ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DAL

prof. Francesco Brioschi

IN MILANO

colla cooperazione dei professori:

Luigi Cremona *in Roma*	Enrico Betti *in Pisa*
Eugenio Beltrami *in Pavia*	Felice Casorati *in Pavia.*

SERIE II - TOMO XVIII

(dal marzo al dicembre dell' anno 1890.)

MILANO.

TIPOGRAFIA BERNARDONI DI C. REBESCHINI E C.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO XVIII.° (SERIE II.ª)

Indice.

Sulla teoria delle funzioni σ abeliane pari a tre argomenti.

(*Memoria IV di* ERNESTO PASCAL, *a Napoli.*)

La presente Memoria risolve pel caso delle funzioni σ abeliane *pari,* lo stesso problema risoluto nella Memoria I per le funzioni *dispari,* la ricerca cioè del secondo termine dello sviluppo di σ secondo le potenze ascendenti degli integrali di 1.ª specie.

La risoluzione di questo problema per le funzioni *pari* mi ha opposte difficoltà ben diverse da quelle incontrate per la soluzione del problema analogo per le funzioni dispari, e tali difficoltà sarebbero forse rimaste insuperate se non mi fossi giovato di una semplice e luminosa idea che il mio maestro prof. KLEIN accennò nel passato estate nel corso delle sue lezioni all'Università di Göttingen (vedi § 10), la quale idea mi ha permesso di passare dalla considerazione di forme quaternarie a quella di forme ternarie.

In tale maniera il richiesto secondo termine diventa un certo particolare invariante di un connesso (1, 2) nel piano; ed è notevole l'osservare che si viene in questa maniera a stabilire anche un'analogia maggiore fra i due casi delle funzioni pari e dispari, giacchè allora anche per le prime, come appunto accade per le funzioni dispari (vedi Mem. I, § 13), i termini dello sviluppo debbono soddisfare ad una certa equazione differenziale caratterizzata da un certo processo di ARONHOLD.

Ho creduto utile in questa Mem. IV estendermi un poco più sui principii fondamentali della costruzione delle funzioni σ, cercando di riassumere e sviluppare altri punti della teoria sui quali si era appena sorvolato nelle Memorie precedenti, e tralasciando quegli altri punti trattati più distesamente nelle stesse Memorie.

Così ho toccato qui con maggior estensione la teoria delle curve di contatto, e delle cosiddette forme radicali *(Wurzelformen)*, e ho tralasciato quella delle forme primitive *(Primformen)* e degli integrali normali Q di Klein.

In questi ultimi giorni è comparso nei Mathematische Annalen un lavoro di Klein, nel quale riassume per sommi capi le sue lezioni sulle funzioni abeliane sviluppate a Göttingen nei tre semestri consecutivi: estate 88, inverno 88-89, estate 89. A questo lavoro rimanderò spesso il lettore per i maggiori dettagli di cui potrà aver bisogno (*).

Finalmente prendo l'occasione d'annunziare al lettore che le Mem. V e VI, che ho già compiute e che compariranno fra breve in questo stesso Giornale, tratteranno rispettivamente delle cosiddette funzioni $\sum$ (**) iperellittiche di genere 2 [i cui rapporti costituiscono le funzioni di 1.ª specie *(I Stufe)*] e di un problema sulle superficie di Kummer nelle loro relazioni colle suddette funzioni iperellittiche.

§ 1. Curve di contatto di una curva algebrica piana.

Sia data una curva algebrica piana C_m (***), di ordine m e di genere p. Si abbia un'altra curva C_δ di ordine δ tale che i δm punti comuni colla prima curva si riuniscano a μ a μ, essendo μ un divisore di δm. La curva C_δ si chiamerà una curva di contatto *di specie* μ della curva fondamentale. Si può senz'altro cominciare a studiare i sistemi di tali curve di contatto prendendo per fondamento il teorema di Abel per gli integrali di 1.ª specie.

Consideriamo cioè gli integrali di 1.ª specie nel campo abeliano corrispondente alla curva fondamentale C_m di genere p.

Allora se $x_1\ x_2 \ldots\ x_{m\delta}$, $a_1\ a_2 \ldots\ a_{m\delta}$ sono rispettivamente i punti d'incontro di C_m con due curve Γ_δ, Γ'_δ di ordine δ, è noto dal teorema di Abel che la somma degli integrali estesi fra i primi punti d'intersezione e i secondi è

$$\left(\int_{a_1}^{x_1} + \int_{a_2}^{x_2} + \cdots + \int_{a_{m\delta}}^{x_{m\delta}}\right) dw_\alpha = \Omega_\alpha \qquad (\alpha = 1,\ 2, \ldots\ p),$$

(*) Klein, *Zur Theorie der Abel'schen Functionen.* Math. Ann., Bd. 36.

(**) Non si confondano queste Σ colle σ che hanno relazione invece colle funzioni di 2.ª specie *(II^ter^ Stufe)*. Vedi Klein, *Hyp. Funct.* Math. Ann., Bd. 27, § 14.

(***) Le considerazioni che si faranno qui si potrebbero trasportare senz'altro al caso in cui si prenda per fondamento una curva algebrica qualunque in uno spazio ad un numero qualunque di dimensioni, salvo che allora anzichè parlare di *curve di contatto,* bisognerebbe parlare di *varietà di contatto.*

dove w_α sono gli integrali di 1.ª specie e Ω_α rappresenta un periodo arbitrario degli stessi integrali, cioè una combinazione lineare con coefficienti *interi* di tutti i $2p$ periodi elementari di w_α.

Per un'opportuna scelta dei cammini d'integrazione, e del coordinamento dei punti a coi punti x, il secondo membro dell'espressione superiore può evidentemente ridursi a zero.

Ma a noi conviene qui porci dal punto di vista generale e supporre cammini d'integrazione affatto arbitrarii.

Supponiamo ora che Γ_δ diventi perfettamente la curva di contatto C_δ di cui si è parlato avanti. Allora i punti x si vengono a riunire a μ a μ e propriamente ponendo $\mu\nu = m\delta$, verranno ad essere solo ν punti distinti.

Scegliamo altri ν punti arbitrarii $b_1\, b_2 \dots\, b_\nu$. Allora è chiaro che la relazione superiore potrà scriversi:

$$\mu\left(\int_{b_1}^{x_1} + \cdots + \int_{b_\nu}^{x_\nu}\right) = \Omega_\alpha + c_\alpha,$$

dove c_α è una costante dipendente dai punti a e dai punti arbitrarii b.

Da tale relazione si ricava:

$$\int_{b_1}^{x_1} + \cdots + \int_{b_\nu}^{x_\nu} = \frac{c_\sigma}{\mu} + \frac{\Omega_\alpha}{\mu},$$

dove:

$$\frac{\Omega_\sigma}{\mu} = \frac{h_1\omega_{\sigma 1} + h_2\omega_{\sigma 2} + \cdots + h_{2p}\omega_{\sigma, 2p}}{\mu},$$

essendo h numeri *interi*.

È chiaro al solito che per la scelta opportuna dei cammini d'integrazione fra i punti b e x, noi possiamo al secondo membro della formola superiore supporre aggiunta un'arbitraria combinazione lineare *con coefficienti interi* dei periodi ω_α.

Di qui ne risulta che basta sempre limitarsi a considerare i numeri h presi in un completo sistema di numeri incongrui secondo il modulo μ.

Supponiamo dunque scelto un certo sistema di numeri h. Allora si avranno p equazioni che serviranno a determinare i punti di contatto $x_1 \dots\, x_\nu$ (*).

Poichè in tutto possono darsi solo δ^{2p} sistemi fra loro diversi di numeri h, così possiamo dire che vi sono δ^{2p} classi di curve di contatto C_δ.

(*) Klein, *Abelsche Funct.* Math. Ann., Bd. 36, pag. 31.

Ogni altro sistema di ν punti *corresiduali* ai punti x, rappresenterà sempre un'altra soluzione del problema, quindi trovata la curva di contatto passante per i ν punti x, ve ne saranno sempre tante altre della medesima *classe* per quanti sono i sistemi di punti corresiduali ai punti x.

Ora il teorema noto di Riemann e Roch determina appunto quante volte infinito è il sistema di punti corresiduali ad un sistema di punti x dati.

Se τ rappresenta il numero delle forme φ fra loro indipendenti (*), che abbiano fra i loro punti nulli tutti i punti x, cioè, come si usa dire, il numero delle forme φ fra loro indipendenti da cui sono *congiunti (verknüpft)* i ν punti x, allora il teorema di Riemann e Roch dice che è $\nu - p + \tau$ volte infinito il sistema dei punti corresiduali ad x. Dunque tutte le curve di contatto appartenenti ad una medesima classe formano un sistema $\nu - p + \tau$ volte infinito.

Dati i numeri h è determinata la classe di curve di contatto: i numeri h formano cioè un assieme di numeri che potremo chiamare la *caratteristica* di quella classe; però è chiaro dalle formole precedenti, a causa dell'arbitrarietà della costante c_α, che tale caratteristica non è *assoluta,* ma solo relativa alla scelta della costante c_α, per modo che per es. una stessa classe di curve di contatto potrà individuarsi con due *caratteristiche* diverse scegliendo diversamente la costante c_α. Noi non abbiamo finora nessun punto d'appoggio sul quale potere fissare la scelta di c_α.

C'è però un caso in cui si possono effettivamente distribuire alle diverse classi delle caratteristiche assolute.

Tal caso si ha quando δ è divisibile per μ. In tal caso una curva di ordine $\frac{\delta}{\mu}$ passante per i $\nu = m\frac{\delta}{\mu}$ punti x e contata μ volte rappresenterà una curva di contatto. Quindi in questo caso una delle classi di curve si viene a distinguere in un modo geometrico e completamente definito dalle altre; esiste cioè una classe di curve di ordine $\frac{\delta}{\mu}$ in cui ciascuna curva è contata μ volte.

Possiamo allora prendere per punto di partenza questa speciale classe, e darle la caratteristica $(0, 0, \ldots 0)$, cioè determinare in tal modo la costante c_α che tale classe venga ad acquistare la detta caratteristica; allora le caratte-

(*) Klein, Opera cit., pag. 29. Le forme φ sono *forme intere* nelle coordinate dei punti della superficie di Riemann, e sono proporzionali ai differenziali degli integrali di 1.ª specie. Il loro grado dipende dalla speciale forma canonica della curva fondamentale. Così per curve piane senza singolarità e di ordine m, le φ sono forme di ordine $m - 3$. (Klein, Opera cit., pag. 19.)

ristiche di tutte le altri classi saranno riferite a questa e saranno *assolute*. Esse si chiamano *caratteristiche elementari (elementarcharakteristiken)* per distinguerle da un altro genere di caratteristiche che si possono dare alle diverse classi e che si chiamano *caratteristiche primitive (Primcharakteristiken)* (*).

§ 2. Forme e funzioni radicali (Wurzelformen) su di una superficie di Riemann.

Una considerazione analoga alla considerazione geometrica delle curve di contatto prendendo per fondamento una data curva algebrica piana, si può fare dal punto di vista della teoria analitica delle funzioni, prendendo per fondamento la superficie di Riemann corrispondente a quella curva algebrica.

Noi vogliamo considerare sulla superficie di Riemann delle funzioni che sieno dotate delle seguenti proprietà:

1. Sieno polidrome a μ valori.
2. Sieno *non diramate* in nessun punto della superficie di Riemann.
3. I cangiamenti che subiscono, quando la variabile percorre un *cammino periodale* sulla superficie, sieno semplicissimi, cioè si riducano al prodotto della funzione per una certa radice μ^{ma} dell'unità.

È chiaro che la μ^{ma} potenza di una tale funzione sarà una funzione monodroma, perchè rimarrà inalterata se la variabile percorre sulla superficie un qualunque cammino periodale, quindi una tale funzione potrà sempre esprimersi come la radice μ^{ma} di una certa funzione monodroma.

Tali funzioni si chiamano *funzioni radicali, (Wurzelfunctionen)*.

Possiamo costruire *funzioni radicali* giovandoci delle curve di contatto. Se C_δ C'_δ sono i primi membri di due curve di contatto di ordine δ e di specie μ, e inoltre queste tali due curve di contatto appartenenti a due classi diverse sieno tali che le differenze $h_i - h'_i$ dei numeri che formano rispettivamente le loro caratteristiche *non sieno tutte divisibili per uno stesso divisore μ' di μ*, allora:

$$\sqrt[\mu]{\frac{C}{C'}},$$

sarà una funzione che sulla superficie di Riemann ha per punti zero *semplici*

(*) Klein, Opera cit., pag. 34.

i ν punti

$$x_1 \quad x_2 \ldots \quad x_\nu,$$

nei quali C tocca la curva, e per punti d'infinito *semplici* i ν punti

$$y_1 \quad y_2 \ldots \quad y_\nu,$$

nei quali C' tocca la curva, e quindi essendo una funzione che diventa solo *semplicemente* zero e infinita nei punti detti e in ogni altro punto resta sempre finita, sarà *non diramata;* inoltre sarà evidentemente polidroma, perchè

$$\left(\int_{y_1}^{x_1} + \cdots + \int_{y_\nu}^{x_\nu}\right) dw_\alpha \equiv \frac{\sum (h_i - h'_i)\,\omega_{\alpha i}}{\mu} \quad \text{(mod. periodi)}, \tag{1}$$

dove h_i, h'_i sono i numeri interi che compongono le caratteristiche di C, C' appartenenti a due classi diverse, e quindi non essendo zero il secondo membro della formola superiore, i punti x, y non possono essere rispett. punti *nulli* e *infiniti* di una funzione monodroma.

In quanto poi all'essere la nostra funzione esattamente a μ valori, risulta dall'equazione (1).

Infatti se la sua potenza λ^{ma} $(\lambda < \mu)$ potesse essere una funzione monodroma risulterebbe che moltiplicando ambo i termini di (1) per λ, il secondo membro dovrebbe essere congruo a zero.

Ora se λ è primo con μ ciò evidentemente non può succedere, perchè le differenze $h_i - h'_i$ non sono divisibili per μ. Se $\frac{\mu}{\lambda}$ è intero $= \mu'$, allora avendo precedentemente convenuto che le due curve C, C' hanno tali caratteristiche che $h_i - h'_i$ non possono essere tutte divisibili per un divisore di μ, tali differenze non potranno essere tutte divisibili per μ' che è un divisore di μ.

Per trovare i fattori coi quali la nostra funzione viene a moltiplicarsi quando la variabile percorre un cammino periodale basta servirsi di una certa rappresentazione della nostra funzione mediante le cosiddette forme principali Ω introdotte da Klein.

La importanza di tali espressioni chiamate anche forme primitive *(Primformen),* e delle quali abbiamo già abbastanza discorso nelle Memorie precedenti (*), consiste in ciò che esse sono nel campo abeliano quello che una espressione lineare binaria è nel campo razionale.

(*) Memoria I, § 2. Memoria III, § 1.

In altri termini tali forme primitive non sono mai *diramate*, non sono mai *infinite*, e si annullano solo e di 1.° ordine quando i due punti, di cui sono funzioni, coincidono.

La $\Omega(x\,y)$ è nel campo abeliano quello che $(x-y)$ è nel campo razionale (*).

La funzione radicale di cui si è parlato avanti non essendo una funzione diramata e avendo per punti zero semplici i punti x e per punti d'infinito semplici i punti y sarà eguale a (**)

$$\frac{\Omega(xx_1)\ldots\ldots\Omega(xx_\nu)}{\Omega(xy_1)\ldots\ldots\Omega(xy_\nu)}\, e^{\frac{1}{\mu}\sum_{\alpha=1}^{p} w_\alpha[(h_1-h'_1)\eta_{\alpha 1}+\cdots]}$$

In questa formola le η sono i periodi degli integrali normali di 2.ª specie. La verità di questa formola si dimostra elevandola a μ^{ma} potenza e mostrando allora mediante le formole di periodicità delle Ω e le note relazioni bilineari fra i periodi degli integrali di 1.ª e 2.ª specie, che tale potenza μ^{ma} non ha alcuna periodicità su qualunque dei tagli canonici della superficie di Riemann; quindi poichè essa ha gli stessi zeri ed infiniti della funzione monodroma $\frac{C}{C'}$ sarà ad essa eguale a meno di un fattore costante.

È facile allora da questa formola trovare che la periodicità della nostra funzione:

$$\sqrt[\mu]{\frac{C}{C'}},$$

è data dalle formole seguenti:

Sui tagli canonici

$$A_1 \quad A_2 \ldots \quad A_p \qquad B_1 \quad B_2 \ldots \quad B_p,$$

essa acquista rispettivamente i fattori:

$$\varepsilon^{h_{p+1}-h'_{p+1}},\ldots \qquad \varepsilon^{h_{2p}-h'_{2p}}, \qquad \varepsilon^{-h_1+h'_1},\ldots \qquad \varepsilon^{-h_p+h'_p},$$

dove ε è una radice μ^{ma} dell'unità, e h e h' sono rispettivamente i numeri che compongono le caratteristiche delle curve di contatto C, C'.

Si vede dunque che davvero la nostra funzione soddisfa alle condizioni per dirsi una funzione radicale.

(*) Klein, Math. Ann., Bd. 36, pag. 11.
(**) Klein, Opera cit., pag. 33. Si noti che ivi c'è un errore di stampa.

§ 3. Caso delle curve di 4.° ordine di genere 3. Introduzione di una curva storta di 6.° ordine e dello stesso genere.

Supponiamo che la curva fondamentale sia una curva generale di 4.° ordine. Allora è facile specializzare la teoria generale precedente e ottenere il risultato che: esistono 64 sistemi di cubiche di contatto (di specie 2) alla curva di 4.° ordine; e ciascuno di tali sistemi è triplamente infinito.

Vogliamo dimostrare una proprietà comune a tutti questi sistemi. Noi facciamo la dimostrazione per il nostro caso particolare, ma avvertiamo che la analoga proprietà è generale per le curve di contatto di specie 2.

Sieno $x_1\ x_2 \ldots\ x_6$ i 6 punti di contatto di una cubica e $x'_1\ x'_2 \ldots\ x'_6$ quelli di un'altra cubica dello stesso sistema. Allora per le formole del § 1 abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{b_1}^{x_1} + \cdots + \int_{b_6}^{x_6} \equiv \frac{c_\sigma + \Omega_\sigma}{2} \\ &\int_{b_1}^{x'_1} + \cdots + \int_{b_6}^{x'_6} \equiv \frac{c_\sigma + \Omega_\sigma}{2} \end{aligned}\right\} \quad \text{(mod. periodi)},$$

donde sommando:

$$\int_{b_1}^{x_1} + \cdots + \int_{b_1}^{x'_1} + \cdots \equiv c_\alpha \quad \text{(mod. periodi)},$$

e sostituendo per c_α il suo valore si ha infine:

$$\int_{a_1}^{x_1} + \cdots + \int_{a_6}^{x_6} + \int_{a_1}^{x'_1} + \cdots + \int_{a_{12}}^{x'_6} \equiv 0 \quad \text{(mod. periodi)},$$

e poichè per ipotesi i dodici punti a stanno su di una cubica, staranno dunque su di una cubica i punti x insieme ai punti x'_i. Dunque i dodici punti di contatto di due cubiche di contatto dello stesso sistema stanno su di una nuova cubica.

Sieno ora $\Phi_1\ \Phi_2$ due cubiche di contatto dello stesso sistema, e Φ_{12} quella che passa per i dodici punti di contatto di esse. È chiaro allora che sulla superficie di Riemann la funzione:

$$\frac{\Phi_1\,\Phi_2}{\Phi_{12}^2},$$

è una costante, perchè non ha nè zeri, nè infiniti. Possiamo dunque stabilire la formola fondamentale:

$$\Phi_1 \Phi_2 = \Phi_{12}^2, \tag{1}$$

determinando in modo le equazioni delle cubiche che la costante di cui si parla risulti eguale all'unità, ciò che si può sempre fare.

Ciò posto esaminiamo la espressione:

$$\chi = (u_1 \sqrt{\Phi_1} + u_2 \sqrt{\Phi_2})^2.$$

Dico che $\chi = 0$ rappresenta una nuova cubica di contatto dello stesso sistema di Φ_1 e Φ_2.

Infatti dall'equazione precedente si ricava:

$$\chi \Phi_1 = (u_1 \Phi_1 + u_2 \Phi_{12})^2.$$

Ora essendo il secondo membro il quadrato di una funzione razionale, nei punti nei quali diventa zero, diventerà sempre almeno zero di 2.° ordine, e poichè al primo membro Φ_1 fa pure lo stesso, lo stesso dovrà fare anche χ.

Dunque χ è una cubica di contatto; appartiene poi allo stesso sistema di Φ_1 e Φ_2 perchè

$$\frac{\sqrt{\chi}}{\sqrt{\Phi_1}} = u_1 + u_2 \frac{\Phi_{12}}{\Phi_1},$$

cioè il primo membro è eguale ad una funzione razionale, e quindi i punti zero di $\sqrt{\chi}$ sono *corresiduali* a quelli di $\sqrt{\Phi_1}$. Nello stesso modo si dimostrerebbe che se Φ_1 Φ_2 Φ_3 Φ_4 sono quattro cubiche di contatto di un sistema, la espressione:

$$\sqrt{\chi} = u_1 \sqrt{\Phi_1} + u_2 \sqrt{\Phi_2} + u_3 \sqrt{\Phi_3} + u_4 \sqrt{\Phi_4}, \tag{2}$$

rappresenta la radice quadrata del primo membro dell'equazione di una cubica dello stesso sistema. Indicando con Klein (*) colla denominazione *forma radicale* (da non confondersi con *funzione* radicale) tale radice quadrata, possiamo anzi far vedere che nella formola (2) si comprende la espressione *più generale* di una forma radicale appartenente al sistema dato.

Infatti sappiamo che le cubiche di contatto non sono più di *tre volte* infinite, quindi nella formola (2) non potranno comparire più di *quattro* parametri omogenei arbitrarii.

(*) Klein, Opera cit., § 11.

Per modo che possiamo dire anche che fra cinque forme radicali dello stesso sistema esiste sempre una relazione del tipo (2).

Prendiamo quattro forme radicali di uno stesso sistema e fra loro indipendenti, e poniamo:

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \sqrt{\Phi_1} : \sqrt{\Phi_2} : \sqrt{\Phi_3} : \sqrt{\Phi_4},$$

interpretando le z come le quattro coordinate omogenee nello spazio ordinario.

Le quattro z omogenee verranno così funzioni dei punti della superficie di Riemann, onde descriveranno nello spazio una linea storta. È facile dimostrare che è una linea di 6.° ordine C_6. Infatti un piano:

$$u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 + u_4 z_4 = 0,$$

rappresenterà secondo la formola (2) una forma radicale, la quale, come sappiamo, è zero e di 1.° ordine *solo* in sei punti della superficie di Riemann. Onde un piano interseca la nostra curva in sei punti semplici. Questi sei punti nei quali C_6 è tagliata da un piano corrispondono, sulla C_4 a 6 punti pei quali passa una cubica di contatto.

Poichè i rapporti delle $\sqrt{\Phi}$ sono *funzioni razionali sulla superficie di* Riemann si ha che i punti della nostra curva C_6 corrispondono univocamente ai punti di C_4; la C_6 è anche di genere 3. Noi potremmo prendere anche in luogo di C_4, la C_6 per fondamento delle nostre ricerche.

Per una ragione che si svilupperà in seguito vogliamo ora esaminare in quali casi si annulla il seguente determinante.

Sieno x' x'' x''' x^{IV} quattro punti della nostra superficie di Riemann, e formiamo il determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \sqrt{\Phi_1(x')} \dots . & \sqrt{\Phi_1(x^{\text{IV}})} \\ \dots\dots\dots\dots & \\ \sqrt{\Phi_4(x')} \dots\dots & \sqrt{\Phi_4(x^{\text{IV}})} \end{vmatrix}.$$

Interpretando i $\sqrt{\Phi}$ come coordinate nello spazio si ricava evidentemente che D sarà in generale zero quando i quattro punti z' z'' z''' z^{IV} che nella curva di 4.° ordine corrispondono ai punti x' x'' x''' x^{IV} di C_4, stanno in un piano. Supponiamo dati i primi tre punti, e vogliamo vedere quando il determinante D considerato come funzione del quarto si annulla. In primo luogo quando il quarto viene a coincidere con uno dei tre primi. Poi quando z^{I} viene ad essere uno dei tre altri punti in cui il piano determinato da

$z' \, z'' \, z'''$ taglia C_6; e finalmente quando $z' \, z'' \, z'''$ sono i tre punti nei quali C_6 è tagliata da una *trisecante;* in tale ultimo caso D è *identicamente* zero considerato come funzione di z^{IV}, cioè è zero qualunque sia z^{IV}.

Come conseguenza di un teorema generale sulle curve di contatto (*), si ricava che i 64 sistemi di cubiche di contatto di C_4 si distinguono in due categorie, di proprietà diverse.

L'uno risulta di 28 sistemi ciascuno dei quali è univocamente coordinato ad una delle 28 tangenti doppie di C_4; l'altra risulta dei rimanenti 36 sistemi.

Le caratteristiche corrispondenti a ciascun sistema della prima categoria sono *dispari* cioè tali che:

$$\lambda = h_1 h_4 + h_2 h_5 + h_3 h_6,$$

forma un numero dispari.

Le caratteristiche di un sistema della seconda categoria sono *pari* cioè per essa λ è *pari.*

Nella Mem. I e II abbiamo preso per oggetto delle nostre considerazioni i sistemi della prima categoria; ora studieremo invece i 36 sistemi della seconda, e per far ciò porremo le C_4 sotto una forma canonica speciale e adatta per il nostro scopo attuale, come già facemmo analogamente per il caso delle caratteristiche dispari ponendo le C_4 sotto un'altra forma canonica.

§ 4. Cenno sulla teoria geometrica di Hesse della C_4.

Consideriamo una rete di quadriche (**):

$$F = x_1 \sum \alpha_{ik} z_i z_k + x_2 \sum \beta_{ik} z_i z_k + x_3 \sum \gamma_{ik} z_i z_k,$$

in cui le x sono i parametri della rete, e

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}, \qquad \beta_{ik} = \beta_{ki}, \qquad \gamma_{ik} = \gamma_{ki}.$$

Domandiamo se fra le ∞^2 superficie della rete vi sono *coni?* Poichè deve essere soddisfatta *una sola* condizione perchè una F_2 diventi un cono, è chiaro che vi saranno nella rete ∞^1 coni. Che cosa formeranno i vertici di questi coni?

(*) Clebsch-Lindemann, *Geometrie* (ediz. francese), vol. III, pag. 243.
(**) Hesse, Crelle's Journal, Bd. 49 (1855).

Le condizioni perchè il punto z sia vertice di un cono sono espresse da:

$$\frac{\partial F}{\partial z_1}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z_2}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z_3}=0 \qquad \frac{\partial F}{\partial z_4}=0. \tag{1}$$

Con considerazioni nei cui dettagli non posso entrare, si dimostra che la curva che si ottiene da queste equazioni eliminando le x, è effettivamente di 6.° ordine, a meno di una parte estranea di 3.° ordine che non ha nulla da fare colla curva dei vertici dei coni.

D'altra parte eliminando fra le stesse equazioni le z si ha una relazione di 4.° grado in x, che può interpretarsi come una curva di 4.° ordine nel piano.

Ponendo:

$$\pi_{ik}=\pi_{ki}=\alpha_{ik}x_1+\beta_{ik}x_2+\gamma_{ik}x_3,$$

il risultato dell'eliminazione è:

$$\Pi=2\begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & \pi_{44} \end{vmatrix}=0.$$

Poichè le relazioni (1) sono lineari sia nelle x che nelle z si ha dunque una corrispondenza univoca fra una curva di 4.° ordine nel piano e una curva storta di 6.° ordine. Noi faremo vedere che questa corrispondenza fra la C_4 e le C_6 è perfettamente una corrispondenza del genere di quelle di cui si è parlato nel paragrafo precedente.

In primo punto si può dimostrare che la C_4 così ottenuta è generale.

Inoltre è facile vedere che la curva di 3.° ordine:

$$\Phi_{uv}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \pi_{11} & \ldots\ldots & \pi_{14} & v_1 \\ \pi_{21} & \ldots\ldots & \pi_{24} & v_2 \\ \pi_{31} & \ldots\ldots & \pi_{34} & v_3 \\ \pi_{41} & \ldots\ldots & \pi_{44} & v_4 \\ u_1 & \ldots\ldots & u_4 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

passa per i punti di C_4 corrispondenti ai dodici punti nei quali due piani:

$$u_1z_1+u_2z_2+u_3z_3+u_4z_4=0$$

$$v_1z_1+v_2z_2+v_3z_3+v_4z_4=0,$$

tagliano la curva di 6.° ordine.

Donde si ricava che la cubica Φ_{uu}, cioè quella che si ricava da Φ_{uv} ponendo $v = u$, passa doppiamente per i punti corrispondenti a quelli in cui il piano $u_z = 0$ taglia C_6; essa è dunque una cubica di contatto, e si ricava ancora che i sei punti z nei quali un piano qualunque taglia C_6 corrispondono su C_6 a sei punti per i quali passa una cubica di contatto. Tutte queste cubiche di contatto appartengono allo stesso sistema; i piani che intersecano C_6 sono triplamente infiniti, dunque triplamente infinito sarà questo sistema di cubiche, come deve essere (vedi § 3). Su C_4 dati tre punti esistono sempre e sono univocamente determinati altri tre punti che coi primi formano i sei punti di contatto di una cubica.

Dalle cose dette risulta che in generale sarà:

$$\frac{\Phi_{uu}\Phi_{vv}}{\Phi_{uv}^2},$$

una costante sulla superficie di Riemann. Noi potremo dimostrare in un paragrafo seguente (§ 6) che tale costante è propriamente eguale ad 1, cioè che si ha:

$$\Phi_{uu}\Phi_{vv} = \Phi_{uv}^2.$$

Chiamiamo rispettivamente Φ_1 Φ_2 Φ_3 Φ_4 le Φ per i seguenti valori dei parametri u:

$$\begin{array}{rcccc} u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4 = & 1, & 0, & 0, & 0; \\ & 0, & 1, & 0, & 0; \\ & 0, & 0, & 1, & 0; \\ & 0, & 0, & 0, & 1. \end{array}$$

Allora si vede subito che, indicando con Φ_{ik} le Φ passanti per i punti di contatto di Φ_i e Φ_k con C_4, si ha:

$$\Phi_{ik} \equiv \frac{\partial \Pi}{\partial \pi_{ik}}.$$

Intanto dalle (1) si può ricavare:

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \frac{\partial \Pi}{\partial \pi_{1k}} : \frac{\partial \Pi}{\partial \pi_{2k}} : \frac{\partial \Pi}{\partial \pi_{3k}} : \frac{\partial \Pi}{\partial \pi_{4k}},$$

onde infine:

$$z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \sqrt{\Phi_1} : \sqrt{\Phi_2} : \sqrt{\Phi_3} : \sqrt{\Phi_4},$$

cioè la nostra curva di 6.° ordine è perfettamente una di quelle definite nel paragrafo precedente. Ora viene la domanda: Il sistema di cubiche di contatto che siamo qui venuti a trovare è un sistema appartenente alla prima o alla seconda categoria (vedi paragrafo precedente)? Si dimostra che è un sistema della seconda categoria. Non posso entrare nei dettagli di questa dimostrazione; solo accennerò che la dimostrazione si fa giovandosi della proprietà che una C_6 della prima categoria giace sempre su di una quadrica F_2, mentre si può dimostrare che la C_6 da noi qui introdotta non può giacere su alcuna F_2.

In conseguenza di ciò si ha che le dieci grandezze:

$$z_1^2, \quad z_1 z_2, \ldots \quad z_4^2,$$

sono fra loro linearmente indipendenti; o anche sono linearmente indipendenti le quantità alle prime proporzionali:

$$\Phi_1 \quad \Phi_{12} \ldots \quad \Phi_4.$$

Si ricava dalle cose dette che la curva di 4.° ordine generale si può porre in 36 modi diversi sotto la forma $\Pi = 0$ datale al principio di questo paragrafo; ad ognuno di tali modi corrisponde uno dei 36 sistemi di cubiche di contatto della seconda categoria.

§ 5. Proprietà geometriche della C_6 di 2.ª specie. Sue trisecanti. Corrispondenza (3, 3), su di essa.

Facilmente si possono dimostrare le seguenti proprietà geometriche (*):

1. Ai punti di una retta nel piano corrispondono le quadriche di un fascio e viceversa.

2. Ai quattro punti comuni ad una retta e C_4 corrispondono i quattro coni appartenenti a questo fascio.

3. I piani polari di un punto arbitrario z' rispetto alle superficie della rete formano una rete.

4. Se il punto z' sta su C_6 allora si ha solo un fascio di piani polari.

5. I piani polari di un punto z' rispetto alla F_2 di un fascio, formano un fascio.

6. Se z' sta su C_6, e propriamente è uno dei quattro punti di C_6 che sono vertici dei quattro coni appartenenti al fascio, il piano polare è unico. Propriamente tale piano polare è il piano degli altri tre punti che con z' formano i vertici dei quattro coni.

(*) Klein, Lezioni 1888-89.

7. Per ciascun punto di C_6 passano tre *trisecanti.*

8. Facendo passare per ciascuna *trisecante* il fascio di piani si hanno ∞ terne di punti *corresiduali.*

9. Poichè ad ogni serie di terne di punti *corresiduali* appartiene un punto fisso R *(Restpunkt)* si ha dunque che ad ogni *trisecante* corrisponde un punto della C_6 e viceversa.

10. Il fascio di piani polari del punto R rispetto alla superficie della rete ha per asse la trisecante di C_6 corrispondente ad R.

11. Dalla corrispondenza (1, 1) fra i punti di C_6 e le sue trisecanti si può passare ad una corrispondenza (3, 3) fra i punti di C_6 fia loro. Infatti ad ogni punto z di C_6 corrisponde una trisecante, dunque possiamo far corrispondere a z *la terna* di punti z' comuni a C_6 e alla trisecante. D'altra parte sappiamo che per ogni punto di C_6 passano tre trisecanti (teor. 7), dunque ad ogni punto z' corrispondono tre trisecanti e quindi *tre* punti z.

12. La corrispondenza (3, 3) dei punti z, z' su C_6 può tradursi in una corrispondenza analoga dei punti x su C_4 nel piano.

Ad ogni punto z corrispondono tre punti z' in linea retta. Facciamo passare per questa trisecante il fascio di piani. Si hanno terne di punti corresiduali fra loro e di cui z è il punto-resto (teor. 9).

Ad ogni gruppo dei sei punti tagliati su C_6 da ognuno di tali piani del fascio corrisponde nel piano il gruppo di sei punti di contatto di una cubica.

Possiamo dunque dire che nel piano la corrispondenza (3, 3) è caratterizzata così che ad ogni punto x corrispondono tre punti x' i quali insieme coi tre punti x'' che una retta qualunque passante per x taglia su C_4 formano i sei punti di una cubica di contatto.

13. La corrispondenza (3, 3) di cui si parla non ha *coincidenze* (*).

14. Per trovare le formole analitiche per esprimere la corrispondenza di cui si parla, osserviamo che se abbiamo un punto z di C_6 e vogliamo trovare i tre punti z' che vi corrispondono dobbiamo menare i piani polari di z rispetto a tutte le superficie della rete, e trovare le tre *intersezioni fisse* di tali piani polari con C_6 (teor. 10). Onde il piano polare:

$$h_1 \sum \alpha_{ik} z_i z'_k + h_2 \sum \beta_{ik} z_i z'_k + h_3 \sum \gamma_{ik} z_i z'_k = 0, \qquad (1)$$

dove le h si suppongono arbitrarie, e le z, z' si suppongono punti di C_6 dà la relazione di corrispondenza fra z, z'.

(*) Questo teorema è una facile applicazione della teoria trascendente del principio di corrispondenza; vedi Hurwitz, *Ueber allg. Corr. Princip.* Math. Ann., Bd. 28.

Se cioè z, z' si corrispondono nella corrispondenza (3, 3), tale relazione deve aver luogo per qualunque sistema di h_1, h_2, h_3.

Poichè le z, z' sono punti di C_6, possiamo porre per esse i loro valori (§ 4) e si ha:

$$\left.\begin{aligned}[xx'] = h_1 \sum \alpha_{ik} \sqrt{\Phi_i}(x) \sqrt{\Phi_k}(x') + h_2 \sum \beta_{ik} \sqrt{\Phi_i}(x) \sqrt{\Phi_k}(x') + \\ h_3 \sum \gamma_{ik} \sqrt{\Phi_i}(x) \sqrt{\Phi_k}(x') = 0,\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

dove x, x' sono i punti di C_4 corrispondenti a z, z'.

Tale relazione esprime a sua volta la corrispondenza dei punti x, x' su C_4.

La (2) sarà zero indipendentemente dalle h, *allora e solo allora* che i punti x, x' sono legati in modo che dato x e fatta passare per essa una retta arbitraria che tagli C_4 in tre punti x'', il punto x' è uno dei tre punti che insieme ai tre punti x'' formano i sei punti di contatto di una cubica di 2.ª specie.

Finalmente vogliamo aggiungere alcune formole che ci occorreranno in seguito. È facile dimostrare che l'equazione di C_4 può porsi sotto la forma speciale:

$$\left.\begin{aligned}\Pi = f_x^4 = x_1 \sum \alpha_{ik} \sqrt{\Phi_i}(x) \sqrt{\Phi_k}(x) + x_2 \sum \beta_{ik} \sqrt{\Phi_i} \sqrt{\Phi_k} + \\ + x_3 \sum \gamma_{ik} \sqrt{\Phi_i} \sqrt{\Phi_k};\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

e che la sua polare può scriversi:

$$\left.\begin{aligned}f_x^3 f_h = h_1 \sum \alpha_{ik} \sqrt{\Phi_i}(x) \sqrt{\Phi_k}(x) + h_2 \sum \beta_{ik} \sqrt{\Phi_i} \sqrt{\Phi_k} + \\ + h_3 \sum \gamma_{ik} \sqrt{\Phi_i} \sqrt{\Phi_k}.\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

§ 6. Formole per la C_4 e le sue cubiche di contatto. Dimostrazione di $\Phi_{uu}\Phi_{vv} = \Phi_{uv}^2$.

Poniamo la rete di quadriche simbolicamente sotto la forma:

$$0 = a_x \alpha_z^2 = b_x \beta_z^2 = \cdots$$

La equazione di C_4 cioè la Π del § 4 viene allora simbolicamente espressa da:

$$12\Pi = (\alpha\beta\gamma\delta)^2 a_x b_x c_x d_x.$$

Le cubiche di contatto vengono espresse da:

$$12\Phi_{uu} = (\alpha\beta\gamma u)^2 a_x b_x c_x$$

$$12\Phi_{uv} = (\alpha\beta\gamma u)(\alpha\beta\gamma v) a_x b_x c_x.$$

È facile allora di qui dimostrare la espressione (3) del § 5. Infatti possiamo prima di tutto trasformare la (3) in modo da farla venire razionale, porvi cioè $\Phi_{ik}(x)$ in luogo di $\sqrt{\Phi_i(x)}\,\sqrt{\Phi_k(x)}$. Allora la (3) diventa, adoperando i coefficienti simbolici:

$$f_x^4 = \frac{1}{12}\sum x_j\, d_j \sum \partial_i\, \partial_k (\alpha\beta\gamma)_i (\alpha\beta\gamma)_k\, a_x b_x c_x$$

$$= \frac{1}{12}\, a_x b_x c_x d_x \sum \partial_i\, \partial_k (\alpha\beta\gamma)_i (\alpha\beta\gamma)_k,$$

dove con $(\alpha\beta\gamma)_i$ si intende quel minore di 3.° ordine del determinante $(\alpha\beta\gamma\partial)$ che corrisponde a ∂_i.

Si ha dunque immediatamente per f_x^4 la formola (3) del § 5.

Dimostriamo ora che per ogni punto della superficie di Riemann si ha sempre:

$$\Phi_{uu}\,\Phi_{vv} = \Phi_{uv}^2.$$

Infatti possiamo scrivere giovandoci delle note identità del calcolo simbolico:

$$(\alpha\beta\gamma v)(\alpha'\beta'\gamma' u)\, a_x b_x c_x a'_x b'_x c'_x = (\alpha\beta\gamma v)(\alpha'\beta'\gamma' u)\, a_x b_x c_x a'_x b'_x c'_x \cdot$$
$$\cdot\,[-3(\alpha\beta\gamma\alpha')(\beta'\gamma' u v) + (\alpha\beta\gamma u)(\alpha'\beta'\gamma' v)].$$

Trasformiamo il primo termine colla formola:

$$(\alpha\beta\gamma v)(\alpha'\beta'\gamma' u) = (\alpha'\beta\gamma v)(\alpha\beta'\gamma' u) + (\alpha\alpha'\gamma v)(\beta\beta'\gamma' u) +$$
$$+ (\alpha\beta\alpha' v)(\gamma\beta'\gamma' u) + (\sigma\beta\gamma\alpha')(v\beta'\gamma' u).$$

Osserviamo che i primi tre termini che si hanno, sono fra loro eguali perchè si ricavano l'uno dall'altro cogli scambi di α, β, γ fra loro. Inoltre sono anche eguali e di segno contrario a quello da cui si è partiti, perchè per es. il primo di essi è:

$$(\alpha'\beta\gamma v)(\alpha\beta'\gamma' u)(\alpha\beta\gamma\alpha')(\beta'\gamma' u v),$$

che collo scambio di α in α' diventa eguale e di segno contrario al termine trasformato. Si ha dunque infine con tale trasformazione solo:

$$-\frac{3}{4}(\alpha\beta\gamma\alpha')^2(\beta'\gamma' u v)^2.$$

Onde infine si ha:

$$(\alpha\beta\gamma u)^2(\alpha'\beta'\gamma' v)^2 = \frac{3}{4}(\alpha\beta\gamma\alpha')^2(\beta'\gamma' u v)^2$$
$$+ (\alpha\beta\gamma u)(\alpha\beta\gamma v)(\alpha'\beta'\gamma' u)(\alpha'\beta'\gamma' v),$$

dove per brevità abbiamo omesso di segnare il fattore simbolico comune $a_x b_x c_x a'_x b'_x c'_x$. Ora sulla superficie di Riemann si ha identicamente:

$$f \equiv (\alpha\beta\gamma\alpha')^2 a_x b_x c_x a'_x = 0,$$

dunque ricordando le formole sopra stabilite si ha esattamente la dimostrazione enunciata.

§ 7. Sull'annullarsi identico delle funzioni ϑ pari.

Per la costruzione delle funzioni σ ci occorre prima di tutto ricordare alcuni teoremi sull'annullarsi identico delle funzioni jacobiane. Supponiamo in primo luogo che gli argomenti v delle funzioni ϑ pari sieno rappresentati dagli integrali *normali* abeliani di 1.ª specie estesi fra i seguenti limiti:

$$\int_y^x - \int_{c'_y}^{x'} - \int_{c''_y}^{x''} - \int_{c'''_y}^{x'''} \tag{1}$$

dove $y\ x\ x'\ x''\ x'''$ sono cinque punti arbitrarii della superficie di Riemann e i punti c_y sono tre punti dipendenti solo dal punto y, e nel seguente modo: si tiri per y una retta arbitraria che tagli C_4 in altri tre punti; allora da questi tre altri punti sono univocamente determinati altri tre $c'\ c''\ c'''$ che insieme ad essi formano i sei punti di contatto di una cubica. Tali tre altri punti sono fissi qualunque sia la trasversale menata per y (§ 5, teor. 12). Così sono fissati i punti c.

Il primo teorema sull'annullarsi delle ϑ pari che vogliamo citare è:

1. Le funzioni ϑ pari costruite per argomenti (1) e considerate come funzioni di x si annullano solo nei tre luoghi $x = x', x'', x'''$.

Se poi $x'\ x''\ x'''$ sono tre punti in linea retta, allora ϑ come funzione di x si annulla identicamente.

Come caso particolare consideriamo l'argomento speciale:

$$\int_y^x \tag{2}$$

Si ha allora:

2. Le funzioni ϑ pari cogli argomenti (2), e considerate come funzioni di x, si annullano solo se $x = c'_y, c''_y, c'''_y$; cioè se $x\ y$ si corrispondono nella corrispondenza (3, 3) sulla C_4 di cui si è parlato al § 5, teor. 12.

Sappiamo che tale corrispondenza non ha *coincidenze* se C_4 non ha punti doppii (§ 5, teor. 13), il che è d'accordo col fatto che le ϑ pari abeliane di genere 3 non possono diventar zero per argomenti zero, cioè se $x = y$. Le ϑ qui considerate si annullano dunque negli stessi casi in cui si annulla l'espressione (2) del § 5.

Consideriamo ora in terzo luogo gli argomenti generali:

$$\int^{x'} + \int^{x''} + \int^{x'''} + \int^{x^{\text{IV}}} \qquad (3)$$

dove i limiti inferiori sieno quattro punti in linea retta. Allora una facile applicazione del teor. 1 ci dà l'altro teorema:

3. Le ϑ pari cogli argomenti (3) si annullano solo quando:

$$\int^{x'} + \int^{x''} + \int^{x'''} + \int^{x^{\text{IV}}} = -\int_{c'_y}^{t'} - \int_{c''_y}^{t''} - \int_{c'''_y}^{y}$$

essendo t', t'' y tre punti arbitrarii e le c determinate al solito modo.

Facendo passare per y la retta *arbitraria* su cui stanno i limiti inferiori del primo membro, e chiamando b' b'' b''' gli altri tre punti d'incontro, si ha la relazione da soddisfarsi:

$$\int_{b'}^{x'} + \int_{b''}^{x''} + \int_{b'''}^{x'''} + \int_{c'''_y}^{x^{\text{IV}}} + \int_{c'_y}^{t'} + \int_{c''_y}^{t''} = 0.$$

Ora per la costruzione dei punti c si ha che per i sei punti b, c passa una cubica di contatto; onde lo stesso dovrà succedere fra i sei punti x e t; cioè la cubica di contatto che passa per tre punti x dovrà passare per il quarto. Trasportata questa proprietà sulla C_6 si ha che la ϑ pari cogli argomenti (3) si annulla solo quando i quattro punti z corrispondenti ai quattro punti x *stanno in un piano*. Si annulla cioè negli stessi casi in cui si annulla il determinante D da noi considerato al § 3, salvo che D si annulla anche se due dei punti x coincidono, ciò che non fa ϑ; perchè per es. se x' coincide con x'' la condizione per l'annullarsi di ϑ sarebbe che la cubica di contatto passante per x'' x''' x^{IV} avesse in x'' con C_4 un contatto di 3.° ordine, ciò che non succede in generale rimanendo arbitrarii i tre punti x'', x''', x^{IV}.

§ 8. Introduzione delle funzioni σ abeliane pari; loro costruzione; loro proprietà.

Si è osservato nel § 7 che le funzioni Jacobiane ϑ costruite o per gli argomenti (2) o per gli argomenti (3) hanno rispett. gli stessi zeri delle espressioni (2) del § 5 o del determinante D del § 3.

Se quindi vogliamo passare ad una costruzione delle funzioni ϑ mediante i punti della superficie di Riemann, è chiaro che prima di tutto dobbiamo prendere come fattori delle ϑ le espressioni analitiche dette.

Tenendo poi presenti le proprietà delle ϑ rispetto alla periodicità, noi possiamo determinare gli altri fattori o divisori che insieme con quelli detti compongono le ϑ.

Non possiamo qui entrare nei dettagli di queste costruzioni; e rimandiamo il lettore al lavoro di Klein (*).

Questi altri fattori di cui si è parlato sono combinazioni delle *forme primitive* Ω, e delle *forme medie* μ (**).

Le prime servono a togliere dalla formola quei tali punti-nulli posseduti da D ma non da ϑ; le seconde servono a dare alla formola completa la stessa periodicità nota delle ϑ.

Per la costruzione delle funzioni Ω e μ si può prendere per fondamento un integrale qualunque di 3.ª specie; in questa maniera si avrebbero propriamente delle funzioni Θ affatto generali; per costruire però le note funzioni ϑ di Jacobi definite mediante la nota serie esponenziale, l'arbitrarietà della scelta di un tale integrale sparisce, e si ha che dobbiamo prendere propriamente quell'integrale normale introdotto da Clebsch e Gordan e da essi chiamato Π (***).

Se prendiamo invece quell'altro speciale integrale *normale* di 3.ª specie di cui abbiamo discorso nelle Mem. precedenti, e che abbiamo chiamato Q (****), allora anzichè avere le ϑ di Jacobi o un'altra funzione Θ qualunque, otteniamo una funzione che chiamiamo σ, e che, unica fra tutte quelle della sua specie, possiede speciali proprietà, da una parte in quanto al comportarsi rispetto alla trasformazione lineare dei periodi, e dell'altra in quanto al com-

(*) Klein, Opera cit., § 13, pag. 40.

(**) Klein, Opera cit., § 4, § 5. Vedi anche Mem. I, § 2—4.

(***) Clebsch und Gordan, *Abelsche Funct.*

(****) Klein, Opera cit., § 26. Mem, I, § 1; Mem. III, § 1. Pick, Math. Ann., Bd. 29.

portarsi rispetto alla trasformazione lineare della curva di 4.° ordine fondamentale; propriamente, riguardo alla seconda trasformazione, è un *covariante trascendcnte* di C_4, e rispetto alla prima trasformazione le funzioni σ pari si scambiano fra loro *semplicemente*, senza cioè l'introduzione di alcun fattore estraneo come fanno al contrario le altre Θ (*).

Ricordando poi che ogni integrale di 3.ª specie si può esprimere mediante Q aggiuntavi un'espressione bilineare negli integrali di 1.ª specie, si ricava, con alcune considerazioni nei cui dettagli non posso entrare, che ogni altra Θ si esprime mediante la σ moltiplicata per un fattore costante e per un fattore esponenziale di 2.° grado negli integrali di 1.ª specie.

Per il caso in cui si prendono per argomenti delle σ gli argomenti (2) del paragrafo precedente, cioè:

$$\int_y^x dw_1, \qquad \int_y^x dw_2, \qquad \int_y^x dw_3,$$

dipendenti solo da *due* punti x, y della superficie di RIEMANN, la σ acquista la forma:

$$\sigma\left(\int_y^x\right) = \frac{[xy]\,\Omega(xy)}{(xy)} \quad (**),$$

dove $[xy]$ è l'espressione (2) del § 5.

Questa σ non è da confondersi colla σ generale che si costruirebbe per gli argomenti (3) del paragrafo precedente, ma è solo di essa un caso particolare.

Però la nostra speciale σ ha colla generale qualche cosa di comune, e l'osservazione che adesso stiamo per fare è fondamentale per tutto quello che diremo in seguito.

Le funzioni σ sono tali funzioni dei *punti* della superficie di RIEMANN che riescono funzioni analitiche monodrome *intere* degli integrali w di 1.ª specie (***). Esse possono dunque svilupparsi in serie secondo le potenze ascendenti delle w; ora i termini di grado nelle w inferiore al 4.°, sia della σ generale che della nostra particolare debbono essere necessariamente comuni. Non ripetiamo qui i dettagli di questa conclusione avendoli già esplicati nella Mem. I (****).

(*) KLEIN, Opera cit., pag. 80-81. Mem. III, § 2.

(**) KLEIN, Opera cit., pag. 54 nota.

(***) BURKHARDT, *Hyperelliptische Funct.* Math. Ann., Bd. 32, § 21.

(****) Mem. I, § 7. FROBENIUS, *Ueber Jacobische Funct. dreier Argumente.* Crelle, Bd. 105.

Riferiamo infine le proprietà fondamentali dello sviluppo in serie delle σ pari secondo le potenze delle w (*):

1. Lo sviluppo è del tipo:

$$\sigma = 1 + [w]_2 + [w]_4 + \cdots$$

2. Ciascuno di questi termini è funzione razionale ed intera dei coefficienti α_{ik}, β_{ik}, γ_{ik}, della rete di quadriche considerata nel § 4.

3. Il termine $[w]_{2\nu}$ è un covariante razionale intero della rete di quadriche, in cui le x sieno sostituite dalle tre w, di grado 2ν nelle w, di grado 8ν nei coefficienti di tale rete, e di grado zero nelle z.

§ 9. Sopra certi combinanti di 8.° grado di una rete di quadriche.

Dal paragrafo precedente risulta che il termine $[w]_2$ cioè il secondo termine dello sviluppo di σ pari deve essere un combinante di 8.° grado nei coefficienti e di 2.° ordine nelle x della rete $a_x \alpha_z^2$ mutandovi le x nelle w. Ricerchiamo dunque in questo paragrafo quanti sono tutti i siffatti *combinanti* fra loro linearmente indipendenti.

Poichè il combinante deve essere di 8.° grado debbo formare tutte le combinazioni del tipo invariantivo con otto coppie di simboli a α rispettivamente fra loro equivalenti, che chiamerò:

$$\begin{matrix} a & a' & b & b' & c & c' & d & d' \\ \alpha & \alpha' & \beta & \beta' & \gamma & \gamma' & \delta & \delta'. \end{matrix}$$

Dovendo il *combinante* essere di 2.° ordine in x, vi dovranno comparire due fattori simbolici scelti fra gli otto $a_x a'_x b_x b'_x c_x c'_x d_x d'_x$. Noi sceglieremo per fissare le idee $a_x a'_x$.

Vi dovranno poi evidentemente essere due determinanti ternarii formati colle otto lettere greche, di cui ciascuna deve essere ripetuta due volte, perchè le lettere greche debbono sempre comparire a seconda potenza.

Inoltre qualunque sia la formazione invariantiva che formiamo possiamo sempre fare in modo che i simboli α α' non siano mai compresi in uno stesso determinante quaternario, ma ognuno dei quattro determinanti contenga o α o α'.

(*) Klein, Opera cit., pag. 81.

Infatti sieno, in una certa combinazione, $\alpha\ \alpha'$ compresi in uno stesso determinante. Allora fra i quattro determinanti ne esisterà certamente uno che non conterrà nè α nè α'. *Consideriamo allora questo determinante insieme* coll'altro, e applichiamovi la nota formola d'identità per determinanti quaternarii, prendendo per *elementi fissi* nel determinante contenente α e α', tutti gli elementi meno α'. Allora abbiamo una serie di prodotti di due determinanti in cui α e α' sono sempre separati. Analogamente si procederebbe se vi fosse anche un altro determinante contenente insieme α e α'. Possiamo dunque effettivamente limitarci a considerare formazioni invariantive tali che in ogni determinante vi sia o α o α'.

Occupiamoci ora degli altri elementi di ciascun determinante. Dobbiamo distribuire le lettere $\beta\ \gamma\ \delta\ \beta'\ \gamma'\ \delta'$, di cui ciascuna deve essere ripetuta due volte, in quattro gruppi ternarii, in modo che due lettere eguali non stieno mai comprese in uno stesso gruppo.

Non ci sono che i seguenti tre casi possibili:

1. I tre elementi di uno dei gruppi stanno tutti in un altro unico gruppo.
2. Ne stanno solo due in un altro gruppo.
3. Ne sta solo uno.

A tali tre casi corrispondono propriamente i tre tipi:

$$\beta\ \gamma\ \delta \mid \beta\ \gamma\ \delta \mid \beta'\ \gamma'\ \delta' \mid \beta'\ \gamma'\ \delta' \mid \tag{1}$$

$$\beta\ \gamma\ \delta \mid \beta\ \gamma\ \delta' \mid \beta'\ \gamma'\ \delta \mid \beta'\ \gamma'\ \delta' \mid \tag{2}$$

$$\beta\ \gamma\ \delta \mid \beta\ \gamma'\ \delta' \mid \beta'\ \gamma\ \delta' \mid \beta'\ \gamma'\ \delta \mid, \tag{3}$$

nel senso che ogni altra combinazione analoga può sempre ridursi ad una di queste collo scambio opportuno di lettere, scambio che finora possiamo supporre effettuato perchè non ancora abbiamo fissati i due determinanti ternarii colle lettere $b\ c\ d\ldots$ Ora è facile vedere che il tipo (1) non può dar luogo ad alcuno dei covarianti richiesti, perchè in esso aggiungendo la parte colle lettere latine b, c, d, b',... si vede che in qualunque modo si raggruppino in *due* parti queste sei lettere, sempre due almeno delle lettere b, c, d per es. b, c, verranno riunite in uno stesso determinante; quindi la formazione invariantiva corrispondente sarà zero, come si vede collo scambio di quelle tali due lettere b, c. Consideriamo il tipo (2).

Noi dobbiamo aggiungere a ciascuno dei quattro gruppi ternarii o un α o un α' e formare così i quattro determinanti quaternarii.

A prescindere dallo scambio di α con α', si vede che non sono possibili che solo le tre combinazioni:

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc|cccc} \alpha & & & & \alpha' & & & & \alpha & & & & \alpha' & & & \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \alpha & \beta & \gamma & \delta' & \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta & \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \\ \alpha & & & & \alpha' & & & & \alpha' & & & & \alpha & & & \end{array}\right|. \tag{4}$$

La prima di tali combinazioni la ridurremo a due termini del tipo (3). Infatti per una nota identità:

$$(\alpha'\beta\gamma\delta')(\alpha'\beta'\gamma'\delta') = -(\alpha'\beta'\gamma\delta')(\gamma'\delta'\beta\alpha') - (\alpha'\gamma'\gamma\delta')(\delta'\beta\alpha'\beta'),$$

e moltiplicando per

$$(\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha\beta'\gamma'\delta),$$

si vede che si formano due combinazioni tali che i tre elementi (a prescindere da α e α') di ciascun determinante stanno distribuiti uno per parte in ciascuno degli altri tre, quindi si formano due combinazioni del tipo (3).

Una cosa analoga si può verificare nella terza delle combinazioni (4). Infatti unendo il secondo e quarto determinante si ha:

$$\begin{aligned}(\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha'\beta'\gamma'\delta)[-(\alpha'\beta\alpha\delta')(\beta'\gamma'\delta'\gamma) &- (\alpha'\beta\beta'\delta)(\gamma'\delta'\gamma\alpha) \\ &- (\alpha'\beta\gamma'\delta')(\delta'\gamma\alpha\beta')],\end{aligned}$$

e si vede analogamente che il secondo e terzo dei termini che così risultano sono del tipo (3), e resta a considerare solo il primo termine, in cui α α' stanno congiunti in uno stesso determinante e quindi noi dovremo fare in modo da separarle. Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}&-(\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha'\beta'\gamma'\delta)(\alpha'\beta\alpha\delta')(\beta'\gamma'\delta'\gamma) = \\ &= (\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha'\beta'\gamma'\delta)[(\beta'\beta\alpha\delta')(\gamma'\delta'\gamma\alpha') + (\gamma'\beta\alpha\delta')(\delta'\gamma\alpha'\beta') \\ &\qquad\qquad + (\gamma\beta\alpha\delta')(\alpha'\beta'\gamma'\delta')],\end{aligned}$$

e si vede che i primi due termini sono pure del tipo (3) mentre l'ultimo è di un tipo analogo alla *seconda* formazione delle (4).

In quanto finalmente al tipo (3) è chiaro che è perfettamente indifferente distribuire ivi le α, α' in un modo piuttosto che in un altro. Giacchè incominciamo per es. a porre α al primo gruppo; se poi la seconda α la pongo una volta al secondo gruppo e un'altra volta al terzo, è chiaro che le due combinazioni che così si hanno si ricavano l'una dall'altra collo scambio di β, γ fra loro e β', γ' fra loro.

Restano dunque da considerare le sole due combinazioni:

$$a_x a'_x \cdot (\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma\delta')(\alpha'\beta'\gamma'\delta)(\alpha'\beta'\gamma'\delta') \qquad (5)$$

$$a_x a'_x \cdot (\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma'\delta')(\alpha'\beta'\gamma\delta')(\alpha'\beta'\gamma'\delta), \qquad (6)$$

dove bisogna ancora aggiungere due determinanti ternarii formati colle sei lettere b, c, d, b', c', d'. È chiaro che tali due determinanti che dovranno moltiplicarsi per (5) dovranno essere formati in modo da non contenere b, c e b', c' rispettivamente unite in uno stesso determinante, altrimenti sarebbe zero l'espressione corrispondente.

Dovendo dunque per (5) b, c e b', c' stare sempre separate, si hanno solo le combinazioni:

$$(b c' d)(b' c d')$$
$$(b b d)(c c' d'),$$

di cui la seconda si ricava dalla prima collo scambio di b' con c', scambio che non altera (5).

Distribuendo invece le d, d' in senso inverso si hanno combinazioni rispettivamente eguali perchè (5) è simmetrico in δ, δ'. Dunque da (5) si ha infine un unico covariante che con opportuno scambio di lettere possiamo scrivere:

$$(A) = a_x a'_x (b c d)(b' c' d')(\alpha\beta\gamma'\delta)(\alpha\beta\gamma'\delta')(\alpha'\beta\gamma\delta)(\alpha'\beta'\gamma\delta').$$

Esaminiamo ora (6).

È facile prima di tutto verificare che (6) resta inalterato per le seguenti sostituzioni:

$$S_1 = (\beta\beta')(\gamma\gamma')(\alpha\alpha')$$
$$S_2 = (\beta\beta')(\delta\delta')(\alpha\alpha')$$
$$S_3 = (\gamma\gamma')(\delta\delta') \qquad = S_1 \cdot S_2$$
$$S_4 = (\gamma'\delta)(\gamma\delta')$$
$$S_5 = (\gamma\delta)(\gamma'\delta').$$

Tutte le combinazioni di determinanti ternarii che possono formarsi colle sei lettere sono dieci e propriamente:

$(b c d)(b' c' d')$	(7)	$(b d c')(c b' d')$	(12)
$(b c b')(d c' d')$	(8)	$(b c' d')(c d b')$	(13)
$(b c c')(b' d d')$	(9)	$(b d b)(c c' d')$	(14)
$(b d d')(b' c c')$	(10)	$(b b' c')(c d d')$	(15)
$(b c d')(b' c' d)$	(11)	$(b b' d')(c d c')$.	(16)

È facile vedere che (11) (12) (13) si riducono a (7) colle sostituzioni rispett. S_1, S_2, S_3 per le quali (6) resta inalterato.

Inoltre (14) (15) (16) si ricavano da (8) colle sostituzioni S_5, S_3, S_4 rispett.

Inoltre (9) e (10) si ricavano l'uno dall'altro colla sostituzione S_5; resta infine a far vedere che (8) (9) possono ridursi l'uno all'altro. Infatti:

$$(b\,c\,c')\,(b'\,d\,d') = (b\,c\,b')\,(d\,d'\,c') - (b\,c\,d)\,(d'\,c'\,b') + (b\,c\,d')\,(c'\,b'\,d),$$

e moltiplicando per (6) si vede che il tipo (9) può ridursi solo ai tipi (7), (8).

In tutto dunque oltre il covariante trovato (1) si hanno solo gli altri due:

$$(B) = a_x a'_x (b\,c\,d)\,(b'\,c'\,d')\,(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)\,(\alpha\,\beta\,\gamma'\,\delta')\,(\alpha'\,\beta'\,\gamma\,\delta')\,(\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta)$$

$$(C) = a_x a'_x (b\,c\,b')\,(d\,c'\,d')\,(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta)\,(\alpha\,\beta\,\gamma'\,\delta')\,(\alpha'\,\beta'\,\gamma\,\delta')\,(\alpha'\,\beta'\,\gamma'\,\delta).$$

I tre covarianti (A) (B) (C) sono fra loro linearmente indipendenti, come risulterà da alcune considerazioni che svilupperemo nei paragrafi seguenti.

§ 10. Introduzione di un connesso (1, 2) nel piano in luogo della rete di quadriche.

Nei paragrafi precedenti noi abbiamo preso per fondamento dello studio delle funzioni σ pari una rete di quadriche; ciò porta a dover considerare dei covarianti di forme quaternarie. Si può però fare una notevole riduzione del problema mediante una semplice idea sviluppata dal Prof. Klein nelle sue lezioni all'Università di Göttingen (semestre d'estate 1889).

Prendiamo per vertice $z_1 = z_2 = z_3 = 0$ del tetraedro fondamentale delle coordinate uno degli otto punti fondamentali della rete di quadriche. Allora è chiaro, dovendo le equazioni di *tutte le quadriche* della rete essere soddisfatte da $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, che dovrà sparire nell'equazione della rete il termine in z_4^2.

Resta quindi un'espressione della forma:

$$2 z_4 \alpha_4 (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3)\, a_x + (\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3)^2\, a_x.$$

Facciamo una trasformazione lineare delle coordinate planari x ponendo:

$$2\,\alpha_1 \alpha_4\, a_x \equiv x'_1$$

$$2\,\alpha_2 \alpha_4\, a_x \equiv x'_2$$

$$2\,\alpha_3 \alpha_4\, a_x \equiv x'_3.$$

Allora l'equazione diventa del seguente tipo (mutando poi ancora le x in u):

$$z_4(u_1z_1+u_2z_2+u_3z_3)+[(u)_1,\ (z)_2],$$

dove col secondo termine si intende un'espressione di 1.° grado in u_1, u_2, u_3, e di 2.° in z_1, z_2, z_3. Simbolicamente possiamo scrivere questa forma canonica della rete di quadriche colla formola:

$$z_4u_z+u_a\alpha_z^2, \tag{1}$$

dove i coefficienti $a_i\ \alpha_j\ \alpha_k$ non hanno lo stesso significato a loro dato avanti.

Le trasformazioni per le quali questa forma *canonica* non si altera cioè resta della stessa natura sono di due specie:

1. Trasformazione lineare delle variabili u e corrispondente trasformazione *contragrediente* delle z, in maniera che u_z non si altera.

2. Mutamento di

$$u_a\alpha_z^2 \quad \text{in} \quad u_a\alpha_z^2-u_z\mu_z,$$

e contemporaneamente di

$$z_4 \quad \text{in} \quad z_4+\mu_z,$$

essendo gli μ coefficienti arbitrarii.

Onde quei tali combinanti della rete di quadriche di cui si è tenuto parola nel § 9 diventano tali covarianti di (1) che restino inalterati per le due trasformazioni (1) e (2) (*).

Interpretando le u come le coordinate di rette nel piano, l'espressione $u_a\alpha_z^2$ rappresenta un *connesso* generale (1, 2); i nostri combinanti saranno invarianti del connesso, ma nello stesso tempo invarianti di (1) dove z_4 (per effetto della trasformazione da cui debbono essere indipendenti, come si è detto, tali invarianti) può considerarsi come una quantità arbitraria. Ciò equivale a dire che i nostri combinanti debbono essere invarianti della cosiddetta *coincidenza principale (Hauptcoincidenz)* del connesso (1, 2) (**).

È facile determinare un'equazione differenziale a cui debbono soddisfare i detti invarianti. Sia J uno di tali invarianti, e facciamo le derivate di esso rispetto ai coefficienti μ, quando suppongo in J poste in luogo dei coefficienti

---

(*) Vedi a questo proposito il Programma di KLEIN all'Università di Erlangen: *Vergleichenden Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Erlangen, 1872.

Una traduzione di questo eccellente lavoro del KLEIN è comparso ora in questo stesso Giornale (trad. GINO FANO) sotto gli auspici del mio carissimo amico prof. SEGRE.

(**) CLEBSCH-LINDEMANN, *Geometrie* (ediz. francese), vol. III, pag. 434 e seg. Vedi anche GODT, *Ueber den Connex erster Ordnung und zweiter Klasse*. Göttingen, 1873.

del connesso, quelli di $u_a \alpha_z^2 - u_z \mu_z = C'$. Tali derivate debbono essere zero perchè eguali a quelle dell'invariante primitivo J (in cui non entrano le μ) rispetto a μ. Possiamo anche dire così: quando in J in luogo dei coefficienti del connesso C introduciamo quelli di C' si ha per primo termine J stesso, e per secondo termine il risultato del processo di Aronhold su J quando in luogo dei coefficienti di C pongo quelli di $u_z \mu_z$. Poichè tutto il primo membro deve essere lo stesso J, così avendosi:

$$J' = J + \sum \frac{\partial J}{\partial C}(u_z \mu_z) + \cdots,$$

dovrà essere:

$$\sum \frac{\partial J}{\partial C}(u_z \mu_z) + \cdots = 0,$$

e quindi essendo μ arbitrario, e poichè i termini seguenti sono di grado maggiore in μ, ciascun termine deve essere zero, dunque:

$$\sum \frac{\partial J}{\partial C}(u_z \mu_z) = \delta J = 0. \tag{2}$$

Tale è l'equazione differenziale a cui debbono soddisfare gli invarianti J.

§ 11. Espressione, come invarianti del connesso, dei principali combinanti della rete di quadriche.

1. In primo luogo troviamo l'espressione della curva di 4.° ordine.

Per far ciò molto semplicemente gioviamoci dell'espressione di Π data al § 4

Si ha allora:

$$f = \Pi = 2 \begin{vmatrix} u_a \alpha_1^2 & u_a \alpha_1 \alpha_2 & u_a \alpha_1 \alpha_3 & u_1 \\ u_b \beta_1 \beta_2 & u_b \beta_2^2 & u_b \beta_2 \beta_3 & u_2 \\ u_c \gamma_1 \gamma_3 & u_c \gamma_2 \gamma_3 & u_c \gamma_3^2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= u_a u_b (\alpha \beta u)^2. \tag{1}$$

2. Passiamo alla rappresentazione delle cubiche di contatto (*). Usiamo

(* È ovvio osservare che poichè ora per noi le coordinate fondamentali sono le u, cioè coordinate di rette, così le antiche *cubiche di contatto* acquistano un significato geometrico diverso rispetto alla curva di quarta *classe* Π. Noi lasceremo però le stesse denominazioni.

la rappresentazione di Φ_{vv} data al § 4. Si ha:

$$\Phi_{vv} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} u_a \alpha_1^2 & u_a \alpha_1 \alpha_2 & u_a \alpha_1 \alpha_3 & u_1 & v_1 \\ u_b \beta_1 \beta_2 & u_b \beta_2^2 & u_b \beta_2 \beta_3 & u_2 & v_2 \\ u_c \gamma_1 \gamma_3 & u_c \gamma_2 \gamma_3 & u_c \gamma_3^2 & u_3 & v_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 & v_4 \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Da questa formola complessiva di tutte le cubiche di contatto che sono in numero triplamente infinito, possiamo ricavare due formole di cui l'una rappresenti un sistema solo doppiamente infinito di cubiche di contatto e l'altra rappresenta un'unica cubica non compresa fra le prime.

Facendo $v_4 = 0$ si ha infatti il sistema di cubiche:

$$\Phi_{vv} = \frac{1}{2} u_a (\alpha\, u\, v)^2. \tag{2}$$

Facciamo invece $v_1 = v_2 = v_3 = 0\; v_4 = 1$ e si ha:

$$\Phi_4 = -\frac{1}{12} u_a u_b u_c (\alpha \beta \gamma)^2. \tag{3}$$

Oltre le cubiche di contatto dobbiamo considerare anche quelle altre cubiche che passano per i dodici punti di contatto di due cubiche dello stesso sistema. Tali cubiche si otterrebbero ponendo nel determinante precedente le v' in luogo delle v fra gli elementi dell'ultima linea orizzontale.

Dalla (2) ricaviamo le tre cubiche di contatto fondamentali corrispondenti ai valori dei parametri:

$$\begin{aligned} v_1,\ \ v_2,\ \ v_3 = 1,\ &0,\ 0 \\ 0,\ &1,\ 0 \\ 0,\ &0,\ 1. \end{aligned}$$

Indicando con $\Phi_1\ \Phi_2\ \Phi_3$ le cubiche corrispondenti si ha:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_1 &= \frac{1}{2} u_a (u_2 \alpha_3)^2 \\ \Phi_2 &= \frac{1}{2} u_a (u_3 \alpha_1)^2 \\ \Phi_3 &= \frac{1}{2} u_a (u_1 \alpha_2)^2. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Indicando con $\Phi_{12}\ \Phi_{13}\ \Phi_{23}\ldots$ le altre cubiche di cui si è parlato sopra, si ha:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi_{12} &= \frac{1}{2}\,u_a(u_2\,\alpha_3)\,(u_3\,\alpha_1)\\
\Phi_{23} &= \frac{1}{2}\,u_a(u_3\,\alpha_1)\,(u_1\,\alpha_2)\\
\Phi_{31} &= \frac{1}{2}\,u_a(u_1\,\alpha_2)\,(u_2\,\alpha_3)\\
\Phi_{14} &= \frac{1}{4}\,u_a\,u_b(u\,\alpha\,\beta)\,(\alpha_2\,\beta_3)\\
\Phi_{24} &= \frac{1}{4}\,u_a\,u_b(u\,\alpha\,\beta)\,(\alpha_3\,\beta_1)\\
\Phi_{34} &= \frac{1}{4}\,u_a\,u_b(u\,\alpha\,\beta)\,(\alpha_1\,\beta_2).
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Colle formole date vogliamo ora verificare in primo luogo $\Phi_i\,\Phi_j = \Phi_{ij}^2$ e poi la formola che dà l'espressione di C_4 mediante le cubiche di contatto.

Riguardo alla verifica della prima formola, tale verifica è sostanzialmente diversa secondochè i o j sono eguali a 4 oppure nessuno dei due è 4. Nel secondo caso la verifica è facile partendo dalla formola identica:

$$\begin{aligned}
[(u_2\,\alpha_3)\,(u_3\,\beta_1) - (u_2\,\beta_3)\,(u_3\,\alpha_1)]^2 &= (u_2\,\alpha_3)^2\,(u_3\,\beta_1)^2 + (u_2\,\beta_3)^2\,(u_3\,\alpha_1)^2\\
&\quad - 2\,(u_2\,\alpha_3)\,(u_3\,\alpha_1)\,(u_2\,\beta_3)\,(u_3\,\beta_1),
\end{aligned}$$

e osservando che:

$$(u_2\,\alpha_3)\,(u_3\,\beta_1) - (u_2\,\beta_3)\,(u_3\,\alpha_1) = u_3\,(u\,\alpha\,\beta),$$

si ha immediatamente moltiplicando per $u_a\,u_b$:

$$u_3^2\,(u\,\alpha\,\beta)^2\,u_a\,u_b = 2\,(\Phi_1\,\Phi_2 - \Phi_{12}^2),$$

ed essendo $(u\,\alpha\,\beta)^2\,u_a\,u_b = 0$ si ha l'assunto.

Verifichiamo invece la formola:

$$\Phi_1\,\Phi_4 = \Phi_{14}^2.$$

Partiamo da:

$$(u_2\,\alpha_3)^2\,(\beta\,\gamma\,\delta)^2\,u_a\,u_b\,u_c\,u_d,$$

e trasformiamo con:

$$(u_2\,\alpha_3)\,(\beta\,\gamma\,\delta) = (\beta_2\,\alpha_3)\,(u\,\gamma\,\delta) + (\gamma_2\,\alpha_3)\,(\beta\,u\,\delta) + (\delta_2\,\alpha_3)\,(\beta\,\gamma\,u).$$

Facendo per un momento astrazione dai fattori lineari simbolici si ha per risultato:

$$3(\beta_2\alpha_3)(u\gamma\delta)(u_2\alpha_3)(\beta\gamma\delta), \qquad (6)$$

il quale colla stessa formola diventa:

$$3(\beta_2\alpha_3)^2(u\gamma\delta)^2 - 6(\beta_2\alpha_3)(\gamma_2\alpha_3)(u\gamma\delta)(u\beta\delta).$$

Il secondo di questi termini colla formola:

$$(\beta_2\alpha_3)(u\gamma\delta) = -(\alpha_2\delta_3)(u\gamma\beta) - (\delta_2\beta_3)(u\gamma\alpha) + (u_2\gamma_3)(\beta\alpha\delta),$$

diventa:

$$+3\left[(\gamma_2\alpha_3)(u\gamma\alpha)(\delta_2\beta_3)(u\beta\delta) - (\gamma_2\alpha_3)(u_2\gamma_3)(u\beta\delta)(\beta\alpha\delta)\right],$$

di cui il secondo termine è eguale e col segno contrario a (6) da cui siamo partiti; dunque si ha infine:

$$(u_2\alpha_3)^2(\beta\gamma\delta)^2 = \frac{3}{2}(\beta_2\alpha_3)^2(u\gamma\delta)^2 - \frac{3}{2}(\gamma_2\alpha_3)(u\gamma\alpha)(\beta_2\delta_3)(u\beta\delta),$$

cioè moltiplicando per i fattori lineari tralasciati,

$$\Phi_1\Phi_4 - \Phi_{14}^2 = -\frac{1}{16}(u\gamma\delta)^2(\beta_2\alpha_3)^2 a_x b_x c_x d_x = 0.$$

È facile infine verificare la formola:

$$\Pi = \sum u_i a_i \alpha_j \alpha_k \sqrt{\Phi_j}\sqrt{\Phi_k} + 2\sqrt{\Phi_4}\sum u_i\sqrt{\Phi_i}.$$

corrispondente alla (3) del § 5.

§ 12. Espressione mediante i coefficienti del connesso dei combinanti di 8.° grado del § 9.

Ricerchiamo, prima di tutto, il tipo che acquistano i covarianti detti quando in luogo dei coefficienti della rete di quadriche pongo i coefficienti di

$$u_a\alpha_z^2 + z_4 u_z \qquad (u,\ z,\ \text{ternarie}).$$

Le modificazioni da apportare ai coefficienti della rete sono:

1. I coefficienti contenenti due indici 4 sono zero (supponiamo la rete espressa sotto la forma $\sum \alpha_{ijk} u_i z_j z_k$ dove gli α sono coefficienti effettivi).

2. I coefficienti contenenti un solo indice 4 sono zero se gli altri due indici non sono fra loro eguali; e se tali due indici sono eguali allora tali coefficienti sono eguali ad 1.

3. Infine i coefficienti non contenenti alcun indice 4 sono gli stessi dei coefficienti di $u_a\ \alpha_z^2$ dove u, z sono ambedue variabili ternarie.

Con queste considerazioni si vede che i combinanti del § 9 che erano di 8.° grado nei coefficienti, restano solo di 4.° grado nei coefficienti del connesso.

Giacchè nello sviluppo dei determinanti quaternarii in ogni termine vi compariranno sempre nel complesso quattro indici 4. Ora se due di tali indici 4 appartengono alla stessa lettera allora tutto il termine va a zero. Se appartengono invece a quattro lettere diverse per es. α, β, γ, δ, allora completando ciascuno di questi simboli colle lettere $a\ \alpha$, $b\ \beta$, ecc. se i due indici della nuova α e di a, o di β, e di b ecc. sono disuguali, il termine va a zero, e se sono eguali i coefficienti $a_i \alpha_i \alpha_4$, $b_j \beta_j \beta_4$, ecc. sono eguali ad 1, quindi tutto il termine che conteneva otto simboli, ne viene a contenere quattro.

Si ricava dunque per risultato che i covarianti di cui si parla restano solo di *quarto* grado nei coefficienti del connesso.

Ricerchiamo dunque tutti i covarianti di 4.° grado e di seconda classe di un connesso (1, 2).

§ 13. Ricerca di tutti i covarianti di 4.° grado e di seconda classe di un connesso (1, 2).

Abbiamo a nostra disposizione da poter combinare *invariantivamente* 14 elementi, cioè:

2	simboli	u
4	»	a, b, c, d
2	»	α
2	»	β
2	»	γ
2	»	δ,

tutti ternarii però i simboli indicati dalle lettere latine a, b, c, d debbono considerarsi come *contragredienti* cogli altri simboli u, α, β, γ, δ; ciò porta che non potranno mai essere riuniti con quelli in uno stesso determinante.

In primo punto fra le formazioni invariantive che andiamo cercando non ce ne possono essere di quelle che contengono *solo* determinanti perchè con 14 elementi non possono formarsi un numero intero di determinanti ternarii.

Vi sia dunque *un solo* fattore lineare che viene ad occupare due elementi; ne restano dodici coi quali possono appunto formarsi quattro determinanti ternarii.

È facile vedere che non possono aversi formazioni con due o tre fattori lineari. Resta solo il caso di *quattro* fattori lineari e quindi *due* determinanti ternarii. Si hanno dunque *due* tipi diversi di formazioni:

1. Un fattore lineare e quattro determinanti.
2. Quattro fattori lineari e due determinanti.

Esaminiamo i primi.

Un fattore lineare non è che di due tipi, cioè o del tipo u_a, o del tipo α_a. Fissato per es. a come indice del fattore lineare, restano le altre tre lettere b, c, d, *contragredienti* a tutte le altre rimanenti, e quindi non possono che riunirsi fra loro in un solo determinante $(b\ c\ d)$. Ora questo determinante può accoppiarsi con un altro di quelli che compariscono nella formazione, e poichè sono due determinanti formati rispett. con elementi contragredienti, così, per una identità simbolica, tale prodotto si scinde in un aggregato di prodotti di fattori lineari. Dal tipo 1 passiamo dunque al 2. Ma anche qui possiamo effettuare una ulteriore riduzione; possiamo cioè sempre supporre che i due simboli u stieno ciascuno in uno dei determinanti. Infatti supposto che uno di essi comparisca in un fattore lineare, allora vi sarà certamente un determinante non contenente u. Si potrà dunque accoppiare il fattore lineare in u col determinante che ne è privo, e mediante una nota identità simbolica, ridursi a termini contenenti u in ciascuno dei due determinanti. Classifichiamo dunque solo i seguenti invarianti corrispondenti a tutti i casi possibili che ci si presentano colle fatte riduzioni:

$$
\mathrm{I.}\quad \left\{\begin{array}{lllll}
(u\alpha\beta)(u\gamma\delta) & \alpha_a & \beta_c & \gamma_b & \delta_d \\
\quad " & \alpha_a & \beta_c & \gamma_d & \delta_b \\
\quad " & \alpha_b & \beta_c & \gamma_d & \delta_a \\
\quad " & \alpha_c & \beta_d & \gamma_a & \delta_b \\
\quad " & \alpha_c & \beta_d & \gamma_b & \delta_a
\end{array}\right.
$$

$$
\mathrm{II.}\quad \left\{\begin{array}{lllll}
(u\delta\beta)(u\delta\gamma) & \alpha_a & \alpha_b & \beta_c & \gamma_d = (1) \\
\quad " & \alpha_a & \alpha_b & \gamma_c & \beta_d = (2) \\
\quad " & \alpha_a & \beta_b & \gamma_c & \alpha_d = (3) \\
\quad " & \alpha_a & \gamma_b & \beta_c & \alpha_d = (4) \\
\quad " & \beta_a & \gamma_b & \alpha_c & \alpha_d = (5) \\
\quad " & \beta_a & \alpha_b & \gamma_c & \alpha_d = (6) \\
\quad " & \beta_a & \alpha_b & \alpha_c & \gamma_d = (7)
\end{array}\right.
$$

$$\text{III.}\quad\left\{\begin{array}{lllll} (u\,\delta\,\gamma)^2 & \alpha_a & \beta_b & \alpha_c & \beta_d = (8) \\ \text{"} & \alpha_a & \alpha_b & \beta_c & \beta_d = (9) \\ \text{"} & \beta_a & \alpha_b & \alpha_c & \beta_d = (10). \end{array}\right.$$

Il caso I corrisponde a quello in cui i due determinanti oltre u non hanno altro simbolo comune; il caso II corrisponde al caso in cui i due determinanti hanno anche un altro simbolo comune, e III quando hanno anche gli altri due simboli comuni.

Noi dimostreremo ora che il gruppo I è inutile a considerarsi.

Infatti applichiamo alla prima formazione del gruppo I l'identità:

$$(u\,\alpha\,\beta)\,\gamma_b = (\alpha\,\beta\,\gamma)\,u_b - \text{ecc.}$$

Si hanno allora tutti termini del gruppo II, a meno del termine:

$$(\alpha\,\beta\,\gamma)\,(u\,\gamma\,\delta)\,\alpha_a\,\beta_c\,u_b\,\delta_d.$$

Applichiamo a questo termine l'identità:

$$(\alpha\,\beta\,\gamma)\,\delta_d = \text{ecc. ecc.}$$

Si hanno allora da esso altri tre termini, di cui i due primi colle altre identità rispett.

$$(\beta\,\gamma\,\delta)\,u_b = \text{ecc.} \qquad (\gamma\,\delta\,\alpha)\,u_b = \cdots,$$

si riducono a termini del gruppo II, e l'ultimo con:

$$(\delta\,\alpha\,\beta)\,u_b = \text{ecc.},$$

dà a sua volta termini del gruppo II più il secondo termine del gruppo I.

In modo perfettamente analogo possiamo vedere che la terza espressione del gruppo I si riduce pure alla seconda, e la quarta si riduce alla quinta, a meno di termini del II gruppo.

È chiaro dunque che se noi dimostreremo che il secondo e quinto termine di I sono ambedue zero, resterà con ciò dimostrato che è inutile considerare tutto il gruppo I.

Ora usiamo la formola:

$$(u\,\alpha\,\beta)\,(u\,\gamma\,\delta) = +\,(u\,\alpha\,\gamma)\,(u\,\beta\,\delta) - (u\,\alpha\,\delta)\,(u\,\beta\,\gamma).$$

Moltiplichiamo il primo e secondo membro per

$$\alpha_a \quad \beta_c \quad \gamma_d \quad \delta_b,$$

che è il fattore simbolico della seconda espressione di I. Poichè questo fattore simbolico resta inalterato per la permutazione circolare dei simboli:

$$\beta \quad \gamma \quad \delta,$$

e quindi corrispondentemente:

$$b \quad c \quad d,$$

troviamo l'effetto di tali permutazioni sul secondo membro della formola precedente. Si vede che con esse il primo termine diventa esattamente il secondo; si ottiene dunque in tutto il doppio del secondo termine; ma questo a sua volta colla stessa permutazione diventa quello da cui siamo partiti, col segno cambiato, dunque l'espressione detta è zero.

Moltiplichiamo invece il primo e secondo membro della stessa formola per

$$\alpha_c \quad \gamma_b \quad \beta_d \quad \delta_a,$$

che resta inalterato per la permutazione circolare dei simboli:

$$\alpha \quad \gamma \quad \beta \quad \delta$$

e corrispondentemente:

$$a \quad c \quad b \quad d.$$

Per tale permutazione il primo termine del secondo membro diventa esattamente il secondo termine ma col segno positivo, dunque tutto il secondo membro va a zero. Si conclude che anche la quinta espressione del gruppo I è zero.

Restano dunque i dieci covarianti di II e III che sono fra loro linearmente indipendenti, come risulterà da alcune considerazioni indirette dei paragrafi seguenti.

§ 14. Covarianti di 4.° grado e seconda classe della *coincidenza principale* (Hauptcoincidenz) del connesso (1, 2).

Come abbiamo sviluppato nel § 10 i covarianti della coincidenza principale del connesso dovranno essere tali combinazioni lineari dei dieci covarianti del paragrafo precedente che soddisfino ad una certa equazione differenziale caratterizzata da un processo di Aronhold pel quale ai coefficienti del connesso si sostituiscono i coefficienti di

$$u_x \, \mu_x,$$

dove μ_x è arbitraria.

Incominciamo col trovare l'effetto del primo membro di tale equazione differenziale su tutti i dieci covarianti del paragrafo precedente.

Esponiamo i dettagli del procedimento solo pel primo di essi, perchè analogamente si procederebbe per tutti gli altri.

Osserviamo che (1) si ricava da

$$C = u_a \alpha_z^2,$$

facendo la polare:

$$u_a \alpha_z \alpha_{z'},$$

e poi mutando z' in b e ponendo:

$$u_1 z_1 = u_2 z_2 = u_3 z_3 = 1$$
$$u_1 z_2 = u_2 z_1 = \cdots = 0,$$

e poi moltiplicando infine per

$$(u\,\delta\,\beta)(a\,\delta\,\gamma)\beta_c \gamma_d.$$

Facciamo quindi lo stesso procedimento non prendendo per punto di partenza C, ma $u_z \mu_z$.

Facendo la polare si ha:

$$\frac{1}{2}(u_z \mu_z + u_{z'} \mu_z),$$

donde:

$$\frac{1}{2}(u_z \mu_b + u_b \mu_z),$$

e finalmente:

$$2(u\,\delta\,\beta)(u\,\delta\,\gamma)\beta_c \gamma_d \mu_b.$$

Con ciò abbiamo applicato ad (1) il processo di Aronhold, tenendo però conto solo della serie di coefficienti a, α che compariscono in (1). Si deve ora successivamente tener conto di tutte le altre serie di coefficienti:

$$b,\ \beta; \qquad c,\ \gamma; \qquad d,\ \delta,$$

e applicare sempre procedimenti analoghi.

Inseriremo di qui a poco i risultati che così otterremo.

Intanto per procedere in seguito più semplicemente introduciamo le notazioni:

$$\begin{cases} (u\gamma\delta)^2 \quad \beta_b \quad \beta_c \quad \mu_d = (\mathrm{I}) \\ \quad\;\; " \qquad\; \beta_c \quad \beta_d \quad \mu_b = (\mathrm{II}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (u\delta\beta)(u\delta\gamma) & \beta_b & \gamma_c & \mu_d = (\mathrm{III}) \\ \quad " & \beta_c & \gamma_b & \mu_d = (\mathrm{IV}) \\ \quad " & \beta_b & \gamma_d & \mu_c = (\mathrm{V}) \\ \quad " & \beta_d & \gamma_b & \mu_c = (\mathrm{VI}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (u\delta\mu)(u\delta\gamma) & \beta_b & \beta_d & \gamma_c = (\mathrm{VII}) \\ \quad " & \beta_b & \beta_c & \gamma_d = (\mathrm{VIII}) \\ \quad " & \beta_c & \beta_d & \gamma_b = (\mathrm{IX}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (u\beta\mu)(u\delta\gamma) & \beta_c & \gamma_b & \delta_d = (\mathrm{X}) \\ \quad " & \beta_c & \gamma_d & \delta_d = (\mathrm{XI}). \end{cases}$$

I risultati che verremo ad ottenere coi procedimenti detti sono tutti combinazioni lineari di questi undici covarianti.

Dimostriamo che (XI) è zero. Infatti permutando circolarmente b, c, d e per conseguenza β, γ, δ, la parte composta di fattori lineari resta inalterata, e l'altra parte diventa:

$$(u\beta\mu)(u\delta\gamma) + (u\gamma\mu)(u\beta\delta) + (u\delta\mu)(u\gamma\beta),$$

che per effetto di una nota identità simbolica, è identicamente zero.

È utile aggiungere inoltre che nella quarta categoria si potrebbero formare anche altre due combinazioni aggiungendo i seguenti fattori lineari.

$$\begin{matrix} \beta_b & \gamma_c & \delta_d \\ \beta_b & \gamma_d & \delta_c. \end{matrix}$$

Ma è facile vedere per lo scambio di γ, c con δ, d che tali combinazioni sono zero.

Dimostriamo infine che (X) si esprime linearmente mediante gli altri nove.

