. sollten die Figuren 69 und 70 auf derselben Seite zu finden sein).

Wir stehen am Ende unserer Überschau. Erneut müssen wir unserer staunenden Bewunderung Ausdruck geben über die Beschaffenheit, Verarbeitung und Gestaltung des riesigen Lehrstoffes, den das Buch bietet, und müssen den Dank aussprechen für die handliche, bequeme und anregende Darbietung alter und neuer Lehren der Wissenschaft. Wir haben in dem jetzt wieder abgeschlossen vorliegenden Werk einen trefflichen Führer, der vieles selbst erzählt, der aber in weit mehr Fällen stets getreue Anskunft erteilt, wo weitere Aufschlüsse zu erlangen sind. Dank dem Verfasser, Dank auch der rührigen Verlagshandlung!

TREUTLEIN.

G. W. HANKEL. **Elektrische Untersuchungen.** Einundzwanzigste Abhandlung. Über die thermo- und piézo-elektrischen Eigenschaften der Krystalle des ameisensauren Baryts, Bleioxyds, Strontians und Kalkes, des salpetersauren Baryts und Bleioxyds, des schwefelsauren Kalis, des Glycocolls, Taurins und Quercits. Des 24. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften Nr. 6. Mit 2 Tafeln. Leipzig 1899, Verlag von B. G. Teubner. 27 S., Pr. 2 M.

Die vorliegende Abhandlung reiht sich unmittelbar an die früheren an. Sie enthält nur die Untersuchungen über die im Titel angeführten Krystalle. Wer sich dagegen über die Methode und die Versuchsanordnung unterrichten will, muss auf die früheren Veröffentlichungen zurückgreifen. Es würde hier zu weit führen, wenn die einzelnen Ergebnisse auch nur angedeutet werden sollten.

B. NEBEL.

**Der Gang des Menschen.** II. Teil: Die Bewegung des Gesamtschwerpunktes und die äusseren Kräfte von OTTO FISCHER. Des 25. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen Klasse der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften Nr. 1. Mit 12 Tafeln und 5 Textfiguren. Leipzig 1899, B. G. Teubner. 130 S., Pr. 8 M.

Nach einer Einleitung, in welcher die Mechanik des Gehens und die dabei in Betracht kommenden inneren und äusseren Kräfte erläutert werden, werden die Methoden gekennzeichnet, die zur Bestimmung der Schwerpunktsbahn führen. Von den beiden einzuschlagenden Wegen, von denen wieder je drei Richtungen abzweigen, geht der Verfasser, nachdem er sie eingehend behandelt hat, zur Bestimmung der Bahn des Gesamtschwerpunktes des menschlichen Körpers über und berechnet die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, welche der Gesamtschwerpunkt während der Zurücklegung der einzelnen Bahnpunkte besitzt. Schliesslich wird noch die Grösse der äusseren Kräfte ermittelt während der einzelnen Phasen des Gehens und bei verschiedener Versuchsanordnung.

Aus der Tafel 1 ist unmittelbar zu ersehen, in welcher Weise sich mit Hilfe eines aus Parallelogrammen zusammengesetzten Gelenkmechanismus nicht nur die Schwerpunkte verschiedener Abschnitte des menschlichen Körpers, sondern auch deren Gesamtschwerpunkt ermitteln lassen. Um nun einen richtigen Einblick in die Bewegungsvorgänge zu erhalten, wurde die geschlossene Raumkurve des Gesamtschwerpunktes in drei Komponenten zerlegt, und zwar nach der Gangrichtung, der Seitenrichtung und der vertikalen Richtung. Die dabei ermittelten Kurven, sowie der Verlauf der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen in den einzelnen Projektionspunkten sind in besonderen, sehr übersichtlichen Tafeln zur Anschauung gebracht, so dass die Periodizität sofort in die Augen springt. Es würde zu weit führen, wollten wir noch näher auf diese höchst interessanten Versuche eingehen. Deshalb müssen wir uns darauf beschränken, jeden,

der sich für die Vorgänge beim Gehen interessiert — und wer sollte dies unter den Gebildeten nicht thun —, auf dieses an lehrreichen Ergebnissen reiche Werk aufmerksam zu machen.

B. NEBEL.

**Lehrbuch der Experimentalphysik** von ADOLPH WÜLLNER. Fünfte vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Vierter Band. Die Lehre von der Strahlung. Erster Halbband. Mit 147 in den Text gedruckten Abbildungen und Figuren und einer lithographierten Tafel. Leipzig 1899, Verlag von B. G. Teubner. 512 S.

Der erste Abschnitt des vierten Bandes umfasst die Ausbreitung und Wahrnehmung der Strahlung, und zwar wird ausgegangen von deren ungestörter Ausbreitung, an die sich die gestörte, insbesondere die durch Reflexion und Brechung, anschliesst. Das dritte Kapitel enthält die Absorption und Emission des Lichtes und die sie begleitenden Erscheinungen. In dem vierten Kapitel, welches die Wahrnehmung des Lichtes zum Gegenstande hat, sind auch die optischen Instrumente zu finden. — Diesem ersten Halbband, welcher sich vollkommen ebenbürtig seinen Vorgängern anreihet, wird demnächst der zweite Halbband folgen. — Wenngleich durch die Herausgabe eines solch umfangreichen Werkes die Anforderungen an die Arbeitskraft eines Mannes, der auch sonst noch vielfach in Anspruch genommen ist, nicht unterschätzt werden dürfen, so erfordert doch die heutige schnelllebige Zeit, dass es im eigensten Interesse von Herausgeber und Verleger ist, wenn mit allem Hochdruck die Vollendung eines solchen Werkes betrieben wird.

B. NEBEL.

**Die Wirkungsweise und Berechnung der Ammoniak-Absorptionsmaschine** von H. LORENZ. Separatabdruck aus der Zeitschrift für die gesamte Kälteindustrie. 1899. Heft II. 9 S.

Vergleicht man die Vorgänge der Kälteerzeugung bei den Absorptionsmaschinen mit denen bei den Kompressionsmaschinen, so sollte man glauben, dass die Maschinen der ersteren Gattung denen der letzteren überlegen wären, weil bei den ersteren die Energie fast ausschliesslich in Form von Wärme zur Verwendung gelangt, während bei der letzteren Gattung die Energiezufuhr nur in Form von mechanischer Arbeit erfolgt. Gleichwohl werden die Kompressionsmaschinen den Absorptionsmaschinen vorgezogen, weil bei diesen die Ausnutzung der zugeführten Wärme ungünstiger ist. Da aber Absorptionsmaschinen immer noch verwendet werden, so hat sich der Verfasser der dankenswerten Arbeit unterzogen, die Wirkungsweise der Absorptionsmaschine im Zusammenhang darzustellen, wodurch den Interessenten ein wesentlicher Beitrag zur Klärung dieser Maschinengattung geliefert wird.

B. NEBEL.

**Die Physikalischen Erscheinungen und Kräfte, ihre Kenntnis und Verwertung im praktischen Leben** von LEO GRUNMACH. Mit über 600 Textabbildungen und 3 Tafeln. Leipzig 1899, Verlag von Otto Spamer. 442 S. Pr. geh. 6 M., elegant gebunden 7.50 M.

Das im Jahre 1898 als Sonderabdruck aus dem „Buch der Erfindungen, Gewerbe und Industrien“ erschienene Werk wurde nun als selbständiges Buch der Öffentlichkeit übergeben. Im wesentlichen handelt es sich um einen Abdruck, der durch wichtige Neukonstruktionen und Entdeckungen der allerjüngsten Zeit erweitert worden ist. Dahin gehören die von Ramsay entdeckten Elemente der Atmosphäre, das Fernrohr der Treptow-Sternwarte, die Ergebnisse der Marconischen Funkentelegraphie, die neuesten Apparate für Untersuchungen mit Röntgenstrahlen u. s. w. Mit Rücksicht auf die Besprechung des Sonderabdruckes kann hier von weiterem abgesehen werden.

B. NEBEL.

**Die Fortschritte der Physik im Jahre 1897.** Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Zweite Abteilung, enthaltend: Physik des Äthers. Redigiert von RICHARD BÖRNSTEIN. 912 S. Dritte Abteilung, enthaltend: Kosmische Physik. Redigiert von RICHARD ASSMANN. 566 Seiten. 53. Jahrgang. Braunschweig 1898, Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn.

Mit grosser Pünktlichkeit sind auch die beiden letzten Abteilungen der Fortschritte der Physik für das Jahr 1897 erschienen. Wenn dies so anhält, so wird man in kurzem vergessen, welche Stockung in der Herausgabe der Fortschritte vor noch nicht langer Zeit geherrscht hat. Wer diese Zeit miterlebt hat, wird voll Bewunderung sein über die von den Redakteuren an den Tag gelegte Energie. Sollen aber die Fortschritte der Physik wieder die dominierende Stellung in Deutschland einnehmen, wozu sie voll und ganz berechtigt sind, dann müssen sie nicht mehr alljährlich, sondern mindestens monatlich erscheinen; denn die Anforderungen an ein solches Werk sind bedeutend gestiegen gegen früher.

B. NEBEL.

**Jahrbuch der Naturwissenschaften.** Enthaltend die hervorragendsten Fortschritte auf den Gebieten: Physik, Chemie und chemische Technologie; angewandte Mechanik; Meteorologie und physikalische Geographie; Astronomie und mathematische Geographie; Zoologie und Botanik; Forst- und Landwirtschaft; Mineralogie und Geologie; Anthropologie, Ethnologie und Urgeschichte; Gesundheitspflege, Medizin und Physiologie; Länder- und Völkerkunde; Handel, Industrie und Verkehr. Unter Mitwirkung von Fachmännern herausgegeben von MAX WILDERMANN. Freiburg in Breisgau, Herdersche Verlagsbuchhandlung. Zweigniederlassungen in Wien, Strassburg,

15\*

München und St. Louis, Mo. — 13. Jahrgang 1897 — 1898. 532 S. Mit 39 in den Text gedruckten Abbildungen und zwei Karten. 1898. Pr. 6 M. — 14. Jahrgang 1898 — 1899. 549 S. Mit 45 in den Text gedruckten Abbildungen. 1899. Pr. 6 M.

Dass das Verständnis für die Naturwissenschaften immer mehr und mehr in das Volk eindringt, sehen wir an der stets grösser werdenden Zahl von Aufsätzen über die neuesten Errungenschaften auf diesem Gebiete in den politischen Tageszeitungen. Will man sich aber das eine oder andere wieder ins Gedächtnis zurückrufen, so scheidet dies an dem zeitraubenden Suchen. In dem Jahrbuch der Naturwissenschaften ist dagegen das Material in übersichtlicher Weise zusammengestellt, und man ist sicher, dass nichts von Bedeutung fehlt. Für Laien wie für Gelehrte ist das Buch von gleich grossem Wert; denn auch der Gelehrte ist nicht mehr im stande, die gesamten Naturwissenschaften in Fachzeitschriften zu verfolgen, da er durch sein Spezialgebiet zu sehr in Anspruch genommen ist. Das Buch eignet sich sehr gut, neue Freunde den Naturwissenschaften zu gewinnen und die alten dauernd zu fesseln.

B. NEBEL.

**Vorlesungen über Gastheorie von LUDWIG BOLTZMANN.** II. Teil. Theorie van der Waals'; Gase mit zusammengesetzten Molekülen; Gasdissociation; Schlussbemerkungen. Leipzig 1898, Verlag von Johann Ambrosius Barth. 265 S.

Es ist ein grosses Verdienst Boltzmanns, dass er sich nicht von der Mode in der Wissenschaft unterkriegen lässt, sondern dass er den Mut hat, gegen eine Zeitströmung anzukämpfen. Mittels der Gastheorie ist es van der Waals gelungen, eine grosse Zahl von Resultaten abzuleiten, die sich mit der Erfahrung vollständig decken. Neuerdings hat diese Theorie wieder den Anlass zu neuen Entdeckungen gegeben, nämlich des Argons und Neons, zweier chemischen Elemente. Ihr verdankt man auch die Bestätigung der Existenz und der Grösse des Temperaturursprunges bei der Wärmeleitung in sehr verdünnten Gasen. Eine Theorie, die zur Hebung solcher wissenschaftlichen Schätze beizutragen vermag, kann nicht als überwunden angesehen werden. Boltzmann unternimmt es daher, dieser Theorie wieder mehr Eingang zu verschaffen, indem er sie weiteren Kreisen zugänglich macht. — Im ersten Abschnitt des vorliegenden zweiten Theiles behandelt er die Grundzüge der Theorie van der Waals und reiht im zweiten Abschnitt deren physikalische Diskussion daran. Der dritte Abschnitt enthält Sätze, die, der allgemeinen Mechanik entnommen, sich für die Gastheorie als besonders nützlich erweisen. In den folgenden Abschnitten werden die Gase mit zusammengesetzten Molekülen näher betrachtet, die van der Waalsche Gleichung mittels des Virialbegriffes abgeleitet, und die Theorie der Dissociation von neuen Gesichtspunkten in Angriff genommen. Den Schluss bilden Ergänzungen zu den Sätzen über das Wärmegleichgewicht in Gasen mit zusammengesetzten Molekülen.

B. NEBEL.

**Physikalisches Praktikum.** Mit besonderer Berücksichtigung der physikalisch-chemischen Methoden von EILHARD WIEDEMANN und HERMANN EBERT. Vierte, verbesserte und vermehrte Auflage mit 366 eingedruckten Holzschnitten. Braunschweig 1899, Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn. 574 S.

Die in relativ kurzer Zeit erschienene vierte Auflage beweist, wie sehr das Bedürfnis nach einem solchen Buche vorhanden war. Es entlastet den Lehrer wesentlich im Laboratorium und gestattet dem Schüler, sich gründlich für den Versuch vorzubereiten. Dem Schüler bleibt es noch ein getreuer Ratgeber, wenn jener auf eigene Füße gestellt wird. Herausgeber und Verleger wetteifern in der Vervollkommnung des Buches. Die Reinheit des Druckes und die Schönheit der Figuren geben dem Buch schon äusserlich ein vornehmes Gepräge. — Jedem angehenden Physiker sei es aufs wärmste empfohlen.

B. NEBEL.

**Über die Differentialgleichungen der Mondbewegung** von W. SCHEIBNER  
Des 26. Bandes der Abhandlungen der mathematisch-physischen  
Klasse der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften Nr. 2.  
Leipzig 1899, B. G. Teubner. 25 S., Pr. 1 M. 50 Pf.

In einer früheren Abhandlung über die gestörte elliptische Bewegung und Hansen's ideale Koordinaten (Berichte der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften 1897) hat der Verfasser darauf aufmerksam gemacht, dass trotz der Fortschritte der Störungstheorie in den letzten Dezennien die glänzend erprobten Hansenschen Methoden in der Praxis noch nicht überflüssig geworden sind. Der Verfasser unternimmt es daher in der vorliegenden Abhandlung, die Differentialgleichungen der Mondbewegung auf Grund der von Hansen aufgestellten Theorie zu entwickeln. Die gewählten Bezeichnungen sind identisch mit denen in der früheren Abhandlung, auf die somit Bezug zu nehmen ist. Die Astronomen, für welche diese Gleichungen besonderes Interesse haben, werden diese Arbeit mit Freuden begrüßen.

B. NEBEL.

**Vorlesungen über technische Mechanik** von AUGUST FÖPPL. Vierter  
Band: Dynamik. Mit 69 Figuren im Text. Leipzig 1899, Verlag  
von B. G. Teubner. 456 S.

Mit dem vorliegenden vierten Band der technischen Mechanik, der Dynamik, schliesst auch der Cyklus der Vorlesungen über technische Mechanik an der Hochschule ab. Die Zeit für diese Vorlesungen fällt aber gewöhnlich in ein an sich kurzes Sommersemester, weshalb der Verfasser in diesem Bande den Vorlesungsrahmen überschritten und die Dynamik in demselben Umfange behandelt hat, wie dies bei der in einer vierstündigen Wintervorlesung durchzunehmenden Festigkeitslehre der Fall war. Dadurch

wird es dem strebsamen Studenten ermöglicht, durch Privatstudien seine Kenntnisse in der Dynamik zu erweitern, ohne nach neuen Werken greifen zu müssen. In der Auswahl des Stoffes hält sich der Verfasser nicht ängstlich an die rein technischen Forderungen, sondern er geht z. B. auch auf die von Newton für die Planetenbewegung gegebene Erklärung ein, so dass die jungen Leute nicht rein mechanisch auf ihren zukünftigen Beruf hin gedrillt werden. Die wissenschaftliche Ausbildung findet in der Technik immer mehr und mehr Anerkennung, wofür als Symptom auch das Verlangen nach technischen Physikern anzusehen ist. Im Laufe des Jahres 1900 soll der zweite Band dieses Werkes erscheinen, wodurch es dann seinen Abschluss erreicht hat.

B. NEBEL.

---

**Die Medialfernrohre.** Eine neue Konstruktion für grosse astronomische Instrumente. Von L. SCHUPMANN. Mit 28 Figuren im Text. Leipzig 1899, Verlag von B. G. Teubner. 145 S.

Durch systematisches Vorgehen in dem Bestreben, das sekundäre Spektrum aufzuheben, ergab sich ein neuer Fernrohrtypus, dem der Name Medialfernrohr beigelegt worden ist, weil er zwischen den Refraktoren und Reflektoren liegt. Gemeinsam mit den Refraktoren ist die Objektivlinse, in deren Brennpunktnähe sich ein mit einer Konkavlinse bedeckter kleiner Hohlspiegel behufs Achromatisierung befindet. Die Gattung zerfällt wieder in zwei Arten, die Brachymediale und die Mediale kurzweg, bei den ersteren ist der Tubus wesentlich kürzer. Nach der Berechnung eines Medials wird es auf seine Abweichungen hinsichtlich der optischen Bedingungen untersucht, und schliesslich die Montierung und Ausführung der Mediale erläutert. Über die Einführung der Mediale kann indessen nur der praktische Versuch entscheiden.

B. NEBEL.

---

**Grundriss der Naturlehre** für die oberen Klassen der Mittelschulen. Von W. PSCHIEDL. Mit 283 Abbildungen. Wien und Leipzig 1899, Verlag von Wilhelm Braumüller. 371 S. Preis 2 fl. 60 kr. gleich 4.40 Mk.

Das grosse Interesse, welches der Schüler bei den mit Messungen verbundenen Versuchen an den Tag legt, gab dem Verfasser die Anregung, bei der Behandlung des Stoffes das Hauptaugenmerk auf die Messversuche zu legen. Die Ergebnisse solcher Versuche werden dann weiter zu entsprechenden Hausaufgaben verwendet. Verfasser hat sicher die Mehrzahl der Schüler richtig beurteilt; denn den meisten sind abstrakte Dinge ein horror. Richtet sich doch der jeweilige Besuch akademischer Vorlesungen über Physik noch häufig nach der Zahl der auf dem Experimentiertisch stehenden Apparate. — Dass die Mechanik einen grossen Teil des Buches

umfasst, ist besonders anzuerkennen, denn vielfach fehlt es den Schülern an einer gründlichen Kenntnis der Mechanik. — Bei der Durchsicht der eigentlichen Disziplinen der Physik ist einzelnes zum Teil sehr eingehend behandelt, was, wie der Verfasser in der Vorrede erwähnt, doch nicht als Fehler angerechnet werden könne. Auch darin pflichte ich dem Verfasser bei, dass die Ansichten über die Auswahl des Lehrstoffes oft sehr stark voneinander abweichen. Gleichwohl glaube ich aber doch, dass es die vorherrschende Meinung ist, dass bei dem ersten Physikunterricht der Schüler mit den ihn im täglichen Leben umgebenden Dingen zunächst bekannt gemacht werden muss. Sicher werden die Niveauflächen den Schüler zunächst weniger interessieren, als der Phonograph, die Photographie mit Röntgenstrahlen, die Telegraphie ohne Draht und dergleichen mehr. — Das Buch enthält auch die Grundlehren der Astronomie und mathematischen Geographie, sowie die der Chemie. Es scheinen dies Erfordernisse der österreichischen Unterrichtspläne zu sein.

B. NEBEL.

**Oeuvres scientifiques de L. LORENZ.** Revues et annotées par H. VALENTINER. Publiées aux frais de la fondation Carlsberg, Tome second. Premier fascicule. Copenhague 1899, Librairie Lehmann & Stage. 315 S.

Da die früher erschienenen Teile schon in diesen Blättern besprochen worden sind, so können wir uns auf die Anführung der in diesem Bande enthaltenen Arbeiten beschränken. Der erste Gegenstand betrifft eine Abhandlung über die Elastizitätstheorie homogener Körper mit konstanter Elastizität. Die zweite Arbeit handelt über die Zahl der in einem Milligramm Wasser enthaltenen Moleküle. Die dritte lautet: Bestimmung des Wärmegrades in absoluten Einheiten. Die fünf letzten beziehen sich auf die Elektrizität, nämlich der elektrische Widerstand des Quecksilbers in absoluten Einheiten, über die Methoden zur Bestimmung des Ohm, Bestimmung des elektrischen Widerstandes des Quecksilbers in absoluten elektromagnetischen Maßen, über die Ausbreitung der Elektrizität und über die Leitung der Metalle hinsichtlich der Elektrizität und der Wärme.

B. NEBEL.

**A treatise on dynamics of a partiell with numerous examples** by EDWARD JOHN ROUTH. Cambridge 1898. At the university press. 417 S. Preis 14 sh.

Vor nicht langer Zeit wurde in diesen Blättern die Dynamik starrer Körper von Routh besprochen, welche in deutscher Übersetzung mit einem Vorwort von Felix Klein dem deutschen Publikum zugänglich gemacht worden ist. Jetzt liegt in englischer Sprache die Dynamik eines Teilchens vor, die in der gleichen Weise behandelt wird, wie die Dynamik starrer Körper. Sobald ein Ergebnis abgeleitet ist, wird dieses unmittelbar darauf an ausgewählten Beispielen, die grösstenteils Examensaufgaben waren, gründlich eingeübt. Erst dann wird zu einem neuen Pro-

blem übergegangen. Bezüglich der der deutschen Litteratur gegenüber eigenartigen Behandlung der Materie sei auf die frühere Besprechung verwiesen.

B. NEBEL.

**Traité d'astronomie stellaire** par CH. ANDRÉ. Première partie. Étoiles simples. Avec nombreuses figures et 2 planches. Paris 1899, Gauthier-Villars. 344 S. Preis 9 Fr.

Durch die Herausgabe des Unterrichtsstoffes, den der Verfasser seit mehreren Jahren an der Universität Lyon vorträgt, beabsichtigt er denjenigen Teil der Astronomie, den er als die Herschelsche Astronomie bezeichnet, wieder zu grösserem Ansehen zu bringen. Die allmähliche Vernachlässigung dieses Teiles sei hauptsächlich darauf zurückzuführen, dass kein einheitliches Werk existiere, welches die in den verschiedensten Blättern veröffentlichten Arbeiten der Astronomen im Zusammenhang darstellt. Der zweite Teil soll die Doppel- und mehrfachen Sterne enthalten, während in dem dritten Teil die Hilfsmittel, nämlich die Photometrie, die Photographie und die Spektroskopie bearbeitet werden. Ein solches Werk, welches insbesondere der geschichtlichen Entwicklung Rechnung trägt, wird überall mit Freuden begrüsst werden.

B. NEBEL.

**Das Aluminium**, seine Darstellung, Eigenschaften, Verwendbarkeit und Verwendung. Zweite, wesentlich vermehrte Auflage. Von RICHARD KÖHLER. Altenburg 1898, Verlag der Schnuphase'schen Hofbuchhandlung (Max Lippold). 71 S.

Wer sich für das Aluminium interessiert, der findet in diesem kleinen Buche eine hinreichende allgemeine Belehrung. Namentlich findet er auch Aufschluss über das „Für und Wider“ des Aluminiums bei Kochgeschirren und Gefässen für Flüssigkeiten. Wer aber das Aluminium in einen Betrieb einführen will, nach den besten Aluminiumlötmitteln sucht und dergleichen mehr, der sucht hier vergebens nach Rat. Vielleicht geht der Verfasser bei einer neuen Auflage noch einen Schritt weiter und gestaltet das kleine Buch zu einem Handbuch über Aluminium, wodurch er sich bei Vielen Dank erwerben wird.

B. NEBEL.

**Die moderne Entwicklung der elektrischen Prinzipien.** Fünf Vorträge von FERDINAND ROSENBERGER. Leipzig 1898, Verlag von Johann Ambrosius Barth. 170 S. Preis 3 Mk.

Die vorliegenden fünf Vorträge verdanken ihre Entstehung einem Ferienkursus für Lehrer höherer Schulen, die in die modernen Anschauungen über das Wesen der Elektrizität eingeführt werden sollen. Für die Drucklegung wurden die Vorträge noch ergänzt und mit wissenschaftlichen Anmerkungen versehen. Wie aus den angeführten Titeln zu ersehen ist, haben die Vorträge einen geschichtlichen Charakter. Der erste Vortrag um-

fasst die Theorien der elektrischen Imponderabilien im vorigen Jahrhundert, während die in unserem Jahrhundert Gegenstand des zweiten Vortrages sind. Der dritte Vortrag ist dem Begründer der modernen Anschauungen gewidmet und hat als Titel: Faraday und seine Umgestaltung der elektrischen Fundamente. An den vierten Vortrag: Die moderne Gestaltung der elektrischen Theorien, schliesst sich ein Gleichnis an. Der letzte Vortrag behandelt die Elektrizität und die fundamentalen Grenzbegriffe der Physik. Das Gleichnis wäre besser unterdrückt worden, da es in den übrigen Rahmen nicht hineinpasst.

B. NEBEL.

---

**Lehrbuch der Mechanik** (Cours de mécanique). Von CH. STURM. Übersetzt von THEODOR GROSS. Erster Band. Berlin 1899, Verlag von S. Calvary & Co. 258 S. Preis 6 Mk., in eleg. Leinenband 7 Mk.

Die durch besondere Klarheit sich auszeichnenden Werke von Ch. Sturm sind den deutschen Fachgenossen längst bekannt. Um nun die Mechanik einem grösseren Leserkreis zugänglich zu machen, soll diese auch in deutscher Übersetzung erscheinen. Nur wenige Änderungen wurden dabei vorgenommen, die sich hauptsächlich auf die Formeln beziehen, um sie mit den neueren Vorstellungen in Übereinstimmung zu bringen. Die im Anhang befindlichen Aufgaben werden mit Lösungen versehen und zu einem dritten Bande vereinigt. Dieser und der zweite Band werden demnächst erscheinen.

B. NEBEL.

---

**Grundlagen der Lufttechnik.** Gemeinverständliche Abhandlungen über eine neue Theorie zur Lösung der Flugfrage und des Problems des lenkbaren Luftschiffes. Von MAX LOCHNER. Berlin 1899, Verlag von W. H. Köhl. 33 S. Preis M. 1. 60.

An der Hand der Elementarsätze der Lufttechnik weist der Verfasser zunächst auf die Irrtümer hin, die so viele Erfinder von Luftschiffen begehen, wenn sie die Verhältnisse bei dem Wasser einfach auf die Luft glauben übertragen zu dürfen. Der Hauptunterschied liegt in der Verdichtung der Luft und der Unzusammendrückbarkeit des Wassers. Bei der Aëronautik ist daher für eine beständige Kompression der Luft zu sorgen, die nur bei möglichster Beschränkung abzufließen vermag. Dies ist der Kernpunkt der vorliegenden Erfindung, deren technische Gestaltung sich an die Verhältnisse bei den Vogelflügeln anlehnt, bei denen auch die eine Kante versteift ist, während die andere mehr und mehr verläuft. Aus den beigegebenen Figuren ist zu ersehen, in welcher Weise die Erfindung zunächst praktisch durchgebildet zu denken ist. Mögen die praktischen Versuche die Theorie nicht im Stiche lassen.

B. NEBEL.

---

**Die Entstehung des Lebens,** aus mechanischen Grundlagen entwickelt von LUDWIG ZEHNDER. Erster Teil. Moneren. Zellen. Protisten. Mit 123 Abbildungen im Text. Freiburg, Leipzig und Tübingen 1899, Verlag von J. C. B. Mohr (Paul Siebeck). 256 S. Preis 6 Mk.

Wie der Verfasser in seinem vor zwei Jahren erschienenen Buche: „Die Mechanik des Weltalls“ bestrebt war, alle physikalischen und chemischen Kräfte auf die Gravitation als einzige Fundamentalkraft zurückzuführen und die wichtigsten thatsächlich feststehenden Vorgänge in der unorganischen Welt aus diesen untersten mechanischen Grundlagen folgerichtig abzuleiten, so unternimmt er es in dem vorliegenden Werke, aus denselben Grundlagen die Vorgänge in der organischen Welt zu entwickeln. Ausgehend von der Atomlehre, schildert der Verfasser zur Erklärung der Aggregatzustände die Vorgänge der Bewegung der Molekeln, welche dem Physiker aus der kinetischen Gastheorie bekannt sind, und gelangt dabei dazu, die Erscheinungen der Wärme, des Schalls, der Elektrizität und des Lichts auf bestimmte Bewegungsvorgänge, also auf rein mechanische Grundlagen zurückzuführen. Bei der näheren Betrachtung der Bewegung der mit Ätherhüllen umgebenen Atome ergeben sich ohne jeden Zwang die Molekeln, sowie deren Wachstum und deren Struktur. Nun beginnt der Kampf ums Dasein; Änderungen in der Affinität, die Osmose, der Einfluss der Strahlung und dergleichen mehr kommen zur Geltung, wodurch sich der Fundamentalsatz der Biologie ergibt: „Die Substanz hat das Bestreben, sich zu vermehren.“ — Die Bildung der Molekeln zu Gruppen und deren Gleichgewichtszustand führen zu der Struktur und gewähren einen Einblick in deren Vielseitigkeit. Höchst interessant ist zu verfolgen, wie die Fistellen entstehen, und von welcher Wichtigkeit sie sind z. B. hinsichtlich der Assimilation, der Nahrung und Belichtung. Dinge, zu denen der Biologe z. B. nur durch weitere Ausbildung der Versuchsmethoden schrittweise gelangen kann, wenn das Vordringen überhaupt praktisch möglich ist, finden hier ihre ungezwungene natürliche Erklärung, so z. B. das Umgebensein der Molekeln mit einer Membran, sowie das zum Leben und zur Fortpflanzung nötige gleichzeitige Vorhandensein eines Zellkernes und der Protoplasmasubstanz. Überall finden sich in der biologischen Litteratur zahlreiche Stützpunkte für die Anschauungen des Verfassers, der sich in diesem ersten Teil seines Werkes zunächst auf die Moneren, Zellen und Protisten beschränkt hat. Mit grossem Interesse wird man dem Verfasser bei seinem Aufstieg folgen, den er von den einfachsten mechanischen Vorgängen der unorganischen Materie aus unternimmt, dann zu den verwickelteren vordringt, um sich schliesslich in das Pflanzen- und Tierreich zu erheben. Das Endziel führt zu dem höchst entwickelten Lebewesen, dem Menschen, bei welchem das Seelenleben von grösster Bedeutung ist, wobei in dem letzten Teil des Werkes das Verständnis für die in den einfacheren Lebewesen sich abspielenden seelischen Vorgänge eröffnet werden soll unter strenger Vermeidung der Teleologie.

B. NEBEL.

**Unités électriques absolues.** Leçons professées à la Sorbonne 1884—1885 par G. LIPPMANN. Rédigées par A. BERGET. Paris 1899, George Carré et C. Naud. 240 S. Preis 10 Fr.

Durch die Herausgabe dieser an der Sorbonne früher gehaltenen Vorlesungen über die elektrischen absoluten Einheiten soll es den jungen Physikern und Elektrikern ermöglicht werden, sich leicht in diese Materie einzuarbeiten, die von dem Verfasser in solch klarer Weise behandelt worden ist. Die Einleitung geht von der Mechanik aus. Daran schliessen sich die elektrischen Maßsysteme an, und zwar wird begonnen mit dem elektrischen System, welchem das elektromagnetische folgt. Beide unterscheiden sich durch eine Potenz von  $V$ . Durch diese Geschwindigkeit wurde die Brücke zur elektromagnetischen Lichttheorie geschlagen, die in dem dritten Teil enthalten ist. Den Anhang bilden 1. das Prinzip von der Erhaltung der Elektrizität, und 2. die Lippmann'schen Quecksilber-Galvanometer und -Dynamometer. Sicherlich wird sich auch in Deutschland dieses Buch schon seiner präzisen Darstellungsweise wegen rasch Eingang verschaffen.

B. NEBEL.

**Premiers principes d'électricité industrielle.** Piles, accumulateurs, dynamos, transformateurs par PAUL JANET. Ouvrage couronné par l'académie des sciences. Troisième édition, entièrement refondue. Paris 1899, Gauthier-Villars, 280 S.

Wenn auch das Grundgerippe aus den früheren Auflagen unverändert in die dritte Auflage herübergenommen worden ist, so war der Verfasser doch bestrebt, den Fortschritten in der Elektrotechnik überall Rechnung zu tragen. Erwähnt seien in erster Linie die Akkumulatoren, die durch ihre Verwendung bei den Strassenbahnen nunmehr auch schnell und mit konstanter Spannungsdifferenz geladen werden. Einzelne Kapitel über Dynamomaschinen, Wechselstrommaschinen und Transformatoren sind geändert worden, insbesondere sind die Abbildungen durch solche von modernem Typus ergänzt worden. Die Generatoren für Mehrphasenstrom sind bei den gewöhnlichen Wechselstrommaschinen behandelt worden, während die Drehstrommotoren für den zweiten Teil dieses Werkes reserviert worden sind. Die Anordnung des Stoffes zeichnet sich durch grosse Übersichtlichkeit aus.

B. NEBEL.

**Société internationale des électriciens.** Une excursion électrotechnique en Suisse par les élèves de l'école supérieure d'électricité, avec une préface de P. JANET. Paris 1899, Gauthier-Villars. 92 S. Preis 2 Fr. 75 c.

In dem vorliegenden Werkchen sind in Kürze dargestellt diejenigen Punkte, welche für die Teilnehmer an der Exkursion von besonderem Interesse gewesen sind. Dass die Schweiz hinsichtlich der grossen Verschiedenheit ihrer elektrischen Anlagen namentlich für angehende Techniker ein

reiches Feld darbietet, ist auch in Deutschland längst gewürdigt worden; denn auch von hier aus werden zahlreiche Exkursionen und wissenschaftliche Reisen nach der Schweiz unternommen. Durch den Abdruck des Reiseplanes wird es anderen ermöglicht, ohne diese schwierige Arbeit sich den gleichen Genuss zu verschaffen.

B. NEBEL.

**Soleil, terre et électricité.** (Un chapitre de la théorie nouvelle de l'univers.)

Par le prof. J. R. SKWORTZOW. Kharkow 1898. 8 S.

Die fundamentale Form der Energie ist die Elektrizität, alle anderen Energieformen sind nur abgeleitete und haben daher sekundären Charakter. Demnach erwärmt und beleuchtet die Sonne die Erde nicht direkt, vielmehr vermag die Sonne nur durch elektrische Induktion Störungen im Gleichgewicht der Energie der Erde zu erzeugen, d. h. Potentialdifferenzen hervorzurufen. Die Lichterscheinungen sollen in den Luftschichten ihren Ursprung haben, während die Entstehung der Wärme den Flüssigkeiten und den festen Teilen der Erde zugeschrieben werden. Die Wärmeerscheinungen sollen ihre Entstehung Thermoströmen verdanken, die zwischen dem Äquator und den Polen entstehen. Die Erdströme sind die Ursache für die chemischen Prozesse, für die Verdampfung und Verdichtung des Wassers (Schnee, Eis), für die Ebbe und Flut und für die Strömungen in der Luft und den Meeren. Die vorliegende, in französischer Sprache erschienene Broschüre ist ein Exposé des in russischer Sprache erschienenen Werkes.

B. NEBEL.

**Inledning till teorien för de elektriska strömmarne af A. V. BÄCKLUND.**

Efter författarens universitetsföreläsningar under första hälften af Vårterminen 1898, Gleerupska Universitetsbokhandeln. Lund (Hjalmar Möller). 112 S.

Die Einleitung in die mathematische Theorie der elektrischen Ströme wird mit der Behandlung der elektrischen stationären Ströme von allgemeinem Charakter begonnen. Das zweite Kapitel greift auf die mechanische Wärmetheorie zurück und hebt namentlich die Sätze besonders hervor, welche für die Theorie der Elektrizität von Bedeutung sind. Das dritte und letzte Kapitel enthält die elektrische Stromarbeit, wobei nicht nur die metallischen Leiter, sondern auch die Elemente, die Elektrolyse und die Akkumulatoren untersucht werden.

B. NEBEL.

# Bibliographie.

## Periodische Schriften.

- Acta mathematica. Bd. 24. Stockholm, Beijer. Kr. 12. 50.  
Berichte der sächs. Gesellsch. d. Wissenschaften. Mathem.-phys. Klasse. 52. Bd. II. Leipzig, B. G. Teubner. M. —. 60.  
Fortschritte, die, der Physik im Jahre 1899. Dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. 55. Jahrg. 1. Abt. Physik der Materie. Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 26.  
Jahrbuch der Mathematik. 29. Bd. 2. Heft. Berlin, Reimer. M. 5.  
Jahrbuch, nautisches, oder Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1903 zur Bestimmung der Zeit, Länge und Breite zur See nach astronomischen Beobachtungen. Herausgegeben vom Reichsamt des Innern. Berlin, Heymann. kart. M. 1. 50.  
Mitteilungen der Hamburger Sternwarte. Nr. 6. Hamburg, Gräfe & Sillem. M. 4.  
REKENAAR, DE, Halfmaandelijks tijdschrift voor allen, die belang stellen in vlug en nauwkeurig rekenen. Red.: A. LAUBERTON. 1e jaarg. 1900/01. Nr. 1. Veendam, Pomper. Per jaarg. (24. Nrs.) Fl. 1.  
Sitzungsberichte, Wiener. Mathem.-naturw. Klasse. I. Abt. 108. Bd. 8.—10. Heft. Wien, Gerold's Sohn. M. 4. 50.  
—— Dasselbe. 109. Bd. 1.—3. Heft. Ebenda. M. 5. 70.  
—— Dasselbe. Abt. IIa. 108. Bd. 10. Heft. Ebenda. M. 3. 28.  
—— Dasselbe. 109. Bd. 1.—3. Heft. Ebenda. M. 3. 70.  
Veröffentlichungen des königl. preuss. meteorolog. Instituts. 1898. 2. Heft. Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1898. Berlin, Asher & Co. M. 3. 50.  
—— Dasselbe. 1899. 2. Heft. Ergebnisse der magnetischen Beobachtungen in Potsdam im Jahre. 1899. Ebenda. M. 3. 50.  
—— Dasselbe. Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1898. Ebenda. M. 8. 50.  
Vierteljahrschrift der astronomischen Gesellschaft. 35. Jahrgang. 1. und 2. Heft. Leipzig, Engelmann. à M. 2.  
Zeitschrift, physikalische. Herausgegeben von E. RIECKE und H. TH. SIMON. 2. Jahrg. Oktober 1900 bis September 1901. 52. Nrn. Leipzig, Hirzel. Viertelj. M. 5.

## Geschichte der Mathematik und Physik.

### Allgemeines.

- CANTOR, MOR., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. III. Bd. 1. Abtlg. Von 1668—1699. Leipzig, B. G. Teubner. M. 6. 50.  
ENGEL, FRDR., Sophus Lie. Ausführliches Verzeichnis seiner Schriften. (Aus: „Bibliotheca mathematica.“) Leipzig, B. G. Teubner. M. 2.  
GALILEI GALILEO, Le opere. Edizione nazionale. Vol. X. Firenze, Barbera.  
LAGRANGE, CH., Mathématique de l'histoire (géométrie et cinématique). LOIS DE BRÜCK, chronologie géodésique de la Bible. Bruxelles, Kiessling. Fr. 12.

- MÜLLER, FEL., Mathem. Vokabularium französisch-deutsch und deutsch-französisch, enthaltend die Kunstausdrücke aus der reinen und angewandten Mathematik. 1. Hälfte. Leipzig, B. G. Teubner. M. 8.
- SUTER, HEINE., Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. (Abhandlungen zur Geschichte der mathem. Wissensch. 10. Heft. Zugleich Supplement zum 45. Jahrgang der Zeitschrift für Mathematik und Physik.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 14.