Infatti esso può trasformarsi:

$$(u\delta\gamma)\beta_c\gamma_b\,[\beta\mu\delta)u_d - (\mu\delta u)\beta_d + (\delta u\beta)\mu_d],$$

di cui il secondo e terzo termine sono rispettivamente (IX) e (IV), mentre il primo si trasforma così:

$$\begin{aligned} (u\delta\gamma)\beta_c u_d\,\{(\mu\delta\gamma)\beta_b - (\delta\gamma\beta)\mu_b + (\gamma\beta\mu)\delta_b\} &= \\ = -(u\delta\gamma)\beta_c\beta_b\,[(\delta\gamma u)\mu_d - (\gamma u\mu)\delta_d + (u\mu\delta)\gamma_d]& \\ -(u\delta\gamma)\beta_c\mu_b\,[(\gamma\beta u)\delta_d - (\beta u\delta)\gamma_d + (u\delta\gamma)\beta_d]& \\ -(u\delta\gamma)\beta_c\delta_b\,[(\beta\mu u)\gamma_d - (\mu u\gamma)\beta_d + (u\gamma\beta)\mu_d]&, \end{aligned}$$

onde infine riducendo si ha la formola:

$$(X) = (I) - (II) - (IV) + (V) - (VII) - (VIII) + 2(IX).$$

I risultati che si ottengono operando il primo membro dell'equazione differenziale sui dieci covarianti del § 13 sono dati dalla seguente tabella:

da	(1)	si ha:	$2(VI) + \frac{1}{2}(VIII) + \frac{1}{2}(V) + \frac{1}{2}(I)$
»	(2)	»	$2(V) + \frac{1}{2}(III) + 2(VIII)$
»	(3)	»	$2(III) + 4(VII)$
»	(4)	»	$2(IV) + (I) + (VII) - (X)$
»	(5)	»	$\frac{1}{2}(IV) + (VI) + (IX) + \frac{1}{2}(II)$
»	(6)	»	$\frac{1}{2}(III) + (V) + \frac{1}{2}(VII) + 2(IX) + \frac{1}{2}(X)$
»	(7)	»	$\frac{1}{2}(V) + (VI) + \frac{1}{2}(VIII) + \frac{1}{2}(IV)$
»	(8)	»	$4(I) + 2(VII)$
»	(9)	»	$2(II) + (I) + 2(VIII)$
»	(10)	»	$(I) + (II) + 2(IX).$

Dimostreremo adesso che le espressioni:

$$I,\ II, \dots\ IX,$$

sono tutte fra loro linearmente indipendenti; questo è un punto essenziale per la ricerca che seguirà.

Sia:

$$c_1 \, I + c_2 \, II + \cdots + c_9 \, IX = 0,$$

la supposta relazione lineare esistente fra i nove covarianti; faremo vedere che i coefficienti c non possono che essere tutti zero.

Indichiamo per semplicità con soli *tre* numeri i coefficienti del connesso C; indichiamo cioè col simbolo $(i\ j\ k)$ il coefficiente:

$$a_i \, \alpha_j \, \alpha_k .$$

Facciamo ora le seguenti considerazioni:

1. Troviamo in primo luogo in tutti i nove covarianti I, II,... IX il coefficiente di $u_3^2\,\mu_1$ e propriamente quella parte di tale coefficiente risultante di tali coefficienti del connesso che i *primi indici* siano eguali ad 1.

Si trova che:

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{I}\\ \mathrm{II}\end{matrix}\right\}\ \text{dànno}\quad 2(1\,1\,1)^2(1\,2\,2)-2(1\,1\,1)(1\,1\,2)^2$$

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{III}\\ \mathrm{IV}\\ \mathrm{V}\\ \mathrm{VI}\end{matrix}\right\}\ \text{dànno}\quad (1\,1\,1)^2(1\,2\,2)-(1\,1\,1)(1\,1\,2)^2$$

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{VII}\\ \mathrm{VIII}\\ \mathrm{IX}\end{matrix}\right\}\ \text{dànno}\quad (1\,1\,1)^2(1\,2\,2)-(1\,1\,1)(1\,1\,2)^2.$$

onde fra i coefficienti c dovrebbe sussistere sempre la relazione:

$$2(c_1+c_2)+(c_3+c_4+c_5+c_6)+(c_7+c_8+c_9)=0. \qquad a)$$

Facciamo ora che il connesso diventi:

$$u_p\,\pi_z\,\pi'_z,$$

dove p, π, π' sieno espressioni effettive, non più simboliche. Allora I, II,... VI diventano:

$$-\frac{1}{2}(u\,\pi\,\pi')^2\,\mu_p\,\pi_p\,\pi'_p.$$

D'altra parte VII, VIII, IX diventano:

$$-\frac{1}{2}\left\{(u\,\pi\,\mu)\,(u\,\pi\,\pi')\,\pi'_p+(u\,\pi'\,\mu)\,(u\,\pi'\,\pi)\,\pi_p\right\}\pi_p\,\pi'_p$$

$$=-\frac{1}{2}\left\{(u\,\pi\,\pi')^2\,\mu_p\,\pi_p\,\pi'_p-(u\,\pi\,\pi')\,(\mu\,\pi\,\pi')\,u_p\,\pi_p\,\pi'_p\right\}.$$

Ora $(u\pi\pi')^2\mu_p$ e $(u\pi\pi')(\mu\pi\pi')\,u_p$ sono fra loro linearmente indipendenti, perchè per $\mu=\pi$ va a zero solo la seconda di esse, dunque tenendo in vista i risultati superiori si hanno le seguenti altre relazioni fra le c:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 + c_5 + c_6 + c_7 + c_8 + c_9 = 0 \qquad b)$$

$$c_7 + c_8 + c_9 = 0. \qquad c)$$

Le tre relazioni trovate dànno:

$$\left\{\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0 \\ c_3 + c_4 + c_5 + c_6 &= 0 \\ c_7 + c_8 + c_9 &= 0. \end{aligned}\right.$$

2. Troviamo con quali coefficienti numerici comparisce, nel coefficiente di $u_3^2 \mu_1$ nei diversi covarianti, l'espressione:

$$(1\,1\,1)(2\,2\,2)^2.$$

Si trova che tali coefficienti numerici sono:

per	I,	$+1$
"	II,	0
"	III,	$+1$
"	IV,	$+1$
"	V,	0
"	VI,	0
"	VII,	$+1$
"	VIII,	0
"	IX,	0.

Si ha dunque fra le c l'altra relazione:

$$c_1 + c_3 + c_4 + c_7 = 0. \qquad d)$$

3. Troviamo analogamente con quali coefficienti numerici compariscono nel coefficiente di $u_3^2 \mu_3$ nei vari covarianti, le espressioni:

$$(1\,1\,2)(3\,3\,2)(3\,1\,1),$$

e

$$(3\,2\,1)^2(2\,3\,2).$$

Procedendo quindi in modo analogo al modo tenuto avanti si ricavano le altre due relazioni:

$$-2c_1 - 2c_4 - c_6 = 0 \qquad e)$$

$$2c_3 - c_6 \qquad = 0. \qquad f)$$

Da d) e) f) si ricava:

$$c_7 = 0.$$

Quindi da ora in poi sarà inutile considerare ulteriormente il covariante VII il quale è certamente indipendente da tutti gli altri.

4. In ciascuno dei rimanenti otto covarianti, troviamo il modo con cui compariscono le seguenti espressioni:

$$(3\,3\,3)(3\,1\,1)(1\,2\,2)$$
$$(3\,3\,3)(3\,2\,2)(1\,1\,1)$$
$$(3\,3\,2)^2(1\,1\,1),$$

nel coefficiente di $u_3^2\mu_1$.

Procedendo come avanti, si hanno le relazioni:

$$c_1 + c_8 = 0 \qquad g)$$
$$c_1 \qquad = 0 \qquad h)$$
$$c_3 + c_4 = 0. \qquad k)$$

Queste nuove relazioni unite colle precedenti e fra loro dànno:

$$c_1 = 0 \qquad c_2 = 0 \qquad c_8 = 0 \qquad c_9 = 0$$
$$c_3 + c_4 = 0 \qquad c_5 + c_6 = 0.$$

I soli covarianti che restano dunque a considerare sono III, IV, V, VI, gli altri essendo già risultati certamente indipendenti da tutti i rimanenti.

5. Troviamo finalmente in tali ultimi quattro covarianti il coefficiente di $u_3^2\mu_3$, e propriamente quella parte di tale coefficiente contenente l'espressione:

$$(1\,1\,1)(2\,1\,2)(3\,2\,2).$$

Si ha la relazione:

$$2c_3 - c_5 + c_6 = 0. \qquad i)$$

che unita colle precedenti dà finalmente anche:

$$c_3 = 0 \qquad c_4 = 0 \qquad c_5 = 0 \qquad c_6 = 0.$$

Con ciò resta definitivamente dimostrato che le nove espressioni I, II,... IX sono fra loro linearmente indipendenti.

Ritorniamo ora al nostro problema fondamentale, che era di trovare tali combinazioni lineari dei dieci covarianti del § 13 che soddisfacciano all'equazione differenziale. Moltiplichiamo tali dieci covarianti per $a_1\ a_2 \dots a_{10}$ e sommiamo. Applichiamo a questo aggregato l'equazione differenziale, giovandoci delle formole già stabilite, e poniamo eguali a zero i coefficienti dei diversi covarianti:

$$\mathrm{I},\ \mathrm{II},\ldots\ \mathrm{IX},$$

fra loro linearmente indipendenti, che vengono così a comparire (*).

Si ha il seguente sistema di nove equazioni:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}a_1+\frac{1}{2}a_6+4a_8+a_9+a_{10} &&=0\\
&a_4+\frac{1}{2}a_5-\frac{1}{2}a_6+2a_9+a_{10} &&=0\\
&\frac{1}{2}a_2+2a_3+\frac{1}{2}a_6 &&=0\\
&3a_4+\frac{1}{2}a_5-\frac{1}{2}a_6+\frac{1}{2}a_7 &&=0\\
&\frac{1}{2}a_1+2a_2-a_4+\frac{3}{2}a_6+\frac{1}{2}a_7 &&=0\\
&2a_1+a_5+a_7 &&=0\\
&4a_3+2a_4+2a_8 &&=0\\
&\frac{1}{2}a_1+2a_2+a_4-\frac{1}{2}a_6+\frac{1}{2}a_5+2a_9 &&=0\\
-&2a_4+a_5+3a_6+2a_{10} &&=0.
\end{aligned}$$

Di queste nove equazioni due sono conseguenza delle altre, per modo che questo sistema si riduce all'altro:

$$\left\{\begin{aligned}
a_4 &= -\frac{2}{3}a_3-\frac{1}{6}a_2+\frac{1}{3}a_1\\
a_5 &= -\frac{32}{3}a_3+\frac{4}{3}a_2-\frac{5}{6}a_1\\
a_6 &= -4a_3-a_2\\
a_7 &= \frac{32}{3}a_3-\frac{4}{3}a_2-\frac{1}{3}a_1\\
a_8 &= -\frac{4}{3}a_3+\frac{1}{6}a_2-\frac{1}{3}a_1\\
a_9 &= -\frac{10}{3}a_3-\frac{5}{6}a_2-\frac{1}{3}a_1\\
a_{10} &= \frac{32}{3}a_3+\frac{2}{3}a_2-\frac{7}{6}a_1.
\end{aligned}\right.$$

(*) Si ricordi di sostituire il X colla sua espressione mediante gli altri nove, già stabilita in questo stesso paragrafo.

Esistono dunque evidentemente *al più tre* covarianti soddisfacenti alla nostra equazione differenziale, cioè esistono *al più* tre covarianti della coincidenza principale del connesso. Tali tre covarianti si ottengono scegliendo valori arbitrarii per a_1, a_2, a_3 e ricavando dal sistema di equazioni precedenti i valori degli altri coefficienti numerici. Per es. scegliamo rispett.:

$$\begin{array}{lll} a_3 = 1 & a_2 = 0 & a_1 = 0 \\ a_3 = 0 & a_2 = 1 & a_1 = 0 \\ a_3 = 0 & a_2 = 0 & a_1 = 1. \end{array}$$

Si hanno allora le tre formazioni:

$$(3) - \frac{2}{3}(4) - \frac{32}{3}(5) - 4(6) + \frac{32}{3}(7) - \frac{4}{3}(8) - \frac{10}{3}(9) + \frac{32}{3}(10) = (a)$$

$$(2) - \frac{1}{6}(4) + \frac{4}{3}(5) - (6) - \frac{4}{3}(7) + \frac{1}{6}(8) - \frac{5}{6}(9) + \frac{2}{3}(10) = (b)$$

$$(1) + \frac{1}{3}(4) - \frac{5}{6}(5) \qquad - \frac{1}{3}(7) - \frac{1}{3}(8) - \frac{1}{3}(9) - \frac{7}{6}(10) = (c).$$

Il risultato ottenuto, della esistenza, cioè di tre covarianti della coincidenza principale, coincide col risultato ottenuto al § 9 dove pure si sono trovati *tre* soli combinanti delle rete di quadriche.

I covarianti qui ottenuti (a) (b) (c) non sono naturalmente le riduzioni dirette dei covarianti (A) (B) (C) del § 9, ma debbono essere combinazioni lineari di essi. Finora non possiamo ancora affermare che (a) (b) (c) [rispett. (A) (B) (C)] *sono fra loro linearmente indipendenti;* ciò risulterà da alcuni calcoli che avremo occasione di sviluppare nei paragrafi seguenti, e che ci pare inutile naturalmente di riprodurre qui.

§ 15. Sviluppo in serie di $\sigma(x, y)$ quando x, y si avvicinano indefinitivamente.

Per le ragioni esposte nel § 8 noi possiamo limitarci a considerare la funzione σ sotto la forma ridotta:

$$\sigma(x, y) = \frac{\lfloor xy \rfloor \Omega(xy)}{(xy)},$$

dove $[xy]$ è la nota espressione formata colle curve di contatto, e di cui si è parlato avanti.

Poniamo come abbiamo già fatto nella Mem. I:

$$y = x + \zeta,$$

cioè facciamo avvicinare indefinitivamente i due punti x, y, e troviamo allora lo sviluppo di σ secondo le potenze ascendenti di ζ.

Usando notazioni perfettamente analoghe a quelle adoperate nei § 9 e 10 della Mem. I, e giovandoci dei risultati ivi ottenuti per lo sviluppo di

$$\frac{\Omega(xy)}{(xy)} = \frac{1}{\sqrt{f_3(x) f_3(y)}} e^{\frac{1}{2} H(xy)},$$

dove f_3 è la derivata del primo membro dell'equazione della curva di 4.° ordine rispetto ad x_3 e H è il noto integrale di 3.^{a} specie (*), si ha:

$$\left.\begin{aligned} \sigma = \frac{4}{f_3}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{(f_3 f)}{f_3^2}\zeta - \frac{1}{4}\left(\frac{(f_3 f)}{f_3^{\frac{5}{2}}}, f\right)\frac{1}{f_3^{\frac{1}{2}}}\zeta^2 + \cdots\right] \times \\ \times\left[1 + \frac{1}{16 f_3}\left(\frac{(\varphi f)}{f_3}, f\right)_x \zeta^2 + \cdots\right] \times [xy]. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Resta solo a trovare lo sviluppo di $[xy]$ secondo le potenze di ζ.

Le formole precedenti sussistono quando si sia supposto $h_1 = h_2 = 0$ $h_3 = 1$; quindi anche in $[xy]$ bisogna disporre nello stesso modo delle quantità arbitrarie h.

La espressione di $[xy]$ è allora rispett. secondochè si prende per fondamento o la rete di quadriche o il connesso (1, 2) (§ 5):

$$[xy] = \sum_1^4 \alpha_{3ij}\sqrt{\Phi_i(x)}\sqrt{\Phi_j(y)}$$

ovvero rispett. (2)

$$[xy] = \sum_1^3 \alpha_{3ij}\sqrt{\Phi_i(x)}\sqrt{\Phi_j(y)} + \sqrt{\Phi_3(x)}\sqrt{\Phi_4(y)} + \sqrt{\Phi_3(y)}\sqrt{\Phi_4(x)},$$

dove con α_{3ij} si indicano la prima volta i coefficienti della rete di quadriche, e la seconda volta i coefficienti del connesso.

(*) Mem. I, § 3 e 9.

Sappiamo inoltre che sussistono poi le seguenti formole (§ 5 e § 11):

$$\left.\begin{aligned} f &= \sum_1^4 \alpha_{kij} x_k \sqrt{\Phi_i}\sqrt{\Phi_j} \quad \text{per la rete di quadriche} \\ &\text{ovvero:} \\ f &= \sum_1^3 \alpha_{kij} x_k \sqrt{\Phi_i}\sqrt{\Phi_j} + 2\sqrt{\Phi_4}\sum_1^3 x_k \sqrt{\Phi_k} \quad \text{per il connesso (*)}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

e inoltre per le derivate f_3 di f rispetto ad x_3:

$$\left.\begin{aligned} f_3 &= 4\sum_1^4 \alpha_{3ij}\sqrt{\Phi_i}\sqrt{\Phi_j} \\ f_3 &= 4\left[\sum_1^3 \alpha_{3ij}\sqrt{\Phi_i}\sqrt{\Phi_j} + 2\sqrt{\Phi_3}\sqrt{\Phi_4}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Da queste formole ricaviamo le altre:

$$\left.\begin{aligned} (f_3 f) &= 4\sum_1^4 \alpha_{3ij}\sqrt{\Phi_i}\,\frac{(\Phi_j f)}{\sqrt{\Phi_j}} \\ (f_3 f) &= 4\left[\sum_1^3 \alpha_{3ij}\sqrt{\Phi_i}\,\frac{(\Phi_j f)}{\sqrt{\Phi_j}} + \sqrt{\Phi_4}\,\frac{(\Phi_3 f)}{\sqrt{\Phi_3}} + \sqrt{\Phi_3}\,\frac{(\Phi_4 f)}{\sqrt{\Phi_4}}\right], \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

dove ai simboli $(f_3 f)$, (Φf), ecc., si intende dato lo stesso significato dato loro nella Mem. I (**).

Dalle (5) si ricavano le altre:

$$\left(\frac{(f_3 f)}{f_3},\, f\right) = 4\sum_1^4 \alpha_{3ij}\left[\left(\frac{(\Phi_j f)}{\Phi_j^{\frac{1}{2}} f_3},\, f\right)\Phi_i^{\frac{1}{2}} + \frac{(\Phi_i f)(\Phi_j f)}{2\,\Phi_i^{\frac{1}{2}}\Phi_j^{\frac{1}{2}} f_3}\right]$$

e

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{(f_3 f)}{f_3},\, f\right) &= 4\sum_1^3 \alpha_{3ij}\left[\left(\frac{(\Phi_j f)}{\Phi_j^{\frac{1}{2}} f_3},\, f\right)\Phi_i^{\frac{1}{2}} + \frac{(\Phi_i f)(\Phi_j f)}{2\,\Phi_i^{\frac{1}{2}}\Phi_j^{\frac{1}{2}} f_3}\right] \\ &\quad + 4\left(\frac{(\Phi_3 f)}{\Phi_3^{\frac{1}{2}} f_3},\, f\right)\Phi_4^{\frac{1}{2}} + 4\left(\frac{(\Phi_4 f)}{\Phi_4^{\frac{1}{2}} f_3},\, f\right)\Phi_3^{\frac{1}{2}} + 4\,\frac{(\Phi_3 f)((\Phi_4 f)}{\Phi_3^{\frac{1}{2}}\Phi_4^{\frac{1}{2}} f_3}. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Si noti che in tutte queste formole il segno sommatorio s'intende sempre esteso alle combinazioni *con ripetizione*, e inoltre in ciascuno dei gruppi di

(*) Si noti che in questa formola come nelle analoghe precedenti dovremmo propriamente porre u in luogo di x; ma noi per non generare confusione vi lasciamo le x interpretandole come coordinate u di rette.

(**) Mem. I, § 9.

formole precedenti si intende sempre che la *prima* formola vale pel caso in cui si prende per fondamento la rete di quadriche e la *seconda* pel caso in cui si prende per fondamento il connesso. I coefficienti α delle prime formole non hanno nulla da fare coi coefficienti omonimi delle seconde.

Aggiungiamo ancora la formola (*):

$$\sqrt{\Phi}(y)=\sqrt{\Phi}(x)+\frac{(\Phi f)}{2\Phi^{\frac{1}{2}}f_3}\zeta+\frac{1}{4f_3}\left(\frac{(\Phi f)}{\Phi^{\frac{1}{2}}f_3},\,f\right)\zeta^2+\cdots \tag{7}$$

Stabilite tutte queste formole possiamo passare facilmente allo sviluppo di $[xy]$.

Propriamente si ha il seguente sistema di due formole valevole al solito rispett. per la rete o pel connesso:

$$\left.\begin{array}{l} [xy]=\frac{1}{4}f_3+\frac{1}{8}\frac{(f_3f)}{f_3}\zeta+\frac{1}{4f_3}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{(f_3f)}{f_3},\,f\right)-\frac{1}{2}\sum_1^4\alpha_{3ij}\frac{(\Phi_if)(\Phi_jf)}{\Phi_i^{\frac{1}{2}}\Phi_j^{\frac{1}{2}}f_3}\right]\zeta^2+\cdots \\ \text{ovvero:} \\ [xy]=\frac{1}{4}f_3+\frac{1}{8}\frac{(f_3f)}{f_3}\zeta+\frac{1}{4f_3}\left[\frac{1}{4}\left(\frac{(f_3f)}{f_3},\,f\right)-\frac{1}{2}\sum_1^3\alpha_{3ij}\frac{(\Phi_if)(\Phi_jf)}{\Phi_i^{\frac{1}{2}}\Phi_j^{\frac{1}{2}}f_3}\right. \\ \qquad\qquad\qquad\left.-\frac{(\Phi_3f)(\Phi_4f)}{\Phi_3^{\frac{1}{2}}\Phi_4^{\frac{1}{2}}f_3}\right]\zeta^2+\cdots \end{array}\right\} \tag{8}$$

Sostituendo queste espressioni nella formola (1) si vede che il termine senza alcuna potenza di ζ è esattamente 1; il termine in ζ è zero.

Poniamo inoltre (**):

$$\varphi=\frac{16\psi}{f_3(z)f_3(z')},$$

donde si ha:

$$\frac{1}{16}\left(\frac{(\varphi f)}{f_3},\,f\right)=\frac{((\psi f),\,f)}{f_3^4}+\frac{((f_3f),\,f)}{8f_3^3}.$$

Con facili calcoli si ricava allora il termine in ζ^2 dello sviluppo, cioè:

$$\frac{((\psi f),\,f)}{f_3^4}+\frac{1}{8}\frac{(f_3f)^2}{f_3^4}+\frac{1}{8}\frac{((f_3f),\,f)}{f_3^3}-\frac{1}{2}\sum_1^4\alpha_{3ij}\frac{(\Phi_if)(\Phi_jf)}{\Phi_i^{\frac{1}{2}}\Phi_j^{\frac{1}{2}}f_3^3}, \tag{9}$$

e nel caso del connesso in luogo dell'ultimo termine vi è l'espressione:

$$-\frac{1}{2}\sum_1^3\alpha_{3ij}\frac{(\Phi_if)(\Phi_jf)}{\Phi_i^{\frac{1}{2}}\Phi_j^{\frac{1}{2}}f_3^3}-\frac{(\Phi_3f)(\Phi_4f)}{\Phi_3^{\frac{1}{2}}\Phi_4^{\frac{1}{2}}f_3^3}. \tag{10}$$

(*) Mem. I, § 10.
(**) Vedi Mem. II, § 1.

Ora queste espressioni possono notevolmente semplificarsi. Per ciò fare ci avvarremo di trasformazioni analoghe a quelle operate nel § 1 della Mem. II.

Si ha colle solite notazioni (*):

$$((\psi f),\ f)_x = -\frac{1}{18}(f_3 f)^2 - \frac{3}{2}\, a_x^3 a_3((af),\ f)\cdot f_3 -$$
$$- a_x a_3 (af)(af') f_3 + \frac{2}{3} f_{33} b_x^2 (bf)(bf')$$
$$+ \frac{1}{2} f_{33} b_x^3 ((bf),\ f),$$

dove $a_x^4 = b_x^4 = \cdots = f$ è la curva di 4.° *ordine* o rispett. di 4.ª *classe* (se si prende per fondamento il connesso) espressa simbolicamente.

Ora nel luogo citato della Mem. II abbiamo calcolate le espressioni simboliche di

$$f_3, \qquad (f_3 f), \qquad ((f_3 f),\ f), \qquad (bf)(bf')b_x^2, \qquad ((bf),\ f)b_x^3.$$

Nella (9) raccogliamo quindi i termini col denominatore f_3^4 e riduciamoli allo stesso modo sviluppato nel luogo citato. Si trova che essi termini acquistano per fattore un f_3, e quindi restano solo col denominatore f_3^3. Sono propriamente:

$$+ 5\cdot 8\cdot \frac{(bc)(ad)\, b_x^2 c_x^3 a_x^2 a_3}{f_3^3}.$$

Aggiungiamo a questo termine quelli che son rimasti e che hanno pure il denominatore f_3^3.

Tenendo presenti i risultati ottenuti nella Mem. II (§ 1) la espressione (9) diventa infine semplicemente:

$$\frac{(ab)^2 a_x^2 b_x^2}{f_3^2} + \frac{1}{12}\,\frac{((f_3 f),\ f)}{f_3^3} - \frac{1}{2 f_3^3}\sum_1^4 \alpha_{3ij}\,\frac{(\Phi_i f)(\Phi_j f)}{\Phi_i^{\frac{1}{2}}\Phi_j^{\frac{1}{2}}}, \tag{11}$$

e nel caso del connesso al solito in luogo dell'ultimo termine vi è il termine (10).

Tale è dunque il coefficiente di ζ^2 nello sviluppo (1) di σ.

Noi sappiamo che le σ sono funzioni *intere* degli integrali w di 1.ª specie e si possono sviluppare secondo le potenze ascendenti di essi (§ 8).

Supponiamo dunque determinato tale sviluppo delle σ, e poi gli sviluppi delle w in funzione di ζ.

(*) Mem. II, § 1.

Per tali ultimi sviluppi le formole corrispondenti le abbiamo trovate nel § 10 della Mem. I.

Allora ponendo nel secondo termine di σ, cioè in $[w]_2$ in luogo delle w i primi termini dei loro sviluppi secondo le potenze di ζ, si otterrà esattamente il coefficiente di ζ^2 nello sviluppo di σ secondo le potenze di ζ; e tale coefficiente non verrà a contenere per denominatore che solo la seconda potenza di f_3.

Da ciò si ricava che l'espressione (11) dovrà certamente potersi trasformare in modo che a meno di un denominatore f_3^2, comparisca come una *funzione intera;* quindi prima di tutto quei denominatori $\Phi_i^{\frac{1}{2}}\,\Phi_j^{\frac{1}{2}}$ debbono scomparire, e poi i secondi due termini debbono essere tali che (tenendo sempre in vista che la variabile x si muove sulla superficie di Riemann corrispondente ad $f=0$) sieno divisibili per f_3.

Il teorema del paragrafo seguente risolve la prima quistione.

§ 16. Un teorema sulle cubiche di contatto.

Sia Φ_v una cubica di contatto di parametro v; dico che l'espressione:

$$(f\Phi_v)=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial \Phi_v}{\partial x_3}-\frac{\partial f}{\partial x_3}\frac{\partial \Phi_v}{\partial x_1},$$

considerata per i punti della superficie di Riemann, è divisibile per $\sqrt{\Phi_v}$; cioè, in altri termini, può porsi sotto la forma:

$$(f\Phi_v)=\Phi_{1v}A_{1v}+\Phi_{2v}A_{2v}+\Phi_{3v}A_{3v}+\Phi_{4v}A_{4v}, \tag{1}$$

dove Φ_{iv} è la cubica passante per i 12 punti di contatto di Φ_i e di Φ_v colla f.

Dimostrata tale formola, è chiaro che ne risulta senz'altro la divisibilità del primo membro per $\sqrt{\Phi_v}$, perchè *sulla superficie di* Riemann si ha sempre $\Phi_{iv}=\sqrt{\Phi_i}\sqrt{\Phi_v}$.

Con questo teorema si risponde alla quistione stabilita alla fine del paragrafo precedente, perchè in forza di questo teorema, l'ultimo termine della formola (11) viene a perdere la parte $\sqrt{\Phi_i}\sqrt{\Phi_j}$ che comparisce al denominatore.

Per la dimostrazione di questo teorema ci gioveremo della rappresentazione mediante i coefficienti della rete di quadriche.

Poniamo:

$$f=(\alpha\beta\gamma\delta)^2 a_x b_x c_x d_x$$
$$\Phi_v=(\alpha'\beta'\gamma' v)^2 a'_x b'_x c'_x.$$

Si ha allora:

$$(f\Phi_v) = 12(\alpha\beta\gamma\delta)^2(\alpha'\beta'\gamma'v)^2(a\,a')b_x c_x b'_x c'_x d_x.$$

Usiamo ora la identità:

$$(\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha'\beta'\gamma'v) = -(\beta\gamma\delta v)(\alpha'\beta'\gamma'\alpha) - (\gamma\delta v\alpha)(\alpha'\beta'\gamma'\beta)$$
$$-(\delta v\alpha\beta)(\alpha'\beta'\gamma'\gamma) - (v\alpha\beta\gamma)(\alpha'\beta'\gamma'\delta).$$

Si ha allora semplicemente:

$$(f\Phi_v) = 12(\alpha\beta\gamma\delta)(v\beta\gamma\delta)(\alpha'\beta'\gamma'v)(\alpha'\beta'\gamma'\alpha)(a\,a')b_x c_x b'_x c'_x d_x, \qquad (2)$$

essendo fra loro eguali ed eguali poi addirittura a zero, gli altri tre termini che si sono lasciati, perchè per es.:

$$(\alpha\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma v)(\alpha'\beta'\gamma'v)(\alpha'\beta'\gamma'\delta)(a\,a')b_x c_x b'_x c'_x d_x,$$

è zero, perchè muta di segno scambiando tutte le lettere cogli apici nelle corrispondenti senza apici, e inoltre gli altri termini sono eguali a questo segnato, perchè ad esso si riducono con opportune permutazioni di β, γ, δ, fra loro.

La formola (2) è appunto del tipo (1).

Infatti sapendo che in generale:

$$\Phi_{uv} = (\beta\gamma\delta u)(\beta\gamma\delta v)b_x c_x d_x,$$

si ha:

$$\Phi_{iv} = (\beta_2\gamma_3\delta_4)(v\beta\gamma\delta)b_x c_x d_x,$$

onde si ricava anche che:

$$A_{iv} = 12(\alpha'\beta'\gamma'v)(\alpha'\beta'\gamma'\alpha)(a\,a')\alpha_i b'_x c'_x. \qquad (3)$$

§ 17. Ricerca definitiva del termine $[w]_2$ di σ. Prima specializzazione del connesso.

L'espressione (11) del § 15 trasformata in maniera che venga a tenere per denominatore solo f_3^2, dovrà avere per numeratore una funzione lineare dei tre covarianti (A) (B) (C) trovati al § 9, o rispett. dei tre covarianti (a) (b) (c) trovati al § 14. Con ciò sarebbe immediatamente trovato $[w]_2$.

Però la trasformazione diretta dell'espressione (11) è effettivamente assai più complicata di quanto potrebbe credersi a prima vista.

È perciò che noi per giungere più presto al risultato finale useremo alcuni artifizii di cui esporremo ora i dettagli.

Prendiamo il connesso C sotto la forma speciale:

$$C = 2p u_1 z_2 z_3 + 2q u_2 z_3 z_1 + 2r u_3 z_1 z_2.$$

Allora si ha:

$$\begin{aligned}
f &= -2p^2 u_1^4 - 2q^2 u_2^4 - 2r^2 u_3^4 + 4pq u_1^2 u_2^2 + 4qr u_2^2 u_3^2 + 4rp u_3^2 u_1^2 \\
\Phi_1 &= -p u_1 u_2 u_3 \\
\Phi_2 &= -q u_1 u_2 u_3 \\
\Phi_3 &= -r u_1 u_2 u_3 \\
\Phi_{23} &= \frac{1}{2}(r u_1 u_3^2 - p u_1^3 + q u_1 u_2^2) \\
\Phi_{31} &= \frac{1}{2}(p u_2 u_1^2 - q u_2^3 + r u_2 u_3^2) \\
\Phi_{12} &= \frac{1}{2}(q u_3 u_2^2 - r u_3^3 + p u_3 u_1^2) \\
\Phi_4 &= -pqr u_1 u_2 u_3 \\
\Phi_{14} &= \frac{1}{2}(-p^2 u_1^3 + pq u_1 u_2^2 + pr u_1 u_3^2) = p\Phi_{23} \\
\Phi_{24} &= \frac{1}{2}(-q^2 u_2^3 + qr u_2 u_3^2 + qp u_2 u_1^2) = q\Phi_{31} \\
\Phi_{34} &= \frac{1}{2}(-r^2 u_3^3 + rp u_3 u_1^2 + rq u_3 u_2^2) = r\Phi_{12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\Phi_1 f) &= 8p\,[r^2 u_2 u_3^4 - p^2 u_1^4 u_2 - qr u_2^3 u_3^2 + pq u_1^2 u_2^3] \\
(\Phi_2 f) &= 8q\,[\qquad \text{idem} \qquad] \\
(\Phi_3 f) &= 8r\,[\qquad \text{idem} \qquad] \\
(\Phi_4 f) &= 8pqr\,[\qquad \text{idem} \qquad]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_3 &= 16\Phi_{34} \\
f_1 &= 16\Phi_{14}.
\end{aligned}$$

Ora noi già sappiamo in generale che $(\Phi_i f)$ deve essere divisibile per $\sqrt{\Phi_i}$. Verifichiamo questo nel nostro caso.

È facile verificare che la espressione:

$$r^2 u_3^4 u_2 - p^2 u_1^4 u_2 - qr u_2^3 u_3^2 + pq u_1^2 u_2^3,$$

può porsi sotto ciascuna delle quattro forme:

$$A_1\Phi_{11}+B_1\Phi_{12}+C_1\Phi_{13}+D_1\Phi_{14} \qquad (1)$$

$$A_2\Phi_{21}+B_2\Phi_{22}+C_2\Phi_{23}+D_2\Phi_{24} \qquad (2)$$

$$A_3\Phi_{31}+B_3\Phi_{32}+C_3\Phi_{33}+D_3\Phi_{34} \qquad (3)$$

$$A_4\Phi_{41}+B_4\Phi_{42}+C_4\Phi_{43}+D_4\Phi_{44}. \qquad (4)$$

Propriamente nel nostro caso speciale si ha:

$$A_1=C_1=0$$

$$B_2=D_2=0$$

$$A_3=C_3=0$$

$$B_4=D_4=0.$$

Infatti la detta espressione può scriversi:

$$-2r\,u_2u_3\cdot\frac{1}{2}\left[\ q\,u_3u_2^2-r\,u_3^3+p\,u_3u_1^2\right]$$

$$+2u_1u_2\ \cdot\frac{1}{2}\left[-p^2u_1^3+p\,q\,u_1u_2^2+p\,r\,u_1u_3^2\right],$$

e le due parentesi sono rispettivamente Φ_{12}, Φ_{14}.

Se nella seconda parentesi poniamo in vista il fattore p, resta Φ_2, e si ha quindi la forma (2); ciò fatto se introduciamo nella prima parentesi il fattore r si ha la forma (3); e finalmente introducendo nella prima parentesi il fattore r e lasciando inalterata la seconda si ha (4).

Abbiamo dunque le seguenti formole:

$$\frac{(\Phi_1 f)}{\sqrt{\Phi_1}}=16p\quad\left[-\,r\,u_2u_3\sqrt{\Phi_2}+u_1u_2\sqrt{\Phi_4}\right]$$

$$\frac{(\Phi_2 f)}{\sqrt{\Phi_2}}=16q\quad\left[-\,r\,u_2u_3\sqrt{\Phi_1}+p\,u_1u_2\sqrt{\Phi_3}\right]$$

$$\frac{(\Phi_3 f)}{\sqrt{\Phi_3}}=16r\quad\left[-\,u_2u_3\sqrt{\Phi_4}+p\,u_1u_2\sqrt{\Phi_2}\right]$$

$$\frac{(\Phi_4 f)}{\sqrt{\Phi_4}}=16pqr\left[-\,u_2u_3\sqrt{\Phi_3}+u_1u_2\sqrt{\Phi_1}\right].$$

La espressione (10) del paragrafo precedente (*) si riduce nel nostro caso (in cui fra i coefficienti α_{3ij} ve n'è solo uno differente da zero, cioè r):

$$-r\frac{(\Phi_1 f)}{\sqrt{\Phi_1}}\frac{(\Phi_2 f)}{\sqrt{\Phi_2}}-\frac{(\Phi_3 f)}{\sqrt{\Phi_3}}\frac{(\Phi_4 f)}{\sqrt{\Phi_4}}=$$

$$=-2\cdot 128pqr^2[-r^2u_2^2u_3^5+qru_2^4u_3^3-2pru_1^2u_2^2u_3^3$$
$$+3p^2u_1^4u_2^2u_3-pqu_1^2u_2^4u_3].$$

In tale espressione possiamo porre in vista un fattore f_3.

Per far questo, scriviamola:

$$\begin{aligned}&-32pqr^2u_2^2u_3^2 &&\cdot[16r\Phi_{12}]\\ &-32p^2qru_1^2u_2^2 &&\cdot[16\Phi_{34}]\\ &-16\cdot 64\Phi_{23}pru_2 &&\cdot[-pqru_1u_2u_3],\end{aligned}$$

e ricordando le formole stabilite avanti, e inoltre che:

$$\Phi_4\Phi_{23}=\Phi_{24}\Phi_{34}=\frac{1}{16}\Phi_{24}\cdot f_3,$$

si ha che l'espressione (10) del paragrafo precedente divisa per f_3 è:

$$+32pr[q^2u_2^4-2qru_2^2u_3^2-2pqu_2^2u_1^2]. \tag{5}$$

Calcoliamo ora la espressione:

$$(ab)^2a_x^2b_x^2,$$

della formola (11) del paragrafo precedente, dove però (poichè prendiamo qui per fondamento il connesso) dobbiamo supporre sostituite le x colle u e quindi scriviamo:

$$(ab)^2u_a^2u_b^2, \tag{6}$$

essendo $u_a^4=f$, cioè la curva fondamentale di quarta classe.

Si ha:

$$a_1^2u_a^2=\frac{1}{3}(-6p^2u_1^2+2pqu_2^2+2pru_3^2)$$

$$a_3^2u_a^2=\frac{1}{3}(-6r^2u_3^2+2pru_1^2+2qru_2^2)$$

$$a_1a_3u_a^2=\frac{4}{3}pru_1u_3,$$

(*) S'intende che adesso in tale espressione (10), come anche in seguito nella (11), in luogo delle x supponiamo sostituite le u che sono le variabili che nel caso del connesso tengono il luogo delle x.

ed essendo poi la (6) eguale a

$$2(a_1^2 u_a^2 \cdot b_3^2 u_b^2 - (a_1 a_3 u_a^2)^2),$$

si ha:

$$\left.\begin{aligned} &= -\frac{8}{3} pr(p^2 u_1^4 + r^2 u_3^4 - 2pr u_1^2 u_3^2) \\ &-\frac{16}{9} p^2 q r u_1^2 u_2^2 - \frac{16}{9} r^2 p q u_2^2 u_3^2 + \frac{8}{9} p q^2 r u_2^4. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Calcoliamo ora (f_3, f). Si ha:

$$(f_3 f) = 64\,[p r^3 u_3^4 + p^3 r u_1^4 - p q^2 r u_2^4 - 2p^2 r^2 u_1^2 u_3^2 + 4pqr^2 u_2^2 u_3^2]$$

$$((f_3, f), f) = \frac{\partial (f_3, f)}{\partial u_1} \cdot f_3 -$$

$$- 64\,[4pr^3 u_1 u_3^2 - 4p^2 r^2 u_1^2 u_3 + 8pqr^2 u_1 u_2^2 u_3] \cdot 16p \cdot \Phi_{23}.$$

In questa espressione dobbiamo far comparire per fattore f_3. Nel primo termine c'è già un tale fattore; vi sarà anche nel secondo, se potremo trasformare la parentesi in modo da farle avere per fattore $\sqrt{\Phi_4}$, giacchè allora, poichè esternamente c'è $\sqrt{\Phi_3}$ si forma Φ_{34} che è appunto f_3.

Ora la parentesi può scriversi appunto:

$$(-8pr\Phi_{34} u_1 + 4pqr^2 u_1 u_2^2 u_3) + 8pqr^2 u_1 u_2^2 u_3$$
$$= -8pru_1 \Phi_{34} - 12 r u_2 \Phi_4.$$

Si ha dunque infine:

$$\left.\begin{aligned} \frac{((f_3, f), f)}{f_3} = 64\,[p r^3 u_3^4 + p^3 r u_1^4 - 7pq^2 r u_2^4 - 2p^2 r^2 u_1^2 u_3^2 \\ + 10pqr^2 u_2^2 u_3^2 + 10p^2 q r u_1^2 u_2^2]. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Raccogliendo tutti questi risultati nell'espressione (11) del § 16, e servendosi della relazione $f = 0$ per togliere tutti i termini in u_1^4, u_3^4, $u_1^2 u_3^2$ [e deve appunto accadere che tali termini possano contemporaneamente eliminarsi mediante $f = 0$, altrimenti la (11) detta non sarebbe riducibile ad una espressione lineare dei covarianti (a) (b) (c) del § 14, ciò che invece deve necessariamente accadere per le proprietà fondamentali della funzione σ] si ha quindi infine che la (11) del § 16 a meno di un divisore f_3^2 e ponendovi $u_2 = 1$ (*)

(*) Gli sviluppi del § 15 sono fatti sempre dietro l'ipotesi $u_2 = 1$, come risulta dai § 9 e 10 della Mem. I. Quindi a tutto rigore in questo § 17 avremmo dovuto supporre sin da principio $u_2 = 1$.

diventa:

$$-\frac{64}{9}\,[p^2 q r u_1^2 + p q r^2 u_3^2 + p q^2 r]. \tag{9}$$

Esaminiamo ora che cosa diventano i covarianti (*a*) (*b*) (*c*) del § 14 quando il connesso acquista la forma speciale che gli abbiamo qui data.

Vediamo prima quali dei dieci covarianti (1) (2)... (10) del § 13 diventa zero. È chiaro che quelli che hanno per fattori simbolici α_a, o β_b, ecc., sono senz'altro zero, perchè essi verranno a contenere in ogni termine tali coefficienti del connesso in cui il primo indice è certamente eguale ad uno dei secondi, cioè o al secondo o al terzo; e siffatti coefficienti si sono supposti tutti zero.

Restano quindi solo da considerarsi (5) (7) (10) i quali diventano rispettivamente (per $u_2 = 1$):

$$(5) = -2\,[p u_1^2 + r u_3^2 + q]\,p q r$$
$$(7) = -4\,[\quad \text{idem} \quad]\,p q r$$
$$(10) = -4\,[\quad \text{idem} \quad]\,p q r,$$

onde infine:

$$(a) = -64\,[p u_1^2 + r u_3^2 + q]\,p q r$$
$$(b) = 0$$
$$(c) = \frac{23}{3}\,[p u_1^2 + r u_3^2 + q]\,p q r.$$

Chiamiamo n_a, n_b, n_c i tre coefficienti numerici che moltiplicati per (*a*) (*b*) (*c*), dànno l'espressione a cui è eguale la (11) del § 16, quando vi si faccia astrazione di un denominatore f_3^2. Allora chiaramente dai risultati ottenuti si ha una prima relazione a cui debbono soddisfare tali coefficienti n; propriamente:

$$-64 n_a + \frac{23}{3} n_c = -\frac{64}{9}. \tag{10}$$

§ 18. Seconda specializzazione del connesso (1, 2).

Per trovare ora analogamente altre relazioni fra i coefficienti n introdotti alla fine del paragrafo precedente, supponiamo che il connesso si riduca a

$$C = p' u_1 z_1^2 + q' u_1 z_2^2 + r' u_2 z_3^2.$$

Allora:

$$\begin{aligned} f\ &= 2p'q'u_1^2u_3^2 + 2p'r'u_1u_2^3 + 2q'r'u_1^3u_2 \\ f_3 &= 4p'q'u_1^2u_3 \\ f_1 &= 4p'q'u_1u_3^2 + 2p'r'u_2^3 + 6q'r'u_1^2u_2 \\ f_{11} &= 4p'q'u_3^2 + 12q'r'u_1u_2 \\ f_{13} &= 8p'q'u_1u_3 \\ f_{33} &= 4p'q'u_1^2 \ (*), \end{aligned}$$

onde si ha:

$$(ab)^2u_a^2u_b^2 = \frac{2}{3}[-p'^2q'^2u_1^2u_3^2 + p'q'^2r'u_1^3u_2].$$

Si hanno inoltre le altre formole:

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}r'u_2^3 + \frac{1}{2}q'u_1u_3^2 \qquad \Phi_{23} = -\frac{1}{2}p'u_1u_2u_3$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2}p'u_1u_3^2 + \frac{1}{2}r'u_1^2u_2 \qquad \Phi_{31} = -\frac{1}{2}q'u_1^2u_3$$

$$\Phi_3 = \frac{1}{2}q'u_1^3 + \frac{1}{2}p'u_1u_2^2 \qquad \Phi_{12} = -\frac{1}{2}r'u_1u_2^2$$

$$\Phi_4 = -\frac{1}{2}p'q'r'u_1^2u_2$$

$$\Phi_{14} = \frac{1}{2}q'r'u_1^2u_2; \qquad \Phi_{24} = \frac{1}{2}r'p'u_1u_2^2; \qquad \Phi_{34} = \frac{1}{2}p'q'u_1^2u_3$$

$$\begin{aligned} (\Phi_1 f) &= 2[-p'q'^2u_1^2u_3^3 - p'q'r'u_1u_2^3u_3 - 3q'^2r'u_1^3u_2u_3] \\ (\Phi_2 f) &= 2[-p'q'r'u_1^3u_2u_3 - p'^2r'u_1u_2^3u_3] \\ (\Phi_3 f) &= 2[3p'q'^2u_1^4u_3 + p'^2q'u_1^2u_2^2u_3] = 4[3q'u_1^2 + p'u_2^2]\Phi_{34} \\ (\Phi_4 f) &= -4p'^2q'^2r'u_1^3u_2u_3 = 8p'q'u_1u_3 \cdot \Phi_4. \end{aligned}$$

La espressione (10) del § 16 calcolata con queste formole diventa (a meno di un divisore f_3^2):

$$= 4[3p'q'^2r'u_1^3u_2 + p'^2q'r'u_1u_2^3].$$

(*) Indichiamo con f_{11}, f_{13}, ecc. le derivate seconde di f.

Inoltre:

$$(f_3 f) = 8\,[2p'^2 q'^2 u_1^3 u_3^2 - p'^2 q' r' u_1^2 u_2^3 - 3p' q'^2 r' u_1^4 u_2]$$

$$((f_3 f),\ f) = 16\,[3p'^2 q'^2 u_1 u_3^2 - p'^2 q' r' u_1 u_2^3 - 3p' q'^2 r' u_1^3 u_2]\cdot f_3$$
$$- 64 p'^2 q'^2 u_1^3 u_3\,[2p' q' u_1 u_3^2 + p' r' u_2^3 + 3q' r' u_1^2 u_2].$$

È facile vedere che ciascun termine di questa espressione contiene f_3 per fattore. Dividendo allora per questo fattore e poi sostituendo i risultati ottenuti nella (11) del § 16 e eliminando mediante $f = 0$ i termini con potenze di u_1 e u_3 superiori alla seconda, e ponendo $u_2 = 1$, si ha infine per espressione della (11) detta a meno di un divisore f_3^2:

$$\frac{2}{3} p'^2 q' r' u_1. \tag{1}$$

Esaminiamo ora che cosa diventano i dieci covarianti del § 13.

Facilmente si trovano i seguenti risultati (per $u_2 = 1$):

$$(1) = (2) = (7) = - p'^2 q' r' u_1 + p'^3 q' u_3^2$$
$$(3) = (4) = (5) = (6) = p'^3 q' u_3^2,$$
$$(8) = (9) = (10) = 2p'^3 q' u_3^2,$$

e quindi i tre covarianti (a) (b) (c) avranno i valori:

$$(a) = \frac{25}{3} p'^3 q' u_3^2 - \frac{32}{3} p'^2 q' r' u_1$$

$$(b) = -\frac{1}{6} p'^3 q' u_3^2 + \frac{1}{3} p'^2 q' r' u_1$$

$$(c) = -\frac{7}{2} p'^3 q' u_3^2 - \frac{2}{3} p'^2 q' r' u_1.$$

Fra i coefficienti numerici $n_a\ n_b\ n_c$ abbiamo dunque per effetto di (1), le seguenti altre relazioni:

$$\frac{25}{3} n_a - \frac{1}{6} n_b - \frac{7}{2} n_c = 0 \tag{2}$$

$$-\frac{32}{3} n_a + \frac{1}{3} n_b - \frac{2}{3} n_c = \frac{2}{3}, \tag{3}$$

le quali unite colla (10) del § 17 dànno:

$$n_a = \frac{1}{3^2}$$

$$n_b = \frac{2 \cdot 5^2}{3^2}$$

$$n_c = 0.$$

Possiamo conchiudere che l'espressione (11) del § 16 è identicamente:

$$\frac{1}{f_3^2}\left\{\frac{1}{3^2}(a) + \frac{2 \cdot 5^2}{3^2}(b)\right\}. \tag{4}$$

Ora per passare al secondo termine $[w]_2$ dello sviluppo di σ, bisogna ricordarsi gli sviluppi degli integrali w secondo le potenze di ζ.

Ponendo (vedi Mem. I, § 10):

$$w_i = -4\int_y^x \frac{z_i\, dz_1}{f_3(z)},$$

i primi termini di tali sviluppi sono:

$$w_1 = -\frac{4u_1}{f_3}\zeta + \cdots$$

$$w_2 = -\frac{4}{f_3}\zeta + \cdots$$

$$w_3 = -\frac{4u_3}{f_3}\zeta + \cdots,$$

dove abbiamo sostituite le x colle u che, come abbiamo già avvertito, tengono il luogo delle x quando si prende per fondamento il connesso.

Per trovare quindi $[w]_2$ basta in (4) porre in luogo delle u rispettivamente:

$$-\frac{1}{4}w_1 f_3, \qquad -\frac{1}{4}w_2 f_3, \qquad -\frac{1}{4}w_3 f_3.$$

Si ha allora infine:

$$[w]_2 = \frac{1}{2^4 \cdot 3^2}(a) + \frac{5^2}{2^3 \cdot 3^2}(b), \tag{5}$$

dove nei covarianti (a) (b) biogna supporre poste rispettivamente w_1, w_2, w_3 in luogo delle u.

Non vogliamo mancare di giovarci dei risultati numerici ultimamente ottenuti per ricavarne la dimostrazione di un assunto proposto sin dal § 14, la dimostrazione cioè della indipendenza lineare dei tre covarianti (a) (b) (c) ivi trovati. Se potesse fra tali tre covarianti sussistere una relazione lineare:

$$m_a(a) + m_b(b) + m_c(c) = 0,$$

dovrebbero esservi fra i coefficienti m, per effetto dei risultati dei §§ 17 e 18, le relazioni:

$$-64\, m_a + \frac{23}{3}\, m_c = 0$$

$$\frac{25}{3}\, m_a - \frac{1}{6}\, m_b - \frac{7}{2}\, m_c = 0$$

$$-\frac{32}{3}\, m_a + \frac{1}{3}\, m_b - \frac{2}{3}\, m_c = 0,$$

le quali non possono coesistere.

Con ciò resta anche dimostrata la indipendenza dei tre altri covarianti (A) (B) (C) trovati al § 9.

Napoli, $\frac{\text{Ottobre 1889}}{\text{Gennaio 1890}}$.

Sopra un'equazione a derivate parziali del quarto ordine.

(*Di* Carlo Somigliana, *a Pavia.*)

Diversi problemi di fisica matematica, i quali, quando si considerano corpi omogenei isotropi, conducono alla equazione di Laplace $\Delta_2 V = 0$, o ad altre equazioni affini di ordine superiore, come la $\Delta_2 \Delta_2 V = 0$, quando invece si tratta di corpi omogenei cristallizzati, portano a considerare equazioni più generali, ma che sono ancora lineari, omogenee ed a coefficienti costanti. Si presenta pertanto la questione, se sia possibile estendere a queste equazioni i metodi che si applicano nello studio della equazione di Laplace, metodi così fecondi ed importanti per le considerazioni analitiche, a cui dànno luogo.

Quando le equazioni sono di 2.° ordine, come quella ad es. della temperatura stazionaria nei corpi cristallizzati, si può dire non vi siano difficoltà, poichè queste equazioni possono, in generale, essere ricondotte alla equazione di Laplace con una trasformazione lineare delle variabili indipendenti. Ma la questione è assai meno semplice quando si tratta di equazioni di ordine superiore.

In ciò che segue ho tentato la estensione, sopra accennata, per l'equazione lineare, omogenea del 4.° ordine, a derivate parziali ed a coefficienti costanti, con due variabili indipendenti. Alcune, però, delle considerazioni, di cui mi servo, sono applicabili anche ad equazioni di ordine superiore, o con un numero maggiore di variabili indipendenti, ed in special modo a quelle di ordine pari con due variabili indipendenti.

È nota la relazione che esiste fra la teoria delle forme differenziali quadratiche e quella della equazione di Laplace. Quando si considerano equazioni di ordine superiore si hanno relazioni analoghe colle forme differenziali di ordine uguale a quello delle equazioni e dipendenti da uno stesso numero di variabili. Così, per la equazione che studieremo, le espressioni invariabili delle forme differenziali binarie biquadratiche tengono il posto che i parametri differenziali delle forme quadratiche hanno rispetto alla equazione $\Delta_2 V = 0$.

§ 1.

Si abbia una forma differenziale binaria biquadratica:

$$\varphi(dx_1,\ dx_2) = a_0 dx_1^4 + 4a_1 dx_1^3 dx_2 + 6a_2 dx_1^2 dx_2 + 4a_3 dx_1 dx_2^3 + a_4 dx_2^4$$
$$= \sum_{hklm} a_{hklm}\, dx_h\, dx_k\, dx_l\, dx_m,$$

ove le a sono funzioni delle variabili x. Per quanto si sa dalla teoria delle forme algebriche, la espressione:

$$a = a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2 = a_{1111} a_{1222} - 4a_{1112} a_{1222} + 3a_{1122}^2,$$

sarà un invariante di φ per trasformazioni qualsiasi delle variabili x. Il modulo delle trasformazioni è in questo caso il determinante funzionale delle x rispetto alle nuove variabili.

Poniamo ora:

$$\alpha_{1111} = a_{2222} \quad \alpha_{1112} = -a_{1222} \quad \alpha_{1122} = a_{1122} \quad \alpha_{1222} = -a_{1112} \quad \alpha_{2222} = a_{1111},$$

ritenendo il valore delle α_{hklm} indipendente dall'ordine degli indici, come per le a_{hklm}; e inoltre:

$$c_{hklm} = \frac{\alpha_{hklm}}{a}.$$

Avremo:

$$a = \frac{1}{2} \sum_{hklm} a_{hklm}\, \alpha_{hklm},$$

e se consideriamo, insieme a φ, un'altra forma biquadratica analoga di coefficienti b, essa avrà con φ l'invariante simultaneo assoluto:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{a}(a_0 b_4 - 4a_1 b_3 + 6a_2 b_2 - 4a_3 b_1 + a_4 b_0) \\ &= \sum_{hklm} b_{hklm}\, c_{hklm}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Ciò posto, osserviamo che il differenziale completo dU di una funzione qualsiasi U delle variabili x_1, x_2, può essere considerato come una forma covariante colla φ, e quindi il prodotto dei differenziali di quattro funzioni U, V, W, T come una forma biquadratica $\varphi_1(dx_1,\ dx_2)$ covariante con $\varphi(dx_1,\ dx_2)$. Si ha ora:

$$\varphi_1(dx_1,\ dx_2) = dU dV dW dT = \sum_{hklm} \frac{\partial U}{\partial x_h} \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{\partial W}{\partial x_l} \frac{\partial T}{\partial x_m} dx_h dx_k dx_l dx_m,$$

e se costruiamo l'invariante assoluto (1) simultaneo di φ e di φ_1, otteniamo la espressione invariabile:

$$\Delta_1[U, V, W, T] = \sum_{hklm} c_{hklm} \frac{\partial U}{\partial x_h} \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{\partial W}{\partial x_l} \frac{\partial T}{\partial x_m}, \tag{2}$$

che potremo chiamare, servendoci di una denominazione analoga a quella in uso per le forme differenziali quadratiche, *parametro differenziale di 1.° ordine.*

È chiaro che le funzioni U, V, W, T possono in parte, od anche tutte coincidere fra loro, e si hanno così parametri del 1.° ordine dipendenti da tre, due od una sola funzione che indicheremo rispettivamente con:

$$\Delta_1[U, U, V, W], \qquad \Delta_1[U, U, U, V], \qquad \Delta_1[U, U, U, U].$$

Osserviamo poi che $\Delta_1[U, V, W, T]$ è simmetrico rispetto alle quattro funzioni da cui dipende.

Il parametro $\Delta_1[U, U, U, U]$ sarà da noi indicato, per semplicità di scrittura, anche con $\Delta_1[U]$; e sostituendo i coefficienti a_s ai coefficienti c_{hklm} avremo:

$$\Delta_1[U] = \frac{a_0\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^4 - 4a_1\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^3\frac{\partial U}{\partial x_1} + 6a_2\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\right)^2\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^2 - 4a_3\frac{\partial U}{\partial x_2}\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^3 + a_4\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\right)^4}{a_0 a_4 - 4a_1a_3 + 3a_2^2}.$$

Consideriamo ora le seguenti espressioni differenziali:

$$\varphi_2(dx_1, dx_2) = d^2U\,dV\,dW \qquad \varphi'_2(dx_1, dx_2) = d^2U\,d^2V,$$
$$\varphi_3(dx_1, dx_2) = d^3U\,dV \qquad \varphi_4(dx_1, dx_2) = d^4U$$

ove però i differenziali delle funzioni U, V, di ordine superiore al primo, si intendono presi considerando come nulli i differenziali delle variabili x_1, x_2 di ordine superiore al primo. Avremo:

$$\varphi_2(dx_1, dx_2) = \sum_{hklm} \frac{\partial^2 U}{\partial x_h \partial x_k} \frac{\partial V}{\partial x_l} \frac{\partial W}{\partial x_m} dx_h dx_k dx_l dx_m$$

$$\varphi'_2(dx_1, dx_2) = \sum_{hklm} \frac{\partial^2 U}{\partial x_h \partial x_k} \frac{\partial^2 V}{\partial x_l \partial x_m} dx_h dx_k dx_l dx_m$$

$$\varphi_3(dx_1, dx_2) = \sum_{hklm} \frac{\partial^3 U}{\partial x_l\, \partial x_k \partial x_l} \frac{\partial V}{\partial x_m} dx_h dx_k dx_l dx_m$$

$$\varphi_4(dx_1, dx_2) = \sum_{hklm} \frac{\partial^4 U}{\partial x_h \partial x_k \partial x_l \partial x_m} dx_h dx_k dx_l dx_m,$$

ed è chiaro che queste forme differenziali *per trasformazioni lineari* delle variabili si possono considerare come covarianti di φ. Costruendo l'invariante (1) simultaneo di φ e di ciascuna di queste forme avremo altrettante espressioni invariabili rispetto a φ *per trasformazioni lineari delle variabili.*

Le φ_2, φ'_2 ci dànno le seguenti due espressioni invariabili del 2.° ordine:

$$\Delta_2[U \mid V, W] = \sum_{hklm} c_{hklm} \frac{\partial^2 U}{\partial x_h \partial x_k} \frac{\partial V}{\partial x_l} \frac{\partial W}{\partial x_m} \tag{3}$$

$$\Delta_2[U, V] = \sum_{hklm} c_{hklm} \frac{\partial^2 U}{\partial x_h \partial x_k} \frac{\partial^2 V}{\partial x_l \partial x_m}, \tag{4}$$

la φ_3 ci dà una espressione invariabile del 3.° ordine:

$$\Delta_3[U \mid V] = \sum_{hklm} c_{hklm} \frac{\partial^3 U}{\partial x_h \partial x_k \partial x_l} \frac{\partial V}{\partial x_m}, \tag{5}$$

e la φ_4 una del quarto ordine:

$$\Delta_4[U] = \sum_{hklm} c_{hklm} \frac{\partial^4 U}{\partial x_h \partial x_k \partial x_l \partial x_m}. \tag{6}$$

Come si vede nello scrivere le funzioni, da cui dipendono queste espressioni Δ, abbiamo separato con una virgola quelle che si possono permutare fra loro senza alterare il valore del secondo membro, e con una linea quelle che non sono permutabili fra loro. Porremo infine:

$$\Delta_2[U, V, W] = \Delta_2[U \mid V, W] + \Delta_2[V \mid W, U] + \Delta_2[W \mid U, V] \tag{7}$$

$$\Delta_3[U, V] = \Delta_3[U \mid V] + \Delta_3[V \mid U]. \tag{8}$$

D'ora innanzi noi considereremo queste espressioni Δ, di indice superiore ad uno, unicamente nel caso in cui i coefficienti a_s di φ sono costanti, ed in questo caso le chiameremo *parametri di 2.°, 3.°, 4.° ordine.*

Dalla (2), qualunque siano le a_s, se si prendono per funzioni U, V, W, T le x_1, x_2, otteniamo:

$$\Delta_4[x_1, x_1, x_1, x_1] = \frac{a_4}{a} \quad \Delta_4[x_1, x_1, x_1, x_2] = -\frac{a_3}{a} \quad \Delta_4[x_1, x_1, x_2, x_2] = \frac{a_2}{a}$$

$$\Delta_4[x_1, x_2, x_2, x_2] = -\frac{a_1}{a} \quad \Delta_4[x_2, x_2, x_2, x_2] = \frac{a_0}{a}.$$

Da queste formule, posto:

$$\Delta = \Delta_4[x_1, x_1, x_1, x_1]\,\Delta_4[x_2, x_2, x_2, x_2] -$$

$$- 4\Delta_4[x_1, x_1, x_1, x_2]\,\Delta_4[x_1, x_2, x_2, x_2] + 3\,\overline{\Delta_4[x_1, x_1, x_2, x_2]}^2,$$

abbiamo:

$$\Delta = \frac{1}{a},$$

e quindi la φ si può scrivere:

$$\varphi = \frac{1}{\Delta} \{ \Delta_1 [x_2,\ x_2,\ x_2,\ x_2] dx_1^4 - 4 \Delta_1 [x_1,\ x_2,\ x_2,\ x_2] dx_1^3 dx_2 + \\ + 6 \Delta_1 [x_1,\ x_1,\ x_2,\ x_2] dx_1^2 dx_2^2 - \\ - 4 \Delta_1 [x_1,\ x_1,\ x_1,\ x_2] dx_1 dx_2^3 + \Delta_1 [x_1,\ x_1,\ x_1,\ x_1] dx_2^4 \},$$

ed in questa espressione, a cagione della invariabilità dei parametri differenziali, le x_1, x_2 possono essere supposte funzioni qualsiansi delle variabili indipendenti.

§ 2.

La forma generale di un'equazione a derivate parziali del 4.° ordine, lineare, omogenea ed a coefficienti costanti è:

$$c_0 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^4} + 4 c_1 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^3 \partial x_2} + 6 c_2 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + 4 c_3 \frac{\partial^4 U}{\partial x_1 \partial x_2^3} + c_4 \frac{\partial^4 U}{\partial x_2^4} = 0.$$

Il primo membro di questa equazione può essere considerato come il parametro $\Delta_4 [U]$ relativo alla forma differenziale φ del paragrafo precedente, la quale, espressa in funzione delle costanti c_s, diviene:

$$\varphi = \frac{c_4 dx_1^4 - 4 c_3 dx_1^3 dx_2 + 6 c_2 dx_1^2 dx_2^2 - 4 c_1 dx_1 dx_2^3 + c_0 dx_2^4}{c_0 c_4 - 4 c_1 c_3 + 3 c_2^2}.$$

Ora, per quanto si sa dalla teoria delle forme algebriche, è sempre possibile, mediante una trasformazione lineare delle variabili x_1, x_2 in nuove variabili x, y, ridurre φ alla forma:

$$\varphi = \frac{dx^4 + 6 m dx^2 dy^2 + dy^4}{1 + 3 m^2}, \tag{9}$$

e allora la equazione precedente diverrà:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 6 m \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0, \tag{10}$$

ed il primo membro sarà il parametro $\Delta_4 [U]$ relativo alla forma differenziale (9). Noi considereremo d'ora innanzi la equazione (10), supponendo che la forma φ sia positiva, per la qual cosa basta che la costante m soddisfaccia alla condizione:

$$3 m + 1 > 0.$$

I parametri, che abbiamo definito nel paragrafo precedente, (2), (3), (4), (5), (6), hanno notevole importanza nello studio della equazione (10); essi considerati relativamente alla forma (9) assumono la forma seguente:

$$\Delta_1[U, V, W, T] = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x} + m\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial x}\right) +$$
$$+ \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial T}{\partial y}$$

$$\Delta_2[U \mid V, W] = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x} + m\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y} + 2\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial x}\right\} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\partial V}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial y}$$

$$\Delta_2[U, V] = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + m\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 4\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\partial^2 V}{\partial y}$$

$$\Delta_3[U \mid V] = \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}\frac{\partial V}{\partial x} + 3m\left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y^2}\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3}\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\Delta_4[U] = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 6m\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4}.$$

Per mostrare subito come queste espressioni si presentino naturalmente quando si prende a studiare la equazione proposta, supponiamo che si vogliano sostituire alle variabili x, y due nuove variabili ψ_1, ψ_2 legate alle prime da relazioni qualsivogliano.

Mediante le formule di derivazione delle funzioni composte si trova per la trasformata della equazione (10):

$$\Delta_4[U] = \sum_{hklm}\Delta_1[\psi_h, \psi_k, \psi_l, \psi_m]\frac{\partial^4 U}{\partial\psi_h \partial\psi_k \partial\psi_l \partial\psi_m} + 2\sum_{hkl}\Delta_2[\psi_h, \psi_k, \psi_l]\frac{\partial^3 U}{\partial\psi_h \partial\psi_k \partial\psi_l}$$
$$+ \sum_{hk}\left(3\Delta_2[\psi_h, \psi_k] + 2\Delta_3[\psi_h, \psi_k]\right)\frac{\partial^2 U}{\partial\psi_h \partial\psi_k} + \sum_h \Delta_4[\psi_h]\frac{\partial U}{\partial\psi_h} = 0.$$

e si vede quindi come la trasformazione della equazione in un sistema qualunque di variabili richieda unicamente il calcolo dei parametri Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 delle funzioni, che si vogliono prendere come nuove variabili indipendenti.

Analogamente, se si trasforma uno qualunque dei parametri precedenti nelle coordinate ψ_1, ψ_2, i coefficienti delle derivate delle funzioni arbitrarie

U, V, W, T, rispetto alle nuove variabili, sono sempre i parametri delle nuove variabili rispetto alla forma (9).

Questi parametri si riproducono fra loro anche se nelle formule precedenti, che li definiscono, alle funzioni U, V, W, T si sostituiscono i prodotti di due o più funzioni. Così si trova:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta_4[(UV)] = U\Delta_4[V] + 4\Delta_3[U, V] + 6\Delta_2[U, V] + V\Delta_4[U] \\
&\Delta_3[(UV) \mid W] = V\Delta_3[U \mid W] + 3\Delta_2[U \mid V, W] + 3\Delta_2[V \mid U, W] + \\
&\qquad\qquad + U\Delta_3[V \mid W] \\
&\Delta_2[(UV), W] = V\Delta_2[U, W] + 2\Delta_2[W \mid U, V] + U\Delta_2[V, W],
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

ed altre formule analoghe che è assai facile determinare.

§ 3.

Supponiamo dato un campo C, definito dalla diseguaglianza $\psi(x_1, x_2) > 0$. È noto che si ha (ammesse certe condizioni circa la continuità):

$$\iint\left(\frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{\partial V}{\partial x_1}\right) dx_1\, dx_2 = -\int (U dx_1 + V dx_2), \qquad (12)$$

ove il primo integrale è esteso al campo C, ed il secondo al contorno $\psi = 0$, percorso nella direzione che ordinariamente si considera come positiva, quella cioè per la quale il campo rimane a sinistra.

Supponiamo che la forma φ del § 1 sia sempre positiva, almeno in un certo campo, che comprende C, e nel quale i coefficienti a_s sono funzioni monodrome, finite e continue delle x, y. Introduciamo una variabile s mediante la equazione:

$$ds^4 = \varphi = \sum_{hklm} a_{hklm}\, dx_h\, dx_k\, dx_l\, dx_m. \qquad (13)$$

È chiaro che, fissato un arco di curva finito nel piano delle variabili x_1, x_2, la s risulterà determinata, quando si prenda:

$$s = \int_{(x_1^0 x_2^0)}^{(x_1 x_2)} \sqrt[4]{\sum_{hklm} a_{hklm}\, dx_h\, dx_k\, dx_l\, dx_m} \qquad (14)$$

e la integrazione si intenda estesa all'arco dato, di cui i punti $(x_1^0 x_2^0)$ $(x_1 x_2)$ siano gli estremi.

È facile vedere che le formule che ordinariamente si deducono dalla (12) prendendo per variabile di integrazione nel secondo membro l'arco del contorno, si possono stabilire anche ritenendo che gli elementi di arco del contorno e della normale siano misurati mediante la (13).

Difatti gli incrementi dx_1, dx_2 lungo il contorno soddisfanno alla relazione:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}dx_2=0,$$

e se consideriamo x_1, x_2 come funzioni della s, data dalla (14), intendendo che $(x_1^0 x_2^0)$ sia un punto qualsiasi del contorno, potremo porre:

$$dx_1=h\frac{\partial\psi}{\partial x_2}ds \qquad dx_2=-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}ds.$$

La (13) ci dà allora:

$$\frac{1}{h^4}=a\Delta_1[\psi,\ \psi,\ \psi,\ \psi],$$

e quindi avremo:

$$dx_1=\frac{ds}{\sqrt[4]{a\Delta_1[\psi]}}\frac{\partial\psi}{\partial x_2} \qquad dx_2=-\frac{ds}{\sqrt[4]{\Delta_1[\psi]}}\frac{\partial\psi}{\partial x_1}.$$

Poniamo ora:

$$d\sigma=\sqrt[4]{a}\,dx_1\,dx_2,$$

e la (12) diverrà:

$$\iint\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}-\frac{\partial V}{\partial x_1}\right)\frac{d\sigma}{\sqrt[4]{a}}=-\int\left(U\frac{\partial\psi}{\partial x_2}-V\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\right)\frac{ds}{\sqrt[4]{a\Delta_1[\psi]}}. \tag{15}$$

Supponiamo ora che le linee definite dalla equazione:

$$\chi(x_1,\ x_2)=\text{cost.},$$

incontrino ortogonalmente il contorno $\psi=0$. Indicando con δx_1, δx_2 gli incrementi delle coordinate lungo un elemento di linea $\chi=\text{cost.}$, avremo:

$$\frac{\partial\chi}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial\chi}{\partial x_2}\delta x_2=0,$$

e potremo porre pei punti del contorno:

$$dx_1=\tau\delta x_2 \qquad dx_2=-\tau\delta x_1,$$

poichè, per ipotesi, $dx_1\delta x_1+dx_2\delta x_2=0$. Sostituendo questi valori nella (13) ed indicando con δn l'elemento di normale, abbiamo:

$$ds^4=\tau^4\delta n,$$

quindi $\tau = \frac{ds}{\delta n}$, e sostituendo nelle relazioni precedenti, avremo:

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{\delta x_2}{\delta n} \qquad \frac{dx_2}{ds} = -\frac{\delta x_1}{\delta n}.$$

Queste formule sono analoghe a quelle che dànno le note relazioni fra i coseni di direzione della tangente e della normale al contorno. Fissato il senso, in cui questo deve essere percorso, restano determinati i segni di dx_1, dx_2, e le formule precedenti determinano quelli di δx_1, δx_2, intendendo che ds, δn debbano sempre prendersi come positivi.

La (15) può quindi essere scritta nella forma seguente:

$$\iint \left(\frac{\partial U}{\partial x_2} - \frac{\partial V}{\partial x_1}\right)\frac{d\sigma}{\sqrt[4]{a}} = -\int \left(U\frac{\delta x_2}{\delta n} - V\frac{\delta x_1}{\delta n}\right)ds.$$

Faremo un'applicazione di queste formule di trasformazione di integrali, trovando, mediante di esse, l'espressione in coordinate generali del parametro $\Delta_2[U, V, W]$.

Poniamo:

$$U_r = \frac{\partial \Delta_1[U, V, W, T]}{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial x_r}\right)} = \sum_{hkl} c_{hklr} \frac{\partial V}{\partial x_h}\frac{\partial W}{\partial x_k}\frac{\partial T}{\partial x_l},$$

e osserviamo che la (15) equivale alla seguente:

$$\iint \frac{\partial U}{\partial x_r}\frac{d\sigma}{\sqrt[4]{a}} = -\int U \frac{\partial \psi}{\partial x_r}\frac{ds}{\sqrt[4]{a\,\Delta_1[\psi]}} \qquad (r = 1,\ 2). \tag{16}$$

Mutando in questa U in $U_r U\sqrt[4]{a}$, e sommando rispetto ad r troviamo:

$$\iint \Delta_1[U, V, W, T]\,d\sigma + \int \frac{U\Delta_1[\psi, V, W, T]}{\sqrt[4]{\Delta_1[\psi]}}\,ds = \iint U\sum_r \frac{\partial}{\partial x_r}(U_r\sqrt[4]{a})\frac{d\sigma}{\sqrt[4]{a}}.$$

Di qui, osservando che le espressioni che compaiono sotto i segni di integrazione del primo membro sono invariabili, per trasformazioni quali si vogliano delle variabili indipendenti, rispetto alla forma biquadratica ds^4, concludiamo (*) che anche:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a}}\sum_r \frac{\partial}{\partial x_r}(U_r\sqrt[4]{a}),$$

(*) Di un ragionamento analogo si è servito il prof. Padova per determinare i parametri delle forme differenziali quadratiche nella sua Memoria: *Sulle espressioni invariabili.*

sarà invariabile. Noi possiamo, senza ambiguità, indicare questa espressione con $\Delta_2[V, W, T]$, poichè, quando le a_s sono costanti, si riduce appunto a quella che abbiamo indicato con questa notazione (7), e ne rappresenta quindi la trasformata in un sistema qualunque di variabili.

A cagione della simmetria di $\Delta_1[U, V, W, T]$, rispetto alle funzioni da cui dipende, avremo poi:

$$\begin{aligned}\iint \Delta_1[U, V, W, T]\,d\sigma &= -\int U \frac{\Delta_1[\psi, V, W, T]}{\sqrt[4]{a\Delta_1[\psi]}}\,ds - \iint U\Delta_2[V, W, T]\,d\sigma \\ &= -\int V \frac{\Delta_1[\psi, W, T, U]}{\sqrt[4]{a\Delta_1[\psi]}}\,ds - \iint V\Delta_2[W, T, U]\,d\sigma \\ &= \cdots\cdots\cdots\end{aligned}$$

Uguagliando fra loro due qualunque dei secondi membri si ottiene una relazione, che può considerarsi come un'estensione del teorema di Green pel piano.

§ 4.

Supposta soddisfatta la condizione $3m + 1 > 0$, la funzione:

$$x^4 + 6mx^2y^2 + y^4$$

è sempre positiva, e le curve:

$$\varphi(x, y) = x^4 + 6mx^2y^2 + y^4 = \text{cost.}$$

nel piano delle variabili x, y, assunte come coordinate cartesiane di un punto, sono curve chiuse composte di un sol ramo simmetrico rispetto agli assi coordinati, che gira attorno all'origine.

Introduciamo ora due nuove variabili ρ, ω ponendo:

$$\rho = \sqrt[4]{x^4 + 6mx^2y^2 + y^4} \qquad \omega = \int_{(x_0 y_0)}^{(x y)} \sqrt[4]{dx^4 + 6m\,dx^2dy^2 + dy^4},$$

e intendendo che la integrazione debba eseguirsi lungo la curva $\varphi(x, y) = 1$. Chiamando λ, μ le coordinate x, y di un punto qualunque di questa curva, e ponendo $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, avremo:

$$\omega = \int_{(1,0)}^{(\lambda,\mu)} \sqrt[4]{d\lambda^4 + 6m\,d\lambda^2 d\mu^2 + d\mu^4},$$

ed i differenziali $d\lambda$, $d\mu$, posto $\overline{\varphi} = \varphi(\lambda, \mu)$, soddisferanno alla relazione:

$$\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \lambda} d\lambda + \frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \mu} d\mu = 0.$$

La ω sarà una variabile avente un valore determinato, finito e reale, quando si percorre la curva $\overline{\varphi} = 1$ in una direzione determinata a partire dal punto $(\lambda = 1, \mu = 0)$, per es. nella direzione di μ crescente, e che aumenta di una costante per ogni giro percorso sulla curva.

Eliminando successivamente $d\mu$ e $d\lambda$ dalla espressione di ω, troviamo:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \int_\lambda^1 \frac{d\lambda}{\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \mu}} \sqrt[4]{\left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \lambda}\right)^4 + 6m\left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \lambda}\right)^2\left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \mu}\right)^4}\,. \\ \omega &= \int_0^\mu \frac{d\mu}{\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \lambda}} \sqrt[4]{\left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \lambda}\right)^4 + 6m\left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \lambda}\right)^2\left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \mu}\right)^4}. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Se introduciamo due variabili u, v definite mediante le equazioni:

$$\left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \mu}\right)^4 u^4 = \left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \lambda}\right)^4 + 6m\left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \lambda}\right)^2\left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \mu}\right)^4$$

$$\left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \lambda}\right)^4 v^4 = \left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \lambda}\right)^4 + 6m\left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \lambda}\right)^2\left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\varphi}}{\partial \mu}\right)^4.$$

come funzioni di λ, μ, noi potremo fra queste equazioni e la $\overline{\varphi} = 1$ eliminare successivamente μ e λ ed otterremo due relazioni algebriche razionali fra u, λ e fra v, μ:

$$F_1(u, \lambda) = 0 \qquad F_2(v, \mu) = 0,$$

e avremo allora ω in funzione di λ oppure di μ sotto la forma nota di un integrale di un differenziale algebrico:

$$\omega = \int_\lambda^1 u\, d\lambda \qquad \omega = \int_0^\mu v\, d\mu.$$

le u e v essendo definite in funzione di λ e μ rispettivamente dalle due relazioni precedenti.

Reciprocamente noi possiamo considerare λ e μ come funzioni di ω; esse risulteranno le funzioni inverse degli integrali precedenti e soddisferanno alla relazione:

$$\lambda^4 + 6m\lambda^2\mu^2 + \mu^4 = 1. \qquad (18)$$

Noi riterremo i segni di λ, μ determinati dalla condizione che λ, μ rappresentino le coordinate dei punti della curva $\bar{\varphi} = 1$.

Dalle (17) avremo per le derivate di λ, μ rispetto ad ω le formule:

$$\frac{d\lambda}{d\omega} = -\frac{\mu}{\sqrt[4]{Q(\lambda, \mu)}}(3m\lambda^2 + \mu^2) \qquad \frac{d\mu}{d\omega} = \frac{\lambda}{\sqrt[4]{Q(\lambda, \mu)}}(\lambda^2 + 3m\mu^2), \tag{19}$$

dove:

$$Q(\lambda, \mu) = (\lambda^2 + 3m\mu^2)^4\lambda^4 + 6m(\lambda^2 + 3m\mu^2)(3m\lambda^2 + \mu^2)\lambda^2\mu^2 + (3m\lambda^2 + \mu^2)^4\mu^4.$$

Poniamo ora $\nu = \frac{\mu}{\lambda}$; avremo:

$$\frac{d\nu}{d\omega} = \frac{1}{\lambda^2\sqrt[4]{Q(\lambda, \mu)}},$$

e possiamo ridurre il secondo membro ad essere una funzione della sola ν, moltiplicandolo per $(\lambda^4 + 6m\lambda^2\mu^2 + \mu^4)^{\frac{5}{4}}$, quantità che per la (18) è uguale ad 1. Si trova così:

$$\frac{d\nu}{d\omega} = \frac{\{\varphi(1, \nu)\}^{\frac{5}{4}}}{\{Q(1, \nu)\}^{\frac{1}{4}}}. \tag{20}$$

Questa relazione non dipende che da ν ed ω, e potrebbe servire a trovare uno sviluppo per serie della ω in funzione di ν.

Dalla (18) poi ricaviamo:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt[4]{\varphi(1, \nu)}} \qquad \mu = \frac{\nu}{\sqrt[4]{\varphi(1, \nu)}}.$$

Chiameremo Ω il valore di ω dopo percorso un intero giro sulla curva $\varphi = 1$; le funzioni λ, μ avranno il periodo Ω, e per ogni punto del piano $x\ y$ sarà determinato un valore di ρ ed un valore di ω all'infuori di multipli interi di Ω. Noi possiamo quindi sostituire alle variabili x, y le ρ, ω ponendo:

$$x = \rho\lambda(\omega) \qquad y = \rho\mu(\omega).$$

Avremo allora $\nu = \frac{y}{x}$, e quindi ω, a cagione della (20) risulterà una funzione del rapporto $\frac{y}{x}$. Le linee $\rho = \text{cost.}$, $\omega = \text{cost.}$ saranno rispettivamente le curve $\varphi(x, y) = \text{cost.}$ ed il fascio di raggi, che ha il centro nell'origine.

Le variabili ρ, ω riducono ds^4 ad una forma che ha qualche analogia con quella, a cui le coordinate polari riducono l'elemento lineare ordinario del piano. Si ha infatti, indicando con $\lambda'(\omega)$ $\mu'(\omega)$ le derivate di $\lambda(\omega)$, $\mu(\omega)$,

$$dx = \lambda d\rho + \rho\lambda'(\omega)d\omega \qquad dy = \mu d\rho + \rho\mu'(\omega)d\omega,$$

e quindi, osservando la (18) e la equazione che da essa si deduce derivando rispetto ad ω, si trova:

$$ds^4 = d\rho^4 + 6\rho^2 H(\omega)d\rho^2 d\omega^2 + 4\rho^3 K(\omega)d\rho\, d\omega^3 + \rho^4 d\omega^4,$$

dove:

$$H(\omega) = \lambda^2\lambda'^2 + m(\lambda^2\mu'^2 + 4\lambda\mu\lambda'\mu' + \lambda'^2\mu^2) + \mu^2\mu'^2$$

$$K(\omega) = \lambda\lambda'^3 + 2m\lambda'\mu'(\lambda\mu' + \lambda'\mu) + \mu\mu'^3.$$

Vediamo quindi che la espressione di ds^4 risulta ordinata secondo le potenze di ρ, e che è nullo il coefficiente della prima potenza. Gli elementi ds corrispondenti alle linee $\rho =$ cost. $\omega =$ cost. sono rispettivamente $d\rho$ e $\rho d\omega$. Di proprietà analoghe gode l'elemento lineare del piano in coordinate polari.

Per l'invariante a della forma precedente abbiamo:

$$a = \rho^4(1 + 3H^2(\omega)),$$

e quindi, per quanto si è stabilito al § 2, avremo:

$$d\sigma = \rho d\rho d\omega \sqrt[4]{1 + 3H^2(\omega)}.$$

Finalmente per le formule trovate alla fine del § 1, si ha:

$$\Delta_1[\rho,\ \rho,\ \rho,\ \rho] = \frac{1}{1 + 3H^2(\omega)} \qquad \Delta_1[\rho,\ \rho,\ \rho,\ \omega] = \frac{K(\omega)}{\rho(1 + 3H^2(\omega))}$$

$$\Delta_1[\rho,\ \rho,\ \omega,\ \omega] = \frac{H(\omega)}{\rho^2(1 + 3H^2(\omega))}$$

$$\Delta_1[\rho,\ \omega,\ \omega,\ \omega] = 0 \qquad \Delta_1[\omega,\ \omega,\ \omega,\ \omega] = \frac{1}{\rho^4(1 + 3H^2(\omega))}.$$

Alla condizione della ortogonalità delle coordinate polari, nel nostro caso, corrisponde la condizione $\Delta_1[\rho,\ \omega,\ \omega,\ \omega] = 0$.

§ 5.

Sia U una funzione monodroma, finita e continua insieme alle sue derivate fino a quelle del 4.° ordine, e che soddisfaccia in un certo campo $\psi(x,\ y) > 0$ alla equazione:

$$\Delta_4[U] = \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 6m\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0.$$

Chiameremo una tal funzione un *integrale regolare* di questa equazione. Ci proponiamo ora di trovare alcune condizioni che, soddisfatte al contorno, sono sufficienti a determinare U in tutto il campo.

Mediante la formula (16), quando si prende per campo di integrazione quello in cui è data la funzione U, si possono ottenere le seguenti:

$$\iint \Delta_2[U, U]d\sigma = -\int \frac{\Delta_2[U \mid \psi, U]}{\sqrt[4]{\Delta_1[\psi]}}ds - \iint \Delta_3[U \mid U]d\sigma$$

$$-\iint \Delta_3[U \mid U]d\sigma = \int U\frac{\Delta_3[U \mid \psi]}{\sqrt[4]{\Delta_1[\psi]}}ds - \int U\Delta_4[U]d\sigma.$$

Quindi, se nel campo $\psi > 0$ si ha $\Delta_4[U] = 0$, sommando otteniamo:

$$\iint \Delta_2[U, U]d\sigma = -\int \{\Delta_2[U \mid \psi, U] - U\Delta_3[U \mid \psi]\}\frac{ds}{\sqrt[4]{\Delta_1[\psi]}}. \tag{21}$$

Osserviamo ora che, posto:

$$\nabla_2[U, U] = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2 + 6m\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right)^2,$$

si ha:

$$\Delta_2[U, U] = \nabla_2[U, U] - 4m\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2\right),$$

e inoltre:

$$\iint\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2\right)d\sigma =$$

$$-\frac{1}{2}\int\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)\frac{ds}{\sqrt[4]{\Delta_1[\psi]}},$$

quindi la (21) diviene:

$$\iint \nabla_2[U, U]d\sigma = -\int\{\nabla_2[U \mid \psi, U] - U\Delta_3[U \mid \psi]\}\frac{ds}{\sqrt[4]{\Delta_1[\psi]}}, \tag{22}$$

ove si è posto:

$$\nabla_2[U \mid \psi, U] = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + 3m\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) +$$
$$+ \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Ora, per l'ipotesi fatta circa il valore di m, la espressione $\nabla_2[U, U]$ è sempre positiva, e non può annullarsi se non sono contemporaneamente zero le due derivate del secondo ordine, con cui è formata. Dalla (22) risulta allora che se al contorno del campo si ha:

$$U = 0 \qquad \nabla_2[U \mid \psi, U] = 0,$$

oppure:

$$\nabla_2[U \mid \psi, U] = 0 \qquad \Delta_3[U \mid \psi] = 0,$$

si dovrà avere in tutto il campo:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0,$$

quindi nel primo caso si dovrà avere in tutto il campo $U = 0$, e nel secondo $U = axy + bx + cy + d$ ove a, b, c, d sono costanti.

Da ciò segue che un integrale regolare U della nostra equazione:

1.° è completamente determinato in un campo connesso dai valori che esso e la espressione $\nabla_2[U \mid \psi, U]$ assumono sul contorno;

2.° è determinato, all'infuori di una funzione bilineare, dai valori che assumono al contorno le espressioni $\nabla_2[U \mid \psi, U]$, $\Delta_3[U \mid \psi]$.

Osservando poi che $\nabla_2[U \mid \psi, U]$, $\Delta_3[U \mid \psi]$ sono formate linearmente colle derivate prime, colle derivate terze e colle derivate seconde $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ della funzione U, vediamo che sono sufficienti a determinare U in tutto il campo anche i valori al contorno:

3.° di U e delle sue derivate prime;

4.° di U e delle derivate seconde $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$;

5.° delle derivate prime e delle derivate terze;

6.° delle derivate seconde $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$ e delle derivate terze,

all'infuori di una costante nel 5.° caso, e di una funzione bilineare nel 6.°,

Quando m soddisfa anche alla condizione $0 \leq m \leq 1$ la espressione $\Delta_2[U, U]$ non è mai negativa, e allora nelle considerazioni precedenti, invece della (22), si può far uso della (21) ed invece della espressione $\nabla_2[U \mid \psi, U]$ si può considerare la $\Delta_2[U \mid \psi, U]$. Nei casi in cui la U era determinata all'infuori di una funzione bilineare, ora risulta determinata all'infuori di una funzione lineare.

Quando $m = \frac{1}{3}$, ds^4 diviene il quadrato di $dx^2 + dy^2$, e le nostre espressioni Δ, si possono esprimere mediante le

$$\Delta'_1[U, V] = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} \qquad \Delta'_2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

$$\Delta'_{22} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\frac{\partial^2 U}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\right)^2,$$

che sono, come è noto, parametri della forma $dx^2 + dy^2$. In particolare si trova:

$$3\Delta_2[U \mid U, V] = \Delta'_1(U, V)\Delta'_2 U + \Delta'_2(V\Delta'_1 U)$$

$$3\Delta_2[U, U] = 3(\Delta'_2 U)^2 - 4\Delta'_{22} U$$

$$\Delta_3[U \mid V] = \Delta'_1(V, \Delta'_2 U)$$

$$\Delta_4[U] = \Delta'_2 \Delta'_2 U,$$

e la (22) si riduce alla seguente:

$$\iint (\Delta_2 U)^2 dx\, dy = -\int \left(\frac{\partial U}{\partial n}\Delta'_2 U - U\frac{\partial \Delta_2 U}{\partial n}\right) dl,$$

(ove n indica la normale al contorno diretta verso l'interno, ed l l'arco del contorno stesso) la quale ha servito al sig. Mathieu per trovare le condizioni al contorno che bastano a determinare una funzione che soddisfa alla equazione $\Delta'_2\Delta'_2 U = 0$ (Journal de Liouville, t. XIV, 1869).

Mediante la formula (16) si possono stabilire successivamente le seguenti:

$$\iint U\Delta_4[V]\, d\sigma = -\int U \frac{\Delta_3[V \mid \psi]}{\sqrt[4]{\Delta_1[\psi]}}\, ds - \iint \Delta_3[V \mid U]\, d\sigma$$

$$-\iint \Delta_3[V \mid U]\, d\sigma = \int \frac{\Delta_2[V \mid U, \psi]}{\sqrt[4]{\Delta_1[\psi]}}\, ds + \iint \Delta_2[U, V]\, d\sigma$$

$$\iint \Delta_2[U, V]\, d\sigma = -\int \frac{\Delta_2[U \mid V, \psi]}{\sqrt[4]{\Delta_1[\psi]}}\, ds - \iint \Delta_3[U \mid V]\, d\sigma$$

$$-\iint \Delta_3[U \mid V]\, d\sigma = \int V \frac{\Delta_3[U \mid \psi]}{\sqrt[4]{\Delta_1[\psi]}}\, ds + \iint V\Delta_4[U]\, d\sigma,$$

da cui sommando otteniamo:

$$\left.\begin{aligned} &\iint (U\Delta_4[V] - V\Delta_4[U])\, d\sigma \\ &= -\int \left\{U\Delta_3[V \mid \psi] - V\Delta_3[U \mid \psi] + \Delta_2[V \mid U, \psi] - \Delta_2[U \mid V, \psi]\right\} \frac{ds}{\sqrt[4]{\Delta_1[\psi]}}. \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Questa equazione tiene luogo, rispetto alla equazione $\Delta_4[U]=0$, del teorema di Green. Essa esprime del resto una proprietà comune a tutte le equazioni lineari, a coefficienti costanti, cioè che l'*equazione del moltiplicatore* (*), per queste equazioni, coincide coll'equazione stessa.