### Reine Mathematik.

- BOEHM, KARL., Zur Integration partieller Differentialsysteme. Leipzig, B. G. Teubner. M. 1. 80.
- BORTOLOTTI, ETT., Lezioni di calcolo infinitesimale. Modena, lit. Pizzolotti.
- BUDISAVLJEVIĆ, EMAN. V., Leitfaden für den Unterricht der höheren Mathematik an der kaiserl. und königl. Artillerie- und der Pionier-Kadettenschule. Wien, Seidel & Sohn. M. 14. 40.
- DZIOBEK, O., Lehrbuch der analytischen Geometrie. 1. Teil. Analytische Geometrie der Ebene. Berlin, Hoffmann. M. 6.
- Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften. I. Teil. 2. Bd. 4. Heft. Leipzig, B. G. Teubner. M. 4. 80.
- FRIEDRICH, MAX, Katechismus der analytischen Geometrie. 2. Aufl. Durchgesehen und verbessert von ERNST RIEDEL. (Weber's illustrierte Katechismen Nr. 116.) Leipzig, Weber. geb. M. 3.
- GAUSS, CARL FRIEDR., Werke. VIII. Bd. Herausgegeben von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Leipzig, B. G. Teubner. kart. M. 24.
- GAZZANIGA, E. PIETRO, Aritmetica generale. Nuovi studi e teoremi. Bergamo, fratelli Bolis. L. 5.
- GLINZER, E., Kurzes Lehrbuch der ebenen Trigonometrie für gewerbliche Schulen sowie zum Selbstunterricht. 2. Aufl. Dresden, Kühnmann. M. — 90.  
geb. M. 1.
- GUNDELFINGER, S., Sechsstellige Gaussische und siebenstellige gemeine Logarithmen. Leipzig, Veit & Co. In Leinw. kart. M. 2. 80.
- GURADZE, H., Die Reye'sche Geometrie der Mannigfaltigkeiten projektiver Grundgebilde behandelt mittels einer besonderen Art bilinearer Formen. Dissert. Breslau.
- HAASE, GEO., Repetitorium der Physik. Freiburg i. Br., Speyer & Kaerner. M. 2, geb. M. 2. 60.
- HAGEN, J. G., Synopsis der höheren Mathematik. III. Bd. 2. Lieferung. Berlin, Dams. M. 5.
- HEILERMANN, H., und DIEKMANN, J., Lehr- und Übungsbuch für den Unterricht in der Algebra an den höheren Schulen. 2. Teil. Die Gleichungen zweiten Grades mit mehreren Unbekannten. Die Progressionen. Die kubischen und biquadratischen Gleichungen. Niedere Analysis. 5. Aufl. Essen, Baedeker. geb. M. 2. 80.
- HOSSENFELDER, E., Zur Theorie der trigonometrischen Reihe. Programm. Strassburg i. Westpr.
- JOCHNICK, W., Det viktigaste af differential-och integral-räkningen. Stockholm, Bonnier. Kr. 10.
- LECHTHALER, A., Zur Lehre von den geometrischen Verhältnissen und Proportionen und der allgemeine Proportionalitätssatz. Programm. Linz.
- LEE, A., Integral tables of  $F(r, v)$  and  $H(r, v)$  functions. London. 2 s. 6 d.
- LÜBSEN, H. B., Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht und mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens bearbeitet. 25. Aufl. Leipzig, Brandstetter. M. 4.
- MARTUS, H. C. E., Mathematische Aufgaben zum Gebrauche in den obersten Klassen höherer Lehranstalten. Aus den bei Reifeprüfungen an deutschen höheren

- Schulen gestellten Aufgaben ausgewählt und mit Hinzufügung der Ergebnisse zu einem Übungsbuch vereint. 3. Teil. Aufgaben. Dresden, Koch. M. 4. geb. M. 4. 50.
- Matriculation Model answers. Mathematics. Being the London University Matriculation Papers in Mathematics from June, 1893, to June, 1900. With answers by Tutors of University Correspondence College. London, Clive. 2 s.
- Memoirs presented to the Cambridge Philosophical Society on the occasion of the jubilee of Sir George Stokes, Bart. Cambridge, University Press. Cloth. 21 s.
- (Enthält Abhandlungen von A. Cornu, H. F. Baker, A. Berry, L. Boltzmann und Mach, E. W. Brown, W. Burnside, A. R. Forsyth, E. W. Hobson, H. Lamb, J. Larmor, G. D. Liveing, O. J. Lodge, A. E. H. Love, E. O. Lovett, H. M. Macdonald, P. A. Mac Mahon, A. A. Micheson, G. Mittag-Leffler, H. Poincaré, H. W. Richmond, A. Schuster, C. Taylor, H. M. Taylor.)
- MICHEL, F., Recueil de problèmes de géométrie analytique, à l'usage des classes de mathématiques spéciales. Solutions des problèmes donnés aux concours d'admission à l'école polytechnique de 1860 à 1900. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 6.
- PASCAL, ERNESTO, Die Determinanten. Eine Darstellung ihrer Theorie und Anwendungen mit Rücksicht auf die neueren Forschungen. Deutsche Ausgabe von HERM. LEITZMANN (Teubners Sammlung Bd. III). geb. M. 10.
- PASCAL, ERNST, Repertorium der höheren Mathematik (Definitionen, Formeln, Theorie, Litteratur). Deutsche Ausgabe nach einer neuen Bearbeitung des Originals von A. SCHEFF. Analysis und Geometrie. 1. Teil. Die Analysis. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 10.
- PENSA, ANG., Sull' influenza di alcuni singolarità di superficie sul genere numerico e sul bigenere P. Mondovì, Vescovile.
- PIZZARELLO, DOM., Sulle funzioni trascendente intere: tesa di laurea. Messina, tip. dell'Epoca.
- Questioni riguardanti la geometria elementare, trattate da U. Amaldi, E. Baroni, R. Bonola, B. Calo, G. Castelnuovo, A. Conti, E. Daniele, F. Enriques, A. Giacomini, A. Guarducci, G. Vitali, raccolte e coordinate dal prof. F. ENRIQUES. Bologna, Zanichelli. L. 12.
- RICCI, GREGORIO, Lezioni di algebra complementare. Verona-Padova, fratelli Drucker. L. 10.
- RIEDEL, ERNST, Katechismus der Planimetrie, mit einem Anhang über harmon. Teilung, Potenzlinien und das Berührungsproblem des Apollonius. (Webers illustr. Katechismen Nr. 225.) Leipzig, Weber. geb. M. 4.
- ROUCHE, E., et LÉVY, L., Analyse infinitésimale à l'usage des ingénieurs. Tome I. Calcul différentiel. Paris, Gauthier-Villars. Fr. 15.
- SACHS, J., Lehrbuch der projektivischen (neueren) Geometrie (synthetischen Geometrie, Geometrie der Lage). 1. Teil. Elemente und Grundgebilde. Projektivität. Dualität. Nebst einer Sammlung gelöster und ungelöster Aufgaben mit den Ergebnissen der ungelösten Aufgaben. (Kleyers Encyclopädie.) Stuttgart, Maier. M. 6.
- SCHLÖMICH, OSK., Übungsbuch zum Studium der höheren Analysis. 2. Teil. Aufgaben aus der Integralrechnung. 4. Aufl. Bearbeitet von R. HENKE. Leipzig, B. G. Teubner. M. 9.
- SCHOENFLIES, ARTH., Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten. Bericht (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, VIII. Bd. 2. Heft). Leipzig, B. G. Teubner. M. 8.

- YOUNG, J. W. A., and LINEBARGER, C. E., The elements of the differential and integral calculus, based on Kurzgefasstes Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung von W. NEUBST und A. SCHÖNFLIES. New-York, Appleton Cloth. \$ 2.20.

### Angewandte Mathematik.

- ADAMCZYK, JOS., Compendium der Geodäsie. Wien, Deuticke. M. 10.
- APPELL, P., Traité de Mécanique rationnelle. Tome III. Equilibre et mouvement des milieux continus. Fascicule Ier. Paris, Gauthier-Villars.  
Le Tome III complet Fr. 15.
- AUTENRIETH, ED., Technische Mechanik. Berlin, Springer. M. 12.  
geb. M. 13. 20.
- BOLTE, F., Die Nautik in elementarer Behandlung. Stuttgart, Maier. M. 5.
- CASTLE, FRANK, Workshop Mathematics. Parts 1 and 2. Illust. London, Macmillan. each. 1 s. 6 d.
- CEBRI, AUG., Triangoli sferici con lati molto piccoli in confronto del raggio della sfera. Pavia, tip. Cooperativa.
- Хандриковъ, М., Теорія Фигуры земли (Высшая геодезія). Кіевъ, Тип. Кульженко.
- CHANDRIKOFF, M., Theorie der Erdgestalt (Höhere Geodäsie). Kiew. R. 2.
- COHN, FRITZ, Ableitung der Deklinationen und Eigenbewegungen der Sterne für den internationalen Breitendienst (Veröffentlichungen des Centralbureaus d. international. Erdmessung, neue Folge Nr. 2). Berlin, Reimer. M. 3.
- DOLEŽAL, ED., Über Photogrammetrie und ihre Anwendungen. (Aus: Schriften des Vereins zur Verbreitung naturw. Kenntnisse in Wien. 40. Jahrg. 10. Heft.) Wien, Braumüller. M. 1. 80.
- FISCHER, OTTO, Der Gang des Menschen. 3. Teil. (Abhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaft. Mathem.-physikal. Klasse, 26. Bd. Nr. III.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 6.
- FÖPPL, AUG., Vorlesungen über die technische Mechanik. 2. Bd. Graphische Statik. Leipzig, B. G. Teubner. geb. M. 10.
- FUHRMANN, ARWED, Anwendungen der Infinitesimalrechnung in den Naturwissenschaften, im Hochbau und in der Technik. Lehrbuch und Aufgabensammlung. (In sechs Teilen.) 1. Teil. Naturwissenschaftliche Anwendungen der Differentialrechnung. 2. Aufl. Berlin, Ernst & Sohn. M. 6.
- HEUN, KARL, Die kinetischen Probleme der wissenschaftlichen Technik. Bericht. (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, IX. Bd. 2. Heft.) Leipzig, B. G. Teubner. M. 4.
- JOHNSON, J. B., Theory and practice of surveying; for surveyors and engineers generally, but especially for students of engineering. 15<sup>th</sup> edition, revised and enlarged. New-York, Willey. Cloth. \$ 4.
- MARTENSSON, OLOF, Exempel i navigation och astronomi. Malmö, Envall. Kr. 3.
- MOOR, J. F. DE, Leçons de géométrie descriptive sur le point, la droite et le plan. Edition revue. Bruxelles, Castaigne. Fr. 4.
- NICOLI, FR., Geometria descrittiva. Modena, lit. Pizzolotti.
- SCHILLING, FRDR., Über die Nomographie von M. d'Ocagne. Eine Einführung in dieses Gebiet. Leipzig, B. G. Teubner. M. 2.
- SCHOLZ, P., Über die Reduktion des Drei-Körper-Problems auf die Integration einer einzigen Differentialgleichung. Dissertation. Berlin.
- SONNET, H., Dictionnaire des mathématiques appliquées, comprenant les principales applications des mathématiques, à l'architecture, à l'arithmétique commerciale, à l'arpentage, à l'artillerie, aux assurances, à la balistique, à la banque, à la charpente, aux chemins de fer, etc., et l'explication d'un grand nombre de termes techniques usités dans les applications. 6<sup>e</sup> édition. Paris, Hachette. Fr. 30.

- Тиме, Г., Аналитическая механика. Вып. 3. Изд. Горнаго Института.  
 ТИМЕ, G., Analytische Mechanik. 3. Heft. St. Petersburg, Berginstitut.  
 R. 1. 25.
- Зубовъ, И. М., Моменты инерціи, статическіе моменты и др. элементы  
 сѣчных частей металлич. Формъ.  
 СУБОВЪ, J. M., Trägheitsmomente, statische Momente und andere Elemente  
 der Querschnitte von Teilen von Metallkonstruktionen. Moskau.  
 R. 1. 75.

### Physik und Meteorologie.

- BEZOLD, WILH. V., Theoretische Betrachtungen über die Ergebnisse der wissen-  
 schaftlichen Luftfahrten des deutschen Vereins zur Förderung der Luft-  
 schiffahrt in Berlin. (Aus: Assmann und Berson, wissenschaftliche Luft-  
 fahrten.) Braunschweig, Vieweg & Sohn. M. 1.
- BUCKINGHAM, EDGAR, An outline of the theory of Thermo-Dynamics. Macmillan. 8 s.
- CASTELLI, ENR., Energia raggiante: conferenze sperimentali. Aquila, Grossi.
- CLAUSEN, FR., und BRONK, O. V., Neue Erscheinungen auf dem Gebiete der Physik.  
 Clausen & v. Bronk. M. —. 60.
- CRANZ, C., und KOCH, K. R., Untersuchung über die Vibration des Gewehrlaufes,  
 I. Schwingungen in verticaler Ebene. B. Versuche mit kleinkalibrigen Ge-  
 wehren. (Aus: Abhandlungen der bayer. Akad. der Wissenschaften.) München,  
 Franz. M. 1. 60.
- DÉCOMBE, L., La célérité des ébranlements de l'éther. Paris, Carré & Naud.  
 Fr. 2.
- EBERT, H., Die Theorie des Elektromagnetismus. (Handbuch der Elektrotechnik,  
 I. Bd. 3. Abtlg.) Leipzig, Hirzel. M. 4. 50.
- GALLENMÜLLER, J., Die Dauer der Dämmerung auf der Erdoberfläche. Programm.  
 Aschaffenburg.
- GELLES, J. J., Die Gravitation der kleinsten Massenteilchen. Programm. Essen.
- HEFFT, O., Scheinbare Anziehung und Abstossung von Kugeln, die in einer  
 klebrigen Flüssigkeit rotieren. Dissertation. Heidelberg.
- HERSZBERG, L., Über elektrische Potentialmessungen bei Spitzenentladungen in  
 Luft von normalem Druck. Dissertation. Heidelberg.
- HOLLARD, AUGUSTE, La théorie des ions et l'électrolyse. Paris, Carré & Naud.  
 cart. Fr. 5.
- KAPP, GISEL., Elektrische Wechselströme. Deutsch von HERM. KAUFMANN. 3. Aufl.  
 Leipzig, Leiner. M. 2, geb. M. 2. 75.
- KAYSER, H., Handbuch der Spectroscopie. 1. Bd. Leipzig, Hirzel.  
 M. 40, geb. M. 44.
- KÖNIGSBERGER, J., Über die Absorption des Lichtes in festen Körpern. Hab.  
 Freiburg.
- KOHLRAUSCH, FRDR., Die Energie oder Arbeit und die Anwendungen des elek-  
 trischen Stromes. Leipzig, Duncker & Humblot. M. 2. 40.
- KOLLEKT, J., Die galvanischen und thermoelctrischen Stromquellen. (Handbuch  
 der Elektrotechnik, III. Bd. 1. Abtlg.) Leipzig, Hirzel. M. 3.
- LANGER, H., Über die mechanischen Principien der modernen Elektrizitätslehre  
 (Fortsetzung). Programm. Linz.
- LESSING, A., Über die Elasticität einiger Kupfer-Nickel-Legierungen. Dissert.  
 Berlin.
- LIEBENOW, C., Die atmosphärische Elektrizität, ihre Verteilung und wahrschein-  
 lichen Ursachen. Halle, Knapp. M. 2.
- MANNING, G. L., Beitrag zur Kenntnis der Absorption des Lichtes. Dissertation.  
 Berlin.

- MICHEL, E. J., Über den Einfluss von Oberflächenschichten auf das Kerr'sche magnetooptische Phänomen. Dissertation. Leipzig.
- NEUROFF, O., Adiabatische Zustandsänderungen feuchter Luft und deren rechnerische und graphische Bestimmung. Dissertation. Berlin.
- SAUR, K., Volt-Ampère-Watt-Pferdestärken. 12 graphische Tabellen über die in der Praxis zumeist vorkommenden Werte und Wirkungsgrade. Leipzig, Leiner. kart. 2. 75.
- STEINMETZ, CHARLES PROTEUS, Theorie und Berechnung der Wechselstromerscheinungen. Deutsche Ausgabe. 2. Hälfte. Berlin, Reuther & Reichard. Subskriptionspreis M. 6. (Kompl. erh. Pr. M. 12, geb. M. 13. 50.)
- TEUDT, H., Über die Änderung der spezifischen Wärmen wässriger Salzlösungen mit der Temperatur. Dissertation. Erlangen.
- THOMPSON, S. P., Die dynamoelektrischen Maschinen. 6. Aufl. 8. Heft. Halle, Knapp. M. 2.
- WAALS, J. E. VAN DER, Die Kontinuität des gasförmigen und flüssigen Zustandes. 2. Teil. Binäre Gemische. Leipzig, Barth. M. 5, geb. M. 6.
- WARTHMAN, F., Das Klima der Rheinebene, der Baar und des hohen Schwarzwaldes mit besonderer Berücksichtigung des Luftdruckes. Dissertation. Freiburg.
- WIENER†, CHR., Die Helligkeit des klaren Himmels und die Beleuchtung durch Sonne, Himmel und Rückstrahlung. Herausgegeben von H. WIENER und O. WIENER. (Abhandl. der kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher, 73. Bd. Nr. 1.) Leipzig, Engelmann. M. 18.
- ZEUNER, GUST., Technische Thermodynamik. 2. Aufl. Zugleich 4. Aufl. der „Grundzüge der Wärmetheorie“. 1. Bd. Fundamentalsätze der Thermodynamik. Lehre von den Gasen. Leipzig, Felix. M. 13.

# Mathematisches Abhandlungsregister.

1899.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. Dezember.

## A.

### Abbildung.

201. Sur la représentation conforme des variétés à trois dimensions. E. Cotton. Compt. Rend. CXXVII, 349.  
Vergl. Mehrdimensionale Geometrie 399.

### Abelsche Transcendenten.

202. Zur Theorie der Abelschen Funktionen. L. Fuchs. Berl. Akad. Ber. 1898, II, 477.  
203. Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques. Em. Picard. Compt. Rend. CXXVII, 579.  
204. Sur la multiplication complexe des fonctions abéliennes. G. Humbert. Compt. Rend. CXXVII, 857.  
205. Sur les fonctions abéliennes singulières. G. Humbert. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 233.

### Absolute Geometrie.

206. Alcune ricerche di geometria non euclidea. L. Bianchi. Annali mat. Ser. 3, II, 95.

### Aerodynamik.

207. Applications of diffusion to conducting gases. J. S. Townsend. Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 469.

### Akustik.

208. On the cooling of air by radiation and conduction and on the propagation of sound. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 308.

### Analytische Geometrie der Ebene.

209. Les courbes images et les courbes symétriques. G. de Longchamps. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 373.  
210. Sur un système de cubiques à trois points d'inflexion réels. G. Tzitzeica. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 98.  
211. Contribution à la théorie des cubiques cuspidales. Ch. Zahradnik. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 389.  
212. Sur une hypocycloïde à trois rebroussements. E. N. Barisien. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 385.  
Vergl. Kegelschnitte.

### Analytische Geometrie des Raumes.

213. Le congruenze. T. Cifarelli. Annali mat. Ser. 3, II, 139.  
214. Sur quelques questions de la théorie des courbes à double courbure: H. Piccioli. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 508.

16\*

215. Sur quelques lignes liées à l'hélice cylindrique. *Gem. Pirondini. Crelle* CXXI, 245.  
 216. Sur un théorème de Mr. Cosserat. *Tzitzeica. Compt. Rend. CXXVII*, 167.  
 217. Enveloppe de la trace d'un cône mobile sur un plan de section droite d'un cylindre. *Dulimbert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII*, 338.  
 Vergl. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Singularitäten.

#### Astronomie.

218. Tables numériques pour faciliter le développement par interpolation de la fonction perturbatrice. *O. Callandreaux. Compt. Rend. CXXVII*, 6.  
 219. Sur le calcul numérique des coefficients dans le développement de la fonction perturbatrice. *O. Callandreaux. Compt. Rend. CXXVII*, 211.  
 220. Sur l'intégration du problème restreint des trois corps avec la première puissance de la masse troublante. *J. Perchot et W. Fbert. Compt. Rend. CXXVII*, 504.  
 221. On the forced precession and nutations of a rotating ellipsoidal shell containing liquid. *W. Mc. F. Orr. Phil. Mag. Ser. 5, XLVI*, 545.  
 222. Sur la théorie de la lunette zénithale. *Hatt. Compt. Rend. CXXVII*, 291.

#### Ausdehnungslehre.

223. Applications des méthodes de Grassmann; vecteurs dans le plan; définitions, propriétés. *F. Caspary. N. ann. math. Sér. 3, XVIII*, 248 (vergl. Bd. XLIV Nr. 232).

#### B.

##### Bestimmte Integrale.

224. Sur le second théorème de la moyenne. *Tikhomandritzky. N. ann. math. Sér. 3, XVIII*, 173.  
 225. The theory of the  $G$ -function. *E. W. Barnes. Quart. Journ. math. XXXI*, 264.  
 226. Sur la réduction des intégrales multiples. *Ch. J. de la Vallée-Poussin. Compt. Rend. CXXVII*, 950.  
 227. Réduction des intégrales multiples généralisées. *Ch. J. de la Vallée-Poussin. Journ. Mathém. Sér. 5, V*, 191.  
 228. Sur les intégrales doubles de seconde espèce dans la théorie des surfaces algébriques. *E. Picard. Journ. Mathém. Sér. 5, V*, 5.  
 229. Valeur de  $\int \int x^{1/2} y^{1/2} (1-x-y)^{2/5} dx \cdot dy$  à l'intérieur d'un triangle donné. *Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII*, 462.  
 230. Valeur de  $\int \int \int \left[ (x+y+z)^2 - \frac{9a^2}{5} \right] dx \cdot dy \cdot dz$  à l'intérieur d'un certain volume. *Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII*, 464.  
 Vergl. Funktionen 317. Quadratur.

#### D.

##### Determinanten.

231. Sur la théorie des abaques à alignements. *E. Duporcq. Compt. Rend. CXXVII*, 265.  
 232. Sui determinanti d'ordini infinito. *T. Cazzaniga. Annali mat. Ser. 2, XXVI*, 143.  
 233. Intorno ad un tipo di determinanti nulli d'ordine infinito. *T. Cazzaniga. Annali mat. Ser. 3, I*, 83.  
 234. Appunti sulla moltiplicazione di determinanti normaloidi. *T. Cazzaniga. Annali mat. Ser. 3, II*, 229.  
 235. A simple proof of the reality of the roots of discriminating determinant equations and of kindred facts. *E. B. Elliott. Quart. Journ. math. XXXI*, 233.  
 Vergl. Imaginäres.

##### Differentialgleichungen.

236. Über die Irreduktibilität algebraischer Funktionalgleichungen und linearer Differentialgleichungen. *L. Koenigsberger. Berl. Akad. Ber. 1899, II*, 672.