Ora è notissimo come dal teorema di Green si possa dedurre mediante un integrale speciale della equazione $\Delta_2 V=0$, o $\Delta_2\Delta_2 V=0$ una formula atta a rappresentare qualunque integrale di queste equazioni regolare in un campo dato. Nel paragrafo seguente noi determineremo analogamente un integrale speciale della equazione $\Delta_4[U]=0$, mediante il quale, e servendoci della (23), potremo ottenere una formula atta a rappresentare qualunque integrale regolare della equazione stessa. Chiameremo questo integrale speciale l'*integrale caratteristico* della equazione.

§ 6.

La forma biquadratica positiva (quando $3m+1>0$)

$$\varphi(x,\, y)=x^4+6\,m x^2 y^2+y^4,$$

può essere rappresentata, come tutte le forme biquadratiche positive, col prodotto di due forme quadratiche positive. Si ha così:

se $|m|\leq\frac{1}{3}$ $\quad\varphi(x,\, y)=\left(x^2-2\sqrt{\frac{1-3m}{2}}\,xy+y^2\right)\left(x^2+2\sqrt{\frac{1-3m}{2}}\,xy+y^2\right),$

e:

se $\quad m\geq\frac{1}{3}$ $\quad\varphi(x,\, y)=\left(x^2+(3m-\sqrt{9m^2-1})y^2\right)\left(x^2+(3m+\sqrt{9m^2-1})y^2\right).$

In ciò che segue non considereremo il caso $m=\frac{1}{3}$, perchè già noto. (Mathieu, Memoria citata.)

Noi potremo pertanto rappresentare simbolicamente la espressione $\Delta_4[U]$ nel seguente modo:

$$\Delta_4[U]=(\alpha_0 D_x^2+2\alpha_1 D_x D_y+\alpha_2 D_y^2)(\beta_0 D_x^2+2\beta_1 D_x D_y+\beta_2 D_y^2)\,U,$$

ove D_x, D_y sono simboli di derivazione rispetto ad x, y, ed i coefficienti di

(*) Secondo la denominazione di du Bois-Reymond: *Ueber lineare partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung* (Crelle, Bd. 101.

D_x^2, $D_x D_y$, D_y^2 hanno gli stessi valori che i coefficienti di x^2, xy, y^2 nelle due precedenti espressioni di $\varphi(x, y)$. Perciò, se v è una funzione che soddisfa alla equazione:

$$(\alpha_0 D_x^2 + 2\alpha_1 D_x D_y + \alpha_2 D_y^2) v = 0, \tag{24}$$

qualunque funzione u che soddisfa alla equazione:

$$(\beta_0 D_x^2 + 2\beta_1 D_x D_y + \beta_2 D_y^2) u = v + \text{cost.}, \tag{25}$$

soddisferà pure alla equazione $\Delta_4 [U] = 0$. Una funzione che soddisfa alla (24) è:

$$v = \lg(\alpha_2 x^2 - 2\alpha_1 xy + \alpha_0 y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Noi prenderemo per v questa funzione. Osserviamo inoltre che con una trasformazione lineare si potrà sempre ridurre il primo membro della (25) alla forma:

$$(D_\xi^2 + D_\eta^2) u,$$

e che questa trasformazione cambierà $\alpha_2 x^2 - 2\alpha_1 xy + \alpha_0 y^2$ in una nuova forma quadratica positiva delle ξ, η. Per cui la (25) sarà riducibile alla seguente:

$$(D_\xi^2 + D_\eta^2) u = \lg(\gamma_0 \xi^2 + 2\gamma_1 \xi\eta + \gamma_2 \eta^2)^{\frac{1}{2}} + \text{cost.} \tag{26}$$

Ci proporremo ora di determinare una funzione che soddisfaccia alla (26) e sia:

1.° monodroma, finita e continua insieme alle sue derivate prime per tutti i valori finiti di ξ, η;

2.° abbia le derivate seconde e terze pure monodrome, finite e continue per tutti i valori finiti di ξ, η, differenti da $\xi = 0$, $\eta = 0$;

3.° le derivate terze diventino infinite come $\frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$ quando $\xi = 0$ $\eta = 0$.

Vedremo che esiste effettivamente una funzione che soddisfa a tutte queste condizioni e può essere presa come integrale caratteristico.

Cerchiamo dapprima le trasformazioni che riducono la equazione (25) alla forma (26).

1.° caso: $|m| < \frac{1}{3}$.

Posto $k = \sqrt{\frac{1 - 3m}{2}}$ si ha:

$$(D_x^4 + 6m D_x^2 D_y^2 + D_y^4) u = (D_x^2 - 2k D_x D_y + D_y^2)(D_x^2 + 2k D_x D_y + D_y^2) u,$$

e la (25) diviene:

$$(D_x^2 + 2kD_xD_y + D_y^2)u = \lg(x^2 + 2kxy + y^2)^{\frac{1}{2}} + \text{cost.}$$

Poniamo ora:

$$x + y = \xi\sqrt{2(1+k)} \qquad x - y = \eta\sqrt{2(1-k)},$$

e la equazione precedente si trasforma in quest'altra:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \lg\{(1+k)^2\xi^2 + (1-k)^2\eta^2\}^{\frac{1}{2}} + \text{cost.} \tag{26'}$$

2.° caso: $m > \frac{1}{3}\cdot$

Posto $p^2 = 3m - \sqrt{9m^2 - 1}$, si ha:

$$(D_x^4 + 6mD_x^2D_y^2 + D_y^4)u = (D_x^2 + p^2D_y^2)\left(D_x^2 + \frac{1}{p^2}D_y^2\right)u,$$

e la (25) diviene:

$$\left(D_x^2 + \frac{1}{p^2}D_y^2\right)u = \lg\left(x^2 + \frac{y^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \text{cost.},$$

e ponendo:

$$x = \xi \qquad y = \frac{\eta}{p},$$

troviamo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \lg\left\{\xi^2 + \frac{\eta^2}{p^4}\right\}^{\frac{1}{2}} + \text{cost.} \tag{26''}$$

Queste due equazioni (26') (26'') sono comprese in quest'altra:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \lg(a^2\xi^2 + b^2\eta^2)^{\frac{1}{2}} + \text{cost.}, \tag{26'''}$$

che basterà considerare. Supporremo $a > b$, come difatti si ha nelle (26') (26'').

Sostituendo alle ξ; η le variabili r, θ legate dalle relazioni:

$$\xi = r\cos\theta \qquad \eta = r\,\text{sen}\,\theta,$$

la equazione precedente diviene:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = \lg\{r(a^2\cos^2\theta + b^2\,\text{sen}^2\theta\}^{\frac{1}{2}} + \text{cost.},$$

e ponendo:

$$u = w + \frac{r^2}{4}\lg r,$$

si ha per w la seguente equazione:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}=\lg\left(a^2\cos^2\theta+b^2\operatorname{sen}^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}+\text{cost.}$$

Osservando ora la identità:

$$a^2\cos^2\theta+b^2\operatorname{sen}^2\theta=\frac{(a+b)^2}{4}\left\{1+\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+2\,\frac{a-b}{a+b}\cos 2\theta\right\},$$

possiamo, mediante una formula notissima, sviluppare in serie il secondo membro; si trova così:

$$\lg\left(a^2\cos^2\theta+b^2\operatorname{sen}^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}=\lg\frac{a+b}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n\cos 2n\theta,$$

per cui avremo:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial w}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n\cos 2n\theta+\text{cost.}$$

Porremo ora:

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}w_n,$$

e determineremo le w_n in modo che ciascuna di esse, sostituita nel primo membro, lo riduca uguale ad uno dei termini del secondo, ed inoltre in modo che ciascuna di esse soddisfaccia alle condizioni 1.ª, 2.ª, 3.ª stabilite per u. Per questo basta porre:

$$w_1=\frac{a-b}{a+b}\,\frac{r^2}{4}\cos 2\theta\lg r,$$

e per $n>1$

$$w_n=\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n\frac{r^2}{4(n^2-1)}\cos 2n\theta.$$

Quindi avremo:

$$w=\frac{1}{4}\,\frac{a-b}{a+b}\,r^2\cos 2\theta\lg r+r^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n(n^2-1)}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n\cos 2n\theta, \qquad (27)$$

e siccome la serie del secondo membro è certamente convergente per qualunque valore di r e di θ, e derivabile termine a termine due volte, la espressione così determinata per w rappresenterà una funzione che soddisfa alla nostra equazione.

La serie (27) può essere sommata, e si può quindi ottenere per w una espressione finita.

Osserviamo infatti che dalla eguaglianza:

$$\lg(1+z) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{n},$$

dove z rappresenta una quantità complessa il cui modulo è <1, si ricava integrando:

$$\frac{1}{z}\int_0^z \lg(1+z)dz - z\int_0^z \{\lg(1+z)-z\}\frac{dz}{z^2} = \frac{z}{2} + 2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{n(n^2-1)}.$$

Ora le integrazioni indicate nel primo membro si possono facilmente eseguire, e si trova:

$$\frac{1}{z}\int_0^z \lg(1+z)dz - z\int_0^z \{\lg(1+z)-z\}\frac{dz}{z^2} = \frac{(1+z)^2}{z}\lg(1+z) - (1+z).$$

Abbiamo quindi:

$$2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{n(n^2-1)} = \frac{(1+z)^2}{z}\lg(1+z) - \frac{3}{2}z - 1.$$

Poniamo ora:

$$z = \frac{a-b}{a+b}(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta),$$

ed uguagliando le parti reali dei due membri nella eguaglianza precedente, troviamo:

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^n \frac{\cos 2n\theta}{4n(n^2-1)} =$$

$$\frac{1}{2}\,\frac{a^2\cos^2\theta - b^2\operatorname{sen}^2\theta}{a^2-b^2}\lg(a^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+\frac{ab}{a^2-b^2}r^2 \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{arco\,tg}\left(\frac{(a-b)\operatorname{sen} 2\theta}{a\cos^2\theta + b\operatorname{sen}^2\theta}\right) - \frac{3}{2}\,\frac{a-b}{a+b}\cos 2\theta - 1.$$

Troviamo così per la funzione u, trascurando i termini che dànno luogo a funzioni intere razionali di secondo grado nelle ξ, η e che per noi non hanno importanza,

$$u = \frac{r^2}{2}\,\frac{a\cos^2\theta + b\operatorname{sen}^2\theta}{a+b}\lg r + \frac{r^2}{2}\,\frac{a^2\cos^2\theta - b^2\operatorname{sen}^2\theta}{a^2-b^2}\lg(a^2\cos^2\theta + b^2\operatorname{sen}^2\theta)^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{ab}{a^2-b^2}r^2 \operatorname{arco\,tg}\left(\frac{(a-b)\operatorname{sen} 2\theta}{a\cos^2\theta + b\operatorname{sen}^2\theta}\right).$$

Se ora introduciamo di nuovo le variabili ξ, η troviamo per u la seguente espressione:

$$u = u_1 + u_2 + u_3,$$

posto:

$$u_1 = -\frac{1}{2}\,\frac{ab}{a^2-b^2}(\xi^2-\eta^2)\lg(\xi^2+\eta^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}\,\frac{a^2\xi^2-b^2\eta^2}{a^2-b^2}\lg(a^2\xi^2+b^2\eta^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$u_3 = \frac{ab}{a^2-b^2}\,\xi\eta\,\text{arco tg}\left(\frac{(a-b)\xi\eta}{a\xi^2+b\eta^2}\right),$$

e si potrebbe facilmente verificare che questa espressione di u soddisfa effettivamente la (26‴).

Noi verificheremo invece, il che è più semplice, che essa soddisfa alla trasformata della equazione $\Delta_4[u]=0$ nelle coordinate ξ, η. Osserviamo infatti, che essendo:

$$\lg(\xi^2+\eta^2) = \lg[(\xi+i\eta)(\xi-i\eta)] \qquad \lg(a^2\xi^2+b^2\eta^2) = \lg[(a\xi+ib\eta)(a\xi-ib\eta)]$$

$$\text{arco tg}\left(\frac{(a-b)\xi\eta}{a\xi^2+b\eta^2}\right) = -\frac{i}{2}\lg\frac{(a\xi-b\eta)(\xi+i\eta)}{(a\xi+b\eta)(\xi-i\eta)},$$

se si pone:

$$\Phi = -\frac{1}{2}\,\frac{ab}{a^2-b^2}(\xi+i\eta)^2\lg(\xi+i\eta) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{a^2-b^2}(a\xi+ib\eta)^2\lg(a\xi+ib\eta), \quad (28)$$

si trova subito che la espressione precedente di u è la parte reale di Φ.

Ora colle variabili ξ, η la equazione $\Delta_4[u]=0$ diviene:

$$(D_\xi + D_\eta^2)\left(\frac{1}{a^2}D_\xi^2 + \frac{1}{b^2}D_\eta^2\right)u = 0,$$

e questa equazione ammette l'integrale generale con quattro funzioni arbitrarie:

$$u = f_1(\xi+i\eta) + f_2(\xi-i\eta) + f_3(a\xi+ib\eta) + f_4(a\xi-ib\eta),$$

di cui Φ è un caso speciale. Vediamo quindi che non solo la parte reale di Φ, ma anche la parte immaginaria soddisfa alla equazione $\Delta_4[u]=0$.

La funzione u trovata soddisfa anche alle condizioni stabilite circa il modo di comportarsi nel punto $\xi=0$, $\eta=0$. Ciò è evidente per u_1, u_2; in quanto ad u_3 osserviamo che le sue derivate si comportano come quelle di u_1, u_2, ed essa soddisfa anche alla condizione della monodromia, quantunque la funzione arco tg sia in generale polidroma. Difatti il rapporto $\frac{(a-b)\xi\eta}{a\xi^2+b\eta^2}$, essendo a, b numeri positivi, è sempre finito e determinato finchè ξ, η non sono contemporaneamente zero; perciò, percorrendo una curva chiusa attorno al punto $\xi=0$ $\eta=0$, questo rapporto varierà con continuità fra due valori finiti, e quindi l'arco tg corrispondente varierà con continuità fra due valori compresi fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$, se si fissa che in un punto qualunque il suo valore assoluto sia il minimo, che l'arco tg può assumere.

Torniamo ora alle variabili x, y.

1.° caso. Troviamo:

$$\xi^2+\eta^2=\frac{1}{1-k^2}(x^2-2kxy+y^2) \qquad \zeta^2-\eta^2=-\frac{k}{1-k^2}\left(x^2-\frac{2}{k}xy+y^2\right)$$

$$a^2-b^2=4k \qquad ab=1-k^2,$$

quindi abbiamo:

$$u_1=\frac{1}{8}\left(x^2-\frac{2}{k}xy+y^2\right)\lg\left(\frac{x^2-2kxy+y^2}{1-k^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Inoltre si ha:

$$a^2\xi^2+b^2\eta^2=x^2+2kxy+y^2 \qquad a^2\xi^2-b^2\eta^2=kx^2+2xy+ky^2,$$

quindi:

$$u_2=\frac{1}{8k}(kx^2+2xy+ky^2)\lg(x^2+2kxy+y^2)^{\frac{1}{2}},$$

e finalmente:

$$a\xi^2+b\eta^2=x^2+y^2 \qquad (a-b)\xi\eta=\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}(x^2-y^2),$$

e così:

$$u_3=\frac{\sqrt{1-k^2}}{8k}(x^2-y^2)\,\text{arco tg}\left(\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right).$$

Trascurando una funzione di secondo grado nelle x, y, e indicando con $Z'(x, y)$ ciò diviene u, abbiamo così:

$$Z'(xy)=\left(x^2-\frac{2}{k}xy+y^2\right)\lg(x^2-2kxy+y^2)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\left(x^2+\frac{2}{k}xy+y^2\right)\lg(x^2+2kxy+y^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$+\frac{\sqrt{1-k^2}}{k}(x^2-y^2)\,\text{arco tg}\left(\frac{k}{\sqrt{1-k^2}}\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) \qquad \left(k=\sqrt{\frac{1-3m}{2}}\right).$$

2.° caso. Si trova:

$$\xi^2 - \eta^2 = x^2 - p^2 y^2 \qquad a^2\xi^2 + b^2\eta^2 = x^2 + \frac{y^2}{p^2} \qquad (a-b)\xi\eta = \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)pxy$$

$$\xi^2 + \eta^2 = x^2 + p^2 y^2 \qquad a^2\xi^2 - b^2\eta^2 = x^2 - \frac{y^2}{p^2} \qquad a\xi^2 + b\eta^2 = x^2 + y^2,$$

quindi abbiamo, indicando con $Z''(x, y)$ ciò che diviene u,

$$Z''(x, y) = -\frac{1}{2}\frac{p^2}{p^4-1}(x^2 - p^2y^2)\lg(x^2 + p^2y^2)^{\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{p^4}{p^4-1}\left(x^2 - \frac{y^2}{p^2}\right)\lg\left(x^2 + \frac{y^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{p^3xy}{p^4-1}\operatorname{arco\,tg}\left(\frac{(p^2-1)xy}{p(x^2+y^2)}\right) \qquad \left(p = \sqrt{3m - \sqrt{9m^2-1}}\right).$$

È chiaro poi che queste due funzioni continuano a soddisfare alle condizioni, che sono state fissate, aggiungendo ad esse un integrale qualsiasi della equazione $\Delta_4[U] = 0$, che sia regolare per tutti i valori finiti di x, y. Indicheremo con $Z(x, y)$ la funzione rappresentata nel 1.° caso da $Z'(x, y)$, nel secondo da $Z''(x, y)$, quando non avremo bisogno di considerare separatamente i due casi. Vedremo che essa fa l'ufficio di integrale caratteristico per la nostra equazione.

§ 7.

Nella (23) supponiamo che il campo di integrazione comprenda nel suo interno il punto $x = 0$, $y = 0$; escludiamo poscia questo punto descrivendo attorno ad esso una curva:

$$\varphi(x, y) = x^4 + 6mx^2y^2 + y^4 = \varepsilon^4,$$

ove ε è un numero piccolissimo. Al nuovo campo così formato sarà applicabile la (23) quando si prenda per V la funzione $Z(x, y)$ e per U un integrale qualsiasi della equazione $\Delta_4[U] = 0$, che sia regolare in tutto il campo primitivo; difatti l'unico punto, in cui la $Z(x, y)$ non sia regolare, è l'origine delle coordinate. Indicando con γ la curva descritta attorno a questo punto, la (23) ci dà:

$$\left.\begin{aligned}\int\left\{U\Delta_3[Z \mid \psi] - Z\Delta_3[U \mid \psi] + \Delta_2[Z \mid U \mid \psi] - \Delta_2[U \mid Z, \psi]\frac{ds}{\sqrt[4]{\Delta_1[\psi]}}\right\}\\ = \lim_{\varepsilon=0}\int U\frac{\Delta_3[Z \mid \varphi]}{\sqrt[4]{\Delta_1[\varphi]}}d\gamma,\end{aligned}\right\} \quad (29)$$

ove $d\gamma$ si intende determinato in modo analogo all'elemento del contorno, e quindi, introducendo le coordinate del § 4, ρ, ω, si ha:

$$d\gamma = \varepsilon d\omega, \tag{30}$$

e la integrazione rispetto ad ω si dovrà estendere da $\omega = 0$ ad $\omega = \Omega$. Inoltre lungo la curva integrazione avremo $\rho = \varepsilon$, e

$$\sqrt[4]{\Delta_1[\varphi]} = \varepsilon^3 \sqrt[4]{Q(\lambda, \mu)}. \tag{31}$$

Dobbiamo ora calcolare $\Delta_3[Z \mid \varphi]$. Per questo ricordiamo che si può porre (28):

$$Z = R\{\Phi\},$$

e indicando con Φ' e Φ'' le espressioni di Φ nei due casi considerati, si ha:

$$\Phi' = -\frac{1-k^2}{8k}(\alpha x + \alpha' y)^2 \lg(\alpha x + \alpha' y) + \frac{1}{8k}(\beta x + \beta' y)^2 \lg(\beta x + \beta' y),$$

ove si è posto per brevità:

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2(1+k)}} + \frac{i}{\sqrt{2(1+k)}} \qquad \beta = \sqrt{\frac{1+k}{2}} + i\sqrt{\frac{1-k}{2}},$$

ed α', β' sono i numeri coniugati di α, β.

Ed inoltre:

$$\Phi'' = -\frac{p^2}{2(p^4-1)}(x+ipy)^2\log(x+ipy) + \frac{p^4}{2(p^4-1)}\left(x+\frac{iy}{p}\right)^2 \lg\left(x+\frac{iy}{p}\right).$$

Calcoleremo ora $\Delta_3[\Phi' \mid \varphi]$ servendoci della seconda delle (11); poniamo:

$$v_1 = -\frac{1-k^2}{8k}(\alpha x + \alpha' y) \qquad v_2 = \frac{1}{8k}(\beta x + \beta' y)$$

$$V_1 = \lg(\alpha x + \alpha' y) \qquad V_2 = \lg(\beta x + \beta' y).$$

Si trova facilmente:

$$\Delta_3[v_1 \mid \varphi] = 0 \qquad \Delta_2[v_1 \mid V_1, \varphi] + \Delta_2[V_1 \mid v_1, \varphi] = 0$$

$$\Delta_3[v_2 \mid \varphi] = 0 \qquad \Delta_2[v_2 \mid V_2, \varphi] + \Delta_2[V_2 \mid v_1, \varphi] = 0,$$

quindi la formula citata ci dà:

$$\Delta_3[\Phi' \mid \varphi] = v_1\Delta_3[V_1 \mid \varphi] + v_2\Delta_3[V_2 \mid \varphi].$$

Ora con alcune semplici riduzioni si trova:

$$\Delta_3[V_1 \mid \varphi] = -\frac{4ik}{\sqrt{1-k^2}} \frac{1}{(\alpha x + \alpha' y)^3}\left(\alpha' \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)$$

$$\Delta_3[V_2 \mid \varphi] = 4ik\sqrt{1-k^2}\left(\beta' \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y}\right),$$

e quindi:

$$\Delta_3[\Phi' \mid \varphi] = \frac{ik\sqrt{1-k^2}}{2k}\left\{\frac{\alpha' \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \alpha \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\alpha x + \alpha' y} + \frac{\beta' \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \beta \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{\beta x + \beta' y}\right\},$$

da cui:

$$R\{\Delta_3[\Phi' \mid \varphi]\} = \frac{1-k^2}{2}\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{x^2 - 2kxy + y^2} + \frac{1}{x^2 + 2kxy + y^2}\right),$$

ossia:

$$\Delta_3[Z' \mid \varphi] = 4(1-k^2)(x^2+y^2). \tag{32}$$

Con un procedimento perfettamente analogo nel secondo caso si trova:

$$\Delta_3[\Phi'' \mid \varphi] = \frac{p^4}{4(p^4-1)}\left\{\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{i}{p}\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{x + ipy} + \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x} + ip\frac{\partial \varphi}{\partial y}}{x + \frac{i}{p}y}\right\},$$

da cui:

$$R\{\Delta_1[\Phi'' \mid \varphi]\} = \frac{p^2}{2}\left(x\frac{\partial \varphi}{\partial x} + y\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{x^2 + p^2 y} + \frac{1}{p^2\left(x^2 + \frac{y^2}{p^2}\right)}\right),$$

ossia:

$$\Delta_3[Z'' \mid \varphi] = 2(p^2+1)(x^2+y^2). \tag{33}$$

Ora si ha:

$$4(1-k^2) = 2(3m+1) \qquad 2(p^2+1) = \frac{4\sqrt{3m+1}}{\sqrt{3m+1}+\sqrt{3m-1}},$$

e noi porremo:

$$h(m) = \begin{cases} 2(3m+1) & \text{se} \quad |m| < \frac{1}{3} \\ \dfrac{4\sqrt{3m+1}}{\sqrt{3m+1}+\sqrt{3m-1}} & \text{se} \quad m > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Quindi, osservando le (30) (31) (32) (33), potremo scrivere:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_\gamma U \frac{\Delta_3[Z \mid \varphi]}{\sqrt[4]{\Delta_1[\varphi]}}\, d\gamma = \lim_{\varepsilon=0} h(m)\int_0^\Omega \{U_0 - (U_0 - U_\varepsilon)\}\frac{\lambda^2+\mu^2}{\sqrt[4]{Q(\lambda,\mu)}}\, d\omega,$$

ove U_0 indica il valore di U nel punto $x=0$, $y=0$, ed U_ε rappresenta la funzione U pei punti delle curve $\rho=\varepsilon$. Nel secondo membro non dipende da ε che la differenza U_0-U_ε, e questa, essendo U continua, tende a zero con ε; quindi il limite cercato è:

$$h(m)U_0\int_0^\Omega \frac{\lambda^2+\mu^2}{\sqrt[4]{Q(\lambda,\mu)}}\,d\omega.$$

La funzione che qui comparisce sotto il segno di integrazione è sempre finita e positiva per tutti i valori di ω; quindi ponendo:

$$H(m)=\int_0^\Omega \frac{\lambda^2+\mu^2}{\sqrt[4]{Q(\lambda,\mu)}}\,d\omega,$$

sarà $H(m)$ una costante, dipendente da m, finita e differente da zero. Sostituendo nella (29) otteniamo:

$$\left.\begin{aligned}&h(m)H(m)U_0=\\ &=\int\Big\{U\Delta_3[Z\mid\psi]-Z\Delta_3[U\mid\psi]+\Delta_2[Z\mid U,\psi]-\Delta_2[U\mid Z,\psi]\Big\}\frac{ds}{\sqrt[4]{\Delta_1[\psi]}}.\end{aligned}\right\}\quad(34)$$

È chiaro poi che se in questa formula alla funzione $Z(x, y)$ sostituiamo $Z(x-a, y-b)$, nel primo membro, invece di U_0, avremo il valore $U(a, b)$ della funzione U nel punto $x=a$, $y=b$, purchè questo punto sia interno al campo. Se fosse esterno si avrebbe lo zero.

Si ottiene così una formula, la quale rappresenta un integrale regolare qualsiasi dell'equazione considerata nell'interno di un campo finito, mediante elementi relativi soltanto al contorno.

Il problema della integrazione dell'equazione, quando sono dati alcuni degli elementi caratteristici, enunciati al § 6, si riduce quindi ad eliminare dalla formula trovata quegli elementi che non sono conosciuti, e ad introdurvi quelli che sono dati.

In alcuni casi, come ad es. quando gli elementi caratteristici conosciuti sono quelli dei n.i 3.°, 4.°, 5.°, 6.°, potrà esistere una funzione, analoga a quella di Green nella teoria delle funzioni potenziali, la quale risolve il problema della integrazione in modo generale.

Così, se gli elementi dati sono i valori al contorno di

$$U,\quad \frac{\partial U}{\partial x},\quad \frac{\partial U}{\partial y},$$

ed Y_{ab} è un integrale della nostra equazione, regolare in tutto il campo, e che al contorno soddisfa alle condizioni:

$$Y_{ab} + Z_{ab} = 0 \qquad \frac{\partial Y_{ab}}{\partial x} + \frac{\partial Z_{ab}}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial Y_{ab}}{\partial y} + \frac{\partial Z_{ab}}{\partial y} = 0,$$

ove $Z_{ab} = Z(x - a,\ y - b)$, si trova subito:

$$h(m)H(m)U(a,\ b) = \int \left\{ U\Delta_3[Z_{ab} + Y_{ab} \mid \psi] + \Delta_2[Z_{ab} + Y_{ab} \mid U,\ \psi] \right\} \frac{ds}{\sqrt[4]{\Delta_1[\psi]}},$$

e si ha così una espressione della U nella quale non entrano che gli elementi caratteristici conosciuti.

Considerazioni analoghe si possono fare negli altri casi indicati.

§ 8.

Accennerò infine brevemente agli sviluppi in serie dell'integrale caratteristico in campi limitati da curve:

$$\varphi(x,\ y) = \text{cost.},$$

che corrispondono agli sviluppi del potenziale logaritmico elementare in campi limitati da circonferenze.

Poniamo:

$$f(x,\ y) = (ax + by)^2 \lg(ax + by),$$

ove a, b sono due numeri complessi qualunque. Siano poi α, β due numeri reali. Per quanto abbiamo visto, sostituendo alle x, y le variabili ρ, ω del § 4, potremo porre:

$$x = \rho\lambda(\omega) \qquad \alpha = \rho_1\lambda(\omega_1)$$

$$y = \rho\mu(\omega) \qquad \beta = \rho_1\mu(\omega_1).$$

La funzione $f(x + \alpha,\ y + \beta)$ con questa trasformazione diverrà una funzione $\bar{f}(\rho,\ \rho_1,\ \omega,\ \omega_1)$, di cui cercheremo lo sviluppo secondo le potenze di ρ e di ρ_1.

Posto $\theta(\omega) = a\lambda(\omega) + b\mu(\omega)$, abbiamo:

$$a(x + \alpha) + b(y + \beta) = \rho\theta(\omega) + \rho_1\theta(\omega_1),$$

e siccome $\lambda(\omega)$, $\mu(\omega)$ non possono essere contemporaneamente zero e sono sempre finite per qualunque valore di ω, esisteranno due costanti finite e differenti da zero l, L dipendenti da a, b, tali che per qualunque valore di ω:

$$l \leq |\theta(\omega)| \leq L.$$

Perciò sarà anche per qualsiasi coppia di valori di ω, ω_1:

$$\frac{l}{L} \leq \left| \frac{\theta(\omega)}{\theta(\omega_1)} \right| \leq \frac{L}{l},$$

e quindi per tutti i valori di ρ, ρ_1 che soddisfano alla condizione:

$$\frac{\rho}{\rho_1} < \frac{l}{L}, \tag{35}$$

avremo:

$$\left| \frac{\rho}{\rho_1} \frac{\theta(\omega)}{\theta_1(\omega)} \right| < 1.$$

Supposta soddisfatta la (35) potremo applicare lo sviluppo del logaritmo, e avremo:

$$\lg\Big(\rho\,\theta(\omega) + \rho_1\theta(\omega_1)\Big) = \lg\Big(\rho_1\theta(\omega_1)\Big) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n \frac{\theta^n(\omega)}{\theta^n(\omega_1)},$$

da cui si ricava anche:

$$\left.\begin{aligned} \bar{f}(\rho, \rho_1, \omega, \omega_1) &= \rho_1^2\theta^2(\omega_1)\lg\Big(\rho_1\theta(\omega_1)\Big) + \rho\rho_1\theta(\omega)\theta(\omega_1) + \frac{3}{2}\rho^2\theta^2(\omega) \\ &- 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)(n-2)} \frac{\rho^n}{\rho_1^{n-2}} \frac{\theta^n(\omega)}{\theta^{n-2}(\omega_1)}. \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

Se consideriamo ρ_1, ω_1 come costanti e ρ, ω come variabili questo sviluppo sarà valido in qualunque punto interno al campo limitato dalla curva:

$$x^4 + 6mx^2y^2 + y^4 = \left(\rho_1 \frac{l}{L}\right)^4. \tag{37}$$

Se invece consideriamo come costanti ρ, ω e come variabili ρ_1, ω_1 lo sviluppo sarà valido in qualunque punto esterno al campo limitato dalla curva:

$$\alpha^4 + 6m\alpha^2\beta^2 + \beta^4 = \left(\rho \frac{L}{l}\right)^4. \tag{38}$$

Se in questo secondo caso scambiamo ρ, ω con ρ_1, ω_1 avremo nel piano x, y due campi di validità degli sviluppi rispettivamente di $\bar{f}(\rho, \rho_1, \omega, \omega_1)$ e di $\bar{f}(\rho_1, \rho, \omega_1, \omega)$. Questi due campi lasceranno scoperta la regione compresa fra le due curve:

$$\rho = \frac{l}{L} \qquad \rho = \frac{L}{l}.$$

Se ora supponiamo di avere N funzioni:

$$f_s(x,\ y) = (a_s x + b_s y)^2 \lg(a_s x + b_s y) \qquad (s = 1,\ 2, \ldots N),$$

ed N costanti e_s, e poniamo:

$$\Phi(x,\ y) = \sum_{s=1}^{N} e_s f_s(x,\ y), \tag{39}$$

dalla (36) potremo avere uno sviluppo di $\Phi(x+\alpha,\ y+\beta)$; si trova così, posto $\theta_s(\omega) = a_s\lambda(\omega) + b_s\mu(\omega)$,

$$\left.\begin{aligned}\Phi(x+\alpha,\ y+\beta) &= \rho_1^2 \sum_{s=1}^{N} e_s\theta_s^2(\omega_1)\lg\Big(\rho_1\theta_s(\omega_1)\Big) + \rho\rho_1 \sum_{s=1}^{N} e_s\theta_s(\omega)\theta_s(\omega_1) \\ &+ \frac{2}{3}\rho^2 \sum_{s=1}^{N} e_s\theta_s^2(\omega) - 2\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)(n-2)} \frac{\rho^n}{\rho_1^{n-2}} \sum_{s=1}^{N} \frac{\theta_s^n(\omega)}{\theta_s^{n-2}(\omega_1)},\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

ed i campi di validità di questo sviluppo saranno ancora dati dalle (37) (38) dove però per $\dfrac{l}{L}$ si dovrà prendere il minimo dei valori dei rapporti $\dfrac{l_s}{L_s}$ che soddisfanno alle diseguaglianze:

$$\frac{l_s}{L_s} \leq \left|\frac{\theta_s(\omega)}{\theta_s(\omega_1)}\right| \qquad (s = 1,\ 2, \ldots N).$$

L'integrale caratteristico che abbiamo trovato al § 6, si può mettere sotto la forma (39). Basta porre $N = 4$, e

nel 1.° caso: $|m| < \frac{1}{3}$, colle notazioni del § 7,

$$\begin{array}{llll} a_1 = \alpha & a_2 = \beta & a_3 = \alpha' & a_4 = \beta' \\ b_1 = \alpha' & b_2 = \beta' & b_3 = \alpha & b_4 = \beta \end{array}$$

$$e_1 = e_3 = -\frac{1-k^2}{16k} \qquad e_2 = e_4 = \frac{1}{16k}.$$

Si trova poi:

$$l_1 = l_3 = \sqrt{\frac{2}{3m+1}} \qquad l_2 = l_4 = 1$$

$$L_1 = L_3 = \frac{2}{3m+1} \qquad L_2 = L_4 = \sqrt{\frac{2}{3m+1}},$$

quindi avremo:

$$\frac{l}{L} = \sqrt{\frac{3m+1}{2}},$$

nel 2.° caso, $m > \frac{1}{3}$:

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = 1 \qquad a_3 = 1 \qquad a_4 = 1$$

$$b_1 = ip \qquad b_2 = \frac{i}{p} \qquad b_3 = -ip \qquad b_4 = -\frac{i}{p}$$

$$e_1 = e_3 = -\frac{p^2}{4(p^2-1)} \qquad e_2 = e_4 = \frac{p^4}{4(p^4-1)}.$$

Si trova inoltre:

$$l_1 = l_3 = p \qquad l_2 = l_4 = 1$$

$$L_1 = L_3 = 1 \qquad L_2 = L_4 = \frac{1}{p},$$

quindi avremo:

$$\frac{l}{L} = p = \sqrt{3m - \sqrt{9m^2 - 1}}.$$

Sostituendo lo sviluppo così determinato dell'integrale caratteristico nella (34), se ne potranno dedurre sviluppi analoghi per qualsiasi integrale regolare della nostra equazione.

Gennaio, 1890.

NOTA.

Se per le funzioni arbitrarie che compaiono nei parametri differenziali Δ_i si prendono delle forme algebriche, è chiaro che, fatta astrazione dal fattore $\frac{1}{a}$, le espressioni che così si ottengono sono forme algebriche, che godono della proprietà invariantiva secondo la solita definizione. Esse sono quindi covarianti simultanei del sistema delle forme date e della $\varphi(x_1, x_2)$, tutti di indice 4; epperò si potranno esprimere come funzioni razionali intere degli invarianti e covarianti fondamentali del sistema.

Fra i parametri di un sistema di forme algebriche e le loro formazioni invariantive si hanno quindi delle relazioni, le quali possono essere assai utili in diversi casi; indicherò un procedimento che si può seguire per trovarle.

Rappresentando φ sotto forma simbolica:

$$\varphi(x_1, x_2) = a_x^4 = b_x^4 = \cdots,$$

le sue formazioni invariantive fondamentali colle notazioni solite sono:

$$H = (ab)^2 a_x^2 b_x^2 \qquad T = (ab)^2 (cb) c_x^3 a_x^2 b_x$$
$$i = (ab)^4 \qquad j = (ab)^2 (ac)^2 (bc)^2.$$

Se ora poniamo simbolicamente:

$$(a D_x) U = a_2 \frac{\partial U}{\partial x_1} - a_1 \frac{\partial U}{\partial x_2},$$
$$(a D_x)^2 U = a_2^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} - 2 a_1 a_2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} + a_1^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x_2}, \dots,$$

i nostri parametri, qualunque siano le funzioni arbitrarie che entrano in essi, si possono rappresentare come segue:

$$\Delta_1 [U, V, W, S] = \frac{2}{(ab)^4} (a D_x) U (a D_x) V (a D_x) W (a D_x) S$$
$$\Delta_2 [U \mid V, W] = \frac{2}{(ab)^4} (a D_x)^2 U (a D_x) V (a D_x) W$$
$$\Delta_2 [U, V] = \frac{2}{(ab)^4} (a D_x)^2 U (a D_x)^2 V$$
$$\Delta_3 [U \mid V] = \frac{2}{(ab)^4} (a D_x)^3 U (a D_x) V$$
$$\Delta_4 [U] = \frac{2}{(ab)^4} (a D_x)^4 U.$$

Si abbiano ora quattro forme algebriche U, V, W, S che, per semplicità, supporrò biquadratiche:

$$U = \alpha_x^4 \qquad V = \beta_x^4 \qquad W = \gamma_x^4 \qquad S = \delta_x^4.$$

Dalle formule precedenti si ottiene subito:

$$\left.\begin{aligned} a \Delta_1 [U, V, W, S] &= 4^4 (a\alpha)(a\beta)(a\gamma)(a\delta) \alpha_x^3 \beta_x^3 \gamma_x^3 \delta_x^3 \\ a \Delta_2 [U \mid V, W] &= 3 \cdot 4^3 (a\alpha)^2 (a\beta)(a\gamma) \alpha_x^2 \beta_x^3 \gamma_x^3 \\ a \Delta_2 [U, V] &= 3^2 \cdot 4^2 (a\alpha)^2 (a\beta)^2 \alpha_x^2 \beta_x^2 \\ a \Delta_3 [U \mid V] &= 2 \cdot 3 \cdot 4^2 (a\alpha)^3 (a\beta) \alpha_x \beta_x^3 \\ a \Delta_4 [U] &= 2 \cdot 3 \cdot 4 (a\alpha)^4. \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

Queste formule per la forma dei secondi membri dimostrano quanto si è già detto da principio, e mediante di esse coi procedimenti soliti del calcolo simbolico si possono trovare le relazioni, a cui abbiamo accennato.

Mi limiterò a considerare il caso in cui tutte le funzioni U, V, W, T sono uguali fra loro ed uguali a φ; allora tutti i simboli a, α, β, γ, δ divengono equivalenti.

Da una nota identità (*) osservando che i simboli α, β sono equivalenti, si ottiene:

$$(a\alpha)(a\beta)\alpha_x^3\beta_x^3 = \frac{1}{2}\left\{2(a\alpha)^2\alpha_x^2\beta_x^4 - (\alpha\beta)^2 a_x^2\alpha_x^2\beta_x^2\right\}, \qquad (B)$$

e analogamente:

$$(a\gamma)(a\delta)\gamma_x^3\delta_x^3 = \frac{1}{2}\left\{2(a\gamma)^2\gamma_x^2\delta_x^4 - (\gamma\delta)^2 a_x^2\gamma_x^2\delta_x^2\right\}.$$

Moltiplicando membro a membro ed approfittando della equivalenza dei simboli α, γ e β, δ abbiamo:

$$4(a\alpha)(a\beta)(a\gamma)(a\delta)\alpha_x^3\beta_x^3\gamma_x^3\delta_x^3 =$$
$$= 4(a\alpha)^2(a\gamma)^2\alpha_x^2\beta_x^4\gamma_x^2\delta_x^4 - 4(a\alpha)^2(\gamma\delta)^2 a_x^2\alpha_x^2\beta_x^4\gamma_x^2\delta_x^2 + (\alpha\beta)^2(\gamma\delta)^2 a_x^4 a_x^2\beta_x^2\gamma_x^2\delta_x^2.$$

Ma per formule note della teoria delle forme biquadratiche, si ha:

$$(a\alpha)^2(a\gamma)^2\alpha_x^2\gamma_x^2 = \frac{1}{2}i\varphi \qquad (a\alpha)^2(\gamma\delta)^2 a_x^2\alpha_x^2\gamma_x^2\delta_x^2 = H^2,$$

quindi il secondo membro della equazione precedente è uguale a $2i\varphi^3 - 3\varphi H^2$, e si ha:

$$\Delta_1[\varphi] = \frac{4^4}{a}\left(a\varphi^2 - \frac{3}{4}H^2\right)\varphi, \qquad (\mathrm{I})$$

dove:

$$H = \frac{2}{3^2\cdot 4^2}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right).$$

Per avere la formula analoga relativa alla seconda della (A) osserviamo che dalla (B) mutando α in γ, e moltiplicando per $(a\alpha)^2\alpha_x^2$, otteniamo:

$$(a\alpha)^2(a\beta)(a\gamma)\alpha_x^2\beta_x^3\gamma_x^3 =$$
$$= \frac{1}{2}\left\{2(a\beta)^2(a\alpha)^2\alpha_x^2\beta_x^2\gamma_x^4 - (a\alpha)^2(\beta\gamma)^2 a_x^2\alpha_x^2\beta_x^2\gamma_x^2\right\},$$

questa espressione non è altro che $\frac{1}{2}(i\varphi - H^2)$, quindi si ha:

$$\Delta_2[\varphi\mid\varphi,\ \varphi] = \frac{2\cdot 3\cdot 4^2}{a}(2a\varphi - H^2). \qquad (\mathrm{II})$$

(*) Vedi CLEBSCH: *Theorie der binären algebraischen Formen*, pag. 41.

La terza della (A) ci dà immediatamente:

$$\Delta_2 [\varphi, \varphi] = 3^2 \cdot 4^2 \varphi. \tag{III}$$

Finalmente dalla identità già invocata abbiamo:

$$(a\alpha)^3 (a\beta) \alpha_x \beta_x^3 = \frac{1}{2} \left\{ 2 (a\alpha)^4 \beta_x^4 - (\alpha\beta)^2 (a\alpha)^2 a_x^2 \beta_x^2 \right\} = \frac{3}{4} i \varphi,$$

e quindi la quarta della (A) diviene:

$$\Delta_3 [\varphi \mid \varphi] = \frac{3}{2} \varphi. \tag{IV}$$

L'ultima della (A) ha già la forma voluta qualunque sia la forma biquadratica U.

Possiamo mostrare subito un'applicazione della (I).

La espressione $Q(\lambda, \mu)$ del § 4 non è altro che:

$$\frac{1}{4^4} \Delta_1 [\varphi(\lambda, \mu)],$$

relativo alla forma differenziale:

$$\frac{1}{1 + 3m^2} \varphi(d\lambda, d\mu) = \frac{1}{1 + 3m^2} \left(d\lambda^4 + 6m \, d\lambda^2 d\mu^2 + d\mu^4 \right) \cdot$$

Per la (I) abbiamo quindi, poichè $a = \dfrac{1}{1 + 3m^2}$,

$$Q(\lambda, \mu) = \varphi^3 - \frac{3}{4} (1 + 3m^2) H^2 \varphi,$$

e poichè λ, μ soddisfanno alla relazione $\varphi = 1$,

$$Q(\lambda, \mu) = 1 - \frac{3}{4} (1 + 3m^2) H^2,$$

ove:

$$H = 2 \left\{ m\lambda^4 + (1 - 3m^2) \lambda^2 \mu^2 + m\mu^4 \right\}.$$

Quindi $Q(\lambda, \mu)$ dal 12.° si riduce all'8.° ordine rispetto a λ, μ.

Così la formula dello stesso paragrafo che dà la $\dfrac{d\nu}{d\omega}$ si riduce alla seguente:

$$\frac{d\nu}{d\omega} = \frac{\varphi(1, \nu)}{\left\{ \varphi^2(1, \nu) - \dfrac{3}{4} (1 + 3m^2) H^2(1, \nu) \right\}^{\frac{1}{4}}} \cdot$$

Sulle corrispondenze $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$ continue che si possono stabilire tra i punti di r gruppi.

(*Di* Riccardo De Paolis, *a Pisa*.)

In questa Memoria mi propongo di studiare, con semplici considerazioni di geometria elementare, certe corrispondenze *continue* che si possono stabilire tra i punti di più gruppi. I risultati che ottengo mi sembrano interessanti per le applicazioni che se ne possono fare alla geometria ed alla analisi; alcuni sono noti, quasi tutti però li dimostro in modo nuovo.

I. Le varietà, i loro elementi, i loro gruppi ed aggruppamenti.

1. I varî modi di determinazione che può ammettere un concetto generale costituiscono una *varietà* della quale essi sono gli *elementi.*

Un *gruppo* di una varietà è l'insieme di quanti si vogliano dei suoi elementi.

2. Diciamo che un elemento è *r-plo, o multiplo secondo r,* per un *dato* gruppo, se, per la *legge* che dà il gruppo, dobbiamo pensarlo appartenente ad esso r volte, e non più di r volte.

Un elemento 1-plo per un dato gruppo lo chiamiamo anche un *elemento semplice* per esso.

Possiamo dire che in un elemento r-plo per un dato gruppo coincidono r dei suoi elementi semplici.

Se un dato gruppo contiene uno o più elementi r-pli, essendo $r = st$, possiamo dire che contiene come *s-plo, o multiplo secondo s,* il gruppo costituito da ciascuno di essi contato t volte.

Un gruppo è del *grado n,* se è costituito da n elementi, intendendo di contare r volte ciascun suo elemento r-plo.

3. Per distinguere uno dall'altro gli elementi di una varietà indichiamo ciascuno di essi con una delle lettere:

$$\mathsf{A},\ \mathsf{B},\ \mathsf{C},\ \mathsf{D}, \ldots .$$

Per indicare un gruppo adoperiamo la lettera G o $\mathfrak{g}$, e se conviene tenere presente che n è il suo grado usiamo il simbolo G_n o $\mathfrak{g}_n$.

Se vogliamo porre in evidenza quali elementi A, B, $\mathsf{C}, \ldots$ costituiscono un gruppo G scriviamo:

$$\mathsf{G}(\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \ldots), \quad \text{ovvero anche:} \quad \mathsf{A}\,\mathsf{B}\,\mathsf{C} \ldots ;$$

intendendo che, se un elemento A è r-plo per il gruppo G, nel simbolo la lettera A sia ripetuta r volte, ovvero l'elemento vi si trovi indicato così: $[\mathsf{A}]^r$.

4. Il concetto generale di gruppo ammette varie determinazioni, si può quindi considerare una varietà i cui elementi siano gruppi di un'altra; un elemento di una tale varietà è un *gruppo di gruppi*, un *aggruppamento*.

Un aggruppamento può contenere gruppi multipli ed aggruppamenti multipli (2).

Un aggruppamento è di grado n, se è costituito da n gruppi come elementi (2).

Un aggruppamento i cui elementi siano gruppi ciascuno di grado n lo diciamo di *ordine n*.

5. Per indicare un aggruppamento adoperiamo la lettera $\mathcal{A}$ o $\mathfrak{a}$, e se conviene tenere presente che n è il suo ordine usiamo il simbolo $\mathcal{A}_n$ o $\mathfrak{a}_n$.

Se vogliamo porre in evidenza quali elementi G, G', $\mathsf{G}'', \ldots$ costituiscono un aggruppamento $\mathcal{A}$, scriviamo:

$$\mathcal{A}(\mathsf{G}, \mathsf{G}', \mathsf{G}'', \ldots), \quad \text{ovvero anche:} \quad \mathsf{G}\,\mathsf{G}'\,\mathsf{G}'' \ldots ,$$

intendendo che se un gruppo G è r-plo per $\mathcal{A}$ nel simbolo la lettera G sia ripetuta r volte, ovvero il gruppo vi si trovi indicato così: $[\mathsf{G}]^r$.

II. Lo spazio ed i suoi elementi geometrici.

6. Il concetto di punto, di linea, di superficie e di solido, ammette infiniti modi di determinazione, quindi lo spazio si può considerare come una varietà i cui elementi siano punti, o linee, o superficie, o solidi (1).

I punti, le linee, le superficie ed i solidi, sono gli *elementi geometrici* dello spazio.

I gruppi di elementi geometrici si dicono anche *figure* o *forme geometriche.*

7. Onde distinguere uno dall'altro gli elementi di una figura in generale indichiamo ciascuno di essi con una delle lettere:

$$\mathsf{A},\ \mathsf{B},\ \mathsf{C},\ \mathsf{D},\ldots,$$

mentre in particolare usiamo le lettere:

$$A,\ B,\ C,\ldots;\qquad a,\ b,\ c,\ldots;\qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ldots$$

per distinguere fra loro rispettivamente i punti, le linee e le superficie.

Per indicare i gruppi geometrici ed i loro aggruppamenti adoperiamo le stesse lettere **G** o **g** $\mathcal{A}$ o $\mathfrak{a}$ e gli stessi altri simboli già introdotti per le varietà di elementi qualunque.

8. Supponiamo nota la geometria elementare, senza ammettere però il postulato di Euclide sulle parallele ed in modo che i risultati che otteniamo valgano per tutti gli spazii di curvatura costante, positiva, nulla o negativa, cioè valgano per ciascuna delle tre geometrie: iperbolica, parabolica o ellittica. Non estendiamo però il concetto ordinario di punto, retta e piano, escludiamo cioè dalle nostre considerazioni *i punti, le rette ed i piani improprii* (*).

9. Un gruppo è *finito,* se si possono trovare due punti i quali siano fra loro più lontani di due qualunque punti del gruppo, altrimenti è *indefinito.*

Nella ipotesi della geometria ellittica lo spazio, e quindi un qualunque suo gruppo, è finito.

Nella ipotesi della geometria parabolica o iperbolica un gruppo finito si può sempre immaginare interno ad un tetraedro, costruito con piani la cui distanza da un punto, fissato ad arbitrio, sia maggiore della distanza di esso da ciascuno dei punti del gruppo. Se il gruppo finito è contenuto in un piano o in una retta, possiamo immaginarlo rispettivamente interno ad un triangolo o ad un segmento.

III. I gruppi geometrici continui.

10. Un punto L è *limite* di un gruppo $\mathbf{G}_\infty$, se si può trovare un punto di $\mathbf{G}_\infty$, e quindi infiniti altri, che sia tanto vicino ad L quanto si vuole.

Se L è un punto fisso ed A è un punto variabile, e se A si può rendere

(*) Pasch: *Vorlesungen über neuere Geometrie.* Leipzig, Teubner, 1882.

tanto vicino ad L quanto si vuole, L è limite del gruppo generato da A; in questo caso diciamo più brevemente che L è limite di A.

Un *intorno* di un punto L è un qualunque solido sferico che ha il centro in L; indichiamolo con il simbolo I_L. Un intorno I_L si può rendere tanto piccolo quanto si vuole, rendendo sufficientemente piccolo il suo raggio.

Se L è limite di G_∞, ad un intorno I_L, preso tanto piccolo quanto si vuole, appartengono sempre infiniti punti *distinti* di G_∞, e viceversa.

11. *Se di tre punti il primo è limite del secondo ed il terzo si può rendere tanto vicino al secondo quanto si vuole, il primo è anche limite del terzo.*

Infatti se L è limite di A e se B si può rendere tanto vicino ad A quanto si vuole, L è anche limite di B, perchè $LB < LA + AB$, qualunque sia la curvatura costante dello spazio.

12. Un gruppo è *condensato in sè stesso,* se ciascun suo punto è limite del gruppo.

Un gruppo è *chiuso,* se ad esso appartiene ciascuno dei suoi punti limite.

Un gruppo è *perfetto,* se insieme è condensato in sè stesso e chiuso.

La retta, il piano, il circolo, la sfera e lo spazio, sono gruppi perfetti (*).

13. Una linea poligonale è inscritta ad un gruppo, quando ciascuno dei suoi vertici è un punto del gruppo.

Un gruppo è *ben concatenato,* quando fissato un suo punto A, preso un suo punto qualunque B ed un segmento $A'B'$ tanto piccolo quanto si vuole, esiste sempre una linea poligonale inscritta al gruppo, che ha per estremi i punti A, B e ciascun lato minore di $A'B'$.

Diciamo *continuo* un gruppo chiuso e ben concatenato (*).

14. Un segmento AB è diviso in due segmenti AC, CB da uno qualunque C dei suoi punti interni, e tutti i punti di ciascun segmento AC, CB stanno, su AB, da uno stesso lato rispetto a ciascun punto dell'altro segmento distinto dall'estremo C.

Ammettiamo inversamente che ogni divisione di un segmento AB in due gruppi di punti G'_∞, G''_∞, tali che tutti i punti di ciascuno stiano sul segmento da uno stesso lato rispetto a tutti i punti dell'altro, sia una divisione in due segmenti, cioè una divisione determinata da un punto, di G'_∞ o di G''_∞, interno ad AB (**).

Il postulato ora concesso si può dire *postulato della continuità,* perchè,

---

(*) Cantor. Acta Mathematica, vol. 2°.

(**) Dedekind: *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Braunschweig, 1872.

come è noto (*), da esso si deduce la possibilità di dividere un segmento in un numero finito di segmenti uguali ciascuno tanto piccolo quanto si vuole, e quindi si deduce evidentemente da esso che la retta, il piano, il circolo, la sfera e lo spazio sono gruppi ben concatenati, e perciò continui (12).

IV. Alcune conseguenze della continuità dello spazio, del piano e della retta.

15. *Se un punto L è limite di un gruppo $\mathbf{G}_\infty$, possiamo trovare un gruppo, contenuto in $\mathbf{G}_\infty$, il quale abbia per limite il punto L, ed esso solo.*

Prendiamo un gruppo $\mathbf{g}_\infty(M_0, M_1, M_2, \ldots, M_i, \ldots)$ di punti di $\mathbf{G}_\infty$, tale che sia:

$$M_1 L < \frac{M_0 L}{2}, \qquad M_2 L < \frac{M_1 L}{2} < \frac{M_0 L}{2^2}, \ldots, \qquad M_i L < \frac{M_{i-1} L}{2} < \frac{M_0 L}{2^i}, \ldots .$$

Potendo rendere $M_i L$ tanto piccolo quanto si vuole, prendendo i sufficientemente grande, il punto L è limite di $\mathbf{g}_\infty$. Ora un altro punto L', distinto da L, non può essere limite di $\mathbf{g}_\infty$. Infatti possiamo prendere un punto M_i tale che sia $M_i L < L'L$, e siccome è $L'M_{i+k} > L'L - M_{i+k} L$, e quindi $L'M_{i+k} > L'L - M_i L$, il punto L' non può essere limite del gruppo $M_i M_{i+1} \ldots M_{i+k} \ldots$; ma nemmeno può essere limite del gruppo $M_0 M_1 \ldots M_{i-1}$ dei rimanenti punti di $\mathbf{g}_\infty$, che sono in numero finito, dunque L' non può essere limite di $\mathbf{g}_\infty$.

16. *Dato un gruppo di più punti distinti di un segmento, possiamo sempre trovare un segmento che lo contenga e sia terminato da due punti ciascuno dei quali o appartenga al gruppo, ovvero sia limite del gruppo.*

Se si tratta di un gruppo di un numero finito di punti distinti di un segmento, il teorema è evidente. Se si tratta invece di un gruppo $\mathbf{G}_\infty$ di infiniti punti distinti di un segmento, dobbiamo dimostrare che $\mathbf{G}_\infty$ è contenuto in un segmento $L_1 L_2$, ciascuno dei cui estremi o è un punto di $\mathbf{G}_\infty$, o è un punto limite di $\mathbf{G}_\infty$.

Sia AB il segmento che contiene $\mathbf{G}_\infty$. Se A è un punto di $\mathbf{G}_\infty$, ovvero se A è un punto limite di $\mathbf{G}_\infty$, uno dei punti L_1, L_2, se esistono, coincide con A.

(*) Stolz: *Zur Geometrie der Alten, insbesondere über ein Axiom des Archimedes.* M. Annalen, vol. 22.

Supponiamo che A non sia un punto di $\mathbf{G}_\infty$ e non sia un suo punto limite. Allora possiamo trovare infiniti punti P', di AB, tali che nessun punto di $\mathbf{G}_\infty$ sia interno al segmento AP', e possiamo trovare infiniti punti P'', di AB, tali che almeno un punto di $\mathbf{G}_\infty$ sia interno al segmento AP''. Un punto qualunque di AB, distinto da A, o appartiene al gruppo $\mathbf{G}'_\infty$ dei punti P', o appartiene al gruppo $\mathbf{G}''_\infty$ dei punti P''. Ora è chiaro che tutti i punti di $\mathbf{G}''_\infty$ stanno, su AB, dallo stesso lato di B rispetto a tutti i punti di $A\mathbf{G}'_\infty$, e quindi tutti i punti di $A\mathbf{G}'_\infty$ stanno, su AB, dallo stesso lato di A rispetto a tutti i punti di $\mathbf{G}''_\infty$. Ne segue che esiste un punto L_1 il quale divide AB in due segmenti, uno AL_1 coincidente con $A\mathbf{G}'_\infty$, l'altro L_1B contenente $\mathbf{G}''_\infty$ (14). Non vi sono punti di $\mathbf{G}_\infty$ interni al segmento AL_1, perchè se ve ne fosse uno M i punti interni ad ML_1 apparterrebbero a $\mathbf{G}''_\infty$. Se L_1 non è un punto di $\mathbf{G}_\infty$, preso un punto N interno ad L_1B e tanto vicino ad L_1 quanto si vuole, essendo N un punto di $\mathbf{G}''_\infty$, il segmento AN, e quindi il segmento L_1N, deve contenere almeno un punto di $\mathbf{G}_\infty$; ne segue che L_1 deve essere limite di $\mathbf{G}_\infty$. È dimostrata così l'esistenza di uno, L_1, dei due punti che cerchiamo; l'esistenza dell'altro, L_2, si dimostra analogamente (*).

Sopra una retta possiamo prendere i punti $A_0, A_1, A_2, \ldots$ in modo che i segmenti $A_0A_1, A_0A_2, \ldots$ siano uguali a segmenti dati. Se tra essi non se ne può trovare uno tanto grande quanto si vuole, il gruppo $\mathbf{G}(A_0, A_1, A_2, \ldots)$ è finito e quindi è contenuto in un segmento AL_2, essendo L_2 un punto di $\mathbf{G}$ o un punto limite di $\mathbf{G}$, e potendo L_2 coincidere con A se lo spazio è di curvatura costante negativa. Nel primo caso tra i segmenti dati ne esiste almeno uno uguale ad AL_2, il quale è perciò maggiore o uguale a ciascuno degli altri, è *massimo* tra i segmenti dati; nel secondo caso diciamo che AL_2 è il loro *limite superiore*. Se tra i segmenti dati non se ne può trovare uno tanto piccolo quanto si vuole, cioè se A_0 non è limite del gruppo $A_1A_2\ldots$, sulla retta che lo contiene si può trovare un punto L_1 appartenente al gruppo o limite del gruppo, ed in modo che non vi sia un punto di $A_1A_2\ldots$ interno ad AL_1. Nel primo caso tra i segmenti dati ne esiste almeno uno uguale ad AL_1, il quale è perciò minore o uguale a ciascuno degli altri, è *minimo* tra i segmenti dati; nel secondo caso diciamo che AL_1 è il loro *limite inferiore*.

17. *Un gruppo finito, di infiniti punti distinti di una retta, possiede almeno un punto limite.*

(*) È così pure dimostrato che dati quanti si vogliano numeri compresi in un intervallo finito, in quest'intervallo esiste sempre per essi un limite superiore ed un limite inferiore. Vedi per es. Dini: *Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabili reali.* Pisa, 1872.

Sia G_∞ un gruppo finito di infiniti punti distinti di una retta, e sia AB un segmento che lo contenga (*). Se A, o B, è limite di G_∞, il teorema è dimostrato; supponiamo che A e B non siano limite di G_∞. Allora possiamo trovare infiniti punti P', di AB, tali che G_∞ non contenga infiniti punti distinti del segmento AP', e possiamo trovare infiniti punti P'', di AB, tali che G_∞ contenga infiniti punti distinti del segmento AP''. Un punto qualunque di AB, distinto da A, o appartiene al gruppo G'_∞ dei punti P', o appartiene al gruppo G''_∞ dei punti P''. Ora è chiaro che tutti i punti di G''_∞ stanno, su AB, dallo stesso lato di B rispetto a tutti i punti di AG'_∞, e quindi tutti i punti di AG'_∞ stanno, su AB, dallo stesso lato di A rispetto a tutti i punti di G''_∞. Ne segue che esiste un punto L il quale divide AB in due segmenti, uno AL contenente AG'_∞, l'altro LB contenente G'_∞. Se M, N sono rispettivamente punti interni ad AL, LB, il segmento AM non può contenere infiniti punti distinti di G_∞, il segmento AN ne contiene invece infiniti, vi sono dunque infiniti punti distinti di G_∞ contenuti in MN, e perciò L è limite di G_∞.

Ad una retta appartiene almeno un punto limite di un gruppo finito, se esso contiene punti tanto vicini alla retta quanto si vuole.

Il gruppo finito G_∞ contenga punti tanto vicini alla retta r quanto si vuole. Chiamiamo M' un punto comune alla r e ad una perpendicolare ad essa condotta da un punto M di G_∞, e chiamiamo G' il gruppo dei punti M'. Se i punti distinti di G' sono in numero finito, almeno per un punto M' si possono trovare punti M tanto vicini ad esso quanto si vuole, M' è quindi limite di G_∞ ed il teorema è dimostrato. Supponiamo che G' contenga infiniti punti distinti. Se O è un qualunque punto della r e se la curvatura costante dello spazio è nulla o positiva, abbiamo $OM > OM'$, quindi G' *in ogni caso* è un gruppo finito. Ora prendiamo un gruppo $g_\infty(M_0, M_1, \ldots, M_i, \ldots)$, di punti di G_∞, ed il gruppo $g'(M'_0, M'_1, \ldots, M'_i, \ldots)$ dei relativi punti di G', tali che sia:

$$M_1 M'_1 < \frac{M_0 M'_0}{2}, \qquad M_2 M'_2 < \frac{M_1 M'_1}{2} < \frac{M_0 M'_0}{2^2}, \ldots,$$

$$M_i M'_i < \frac{M_{i-1} M'_{i-1}}{2} < \frac{M_0 M'_0}{2^i}, \ldots .$$

(*) Non si potrebbe trovare un segmento AB contenente G_∞, solamente nel caso dello spazio di curvatura costante negativa e quando ogni punto della retta che contiene G_∞ fosse limite di G_∞, nel qual caso però sarebbe sempre vero il teorema enunciato.

Se i punti distinti di $\mathfrak{g}'$ sono in numero finito, almeno uno di essi è limite di $\mathfrak{g}_\infty$ ed il teorema è dimostrato. Se $\mathfrak{g}'$ contiene infiniti punti distinti, sappiamo che esiste almeno un punto L, della retta r, che è limite di $\mathfrak{g}'$. In un intorno I_L, preso tanto piccolo quanto si vuole, è certo contenuto un punto M'_i di $\mathfrak{g}'$ tanto vicino quanto si vuole al relativo punto M_i di $\mathfrak{g}_\infty$, perchè L è limite di $\mathfrak{g}'$ e perchè esiste solamente un numero finito di punti di $\mathfrak{g}_\infty$ la cui distanza dal relativo punto di $\mathfrak{g}'$ è maggiore di un dato segmento, preso piccolo a piacere. Si vede perciò che L è limite di $\mathfrak{G}_\infty$ (11).

18. *Un gruppo finito, di infiniti punti distinti di un piano, possiede almeno un punto limite.*

La curvatura costante dello spazio sia nulla o positiva. Un gruppo finito $\mathfrak{G}_\infty$, di infiniti punti distinti di un piano, si può immaginare interno ad un triangolo ABC (9).

La retta AM, che congiunge il vertice A con un punto M di $\mathfrak{G}_\infty$, incontra BC in un punto M'. Se il gruppo $\mathfrak{G}'$ dei punti M' contiene solamente un numero finito di punti distinti, almeno in un segmento AM' vi sono infiniti punti distinti di $\mathfrak{G}_\infty$, AM' contiene almeno un punto limite di $\mathfrak{G}_\infty$ (17), ed il teorema è dimostrato. Se il gruppo $\mathfrak{G}'$ contiene infiniti punti distinti, su BC vi è almeno un punto L' limite di $\mathfrak{G}'$ (17), ed allora un segmento $B'C'$, tanto piccolo quanto si vuole, contenente all'interno L' e parte di BC, contiene infiniti punti distinti M', per cui il triangolo $AB'C'$ contiene infiniti punti distinti di $\mathfrak{G}_\infty$. Ora sappiamo che la distanza di un punto del triangolo $AB'C'$ dalla retta AL' non è maggiore della distanza B' o C' dalla retta stessa, dunque si possono trovare punti di $\mathfrak{G}_\infty$ tanto vicini alla retta AL' quanto si vuole e su di essa vi è almeno un punto limite di $\mathfrak{G}_\infty$ (17).

Il teorema si dimostrerebbe analogamente se la curvatura costante dello spazio fosse negativa, prendendo comunque nel piano i punti B, C e prendendo per punto A il polo della loro retta BC.

Ad un piano appartiene almeno un punto limite di un gruppo finito, se esso contiene punti tanto vicini al piano quanto si vuole.

La dimostrazione di questo teorema non differisce da quella del teorema analogo relativo alla retta.

19. *Un gruppo finito, di infiniti punti distinti, possiede almeno un punto limite.*

Se la curvatura costante dello spazio è nulla o positiva, possiamo dimostrare il teorema come abbiamo già dimostrato l'analogo, relativo al piano (18), immaginando il gruppo finito $\mathfrak{G}_\infty$, di infiniti punti distinti, interno ad un tetraedro $ABCD$, congiungendo ogni punto M di $\mathbf{G}_\infty$ con A, prendendo il punto M' in cui la retta AM incontra il piano BCD, ed osservando che il gruppo $\mathbf{G}'$ dei punti M' o è costituito da un numero finito di punti distinti, o possiede almeno un punto limite sul piano BCD (18). Se poi la curvatura costante dello spazio è negativa, il teorema si dimostra nello stesso modo prendendo a piacere il piano BCD e per punto A il suo polo (*).

20. *Se* $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}'$ *sono due gruppi finiti e se possiamo trovare due punti, uno di* $\mathbf{G}$ *e l'altro di* $\mathbf{G}'$, *tanto vicini fra loro quanto si vuole, o* $\mathbf{G}$ *e* $\mathbf{G}'$ *hanno un punto limite comune, ovvero un punto di* $\mathbf{G}$, *o di* $\mathbf{G}'$, *è limite di* $\mathbf{G}'$, *o di* $\mathbf{G}$.

È evidentemente possibile prendere un gruppo $\mathbf{g}(M_0, M_1, \ldots, M_i, \ldots)$ di punti di $\mathbf{G}$, ed un gruppo $\mathbf{g}'(M'_0, M'_1, \ldots, M'_i, \ldots)$ di punti di $\mathbf{G}'$, tali che sia:

$$M_1 M'_1 < \frac{M_0 M'_0}{2}, \qquad M_2 M'_2 < \frac{M_1 M'_1}{2} < \frac{M_0 M'_0}{2^2}, \ldots,$$

$$M_i M'_i < \frac{M_{i-1} M'_{i-1}}{2} < \frac{M_0 M'_0}{2^i}, \ldots .$$

Se uno dei gruppi $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}'$ è costituito da un numero finito di punti distinti, almeno uno di essi è limite dell'altro gruppo e quindi esiste un punto di $\mathbf{G}$, o di $\mathbf{G}'$, che è limite di $\mathbf{G}'$, o di $\mathbf{G}$. Se ciascuno dei gruppi $\mathbf{g}$, $\mathbf{g}'$ contiene infiniti punti distinti, preso un punto L limite di uno di essi (19), si dimostra, come abbiamo fatto in un caso analogo (17), che L è limite dell'altro, quindi L o è limite di $\mathbf{G}$ e di $\mathbf{G}'$, ovvero è un punto di $\mathbf{G}$, o di $\mathbf{G}'$, limite di $\mathbf{G}'$, o di $\mathbf{G}$.

Da ciò che precede discende immediatamente che due gruppi continui hanno almeno un punto comune, se ad essi si possono inscrivere due linee poligonali, che abbiano almeno un punto comune ed i cui lati siano tanto piccoli quanto si vuole.

V. Le corrispondenze $[m, n]$ continue tra i punti di due gruppi.

21. Consideriamo due gruppi $\mathbf{G}^m$, $\mathbf{G}^n$, di elementi qualunque che indichiamo rispettivamente con $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, e supponiamo che ogni elemento $\mathbf{M}$ determini n *corrispondenti* elementi $\mathbf{N}$, ed n soli, mentre ogni elemento $\mathbf{N}$ corrisponda così ad m elementi $\mathbf{M}$, e ad m soli. Allora diciamo che è stabilita

(*) I teoremi dei n.i 17, 18, 19 sono stati enunciati e dimostrati, però in altro modo, da WEIERSTRASS nelle sue lezioni orali sulla teoria delle funzioni analitiche.

una corrispondenza $[m, n]$ tra G^m e G^n, e per distinguere una dall'altra la legge per cui dagli elementi M si passa a quelli corrispondenti N, e la legge per cui dagli elementi N si passa a quelli corrispondenti M, chiamiamo la prima *corrispondenza diretta* e la seconda *corrispondenza inversa.*

Una corrispondenza $[m, 1]$, ovvero $[1, n]$, la diciamo *univoca.* Una corrispondenza $[1, 1]$ la diciamo *biunivoca.*

22. Ciascuno di due elementi corrispondenti lo chiamiamo *polo* dell'altro. Se $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{g}''$ sono due gruppi rispettivamente contenuti in G^m, G^n, e se $\mathfrak{g}''$ è costituito da tutti i poli di tutti gli elementi di $\mathfrak{g}'$, diciamo che $\mathfrak{g}''$ è il *gruppo polare* di $\mathfrak{g}'$, ovvero anche il *gruppo corrispondente* a $\mathfrak{g}'$.

23. Un elemento M, o N, lo chiamiamo rispettivamente *unito di ordine* $\mu - 1$, o $\nu - 1$, se è multiplo secondo μ, o ν, per il gruppo polare di un elemento N, o M.

Un elemento M, o N, lo chiamiamo rispettivamente *eccezionale di ordine* $\nu - 1$, o $\mu - 1$, se il suo gruppo polare contiene un elemento unito di ordine $\nu - 1$, o $\mu - 1$.

Per generalità di linguaggio un elemento non eccezionale si può anche dire eccezionale di ordine 0, un elemento non unito si può anche dire unito di ordine 0.

Ad un elemento M, o N, può corrispondere rispettivamente un gruppo $\underline{\mathfrak{g}}_n([\mathsf{N}_1]^{\nu_1}, [\mathsf{N}_2]^{\nu_2}, \ldots, [\mathsf{N}_{n'}]^{\nu_{n'}})$, o $\mathfrak{g}_m([\mathsf{M}_1]^{\mu_1}, [\mathsf{M}_2]^{\mu_2}, \ldots, [\mathsf{M}_m]^{\mu_{m'}})$, ed allora possiamo dire che ad esso sono sovrapposti n', o m', elementi eccezionali di ordine $\nu_1 - 1$, $\nu_2 - 1, \ldots, \nu_{n'} - 1$, o $\mu_1 - 1$, $\mu_2 - 1, \ldots, \mu_{m'} - 1$.

Un elemento M, o N, può essere multiplo per più gruppi polari di elementi eccezionali N, o M, ed allora possiamo dire che ad esso sono sovrapposti altrettanti punti uniti.

Ad un elemento M, o N, possono insieme essere sovrapposti più elementi eccezionali e più elementi uniti.

24. Un elemento M, o N, è rispettivamente multiplo secondo n, o m, per il gruppo dei gruppi polari dei suoi poli, i rimanenti $n(m-1)$, o $m(n-1)$, elementi del gruppo sono determinati da M, o N. Si vede così che si ha una corrispondenza $[n(m-1), n(m-1)]$ di G^m con sè stesso, ed una corrispondenza $[m(n-1), m(n-1)]$ di G^n con sè stesso. Queste due corrispondenze chiamiamole *congiunte* alla data $[m, n]$, e precisamente diciamo la prima congiunta alla corrispondenza inversa e la seconda congiunta alla corrispondenza diretta.

Una corrispondenza univoca ammette una sola corrispondenza congiunta. Una corrispondenza biunivoca non ammette corrispondenze congiunte.

Due gruppi contenuti in G^m, o G^n, diciamoli *congiunti*, se ciascuno è polare dell'altro nella corrispondenza rispettivamente congiunta alla inversa o alla diretta.

25. I gruppi G^m, G^n siano rispettivamente costituiti da punti M, N. Se N è un punto unito di ordine $\nu - 1 \gtreqless 0$ (23), polo di M, supponiamo che preso un intorno I_N, tanto piccolo quanto si vuole e sufficientemente piccolo in modo da contenere il solo polo N di M, esista sempre un intorno I_M sufficientemente piccolo in modo che appartengano ad I_N ν poli, e solamente ν, di un punto qualunque di G^m contenuto in I_M, ed allora chiamiamo *continua* la corrispondenza diretta stabilita tra G^m, G^n.

Analogamente si può definire la continuità della corrispondenza inversa.

Se sono insieme continue la corrispondenza diretta e la inversa, diciamo più brevemente che è *continua* la corrispondenza $[m, n]$ stabilita tra G^m, G^n; allora sono evidentemente continue anche le corrispondenze ad essa congiunte (24).

26. Se due gruppi di punti G^m, G^n si deducono uno dall'altro con un numero finito di projezioni e sezioni, ogni punto M di G^m individua un corrispondente punto N di G^n, quello che si deduce da M con le dette projezioni e sezioni, e viceversa. Si vede subito che tra G^m, G^n viene così stabilita una corrispondenza biunivoca continua.

Fra un arco di circolo e la sua corda si può sempre stabilire una corrispondenza biunivoca continua, basta per ciò proiettare l'arco sulla corda, da un punto non contenuto in esso, ma posto sul suo circolo. Da ciò si deduce immediatamente che: dato un gruppo di più punti distinti di un arco circolare, possiamo sempre trovare un arco circolare che li contenga e sia terminato da due punti ciascuno dei quali o appartenga al gruppo, ovvero sia limite del gruppo (16).

Tra un segmento di una sfera e la superficie del suo circolo base si può sempre stabilire una corrispondenza biunivoca continua, basta perciò proiettare il segmento sulla superficie del circolo base, da un punto non contenuto nel segmento, ma posto sulla sua sfera.

27. Estendiamo il concetto ordinario di elemento geometrico, chiamando rispettivamente *linea, superficie* o *solido,* anche un gruppo di punti che, in una corrispondenza $[m, n]$ continua, è rispettivamente polare di una linea, superficie o solido.

28. La corrispondenza $[m, n]$ diretta, stabilita tra G^m, G^n, sia continua.

Per ogni polo N di un punto M prendiamo un intorno I_N, il cui raggio sia uguale ad un dato segmento AB. Allora è chiaro che possiamo trovare infiniti intorni I_M, tali che ciascun polo di ciascun punto di G^m contenuto in uno di essi appartenga almeno ad un intorno I_N. I raggi degli intorni I_M o ammettono un massimo $A\,B'$, o ammettono un limite superiore $A'B'$, o si possono rendere tanto grandi quanto si vuole (16). Nel primo e nel secondo caso, se I'_M è l'intorno di M il cui raggio è uguale ad $A'B'$, è chiaro che ciascun polo di ciascun punto di G^m *interno* ad I'_M appartiene almeno ad un intorno I_N, ed $A'B'$ lo chiamiamo il *raggio di continuità,* nel punto M e relativo alla data distanza AB; nel terzo caso ciascun polo di ciascun punto di G^m appartiene almeno ad un intorno I_N, per cui G^n è contenuto negli intorni I_N, e diciamo che nel punto M vi è un raggio di continuità infinito, relativo alla data distanza AB.

29. Supponiamo che sia continua la corrispondenza $[m, n]$ diretta, che G^m sia finito e chiuso, e che sia possibile trovare punti di G^m nei quali il raggio di continuità, relativo ad una data distanza AB, sia tanto piccolo quanto si vuole. Scegliamo un gruppo $M_0 M_1 \ldots M_i \ldots$ di punti nei quali il raggio di continuità, relativo ad AB, sia rispettivamente minore di PQ, $\frac{PQ}{2}$, $\frac{PQ}{2^2}, \ldots,$ $\frac{PQ}{2^i}, \ldots,$ essendo PQ un segmento fissato a piacere. Esiste almeno un punto M limite del gruppo $M_0 M_1 \ldots M_i \ldots$, perchè G^m è per ipotesi finito e chiuso, ed in un intorno qualunque di M vi sono sempre infiniti punti di G^m nei quali il raggio di continuità, relativo ad AB, è tanto piccolo quanto si vuole. Per ciascun polo N di M prendiamo un intorno I'_N il cui raggio sia $\leqq \frac{AB}{2}$, e sufficientemente piccolo in modo che ciascun intorno I'_N contenga il solo polo di N di M, quindi prendiamo un intorno I'_M sufficientemente piccolo in modo che ciascun intorno I'_N, se N è unito di ordine $\nu - 1 \gtreqless 0$, contenga ν poli, e solamente ν, di ciascun punto di G^m contenuto in I'_M.

Se I''_M è un intorno il cui raggio è la metà di quello di I'_M, e se M' è un qualunque punto di G^m contenuto in I''_M, ciascuno degli intorni I'_N è contenuto almeno in uno degli intorni $I_{N'}$ dei poli N' di M', che hanno il raggio uguale ad AB, e l'intorno $I_{M'}$, che ha il raggio uguale a quello di I''_M, è contenuto in I'_M. Si vede perciò che ciascun polo di ciascun punto di G^m contenuto in $I_{M'}$, essendo contenuto in un intorno I'_N, è contenuto almeno in un intorno $I_{N'}$, dunque il raggio di continuità in M', relativo alla distanza AB, non può essere minore del raggio di $I_{M'}$, cioè M non può essere limite di punti nei quali il raggio di continuità, relativo ad AB, sia tanto piccolo quanto si vuole. Ne segue che i raggi di continuità, nei punti di G^m, relativi alla stessa distanza AB, o ammettono un minimo, o ammettono un limite inferiore, che in ogni caso possiamo chiamare *raggio minimo di continuità* relativo alla data distanza AB (*).

30. Supponiamo che G^n sia indefinito. Se N_1, N_2 sono due qualunque dei suoi punti, possiamo trovarne un altro N_3 tale che sia $N_1N_3 > 2N_1N_2$, quindi un altro N_4 tale che sia $N_1N_4 > 2N_1N_3$, e così di seguito, ottenendo un gruppo $G_\infty(N_1, N_2, N_3,...)$. Ora il gruppo polare di G_∞, se G^m è finito e chiuso, deve essere finito e deve perciò possedere almeno un punto limite M contenuto in G^m, quindi, se la corrispondenza diretta è continua, almeno uno dei poli di M deve essere limite di G_∞; ma G_∞ non possiede punti limite, perchè la distanza di due qualunque dei suoi punti è maggiore di N_1N_2, dunque G^n deve essere finito.

Sia g^n un gruppo, contenuto in G^n, il quale abbia per limite un punto L limite di G^n, ed esso solo (15). Almeno un punto M di G^m deve essere limite del gruppo g^m polare di g^n, perchè abbiamo supposto G^m finito e chiuso. Per ciascun polo N di M, prendiamo un intorno I_N, quindi prendiamo un intorno I_M, sufficientemente piccolo in modo che ciascun polo di ciascun punto di G^m contenuto in I_M appartenga almeno ad un intorno I_N. In I_M vi sono infiniti punti di g^m, quindi gli intorni I_N devono contenere infiniti punti di g^n, e siccome questi intorni si possono prendere tanto piccoli quanto si vuole, almeno uno dei punti N deve essere limite di g^n, e perciò deve coincidere con L. Resta così dimostrato che L è un punto di G^n, cioè che G^n è chiuso.

Se è continua una corrispondenza $[m, n]$ *diretta stabilita tra i gruppi* G^m, G^n, *e se* G^m *è finito e chiuso, anche* G^n *è finito e chiuso.*

Si vede poi immediatamente che G^n è perfetto, se la corrispondenza diretta è continua e se G^m è finito e perfetto.

Sia M' un determinato punto di G^m, M sia uno dei poli di un qualunque punto N di G^n, ed $A'B'$ sia il raggio minimo di continuità relativo ad una data distanza $\frac{AB}{2^i}$ (29). Se supponiamo che G^m sia continuo, possiamo trovare

(*) Come caso particolare, quando G^m, G^n sono due segmenti, resta dimostrato il teorema di Cantor: « Se $f(x)$ è una funzione di variabile reale, monodroma e continua in un intervallo finito (a, b), dato un numero ε tanto piccolo quanto si vuole, possiamo sempre trovare un numero δ sufficientemente piccolo, in modo che a due qualunque valori della variabile, compresi nell'intervallo (a, b) e la cui differenza sia $\lesseqgtr \delta$, corrispondano due valori della funzione la cui differenza sia $\lesseqgtr \varepsilon$. » (Heine, *Die Elemente der Functionenlehre*, Crelle, vol. 74. — Dini, l. c.).

un gruppo di ρ dei suoi punti $M_1, M_2, \ldots, M_\rho$, tali che ciascuno dei segmenti $MM_1, M_1M_2, \ldots, M_\rho M'$ sia minore di $A'B'$. Ora, essendo $MM_1 < A'B'$, si può trovare almeno un polo N_1 di M_1 tale che sia $NN_1 < \frac{AB}{2^i}$, essendo $M_1M_2 < A'B'$, si può trovare almeno un polo N_2 di M_2 tale che sia $N_1N_2 < \frac{AB}{2^i}$, e così di seguito, per cui avremo ρ punti $N_1, N_2, \ldots, N_\rho$, ed essendo $M_\rho M' < \frac{AB}{2^i}$, potremo trovare un polo N' di M tale che sia $N_\rho N' < \frac{AB}{2^i}$. Prendendo i successivamente uguale ad 1, 2, 3,... abbiamo infiniti gruppi come $NN_1 \ldots N_\rho N'$, essendo sempre N' uno dei poli di M'; ma potendo essere diverso per diversi valori di i. È chiaro però che, essendo i poli N' in numero finito, almeno uno di essi sarà contenuto in infiniti gruppi $NN_1 \ldots N_\rho N'$, dati da uno stesso punto N di $\mathfrak{G}^n$, quindi si vede che $\mathfrak{G}^n$ è costituito da un numero $\overline{\leqq} n$ di gruppi continui, ed è perciò che abbiamo chiamato continue le corrispondenze che ora stiamo studiando.

Se è continua una corrispondenza $[m, n]$ *diretta stabilita tra i gruppi* $\mathfrak{G}^m$, $\mathfrak{G}^n$, *e se* $\mathfrak{G}^m$ *è finito e continuo,* $\mathfrak{G}^n$ *è finito ed è costituito da un numero* $\overline{\leqq} n$ *di gruppi continui.*

31. *Se è continua una corrispondenza* $[m, n]$ *diretta stabilita tra due gruppi* $\mathfrak{G}^m$, $\mathfrak{G}^n$, *e se* $\mathfrak{G}^m$ *è finito e chiuso, per un punto qualunque* N *di* $\mathfrak{G}^n$ *possiamo trovare un intorno* I_N *sufficientemente piccolo, in modo che ciascun polo di ciascun punto di* $\mathfrak{G}^n$ *contenuto in* I_N *appartenga almeno ad uno di dati intorni* I_M, *dei poli* M *di* N, *presi tanto piccoli quanto si vuole.*

Supponiamo che N sia limite di un gruppo $\mathfrak{G}'^n$, di punti di $\mathfrak{G}^n$, tali che per ciascuno di essi almeno un suo polo sia esterno a ciascuno degli intorni I_M.

Se il gruppo $\mathfrak{g}^n$ è contenuto in $\mathfrak{G}'^n$ ed ha per limite il punto N, ed esso solo (15), il gruppo polare di $\mathfrak{g}^n$ contiene infiniti punti esterni a ciascun intorno I_M, i quali costituiscono un gruppo $\mathfrak{g}^m$. Essendo per ipotesi $\mathfrak{G}^m$ finito e chiuso, esiste almeno un punto M' di $\mathfrak{G}^m$ che è limite di $\mathfrak{g}^m$. Ora è chiaro che, essendo continua la corrispondenza diretta, almeno uno N' dei poli di M' deve essere limite di $\mathfrak{g}^n$, e quindi deve coincidere con N; ma ciò è impossibile perchè M' è esterno a ciascun intorno I_M e quindi è distinto dai punti M, dunque N non può estere limite di $\mathfrak{G}'^n$, e perciò si può prendere un intorno I_N sufficientemente piccolo in modo che ciascun polo di ciascun punto di $\mathfrak{G}^n$ contenuto in I_N appartenga almeno ad uno degli intorni I_M.

Supponendo $m = 1$ abbiamo che:

Se è continua una corrispondenza univoca $[1, n]$ *diretta stabilita tra i* *gruppi* G^m, G^n, *e se* G^m *è finito e chiuso, anche la corrispondenza inversa è continua.*

32. *Se sono continue una corrispondenza* $[m, 1]$ *diretta stabilita tra i gruppi* G^m, G^n *e la corrispondenza congiunta* $[m-1, m-1]$, *e se* G^m *è finito e chiuso, anche la corrispondenza inversa è continua.*

Sia N un punto qualunque di G^n e sia $\varrho_m([M_1]^{\mu_1}, \ldots, [M_{m'}]^{\mu_{m'}})$ il suo gruppo polare.

Presi gli intorni I_{M_r}, ciascuno tanto piccolo quanto si vuole, possiamo trovare un intorno I_N sufficientemente piccolo in modo che ciascun polo di ciascun punto di G^n contenuto in I_N appartenga ad un intorno I_{M_r} (31). Essendo continua la corrispondenza congiunta, possiamo prendere gli intorni $I_{M_2}, \ldots, I_{M_{m'}}$ sufficientemente piccoli in modo che un punto qualunque di G^m contenuto in uno qualunque di essi dia sempre, rispetto alla corrispondenza congiunta, almeno un polo appartenente ad I_{M_1}. Allora deve appartenere ad I_{M_1} almeno un polo di un punto qualunque di G^n contenuto in I_N. Al punto M_1 sono congiunti i punti M_1, $M_2, \ldots, M_{m'}$ rispettivamente contati $\mu_1 - 1$, $\mu_2, \ldots, \mu_{m'}$ volte. Essendo continua la corrispondenza congiunta, possiamo prendere gli intorni I'_{M_r}, ciascuno tanto piccolo quanto si vuole e sufficientemente piccolo in modo da contenere il solo polo M_r di N, e possiamo prendere l'intorno I_{M_1} contenuto in I'_{M_1} e sufficientemente piccolo in modo che dei punti congiunti ad un qualunque punto di G^m contenuto in I_{M_1} ve ne siano rispettivamente $\mu_1 - 1$, $\mu_2, \ldots, \mu_{m'}$ contenuti in $I'_{M_1}, I'_{M_2}, \ldots, I'_{M_m}$. Dopo ciò, ricordandoci che appartiene ad I_{M_1} almeno un polo di un punto qualunque di G^n contenuto in I_N, vediamo subito che ad I'_{M_1} appartiene il detto polo insieme ad altri $\mu_1 - 1$, e che ad $I'_{M_2}, \ldots, I'_{M_{m'}}$ appartengono rispettivamente $\mu_2, \ldots, \mu_{m'}$ poli, dunque è continua anche la corrispondenza inversa.

33. Supponiamo stabilita una corrispondenza biunivoca continua tra un segmento M_1M_2 ed un gruppo G^n di punti di uno stesso segmento. I poli dei punti M_1, M_2 siano rispettivamente N_1, N_2. Essendo M_1M_2 finito e continuo, anche G^n deve essere finito e continuo (30). Ora se un punto N interno al segmento N_1N_2 non appartenesse a G^n, non potrebbe essere limite di G^n, e quindi esisterebbe un intorno I_N, sufficientemente piccolo, non contenente punti di G^n; ma è chiaro che allora G^n non sarebbe ben concatenato, dunque ogni punto di N_1N_2 deve appartenere a G^n. Inversamente si dimostra, nello stesso modo, che ogni punto di M_1M_2 deve essere polo di un punto di N_1N_2, dunque G^n deve coincidere con N_1N_2.

Supponiamo stabilita una corrispondenza continua $[m, n]$ tra una retta r_m

ed un gruppo $\mathfrak{G}^n$ di punti di una retta r_n, supponiamo che $\mathfrak{G}^n$ sia chiuso, ciò che avviene sempre se la curvatura costante dello spazio è negativa (30), e supponiamo che i punti uniti della corrispondenza siano in numero finito. Un polo N di un punto M della r_m, non eccezionale e non unito, deve certo essere interno ad una parte $\mathfrak{g}^n$, della r_n, terminata da punti ciascuno dei quali sia eccezionale o unito, e non contenente altri punti eccezionali o uniti. Ogni punto di $\mathfrak{g}^n$ deve appartenere a $\mathfrak{G}^n$. Infatti supponiamo che un punto O di $\mathfrak{g}^n$ non appartenga a $\mathfrak{G}^n$, e quindi nemmeno sia limite di $\mathfrak{G}^n$. Possiamo allora trovare un punto N', di $\mathfrak{G}^n$, contenuto nel segmento NO e tale che al segmento $N'O$ non appartengano punti di $\mathfrak{G}^n$ distinti da N' (16), e se M' è uno dei poli di N' ed $I_{N'}$ è un intorno sufficientemente piccolo al quale sia esterno O, essendo continua la corrispondenza stabilita, possiamo trovare un intorno $I_{M'}$ sufficientemente piccolo in modo che, se $M'_1 M'_2$ è la parte della r_m contenuta in $I_{M'}$, ad ogni punto del segmento $M'_1 M'_2$ corrisponda un punto di $I_{N'}$, ed uno solo, il quale inversamente sia polo di un solo punto di $M'_1 M'_2$. Ora abbiamo dimostrato che il gruppo dei poli di $M'_1 M'_2$ contenuti in $I_{N'}$ deve essere un segmento al quale deve essere interno N', dunque $N'O$ deve contenere punti di $\mathfrak{G}^n$ distinti da N'; ma abbiamo preso $N'O$ in modo che non ne contenga, dunque O, ossia un qualunque punto di $\mathfrak{g}^n$, deve essere un punto di $\mathfrak{G}^n$.

Se è stabilita una corrispondenza $[m, n]$ continua tra una retta r_m ed un gruppo $\mathfrak{G}^n$ di punti di una retta r_n, se $\mathfrak{G}^n$ è chiuso e se il numero dei punti uniti è finito, $\mathfrak{G}^n$ è costituito da parti della retta r_n terminate da punti uniti o eccezionali.

In particolare:

Se è stabilita una corrispondenza biunivoca continua tra una retta r_m ed un gruppo $\mathfrak{G}^n$ di punti di una retta r_n, se $\mathfrak{G}^n$ è chiuso coincide con la retta r_n.

Analogamente si dimostra che:

Se è stabilita una corrispondenza $[m, n]$ continua tra un circolo c_m ed un gruppo $\mathfrak{G}^n$ di punti di un circolo c_n, e se il numero dei punti uniti è finito, $\mathfrak{G}^n$ è costituito da archi del circolo c_n terminati da punti uniti o eccezionali.

In particolare:

Se è stabilita una corrispondenza biunivoca continua tra un circolo c_n ed un gruppo $\mathfrak{G}^n$ di punti di un circolo c_n, $\mathfrak{G}^n$ coincide con c_n.

34. Tra un piano π_m ed un gruppo $\mathfrak{G}^n$ di punti di un piano π_n sia stabilita una corrispondenza $[m, n]$ continua, $\mathfrak{G}^n$ sia chiuso ed il numero dei

punti uniti della corrispondenza sia finito. Supponiamo che un punto O di π_n non appartenga a $\mathfrak{G}^n$, e quindi non sia limite di $\mathfrak{G}^n$. Nel piano π_n conduciamo per O una retta r la quale contenga almeno un punto di $\mathfrak{G}^n$, senza contenere punti eccezionali o uniti, ciò che è evidentemente possibile, perchè il numero dei punti eccezionali ed uniti è per ipotesi finito, e perchè se ogni punto di $\mathfrak{G}^n$ fosse sopra una delle rette che li uniscono con O, ad O si potrebbe sostituire un altro punto di π_n sufficientemente vicino ad esso in modo da non appartenere a $\mathfrak{G}^n$. Contenendo la r almeno un punto di $\mathfrak{G}^n$, possiamo trovare un suo segmento ON, terminato da un punto N di $\mathfrak{G}^n$ e non contenente punti di $\mathfrak{G}^n$ distinti da N (16). Essendo continua la corrispondenza, e non essendo N eccezionale o unito, preso un intorno I_N possiamo trovare un intorno I_M, di un polo M di N, sufficientemente piccolo in modo che appartenga ad I_N un polo, ed uno solo, di un punto qualunque di I_M, e che I_M non contenga coppie di punti congiunti, per cui un punto di I_N, se è polo di un punto di I_M, lo è di uno solo. Si ha perciò una corrispondenza biunivoca continua tra i punti di I_M ed un gruppo $\mathfrak{g}^n$ di punti di I_N. In π_m tiriamo tre raggi MM', MM'', MM''' di I_M, chiamiamo l', l'', l''' rispettivamente le linee ad essi corrispondenti in I_N (27), e chiamiamo N', N'', N''' rispettivamente i poli di M', M'', M''' posti in I_N. Sia I'_N un intorno al quale siano esterni i punti O, N', N'', N'''. La l' contiene il punto N interno ad I'_N ed il punto N' esterno ad I'_N, quindi deve incontrare il contorno di I'_N almeno in un punto, perchè esso è incontrato almeno in un punto da una qualunque linea poligonale inscritta alla l' e con gli estremi nei punti N, N' (20). Il gruppo dei punti comuni alla l' ed al contorno di I'_N è chiuso, perchè è comune a due gruppi ciascuno dei quali è chiuso, quindi deve essere chiuso anche il gruppo dei suoi poli contenuti in MM' (30), e perciò se ne deve trovare uno M_1 tale che il segmento MM_1 non ne contenga altri (16). Ora, se N_1 è il polo di M_1 contenuto sul contorno di I'_N, al segmento MM_1 corrisponde in I_N una linea l_1, parte della l', che ha il solo punto N_1 sul contorno di I'_N e tutti gli altri suoi punti interni ad I'_N. Analogamente possiamo trovare un punto M_2 interno ad MM'' ed un punto M_3 interno ad MM''', tali che i loro rispettivi poli N_2, N_3, contenuti in I_N, stiano sul contorno di I'_N e che ai segmenti MM_2, MM_3 corrispondano in I_N due linee l_2, l_3, rispettivamente parti delle l'', l'' e che abbiano rispettivamente i soli punti N_2, N_3 sul contorno di I'_N e tutti gli altri loro punti interni ad I'_N. Se O' è il punto in cui il contorno di I'_N incontra il segmento NO, tra i punti N_1, N_2, N_3, O', sul circolo che li contiene, due devono necessariamente separare gli altri due; supponiamo che N_1, O' separino N_2, N_3, e chiamiamo p_1 una qualunque linea poligonale inscritta alla l_1 e con gli estremi in N_1, N. Sia I'_M un intorno sufficientemente piccolo in modo che appartenga ad I'_N un polo, e quindi uno solo, di un suo qualunque punto, siano M'_2, M'_3 due punti interni ad I'_M e rispettivamente interni ai segmenti M_2M, M_3M, e siano rispettivamente N'_2, N'_3 i loro poli contenuti in I'_N. Nell'intorno I'_M possiamo portare M'_2 a coincidere con M'_3, facendogli descrivere una linea c, senza fargli incontrare il segmento MM_1. Alla linea c' costituita dalla c e dai segmenti $M_2M'_2$, $M_3M'_3$ corrisponde in I'_N una linea l. Se p è una qualunqne linea poligonale inscritta nella l e con gli estremi in N_1, N_2, evidentemente la p deve incontrare la linea poligonale costituita dalla p_1 e dal segmento NO'; ma i lati delle poligonali p, p_1 si possono prendere sufficientemente piccoli in modo da non avere punti comuni, perchè altrimenti avrebbero almeno un punto comune le linee l, l_1 (20) e quindi il segmento MM_1 e la linea c', dunque il segmento NO' deve incontrare la p, comunque siano presi piccoli i suoi lati. Ne segue che NO' e la l devono avere almeno un punto comune, distinto da N perchè la l non contiene N, e perciò che vi deve essere almeno un punto di G^n interno ad NO', mentre noi abbiamo preso NO' in modo che contenga il solo punto N di G^n. È dunque impossibile che un punto O di π_n non sia un punto di G^n.

Se è stabilita una corrispondenza $[m, n]$ *continua tra un piano* π_m *ed un gruppo* G^n *di punti di un piano* π_n, *se* G^n *è chiuso e se il numero dei punti uniti è finito,* G^n *coincide con* π_n.

In particolare:

Se è stabilita una corrispondenza biunivoca continua tra un piano π_m *ed un gruppo* G^n *di punti di un piano* π_n, *se* G^n *è chiuso coincide con* π_n.

Analogamente si dimostra che:

Se è stabilita una corrispondenza $[m, n]$ *continua tra una sfera* σ_m *ed un gruppo* G^n *di punti di una sfera* σ_n, *e se il numero dei punti uniti è finito,* G^n *coincide con la* σ_n.

In particolare:

Se è stabilita una corrispondenza biunivoca continua tra una sfera σ_m *ed un gruppo* G^n *di punti di una sfera* σ_n, G^n *coincide con la* σ_n.

I precedenti teoremi sulle sfere si possono anche dimostrare facendo prima vedere che, se G^n non coincide con la σ_n, si può trovare un arco $\widehat{NO}$ di circolo massimo della σ_n che contenga il solo punto N di G^n, poi prendendo i due intorni I_M, I_N come nel caso dei piani, facendo corrispondere biunivocamente e continuamente (26) alle superficie dei loro circoli base i segmenti delle sfere σ_m, σ_n contenuti in I_M, I_N, e quindi proseguendo a ragionare come nel caso dei due piani.

VI. Le corrispondenze $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$ continue, tra i punti di r gruppi.

35. Consideriamo r gruppi $G^{m_1}, G^{m_2}, \ldots, G^{m_r}$ di elementi qualunque, che indichiamo rispettivamente con $M^1, M^2, \ldots, M^r$, e supponiamo che ogni gruppo $G_{r-1}(M^1, M^2, \ldots, M^{r-1})$ determini m_r *corrispondenti* elementi $M^r_1, M^r_2, \ldots, M^r_{m_r}$, e solamente m_r, mentre ciascuno di essi corrisponda così ad $r-2$ elementi M^1, $M^2, \ldots, M^{i-1}, M^{i+1}, \ldots, M^{r-1}$, comunque presi nei rispettivi gruppi, insieme a ciascuno di m_i elementi M^i, e solamente insieme a ciascuno di essi. Allora diciamo che è stabilita una *corrispondenza* $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$ *di rango* $\rho = r-1$ tra gli r gruppi G^{m_i}, e per distinguere la legge per cui dai gruppi:

$$G_{r-1}(M^1, M^2, \ldots, M^{r-1}),$$

si passa agli elementi corrispondenti M^r, da quelle per cui dai gruppi:

$$G_{r-1}(M^1, \ldots, M^{i-1}, M^{i+1}, \ldots, M^r),$$

si passa agli elementi corrispondenti M^i, chiamiamo *corrispondenza diretta* la prima e *corrispondenza inversa* ciascuna delle altre $r-1$.

Diciamo *h-univoca* una corrispondenza $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$, se tra i numeri m_i ve ne sono h, e solamente h, uguali ad 1.

Chiamiamo *ordine* di una corrispondenza $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$ il numero $m_{12\ldots r} = m_1 + m_2 + \cdots + m_r$.

Le corrispondenze $[m, n]$, che abbiamo finora studiato, sono quelle che adesso chiamiamo di 1.° rango.

36. Rispetto ad una corrispondenza $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$ chiamiamo *polo* di un gruppo $G_{r-1}(M^1, \ldots, M^{i-1}, M^{i+1}, \ldots, M^r)$ ciascuno degli m_i elementi ad esso corrispondenti. Se $g^{m_1}, g^{m_2}, \ldots, g^{m_r}$ sono gruppi contenuti rispettivamente in $G^{m_1}, G^{m_2}, \ldots, G^{m_r}$, e se uno di essi g^{m_i} è costituito da tutti i poli di tutti i possibili gruppi di $r-1$ elementi ciascuno di uno dei gruppi $g^{m_1}, \ldots, g^{m_{i-1}}, g^{m_{i+1}}, \ldots, g^{m_r}$, diciamo che g^{m_i} è il *gruppo polare* del gruppo $g^i(g^{m_1}, \ldots, g^{m_{i-1}}, g^{m_{i+1}}, \ldots, g^{m_r})$, ovvero anche il *gruppo corrispondente* ad esso.

Se un gruppo è polare di sè stesso lo chiamiamo *autopolare* rispetto alla data corrispondenza. Diciamo *aggruppamento autopolare,* rispetto alla data corrispondenza, quello A_r costituito da tutti i possibili gruppi $G_r(M^1, M^2, \ldots, M^r)$, tali che ogni elemento di ciascuno sia polo degli altri $r-1$.

37. Un gruppo $G_k(M^{i_1}, \ldots, M^{i_k})$ costituisce un elemento dell'aggruppamento autopolare A_r insieme a ciascun elemento di un aggruppamento di ordine $r-k$, che indichiamo con il simbolo $A_{r-k}^{M^{i_1}\ldots M^{i_k}}$, ovvero anche $A_{r-k}^{G_k}$, e che chiamiamo *aggruppamento polare* di G_k rispetto ad A_r. L'aggruppamento $A_1^{G_{r-1}}$, polare di un gruppo $G_{r-1}(M^1, \ldots, M^{i-1}, M^{i+1}, \ldots, M^r)$, è di 1.° ordine e coincide con il gruppo polare di G_{r-1}.

L'aggruppamento $A_{r-k}^{G_k}$ è autopolare rispetto ad una corrispondenza $[m_{i_{k+1}}, \ldots, m_{i_r}]$, di ordine $m_{i_{k+1}\ldots i_r} = m_{i_{k+1}} + \cdots + m_{i_r}$ e di rango

$$r - k - 1 = \rho - k,$$

stabilita tra i gruppi $G^{m_{i_{k+1}}}, \ldots, G^{m_{i_r}}$, e che chiamiamo *corrispondenza polare* di G_k rispetto a quella data.

38. Supponiamo che tra i gruppi $G^{m_1}, \ldots, G^{m_r}$ sia stabilita una corrispondenza $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$, e che tra i gruppi $G^{m'_1}, \ldots, G^{m'_{r'}}$ sia stabilita una corrispondenza $[m'_1, m'_2, \ldots, m'_{r'}]$. Se i gruppi G^{m_1}, $G^{m'_1}$ coincidono, ogni loro elemento appartiene ad infiniti gruppi G_r, $G_{r'}$ elementi degli aggruppamenti autopolari rispetto alle due corrispondenze date, ed i rimanenti elementi di $G_r\, G_{r'}$ costituiscono un gruppo $G_{r+r'-2}$ elemento di un aggruppamento $A_{r+r'-2}$ autopolare rispetto ad una corrispondenza *risultante* delle due date. Un gruppo $G_{r-1}(M^2, \ldots, M^r)$ determina m_1 elementi corrispondenti di G^{m_1}, ciascuno dei quali, considerato come elemento di $G^{m'_1}$, insieme ad $r-2$ elementi $M'^2, \ldots, M'^{r'-1}$, ciascuno di uno dei gruppi $G^{m'_2}, \ldots, G^{m'_{r'-1}}$, dà $m'_{r'}$ elementi corrispondenti di $G^{m'_{r'}}$. Si vede così che, rispetto alla corrispondenza risultante, vi sono $m_1 m'_{r'}$ poli del gruppo $G_{r+r'-3}(M^2, \ldots, M^r, M'^2, \ldots, M'^{r'-1})$, dunque la corrispondenza risultante è una corrispondenza $[m'_1 m_2, \ldots, m'_1 m_r, m_1 m'_2, \ldots, m_1 m'_{r'}]$, di ordine $m_{1\ldots r}\, m'_1 + m'_{1\ldots r'}\, m_1 - 2 m_1 m'_1$, essendo $m_{1\ldots r}$, $m'_{1\ldots r'}$ gli ordini delle due corrispondenze date, e di rango $r + r' - 3 = \rho + \rho' - 1$, essendo ρ, ρ' i loro ranghi.

39. Un elemento M^i chiamiamolo *unito di ordine* $\mu_i - 1$, se è multiplo secondo μ_i per il gruppo polare di un gruppo $G_{r-1}(M^1, \ldots, M^{i-1}, M^{i+1}, \ldots, M^r)$.

Un gruppo $G_{r-1}(M^1, \ldots, M^{i-1}, M^{i+1}, \ldots, M^r)$ chiamiamolo *eccezionale di ordine* $\mu_i - 1$, se il suo gruppo polare contiene un elemento unito di ordine $\mu_i - 1$.

Per generalità di linguaggio, un gruppo $G_{r-1}(M^1, \ldots, M^{i-1}, M^{i+1}, \ldots, M^r)$ non eccezionale si può anche dire eccezionale di ordine 0, ed un elemento M^i non unito si può anche dire unito di ordine 0.

Ad un gruppo $G_{r-1}(M^1, \ldots, M^{i-1}, M^{i+1}, \ldots, M^r)$ possono corrispondere più elementi uniti, ed allora possiamo dire che ad esso sono sovrapposti altrettanti gruppi eccezionali.

Un elemento M^i può essere multiplo per più gruppi polari di gruppi $G_{r-1}(M^1, \ldots, M^{i-1}, M^{i+1}, \ldots, M^r)$, ed allora possiamo dire che ad esso sono sovrapposti altrettanti elementi uniti.

40. Supponiamo che ciascuno dei gruppi G^{m_i} coincida con uno stesso gruppo G, e supponiamo che sia $m = m_1 = m_2 = \cdots = m_r$. Allora un gruppo G_{r-1}, di $r-1$ elementi di G, considerato ciascuno come appartenente ad uno determinato degli r gruppi sovrapposti G^{m_i}, individua un gruppo polare g_m, di m elementi di G. Se il gruppo $G_{r-1}\, g_m$ è tale che il gruppo di $r-1$ qualunque dei suoi $m+r-1$ elementi, ciascuno considerato in un modo qualunque come appartenente ad uno di $r-1$ dei gruppi G^{m_i}, ha sempre per polare il gruppo dei rimanenti m elementi di $G_{r-1}\, g_m$, diciamo che la corrispondenza $[m, m, \ldots, m]$, stabilita tra gli r gruppi sovrapposti G^{m_i}, è una *corrispondenza involutoria.*

I gruppi $G_{r-1}\, g_m$ sono elementi di un aggruppamento A_n, essendo:

$$n = m + r - 1 = m + \rho,$$

e ρ elementi qualunque di G appartengono sempre ad un gruppo elemento di A_n, e ad un solo. L'aggruppamento A_n è la *involuzione di ordine n e di rango ρ* individuata dalla data corrispondenza involutoria, e questa involuzione indichiamola con il simbolo $I_{n,\rho}$.

Sono evidentemente involutorie tutte le corrispondenze polari rispetto ad una corrispondenza involutoria.

Indichiamo con $I^{M^{i_1}\ldots M^{i_k}}_{n-k,\rho-k}$, ovvero anche con $I^{G_k}_{n-k,\rho-k}$, la involuzione, di ordine $n-k$ e di rango $\rho-k$, individuata dalla corrispondenza involutoria polare di un gruppo $G_k(M^{i_1}, \ldots, M^{i_k})$, e chiamiamola *involuzione polare* di G_k rispetto alla $I_{n\,\rho}$.

41. I gruppi G^{m_i} siano rispettivamente costituiti da punti M^i.

Una corrispondenza diretta $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$ è *continua,* se preso un qualunque gruppo $G_{r-1}(M^1, M^2, \ldots, M^{r-1})$, preso un corrispondente punto unito M^r, di ordine $\mu_r - 1 \geqq 0$, e preso un intorno I_{M^r} tanto piccolo quanto si vuole; ma sufficientemente piccolo in modo da contenere il solo polo M^r di G_{r-1}, possiamo sempre trovare gli intorni $I_{M^1}, I_{M^2}, \ldots, I_{M^{r-1}}$ sufficientemente piccoli in modo che ad I_{M^r} appartengano μ_r poli, e solamente μ_r, di un qualunque gruppo $G^1_{r-1}(M'^1, M'^2, \ldots, M'^{r-1})$ di $r-1$ punti ciascuno di uno degli intorni $I_{M^1}, I_{M^2}, \ldots, I_{M^{r-1}}$.

Analogamente si può definire la continuità di ciascuna delle corrispondenze inverse.

Se sono insieme continue la corrispondenza diretta e ciascuna delle inverse, diciamo più brevemente che è *continua* la corrispondenza $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$ stabilita tra i gruppi G^{m_i}, e diciamo che è *continuo* il suo aggruppamento autopolare $\boldsymbol{A}_r$.

È chiaro che allora sono continue tutte le corrispondenze e tutti gli aggruppamenti polari rispetto alla data corrispondenza ed al suo aggruppamento autopolare.

Se una corrispondenza involutoria è continua, diciamo che è *continua* la involuzione da essa determinata, ed allora sono evidentemente continue anche tutte le involuzioni polari rispetto ad essa.

È continua una corrispondenza risultante di due date corrispondenze continue (38).

42. *Se è continua una corrispondenza $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$ stabilita tra r gruppi G^{m_i}, e se uno di essi è finito e chiuso, anche ciascuno degli altri è finito e chiuso.*

Infatti ciascuno dei gruppi $G^{m_1}, \ldots, G^{m_{i-1}}, G^{m_{i+1}}, \ldots, G^{m_r}$ corrisponde a G^{m_i} nella corrispondenza polare di un gruppo di $r-2$ punti ciascuno di uno, e di uno solo, degli altri $r-2$ gruppi, e questa corrispondenza polare, di 1.° rango, è continua. Se G^{m_i} è finito e perfetto, ciascuno degli altri $r-1$ gruppi è pure finito e perfetto.

Se è continua una corrispondenza $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$ stabilita tra r gruppi G^{m_i}, e se uno di essi G^{m_i} è finito e continuo, ciascuno G^{m_k} degli altri è finito e costituito da un numero $\overline{\leq} m_k$ di gruppi continui (30),

ed è perciò che abbiamo chiamato continue le corrispondenze che ora stiamo studiando.

43. *Se è continua una corrispondenza $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$ diretta stabilita tra r gruppi G^{m_i}, e se ciascuno dei gruppi $G^{m_1}, \ldots, G^{m_{r-1}}$ è finito e chiuso, preso un gruppo $G_{r-1}(M^1, M^2, \ldots, M^{i-1}, M^{i+1}, \ldots, M^r)$, e presi gli intorni I_{M^i} dei suoi poli M^i, ciascuno tanto piccolo quanto si vuole, possiamo trovare gli intorni $I_{M^1}, \ldots, I_{M^{i-1}}, I_{M^{i+1}}, \ldots, I_{M^r}$ sufficientemente piccoli, in modo che appartenga almeno ad un intorno I_{M^i} ciascun polo di ciascun gruppo*

$G'_{r-1}(M'^1, \ldots, M'^{i-1}, M'^{i+1}, \ldots, M'^r)$ *di* $r-1$ *punti ciascuno contenuto in un intorno* $I_{M^1}, \ldots, I_{M^{i-1}}, I_{M^{i+1}}, \ldots, I_{M^r}$.

Supponiamo che comunque si prendano piccoli gli intorni $I_{M^1}, \ldots, I_{M^{i-1}}, I_{M^{i+1}}, \ldots, I_{M^r}$ vi siano sempre gruppi G'_{r-1} i quali abbiano almeno un polo esterno a ciascuno degli intorni I_{M^i}. Consideriamo questi gruppi G'_{r-1} come elementi di un aggruppamento A_{r-1}. Il punto M^r è limite del gruppo dei punti di A_{r-1} contenuti in I_{M^r}; chiamiamo g^r una parte di questo gruppo la quale abbia per limite il punto M^r, ed esso solo, chiamiamo a_{r-1} l'aggruppamento costituito da tutti gli elementi di A_{r-1} che contengono un punto di g^r, e chiamiamo $g^1, \ldots, g^{i-1}, g^{i+1}, \ldots, g^{r-1}$ i gruppi dei punti di a_{r-1} che sono rispettivamente contenuti in $I_{M^1}, \ldots, I_{M^{i-1}}, I_{M^{i+1}}, \ldots, I_{M^{r-1}}$. Se g'^i è il gruppo di quei poli M'^i degli elementi di a_{r-1} che sono esterni a ciascuno degli intorni I_{M^i}, essendo G^{m_i} finito e chiuso, esiste almeno un punto M'^i_l, di G^{m_i}, che è limite di g'^i. Chiamiamo M''^r i poli del gruppo $M^1 \ldots M^{i-1} M'^i_l M^{i+1} \ldots M^{r-1}$, ciascuno dei quali è evidentemente distinto dal punto M^r. Essendo per ipotesi continua la corrispondenza diretta, presi gli intorni $I_{M''^r}$, ciascuno tanto piccolo quanto si vuole, possiamo trovare gli intorni $I'_{M^1}, \ldots, I'_{M^{i-1}}, I'_{M'^i_l}, I'_{M^{i+1}}, \ldots, I'_{M^{r-1}}$, sufficientemente piccoli in modo che ciascun polo di un gruppo qualunque di $r-1$ punti ciascuno contenuto in uno di questi intorni appartenga almeno ad un intorno $I_{M''^r}$. Ora vi sono infiniti gruppi:

$$G'_{r-1}(M'^1, \ldots, M'^{i-1}, M'^{i+1}, \ldots, M'^r)$$

elementi di a_{r-1}, i cui punti $M'^1, \ldots, M'^{i-1}, M'^{i+1}, \ldots, M'^{r-1}$ appartengono rispettivamente agli intorni $I'_{M^1}, \ldots, I'_{M^{i-1}}, I'_{M^{i+1}}, \ldots, I'_{M^{r-1}}$, mentre uno M'^i dei loro poli appartiene all'intorno $I'_{M'^i_l}$, e siccome poi un polo del gruppo $M'^1 \ldots M'^{i-1} M'^i M'^{i+1} \ldots M'^{r-1}$ è il punto M'^r, di g^r, M'^r deve appartenere almeno ad un intorno $I_{M''^r}$, almeno uno di questi intorni deve contenere infiniti punti di g^r, almeno uno dei punti M''^r deve essere limite di g^r e quindi coincidere con M^r; ma abbiamo detto che ciascuno dei punti M''^r è invece distinto da M^r, dunque gli intorni $I_{M^1}, \ldots, I_{M^{i-1}}, I_{M^{i+1}}, \ldots, I_{M^r}$ si possono prendere sufficientemente piccoli in modo che ciascun polo di un qualunque gruppo di $r-1$ punti, ciascuno appartenente ad uno di essi, sia contenuto almeno in uno degli intorni I_{M^i}, come volévamo dimostrare.

Dalla precedente proprietà discende immediatamente che:

Se è continua una corrispondenza diretta $[1, 1, \ldots, 1, m]$, ρ *univoca di rango* ρ, *stabilita tra* $r = \rho + 1$ *gruppi* G^{m_i}, *e se ciascuno dei gruppi* $G^{m_1}, \ldots, G^{m_{r-1}}$ *è finito e chiuso, anche le corrispondenze inverse sono continue.*

44. Se tra r gruppi G^{m_i}, di elementi qualunque M^i, è stabilita una corrispondenza $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$, ad un gruppo $G_{r-1}(M^1, \ldots, M^{i-1}, M^{i+1}, \ldots, M^r)$ corrispondono sempre m_i elementi, e solamente m_i. Possiamo studiare corrispondenze le quali posseggano *particolari* gruppi $G_{r-1}(M^1, \ldots, M^{i-1}, M^{i+1}, \ldots, M^r)$ che facciano eccezione alla legge che le regola, perchè ad uno di essi corrispondano tutti gli elementi di G^{m_i}. Uno dei suddetti gruppi si può chiamare *gruppo apolare* rispetto alla data corrispondenza ed al suo aggruppamento autopolare.

È apolare un gruppo che contiene come parte un gruppo apolare.

Un gruppo apolare $G_{r-1}(M^1, \ldots, M^{i-1}, M^{i+1}, M^r)$ è comune a tutti gli aggruppamenti polari di tutti gli elementi di G^{m_i}, e viceversa. Un gruppo di $k < r-1$ elementi del gruppo apolare G_{r-1} è apolare rispetto alla corrispondenza polare dei rimanenti $r-k-1$ elementi.

Si può estendere la definizione di continuità anche alle corrispondenze $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$ stabilite tra r gruppi di G^{m_i} di punti e dotate di gruppi apolari, non considerando questi gruppi particolari.

È facile vedere se e come le proprietà dimostrate per le corrispondenze $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$ si estendono al caso in cui esistano gruppi apolari.

45. Stabiliamo una corrispondenza $[m_1, m_2, \ldots, m_r]$, tra r gruppi G^{m_i}, il cui aggruppamento autopolare sia $\mathcal{A}_r$, ed una corrispondenza $[m'_1, m'_2, \ldots, m'_{r'}]$, tra r' gruppi $G^{m'_i}$, il cui aggruppamento autopolare sia $\mathcal{A}_{r'}$, e supponiamo che i gruppi $G^{m_1}, \ldots, G^{m_\sigma}$ coincidano rispettivamente con i gruppi $G^{m'_1}, \ldots, G^{m'_\sigma}$, essendo $\sigma \gtreqless 0$. Se prendiamo un gruppo:

$$G_{r+r'-\sigma-1}(M^{m_1}, \ldots, M^{m_\sigma}, M^{m_{\sigma+1}}, \ldots, M^{m_r}, M^{m'_{\sigma+1}}, \ldots, M^{m'_{r'-1}}),$$

possiamo convenire di fargli corrispondere tutti gli elementi di $G^{m'_{r'}}$, ovvero gli $m'_{r'}$ elementi di $G^{m'_{r'}}$ che corrispondono al gruppo:

$$G_{r'-1}(M^{m_1}, \ldots, M^{m_\sigma}, M^{m'_{\sigma+1}}, \ldots, M^{m'_{r'-1}}),$$

nella seconda corrispondenza data, secondochè il gruppo:

$$G_r(M^{m_1}, \ldots, M^{m_\sigma}, M^{m_{\sigma+1}}, \ldots, M^{m_r}),$$

è o non è un elemento di $\mathcal{A}_r$. Analogamente se prendiamo un gruppo:

$$G_{r+r'-\sigma-1}(M^{m_1}, \ldots, M^{m_\sigma}, M^{m_{\sigma+1}}, \ldots, M^{m_{r-1}}, M^{m'_{\sigma+1}}, \ldots, M^{m'_{r'}}),$$

possiamo convenire di fargli corrispondere tutti gli elementi di G^{m_r}, ovvero gli m_r elementi di G^{m_r} che corrispondono al gruppo:

$$G_{r-1}(M^{m_1},\ldots,\ M^{m_\sigma},\ M^{m_{\sigma+1}},\ldots,\ M^{m_{r-1}}),$$

nella prima corrispondenza data, secondochè il gruppo:

$$G_{r'}(M^{m_1},\ldots,\ M^{m_\sigma},\ M^{m'_{\sigma+1}},\ldots,\ M^{m'_{r'}}),$$

è o non è un elemento di $\mathcal{A}_{r'}$. Se prendiamo un gruppo:

$$G_{r+r'-\sigma-1}(M^{m_1},\ldots,\ M^{m_{\sigma-1}},\ M^{m_{\sigma+1}},\ldots,\ M^{m_r},\ M^{m'_{\sigma+1}},\ldots,\ M^{m'_{r'}}),$$

possiamo convenire di fargli corrispondere gli $m_\sigma + m'_\sigma$ elementi di G^{m_σ} che corrispondono ai gruppi:

$$G_{r-1}(M^{m_1},\ldots,\ M^{m_{\sigma-1}},\ M^{m_{\sigma+1}},\ldots,\ M^{m_r}),\qquad G_{r'}(M^{m_1},\ldots,\ M^{m_{\sigma-1}},\ M^{m'_{\sigma+1}},\ldots,\ M^{m'_{r'}}),$$

rispettivamente nella prima e seconda corrispondenza data. Otteniamo così tra i gruppi $G^{m_1},\ldots,\ G^{m_\sigma},\ G^{m_{\sigma+1}},\ldots,\ G^{m_r},\ G^{m'_{\sigma+1}},\ldots,\ G^{m'_{r'}}$ una *corrispondenza riducibile* $[m_1 + m'_1,\ldots,\ m_\sigma + m'_\sigma,\ m_{\sigma+1},\ldots,\ m_r,\ m'_{\sigma+1},\ldots,\ m'_{r'}]$, di rango $r + r' - \sigma - 1$ e di ordine $m_{12\ldots r} + m'_{12\ldots r'}$, rispetto alla quale sono apolari tutti i gruppi elementi di $\mathcal{A}_r$, $\mathcal{A}_{r'}$, se non è $\sigma = r = r'$, e la quale è *composta* delle due corrispondenze date, che sono le sue *parti.* Una tale corrispondenza riducibile si può ottenere, e nello stesso modo, anche se $\mathcal{A}_r$ o $\mathcal{A}_{r'}$ è un aggruppamento $\mathcal{A}_1$, costituito da un determinato elemento.

Analogamente si possono definire le corrispondenze riducibili composte di più di due parti.

Se una data corrispondenza è riducibile, è *riducibile* l'aggruppamento autopolare rispetto ad essa e le sue *parti* sono gli aggruppamenti autopolari rispetto alle corrispondenze nelle quali si divide quella data.

Roma, 1 gennaio 1890.

Massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere.

(*Di* Guido Castelnuovo, *a Torino.*)

La ricerca di un limite superiore alla dimensione (e in conseguenza al numero delle intersezioni variabili) di un sistema lineare di curve piane di dato genere p, fu già fatta dal sig. Jung, il quale nelle sue *Ricerche sui sistemi lineari di curve piane algebriche* (*) assegna il valore $5p+3$ per questo limite ($p>1$). Si vede però facilmente che un tal limite non è mai raggiunto; sicchè restava sempre il problema di determinare il valore massimo (raggiunto) della dimensione di un sistema lineare, in corrispondenza a ciascun valore di p. A questo problema appunto è dedicato il presente lavoro; nel quale oltre alla determinazione di quel massimo ($=3p+5$), si troveranno pure assegnati i sistemi di curve di dato genere nei quali la dimensione è massima.

Il concetto che ispira la ricerca è semplice, ma la dimostrazione non può procedere tanto rapida quando si voglia porsi al sicuro da ogni obbiezione. Maggiore speditezza e simmetria si ottiene studiando la questione sulle superficie omaloidi, anzichè sui sistemi lineari (il che permette, come mostrerò altrove, di giungere a teoremi più generali di quelli qui enunciati); mi parve però valesse la pena di trattare un argomento sui sistemi lineari senza invocare nozioni di altre teorie.

1. I sistemi lineari considerati in questo lavoro devono ritenersi completamente definiti dai punti base; e quando non si dichiari il contrario, si dovrà intendere che la curva generica del sistema è irriduttibile.

(*) Annali di Matematica, serie II, t.i XV, XVI; vedi in particolare a pag. 319 di quest'ultimo volume.

Si indicherà con

p il genere della curva generica (o *genere* del sistema),

k la molteplicità o dimensione del sistema,

D il numero delle intersezioni variabili di due curve del sistema (*grado* del sistema).

Si supporrà inoltre che le curve di un tal sistema passanti per un punto arbitrario del piano non devano in conseguenza passar tutte per altri punti determinati dal primo e variabili con esso (perciò è sufficiente che sia soddisfatta una delle seguenti disuguaglianze: $k > p+1$, $D > 2p$) (*). Le altre restrizioni che in seguito potranno divenir necessarie saranno esplicitamente dichiarate.

In questo lavoro è fondamentale la seguente questione: dati i caratteri p, k, D di un sistema lineare di curve, trovare i caratteri p', k', D' del sistema costituito dalle curve del primo sistema passanti doppiamente per un punto assegnato ad arbitrio nel piano. Per trattare con ogni rigore il problema, è utile premettere alcune semplici considerazioni sui sistemi lineari.

2. Si sappia che un sistema lineare dato $\infty^k S$ contiene un sistema lineare $\infty^{k-1} S'$ di curve riduttibili. Per un noto teorema dovuto al sig. Bertini (**), la curva generica C' di S' o si spezza in $k-1$ curve c' di uno stesso fascio (più forse qualche curva fissa); o si spezza in una curva semplice variabile coi parametri del sistema ed in una curva fissa (riduttibile o no).

(*) Qui alludo al teorema II della Nota del sig. Segre: *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p.* Rendic. Circolo Matem., t. I.

Siccome ai due teoremi di questa Memoria dovrò ricorrere spesso nel seguito (citandoli brevemente con Segre, teor. I o II), credo opportuno di ripeterne qui gli enunciati sotto una forma a me più comoda.

Teor. I. — Un sistema lineare ∞^k di curve piane irriduttibili di genere p, determinato dai punti base, ma del resto assolutamente qualunque, abbia il grado D. Se $k > p$, si ha $D = p + k - 1$, e le condizioni imposte al sistema da tutto l'insieme dei suoi punti base, qualunque siano i vincoli da cui questi possono esser legati, sono tante quante sarebbero quelle imposte dai singoli punti base, quando ciascuno di essi si prendesse isolatamente.

Teor. II. — Se in un sistema lineare ∞^k $(k > 2)$ di genere p, le curve passanti per un punto arbitrario del piano devono in conseguenza passare per altri punti determinati dal primo e con esso variabili, deve essere $k \leq p+1$.

Le dimostrazioni dei teoremi così modificati si deducono facilmente dalle dimostrazioni del sig. Segre.

(**) *Sui sistemi lineari.* Rendiconti Istituto Lombardo, serie II, t. XV.

Nel primo caso una curva c' non può segare in più di un punto (fuori dei punti base) una curva generica C di S; perchè se le intersezioni fossero due a, b, essendo S determinato dal sistema S' e da C, avverrebbe che ogni curva di S passante per a dovrebbe contenere anche b, il che, quando si consideri che a può assumersi ad arbitrio, contraddice le ipotesi fatte su S. Se poi ogni c' sega in un sol punto una curva generica di S, segue che questa curva è razionale.

Supponiamo invece che da ogni curva C' di S' si stacchi una curva fissa γ' (ed una curva variabile irriduttibile). La γ' non è segata da una curva generica di S fuori dei punti base, perchè se una intersezione vi fosse, questa, ragionando come sopra, si vedrebbe esser comune a tutte le curve di S; γ' è adunque curva *fondamentale* per S. Sicchè: Se un sistema lineare ∞^k di genere $p>0$ contiene un sistema ∞^{k-1} di curve tutte riduttibili, ogni curva di questo si compone di una curva fondamentale del primo sistema e di una curva irriduttibile.

3. Un sistema lineare $\infty^k S$ abbia la proprietà che tutte le sue curve passanti per un punto arbitrario del piano formino un sistema lineare avente una curva fondamentale, la quale non sia fondamentale per S; dico che *ogni curva di S è razionale.* In questa dimostrazione posso supporre (senza imporre nuove limitazioni ai sistemi lineari) che S sia ridotto ad aver soltanto punti base ordinari (con tangenti distinte per ogni curva generica di S, variabili coi parametri del sistema). Sia a un punto arbitrario del piano ed S_a il sistema delle ∞^{k-1} curve di S passanti per a. Una curva del piano qualunque γ_a sarà segata in altrettanti punti dalla curva generica di S, e dalla curva generica di S_a; sicchè se, come supporrò, γ_a è fondamentale per S_a, ma non per S, essa dovrà passare per a. Posso anche supporre che γ_a sia irriduttibile (senza escludere che possano esistere altre curve fondamentali per S_a ma non per S); in tale ipotesi si vede che a deve esser punto semplice per γ_a; perchè, siccome fra le ∞^{k-1} curve di S_a, ∞^{k-2} contengono la γ_a, se a fosse punto doppio per essa, le ∞^{k-1} curve di S che passano per a dovrebbero ivi toccarsi; il che contraddice una delle ipotesi fatte al n.° 1 sui sistemi S. Segue che ogni curva di S_a, e quindi ogni curva di S, sega in un sol punto (fuori dei punti base di S) la γ_a; e da ciò che tutte le curve di S passanti per un punto qualunque di γ_a costituiscono un sistema lineare avente per curva fondamentale la γ_a. E qui si noti che il numero delle intersezioni variabili di una curva C di S con la γ_a, dipende soltanto (poichè i punti base di S si

supponGono ordinari) dalle molteplicità di questi punti base per la curva C, dall'ordine di C, ed inoltre dalle molteplicità dei punti base stessi per la γ_a e dall'ordine di γ_a. Ora questi numeri relativi a γ_a sono interi e quindi non possono mutare quando a si muove con continuità nel piano ed insieme ad esso varia il sistema S_a e la curva γ_a (fatta eccezione forse per qualche posizione singolare di a). Questo ci dice che la curva γ_b in cui si muta la γ_a, quando a passa in b, ha lo stesso ordine di γ_a e le stesse molteplicità di γ_a nei punti base di S. E lo stesso ordine e le stesse molteplicità spettano ad ogni curva del fascio determinato da γ_a e γ_b; dunque ogni curva del fascio sega la curva generica di S in un sol punto variabile, e tanto basta per provare che le curve di S sono razionali, come avevo asserito (*).

4. Ed ora passiamo al problema enunciato al n.° 1. Per il sistema lineare dato S di caratteri p, k, D, supporremo che si abbia:

$$p > 0 \qquad (1) \qquad\qquad k > p + 2, \qquad (2)$$

(e in conseguenza per il teorema I del sig. Segre:

$$D = p + k - 1). \qquad (3)$$

Le curve di S che hanno un punto doppio in un punto a dato ad arbitrio nel piano, formano un sistema lineare S' la cui dimensione k' non è certo inferiore a $k-3$. Ma k' non può superare $k-3$, perchè se fosse $k' = k-2$, tutte le ∞^{k-1} curve di S passanti per a dovrebbero ivi toccarsi, il che non è possibile se a è un punto generale, poichè $k > p + 1$ (**). Dunque anzitutto:

$$k' = k - 3. \qquad (4)$$

Se la curva generica di S' ha le stesse singolarità della curva generica C di S nei punti base di S, ed inoltre ha il punto doppio in a, il suo genere p è dato da:

$$p' = p - 1. \qquad (5)$$

Però perchè non si possano muovere obbiezioni a questa formola, è necessario dimostrare:

α) che la curva generica di S' è irriduttibile;

(*) Il teorema qui dimostrato può enunciarsi così: Una superficie rigata rappresentabile univocamente sul piano ha per sezioni curve razionali.

(**) Segre, teorema II.

β) che la curva generica di S' non ha altre singolarità oltre a quelle della curva generica di S nei punti base di S, ed al punto doppio in a.

5. Il sistema $\infty^{k-3} S'$ è contenuto nel sistema ∞^{k-2} delle curve di S che toccano una stessa retta in a. Sicchè se tutte le curve di S' sono riduttibili, per il teorema del n.° 2 e per la ipotesi (1), ciascuna di esse deve scindersi in una curva γ fondamentale per il sistema ∞^{k-2} ed in una curva variabile irriduttibile. Siccome però la retta per a, che ci ha determinato un sistema ∞^{k-2} contenente S', è in nostro arbitrio, ne viene che γ sarà fondamentale anche per il sistema ∞^{k-1} delle curve di S passanti per a. Ora se γ non passa per a, essa deve esser fondamentale per S; e in tal caso ogni curva di S avente un punto doppio (in a o in qualunque punto del piano) deve scindersi in γ e in una curva irriduttibile dotata di punto doppio. Ma se ciò avvenisse, nel sistema ∞^{k-1} delle curve di S che passano per un punto di γ (e quindi si spezzano) giacerebbero ∞^{k-3} (anzichè ∞^{k-4}) curve passanti doppiamente per un punto assegnato del piano; il che si riconosce assurdo (poichè $k-1>p+1$) collo stesso ragionamento fatto al numero precedente per S.

Se poi γ passa per a, allora ogni sistema ∞^{k-1} costituito dalle curve di S passanti per uno stesso punto del piano ammette una curva fondamentale che non è fondamentale per S; quindi per il n.° 3 $p=0$, contro la (1).

Queste contraddizioni giustificano completamente l'affermazione α).

Quanto alla β) si osservi che se la curva generica di S' avesse una molteplicità maggiore che la curva generica di S in un punto base di S, con una trasformazione quadratica avente quel punto per fondamentale, il sistema S si muterebbe in un sistema di cui tutte le curve passanti doppiamente per un punto del piano (corrispondente ad a) dovrebbero spezzarsi. E ciò fu dimostrato impossibile. Le curve di S' si comportano adunque nei punti base di S come la curva generica di S; se poi le curve di S' oltre a questi punti base ed al punto doppio in a, avessero tutte un altro punto multiplo, questo dovrebbe esser punto base per S' (*). Eppure esso non imporrebbe nessuna condizione alle curve di S', mentre essendo per le (2) e (4) $k'>p'$ (certamente è $p'\leq p-1$), ciascun punto base deve imporre ad S' tante condizioni quante ne impone preso isolatamente (**). Questa contraddizione giustifica anche l'affermazione β); così la formola (5) è completamente dimostrata. Possiamo adunque enunciare il teorema:

(*) Bertini, Memoria citata.
(**) Segre, teorema I.

In un sistema lineare di dimensione k e genere p, per cui valgano le relazioni:

$$p > 0, \qquad k > p + 2,$$

le curve che passano doppiamente per un punto assegnato ad arbitrio nel piano, formano un nuovo sistema di dimensione $k - 3$ e di genere $p - 1$ (e di grado $D - 4$ per il teor. I del sig. Segre).

Applicando più volte questa proposizione si giunge alla seguente più generale:

In un sistema lineare di caratteri k, p e D soddisfacenti alle condizioni:

$$p > r - 1, \qquad k > p + 2r, \tag{6}$$

le curve che passano doppiamente per r punti fissati ad arbitrio nel piano formano un nuovo sistema di dimensione $k - 3r$, di genere $p - r$ e di grado $D - 4r$.

6. Ora siamo in grado di rispondere alla domanda: Quali sono i massimi valori che possono assumere k e D per sistemi lineari di dato genere p?

È inutile occuparsi del caso $p = 0$, perchè come è noto, si possono costruire sistemi di curve razionali nei quali la dimensione e il grado siano tanto grandi quanto si vuole.

Se $p = 1$, essendo noti tutti i sistemi di curve ellittiche (*), si può rispondere che il massimo valore tanto per k, quanto per D, è 9, valore raggiunto dal sistema di tutte le cubiche piane.

Si è trovato pure colla ricerca effettiva dei sistemi (**), che per $p = 2$ il massimo valore di k è 11 ed il massimo valore di D è 12; valori raggiunti dai seguenti sistemi d'ordine minimo:

1) curve del quarto ordine con un punto doppio comune,

2) curve del quinto ordine con un punto triplo ed uno doppio,

3) curve del sesto ordine con un punto quadruplo e due punti doppi infinitamente vicini a questo.

(*) Guccia: *Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche.* Rendic. Circolo Matem., t. I.

(**) Il sig. Jung dimostrò pel primo (Rend. Istituto Lombardo, maggio 1888) che *non esistono altri sistemi lineari minimi di genere* 2 e dimensione superiore a 3 oltre ai sistemi qui dati (ed a quelli che ne derivano coll'aggiunta di punti base semplici). Debbo però avvertire che i sistemi 1) e 2) erano già noti anteriormente, e che il sistema 3) è dovuto al sig. Guccia (Rend. Circolo Matem., giugno 87).

Sia ora $p > 2$; e la dimensione k del sistema verifichi la condizione $k > 3p - 4$ [in cui si muta la seconda delle (6) per $r = p - 2$]; allora per il teorema precedente si avrà che le curve del sistema passanti doppiamente per $p - 2$ punti assegnati ad arbitrio nel piano, formano un nuovo sistema di genere 2 e di dimensione $k - 3(p - 2)$. Ma per ciò che dissi sui sistemi di genere 2, si deve avere:

$$k - 3(p - 2) \leqq 11 \quad \text{ossia} \quad k \leqq 3p + 5;$$

dunque $3p + 5$ è il massimo richiesto per k. Dalla relazione $D = k + p - 1$, si conchiude poi subito che il massimo valore di D è $4p + 4$.

In un sistema lineare di curve di genere $p > 1$ la dimensione non può superare $3p + 5$, nè il grado può superare $4p + 4$. Questi due massimi possono esser raggiunti qualunque sia p. Infatti [come già osservò il sig. Jung (*)] per un sistema di curve d'ordine n con un punto $(n - 2)$-uplo e quanti si vogliano punti doppi, detto p il genere delle curve, si ha:

$$k = 3p + 5, \qquad D = 4p + 4.$$

7. E qui si presenta la questione: saranno questi i soli sistemi lineari di dato genere superiore ad 1, per i quali la dimensione e il grado raggiungono i massimi valori? Per potervi rispondere ci saranno utili alcune nozioni sui sistemi di curve iperellittiche.

Sia S' un sistema lineare di curve piane di genere p' soddisfacente alle condizioni dichiarate al n.° 1; e la curva generica del sistema sia iperellittica. Se n è l'ordine di questa curva, le curve d'ordine $n - 3$ aggiunte ad essa sono aggiunte ad ogni altra curva generica di S' e formano un sistema Σ' di dimensione $p' - 1$; una curva di Σ' taglia una curva di S' in $2p' - 2$ punti appartenenti a $p' - 1$ coppie della involuzione $g_2^{(1)}$ che sta su quella curva di S'.

Sopra ogni curva di S' che passi per un punto a fissato ad arbitrio nel piano, si trova un punto a' coniugato ad a nella involuzione $g_2^{(1)}$ giacente su quella curva iperellittica; e poichè supponiamo che le curve di S' passanti per a non debbano in conseguenza passar tutte per qualche altro punto del piano determinato da a, ne viene che infiniti saranno i punti a' coniugati ad uno stesso a. D'altra parte ciascuna delle $\infty^{p'-2}$ curve di Σ' che passano per a, deve contenere tutti questi punti a'; essi quindi dovranno appartenere ad una

(*) Annali di Matem., serie II, t. XVI.

curva α, che si staccherà da ogni curva di Σ' passante per a (*): e due punti qualunque di α, appartenendo a $\infty^{p'-2}$ curve di Σ' saranno coniugati in ogni curva di S' che li contenga. Da ciò segue che α è segata in due soli punti (variabili) da ogni curva di S'; e quindi che ogni curva di Σ' si scinde in $p'-1$ curve, le quali (per il teorema già citato del sig. Bertini) devono appartenere ad uno stesso fascio (più forse qualche curva comune ad ogni curva di Σ' e fondamentale per S'); da ciò il teorema:

Se tutte le curve di un sistema lineare (in cui il passaggio per un punto non porti di conseguenza il passaggio per altri punti determinati dal primo) *sono iperellittiche di genere p' ed ordine n, ogni curva aggiunta d'ordine $n-3$ si spezza* (oltre che forse in curve fisse) *in $p'-1$ curve di uno stesso fascio,* ciascuna delle quali sega una curva del sistema primitivo in due punti variabili (**).

Reciprocamente è pur vero (e noto) che se ogni curva d'ordine $n-3$ aggiunta ad una C^n si spezza in più curve variabili (coi parametri del sistema delle curve aggiunte), la C^n è iperellittica.

Sia ora S un sistema ∞^k di curve d'ordine n, di genere p, dove $k > p+3$; ed ogni curva di S dotata di un punto doppio fuori dei punti base sia iperellittica; dico che quando $p > 3$ anche la curva generica di S è iperellittica. Consideriamo perciò il sistema Σ delle curve d'ordine $n-3$ aggiunte alla curva generica di S, e il sistema Σ' formato dalle curve di Σ passanti per un punto a scelto ad arbitrio nel piano. Ogni curva di Σ' è aggiunta ad ogni curva del sistema $\infty^{k-3} S'$ costituito dalle curve di S che passano doppiamente per a; ora per l'ipotesi fatta ogni curva di S' è iperellittica ed ha il genere $p'=p-1$; di più (poichè $k-3 > p'+1$) S' soddisfa a tutte le condizioni enunciate nel teorema precedente; quindi ogni curva di Σ' deve comporsi di $p'-1=p-2$ curve variabili in un fascio al variare dei parametri di Σ'; (oltre a queste però, se $p > 3$, nella curva generica di Σ' dovrà trovarsi una

(*) Per $p'=2$ la curva α può coincidere con la curva di Σ' che passa per a.

(**) Le curve del fascio sono tutte razionali, infatti una di esse è segata in un sol punto variabile dalle curve di S' che passano per un suo punto. La trasformazione birazionale che muta quel fascio in un fascio di rette, muta il sistema S' in un sistema di curve di un certo ordine ν con un punto base multiplo secondo $\nu-2$ (e forse altri punti base); così si giunge al teorema (già dimostrato per via non sostanzialmente diversa nella mia Memoria: *Sulle superficie a sezioni iperellittiche;* Rendic. Circolo Matem. di Palermo, t. IV) che ogni sistema di curve iperellittiche soddisfacente alle condizioni sopra enunciate può trasformarsi in un sistema di curve di un certo ordine ν con un punto base multiplo secondo $\nu-2$, e forse altri punti base.

curva fissa passante per a). E poichè ciò che si disse per il punto a si può ripetere per ogni altro punto del piano, si conchiude che ogni curva di Σ si compone di almeno $p-2$ curve variabili in un fascio al variare dei parametri di Σ.

Se $p > 3$ tanto basta per conchiudere che ogni curva di S è iperellittica, come appunto avevo affermato.

Che se poi è $p = 3$, o la curva generica di Σ si scinde in due curve variabili, ed allora S si compone di curve iperellittiche. Oppure la curva generica di Σ è costituita da una curva variabile irriduttibile e forse da una curva fissa (che si stacca cioè da ogni curva di Σ). La curva variabile in virtù dell'ultima nota è razionale; sicchè (fatta astrazione dalla curva fissa quando si presenti) possiamo dire che Σ è una rete di curve razionali determinata completamente dai punti base. Per un noto teorema, Σ può mutarsi mediante una trasformazione birazionale nella rete costituita dalle rette del piano; e poichè una curva di S è segata da una curva di Σ in $2p-2=4$ punti variabili, la stessa trasformazione dovrà mutar S in un sistema di curve generali del quarto ordine. Quindi:

Ogni sistema lineare di curve di genere 3 di dimensione superiore a 6 può trasformarsi in uno dei seguenti sistemi minimi, o in uno di quelli che ne derivano coll'aggiunta di punti base semplici:

I) Sistema delle curve generali del quarto ordine.

II) Sistema di curve iperellittiche cioè (*): 1) curve del sesto ordine con un punto base quadruplo ed un punto base doppio, 2) sistema di curve d'ordine $5+\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) con un punto base multiplo secondo $(3+\mu)$ a cui sono infinitamente vicini μ punti doppi.

8. I sistemi qui dati (quando non abbiano punti base semplici) hanno tutti la dimensione massima 14 ed il grado 16; e sono i soli sistemi di genere 3, per cui la dimensione ed il grado raggiungono questi valori.

Sia ora S un sistema di genere 4 la cui dimensione abbia il massimo valore $3p+5=17$; le curve di S che passano doppiamente per un punto assegnato del piano formano un sistema S' di genere 3 e dimensione 14. Ma S' non può ridursi al sistema I) di tutte le curve generali del quarto ordine, perchè al punto doppio di S' dovrebbe corrispondere o un punto doppio nel

(*) Cfr. la mia Memoria già citata. Del resto tutti i sistemi di curve di genere 3 qui dati (insieme ad altri per $k \leq 6$) erano già noti in seguito ai lavori citati del sig. Jung, sistema I), o una curva segata da ogni quartica in due soli punti variabili. Quindi le curve di S' dovranno esser iperellittiche, e allora per il n.° 7 saranno pure iperellittiche tutte le curve di S. Ripetendo quest'ultimo ragionamento si trova che ogni sistema di curve di genere 5, la cui dimensione abbia il massimo valore 20, deve comporsi di curve iperellittiche; e così via. Sicchè alla fine (badando all'ultimo numero della mia Memoria citata) si giunge al teorema:

Un sistema lineare di curve di dato genere $p > 1$ *che abbia la massima dimensione* $3p+5$ (o il massimo grado $4p+4$) *si compone di curve iperellittiche, oppure può ridursi al sistema delle quartiche piane* ($p=3$). *Nel primo caso il sistema con una trasformazione birazionale può mutarsi, qualunque sia* p, *in uno dei seguenti sistemi minimi:*

1) *curve d'ordine* $p+3$ *con un punto base multiplo (ordinario) secondo* $p+1$ *ed un punto doppio,*

2) *curve d'ordine* $p+2+\mu$ ($\mu = 0, 1, 2, \ldots p$) *con un punto base multiplo secondo* $p+\mu$ *a cui sono infinitamente vicini* μ *punti doppi.*

Torino, febbraio 1890.

Un'osservazione sul grado massimo dei sistemi lineari di curve piane algebriche.

(*Di* G. Jung, *a Milano.*)

Nelle mie *Ricerche sui sistemi lineari di genere qualunque e sulla loro riduzione all'ordine minimo* (Ann. Mat., t. XV, Mem. I, t. XVI, Mem. II) è per la prima volta dimostrato che per qualsivoglia genere $p(>1)$ si hanno i seguenti sistemi lineari *minimi* di curve algebriche piane:

$$\left.\begin{array}{ll}(*) & C_{p+2} = [a^p] \\ (**) & \left\{\begin{array}{l} C_{p+3} = [a^{p+1}\, b^2] \\ C_{p+4} = [a^{p+2}\, b_1^2\, b_2^2] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{2p+1} = [a^{2p-1}\, b_1^2\, b_2^2 \ldots b_{p-1}^2] \\ C_{2p+2} = [a^{2p}\, b_1^2\, b_2^2 \ldots b_p^2], \end{array}\right.\end{array}\right\} \qquad (A)$$

(insieme a quelli che se ne possono far derivare con l'aggiunta di un conveniente numero di punti base semplici, ivi assegnato per ogni caso); — i quali sono i soli sistemi di curve C_μ del *minimo ordine,* dotate di un punto base multiplo secondo $\mu - 2$. In generale però, oltre a questi, esistono altri sistemi minimi, che si possono determinare per ogni valor dato di p, coi procedimenti indicati nei §§ 5-8 della Memoria I e nel § 9 della Memoria II.

(*) T. XV, pag. 291, Tab. I, sist. c e t. XVI, pag. 306, (p).

(**) T. XVI, pag. 307. Nel sistema d'ordine $p+3$ il punto doppio può essere o no infinitamente vicino al punto $(p+1)$-plo (t. XV, pag. 294, Tab. II, sist. c, per $r=p+1$ e $s=2$); negli altri i punti b sono tutti infinitamente vicini al punto a.

Giova rammentare anche i due teoremi che si trovano nei §§ 10, 11 della II Memoria (l. c., t. XVI, pag. 323, 324), cioè:

« In un sistema lineare di genere $p (> 1)$ e di dimensione qualsivoglia il grado D non supera mai il limite $6p + 2$; »

« In un sistema lineare di genere $p (> 1)$ la dimensione non può mai superare il limite $5p + 3$. »

Ora il sig. Castelnuovo (*) con un metodo molto elegante ha mostrato:

1.° che $4p + 4$ e $3p + 5$ sono risp. limiti superiori pel grado e per la dimensione dei sistemi lineari di genere $p (> 1)$ e sono, com'è evidente, *effettivamente raggiunti:*

a) per ogni genere $p (> 1)$, dalle famiglie di sistemi lineari rappresentate dai sistemi minimi (A), già da me assegnati;

b) per $p = 3$, dalla famiglia di sistemi lineari rappresentata dalla totalità delle curve piane generali di quart'ordine (l. c., t. XV, pag. 309, Tab. V, sistema 1).

2.° che oltre ai sistemi riducibili a uno degli anzidetti sistemi minimi (A) oppure alla totalità delle quartiche piane, nessun altro sistema di genere $p > 1$ può raggiungere il grado massimo $4p + 4$ nè la dimensione massima $3p + 5$.

Nel richiamare l'attenzione del lettore su queste notevoli conclusioni, mi piace osservare che mentre esse non sono in contraddizione coi due teoremi sopra ricordati, hanno tuttavia per effetto di renderli ormai del tutto superflui. Però quei due teoremi inutili non furono, dacchè per un verso hanno contribuito a dissipare un errore che già correva sull'argomento e per l'altro hanno dato occasione al sig. Castelnuovo d'intraprendere la ricerca di cui qui ho riassunto i risultati.

Milano, maggio 1890.

(*) Nella Nota: *Massima dimensione dei sistemi lineari di curve piane di dato genere* pubblicata in questo stesso fascicolo degli Annali (t. XVIII, pag. 119).

Sopra le funzioni iperellittiche di 1.ª specie (*I^{ter} Stufe*) per $p=2$.

(*Memoria V di* Ernesto Pascal, *a Napoli.*)

Scopo di questa Memoria V è lo studio dettagliato delle cosiddette funzioni iperellittiche di 1.ª specie (*I^{ter} Stufe*) per $p = 2$, e delle funzioni jacobiane corrispondenti.

Mi è parso indispensabile, per poter far comprendere l'indole e il valore delle funzioni che studio in questa Memoria, di premettere nei primi paragrafi un cenno sulla interessante classificazione che il Klein stabilisce delle funzioni iperellittiche, considerandole come funzioni appartenenti al cosiddetto gruppo di sostituzioni abeliane, o ad un sottogruppo di esso.

Stabilita così una *funzione iperellittica,* essa non sarà in generale intera negli argomenti w (integrali di 1.ª specie); però sempre sarà (e questo è un punto sostanziale della teoria delle trascendenti) il quoziente di funzioni *intere* che chiameremo *funzioni jacobiane.*

Definiti certi speciali sottogruppi del gruppo abeliano, caratterizzati in una maniera assai semplice da un numero intero n scelto come *modulo,* si viene a stabilire una serie di funzioni di 1.ª, 2.ª, 3.ª,... n^{ma} specie, e corrispondentemente un'altra serie di funzioni jacobiane di 1.ª 2.ª 3.ª,... specie. Quelle di 2.ª specie corrispondono alle ordinarie funzioni ϑ di Jacobi, o, se si vuole, alle σ di Klein; quelle di 1.ª specie sono quelle appunto che ci proponiamo di studiare in questo lavoro.

È facile dimostrare che queste ultime [chiamate Σ dal Klein (*)] possono esprimersi linearmente mediante i quadrati delle σ; quindi si presenterebbe l'idea di studiarle giovandosi degli sviluppi noti sulle σ (**); però ho creduto

---

(*) Math. Ann., Bd. 27, § 14.

(**) Vedi i lavori del Brioschi (Lincei, serie IV, vol. 2 e 3) e il lavoro del Wiltheiss (Math. Ann., Bd. 29, pag. 272).

più conveniente abbandonare quest'idea, a causa della dissimmetria che essa porterebbe nei calcoli, e studiare addirittura le Σ *direttamente,* il che costituisce certamente un procedimento più elegante.

Potendosi esprimere le quattro Σ pari linearmente mediante i quadrati di quattro speciali funzioni σ (*), si ricava che le Σ potranno prendersi come le coordinate omogenee di un punto di una superficie di Kummer. Inoltre il quadrato della Σ_5 dispari si può esprimere razionalmente per le prime quattro Σ, e rappresenterà (eguagliato a zero) un certo fascio di sestiche tangenti lungo una curva di 12.^{mo} ordine alla superficie di Kummer (**).

L'equazione della superficie di Kummer in coordinate Σ come anche quella di questo fascio di superficie di 6.° ordine hanno la rimarchevole proprietà di essere razionali negli invarianti fondamentali della sestica f; lo studio di tali equazioni formerà l'oggetto delle Memorie seguenti.

§ 1. Gruppi di punti su di una curva iperellittica di genere 2 e loro relazione cogli integrali di 1.^{a} specie.

Se immaginiamo al modo solito rappresentata una curva iperellittica di genere $p = 2$, per mezzo di una superficie di Riemann a due falde e con sei punti di diramazione, possiamo facilmente studiare le coppie di punti esistenti su questa forma iperellittica.

Propriamente consideriamo due punti qualunque *non coniugati,* cioè che non stanno l'uno sovrapposto all'altro in ciascuna delle due falde della superficie.

Allora il teorema di Riemann e Roch ci dice che tali punti non possono mai muoversi corresidualmente a loro stessi. Se invece i due punti dati sono *coniugati,* allora possono muoversi in una sola maniera corresidualmente a sè stessi.

Si ricava dunque che sulla nostra forma iperellittica esistono due specie di gruppi di due punti, cioè:

1.° gruppi generali;
2.° gruppi speciali, formati di due punti coniugati.

(*) Oltre di ciò la Σ_4 può esprimersi come somma dei quadrati di tutte le 10 σ pari.
(**) Burkhardt, *Systematik,* etc. Math. Ann., Bd. 35, § 21.

Immaginiamo ora ciascuno dei due integrali w di 1.^{a} specie scisso nelle sue parti, reale e immaginaria:

$$w_h = \alpha_h + i\beta_h,$$

e consideriamo $\alpha_1\ \alpha_2\ \beta_1\ \beta_2$ come le quattro coordinate di un punto in uno spazio a quattro dimensioni. Tale punto lo chiamiamo il punto (w).

Incominciamo col fissare in questo spazio il punto origine e prendiamo poi gli altri punti corrispondenti alle coordinate:

1.° punto	$w_1 = \omega_{11}$	$w_2 = \omega_{21}$
2.° "	$w_1 = \omega_{12}$	$w_2 = \omega_{22}$
3.° "	$w_1 = \omega_{13}$	$w_2 = \omega_{23}$
4.° "	$w_1 = \omega_{14}$	$w_2 = \omega_{24}$,

dove le ω sono al solito i *periodi degli integrali.* Allora questi quattro punti insieme al punto origine formano i vertici fondamentali di un parallelepipedo. Ogni altro vertice sarà dato da:

$$t_1(\mathrm{I}) + t_2(\mathrm{II}) + t_3(\mathrm{III}) + t_4(\mathrm{IV}),$$

dove (I) (II) (III) (IV) sono i quattro punti fissati sopra e le t sono numeri interi e propriamente hanno o il valore 0 o il valore 1.

Possiamo dividere tutto lo spazio a quattro dimensioni in tanti parallelepipedi congruenti a questo; ogni altro vertice di questi nuovi parallelepipedi sarà dato dalla stessa formola precedente dove però le t hanno il valore di un qualunque numero intero.

È chiaro che ogni punto dello spazio così diviso tiene sempre il suo congruente in un punto del parallelepipedo iniziale, nel senso che togliendo o aggiungendo opportunamente alle sue coordinate un numero *intero* di periodi, si potrà sempre giungere ad un punto del parallelepipedo primitivo. Di qui si ricava che ogni coppia di punti sulla nostra forma iperellittica trova sempre un punto (w) ad essa corrispondente nel parallelepipedo iniziale.

Consideriamo prima un gruppo *generale* di due punti. Poichè esso non può, come abbiamo detto, muoversi corresidualmente a sè stesso, così non vi sarà che solo esso che corrisponda ad un certo punto (w) del parallelepipedo iniziale; e d'altra parte è chiaro che non possono esistere due punti (w) nel parallelepipedo iniziale corrispondenti alla stessa coppia di punti (x).

Esaminiamo ora una coppia speciale $x'\ x''$.

Per essa gli integrali:

$$w_h = \left(\int^{x'} + \int^{x''}\right) d\,w_h,$$

sono ambedue zero; onde a tale coppia non corrisponde che solo il punto origine dello spazio (w).

Ma poichè la *coppia speciale* può muoversi corresidualmente a sè stessa, si ricava che *al punto origine delle w corrispondono tutte le infinite coppie di punti coniugati.*

Ora capita la domanda: Ad ogni punto del parallelepipedo delle w corrisponde sempre una coppia di punti sulla superficie di Riemann? In altri termini, la totalità di tutti i punti w che corrispondono a tutte le coppie possibili di punti riempiono tutto il parallelepipedo, o solo una parte di esso?

Un celebre teorema di Jacobi detto *teorema d'inversione* ci dà la risposta a questa domanda, e ci dice che non vi è punto (w) a cui non corrisponda una coppia di punti sulla superficie di Riemann.

Di qui si ricava che: *ogni funzione razionale simmetrica dei due punti sarà una funzione monodroma degli integrali w_1 w_2.*

Inoltre sarà chiaramente una funzione quattro volte periodica.

Poichè però, data una coppia di punti sulla superficie di Riemann, non vi corrisponde un solo punto (w), ma infiniti di tali punti, ciascuno in uno degli infiniti parallelepipedi congruenti, non si può dire reciprocamente che ogni funzione monodroma degli integrali w, sarà una funzione razionale dei due punti x, y (*).

Noi intanto prendiamo per ora questa definizione generale di *funzioni iperellittiche.*

Per funzioni iperellittiche si intendono quelle funzioni monodrome degli argomenti trascendenti che sono funzioni algebriche degli argomenti algebrici, intendendo per *argomenti trascendenti* gli integrali di 1.ª specie e i loro periodi, e per *argomenti algebrici* i punti della superficie di Riemann e i coefficienti della sestica fondamentale, cioè i *moduli* di tale superficie.

In seguito ci saranno utili anche i due altri risultati che inseriamo qui appresso:

1. Gli integrali di 1.ª specie sono funzioni *non diramate* dei gruppi di punti x della superficie di Riemann, il che significa che essi hanno sempre sul

(*) Burkhardt, *Systematik*, etc. Math. Ann., Bd. 35, § 12.

piano x (su cui è distesa la superficie di Riemann) gli stessi punti di diramazione che ha la riemanniana, cioè le radici della sestica fondamentale $f(x)$.

La stessa proprietà vale dunque anche per qualunque funzione *monodroma* delle w.

2. Viceversa ogni funzione simmetrica *razionale* dei gruppi di punti è una funzione *non diramata* nello spazio a quattro dimensioni in cui estendiamo i due integrali w; ciò dipende da quello che abbiamo detto avanti, che, cioè, tale funzione è una funzione monodroma delle w.

§ 2. Gruppo abeliano.

Se noi percorriamo colla variabile d' integrazione, nell' integrale di 1.ª specie, un cosiddetto *taglio canonico* della superficie di Riemann, otteniamo per risultato uno dei periodi ω.

Se invece percorriamo un cammino chiuso qualunque, otteniamo in generale una funzione lineare, con coefficienti interi, dei periodi.

Onde se noi da un sistema di tagli canonici passiamo ad un altro, i nuovi periodi (che non sono altro che il risultato dell'integrazione lungo cammini chiusi nella primitiva superficie) saranno certamente funzioni lineari degli antichi con coefficienti *interi*.

Indicando i periodi ω con *due* indici, di cui il primo rappresenta l'indice dell'integrale a cui quel periodo si riferisce, e il secondo si riferisce al *taglio canonico* percorrendo il quale si ha quel periodo, e indicando con ω gli antichi periodi e con ω' i nuovi, si ha propriamente che:

$$\omega'_{11}, \quad \omega'_{12}, \quad \omega'_{13}, \quad \omega'_{14},$$

si esprimono ciascuno linearmente e con coefficienti interi per mezzo di

$$\omega_{11}, \quad \omega_{12}, \quad \omega_{13}, \quad \omega_{14}.$$

Analoghe formole sussisteranno fra le ω'_{2i} e ω_{2i}.

Si hanno dunque in tutto *due* sistemi di variabili fra loro *cogredienti*.

Analogamente è chiaro che w'_i si esprimerà come la somma di w_i e di una combinazione lineare con coefficienti interi delle $\omega_{i1}\ \omega_{i2}\ \omega_{i3}\ \omega_{i4}$.

Studiando ora un po' più da vicino queste sostituzioni lineari che chiameremo, da ora in poi, sostituzioni abeliane, si trova subito una certa funzione delle ω, la quale deve godere della proprietà invariantiva rispetto a queste sostituzioni.

Si sa che i periodi ω debbono soddisfare a certe relazioni bilineari. Si dimostra che i primi membri di tali relazioni godono della invariantività per la trasformazione lineare (*).

Ciò è appunto che specializza queste sostituzioni e fa che i loro coefficienti numerici interi debbono sempre soddisfare a certe relazioni facili a trovarsi (**).

Osserviamo inoltre che siccome poi anche reciprocamente gli antichi periodi debbono esprimersi linearmente per i nuovi, con coefficienti *interi*, cosi il determinante della sostituzione deve essere eguale a ± 1, e unendo poi questa proprietà con quelle altre adesso stabilite, si trova propriamente che tale determinante deve essere eguale a $+1$.

Le sostituzioni di tal natura formano un gruppo che si chiama *gruppo abeliano*.

Ora si presenta il problema di determinare tutte le sostituzioni mediante cui possono esprimersi tutte quelle del gruppo abeliano.

Per $p = 2$ si può dimostrare che esistono solo *quattro* di siffatte sostituzioni elementari (***).

Noi abbiamo visto avanti che vi sono certe condizioni, perchè un sistema di sostituzioni rappresenti un cangiamento di sistema di tagli canonici della superficie di RIEMANN.

(*) BURKHARDT, Opera cit., pag. 203. La dimostrazione rigorosa si trova in JORDAN, *Traité des substitutions*.

(**) BURKHARDT, loco cit.

(***) KRAZER, Annali di Mat., vol. 12, pag. 296.

CLEBSCH-GORDAN, *Abelsche Funct.*, pag. 304.

KRONECKER, *Ueber bilineare Formen*. Berl., Monatsb., 1866. — Crelle's Journal, vol. 68, pag. 273.

JORDAN, *Traité des substitutions*, pag. 171.

KRAUSE, *Die Transf. der hyp. Funct.* Leipzig, 1886, pag. 69 e seg.

In quanto alla teoria della trasformazione vedi anche:

HERMITE, Comptes Rendus, t. 40 (1855).

BRIOSCHI, *Sur la transformation des fonct. Abeliennes*, Comptes Rendus, t. 47 (1858). — *Sulla trasformazione delle funz. iperell.* Lincei. Rend. 1885.

THOMAE, *Die allg. Trasf. der* θ*-Funct.* Göttingen, 1864 Dissert. — Crelle, vol. 75. — Zeitschrift f. Math. und Phy., Bd. 12.

KÖNISBERGER, Crelle, vol. 65.

WEBER, Crelle, vol. 74.

DORN, *Die Form und Zahl der Repraesentanten*, etc. Math. Ann., Bd. 7.

KRAUSE, *Sur la transformation des fonctions hyp. de 1.er ordre*. Acta Math., t. 3. — *Zur Transformation*, etc. Crelle, vol. 95—98. — Math. Ann. 17—25.

Tali condizioni ci si presentano dunque come necessarie. Ora si domanda: Sono esse anche sufficienti? In altri termini, ogni sostituzione abeliana rappresenta sempre un cangiamento del sistema di tagli canonici?

La risposta a questa domanda è affermativa.

Per dimostrarlo si fa vedere geometricamente che ogni cangiamento del sistema di tagli si può comporre sempre mediante quattro cangiamenti elementari che corrispondono poi alle quattro sostituzioni elementari; ogni altra sostituzione abeliana componendosi mediante queste quattro, corrisponderà dunque ad un cangiamento del sistema di tagli (*).

§ 3. Sottogruppi per congruenze.

Chiamando P in generale i periodi primitivi e P' i trasformati, le sostituzioni abeliane sono del tipo:

$$\left.\begin{aligned} w' &= w + \Sigma_\beta h_\beta P_\beta \\ P'_\alpha &= \Sigma_\beta c_{\alpha\beta} P_\beta, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

dove le h e c sono numeri interi.

Consideriamo ora le congruenze:

$$\begin{aligned} w' &\equiv w + \Sigma_\beta h_\beta P_\beta \\ P'_\alpha &\equiv \Sigma_\beta c_{\alpha\beta} P_\beta \end{aligned} \qquad (\text{mod. } n), \tag{2}$$

dove n sia numero intero qualunque.

Propriamente si intende che sono i numeri interi h e c che debbono considerarsi presi nel campo di modulo n; in altri termini il simbolo (2) non sta a significare altro se non che noi vogliamo considerare come appartenenti ad una stessa categoria due sostituzioni in cui i coefficienti h e c siano rispett. fra loro congrui secondo il modulo n.

È chiaro che il caso (1) è compreso in (2) e da esso si ricava per $n = 1$.

Il numero di tutte le sostituzioni (2) fra loro *incongruenti* è finito e dipende da n. Esso è stato calcolato da Jordan (**) ed è in generale:

$$N = (n^{2p} - 1)n^{2p-1}(n^{2p-2} - 1)\ldots(n^2 - 1)n \cdot n^{2p},$$

(*) Burkhardt, *Syst.* Math. Ann., Bd. 35, § 7. — Thomae, Crelle, Bd. 75.
(**) Jordan, *Traité des substitutions,* pag. 176.

onde per $p=2$ si ha:

$$n=2 \qquad N=720\cdot 16$$
$$n=3 \qquad N=51840\cdot 81 \text{ (*)}.$$

Vediamo ora come mediante le congruenze (2) si possono formare dei gruppi di sostituzioni.

Abbiamo detto che tutte le sostituzioni (2) fra loro congruenti secondo il modulo n noi le vogliamo considerare come racchiuse nella stessa categoria.

Per $n=1$ ciò significa che noi consideriamo addirittura come comprese in una medesima classe *tutte* le sostituzioni abeliane, e sappiamo, d'altra parte, che queste formano un gruppo.

Ma ora si domanda: Sia $n>1$ e raccolgo al solito in una medesima classe tutte le infinite sostituzioni fra loro congruenti (cioè che i coefficienti numerici h e c sieno rispett. e separatamente fra loro congruenti); tutte queste sostituzioni formeranno un gruppo?

In generale, no. Però può benissimo accadere che sieno scelti in tal modo i coefficienti h e c, che tali sostituzioni formino precisamente un gruppo.

Se ciò accade, esso sarà evidentemente un sottogruppo del gruppo principale *(Hauptgruppe)* (quello del paragrafo precedente che si ottiene per $n=1$), e perciò lo chiameremo *sottogruppo per congruenze (congruenzuntergruppe).*

Oltre di tali sottogruppi, il gruppo principale ne conterrà in generale altri; e del resto anche limitandosi a quei soli sottogruppi così definiti, si presenta il problema interessantissimo di studiare quanti e quali sono i *sottogruppi per congruenze* corrispondenti ad un dato modulo n (**).

L'indice di un sottogruppo è il numero di tutti i valori che una funzione appartenente al sottogruppo, acquista quando ad essa si applichino tutte le sostituzioni del gruppo principale.

(*) Per $p=1$ vedi Gierster, Math. Ann., Bd. 18 e 26. — Per $p=2$ vedi Bolza, Math. Ann., Bd. 33.

(**) Per $p=1$ vedi i seguenti lavori del Dr. Fricke:

Ueber Systeme ellipt. Modulfunct. Dissert. zu Leipzig. Braunschweig, 1886.

Ueber die substitutionsgruppen, etc. Math. Ann., Bd. 28, pag. 99.

Die Congruenzgruppen der sechsten Stufe. Math. Ann., Bd. 29, pag. 98.

Ueber die ausgezeichneten Untergruppen, etc. Math. Ann., Bd. 30, pag. 345.

Ueber ausgezeichnete Untergruppen in der Gruppe der ellipt. Modulfunct. Math. Ann., Bd. 31, pag. 227.

Vedi poi anche i lavori del Klein (Math. Ann., Bd. 14, 15, 17), Hurwitz (Math. Ann., Bd. 27), etc.

Se i gruppi risultano di un numero *finito* di sostituzioni, allora l'indice del sottogruppo si ottiene, come si sa, dividendo il numero delle sostituzioni del gruppo per il numero di quelle del sottogruppo. Ma nel nostro caso i gruppi risultano di un numero infinito di sostituzioni; in tal caso l'indice si trova nel seguente modo.

Sieno:

$$1 \quad S_1 \quad S_2 \ldots,$$

tutte le sostituzioni del sottogruppo. Si prenda una sostituzione T non compresa in queste e si formino:

$$T, \quad TS_1, \quad TS_2 \ldots.$$

Si prenda daccapo un'altra sostituzione U non compresa nè nella prima, nè nella seconda serie, e si formino:

$$U, \quad US_1, \quad US_2 \ldots.$$

E così di seguito. Allora il numero di tutte le linee che si verranno a formare sino ad esaurire tutte le sostituzioni del gruppo principale, rappresenterà *l'indice* richiesto. Esso in generale potrà essere *finito* o *infinito*. Per i sottogruppi che ci occorrerà di considerare in seguito, tale *indice* è sempre *finito*.

§ 4. Sottogruppi principali.

Nel paragrafo precedente abbiamo stabilito che cosa si intenda per *sottogruppo per congruenze*.

Ora fra tutti i possibili di tali sottogruppi ve ne sono certi speciali che vogliamo qui studiare.

Consideriamo tutte le infinite sostituzioni abeliane congruenti secondo il modulo n a quella i cui coefficienti sono rispettivamente:

$$\left.\begin{array}{rccc} h = & 0, & 0,\ldots & 0 \\ c = & 1, & 0,\ldots & 0 \\ & 0, & 1,\ldots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0, & 0,\ldots & 1. \end{array}\right\} \qquad (a)$$

È facile prima di tutto vedere che tali sostituzioni formano un gruppo;

infatti il prodotto di due di esse, giusta la regola generale per la formazione del prodotto di due sostituzioni lineari, ha sempre i suoi coefficienti congruenti a quelli dello schema (a), onde è sempre una sostituzione della medesima categoria.

Il sottogruppo così formato lo chiameremo: *sottogruppo principale di n.ma specie* (*) *(n^ter Stufe)*.

Così si vede che il sottogruppo principale di 1.a specie non è altro che il gruppo totale abeliano.

La sostituzione i cui coefficienti sono quelli dello schema (a) la chiameremo la istituzione *identica*.

Esaminiamo ora se *l'indice* del *sottogruppo principale* è finito o infinito.

Si può far vedere che una sostituzione abeliana S moltiplicata per una sostituzione del sottogruppo principale dà luogo ad un'altra sostituzione S' congruente ad S secondo il modulo n, e che viceversa due sostituzioni S, S' fra loro congruenti, possono ricavarsi l'una dall'altra moltiplicando S per una certa sostituzione del sottogruppo principale. Onde una funzione F appartenente al sottogruppo principale acquista lo stesso valore per due sostituzioni S, S' fra loro congruenti. Onde infine il numero dei valori di F, cioè *l'indice* richiesto non è altro che il numero N da noi determinato nel paragrafo precedente.

§ 5. Le funzioni iperellittiche come funzioni di gruppi.

Nel § 1 abbiamo definite le funzioni iperellittiche come quelle funzioni *monodrome* negli argomenti trascendenti, le quali sono *algebriche* negli argomenti algebrici.

Ora noi osserviamo due cose:

1.° Che gli argomenti algebrici restano inalterati se le w si aumentano di multipli di periodi;

2.° Che gli argomenti algebrici sono indipendenti dal sistema di tagli canonici della superficie di Riemann.

Onde si ricava che quelle tali funzioni iperellittiche di cui abbiamo parlato, che sono *razionali* negli argomenti algebrici, sono funzioni che restano inalterate per tutte le sostituzioni del gruppo abeliano, cioè appartengono a quel gruppo.

(*) Klein, Lezioni, semestre d'estate 1887. — Burkhardt, *Systematik*, pag. 225 e seg.

Se ora consideriamo in generale le funzioni *algebriche* degli argomenti algebrici, esse per tutte le sostituzioni abeliane acquisteranno un numero *finito* di valori, quindi in generale apparterranno ad un sottogruppo di ordine *finito.*

Le funzioni iperellittiche quindi ci si presentano qui come funzioni monodrome delle w e funzioni appartenenti a certi sottogruppi del gruppo abeliano, o al gruppo abeliano stesso.

Limitandoci a considerare solo quei sottogruppi che abbiamo chiamati *principali* e che sono appunto di *indice finito,* abbiamo una serie di funzioni iperellittiche di 1.^{a}, 2.^{a},... $n.^{ma}$ specie secondochè appartengono a sottogruppi principali di 1.^{a}, 2.^{a},... n^{ma} specie.

È da questo punto di vista che noi ci poniamo così sotto gli occhi tutto il quadro delle funzioni iperellittiche. Però ci si presenta qui la domanda: Le funzioni qui definite sono *intere* negli argomenti trascendenti?

Risponderemo che non lo sono; però, e questo è un punto fondamentale della teoria delle trascendenti, sono sempre il quoziente di funzioni *intere* che chiameremo funzioni jacobiane di 1.^{a}, 2.^{a},... $n.^{ma}$ specie.

Le funzioni jacobiane di 2.^{a} specie sono le σ di Klein, quelle di 1.^{a} specie sono le Σ (*).

Queste tali funzioni jacobiane non possono però includersi nella classificazione generale da noi data sopra, in quantochè esse non appartengono ad un sottogruppo di *indice finito* (**).

§ 6. Le funzioni iperellittiche ridotte a covarianti.

Prendiamo per fondamento anzichè gli integrali w coi periodi ω, i cosiddetti integrali *normali* v, cioè tali combinazioni delle w che i quattro periodi di v_1 v_2 sui due tagli canonici A_1 A_2 di 1.^{a} specie (***) si riducano rispettivamente a

$$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1, \end{matrix}$$

mentre gli altri quattro sieno:

$$\begin{matrix} \tau_{11} & \tau_{12} \\ \tau_{21} & \tau_{22}. \end{matrix}$$

(*) Klein, *Hyp. Sigmafunct.* Math. Ann., Bd. 27, pag. 462.

(**) Burkhardt, *Syst.,* pag. 245.

(***) Burkhardt, Opera cit., pag. 202.

Allora consideriamo una funzione monodroma di tali argomenti trascendenti *normali.*

Poichè questi godono della proprietà invariantiva rispetto alla trasformazione lineare della sestica fondamentale f, la stessa proprietà dovrà avere la funzione monodroma di cui si parla.

Onde le funzioni iperellittiche definite nel paragrafo precedente diventano covarianti o invarianti algebrici di f.

Possiamo dunque fare questa notevole riduzione al problema; cioè anzichè considerare funzioni algebriche qualunque delle coppie di punti della superficie di Riemann, considerare in ispeciale tali funzioni che godano della proprietà invariantiva rispetto alla trasformazione lineare della sestica fondamentale.

Tali altre funzioni iperellittiche le potremo poi esprimere a loro volta come quozienti di funzioni *jacobiane,* godenti di un'analoga proprietà invariantiva, e che potranno quindi considerarsi come dei *covarianti trascendenti.* Così nel caso di *specie* 2, le funzioni Θ generali rappresentano le funzioni jacobiane *non covarianti,* e invece le σ di Klein sono proprio queste tali funzioni covarianti.

Tutto ciò che abbiamo detto nei paragrafi precedenti in quanto alle relazioni fra le funzioni iperellittiche e i gruppi e sottogruppi abeliani, resta perfettamente inalterato, giacchè queste nuove funzioni sebbene immediatamente funzioni di v e τ pure sono *mediatamente* funzioni delle w e ω e quindi soddisfanno a tutte le cose dette avanti.

§ 7. Funzioni Jacobiane di 1.ª specie Σ.

Sia $\chi(x' x'')$ la forma *media (mittelform)* introdotta da Klein (*), e propriamente sia quella *forma media* formata con quello speciale integrale di 3.ª specie chiamato Q, e sia $\varphi(x' x')$ un covariante razionale simmetrico in x' x'', e di grado 3δ (δ è numero intero positivo), e che inoltre diventi 0^δ per $x' = x''$ (**).

(*) Göttinger Nachrichten, 1887, pag. 518. — Math. Ann., Bd. 36. — Vedi anche le mie Memorie I e III.

(**) Si noti che qui consideriamo ciascuna delle x', x'' come coppia di variabili omogenee, cioe per x' intendiamo la coppia di variabili omogenee $x'_1 x'_2$, e così per x''. Inoltre si noti che φ non deve essere razionale che sulla superficie di Riemann, quindi può contenere $\sqrt{f(x')}$, $\sqrt{f(x'')}$ che su questa sono razionali.

Formiamo l'espressione:

$$\Sigma^{(\delta)} = [\chi(x' x'')]^{\delta} \varphi(x' x'').$$

Ricordando allora le formole di periodicità della forma media χ, si trova subito che la Σ soddisfa alla seguente equazione funzionale:

$$\Sigma^{(\delta)}(w + \omega) = \Sigma^{(\delta)}(w)\, e^{2\delta\Sigma\eta\left(w + \frac{\omega}{2}\right)}.$$

Il numero δ lo chiameremo *ordine* della funzione jacobiana di 1.ª specie Σ (*).

Ricordando la proprietà invariantiva della forma χ costruita per l'integrale normale di 3.ª specie Q, si ha che Σ è un *covariante trascendente* di f.

Le Σ sono funzioni dei punti $\frac{x'_1}{x'_2}$, $\frac{x''_1}{x''_2}$ della superficie di Riemann, e quindi sono funzioni degli integrali w di 1.ª specie come risulta dal teorema d'inversione.

Però si può dimostrare dippiù, che cioè esse sono addirittura funzioni *monodrome e intere* delle w. Queste due asserzioni si possono dimostrare con un metodo perfettamente analogo a quello tenuto dal Burkhardt per dimostrare che le funzioni σ sono monodrome e intere nelle w (**).

Si incomincia col far vedere che le Σ possono svilupparsi in serie secondo le potenze ascendenti di $x' - \overline{x''}$, le quali serie convergano in un campo X piccolissimo attorno al punto $\overline{x''}$, cioè al punto coniugato di x''.

Ora nel campo che nello spazio delle w corrisponde ad X, le differenze $x' - \overline{x''}$ possono svilupparsi in serie secondo le potenze *intere positive* delle $w_1\ w_2$. Lo stesso dunque potrà farsi delle Σ. Con una facile considerazione si può poi mostrare che il campo in cui convergono queste ultime serie può estendersi indefinitivamente. Del resto che Σ sia una funzione *intera* delle w può dimostrarsi anche nella seguente maniera.

Essendo la forma media χ eguale a

$$\frac{e^{\overline{Q}(x' x'')}}{\sqrt[2]{f(x')f(x'')}},$$

si vede che Σ può diventare ∞ solo dove Q diventa ∞, ovvero dove il denominatore $\sqrt{f(x')\,f(x'')}$ diventa zero.

(*) Klein, Math. Ann., Bd. 27, pag. 463.

(**) Burkhardt, *Hyp. Sigmafunct.* Math. Ann., Bd. 32, pag. 431, § 23.

Ora Q diventa ∞ solo quando $x' = x''$ e propriamente in tal caso e^Q diventa ∞^1; ma poichè φ è tale che per $x' = x''$ diventa 0^δ si ha che Σ resta finito.

Così $\sqrt{f(x')f(x'')}$ diventa zero solo quando o x' ovvero x'' cadono in un punto di diramazione; ma allora e^Q diventa anche 0^1, perchè e^Q diventa ∞ logaritmicamente col residuo -1; dunque anche in questo caso l'espressione resta finita. Da queste due considerazioni risulta dunque che Σ è una funzione intera delle w (*).

Inoltre le Σ sono *intere e monodrome* anche nei coefficienti della sestica fondamentale; quindi riunendo tutte queste proprietà si ricava che esse possono svilupparsi in serie secondo le potenze ascendenti intere positive delle w; inoltre i diversi termini dello sviluppo debbono essere covarianti interi e razionali della sestica fondamentale.

§ 8. Sistema completo di funzioni iperellittiche e jacobiane di 1.ª specie.

È chiaro che il quoziente di due funzioni jacobiane di 1.ª specie (definite come nel paragrafo precedente) costituisce una funzione iperellittica di 1.ª specie.

Si può dimostrare che esiste un sistema completo di funzioni iperellittiche di 1.ª specie, cioè un sistema di tali funzioni che ogni altra è esprimibile razionalmente mediante quelle (**).

È facile trovare tale sistema completo, se noi per un momento prendiamo la definizione antica di funzioni iperellittiche, cioè quella nella quale non si suppone che esse debbano avere la proprietà invariantiva. Allora si tratta di trovare il sistema completo per tutte le funzioni simmetriche razionali dei due punti:

$$(x', \sqrt{fx'}) \qquad (x'', \sqrt{fx''}),$$

della superficie di Riemann.

(*) Klein, Lezioni sulle funzioni iperellittiche. Göttingen, Sommersemester 1887.

(**) Ciò è analogo al fatto della esistenza di un sistema completo di covarianti e invarianti di una *forma algebrica fondamentale qualunque*. In quanto ad una dimostrazione generalissima di quest'ultimo teorema, e anzi tale che da essa si può anche dedurre quella del teorema del testo, vedi due recenti Note del Dr. Hilbert nei Göttinger Nachrichten di dicembre 1888 e gennaio 1889.