237. Über die Irreduktibilität algebraischer Differentialgleichungen. L. Koenigsberger. Berl. Akad. Ber. 1899, II, 783.
238. Zur Theorie der associierten Differentialgleichungen. L. Fuchs. Berl. Akad. Ber. 1899, I, 182.
239. Über lineare Differentialgleichungen mit mehrwertigen algebraischen Koeffizienten. L. W. Thomé. Crelle CXXI, 1. (Vergl. Bd. XLIV Nr. 255.)
240. Über lineare Differentialgleichungen, welche mit ihrer Adjungierten zu derselben Art gehören. Rich. Fuchs. Crelle CXXI, 205.
241. Sur les équations aux différentielles totales linéaires. Alf. Guldberg. Compt. Rend. CXXVII, 1199.
242. Untersuchung und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser linearer Differentialgleichungen bei grossen reellen Werten des Arguments. Ad. Kneser. Crelle CXX, 267. (Vergl. Bd. XLII Nr. 483.)
243. Studi sulle equazioni differenziali lineari. Ul. Dini. Annali mat. Ser. 3, II, 297; III, 125.
244. Die Differentialgleichungen, deren allgemeines Integral eine lineare gebrochene Funktion der willkürlichen Konstanten ist. G. Wallenberg. Crelle CXXI, 210.
245. Über das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung in der Umgebung einer Unbestimmtheitsstelle. J. Horn. Crelle CXX, 1. (Vergl. Bd. XLIV Nr. 250.)
246. Sur les équations différentielles du premier ordre. Arm. Cahen. Compt. Rend. CXXVII, 1196.
247. Sur les équations différentielles du second ordre à points critiques fixes. P. Painlevé. Compt. Rend. CXXVII, 541, 945.
248. Sur les intégrales intermédiaires des équations du second ordre. E. Goursat. Compt. Rend. CXXVII, 803.
249. Über eine Klasse nicht linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung. G. Wallenberg. Crelle CXX, 113.
250. Intégration de  $(x+a)(x^2-a^2)y' - 2x(x+a)y' + 6ay = 2(x-a)^2$ . Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 463.
251. On linear differential equations of the third and fourth orders in whose solutions exist certain homogeneous relations. D. F. Campbell. Quart. Journ. math. XXXI, 161.
252. Über die einer linearen Differentialgleichung  $n$ ter Ordnung adjungierten und associierten Differentialgleichungen  $n$ ter Ordnung. E. Grünfeld. Crelle CXXI, 218.
253. Über Riccatische Differentialgleichungen höherer Ordnung. G. Wallenberg. Crelle CXXI, 196.
254. Über die singulären Lösungen der algebraischen Differentialgleichungen höherer Ordnung. M. Hamburger. Berl. Akad. Ber. 1899, I, 140.
255. Über die singulären Lösungen der Differentialgleichungen höherer Ordnung. M. Hamburger. Crelle CXXI, 265.
256. Problèmes divers sur la méthode inverse des tangentes. Ed. Collignon. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 488.
257. Über Systeme von Differentialgleichungen, denen die vierfach periodischen Funktionen zweiter Art Genüge leisten. M. Krause. Annali mat. Ser. 3, I, 265.
258. Sur les systèmes différentiels dont l'intégration se ramène à celle d'équations différentielles totales. Riquier. Compt. Rend. CXXVII, 809.
259. Su di un sistema generale di equazioni che si può integrare col metodo delle caratteristiche. Or. Tedone. Annali mat. Sér. 3, I, 283.
260. Intégrer un système de trois équations différentielles. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 461.
261. Sur les équations linéaires aux dérivées partielles. J. Le Roux. Journ. Mathém. Sér. 5, IV, 359.
262. Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles réductibles aux équations différentielles ordinaires. J. Beudon. Compt. Rend. CXXVII, 1003.
263. Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles analogues aux systèmes d'équations du premier ordre en involution. J. Beudon. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 351.
264. Zur Theorie der simultanen linearen partiellen Differentialgleichungen. L. Fuchs. Berl. Akad. Ber. 1898, I, 222.

265. Applications of certain partial differential equations derived from Codazzis equations. Th. Craig. *Crelle* CXX, 165.
266. Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. N. Saltykow. *Journ. Mathém. Sér. 5*, V, 435.
267. Sur la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre d'une seule fonction. N. Saltykow. *N. ann. math. Sér. 3*, XVIII, 533.
268. Intégrales communes à deux équations aux dérivées partielles du premier ordre. V. Jamet. *N. ann. math. Sér. 3*, XVIII, 553.
269. Sur l'équation aux dérivées partielles du premier ordre  $(px + qy)^2 - 2a(py - qx) + 2F(z) = 0$ . A. Vacquart. *N. ann. math. Sér. 3*, XVIII, 134.
270. Sur quelques types intégrables d'équations aux dérivées partielles du second ordre. E. Goursat. *Compt. Rend.* CXXVII, 854.
271. Classificazione delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine, che ammettono un gruppo infinito di trasformazioni puntuali. P. Medolaghi. *Annali mat. Ser. 3*, I, 229.
272. Sull' integrazione dell' equazione differenziale  $\Delta^2 n = 0$ . Em. Almansi. *Annali mat. Ser. 3*, II, 1.
- Vergl. Funktionen 314, 315. Mechanik. Mehrdimensionale Geometrie 400. Potential. Thetafunktionen.

#### Differentialquotient.

273. Über die Differentiale von symbolischen Ausdrücken. R. Lipschitz. *Berl. Akad. Ber.* 1899, I, 122.

#### Differenzenrechnung.

274. Sur l'intégrale finie d'une fonction entière. A. Hurwitz. *Acta Math.* XX, 285.
275. On the algebra of difference-tables. J. D. Everett. *Quart. Journ. math.* XXXI, 357.
- Vergl. Reihen 454, 455.

#### Dreiecksgeometrie.

276. Egalité des aires d'un triangle et d'un quadrilatère. G. Candido. *N. ann. math. Sér. 3*, XVIII, 170.
277. Formules pour l'étude d'une figure remarquable. G. Candido. *N. ann. math. Sér. 3*, XVIII, 31.

#### E.

##### Elastizität.

278. Sulle vibrazioni dei solidi elastici. G. Lauricella. *Annali mat. Ser. 2*, XXVI, 113.
279. On the application of force within a limited space required to produce spherical solitary waves or trains of periodic waves. Lord Kelvin. *Phil. Mag. Ser. 5*, XLVII, 480; XLVIII, 227, 388.
280. Sur l'équilibre d'élasticité d'un bandage pneumatique. L. Lecornu. *Compt. Rend.* CXXVII, 168.
281. Elastic stability of long beams under transverse forces. A. G. M. Michell. *Phil. Mag. Ser. 5*, XLVIII, 298.
282. Reflexion and refraction of elastic waves with seismological applications. C. G. Knott. *Phil. Mag. Ser. 5*, XLVIII, 64.
283. Sur la déformation infiniment petite d'un ellipsoïde élastique. Eug. et Franç. Cosserat. *Compt. Rend.* CXXVII, 315.

##### Elektrizität.

284. Über vermeintlich irreversible Strahlungsvorgänge. L. Baltzmann. *Berl. Akad. Ber.* 1898, I, 182. — M. Planck ebenda II, 449; 1899, I, 440. (Vergl. Bd. XLIV, Nr. 38.)
285. Zur Prisson'schen Theorie der Elektrostatik, insbesondere über die elektrische Verteilung auf einem von drei Kugelflächen begrenzten Konduktor. E. Neumann. *Crelle* CXX, 60, 277.
286. The Thomson effect in a binary electrolyte. F. G. Donnan. *Phil. Mag. Ser. 5*, XLV, 529.

287. Theory of the Hall-effect in a binary electrolyte. F. G. Donnan. Phil. Mag. Ser. 5, XLVI, 465.
288. On the pressure of radiation, showing an apparent failure of the usual electromagnetic equations. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 522.
289. On the mechanical forces acting on a piece of iron carrying an electric current. J. J. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XLVI, 154.
290. On the application of the gamma-function to an electrostatic problem. R. H. Jude. Phil. Mag. Ser. 5, XLVI, 254.
291. A quantitative study of the high-frequency induction-coil. W. P. Boynton. Phil. Mag. Ser. 5, XLVI, 312.
292. On the theory of the conduction of electricity through gases by charged ions. J. J. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 253.
293. On the propagation of damped electrical oscillations along parallel wires. W. B. Morton. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 296.
294. On opacity. O. Lodge. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 385.
295. The equivalent resistance and inductance of a wire to an oscillatory discharge. E. H. Barton. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 433.
296. On the criterion for the oscillatory discharge of a condenser. E. H. Barton. Phil. Mag. Ser. XLVIII, 143.

**Elimination.**

297. Mémoire sur l'élimination. J. Hadamard. Acta Math. XX, 201.  
Vergl. Gleichungen 348.

**Ellipse.**

298. Circle tangent à une ellipse. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 435.
299. Produit de deux longueurs égal à la somme des carrés des demi-axes d'une ellipse donnée. Ern. Duporcq. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 334. — A. Boulanger *ibid.* 335. — Mannheim *ibid.* 476.

**Ellipsoid.**

300. Sur les normales de l'ellipsoïde. O. Böklen. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 121.  
Vergl. Astronomie 221. Elastizität 283. Hydrodynamik 352.

**Elliptische Transcendenten.**

301. Über die Gauss'sche Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und ihre Beziehungen zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen. L. Schlesinger. Berl. Akad. Ber. 1898, I, 346.
302. Sur l'équation d'Euler  $\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}} = \frac{dx_1}{\sqrt{\psi(x_1)}}$ . E. Lacour. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 293.
303. Sur le mouvement d'un solide pesant autour d'un point fixe. E. Lacour. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 543.
304. Sur les systèmes de trois relations doublement quadratiques entre trois variables. G. Fontené et R. Bricard. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 437.  
Vergl. Geschichte der Mathematik 336.

**F.****Formen.**

305. Sur le hessien d'une forme cubique binaire. G. Fontené. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 459.
306. Il discriminante delle forme binarie del settimo ordine. Franc. Brioschi. Annali mat. Ser. 2, XXVI, 255.

**Funktionen.**

307. Sur les fonctions de variables réelles. R. Baire. Annali mat. Ser. 3, III, 1.
308. Sur la convergence des réduites de la fonction exponentielle. H. Padé. Compt. Rend. CXXVII, 444.
309. Sur une fonction entière de trois variables dont une n'a aucune influence sur la valeur de la fonction pourvu qu'il existe un certain rapport de grandeur entre les deux autres. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 383.

310. Über diejenigen algebraischen Körper, welche aus zwei anderen komponiert sind. K. Hensel. *Crelle* CXX, 99. [Vergl. Bd. XLII Nr. 539 u. 540.]
311. Sur les zéros des fonctions entières. Em. Borel. *Acta Math.* XX, 357.
312. Sur la valeur asymptotique d'une fonction remarquée par M. Poincaré. S. Zaremba. *Compt. Rend. CXXVII*, 215.
313. Un applicazione della teoria dei residui delle funzioni di variabile complessa. Ul. Dini. *Annali mat. Ser. 3*, I, 39.
314. Les fonctions fuchsienues et l'équation  $\Delta u = e^u$ . H. Poincaré. *Journ. Mathém. Sér. 5*, IV, 137.
315. Sur l'équation  $\Delta u = e^u$ . E. Picard. *Journ. Mathém. Sér. 5*, IV, 313.
316. Sur quelques propriétés arithmétiques des fonctions analytiques. P. Stäckel. *N. ann. math. Sér. 3*, XVIII, 53. [Vergl. Bd. XLI Nr. 356.]
317. Sull' operazione funzionale rappresentata da un integrale definito considerato come elemento d'un calcolo. Ad. Viterbi. *Annali mat. Ser. 2*, XXVI 261; *Ser. 3*, III, 299.
318. Sulla razionalità dei piani multipli  $\{x, y, \sqrt[n]{F(x, y)}\}$ . Am. Bottari. *Annali mat. Ser. 3*, II, 277.
- Vergl. Abel'sche Transcendenten. Bestimmte Integrale. Determinanten. Differentialgleichungen. Differentialquotient. Differenzenrechnung. Elliptische Transcendenten. Gleichungen. Hyperelliptische Transcendenten. Integration (unbestimmte). Invarianten. Kettenbrüche. Potential. Reihen. Substitutionen. Thetafunktionen. Transformationsgruppen. Variationsrechnung.

## G.

## Geometrie (höhere).

319. Sur le rapport anharmonique. L. Autonne. *N. ann. math. Sér. 3*, XVIII, 341.
320. Sur des angles résultants. G. Fontené. *N. ann. math. Sér. 3*, XVIII, 407. — C. A. Laisant *ibid.* 419.
321. Sur l'homographie et la dualité appliquées aux propriétés métriques du plan. L. Ripert. *N. ann. math. Sér. 3*, XVIII, 101.
322. Sur l'homographie et la dualité appliquées aux propriétés métriques de l'espace. L. Ripert. *N. ann. math. Sér. 3*, XVIII, 306.
323. Sur les lignes composées de parties rectilignes. D. Gravé. *Compt. Rend. CXXVII*, 1005.
324. Una estensione del problema della proiettività a gruppi di complessi e di congruenzi lineari di rette. D. Montesano. *Annali mat. Ser. 3*, I, 313.
325. Cubique, lieu des foyers des coniques inscrites dans un quadrilatère. Hilaire. *N. ann. math. Sér. 3*, XVIII, 472.
326. Point remarquable dans le plan d'une cubique. Stuyvaert. *N. ann. math. Sér. 3*, XVIII, 275.
327. Sopra la teoria delle figure polari delle curve piane del 4. ordine. Gaet. Scorza. *Annali mat. Ser. 3*, II, 155.
328. Sur une courbe de quatrième degré. Retali. *N. ann. math. Sér. 3*, XVIII, 472.
329. Über eine Kugelschar. H. E. Timerding. *Crelle* CXXI, 188.
330. Über die quadratische Transformation, durch welche die Ebenen des Raumes in ein System von Flächen zweiter Ordnung mit gemeinsamen Polartetraeder übergeführt werden. H. E. Timerding. *Annali mat. Ser. 3*, I, 95.
- Vergl. Absolute Geometrie. Mehrdimensionale Geometrie. Oberflächen. Oberflächen zweiter Ordnung. Winkelteilung.

## Geschichte der Mathematik.

331. Hrabastudien. E. Dümmler. *Berl. Akad. Ber.* 1898, I, 24.
332. Leibniz und das Problem der Universalsprache. H. Diels. *Berl. Akad. Ber.* 1899, I, 579.
333. Über die vier Briefe von Leibniz, die Samuel König in dem Appel au public (Leide MDCCCLII) veröffentlicht hat. C. J. Gerhardt. *Berl. Akad. Ber.* 1898, I, 419.
334. Friedrich der Grosse und D'Alembert. J. Vahlen. *Berl. Akad. Ber.* 1899, I, 49.
335. Zur Biographie von Maupertuis. H. Diels. *Berl. Akad. Ber.* 1899, I, 51.
336. Über die Entdeckung der doppelten Periodizität und Jacobi's Anteil daran. S. Gundelfinger. *Berl. Akad. Ber.* 1898, I, 342.

337. Maxwell and the theory of anomalous dispersion. Lord Rayleigh. *Phil. Mag.* Ser. 5, XLVIII, 151.  
 338. Hugo Gyldén (29. V. 1841 — 9. XI. 1896). K. Bohlin. *Acta Math.* XX, 397.  
 339. La morte di Franc. Brioschi (22. XII 1824 — 13. XII. 1897). L. Cremona. *Annali mat.* Ser. 2, XXVI, 343. — Eug. Beltrami *ibid.* 343.  
 340. Sur la vie et les travaux de Paul Serret (16. X. 1827 — 25. VI. 1898). Darboux. *Compt. Rend.* CXXVII, 37.

#### Gleichungen.

341. Über die Entwicklungsform algebraischer Funktionen und die Irreduktibilität algebraischer Gleichungen. L. Koenigsberger. *Berl. Akad. Ber.* 1898, II, 735.  
 342. Über die Entwicklungsform algebraischer Funktionen und die Irreduktibilität algebraischer Gleichungen. L. Koenigsberger. *Crelle* CXXI, 320.  
 343. Sur la détermination du groupe des équations numériques. Edm. Maillet. *Compt. Rend.* CXXVII, 1004.  
 344. Sur la détermination du groupe des équations numériques. E. Maillet. *Journ. Math.* Sér. 5, V, 205.  
 345. Limites des racines d'une équation n'ayant que des racines réelles. Ant. Pleskot. *N. ann. math.* Sér. 3, XVIII, 301.  
 346. On algebraic equations in which the terms of higher degrees have small coefficients. W. B. Morton. *Quart. Journ. math.* XXXI, 247.  
 347. Nouveau procédé pour résoudre les équations du troisième degré. Ant. Pleskot. *N. ann. math.* Sér. 3, XVIII, 65.  
 348. Sur le résultant de deux équations. P. Gordan. *Compt. Rend.* CXXVII, 539. *Vergl. Determinanten. Elimination. Graphisches Rechnen.*

#### Graphisches Rechnen.

349. Solution graphique de  $n$  équations linéaires avec  $n$  variables. F. J. Vaes. *N. ann. math.* Sér. 3, XVIII, 74.

### H.

#### Hydrodynamik.

350. Diffusive convection. Alb. Griffiths. *Phil. Mag.* Ser. 5, XLVI, 453.  
 351. On the calculation of the frequency of vibration of a system in its gravest mode, with an example from hydrodynamics. Lord Rayleigh. *Phil. Mag.* Ser. 5, XLVII, 566.  
 352. De l'ellipsoïde considéré comme figure d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène. *M. Mathy. Journ. Mathém.* Sér. 5, IV, 231.

#### Hyperelliptische Transcendenten.

353. Zur Lehre von den hyperelliptischen Integralen. P. Epstein. *Acta Math.* XX, 1.

### I.

#### Imaginäres.

354.  $A, B, C, D, X$  étant imaginaires et  $X$  en surplus variable discuter le déterminant  $\begin{vmatrix} A+X & B+X \\ C+X & D+X \end{vmatrix}$ . Dulimbert. *N. ann. math.* Sér. 3, XVIII, 481.

#### Integration (unbestimmte).

355. Sur quelques intégrales. Genese. *N. ann. math.* Sér. 3, XVIII, 273.

#### Invarianten.

356. Sur les invariants différentiels d'un système de  $m+1$  points par rapport aux transformations projectives. E. O. Lovett. *Compt. Rend.* CXXVII, 346.  
 357. Sugli invarianti differenziali proiettivi delle curve di un iperspazio. L. Berzolari. *Annali mat.* Ser. 2, XXVI, 1.  
 358. Zur Theorie der Differentialinvarianten. G. Wallenberg. *Crelle* CXXI, 200.  
 359. On the invariants of a binary sextic. H. W. Richmond. *Quart. Journ. math.* XXXI, 57.

**K.****Kegeleschnitte.**

360. Über ein quadratisches Nullsystem. H. E. Timerding. *Annali mat. Ser. 3, II, 249.*
361. Coniques inscrites à un quadrilatère. Audibert. *N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 483.*
362. Étant données le centre d'une conique et trois tangentes, trouver les points de contact. R. Gilbert. *N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 337.*
363. Trois droites dans une conique qui concourent en un même point. G. Leinekugel. *N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 480.*
364. Par le foyer d'une conique donnée on mène des cordes: les circonférences, qui ont ces cordes pour diamètres, sont tangentes à deux cercles. Audibert. *N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 384.* — Mannheim *ibid.* 476.
365. Conique engendrée au moyen d'un triangle et d'une droite. A. Vacquant. *N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 79.*
366. Propriétés du cercle ayant pour diamètre une corde d'une conique passant par un de ses foyers. E. Malo. *N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 92.*  
Vergl. *Ellipse. Geometric (höhere) 325.*

**Kettenbrüche.**

367. Über einen besonderen Kettenbruch mit negativen Teilzählern nebst einleitenden allgemeinen Bemerkungen zur Konvergenz oder Oscillation der Kettenbrüche. L. Saalschütz. *Crelle CXX, 132, 242, 354.*

**Kinematik.**

368. Démonstration de quelques théorèmes de cinématique. H. Duport. *N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 5.*
369. Sur le déplacement le plus général d'une droite dont tous les points décrivent des trajectoires sphériques. E. Duporcq. *Journ. Mathém. Sér. 5, IV, 121.*
370. Sur le déplacement d'un plan dont tous les points décrivent des lignes sphériques. R. Bricard. *Journ. Mathém. Sér. 5, IV, 409.*
371. Note de géométrie cinématique. V. Nobile. *N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 218.*

**M.****Magnetismus.**

372. De l'énergie d'un champ magnétique. H. Pellat. *Compt. Rend. CXXVII, 507.*
373. Radiation phenomena in the magnetic field; magnetic perturbations of the spectral lines. Th. Preston. *Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 165.*
374. The scattering of electro-magnetic waves by a sphere. G. W. Walker. *Quart. Journ. math. XXXI, 36, 252.* [Vergl. *Bd. XLIV, Nr. 446.*]
375. On the effect of a solid conducting sphere in a variable magnetic field on the magnetic induction of a point outside. C. S. Whitehead. *Phil. Mag. Ser. 5, XLVIII, 164.*
376. On the possible effects of solar magnetization on periodic variations of terrestrial magnetism. A. Schuster. *Phil. Mag. Ser. 5, XLVI, 395.*
377. On electromagnetic induction in plane, cylindrical and spherical current-sheets and its representation by moving trails of images. G. H. Bryan. *Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 381.*

**Mechanik.**

378. Sur une forme générale des équations de la dynamique. P. Appell. *Crelle CXXI, 310.*
379. Une propriété d'une intégrale première des équations de la dynamique à deux variables et à potentiel homogène. W. Ebert et J. Perchot. *Compt. Rend. CXXVII, 657.*
380. Nouvelles expressions des éléments d'un système orthogonal par les fonctions sigma d'un seul argument et leur application à la rotation de corps solides liés l'un à l'autre. E. Jahnke. *Journ. Mathém. Sér. 5, V, 155.*
381. Sur le mouvement d'un point sollicité par une force centrale constante. L. Lecornu. *N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 161.*

382. Lignes correspondantes dans la déformation d'un milieu; extension des théorèmes sur les tourbillons. P. Appell. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 137.
383. Formole per la composizione di più movimenti finiti. R. Marcolongo. Annali mat. Ser. 2, XXVI, 101.
384. Sur les groupes continus de mouvements d'une variété quelconque à trois dimensions. G. Ricci. Compt. Rend. CXXVII, 344.
385. Sur les groupes continus de mouvements d'une variété quelconque. G. Ricci. Compt. Rend. CXXVII, 360, 390.
386. Sur le mouvement d'un corps solide pesant suspendu par l'un de ses points. R. Liouville. Acta Math. XX, 239.
387. Sur la stabilité. J. Andrade. Compt. Rend. CXXVII, 712.
388. On the flexure of heavy beams subjected to continuous systems of load. K. Pearson & L. N. G. Filon. Quart. Journ. math. XXXI, 66.
389. The stresses and deflection of braced girders. W. H. Macaulay. Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 42.
390. The stress in the web of a plate girder. J. H. Michell. Quart. Journ. math. XXXI, 377.
391. Ein bemerkenswerter Zusammenhang zwischen der Statik biegsamer un-ausdehnbarer Flächen und der Lehre von der Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. Fr. Kötter. Crelle CXXI, 300.
392. Sur l'équilibre élastique d'un barrage en maçonnerie à section triangulaire. M. Lévy. Compt. Rend. CXXVII, 10, 140.
393. Der Bodendruck von Sand in vertikalen cylindrischen Gefässen. Fr. Kötter. Crelle CXX, 189.
394. Sur l'isochronisme pratique des régulateurs. L. Lecornu. Compt. Rend. CXXVII, 1007.
395. Relation qui existe, dans la bicyclette roulant sur un sol horizontal, entre le mouvement de progression et le mouvement d'inclinaison. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXVII, 843.
396. Aperçu sur la théorie de la bicyclette; équilibre du cavalier. J. Boussinesq. Compt. Rend. CXXVII, 895.
397. Sur la théorie de la bicyclette. J. Boussinesq. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 117, 217.
- Vergl. Aerodynamik. Akustik. Astronomie. Elastizität. Elektrizität. Elliptische Transcendenten 303. Geschichte der Mathematik 333. Hydrodynamik. Kinematik. Magnetismus. Nautik. Optik. Potential. Wärmelehre. Wellenlehre.