Tale sistema completo risulta di (*):

$$x' + x'', \qquad x' x'', \qquad \sqrt{fx'}\sqrt{fx''}$$
$$\sqrt{fx'} + \sqrt{fx''},$$

di cui le tre prime sono *pari,* cioè non cambiano se ciascuno dei due punti si muta nel suo coniugato, e l'ultima è dispari cioè muta di segno se si fa il detto mutamento. È chiaro che in un sistema completo, di funzioni dispari non ve ne può essere più di *una,* perchè se ve ne fossero *due,* il loro prodotto sarebbe una funzione *pari,* e quindi una di esse si esprimerebbe razionalmente mediante l'altra e mediante funzioni pari.

Così per es. nel sistema completo precedente è inutile includere l'altra funzione dispari:

$$x'\sqrt{fx'} + x''\sqrt{fx''}.$$

Le funzioni di cui si parla si chiamano *pari* e *dispari* per la seguente ragione. Esse sono, come si sa dai paragrafi precedenti, funzioni delle w; ora le w mutano di segno quando ambedue i punti x' x'' si mutano nei loro coniugati; quindi le funzioni da noi chiamate pari e dispari, sono precisamente tali considerate come funzioni delle w.

Per trovare ora il sistema completo nel caso in cui si voglia che le funzioni iperellittiche posseggano la proprietà invariantiva rispetto alla trasformazione lineare di f_6, non dobbiamo fare altro che sostituire alle quattro funzioni precedenti altre quattro le quali sieno covarianti razionali, simmetrici in x', x'' e quindi sieno esprimibili razionalmente mediante le quattro funzioni precedenti, e tali che viceversa le quattro funzioni precedenti sieno esprimibili razionalmente mediante le nuove. Solo nel caso che si verifichi anche quest'ultima condizione, si potrà dire che il sistema nuovo è sostituibile all'antico. Ora sieno l_x^2, m_x^2, n_x^2 i noti tre covarianti quadratici di f_6 e formiamo:

$$X_1 = (x'x'')^2 l_{x'} l_{x''}; \qquad X_2 = (x'x'')^2 m_{x'} m_{x''}; \qquad X_3 = (x'x'')^2 n_{x'} n_{x''},$$
$$X_4 = \sqrt{f(x')}\sqrt{f(x'')} + a_{x'}^3 a_{x''}^3 \qquad X_5 = a_t\{a_{x'}^4 a_{x'}\sqrt{f(x'')} - a_{x''}^4 a_{x'}\sqrt{f(x')}\}(x'x'')^5,$$

dove adesso si intendono variabili omogenee, cioè introdotte $x'_1 x'_2$; $x''_1 x''_2$ e quindi propriamente per $f(x')$ si intende $f(x'_1 x'_2)$.

Se formiamo i rapporti di X_4 a ciascuna delle tre prime X, e poi di X_5 al prodotto delle stesse, abbiamo quattro funzioni formanti un sistema che si

(*) Burkhardt, *Syst.*, pag. 230.

può sostituire all'antico; infatti ciascuna delle antiche potrà esprimersi razionalmente mediante queste, come è facile verificare.

Si noti che per la formazione di X_5 è stata necessaria l'introduzione del punto ausiliario t, altrimenti non sarebbe stato possibile costruire un'espressione invariantiva (*).

Del resto una X_5 costruita con un'altra t si esprimerà razionalmente mediante quella di sopra.

Se ora moltiplichiamo le quattro prime X per la forma media χ (vedi paragrafo precedente) e l'ultima per χ^3, si hanno cinque funzioni jacobiane degli ordini rispett. 1 e 3.

Le nostre quattro funzioni iperellittiche sono allora evidentemente quozienti di funzioni jacobiane.

Poichè poi ogni altra funzione iperellittica si esprime razionalmente sempre mediante le quattro dette, si ha per risultato il teorema già annunziato (§ 5):

Ogni funzione iperellittica di 1.ª specie si esprime sempre come il quoziente di funzioni jacobiane.

Se gli integrali di 1.ª specie anzichè porli sotto la forma (vedi § 1):

$$w_h = \left(\int^{x'} + \int^{x''}\right) d w_h,$$

li poniamo sotto la forma equivalente:

$$w_h = \int_y^x d w_h,$$

allora le cinque forme X diventano:

$$\begin{aligned}
X_1 &= (xy)^2 l_x l_y \\
X_2 &= (xy)^2 m_x m_y \\
X_3 &= (xy) n_x n_y \\
X_4 &= \sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)} + a_x^3 a_y^3 \\
X_5 &= (xy)^5 a_t \{a_x a_y^4 \sqrt{f(x)} + a_y a_x^4 \sqrt{f(y)}\};
\end{aligned}$$

le funzioni jacobiane corrispondenti le chiameremo Σ cogli stessi indici.

(*) Vedi Burkhardt, Opera cit., pag. 234. Si potrebbe costruire una X_5 che contenga il punto t non più linearmente: e infatti il Burkhardt nell'Opera citata adopera una X_5 che contiene t a terza potenza. Per i nostri sviluppi ci sarà più semplice adoperare la nostra X_5, la quale è quella appunto usata nelle citate lezioni di Klein (Sommersem. 1887).

Nei paragrafi seguenti ci proponiamo di studiare gli sviluppi delle Σ così formate in funzione degli integrali w.

Le prime quattro sono funzioni pari, e l'ultima è dispari; quindi, per le cose dette nel paragrafo precedente, risulta che le prime quattro potranno svilupparsi in serie secondo le potenze intere ascendenti positive pari delle w, e l'ultima secondo le potenze dispari.

Chiamando $[w]^{2\nu}$ un termine dello sviluppo di una delle prime quattro Σ, si può trovare tale termine di che grado è nei coefficienti di f.

Osserviamo che essendo l, m, n rispett. dei gradi 3, 5, 7, le $\Sigma_1\ \Sigma_2\ \Sigma_3\ \Sigma_4$ debbono venire rispettivamente dei gradi 2, 4, 6, 0; inoltre Σ_5 è di grado $-\frac{3}{2}$. Ora le w sono ciascuna di grado $-\frac{1}{2}$ onde $[w]^{2\nu}$ viene:

$$\begin{array}{llll} \text{di grado} & \nu+2 & \text{per} & \Sigma_1 \\ \quad " & \nu+4 & \quad " & \Sigma_2 \\ \quad " & \nu+6 & \quad " & \Sigma_3 \\ \quad " & \nu & \quad " & \Sigma_4, \end{array}$$

e un termine $[w]^{2\nu+1}$ di Σ_5 viene poi di grado $\nu-1$ (*).

§ 9. Sviluppo dell'integrale di 3.ª specie Q.

Nella Memoria di Burkhardt (**) sta calcolato solo il primo termine dello sviluppo di $\overline{Q}(xy)$, quando i due punti x, y si avvicinano indefinitivamente. Per le cose che diremo in seguito ci importa di conoscere gli altri termini dello sviluppo. Ed è appunto questo l'oggetto della ricerca che intrapren-diamo ora.

L'espressione di Q è:

$$Q=\int_y^x\int_{y'}^{x'} \frac{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')}+a_z^{p-1}a_{z'}^{p-1}}{2(zz')^2}\,\frac{dz}{\sqrt{f(z)}}\,\frac{dz'}{\sqrt{f(z')}}.$$

Poniamo:

$$z=x+\zeta$$
$$z'=\overline{x}+\zeta',$$

dove $\overline{x}$ è il coniugato di x.

(*) Klein, Lezioni cit.

(**) *Hyp. Sigmaf.* Math. Ann., Bd. 32, pag. 407; formola (57).

Allora lo sviluppo di $a_z^{p-1} a_{z'}^{p-1}$ sia:

$$a_z^{p-1} a_{z'}^{p-1} = f(x)[1 + B_1\zeta + B'_1\zeta' + B_2\zeta^2 + B'_2\zeta\zeta' + B''_2\zeta'^2 + B_3\zeta^3 + B'_3\zeta^2\zeta' + B''_3\zeta\zeta'^2 + B'''_3\zeta'^3 + \cdots],$$

e quello di $\frac{1}{\sqrt{f(z)}}\,\frac{1}{\sqrt{f(z')}}$ sia:

$$\frac{1}{\sqrt{f(z)}\sqrt{f(z')}} = -\frac{1}{f(x)}[1 + A_1\zeta + A'_1\zeta' + A_2\zeta^2 + A'_2\zeta\zeta' + \cdots].$$

Sviluppando dunque il numeratore dell'integrando di Q, è facile vedere che restano solo i termini a cominciare da quello di 2.° ordine in ζ e ζ'. Inoltre tali termini debbono risultare tutti divisibili per $(\zeta - \zeta')^2$ (*) e inoltre debbono essere simmetrici in ζ e ζ'.

Quindi possiamo dire che i termini di 3.° grado nelle ζ e ζ' debbono raccogliersi in

$$M(\zeta - \zeta')^2(\zeta + \zeta'),$$

non essendovi altra funzione simmetrica di 1.° grado in ζ e ζ', che la loro somma. E per trovare M basta allora evidentemente trovare semplicemente il coefficiente di ζ^3 nello sviluppo generale.

Riguardo ai termini di 4.° grado essi dovranno riunirsi a formare:

$$P(\zeta - \zeta')^2(\zeta^2 + \zeta'^2) + P'(\zeta - \zeta')\zeta\zeta',$$

potendosi tutte le altre funzioni simmetriche di 2.° grado in ζ e ζ' ridurre solo alle due:

$$(\zeta^2 + \zeta'^2) \quad \text{e} \quad \zeta\zeta'.$$

Per trovare P possiamo dunque trovare il coefficiente di ζ^4 e per trovare P' possiamo trovare il coefficiente di $\zeta^3\zeta'$ al quale aggiungiamo il doppio di P.

Si ha dunque:

$$Q = -\frac{1}{2}\int_y^x\int_{y'}^{x'}[N + M(\zeta + \zeta') + P(\zeta^2 + \zeta'^2) + P'\zeta\zeta' + \cdots]\,d\zeta\,d\zeta',$$

dove:

$$N = A_2 + A_1B_1 + B_2$$
$$M = A_3 + A_2B_1 + A_1B_2 + B_3$$
$$P = A_4 + A_3B_1 + A_2B_2 + A_1B_3 + B_4$$
$$P' = A'_4 + A_3B'_1 + A'_3B_1 + A_2B'_2 + A'_2B_2 + A_1B'_3 + A'_1B_3 + B'_4 + 2P.$$

(*) Burkhardt, Opera cit., pag. 390.

Integrando e supponendo poi $\zeta'=\zeta$ si ha:

$$\overline{Q}(x\,y)=-\frac{1}{2}\left[N\zeta^2+M\zeta^3+\left(\frac{2}{3}P+\frac{1}{4}P'\right)\zeta^4+\cdots\right].$$

Resta a calcolare i coefficienti N, M, P, P' di cui solo il primo è calcolato nel lavoro citato di Burkhardt.

I coefficienti B, A hanno i seguenti valori:

$$B_1=B'_1=\frac{1}{2}\frac{f'}{f}$$

$$B_2=B''_2=\frac{p}{4(2p+1)}\frac{f''}{f};\qquad B'_2=\frac{p+1}{2(2p+1)}\frac{f''}{f}$$

$$B_3=B'''_3=\frac{p-1}{24(2p+1)}\frac{f'''}{f};\qquad B'_3=B''_3=\frac{p+1}{8(2p+1)}\frac{f'''}{f}$$

$$B_4=B^{IV}_4=\frac{(p-1)(p-2)}{32\cdot 3(2p+1)(2p-1)}\frac{f^{IV}}{f};\quad B'_4=B'''_4=\frac{(p+1)(p-1)}{24(2p+1)(2p-1)}\frac{f^{IV}}{f}$$

. . . .

$$A_1=A'_1=-\frac{1}{2}\frac{f'}{f}$$

$$A_2=A''_2=-\frac{1}{4}\,\frac{ff''-\frac{3}{2}f'^2}{f^2};\qquad A'_2=\frac{1}{4}\frac{f'^2}{f^2}$$

$$A_3=A'''_3=-\frac{1}{12}\,\frac{f^2f'''-\frac{9}{2}ff'f''+\frac{15}{4}f'^3}{f^3}$$

$$A'_3=A''_3=\frac{1}{8}\,\frac{ff'f''-\frac{3}{2}f'^3}{f^3}$$

$$A_4=A^{IV}_4=-\frac{1}{48}\,\frac{f^3f^{IV}-6f^2f'f'''+\frac{45}{2}ff'^2f''-\frac{9}{2}f^2f''^2-\frac{105}{8}f'^4}{f^4}$$

$$A'_4=A'''_4=\frac{1}{24}\,\frac{f^2f'f'''-\frac{9}{2}ff'^2f''+\frac{15}{4}f'^4}{f^4}$$

. . . .

Con queste espressioni troviamo finalmente i richiesti valori dei coefficienti dello sviluppo di Q. Si trova:

$$N = -\frac{1}{8(2p+1)f^2}[(2p+2)ff'' - (2p+1)f'^2] \text{ (*)}$$

$$M = \frac{1}{8(2p+1)f^3}[-(p+1)f^2f''' + (3p+2)ff'f'' - (2p+1)f'^3]$$

$$\frac{2}{3}P + \frac{1}{4}P' = R = \frac{1}{(4p^2-1)f^4}\Big[-\frac{43p^2+21p-22}{9\cdot 64}f^3f^{\mathrm{IV}}$$

$$+\frac{(43p+32)(2p-1)}{9\cdot 32}f^2f'f'''$$

$$-\frac{(29p+17)(2p-1)}{64}ff'^2f''$$

$$+\frac{(22p+15)(2p-1)}{3\cdot 64}f^2f''^2$$

$$+\frac{29(4p^2-1)}{256}f'^4\Big].$$

Per $p=2$ si hanno le formole:

$$N = -\frac{1}{40f^2}(6ff'' - 5f'^2)$$

$$M = \frac{1}{40f^3}(-3ff''' + 8ff'f'' - 5f'^3)$$

$$R = \frac{1}{15f^4}\Big(-\frac{1}{3}f^3f^{\mathrm{IV}} + \frac{59}{48}f^2f'f''' - \frac{225}{64}ff'^2f''$$

$$+\frac{59}{64}f^2f''^2 + \frac{435}{256}f'^4\Big).$$

(*) BURKHARDT, loc. cit.

§ 10. Le tre funzioni jacobiane Σ_1, Σ_2, Σ_3.

Giusta le cose dette nei paragrafi precedenti queste funzioni hanno la forma:

$$\Sigma_1 = \frac{(x\,y)^2\, e^{\overline{Q}(xy)}}{\sqrt{f(x) f(y)}}\, l_x l_y,$$

e le altre due si ottengono da questa scambiando l con m e n.

Lo sviluppo di Σ_1 è allora per $y = x + \zeta$, il seguente:

$$\Sigma_1 = \frac{\zeta^2}{f(x)} (l_x^2 + l_x l_1 \zeta)[1 + A_1\zeta + A_2\zeta^2 + \cdots]\left[1 - \frac{1}{2} N\zeta^2 - \frac{1}{2} M\zeta^3 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2}\left(R - \frac{1}{4} N^2\right)\zeta^4 + \cdots\right]$$
$$= S_2\zeta^2 + S_3\zeta^3 + S_4\zeta^4 + \cdots,$$

dove:

$$S_2 = \frac{l_x^2}{f(x)}$$

$$S_3 = \frac{1}{f^2}\left(f l_x l_1 - \frac{1}{2} f' l_x^2\right)$$

$$S_4 = \frac{1}{f^3}\left(-\frac{7}{40} f f'' l_x^2 + \frac{5}{16} f'^2 l_x^2 - \frac{1}{2} f f' l_x l_1\right)$$

$$S_5 = \frac{1}{f^4}\left(-\frac{11}{15 \cdot 16} f^2 f''' l_x^2 + \frac{19}{5 \cdot 16} f f' f'' l_x^2 - \frac{7}{32} f'^3 l_x^2 \right.$$
$$\left. - \frac{7}{40} f^2 f'' l_x l_1 + \frac{5}{16} f f'^2 l_x l_1\right)$$

$$S_6 = \frac{1}{f^5}\left(-\frac{7}{6 \cdot 8 \cdot 15} f^3 f^{\mathrm{IV}} l_x^2 + \frac{47}{15 \cdot 48} f^2 f' f''' l_x^2 \right.$$
$$- \frac{21}{5 \cdot 16} f f'^2 f'' l_x^2 + \frac{113}{32 \cdot 5 \cdot 15} f^2 f''^2 l_x^2$$
$$+ \frac{21}{8 \cdot 16} f'^4 l_x^2 - \frac{11}{240} f^3 f''' l_x l_1$$
$$\left. + \frac{19}{80} f^2 f' f'' l_x l_1 - \frac{7}{32} f f'^3 l_x l_1\right).$$

In quanto poi agli sviluppi degli integrali w si ha:

$$w_1 = -\int_y^x \frac{z_1\, dz_1}{\sqrt{f(z)}} = W_1\zeta + W_2\zeta^2 + W_3\zeta^3 + \cdots,$$

dove:

$$W_1 = -\frac{x_1}{\sqrt{f}}$$

$$W_2 = -\frac{f - \frac{1}{2} f' x_1}{f^{\frac{3}{2}}}$$

$$W_3 = -\frac{1}{6}\,\frac{-ff' - \frac{1}{2} ff'' x_1 + \frac{3}{4} f'^2 x_1}{f^{\frac{5}{2}}}$$

$$W_4 = -\frac{1}{4f^{\frac{7}{2}}}\left[-\frac{1}{12}\left(f^2 f''' - \frac{9}{2} ff' f'' + \frac{15}{4} f'^3\right)x_1 - \frac{1}{4}\left(f^2 f'' - \frac{3}{2} ff'^2\right)\right]$$

$$W_5 = -\frac{1}{5f^{\frac{9}{2}}}\left[-\frac{1}{48}\left(f^3 f^{\mathrm{IV}} - 6 f^2 f' f''' + \frac{45}{2} ff'^2 f'' - \frac{9}{2} f^2 f''^2 - \frac{105}{8} f'^4\right)x_1 \right.$$
$$\left. - \frac{1}{12}\left(f^3 f''' - \frac{9}{2} f^2 f' f'' + \frac{15}{4} ff'^3\right)\right].$$

In quanto all'espressione di w_2, essa ha una forma perfettamente analoga, salvo che mancano i termini senza x_1, e quelli altri termini che in w_1 sono moltiplicati per x_1, in w_2 sono invece moltiplicati per 1.

Da queste formole, insieme con quelle precedenti per lo sviluppo di Σ_1, risulta subito che il primo termine di Σ_1 è, come del resto si può prevedere,

$$[w]^2_{\Sigma_1} = l^2_w.$$

La parte in ζ^3 dello sviluppo di Σ_1 risulta quando in questo primo termine in luogo delle w (che stanno a 2.° grado) pongo i termini in ζ^3 rispett. dei quadrati delle w o del loro prodotto.

In altri termini il detto termine in ζ^3 risulta quando in

$$l^2_w = l_1^2 w_1^2 + 2 l_1 l_2 w_1 w_2 + l_2^2 w_2^2,$$

pongo in luogo di

w_1^2	l'espressione	$\frac{1}{f^2}\left(fx_1 - \frac{1}{2} f' x_1^2\right)$
$w_1 w_2$	"	$\frac{1}{f^2}\left(\frac{1}{2} f - \frac{1}{2} f' x_1\right)$
w_2^2	"	$\frac{1}{f^2}\left(\quad - \frac{1}{2} f'\right).$

Il termine in ζ^4 di Σ risulta:

I. Se in l_w^2 pongo per w_1^2, $w_1 w_2$, w_2^2 i loro termini in ζ^4, i quali, come è facile vedere, possono risultare in due modi, cioè:

a) o coi prodotti dei soli termini in ζ^2 degli sviluppi delle w;

b) o coi prodotti dei termini in ζ con quelli in ζ^3.

II. Se in $[w]^4$ pongo per le w i loro termini in ζ.

La prima parte la possiamo calcolare, ed è:

$$\left\{\frac{1}{16}\, l_x^2 f'^2 - \frac{1}{4}\, l_x l_1 f f' + \frac{1}{4}\, l_1^2 f^2\right\} \frac{\zeta^4}{f^3} \qquad a)$$

$$\left\{-\frac{1}{6}\, l_x^2 f f'' + \frac{1}{4}\, l_x^2 f'^2 - \frac{1}{3}\, l_x l_1 f f'\right\} \frac{\zeta^4}{f^3}. \qquad b)$$

Sottraendo ora le espressioni *a*) *b*) da S_4, si vede che si distruggono i termini in $f'^2 l_x^2$, e restano termini tutti divisibili per f, che debbono dunque costituire la parte seconda.

Si ha per risultato semplicemente:

$$-\frac{1}{4}\,(a\,l)^2 a_x^2 \cdot \frac{1}{f^2},$$

dove ponendo w_1 w_2 in luogo di $\dfrac{x_1}{\sqrt{f}}$ e di $\dfrac{1}{\sqrt{f}}$ si ha infine:

$$[w]_{\Sigma_1}^4 = -\frac{1}{4}\,(a\,l)^2 a_w^4.$$

Analogamente:

$$[w]_{\Sigma_2}^4 = -\frac{1}{4}\,(a\,m)^2 a_w^4$$

$$[w]_{\Sigma_3}^4 = -\frac{1}{4}\,(a\,n)^2 a_w^4.$$

Queste espressioni sono le seconde *überschiebungen* di f rispettivamente su l, m, n.

Le loro espressioni mediante i covarianti del sistema completo della sestica sono note (*).

(*) Gordan, *Invariant.*, II, pag. 287 e seg. — Clebsch, *Th. d. bin. Form.*, p. 285 e seg.

Si ha propriamente:

$$[w]^4_{\Sigma_1} = -\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{12}A \cdot k$$

$$[w]^4_{\Sigma_2} = -\frac{1}{8}l^2 - \frac{1}{12}B \cdot k - \frac{1}{12}A \cdot \Delta$$

$$[w]^4_{\Sigma_3} = -\frac{1}{4}lm + \frac{1}{12}C \cdot k - \frac{1}{12}B \cdot \Delta,$$

dove A, B, C, Δ, k,... sono i noti invarianti e covarianti della sestica (*).

§ 11. Calcolo del termine $[w]^6$ in ciascuna delle tre prime Σ.

La parte in ζ^6 dello sviluppo di Σ_1 risulta, oltrechè ponendo in $[w]^6$ per le w i loro termini in ζ, anche dalle seguenti altre combinazioni:

I. Ponendo in l^2_w per le w:

a) Il quadrato dei termini in ζ^3 del loro sviluppo;

b) Il doppio prodotto dei termini in ζ^2 e ζ^4;

c) Il doppio prodotto dei termini in ζ e ζ^5.

II. Ponendo in $[w]^4$ per le w:

a) Quattro volte il prodotto della terza potenza dei termini in ζ per la prima dei termini in ζ^3;

b) Sei volte la seconda potenza dei termini in ζ per la seconda dei termini in ζ^2.

Tali espressioni sono rispettivamente (a meno di un denominatore f^5):

$$\text{I. } a) \quad \frac{1}{12 \cdot 12}\left(f^2 f''^2 + \frac{9}{4}f'^4 - 3ff'^2f''\right)l_x^2 + \frac{1}{36}\left(f^2 f' f'' - \frac{3}{2}ff'^3\right)l_x l_1 + \frac{1}{36}f^2 f'^2 l_1^2$$

$$b) \quad \frac{1}{8 \cdot 12}\left(f^2 f' f''' - \frac{9}{2}ff'^2 f'' + \frac{15}{4}f'^4\right)l_x^2 + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{12}f^3 f''' + \frac{1}{2}f^2 f' f'' - \frac{1}{2}ff'^3\right)l_x l_1 - \frac{1}{16}\left(f^3 f'' - \frac{3}{2}f^2 f'^2\right)l_1^2$$

(*) Il k di Gordan è lo stesso dell'i di Clebsch.

$$c)\quad -\frac{1}{5\cdot 24}\left(f^3 f^{\mathrm{IV}} - 6f^2 f' f'' + \frac{45}{2} ff'^2 f' - \frac{9}{2} f^2 f''^2 - \frac{105}{8} f'^4\right) l_x^2$$
$$-\frac{1}{12}\left(f^3 f''' - \frac{9}{2} f^2 f' f'' + \frac{15}{4} ff'^3\right) l_x l_1$$

$$\text{II. } a)\quad \frac{1}{6}\left(\frac{1}{6\cdot 5\cdot 4} f^2 f' f''' + \frac{1}{4\cdot 3\cdot 5} f^2 f''^2 - \frac{1}{8\cdot 5} ff'^2 f''\right) l_x^2$$
$$-\frac{1}{3}\left(\frac{7}{3\cdot 4\cdot 5} f^2 f' f'' - \frac{1}{8} ff'^3\right) l_x l_1 + \frac{1}{6}\left(-\frac{7}{12} f^2 f'^2 + \frac{1}{2} f^3 f''\right) l_1^2$$

$$b)\quad \frac{3}{8}\left(-\frac{1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3} f^3 f^{\mathrm{IV}} + \frac{1}{6\cdot 5\cdot 4} f^2 f' f''' - \frac{1}{4\cdot 6\cdot 5} ff'^2 f''\right) l_x^2$$
$$-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{6\cdot 5\cdot 4} f^3 f''' + \frac{1}{6\cdot 5} f^2 f' f'' - \frac{1}{24} ff'^3\right) l_x l_1$$
$$+\frac{3}{8}\left(-\frac{1}{6\cdot 5} f^3 f'' - \frac{1}{12} f^2 f'^2\right) l_1^2.$$

Sottragghiamo la somma di tutte queste espressioni da quella di S_6 del § 10. Si vede in primo punto che scompaiono i termini non divisibili per f^2, ciò che appunto deve verificarsi, perchè l'espressione che rimane, dovendo essere il risultato che si ottiene ponendo per le w in $[w]^6$ i loro termini in w, e inoltre dovendo $[w]^6$ essere un'espressione *intera,* come sappiamo dalla teoria generale delle Σ, si ha che vi deve rimanere solo il denominatore f^3.

Ponendo f sotto la forma simbolica il risultato finale è:

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{f^3}\Big[&-\frac{1}{8} b_x^6 a_x^2 a_1^4 l_x^2 + \frac{1}{4} b_x^5 b_1 a_x^3 a_1^3 l_x^2 - \frac{1}{8} b_x^4 b_1^2 a_x^4 a_1^2 l_x^2\\ &+\frac{1}{4} b_x^6 a_x^3 a_1^3 l_x l_1 - \frac{1}{4} b_x^5 b_1 a_x^4 a_1^2 l_x l_1 + \frac{1}{4} b_x^5 b_1 a_x^5 a_1 l_1^2\\ &-\frac{1}{4} b_x^6 a_x^4 a_1^2 l_1^2\Big].\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Si ricordi che in queste espressioni è tolta l'omogeneità delle $x_1\, x_2$; essa è apparentemente di 10.° ordine in x, ma effettivamente è solo di 6.° ordine.

È facile vedere che esistono solo i seguenti due covarianti di 6.° ordine, di 2.° grado nei coefficienti di f, di 1.° grado nei coefficienti di l, e fra loro linearmente indipendenti:

$$(ab)^4\, a_x^2\, b_x^2\, l_x^2 = \mathrm{I}$$
$$(ab)^2\, (al)^2\, a_x^2\, b_x^4 = \mathrm{II},$$

onde l'espressione precedente deve essere del tipo:

$$\frac{1}{f^3}(c\,\mathrm{I} + c'\,\mathrm{II}). \tag{2}$$

Sviluppiamo ora I e II colle formole:

$$(a\,b)^4 = 2\,a_1^4\,b_x^2 - 8\,a_1^3\,a_x\,b_1\,b_x^3 + 6\,a_1^2\,a_x^2\,b_1^2\,b_x^2$$

$$(a\,l)^2 = a_1^2\,l_x^2 - 2\,a_x\,a_1\,l_x\,l_1 + a_x^2\,l_1^2$$

$$(a\,b)^2 = a_1^2\,b_x^2 - 2\,a_x\,a_1\,b_x\,b_1 + a_x^2\,b_1^2,$$

e paragoniamo allora (2) con (1). Si ha per risultato:

$$c = 0 \qquad c' = -\frac{1}{8};$$

onde infine:

$$[w]_{\Sigma_1}^6 = -\frac{1}{8}(a\,b)^2\,(a\,l)^2\,a_w^2\,b_w^4$$

$$= -\frac{1}{8}\Big((f\,l)^2,\ f\Big)^2.$$

e mutando l in m e n si hanno i termini per le altre due Σ.

Da quest'ultima formola si ricava questo notevole teorema:

« Il termine $[w]^6$ in ciascuna delle tre Σ non è altro che, a meno di un fattore numerico, la seconda *überschiebung* del termine precedente $[w]^4$ sopra f. »

Un'analoga proprietà sussiste fra $[w]^4$ e $[w]^2$, però in quest'ultimo caso, la cosa è prevedibile, perchè $[w]^4$ dovendo avere la forma invariantiva, non può avere altra espressione che $(f,\ l)^2$ (a meno di un fattore numerico da noi avanti determinato) non esistendo altro covariante di 4.° ordine e di 1.° grado nei coefficienti di f e di l.

Per il caso invece che noi abbiamo posto in vista, non si può più prevedere il risultato, perchè esiste effettivamente un altro covariante [oltre $((f\,l)^2,\ f)^2$] che sia di 6.° ordine, di 2.° grado nei coefficienti di f e di 1.° grado nei coefficienti di l; come abbiamo sopra notato.

Possiamo dunque porre in vista questo risultato:

« Gli sviluppi di $\Sigma_1\ \Sigma_2\ \Sigma_3$ sono tali che, *sino ai termini di 6.° ordine,* ogni termine si forma dal precedente (a meno di un fattore numerico) facendone la seconda *überschiebung* sulla sestica fondamentale. »

§ 12. Espressione definitiva dei termini $[w]^6$.

Come abbiamo fatto per i termini $[w]^4$, cercheremo anche in questo caso di esprimere $[w]^6$ mediante i covarianti del sistema completo della sestica.

Si tratterà di calcolare le seconde *überschiebungen* di $(fl)^2$, $(fm)^2$, $(fn)^2$ sopra f.

Ora le $(fl)^2$, $(fm)^2$, $(fn)^2$ sono note (vedi § 10), quindi per calcolare i nostri termini $[w]^6$ tutto si riduce a sapere calcolare le seconde *überschiebungen* sopra f delle seguenti espressioni:

$$\Delta, \qquad k, \qquad l^2, \qquad lm.$$

Ora $(fk)^2$ è proprio un covariante del sistema completo; esso è chiamato p da Clebsch.

Inoltre:

$$(f,\ \Delta)^2 = \frac{1}{2}\, lk - \frac{1}{6}\, B \cdot f \ (*),$$

e infine facilmente si hanno le formole:

$$(f,\ l^2)^2 = (a\, l)^2\, a_x^4 \cdot l_x^2 - \frac{1}{3}\, (l\, l')^2 \cdot a_x^6$$

$$= (f\, l)^2 \cdot l - \frac{1}{3}\, A_{ll} \cdot f,$$

essendo A_{ll} l'invariante della quadratica l:

$$(f,\ l\, m)^2 = \frac{1}{2}\, (f m)^2 \cdot l - \frac{1}{2}\, (f l)^2 \cdot m - \frac{1}{3}\, A_{lm} \cdot f,$$

essendo A_{lm} l'invariante simultaneo delle due quadratiche l, m. Le espressioni di A_{ll}, A_{lm} sono note (**).

Onde infine:

$$[w]^6_{\Sigma_1} = -\frac{1}{8}\left(2\,\Delta + \frac{A}{3}\, k,\ f\right)^2$$

$$= -\frac{1}{8}\, lk + \frac{1}{24}\, Bf - \frac{1}{24}\, p$$

(*) Gordan, *Invariant.*, II, pag. 279.

(**) Clebsch, pag. 299.

$$[w]^6_{\Sigma_2} = -\frac{1}{8}\left(\frac{l^2}{2} + \frac{B}{3}k + \frac{A}{3}\Delta,\ f\right)^2$$

$$= -\frac{1}{8}\Delta l - \frac{1}{24}Akl + \frac{1}{24}C\cdot f + \frac{1}{72}AB\cdot f - \frac{1}{24}B\cdot p$$

$$[w]^6_{\Sigma_3} = -\frac{1}{8}\left(lm - \frac{1}{3}Ck + \frac{1}{3}B\Delta,\ f\right)^2$$

$$= -\frac{1}{32}l^3 - \frac{1}{24}Bkl - \frac{1}{48}A\Delta l - \frac{1}{8}\Delta m - \frac{1}{48}Akm +$$

$$+ \frac{5}{144}B^2 f + \frac{1}{36}AC\cdot f + \frac{1}{24}Cp.$$

§ 13. La funzione Σ_4.

Per $y = x + \zeta$ si trova il seguente sviluppo:

$$\sqrt{f(x)}\sqrt{f(y)} + a_x^3 a_y^3 = 2f + f'\zeta + \frac{1}{4}\,\frac{\frac{7}{5}ff'' - \frac{1}{2}f'^2}{f}\,\zeta^2 +$$

$$+ \frac{1}{12}\,\frac{\frac{11}{10}f^2 f''' - \frac{3}{2}ff'f'' + \frac{3}{4}f'^3}{f^2}\,\zeta^3 +$$

$$+ \frac{1}{48}\,\frac{f^3 f^{\mathrm{IV}} - 2f^2 f' f''' + \frac{9}{2}ff'^2 f'' - \frac{3}{2}f^2 f''^2 - \frac{15}{8}f'^4}{f^3}\,\zeta^4 + \cdots$$

Tenendo quindi presente l'espressione di Σ_4 e gli sviluppi dei paragrafi precedenti, si ha:

$$\Sigma_4 = 2 + T_1\zeta + T_2\zeta^2 + T_3\zeta^3 + T_4\zeta^4 + \cdots.$$

dove:

$$T_1 = \frac{1}{f}(2fA_1 + f')$$

$$T_2 = \frac{1}{f^2}\left(-Nf^2 + \frac{7}{20}ff' - \frac{5}{8}f'^2 + 2A_2 f^2\right)$$

$$T_3 = \frac{1}{f^3}\Big[-Mf^3 - \frac{1}{2}Nf^2(2fA_1 + f') + 2A_3 f^3 + f^2 f' A_2 +$$

$$+ \left(\frac{7}{20}f^2 f'' - \frac{1}{8}ff'^2\right)A_1 + \frac{1}{12}\left(\frac{11}{10}f^2 f''' - \frac{5}{2}ff'f'' + \frac{3}{4}f'^3\right)\Big]$$

$$T_4 = \frac{1}{f^4}\Big\{-\Big(R - \frac{1}{4}N^2\Big)f^4 - \frac{1}{2}Mf^3(2fA_1 + f') -$$

$$-\frac{1}{2}N\Big(\frac{7}{20}f^3f'' - \frac{5}{8}f^2f'^2 + 2A_2f^4\Big) + 2A_4f^4 +$$

$$+ A_3f^3f' + \frac{1}{4}A_2f^2\Big(\frac{7}{5}ff'' - \frac{1}{2}f'^2\Big) -$$

$$-\frac{1}{24}f'\Big(\frac{11}{10}f^2f''' - \frac{3}{2}ff'f'' + \frac{3}{4}f'^3\Big) +$$

$$+\frac{1}{48}\Big(f^3f^{\mathrm{IV}} - 2f^2f'f''' + \frac{9}{2}ff'^2f'' - \frac{3}{2}f^2f''^2 - \frac{15}{8}f'^4\Big)\Big\}.$$

Se per le N, M, A, si pongono i loro valori (vedi § 9) si trova che:

$$T_1 = T_2 = T_3 = 0.$$

In quanto a T_4 si trova semplicemente:

$$T_4 = \frac{1}{f^2}\Big\{\frac{1}{16\cdot 3\cdot 3\cdot 5}ff^{\mathrm{IV}} - \frac{1}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 8}f'f''' + \frac{1}{3\cdot 5\cdot 5\cdot 8}f''^2\Big\} =$$

$$= \frac{1}{f^2}\Big(\frac{1}{2}a_x^6 b_x^2 b_1^4 - 2a_x^5 a_1 \cdot b_x^3 b_1^3 + \frac{3}{2}a_x^4 a_1^2 \cdot b_x^4 b_1^2\Big)$$

$$= \frac{1}{f^2}\Big\{\frac{1}{4}(ab)^4 a_x^2 b_x^2\Big\}.$$

Onde lo sviluppo di Σ_4 è:

$$\Sigma_4 = 2 + * + \frac{1}{4}k_w^4 + \cdots.$$

§ 14. La funzione dispari Σ_5. Termini di 5.° e 7.° ordine.

Lo sviluppo della forma X_5 secondo le potenze di ζ è:

$$-\zeta^5\Big\{2a_t a_x^5 f^{\frac{1}{2}} + a_t\Big(\frac{1}{2}\frac{f'}{f^{\frac{1}{2}}}a_x^5 + 5a_x^4 a_1 f^{\frac{1}{2}}\Big)\zeta +$$

$$+ a_t\Big(\frac{1}{4}\frac{f''f - \frac{1}{2}f'^2}{f^{\frac{3}{2}}}a_x^5 + \frac{1}{2}\frac{f'}{f^{\frac{1}{2}}}a_x^4 a_1 + 6a_x^3 a_1^2 f^{\frac{1}{2}}\Big)\zeta^2 +$$

$$+ a_t\left(\frac{1}{12}\,\frac{f^2f''' - \frac{3}{2}ff'f'' + \frac{3}{4}f'^3}{f^{\frac{5}{2}}}\,a_x^5 + \frac{1}{4}\,\frac{ff'' - \frac{1}{2}f'^2}{f^{\frac{3}{2}}}\,a_x^4 a_1 + 4\,a_x^2 a_1^3 f^{\frac{1}{2}}\right)\zeta^3 +$$

$$+ a_t\left(\frac{1}{48}\,\frac{f^3f^{\mathrm{IV}} - 2f^2f'f''' + \frac{9}{2}ff'^2f'' - \frac{3}{2}f^2f''^2 - \frac{15}{8}f'^4}{f^{\frac{7}{2}}}\,a_x^5\right.$$

$$\left.+ \frac{1}{12}\,\frac{f^2f''' - \frac{3}{2}ff'f'' + \frac{3}{4}f'^3}{f^{\frac{5}{2}}}\,a_x^4 a_1 + a_x a_1^4 f^{\frac{1}{2}}\right)\zeta^4 + \cdots\Big\}.$$

Inoltre lo sviluppo di $[\chi(xy)]^3$ è dato da:

$$1 + 3A_1\zeta + \left(-\frac{3}{2}N + 3A_1^2 + 3A_2\right)\zeta^2 +$$
$$+ \left(-\frac{3}{2}M - \frac{9}{2}A_1N + 6A_1A_2 + 3A_3 + A_1^3\right)\zeta^3 +$$
$$+ \left(-\frac{3}{2}R + \frac{9}{8}N^2 - \frac{9}{2}A_1M - \frac{3}{2}N(3A_1^2 + 3A_2) + \right.$$
$$\left. + 3A_4 + 6A_1A_3 + 3A_2^2 + 3A_1^2A_2\right)\zeta^4 + \cdots,$$

onde lo sviluppo di Σ_5 è dato da:

$$\Sigma_5 = T_5\zeta^5 + T_6\zeta^6 + \cdots,$$

dove:

$$T_5 = -\frac{2a_ta_x^5}{f^{\frac{5}{2}}}$$

$$T_6 = -\frac{1}{f^{\frac{7}{2}}}\left(5fa_x^4a_1 - \frac{5}{2}f'\,a_x^5\right)a_t$$

$$T_7 = -\frac{1}{f^{\frac{9}{2}}}\left\{\left(-\frac{4}{5}ff'' + \frac{5}{2}f'^2\right)a_x^5 - 7ff'\,a_x^4a_1 + 6f^2a_x^3a_1^2\right\}a_t$$

$$T_8 = -\frac{1}{f^{\frac{11}{2}}}\left\{\left(-\frac{23}{8\cdot 15}f^2f''' + \frac{137}{80}ff'f'' - \frac{75}{32}f'^3\right)a_x^5\right.$$
$$\left. + \left(-\frac{19}{8}f^2f'' + \frac{121}{16}ff'^2\right)a_x^4a_1 - 9f^2f'\,a_x^3a_1^2 + 4f^3a_x^2a_1^3\right\}a_t$$

$$T_9 = -\frac{1}{f^{\frac{13}{2}}}\Bigg\{\left[-\frac{3}{5\cdot 16} f^3 f^{\mathrm{IV}} + \frac{207}{32\cdot 15} f^2 f' f''' - \frac{81}{32} f f'^2 f'' + \frac{243}{32\cdot 25} f^2 f''^2 + \frac{275}{128} f'^4\right] a_x^5 a_t$$
$$+ \left[-\frac{29}{3\cdot 16} f^3 f''' + \frac{217}{40} f^2 f' f'' - \frac{15}{2} f f'^3\right] a_x^4 a_1 a_t$$
$$+ \left[-\frac{63}{20} f^3 f'' + \frac{81}{8} f^2 f'^2\right] a_x^3 a_1^2 a_t - 6 f^3 f' a_x^2 a_1^3 a_t + f^4 a_x a_1^4 a_t\Bigg\}.$$

Il primo termine di Σ_5 è allora evidentemente:

$$[w]^5_{\Sigma_5} = 2\, a_w^5 a_t.$$

Per trovare il secondo termine togliamo da T_7 quello che risulta ponendo in $[w]^5$ per le w:

1.° Cinque volte il prodotto delle quarte potenze dei loro termini in ζ per quelli in ζ^3;

2.° Dieci volte il prodotto delle terze potenze dei loro termini in ζ per i quadrati dei termini in ζ^2.

Dobbiamo cioè togliere:

$$\frac{5}{3 f^{\frac{9}{2}}}\left[+ f f' a_x^4 a_1 a_t + \frac{1}{2}\left(f f'' - \frac{3}{2} f'^2\right) a_x^5 a_t\right] \tag{1}$$

$$\frac{5}{f^{\frac{9}{2}}}\left(- f^2 a_x^3 a_1^2 a_t + f f' a_x^4 a_1 a_t - \frac{1}{4} f'^2 a_x^5 a_t\right). \tag{2}$$

Allora si vede che i termini in f'^2 si distruggono, come deve accadere, perchè essi sono i soli che conserverebbero per denominatore $f^{\frac{9}{2}}$, mentre che, per ragioni analoghe a quelle altre volte dette (vedi § 11), debbono restare tutti termini solo col denominatore $f^{\frac{7}{2}}$.

Resta infine:

$$-\frac{1}{f^{\frac{7}{2}}}\left(\frac{1}{30} f'' a_x^5 - \frac{1}{3} f' a_x^4 a_1 + f a_x^3 a_1^2\right) a_t,$$

cioè:

$$-\frac{1}{f^{\frac{7}{2}}}\left(b_x^4 b_1^2 \cdot a_x^5 - 2 b_x^5 b_1 a_x^4 a_1 + b_x^6 a_x^3 a_1^2\right) a_t.$$

Onde il secondo termine di Σ_5 è precisamente:

$$[w]^7_{\Sigma_5} = (ab)^2 a_w^3 b_w^4 a_t = H_w^7 H_t.$$

§ 15. Il termine di 9.° ordine di Σ_5.

Togliamo da T_9 quello che risulta ponendo per le w.

1. In $2 a_w^5 a_t$:

a) dieci volte il prodotto dei quadrati dei loro termini in ζ^3 per il cubo dei termini in ζ;

b) venti volte il prodotto dei termini in ζ^4 per quelli in ζ^2 e per i cubi dei termini in ζ;

c) cinque volte il prodotto dei termini in ζ^5 per le quarte potenze dei termini in ζ;

d) trenta volte il prodotto dei termini in ζ^3 per i quadrati dei termini in ζ^2 e per i quadrati dei termini in ζ;

e) cinque volte il prodotto delle quarte potenze dei termini in ζ^2 per la prima di quelli in ζ.

2. In $H_w^7 H_t$.

a) sette volte la sesta potenza dei termini in ζ moltiplicata per la prima di quelli in ζ^3;

b) ventun volte il prodotto della quinta potenza dei termini in ζ per la seconda dei termini in ζ^2.

Dobbiamo cioè infine togliere da T_9 la seguente espressione (a meno del denominatore $f^{\frac{13}{2}}$):

$$-\left[-\frac{3}{5\cdot 16}f^3 f^{\mathrm{IV}}+\frac{77}{9\cdot 4\cdot 5}f^2 f' f'''-\frac{81}{32}ff'^2 f''+\frac{221}{5\cdot 16\cdot 9}f^2 f''^2+\frac{275}{128}f'^4\right]a_x^5 a_t$$
$$-\left[-\frac{7}{12}f^3 f'''+\frac{389}{72}f^2 f' f''-\frac{15}{2}ff'^3\right]a_x^4 a_1 a_t$$
$$-\left[\frac{1474}{9\cdot 16}f^2 f'^2-\frac{77}{24}f^3 f''\right]a_x^3 a_1^2 a_t+\frac{25}{4}f^3 f' a_x^2 a_1^3 a_t-\frac{11}{8}f^4 a_x a_1^4 a_t.$$

Si ottiene per risultato:

$$-\left[\frac{1}{32\cdot 9}f^2 f' f'''-\frac{23}{32\cdot 9\cdot 25}f^2 f''^2\right]a_x^5 a_t$$
$$-\left[-\frac{1}{48}f^3 f'''+\frac{1}{45}f^2 f' f''\right]a_x^4 a_1 a_t$$
$$-\left[\frac{7}{5\cdot 24}f^3 f''-\frac{1}{9}f^2 f'^2\right]a_x^3 a_1^2 a_t-\frac{1}{4}f^3 f' a_x^2 a_1^3 a_t+\frac{3}{8}f^4 a_x a_1^4 a_t,$$

ovvero anche (sopprimendo un fattore comune f^2):

$$\left.\begin{aligned}
&-\left[\frac{5}{2}\, c_x^5\, c_1\, b_x^3\, b_1^3 - \frac{23}{8}\, c_x^4\, c_1^2\, b_x^4\, b_1^2\right] a_x^5\, a_t \\
&-\left[-\frac{5}{2}\, c_x^6\, b_x^3\, b_1^3 + 4\, c_x^5\, c_1\, b_x^4\, b_1^2\right] a_x^4\, a_1\, a_t \\
&-\left[\frac{7}{4}\, c_x^6\, b_x^4\, b_1^2 - 4\, c_x^5\, c_1\, b_x^5\, b_1\right] a_x^3\, a_1^2\, a_t \\
&-\frac{3}{2}\, c_x^6\, b_x^5\, b_1\, a_x^2\, a_1\, a_t + \frac{3}{8}\, c_x^6\, b_x^6\, a_x\, a_1^4\, a_t.
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Ora dal sistema delle forme invariantive della sestica risulta che non esiste altro covariante di 10.° ordine e 3.° grado che solo

$$k_x^4\, f_x^6.$$

Onde il termine di 9.° ordine in x e di 1.° ordine in t, che andiamo cercando, non può essere che del seguente tipo:

$$c\, k_x^3\, k_t\, f_x^6 + c'\, k_x^4\, f_x^5\, f_t, \tag{2}$$

dove c, c' sono due coefficienti numerici da determinare.

Poniamo in (2) per k la espressione $(a\,b)^4\, a_x^2\, b_x^2$, e poi sviluppiamo i determinanti $(a\,b)$ colla formola simbolica:

$$(a\,b) = a_1\, b_x - a_x\, b_1,$$

(si ricordi che qui le x non sono più variabili omogenee, ma si è supposto $x_2 = 1$), e finalmente si ponga l'indice 1 in luogo dell'indice t. Allora risulta la seguente espressione:

$$(c + 2\,c')\,(012) - 8\,c'\,(113) + 6\,c'\,(122) +$$
$$+ 2\,c\,(023) - 4\,c\,(014) + c\,(005),$$

dove per brevità si è indicata col simbolo $(l\,m\,n)$ l'espressione:

$$a_x^{6-l}\, a_1^l\, b_x^{6-m}\, b_1^m\, c_x^{6-n}\, c_1^n.$$

Intanto in (1) ponendo anche l'indice 1 in luogo dell'indice t e poi raccogliendo i termini simili, si ha:

$$+\frac{3}{2}\,(113) - \frac{9}{8}\,(122) + \frac{3}{4}\,(023) - \frac{3}{2}\,(014) + \frac{3}{8}\,(005),$$

onde dal paragone si ha:

$$c = \frac{3}{8} \qquad c' = -\frac{3}{16}\,.$$

E passando infine dalle x alle w si ha che:

$$[w]^9_{\Sigma_5} = -\frac{3}{8}\,k^3_w\,k_t\,f^6_w + \frac{3}{16}\,k^4_w\,f^5_w\,f_t\,.$$

Napoli, $\frac{\text{Gennaio}}{\text{Marzo}}$ 1890.

Sulla teoria delle superficie di rivoluzione.

(*Di* Geminiano Pirondini, *a Parma*.)

§ 1.

Linee tracciate sulla stessa superficie di rivoluzione. — Le superficie S, S_1 generate dalla rotazione attorno all'asse delle z delle linee L, L_1 rappresentate dalle equazioni:

$$x = x(u), \quad y = y(u), \quad z = U(u); \qquad x_1 = x_1(u), \quad y_1 = y_1(u), \quad z_1 = U_1(u),$$

hanno per meridiani le curve:

$$x_0 = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad z_0 = U; \qquad x_{10} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \qquad y_{10} = U_1;$$

quindi l'eguaglianza delle superficie S, S_1 è stabilita quando sia:

$$x^2 + y^2 = x_1^2 + y_1^2, \qquad U = U_1.$$

La prima condizione è soddisfatta da:

$$x = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cos f(u), \qquad y = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \operatorname{sen} f(u),$$

con $f(u)$ funzione arbitraria di u e la seconda serve a determinare z_1; perciò *tutte le linee rappresentate dalle equazioni:*

$$x = R \cdot \cos f(u), \qquad y = R \cdot \operatorname{sen} f(u), \qquad z = U, \tag{1}$$

qualunque sia la funzione $f(u)$ di u, ruotando attorno all'asse delle z, generano la stessa superficie di rivoluzione, cioè quella generata dalla curva:

$$x_1 = R \cdot \cos u, \qquad y_1 = R \cdot \operatorname{sen} u, \qquad z_1 = U \text{ »}. \tag{2}$$

Le linee (1) abbiano, rispetto alla superficie di rivoluzione sulla quale sono tracciate, una determinata proprietà geometrica espressa dall'equazione:

$$\theta(f, R, U, f', R', U', \ldots) = 0, \tag{3}$$

che lega fra loro le funzioni f, R, U e le loro derivate dei varii ordini; supponendo di ricavare coll'integrazione:

$$f = \varphi(R,\ U,\ R',\ U',\ldots),$$

avremo:

$$x = R\cos\varphi(R,\ U,\ R',\ U',\ldots), \qquad y = R\,\mathrm{sen}\,\varphi(R,\ U,\ R',\ U',\ldots), \qquad z = U. \quad (4)$$

Si supponga di determinare la funzione arbitraria U in modo da soddisfare la condizione:

$$\varphi(R,\ U,\ R',\ U',\ldots) = u, \quad (5)$$

e sia $U = \psi(R,\ R',\ldots)$ il valore che si ricava per la U integrando la (5); le (2) divengono allora:

$$x_1 = R\cos u, \qquad y_1 = R\,\mathrm{sen}\,u, \qquad z_1 = \psi(R,\ R',\ldots). \quad (6)$$

Abbiamo così il teorema generale « *le linee le quali, per rispetto alla superficie generata dalla loro rotazione attorno all'asse delle z, hanno una determinata proprietà geometrica espressa dall'equazione differenziale* (3) *sono rappresentate dalle equazioni* (4) *ovvero dalle* (6), *nelle quali* $\varphi(R,\ U,\ R',\ U',\ldots)$ *è il valore della funzione f che si ottiene integrando la* (3) *e* $\psi(R,\ R',\ldots)$ *è il valore della funzione U che si ottiene integrando la* (5) ».

Senza insistere soverchiamente sull'uso di queste formole, osserveremo che le (4) tornano opportune quando sia già nota *a priori* la superficie di rivoluzione che contiene la linea; che se invece la superficie non si conosce *a priori* allora generalmente è più conveniente l'uso delle (6).

Conviene osservare in fine che in moltissimi casi, dovendosi considerare sopra una determinata superficie di rivoluzione il sistema di linee aventi una data proprietà geometrica, è conveniente assumere come generatrice primitiva anzi che la linea (2), la linea (6) che appartiene al sistema stesso; a questo scopo basta sostituire nelle equazioni (4) al posto della funzione U la precedente ψ. Però si deve osservare a questo riguardo che nella (3) entrano, in generale, varie costanti arbitrarie a, b, c,... introdotte per esprimere analiticamente la proprietà geometrica della linea; tali costanti entrano pure nell'integrale di (3) e quindi nella (5); se quindi, assumendo per generatrice primitiva la (6), vogliamo che le (4) rappresentino qualunque altra linea appartenente a quella determinata famiglia cui appartiene la (6), si deve supporre di aver sostituito nella (3) alle costanti arbitrarie a, b, c,... le altre costanti a_1, b_1, c_1,...

Avremo dunque « *le linee le quali, rispetto alla superficie generata dalla loro rotazione attorno all'asse delle z, hanno una determinata proprietà geometrica espressa dall'equazione differenziale* (3), *possono venire rappresentate dalle equazioni:*

$$\left.\begin{array}{c} x_2 = R\cdot\cos\varphi_1(R,\ \psi,\ R',\ \psi',\ldots), \qquad y_2 = R\cdot\operatorname{sen}\varphi_1(R,\ \psi,\ R',\ \psi',\ldots), \\ z_2 = \psi(R,\ R',\ldots) \end{array}\right\} \quad (7)$$

nelle quali ψ *è la funzione che entra nel teorema precedente e* φ_1 *è ciò che diviene la funzione* φ *del teorema precedente, cambiando le costanti arbitrarie* $a, b, c, \ldots$ *che entrano nella* (3) *prima della sua integrazione (e dalle quali dipende il variare delle linee del sistema) in altre costanti arbitrarie* a_1, b_1, $c_1, \ldots$ »

Le (7) possono servire più convenientemente che le (4) per risolvere la questione di determinare tutte le linee di quella certa famiglia che si considera, tosto che se ne conosce una; basterà, a questo scopo, far variare in tutti i modi possibili le costanti a_1, b_1, $c_1, \ldots$, lasciando fisse le a, b, $c, \ldots$

§ 2.

Applichiamo le considerazioni generali precedenti ad alcuni casi particolari.

A) La condizione che la linea (1) sia geodetica della superficie di rivoluzione equivale all'altra che la sua normale principale:

$$\frac{X-x}{\frac{d^2x}{ds^2}} = \frac{Y-y}{\frac{d^2y}{ds^2}} = \frac{Z-z}{\frac{d^2z}{ds^2}},$$

nel punto generico $(x,\ y,\ z)$ incontri l'asse delle z; tale condizione è soddisfatta quando sia:

$$x\frac{dy}{ds} - y\frac{dx}{ds} = a,$$

con a costante. La (3) diviene quindi nel nostro caso:

$$f' - \frac{a}{R}\sqrt{\frac{R'^2 + U'^2}{R^2 - a^2}} = 0.$$

B) Si supponga che la linea (1) sia lossodromia; se si indicano con X, Y, Z le coordinate d'un punto qualunque della superficie generata dalla rotazione di tale linea attorno all'asse delle z, si ha:

$$X = x\cos v - y\,\mathrm{sen}\,v; \qquad Y = x\,\mathrm{sen}\,v + y\cos v; \qquad Z = z,$$

dalle quali:

$$E = \Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}\right)^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 = R^2 f'^2 + R'^2 + U'^2;$$

$$F = \Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}\right) = x y' - x' y = R^2 f'; \qquad G = \Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial v}\right)^2 = x^2 + y^2 = R^2.$$

Notando quindi che, se i è l'angolo sotto il quale L sega i meridiani, si ha:

$$\mathrm{sen}\,i = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{R f'}{\sqrt{R^2 f'^2 + R'^2 + U'^2}},$$

nel nostro caso la (3) diviene:

$$f' - \mathrm{tang}\,i \cdot \frac{\sqrt{R'^2 + U'^2}}{R} = 0,$$

con i costante.

C) La linea (1) sia un'elica tracciata sopra un cilindro avente le generatrici parallele all'asse delle z; avremo:

$$\frac{dz}{ds} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{ds} = \frac{U'}{\sqrt{R^2 f'^2 + R'^2 + U'^2}}.$$

Se quindi poniamo la condizione che sia $\frac{dz}{ds} = \cos i$, con i costante, si avrà:

$$f' - \frac{\sqrt{U'^2 \mathrm{tang}^2 i - R'^2}}{R} = 0,$$

che è l'equazione (3) corrispondente al caso di cui trattiamo.

D) Esprimiamo la condizione che la linea (1) sia una trajettoria ortogonale delle eliche dell'elicoide da essa generato muovendosi di moto elicoidale attorno all'asse delle z; in tal caso la linea si dice *geodetica principale* dell'elicoide e per essa, qualunque sia la variabile indipendente u, deve essere soddisfatta la condizione (*):

$$\frac{dx}{du}y - \frac{dy}{du}x + p\frac{dz}{du} = 0.$$

(*) *Sulle superficie elicoidali.* Annali di Matematica, 1888.

nella quale p è il parametro del moto elicoidale. Applicando le (1) la precedente diviene:

$$R^2 f' - pU' = 0,$$

che è la relazione a cui ora si riduce la (3).

E) Sia la linea (1) la curva di contatto L della superficie generata dalla sua rotazione attorno all'asse delle z con un cilindro; la L può allora considerarsi come una linea d'ombra della superficie per rispetto a raggi luminosi paralleli.

Chiamando A, B, C gli angoli che la normale alla superficie in un punto qualunque fa cogli assi coordinati, si ha:

$$\cos A : \cos B : \cos C = \left(\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}\right) : \left(\frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial u}\right) :$$
$$: \left(\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right),$$

cioè:

$$\cos A : \cos B : \cos C = (x\cos v - y\,\mathrm{sen}\,v)z' : (x\,\mathrm{sen}\,v + y\cos v)z' : -(xx' + yy').$$

La condizione esprimente che L è una linea d'ombra rispetto a raggi luminosi paralleli alla direzione ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) è equivalente a quella che le normali alla superficie lungo L siano perpendicolari alla direzione dei raggi luminosi; tale condizione è dunque:

$$\Sigma \cos A \cdot \cos\alpha = 0.$$

Per più semplicità supporremo di considerare la linea L nella posizione iniziale, corrispondente a $v = 0$; supporremo per di più che il piano coordinato $y = 0$ sia quello che passa per l'asse di rotazione ed è parallelo alla direzione dei raggi luminosi (piano meridiano principale); avremo allora:

$$\cos A : \cos B : \cos C = xz' : yz' : -(xx' + yy');$$

$$\cos\alpha = \mathrm{sen}\,\theta, \qquad \cos\beta = 0, \qquad \cos\gamma = \cos\theta,$$

e la condizione precedente diviene:

$$xz' = \cot\theta \cdot (xx' + yy').$$

Dunque la (3) assume la forma:

$$U' \cos f(u) - \cot\theta \cdot R' = 0.$$

F) La linea rappresentata dalla (1) sia la curva di contatto della superficie generata dalla sua rotazione attorno all'asse delle z con un cono; la linea L può allora considerarsi come una linea d'ombra della superficie per rispetto a raggi luminosi uscenti dal vertice di quel cono. Se tale vertice si trova sull'asse delle x (nel qual caso il piano coordinato $y=0$ si dice piano meridiano principale) alla distanza a dall'origine, i coseni degli angoli α, β, γ che il raggio luminoso che va al punto (x, y, z) della linea d'ombra fa cogli assi coordinati soddisfano alla condizione:

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = x - a : y : z.$$

Ricordando quindi le espressioni dei coseni direttivi degli angoli A, B, C trovate nel caso E), avremo:

$$(x^2 + y^2 - ax)z' = z(xx' + yy'), \quad \text{cioè:} \quad \{R - a\cos f(u)\}U' = UR',$$

che è l'equazione a cui ora si riduce la (3).

Sulle varie formole trovate nei casi A), B), C), D), E), F) facciamo le operazioni e le trasformazioni indicate nel caso generale; si ottengono allora i risultati seguenti:

A) *Formole relative alle geodetiche:*

$$x = R\cdot\cos\left(a\int\sqrt{\frac{R'^2+U'^2}{R^2-a^2}}\cdot du\right); \quad y = R\cdot\operatorname{sen}\left(a\int\sqrt{\frac{R'^2+U'^2}{R^2-a^2}}\,du\right); \quad z = U \tag{8}$$

$$x_1 = R\cdot\cos u; \quad y_1 = R\cdot\operatorname{sen} u; \quad z_1 = \frac{1}{a}\int\sqrt{R^4 - a^2(R^2+R'^2)}\cdot du \tag{8$_1$}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_2 = R.\cos\left(\dfrac{a_1}{a}\displaystyle\int\sqrt{\frac{R^2-a^2}{R^2-a_1^2}}\cdot du\right); \quad y_2 = R\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{a_1}{a}\displaystyle\int\sqrt{\frac{R^2-a^2}{R^2-a_1^2}}\,du\right); \\ \qquad\qquad z_2 = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int\sqrt{R^4 - a^2(R^2+R'^2)}\cdot du.. \end{array}\right\} \tag{8$_2$}$$

B) *Formole relative alle lossodromie:*

$$x = R\cdot\cos\left(\operatorname{tg} i\int\frac{\sqrt{R'^2+U'^2}}{R}\,du\right); \quad y = R\cdot\operatorname{sen}\left(\operatorname{tg} i\cdot\int\frac{\sqrt{R'^2+U'^2}}{R}\,du\right); \quad z = U \tag{9}$$

$$x_1 = R\cdot\cos u; \quad y_1 = R\cdot\operatorname{sen} u; \quad z_1 = \int\sqrt{\cot^2 i\cdot R^2 - R'^2}\cdot du \tag{9$_1$}$$

$$x_2 = R\cdot\cos\left(\frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i}\,u\right); \quad y_2 = R\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i}\,u\right) \quad z_2 = \int\sqrt{\cot^2 i\cdot R^2 - R'^2}\cdot du. \tag{9$_2$}$$

C) Formole relative alle eliche:

$$x = R\cdot\cos\int\frac{\sqrt{U'^2\,\mathrm{tg}^2 i - R'^2}}{R}\,du;\quad y = R\cdot\mathrm{sen}\int\frac{\sqrt{U'^2\,\mathrm{tg}^2 i - R'^2}}{R}\,du;\quad z = U \qquad (10)$$

$$x_1 = R\cdot\cos u\quad y_1 = R\cdot\mathrm{sen}\,u;\quad z_1 = \cot i\int\sqrt{R^2 + R'^2}\cdot du \qquad (10_1)$$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= R\cdot\cos\int\frac{\sqrt{(R^2+R'^2)\dfrac{\mathrm{tg}^2 i_1}{\mathrm{tg}^2 i} - R'^2}}{R}\,du;\\ y_2 &= R\cdot\mathrm{sen}\int\frac{\sqrt{(R^2+R'^2)\dfrac{\mathrm{tg}^2 i_1}{\mathrm{tg}^2 i} - R'^2}}{R}\,du;\quad z_2 = \cot i\int\sqrt{R^2+R'^2}\cdot du.\end{aligned}\right\} \qquad (10_2)$$

D) Formole relative alle geodetiche principali d'elicoidi:

$$x = R\cdot\cos\left(p\int\frac{U'}{R^2}\,du\right);\quad y = R\cdot\mathrm{sen}\left(p\int\frac{U'}{R^2}\,du\right);\quad z = U \qquad (11)$$

$$x_1 = R\cdot\cos u;\qquad y_1 = R\cdot\mathrm{sen}\,u;\qquad z_1 = \frac{1}{p}\int R^2 du \qquad (11_1)$$

$$x_2 = R\cdot\cos\left(\frac{p_1}{p}\,u\right);\qquad y_2 = R\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{p_1}{p}\,u\right);\qquad z_2 = \frac{1}{p}\int R^2 du. \qquad (11_2)$$

E) Formole relative alle linee d'ombra, essendo i raggi luminosi paralleli:

$$x = \frac{RR'}{U'}\cot\theta;\qquad y = \frac{R\sqrt{U'^2 - R'^2\cot^2\theta}}{U'};\qquad z = U \qquad (12)$$

$$x_1 = R\cos u;\qquad y_1 = R\,\mathrm{sen}\,u\qquad z_1 = \cot\theta\int\frac{R'}{\cos u}\cdot du \qquad (12_1)$$

$$x_2 = \frac{\cot\theta_1}{\cot\theta}\cdot R\cos u;\quad y_2 = \sqrt{1 - \frac{\cot^2\theta_1}{\cot^2\theta}\cdot\cos^2 u};\quad z_2 = \cot\theta\int\frac{R'}{\cos u}\cdot du, \qquad (12_2)$$

F) Formole relative alle linee d'ombra, essendo i raggi luminosi concorrenti:

$$x = \frac{R(RU' - R'U)}{aU'};\qquad y = \frac{R\sqrt{a^2U'^2 - (RU' - R\,U)^2}}{aU'};\qquad z = U \qquad (13)$$

$$x_1 = R\cos u;\qquad y_1 = R\,\mathrm{sen}\,u;\qquad z_1 = h\cdot e^{\int\frac{R'}{R - a\cos u}\cdot du} \qquad (13_1)$$

$$x_2 = \frac{a}{a_1}R\cos u;\qquad y_2 = R\sqrt{1 - \frac{a^2}{a_1^2}\cos^2 u};\qquad z_2 = h\cdot e^{\int\frac{R'}{R - a\cos u}\cdot du} \qquad (13_2)$$

§ 3.

Applicazioni delle formole precedenti. — *a*) Se, col mezzo delle (8), (8_1), (8_2) calcoliamo E, F, G le cui espressioni sono state date al caso B) e chiamiamo i l'angolo sotto il quale le linee stesse (8), (8_1), (8_2) segano i meridiani delle superficie di rotazione, si trova: $R \operatorname{sen} i = a$ per le linee (8), (8_1) e $R \operatorname{sen} i = a_1$ per le linee (8_2). Queste relazioni esprimono il noto teorema di Clairaut relativo alle geodetiche delle superficie di rivoluzione; si ha così il significato geometrico della costante a nelle (8), (8_1) e quello della costante a_1 nella (8_2).

b) Determiniamo quella superficie di rivoluzione nella quale vi sono due geodetiche tali, che il rapporto delle distanze dei loro punti da un piano fisso passante per l'asse è costante.

Se le geodetiche domandate sono le linee (8_1), (8_2) e se il piano fisso in discorso è il coordinato $x = 0$, si deve avere $x_2 = \frac{x_1}{k}$, con k costante; sarà dunque:

$$\frac{a_1}{a} \int \sqrt{\frac{R^2 - a^2}{R^2 - a_1^2}} \cdot du = \operatorname{arc} \cdot \cos\left(\frac{\cos u}{k}\right),$$

dalla quale si ricava:

$$R = a\, a_1 \sqrt{\frac{1 - k^2}{a^2 \operatorname{sen}^2 u + a_1^2 \cos^2 u - a_1^2 k^2}}.$$

Le geodetiche domandate sono quindi rappresentate dalle (8_1), (8_2) e il meridiano della superficie di rivoluzione è rappresentato nel piano $y = 0$ dalle equazioni:

$$x_0 = R, \qquad z_0 = \frac{1}{a} \int \sqrt{R^4 - a^2(R^2 + R'^2)}\, du,$$

dove R ha il valore precedentemente trovato.

c) Una geodetica di una superficie di rivoluzione sia una geodetica principale di un elicoide dello stesso asse; eguagliando fra loro gli argomenti delle funzioni circolari che entrano nelle (8) e nelle (11), si ha un'equazione dalla quale si ricava:

$$\frac{a R R'}{\sqrt{(p^2 - a^2) R^2 - a^2 p^2}} = U'.$$

Moltiplicando per du e integrando, si ottiene:

$$\frac{R^2}{\left(\frac{ap}{\sqrt{p^2-a^2}}\right)^2} - \frac{(U+m)^2}{\left(\frac{a^2 p}{p^2-a^2}\right)^2} = 1,$$

equazione di un'iperbole avente l'asse immaginario sull'asse delle z; in causa del valore trovato per U', la seconda delle (11) ci dà:

$$y = -\frac{ap}{\sqrt{p^2-a^2}},$$

la quale mostra che la geodetica trovata si trova in un piano parallelo al coordinato $y=0$.

Perciò « *la sola superficie di rivoluzione in cui una geodetica è altresì geodetica principale di un elicoide avente lo stesso asse è l'iperboloide a una falda e la geodetica che ha tale proprietà è una qualunque delle sue generatrici rettilinee* ».

d) Se nelle (9_2) poniamo $\frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i} u = v$, si ha:

$$x_2 = R\left(\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_1} v\right) \cdot \cos v; \quad y_2 = R\left(\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_1} v\right) \cdot \operatorname{sen} v; \tag{14}$$

e quindi, se la projezione equatoriale di una lossodromia è rappresentata in coordinate polari dall'equazione: $R = \varphi(u)$, la projezione equatoriale di qualsivoglia altra lossodromia della stessa superficie è rappresentata dall'altra equazione: $R = \varphi\left(\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_1} v\right)$.

Per es.: se abbiamo $\varphi(u) = e^{mu}$ ovvero $\varphi(u) = au$, sarà rispettivamente:

$$\varphi\left(\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_1} v\right) = e^{\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_1} v}, \qquad \varphi\left(\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_1} v\right) = \frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_1} a \cdot v,$$

le quali relazioni dimostrano « *se una lossodromia di una superficie di rivoluzione ha per projezione equatoriale una spirale logaritmica o una spirale d'Archimede, tutte le altre lossodromie della superficie hanno la stessa proprietà* ».

Poniamo la condizione che le projezioni equatoriali di due lossodromie di una stessa superficie di rivoluzione siano due linee omotetiche rispetto all'origine degli assi; cambiando nelle (14) v in u e confrontando poi le equazioni ottenute colle due prime (9_1), la condizione che abbiamo posta ci dà:

$$R\left(\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_1} u\right) = n R(u), \tag{14$^{\text{bis}}$}$$

essendo n il rapporto di similitudine. Siccome la funzione $R(u)$, cambiando u in $\frac{\operatorname{tg} i}{\operatorname{tg} i_1} u$ non fa che acquistare un fattore costante, deve essere:

$$R(u) = h \cdot u^k, \tag{15}$$

con h e k costanti. Assumendo per $R(u)$ questa forma, si vede che si può soddisfare alla $(14)^{\text{bis}}$ lasciando la costante h arbitraria e prendendo k come segue:

$$k = \frac{\log n}{\log \cdot \operatorname{tg} i - \log \cdot \operatorname{tg} i_1}.$$

Osservando che dalla terza (9_1) si ricava $z = h \int u^{k-1} \cdot \sqrt{u^2 \cot^2 i - k^2} \cdot du$, si ha « *la linea rappresentata dalle equazioni:*

$$x = h \cdot u^k \cdot \cos u; \qquad y = h \cdot u^k \cdot \operatorname{sen} u; \qquad z = h \int u^{k-1} \sqrt{u^2 \cot^2 i - k^2} \cdot du,$$

e l'altra rappresentata dalle equazioni:

$$x_1 = h \cdot u^k \cdot \cos\left(\frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i} u\right); \qquad y_1 = h \cdot u^k \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i} u\right);$$

$$z_1 = h \int u^{k-1} \sqrt{u^2 \cot^2 i - k^2} \cdot du,$$

sono le sole che abbiano per projezione sul piano $z = 0$ due curve simili e che, ruotando attorno all'asse delle z, generino la medesima superficie di rivoluzione di cui esse sono due lossodromie ».

La superficie di rivoluzione sulla quale si trovano le due lossodromie notevoli determinate ha per meridiano la curva:

$$x_0 = h u^k, \qquad z_0 = h \int u^{k-1} \sqrt{u^2 \cdot \cot^2 i - k^2} \cdot du,$$

la quale, per $k = 1$, ovvero $k = 2$, ovvero $k = -1$, diviene rispettivamente la curva logaritmica:

$$z_0 = \frac{x_0 \sqrt{x_0^2 \cot^2 i - h^2}}{2h} - \frac{h \operatorname{tg} i}{2} \log \cdot \left[\frac{\sqrt{x_0^2 \cot^2 i - h^2} + x_0 \cot i}{h}\right],$$

o la curva di 3.° ordine:

$$z_0^2 = \frac{\operatorname{tg}^4 i}{9h} (x_0 \cot^2 i - 4h)^3,$$

o la trattrice:

$$z_0 = h\cot i \cdot \log\left[\frac{h\cot i + \sqrt{h^2\cot^2 i - x_0^2}}{x_0}\right] - \sqrt{h^2\cot^2 i - x_0^2}.$$

Si vede quindi che « *fra le superficie di rivoluzione determinate si trova anche la superficie di* LIOUVILLE; *per essa fra le inclinazioni i e i_1 e il rapporto di similitudine n ha luogo la relazione* $n = \dfrac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i}$ ».

e) Nella superficie di rivoluzione che ha per meridiano la linea:

$$x_0 = a \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{z_0}{a}\operatorname{tg} i\right),$$

consideriamo le eliche le cui tangenti sono inclinate all'asse delle z dell'angolo costante i. Siccome dalla precedente si ha:

$$z_0 = a\cot i \cdot \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x_0}{a}\right),$$

e siccome $z_0 = U$, $x_0 = R$, si può prendere: $R = u$, $U = a\cot i \cdot \operatorname{arc} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{u}{a}\right)$ ed allora, applicando le (10), si deduce:

$$x = \frac{u\sqrt{a^2 - u^2}}{a}, \qquad y = \frac{u^2}{a}, \qquad z = a\cot i \cdot \operatorname{arc} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{u}{a}\right).$$

Eliminando u fra le due prime precedenti, si ha: $x^2 + y^2 = ay$, equazione di un cerchio passante per l'origine e il cui centro si trova sull'asse delle y.

Dunque « *sulla superficie di rivoluzione che ha per meridiano la curva* $x_0 = a\operatorname{sen}\left(\frac{z_0}{a}\operatorname{tg} i\right)$ *le eliche, le cui tangenti sono inclinate all'asse di rotazione dell'angolo costante i, sono eliche circolari e i cilindri sui quali esse sono descritte contengono l'asse* ».

Consideriamo su tale superficie un'altra elica appartenente a un cilindro colle generatrici parallele all'asse di rotazione; la projezione equatoriale dell'elica circolare è rappresentata in coordinate polari dall'equazione $R = a\operatorname{sen} u$; se quindi indichiamo con i_1 l'inclinazione delle tangenti della nuova elica sull'asse delle z, si avrà dalle (10_2):

$$x = a\operatorname{sen} u \cdot \cos\int \frac{\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}^2 i_1}{\operatorname{tg}^2 i} - \cos^2 u}}{\operatorname{sen} u}\, du,$$

$$y = a\operatorname{sen} u \cdot \operatorname{sen}\int \frac{\sqrt{\dfrac{\operatorname{tg}^2 i_1}{\operatorname{tg}^2 i} - \cos^2 u}}{\operatorname{sen} u}\, du, \qquad z = a \cdot \cot i \cdot u.$$

Sia ora un'iperboloide di rivoluzione a una falda le cui generatrici sono inclinate all'asse dell'angolo i; una di tali rette si può considerare come una elica, per la quale si ha: $R = \frac{b}{\operatorname{sen} u}$ con b costante; allora le (10_2) ci dànno per qualsivoglia altra elica della stessa superficie:

$$x_1 = \frac{b}{\operatorname{sen} u} \cdot \cos \int \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 i_1}{\operatorname{tg}^2 i} - \cos^2 u}}{\operatorname{sen} u}\, du,$$

$$y_1 = \frac{b}{\operatorname{sen} u} \cdot \operatorname{sen} \int \frac{\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 i_1}{\operatorname{tg}^2 i} - \cos^2 u}}{\operatorname{sen} u}\, du, \qquad z_1 = -b \cot i \cdot \cot u,$$

le quali dimostrano che la superficie ha per linea meridiana l'iperbole:

$$\frac{x_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{(b \cdot \cot i)^2} = 1.$$

Confrontando queste equazioni colle precedenti, si deduce:

$$\frac{x}{a \operatorname{sen} u} = \frac{x_1}{b} \operatorname{sen} u, \qquad \frac{y}{a \operatorname{sen} u} = \frac{y_1}{b} \operatorname{sen} u;$$

se allora teniamo conto delle formole che ci dànno z e z_1 e osserviamo che:

$$\operatorname{sen} u = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} = \frac{b}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}},$$

si ricava:

$$x = ab \cdot \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2}; \quad y = ab \cdot \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2}; \quad z = -a \cot i \cdot \operatorname{arc} \cdot \cot\left(\frac{z_1}{b} \operatorname{tg} i\right) \quad (a)$$

$$x_1 = ab \cdot \frac{x}{x^2 + y^2}; \quad y_1 = ab \cdot \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad z_1 = -b \cdot \cot i \cdot \cot\left(\frac{z}{a} \operatorname{tg} i\right). \quad (b)$$

Si ha dunque « *considerando l'iperboloide di rivoluzione a una falda* S_1 *di cui la linea meridiana è l'iperbole* $\frac{x_0^2}{b^2} - \frac{z_0^2}{(b \cot i)^2} = 1$ *e la superficie di rivoluzione S generata dalla linea meridiana* $x_0 = a \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{z_0}{a} \operatorname{tg} i\right)$, *le formole* (a), (b) *trasformano rispettivamente S in* S_1 *ed* S_1 *in S. Proprietà di questa trasformazione sono le seguenti:*

1.° *I meridiani delle due superficie si trasformano gli uni negli altri.*

2.° *Le projezioni equatoriali di due linee corrispondenti sono inverse rispetto all'origine degli assi.*

3.° *Qualunque elica della superficie primitiva appartenente a un cilindro colle generatrici parallele all'asse di rotazione viene ridotta in una linea della stessa specie sulla superficie trasformata; e per di più le inclinazioni delle due eliche sulle generatrici dei rispettivi cilindri sono le medesime.*

4.° *Le generatrici rettilinee dell'iperboloide corrispondono sulla superficie S ad eliche circolari* ».

f) Osservando che le due prime (11_2) hanno la stessa forma delle due prime (9_2) si giunge anche per le geodetiche principali d'elicoide alla proprietà « *se la projezione equatoriale di una geodetica principale d'elicoide tracciata sopra una data superficie di rivoluzione è rappresentata in coordinate polari dall'equazione* $R = \varphi(u)$, *la projezione equatoriale di qualsivoglia altra geodetica principale d'elicoide tracciata sulla stessa superficie è rappresentata dall'altra equazione:* $R = \varphi\left(\frac{p_1}{p}\, v\right)$ ».

E quindi si ricava come conseguenza « *se una sola di tali linee ha per projezione equatoriale una spirale logaritmica o di Archimede tutte le altre linee della stessa specie tracciate sulla medesima superficie hanno la stessa proprietà* ».

Vediamo se una linea può avere contemporaneamente le due proprietà di essere una lossodromia della superficie da essa generata ruotando attorno a una retta e una geodetica principale dell'elicoide da essa generato muovendosi di moto elicoidale intorno alla stessa retta. Basterà ricavare R dall'equazione che si ottiene eguagliando fra loro le due espressioni di z_1 date dalla terza (9_1) e dalla terza (11_1), cioè dall'equazione:

$$R^4 = p^2 \cot^2 i \cdot R^2 - p^2 R'^2. \tag{16}$$

Questa si può scrivere:

$$p \cdot \frac{dR}{R\sqrt{p^2 \cot^2 i - R^2}} = du,$$

e quindi coll'integrazione dà:

$$-\log \cdot \frac{p \cot i + \sqrt{p^2 \cot^2 i - R^2}}{R} = u \cot i - \log a,$$

con a costante. Si deduce da questa:

$$R = \frac{2ap \cdot \cot i}{e^{\cot i \cdot u} + a^2 e^{-\cot i \cdot v}},$$

la quale riduce la terza delle (11_1) all'altra:

$$z = -2a^2 p \cot i \cdot \frac{e^{-\cot i \cdot u}}{e^{\cot i \cdot u} + a^2 e^{-\cot i \cdot u}}.$$

Eliminando u fra quest'equazione e quella che dà R, si ottiene:

$$R^2 + z^2 + 2p \cot i \cdot z = 0,$$

la quale rappresenta un cerchio di raggio $p \cot i$ che passa per l'origine delle coordinate ed ha il centro sull'asse delle z.

Dunque « *fra le lossodromie delle superficie di rivoluzione quelle che sono anche geodetiche principali dell'elicoide da esse generato muovendosi di moto elicoidale attorno all'asse di rotazione sono descritte sopra una sfera; fra il raggio r di tale sfera, il parametro p del moto elicoidale e l'angolo costante i sotto il quale le linee segano i meridiani ha luogo la relazione* $r = p \cot i$ ».

g) Chiamiamo S la superficie di rivoluzione generata dalla linea L rappresentata dalle equazioni:

$$x = R \cdot \cos\left(\frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i} u\right), \quad y = R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i} u\right), \quad z = \int \sqrt{R^2 \cot^2 i - R'^2} \cdot du, \quad (9_2)$$

e S_1 quella generata dalla linea L_1 rappresentata dalle equazioni:

$$x_1 = R \cdot \cos\left(\frac{p_1}{p} u\right), \quad y_1 = R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{p_1}{p} u\right), \quad z_1 = \frac{1}{p} \int R^2 du. \quad (11_2)$$

Supponendo data la funzione $R(u)$ ed i, p fissi, le due superficie S e S_1 sono completamente determinate; dando alle costanti i_1 e p_1 tutti i valori possibili, si hanno nelle (9_2) le equazioni di tutte le lossodromie tracciate su di S e nelle (11_2) le equazioni di tutte le geodetiche principali d'elicoidi tracciate sopra S_1. Osservando allora che, per l'indeterminazione delle costanti i_1 e p_1 si può sempre fare in modo, anche quando ne sia fissata una, che le due prime equazioni (9_2) e le due prime (11_2) divengano le medesime, si ha il teorema « *se si considerano le superficie S, S_1 generate dalla rotazione attorno all'asse delle z delle linee rappresentate dalle equazioni* (9_2), (11_2), *nelle quali si abbia* $\frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i} = \frac{p_1}{p}$, *e i cilindri aventi le generatrici parallele all'asse di rotazione, si ha che ogni cilindro che intersechi S in una lossodromia o S_1 in una geodetica principale d'elicoide, interseca rispettivamente S_1 in una geodetica principale d'elicoide o S in una lossodromia* ».

Fra le terze equazioni (9_2), (11_2) si può eliminare R; infatti si ha:

$$R^2 = p z'_1, \qquad R'^2 = \frac{p z''^2_1}{4 z'_1},$$

ed allora:

$$z = \frac{1}{2} \int \sqrt{\frac{p(4\cot^2 i \cdot z'^2_1 - z''^2_1)}{z'_1}}\, du. \qquad (\alpha)$$

Perciò « *se si prende una geodetica principale L_1 di un elicoide avente per asse l'asse delle z, rappresentata dalle equazioni* (11_2) *e a partire dal piano $z = 0$ si prendono sulle ordinate parallele all'asse dei segmenti z dati dall'equazione* (α), *il luogo L degli estremi è una linea che, ruotando attorno all'asse delle z, genera una superficie di rivoluzione sulla quale essa è lossodromia; tale linea sega i meridiani sotto l'angolo i_1 dato dalla relazione* $\operatorname{tg} i_1 = \frac{p_1}{p} \operatorname{tg} i$ ».

Questo teorema può servire a trovare S quando si conosca S_1; si supponga ad es. che S_1 sia un cono, siccome in questo caso il meridiano è una retta che incontra l'asse delle z, si potrà nelle (11) prendere:

$$U = v, \qquad R = av,$$

essendo a una costante e v una variabile. Se p_1 è il parametro del moto elicoidale, le (11) dànno:

$$x = av \cdot \cos\left(-\frac{p_1}{a^2 v}\right), \qquad y = av \cdot \operatorname{sen}\left(-\frac{p_1}{a^2 v}\right), \qquad z = v.$$

Per mettere queste equazioni sotto la forma delle (11_2), si ponga:

$$\frac{p_1}{a^2 v} = \frac{p_1}{p} u,$$

ed allora le precedenti divengono:

$$x_1 = \frac{p}{au} \cos\left(\frac{p_1}{p} u\right), \qquad y_1 = -\frac{p}{au} \operatorname{sen}\left(\frac{p_1}{p} u\right), \qquad z_1 = \frac{p}{a^2 u},$$

le quali dimostrano intanto che « *le geodetiche principali d'elicoidi tracciate sopra un cono di rivoluzione si projettano sul piano dell'equatore in tante spirali iperboliche* ».

Applicando la (α) si ottiene in questo caso:

$$z = -\frac{p}{a}\left\{\frac{\sqrt{1 - u^2 \cot^2 i}}{u} + \cot i \cdot \operatorname{arc} \cdot \operatorname{sen}(u \cot i)\right\},$$

e se fra quest'equazione e l'altra $R = \frac{p}{a u}$ si elimina u, si ha:

$$z = -\frac{p}{a}\left\{\frac{\sqrt{a^2 R^2 - p^2 \cot^2 i}}{u} + \cot i \cdot \operatorname{arc} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{p \cot i}{a R}\right)\right\},$$

che rappresenta la linea meridiana della superficie S.

Proponiamoci di vedere come si deve prendere la funzione $R(u)$ acciocchè, oltre aver luogo la proprietà enunciata nel teorema precedente per le superficie S, S_1, si abbia *inversamente* che i cilindri seganti S in una geodetica principale d'elicoide intersechino S_1 in una lossodromia.

Dalle (9_2) si ricava che le coordinate dei puuti del meridiano di S sono:

$$R, \qquad \int \sqrt{R^2 \cot^2 i - R'^2} \cdot du,$$

e perciò, applicando le (11), si trova che le geodetiche principali d'elicoide tracciate su S sono rappresentate dalle equazioni:

$$x = R \cdot \cos\left(\pi \int \frac{\sqrt{R^2 \cot^2 i - R'^2}}{R^2}\, du\right), \qquad y = R \cdot \operatorname{sen}\left(\pi \int \frac{\sqrt{R^2 \cot^2 i - R'^2}}{R^2}\, du\right),$$

$$z = \int \sqrt{R^2 \cot^2 i - R'^2} \cdot du,$$

essendo π il parametro del moto elicoidale.

Dalle (11_2) si ricava che le coordinate dei punti del meridiano di S sono:

$$R, \qquad \frac{1}{p}\int R^2\, du,$$

e perciò, applicando le (9), si trova che le lossodromie tracciate su S_1 sono rappresentate dalle equazioni:

$$x = R \cdot \cos\left(\frac{\operatorname{tg} \iota}{p} \int \frac{\sqrt{p^2 R'^2 + R^4}}{R}\, du\right), \qquad y = R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\operatorname{tg} \iota}{p} \int \frac{\sqrt{p^2 R'^2 + R^4}}{R}\, du\right),$$

$$z = \frac{1}{p}\int R^2\, du,$$

essendo ι l'inclinazione delle lossodromie sui meridiani.

La condizione posta è soddisfatta quando riescano eguali gli argomenti delle funzioni circolari che entrano nelle due terne d'equazioni trovate; tale eguagliamento conduce all'equazione:

$$p \int \sqrt{\frac{\pi^2 \cot^2 \iota - R^2}{p^2 \cot^2 i \cdot \pi^2 \cot^2 \iota - R^4}} \cdot \frac{dR}{R} = u + \text{cost.} \tag{17}$$

Osservando che in questa equazione una delle costanti π, $\cot\iota$ è arbitraria, poichè esse compariscono moltiplicate fra loro si ha: « *se si considerano le superficie di rivoluzione S, S_1 generate dalla rotazione attorno all'asse delle z delle linee rappresentate dalle equazioni* (9_2), (11_2) *nelle quali* $\frac{\operatorname{tg} i_1}{\operatorname{tg} i} = \frac{p_1}{p}$ *ed R è dato in funzione di u dalla relazione* (17), *e i cilindri che hanno le generatrici parallele all'asse di rotazione, si ha che ogni cilindro che seghi S in una lossodromia o in una geodetica principale d'elicoide sega S_1 rispettivamente in una geodetica principale d'elicoide o in una lossodromia. Le superficie trovate sono le sole che abbiano la proprietà enunciata* ».

§ 4.

Applicazioni delle formole relative alle linee d'ombra. — *a*) Se, considerando la linea L_1 rappresentata dalle (12_1) formiamo l'altra linea Λ_1 definita dalle equazioni:

$$\xi_1 = x_1, \qquad \eta_1 = y_1, \qquad \zeta_1 = m z_1,$$

con m costante, la nuova linea Λ_1 si può considerare come una linea d'ombra relativa a raggi paralleli della superficie di rivoluzione generata dalla sua rotazione attorno all'asse delle z.

Chiamando θ_1 l'inclinazione su quest'asse del nuovo sistema di raggi luminosi, si avrà:

$$\cot\theta_1 = m \cdot \cot\theta;$$

se per di più si osserva che nella terza (13_1), la costante h è arbitraria, si ha « *se si prende una linea d'ombra di una superficie di rivoluzione e si variano le ordinate parallele all'asse di rotazione in un rapporto costante qualunque m, si ottiene sempre una linea d'ombra di una nuova superficie di rivoluzione* ».

b) La superficie che si suppone illuminata da raggi paralleli sia quella di Liouville; indicando con m la lunghezza costante delle tangenti della trattrice meridiana, si ha:

$$z_0 = \sqrt{m^2 - x_0^2} - m \log \cdot \frac{m + \sqrt{m^2 - x_0^2}}{x_0},$$

e a causa dell'arbitrarietà del significato geometrico della variabile u che entra nelle (12), potremo prendere:

$$R = u, \qquad U = \sqrt{m^2 - u^2} - m \log \cdot \frac{m + \sqrt{m^2 - u^2}}{u}.$$

Siccome di qui si ricava: $U' = \frac{\sqrt{m^2 - u^2}}{u}$, le (12) dànno:

$$x = \frac{u^2 \cot\theta}{\sqrt{m^2 - u^2}}, \qquad y = \sqrt{u^2 - x^2} = \frac{u}{\operatorname{sen}\theta}\sqrt{\frac{m^2 \operatorname{sen}^2\theta - u^2}{m^2 - u^2}},$$

$$z = \sqrt{m^2 - u^2} - m \log \cdot \frac{m + \sqrt{m^2 - u^2}}{u}.$$

Se dalle due prime eliminiamo u, si giunge all'equazione di 4.° grado:

$$(x^2 + y^2)^2 \cot^2\theta + x^2(x^2 + y^2) = m^2 x^2,$$

e perciò « *nella superficie di* Liouville *le projezioni equatoriali delle linee d'ombra relative a raggi luminosi paralleli sono curve del 4.° ordine passanti per l'origine degli assi e simmetriche rispetto a questo punto* ».

c) La linea d'ombra di una superficie di rivoluzione, a causa della simmetria della superficie, si compone ordinariamente del sistema di due linee disposte simmetricamente rispetto al piano meridiano principale; in alcuni casi queste due linee si riducono a una sola.

Determiniamo la superficie di rivoluzione in cui una linea d'ombra, relativa a raggi paralleli, si compone di due linee tracciate sopra due cilindri circolari aventi le generatrici parallele all'asse. Indicando con $\frac{r}{2}$ il raggio della sezione retta dei cilindri contenenti le eliche, avremo: $R = r \cdot \operatorname{sen}(m + u)$, con m costante; sarà quindi:

$$\cot\theta \int \frac{R'}{\cos u} du = \cot\theta (r \cos m \cdot u + r \operatorname{sen} m \cdot \log\cos u),$$

e le (12_1) dànno:

$$x_1 = r \cdot \operatorname{sen}(m + u) \cdot \cos u; \qquad y_1 = r \cdot \operatorname{sen}(m + u) \cdot \operatorname{sen} u;$$

$$z_1 = r \cot\theta (\cos m \cdot u + \operatorname{sen} m \cdot \log\cos u).$$

Se dunque indichiamo con x_0, z_0 le coordinate della curva meridiana, si ha:

$$x_0 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = r \cdot \operatorname{sen}(m + u); \quad z_0 = z = r \cot\theta (\cos m \cdot u + \operatorname{sen} m \cdot \log\cos u). \tag{18}$$

Se si fa uso delle (12_2), abbiamo:

$$x_2 = r \cdot \operatorname{sen}(m + u) \cdot \frac{\cot\theta_1}{\cot\theta} \cos u; \qquad y_2 = r \operatorname{sen}(m + u) \sqrt{1 - \frac{\cot^2\theta_1}{\cot^2\theta} \cos^2 u};$$

$$z_2 = r \cot\theta \cdot (\cos m \cdot u + \operatorname{sen} m \cdot \log\cos u),$$

che rappresentano qualunque altra linea d'ombra della stessa superficie. Ponendo $\frac{\cot\theta_1}{\cot\theta}\cos u = \cos v$, d'onde $\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta}\cos v = \cos u$ si ottiene:

$$R = r\,\mathrm{sen}\left[m + \mathrm{arc}\cdot\cos\left(\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta}\cos v\right)\right],$$

che è l'equazione polare della projezione equatoriale di una linea d'ombra qualunque.

Chiamando ξ, η le coordinate cartesiane dei punti di questa projezione, l'ultima equazione diviene:

$$(\xi^2+\eta^2)^2 + r^2\left(\frac{\operatorname{tg}^2\theta_1}{\operatorname{tg}^2\theta} - \cos^2 m\right)\xi^2 - r^2\cos^2 m\cdot\eta^2 = 2r\cdot\mathrm{sen}\,m\,\frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta}\cdot\xi(\xi^2+\eta^2). \quad (19)$$

Dunque « *la superficie di rivoluzione in cui vi è una linea d'ombra composta di due curve tracciate sopra due cilindri circolari è quella che ha per meridiano la curva rappresentata dalle* (18); *qualunque altra linea d'ombra della stessa superficie si projetta sul piano dell'equatore nella curva del 4.º ordine* (19) ».

Si supponga che i due cilindri contenenti le due curve che col loro insieme formano la linea d'ombra della superficie, abbiano i loro assi posti in un piano passante per l'asse di rotazione; si avrà allora $m = 0$ e quindi in questo caso il meridiano della superficie è la curva:

$$x_0 = r\cdot\mathrm{sen}\left(\frac{z_0}{a}\operatorname{tang}\theta\right),$$

e qualunque altra linea d'ombra si projetta sul piano dell'equatore nella linea del 4.º ordine:

$$(\xi^2+\eta^2)^2 = r^2(\xi^2+\eta^2) - r^2\frac{\operatorname{tg}^2\theta_1}{\operatorname{tg}^2\theta}\,\xi^2,$$

che è simmetrica rispetto all'origine.

Per quanto è stato dimostrato al § 3, caso *e*) si può aggiungere che la linea d'ombra è ora un'elica circolare appartenente a un cilindro colle generatrici parallele all'asse.

Se poi la linea d'ombra è tracciata sopra un unico cilindro circolare, allora il cerchio sezione retta ha il centro sull'asse delle x e conseguentemente $m = \frac{\pi}{2}$; la superficie ha allora per meridiano la curva logaritmica:

$$z_0 = r\cdot\cot\theta\cdot\log\left(\frac{x_0}{r}\right),$$

e qualunque altra linea d'ombra ha per projezione il cerchio:

$$\xi^2 + \eta^2 = r \frac{\operatorname{tg}\theta_1}{\operatorname{tg}\theta} \xi,$$

che ha il centro sull'asse delle x.

d) Nel problema precedente si è trovato una particolare superficie che ammette per linea d'ombra un'elica; più generalmente ora vogliamo determinare quelle superficie di rivoluzione in cui ciascuna delle due parti che compongono una sua linea d'ombra è un'elica di un cilindro colle generatrici parallele all'asse di rotazione. Eguagliando le due espressioni di z_1 date dalla terza (10_1) e dalla terza (12_1), si ha l'equazione:

$$\frac{R'}{R} = \cot i \cdot \frac{\cos u}{\sqrt{\cot^2\theta - \cot^2 i \cdot \cos^2 u}},$$

la quale, moltiplicata per du e integrata, offre:

$$R = a(\cot i \cdot \operatorname{sen} u + \sqrt{\cot^2\theta - \cot^2 i \cdot \cos^2 u}),$$

con a costante arbitraria. Questa è l'equazione in coordinate polari della projezione equatoriale della linea d'ombra; passando alle coordinate cartesiane, si ottiene:

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2a \cdot \cot i \cdot (\xi^2 + \eta^2)\eta = a^2(\cot^2\theta - \cot^2 i)(\xi^2 + \eta^2),$$

e dividendo per $(\xi^2 + \eta^2)$:

$$\xi^2 + \eta^2 - 2a \cdot \cot i \cdot \eta = a^2(\cot^2\theta - \cot^2 i),$$

equazione di un circolo di raggio $a\cot\theta$ avente il centro sull'asse delle y alla distanza $a\cot i$ dall'origine.

Dunque « *se, relativamente a raggi luminosi paralleli, una superficie di rivoluzione ha per linea d'ombra il complesso di due eliche tracciate sopra cilindri colle generatrici parallele all'asse di rotazione, ciascuna di tali linee è un'elica circolare* ».

Determinando la curva meridiana della superficie col solito metodo, si trova la linea:

$$\operatorname{tg} i \cdot \operatorname{tg}\theta z_0 = a \cdot \operatorname{arc} \cdot \cos\left[\frac{x_0^2 + a^2(\cot^2 i - \cot^2\theta)}{2a\cot i \cdot x_0}\right] -$$

$$- a \cdot \operatorname{arc} \cdot \operatorname{sen}\left[\frac{\sqrt{4a^2\cot^2 i \cdot x_0^2 - \{x_0^2 + a^2(\cot^2 i - \cot^2\theta)\}}}{2a\cot i \cdot x_0}\right],$$

Si osservi che le due eliche che col loro insieme formano la linea d'ombra incontrano l'asse di rotazione sempre e soltanto se $\theta = i$.

Se, facendo uso delle (12_2) e operando come nel problema precedente, determiniamo l'equazione in coordinate polari della projezione equatoriale di qualsivoglia altra linea d'ombra della superficie, si ottiene:

$$R = a\left(\cot i\sqrt{1 - \frac{\operatorname{tg}^2\theta_1}{\operatorname{tg}^2\theta}\cdot\cos^2 v} + \sqrt{\cot^2\theta - \cot^2 i\cdot\frac{\operatorname{tg}^2\theta_1}{\operatorname{tg}^2\theta}\cdot\cos^2 v}\right),$$

la quale, trasformata in coordinate cartesiane ξ, η e resa razionale, diviene:

$$[\xi^2 + \eta^2 + a^2(\cot^2 i - \cot^2\theta)]^2 = 4a^2\cot^2 i\cdot\cot^2\theta\,[(\operatorname{tg}^2\theta - \operatorname{tg}^2\theta_1)\xi^2 + \operatorname{tg}^2\theta\cdot\eta^2],$$

che rappresenta una curva del 4.° ordine.

Ricordando quindi il teorema immediatamente precedente, si può aggiungere « *sopra una superficie di rivoluzione, illuminata da raggi paralleli, non può trovarsi più di una linea d'ombra di cui ciascuna parte sia un'elica di un cilindro colle generatrici parallele all'asse* ».

e) Troviamo le superficie di rivoluzione in cui una linea d'ombra, relativa a raggi luminosi paralleli, è l'insieme di due geodetiche della superficie. Eguagliando i due valori di z_1 dati dalla terza (12_1) e dalla terza (8_1) si ha l'equazione:

$$a\frac{R'}{R\sqrt{R^2 - a^2}} = \frac{\cos u}{\sqrt{\cot^2\theta + \cos^2 u}},$$

la quale, moltiplicata per du e integrata, dà:

$$\operatorname{arc}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{a}{R}\right) = k - \operatorname{arc}\cdot\operatorname{sen}(\operatorname{sen}\theta\cdot\operatorname{sen} u),$$

da cui:

$$R = \frac{a}{\operatorname{sen} k\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\theta\cdot\operatorname{sen}^2 u} - \cos k\cdot\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen} u},$$

con k costante arbitraria. Tale è l'equazione in coordinate polari della projezione equatoriale della linea d'ombra: passando alle coordinate cartesiane ξ, η si ottiene:

$$\operatorname{sen}^2 k\cdot\xi^2 + (\cos^2\theta - \cos^2 k)\eta^2 = 2a\cos k\cdot\operatorname{sen}\theta\cdot\eta + a^2,$$

equazione di una conica.

Avuto l'espressione di R in funzione di u le (12_1) ci dànno la linea d'ombra richiesta e sarebbe facile dedurre l'equazione della linea meridiana della superficie. Cercando, collo stesso metodo esposto altra volta, l'equazione della projezione equatoriale di un'altra linea d'ombra qualunque della superficie di rivoluzione, si trova una linea del 4.° ordine.

E perciò « *sopra una superficie di rivoluzione, illuminata da raggi paralleli, non può trovarsi che una sola linea d'ombra ciascuna parte della quale sia geodetica della superficie e ciascuna di queste linee ha per projezione equatoriale una conica* ».

La linea d'ombra trovata, essendo geodetica sulla superficie di rivoluzione, è pure geodetica sulla superficie cilindrica tangente alla superficie lungo tale linea; la linea d'ombra è dunque un'elica le cui normali principali incontrano l'asse delle z.

Abbiamo dunque il teorema « *se le normali principali di un'elica incontrano una retta fissa r non parallela alle generatrici del cilindro che la contiene, la projezione normale dell'elica sopra un piano perpendicolare ad r è una conica* ».

Onde la linea d'ombra si riduca a una sola geodetica, occorre che la projezione equatoriale sia simmetrica rispetto all'asse delle x, il che avviene quando $a \cos k \cdot \operatorname{sen} \theta = 0$; ma non può essere $a = 0$, in causa del significato geometrico trovato per la costante a nel § 3: d'altronde $\operatorname{sen} \theta = 0$ corrisponde all'ipotesi dei raggi luminosi paralleli all'asse, nel qual caso la linea d'ombra è costituita da paralleli geodetici. Rimane quindi la sola soluzione $k = \frac{\pi}{2}$; allora si ha:

$$R = \frac{a}{\sqrt{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta \cdot \cos^2 u}};$$

$$z = -\frac{2 a \cos \theta}{(\sqrt{\cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta \cdot \cos^2 u} - \operatorname{sen} \theta \cdot \cos u)^2 + \cos^2 \theta},$$

e la linea meridiana è rappresentata dall'equazione:

$$x_0^2 + z_0^2 + \frac{2 a z_0}{\cos \theta} = 0,$$

che è quella di un cerchio col centro sull'asse delle z; in questo caso la superficie di rivoluzione è una sfera. La presenza di tale superficie fra quelle che hanno la detta proprietà era da prevedersi.

È da notarsi infine che soddisfano alla condizione proposta tutte le superficie di rivoluzione quando siano illuminate da raggi perpendicolari all'asse; ma siccome in questo caso la linea d'ombra si riduce a un meridiano, questo caso non può essere contenuto nelle nostre formole.

f) Il sig. De-la-Gournerie ha dimostrato che le sole superficie di rivoluzione che, rispetto a raggi luminosi paralleli, ammettono una linea d'ombra piana sono quelle di 2.° ordine.

Applicando le nostre formole si possono determinare, più generalmente, le superficie di rivoluzione che, rispetto a raggi paralleli, ammettono per linea d'ombra il sistema di due curve piane.

Potendosi supporre, senza togliere nulla alla generalità, che il piano di una delle due linee passi per l'origine, le coordinate de' suoi punti verificano l'equazione:

$$z_1 = ax_1 + by_1,$$

con a e b costanti. Avendo allora presenti le (12_1), si trova dopo alcuni calcoli:

$$\log R + \text{cost.} = \int \frac{(a \operatorname{sen} u - b \cos u) \cos u}{(a \cos u + b \operatorname{sen} u) \cos u - \cot \theta} \cdot du.$$

Determinato R in funzione di u, il problema si può considerare risolto.

g) Determiniamo le superficie di rivoluzione che ammettono una linea d'ombra piana quando sono illuminate da raggi che emanano da un punto fisso situato a distanza finita fuori dall'asse di rotazione.

Per la simmetria della superficie, il piano della linea d'ombra deve essere perpendicolare al piano del meridiano principale, cioè al piano coordinato $y = 0$; dobbiamo dunque avere: $z = k + \cot i \cdot x$ e prendendo le coordinate dei punti della linea sotto la forma (1), sarà:

$$\cos f(u) = \frac{(U - k) \operatorname{tg} i}{R}.$$

Confrontando questa relazione coll'altra:

$$\cos f(u) = \frac{RU' - R'U}{aU'},$$

che si ricava dalle (13), abbiamo:

$$RR' - R^2 \frac{U'}{U} = a \cdot \operatorname{tg} i \cdot \frac{U'(U-k)}{U},$$

equazione che si rende lineare col porre $R^2 = 2t$; ed allora, integrandola, ci dà:

$$R^2 + mU^2 - 2a \cdot \operatorname{tg} i \cdot U + ak \cdot \operatorname{tg} i = 0,$$

con m costante arbitraria. Quest'equazione, rappresentante il meridiano della superficie di rivoluzione domandata, è quella di una conica di cui un asse coincide coll'asse delle z; abbiamo dunque il teorema « *le sole superficie di rivoluzione le quali, rispetto a raggi luminosi concorrenti, ammettono una linea d'ombra piana, sono quelle di 2.º ordine* ».

Questo teorema è una generalizzazione di quello ricordato del sig. DE-LA-GOURNERIE.

h) Determiniamo le superficie di rivoluzione nelle quali una linea di ombra relativa a raggi concorrenti, si compone di due curve ciascuna delle quali è tracciata sopra un cilindro circolare colle generatrici parallele all'asse di rotazione. Avendosi in questo caso:

$$R = r \cdot \operatorname{sen}(m + u), \tag{20}$$

con r, m costanti, risulta:

$$\int \frac{R'}{R - a\cos u} du = \int \frac{r\cos m \cdot \cos u - r \operatorname{sen} m \cdot \operatorname{sen} u}{r\cos m \cdot \operatorname{sen} u + (r \operatorname{sen} m - a)\cos u} \cdot du =$$

$$= \log\{r\cos m \cdot \operatorname{sen} u + (r \operatorname{sen} m - a)\cos u\} - a\int \frac{\operatorname{sen} u \cdot du}{r\cos m \cdot \operatorname{sen} u + (r\cos m - a)\cos u}$$

Notando che l'integrale del 2.° membro si riduce alle funzioni algebriche ponendo: $\cot u = v$, dopo di che la quadratura si può completamente effettuare, si ottiene facendo uso della terza delle (13_1):

$$z = h e^{\gamma\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} \cdot (\operatorname{sen} u)^\beta \cdot \{(r \operatorname{sen} m - a)\cos u + r\cos m \cdot \operatorname{sen} u\}^\alpha, \tag{21}$$

dove α, β, γ sono costanti definite dalle equazioni:

$$\alpha = 1 + \frac{a r^2 \cdot \cos^2 m}{(r \operatorname{sen} m - a)(a^2 + r^2 - 2ar \cdot \operatorname{sen} m)}; \qquad \beta = -\frac{a}{r \operatorname{sen} m - a};$$

$$\gamma = -\frac{ar \cdot \cos m}{a^2 + r^2 - 2ar \cdot \operatorname{sen} m}.$$

Si conclude quindi « *le superficie domandate sono quelle che hanno per meridiano la curva rappresentata dalle equazioni* $x_0 = R$, $z_0 = z$, *dove* R *e* z *sono dati dalle* (20), (21) ».

Operando come si è fatto nell'applicazione *c*) di questo paragrafo si trova che le altre linee d'ombra della superficie determinata si projettano sul piano dell'equatore in curve del 4.° ordine.

Se la linea d'ombra si riduce a una sola curva tracciata sopra un cilindro circolare, allora, dovendo la projezione equatoriale della linea essere simmetrica rispetto all'asse delle x, si avrà $m = \frac{\pi}{2}$ e perciò:

$$R = r \cdot \cos u, \qquad z = h \cdot (\cos u)^{\frac{r}{r-a}}.$$

Chiamando quindi x_0, z_0 le coordinate dei punti della linea meridiana posta nel piano $y=0$ abbiamo:

$$z_0 = h\left(\frac{x_0}{r}\right)^{\frac{r}{r-a}},$$

con h costante arbitraria, indicando con m la costante $\frac{h}{r^{\frac{r}{r-a}}}$, risulta che « *le superficie domandate sono quelle che hanno per linea meridiana la curva*: $z_0 = m \cdot x_0^{\frac{r}{r-a}}$ ».

Per quanto è stato dimostrato al caso c) di questo paragrafo tutte le altre linee d'ombra delle superficie ora determinate hanno per projezione equatoriale dei cerchi i cui centri si trovano sull'asse delle x; la linea precedente si riduce a una parabola, e la superficie a un paraboloide di rivoluzione, quando $a=\frac{r}{2}$, cioè quando l'asse del cilindro circolare contenente la linea d'ombra che si considera passa per il punto luminoso. La medesima linea si riduce a un'iperbole equilatera avente per assintoti gli assi delle x e delle z quando $a = 2r$, cioè quando la distanza del punto luminoso dall'asse di rotazione è doppia del diametro del cerchio nel quale si projetta la linea d'ombra che si considera.

§ 5.

Corrispondenza fra le linee d'ombra. — Siano S_p, S_c due superficie di rivoluzione aventi l'asse in comune ed illuminate la prima da raggi paralleli e la seconda da raggi concorrenti; teniamo ferme le condizioni messe al § 2 circa la posizione dei punti luminosi. Variamo in tutti i modi possibili l'inclinazione dei raggi che illuminano S_p sull'asse e la distanza del punto che illumina S_c dall'asse; siano $L_p(x_p, y_p, z_p)$, $L_c(x_c, y_c, z_c)$ due qualunque delle infinite linee d'ombra ottenute sulla S_p e sulla S_c; avremo per le (12_2), (13_2):

$$x_p = R_p \frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta_1}\cos u, \qquad y_p = R_p\sqrt{1-\frac{\operatorname{tg}^2\theta}{\operatorname{tg}^2\theta_1}\cos^2 u}, \qquad z_p = \cot\theta\int\frac{R'_p}{\cos u}\,du;$$

$$x_c = R_c\frac{a}{a_1}\cos u, \qquad y_c = R_c\sqrt{1-\frac{a^2}{a_1^2}\cos^2 u}, \qquad z_c = h\cdot e^{\int\frac{R'_c}{R-a.\cos u}.du}$$

Si può sempre rendere $x_p = x_c$, $y_p = y_c$ prendendo $\frac{\operatorname{tg}\theta}{\operatorname{tg}\theta_1} = \frac{a}{a_1}$, $R_p = R_c = R$; allora, per vedere quale relazione passa fra z_p e z_c, basta eliminare $\cos u$ fra le ultime delle precedenti equazioni e si ottiene:

$$\frac{R'}{\operatorname{tg}\theta \cdot z'_p} = \frac{R z'_c - R' z_c}{a z'_c};$$

quest'equazione, integrata successivamente rapporto a z_c e a z_p dà:

$$z_c = m e^{\int \frac{dR \, . \, dz_p}{R dz_p - a \, . \cot\theta \, . \, dR}}, \qquad z_p = n + a \cdot \cot\theta \cdot \int \frac{dR \, dz_c}{R dz_c - z_c dR},$$

con m, n costanti arbitrarie. In queste equazioni la variabile indipendente non è fissata.

Se indichiamo con ξ_p, ζ_p le coordinate dei punti della linea meridiana di S_p e con ξ_c, ζ_c quelle dei punti della linea meridiana di S_c, abbiamo:

$$\xi_p = \xi_c = R; \qquad \zeta_p = z_p; \qquad \zeta_c = z_c,$$

e perciò se il meridiano di S_p è rappresentato dall'equazione:

$$\zeta_p = \varphi(\xi_p), \tag{22}$$

la prima delle precedenti dà:

$$\zeta_c = m \cdot e^{\int \frac{\varphi'(\xi_c)}{\varphi'(\xi_c) \, . \, \xi_c - a \cot\theta} \, . \, d\xi_c}, \tag{23}$$

che è l'equazione del meridiano di S_c. E se la curva meridiana di S_c è rappresentata dall'equazione:

$$\zeta_c = \psi(\xi_c), \tag{24}$$

la seconda delle precedenti dà:

$$\zeta_p = n + a \cot\theta \cdot \int \frac{\psi'(\xi_p)}{\psi'(\xi_p) \cdot \xi_p - \psi(\xi_p)} \cdot d\xi_p, \tag{25}$$

la quale è l'equazione della linea meridiana di S_p.

Abbiamo così il teorema « *se due superficie di rivoluzione S_p, S_c sono tali che, illuminando la prima con raggi paralleli e la seconda con raggi concorrenti, si trovi una linea d'ombra dell'una e una dell'altra che abbiano per projezioni equatoriali una stessa curva, per qualsivoglia altra linea di ombra di una delle due superficie si può trovare una nuova linea d'ombra dell'altra in modo, che le due nuove linee abbiano la stessa projezione equatoriale. Se θ è l'inclinazione dei raggi luminosi sull'asse di S_p ed a la di-*

stanza del punto luminoso dall'asse di S_c, per tutte le coppie di linee d'ombra corrispondenti si ha $a\cot\theta =$ costante; se il meridiano di S_p o quello di S_c è rappresentato dalla (22) *o dalla* (24), *il meridiano di S_c o quello di S_p è rispettivamente rappresentato dalla* (23) *o dalla* (25) ».

Esempio. — Se S_p è un paraboloide, la linea meridiana è una parabola il cui asse coincide coll'asse di rotazione; abbiamo quindi:

$$\zeta_p = \varphi(\xi_p) = \frac{1}{k}\xi_p^2,$$

e la (23) ci dà:

$$\zeta_c = m\sqrt{\xi_c^2 - ak\cot\theta},$$

dalla quale si ricava:

$$m^2\xi_c^2 - \zeta_c^2 = akm^2\cot\theta,$$

equazione di un'iperbole avente l'asse reale sull'asse delle x quando $ak\cot\theta > 0$ e sull'asse delle z quando $ak\cot\theta < 0$.

Perciò « *se la superficie S_p è un paraboloide di rivoluzione, la superficie S_c è un'iperboloide di rivoluzione a una falda o a due falde secondo che, la quantità $ak\cot\theta$ è positiva o negativa* ».

Il meridiano di S_c sia la curva logaritmica $\zeta_c = ke^{\frac{1}{\alpha}\xi_c}$, avente per assintoto l'asse delle x; siccome in questo caso:

$$\psi(\xi_c) = ke^{\frac{1}{\alpha}\xi_c},$$

la (25) dà:

$$\zeta_p = n + a\cot\theta\cdot\log\left(\frac{1}{\alpha}\xi_p - 1\right),$$

dalla quale risulta:

$$\xi_p = \alpha + he^{\frac{\operatorname{tg}\theta}{a}\cdot\zeta_p}$$

Quindi « *se la superficie S_c ha per meridiano una curva logaritmica il cui assintoto è perpendicolare all'asse di rotazione, la superficie S_p ha per meridiano una curva logaritmica il cui assintoto è parallelo all'asse di rotazione* ».

Queste due curve logaritmiche sono eguali fra loro quando $\frac{\operatorname{tg}\theta}{a} = \frac{1}{\alpha}$.

Vediamo se le due superficie S_p, S_c possono essere eguali; eguagliando fra loro le espressioni delle ζ_p, ζ_c date dalle (22), (23) si ottiene l'equazione differenziale:

$$\varphi' - \frac{1}{\xi}\varphi = \frac{a\cot\theta}{\xi},$$

la quale, integrata, dà:

$$\zeta = \varphi = c\xi - a\cot\theta,$$

con c costante. Questa è l'equazione di una retta; allo stesso risultato si giunge eguagliando fra loro i valori di ζ_p, ζ_c dati dalle (24), (25).

Dunque « *le superficie S_p, S_c non possono essere eguali se non quando sono cilindri o coni di rivoluzione* ».

Le superficie S_p, S_c hanno, rispetto alle linee d'ombra, la proprietà esposta quando la prima si illumini con raggi paralleli e la seconda con raggi concorrenti; vediamo se esse hanno pure la stessa proprietà quando S_p sia illuminata da raggi concorrenti e S_c con raggi paralleli. Chiamiamo S_{1c} la superficie S_p quando si illumini con raggi concorrenti e sia S_{1p} la superficie che, secondo il concetto precedente, corrisponde alla S_{1c}; bisogna esprimere che S_{1p} coincide con S_c.

Le superficie S_p, S_{1c}, S_c, S_{1p} (di cui le due prime coincidono) hanno per meridiani le linee rappresentate dalle equazioni:

$$\zeta_p = \varphi(\xi_p); \qquad \zeta_{1c} = \varphi(\xi_{1c}); \qquad \zeta_c = m e^{\int \frac{\varphi'(\xi_c)}{\varphi'(\xi_c)\,.\,\xi_c - a\cot\theta}\,.\,d\xi_c};$$

$$\zeta_{1p} = n + b\cot\varepsilon \int \frac{\varphi'(\xi_{1p})}{\varphi'(\xi_{1p})\xi_{1p} - \varphi(\xi_{1p})}\cdot d\xi_{1p},$$

essendo b, ε due costanti aventi rispettivamente lo stesso significato delle a, θ.

Prendendo le variabili indipendenti ξ_c, ξ_{1p} sempre eguali fra loro, si potrà porre $\xi_c = \xi_{1p} = \xi$ ed allora l'eguaglianza delle due superficie S_{1p}, S_c è stabilita quando sia $\zeta_c = \zeta_{1p}$; questa condizione porta all'equazione seguente:

$$m e^{\int \frac{\varphi'}{\varphi'\,.\,\xi - a\cot\theta}\,.\,d\xi} = n + b\cot\varepsilon \int \frac{\varphi'}{\varphi'\cdot\xi - \varphi}\cdot d\xi,$$

la quale colla derivazione dà:

$$m e^{\int \frac{\varphi'}{\varphi'\,.\,\xi - a\cot\theta}\,.\,d\xi} = b\cot\varepsilon \cdot \frac{\varphi'\xi - a\cot\theta}{\varphi'\xi - \varphi}.$$

E derivando questa logaritmicamente, si giunge all'equazione:

$$\varphi''(a\cot\theta - \varphi) = 0,$$

la quale si sdoppia nelle due:

$$\varphi = a\cot\theta, \qquad \varphi'' = 0.$$

La prima di queste porta alla superficie che ha per meridiano una retta perpendicolare all'asse, cioè al piano il quale, nella questione che ci occupa, non ha alcuna importanza. La seconda, integrata, dà:

$$\zeta = \varphi = a\xi + b,$$

con a e b costanti; e perciò « *le sole superficie di rivoluzione le quali abbiano la proprietà detta sono i cilindri e i coni* ».

§ 6.

Intersezione di una superficie di rivoluzione con un cilindro. — La superficie di rivoluzione sia quella generata dalla linea:

$$x = R \cdot \cos u, \qquad y = R \cdot \operatorname{sen} u, \qquad z = U, \tag{26}$$

e il cilindro abbia le generatrici parallele al piano coordinato $y = 0$ e inclinate dell'angolo θ sull'asse delle z; considero la sezione retta di questo cilindro il cui piano passa per l'asse delle y ed è inclinato dell'angolo θ sul piano coordinato $z = 0$; se assumo un nuovo sistema di assi rettangolari, prendendo per nuovo asse delle x l'intersezione del piano della sezione retta considerata col piano coordinato $y = 0$, per nuovo asse delle y quello di prima e per nuovo asse delle z una parallela alle generatrici del cilindro, e chiamiamo x_0, y_0, z_0 le coordinate di un punto qualunque della sezione retta, si ha:

$$x_0 = f(v) \cdot \cos v, \qquad y_0 = f(v) \cdot \operatorname{sen} v, \qquad z_0 = 0,$$

essendo:

$$r = f(v), \tag{27}$$

l'equazione polare di quella curva. Se sulle generatrici del cilindro, a partire dal piano $z_0 = 0$, si prendono dei segmenti $\chi(v)$ le coordinate x_1, y_1, z_1 degli estremi sono:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = f(v)\cos v \cdot \cos\theta - \chi(v) \cdot \operatorname{sen}\theta; \qquad y_1 = f(v) \cdot \operatorname{sen}\theta; \\ z_1 = f(v) \cdot \cos v \,.\, \operatorname{sen}\theta + \chi(v) \cdot \cos\theta. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Bisogna esprimere che la linea (28) si trova sulla superficie di rotazione generata dalla (26); le equazioni esprimenti tale condizione sono:

$$\left.\begin{aligned} \{f(v)\cos v \cdot \cos\theta - \chi(v)\operatorname{sen}\theta\}^2 + f^2(v) \cdot \operatorname{sen}^2 v = R^2; \\ f(v)\cos v \cdot \operatorname{sen}\theta + \chi(v) \cdot \cos\theta = U. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Supposto che θ non sia $\frac{\pi}{2}$, si può sostituire alle (29) le altre due:

$$\left.\begin{aligned} \{f(v)\cdot\cos v - U\operatorname{sen}\theta\}^2 + f^2(v)\operatorname{sen}^2 v\cdot\cos^2\theta = R^2\cos^2\theta; \\ \chi(v) = \frac{U - f(v)\cos v\cdot\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}. \end{aligned}\right\} \qquad (30)$$

Dalla prima delle (30) si supponga di ricavare: $v = \varphi(R,\ U)$; allora si avrà:

$$f(v) = f[\varphi(R,\ U)] = M; \qquad \chi(v) = \frac{U - M\cos\varphi(R,\ U)\cdot\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = N, \quad (31)$$

e le (28) divengono:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = M\cos\varphi(R,\ U)\cdot\cos\theta - N\cdot\operatorname{sen}\theta; \qquad y_1 = M\cdot\operatorname{sen}\varphi(R,\ U); \\ z_1 = M\cos\varphi(R,\ U)\cdot\operatorname{sen}\theta + N\cdot\cos\theta. \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Abbiamo dunque il teorema « *se la superficie generata dalla rotazione attorno all'asse delle* z *della linea* (26) *viene segata da un cilindro le cui generatrici sono parallele al piano* $y = 0$ *e inclinate all'asse di rotazione dell'angolo* θ, *e la cui sezione retta in coordinate polari è rappresentata dall'equazione* (27) (*quando l'asse polare sia parallelo all'intersezione del piano di una sezione retta del cilindro col coordinato* $y = 0$) *la linea d'intersezione è rappresentata dalle* (32), *nelle quali* M, N *sono dati dalle* (31) e $\varphi(R,\ U)$ *è la funzione che si ottiene risolvendo rapporto a* v *la prima delle equazioni* (30) ».

Caso particolare. — Se il cilindro segante ha le generatrici parallele all'asse di rotazione, $\theta = 0$ e la prima delle (30) diviene:

$$f(v) = R;$$

quest'equazione, non contenendo U, dà:

$$v = \varphi(R).$$

Le (31) divengono:

$$M = f(v) = R, \qquad N = U,$$

e le (32):

$$x_1 = R\cos[\varphi(R)], \qquad y_1 = R\operatorname{sen}[\varphi(R)], \qquad z_1 = U. \qquad (32')$$

a) Se il cilindro segante ha per sezione retta la spirale logaritmica:

$$r = f(v) = a\,e^{\cot\varepsilon\cdot v},$$

l'equazione da risolversi rapporto a v diviene:

$$R = a\,e^{\cot\varepsilon\cdot v},$$

da cui:

$$v = \operatorname{tg}\varepsilon \cdot \log\left(\frac{R}{a}\right).$$

Perciò le (32') divengono:

$$x_1 = R \cdot \cos\left[\operatorname{tg}\varepsilon \cdot \log\left(\frac{R}{a}\right)\right], \qquad y_1 = R \cdot \operatorname{sen}\left[\operatorname{tg}\varepsilon \cdot \log\left(\frac{R}{a}\right)\right], \qquad z_1 = U,$$

e se questa linea è geodetica principale d'elicoide, si ha in forza delle (11):

$$p\int \frac{U'}{R^2}\, du = \operatorname{tg}\varepsilon \cdot \log \frac{R}{a},$$

dalla quale si deduce:

$$U = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{2p} R^2,$$

La linea meridiana della superficie di rivoluzione è dunque rappresentata nel piano $y = 0$ dalle equazioni:

$$x_0 = R, \qquad z_0 = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{2p} R^2,$$

dalle quali, eliminando R si ricava:

$$z_0 = \frac{\operatorname{tg}\varepsilon}{2p} x_0^2,$$

equazione di una parabola di cui l'asse coincide coll'asse delle z; la superficie in discorso è quindi un paraboloide di rivoluzione.

A complemento quindi di un teorema dimostrato al § 3, caso f), si può aggiungere « *la sola superficie di rivoluzione in cui una geodetica principale d'elicoide, e quindi tutte, hanno per projezione equatoriale delle spirali logaritmiche col polo sull'asse è il paraboloide di rivoluzione* ».

Se poi la linea in discorso è una lossodromia sulla superficie di rivoluzione, le (9) ci dànno:

$$\operatorname{tg} i \int \frac{\sqrt{R^2 + U^2}}{R}\, du = \operatorname{tg}\varepsilon \cdot \log \frac{R}{a},$$

dalla quale si ricava:

$$U = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varepsilon - \operatorname{tg}^2 i}}{\operatorname{tg} i} \cdot R + \text{cost.}$$

Il meridiano della superficie è dunque rappresentato nel piano coordinato $y = 0$ dall'equazione:

$$z_0 = \frac{\sqrt{\operatorname{tg}^2\varepsilon - \operatorname{tg}^2 i}}{\operatorname{tg} i} x_0 + \text{cost.},$$

e perciò esso è una retta. A complemento quindi di un teorema dimostrato al § 3 caso *d*) si può aggiungere « *la sola superficie di rivoluzione in cui una lossodromia, e quindi tutte, hanno per projezioni equatoriali delle spirali logaritmiche col polo sull'asse è il cono di rotazione* ».

b) Se il cilindro segante ha per sezione retta la spirale d'Archimede $r = av$, con un calcolo analogo al precedente si trova che le (32') divengono:

$$x_1 = R \cdot \cos\left(\frac{R}{a}\right), \qquad y_1 = R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{R}{a}\right), \qquad z_1 = U,$$

e se tale linea è una geodetica principale d'elicoide, si ha per le (11):

$$p\int \frac{U'}{R^2}\, du = \frac{R}{a},$$

dalla quale (lasciando una costante arbitraria additiva):

$$U = \frac{1}{3ap} R^3.$$

La linea meridiana è quindi rappresentata dalle equazioni:

$$x_0 = R, \qquad z_0 = \frac{1}{3ap} R^3,$$

dalle quali, eliminando R, si ha:

$$z_0 = \frac{1}{3ap} x_0^3.$$

Quindi, a complemento di un teorema del § 3 caso *f*) possiamo dire « *la superficie di rivoluzione che ha per meridiano la parabola del terzo ordine* $z_0 = \frac{1}{3ap} x_0^3$ *è la sola che abbia la proprietà che tutte le geodetiche principali d'elicoidi tracciate su di essa si projettino equatorialmente in spirali d'Archimede col polo sull'asse* ».

§ 7.

Sezioni piane di una superficie di rivoluzione. — Una linea qualunque L_1 tracciata sulla superficie generata dalla rotazione attorno all'asse delle z della curva:

$$x = R\cos u, \qquad y = R\operatorname{sen} u, \qquad z = U,$$

è rappresentata dalle equazioni:

$$x_1 = R\cos f(u), \qquad y_1 = R\operatorname{sen} f(u), \qquad z_1 = U.$$

Se quindi L_1 è posta in un piano perpendicolare al coordinato $y=0$, inclinato dell'angolo i all'asse delle z e che incontra quest'asse alla distanza k dall'origine, deve essere:

$$z_1 = k + \cot i \cdot x_1.$$

Sarà dunque:

$$\cos f(u) = \frac{(U-k)\operatorname{tg} i}{R},$$

e quindi:

$$x_1 = (U-k)\operatorname{tg} i, \qquad y_1 = \sqrt{R^2 - (U-k)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 i}, \qquad z_1 = U.$$

Se cambiamo il sistema di assi di riferimento, prendendo per asse delle ξ l'intersezione del piano segante col coordinato $y=0$ e per asse delle η la perpendicolare all'asse delle ξ posta nel piano della linea, abbiamo le equazioni:

$$\xi = \frac{U-k}{\cos i}, \qquad \eta = \sqrt{R^2 - (U-k)^2 \operatorname{tg}^2 i}, \qquad \zeta = 0.$$

Siccome da queste si ricava:

$$R = \sqrt{\xi^2 \operatorname{sen}^2 i + \eta^2}, \qquad U = k + \xi \cos i,$$

potremo enunciare il teorema « *si tagli una superficie di rivoluzione con un piano perpendicolare al coordinato $y=0$, inclinato dell'angolo i all'asse di rotazione e distante di k dall'origine degli assi e si riferisca la sezione L al sistema di assi $\Omega(\xi, \eta)$ in cui Ω è l'intersezione del piano segante coll'asse di rotazione, $\Omega\xi$ è l'intersezione del piano segante col piano coordinato $y=0$ e $\Omega\eta$ è la perpendicolare alla $\Omega\xi$ posta nel piano segante.*

Se il meridiano della superficie è rappresentato dall'equazione:

$$f(x_0, z_0) = 0,$$

la sezione L è rappresentata dall'altra:

$$f[\sqrt{\xi^2 \operatorname{sen}^2 i + \eta^2}, (k + \xi \cos i)] = 0;$$

e se la sezione L è rappresentata dall'equazione:

$$\varphi(\xi, \eta) = 0,$$

la linea meridiana è rappresentata dall'altra:

$$\varphi\left(\frac{z_0 - k}{\cos i}, \sqrt{x_0^2 - (z_0 - k)^2 \cdot \operatorname{tg}^2 i}\right) = 0 \text{ ».}$$

Esempio. — Si consideri la superficie di rivoluzione che ha per meridiano la conica a centro:

$$a x_0^2 + b z_0^2 + c = 0.$$

L'equazione:

$$a(\xi^2 \operatorname{sen}^2 i + \eta^2) + b(k + \xi \cdot \cos i)^2 + c = 0,$$

che contiene le due indeterminate k, i, rappresenta tutte le possibili coniche tracciate sulla data superficie; se combiniamo l'equazione precedente una volta colla sua derivata rapporto ad i e una volta colla sua derivata rapporto a k, si ottengono rispettivamente le equazioni:

$$\xi^2 + \eta^2 = -\left(\frac{b\,k^2}{a-b} + \frac{c}{a}\right), \qquad \operatorname{sen}^2 i \cdot \xi^2 + \eta^2 = -\frac{c}{a},$$

la prima delle quali rappresenta un cerchio e la seconda un'ellisse.

Se poi si considera il paraboloide che ha per meridiano la linea: $z_0 = \frac{1}{p} x_0^2$, tutte le coniche situate su di esso sono rappresentate dall'equazione:

$$k + \cos i \cdot \xi = \frac{1}{p}(\xi^2 \operatorname{sen}^2 i + \eta^2),$$

la quale, combinata colla sua derivata rapporto ad i dà:

$$\xi^2 + \eta^2 = pk - \frac{p^2}{4},$$

che rappresenta un cerchio.

Dunque « I. *Se si taglia una quadrica di rivoluzione non sviluppabile con una serie di piani passanti per una retta che incontra perpendicolarmente l'asse di rotazione in un punto differente dal centro e si fanno ruotare i piani seganti attorno a questa retta in modo che vengano a coincidere con uno di essi, le sezioni piane ottenute inviluppano su questo piano un cerchio.*

II. *Se si taglia una superficie di 2.° ordine di rivoluzione a centro con una serie di piani paralleli obliqui all'asse e si projettano le sezioni ottenute sul piano di una di esse con delle parallele all'asse, queste projezioni inviluppano sul detto piano un'ellisse* ».

Si può osservare che il cerchio inviluppato dalle coniche nel 1.° caso è sempre reale nell'ellissoide schiacciato e nell'iperboloide a una falda; nell'ellissoide allungato, nell'iperboloide a due falde e nel paraboloide è reale solamente quando:

$$k < \sqrt{\frac{c_1(a-b)}{ab}}, \qquad k > \sqrt{\frac{c(a+b_1)}{ab_1}}, \qquad k > \frac{p}{4},$$

essendo $b_1 = -b$, $c_1 = -c$.

L'ellisse inviluppata dalle coniche nel 2.° caso è reale solamente nell'ellissoide e nell'iperboloide a una falda.

§ 8.

Intersezione di due superficie di rivoluzione. — Le superficie di cui si considera l'intersezione siano S, S_1 e le loro linee meridiane, considerate nei piani coordinati $\eta = 0$, $\eta_1 = 0$ siano rappresentate dalle equazioni:

$$\xi = R(u), \quad \zeta = U(u); \qquad \xi_1 = R_1(u_1), \quad \zeta_1 = U_1(u_1),$$

nelle quali u e u_1 sono due parametri indipendenti qualunque. Collochiamo le superficie S, S_1 in modo che gli assi coordinati 0ξ, $0_1\xi_1$ coincidano e che i loro assi di rotazione siano paralleli alla distanza k fra loro; chiamando allora L la linea d'intersezione, (x, y, z), (x_1, y_1, z_1) le coordinate di un suo punto qualunque riferito rispettivamente al sistema $0(\xi, \eta, \zeta)$ o all'altro $0_1(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$ si deve avere:

$$x = R \cdot \cos f(u), \qquad y = R \cdot \operatorname{sen} f(u), \qquad z = U(u);$$
$$x_1 = R_1 \cdot \cos f_1(u_1), \qquad y_1 = R_1 \cdot \operatorname{sen} f_1(u_1), \qquad z_1 = U_1(u_1),$$

essendo $f(u)$ e $f_1(u_1)$ due funzioni convenienti di u e di u_1. E siccome: $x = x_1 + k$, $y = y_1$, $z = z_1$, sarà:

$$R \cos f(u) = R_1 \cos f_1(u_1) + k; \qquad R \operatorname{sen} f(u) = R_1 \operatorname{sen} f_1(u_1); \qquad U(u) = U_1(u_1).$$

Dall'ultima equazione si supponga di ricavare: $u_1 = \varphi(u)$ e si ponga:

$$R_1(u_1) = R_1[\varphi(u)] = r(u);$$

le due precedenti divengono allora:

$$r \cos f_1(u_1) = R \cos f(u) - k, \qquad r \operatorname{sen} f_1(u_1) = R \operatorname{sen} f(u),$$

dalle quali, col quadrare e sommare, si deduce:

$$\cos f(u) = \frac{R^2 - r^2 + k^2}{2kR}.$$

Sostituendo questo valore di $\cos f(u)$ nelle equazioni che ci dànno x, y, z, abbiamo « *l'intersezione delle superficie di rivoluzione generate dalle linee meridiane:*

$$\xi = R(u), \quad \eta = 0, \quad \zeta = U(u); \qquad \xi_1 = R_1(u_1), \quad \eta_1 = 0, \quad \zeta_1 = U_1(u_1),$$

quando i loro assi siano paralleli alla distanza k fra loro, è rappresentata dalle equazioni:

$$x = \frac{R^2 - r^2 + k^2}{2k}, \qquad y = \frac{\sqrt{4k^2R^2 - (R^2 - r^2 + k^2)^2}}{2k}, \qquad z = U,$$

essendo $r(u)$ ciò che diviene la funzione $R_1(u_1)$ sostituendo a u_1 la funzione $\varphi(u)$ che si ottiene risolvendo rapporto a u_1 l'equazione $U_1(u_1) = U(u)$ ».

Esempio. — Le superficie che si considerano siano quelle generate dalle curve logaritmiche:

$$\xi = m \cdot e^{a\zeta}, \qquad \xi_1 = m_1 \cdot e^{a_1 \zeta_1},$$

che ruotano attorno al loro assintoto. Si potrà mettere:

$$R(u) = m e^{au}, \quad U(u) = u; \qquad R_1(u_1) = m_1 e^{a_1 u_1}, \quad U(u_1) = u_1,$$

e allora l'equazione $U(u) = U_1(u_1)$ ci dà $u_1 = u$, con che $r(u)$ diviene:

$$r(u) = m_1 e^{a_1 u}.$$

Si ha allora per le coordinate dei punti della linea domandata:

$$x = \frac{m^2 e^{2au} - m_1^2 e^{2a_1 u} + k^2}{2k},$$

$$y = \frac{1}{2k}\sqrt{4m^2 k^2 e^{2au} - (m^2 e^{2au} - m_1^2 e^{2a_1 u} + k^2)^2}. \qquad z = u.$$

Se dalle due prime eliminiamo u, si ha che la projezione equatoriale dell'intersezione è rappresentata dall'equazione:

$$m_1^2\left(\frac{x^2 + y^2}{m^2}\right)^{\frac{a_1}{a}} = x^2 + y^2 - 2kx + k^2;$$

questa curva è algebrica tutte le volte che $\frac{a_1}{a}$ è commensurabile.

Se si suppone $a_1 = a$, l'ultima equazione diviene:

$$x^2 + y^2 = \frac{km^2}{m^2 - m_1^2}(2x - k),$$

che è quella di un cerchio di raggio $\frac{kmm_1}{m^2 - m_1^2}$ avente il centro sull'asse delle x alla distanza $\frac{km^2}{m^2 - m_1^2}$ dall'origine.

§ 9.

Le linee conjugate sopra una superficie di rivoluzione. — Sia L una linea qualunque che facciamo ruotare attorno all'asse delle z; sulla superficie generata S sia L_1 una qualunque delle trajettorie ortogonali delle L; le due linee L e L_1 si diranno conjugate fra loro. Se la linea che si considera come generatrice L_0 è rappresentata dalle equazioni:

$$x_0 = R \cdot \cos u, \qquad y_0 = R \cdot \operatorname{sen} u, \qquad z_0 = U,$$

le due linee conjugate L e L_1 sono rappresentate da equazioni della forma:

$$x = R \cdot \cos f(u), \qquad y = R \cdot \operatorname{sen} f(u), \qquad z = U;$$
$$x_1 = R \cdot \cos f_1(u), \qquad y_1 = R \cdot \operatorname{sen} f_1(u), \qquad z_1 = U.$$

Chiamando quindi i e i_1 l'inclinazione delle linee L e L_1 sui paralleli, sarà:

$$\cos i = \frac{R f'}{\sqrt{R^2 f'^2 + R'^2 + U'^2}}, \qquad \cos i_1 = \frac{R f'_1}{\sqrt{R^2 f'^2_1 + R'^2 + U'^2}}.$$

La condizione imposta alle linee L e L_1 è espressa dall'equazione $i + i_1 = \frac{\pi}{2}$, ciò che dà:

$$R^2 f' f'_1 = R'^2 + U'^2;$$

risolvendo quest'equazione rapporto a f_1 e integrando, si ottiene:

$$f_1 = \int \frac{R'^2 + U'^2}{R^2 f'} \cdot du.$$

Dunque « *sulla superficie generata dalla rotazione attorno all'asse delle z della linea L_0:*

$$x_0 = R \cdot \cos u, \qquad y_0 = R \cdot \operatorname{sen} u, \qquad z_0 = U,$$

una linea qualunque:

$$x = R \cdot \cos f(u), \qquad y = R \cdot \operatorname{sen} f(u), \qquad z = U, \tag{33}$$

ha per conjugata l'altra:

$$x_1 = R \cdot \cos\left(\int \frac{R'^2 + U'^2}{R^2 f'} du\right), \quad y_1 = R \cdot \operatorname{sen}\left(\int \frac{R'^2 + U'^2}{R^2 f'} du\right), \quad z_1 = U \text{ ».} \tag{34}$$

Se alla linea L di questo teorema, rappresentata dalle (33) si sostituisce la linea L_0, abbiamo: « *le linee L, L_1 rappresentate dalle equazioni:*

$$\left.\begin{aligned} x = R \cdot \cos u, \qquad y = R \cdot \operatorname{sen} u, \qquad z = U; \\ x_1 = R \cdot \cos\left(\int \frac{R'^2 + U'^2}{R^2} du\right), \quad y_1 = R \cdot \operatorname{sen}\left(\int \frac{R'^2 + U'^2}{R^2} du\right), \quad z_1 = U, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

ruotando attorno all'asse delle z, generano la stessa superficie di rivoluzione sulla quale esse, nelle varie loro posizioni, costituiscono due sistemi di trajettorie ortogonali. »

Se L è lossodromia sulla superficie, le coordinate de' suoi punti sono date dalle (9_1), laonde col confronto si ottiene:

$$x_1 = R\cdot\cos(\cot^2 i\cdot u),\quad y_1 = R\cdot\operatorname{sen}(\cot^2 i\cdot u),\quad z_1 = \int\sqrt{\cot^2 i\cdot R^2 - R'^2}\cdot du,$$

le quali hanno la stessa forma delle (9_2).

Dunque « *le trajettorie ortogonali di un sistema di lossodromie di una superficie di rivoluzione, identiche fra loro, formano un nuovo sistema di lossodromie pure identiche fra loro.* »

Prendendo come linee coordinate sulla superficie generata dalla linea (9_1) la linea stessa nelle sue varie posizioni e i paralleli, il quadrato dell'elemento lineare dS^2 della superficie assume la forma:

$$dS^2 = R^2\left(\frac{du^2}{\operatorname{sen}^2 i} + 2\,du\,dv + dv^2\right),$$

essendo $u=$ cost. i paralleli e $v=$ cost. la lossodromia nelle varie posizioni. Sostituendo alle $u=$ cost. le trajettorie ortogonali $t=$ cost. delle $v=$ cost. e ponendo quindi: $u=f(v,\ t)$, l'equazione precedente diviene:

$$dS^2 = R^2\left\{\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2}{\operatorname{sen}^2 i}\,dt^2 + 2\,\frac{\partial f}{\partial t}\left(1+\frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{\operatorname{sen}^2 i}\right)dt\cdot dv + \left(1 + 2\,\frac{\partial f}{\partial v} + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2}{\operatorname{sen}^2 i}\right)dv^2\right\}.$$

La condizione d'ortogonalità delle linee v, t dà:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -\operatorname{sen}^2 i,$$

d'onde integrando:

$$f(v,\ t) = \varphi(t) - v\cdot\operatorname{sen}^2 i,$$

essendo $\varphi(t)$ una funzione arbitraria di t. Senza cambiare il sistema delle $t=$ cost. si può sostituire $\varphi(t)$ con t e allora risulta:

$$dS^2 = R^2\left(\frac{dt^2}{\operatorname{sen}^2 i} + \cos^2 i\cdot dv^2\right);$$

si vede quindi che « *sopra una superficie di rivoluzione qualunque il doppio sistema di lossodromie ortogonali è isotermo* ».

Questa proprietà è verificata ad es. nel doppio sistema dei meridiani e dei paralleli.

Se mettiamo la condizione che le due linee conjugate L, L_1 siano eguali fra loro, le (35) dànno:

$$\frac{R'^2 + U'^2}{R^2} = 1,\quad \text{d'onde:}\quad U' = \sqrt{R^2 - R'^2}.$$

Le linee (35) vengono allora rappresentate dalle equazioni:

$$x = R \cos u, \qquad y = R \operatorname{sen} u, \qquad z = \int \sqrt{R^2 - R'^2} \cdot du,$$

le quali si ricavano dalle (9_1) facendovi $i = \frac{\pi}{4}$. Dunque « *le linee conjugate eguali fra loro sono lossodromie seganti i meridiani sotto un angolo* $\frac{\pi}{4}$ ».

Si supponga che entrambe le linee conjugate L e L_1 siano geodetiche principali d'elicoidi; le (11_1), (11) confrontate rispettivamente colle prime e colle seconde (35) dànno:

$$U = \frac{1}{p} \int R^2 du, \qquad p_1 \int \frac{U'}{R^2} du = \int \frac{R'^2 + U'^2}{R^2} du,$$

essendo p_1 il parametro del moto elicoidale di L_1. Da queste relazioni, eliminando U, si ha l'equazione:

$$R^4 = p p_1 R^2 - p^2 R'^2,$$

la quale ha la stessa forma della (16) del § 3.

Ricordando quindi il risultato allora ottenuto, abbiamo « *la sola superficie di rivoluzione nella quale due linee conjugate sono contemporaneamente geodetiche principali d'elicoidi i cui assi coincidono coll'asse di rotazione della superficie, è la sfera* ».

§ 10.

Linee geodeticamente parallele. — Sopra una superficie qualunque sono linee geodeticamente parallele le trajettorie ortogonali di uno stesso sistema di geodetiche. Se la linea (33) è geodetica, avremo (§ 2):

$$f = a \int \sqrt{\frac{R'^2 + U'^2}{R^2 - a^2}} \cdot \frac{du}{R},$$

e le linee (34) divengono:

$$\left.\begin{aligned} x &= R \cdot \cos\left(\frac{1}{a} \int \frac{\sqrt{(R^2 - a^2)(R'^2 + U'^2)}}{R} \cdot du\right), \\ y &= R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{a} \int \frac{\sqrt{(R^2 - a^2)(R'^2 + U'^2)}}{R} \cdot du\right), \qquad z = U. \end{aligned}\right\} \quad (35)^{\text{bis}}$$

Siccome per le linee conjugate alle $(35)^{\text{bis}}$ sussiste la relazione $R \cdot \operatorname{sen} i = a$, come si è dimostrato al § 3, si potrà dire: « *sulla superficie generata dalla* *rotazione attorno all'asse delle z della linea* $(35)^{bis}$ *tale linea è una sviluppante geodetica del parallelo di raggio a* ».

La linea $(35)^{bis}$ sia un'elica; confrontando le $(35)^{bis}$ colle equazioni (10) del § 2 abbiamo un'equazione dalla quale si deduce:

$$U' = \frac{\cos i \cdot R R'}{\sqrt{a^2 - R^2 \cos^2 i}}.$$

Moltiplicando per du e integrando, si ha:

$$U \cdot \cos i + h = -\sqrt{a^2 - R^2 \cos i},$$

con h costante arbitraria; siccome questa relazione si può scrivere:

$$\cos^2 i (U^2 + R^2) + 2h \cdot \cos i \cdot U = a^2 - h^2,$$

si vede che la curva meridiana è un cerchio avente il centro sull'asse di rotazione.

Dunque « *la sfera è la sola superficie di rivoluzione in cui una sviluppante geodetica di un parallelo è nel tempo stesso un'elica di un cilindro avente le generatrici parallele all'asse di rotazione* ».

§ 11.

Deformazione per flessione delle superficie di rivoluzione. — Sia L una linea arbitraria, x, y, z le coordinate di un suo punto qualunque e s il suo arco; le coordinate X, Y, Z di un punto qualunque della superficie S generata dalla rotazione di L attorno all'asse delle z sono espresse dalle equazioni:

$$X = x \cos v - y \operatorname{sen} v, \qquad Y = x \operatorname{sen} v + y \cos v, \qquad Z = z,$$

nelle quali è manifesto il significato geometrico dell'angolo v. Se, col mezzo di queste equazioni, si calcola il quadrato dS^2 dell'elemento lineare della superficie, si trova:

$$dS^2 = ds^2 + 2(xy' - x'y) ds\, dv + (x^2 + y^2) dv^2.$$

Si deformi ora per flessione la superficie S in una nuova superficie di rivoluzione S_1 e sia L_1 la linea a cui si riduce L; chiamando allora x_1, y_1, z_1 le coordinate di un punto qualunque di L_1 ed s_1 il suo arco, si trova per il quadrato dS_1^2 dell'elemento lineare della nuova superficie:

$$dS_1^2 = ds_1^2 + 2(x_1 y'_1 - x'_1 y_1) ds_1\, dv_1 + (x_1^2 + y_1^2) dv_1^2.$$

Osservando che la condizione $ds = ds_1$ può ritenersi senz'altro soddisfatta, bastando contare l'arco s di L e l'arco s_1 di L_1 da due punti corrispondenti delle due linee corrispondenti, l'identità delle due espressioni dS^2, dS_1^2 è stabilita quando sia:

$$(x_1 y'_1 - x'_1 y_1) dv_1 = (x y' - x' y) dv; \qquad (x_1^2 + y_1^2) dv_1^2 = (x^2 + y^2) dv^2.$$

Dalla prima ricavandosi:

$$\frac{x_1 y'_1 - x'_1 y_1}{x y' - x' y} = \frac{dv}{dv_1},$$

ed essendo il primo membro funzione di s e il secondo di v, si avrà:

$$x_1 y'_1 - x'_1 y_1 = \frac{1}{k}(x y' - x' y), \qquad v_1 = k v, \tag{36}$$

dove k è una costante arbitraria (modulo di deformazione). In forza della seconda delle (36) l'ultima condizione da soddisfare diviene:

$$x_1^2 + y_1^2 = \frac{1}{k^2}(x^2 + y^2). \tag{37}$$

E perciò le condizioni d'applicabilità sono le (36), (37); si soddisfa nel modo più generale alla (37) prendendo:

$$x_1 = \frac{1}{k}\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos\theta, \qquad y_1 = \frac{1}{k}\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \operatorname{sen}\theta, \tag{38}$$

essendo θ una funzione qualunque di s. Questa funzione di s vuole determinata in modo, da verificare la 1.ª delle (36); col mezzo delle (38) calcolando il 1.° membro di (36) e mettendo la condizione che sia eguale al 2.° membro, si ottiene:

$$\theta' = k \frac{x y' - x' y}{x^2 + y^2},$$

dalla quale, moltiplicando per ds e integrando, si ricava:

$$\theta = k \int \frac{x y' - x' y}{x^2 + y^2} \cdot ds.$$

Osservando che deve essere soddisfatta la condizione:

$$\left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy_1}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz_1}{ds}\right)^2 = 1,$$

colla quale, essendo già note le x_1, y_1, si può ricavare altresì $\frac{dz_1}{ds}$ e poi z_1, si ha « *le superficie generate dalla rotazione attorno all'asse delle z delle due linee L e L_1 rappresentate dalle equazioni:*

$$x = x(s), \qquad y = y(s), \qquad z = \int \sqrt{1 - (x'^2 + y'^2)}\, ds;$$

$$x_1 = \frac{1}{k} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos\left(k \int \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2}\, ds\right),$$

$$y_1 = \frac{1}{k} \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \operatorname{sen}\left(k \int \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2}\, ds\right),$$

$$z_1 = \int \sqrt{1 - \frac{(xx' + yy')^2 + k^2 (xy' - x'y)^2}{k^2 (x^2 + y^2)}} \cdot ds,$$

sono applicabili l'una all'altra e le due linee in discorso sono corrispondenti ».

Se poniamo:

$$x = R \cos u, \qquad y = R \operatorname{sen} u, \qquad z = U,$$

essendo R e U due funzioni di u, si ha:

$$x^2 + y^2 = R^2; \qquad xx' + yy' = RR' \frac{du}{ds}; \qquad xy' - x'y = R^2 \frac{du}{ds};$$

$$\frac{du}{ds} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + R'^2 + U'^2}};$$

sostituendo allora questi valori nelle equazioni che dànno x_1, y_1, z_1 si può aggiungere al teorema precedente « *se la linea data L si ritiene rappresentata dalle equazioni:*

$$x = R \cdot \cos u, \qquad y = R \cdot \operatorname{sen} u, \qquad z = U, \tag{39}$$

la sua deformata L_1 è allora rappresentata dalle altre:

$$\left.\begin{aligned} x_1 = \frac{1}{k} \cdot R \cos(ku), \qquad y_1 = \frac{1}{k} \cdot R \operatorname{sen}(ku), \\ z_1 = \int \sqrt{U'^2 + \frac{k^2 - 1}{k^2} \cdot R'^2} \cdot du \text{ ».} \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Le equazioni trovate sono, in moltissimi problemi concernenti la deformazione delle superficie di rivoluzione, preferibili a quelle che si sogliono dare ordinariamente e che si riferiscono alla curva meridiana, anzi che a una generatrice a doppia curvatura qualunque.

Applicazioni. — Se tanto L quanto L_1 sono eliche di cilindri colle generatrici parallele all'asse delle superficie, abbiamo:

$$\cos i = \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{du} \cdot \frac{du}{ds} = \frac{U'}{\sqrt{R^2 + R'^2 + U'^2}},$$

$$\cos i_1 = \frac{dz_1}{ds} = \frac{dz_1}{du} \cdot \frac{du}{ds} = \frac{\sqrt{U'^2 + \frac{k^2 - 1}{k^2} R'^2}}{\sqrt{R^2 + U'^2 + R'^2}},$$

essendo i e i_1 le inclinazioni costanti delle due linee sulle generatrici dei rispettivi cilindri.

Eliminando fra queste due espressioni la U', si ottiene un'equazione dalla quale si deduce:

$$\frac{R'}{R} = a,$$

dove a è la costante definita dall'equazione:

$$a = k \sqrt{\frac{\operatorname{sen}(i_1 + i) \cdot \operatorname{sen}(i_1 - i)}{\operatorname{sen}^2 i - k^2 \operatorname{sen}^2 i_1}}.$$

Moltiplicando ambo i membri della precedente per du ed integrando, si ha: $R = b e^{au}$, con b costante; la linea L è quindi un'elica cilindro-conica, ovvero, come caso particolare, un'elica circolare.

Abbiamo dunque « *se, deformando una superficie di rivoluzione in modo che essa rimanga di rivoluzione, un'elica descritta su di essa e appartenente a un cilindro colle generatrici parallele all'asse di rotazione si trasforma in una linea di egual natura, la superficie data è necessariamente un cono ovvero un cilindro di rivoluzione* ».

Se supponiamo che la sola linea L_1 sia un'elica d'un cilindro colle generatrici parallele all'asse delle z e segante queste generatrici sotto l'angolo costante i, si ha per il calcolo che precede:

$$U' = \frac{1}{k \operatorname{sen} i} \sqrt{k^2 \cos^2 i \cdot R^2 + (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 i) \cdot R'^2}.$$

E perciò « *la sola superficie di rotazione la quale, per mezzo di deformazioni che ne lasciano inalterata la natura, riduce una linea descritta su di essa a un'elica di un cilindro colle generatrici parallele all'asse, è quella generata dalla rotazione attorno all'asse delle z della linea:*

$$x = R \cdot \cos u, \qquad y = R \cdot \operatorname{sen} u,$$

$$z = \frac{1}{k \operatorname{sen} i} \cdot \int \sqrt{k^2 \cos^2 i \cdot R^2 + (1 - k^2 \operatorname{sen}^2 i) R'^2} \cdot du.$$

La linea che può subire la trasformazione predetta è la generatrice ora trovata e la deformazione della superficie ha luogo in una sola maniera ».

La linea L_1 sia assintotica sulla superficie da essa generata ruotando attorno all'asse delle z; le binormali di L_1 incontrano allora questa retta. Ora la binormale di L_1 nel punto generico (x_1, y_1, z_1) è rappresentata dalle equazioni:

$$\frac{X-x_1}{\frac{dy_1}{ds}\frac{d^2z_1}{ds^2}-\frac{dz_1}{ds}\frac{d^2y_1}{ds^2}}=\frac{Y-y_1}{\frac{dz_1}{ds}\frac{d^2x_1}{ds^2}-\frac{dx_1}{ds}\frac{d^2z_1}{ds^2}}=\frac{Z-z_1}{\frac{dx_1}{ds}\frac{d^2y_1}{ds^2}-\frac{dy_1}{ds}\frac{d^2x_1}{ds^2}},$$

essendo (X, Y, Z) le coordinate correnti e s l'arco della linea.

Questa retta incontra l'asse delle z quando sia:

$$\frac{dz_1}{ds}\left(x_1\frac{d^2x_1}{ds^2}+y_1\frac{d^2y_1}{ds^2}\right)=\frac{d^2z_1}{ds^2}\left(x_1\frac{dx_1}{ds}+y_1\frac{dy_1}{ds}\right);$$

calcolando le derivate prime e seconde delle coordinate rapporto all'arco dalle (40), si ottiene dopo qualche riduzione:

$$(R''-k^2R)\sqrt{U'^2+\frac{k^2-1}{k^2}R'^2}=R'\left(\sqrt{U'^2+\frac{k^2-1}{k^2}R'^2}\right)'.$$

Quest'equazione si può scrivere:

$$\frac{\left(\sqrt{U'^2+\frac{k^2-1}{k^2}R'^2}\right)'}{\sqrt{U'^2+\frac{k^2-1}{k^2}R'^2}}=\frac{R''}{R'}-k^2\frac{R}{R'},$$

e allora, moltiplicata per du e integrata, dà:

$$\log\sqrt{U'^2+\frac{k^2-1}{k^2}R'^2}=\log a+\log R'-k^2\int\frac{R\,du}{R'},$$

con a costante. Da questa relazione si deduce:

$$U'=R'\sqrt{a^2\cdot e^{-2k^2\int\frac{R\,du}{R'}}-\frac{k^2-1}{k^2}},$$

la quale, colla moltiplicazione per du e con un'integrazione, dà U cioè z.

Dunque « *la sola superficie di rotazione la quale, per mezzo di deformazioni che ne lascino inalterata la natura, riduce una linea descritta su di essa ad essere assintotica sulla superficie deformata, è quella generata dalla* *rotazione attorno all'asse delle z della linea:*

$$x = R \cdot \cos u, \qquad y = R \cdot \operatorname{sen} u, \qquad z = \int R' \sqrt{a^2 \cdot e^{-2k^2 \int \frac{R\,du}{R'}} - \frac{k^2-1}{k^2}} \cdot du.$$

La linea che può subire tale trasformazione è la generatrice ora trovata e la deformazione della superficie non può farsi che in un sol modo » (*).

Vediamo se una linea d'ombra di una superficie di rivoluzione illuminata da raggi paralleli o concorrenti può mantenersi linea d'ombra della superficie che si ottiene dalla data deformandola per flessione. Si rammenti che quando le equazioni di una linea si pongono sotto la forma:

$$x = R \cdot \cos f(u), \qquad y = R \cdot \operatorname{sen} f(u), \qquad z = U,$$

al § 2 si è trovato che la condizione esprimente che essa è linea d'ombra relativa a raggi paralleli è:

$$\cos f(u) = \frac{R'}{z'} \cot \theta;$$

quest'equazione, applicata alla linea rappresentata dalle (40), dà:

$$\frac{1}{k} \cos(ku) = \frac{\cot\theta \cdot R'}{\sqrt{U'^2 + \frac{k^2-1}{k^2} R'^2}},$$

dalla quale si deduce:

$$U' = \frac{\sqrt{k^2 \cot^2\theta - \frac{k^2-1}{k^2} \cos^2(ku)}}{\cos(ku)} \cdot R'.$$

Si conclude di qui che la linea L è rappresentata dalle equazioni:

$$x = R \cdot \cos u, \quad y = R \cdot \operatorname{sen} u, \quad z = \int \frac{\sqrt{k^2 \cot^2\theta - \frac{k^2-1}{k^2} \cos^2(ku)}}{\cos(ku)} \cdot R' du. \quad (41)$$

Allo stesso § 2 si è pure dimostrato che onde una linea sia d'ombra relati-

(*) La proprietà ultima enunciata è vera per qualunque superficie; infatti un'assintotica L ha per curvatura assoluta la curvatura geodetica e per torsione la radice quadrata della curvatura totale della superficie, cangiata di segno (*teorema di* Enneper); se quindi, dopo una certa deformazione della superficie, l'assintotica L si trasformasse nell'assintotica L_1, questa linea L_1 dovrebbe avere la stessa curvatura e la stessa torsione di L. Le due linee L e L_1 dovrebbero quindi essere identiche, il che non può avvenire che per le generatrici rettilinee delle superficie rigate.

vamente a raggi luminosi concorrenti, deve essere soddisfatta la condizione:

$$\cos f(u) = \frac{R z' - R' z}{a z'},$$

la quale, applicata alla linea (40), dà:

$$U' = \sqrt{\frac{h^2}{\left[R - \frac{a}{k}\cos(k u)\right]^2} \cdot e^{2\int \frac{R' du}{R - \frac{a}{k}\cos(k u)}} - \frac{k^2 - 1}{k^2}} \cdot R' du,$$

con h costante arbitraria. Si conclude di qui che la linea L è rappresentata dalle equazioni:

$$\left.\begin{aligned} &x = R\cos u, \qquad y = R \operatorname{sen} u, \\ &z = \int \sqrt{\frac{h^2}{\left[R - \frac{a}{k}\cos(k u)\right]^2} \cdot e^{2\int \frac{R' du}{R - \frac{a}{k}\cos(k u)}} - \frac{k^2 - 1}{k^2}} \cdot R' du. \end{aligned}\right\} \quad (42)$$

Abbiamo così il teorema « *le linee le quali, dopo una deformazione di parametro k della superficie generata dalla loro rotazione attorno all'asse delle z divengono linee d'ombra della superficie deformata, rispetto a raggi paralleli o concorrenti, sono rappresentate dalle* (41), (42), *nelle quali θ indica l'inclinazione dei raggi luminosi sull'asse e a la distanza del punto luminoso dall'asse di rotazione* ».

Se nelle (41), (42) facciamo $k = 1$, esse si riducono, come è naturale, rispettivamente alle (12_1), (13_1).

Se la linea rappresentata dalla (41) è, nella sua forma attuale, linea d'ombra relativa a raggi luminosi paralleli, si deve avere:

$$z = \cot \varepsilon \int \frac{R'}{\cos u} \cdot du.$$

Eguagliando allora questo valore di z a quello dato dalla terza (41), si ottiene l'equazione:

$$\frac{\cot \varepsilon}{\cos u} = \frac{\sqrt{k^2 \cot^2 \theta - \frac{k^2 - 1}{k^2} \cos^2(k u)}}{\cos(k u)},$$

la quale non può essere soddisfatta identicamente, ma solo per valori particolari di u.

Se la linea rappresentata dalla (42) è linea d'ombra relativa a raggi paralleli, si deve avere:

$$\cot\theta \int \frac{R'}{\cos u}\, du = \int \sqrt{\frac{h^2}{\left[R - \frac{a}{k}\cos(ku)\right]^2} \cdot e^{2\int \frac{R'\,du}{R - \frac{a}{k}\cos(ku)}} - \frac{k^2-1}{k^2}} \cdot R'\,du,$$

dalla quale si deduce:

$$\frac{h \cdot e^{\int \frac{R'}{R - \frac{a}{k}\cos(ku)} \cdot du}}{R - \frac{a}{k}\cos(ku)} = \sqrt{\frac{\cot^2\theta}{\cos^2 u} + \frac{k^2-1}{k^2}}\,.$$

Derivando questa espressione logaritmicamente, si ottiene dopo alcuni calcoli:

$$R = a \cdot \left\{ \frac{1}{k}\cos(ku) - \frac{\operatorname{sen}(ku)}{\frac{d}{du} \cdot \log \sqrt{\frac{\cot^2\theta}{\cos^2 u} + \frac{k^2-1}{k^2}}} \right\}. \tag{43}$$

Se la linea rappresentata dalle (41) è una linea d'ombra relativa a raggi luminosi concorrenti, si deve avere:

$$\int \frac{\sqrt{k^2\cot^2\theta - \frac{k^2-1}{k^2}\cos^2(ku)}}{\cos(ku)} \cdot R'\,du = h \cdot e^{\int \frac{R'}{R - a\cos u} du},$$

dalla quale si ricava:

$$\frac{h\, e^{\int \frac{R'\,du}{R - a\cos u}}}{R - a\cos u} = \sqrt{\frac{k^2\cot^2\theta}{\cos^2(ku)} - \frac{k^2-1}{k^2}}\,.$$

Derivando quest'espressione logaritmicamente, si deduce:

$$R = a \cdot \left\{ \cos u - \frac{\operatorname{sen} u}{\frac{d}{du} \cdot \log \sqrt{\frac{k^2\cot^2\theta}{\cos^2(ku)} - \frac{k^2-1}{k^2}}} \right\}. \tag{44}$$

Se finalmente la linea (42), sulla superficie generata dalla sua rotazione attorno all'asse delle z, è linea d'ombra relativa a raggi luminosi concorrenti in un punto posto alla distanza b dall'asse, si ha:

$$h_1 e^{\int \frac{R\,du}{R - b\cos u}} = \int \sqrt{\frac{h^2}{\left[R - \frac{a}{k}\cos(ku)\right]^2} \cdot e^{2\int \frac{R'\,du}{R - \frac{a}{k}\cos(ku)}} - \frac{k^2-1}{k^2}} \cdot R'\,du.$$

Elevando a quadrato ambo i membri dell'equazione che si ottiene da questa colla differenziazione, e derivando poi logaritmicamente l'equazione che risulta, si ha:

$$h^2\left\{R\,[a\,\mathrm{sen}(ku) - b\,\mathrm{sen}\,u] - ab\left[\cos u\,\mathrm{sen}(ku) - \frac{1}{k}\,\mathrm{sen}\,u\cos(ku)\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\, e^{2\int\frac{R'\,du}{R-\frac{a}{k}\cos(ku)}} = -b\,\frac{k^2-1}{k^2}\cdot\mathrm{sen}\,u\cdot\left[R - \frac{a}{k}\cos(ku)\right]^3.$$

Derivando questa logaritmicamente, si ottiene l'equazione differenziale del 1.° ordine:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{R'\,[a\,\mathrm{sen}(ku) - b\,\mathrm{sen}\,u] + R\,[ak\cos(ku) - b\cos u] - ab\left(k-\frac{1}{k}\right)\cos u\cdot\cos(ku)}{R\,[a\,\mathrm{sen}(ku) - b\,\mathrm{sen}\,u] - ab\left[\cos u\cdot\mathrm{sen}(ku) - \frac{1}{k}\,\mathrm{sen}\,u\cdot\cos(ku)\right]} = \\ &\qquad = \cot u + \frac{3a\cdot\mathrm{sen}(ku) + R'}{R - \frac{a}{k}\cos(ku)}.\end{aligned}\right\} \quad (45)$$

Dunque « *Se una superficie di rivoluzione S si deforma per flessione in un'altra superficie di rivoluzione S_1 e una linea d'ombra L di S si trasforma in una linea d'ombra L_1 di S_1:*

1.° *Le due curve L e L_1 non possono essere entrambe linee d'ombra relativamente a raggi luminosi paralleli.*

2.° *La linea L che nella deformazione della superficie conserva la proprietà caratteristica suddetta, è rappresentata dalle* (42) *in cui R ha l'espressione* (43), *ovvero dalle* (41) *dove R ha l'espressione* (44), *ovvero dalle* (42), *dove R è definito dall'equazione differenziale* (45) *rispettivamente, secondo che la superficie primitiva S è illuminata da raggi paralleli e la deformata S_1 da raggi concorrenti, ovvero S da raggi concorrenti e S_1 da raggi paralleli, ovvero entrambe le superficie S, S_1 sono illuminate da raggi concorrenti* ».

Parma, aprile 1890.

Theorie der Elemententripel einstufiger Elementargebilde.

(*Von* BENNO KLEIN, *in Marburg in Hessen.*)

Theil I. — DAS TRIPELNETZ.

EINLEITUNG.

In der Schrift *Theorie der trilinear-symmetrischen Elementargebilde* (*) ging ich von der trilinearen Verwandtschaft dreier einstufiger Elementargebilde aus, deren analytischer Ausdruck eine in jeder von drei Variabeln lineare Gleichung ist, eine Verwandtschaft, welche gleichzeitig von Herrn SCHUBERT (**) behandelt worden ist. Als speciellen Fall dieser Verwandtschaft erhält man, wenn man den drei Gebilden denselben Traeger giebt und die Gleichung symmetrisch in den drei Variabeln annimmt, eine zweifach lineare Mannigfaltigkeit, das Tripelnetz genannt.

Diesem kommt bei der Untersuchung der Elemententripel eines einstufigen Gebilder eine analoge Bedeutung zu, wie der quadratisch-involutorischen Punktreihe bei der Betrachtung der Elementenpaare eines Gebildes.

Zu der Theorie des Tripelnetzes kann man nun auch unmittelbar, ohne von jener allgemeineren Beziehung auszugehen, gelangen, indem man gewisse Saetze ueber Curven zweiter Ordnung und die ihnen eingeschriebenen Dreiecke zu Hilfe nimmt. Auf diesem Wege sind die Eigenschaften des Tripelnetzes in den §§ 1-bis 5 der vorliegenden Arbeit von Neuem entwickelt worden.

In einem Tripelnetz giebt es drei Tripel, deren Elemente je in eines zusammenfallen, und das Netz ist durch diese seine dreifachen Elemente be-

(*) Marburg, Elwert'sche Buchhandlung, 1881.

(**) SCHUBERT, *Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Gebilden.* Math. Annalen, Bd. 17, p. 457.

stimmt. Es gilt nun der Satz, der als ein Hauptsatz der Theorie bezeichnet werden kann:

Ist ein Tripel α in einem Netze enthalten, dessen dreifache Elemente das Tripel β bilden, so ist auch das Tripel β in dem Netze enthalten, dessen dreifache Elemente das Tripel α bilden.

Solche Tripel heissen nach Herrn ROSANES (*) *conjugirt* nach Herrn REYE (**) *apolar*. Den Beweis des Satzes giebt der § 6. Der § 7 bringt die lineare Construction des sechsten Punktes zweier conjugirter Tripel, von denen die Punkte des einen und zwei Punkte des anderen gegeben sind, sie ist die Analogie zu der Construction eines vierten harmonischen Punktes zu drei gegebenen.

Eine Fortsetzung dieser Arbeit (Theil II.) bildet eine Untersuchung, welche die Gesammtheit der Elemententripel eines einstufigen Elementargebildes behandelt, und in der der obengenannte Hauptsatz eine wesentliche Rolle spielt. Auf dieser Grundlage wird dann im Theil III. in neuer Weise die Geometrie der Raumcurve dritter Ordnung abgeleitet.

Eine andere Arbeit, welche ebenfalls die Saetze der hier vorliegenden Arbeit zu Grunde legt, enthaelt die Theorie der Curve dritter Klasse mit einer Doppeltangente, von der ein specieller Fall die STEINER'sche Hypocykloide ist, deren Geometrie Herr CREMONA in ausgezeichneter Weise behandelt hat (***).

Die vorliegende Arbeit, sowie die eben genannten sich an sie anschliessenden Arbeiten stammen schon aus dem Jahre 1882, kamen aber damals nicht zur Veroeffentlichung.

Marburg (Hessen), 15 Juni 1890.

1. Eine Curve II. Ordnung $\varkappa$ und eine Gerade p liegen in einer Ebene. ABC sei ein der Curve eingeschriebenes Dreieck, und man beziehe $\varkappa$ projectiv auf p so, dass man den Ecken des Dreiecks ABC auf $\varkappa$ die Punkte $A_0 B_0 C_0$ von p zuordnet, in denen p von den den Punkten ABC gegenueberliegenden Seiten $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ geschnitten wird. Man erhaelt auf p und $\varkappa$ zwei projective Punktreihen welche aus jedem der Punkte ABC durch einen

(*) ROSANES, Crelle's Journal, Bd. 76, p. 314.
(**) REYE, Crelle's Journal, Bd. 79, p. 163.
(***) STEINER, Borchardt's Journal, Bd. 53, p. 231. — W. Werke, Bd. 2, p. 641. — CREMONA, Crelle's Journal, Bd. 64, p. 101.

involutorischen Strahlenbueschel projicirt werden, denn z. B. in den Strahlenbuescheln, welche aus B die projectiven Reihen auf p und $\varkappa$ projiciren, entspricht dem Strahl $\overline{BCA_0}$ der Strahl $\overline{BAC_0}$ doppelt: Der involutorische Bueschel B schneidet $\varkappa$ in einer involutorischen Punktreihe deren Involutions-Centrum der Punkt B_0 von p ist, denn zwei Paare einander zugeordneter Strahlen des involutorischen Bueschels B sind $\overline{BA}$, $\overline{BC}$ und $\overline{BB}$, das ist die Tangente von $\varkappa$ in B und BB_0, welche $\varkappa$ in O schneide. Die Verbindungslinien AC und BO schneiden sich nun im Punkte B_0 von p; also ist B_0 das Involutionscentrum der zu B gehoerigen Punktpaarreihe. Verbindet man daher B mit irgend zwei Punkten D und E von $\varkappa$, die mit B_0 in gerader Linie liegen, so werden die Strahlen $\overline{BD}$ und $\overline{BE}$ die Gerade p in den Punkten E_0 und D_0 schneiden welche den Punkten E und D von $\varkappa$ homolog sind.

Projicirt man nun die projectiven Punktreihen auf p und $\varkappa$ aus dem ganz beliebigen Punkt E von $\varkappa$ durch zwei concentrische Bueschel, so entspricht dem Strahl $\overline{EDB_0}$ der Strahl $\overline{ED_0B}$ doppelt, also erhaelt man den Satz:

Bezieht man eine Curve II. Ordnung $\varkappa$ und eine mit ihr in einer Ebene liegende Gerade p projectiv so auf einander, dass man den Eckpunkten eines der Curve eingeschriebenen Dreiecks die Schnittpunkte der ihnen gegenueberliegenden Seiten mit p zuordnet, so werden die projectiven Reihen auf p und $\varkappa$ aus jedem Punkte von $\varkappa$ durch einen involutorischen Bueschel projicirt. Sind daher A und A_0 zwei homologe Punkte von $\varkappa$ und p und B ein beliebiger Punkt von $\varkappa$, so schneiden die Strahlen $\overline{BA}$ und $\overline{BA_0}$ p respective $\varkappa$ in zwei Punkten C_0 und C, die wieder homologe Punkte von p und $\varkappa$ sind.

Den reellen oder conjugirt imaginaeren Schnittpunkten S und T von p und $\varkappa$ sind als Punkten von p die Punkte T und S von $\varkappa$ zugeordnet. Bezieht man umgekehrt p auf $\varkappa$ projectiv so, dass den Schnittpunkten S und T von p mit $\varkappa$ als Punkten von p die Punkte T und S von $\varkappa$ zugeordnet sind, so werden die projectiven Reihen auf p und $\varkappa$ aus jedem Punkte B von $\varkappa$ durch einen involutorischen Strahlenbueschel projicirt.

Denn die Strahlen $\overline{BS}$ und $\overline{BT}$ entsprechen dann einander doppelt. Sind ST conjugirt-imaginaer, so ist ihr Traeger die Gerade p und durch

$$\varkappa(B) \overline{\wedge}\, p(B_0),$$

ist das Tripelnetz bestimmt; und auch in diesem Fall entsprechen sich die Strahlen BS und BT des Bueschels doppelt und der eben ausgesprochene Satz gilt auch hier.

Der involutorische Bueschel, durch den die projectiven Reihen auf p und $\varkappa$ aus dem beliebigen Punkt B von $\varkappa$ projicirt werden, schneidet $\varkappa$ in einer involutorischen Reihe, deren Involutionscentrum der dem Punkt B von $\varkappa$ homologe Punkt B_0 von p ist. Die Strahlen BD und BE welche zwei zugeordnete Punkte dieser involutorischen Reihe mit B verbinden, schneiden p in den Punkten E_0 und D_0, die den Punkten E und D von $\varkappa$ homolog sind.

Sind nun D und E zwei beliebig angenommene Punkte von $\varkappa$, deren Verbindungslinie die Gerade p in einem Punkte B_0 trifft dessen homologer auf $\varkappa$ der Punkt B ist, und schneiden die Geraden $\overline{BD}$ und $\overline{BE}$ die Gerade p in E_0 und D_0, so sind den Punkten BED von $\varkappa$ zugeordnet die Punkte $B_0E_0D_0$, in denen p von den den Ecken des Dreiecks BED gegenueberliegenden Seiten geschnitten wird.

Das Dreieck DEB ist durch irgend zwei seiner Punkte bestimmt, denn deren Verbindungslinie trifft p in einem Punkt, dessen homologer auf $\varkappa$ der dritte Eckpunkt ist.

Oder, wenn D und E gegeben sind, so verbinde man den homologen Punkt des einen, z. B. von D, also D_0 mit E, so schneidet D_0E die Curve $\varkappa$ in den dritten Eckpunkt B. Die Punkte D und E koennen auch conjugirt-imaginaer sein, immer gehoert zu ihnen einen dritter Punkt B, der homologe Punkt des Schnittpunktes B_0 von p mit der Geraden $\overline{DE}$, welche der Traeger der imaginaeren Punkte DE ist. Wir koennen also sagen:

Bezieht man eine Curve II. Ordnung $\varkappa$ auf eine Gerade p projectiv so, dass den Ecken ABC eines der Curve eingeschriebenen Dreiecks die Punkte $A_0B_0C_0$ von p zugeordnet werden, in denen p von den den Eckpunkten ABC gegenueberliegenden Seiten getroffen wird, so giebt es unendlich viele Dreiecke, die der Curve eingeschrieben sind, und deren Ecken denjenigen Punkten von p zugeordnet sind, in denen p von den den Ecken gegenueberliegenden Seiten getroffen wird.

Durch zwei Eckpunkte eines Dreiecks ist der dritte bestimmt, und von den drei Eckpunkten eines Dreiecks bestimmen je zwei den dritten.

Die Tripel der Eckpunkte dieser Dreiecke bilden eine zweifache lineare Mannigfaltigkeit; sie heisse ein auf der Curve $\varkappa$ liegendes *Punkttripelnetz.*

2. Die vorigen Saetze lassen sich unter einem Gesichtspunkt betrachten, unter dem sie allgemeine Geltung fuer alle Gebilde die sich zu einer Curve II. Ordnung in projective Beziehung setzen lassen, gewinnen.

Eine bisher so genannte involutorische Punktreihe soll eine *Punktpaar-*

reihe genannt werden. Von den saemmtlichen Punktpaarreihen eines Traegers z. B. der Curve II. Ordnung $\varkappa$, welche ein Punktpaar gemein haben, wird gesagt, dass sie ein Bueschel von Punktpaarreihen bilden. Das gemeinsame Paar heisse das *Basispunktpaar* des Bueschels.

Die Paare der Doppelpunkte der Punktpaarreihen eines Bueschels bilden eine Punktpaarreihe.

Denn sie sind saemmtlich durch das Basispaar des Bueschels harmonisch getrennt. Die Punkte des Basispaares eines Bueschels von Punktpaarreihen sind zugleich die Doppelpunkte der Punktpaarreihe, welche aus den Doppelpunkten der Reihen des Bueschels besteht. Je nachdem die Punkte des Basispaares also imaginaer oder reell sind, oder zusammenfallen, sind die Doppelpunkte saemmtlicher Reihen des Bueschels reell, oder eine Gruppe derselben ist imaginaer oder die Paare der Doppelpunkte haben einen Punkt gemein.

Durch ein beliebiges Punktpaar ist eine Punktpaarreihe eines Bueschels bestimmt.

Das Basispaar der Bueschels ist naemlich ein zweites Punktpaar der Reihe, oder man erhaelt die Doppelpunkte der Reihe, indem man in der Reihe der Doppelpunktpaare der Reihen des Bueschels dasjenige aufsucht, welches durch das gegebene Paar harmonisch getrennt ist.

Durch zwei Punktpaarreihen ist ein Bueschel bestimmt.

Naemlich das gemeinsame Paar des Reihen ist das Basispaar desselben.

Oder: Durch die Paare der Doppelpunkte der beiden Reihen ist die Punktpaarreihe der Doppelpunkte der Reihen des Bueschels und damit der Bueschel bestimmt.

Vier Punktpaare einer Punktpaarreihe heissen harmonisch, wenn die vier Punkte welche durch sie von einem beliebigen Punkte des Traegers harmonisch getrennt sind vier harmonische Punkte sind (*).

Vier Punktpaarreihen eines Bueschels sollen *harmonisch* heissen, wenn ihre Doppelpunktpaare vier harmonische Paare sind.

Vier harmonische Reihen eines Bueschels erhaelt man, wenn man das Basispaar α des Bueschels, einen festen Punkt A und vier harmonische Punkte

(*) *Theorie der trilinear-symmetrischen Verwandtschaft*, § 4. — Cremona, *Ebene Curven*, p. 29.

$A_1 A_2 A_3 A_4$ giebt. Der Punkt A und einer der letzteren vier Punkte bilden je ein Punktpaar einer Reihe, von der α ein zweites ist, und die vier so bestimmten Reihen sind vier harmonische, denn $A_1 A_2 A_3 A_4$ sind von A durch die Doppelpunkte der vier Reihen harmonisch getrennt. Es folgt daraus weiter:

Je vier Punkte, die einem beliebigen Punkte in vier harmonischen Punktpaarreihen eines Bueschels zugeordnet sind, sind vier harmonische Punkte.

Vermittelst der aufgestellten Definition kann man Punktpaarreihen und Punktpaarreihenbueschel auf beliebige Elementar-Gebilde erster Stufe projectiv beziehen, indem man je vier harmonischen Elementen des einen Gebildes je vier harmonische des anderen entsprechen laesst. Zu den Elementar-Gebilden rechnen wir nun aber auch die Punktpaarreihen und die Punktpaarreihenbueschel, sowie die ihnen analogen Strahlen-und Ebenengebilde und verstehen unter den Elementen dieser Elementenpaare respective Elementenpaarreihen.

Dann ist u. A. jeder Bueschel von Punktpaarreihen auch zu der Punktpaarreihe der Doppelpunkte des Bueschels projectiv. Ferner sind zwei Punktpaarreihen auf zwei Traegern projectiv, wenn je vier harmonischen Paaren der einen vier harmonische Paare der anderen zugeordnet sind.

3. Kehren wir nun zu dem Tripelnetz auf der Curve $\varkappa$ zurueck so ist jedem Punkte B von $\varkappa$ ein Punkt B_0 von p zugeordnet. Zugleich ist B_0 das Involutionscentrum einer auf $\varkappa$ liegenden Punktpaarreihe deren Punktpaare mit dem Punkt B je ein Tripel des Tripelnetzes bilden, denn die Seiten jedes Dreiecks, dessen Ecken aus einem Punktpaar der Reihe und B bestehen, schneiden p in Punkten, die den gegenueberliegenden Ecken homolog sind.

Die Punktpaarreihen auf $\varkappa$ deren Involutionscentren die Gerade p erfuellen bilden einen Bueschel, dessen Basispunkte die Schnittpunkte von p und $\varkappa$ sind.