#### Mehrdimensionale Geometrie.

398. On the expansion in powers of arc of the coordinates of points on a curve in Euclidean space of many dimensions. H. W. Richmond. Quart. Journ. math. XXXI, 315.
399. Rappresentazione della quartica base di un fascio di quadriche di  $S_n$  sopra un  $S_{n-2}$ . C. Rosati. Annali mat. Ser. 3, I, 25.
400. Sull' integrazione dell' equazione  $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t^3} - \sum_1^m \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0$ . Or. Tedone. Annali mat. Ser. 3, I, 1.
401. Un théorème de géométrie à  $n$  dimensions. H. Piccioli. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 132.
402. On the figure of six points in space of four dimensions. H. W. Richmond. Quart. Journ. math. XXXI, 125.
- Vergl. Invarianten 337.

#### N.

##### Nautik.

403. Sur une théorie géométrique des compas de marine. S. L. Ravier. Compt. Rend. CXXVII, 443.
404. The wave-resistance of a ship. J. H. Michell. Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 106.

## O.

## Oberflächen.

405. Sur la déformation des surfaces. J. Weingarten. Acta Math. XX, 159.  
 406. Sulla teoria delle trasformazioni delle superficie a curvatura costante. L. Bianchi. Annali mat. Ser. 3, III, 185.  
 407. Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques. Hadamard. Journ. Mathém. Sér. 5, IV, 27.  
 408. Étude sur la transformée homographique générale de la surface de l'onde. R. Bricart. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 197.  
 409. Sur les systèmes orthogonaux. Tzitzeica. Compt. Rend. CXXVII, 856.  
 410. Une question de géométrie différentielle. H. Piccioli. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 454.  
 411. The quartic surfaces with 14, 15 and 16 nodes. C. M. Jessop. Quart. Journ. math. XXXI, 354.  
 412. Propriétés d'une surface de Steiner. Em. Duporcq. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 285.  
 413. Sur une surface étudiée par Painvin. O. Böklen. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 370.  
 414. Prouver que  $F'(z) = f'(x, y)$  est l'équation de toute surface-moulure de l'hélicoïde développable  $z = f(x, y)$ . A. Boulanger. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 336.  
 415. Lieu des centres des sphères tangentes à la fois à deux droites données dans l'espace. Philbert du Plessis. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 421.  
 Vergl. Bestimmte Integrale 228. Singularitäten.

## Oberflächen zweiter Ordnung.

416. Die reciproken Figuren der graphischen Statik. G. Hauck. Crelle CXX, 109.  
 417. Sur des polyèdres mobiles comparables aux polygones de Poncelet. G. Fontené. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 67.  
 418. Sur les quadriques circonscrites à un tétraèdre. Ch. Bioche. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 38.  
 419. Étant donnée une quadrique, trouver les quadriques qui la coupent orthogonalement. A. Boulanger. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 335. — A. de Saint-Germain *ibid.* 473.  
 420. Généralisation d'un théorème sur le paraboloid hyperbolique. M. d'Ocagne. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 478.  
 421. Propriété de l'hyperboloïde équilatère. E. Genty. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 532.  
 Vergl. Ellipsoid. Geometrie (höhere) 329, 330.

## Optik.

422. Relative motion of the earth and aether. W. Sutherland. Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 23.  
 423. Sur la polarisation par diffraction. H. Poincaré. Acta Math. XX, 313.  
 424. On achromatic polarization and differential double refraction. D. B. Brace. Phil. Mag. Ser. 5, XLVIII, 345.  
 425. On the admissible width of the slit in interference experiments. J. Walker. Phil. Mag. Ser. 5, XLVI, 472.  
 426. On the orientation of the slit in interference experiments. J. Walker. Phil. Mag. Ser. 5, XLVI, 553.  
 427. Application of Sellmeier's dynamical theory to the dark lines  $D_1, D_2$  produced by sodium-vapour. Lord Kelvin. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 302.  
 428. On dynamical illustrations of certain optical phenomena. J. D. Everett. Phil. Mag. Ser. 5, XLVI, 227.  
 429. On the transmission of light through an atmosphere containing small particles in suspension, and on the origin of the blue of the sky. Lord Rayleigh. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 375.  
 430. On certain diffraction fringes as applied to micrometric observations. L. N. G. Filon. Phil. Mag. Ser. 5, XLVII, 441.  
 431. A theory of the connexion between cathode and Röntgen-rays. J. J. Thomson. Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 172.  
 432. Diffraction phenomena in the focal plane of a telescope with circular aperture, due to a finite source of light. H. Nagaoka. Phil. Mag. Ser. 5, XLV, 1.

433. Étude d'un système de deux miroirs sphériques. Lefebvre. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 512.  
Vergl. Astronomie 222. Geschichte der Mathematik 337. Mehrdimensionale Geometrie 400.

**P.****Potential.**

434. La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet. II. Poincaré. Acta Math. XX, 59.  
435. Sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet. A. Liapounoff. Journ. Mathém. Sér. 5, IV, 241.  
436. Über die erweiterte Laplace'sche Differentialgleichung für die allgemeine Potentialfunktion. L. Koenigsberger. Berl. Akad. Ber. 1898, I, 5, 93.  
437. Über das erweiterte Prinzip der Erhaltung der Flächen und dessen Anwendung auf kinetische Potentiale erster Ordnung. L. Koenigsberger. Berl. Akad. Ber. 1898, I, 148.  
438. Über die Erniedrigung der Anzahl der unabhängigen Parameter Lagrange'scher Bewegungsgleichungen durch Erhöhung der Ordnung des kinetischen Potentials. L. Koenigsberger. Berl. Akad. Ber. 1898, II, 491.  
439. Über die allgemeinen kinetischen Potentiale. L. Koenigsberger. Crelle CXXI, 141.  
440. Die Existenzbedingungen eines von den ersten und zweiten Differentialquotienten der Koordinaten abhängigen kinetischen Potentials. K. Boehm. Crelle CXXI, 124.  
441. Formule pour le calcul rapide d'un certain potentiel. M. Lerch. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 427.

**Q.****Quadratur.**

442. Sur l'aire de certaines lunules. Audibert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 191.  
443. Valeur inexacte d'une aire. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 477.  
444. Théorème erronné sur certaines surfaces. G. Tzitzeica. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 95. — Issaly ibid. 241. — A. de Saint-Germain ibid. 242.

**R.****Reihen.**

445. Démonstration nouvelle de la règle de convergence de Gauss. Godefroy. N. ann. math. Sér. XVIII, 157.  
446. Sur les points singuliers situés sur le cercle de convergence et sur la sommation des séries divergentes. Leau. Compt. Rend. CXXVII, 607.  
447. Sur le cercle de convergence des séries. Leau. Compt. Rend. CXXVII, 711.  
448. Recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor. L. Leau. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 365.  
449. Sur les séries divergentes et les fonctions définies par un développement de Taylor. Le Roy. Compt. Rend. CXXVII, 654.  
450. Sur les points singuliers d'une fonction définie par un développement de Taylor. Le Roy. Compt. Rend. CXXVII, 948.  
451. Sur les points singuliers d'une série de Taylor. Eug. Fabry. Journ. Mathém. Sér. 5, IV, 317.  
452. Sur les développements des fonctions uniformes en séries de Taylor. Em. Borel. Compt. Rend. CXXVII, 751.  
453. Sur la recherche des singularités d'une fonction définie par un développement de Taylor. Em. Borel. Compt. Rend. CXXVII, 1001.  
454. On the values of the series  $x^n + (x - q)^n + (x - 2q)^n + \dots + r^n$  and  $x^n - (x - q)^n + (x - 2q)^n - \dots + r^n$ . J. W. Glaisher. Quart. Journ. math. XXXI, 193. [Vergl. Bd. XLIV, Nr. 313.]  
455. On  $1^n(x - 1)^n + 2^n(x - 2)^n + \dots + (x - 1)^n 1^n$  and other similar series. J. W. I. Glaisher. Quart. Journ. math. XXXI, 241.  
456. Sur certaines sommes arithmétiques. P. de Séguier. Journ. Mathém. Sér. 5, V, 55.

457. On certain properties of the hypergeometrical series, and on the fitting of such series to observation polygons in the theory of chance. K. Pearson. *Phil. Mag. Ser. 5*, XLVII, 236.

**S.****Singularitäten.**

458. Zur Theorie der singulären Punkte einer Raumkurve. Alfr. Meder. *Crelle* CXXI, 230.  
 459. Sulla riduzione delle singolarità puntuali delle superficie algebriche dello spazio ordinario per trasformazioni quadratiche. B. Levi. *Annali mat. Ser. 2*, XXVI, 219.  
 460. Intorno alla composizione dei punti generici delle linee singolari delle superficie algebriche. B. Levi. *Annali mat. Ser. 3*, II, 127.  
 461. Le bitangenti della quartica piana studiate mediante la configurazione di Kummer. Edg. Ciani. *Annali mat. Ser. 3*, II, 53.

**Stereometrie.**

462. Die Formen der Vielfache. O. Hermes. *Crelle* CXX, 27, 305.

**Substitutionen.**

463. Exposé d'une théorie nouvelle des substitutions. H. Laurent. *Journ. Mathem. Sér. 5*, IV, 75.  
 464. Über projektive Substitutionen, die einen Kreis ungeändert lassen. L. Schlesinger. *Crelle* CXXI, 168.  
 465. Über vertauschbare lineare Substitutionen. L. Schlesinger. *Crelle* CXXI, 177.  
 466. Über Relationen zwischen den Charakteren einer Gruppe und denen ihrer Untergruppen. G. Frobenius. *Berl. Akad. Ber. 1898*, II, 501.  
 467. Über die Komposition der Charaktere einer Gruppe. G. Frobenius. *Berl. Akad. Ber. 1899*, I, 330.  
 468. Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen. G. Frobenius. *Berl. Akad. Ber. 1899*, I, 482.  
 469. On the simple isomorphisms of a substitution-group in itself. G. A. Miller. *Phil. Mag. Ser. 5*, XLV, 234.  
 470. On the holomorph of the cyclical group and some of its subgroups. G. A. Miller. *Quart. Journ. math.* XXXI, 382.  
 471. A class of linear groups including the Abelian group. L. E. Dickson. *Quart. Journ. math.* XXXI, 60.  
 472. On the primitive substitution groups of degree ten. G. A. Miller. *Quart. Journ. math.* XXXI, 228.  
 473. On the transitive substitution groups of degree seventeen. G. A. Miller. *Quart. Journ. math.* XXXI, 49.  
 474. Sopra i gruppi astratti di grado 32. G. Bagnera. *Annali mat. Ser. 3*, II, 263.  
 475. La composizione dei Gruppi finiti il cui grado è la quinta potenza di un numero primo. G. Bagnera. *Annali mat. Ser. 3*, I, 137.  
 476. Sur les groupes d'ordre  $p^m q^2$ . C. Jordan. *Journ. Mathém. Sér. 5*, IV, 21.  
 Vergl. Geometrie (höhere) 319.

**T.****Thetafunktionen.**

477. Sur les systèmes d'équations différentielles auxquels satisfont les fonctions quadruplement périodiques de seconde espèce. M. Krause. *Compt. Rend. CXXVII*, 91. (Vergl. Bd. XLIV Nr. 475.)

**Transformationsgruppen.**

478. Sui gruppi continui di trasformazioni cremoniane dello spazio. Fed. Enriques e G. Fano. *Annali mat. Ser. 2*, XXVI, 59.  
 479. Notions élémentaires sur les groupes de transformations. Combebiac. *N. ann. math. Sér. 3*, XVIII, 347.

480. Sur une classe de transformations de contact. E. O. Lovett. *Compt. Rend.* CXXVII, 480.

**V.****Variationsrechnung.**

481. Sur les formules qui servent à représenter la variation d'une intégrale définie multiple sous la forme propre aux applications. G. Sabinine. *Annali mat. Sér. 3, II*, 203.

**W.****Wärmelehre.**

482. Über den stationären Temperaturzustand eines von einem elektrischen Strome erwärmten Leiters. Fr. Kohlrausch. *Berl. Akad. Ber.* 1899, II, 711.
483. L'intégrale des forces vives en thermodynamique. P. Duhem. *Journ. Mathém. Sér. 5, IV*, 5.
484. Sur l'égalité de Clausius. P. Duhem. *Journ. Mathém. Sér. 5, V*, 175.
485. On the conduction of heat in a spherical mass of air confined by walls at a constant temperature. Lord Rayleigh. *Phil. Mag. Sér. 5, XLVII*, 314.
486. L'équivalent mécanique de la calorie et des chaleurs spécifiques des gaz. A. Leduc. *Compt. Rend.* CXXVII, 860.
487. The Joule-Thomson thermal effect. E. F. J. Love. *Phil. Mag. Sér. 5, XLVIII*, 106.
488. On the ratio of the specific heats of air. J. Rose-Innes. *Phil. Mag. Sér. 5, XLVIII*, 286.
489. On the alleged sign of specific heat of saturated ether vapour. K. Tsuruta. *Phil. Mag. Sér. 5, XLVIII*, 288.
490. On the source of energy in diffusive convection. Alb. Griffiths. *Phil. Mag. Sér. 5, XLVII*, 522.
491. A study of an apparatus for the determination of the rate of diffusion of solids dissolved in liquids. Alb. Griffiths. *Phil. Mag. Sér. 5, XLVII*, 530.
492. On the rate of explosion in gases. D. L. Chapman. *Phil. Mag. Sér. 5, XLVII*, 90. *Vergl. Akustik.*

**Wahrscheinlichkeitsrechnung.**

493. On James Bernoulli's theorem in probabilities. Lord Rayleigh. *Phil. Mag. Sér. 5, XLVII*, 246. *Vergl. Reihen 457.*

**Wellenlehre.**

494. On discontinuities connected with the propagation of wave-motion along a periodically loaded string. Ch. Godfrey. *Phil. Mag. Sér. 5, XLV*, 356.
495. On iso-periodic systems. Lord Rayleigh. *Phil. Mag. Sér. 5, XLVI*, 567.
496. On the reflexion and refraction of solitary plane waves at a plane interface between two isotropic elastic mediums. Lord Kelvin. *Phil. Mag. Sér. 5, XLVII*, 179.
497. Longitudinal vibrations in solid and hollow cylinders. C. Chree. *Phil. Mag. Sér. 5, XLVII*, 333.

**Winkelteilung.**

498. Sur le problème de la polysection de l'angle. Mariantoni et Palatini. *N. ann. math. Sér. 3, XVIII*, 126.

**Z.****Zahlentheorie.**

499. Über die Anzahl der Idealklassen in reinen kubischen Zahlkörpern. R. Dedekind. *Crelle* CXXI, 40.
500. Extension du Nr. 162 des *Disquisitiones arithmeticae* de Gauss. De Jonquières. *Compt. Rend.* CXXVII, 596.
501. Rapprochements entre les procédés de Lagrange et de Gauss pour la résolution en nombres entiers des équations indéterminées du second degré. De Jonquières. *Compt. Rend.* CXXVII, 694.
502. Sur les nombres premiers. H. Laurent. *N. ann. math. Sér. 3, XVIII*, 234.

503. Primitive Wurzeln der Primzahlen von der Form  $2^x q^{\lambda} + 1$ , in welcher  $q = 1$  oder eine ungerade Primzahl ist. G. Wertheim. Acta Math. XX, 143.
504. Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln  $g$  aller Primzahlen  $p$  zwischen 3000 und 5000. G. Wertheim. Acta Math. XX, 153.
505. Congruences relating to the sums of products of the first  $n$  numbers and to other sums of products. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XXXI, 1.
506. Residues of binomial-theorem-coefficients with respect to  $p^2$ . J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XXXI, 110.
507. A congruence theorem relating to the Bernoullian numbers. J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XXXI, 253.
508. On the residues of the sums of products of the first  $p - 1$  numbers and their powers to modulus  $p^2$  or  $p^3$ . J. W. L. Glaisher. Quart. Journ. math. XXXI, 321.
509. Les lignes arithmétiques. G. Tarry. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 149.
510. Curiosité mathématique. G. Tarry. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 156.
511. Sur une équation indéterminée. C. Störmer. Compt. Rend. CXXVII, 752.
512. Forme de  $n$  si  $n - 1$  et  $n + 1$  ou bien  $n - 2$  et  $n + 2$  sont deux nombres premiers plus grands que 5. Dulimbert. N. ann. math. Sér. 3, XVIII, 193.
- Vergl. Funktionen 316. Reihen 456. Winkelteilung.
-

# Verzeichnis

von

## Abhandlungen aus der angewandten Mathematik

die im Jahre 1899 in technischen Zeitschriften erschienen sind.

Zusammengestellt von **R. Mehmkke.**

Beilage zur Zeitschrift für Mathematik u. Physik 45. Band, 5. u. 6. Heft.

### Abkürzungen für die Titel der ausgezogenen Zeitschriften:

- A. B.** = (Wiener) Allgemeine Bauzeitung, Jahrgang 64.  
**A. G. B.** = (Glaser) Annalen für Gewerbe und Bauwesen, Bd. 44 und Bd. 45.  
**Am. M.** = American Machinist, vol. 22.  
**A. M.** = Annales des Mines, 9<sup>e</sup> série, t. 14 livraison 12, t. 15 et t. 16.  
**A. P. Ch.** = Annales des Ponts et Chaussées, 7<sup>e</sup> série, 8<sup>e</sup> année, 4<sup>m</sup>e trimestre, et 9<sup>e</sup> année, 1<sup>er</sup> — 4<sup>m</sup>e trimestre.  
**B.** = The Builder, vol. 76 and vol. 77.  
**C. B.** = Centralblatt der Bauverwaltung, Jahrgang 19.  
**C. Z.** = Central-Zeitung für Optik und Mechanik, Jahrgang 20.  
**D. B.** = Deutsche Bauzeitung, Jahrgang 33.  
**D. M.** = Deutsche Mechaniker-Zeitung (Beiblatt zur Zeitschrift für Instrumentenkunde), 1899.  
**E.** = The Engineer, vol. 87 and vol. 88.  
**Eng.** = Engineering, vol. 67 and vol. 68.  
**E. Z.** = Elektrotechnische Zeitschrift, Jahrgang 20.  
**G. I.** = Gesundheits-Ingenieur, Jahrgang 22.  
**J. G. W.** = (Schillings) Journal für Gasbeleuchtung und Wasserversorgung, Jahrgang 42.  
**M. I. C.** = Mémoires de la Société des Ingénieurs Civils de France, 1899, vol. 1 et 2.  
**N. A. C.** = Nouvelles Annales de la Construction, 5<sup>e</sup> série, t. 6 (45<sup>e</sup> année).  
**O. F. E.** = Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens, Jahrgang 54 (Neue Folge Bd. 36).  
**P. J.** = (Dinglers) Polytechnisches Journal, Bde. 311, 312, 313 und 314.  
**Schw. B.** = Schweizerische Bauzeitung, Bd. 33 und Bd. 34.  
**T. B.** = Technische Blätter, Jahrgang 30, Heft 2 — 4, Jahrgang 31, Heft 1 — 3.  
**Z. A. I.** = Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, Bd. 45 (Neue Folge Bd. 4), Heftausgabe und Wochenausgabe.  
**Z. B.** = (Erbkams) Zeitschrift für Bauwesen, Jahrgang 49.  
**Z. G.** = Zeitschrift für Gewässerkunde, Bd. 2.  
**Z. I.** = Zeitschrift für Instrumentenkunde, Jahrgang 19.  
**Z. K.** = Zeitschrift für die gesamte Kälte-Industrie, Jahrgang 6.  
**Z. Ö. I. A. V.** = Zeitschrift des Österreichischen Ingenieur- und Architekten-Vereins, Jahrgang 51.  
**Z. V.** = Zeitschrift für Vermessungswesen, Bd. 28.  
**Z. V. D. I.** = Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, Bd. 43.  
**V. V. G.** = Verhandlungen des Vereins für Gewerbfleiss, Jahrgang 78.

### Abbildungen.

- O. Schreiber, Zur konformen Doppelprojektion der Königl. Preuss. Landesaufnahme. Z. V., S. 491 — 502, 593 — 613.  
S. auch *Geodäsie, Zeichenwerkzeuge.*

### Aërodynamik.

- Hermann Hoernes, Über das Loess'sche Luftwiderstandsgesetz und dessen Anwendung in der Flugtechnik. T. B., Jahrg. 31, S. 1—26.
- Josef Popper, R. Knoller, A. Capilleri, Josef Altmann, Ludwig Boltzmann, Ernst Mach, Kritische Bemerkungen zu der Abhandlung des Herrn Ober-Ingenieur F. R. v. Loessl: „Der aërodynamische Schwebestand einer dünnen Platte und deren Sinkgeschwindigkeit nach der Formel  $V = \sqrt{gG : \gamma(K + bv)}$ “. Z. Ö. I. A. V., S. 51—57, 73—76, 84—86, 302—303: Erwiderungen von v. Loessl S. 264—267, 284—288, 506—509.
- Russner, Über neue Luftwiderstandsmessungen. P. J., Bd. 311, S. 147—148.
- Weyrauch, Über den Ausfluss von Gasen und Dämpfen bei abnehmendem Druck und bei abnehmendem Volumen. Z. V. D. I., S. 1162—1165, 1194—1197. S. auch *Graphische Verfahren, Tafeln (graphische)*.

### Arithmetik, politische.

- R. H. Smith, The laws of profit. E., vol. 88, p. 231—232, 259—260.
- P. Schmidt, Ermittlung von Betriebsausgaben auf Grund der Statistik der Eisenbahnen Deutschlands. Z. A. I., Heft-Ausg., Sp. 233—252, 393—402, 517—518.
- A. Rühle v. Lilienstern, Ein Beitrag zur Tariflehre der Eisenbahnen. Z. A. I., Wochen-Ausg., Sp. 65—70, Berichtigung Sp. 96.

### Ausgleichungs- und Fehler-Rechnung.

- Jos. Adamczik, Graphische Polygonzug-Ausgleichungen. Z. V., S. 440—442.
- L. Krüger, Über reducirte Fehlergleichungen. Z. V., S. 396—398. S. auch *Geodäsie, Messwerkzeuge, Rechenwerkzeuge*.

### Centralellipse.

- Fr. Gräfe, Einfache Konstruktion der Centralellipse. Z. V. D. I., S. 210—211.
- Hartman, Centralellipse zweier Flächen. Schw. B., Bd. 32, S. 101—102.

### Dynamik.

- „Curler“, A problem in rotation. E., vol. 87, p. 169.
- R. Frank, Studien über die Mechanik der Kugellager. P. J., Bd. 314, S. 26—30, 40—43.
- J. Goebel, Über Schwungradexplosionen. Z. V. D. I., S. 237—239.
- W. Hertlein, Kurtz'sche Aufhängungsweise für Glocken. D. B., S. 394—395.
- H. Reissner, Zur Dynamik des Fachwerks. Z. B., Sp. 477—484.
- Camerer, Versuche über die Regulierung der Rider-Steuerung. Z. V. D. I., S. 1449—1456, 1493—1499.
- C. Koerner, Dynamik direkt und kontinuierlich wirkender Regulatoren. Z. Ö. I. A. V., S. 413—417, 428—432, 443—447.
- J. Isaachsen, Das Regulieren von Kraftmaschinen. Z. V. D. I., S. 913—918.
- A. Pfarr, Der Reguliervorgang bei Turbinen mit indirekt wirkendem Regulator. Z. V. D. I., S. 1553—1558, 1594—1599.
- A. Stodola, Das Siemens'sche Regulierprinzip und die amerikanischen „Inertie“-Regulatoren. Z. V. D. I., S. 506—516, 573—579.
- F. J. Weiss, Die Verstellkraft von Regulatoren. Z. V. D. I., S. 65—68. Bemerkungen dazu von K. L. Schadwill, M. Tolle, Rud. Wagner, Erwiderung von E. J. Weiss, S. 468—472.
- Dunkerley, On the connecting-rod problem. Eg., vol. 67, p. 695—697.
- Mohr, Die geometrische Bestimmung der Resultanten der auf eine Schubstange wirkenden äusseren Kräfte. Z. V. D. I., S. 811—812.
- F. Stark, Inanspruchnahme der Pleuelstangen durch den Trägheitswiderstand. T. B., Jahrg. 30, S. 104—120.
- Berling, Schiffschwingungen, ihre Ursachen und Kritik der Mittel zu ihrer Verminderung. Z. V. D. I., S. 981—988, 1017—1023, 1221—1225, 1260—1264. Bemerkungen dazu von Otto Schlick S. 1640—1642. Erwiderungen von Berling S. 1642—1644.

- W. E. Dalby, On the balancing of engines, with special reference to marine work. Eg., vol. 67, p. 530—532, 559, 561—563.
- John H. Macalpine, Balancing engines. Eg., vol. 68, p. 54—55 (Remarks by W. E. Dalby, ib. p. 120).
- Charles P. Paulding, A curious problem in balancing. Am. M., p. 382—383.
- v. Borries, Die Eigenbewegungen der Lokomotiven und ihre Einwirkung auf die Gleise. A. G. B., Bd. 44, S. 137—141.
- , Über die Eigenbewegungen und die zulässige Geschwindigkeit der Lokomotiven. O. F. E., S. 115—118, 135—137.
- J. Meifort, Stösse und Momente in Dampfmaschinen. Z. V. D. I., S. 813—816.
- Blum, Einfluss der Fahrgeschwindigkeit auf die Beanspruchung des Schienenstosses. C. B., S. 373—375.
- Emil Mašik, Zur Bestimmung der Überhöhungen und Erweiterungen in Eisenbahncurven . . . Z. Ö. I. A. V., S. 201—207, 211, 221—223.
- Georg Meyer, „Adhäsion“ oder „Reibung“ beim Lokomotivbetriebe? C. B., S. 166—167.
- H. Reissner, Über Fahrbahnüberhöhung. C. B., S. 156, 547—548. Bemerkungen dazu von Zimmermann S. 199—200.
- P. Schmidt, Steigungsverhältnisse für Bahnen mit gemischtem Reibungs- und Zahnradbetrieb. C. B., S. 617—619.
- A. Frank, Bemerkungen zur Berechnung der Widerstände der Lokomotiven und Bahnzüge. O. F. E., S. 146—149, 161—164. (Bemerkungen dazu von v. Borries, S. 283—284.)
- Friedrich Lackner, Das Anfahren der Eisenbahnzüge. O. F. E., S. 209—213.
- A. Rühle v. Lilienstern, Zur Bestimmung der Zugstärken, der Fahrzeiten, sowie des Kohlen- und Wasserverbrauches im Eisenbahnbetriebe. Z. A. I., Heft-Ausg., Sp. 507—512.
- Train resistance, A new general formula for, (by John Lundie). E., vol. 87, p. 166, 171.
- J. Wittenberg, Bestimmung des Widerstandes der Züge mittels des Geschwindigkeitsmessers. O. F. E., S. 3—7, 27—30.
- Wittfeld, Arbeitsleistung beim Anfahren der Züge im Stadt- und Vorortverkehr. C. B., S. 290—291.
- J. Bürgin, Beobachtung von Turmschwingungen beim Läuten der Glocken. D. B., S. 326—327, 330—332. Bemerkungen dazu von W. Weitbrecht, S. 395—396.
- E. Lebert, Étude des mouvements vibratoires dans les ponts à poutres droites à une travée et dans les ponts suspendus à tablier continu simplement appuyés aux culées. A. P. Ch., 9<sup>e</sup> année, 3<sup>e</sup> trimestre, p. 215—293.
- N. Schmitt, Die Übertragung der Bewegung durch elastische Mittel. Z. A. I., Heft-Ausg., Sp. 177—183.
- S. auch *Centralellipse, Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Graphische Verfahren, Kinematik, Messwerkzeuge, Tafeln (graphische)*.

**Elastizitäts- und Festigkeits-Lehre.**

- Archibald Barr, Comparisons of similar structures and machines. Eg., vol. 68 p. 475—476, 511—512, 545—546.
- Galliot, Résistance des sphères et cylindres en contact. A. P. Ch., 9<sup>e</sup> année, 3<sup>e</sup> trimestre, p. 294—298.
- Fritz von Emperger, Die zulässigen Inanspruchnahmen des Eisens im Hochbau. Z. V. D. I., S. 1499—1503.
- C. A. P. Turner, Thermal condition of iron and steel under stress, and measurement of stress by means of thermoelectricity. Eg., vol. 67, p. 564—566.
- R. Lauenstein, Vergrößerung eines Widerstandsmomentes durch Verkleinerung des Querschnittes. D. B., S. 430.
- Vergrößerung des Widerstandsmomentes durch Verkleinerung des Querschnittes. Schw. B., Bd. 34, S. 93.
- Biette, Le pont J.-F. Lépine, A. P. Ch., 9<sup>e</sup> année, 1<sup>er</sup> trimestre, p. 130—158.
- F. Chaudy, Note sur le calcul des poutres en fer et ciment. M. I. C., 2, p. 487 bis 496.
- Adolf Francke, Kontinuierliche Bogenträger. Z. A. I., Heft-Ausg., Sp. 589—600.

4 Verzeichnis von Abhandlungen aus der angewandten Mathematik u. s. w.

- R. Heyn, Das doppelte hölzerne Hängewerk im Dachbinder. Z. A. I., Heft-Ausg. Sp. 373—394.
- Rob. Land, Die Gleichung der Bahn einer über einen elastischen Träger rollenden Last. C. B., S. 313—314.
- G. Mantel, Beitrag zur Berechnung einiger besonderen Sprengwerksformen. Schw. B., Bd. 32, S. 152—153, 161—164, 177—179, 193.
- Mesnager, Note sur les fatigues réelles et les fatigues calculées dans un pont à grandes mailles. A. P. Ch., 9<sup>e</sup> année, 2<sup>e</sup> trimestre, p. 223—251.
- A. Meyerhof, Die Biegungsspannungen der Z-Eisen zu Schiffbauzwecken. Z. V. D. I., S. 607—614.
- S. Nicolay, Ueber das Centrieren der Diagonalen in Parallel-Gitterträgern. Schw. B., Bd. 34, S. 161—162 (Bemerkungen dazu von G. Mantel, S. 189—191).
- Harel de la Noë, Théorie et applications nouvelles du ciment armé. A. P. Ch., 9<sup>e</sup> année, 1<sup>er</sup> trimestre, p. 1—21.
- Résal et Alby, Notes sur la construction du Pont Alexandre III. A. P. Ch. 8<sup>e</sup> année, 4<sup>e</sup> trimestre, p. 59—144; 9<sup>e</sup> année, 1<sup>er</sup> trimestre, p. 159—242.
- Otto C. Reymann, Die Querschnittverzerrungen eiserner Brücken und ihr Einfluss auf die Vertikalen und Längsverbände derselben. A. G. B., Bd. 44, S. 40—44, 84—87, 189—192, 225—227 (Fortsetzung aus Bd. 43 und Schluss).
- A. Schneider, Zusammengesetzte Träger. Z. Ö. I. A. V., S. 649—653, 672—676, 688—693.
- Friedr. Steiner, Berechnung gewölbter Brücken. T. B., Jahrg. 31, S. 104—108.
- G. Stockhammer, Einiges über die Stossfestigkeit von Zugstangen abgesetzten Querschnittes. Z. Ö. I. A. V., S. 57—59.
- Max H. v. Thullie, Berechnung der gerippten Betoneisenträger, System Hennebique. Z. Ö. I. A. V., S. 539—543.
- J. Bruhn, The stresses at the discontinuities in a ship's structure. Eg., vol. 67, p. 429—432.
- Francis Elgar, The distribution of pressure over the bottom of a ship in dry docks and over the dock blocks. Eg., vol. 68, p. 125—126.
- Hacker, Gasbehälterführungen. Z. V. D. I., S. 1465—1469.
- H. Müller-Breslau, Die Berechnung achteitiger Turmpyramiden. Z. V. D. I., S. 1126—1134.
- Skibinski, Beitrag zur Berechnung des Querswellenoberbaues. Z. Ö. I. A. V., S. 118—123, 135—139.
- Bachmann, Einfluss der Temperatur auf die Spannungen in bogenförmigen Sperrmauern. C. B., S. 376.
- Bachmann, Verteilung der Spannungen in bogenförmigen Sperrmauern. C. B., S. 10—11.
- Barbet, Note sur les conditions des barrages de réservoirs en maçonnerie. A. P. Ch., 9<sup>e</sup> année, 1<sup>er</sup> trimestre, p. 22—56.
- Charles J. Kriemler, De la ligne des pressions dans une pile en maçonnerie. Schw. B., Bd. 33, S. 5.
- Lieckfeldt, Der Einfluss der Bogenform auf die Standfestigkeit der Stau-  
mauern. C. B., S. 301—304.
- F. Probst, Einiges über Gelenke massiver Bogenbrücken. Z. A. I., Wochen-Ausg., Sp. 545—551.
- A. Bantlin, Zur Frage der Berechnung gekrümmter stabförmiger Körper. Z. V. D. I., S. 261—263. Bemerkungen dazu von A. Föppl und Bruno Schulz, Erweiterungen von A. Bantlin S. 403—404, 501—502, H. Reissner S. 633.
- Adolf Francke, Der krumme Balken. Z. B., Sp. 309—332.
- Robert Edler, Beitrag zur Theorie und Berechnung der Gliederketten (Ringketten). Z. Ö. I. A. V., S. 501—506, 513—518, Berichtigungen S. 572.
- Philipp Forchheimer, Berechnung des zulässigen Aussendruckes bei Ringen und Röhren. Z. Ö. I. A. V., S. 457—458.
- B. W. Head, The problem of struts with lateral loads. E., vol. 88, p. 287—288.
- René Koechlin, Besprechung eines auf excentrischen Druck beanspruchten Stabes. Schw. B., Bd. 33, S. 159—160, 171—173.
- Weyrauch, Über excentrische Zugbeanspruchungen von Fachwerkstäben. Z. A. I., Wochen-Ausg., Sp. 249—254.
- Fritz von Emperger, Eine neue Knickformel von A. Ostenfeld. Z. Ö. I. A. V., S. 524—526, 558.

- H. Hacker, Einiges über Knickspannungen. Z. A. I., Heft-Ausg., Sp. 489—506.  
 Mörsch, Zur Berechnung der Knickfestigkeit gegliederter Steinpfeiler. D. B., S. 590—592.  
 Bruno Schulz, Beitrag zur Torsionsfestigkeit. Z. A. I., Heft-Ausg., Sp. 201 bis 234, 569—586.  
 W. Schüle, Die elementare Ableitung der Knickformel. Z. V. D. I., S. 779—780.  
 Karl Bernhard, Eisspeicher und Eisdruck. C. B., S. 81—83. Bemerkung dazu von Bruno Schulz, S. 140, Erwiderung von Bernhard, S. 264.  
 S. auch *Centralellipse, Dynamik, Erddruck, Graphische Verfahren, Kinematik, Statik, Tafeln (graphische)*.

**Elektrizität und Magnetismus, Elektrotechnik.**

- F. Breisig, Über die Anwendung des Vektordiagramms auf den Verlauf von Wechselströmen in langen Leitungen und über die wirtschaftliche Grenze hoher Spannungen. E. Z., S. 383—386, 400—403, 417—420.  
 Rud. Goldschmidt, Über deformierte Kurven. E. Z., S. 840—842.  
 C. Heinke, Über Wellenströme. E. Z., S. 510—513, 527—531.  
 F. Niethammer, Zur Messung von Wechselstromeffekten nach der Drei-Voltmeter-Methode. E. Z., S. 701—703.  
 Ch. Westphal, Beitrag zur Theorie der Ankerwicklungen. E. Z., S. 118.  
 E. Arnold und G. Mie, Über den Kurzschluss der Spulen und die Kommutation des Stromes eines Gleichstromankers. E. Z., S. 97—101, 136—138, 150—152.  
 B. A. Behrend, Über den Spannungsabfall bei Wechselstromgeneratoren. E. Z., S. 837—840. (Bemerkungen dazu von E. Arnold, S. 893—894, und Heyland, S. 894.)  
 G. Brandt, Beitrag zur Berechnung von Bufferbatterien. E. Z., S. 730—732.  
 Rudolf Braun, Über die Leerlaufreibung von Induktionsmotoren. E. Z., S. 685—687.  
 F. Breisig, Messungen an Fernsprechverbindungsleitungen. E. Z., S. 192—196.  
 Fritz Erens, Eine analytische und graphische Methode zur Berechnung von Anfahr- und Bremswiderständen für elektrische Eisenbahnen. E. Z., S. 277—282.  
 Clarence P. Feldmann und Josef Herzog, Über Stromverteilung in Wechselstromnetzen. E. Z., S. 780—783.  
 C. Heinke, Über Auffassung und Darstellung der Vorgänge im Wechselstromtransformator. E. Z., S. 175—178, 191—196, 205—207.  
 Julius Heubach, Zur Theorie der Asynchronmotoren. E. Z., S. 301—305, 314—317.  
 Gisbert Kapp, Die Funkengrenze bei Gleichstrommaschinen. E. Z., S. 32—33 (Bemerkung dazu S. 89—90).  
 Oliver Lodge, Improvement in magnetic space telegraphy. E., vol. 87, p. 120—121, 170—171, 197—198, 375—376—Eg., vol. 67, p. 31—32, 94—99, 124—126.  
 F. Niethammer, Über die Kraftlinienverteilung in Nuthenankern. E. Z., S. 766—771.  
 Alexander Rothert, Untersuchungen über die Kurzschlusskurve von Wechselstromgeneratoren. E. Z., S. 619—622, 637—638, 657—659, 893. (Bemerkungen dazu von Rud. Goldschmidt, S. 670, Emil Ziehl, S. 724—725.)  
 Ludwig Schröder, Berechnung des Kraftbedarfes von elektrischen Strassenbahnen. E. Z., S. 111—115.  
 A. Sengel, Bestimmung der günstigsten Zahl von Speisepunkten eines Verteilungsnetzes. E. Z., S. 807—809, 826—829.  
 Rudolf Skutsch, Über Bemessung von Motoren, welche bei konstanter Umfangskraft Massen beschleunigen sollen, insbesondere von Nebenschluss-elektromotoren für den Betrieb von Drehbrücken, Drehscheiben u. dergl. V. V. G., S. 307—312.  
 S. auch *Graphische Verfahren, Hydrodynamik, Kinematik, Vektorrechnung*.

**Erddruck.**

- E. Cramer, Die Gleitflächen des Erddruckprismas und der Erddruck. Z. A. I. Heft-Ausg., Sp. 513—518.  
 Adolf Francke, Bemerkungen zu dem Aufsätze des Herrn Geheimen Baurat Cramer in Breslau über die Gleitflächen des Erddruckprismas und den Erddruck in Heft 5 des Jahrgangs 1898. Z. A. I., Heft-Ausg., Sp. 183—188 (Erwiderung von Cramer Sp. 188).

6 Verzeichnis von Abhandlungen aus der angewandten Mathematik u. s. w.

- Hisely, Constructions diverses pour déterminer la poussée des terres sur un mur de soutènement. A. P. Ch., 9<sup>e</sup> année, 1<sup>er</sup> trimestre, p. 99—120.  
P. R. Kirk, Graphic methods of determining the pressure of earth on retaining walls. B., vol. 77, p. 233—235.  
S. Pichault, Calcul des murs de soutènement des terres en cas de surcharges quelconques. M. I. C., 2. p. 210-266, 844—846.

**Geodäsie.**

- Eggert, Rückwärtseinschnitt mit Correlatenausgleichung. Z. V., S. 44—50.  
E. Hammer, Bestimmung des Theodolit- (Tachymeter) Standpunktes nach Lage und Höhe durch Rückwärtseinschnitten über nur zwei gegebene Punkte. Z. A. I., Wochen-Ausg., Sp. 81—86.  
J(ordan), Geographische Coordinaten und rechtwinklige Coordination. Z. V. S. 162—176.  
— Umwandlung Preussischer Coordinaten, zur Praxis der Preussischen Stadt-Triangulierungen. Z. V., S. 381—389.  
S. auch *Abbildungen, Ausgleichungs- und Fehler-Rechnung, Geometrie, Geschichte, Messwerkzeuge, Rechenwerkzeuge, Tafeln (graphische), Zeichenwerkzeuge.*

**Geographie, mathematische.**

- Leitzmann, Die Sonnenhöhe und Tageslänge. Z. A. I., Wochen-Ausg., Sp. 561—569.