Es ist aber $\varkappa$ projectiv auf diesen Bueschel bezogen, wenn man einem Punkt B und $\varkappa$ diejenige Punktpaarreihe zuordnet, deren Involutionscentrum der homologe Punkt B_0 von p ist, wobei vorausgesetzt ist, dass den Punkten T und S von p die Punkte S und T von $\varkappa$ entsprechen. In der That sind die Involutionscentren von vier harmonischen Reihen des Bueschels vier harmonische Punkte und umgekehrt; denn projicirt man vier harmonische Punkte von p aus einem Punkt der Curve $\varkappa$ auf diese, so erhaelt man vier harmonische Punkte, die dem festen Punkte in vier Reihen des Bueschels zugeordnet, die also selbst vier harmonische Reihen sind. Da also $\varkappa$ projectiv zu p ist, so ist $\varkappa$ auch zu dem Punktpaarreihenbueschel projectiv, dessen Basispaar die Schnittpunkte von p und $\varkappa$ bilden. Nun ist die projective Beziehung von p und $\varkappa$ durch drei Paare homologer Punkte, also die von $\varkappa$ und dem Reihenbueschel bestimmt, wenn man drei Punkten von $\varkappa$ drei Reihen des Bueschels zuordnet. Aus der besonderen Art der projectiven Beziehung von $\varkappa$ und p, in der den Punkten $A\,B\,C$ von $\varkappa$ die Punkte $A_0\,B_0\,C_0$ von p zugeordnet sind folgt aber, dass in der projectiven Beziehung von $\varkappa$ zum Reihenbueschel jedem der drei Punkte $A\,B\,C$ von $\varkappa$ diejenige Reihe des Bueschels zugeordnet ist, welche durch das Paar der beiden anderen Punkte bestimmt ist. $A\,B\,C$ bilden ein Tripel des Tripelnetzes auf $\varkappa$; es giebt nun unendlich viele Tripel derselben Art; von drei Punkten eines solchen Tripels bilden also je zwei ein Punktpaar derjenigen Punktpaarreihe des Bueschels, welche dem dritten Punkt zugeordnet ist in der projectiven Beziehung von $\varkappa$ zum Reihenbueschel. Daher kann man sagen:

Bezieht man die Punkte einer Curve II. Ordnung $\varkappa$ projectiv auf einen auf $\varkappa$ liegenden Bueschel von Punktpaarreihen, und zwar so, dass man jedem von drei beliebig angenommenen Punkten von $\varkappa$ diejenige Punktpaarreihe des Bueschels zuordnet, in der die beiden uebrigen Punkte ein Punktpaar bilden, so ist durch je zwei Punkte $A\,B$ von $\varkappa$ im Allgemeinen ein dritter von C bestimmt. Solche drei Punkte $A\,B\,C$ bilden ein Tripel, von dem je zwei Punkte den dritten bestimmen, indem naemlich je zwei ein Punktpaar der dem dritten zugeordneten Punktpaarreihe bilden. Die saemmtlichen so entstehenden Tripel bilden din *Punkttripelnetz* auf $\varkappa$.

Aus dieser Erzeugungsweise des Tripelnetzes geht hervor § 2, dass man ein solches auch auf jedem anderen Gebilde erster Stufe herstellen kann, ferner aber auch,

> dass jedem Tripelnetze in dem einen von zwei projectiven Gebilden erster Stufe auch ein solches in dem anderen Gebilde entspricht. (Schluss von § 2.)

Wir wollen im Folgendem bei der Curve II. Ordnung als Traeger des Tripelnetzes stehen bleiben.

Wir sahen, dass die projective Beziehung von p und $\varkappa$, die zu dem Tripelnetz fuehrt, auch dadurch bestimmt wird, dass man den Schnittpunkten S und T von p und $\varkappa$ als Punkten von p die Punkte T und S von $\varkappa$ (und irgend einem dritten Punkt von p einen dritten von $\varkappa$) zuordnet. Uebertraegt man dies auf die Beziehung von $\varkappa$ zu dem Bueschel der Punktpaarreihen, so folgt:

Sind S und T die Basispunkte eines Bueschels von Punktpaarreihen, und bezieht man denselben auf den Traeger $\varkappa$ des Bueschels projectiv so, dass den Punkten S und T des Traegers die beiden Reihen, deren Doppelpunkte in T respective S zusammenfallen, zugeordnet sind, so bilden die Tripel, welche man erhaelt, wenn man einen Punkt von $\varkappa$ mit einem Punktpaar der ihm zugeordneten Reihe des Bueschels verbindet, ein Tripelnetz.

Mit dem Bueschel von Punktpaarreihen ist zugleich die Punktpaarreihe der Doppelpunkte der Reihen des Bueschels projectiv auf $\varkappa$ bezogen. Ein Tripelnetz kann daher auch in der folgenden Weise erzeugt werden:

Bezieht man die Punkte der Curve $\varkappa$ auf eine auf $\varkappa$ liegende Punktpaarreihe projectiv so, dass man jedem von drei beliebig angenommenen Punkten von $\varkappa$ dasjenige Punktpaar der Reihe zuordnet, welches von dem Punkte durch die beiden anderen harmonisch getrennt ist, so bilden die Tripel, welche man erhaelt, wenn man einen Punkt von $\varkappa$ mit je zwei Punkten zu einem Tripel verbindet, das durch das ihm zugeordnete Paar der Reihe harmonisch getrennt ist, ein Tripelnetz (*).

Ferner:

> Ist eine Punktpaarreihe auf $\varkappa$ projectiv so auf die Punkte von $\varkappa$ bezogen, dass den Doppelpunkten S und T der ersteren die Punkte T und S von $\varkappa$ entsprechen, so erhaelt man die Tripel eines Tripelnetzes, wenn man je einen Punkt von $\varkappa$ mit je zwei Punkten zu einem Tripel verbindet, die durch das ihm zugeordnete Paar der Reihe harmonisch getrennt sind.

4. In einem Tripelnetz giebt es Tripel, von deren Punkten zwei in einen Doppelpunkt zusammenfallen. Ist A der Doppelpunkt eines Tripels AAB, so heisst A ein *erster Pol* von B in dem Netze. Nun ist der Doppelpunkt A eines Tripels AAB ein Doppelpunkt der zu B gehoerigen Punktspaarreihe, also folgt:

> Jeder Punkt B von $\varkappa$ hat in dem Tripelnetze zwei erste Pole AA_1; beschreibt B die Curve, so beschreibt das Paar AA_1 eine zu der von B beschriebenen Reihe projective Punktpaarreihe. Denn ist P der Pol von p bezueglich $\varkappa$ und b_0 die Polare von B_0 welche $\varkappa$ in AA_1 schneidet, so ist:
>
> $$\varkappa(B\ldots) \overline{\wedge}\, p(B_0\ldots) \overline{\wedge}\, P(b_0\ldots) \overline{\wedge}\, \varkappa(A_1A_2\ldots).$$

(*) *Theorie der trilinear-symmetrischen Verwandtschaft,* § 14.

Der einfache Punkt B eines Tripels AAB mit einem Doppelpunkt A heisst der *zweite Pol* des Punktes A im Netze. Jeder Punkt A hat *einen* zweiten Pol, naemlich den Punkt B, durch den der Doppelpunkt A zu einem Tripel ergaenzt wird. Da in dem Tripel AAB A und B ein Punktpaar der A zugehoerigen Punktpaarreihe bilden, so folgt:

> Der zweite Pol B eines Punktes A ist von ihm durch die ersten Pole von A harmonisch getrennt, denn AB laeuft durch den Punkt A_0 von p.

Aus der Definition von ersten und zweiten Polen folgt zugleich:

> Ist A ein erster Pol von B, so ist B der zweite Pol von A. Und umgekehrt.

Je zwei Punkte eines Tripels sind durch die ersten Pole des dritten harmonisch getrennt. Von je zwei Punkten eines Tripels sagt man sie haben den dritten Punkt zum *gemischten Pol* im Tripelnetze.

Der gemischte Pol C zweier Punkte A und B ist also von jedem der letzteren durch die ersten Pole des anderen harmonisch getrennt, und A und B selbst sind durch die ersten Pole von C harmonisch getrennt.

> Die Punktpaare welche einen und denselben Punkt zum gemischten Pol haben, bilden eine Punktpaarreihe, deren Doppelpunkte die ersten Pole des Punktes sind.

Dies geht aus der Erzeugungsweise des Tripelnetzes unmittelbar hervor.

Den Doppelpunkten S und T der von den Paaren erster Pole der Punkte von $\varkappa$ gebildeten Punktpaarreihe sind als Punkten von $\varkappa$ diejenigen Punktpaarreihen zugeordnet, deren Doppelpunkte in T respective S zusammenfallen. Da nun in jeder dieser Reihen, z. B. in derjenigen, deren Doppelpunkte in T zusammenfallen, T mit jeden beliebigen Punkt ein Punktpaar bildet, so bilden S und T mit jedem beliebigen Punkt ein Tripel des Netzes. Daher:

> In einem Tripelnetze giebt es zwei Punkte, deren gemischter Pol unbestimmt ist.

In jedem der beiden Punkte fallen die ersten Pole des anderen zusammen, und es sind dies die einzigen Punkte deren erste Pole in einen Punkt zusammenfallen. Den Punkten von $\varkappa$ entsprechen die Paare ihrer ersten Pole projectiv s. o. § 2. Die beiden projectiven Reihen haben drei Punkte entsprechend gemeinschaftlich. Daher:

In jedem Tripelnetz giebt es drei Tripel, deren Punkte in einen zusammenfallen (*). Sie heissen die *dreifachen Punkte* des Netzes.

In jedem derselben faellt ein Punkt mit einem seiner ersten, und mit seinem zweiten Pol zusammen.

Ist U ein dreifacher Punkt eines Tripelnetzes auf der Curve II. Ordnung $\varkappa$ und p die Gerade, welche die Involutionscentren der zu den Punkten von $\varkappa$ im Tripelnetz gehoerigen Punkpaarreihen enthaelt und zu $\varkappa$ projectiv ist, so schneidet die Tangente in U an $\varkappa$ die Gerade p in dem Involutionscentrum der zu U gehoerigen Punktpaarreihe, denn in dieser ist U ein Doppelpunkt, und wenn umgekehrt eine vom Punkte U_0 von p gehende Tangente die Curve in dem zu U_0 homologen Punkte von $\varkappa$ beruehrt, so ist U ein dreifacher Punkt des Netzes, denn ein erster Pol von U faellt dann mit U zusammen. Sind nun U und V zwei dreifache Punkte, schneiden die Tangenten in U und V die Gerade p in U_0 und V_0, so ist der gemischte Pol von U und V sowohl dem Punkt V zugeordnet in der zu U gehoerigen, als auch dem Punkt U zugeordnet in der zu V gehoerigen Punktpaarreihe; es muessen sich daher die Geraden $U_0 V$ und UV_0 in einem Punkte W von $\varkappa$, dem gemischten Pol von U und V schneiden. In dem Dreieck UVW schneiden nun zwei Seiten die Tangenten in den gegenueberliegenden Eckpunkten in zwei Punkten $U_0 V_0$ der Geraden p; deshalb liegt nach dem Satze des Pascal auch der Schnittpunkt W_0 der dritten Seite VU mit der Tangente in W auf p. Es beruehrt also die Gerade $W_0 W$ die Curve $\varkappa$ in W. Nun ist ferner W_0 der homologe Punkt des Punktes W von $\varkappa$, denn die Seiten des Tripeldreiecks UVW schneiden p in den Punkten, die den ihnen gegenueberliegenden Ecken homolog sind, folglich ist nach der an die Spitze gestellten Bemerkung W ein dreifacher Punkt des Netzes. Daher:

Der gemischte Pol von je zwei dreifachen Punkten eines Tripelnetzes ist der dritte dreifache Punkt. Oder:

Die drei Punkte, in derem jedem drei Punkte eines Tripels des Netzes zusammenfallen, bilden selbst ein Tripel des Netzes.

Das gilt auch, wenn zwei dreifache Punkte conjugirt-imaginaer sind. Denn man kann dann zeigen, dass ihre reelle Verbindungs Gerade durch den Punkt U_0 von p geht, der das Involutionscentrum der dem dritten reellen dreifachen Punkte U zugehoerigen involutorischen Reihe ist (**).

(*) *Theorie der trilinear-symmetrischen Verwandtschaft,* p. 23 u. p. 55.
(**) *Theorie der trilin.-symmetr. Verwandtschaft,* p. 56.

Die Gerade p ist die PASCAL'sche Gerade des Dreiecks UVW bezüglich $\varkappa$ und schneidet daher $\varkappa$ nicht, wenn UVW reell sind; sie schneidet sie dagegen, wenn zwei der drei Punkte imaginaer sind (*). Da nun die Gerade p die Curve $\varkappa$ in den Punkten S und T schneidet, so folgt:

Sind die dreifachen Punkte eines Tripelnetzes reell, so sind die beiden Punkte, deren gemischter Pol unbestimmt ist, imaginaer; sind zwei der drei Punkte imaginaer, so sind jene beiden Punkte reell. Und umgekehrt.

5. Ein Punkttripelnetz auf der Curve II. Ordnung $\varkappa$ ist durch ein Tripel ABC und die Gerade p bestimmt, auf der die Involutionscentren der zu den Punkten von $\varkappa$ gehoerigen Punktpaarreihen liegen. Man bezieht p projectiv auf $\varkappa$ so, dass jedem der Eckpunkte des Dreiecks ABC der Schnittpunkt mit der gegenueberliegenden Seite entspricht.

Das Tripelnetz ist auch bestimmt, wenn die Gerade p und zwei homologe Punkte A_0 und A von p und $\varkappa$ gegeben sind. Denn irgend zwei mit A_0 in gerader Linie liegende Punkte BC von $\varkappa$ muessen dann mit A ein Tripel des Netzes bilden. Im Speciellen ist das Netz auch durch p und einen dreifachen Punkt U bestimmt. Die Tangente an $\varkappa$ in U trifft p in dem homologen Punkt U_0.

Von einem Tripelnetz auf $\varkappa$ sei nun ein Tripel ABC gegeben, so gehoert dasselbe den zweifach unendlich vielen Netzen an, deren eines bestimmt ist, wenn man eine beliebige Gerade der Ebene von $\varkappa$ als Gerade p annimmt. Umgekehrt sind durch ein Tripel zweifach unendlich viele Netze bestimmt. Gehoeren zwei Tripel einem Netze an, zu dem die Gerade p gehoert, so muessen die Seiten der beiden Tripeldreiecke die Gerade p in Punkten treffen, die den den Seiten gegenueberliegenden Eckpunkten als Punkten von $\varkappa$ projectiv entsprechen. Diese Bedingung erfuellen alle Geraden p, die dem von den Seiten der beiden Tripeldreiecke bestimmten Strahlenbueschel II. Ordnung angehoeren, denn jeder Strahl desselben schneidet den Bueschel in einer zu ihm perspectiven Punktreihe die auf $\varkappa$ projectiv bezogen ist, weil die Strahlen des Bueschels den Punkten von $\varkappa$ nach einem bekannten Satze projectiv entsprechen. Der Bueschel enthaelt unendlich viele Dreiseite, die $\varkappa$ eingeschrieben sind und jeder Seite eines solchen ist der gegenueberliegende Eckpunkt zugeordnet.

(*) *Theorie der trilin.-sym. Verwandtschaft,* p. 62. — SCHROETER, *Oberflaechen II. Ord.,* p. 277. Anmerkung.

Die Seiten aller dieser $\varkappa$ eingeschriebenen Dreiecke schneiden also jeden beliebigen Strahl des Strahlenbueschels II. Ordnung in Punkten, die den gegenueberliegenden Eckpunkten in einer projectiven Beziehung der Punktreihen p und $\varkappa$ entsprechen.

Zwei Tripel liegen also in einfach unendlich vielen Tripelnetzen denjenigen naemlich, deren dreifache Punkte die Tripel der Reihe bilden, und umgekehrt sind durch zwei Tripel einfach unendlich viele Netze bestimmt, in denen gleichzeitig mit jenen zwei einfach unendlich viele Tripel liegen.

Liegen drei Tripel in einem Netze $\varkappa$ zu dem die Gerade p gehoert, so muss p von den Seiten der Tripeldreiecke in Punkten getroffen werden, die den gegenueberliegenden Eckpunckten projectiv entsprechen. Diese Bedingung erfuellt der vierte gemeinschaftliche Strahl p zweier Strahlenbueschel II. Ordnung; welche durch die Seiten von je zwei der drei gegebenen Tripeldreiecke bestimmt werden. Denn sind $\alpha\beta\gamma$ die Tripel und p der vierte gemeinschaftliche Strahl der durch $\alpha\beta$ und $\alpha\gamma$ bestimmten Bueschel, so ist sowohl der eine Bueschel als auch der andere projectiv so auf $\varkappa$ bezogen, dass den Seiten des Tripeldreiecks α die gegenueberliegenden Ecken entsprechen, also auch in doppelter Weise p auf $\varkappa$ so, dass den Schnittpunkten mit den Seiten von α die gegenueberliegenden Ecken entsprechen. Daher schneiden auch die Seiten der Tripeldreiecke β und γ die Gerade p in Punkten, die den gegenueberliegenden Eckpunkten in der projectiven Beziehung von p und $\varkappa$ entsprechen. Es folgt daraus:

> Durch drei Tripel ist im Allgemeinen ein Tripelnetz bestimmt.
> Speciell ist ein Netz durch seine dreifachen Punkte bestimmt (*).

6. Wir beweisen den Satz: Wenn die Punkte ABC ein Tripel eines durch seine dreifachen Punkte UVW bestimmten Tripelnetzes auf einem beliebigen einstufigen Traeger bilden, so bilden auch UVW ein Tripel eines durch die Punkte ABC als seine dreifachen Punkte bestimmten Netzes auf diesem Traeger. Denn sind $U_1V_1W_1$ die in jedem Sinne vierten harmonischen Punkte zu UVW, so bilden UU_1, VV_1, WW_1 eine Involution (**).

Man beziehe nun $(UVW) \barwedge (UU_1\ VV_1\ WW_1)$ (§ 2) so ist dadurch das Tripelnetz (UVW) dessen dreifache Punkte UVW sind, bestimmt, und als ein Tripel desselben ist ABC angenommen. Nun beziehe man auch $ABC \barwedge UVW$.

(*) Anderer Beweiss: *Theorie der trilin.-sym. Verwandtschaft,* § 20, p. 55.

(**) v. Staudt, *Geometrie der Lage,* p. 121. — *Theorie der trilin.-sym. Verwandschaft,* p. 57.

Sind dann $A_1 B_1 C_1$ die in jedem Sinne vierten harmonischen Punkte zu ABC, so bilden $AA_1\ BB_1\ CC_1$ eine Involution. Man beziehe nun $(ABC) \overline{\wedge}$ $(AA_1\ BB_1\ CC_1)$ so ist dadurch ein Tripelnetz (ABC) bestimmt, dessen dreifache Punkte ABC sind. Nun entspricht im Netz (UVW) jedem der Punkte $UVWA$ eine involutorische Reihe. In der A entsprechenden sind B und C homologe Punkte (bilden ein Punktpaar das zu A gehoert). Wegen (UVW) $\overline{\wedge}\,(ABC)$ ist auch $(UU_1\ VV_1\ WW_1) \overline{\wedge}\,(AA_1\ BB_1\ CC_1)$ (§ 2) so dass, wenn U und A homologe Punkte der ersten Beziehung sind, in der zweiten die Punktpaare UU_1 und AA_1 und die Punktpaarreihen, deren Doppelpunkte sie respective sind, einander entsprechen. Nun sind aber B und C ein Punktpaar der im Netz (UVW) zu A gehoerigen Punktpaarreihe. Wegen $(UVW) \overline{\wedge}\,(ABC)$ gehoert dann im Netze (ABC) zu U ein Punktpaar der U zugehoerigen Punktpaarreihe, dessen Punkte in der genannten Beziehung den Punkten BC entsprechen. Das sind aber die Punkte VW. Folglich bilden VW mit U ein Tripel des Netzes (ABC).

7. Wir leiten hieraus die allgemeine Construction des sechsten Punktes zweier conjugirter (apolarer) Tripel, welche auf einem beliebigen einfoermigen Gebilde als Traeger liegen ab. Es sei das Tripel UVW und von dem zweiten Tripel seien die Punkte A und B gegeben; der dritte Punkt C ist zu construiren. Man construire zunaechst $U_1 V_1 W_1$. Dann ist dem Punkte U die Punktpaarreihe zugeordnet, deren Doppelpunkte U und U_1 sind. In dieser Punktpaarreihe suche man den zu A homologen Punkt A' auf, so ist die zu U gehoerige Punktpaarreihe auch durch U (oder U_1) und AA' bestimmt. In der zu V gehoerigen Punktpaarreihe, deren Doppelpunkte V und V_1 sind, suche man den zu A gehoerigen Punkt A'' auf (und kann auch den durch W bestimmten analogen Punkt A''' aufsuchen). Alsdann sind in der zu A gehoerigen Punktpaarreihe U und A', V und A'' Punktpaare und die Reihe ist durch diese beiden Punktpaare bestimmt. Sucht man jetzt in dieser Reihe den zu B homologen Punkt C auf, so ist auch BC ein Paar der zu A gehoerigen Reihe, ABC ein Tripel des Netzes (UVW), mithin C der dritte gesuchte Punkt des Tripels, von dem A und B als Punkte gegeben waren.

Die Construction des Punktes C, wenn man sie fuer die Curve II. Ordnung $\varkappa$ als Traeger der beiden Punktripel UVW und ABC ausfuehren will, setzt $\varkappa$ als gegeben voraus; dann kann C durch das Lineal allein erhalten werden; denn bei gegebenen Punkten UVW kann dann die Gerade p als Pascal'sche Gerade des Dreiecks UVW, ferner der zu A von $\varkappa$ homologe

Punkt A_0 von p, und dadurch der Punkt C als Schnittpunkt von $\varkappa$ mit der Geraden $A_0 B$ linear construirt werden. Wird dagegen eine Gerade $\dot{U}$ als der Traeger der beiden Tripel UVW und ABC angenommen, so koennen die saemmtlichen nothwendigen Constructionen allein mit dem Lineal ausgefuehrt werden, naemlich die Construction der Punkte U_1, V_1, W_1, A', A'' durch wiederholte Construction eines zu drei Punkten harmonischen vierten Punktes, und die des Punktes C als eines Punktes der in einer durch zwei Punktpaare bestimmten involutorischen Reihe der einem gegebenen fuenftem Punkte zugeordnete sechste ist. Constructionen, welche wie bekannt, auf die Figur eines vollstaendigen Vierecks der Ebene sich gruenden.

Die Construction des sechsten Punktes zweier conjugirter Tripel hat in der Geometrie der Elemententripel einfoermiger Gebilde dieselbe Bedeutung, wie diejenige des vierten Punktes zweier harmonischer Punktpaare in der Geometrie der Elementenpaare einfoermiger Gebilde.

L'equazione *razionale* della superficie di Kummer.

(*Memoria VI di* Ernesto Pascal, *a Napoli.*)

Nella Memoria V ho studiato con dettaglio le cosiddette funzioni Jacobiane Σ di 1.ª specie.

In questa nuova Memoria studio la relazione di 4.° grado che deve esistere fra le quattro Σ pari, e che non è altro che la cosiddetta *equazione razionale* della superficie di Kummer, inquantochè i coefficienti di tale equazione sono invarianti *razionali* di una sestica binaria.

Una corrispondenza fra le superficie di Kummer e una sestica binaria apparì sin dal lavoro classico del Klein in cui si dimostrava che la stessa superficie di Kummer, oltrechè superficie di singolarità di un solo complesso quadratico, potea considerarsi come tale rispetto ad un intero sistema di complessi quadratici confocali rappresentati dall'equazione:

$$\sum_1^6 \frac{x_i^2}{ki - \lambda} = 0.$$

Con ciò si veniva già a stabilire una corrispondenza fra le superficie di Kummer e la sestica le cui radici erano le k.

Una relazione di una natura diversa fra la superficie di Kummer e una sestica binaria, apparve quando fu dimostrato che le coordinate di tale superficie si poteano esprimere come funzioni razionali delle funzioni iperellittiche ϑ, corrispondenti al campo di irrazionalità di una sestica binaria.

Una relazione infine di una natura anche più intima e immediata si presenta nell'equazione della superficie in coordinate Σ, in cui i coefficienti sono invarianti razionali della sestica corrispondente al campo di irrazionalità delle Σ.

Nel lavoro che seguirà a questo studierò l'altra relazione esistente fra il quadrato della Σ dispari e le Σ pari, la quale relazione corrisponde all'equazione di un fascio di superficie di 6.° ordine che toccano la superficie di Kummer.

§ 1. Preliminari sulle superficie di Kummer.

È nota l'esistenza di alcune superficie algebriche, le cui coordinate possono esprimersi razionalmente mediante le funzioni ϑ a due argomenti (di genere 2).

Così per es. sono di tal natura le superficie di 2.° ordine (*) e le superficie di 4.° ordine aventi una conica doppia, e fra queste ultime in particolare le cosiddette *ciclidi,* cioè quelle in cui la conica doppia è diventata un cerchio immaginario (**). Fra le superficie godenti della stessa proprietà vi è la cosiddetta *superficie di* Kummer.

Tale superficie è di 4.° ordine e possiede 16 punti nodali e 16 piani singolari.

Essa fu trovata da Kummer (***) come superficie focale di una congruenza di 2.° ordine e di 2.ª classe; in seguito il Klein (****) dimostrò che si otteneva la stessa superficie anche come la superficie di singolarità del generale complesso quadratico già studiata da Plücker, e infine lo stesso Klein (*****) dimostrò poco dopo che la stessa superficie può considerarsi come la superficie di singolarità degli ∞^1 complessi confocali rappresentati dalla formola:

$$\sum_1^6 \frac{x_i^2}{k_i - \lambda} = 0 \qquad (\lambda \text{ arbitrario}),$$

dove x_i sono le 6 coordinate omogenee della retta nello spazio, fra le quali esiste la relazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_6^2 = 0.$$

La superficie di Kummer apparisce dunque in tal maniera in una certa relazione colla binaria di 6.° grado le cui radici sono le $k_1 \ldots k_6$. Relazioni di

(*) Staude, *Geometrische Deutung der Additionsth. der hyp. Integr. und Funct. I. Ordn. in System der confocalen Flächen 2. Grades.* Math. Ann., Bd. 22.

(**) Domsch, *Ueber die Darstellung der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt durch hyp. Funct.* (Dissert. Leipzig). Greifswald, 1885.

(***) Kummer, Monat. Berl. Acad., 1864. — Abhand. der Berl. Akad., 1866.

(****) Plücker, *Neuer Geometrie,* 2^er Abth. (1869), pag. 315.

(*****) Klein, *Zur Th. der Liniencomplexe des I. u. II. Gr.,* Math. Ann., Bd. 2, pag. 198.

una natura ancora più intima fra la superficie di Kummer e una sestica binaria appariranno in seguito; per ora vogliamo limitarci ad accennare brevemente la natura della relazione trovata ora.

È chiaro prima di tutto che ogni sestica individua una superficie di Kummer, perchè individua il fascio dei complessi confocali; propriamente la superficie di Kummer è individuata non quando si dànno solo i valori delle radici della sestica, ma quando si dà anche l'ordine col quale si vogliono far succedere queste radici. Quindi poichè vi sono 720 permutazioni delle 6 radici vi saranno altrettante superficie di Kummer. Notiamo intanto che una permutazione fra le radici k equivale ad una sostituzione:

$$x'_i = x_k \qquad (i, k, = 1, 2, \ldots 6),$$

fra le coordinate di rette.

D'altra parte il fascio dei complessi confocali ritorna in sè stesso con una sostituzione:

$$x'_i = \pm x_i \qquad (i = 1, \ldots, 6),$$

che è una sostituzione che fa tornare da coordinate di rette a coordinate di rette, perchè la relazione citata $\sum_1^6 x_i^2 = 0$ resta inalterata e quindi sempre soddisfatta.

Ora di tali ultime sostituzioni ve ne sono 32, per ciascuna delle quali dunque la superficie di Kummer torna in sè stessa (*).

Possiamo dunque dire che ad ogni sestica binaria $f(\lambda)$ corrispondono 720 superficie di Kummer.

Ma si verifica la proprietà reciproca? Data, cioè, una superficie di Kummer o un numero finito di esse, è determinata una sestica?

La risposta a questa domanda è negativa, perchè si può far vedere facilmente che il fascio dei complessi confocali non si altera per una stessa sostituzione lineare delle quantità k_i, cioè ritorna in sè stesso; quindi possiamo dire che da una superficie di Kummer, non restano individuati i coefficienti (o le radici) della sestica, ma solamente i suoi invarianti assoluti o moduli.

Da ciò si ricava che l'equazione della superficie di Kummer deve potersi ridurre sempre a contenere per coefficienti solo invarianti assoluti della sestica.

(*) Vedi la Memoria di Reichardt, *Ueber die Darstellung der Kummerschen Fläche durch hyperelliptische Functionen* (Dissertation Leipzig). Halle, 1887. Nel § 2 di questa Memoria è studiato il gruppo delle 32 . 720 sostituzioni fra le coordinate di rette, di cui si parla nel testo.

§ 2. Varie forme dell'equazione della superficie di Kummer. Relazioni fra questa e le funzioni ϑ.

Introduciamo, anzichè le coordinate di rette, le coordinate di punti y_1 y_2 y_3 y_4 riferite al tetraedro fondamentale (*). Allora si ricavano notoriamente le relazioni (ponendo $p_{ij} = y'_i y''_j - y''_i y'_j$):

$$x_1 = (p_{12} + p_{34}), \qquad x_3 = (p_{31} + p_{24}), \qquad x_5 = (p_{14} + p_{23})$$
$$x_2 = i(p_{12} - p_{34}), \qquad x_4 = i(p_{31} - p_{24}), \qquad x_6 = i(p_{14} - p_{23}),$$

e reciprocamente:

$$p_{12} = \frac{1}{2}(x_1 - ix_2), \qquad p_{31} = \frac{1}{2}(x_3 - ix_4), \qquad p_{14} = \frac{1}{2}(x_5 - ix_6)$$

$$p_{34} = \frac{1}{2}(x_1 + ix_2), \qquad p_{24} = \frac{1}{2}(x_3 + ix_4), \qquad p_{23} = \frac{1}{2}(x_5 + ix_6),$$

mentre la relazione fondamentale fra le coordinate x, cioè $\sum_1^6 x_i^2 = 0$ diventa:

$$p_{12}p_{34} + p_{31}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Partendo ora dall'equazione del complesso:

$$\sum_1^6 k_i x_i^2 = 0.$$

possiamo esprimere tale equazione in funzione delle coordinate (y') (y'') che sono le coordinate di due punti della retta (x). Si ha allora una relazione di 2.° grado in y' e y''. Fissato y'' questa equazione rappresenterà un cono di 2.° ordine il cui vertice è y''. Esprimendo la condizione perchè questo cono si scinda in due piani si ha per luogo del punto y'' precisamente la superficie di Kummer.

Si trova così l'equazione (**):

$$\begin{aligned} y_1^4 + y_2^4 + y_3^4 + y_4^4 + A\, y_1 y_2 y_3 y_4 &- 2A_{3456}(y_1^2 y_2^2 + y_3^2 y_4^2) \\ &- 2A_{5612}(y_1^2 y_3^2 + y_2^2 y_4^2) \\ &- 2A_{1234}(y_1^2 y_4^2 + y_2^2 y_3^2) = 0, \end{aligned}$$

(*) Klein, Math. Ann., Bd. 2.

(**) Reichardt, Opera cit., pag. 395.

dove

$$A = 8\,\frac{k_1 k_2 (k_3 + k_4 - k_5 - k_6) + k_3 k_4\,(\text{ecc.}) + k_5 k_6\,(\text{ecc.})}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_4)(k_5 - k_6)}$$

$$A_{ijhl} = \frac{(k_i - k_h)(k_j - k_l) + (k_i - k_l)(k_j - k_h)}{(k_i - k_j)(k_h - k_l)}\,.$$

Si può dare varie forme a questa equazione e se ne può anche dare un'altra nella quale compariscono esplicitamente i cosiddetti *moduli di* Borchardt, ma per tali argomenti rimandiamo il lettore all'Opera citata di Reichardt (*).

Passiamo ora ad un altro genere di considerazioni. Fu primo il Klein (**) a riconoscere la possibilità di esprimere le coordinate di un punto della superficie di Kummer mediante quattro speciali funzioni ϑ iperellittiche a due argomenti; poi si successero i lavori di Cayley (***), Borchardt (****), Weber (*****), Rohn (******).

Ecco intanto alcune indicazioni su quest'altro ramo della teoria.

Si sa che per $p = 2$ esistono 16 funzioni iperellittiche ϑ, di cui 10 pari e 6 dispari. A ciascuna di tali ϑ corrisponde una caratteristica:

$$\begin{pmatrix} i & j \\ h & l \end{pmatrix},$$

dove i, j, h, l sono quattro numeri interi e propriamente o 0 ovvero 1 (*******).

Queste 16 caratteristiche si possono distribuire in gruppi tali che tutte quelle di un gruppo hanno fra loro relazioni simili a quelle che hanno fra loro le caratteristiche di un altro gruppo analogo.

Le ϑ corrispondenti avranno allora fra loro delle speciali relazioni algebriche.

(*) Reichardt, loc. cit. I moduli di Borchardt possono essere definiti sia come rapporti dei valori nulli di certe speciali funzioni ϑ (vedi Borchardt, *Sur le choix des modules dans les intégr. hyp.* Comptes Rendus, t. 88) sia come le coordinate di un *nodo* della superficie di Kummer (vedi Reichardt, Opera cit., pag. 392).

(**) Math. Ann., Bd. 5, pag. 302.

(***) Cayley, *On the double Θ fonctions in connexion with a* 16 *nodal quartic surface*. Crelle, vol. 83.

(****) Borchardt, *Ueber die Darstellung der Kummerschen Fläche,* etc. Crelle, vol. 83, pag. 234.

(*****) Weber, *Ueber Kummerschen Fläche,*etc. Crelle, vol. 84, pag. 332.

(******) Rohn, *Transformation der hyperellipt. Funct.* $p = 2$, etc. Math. Ann., Bd. 15, pag. 315.

(*******) Vedi Memoria III. Annali di Matematica, vol. 17, § 2.

Fra tali gruppi sono notevoli le cosiddette quaterne di Göpel (*), e le quaterne di Rosenhain (**).

Una quaterna di Göpel risulta di tali quattro funzioni ϑ o tutte pari, o due pari e due dispari, tali che la somma delle loro caratteristiche sia congruente (mod. 2) alla caratteristica fondamentale $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (***).

Una quaterna di Rosenhain risulta di quattro ϑ tali che fra esse vi è sempre un numero dispari di ϑ dispari, e che la somma delle loro caratteristiche sia anche congruente (mod. 2) alla caratteristica fondamentale (0).

Esistono 60 quaterne di Göpel e 80 quaterne di Rosenhain.

Una quaterna di Göpel è per es. quella formata colle quattro caratteristiche pari:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

corrispondenti, secondo la notazione di Weierstrass, alle ϑ coi seguenti indici:

$$\vartheta_5, \quad \vartheta_{34}, \quad \vartheta_2, \quad \vartheta_{01}.$$

Una quaterna di Rosenhain è per es. quella formata colle caratteristiche:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

corrispondenti, secondo le notazioni di Weierstrass, alle ϑ cogli indici:

$$\vartheta_1, \quad \vartheta_5, \quad \vartheta_{01}, \quad \vartheta_0.$$

Ora sono precisamente queste tali quaterne che hanno una relazione assai intima colla superficie di Kummer.

Se indichiamo con v_1, v_2 i due parametri di un punto della superficie di Kummer, allora si dimostra che i quadrati delle quattro ϑ, appartenenti ad una quaterna di Göpel, eguagliati a 0, rappresentano sulla superficie le quattro coniche che sono tagliate sulla superficie da quattro piani *singolari* tali che il loro tetraedro non ha per vertici alcun *nodo*.

(*) Göpel, Crelle, vol, 35, pag. 377.

(**) Rosenhain, *Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre periodes.* Mém. des savants étrang., vol. 11 (1846).

(***) Per somma di *caratteristiche* si intende la caratteristica i cui elementi sono rispettivamente le *somme* degli elementi omologhi dei termini.

Se invece di una quaterna di Göpel, ne consideriamo una di Rosenhain, abbiamo le quattro coniche generate da quattro piani singolari tali che i quattro vertici del tetraedro sieno quattro *nodi* (*). D'altra parte si sa che fra i quadrati delle quattro ϑ appartenenti ad una quaterna di Göpel o di Rosenhain esistono delle relazioni algebriche di 4.° grado (**); se dunque scegliamo per tetraedro fondamentale delle coordinate un tetraedro di Göpel o di Rosenhain, le coordinate omogenee di un punto della superficie di Kummer saranno proporzionali ai quadrati delle quattro funzioni ϑ corrispondenti, e l'equazione della superficie di Kummer sarà data dalla relazione algebrica di 4.° grado di cui si è parlato avanti.

Si hanno così due altre forme per l'equazione della nostra superficie; i coefficienti che entrano in tali equazioni sono funzioni razionali dei valori nulli di certe funzioni ϑ, e quindi dipendono direttamente, sebbene in maniera trascendente, dai *moduli* della forma di 6.° grado che è il fondamento della irrazionalità iperellittica. Per le forme di tali equazioni rimandiamo il lettore all'Opera più volte citata di Reichardt (***).

§ 3. Introduzione delle quattro funzioni Σ pari come coordinate di un punto della superficie di Kummer.

Introduciamo ora le quattro funzioni Σ pari studiate nella Memoria V.

Esse si possono esprimere linearmente mediante i quadrati di quattro speciali funzioni σ o ϑ (****) (tre dispari e una pari formanti una quaterna di Rosenhain). Di qui si ricava che le coordinate di un punto della superficie di Kummer debbono potersi esprimere linearmente mediante le dette funzioni Σ; con una trasformazione lineare deve dunque sempre potersi ridurre la superficie di Kummer in modo che le quattro coordinate omogenee di un suo punto sieno precisamente le $\Sigma_1\ \Sigma_2\ \Sigma_3\ \Sigma_4$. Ora è facile far vedere che fra queste quattro funzioni esiste una relazione algebrica razionale di 4.° grado, la quale è dunque la richiesta equazione (*****).

(*) Vedi, per l'esposizione di queste proprietà, Reichardt, Opera cit., § 9-10.

(**) Per la generalizzazione di tali relazioni al caso iperellittico di genere qualunque p, vedi: Brioschi, Annali di Matem., vol. 10, pag. 161. Ivi il Brioschi dimostra che una relazione analoga a quella di Göpel sussiste anche fra certe speciali $2p$ funzioni ϑ.

(***) Reichardt, Opera cit., § 11.

(****) Burkhardt, *Systematik,* etc. Math. Ann., Bd. 35, pag. 241 in nota.

(*****) Lezioni di Klein (Estate 1887, Inverno 1887-88). — Burkhardt, Opera cit., pag. 231.

Per trovare tale relazione cominciamo a trovare la relazione che esiste fra le quattro espressioni X_1, X_2, X_3, X_4, i cui rapporti sono le funzioni iperellittiche di 1.ª specie e che sono state studiate nella Memoria precedente.

Esse sono:

$$X_1 = (x' x'')^2 l_{x'} l_{x''}$$

$$X_2 = (x' x'')^2 m_{x'} m_{x''}$$

$$X_3 = (x' x'')^2 n_{x'} n_{x''}$$

$$X_4 = \sqrt{fx'} \sqrt{fx''} + a_{x'}^3 a_{x''}^3,$$

essendo a_x^6 la sestica, e l_x^2, m_x^2, n_x^2 i noti suoi tre covarianti quadratici.

Osserviamo che, secondo la posizione dei punti x' x'', il prodotto $\sqrt{fx'}\sqrt{fx''}$ potrà avere il segno positivo o il negativo, quindi in ogni caso possiamo scrivere:

$$[X_4 - (\sqrt{fx'} \sqrt{fx''} + a_{x'}^3 a_{x''}^3)] \, [X_4 - (-\sqrt{fx'} \sqrt{fx''} + a_{x'}^3 a_{x''}^3)] = 0,$$

cioè:

$$X_4^2 - 2 a_{x'}^3 a_{x''}^3 X_4 + [(a_{x'}^3 a_{x''}^3)^2 - f(x') f(x'')] = 0 \text{ (*)}. \qquad (a)$$

Ora si abbia un covariante di f in x', x'', simmetrico in queste due serie di variabili e dello stesso grado in ciascuna di esse. Allora, con un metodo perfettamente analogo a quello tenuto da Clebsch (**), si può rappresentarlo come funzione razionale di $l_{x'} l_{x''}$, $m_{x'} m_{x''}$, $n_{x'} n_{x''}$, e coi coefficienti che sieno *invarianti* di f.

Al denominatore comparirà solo una potenza dell'invariante:

$$-R = \begin{vmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 & l_2^2 \\ m_1^2 & m_1 m_2 & m_2^2 \\ n_1^2 & n_1 n_2 & n_2^2 \end{vmatrix} = -(l m)(m n)(n l),$$

e l'esponente di tal potenza sarà propriamente eguale al grado del primitivo covariante in x' o x''. È facile vedere che il 3.° termine della formola (a) è divisibile per $(x' x'')$, perchè si annulla per $x' = x''$; e inoltre essendo poi simmetrico in tali due variabili sarà addirittura divisibile per $(x' x'')^2$.

Possiamo dunque scrivere (a) sotto l'altra forma:

$$X_4^2 - 2 a_{x'}^3 a_{x''}^3 X_4 + (x' x'')^2 G_4(x' x'') = 0,$$

essendo G_4 un covariante razionale intero di f.

(*) Burkhardt, *Systematik*, etc. Math. Ann., Bd. 35, pag. 231.

(**) *Theorie d. alg. Formen*, pag. 411.

Facciamo ora per $a_{x'}^3 a_{x''}^3$, e $G_4(x'x'')$ la trasformazione di cui si è parlato avanti, e poi moltiplichiamo tutta l'espressione per $R^4(x'x'')^6$. Allora si ha un'espressione della forma:

$$R^2(x'x'')^2 \cdot R^2(x'x'')^4 X_4 + R(x'x'')^6 H_3 + (x'x'')^8 H_4 = 0,$$

dove H_3, H_4 sono delle funzioni razionali intere dei gradi 3, 4, in $l_{x'} l_{x''}$, $m_{x'} m_{x''}$, $n_{x'} n_{x''}$.

Ora, per lo stesso principio sviluppato sopra, si ha che $R^2(x'x'')^2$ può esprimersi come funzione intera di 2.° grado H_2 di queste ultime variabili, onde poi infine accoppiando i fattori esterni $(x'x'')$ colle dette variabili che compariscono nelle H, si ha la espressione:

$$R^2 F_2(X_1, X_2, X_3) X_4^2 + R F_3(X_1 X_2 X_3) X_4 + F_4(X_1 X_2 X_3) = 0, \quad (b)$$

dove le F sono funzioni intere di $X_1 X_2 X_3$, e che è la richiesta relazione biquadratica (*).

Basta ora moltiplicare tutta la formola precedente per $[\chi(x'x'')]^4$ essendo χ la *forma media* di cui si è parlato nella Memoria precedente (**), per ottenere la relazione fra le quattro funzioni Σ pari. Per le cose osservate sopra si ha che in tale equazione (b) i coefficienti sono funzioni razionali intere degli invarianti fondamentali della sestica. L'equazione (b) in coordinate omogenee X o Σ rappresenta *l'equazione razionale della superficie di* Kummer, per le cose osservate al principio di questo paragrafo.

Lo scopo dei paragrafi seguenti è di costruire effettivamente l'equazione (b), esprimendo i suoi coefficienti razionalmente mediante i quattro invarianti fondamentali A, B, C, D della sestica binaria.

§ 4. Introduzione alla effettiva costruzione dell'equazione (b) del paragrafo precedente.

Dalle formole:

$$\left.\begin{aligned} l_{x'} l_{x''} &= l_1^2 x'_1 x''_1 + l_1 l_2 (x'_1 x''_2 + x'_2 x''_1) + l_2^2 x'_2 x''_2 \\ m_{x'} m_{x''} &= m_1^2 x'_1 x''_1 + m_1 m_2 (x'_1 x''_2 + x'_2 x''_1) + m_2^2 x'_2 x''_2 \\ n_{x'} n_{x''} &= n_1^2 x'_1 x''_1 + n_1 n_2 (x'_1 x''_2 + x'_2 x''_1) + n_2^2 x'_2 x''_2, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

(*) Klein, Lezioni. Göttingen (1887-88). — Burkhardt, loc. cit.
(**) Memoria V, § 7.

si ricavano i valori di

$$-R x'_1 x''_1, \qquad -R(x'_1 x''_2 + x''_1 x'_2), \qquad -R x'_2 x''_2.$$

Intanto:

$$(x' x'')^2 = (x'_1 x''_2 + x''_1 x'_2)^2 - 4 x'_1 x''_1 \cdot x'_2 x''_2,$$

onde si ha:

$$R^2(x'x'')^2 = \begin{vmatrix} l_1^2 & l_{x'} l_{x''} & l_2^2 \\ m_1^2 & m_{x'} m_{x''} & m_2^2 \\ n_1^2 & n_{x'} n_{x''} & n_2^2 \end{vmatrix}^2 - 4 \begin{vmatrix} l_{x'} l_{x''} & l_1 l_2 & l_2^2 \\ m_{x'} m_{x''} & m_1 m_2 & m_2^2 \\ n_{x'} n_{x''} & n_1 n_2 & n_2^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_1^2 & l_1 l_2 & l_{x'} l_{x''} \\ m_1^2 & m_1 m_2 & m_{x'} m_{x''} \\ n_1^2 & n_1 n_2 & n_{x'} n_{x''} \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &= [(mn)(m'n')(m'n)(mn') - (mn)(m'n')(mm')(nn')]\, l_{x'} l_{x''} \,.\, l'_{x'} l'_{x''} \\ &+ \qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \\ &+ 2\,[(mn)(l'n')(n'm)(l'n) + (mn)(l'n')(ml)(nn')]\, l_{x'} l_{x''} \cdot m_{x'} m_{x''} \\ &+ \qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.} \qquad \text{ecc.}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

dove le altre linee si ricavano dalle precedenti permutando circolarmente i simboli l, m, n, e le lettere cogli apici rappresentano simboli *equivalenti* rispettivamente a quelli rappresentati dalle lettere simili senza apici.

Unendo alle (1) l'altra formola:

$$a_{x'} a_{x''} = a_1^2 x'_1 x''_1 + a_1 a_2 (x'_1 x''_2 + x'_2 x''_1) + a_2^2 x'_2 x''_2,$$

e eliminando fra le quattro formole le tre quantità:

$$x'_1 x''_1, \qquad x'_1 x''_2 + x''_1 x'_2, \qquad x'_2 x''_2,$$

si ha:

$$-R\, a_{x'} a_{x''} = +(mn)(na)(ma)\, l_{x'} l_{x''} + (nl)(na)(la)\, m_{x'} m_{x''} + (lm)(la)(ma)\, n_{x'} n_{x''},$$

ed elevando a 3.ª potenza si ha:

$$\left.\begin{aligned} -R^3 a_{x'}^3 a_{x''}^3 = &\sum (mn)(m'n')(m''n'')(ma)(m'a)(m''a)(na)(n'a)(n''a)\, l_{x'} l_{x''} l'_{x'} l'_{x''} l''_{x'} l''_{x''} \\ &+ 3 \sum (mn)(m'n')(n''l'')(ma)(m'a)(na)(n'a)(n''a)(l''a)\, l_{x'} l_{x''} l'_{x'} l'_{x''} m''_{x'} m''_{x''} \\ &+ 3 \sum (mn)(n'l')(n''l'')(ma)(na)(n'a)(n''a)(l'a)(l''a)\, l_{x'} l_{x''} m'_{x'} m'_{x''} m''_{x'} m''_{x''} \\ &+ 6\,(mn)(n'l')(l''m'')(ma)(m''a)(na)(n'a)(l'a)(l''a)\, l_{x'} l_{x''} m'_{x'} m'_{x''} n''_{x'} n''_{x''}, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

dove col segno $\sum$ indichiamo l'assieme di tutte le altre espressioni che si otterrebbero permutando circolarmente i simboli l, m, n.

Se nell'espressione (2) mutiamo:

$$l_{x'}\, l_{x''}, \qquad m_{x'}\, m_{x''}, \qquad n_{x'}\, n_{x''},$$

rispettivamente in

$$X_1, \qquad X_2, \qquad X_3,$$

abbiamo esattamente l'espressione di F_2 della equazione (b) del paragrafo precedente.

Analogamente cogli stessi mutamenti, il secondo membro della formola (3) diventa l'espressione di $\frac{1}{2} F_3$.

Introducendo le notazioni:

$$\lambda = (m\,n)\, m_x\, n_x, \qquad \mu = (n\,l)\, n_x\, l_x, \qquad \nu = (l\,m)\, l_x\, m_x,$$

possiamo dunque brevemente scrivere:

$$F_3 = 2\,[\textstyle\sum (\lambda\, a)^2 X_1]^3, \tag{4}$$

dove col segno $\sum$ si intende al solito che bisogna operare la somma delle espressioni che si ottengono permutando i simboli circolarmente.

Passiamo ora a trovare l'espressione di F_4.

Si ha in primo luogo:

$$\left.\begin{aligned} a_{x'}^3\, a_{x''}^3 \cdot b_{x'}^3\, b_{x''}^3 - a_{x'}^6\, b_{x''}^6 &= a_{x'}^3\, b_{x''}^3 (a_{x''}^3\, b_{x'}^3 - a_{x'}^3\, b_{x''}^3) = \\ &= \frac{1}{2} (a_{x'}^3\, b_{x''}^3 - a_{x''}^3\, b_{x'}^3)(a_{x''}^3\, b_{x'}^3 - a_{x'}^3\, b_{x''}^3) \\ = -\frac{1}{2} (a\,b)^2 (x'\,x'')^2 \Big\{ 2\, a_{x'}^4\, b_{x''}^4 &+ 3\, a_{x'}^2\, a_{x''}^2\, b_{x'}^2\, b_{x''}^2 + 4\, a_{x'}^3\, a_{x''}\, b_{x'}\, b_{x''}^3 \Big\}. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ora applicando la nota formola di Gordan per le forme binarie si ha (indicando al solito con Δ le operazioni di polare):

$$a_{x'}^4\, b_{x''}^4 = \Delta^4\, a_{x'}^4\, b_{x'}^4 + \frac{12}{7} (x'\,x'')^2 (a\,b)^2 \Delta^2\, a_{x'}^2\, b_{x'}^2 + \frac{1}{5} (x'\,x'')^4 (a\,b)^4$$

$$a_{x'}^2\, a_{x''}^2\, b_{x'}^2\, b_{x''}^2 = \Delta^4\, a_{x'}^4\, b_{x'}^4 - \frac{2}{7} (x'\,x'')^2 (a\,b)^2 \Delta^2\, a_{x'}^2\, b_{x'}^2 + \frac{1}{30} (x'\,x'')^4 (a\,b)^4$$

$$a_{x'}^3\, a_{x''}\, b_{x'}\, b_{x''}^3 = \Delta^4\, a_{x'}^4\, b_{x'}^4 - \frac{3}{14} (x'\,x'')^2 (a\,b)^2 \Delta^2\, a_{x'}^2\, b_{x'}^2 - \frac{1}{20} (x'\,x'')^2 (a\,b)^4,$$

tenendo presente che nelle nostre formole i simboli del primo membro si completano tutti col determinante $(a\,b)^2$, e quindi, poichè si sviluppano funzioni che sono simmetriche in x', x'' (perchè a, b sono simboli equivalenti), è inutile tener conto dei termini contenenti $(x'\,x'')$ a potenze dispari.

Allora il primo membro di (5) diventa:

$$-\frac{1}{2}(a\,b)^2(x'\,x'')^2\left\{9\,\Delta^4 a_{x'}^4\,b_{x'}^4+\frac{12}{7}(x'\,x'')^2(a\,b)^2\Delta^2 a_{x'}^2\,b_{x'}^2\right.$$
$$\left.+\frac{3}{10}(x'\,x'')^4(a\,b)^4\right\},$$

e ponendo:

$$(a\,b)^2 a_x^4\,b_x^4=H_x^8$$
$$(a\,b)^4 a_x^2\,b_x^2=i_x^4$$
$$(a\,b)^6\qquad =A,$$

si ha:

$$-\frac{1}{2}(x'\,x'')^2\left\{9\,H_{x'}^4\,H_{x''}^4+\frac{12}{7}(x'\,x'')^2 i_{x'}^2\,i_{x''}^2+\frac{3}{10}A\,(x'\,x'')^4\right\}.$$

Esprimendo ora $H_{x'}\,H_{x''}$, $i_{x'}\,i_{x''}$ analogamente come abbiamo fatto avanti per $a_{x'}\,a_{x''}$, si ha infine

$$\left.\begin{aligned}F_4=&-\frac{9}{2}[\sum(\lambda H)^2 X_1]^4\\&-\frac{6}{7}F_2[\sum(\lambda i)^2 X_1]^2\\&-\frac{3}{20}A\cdot F_2^2.\end{aligned}\right\}\qquad(6)$$

Resta a calcolare ora F_2, F_3, F_4 in funzione degli invarianti fondamentali della sestica.

§ 5. Cenno sugli invarianti e covarianti della sestica binaria *f*.

In questo paragrafo inseriremo alcune formole sulle forme invariantive di una sestica, le quali ci serviranno poi in seguito.

In primo punto è noto che una sestica binaria possiede un sistema completo composto di 26 forme di cui 5 invarianti, e 21 covarianti (*). Dei 5 in-

(*) Clebsch, *Theorie d. b. alg. Form.*, pag. 296. — Gordan, *Invariantenth.*, Bd. 2, pag. 283.

varianti, 4 sono di peso pari e sono quelli chiamati A, B, C, D, e uno (R) è di peso dispari; quindi il quadrato di R si esprimerà razionalmente mediante A, B, C, D.

Esistono sei covarianti di 2.° ordine che sono i cosiddetti l, m, n, λ, μ, ν dove gli ultimi tre non sono che rispettivamente i determinanti funzionali dei primi tre combinati a due a due.

È interessante poi per i nostri scopi, ricordare il covariante di 4.° ordine (ponendo $f = a_x^6 = b_x^6 = \cdots$):

$$k = i = (a\,b)^4 a_x^2 b_x^2 \text{ (*)},$$

e il suo essiano (anche di 4.° ordine) Δ.

Partendo da questo k si possono esprimere assai semplicemente, come *spinte,* i principali covarianti e gli invarianti di f.

Così si ha:

$$l = (a\,k)^4 a_x^2, \qquad m = (l\,k)^2 k_x^2, \qquad n = (m\,k)^2 k_x^2$$
$$A = (a\,b)^6, \qquad B = (k\,k')^4, \qquad C = (k\,k')^2 (k'\,k'')^2 (k''\,k)^2,$$
$$D = (f,\ l^3)^6, \qquad R = (l\,m)\,(m\,n)\,(n\,l).$$

Si usa indicare con A_{ll}, A_{mm}, A_{nn}, A_{lm},... rispettivamente, gli invarianti delle quadratiche l, m, n considerate isolatamente, e considerate a due a due. Ci occorre qui trascrivere le formole che esprimono tali nuovi invarianti in funzione dei fondamentali. Tali formole sono:

$$\left.\begin{array}{ll} A_{ll} = 2C + \frac{1}{3}AB & A_{mn} = \frac{1}{3}B^3 + \frac{2}{3}C^2 + \frac{4}{9}ABC \\ A_{mm} = D & A_{nl} = D \\ A_{nn} = \frac{1}{2}BD + \frac{2}{9}C(B^2 + AC) & A_{lm} = \frac{2}{3}(B^2 + AC). \end{array}\right\} \quad (1)$$

In seguito ci occorreranno ancora le seguenti altre formole:

a) *2.e überschiebungen* di i su l, m, n, cioè:

$$\left.\begin{array}{ll} (i\,l)^2 = m, & (i\,m)^2 = n, \\ (i\,n)^2 = \frac{Bm}{2} + \frac{Cl}{3} \text{ (**)}. & \end{array}\right\} \qquad (2)$$

(*) Clebsch lo chiama i, Gordan lo chiama k.

(**) Gordan, Opera cit., pag. 286-287.

b) *2.ᵉ überschiebungen* di Δ su l, m, n, cioè (*):

$$\left.\begin{aligned}(\Delta l)^2 &= n - \frac{B}{3} l \\ (\Delta m)^2 &= \frac{1}{6} Bm + \frac{1}{3} Cl \\ (\Delta n)^2 &= \frac{1}{6} Bn + \frac{1}{3} Cm.\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

c) *4.ᵉ überschiebungen* di f su prodotti a due a due delle tre quadratiche, cioè (**):

$$\left.\begin{aligned}(f,\ l^2)^4 &= -\frac{2}{3} Bl + \frac{A}{3} m + 2n \\ (f,\ m^2)^4 &= \left(\frac{1}{3} B^2 + \frac{4}{9} AC\right) l - \frac{1}{3} Cm + \frac{1}{3} Bn \\ (f,\ n^2)^4 &= \left(\frac{2}{9} C^2 + \frac{1}{6} B^3 + \frac{2}{9} ABC\right) l + \left(\frac{1}{2} D - \frac{1}{18} BC\right) m - \left(\frac{1}{6} B^2 + \frac{2}{9} AC\right) n \\ (f,\ mn)^4 &= \left(\frac{1}{9} BC + \frac{1}{2} D\right) l + \left(\frac{1}{6} B^2 + \frac{1}{9} AC\right) m - \frac{1}{3} Cn \\ (f,\ nl)^4 &= \frac{1}{9} ACl + \left(\frac{2}{3} C + \frac{1}{6} AB\right) m + \frac{1}{3} Bn \\ (f,\ lm)^4 &= \frac{2}{3} Cl + \frac{1}{3} Bm + \frac{1}{3} An.\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

d) *2.ᵉ überschiebungen* di f su l, m, n, cioè (***):

$$\left.\begin{aligned}(f,\ l)^2 &= 2\Delta + \frac{A}{3} i \\ (f,\ m)^2 &= \frac{l^2}{2} + \frac{B}{3} i + \frac{A}{3} \Delta \\ (f,\ n)^2 &= lm - \frac{1}{3} Ci + \frac{B}{3} \Delta.\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

(*) Gordan, Opera cit., pag. 287.
(**) Clebsch, Opera cit., pag. 454. — Gordan, Opera cit., pag. 287.
(***) Gordan, Opera cit., pag. 287 e seg.

§ 6. Calcolo dell'espressione di F_2.

Secondo la formola (2) del § 4 abbiamo che l'espressione di F_2 può scriversi:

$$\begin{aligned} F_2 = & \sum [(mn)(m'n')(m'n)(mn') + (mn)(m'n')(m'm)(nn')] X_1^2 \\ & + 2 \sum [(mn)(l'n')(n'm)(l'n) + (mn)(l'n')(ml')(nn')] X_1 X_2, \end{aligned}$$

dove col simbolo $\sum$ si intende che bisogna sommare tutti gli altri termini analoghi che si ottengono permutando le lettere l, m, n e contemporaneamente permutando anche circolarmente X_1, X_2, X_3.

Passiamo ora ad esprimere i coefficienti di F_2 mediante gli invarianti del sistema completo.

Il secondo termine del coefficiente di X_1^2 trasformiamolo colla formola:

$$(m'm)(nn') = -(m'n)(n'm) - (m'n')(mn),$$

onde tutto il coefficiente di X_1^2 diventa:

$$\begin{aligned} & 2(mn)(m'n')(m'n)(mn') + A_{mn}^2 = \\ & = 2[-(mm')(n'n) - (mn')(nm')](m'n)(mn') + A_{mn}^2 = \\ & = -(mm')(n'n)[(m'n)(mn') - (mn)(m'n')] + 3A_{mn}^2 \\ & = 3A_{mn}^2 - A_{mm}A_{nn}. \end{aligned}$$

Permutando circolarmente le lettere l, m, n si hanno i coefficienti di X_2^2, X_3^2.

Passiamo ora al coefficiente di X_1X_2.

Il primo termine di tal coefficiente è:

$$\begin{aligned} & (mn)(l'n')[(ml')(nn') + (mn)(n'l')] = \\ & = \frac{1}{2}(ml')(nn')[(mn)(l'n') - (mn')(l'n)] - A_{mn}A_{nl} \\ & = -\frac{1}{2}(ml')(nn')(ml')(n'n) - A_{mn}A_{nl} = \frac{1}{2}A_{ml}A_{nn} - A_{mn}A_{nl}. \end{aligned}$$

Inoltre il secondo termine è, giusta il calcolo ora eseguito:

$$(mn)(l'n')(ml')(nn') = \frac{1}{2}A_{ml}A_{nn},$$

onde infine tutto il coefficiente di X_1X_2 è:

$$A_{ml}A_{nn} - A_{mn}A_{nl}.$$

Si ha dunque:

$$\begin{aligned} F_2 = & \sum [3 A_{mn}^2 - A_{mm} A_{nn}] X_1^2 \\ & + 2 \sum [A_{ml} A_{nn} - A_{mn} A_{nl}] X_1 X_2, \end{aligned}$$

ovvero, esprimendolo mediante gli invarianti fondamentali [giovandosi delle (1) del § 5], si ha:

$$\begin{aligned} F_2 = & \Big[\frac{1}{3} B^6 + \frac{8}{9} A B^4 C + \frac{16}{27} A^2 B^2 C^2 + \frac{4}{3} C^4 + \frac{16}{9} A B C^3 + \frac{4}{3} B^3 C^2 \\ & \qquad - \frac{1}{2} B D^2 - \frac{2}{9} B^2 C D - \frac{2}{9} A C^2 D\Big] X_1^2 \\ & + \Big[3 D^2 - B C D - \frac{1}{6} A B^2 D - \frac{4}{9} B^2 C^2 - \frac{2}{27} A B^3 C - \\ & \qquad - \frac{4}{9} A C^3 - \frac{2}{27} A^2 B C^2\Big] X_2^2 \\ & + \Big[\frac{4}{3} B^4 + \frac{4}{3} A^2 C^2 + \frac{8}{3} A B^2 C - 2 C D - \frac{1}{3} A B D\Big] X_3^2 \\ & + 2\Big[\frac{4}{27} B^4 C + \frac{8}{27} A B^2 C^2 + \frac{4}{27} A^2 C^3 - \frac{2}{3} C^2 D - \frac{1}{9} A B C D\Big] X_1 X_2 \\ & + 2\Big[\frac{2}{3} C B^3 + \frac{1}{9} A B^4 + \frac{4}{3} C^3 + \frac{10}{9} A B C^2 + \frac{4}{27} A^2 B^2 C - \\ & \qquad - \frac{2}{3} B^2 D - \frac{2}{3} A C D\Big] X_2 X_3 \\ & + 2\Big[D^2 - \frac{2}{9} B^5 - \frac{14}{27} A B^3 C - \frac{4}{9} B^2 C^2 - \frac{4}{9} A C^3 - \frac{8}{27} A^2 B C^2\Big] X_3 X_1. \end{aligned}$$

§ 7. Osservazioni generali sulla costruzione delle espressioni F_3, F_4 del § 4.

Dalle formole (4) (6) del § 4 risulta che per trovare F_3 bisognerebbe conoscere le seste spinte *(überschiebungen)* di f su tutti i prodotti a tre a tre delle tre quadratiche λ, μ, ν.

E così, per trovare F_4, bisognerebbe sapere le ottave spinte di H su prodotti a quattro a quattro di λ, μ, ν, e le quarte spinte di i su prodotti a due a due di λ, μ, ν.

Queste spinte di ordine elevato (6.°, 8.°, 4.°), le possiamo naturalmente scomporre in successive spinte di 2.° ordine di certi covarianti sopra una delle tre quadratiche.

Troviamo le espressioni delle seconde spinte di H (che è di 8.° ordine) sopra i tre covarianti $\lambda\ \mu\ \nu$. Tali spinte verranno espresse mediante i covarianti di 6.° ordine; troviamo ora le seconde spinte di tutti i possibili covarianti di 6.° ordine su ciascuna delle tre quadratiche (dove fra i covarianti di 6.° ordine bisognerebbe includere anche i covarianti impropri, cioè i prodotti di covarianti di ordini inferiori); troviamo poi analogamente le espressioni delle seconde spinte di tutti i possibili covarianti di 4.° e poi di tutti i covarianti di 2.° ordine su $\lambda\ \mu\ \nu$, e allora con tutte queste formole trovate la ricerca di F_3 e F_4 sarà immediata.

Però se si dovesse effettivamente seguire questa via, la cosa sarebbe difficile e lunga e bisognerebbe fare entrare nei calcoli non solo i pochi covarianti che abbiamo sinora considerati, ma ancora tutti gli altri del sistema completo.

Noi faremo vedere in seguito che si può far di meno di seguire la via generale e lunghissima indicata avanti, ma con speciali artifizii si può giungere ai risultati finali, senza conoscere le espressioni di tutte le spinte indicate, e senza introdurre nei calcoli altri covarianti che i pochi introdotti sinora, cioè H, Δ, i, f, e i covarianti quadratici.

§ 8. Seconde spinte di λ, μ, ν sopra i sei covarianti di 2.° ordine, e su prodotti a due a due di essi.

Si hanno in primo luogo le seguenti formole:

$$\left.\begin{array}{ll} (\lambda l)^2 = -R & (\lambda m)^2 = (\lambda n)^2 = 0 \\ (\mu m)^2 = -R & (\mu l)^2 = (\mu n)^2 = 0 \\ (\nu n)^2 = -R & (\nu l)^2 = (\nu m)^2 = 0. \end{array}\right\} \tag{1}$$

Inoltre facilmente si ha:

$$(\lambda\lambda')^2 = \frac{1}{2}(mn)(m'n')[(mm')(nn') + (mn')(nm')].$$

Ora nel § 6 abbiamo appunto calcolata tale espressione, onde si ha:

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda,\ \lambda)^2 = -\frac{1}{2}[3A_{mn}^2 - A_{mm}A_{nn}] \\ \quad = -\frac{1}{6}B^6 - \frac{4}{9}AB^4C - \frac{8}{27}A^2B^2C^2 - \frac{2}{3}C^4 - \frac{8}{9}ABC^3 \\ \quad - \frac{2}{3}B^3C^2 + \frac{1}{4}BD^2 + \frac{1}{9}B^2CD + \frac{1}{9}AC^2D. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Analogamente si ricavano $(\mu,\ \mu)^2$, $(\nu,\ \nu)^2$.

In quanto a $(\lambda\mu)^2$ è facile vedere che essa è eguale a

$$-\frac{1}{2}\,[A_{ml}\,A_{nn}-A_{mn}\,A_{nl}],$$

la cui espressione mediante gli invarianti sta calcolata nel § 6.

Ci pare inutile dunque trascrivere dal § 6 le espressioni di

$$(\mu\mu)^2,\qquad(\nu\nu)^2,\qquad(\lambda\mu)^2,\qquad(\mu\nu)^2,\qquad(\nu\lambda)^2.$$

Solo notiamo che tali espressioni sono ordinatamente i coefficienti delle potenze delle X, nella formola di F_2, moltiplicati pel fattore $-\frac{1}{2}$.

Passiamo ora a calcolare le seconde spinte di λ, μ, ν su prodotti a due a due dei sei covarianti quadratici. E propriamente, prima calcoleremo le seconde spinte di λ, μ, ν sui quadrati di l, m, n e sui loro prodotti a due a due; poi quelle fatte sui quadrati di λ, μ, ν. Le altre non ci occorrono.

Si ha:

$$(\lambda,\ l^2)^2=\frac{1}{3}\,[(\lambda\,l)^2\,l+2\,(l\lambda)\,(l'\,\lambda)\,l_x\,l'_x].$$

Ora:

$$\begin{aligned}(l\lambda)\,(l'\,\lambda)\,l_x\,l'_x&=\frac{1}{2}\,(m\,n)\,[(m\,l)\,(n\,l')+(m\,l')\,(n\,l)]\,l_x\,l'_x\\&=(m\,n)\,(m\,l)\,l'_x\,[(l\,l')\,n_x+(n\,l)\,l'_x]\\&=\frac{1}{2}\,(m\,n)\,(l\,l')\,n_x\,[(m\,l)\,l'_x-(m\,l')\,l_x]+(m\,n)\,(m\,l)\,(m\,l)\,l'^2_x\\&=-\frac{1}{2}\,A_{ll}\,\lambda-R\cdot l.\end{aligned}$$

Così si ricavano le altre formole analoghe; onde infine:

$$\left.\begin{aligned}(\lambda,\ l^2)^2&=-R\cdot l-\frac{1}{3}\,A_{ll}\cdot\lambda\\(\mu,\ m^2)^2&=-R\cdot m-\frac{1}{3}\,A_{mm}\cdot\mu\\(\nu,\ n^2)^2&=-R\cdot n-\frac{1}{3}\,A_{nn}\cdot\nu.\end{aligned}\right\}\qquad(3)$$

Inoltre:

$$(\lambda,\ m^2)^2=\frac{1}{3}\,[(m\,\lambda)^2\cdot m+2\,(m\,\lambda)\,(m'\,\lambda)\,m_x\,m'_x],$$

di cui il primo termine è zero [formole (1)] e il secondo è:

$$= \frac{1}{2} (m m'')^2 (n m') n_x m'_x.$$

Si ha così il sistema di formole:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda, m^2)^2 &= -\frac{1}{3} A_{mm} \cdot \lambda; & (\lambda, n^2)^2 &= -\frac{1}{3} A_{nn} \cdot \lambda \\ (\mu, n^2)^2 &= -\frac{1}{3} A_{nn} \cdot \mu; & (\mu, l^2)^2 &= -\frac{1}{3} A_{ll} \cdot \mu \\ (\nu, l^2)^2 &= -\frac{1}{3} A_{ll} \cdot \nu; & (\nu, m^2)^2 &= -\frac{1}{3} A_{mm} \cdot \nu. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Calcoliamo ora le spinte sopra prodotti a due a due di l, m, n. Si ha:

$$(\lambda, l m)^2 = \frac{1}{6} [(\lambda m)^2 \cdot n + (\lambda n)^2 m + 4(\lambda m)(\lambda n) m_x n_x].$$

I due primi termini sono zero, e l'ultimo è:

$$= \frac{1}{3} [(m' m)(n' n) + (m' n)(n' m)] (m' n') m_x n_x$$

$$= \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{2} (m m')^2 (n n') n_x n'_x + (m' n)(n' m) m_x [(n n') m'_x - (n m') n'_x] \right\},$$

onde si ha infine:

$$\left.\begin{aligned} (\lambda, m n)^2 &= -\frac{1}{3} A_{nm} \cdot \lambda \\ (\mu, n l)^2 &= -\frac{1}{3} A_{ln} \cdot \mu \\ (\nu, l m)^2 &= -\frac{1}{3} A_{ml} \cdot \nu. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Inoltre:

$$\begin{aligned} (\lambda, l m)^2 &= \frac{1}{6} \left[(\lambda l)^2 m + (\lambda m)^2 l + 4(\lambda l)(\lambda m) l_x m_x \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[- R m + 2(m' n) [(m' l)(n m) + (m' m)(n l)] l_x m_x \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[- R m + 2(m' n)(m' l)(n m) l_x m_x + A_{mm} \mu \right] \\ &= \frac{1}{6} \left[- R m + 2(m' n) l_x m_x [(m' n)(l m) + (m' m)(n l)] + A_{mm} \mu \right], \end{aligned}$$

onde infine si hanno le formole:

$$\left.\begin{aligned}
(\lambda,\ lm)^2 &= \frac{1}{6}\left\{-Rm + 2A_{mm}\mu + 2A_{mn}\nu\right\}\\
(\mu,\ mn)^2 &= \frac{1}{6}\left\{-Rn + 2A_{nn}\nu + 2A_{nl}\lambda\right\}\\
(\nu,\ nl)^2 &= \frac{1}{6}\left\{-Rl + 2A_{ll}\lambda + 2A_{lm}\mu\right\}\\
(\lambda,\ ln)^2 &= \frac{1}{6}\left\{-Rn + 2A_{nn}\nu + 2A_{nm}\mu\right\}\\
(\mu,\ ml)^2 &= \frac{1}{6}\left\{-Rl + 2A_{ll}\lambda + 2A_{ln}\nu\right\}\\
(\nu,\ nm)^2 &= \frac{1}{6}\left\{-Rm + 2A_{mm}\mu + 2A_{ml}\lambda\right\}.
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Inoltre:

$$\begin{aligned}
(\lambda,\ \lambda^2)^2 &= \frac{1}{3}(\lambda\lambda')^2\cdot\lambda + \frac{2}{3}(\lambda'\lambda)(\lambda''\lambda)\lambda'_x\lambda''_x\\
&= \frac{1}{3}(\lambda\lambda')^2\cdot\lambda + \frac{1}{3}(\lambda'\lambda)\lambda''_x\left\{(\lambda''\lambda)\lambda'_x - (\lambda''\lambda')\lambda_x\right\}\\
&= \frac{2}{3}(\lambda\lambda')^2\cdot\lambda,
\end{aligned}$$

onde indicando con $A_{\lambda\lambda}$, $A_{\lambda\mu}$,... rispettivamente *gli invarianti delle tre quadratiche* λ, μ, ν, i cui valori sono stati trovati dalle formole (2) (e le analoghe) di questo paragrafo, si ha finalmente il sistema di formole:

$$(\lambda,\ \lambda^2)^2 = \frac{2}{3}A_{\lambda\lambda}\cdot\lambda \qquad (\mu,\ \mu^2)^2 = \frac{2}{3}A_{\mu\mu}\cdot\mu \qquad (\nu,\ \nu^2)^2 = \frac{2}{3}A_{\nu\nu}\cdot\nu. \qquad (7)$$

Analogamente si trovano le altre:

$$\left.\begin{aligned}
(\lambda,\ \mu^2)^2 &= A_{\lambda\mu}\cdot\mu - \frac{1}{3}A_{\mu\mu}\cdot\lambda\\
(\mu,\ \nu^2)^2 &= A_{\mu\nu}\cdot\nu - \frac{1}{3}A_{\nu\nu}\cdot\mu\\
(\nu,\ \lambda^2)^2 &= A_{\nu\lambda}\cdot\lambda - \frac{1}{3}A_{\lambda\lambda}\cdot\nu\\
(\lambda,\ \nu^2)^2 &= A_{\lambda\nu}\cdot\nu - \frac{1}{3}A_{\nu\nu}\cdot\lambda\\
(\mu,\ \lambda^2)^2 &= A_{\mu\lambda}\cdot\lambda - \frac{1}{3}A_{\lambda\lambda}\cdot\mu\\
(\nu,\ \mu^2)^2 &= A_{\nu\mu}\cdot\mu - \frac{1}{3}A_{\mu\mu}\cdot\nu.
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

§ 9. Seconde spinte di λ, μ, ν sopra i covarianti di 4.° ordine i, e Δ. Calcolo del secondo termine di F_4.

Calcoliamo in questo paragrafo le seconde spinte di λ, μ, ν su ciascuno dei covarianti i, Δ. Tali spinte sono covarianti di 2.° ordine, e quindi dovranno esprimersi linearmente mediante i 6 covarianti quadratici.

Vogliamo usare un metodo pel quale potessimo direttamente giovarci di calcolazioni già eseguite o riportate nei paragrafi precedenti.

Una seconda spinta di una forma Ω_x^s sopra una quadratica, per es. λ, può esprimersi mediante spinte sopra l, m, n, nel seguente modo:

$$\begin{aligned}(\Omega_x^s,\ \lambda)^2 &= (\Omega\,\lambda)^2\,\Omega_x^{s-2} = (m\,n)\,(\Omega\,m)\,(\Omega\,n)\,\Omega_x^{s-2}\\ &= (\Omega\,m)\,(\Omega\,n)\,\Omega_x^{s-3}\,[(\Omega\,n)\,m_x - (\Omega\,m)\,n_x]\\ &= \{[(\Omega,\ n)^2,\ m] - [(\Omega,\ m)^2,\ n].\end{aligned}$$

Supponiamo ora che la nostra forma Ω sia proprio rispettivamente la biquadratica i_x^4 ovvero la biquadratica Δ_x^4. Allora le seconde spinte di tali biquadratiche su l, m, n sono note e le abbiamo riportate al § 5 [formole (2), (3)]. Possiamo quindi immediatamente da quelle formole ricavare quelle che ci occorrono ora.

Si ha così il sistema di formole:

$$\left.\begin{aligned}(i,\ \lambda)^2 &= \frac{1}{3}\,C\nu\\ (i,\ \mu)^2 &= \lambda + \frac{1}{2}\,B\nu\\ (i,\ \nu)^2 &= \mu\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}(\Delta,\ \lambda)^2 &= -\frac{1}{3}\,B\lambda + \frac{1}{3}\,C\mu\\ (\Delta,\ \mu)^2 &= \frac{1}{6}\,B\mu + \frac{1}{3}\,C\nu\\ (\Delta,\ \nu)^2 &= \frac{1}{6}\,B\nu + \lambda.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Dalla formola (6) del § 4 risulta che il secondo termine dell'espressione di F_4 è il prodotto di F_2 per

$$[\textstyle\sum(\lambda\,i)^2 X_i]^2. \qquad (3)$$

Siamo ora nel caso di calcolare questa espressione. Si tratta di calcolare i diversi coefficienti delle potenze di X, che sono rispettivamente:

$$[(\lambda i)^2, \lambda]^2 X_1^2 + [(\mu i)^2, \mu]^2 X_2^2 + [(\nu i)^2, \nu]^2 X_3^2$$
$$+ 2[(\lambda i)^2, \mu]^2 X_1 X_2 + 2[(\mu i)^2, \nu]^2 X_2 X_3 + 2[(\nu i)^2, \lambda]^2 X_3 X_1.$$

Mediante le formole (1) vediamo facilmente che questa espressione, cioè la (3) diventa:

$$\frac{1}{3} C A_{\nu\lambda} X_1^2 + \left[A_{\lambda\mu} + \frac{1}{2} B A_{\mu\nu}\right] X_2^2 + A_{\mu\nu} X_3^2$$
$$+ \frac{2}{3} C A_{\mu\nu} X_1 X_2 + \left[A_{\nu\lambda} + \frac{1}{2} B A_{\nu\nu}\right] X_2 X_3 + 2 A_{\lambda\mu} X_3 X_1.$$

§ 10. Introduzione alla determinazione delle quarte spinte di f su prodotti a due a due di λ, μ, ν.

Esaminiamo l'espressione di $(f, \lambda^2)^4$. Essa è

$$= (m n)(m' n')(m a)(n a)(m' a)(n' a) a_x^2.$$

Trasformiamola colle formole:

$$(m n) a_x = -(n a) m_x + (m a) n_x$$
$$(m' n') a_x = -(n' a) m'_x + (m' a) n'_x.$$

Allora si ha:

$$(f, \lambda^2)^4 = (n a)^2 (n' a)^2 (m a)(m' a) m_x m'_x + (m a)^2 (m' a)^2 (n a)(n' a) n_x n'_x$$
$$- (n a)^2 (m' a)^2 (m a)(n' a) m_x n'_x - (m a)^2 (n' a)^2 (n a)(m' a) n_x m'_x.$$

Supponiamo ora di conoscere la quarta spinta di f sul quadrato di n [vedi formole (4) del § 5]. Tale quarta spinta è

$$(n a)^2 (n' a)^2 a_x^2, \tag{1}$$

e per mezzo delle citate formole (4) del § 5 essa resta espressa linearmente mediante i soli covarianti quadratici l, m, n.

Allora per formare il primo termine dell'espressione di $(f, \lambda^2)^4$, dovremmo in luogo di a_x^2, nella detta quarta spinta (1), porre:

$$(m a)(m' a) m_x m'_x.$$

Quindi quando tale quarta spinta (1) è invece espressa in l_x^2, m_x^2, n_x^2, dobbiamo porre in luogo di tali quantità le espressioni:

$$\left.\begin{array}{l}(l\,m)\,(l\,m')\,m_x\,m'_x \\ (m''\,m)\,(m''\,m')\,m_x\,m'_x \\ (n\,m)\,(n\,m')\,m_x\,m'_x.\end{array}\right\} \tag{2}$$

Se noi dunque sappiamo calcolare queste espressioni (2) mediante gli invarianti fondamentali e i covarianti quadratici fondamentali (dimostreremo che non occorrono per questo tutti i 6 covarianti quadratici ma solo l, m, n) allora avremo definitivamente calcolata la quarta spinta di λ^2 su f.

Con un procedimento completamente simile si calcolerebbero tutte le altre formazioni analoghe.

Calcoliamo intanto per ora le espressioni (2) e tutte le loro analoghe.

È facile trovare la seguente tabella di formole:

$$(l\,l')\,(l\,l'')\,l'_x\,l''_x = \frac{1}{2}\,A_{ll}\cdot l$$

$$(m\,l')\,(m\,l'')\,l'_x\,l''_x = A_{ml}\cdot l - \frac{1}{2}\,A_{ll}\cdot m$$

$$(n\,l')\,(n\,l'')\,l'_x\,l''_x) = A_{nl}\cdot l - \frac{1}{2}\,A_{ll}\cdot n$$

$$(l\,m')\,(l\,m'')\,m'_x\,m''_x = A_{lm}\cdot m - \frac{1}{2}\,A_{mm}\cdot l$$

$$(m\,m')\,(m\,m'')\,m'_x\,m''_x = \frac{1}{2}\,A_{mm}\cdot m$$

$$(n\,m')\,(n\,m'')\,m'_x\,m''_x = A_{nm}\cdot m - \frac{1}{2}\,A_{mm}\cdot n$$

$$(l\,n')\,(l\,n'')\,n'_x\,n''_x = A_{ln}\cdot n - \frac{1}{2}\,A_{nn}\cdot l$$

$$(m\,n')\,(m\,n'')\,n'_x\,n''_x = A_{mn}\cdot n - \frac{1}{2}\,A_{nn}\cdot m$$

$$(n\,n')\,(n\,n'')\,n'_x\,n''_x = \frac{1}{2}\,A_{nn}\cdot n$$

$$(l\,n')\,(l\,m')\,n'_x\,m'_x = \frac{1}{2}\left[-A_{nm}\cdot l + A_{lm}\cdot n + A_{ln}\cdot m\right]$$

$$(m\,n')\,(m\,m')\,n'_x\,m'_x = \frac{1}{2}\,A_{mm}\cdot n$$

$$(n\,n')\,(n\,m')\,n'_x\,m'_x = \frac{1}{2}\,A_{nn}\cdot m$$

$$(l n')(l l') n'_x l'_x = \frac{1}{2} A_{ll} \cdot n$$

$$(m n')(m l') n'_x l'_x = \frac{1}{2} [- A_{ln} \cdot m + A_{mn} \cdot l + A_{ml} \cdot n]$$

$$(n n')(n l') n'_x l'_x = \frac{1}{2} A_{nn} \cdot l$$

$$(l l'))l m') l'_x m'_x = \frac{1}{2} A_{ll} \cdot m$$

$$(m l')(m m') l'_x m'_x = \frac{1}{2} A_{mm} \cdot l$$

$$(n l')(n m') l'_x m'_x = \frac{1}{2} [- A_{ml} \cdot n + A_{nl} \cdot m + A_{nm} \cdot l].$$

Mediante questa tabella si faranno le calcolazioni del paragrafo seguente.

§ 11. Determinazione definitiva delle $(f, \omega\omega')^4$.

Dal paragrafo precedente appare il metodo che possiamo tenere pel calcolo delle $(f, \omega\omega')^4$ dove ω, ω' sono due qualunque delle quadratiche λ, μ, ν. Supponiamo che ω sia il determinante funzionale di a e b, e ω' quello di c, d essendo a, b, c, d quattro quadratiche scelte fra le l, m, n. Sieno allora, secondo le formole (4) del § 5, le quarte spinte di f sui prodotti ac, bd, ad, bc espresse rispettivamente da:

$$\begin{aligned}
(f, ac)^4 &= A_1 l + B_1 m + C_1 n \\
(f, bd)^4 &= A_2 l + B_2 m + C_2 n \\
(f, ad)^4 &= A_3 l + B_3 m + C_3 n \\
(f, bc)^4 &= A_4 l + B_4 m + C_4 n.
\end{aligned}$$

Secondo i risultati del paragrafo precedente si ha allora:

$$\begin{aligned}
(f, \omega\omega')^4 = {} & [A_1 (l b)(l d) + B_1 (m b)(m d) + C_1 (n b)(n d)] \, b_x d_x \\
& + [A_2 (l a)(l c) + B_2 (m a)(m c) + C_2 (n a)(n c)] \, a_x c_x \\
& - [A_3 (l b)(l c) + B_3 (m b)(m c) + C_3 (n b)(n c)] \, b_x c_x \\
& - [A_4 (l a)(l d) + B_4 (m a)(m d) + C_4 (n a)(n d)] \, a_x d_x,
\end{aligned}$$

e le espressioni $(l\,b)(l\,d)b_x d_x$, ecc. ecc. sono state tutte calcolate nel paragrafo precedente.

Nel caso che ω, ω' sono la stessa quadratica, la terza e quarta linea sono identiche, perchè allora $a \equiv c$, $b \equiv d$.

Così operando si possono stabilire le seguenti formole:

$$(f,\ \lambda^2)^4 = L_{11}\,l + M_{11}\,m + N_{11}\,n,$$

dove:

$$L_{11} = \frac{2}{9}C^2 D - \frac{1}{27}A B^2 C^2 - \frac{4}{81}A^2 C^3 + \frac{2}{27}B C^3$$

$$M_{11} = \frac{1}{18}B^5 + \frac{4}{27}B^2 C^2 + \frac{1}{9}A B^3 C + \frac{1}{9}A C^3 + \frac{4}{81}A^2 B C^2 - \frac{1}{4}D^2 + \frac{1}{9}B C D$$

$$N_{11} = \frac{1}{9}A C D - \frac{4}{27}B^3 C - \frac{2}{9}C^3 - \frac{5}{27}A B C^2$$

$$(f,\ \mu^2)^4 = L_{22}\,l + M_{22}\,m + N_{22}\,n,$$

dove:

$$L_{22} = -\frac{5}{54}B^3 C - \frac{2}{9}C^3 - \frac{5}{27}A B C^2 - \frac{1}{36}A B^4 - \frac{1}{27}A^2 B^2 C + \frac{1}{6}B^2 D + \frac{1}{9}A C D$$

$$M_{22} = \frac{1}{6}C D + \frac{1}{18}B C^2 - \frac{1}{36}A B^2 C - \frac{1}{27}A^2 C^2$$

$$N_{22} = -\frac{1}{18}B^2 C + \frac{1}{36}A B^3 + \frac{1}{27}A^2 B C - \frac{1}{6}B D$$

$$(f,\ \nu^2)^4 = L_{33}\,l + M_{33}\,m + N_{33}\,n,$$

dove:

$$L_{33} = \frac{1}{9}B^2 C - \frac{1}{18}A B^3 - \frac{2}{27}A^2 B C + \frac{1}{3}B D$$

$$M_{33} = \frac{2}{9}B^3 + \frac{5}{18}A B C - \frac{1}{6}A D + \frac{1}{3}C^2$$

$$N_{33} = -D - \frac{1}{3}B C + \frac{1}{6}A B^2 + \frac{2}{9}A^2 C$$

$$(f,\ \lambda\mu)^4 = L_{12}\,l + M_{12}\,m + N_{12}\,n,$$

dove:

$$L_{12} = \frac{1}{18}B^5 + \frac{4}{27}B^2C^2 + \frac{1}{9}AB^3C + \frac{1}{9}AC^3$$

$$+ \frac{4}{81}A^2BC^2 - \frac{1}{4}D^2 + \frac{1}{9}BCD$$

$$M_{12} = -\frac{5}{54}B^3C - \frac{2}{9}C^3 - \frac{5}{27}ABC^2$$

$$-\frac{1}{36}AB^4 - \frac{1}{27}A^2B^2C + \frac{1}{6}B^2D + \frac{1}{9}ACD$$

$$N_{12} = -\frac{1}{6}AB^2C - \frac{1}{27}A^2C^2 + \frac{1}{6}CD + \frac{1}{12}ABD$$

$$-\frac{1}{9}BC^2 - \frac{1}{9}B^4$$

$$(f,\ \mu\nu)^4 = L_{23}\,l + M_{23}\,m + N_{23}\,n,$$

dove:

$$L_{23} = -\frac{1}{6}AB^2C - \frac{1}{27}A^2C^2 + \frac{1}{6}CD + \frac{1}{12}ABD$$

$$-\frac{1}{9}BC^2 - \frac{1}{9}B^4$$

$$M_{23} = -\frac{1}{18}B^2C + \frac{1}{36}AB^3 + \frac{1}{27}A^2BC - \frac{1}{6}BD$$

$$N_{23} = \frac{2}{9}B^3 + \frac{5}{18}ABC - \frac{1}{6}AD + \frac{1}{3}C^2$$

$$(f,\ \nu\lambda)^4 = L_{31}\,l + M_{31}\,m + N_{31}\,n,$$

dove:

$$L_{31} = \frac{1}{9}ACD - \frac{4}{27}B^3C - \frac{2}{9}C^3 - \frac{5}{27}ABC^2$$

$$M_{31} = -\frac{1}{6}AB^2C - \frac{1}{27}A^2C^2 + \frac{1}{6}CD + \frac{1}{12}ABD$$

$$-\frac{1}{9}BC^2 - \frac{1}{9}B^4$$

$$N_{31} = \frac{1}{9}B^2C - \frac{1}{18}AB^3 - \frac{2}{27}A^2BC + \frac{1}{3}BD.$$

Il calcolo di tutti questi coefficienti riesce più agevole se si tien conto del fatto che debbono sussistere le seguenti relazioni fra essi, come si può prevedere *a priori*, e come si trova poi effettivamente verificato:

$$M_{11} = L_{12}; \qquad N_{11} = L_{31}; \qquad L_{22} = M_{12};$$
$$N_{22} = M_{23}; \qquad L_{33} = N_{31}; \qquad M_{33} = N_{23};$$
$$N_{12} = M_{31} = L_{23}.$$

§ 12. Determinazione dell'espressione di F_3.

Mediante le formole ottenute nel paragrafo precedente possiamo calcolare l'espressione definitiva di F_3, giovandoci della formola (4) del § 4.

Sviluppando tale formola si ha:

$$\begin{aligned} F_3 = {} & 2(f,\ \lambda^3)^6 X_1^3 + 2(f,\ \mu^3)^6 X_2^3 + 2(f,\ \nu^3)^6 X_3^3 \\ & + 6(f,\ \lambda^2\mu)^6 X_1^2 X_2 + 6(f,\ \mu^2\nu)^6 X_2^2 X_3 + 6(f,\ \nu^2\lambda)^6 X_3^2 X_1 \\ & + 6(f,\ \lambda\mu^2)^6 X_1 X_2^2 + 6(f,\ \mu\nu^2)^6 X_2 X_3^2 + 6(f,\ \nu\lambda^2)^6 X_3 X_1^2 \\ & + 12(f,\ \lambda\mu\nu)^6 X_1 X_2 X_3. \end{aligned}$$

Ora:

$$(f,\ \lambda^3)^6 = [(f,\ \lambda^2)^4,\ \lambda]^2,$$

e così analogamente possiamo esprimere tutti gli altri coefficienti come seconde spinte sopra λ, o μ, o ν, di una delle espressioni calcolate al paragrafo precedente. Poichè tali ultime espressioni sono funzioni lineari in l, m, n bisognerà tener presenti le formole semplicissime (1) del § 8.