**Geometrie.**

- G. Mario Rossi, Mit Hilfe des Zirkels allein den Mittelpunkt eines Kreises zu finden. Z. Ö. I. A. V., S. 487.  
C. K. Aird, Bestimmung des Kreisumfanges aus dem Halbmesser durch Zeichnung. C. B., S. 120. Bemerkungen dazu von F. Lang, F. Puller und der Schriftleitung S. 176.  
Ed. Bing, Eine rein geometrische Annäherungskonstruktion der Grössen  $\pi$  und  $\sqrt{\pi}$  von bisher unerreichter Genauigkeit. Z. V. D. I., S. 43. Bemerkungen dazu von F. Heerwagen S. 364.  
Edward Crossley, Quadrature of the circle. E., vol. 87, p. 209 (s. a. Cecil P. Poole, ib., p. 435).  
Quadrature of the circle, A new (by E. Bing). E., vol. 87, p. 136.  
C. E. Wolff, Alleyne Reynolds, Area of the circle. E., vol. 88, p. 215.  
E. Hammer, Über den aus zwei Kreisbogen bestehenden Korbbogen zur Verbindung zweier gegebener Tangentenpunkte. D. B., S. 10—12, 43, 64, 94—95.  
H. Soudé, Problème de l'arche biaise. Tracé de la courbe de joint sur le plan de tête et sur le développement de l'intrados. N. A. C., col. 43—47.  
Alfred Heubach, Theoretische und praktische Mitteilungen über neue Ellipsen-Konstruktionen. D. B., S. 307.  
C. Runge, Über die Verwandtschaft des Rückwärts- und Vorwärts-Einscheidens. Z. V., S. 313—315.  
Friedrich Steiner, Konstruktion der Winkeländerungen eines Dreiecks. T. B., Jahrg. 30, S. 180—183.  
H. Schämänn, Berechnung der Richtung gleichlaufender Diagonalen eines in der Ansicht trapezförmigen Pfeilers. C. B., S. 230—231. (Bemerkungen dazu S. 268.)  
Leitzmann, Berechnung des Krümmungshalbmessers einer Kurve. J. A. I., Wochen-Ausg., Sp. 625—626.  
Leopold Ellerbeck, Über die Ermittlung des Linienzuges vorübergehender Eisenbahnverlegungen und ähnlicher Gleisführungen. Z. B., Sp. 125—144.  
A. Francke, Gleisbögen mit unendlich grossen Krümmungshalbmessern in den Bogenanfängen. O. F. E., S. 265—268.  
Ed. Lang, Anordnung einer „nach innen“ abzweigenden Weiche in stark gekrümmtem Gleis. C. B., S. 425—428. (Bemerkungen dazu von E. Puller S. 559.)  
— Einschaltung einer einfachen Weiche mit geradem Hauptgleise in einen Kreisbogen. O. F. E., S. 270—278.  
S. auch *Inhalt, Schwerpunkt, Zeichenwerkzeuge.*

**Geschichte.**

- Dresdener Bezirksverein deutscher Ingenieure, Trajan Rittershaus † (mit Bild). Z. V. D. I., S. 539—540.  
 Helmert, Wilhelm Jordan (mit Bild). Z. V., S. 322—328.  
 C. Runge, Wilhelm Jordan †. Z. A. I., Wochen-Ausg., Sp. 265—266.  
 Steiff, Wilhelm Schickhart und seine Landesaufnahme Württembergs 1624—1635. Z. V., S. 401—415, 537—549.  
 Sigmund Wellisch, Der Plan von Wien zur Zeit der zweiten Türkenbelagerung. Z. Ö. I. A. V., S. 489—492.  
 — Die Wiener Stadtpläne aus dem Anfange des XVIII. Jahrhunderts. Z. Ö. I. A. V., S. 563—568, 575—576.  
 — Ältere geometrische Werke. Z. V., S. 336—339.  
 — Die Erfindung der Triangulierung. Z. V., S. 349—357. Bemerkung dazu von J. (ordan) S. 357.  
 F. Z., Trajan Rittershaus †. Z. A. I., Wochen-Ausg., Sp. 321—323.

**Graphische Verfahren.**

- Henry Goldmark, Solution of simultaneous equations. Eg., vol. 67, p. 254—255.  
 A. E. Wiener's graphische Verfahren bei Flächenberechnungen (Bericht). P. J., Bd. 311. S. 131—132.  
 H. Berg, Wirkungsweise und Berechnung einer stehenden Kondensator-Luftpumpe ohne Saugventile. Z. V. D. I., S. 92—97. (Bemerkungen dazu von K. Reinhardt, S. 280.)  
 Alexander Coulmas, Beitrag zur Bestimmung des Maximalmomentes einfacher, durch Einzellastensysteme beanspruchter Träger. Z. Ö. I. A. V., S. 239—241.  
 Desdouts, Méthode graphique pour la reconnaissance et la vérification du tracé des voies de chemin de fer. A. M., t. 15, p. 465—501. A. P. Ch., 9<sup>e</sup> année, 4<sup>me</sup> trimestre, p. 192—228.  
 H. Dix, Beitrag zur Berechnung der Querschnittsmaße von Holzbalken. Z. A. I., Wochen-Ausg., Sp. 530—532.  
 H. S. Hele-Shaw, Graphical method of finding the pressure on blocks under a ship due to overhang. Eg., vol. 68, p. 153.  
 J. Illeck, Die graphische Berechnung mehrcylindriger Dampfmaschinen. Z. V. D. I., S. 14—17 und R. F. Mayer S. 372.  
 C. F. Munday, On the advantages of using Tchebycheff's rule in association with the integrator to obtain cross-curves of stability. Eg., vol. 67, p. 499—500.  
 J. Neidt, Graphisches Verfahren zur Bestimmung von Fahrgeschwindigkeiten und Vorschaltwiderständen für elektrisch angetriebene Fahrzeuge. E. Z., S. 39—43, 57—59.  
 Gustav Reichelt, Berechnung der Betriebskraft für das Schöpfwerk einer eingedeichten Niederung bei wechselnder Höhe des Aussenwasserstandes. C. B., S. 458—460.  
 E. Speidel und W. Wagenbach, Über Francis-Turbinenschaufelung. Z. V. D. I., S. 581—583.  
 S. auch *Ausgleichungs- und Fehler-Rechnung, Elektrizität, Erddruck, Geometrie, Statik, Tafeln (graphische)*.

**Hydrodynamik, Hydraulik, Hydrologie.**

- H. S. Hele-Shaw, Further experiments on the character of fluid motion. E., vol. 87, p. 94—95 = Eg., vol. 67, p. 28—30.  
 — The stream-line theory. Eg., vol. 68, p. 152—153.  
 — The motion of a perfect liquid. E., vol. 87, p. 548—550.  
 Marston Niles, The Hele-Shaw experiments and the stream-line theory. Eg., vol. 68, p. 121—122.  
 G. Dariès, Sur une application de la formule du mouvement uniforme de l'eau dans les canaux découverts. N. A. C., col. 14—15, 30—32, 47—48.  
 Holzmüller, Hydrodynamische Analogien zur Theorie des Potentials und der Elektrotechnik. Z. V. D. I., S. 659—662, 690—694.

## 8 Verzeichnis von Abhandlungen aus der angewandten Mathematik u.s.w.

- Wieprecht, Berechnung von Rohrleitungen für Warmwasserheizungen. G. I., S. 360—362.
- „Puzzled“, W. Payton, W. A. S. B., John Batey, Thomas Alston, A hydraulic press problem. E., vol. 87, p. 145, 245.
- F. Chaudy, De la résistance à l'avancement des bateaux et des ondes transversales. M. I. C., vol. 1, p. 165—179.
- Slip, Negative apparent. E., vol. 87, p. 145.
- Emil Herrmann, Neue Theorie der Turbinen. P. J., Bd. 312, S. 165—169, 177—182.
- A. Hummel, Über die Formgebung der Schaufeln bei Francis-Turbinen. P. J., Bd. 311, S. 4—6, 24—25, 84.
- M. Möller, Die Nutzleistung der Schraubenturbine. Z. V. D. I., S. 551—553.
- Franz Präzil, Bericht über die Konstruktion und Wirkungsweise der Transformator-turbine. Schw. B., Bd. 34, S. 195—199, 207—209, 217—220.
- D. Spataro, La nouvelle Hydraulique, théorique, pratique et expérimentale. Z. G., S. 127—160, 321—337.
- Bourdelles, Étude du régime de la marée dans la manche. A. P. Ch., 9<sup>e</sup> année, 3<sup>e</sup> trimestre, p. 1—76.
- Emerich Fischer, Die Berechnung von Stauweihern zur Hochwasserabwehr. C. B., S. 58—59.
- Ph. Forchheimer, Grundwasserspiegel bei Brunnenanlagen. Z. V. D. I., S. 202—205.
- H. Gravelius, Über Verdunstung. Z. G., S. 248—252.
- H., Zur Ermittlung der grössten Hochwassermenge kleiner Wasserläufe. D. B., S. 298—299.
- C. Hesse, Die mittlere Geschwindigkeit des Wassers in natürlichen Gewässern. Z. G., S. 20—36.
- Albrecht Penck, Zur Bestimmung der Abflussmengen aus Flussgebieten. Z. G., S. 67—81.
- M. Rother, Ein Beitrag zum Probleme der Spiegelabsenkung in Wasserläufen mit freiem Spiegel. Z. G., S. 274—309, 337—347.
- P. Schreiber, Zur Frage der Bestimmung des Abflusses aus Stromgebieten. Z. G., S. 37—54.
- S. auch *Graphische Verfahren, Näherungsrechnung, Rechnen (numerisches), Tafeln (graphische), Wärmelehre.*

### Inhalt, Flächen- und Raum-.

- A. Altenbach, Über die Berechnung von Dachflächen, Böschungen und dergl. D. B., S. 418—419. (Bemerkungen dazu von Spies und F. Pützer S. 467.)
- Ramisch, Mechanische Bestimmung des Flächeninhaltes einer ebenen Figur. C. B., S. 203—204.
- ..... Bestimmung des Rauminhaltes eines Kegels oder Kegelstumpfes. C. B., S. 119—120.
- S. auch *Graphische Verfahren, Geometrie, Messwerkzeuge.*

### Kinematik.

- Henry T. Davis, C. A. Mathey, J. Macfarlane Gray, Davis's steering gear for autocars. Eg., vol. 68, p. 306, 338.
- Michele Ferrero, Finding the position of the crank when the position of the piston or cross-head is given. Am. M., p. 762—763.
- O. Lasche, Elektrischer Antrieb mittels Zahnradübertragung. Z. V. D. I., S. 1417 bis 1422, 1487—1493, 1528—1533, 1563—1569.
- Heinrich Weiss, Zur Berechnung des Stufenscheiben-Antriebes bei Werkzeugmaschinen mit geradlinig hin- und hergehender Hauptbewegung. Z. Ö. I. A. V., S. 341—346.
- S. auch *Dynamik.*

### Kombinatorik.

- M. Boda, Über den Anschluss von Blocklinien an Stellwerksanlagen mit elektrischem Fahrstrassen-Verschlusse. O. F. E., S. 31—35, 57—61, 78—80, 101—104, 120—124, 139—143, 166—186.
- ..... Über den Anschluss von Stellwerksanlagen mit elektrischem Weichenstrassen-Verschlusse an Blocklinien. Z. Ö. I. A. V., S. 98—105.

**Messwerkzeuge.**

- Henri Chevalier, Appareil dynamométrique de M. Téodorovitch. M. I. C., 1, p. 56—62.  
 A. G. Greenhill, The Lippincott planimeter. E., vol. 88, p. 614—615.  
 Joh. Hamann, Das Coordinatenplanimeter von Ch. Hamann. Z. V., S. 464—468.  
 Hamann, Untersuchungen über das Harfenplanimeter von Mönkenmüller. Z. V., S. 549—552.  
 J. (ordan), Stangenplanimeter Prytz. Z. V., S. 315—317.  
 Robert Land, Einfache Theorie des Polarplanimeters. Z. V. D. I., S. 1064—1067.  
 William Ripper, A continuous mean pressure indicator for steam engines. Eg., vol. 68, p. 771—772, 804—807.  
 A. Klingatsch, Die Bestimmung des Excentricitätsfehlers für Strahlenzieher. Z. V., S. 389—396.  
 — Die mittlere Lage des Winkelscheitels beim Winkelspiegel. Z. V., S. 359—363.

**Näherungsrechnung.**

- J. (ordan), Näherungsformel für  $\sqrt{x^2+y^2}$ . Z. V., S. 357—359. Bemerkungen dazu von Puller S. 529—530.  
 J. B. Goebel, Über ein neues Rechnungsverfahren bei Aufgaben der Hydraulik. G. I., S. 169—172, 189—193, 205—208.

**Nautik.**

- Sound signalling at sea. Eg., vol. 67, p. 2—3, 105—107.

**Optik.**

- Karl Strehl, Akkomodation und Vergrößerung. C. Z., S. 21.  
 C. Viola, Ein neues Refraktometer und eine neue Methode zur Bestimmung der Hauptbrechungsindices eines optisch zweiachsigen Krystalles mit Hilfe des Prismas. Z. I., S. 276—282.  
 B. Wanach, Über die Bestimmung von Krümmungsradien durch Spiegelung. D. M., S. 50.  
 — Theorie des Reversionsprismas. Z. I., S. 161—177.  
 H. Harting, Zur Berechnung astronomischer Fernrohrobjektive. Z. I., 104—110.  
 — Über Astigmatismus und Bildfeldwölbung bei astronomischen Fernrohrobjektiven. Z. I., S. 138—143.  
 Emil von Höegh, Zur Theorie der zweiteiligen verkitteten Fernrohrobjektive. Z. I., S. 37—39.  
 A. Leman, Zur Berechnung von Fernrohr- und schwach vergrößernden Mikroskop-Objektiven. Z. I., S. 272—273. (Bemerkung dazu von H. Harting, S. 274—275.)  
 Karl Strehl, Theorie des Mikroskopes. Fortsetzung: Das Pleurosigmabild. Z. I., S. 325—335.  
 — Beugungstheorie und geometrische Optik. Z. I., S. 364—371.  
 Emil Liebenthal, Lichtverteilung und Methoden der Photometrierung von elektrischen Glühlampen. Z. I., S. 193—205, 225—240.  
 S. auch *Messwerkzeuge*.

**Perspektive.**

- J. Ernest G. Yalden, A method for the representation of the circle in isometric projection and in cavalier perspective. Am. M., p. 1057—1058.  
 F. W. Salmon, A „reminder“ on isometric projection. Am. M., p. 1068.

**Rechenwerkzeuge.**

- Geo. F. Summers, An instrument for adding fractions. Am. M., p. 309.  
 J. H. Gill, The slide rule for computing gears for screw cutting. Am. M., p. 1089—1090.

10 Verzeichnis von Abhandlungen aus der angewandten Mathematik u. s. w.

- H. Koller, Proportionalrechenschieber von Ch. Hamann in Friedenau bei Berlin. Z. V., S. 660—663.  
W. Semmler, Proportionalrechenscheibe von Ch. Hamann. Z. V., S. 304—308.  
Röther, Rechenscheibe. Z. V., S. 697—698.  
H. Sossna, Auflösung der Aufgabe des Einkettens mittels Maschine mit numerisch-trigonometrischer Tafel. Die neue Multiplikationsmaschine von Otto Steiger und Hans W. Egli in Zürich. Z. V., S. 665—696.  
Fischer, Verfahren zur Ausgleichung von Beobachtungsgrößen auf mechanischem Wege und Anwendung auf Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate. Z. V., S. 553—557.  
—, Fehlerausgleichung auf mechanischem Wege. Ebenda S. 655—660.

**Rechnen, numerisches.**

- Karl Fischer, Vereinfachte Berechnung der Monatsmittel der nach Fußmaß beobachteten Wasserstände. Z. B., Sp. 303—310.  
S. auch *Rechenwerkzeuge*.

**Schwerpunkt.**

- Rob. Land, Schwerpunktbestimmung von Trapezen und Vierecken. C. B., S. 324.  
Puller, Schwerpunktbestimmung des Trapezes. C. B., S. 212.

**Statik.**

- G. A. Burls, A graphical treatment of the problem of the rough inclined plane. Eg., vol. 67, p. 499.  
Max Jüllig, Über die mechanische Beanspruchung elektrischer Luftleitungen, welche auf ungleich hohen Stützen ruhen. E. Z., S. 886—889.  
W. Dietz, Beitrag zum statisch bestimmten gegliederten Balkenträger mit zweifachem Ausfüllsystem. Z. V. D. I., S. 230—234. Bemerkung dazu von Rob. Land, S. 404.  
J. Jongebloed, Einfache Berechnung der Stützendrücke für durchlaufende Balken überall gleichen Querschnitts auf beliebig vielen Stützen. C. B., S. 267—268.  
F. C. Kunz, Die neue Strassenbrücke über den Niagara-Fluss, Berechnung. Z. Ö. I. A. V., S. 473—474.  
John Labes, Bestimmung grösster Momente und Querkräfte für Eisenbahn-Balkenbrücken. C. B., S. 173—175.  
—, Puller, Zur Berechnung der Querträger von Eisenbahnbrücken. C. B., S. 223, S. 446.  
Mohr, Beitrag zur Theorie der Träger. Z. A. I., Heft-Ausg., Sp. 585—590.  
H. Müller-Breslau, Zur Theorie der Kuppel- und Turmdächer. Z. V. D. I., S. 385—389. Erwidern von R. Kohlfahl und H. Müller-Breslau. S. 389—391.  
Ramisch, Bestimmung der stärksten Spannungen bei der Biegung durch ein Kräftepaar mittels Widerstandsmomente. D. B., S. 422.  
— Darstellung des Querschnittsmomentes eines Trägers. C. B., S. 388.  
— Eine neue graphostatische Methode. Z. A. I., Heft-Ausg., Sp. 281—286.  
Fritz Roskoth, Beitrag zur synthetischen Untersuchung der Normalspannungen in geraden Stäben. D. B., S. 191—192.  
— Die Berechnung von Querschnittsmomenten und Normalspannungen. D. B., S. 344—345, 368—371.  
F. Steiner, Berichtigung zur Abhandlung „Die graphische Ermittlung der Stabspannungen im Halbparabelträger“. T. B., Jahrg. 31, S. 43.  
H. Hacker, Einiges über Standfestigkeit von Gebäuden und über Eisenfachwerk. Z. A. I., Heft-Ausg., Sp. 51—70.  
H. Walthorp, Stability of low masonry dams. E., vol. 88, p. 576.  
Maximilian Marcus, Beitrag zur statischen Untersuchung von Gewölben. Schw. B., Bd. 34, S. 156—157.  
S. auch *Elastizitäts- u. Festigkeitslehre*.

**Tafeln, graphische.**

- G. Eugene Barrett, Diagram for the design of shafts. Am. M., p. 28—29.  
 Robert A. Bruce, Diagram for finding the dimensions and performance of impulse water wheels. Am. M., p. 14—15.  
 ——— Deflection of cylindrical helical springs (Diagram). Am. M., p. 406.  
 ——— Safe loads for helical springs (Diagram). Am. M., p. 354—355.  
 Force fit diagram. Am. M., p. 660—661.  
 C. L. Griffin, Another diagram for the design of shafts. Am. M., p. 274—275.  
 J. E. Johnson, jr., The friction of compressed air in pipes (with diagrams). Am. M., p. 686—690.  
 Charles Lallemand, Le nivellement générale de la France. A. M., t. 16, p. 227—306.  
 L. Lefort, Calcul des poutres droites et planchers en béton de ciment armé. N. A. C., col. 8—14, 23—30.  
 P. Muller, Centrifugal force diagram. Am. M., p. 646—647.  
 A. S. Oesterreicher, Logarithmisch-zeichnerisches Verfahren zur Bestimmung der Arbeit und des Gütegrades der Dampfmaschinen. Z. V. D. I., S. 1428 bis 1432.  
 Winterstein, Die Durchbiegung flusseiserner Träger D. B., S. 471—472.

**Vektorrechnung.**

- Charles Proteus Steinmetz, Symbolische Darstellung doppelperiodischer Vektorprodukte und allgemeiner Wechselstromwellen. E. Z., S. 882—885. 900—903.

**Wärmelehre.**

- Chr. Eberle, Zur Beurteilung des Diesel-Motors. P. J., Bd. 311, S. 1—3, 22—24, 40—42.  
 A. Fliegner, Theorie der Dampf-Turbinen. Schw. B., Bd. 33, S. 102—103, 110 bis 113, 129—133, 146—148, 160—164.  
 O. Herre, Die Anwendung des überhitzten Dampfes im Dampfmaschinenbetriebe. P. J., Bd. 312, S. 3—6, 17—22.  
 Jos. Hübers, Beitrag zur chemischen Thermodynamik. P. J., Bd. 313, S. 168—170; Bd. 314, S. 92—94, 184. (Bemerkung dazu von H. Voss S. 184.)  
 Leopold Kliment, Über den Einfluss des Barometerstandes auf das Diagramm und den Dampfverbrauch der Dampfmaschinen. P. J., Bd. 314, S. 129—131.  
 Leitzmann, Die Dampfströmung in die Cylinder der Lokomotiven. A. G. B., Bd. 44, S. 162—166.  
 F. Maison, Note sur la détermination des charges remorquées par les locomotives et sur celle des quantités de vapeur consommées aux différentes conditions de la marche. A. M., t. 16, p. 499—544.  
 Fr. Mall, Zur Theorie der Kompressions-Kühlmaschinen. Z. K., S. 231—232.  
 E. Meyer, Beitrag zu der Frage: In welcher Weise ändert sich mit der Belastung der Dampfverbrauch einer Dampfmaschine? Z. V. D. I., S. 391—394.  
 ——— Die Beurteilung der Dampfmaschine. Z. V. D. I., S. 154—156.  
 ——— Untersuchungen am Gasmotor, insbesondere über den Einfluss der Kompression. Z. V. D. I., S. 283—287, 326—331, 361—363.  
 Rudolf Mewes, Die Verbrennungs-Kraftmaschinen mit heisser und mit kalter Druckluft. J. G. W., S. 378—380.  
 F. J. Weiss, Beharrungsvermögen von Kondensatoren. Z. V. D. I., S. 1155—1162.  
 S. auch *Elastizitäts- und Festigkeitslehre, Graphische Verfahren, Messwerkzeuge, Tafeln (graphische).*

**Zeichenwerkzeuge.**

- J. I. Blount, Corresponding curves for draftsman and pattern maker. Am. M., p. 1112—1113.  
 Eugene Motchman, Marking the edges of draftsmen's curves. Am. M., p. 670—671.  
 Ship curve, Clark's adjustable. Eg., vol. 68, p. 124.  
 Riefler's Reissfeder mit Präzisionsstellschraube. P. J., Bd. 313, S. 14.

12 Verzeichnis von Abhandlungen aus der angewandten Mathematik u. s. w.

- Ernst Fischer, Die neueste Präzisionsziehfeder (von F. Lutterberg, Mittweida).  
P. J., Bd. 311, S. 19—20.  
Drawing instruments, A new line of. Am. M., p. 227.  
C. B. Perley, A makeshift beam compass. Am. M., p. 1068.  
U. Peters, Compass for drawing arcs of large radius. Am. M., p. 967.  
Stangenzirkel, Neu konstruierter, mit Polgewicht. C. Z., S. 1.  
Roedder, Quadratnetzstecher. Z. V., S. 559—560.  
G. Jatho, Über drei neuere Auftrageapparate für Polarcoordinaten. Z. V.,  
S. 647—654.  
J(ordan), Strahlenzieher. Z. V., S. 135—138.  
Puller, Transporteur zum Auftragen von Tachymeterpunkten. Z. V., S. 132—133.  
H. Schulze, Der Vollkreis-Transporteur von Breithaupt. Z. V., S. 216—217.  
Paul, Der Polysector (Winkelteiler, von Paul Stiassny). Z. Ö. I. A. V., S. 405.  
Arthur Vital, Ein Instrument zur Lösung von Aufgaben für Mercator's Pro-  
jektion. D. M., S. 25—26.  
S. auch *Messwerkzeuge*.

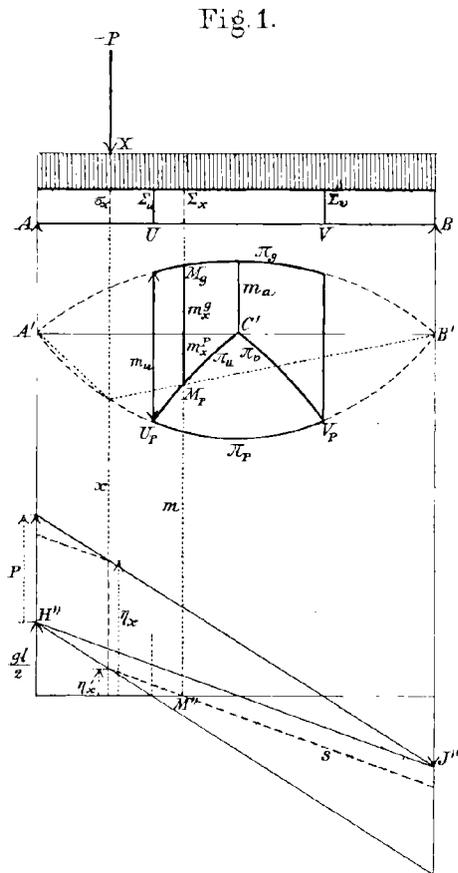


Fig. 1.

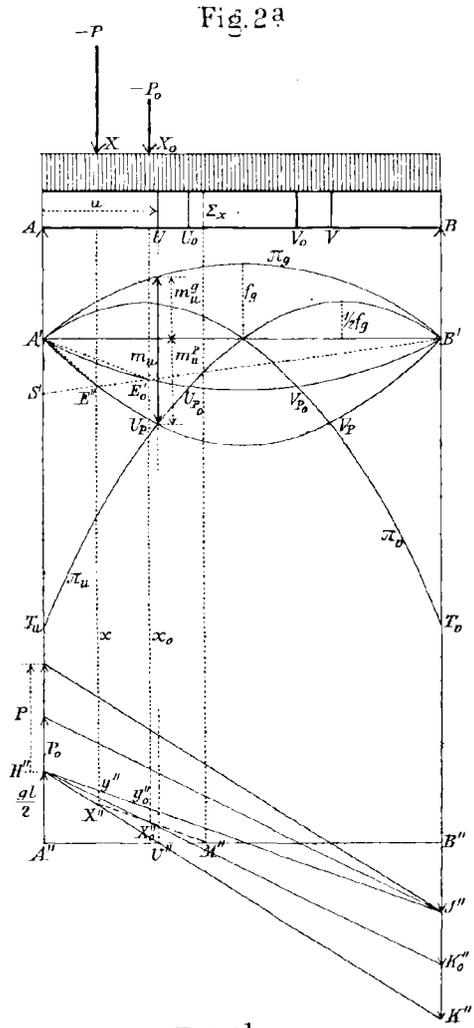


Fig. 2a

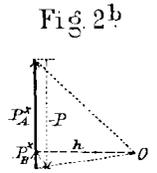


Fig. 2b

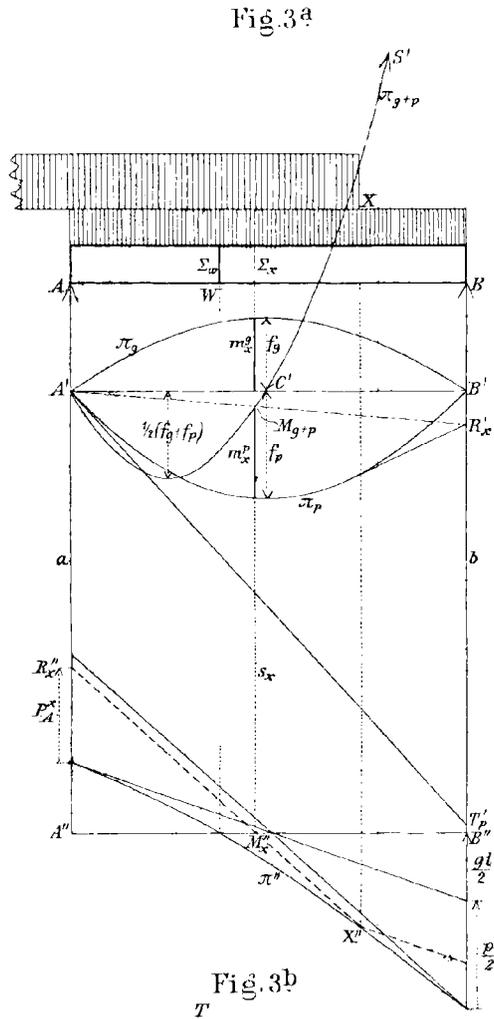


Fig. 3a

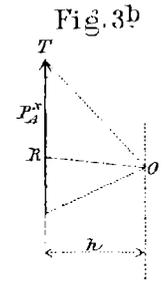


Fig. 3b

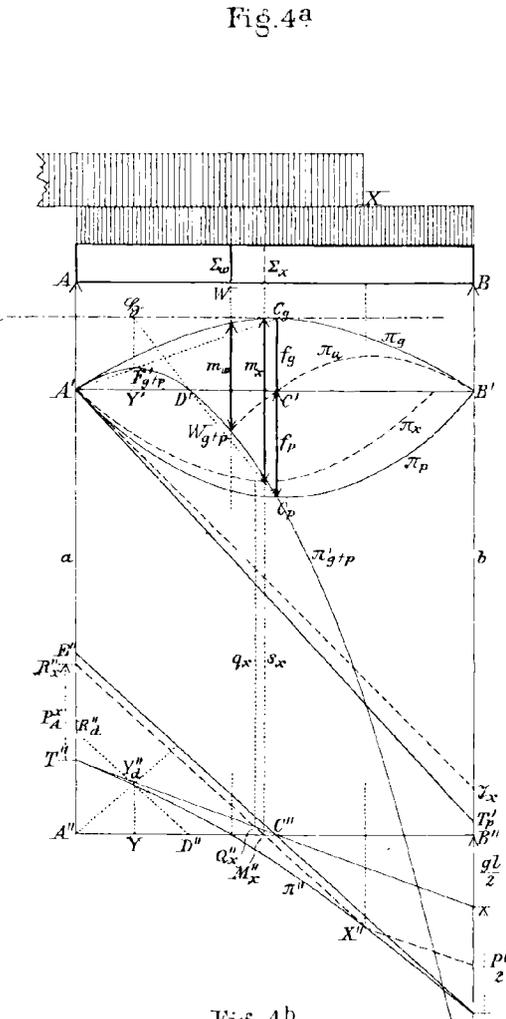


Fig. 4a

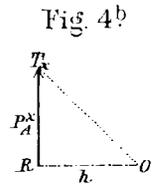
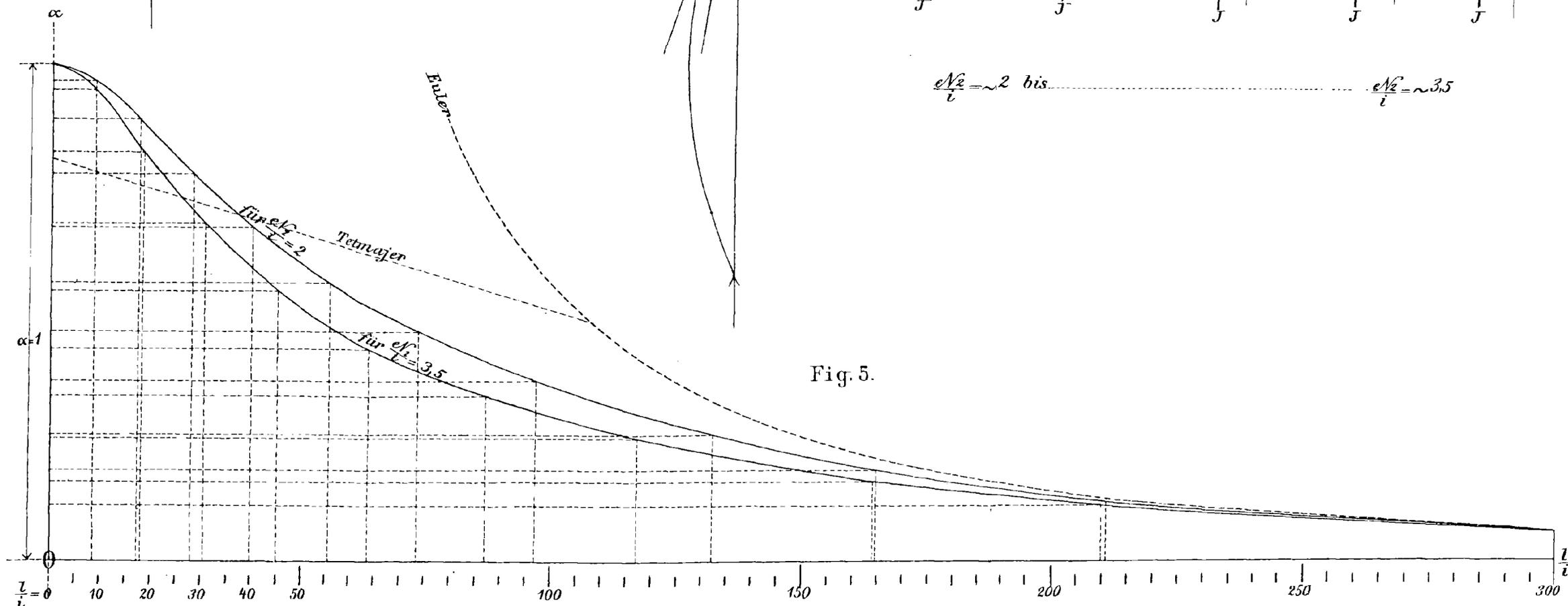
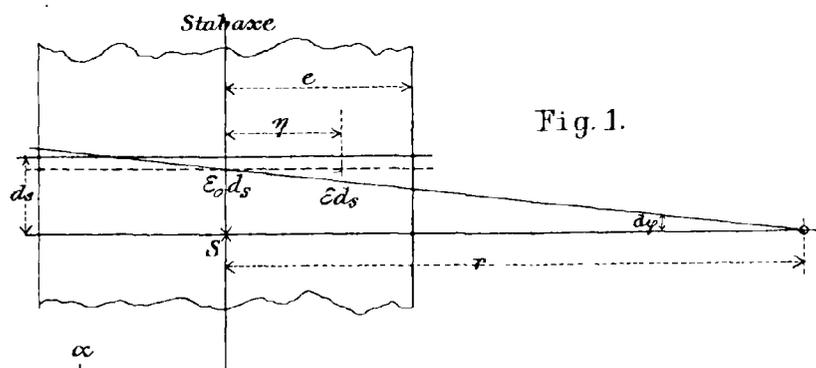
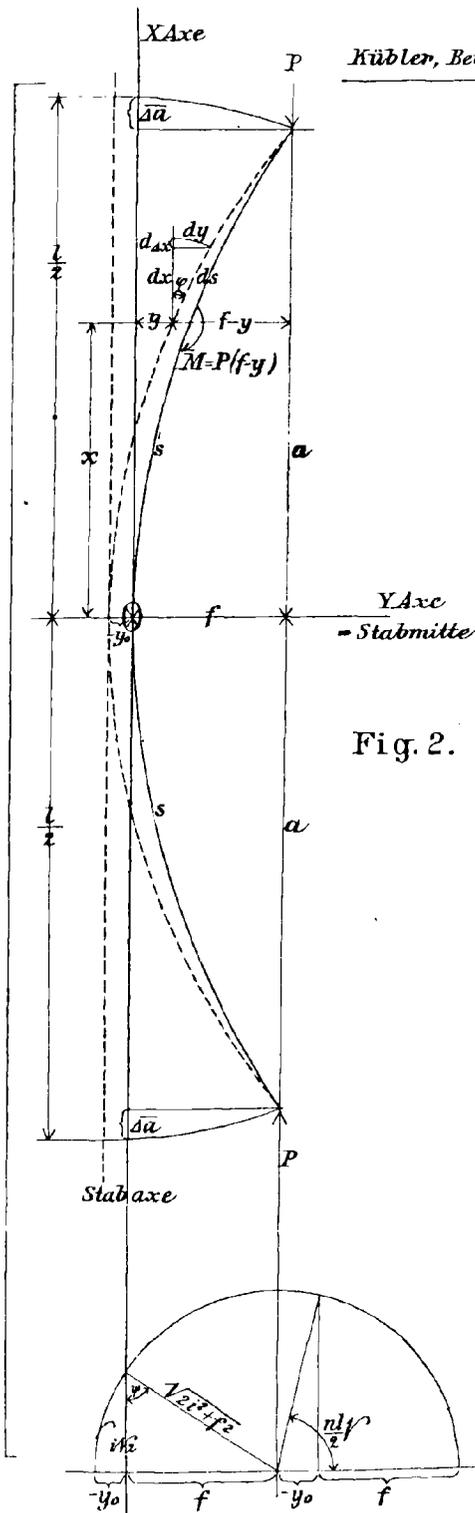


Fig. 4b



Abminderungskoeffizient  $\alpha$  für Fluss- und Schweisseisen.

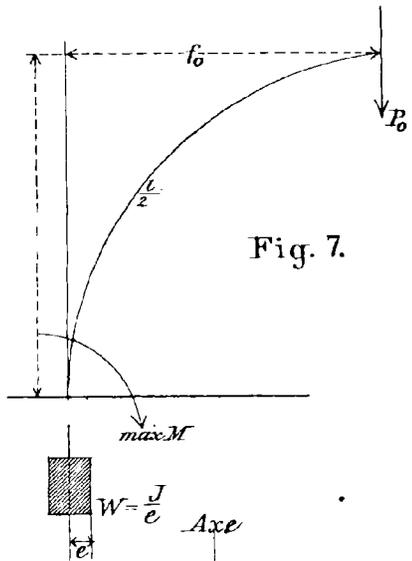


Fig. 7.

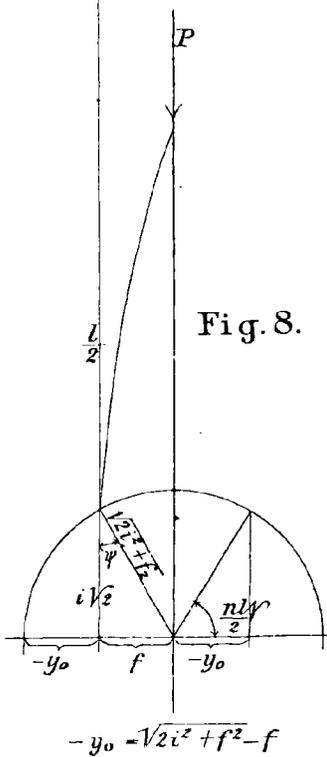


Fig. 8.

Zeitschr. f. Math. u. Physik XLV, 5. u. 6. Heft.

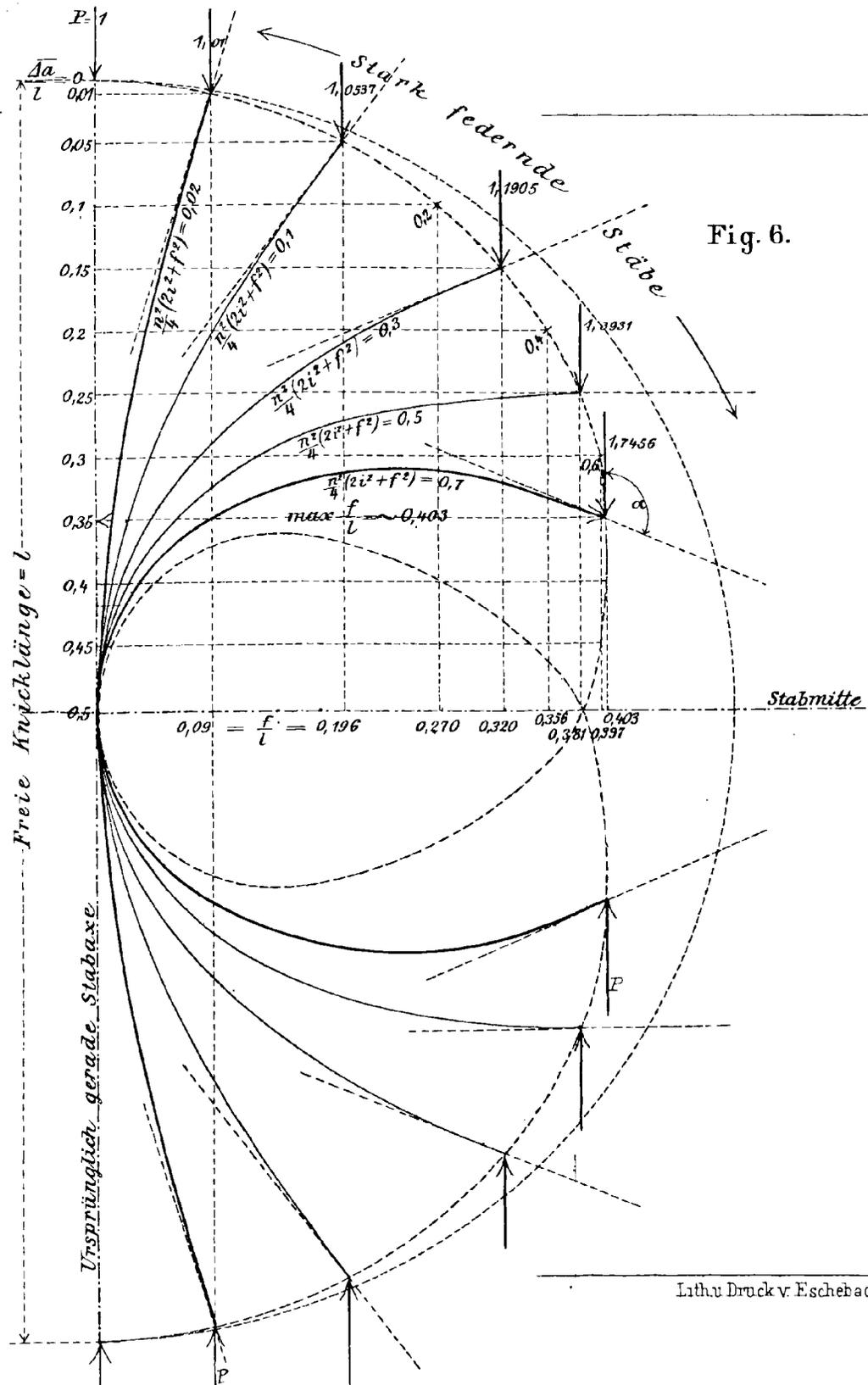


Fig. 6.

Lith. u. Druck v. F. Scheibach & Schaefer, Leipzig.