Onde possiamo scrivere senz'altro:

$$\begin{aligned} F_3 = -2R\Big\{ & L_{11} X_1^3 + M_{22} X_2^3 + N_{33} X_3^3 \\ & + 3L_{12} X_1^2 X_2 + 3M_{23} X_2^2 X_3 + 3N_{31} X_3^2 X_1 \\ & + 3L_{22} X_1 X_2^2 + 3M_{33} X_2 X_3^2 + 3N_{11} X_3 X_1^2 \\ & + 6N_{12} X_1 X_2 X_3 \Big\}, \end{aligned}$$

dove i coefficienti L, M, N sono calcolati nel paragrafo precedente in funzione degli invarianti fondamentali.

§ 13. Introduzione alla costruzione del primo termine di F_4.

Il secondo e terzo termine di F_4 li abbiamo calcolati nei paragrafi precedenti. Per poter calcolare il primo termine occorre la conoscenza delle ottave spinte di H sopra prodotti di quarto grado delle λ, μ, ν, giusta la formola (6) del § 4.

Cercheremo dunque prima di tutto di trovare un artifizio col quale, *giovandosi solo delle formole stabilite sinora,* si possano trovare le seste spinte di H su prodotti di 3.° grado delle λ, μ, ν. Quando avremo poi conosciute tali seste spinte, che verranno linearmente espresse mediante i sei covarianti quadratici, allora coll'applicazione di una ulteriore seconda spinta sopra λ, μ, o ν otteniamo i risultati desiderati.

Incominciamo intanto col mostrare che un'espressione del tipo:

$$(a\,b)^2\,(a\,\omega)^2\,(a\,\omega')^2\,(b\,\omega'')^2\,b_x^2, \tag{1}$$

dove ω, ω', ω'' sieno in un ordine qualunque le tre quadratiche λ, μ, ν (potendo essere anche tutte tre una stessa λ, ovvero due di esse potendo rappresentare λ e la terza, μ, e così di seguito) può esprimersi mediante le spinte di cui già ci son noti i valori.

Infatti la (1) è chiaramente eguale a

$$\left([(f,\ \omega\,\omega')^4,\ f]^2\,\omega''\right)^2.$$

Ora $(f,\ \omega\,\omega')^4$ ci è noto dalle formole del § 11, da cui risulta ancora che esso si esprime linearmente solo mediante l, m, n.

Per operare ora la seconda spinta del risultato ottenuto su f, basta dunque conoscere le seconde spinte su f, delle tre quadratiche l, m, n. Tali seconde spinte sono note (*), e si sa ancora che esse si esprimono solo mediante le seguenti formazioni di 4.° ordine [vedi formole (5) § 5]:

$$\Delta, \qquad i, \qquad l^2, \qquad l\,m.$$

Quindi le seconde spinte finali sopra ω'' si possono effettuare mediante le formole (3) (4) (5) (6) del § 8 e le formole (1) (2) del § 10.

Vogliamo far vedere ora come si può dal calcolo dell'espressione (1) ricavare quello della sesta spinta di H sopra il prodotto $\omega\,\omega'\,\omega''$.

(*) Gordan, *Invariant.*, Bd. 2, pag. 287-88-89.

Consideriamo l'espressione:

$$(a\,b)^2\, a_y^2\, a_z^2\, b_t^2\, b_x^2\,, \tag{2}$$

e trasformiamola colla nota formola di Gordan che esprime un covariante con più serie di variabili cogredienti mediante polari di covarianti contenenti una sola serie di variabili.

Si ottengono consecutivamente i seguenti sviluppi (indicando al solito con Δ le operazioni di polari):

$$\begin{aligned}(a\,b)^2 a_y^2\, a_z^2\, b_t^2\, b_x^2 &= \Delta_{tx}^2 (a\,b)^2\, a_y^2\, a_z^2\, b_x^4 \\ &= (a\,b)^2\, \Delta_{tx}^2 \Big\{ \Delta_{zx}^2\, a_y^2\, a_x^2\, b_x^4 + \frac{4}{3}\,(z\,x)\,(a\,b)\,\Delta_{zx}\, a_y^2\, a_x\, b_x^3 \\ &\qquad + \frac{3}{5}\,(z\,x)^2\,(a\,b)^2\, a_y^2\, b_x^2 \Big\} \\ &= (a\,b)^2\, \Delta_{tx}^2 \Big\{ \Delta_{zx}^2 \Big[\Delta_{yx}^2\, a_x^4\, b_x^4 + (y\,x)\,(a\,b)\,\Delta_{yx}\, a_x^3\, b_x^3 + \frac{2}{7}\,(y\,x)^2\,(a\,b)^2\, a_x^2\, b_x^2 \Big] \\ &\quad + \frac{4}{3}\,(z\,x)\,(a\,b)\,\Delta_{zx} \Big[\Delta_{yx}^2\, a_x^3\, b_x^3 + (y\,x)\,(a\,b)\,\Delta_{yx}\, a_x^2\, b_x^2 + \frac{3}{10}\,(y\,x)^2\,(a\,b)^2\, a_x\, b_x \Big] \\ &\quad + \frac{3}{5}\,(z\,x)^2\,(a\,b)^2 \Big[\Delta_{yx}^2\, a_x^2\, b_x^2 + (y\,x)\,(a\,b)\,\Delta_{yx}\, a_x\, b_x + \frac{1}{3}\,(y\,x)^2\,(a\,b)^2 \Big] \Big\}\,,\end{aligned}$$

e, tenendo conto che a, b sono simboli equivalenti, e quindi sono zero i termini contenenti $(a\,b)$ a potenze dispari, resta finalmente:

$$(a\,b)^2\, a_y^2\, a_z^2\, b_t^2\, b_x^2 = \Delta_{tx}^2\, \Delta_{zx}^2\, \Delta_{yx}^2 (a\,b)^2\, a_x^4\, b_x^4 + \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} \frac{2}{7}\, \Delta_{tx}^2\, \Delta_{zx}^2 (y\,x)^2 \\ + \frac{4}{3}\, \Delta_{tx}^2\, (z\,x)\, \Delta_{zx} (y\,x)\, \Delta_{yx} \\ + \frac{3}{5}\, \Delta_{tx}^2 (z\,x)^2\, \Delta_{yx}^2 \end{array} \right) (a\,b)^4\, a_x^2\, b_x^2 \\ + \frac{1}{5}\, \Delta_{tx}^2\, (z\,x)^2\, (y\,x)^2 \cdot A. \end{array} \right. \tag{3}$$

Se mutiamo in questa formola le variabili t, z, y nei simboli, ω, ω', ω'' abbiamo nel primo termine del secondo membro esattamente la sesta spinta di $H = (a\,b)^2\, a_x^4\, b_x^4$ sopra il prodotto $\omega\, \omega'\, \omega''$. È di questa formola appunto che noi ci serviremo assai opportunamente per calcolare la detta sesta spinta.

§ 14. Osservazioni sull'applicazione dell'espressione (3) del paragrafo precedente.

Vediamo quali difficoltà presenta l'applicazione della espressione (3) del paragrafo precedente.

In primo punto mutando $y\ z\ t$ in ω, ω', ω'' l'ultimo termine diventa:

$$(\omega\,\omega',\ \omega'')^2. \tag{1}$$

Ora nel § 8 abbiamo calcolate le seconde spinte di una λ, μ, ν su prodotti di due covarianti quadratici; però non abbiamo calcolate tutte le possibili combinazioni di tal tipo; ma è facile mostrare che per il nostro scopo attuale ci sono sufficienti quelle ivi calcolate. Infatti perchè a noi non occorre altro che di trovare le ottave spinte di H sopra prodotti di 4.° grado di λ, μ, ν, così fra i fattori di tal prodotto ve ne saranno certamente almeno *due* eguali; possiamo dunque limitarci a calcolare non tutte le possibili seste spinte di cui è parola avanti, ma tutte meno quella sul prodotto $\lambda\mu\nu$. Allora possiamo sempre supporre $\omega = \omega'$, e quindi la (1) verrà ricondotta sempre ad una di quelle comprese nelle formole (7) (8) del § 8.

Passiamo ora a considerare il penultimo termine della formola (3) del paragrafo precedente.

Tale penultimo termine rappresenta un certo complesso di operazioni di polari effettuato sopra:

$$i = (a\,b)^4\,a_x^2\,b_x^2.$$

Ora mutando y, z, t in ω, ω', ω'' comparirebbero le *prime* spinte di i sopra ω, ω', ω''.

A prescindere dal fatto che tali *prime* spinte non le conosciamo dalle formole stabilite avanti e dovremmo quindi calcolarle a parte, si avrebbe però ancora che esse verrebbero espresse in generale mediante *tutti* i covarianti di 4.° ordine; dovremmo quindi introdurre nel giro di tutte le nostre calcolazioni tutti i covarianti di 4.° ordine (che sono cinque a prescindere dai prodotti a due a due dei covarianti quadratici), mentre che noi finora non abbiamo introdotto altri covarianti di 4.° ordine che i, Δ.

Tutto ciò si evita se noi cercheremo di trasformare tutto l'assieme delle polari espresso dal penultimo termine di (3), in modo che la polare da operare immediatamente su λ sia sempre una *seconda polare*.

Passiamo dunque a trasformare, sotto il detto punto di vista, il simbolo operativo su i:

$$D = \left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{7} \Delta_{tx}^2 \Delta_{zx}^2 (y\,x)^2 \\ + \frac{4}{3} \Delta_{tx}^2 (z\,x) \Delta_{zx} (y\,x) \Delta_{yx} \\ + \frac{3}{5} \Delta_{tx}^2 (z\,x)^2 \Delta_{yx}^2 . \end{array} \right\}$$

§ 15. Trasformazione del simbolo operativo D.

In primo luogo si vede che il terzo termine del simbolo D presenta una difficoltà di applicazione che però si elimina facilmente. Giacchè mutando y, z, t in ω, ω', ω'' si ha una espressione del tipo:

$$[(\omega,\ i)^2 \cdot \omega',\ \omega'']^2.$$

Ora $(\omega,\ i)^2$ si esprime linearmente mediante λ, μ, ν; bisognerebbe poi conoscere le seconde spinte su ω'', del prodotto di due di tali quadratiche; ora noi nel § 8 non abbiamo calcolate tutte le possibili spinte del prodotto di due quadratiche su di un'altra, quindi avremmo ora la necessità di completare questa ricerca del § 8. Però è facile vedere che ciò si può evitare.

Infatti noi possiamo scrivere:

$$\Delta_{tx}^2 (z\,x)^2 \Delta_{yx}^2 \cdot i_x^4 = \frac{1}{6} \left\{ (z\,t)^2 \Delta_{yx}^2 + 4 (z\,x)(z\,t) \Delta_{tx} \Delta_{yx}^2 + (z\,x)^2 \Delta_{tx}^2 \Delta_{yx}^2 \right\} i_x^4, \quad (1)$$

ed è facile vedere che nell'applicazione del secondo membro non si incontra più la difficoltà accennata.

Facciamo ora la trasformazione del primo e secondo termine di D.

Si ha in primo luogo:

$$\Delta_{zx}^2 (y\,x)^2 \cdot i_x^4 = \frac{1}{15} (y\,z)^2 i_x^4 + \frac{8}{15} (y\,x)(y\,z)\, i_x^3\, i_z + \frac{2}{5} (y\,x)^2 i_x^2 i_z^2$$

$$(y\,z) \Delta_{tx}^2 (y\,x)\, i_x^3\, i_z = \frac{(y\,z)}{2} [(y\,t)\, i_x^2\, i_z\, i_t + (y\,x)\, i_x\, i_t^2\, i_z .$$

Si trasformi il primo termine della seconda formola con

$$(y\,t)\, i_x = (x\,t)\, i_y + (y\,x)\, i_t .$$

Allora risulta un termine in $i_x i_y i_z i_t$, il qual termine si trasformi poi daccapo con

$$(y z) i_x = (x z) i_y + (y x) i_z .$$

Allora risultano infine sempre termini contenenti i_z^2, ovvero i_t^2, ovvero i_y^2. Quindi si ha infine:

$$\begin{aligned}\Delta_{tx}^2 \Delta_{zx}^2 (y x)^2 i_x^4 = & \left[\frac{1}{15}(y z)^2 + \frac{8}{15}(y z)(y x)\Delta_{zx}\right]\Delta_{tx}^2 \cdot i \\ & + \left[\frac{1}{15}(y t)^2 + \frac{4}{15}(y x)(y t)\Delta_{tx} + \frac{1}{15}(y x)^2 \Delta_{tx}^2 + \right. \\ & \left. + \frac{4}{15}(y x)(x t)\Delta_{tx}\Delta_{yx}\right]\Delta_{zx}^2 \cdot i \\ & + \frac{4}{15}(x t)(x z)\Delta_{zx}\Delta_{tx}\Delta_{yx}^2 \cdot i.\end{aligned}$$

I quattro termini della seconda parentesi possono ridursi ad un numero minore, usando l'identità:

$$(y t)\Delta_{xx} + (t x)\Delta_{yx} + (x y)\Delta_{tx} = 0,$$

dove con Δ_{xx} si intende l'operazione identica.

Con ciò si ha:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_{tx}^2 \Delta_{zx}^2 (y x)^2 i_x^4 = & \left[\frac{1}{15}(y z)^2 + \frac{8}{15}(y z)(y x)\Delta_{zx}\right]\Delta_{tx}^2 \cdot i \\ & + \left[\frac{1}{15}(y t)^2 + \frac{8}{15}(y x)(y t)\Delta_{tx} - \frac{1}{5}(y x)^2 \Delta_{tx}^2\right]\Delta_{zx}^2 \cdot i \\ & + \frac{4}{15}(x t)(x z)\Delta_{zx}\Delta_{tx}\Delta_{yx}^2 \cdot i.\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Cerchiamo ora di ridurre ad una forma analoga il secondo termine del simbolo operativo D.

Si ha:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_{tx}^2 (z x)\Delta_{zx}(y x)\Delta_{yx} \cdot i = & \frac{1}{12}\left\{\left[\frac{3}{2}(z t)(z x)\Delta_{tx} + \frac{3}{2}(z t)(x t)\Delta_{zx} + \right.\right. \\ & \left. + 3(z x)(x t)\Delta_{zx}\Delta_{tx}\right]\Delta_{yx}^2 \cdot i \\ & + \left[\frac{21}{2}(y x)(z x)\Delta_{zx}\Delta_{yx} + \frac{3}{2}(y z)(z x)\Delta_{yx}\right]\Delta_{tx}^2 \cdot i \\ & + 6(y x)(x t)\Delta_{tx}\Delta_{yx} \cdot \Delta_{zx}^2 \cdot i.\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Raccogliendo ora i risultati (1) (2) (3) si ha:

$$D = \left[\frac{6}{7\cdot 5}(y\,z)^2 + \frac{67}{7\cdot 6\cdot 5}(y\,z)(z\,x)\Delta_{yx} + \frac{7}{6}(y\,x)(z\,x)\Delta_{yx}\Delta_{zx}\right]\Delta_{tx}^2$$
$$+\left[\frac{2}{7\cdot 5\cdot 3}(y\,t)^2 + \frac{86}{7\cdot 5\cdot 3}(y\,x)(y\,t)\Delta_{tx} - \frac{76}{7\cdot 5\cdot 3}(y\,x)^2\Delta_{tx}^2\right]\Delta_{zx}^2$$
$$+\left[\frac{3}{7}(z\,t)^2 - \frac{17}{7\cdot 5\cdot 3}(x\,t)^2\Delta_{zx}^2 + \frac{1}{7\cdot 5\cdot 3\cdot 2}(z\,x)^2\Delta_{tx}^2\right]\Delta_{yx}^2.$$

Questa espressione però può anche notevolmente semplificarsi e ciò si ottiene trasformando le prime due parentesi in maniera da far loro acquistare una forma simile a quella acquistata dalla terza parentesi, cioè contenente solo polari a seconda potenza e non a prima potenza; e a tal uopo si debbono adoperare le formole identiche:

$$(y\,t)(y\,x)\Delta_{tx} = \frac{1}{2}\left\{(y\,t)^2 + (x\,y)^2\Delta_{tx}^2 - (t\,x)^2\Delta_{yx}^2\right\}$$
$$(y\,x)\Delta_{zx} = (z\,x)\Delta_{yx} + (y\,z)$$
$$(z\,y)(z\,x)\Delta_{yx} = \frac{1}{2}\left\{(y\,z)^2 + (z\,x)^2\Delta_{yx}^2 - (y\,x)^2\Delta_{zx}^2\right\}.$$

Facendo questa riduzione opportunamente, e osservando poi che l'ordine delle polari è indifferente, si ha infine, riducendo:

$$\left.\begin{aligned} D = &-\frac{4}{7}(y\,z)^2\Delta_{tx}^2 + \frac{3}{7}(y\,t)^2\Delta_{zx}^2 + \frac{3}{7}(z\,t)^2\Delta_{yx}^2 \\ &-\frac{4}{7}(t\,x)^2\Delta_{yx}^2\Delta_{zx}^2 + \frac{3}{7}(y\,x)^2\Delta_{zx}^2\Delta_{tx}^2 + \frac{3}{7}(z\,x)^2\Delta_{yx}^2\Delta_{tx}^2. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Quest'espressione è simmetrica in y e z come appunto deve verificarsi, perchè tale simmetria è posseduta originariamente dal primo membro, e dal primo e terzo termine del secondo membro, della formola (3) del § 13.

§ 16. Determinazione di alcune formazioni del tipo $(H,\ \omega\,\omega'\,\omega'')^6$.

Per lo scopo finale che ci siamo proposti sin da principio, cioè la ricerca delle ottave spinte di H su prodotti di 4.° grado di λ, μ, ν, non ci occorrerà di conoscere che solo le seste spinte di H sopra

$$\lambda^3, \quad \mu^3, \quad \nu^3, \quad \lambda^2\mu, \quad \mu^2\nu, \quad \nu^2\lambda.$$

Ci proponiamo di calcolare in questo paragrafo separatamente ciascuna di queste spinte, e ci serviremo naturalmente della formola (3) del § 13.

Mutiamo in essa y, z, t in λ e abbiamo:

$$(H, \lambda^3)^6 = \left([(f, \lambda^2)^4, f]^2, \lambda\right)^2 - \frac{1}{5} A \cdot (\lambda, \lambda^2)^2$$
$$- \left[\frac{2}{7} A_{\lambda\lambda} (i, \lambda)^2 + \frac{2}{7} \lambda \cdot (i, \lambda^2)^4\right]$$
$$= L_{111} l + M_{111} m + N_{111} n + L'_{111} \lambda + M'_{111} \mu + N'_{111} \nu,$$

dove i coefficienti hanno i seguenti valori:

$$L_{111} = -\frac{1}{2} R M_{11}$$
$$M_{111} = -\frac{1}{6} R N_{11}$$
$$N_{111} = 0$$
$$L'_{111} = -\frac{2}{3} L_{11} B - \frac{1}{9} M_{11} A B - \frac{1}{9} N_{11} B^2 - \frac{1}{6} A_{ll} M_{11}$$
$$- \frac{2}{15} A_{\lambda\lambda} \cdot A - \frac{2}{21} C A_{\nu\lambda}$$
$$M'_{111} = \frac{2}{3} L_{11} C + \frac{1}{9} M_{11} A C + \frac{1}{9} N_{11} C B + \frac{1}{3} A_{mm} N_{11}$$
$$N'_{111} = \frac{2}{9} L_{11} A C + \frac{1}{9} M_{11} B C - \frac{1}{9} N_{11} C^2 + \frac{1}{3} A_{mn} N_{11} - \frac{2}{21} C A_{\lambda\lambda},$$

(per le L, M, N con due indici vedi il § 11).

Mutando invece gli stessi simboli in μ, e servendosi delle formole stabilite si ha:

$$(H, \mu^3)^6 = L_{222} l + M_{222} m + N_{222} n + L'_{222} \lambda + M'_{222} \mu + N'_{222} \nu,$$

dove:

$$L_{222} = -\frac{1}{6} R N_{22}$$
$$M_{222} = 0$$
$$N_{222} = 0$$
$$L'_{222} = \frac{2}{3} A L_{22} + \frac{1}{3} B M_{22} - \frac{1}{3} C N_{22} + \frac{1}{3} A_{ll} N_{22} - \frac{2}{7} A_{\mu\mu}$$
$$M'_{222} = \frac{1}{3} B L_{22} + \frac{1}{18} A B M_{22} + \frac{1}{18} B^2 N_{22} - \frac{1}{6} A_{ll} M_{22} - \frac{2}{15} A A_{\mu\mu}$$
$$- \frac{2}{7} A_{\lambda\mu} - \frac{1}{7} B A_{\mu\nu}$$

$$N'_{222}=\frac{2}{3}CL_{22}+\frac{1}{9}ACM_{22}-\frac{1}{18}CBN_{22}+\frac{1}{3}ABL_{22}+\frac{1}{6}B^2M_{22}$$
$$+\frac{1}{3}A_{ln}N_{22}-\frac{1}{7}BA_{\mu\mu}$$

$$(H,\ \nu^3)^6=L_{333}l+M_{333}m+N_{333}n+L'_{333}\lambda+M'_{333}\mu+N'_{333}\nu,$$

dove:

$$L_{333}=0$$
$$M_{333}=0$$
$$N_{333}=0$$
$$L'_{333}=2L_{33}+\frac{1}{3}AM_{33}+\frac{1}{3}BN_{33}$$
$$M'_{333}=\frac{2}{3}AL_{33}+\frac{1}{3}BM_{33}-\frac{1}{3}CN_{33}-\frac{2}{7}A_{\nu\nu}$$
$$N'_{333}=\frac{1}{3}BL_{33}+\frac{1}{18}ABM_{33}+\frac{1}{18}B^2N_{33}-\frac{1}{6}A_{ll}M_{33}-\frac{1}{3}A_{ml}N_{33}$$
$$-\frac{2}{15}AA_{\nu\nu}-\frac{2}{7}A_{\mu\nu}.$$

Mutiamo invece nella (3) del § 13 le variabili y, z in λ, e t in μ. Si ha:

$$\lambda^2\mu)^6=\Big([(f,\ \lambda^2)^4,\ f]^2,\ \mu\Big)^2-\frac{1}{5}A(\mu,\ \lambda^2)^2+$$
$$+\frac{4}{7}A_{\lambda\lambda}(i,\ \mu)^2-\frac{6}{7}A_{\lambda\mu}(i,\ \lambda)^2$$
$$+\frac{4}{7}[(i,\ \lambda)^2,\ \lambda]^2\cdot\mu-\frac{6}{7}[(i,\ \lambda)^2,\ \mu]^2\cdot\lambda,$$

e colla permutazione circolare di λ, μ, ν si hanno le altre formole che ci occorrono.

Da questa si ricava:

$$(H,\ \lambda^2\mu)^6=L_{112}l+M_{112}m+N_{112}n+L'_{112}\lambda+M'_{112}\mu+N'_{112}\nu,$$

dove:

$$L_{112}=-\frac{1}{6}RN_{11}$$
$$M_{112}=0$$
$$N_{112}=0$$
$$L'_{112}=\frac{2}{3}AL_{11}+\frac{1}{3}BM_{11}-\frac{1}{3}CN_{11}+\frac{1}{3}A_{ll}N_{11}-\frac{1}{5}AA_{\mu\lambda}$$
$$+\frac{4}{7}A_{\lambda\lambda}-\frac{2}{7}CA_{\mu\nu}$$

$$M'_{112} = \frac{1}{3} B L_{11} + \frac{1}{18} A B M_{11} + \frac{1}{18} B^2 N_{11} - \frac{1}{6} A_{ll} M_{11} + \frac{1}{15} A A_{\lambda\lambda}$$
$$+ \frac{4}{21} C A_{\nu\lambda}$$

$$N'_{112} = \frac{2}{3} C N_{11} + \frac{1}{9} A C M_{11} - \frac{1}{18} B C N_{11} + \frac{1}{3} A L_{11} + \frac{1}{6} B^2 M_{11}$$
$$+ \frac{1}{3} A_{ln} N_{11} + \frac{2}{7} B A_{\lambda\lambda} - \frac{2}{7} C A_{\lambda\mu}$$

$$(H, \mu^2 \nu)^6 = L_{223}\, l + M_{223}\, m + N_{223}\, n + L'_{223} \lambda + M'_{223} \mu + N'_{223} \nu,$$

dove:

$$L_{223} = 0$$
$$M_{223} = 0$$
$$N_{223} = 0$$
$$L'_{223} = 2 L_{22} + \frac{1}{3} A M_{22} + \frac{1}{3} B N_{22} - \frac{6}{7} A_{\mu\nu}$$
$$M'_{223} = \frac{2}{3} A L_{22} + \frac{1}{3} B M_{22} - \frac{1}{3} C N_{22} - \frac{1}{5} A A_{\mu\nu} - \frac{2}{7} A_{\mu\mu}$$
$$N'_{223} = \frac{1}{3} B L_{22} + \frac{1}{18} A B M_{22} + \frac{1}{18} B^2 N_{22} - \frac{1}{6} A_{ll} M_{22}$$
$$- \frac{1}{3} A_{ml} N_{22} + \frac{1}{15} A A_{\mu\mu} - \frac{1}{7} B A_{\mu\nu} + \frac{4}{7} A_{\lambda\mu}$$

$$(H, \nu^2 \lambda)^6 = L_{331}\, l + M_{331}\, m + N_{331}\, n + L'_{331} \lambda + M'_{331} \mu + N'_{331} \nu,$$

dove:

$$L_{331} = - \frac{1}{2} R M_{33}$$
$$M_{331} = - \frac{1}{6} R N_{33}$$
$$N_{331} = 0$$
$$L'_{331} = - \frac{2}{3} B L_{33} - \frac{1}{9} A B M_{33} - \frac{1}{9} B^2 N_{33} - \frac{1}{6} A_{ll} M_{33}$$
$$+ \frac{1}{15} A A_{\nu\nu} + \frac{4}{7} A_{\mu\nu}$$
$$M'_{331} = \frac{2}{3} C L_{33} + \frac{1}{9} A C M_{33} + \frac{1}{9} B C N_{33} + \frac{1}{3} A_{mm} N_{33}$$
$$- \frac{6}{7} A_{\nu\lambda}$$
$$N'_{331} = \frac{2}{9} A C L_{33} + \frac{1}{9} B C M_{33} - \frac{1}{9} C^2 N_{33} + \frac{1}{3} A_{mn} N_{33}$$
$$- \frac{1}{5} A A_{\lambda\nu} + \frac{4}{21} C A_{\nu\nu} - \frac{6}{7} A_{\lambda\mu}.$$

§ 17. Determinazione del primo termine di F_4.

Resta ora semplicemente a determinare il primo termine di F_4 cioè (vedi § 4):

$$[\sum(\lambda H)^2 X_1]^4. \tag{1}$$

I varii coefficienti delle potenze delle X, come appare da questa formola sono spinte di 8.° ordine di H sopra prodotti di 4.° grado delle quadratiche λ, μ, ν.

Tali spinte le possiamo calcolare facilmente per mezzo dei risultati del paragrafo precedente.

Indicando simbolicamente con S_X^4 la espressione (1), abbiamo per i coefficienti simbolici S i seguenti valori:

$$\begin{aligned}
S_1^4 &= -RL_{111} + L'_{111}A_{\lambda\lambda} + M'_{111}A_{\lambda\mu} + N'_{111}A_{\lambda\nu}\\
S_2^4 &= L'_{222}A_{\lambda\mu} + M'_{222}A_{\mu\mu} + N'_{222}A_{\mu\nu}\\
S_3^4 &= L'_{333}A_{\lambda\nu} + M'_{333}A_{\mu\nu} + N'_{333}A_{\nu\nu}\\
S_1^3 S_2 &= -RM_{111} + L'_{111}A_{\lambda\mu} + M'_{111}A_{\mu\mu} + N'_{111}A_{\mu\nu}\\
S_2^3 S_3 &= L'_{222}A_{\lambda\nu} + M'_{222}A_{\mu\nu} + N'_{222}A_{\nu\nu}\\
S_3^3 S_1 &= L'_{333}A_{\lambda\lambda} + M'_{333}A_{\lambda\mu} + N'_{333}A_{\lambda\nu}\\
S_1 S_2^3 &= -RL_{222} + L'_{222}A_{\lambda\lambda} + M'_{222}A_{\lambda\mu} + N'_{222}A_{\lambda\nu}\\
S_2 S_3^3 &= L'_{333}A_{\lambda\mu} + M'_{333}A_{\mu\mu} + N'_{333}A_{\mu\nu}\\
S_3 S_1^3 &= L'_{111}A_{\lambda\nu} + M'_{111}A_{\mu\nu} + N'_{111}A_{\nu\nu}\\
S_1^2 S_2^2 &= L'_{112}A_{\lambda\mu} + M'_{112}A_{\mu\mu} + N'_{112}A_{\mu\nu}\\
S_2^2 S_3^2 &= L'_{223}A_{\lambda\nu} + M'_{223}A_{\mu\nu} + N'_{223}A_{\nu\nu}\\
S_3^2 S_1^2 &= -RL_{331} + L'_{331}A_{\lambda\lambda} + M'_{331}A_{\lambda\mu} + N'_{331}A_{\lambda\nu}\\
S_1^2 S_2 S_3 &= L'_{112}A_{\lambda\nu} + M'_{112}A_{\mu\nu} + N'_{112}A_{\nu\nu}\\
S_2^2 S_3 S_1 &= L'_{223}A_{\lambda\lambda} + M'_{223}A_{\mu\lambda} + N'_{223}A_{\nu\lambda}\\
S_3^2 S_1 S_2 &= -RM_{331} + L'_{331}A_{\lambda\mu} + M'_{331}A_{\mu\mu} + N'_{331}A_{\nu\mu}.
\end{aligned}$$

Napoli, $\frac{\text{Marzo}}{\text{Giugno}}$ 1890.

FELICE CASORATI.

È con sentimento di profonda tristezza che io devo annunciare ai lettori di questi *Annali* la morte avvenuta l'undici settembre scorso di uno dei collaboratori di essi, del Prof. **Felice Casorati**.

L'Università di Pavia, alla quale egli apparteneva dall'anno 1858, ha perduto in lui un insegnante valentissimo, la scienza matematica uno degli uomini che maggiormente la onorarono in questa seconda metà del secolo decimonono.

Egli ebbe molta parte, tanto cogli scritti, quanto coll'insegnamento, a quel risveglio degli studi matematici in Italia, che permette a noi, oggi provetti, di confidare nell'avvenire.

Le sue pubblicazioni, molte delle quali in questi *Annali*, sommano a cinquanta; e fra esse quel Volume che ha per titolo: *Teorica delle funzioni di variabili complesse*, in cui si ammirano accoppiate le eminenti qualità dell'ingegno dell'Autore, la sua estesa coltura ed una esattezza nelle citazioni, pur troppo non comune.

Riservandomi di apprezzare fra breve in questi *Annali* l'opera scientifica del **Casorati**, mi limito ora all'annuncio della dolorosa sua perdita.

FR. BRIOSCHI.

Sulla trasformazione delle equazioni lineari, omogenee, a derivate parziali, con coefficienti costanti.

(*Di* Carlo Somigliana, *a Pavia.*)

Le regole ordinarie del calcolo differenziale dànno il modo di trovare in generale la trasformata di una equazione lineare, omogenea, a derivate parziali, con coefficienti costanti, quando alle variabili indipendenti si sostituiscono nuove variabili, legate alle prime da relazioni qualsivogliano, e dànno per la trasformata una nuova equazione lineare, in generale non più omogenea, nè a coefficienti costanti. Questi procedimenti però sono soggetti a due inconvenienti; in primo luogo conducono, specialmente per le equazioni di ordine elevato, a calcoli assai laboriosi, ed in secondo luogo lasciano completamente nell'ombra le relazioni, che pure devono esistere fra i coefficienti dell'equazione trasformata, poichè questa non è generale, ma gode evidentemente delle proprietà di essere, mediante la trasformazione inversa, ridotta omogenea, a coefficienti costanti. Tali relazioni poi sono di grande importanza, quando si tratta della integrazione delle equazioni; difatti, per citare un esempio notissimo, si sa come la forma concisa che si può dare alla trasformata della equazione di Laplace, in forza appunto di queste relazioni, permetta in molti casi di assegnarne degli integrali particolari con grandissima facilità.

La trasformazione della equazione di Laplace, o più in generale delle equazioni lineari, omogenee, a derivate parziali, del 2.° ordine, con coefficienti costanti è stata oggetto di molte ricerche. Basti citare Cauchy, Lamé e Jacobi fra i primi che si occuparono della questione; e, dei moderni, Brioschi (*)

(*) *Teorica dei determinanti,* § 10. Pavia, 1854.

e specialmente Beltrami (*), che portò alla sua attuale generalità la teoria dei parametri differenziali, la quale comprende, come caso speciale, quella della trasformazione. È notissimo quale sia il risultato di queste ricerche, cioè che la trasformazione della equazione si può ridurre a quella di una forma differenziale quadratica, evitando così il calcolo diretto delle derivate di 2.° ordine delle variabili di un sistema rispetto a quelle dell'altro.

Ora rispetto alle equazioni di ordine superiore al secondo, per quanto so, non sono state stabilite ricerche analoghe a quelle ora ricordate, nè si è cercato se i risultati ottenuti per quelle di 2.° ordine si potessero estendere ad equazioni di ordine superiore, quantunque queste, come la equazione di Laplace, sebbene più raramente, si presentino in diversi problemi di fisica matematica. È questa appunto la questione, che mi sono proposto di trattare, e di cui, come si vedrà, mi pare di aver dato in via generale la soluzione.

Il problema della trasformazione si connette essenzialmente con un altro pure assai interessante: la determinazione di quelle espressioni invariabili rispetto ad una forma differenziale, che, estendendo la denominazione introdotta dapprima da Lamé, si possono chiamare *parametri differenziali*, anche quando la forma differenziale è di ordine superiore al secondo.

Nell'ultimo paragrafo di questo lavoro, generalizzando un teorema di Christoffel, sul quale si può dire fondato un metodo elegantissimo dovuto al prof. Ricci per costruire i parametri differenziali delle forme quadratiche (**), ho ridotto la ricerca dei parametri delle forme di grado qualunque a quella degli invarianti algebrici simultanei di certi sistemi di forme differenziali, analogamente a quanto il prof. Ricci ha fatto per le forme quadratiche. Il problema algebrico essendo di gran lunga più semplice, e potendo in generale essere risoluto, ne viene che nello stesso modo anche la formazione dei parametri delle forme differenziali di grado qualsiasi potrà considerarsi, entro certi limiti, come un problema risoluto. Come applicazione del metodo generale ho trovato la espressione effettiva, per le forme del 4.° grado, di un gruppo di parametri che si presentano in certo modo come i corrispondenti di quelli noti delle forme quadratiche.

(*) *Sulla teorica generale dei parametri differenziali.* Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1869.

(**) Ricci, *Sui parametri e gli invarianti delle forme quadratiche differenziali* (Annali di Mat., S. 2.ª, T. 14). — *Sulla derivazione covariante ad una forma quadratica differenziale* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, 1887).

§ 1. Principio di Jacobi.

Il metodo più semplice ed elegante che si conosca per la trasformazione dell'equazione di Laplace è quello che è stato dato da Jacobi nella Memoria: *Ueber eine particuläre Lösung der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$ (Crelle, Bd. 36, G. W., Bd. 2) e che è fondato sopra un principio di trasformazione che egli deduce dal calcolo delle variazioni. Questo principio non è esclusivamente applicabile alle equazioni di 2.° ordine, ma possiede una assai maggiore generalità. Noi, traducendo in formule l'enunciato di Jacobi, possiamo esprimerlo nel seguente modo.

Si abbia una espressione F formata in modo qualunque con una funzione U di n variabili $x_1, x_2, \dots x_n$ e colle sue derivate parziali fino a quelle di un certo ordine; costruiamo l'espressione:

$$G = \frac{\partial F}{\partial U} - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\right)}\right) + \sum_{is} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_s}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_s}\right)}\right) - \dots$$

e supponiamo che della F si conosca la trasformata Φ in un certo sistema di variabili $y_1, y_2, \dots y_n$, che sarà una funzione di U e delle sue derivate parziali rispetto alle $y_1, y_2, \dots y_n$. Se ora si pone:

$$\Gamma = \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Phi}{\partial U} - \frac{1}{\Delta}\sum_i \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\Delta \frac{\partial \Phi}{\partial\left(\frac{\partial U}{\partial y_i}\right)}\right) + \frac{1}{\Delta}\sum_{is} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_s}\left(\Delta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_s}\right)}\right) - \dots$$

ove Δ rappresenta il determinante funzionale:

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \dots x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots y_n)},$$

Γ è la trasformata della G, ossia si ha identicamente:

$$G = \Gamma, \tag{1}$$

in virtù delle formule che legano le x alle y.

La eguaglianza precedente si dimostra assai facilmente coi principii del calcolo delle variazioni. Difatti, fissato un campo finito di integrazione nello spazio ad n dimensioni delle variabili x, per la formula di trasformazione degli integrali multipli si ha:

$$\int^{(n)} F\, dx_1 \dots dx_n = \int^{(n)} \Phi \Delta\, dy_1 \dots dy_n,$$

ove il primo integrale è esteso al campo fissato, ed il secondo al campo corrispondente nello spazio delle variabili y. Se ora calcoliamo le variazioni di questi due integrali quando U diviene $U + \partial U$, e riduciamo coi procedimenti soliti le espressioni sotto i segni d'integrazione ad essere funzioni lineari di ∂U, troviamo, poichè le variazioni al contorno del campo sono indipendenti da quelle all'interno,

$$\int^{(n)} \partial U G\, dx_1 \dots dx_n = \int^{(n)} \partial U \Delta \Gamma\, dy_1 \dots dy_n.$$

Da questa equazione osservando che nel primo integrale, se si mutano le variabili x nelle y, l'elemento $dx_1 \dots dx_n$ si muta in $\Delta dy_1 \dots dy_n$, e che il campo d'integrazione è arbitrario, si ottiene subito la (1), ammessa naturalmente la continuità delle espressioni G, Γ.

È questa la dimostrazione di Jacobi. Se per F prendiamo la espressione:

$$F = \sum_{ih} a_{ih} \frac{\partial U}{\partial xi} \frac{\partial V}{\partial xh} = \Delta_1 [U,\ V],$$

ove U, V sono due funzioni arbitrarie, e le a_{ih} sono costanti, le sua trasformata sarà:

$$\Phi = \sum_{ih} b_{ih} \frac{\partial U}{\partial yi} \frac{\partial V}{\partial yh},$$

ove le b_{ih} sono funzioni delle y, e troviamo:

$$G = - \sum_{ih} a_{ih} \frac{\partial^2 U}{\partial xi\, \partial xh} = - \Delta_2 [U],$$

considerando F, Φ come dipendenti dalla V; e quindi:

$$\Gamma = - \frac{1}{\Delta} \sum_{ih} \frac{\partial}{\partial yh} \left(\Delta b_{ih} \frac{\partial U}{\partial yi} \right). \tag{2}$$

Le formule di trasformazione delle $\dfrac{\partial U}{\partial xi}$, $\dfrac{\partial V}{\partial xh}$ nelle $\dfrac{\partial U}{\partial yi}$, $\dfrac{\partial V}{\partial yh}$ sono lineari, quindi la espressione $\Delta_1 [U,\ V]$ considerata come forma bilineare di questi due sistemi di variabili ammette come invariante il discriminante:

$$a = \sum \pm a_{11} \dots a_{nn},$$

rispetto alle trasformazioni lineari il cui modulo è il determinante funzionale:

$$\nabla = \frac{\partial(y_1, y_2, \ldots y_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots x_n)};$$

indicando con b il discriminante della forma trasformata:

$$b = \sum \pm b_{11} \ldots b_{nn},$$

avremo quindi, poichè il discriminante è d'indice 2,

$$b = \nabla^2 a,$$

ossia:

$$\frac{1}{\Delta} = \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Sostituendo questo valore di Δ nella (2) il secondo membro viene ad essere formato unicamente colle b_{ih}, le loro derivate prime e le derivate della U. La trasformazione della espressione $\Delta_2[U]$ richiede quindi unicamente la conoscenza dei coefficienti b_{ih}.

Ciò posto, la maggiore generalità del principio di Jacobi, a cui abbiamo accennato, fa subito pensare se, mediante di esso, non sia possibile in generale ridurre la trasformazione delle espressioni lineari omogenee a coefficienti costanti di ordine qualunque ν:

$$\Delta_\nu[U] = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} a_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} \frac{\partial^\nu U}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_\nu}},$$

alla trasformazione delle espressioni del 1.° ordine:

$$\Delta_1[U_1, U_2, \ldots U_\nu] = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} a_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} \frac{\partial U_1}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial U_2}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial U_\nu}{\partial x_{i_\nu}},$$

come avviene nel caso di $\nu = 2$.

Ora è facile persuadersi che questa riduzione mediante il principio di Jacobi non è possibile appena si oltrepassano le espressioni del 2.° ordine; soltanto si può ridurre la trasformazione a quella di certe espressioni di ordine inferiore a ν, ma maggiore di 1, come ora vedremo. Intanto una delle ragioni che rendono impossibile la riduzione accennata sta nel fatto che ad espressioni come la $\Delta_1[U_1, U_2, \ldots U_n]$ il principio di Jacobi non può essere applicato due volte. Se infatti prendiamo per F questa espressione e la consideriamo come dipendente dalla funzione U_1, per la G corrispondente, che possiamo indicare con G_1, troviamo:

$$G_1 = -\sum_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} a_{i_1 i_2 \ldots i_\nu} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial U_\nu}{\partial x_{i_\nu}} \right),$$

per cui il principio di Jacobi ci insegna a trasformare G_1; ma se ora prendiamo per F la G_1, e la consideriamo come dipendente da U_2, osservando che si può scrivere:

$$G_1 = - \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \left\{ \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \frac{\partial U_3}{\partial x_{i_3}} \cdots \frac{\partial U_\nu}{\partial x_{i_\nu}} + \frac{\partial U_2}{\partial x_{i_2}} \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \left(\frac{\partial U_3}{\partial x_{i_3}} \cdots \frac{\partial U_\nu}{\partial x_{i_\nu}} \right) \right\},$$

troviamo per la G corrispondente:

$$G_2 = - \sum_{i_2} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} \frac{\partial G_1}{\partial \left(\frac{\partial U_2}{\partial x_{i_2}} \right)} + \sum_{i_1 i_2} \frac{\partial^2}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \frac{\partial G_1}{\partial \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} \right)} = 0,$$

quindi è zero anche la Γ corrispondente.

Vediamo ora quali sono invece le riduzioni che il principio di Jacobi permette di fare. La espressione $\Delta_\nu [U]$ può essere scritta:

$$\Delta_\nu [U] = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} \frac{\partial^\lambda}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_\lambda}} \sum_{i_{\lambda+1} \dots i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \frac{\partial^{\nu-\lambda} U}{\partial x_{i_{\lambda+1}} \dots \partial x_{i_\nu}},$$

e questa espressione può considerarsi come la G corrispondente alla F definita da:

$$F = (-1)^\lambda \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \frac{\partial^\lambda V}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\lambda}} \frac{\partial^{\nu-\lambda} U}{\partial x_{i_{\lambda+1}} \dots \partial x_{i_\nu}},$$

e considerata come dipendente da V. Quindi se ν è pari possiamo prendere:

$$\lambda = \nu - \lambda = \frac{\nu}{2},$$

e se ν è dispari:

$$\lambda = \frac{\nu+1}{2} \qquad \nu - \lambda = \frac{\nu-1}{2}.$$

Nel primo caso la trasformazione si riduce a quella di una espressione di ordine $\frac{\nu}{2}$, nel secondo di ordine $\frac{\nu+1}{2}$. In ogni caso poi potremo sempre prendere per λ uno qualunque dei valori $1, 2, \dots, \nu - 1$.

Visto adunque che il principio di Jacobi non basta per eseguire la riduzione indicata, cerchiamo per altra via di decidere se tale riduzione non sia effettivamente possibile in modo assoluto, oppure se la difficoltà incontrata si debba al metodo, che abbiamo seguito. Osserviamo che nella trasformata (2) della espressione $\Delta_2 [U]$ fra i coefficienti delle derivate del 1.° ordine e quelli delle derivate del 2.° esistono delle relazioni, per cui i primi si possono esprimere in funzione dei secondi, e che la stessa riduzione alla forma (2) si potrebbe ottenere qualora si trovassero per altra via le relazioni che esistono fra le due serie di coefficienti. Noi ci proporremo quindi la ricerca diretta delle relazioni fra i coefficienti di una equazione lineare che sia la trasformata di una equazione lineare, omogenea, a coefficienti costanti. Alcune di queste relazioni intanto ci sono fornite dalle riduzioni che si deducono dal principio di Jacobi; noi però col metodo, che ora indicheremo, arriveremo a trovare anche queste relazioni indipendentemente dal principio stesso.

§ 2. Proprietà delle funzioni $H_{qr,p}$, $K_{qr,p}$.

Prima di indicare il metodo generale che seguiremo per eseguire la trasformazione, tenendo conto delle relazioni fra i coefficienti, è necessario stabilire alcune proprietà di certe espressioni, che ora definiremo e che godono di una importanza notevolissima in tutta la teoria della trasformazione.

Dalle formule ordinarie per il cambiamento delle variabili indipendenti si ha:

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_i \frac{\partial y_p}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial y_q} = \varepsilon_{pq} && (p,\ q = 1,\ 2, \ldots n)\\
&\sum_{ih} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h}\frac{\partial x_i}{\partial y_q}\frac{\partial x_h}{\partial y_r} + \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_r}\frac{\partial y_p}{\partial x_i} = 0 && (p,\ q,\ r = 1,\ 2, \ldots n),
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

dove ε_{pq} è zero quando p è differente da q, ed 1 quando $p = q$. Altre formule analoghe alle precedenti si hanno scambiando le x colle y. Noi potremo ora porre:

$$H_{qr,p} = \sum_{ih} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h}\frac{\partial x_i}{\partial y_q}\frac{\partial x_h}{\partial y_r} = -\sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_r}\frac{\partial y_p}{\partial x_i},$$

e derivando queste due espressioni equivalenti di $H_{qr,p}$ troviamo:

$$\frac{\partial H_{qr,p}}{\partial y_s} = \sum_{ihl} \frac{\partial^3 y_p}{\partial x_i \partial x_h \partial x_l}\frac{\partial x_i}{\partial y_q}\frac{\partial x_h}{\partial y_r}\frac{\partial x_l}{\partial y_s} + \\ + \sum_{ih} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_s}\frac{\partial x_h}{\partial y_r} + \frac{\partial x_i}{\partial y_q}\frac{\partial^2 x_h}{\partial y_r \partial y_s}\right)$$

$$\frac{\partial H_{qr,p}}{\partial y_s} = -\sum_i \frac{\partial^3 x_i}{\partial y_q \partial y_r \partial y_s}\frac{\partial y_p}{\partial x_i} - \sum_{ih} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_r}\frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h}\frac{\partial x_h}{\partial y_s}.$$

Noi porremo:

$$H_{qrs,p} = \sum_{ihl} \frac{\partial^3 y_p}{\partial x_i \partial x_h \partial x_l} \frac{\partial x_i}{\partial y_q} \frac{\partial x_h}{\partial y_r} \frac{\partial x_l}{\partial y_s}$$

$$K_{qrs,p} = \sum_i \frac{\partial^3 x_i}{\partial y_q \partial y_r \partial y_s} \frac{\partial y_p}{\partial x_i},$$

e poichè si ha:

$$\sum_{ih} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_s} \frac{\partial x_h}{\partial y_r} = \sum_{ihj} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_q \partial y_s} \frac{\partial x_h}{\partial y_r} \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} =$$
$$= - \sum_k H_{rk,p} H_{qs,k}$$

$$\sum_{ih} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_r} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial y_s} = \sum_{ihj} \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_q \partial y_r} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial x_h}{\partial y_s} \sum_k \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_j} =$$
$$= - \sum_k H_{sk,p} H_{qr,k},$$

troviamo:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial H_{qr,p}}{\partial y_s} &= H_{qrs,p} - \sum_k (H_{rk,p} H_{qs,k} + H_{qk,p} H_{rs,k}) \\ \frac{\partial K_{qr,p}}{\partial y_s} &= K_{qrs,p} - \sum_k K_{sk,p} K_{qr,k}, \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

ove, per simmetria, abbiamo introdotto anche il simbolo:

$$K_{qr,p} = \sum_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_q \partial y_r} \frac{\partial y_p}{\partial x_i}.$$

Da queste relazioni si ricava la seguente:

$$- K_{qrs,p} = H_{qrs,p} - \sum_k (H_{qk,p} H_{rs,k} + H_{rk,p} H_{sq,k} + H_{sk,p} H_{qr,k}),$$

la quale non è altro che quella che risulta dalla seconda delle (3) derivando rispetto ad y_s.

Dalle (4) si possono ricavare le $H_{qrs,p}$, $K_{qrs,p}$ in funzione delle $H_{qr,p}$ e delle loro derivate prime; questa proprietà non è che un caso particolare di una assai più generale. Poniamo infatti:

$$H_{q_1 q_2 \ldots q_\mu, p} = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_\mu} \frac{\partial^\mu y_p}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_\mu}} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{q_1}} \frac{\partial x_{i_2}}{\partial y_{q_2}} \cdots \frac{\partial x_{i_\mu}}{\partial y_{q_\mu}},$$

e deriviamo rispetto ad $y_{q_{\mu+1}}$. Con un artificio analogo a quello che ci ha servito a stabilire le (4) troviamo subito:

$$\left.\begin{aligned} H_{q_1 q_2 \ldots q_{\mu+1}, p} = \frac{\partial H_{q_1 q_2 \ldots q_\mu, p}}{\partial y_{q_{\mu+1}}} + \\ + \sum_k (H_{q_1 q_{\mu+1}, p} H_{q_2 q_3 \ldots q_\mu k, p} + \cdots + H_{q_\mu q_{\mu+1}, p} H_{q_1 q_2 \ldots q_{\mu-1} k, p}). \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Questa formula dimostra che, se $H_{q_1 q_2 \ldots q_\mu, p}$ è esprimibile in funzione delle $H_{qr,p}$ e delle loro derivate, anche $H_{q_1 q_2 \ldots q_{\mu+1}, p}$ gode della stessa proprietà; da ciò, e dalla prima delle (4), segue che tutte le $H_{q_1 q_2 \ldots q_\mu, p}$ con qualsiasi numero di indici sono funzioni razionali intere delle $H_{qr,p}$ e delle loro derivate rispetto alle y.

Il primo membro della (5) è simmetrico rispetto ai $\mu + 1$ indici $q_1, q_2, \ldots q_{\mu+1}$, non così il secondo; questa formula ci dà quindi $\mu + 1$ espressioni equivalenti di $H_{q_1 q_2 \ldots q_{\mu+1}, p}$.

Similmente se si pone:

$$K_{q_1 q_2 \ldots q_\mu, p} = \sum_i \frac{\partial^\mu x_i}{\partial y_{q_1} \partial y_{q_2} \ldots \partial y_{q_\mu}} \frac{\partial y_p}{\partial x_i},$$

si trova:

$$K_{q_1 q_2 \ldots q_{\mu+1}, p} = \frac{\partial K_{q_1 q_2 \ldots q_\mu, p}}{\partial y_{q_{\mu+1}}} + \sum_k K_{q_{\mu+1} k, p} K_{q_1 q_2 \ldots q_\mu, k}. \tag{5'}$$

Questa formula, insieme alla seconda delle (4), dimostra per le $K_{q_1 q_2 \ldots q_\mu, p}$ una proprietà analoga a quella dimostrata per le $H_{q_1 q_2 \ldots q_\mu, p}$.

Queste proprietà sono importanti nella teoria della trasformazione, poichè da esse risulta che una volta calcolate le $H_{qr,p}$ in funzione delle nuove variabili indipendenti, tutte le altre quantità H e K con un numero qualsiasi di indici, si potranno avere dalle prime senza ricorrere alle formule, che legano le antiche variabili alle nuove.

Indicando ancora con Δ il determinante funzionale delle x rispetto alle y, come nel § 1, si ha:

$$\frac{\partial y_h}{\partial x_i} = \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial \left(\dfrac{\partial x_i}{\partial y_h}\right)},$$

e quindi:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial y_s} = \sum_{ih} \frac{\partial \Delta}{\partial \left(\dfrac{\partial x_i}{\partial y_h}\right)} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_h \partial y_s} = \Delta \sum_{ih} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_h \partial y_s} \frac{\partial y_h}{\partial x_i},$$

ossia:

$$\frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial y_s} = -\frac{1}{\nabla}\frac{\partial \nabla}{\partial y_s} = -\sum_h H_{sh,h}, \tag{6}$$

formula di cui faremo frequente uso in seguito.

§ 3. Metodo generale per la trasformazione.

Riprendiamo l'espressione generale che dobbiamo trasformare:

$$\Delta_\nu[U] = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \frac{\partial^\nu U}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_\nu}}. \tag{7}$$

Sostituendo alle variabili x le y, la trasformata sarà della forma seguente:

$$\Delta_\nu[U] = \sum_{l_1 l_2 \dots, l_\nu} \sum_{\lambda=1}^{\nu} b_{l_1 l_2 \dots l_\lambda} \frac{\partial^\lambda U}{\partial y_{l_1} \partial y_{l_2} \dots \partial y_{l_\lambda}}, \tag{8}$$

ove i coefficienti $b_{l_1 l_2 \dots l_\lambda}$ sono funzioni delle y, la cui forma generale è:

$$\left.\begin{aligned}
b_{l_1 l_2 \dots l_\nu} &= \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \frac{\partial y_{l_1}}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial y_{l_\nu}}{\partial x_{i_\nu}} \\
b_{l_1 l_2 \dots l_{\nu-1}} &= \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \left(\frac{\partial^2 y_{l_1}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_\nu}} \frac{\partial y_{l_2}}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial y_{l_{\nu-1}}}{\partial x_{i_{\nu-1}}} + \cdots \right) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
b_{l_1} &= \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \frac{\partial^\nu y_{l_1}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_\nu}}.
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

In ciascuno dei termini, che compaiono sotto i segni sommatori nei secondi membri, è costante ed uguale a ν il numero delle derivazioni che vi si devono eseguire; quindi possiamo dire che i coefficienti b sono funzioni lineari a coefficienti numerici di tutte le espressioni che si possono formare dalla

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta[y_{l_1} | y_{l_2} | \dots | y_{l_r}] = \\
&= \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \frac{\partial^\lambda y_{l_1}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\lambda}} \frac{\partial^\mu y_{l_2}}{\partial x_{i_{\lambda+1}} \dots \partial x_{i_{\lambda+\mu}}} \cdots \frac{\partial^\sigma y_{l_r}}{\partial x_{i_{\lambda+\dots+\rho+1}} \dots \partial x_{i_{\lambda+\dots+\rho+\sigma}}},
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

attribuendo a $\lambda, \mu, \dots \rho, \sigma$ tutti i possibili valori interi positivi o nulli, che soddisfanno alla equazione:

$$\lambda + \mu + \cdots + \rho + \sigma = \nu.$$

Ora osserviamo che, ricorrendo al solito artificio, possiamo scrivere nel secondo membro della (10) al posto di

$$a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} \frac{\partial^\lambda y_{l_1}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_\lambda}},$$

l'espressione:

$$\sum_{j_1 \dots j_\lambda} a_{j_1 \dots j_\lambda i_{\lambda+1} \dots i_\nu} \frac{\partial^\lambda y_{l_1}}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_\lambda}} \sum_{h_1} \frac{\partial x_{i_1}}{\partial y_{h_1}} \frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{j_1}} \dots \sum_{h_\lambda} \frac{\partial x_{i_\lambda}}{\partial y_{h_\lambda}} \frac{\partial y_{h_\lambda}}{\partial x_{j_\lambda}},$$

e quel secondo membro diverrà:

$$\sum_{j_1 \dots j_\lambda} \sum_{h_1 \dots h_\lambda} H_{h_1 \dots h_\lambda, l_1} \sum_{i_{\lambda+1} \dots i_\nu} a_{j_1 \dots j_\lambda i_{\lambda+1} \dots i_\nu} \frac{\partial y_{h_1}}{\partial x_{j_1}} \dots \frac{\partial y_{h_\lambda}}{\partial x_{j_\lambda}} \cdot \frac{\partial^\mu y_{l_2}}{\partial x_{i_{\lambda+1}} \dots \partial x_{i_{\lambda+\mu}}} \dots$$

Eseguendo una riduzione analoga rispetto a tutte le altre derivate di ordine $\mu, \dots \rho, \sigma$ troveremo al fine per la $\Delta[y_{l_1} | y_{l_2} | \dots | y_{l_r}]$ la espressione:

$$\sum_{h_1 \dots h_\lambda} \sum_{k_1 \dots k_\mu} \dots \sum_{t_1 \dots t_\sigma} H_{h_1 \dots h_\lambda, l_1} H_{k_1 \dots k_\mu, l_2} \dots H_{t_1 \dots t_\sigma, l_r} b_{h_1 \dots h_\lambda k_1 \dots t}. \qquad (10')$$

Quindi, ricordando la proprietà dimostrata nel paragrafo precedente per le funzioni $H_{q_1 \dots q_\mu, p}$, possiamo enunciare il seguente teorema:

I coefficienti $b_{l_1 \dots l_\lambda}$ della trasformata della espressione (7) *sono funzioni lineari delle $b_{l_1 \dots l_\nu}$ a ν indici, cioè dei coefficienti delle derivate di ordine ν, e di certe espressioni razionali intere delle $H_{qr,p}$ e delle loro derivate rispetto alle y.*

Da ciò segue, che se noi potremo esprimere le $H_{qr,p}$ in funzione delle $b_{l_1 \dots l_\nu}$, tutti i coefficienti della (8) si potranno esprimere in funzione unicamente di queste quantità, e delle loro derivate; ossia dei coefficienti (9) basterà conoscere, in funzione delle y, quelli dati dalla prima eguaglianza per poterne dedurre tutti i rimanenti.

Ora i coefficienti $b_{l_1 \dots l_\nu}$ sono anche quelli della trasformata di:

$$\Delta_1 [U_1, \dots U_\nu] = \sum_{i_1 \dots i_\nu} a_{i_1 \dots i_\nu} \frac{\partial U_1}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial U_\nu}{\partial x_{i_\nu}},$$

sicchè la quistione, che ci siamo proposti al § 1, è ora ridotta a vedere se le funzioni $H_{qr,p}$ possono essere espresse mediante i coefficienti $b_{l_1 \dots l_\nu}$ e le loro derivate.

Ora osserviamo che derivando la prima delle (9) ed introducendo coll'artificio solito le $H_{qr,p}$ si trova:

$$\frac{\partial b_{l_1 l_2 \dots l_\nu}}{\partial y_l} = \sum_h (H_{h l, l_1} b_{h l_2 \dots l_\nu} + \dots + H_{h l, l_\nu} b_{l_1 l_2 \dots l_{\nu-1} h}). \qquad (11)$$

Queste identità sono in numero di

$$M = n \cdot \frac{n(n+1)\cdots(n+\nu-1)}{1\cdot 2\cdots \nu},$$

quindi da esse, in generale, si potranno ricavare le

$$N = n \cdot \frac{n(n+1)}{1\cdot 2},$$

quantità $H_{qr,p}$, che vi compariscono linearmente, in funzione delle $b_{l_1 l_2 \ldots l_\nu}$ e delle loro derivate prime.

Possiamo quindi dire: *la riduzione della trasformazione della* $\Delta_\nu[U]$ *a quella della* $\Delta_1[U_1,\ldots, U_\nu]$ *è effettuabile, compatibilmente colla possibilità di risolvere le equazioni lineari* (11) *rispetto alle* $H_{qr,p}$.

Nella maggior parte dei casi però, invece delle (11), si possono considerare altre equazioni, la cui risoluzione è assai più semplice, poichè da esse si possono dedurre dei gruppi di n equazioni, ciascuno dei quali contiene linearmente soltanto n delle $H_{qr,p}$; la determinazione di queste funzioni si riduce quindi alla risoluzione successiva di questi sistemi di n equazioni soltanto. Ciò avviene tutte le volte che la espressione $\Delta_1[U_1,\ldots, U_\nu]$ può essere considerata come un invariante assoluto di una forma differenziale di un grado qualsiasi ρ, maggiore di 1. Sia infatti:

$$\varphi = \sum_{r_1 r_2 \ldots r_\rho} \alpha_{r_1 r_2 \ldots r_\rho}\, dx_{r_1}\, dx_{r_2} \ldots dx_{r_\rho},$$

questa forma, ove le α sono funzioni delle a. Sostituendo alle variabili x le y, essa diverrà:

$$\varphi = \sum_{s_1 s_2 \ldots s_\rho} \beta_{s_1 s_2 \ldots s_\rho}\, dy_{s_1}\, dy_{s_2} \ldots dy_{s_\rho},$$

e, per ipotesi, le β saranno formate colle b in modo identico a quello con cui le α sono formate colle a. Avremo poi:

$$\beta_{s_1 s_2 \ldots s_\rho} = \sum_{r_1 r_2 \ldots r_\rho} \alpha_{r_1 r_2 \ldots r_\rho} \frac{\partial x_{r_1}}{\partial y_{s_1}} \cdots \frac{\partial x_{r_\rho}}{\partial y_{s_\rho}}.$$

Derivando rispetto ad y_s troviamo:

$$\frac{\partial \beta_{s_1 s_2 \ldots s_\rho}}{\partial y_s} = \sum_k (K_{ss_1,k}\, \beta_{ks_2 \ldots s_\rho} + \cdots + K_{ss_\rho,k}\, \beta_{s_1 s_2 \ldots s_{\rho-1} k}), \tag{11'}$$

equazioni che sono analoghe alle (11). Noi porremo, per semplicità,

$$\sum_k K_{ss_i,k}\, \beta_{s_1 \ldots s_{i-1} k s_{i+1} \ldots s_\rho} = (s s_i)\,[s_1 \ldots s_{i-1}\, s_{i+1} \ldots s_\rho],$$

e avremo dalla (11') le seguenti formule:

$$\frac{\partial \beta_{ts_2 \ldots s_\rho}}{\partial y_{s_1}} = (ts_1)[s_2 \ldots s_\rho] + (s_2 s_1)[ts_3 \ldots s_\rho] + \cdots + (s_\rho s_1)[ts_2 \ldots s_{\rho-1}]$$

$$\frac{\partial \beta_{s_1 t s_3 \ldots s_\rho}}{\partial y_{s_2}} = (s_1 s_2)[ts_3 \ldots s_\rho] + (ts_2)[s_1 s_3 \ldots s_\rho] + \cdots + (s_\rho s_2)[s_1 t s_3 \ldots s_{\rho-1}]$$

. . . .

$$\frac{\partial \beta_{s_1 \ldots s_{\rho-1} t}}{\partial y_{s_\rho}} = (s_1 s_\rho)[s_2 \ldots s_{\rho-1} t] + (s_2 s_\rho)[s_1 s_3 \ldots s_{\rho-1} t] + \cdots + (ts_\rho)[s_1 \ldots s_{\rho-1}]$$

$$\frac{\partial \beta_{s_1 s_2 \ldots s_\rho}}{\partial y_t} = (s_1 t)[s_2 \ldots s_\rho] + (s_2 t)[s_1 s_3 \ldots s_\rho] + \cdots + (s_\rho t)[s_1 \ldots s_{\rho-1}];$$

da queste equazioni ponendo:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \beta_{ts_2 \ldots s_\rho}}{\partial y_{s_1}} + \cdots + \frac{\partial \beta_{s_1 \ldots s_{\rho-1} t}}{\partial y_{s_\rho}} - \frac{\partial \beta_{s_1 \ldots s_\rho}}{\partial y_t}\right) = \beta_{s_1 \ldots s_\rho, t}, \tag{12}$$

si ottiene:

$$\beta_{s_1 \ldots s_\rho, t} = \sum_{(ih)} (s_i s_h)[ts_1 \ldots s_{i-1} s_{i+1} \ldots s_{h-1} s_{h+1} \ldots s_\rho], \tag{13}$$

ove il simbolo (ih), posto sotto il segno sommatorio, indica che la somma rispetto agli indici i, h va estesa alle $\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}$ combinazioni due a due dei numeri $1, 2, \ldots n$.

Delle (13) possiamo servirci per ricavare le $H_{qr.p}$; difatti facciamo dapprima $s_1 = s_2 = \cdots = s_\rho = s$ e sostituiamo alle parentesi del secondo membro le loro espressioni effettive. Avremo:

$$\beta_{ss \ldots s, t} = -\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \sum_k H_{ss,k} \beta_{kts \ldots s}.$$

Se ora attribuiamo a t tutti i valori da 1 ad n, otterremo un sistema di n equazioni lineari rispetto alle n quantità $H_{ss,1}, H_{ss,2}, \ldots H_{ss,h}$. Quindi se indichiamo con $B_{kt,s}$ il complemento algebrico dell'elemento $\beta_{ktss \ldots s}$ nel determinante:

$$\begin{vmatrix} \beta_{11s \ldots s} & \beta_{12s \ldots s} \cdots & \beta_{1ns \ldots s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta_{n1s \ldots s} & \beta_{n2s \ldots s} \cdots & \beta_{nns \ldots s} \end{vmatrix}, \tag{14}$$

diviso pel determinante stesso, avremo:

$$H_{ss,p} = -\frac{1 \cdot 2}{n(n-1)} \sum_t \beta_{s \ldots s, t} B_{pt,s}. \tag{15}$$

Otteniamo così, quando gli n determinanti che si hanno dal precedente facendo $s = 1, 2, \ldots n$ sono differenti da zero, la espressione delle $H_{qr,p}$, i cui due primi indici sono uguali, in funzione delle β e delle loro derivate prime, quindi anche delle b e delle loro derivate.

Per ottenere ora anche le espressioni delle $H_{qr,p}$, i cui due primi indici sono disuguali, facciamo nella (13) $s_1 = s_2 = \cdots = s_{\rho-1} = s$, $s_\rho = r$; avremo:

$$\beta_{s \ldots sr,t} = -\frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \sum_k H_{ss,k}\, \beta_{tkrs \ldots s} - (n-1) \sum_k H_{sr,k}\, \beta_{tks \ldots s},$$

da cui ponendo per le $H_{ss,k}$ i valori dati dalle (15) si ha:

$$(n-1) \sum_k H_{sr,k}\, \beta_{tks \ldots s} = -\beta_{s \ldots sr,t} + \frac{n-2}{n} \sum_{hk} \beta_{s \ldots s,h}\, B_{kh,s}\, \beta_{tkrs \ldots s},$$

e risolvendo:

$$\left.\begin{aligned} H_{sr,p} = &-\frac{1}{n-1} \sum_t \beta_{s \ldots sr,t}\, B_{pt,s} + \\ &+ \frac{n-2}{n(n-1)} \sum_{hkt} \beta_{s \ldots s,h}\, B_{hk,s}\, B_{pt,s}\, \beta_{tkrs \ldots s}. \end{aligned}\right\} \quad (15')$$

La condizione perchè questa formula abbia sempre un significato è, come per la (15), che siano differenti da zero gli n determinanti (14). Osserviamo che nel solo caso in cui $\rho = 2$, questi n determinanti si riducono ad uno solo.

Notiamo infine che, se scriviamo tutte le M equazioni (11) e formiamo la matrice dei coefficienti delle $H_{qr,p}$, la quale conterrà N colonne ed M linee, basterà che uno almeno dei determinanti di ordine N, che se ne possono dedurre sia differente da zero, perchè si possano risolvere le equazioni stesse rispetto alle $H_{qr,p}$. Per $\nu = 2$ si ha $M = N$.

Riguardo a tutte queste condizioni si presenta una questione interessante: se cioè può avvenire che esistano trasformazioni per le quali esse sono soddisfatte, mentre per altre non lo sono; se così fosse, ne verrebbero delle limitazioni circa le trasformazioni per le quali è possibile determinare le $H_{qr,p}$ nel modo indicato. Non sembra però facile stabilire in proposito una discussione generale, ma conviene esaminare, caso per caso, il significato delle condizioni enunciate; noi ne vedremo qualche esempio in seguito.

Riassumendo possiamo dire che per trovare la trasformata di una espressione $\Delta_\nu[U]$, in funzione soltanto dei coefficienti delle derivate di ordine ν, noi dovremo dapprima trovare colle formule ordinarie come i coefficienti di tutte le derivate che compaiono nella trasformata siano composti colle espressioni $\Delta\,[y_{l_1} | y_{l_2} | \ldots | y_{l_r}]$; poi costruire le corrispondenti espressioni (10') e ridurle a dipendere soltanto dalle $H_{qr,p}$ colle formule del paragrafo precedente; infine sostituire per le $H_{qr,p}$ i valori (15) (15'), oppure i valori che si deducono dalle (11), secondo che esiste o no una forma differenziale covariante della $\Delta_1[U_1, \ldots, U_\nu]$.

Le espressioni $\Delta\,[U_1 | U_2 | \ldots | U_r]$ godono di una importanza notevole quando si studiano le equazioni:

$$\Delta_\nu\,[U] = 0,$$

come in parte abbiamo già visto. Di esse ne esistono tante quante sono le partizioni possibili del numero ν; i coefficienti delle loro trasformate sono della stessa forma (10) dei coefficienti della $\Delta_\nu\,[U]$; quindi la loro trasformazione si riduce, come per questa espressione, al calcolo dei coefficienti $b_{l \ldots l_\nu}$ a ν indici. Noi, per questa ragione, diremo che costituiscono il *gruppo dei covarianti dell'equazione.*

Applicheremo ora il metodo generale esposto ad alcuni casi speciali.

§ 4. Equazioni di 2.° ordine.

Per le equazioni del 2.° ordine le nostre formule conducono immediatamente ai risultati conosciuti. Si ha infatti per la trasformata della

$$\Delta_2\,[U] = \sum_{ih} a_{ih} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \, \partial x_h}, \tag{α}$$

la espressione:

$$\Delta_2\,[U] = \sum_{pq} b_{pq} \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \, \partial y_q} + \sum_p b_p \frac{\partial U}{\partial y_p},$$

ove:

$$b_{pq} = \Delta_1\,[y_p, \; y_q] \qquad b_p = \Delta_2\,[y_p].$$

Le formule (10') ci dànno:

$$b_p = \sum_{rs} H_{rs,p}\, b_{rs}, \tag{β}$$

e le (11):

$$\frac{\partial b_{pq}}{\partial y_r} = \sum_h (H_{hr,p}\, b_{hq} + H_{hr.q}\, b_{hp}),$$

relazioni, la cui verificazione è inoltre semplicissima. Se in quest'ultima facciamo $r = q$ e sommiamo rispetto a q, ricordando la (6) troviamo:

$$\sum_q \frac{\partial b_{pq}}{\partial y_q} = \sum_{hq} H_{hq,p}\, b_{hq} - \frac{1}{\Delta} \sum_h \frac{\partial \Delta}{\partial y_h} b_{hp},$$

ossia:

$$b_p = \frac{1}{\Delta} \sum_q \frac{\partial (\Delta b_{pq})}{\partial y_q}.$$

Sostituendo questa espressione nella (α) troviamo:

$$\Delta_2 [U] = \frac{1}{\Delta} \sum_{pq} \frac{\partial}{\partial y_q} \left(\Delta\, b_{pq} \frac{\partial U}{\partial y_p} \right),$$

che è la formula a cui si arriva col principio di Jacobi; in essa poi, come abbiamo visto nel § 1, al posto di Δ si può sostituire $\frac{1}{\sqrt{b}}$, ove $b = \sum \pm b_{11} \ldots b_{nn}$.

La espressione:

$$\Delta_1 [U, V] = \sum_{ih} a_{ih} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_h},$$

è in questo caso il solo covariante dell'equazione. Formiamo ora le due forme differenziali:

$$dU\, dV = \sum_{ih} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_h} dx_i\, dx_h$$

$$\varphi = \sum_{ih} \alpha_{ih}\, dx_i\, dx_h,$$

ove, posto $a = \sum \pm a_{11} \ldots a_n$, $\alpha = \sum \pm \alpha_{11} \ldots \alpha_{nn}$, si ha:

$$\alpha_{ih} = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial a_{ih}} \quad \text{e quindi} \quad a_{ih} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_{ih}},$$

considerando come distinti a_{ih} e a_{hi}, α_{ih} e α_{hi}. Queste forme, considerate come forme algebriche dei differenziali, hanno l'invariante simultaneo assoluto:

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{ih} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_{ih}} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_h} = \sum_{ih} a_{ih} \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial V}{\partial x_h},$$

e quindi $\Delta_1 [U, V]$ può considerarsi come un invariante di φ.

La trasformata di φ sia:

$$\varphi = \sum_{rs} \beta_{rs}\, dy_r\, dy_s,$$

ove le β_{rs} sono formate colle b_{rs} come le α_{ih} colle a_{ih}; le espressioni (12) sono in questo caso le seguenti:

$$\beta_{rs,t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \beta_{ts}}{\partial y_r} + \frac{\partial \beta_{rt}}{\partial y_s} - \frac{\partial \beta_{rs}}{\partial y_t}\right),$$

e le (13) divengono:

$$\beta_{rs,t} = -\sum_k H_{rs,k}\, \beta_{kt}.$$

I determinanti (14) si riducono al solo discriminante:

$$\beta = \sum \pm \beta_{11} \dots \beta_{nn},$$

e le (15), (15') alle seguenti:

$$H_{rs\,p} = -\sum_t \beta_{rs,t}\, b_{pt},$$

valevoli tanto per $r = s$, che per r differente da s. Sostituendo questo valore di $H_{rs,p}$ nella (β) si trova:

$$b_p = -\sum_{trs} \beta_{rs,t}\, b_{pt}\, b_{rs},$$

e, se poniamo:

$$U_t = \sum_p b_{pt} \frac{\partial U}{\partial y_t},$$

si ha:

$$\sum_p b_p \frac{\partial U}{\partial y_p} = -\sum_{rst} \beta_{rs,t}\, b_{rs}\, U_t.$$

Sostituendo nella (α) infine troviamo:

$$\Delta_2[U] = \sum_{pq} b_{pq}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_p\, \partial y_q} - \sum_t \beta_{pq.t}\, U_t\right).$$

Questa forma dell'espressione $\Delta_2[U]$ è stata considerata dal prof. Ricci nelle ricerche, che abbiamo citato precedentemente.

Il discriminante β deve essere differente da zero; ora, se questa condizione è soddisfatta per un sistema di variabili, lo è per qualsiasi altro, poichè si ha:

$$\beta = \Delta^2 \alpha = \frac{\Delta^2}{a},$$

e quindi si vede che essa riguarda unicamente i coefficienti della espressione data $\Delta_2[U]$.

§ 5. Equazioni di 3.° ordine.

Nel caso delle equazioni del 3.° ordine l'espressione:

$$\Delta_3[U] = \sum_{ihk} a_{ihk} \frac{\partial^3 U}{\partial x_i \partial x_h \partial x_k},$$

si trasforma nella seguente:

$$\Delta_3[U] = \sum_{pqr} \Delta_1[y_p, y_q, y_r] \frac{\partial^3 U}{\partial y_p \partial y_q \partial y_r} + 3 \sum_{pq} \Delta_2[y_p | y_q] \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} + \\ + \sum_p \Delta_3[y_p] \frac{\partial U}{\partial y_p},$$

ove si ha:

$$\Delta_1[y_p, y_q, y_r] = \sum_{ihk} a_{ihk} \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_h} \frac{\partial y_r}{\partial x_k} = b_{pqr}$$

$$\Delta_2[y_p | y_q] = \sum_{ihk} a_{ihk} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial y_q}{\partial x_k} = b_{pq}$$

$$\Delta_3[y_p] = \sum_{ihk} a_{ihk} \frac{\partial^3 y_p}{\partial x_i \partial x_h \partial x_k} = b_p,$$

e si può osservare che, se si introduce la notazione:

$$\Delta_2[y_p, y_q] = \Delta_2[y_p | y_q] + \Delta_2[y_q | y_p],$$

si ha anche:

$$2 \sum_{pq} \Delta_2[y_p | y_q] \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} = \sum_{pq} \Delta_2[y_p, y_q] \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q}.$$

Le (10') ci dànno:

$$b_{pq} = \sum_{lm} H_{lm\,p}\, b_{lmq}$$

$$b_p = \sum_{lmn} H_{lmn,p}\, b_{lmn},$$

quindi abbiamo:

$$\Delta_3[U] = \sum_{pqr} b_{pqr} \left(\frac{\partial^3 U}{\partial y_p \partial y_q \partial y_r} + 3 \sum_l H_{pq\,l} \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} + \sum_l H_{pqr,l} \frac{\partial U}{\partial y_l} \right). \qquad (\alpha)$$

Dalle (5) (11) poi si hanno le relazioni:

$$H_{pqr,l} = \frac{\partial H_{pq.l}}{\partial y_r} + \sum_k (H_{pr,k} H_{qk,l} + H_{qr,k} H_{pk,l}) \qquad (\beta)$$

$$\frac{\partial b_{pqr}}{\partial y_s} = \sum_l (H_{ls,p}\, b_{lqr} + H_{ls,q}\, b_{lrp} + H_{ls,r}\, b_{lpq}), \qquad (\gamma)$$

per eliminare dalla (α) le $H_{pqr,l}$, $H_{pq,r}$, introducendo invece le derivate delle b_{pqr}.

Se indichiamo con B una opportuna potenza di un invariante qualsiasi della espressione $\Delta_1[U, V, W]$, considerata come forma algebrica delle derivate delle tre funzioni U, V, W, noi nella (6) al posto di Δ potremo sostituire B, analogamente a quanto abbiamo fatto nel caso delle equazioni di 2.° ordine (vedi § 1), e avremo quindi:

$$\sum_p H_{lp\,p} = -\frac{1}{B}\frac{\partial B}{\partial y_l}.$$

Ciò posto facendo nella (γ) $s = p$, e sommando rispetto a p si trova:

$$\frac{1}{B}\sum_l \frac{\partial}{\partial y_l}(B\, b_{lqr}) = b_{qr} + b_{rq}. \tag{δ}$$

Inoltre si ha:

$$\sum_q \frac{\partial b_{pq}}{\partial y_q} = \sum_{lmq}\left(\frac{\partial H_{lm,p}}{\partial y_q}\, b_{lmq} + H_{lm\,p}\frac{\partial b_{lmq}}{\partial y_q}\right),$$

e sostituendo nel secondo membro i valori delle derivate che risultano dalle (β) (γ), si trova:

$$\sum_q \frac{\partial b_{pq}}{\partial y_q} = b_p + \sum_{lmqk} H_{kq\,.\,q}\, H_{lm\,p}\, b_{klm},$$

ossia:

$$\frac{1}{B}\sum_q \frac{\partial}{\partial y_q}(B\, b_{pq}) = b_p. \tag{ε}$$

Queste due relazioni (δ) (ε) sono quelle, a cui si arriverebbe col principio di Jacobi; esse però, come si vede, non bastano per determinare le b_{pq}, b_p in funzione delle b_{pqr}.

Supponiamo ora che sia $n = 2$. In questo caso possiamo costruire una forma differenziale cubica, rispetto alla quale la espressione:

$$\Delta_1[U, V, W] = \sum_{ihk} a_{ihk}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_h}\frac{\partial W}{\partial x_k},$$

sia un invariante. Difatti due forme binarie cubiche l'una di coefficienti α, l'altra di coefficienti γ, hanno l'invariante simultaneo rappresentato simbolicamente da $(\alpha\gamma)^3$, che diviene un invariante assoluto, se noi lo dividiamo per la potenza $\frac{1}{2}$ del discriminante di una delle forme. Le due forme siano:

$$\varphi = \sum_{ihk}\alpha_{ihk}\, dx_i\, dx_h\, dx_k = \alpha_0\, dx_1^3 + 3\alpha_1\, dx_1^2\, dx_2 + 3\alpha_2\, dx_1\, dx_2^2 + \alpha_3\, dx_2^3$$

$$dU\,dV\,dW = \sum_{ihk}\frac{\partial U}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_h}\frac{\partial W}{\partial x_k}\, dx_i\, dx_h\, dx_k.$$

Il discriminante di φ è:

$$R_\alpha = 4(\alpha_0\alpha_2 - \alpha_1^2)(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2^2) - (\alpha_0\alpha_3 - \alpha_1\alpha_2)^2,$$

e l'invariante simultaneo sovracennato è:

$$\frac{1}{R_\alpha^{\frac{1}{2}}}\left\{\alpha_0 \frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{\partial W}{\partial x_2} - \alpha_1\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial V}{\partial x_2}\frac{\partial W}{\partial x_2} + \cdots\right) + \right.$$
$$\left. + \alpha_2\left(\frac{\partial U}{\partial x_2}\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial W}{\partial x_1} + \cdots\right) - \alpha_3 \frac{\partial U}{\partial x_1}\frac{\partial V}{\partial x_1}\frac{\partial W}{\partial x_1}\right\}.$$

Se vogliamo che esso coincida con $\Delta_1[U, V, W]$ dovremo determinare le α in modo che sia:

$$\frac{\alpha_0}{R_\alpha^{\frac{1}{2}}} = a_3 \qquad -\frac{\alpha_1}{R_\alpha^{\frac{1}{2}}} = a_2 \qquad \frac{\alpha_2}{R_\alpha^{\frac{1}{2}}} = a_1 \qquad \frac{\alpha_3}{R_\alpha^{\frac{1}{2}}} = -a_0,$$

ove $a_0 = a_{111}, \ldots\ a_3 = a_{222}$; di qui, indicando con R_a il discriminante della forma di coefficienti a, si ha:

$$R_\alpha R_a = 1,$$

quindi abbiamo:

$$\alpha_0 = \frac{a_3}{R_a^{\frac{1}{2}}} \qquad \alpha_1 = -\frac{a_2}{R_a^{\frac{1}{2}}} \qquad \alpha_2 = \frac{a_1}{R_a^{\frac{1}{2}}} \qquad \alpha_3 = -\frac{a_0}{R_a^{\frac{1}{2}}}.$$

Con questi valori la φ diviene:

$$\varphi = \frac{1}{R_a^{\frac{1}{2}}}\{a_3 dx_1^3 - 3a_2 dx_1^2 dx_2 + 3a_1 dx_1 dx_2^2 - a_0 dx_2^3\}.$$

Questa cubica ammette $\Delta_1[U, V, W]$ come invariante, e mediante di essa, col procedimento del § 3, possiamo determinare le $H_{qr\ p}$ in funzione dei coefficienti β della sua trasformata, i quali saranno formati coi coefficienti b, come i coefficienti di φ sono formati colle a. I determinanti (14) che devono essere differenti da zero, perchè la determinazione delle $H_{qr\ p}$ sia possibile sono in questo caso:

$$\frac{1}{R_\beta}(\beta_0\beta_2 - \beta_1^2) \qquad \frac{1}{R_\beta}(\beta_1\beta_3 - \beta_2^2). \tag{ξ}$$

La determinazione delle $H_{qr,p}$ si può fare anche mediante una forma quadratica; difatti la φ ammette la forma covariante assoluta quadratica:

$$\psi = \frac{1}{R_a^{\frac{1}{3}}}\{(a_1 a_3 - a_2^2)dx_1^2 - (a_0 a_3 - a_1 a_2)dx_1 dx_2 + (a_0 a_2 - a_1^2)dx_2^2\},$$

la quale ammetterà pure per invariante $\Delta_1[U, V, W]$. Possiamo quindi applicare a questa forma il procedimento del paragrafo precedente per determinare le $H_{qr\,p}$. La condizione per la risolubilità delle equazioni corrispondenti è, in questo caso, che sia differente da zero il discriminante R_α; esso inoltre dovrà essere supposto positivo, per non introdurre immaginari. Se R_α è positivo, anche R_β sarà positivo, qualunque siano le variabili y, e da ciò segue pure che i due determinanti (ξ) non potranno mai essere zero.

Due forme binarie di grado dispari $2\mu + 1$ di coefficienti α e γ, ammettono l'invariante simultaneo rappresentato simbolicamente da:

$$(\alpha\gamma)^{2\mu+1},$$

il quale è lineare nei coefficienti di ciascuna forma; inoltre una forma binaria di grado dispari $\alpha_x^{2\mu+1} = \beta_x^{2\mu+1} = \cdots$ ammette il covariante quadratico:

$$(\alpha\beta)^{2\mu}\,\alpha_x\beta_x.$$

Da ciò segue che le considerazioni precedenti sono applicabili a tutte le equazioni di ordine dispari con due variabili indipendenti, cioè si ha il teorema:

La trasformazione di un'equazione a derivate parziali, lineare, omogenea, a coefficienti costanti, d'ordine dispari $2\mu + 1$, *con due variabili indipendenti è riducibile in generale a quella di una forma differenziale binaria di grado* $2\mu + 1$; *inoltre la determinazione delle funzioni* $H_{qr.p}$ *si può fare mediante i coefficienti di una forma differenziale binaria quadratica.*

Scriviamo infine la forma generale della trasformata dell'equazione del 3.° ordine quale risulta dalle relazioni (δ) (ε), oppure dal principio di Jacobi.

Cominciamo ad osservare che il gruppo dei covarianti della equazione è in questo caso costituito dai seguenti due:

$$\Delta_1[U, V, W] = \sum_{pqr} b_{pqr} \frac{\partial U}{\partial y_p} \frac{\partial V}{\partial y_q} \frac{\partial W}{\partial y_r}$$

$$\Delta_2[U \mid V] = \sum_{pqr} b_{pqr} \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} \frac{\partial V}{\partial y_r} + \sum_{pq} b_{pq} \frac{\partial U}{\partial y_p} \frac{\partial V}{\partial y_q}.$$

Se ora si pone:

$$U_r = \frac{\partial \Delta_2[U \mid V]}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial y_r}\right)} = \sum_{pq} b_{pqr} \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} + \sum_p b_{pr} \frac{\partial U}{\partial y_p},$$

si ha:

$$\Delta_3[U] = \frac{1}{B} \sum_r \frac{\partial}{\partial y_r} (B\,U_r). \qquad \text{(I)}$$

Ponendo invece:

$$U^*_{pq} = \frac{\partial^2 \Delta_1[U, V, W]}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial y_p}\right)\partial\left(\frac{\partial W}{\partial y_q}\right)} = \frac{\partial \Delta_2[V \mid U]}{\partial\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y_p \partial y_q}\right)} = \sum_r b_{pqr}\frac{\partial U}{\partial y_r}$$

$$U^*_p = \frac{\partial \Delta_2[V \mid U]}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial y_p}\right)} = \sum_q b_{pq}\frac{\partial U}{\partial y_q},$$

si ha:

$$\Delta_3[U] = \frac{1}{B}\sum_{pq}\frac{\partial^2}{\partial y_p \partial y_q}(B U^*_{pq}) - \frac{1}{B}\sum_p \frac{\partial}{\partial y_p}(B U^*_p). \tag{II}$$

Infine si ha:

$$\Delta_2[U, V] = \frac{1}{B}\sum_r \frac{\partial}{\partial y_r}\left(B\frac{\partial \Delta_1[U, V, W]}{\partial\left(\frac{\partial W}{\partial y_r}\right)}\right),$$

in cui:

$$\frac{\partial \Delta_1[U, V, W]}{\partial\left(\frac{\partial W}{\partial y_r}\right)} = \sum_{1q} b_{pqr}\frac{\partial U}{\partial y_p}\frac{\partial V}{\partial y_q}.$$

§ 6. Forme algebriche reciproche.

Per le espressioni $\Delta_\nu[U_1, U_2, \ldots U_\nu]$, quando ν è pari, è possibile stabilire un procedimento generale per costruire delle forme differenziali di grado ν, rispetto alle quali esse sono invariabili. Prima però è necessario estendere alle forme di ordine pari qualsiasi il concetto ordinario della reciprocità delle forme quadratiche.

Cominciamo a richiamare la definizione delle forme quadratiche reciproche, servendoci della notazione simbolica. Consideriamo il determinante:

$$(a^{(1)}\, a^{(2)} \ldots a^{(n)}) = \begin{vmatrix} a^{(1)}_1 & a^{(2)}_1 \ldots & a^{(n)}_1 \\ a^{(1)}_2 & a^{(2)}_2 \ldots & a^{(n)}_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{(1)}_n & a^{(2)}_n \ldots & a^{(n)}_n \end{vmatrix}, \tag{16}$$

e poniamo:

$$\frac{\partial (a^{(1)}\, a^{(2)} \ldots a^{(n)})}{\partial a^{(1)}_i} = (a^{(2)}\, a^{(3)} \ldots a^{(n)})_i, \ldots \qquad \frac{\partial (a^{(1)}\, a^{(2)} \ldots a^{(n)})}{\partial a^{(n)}_i} = (a^{(2)}\, a^{(3)} \ldots a^{(n)})_i.$$

Costruiamo ora il determinante:

$$(\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}\dots\alpha^{(n)}) = \begin{vmatrix} \alpha_1^{(1)} & \alpha_1^{(2)} \dots & \alpha_1^{(n)} \\ \alpha_2^{(1)} & \alpha_2^{(2)} \dots & \alpha_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_n^{(1)} & \alpha_n^{(2)} \dots & \alpha_n^{(n)} \end{vmatrix}, \tag{17}$$

i cui elementi siano definiti in funzione di quelli del precedente mediante le formule:

$$\left.\begin{array}{l} (a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(n)})\,\alpha_i^{(1)} = (a^{(2)}a^{(3)}\dots a^{(n)})_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(n)})\,\alpha_i^{(n)} = (a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(n-1)})_i. \end{array}\right\} \tag{18}$$

Avremo allora, come è noto dalla teoria dei determinanti,

$$\left.\begin{array}{l} (\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}\dots \alpha^{(n)})\,a_i^{(1)} = (\alpha^{(2)}\alpha^{(3)}\dots \alpha^{(n)})_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}\dots \alpha^{(n)})\,a_i^{(n)} = (\alpha^{(1)}\alpha^{(2)}\dots \alpha^{(n-1)})_i. \end{array}\right\} \tag{19}$$

Si abbia ora una forma quadratica ad n variabili:

$$\varphi = \sum_{ih} a_{ih} z_i z_h,$$

oppure simbolicamente:

$$\varphi = a_z^{(1)^2} = a_z^{(2)^2} = \dots = a_z^{(n)^2},$$

il cui discriminante, all'infuori di un fattore numerico che, per semplicità, trascuriamo, può essere rappresentato con

$$a = (a^{(1)}a^{(2)}\dots a^{(n)})^2.$$

Si chiama *forma reciproca* di φ, una forma Φ i cui coefficienti α_{ih} sono definiti simbolicamente da:

$$\alpha_{ih} = \alpha_i^{(r)}\alpha_h^{(r)},$$

ove per $\alpha_i^{(r)}$, $\alpha_h^{(r)}$ si intendono le espressioni definite dalle (18), ed r è un indice determinato qualunque; è chiaro che il secondo membro della formula precedente ha un significato reale, e non identicamente zero, in funzione dei coefficienti di φ. Noi porremo:

$$\Phi = \sum_{ih} \alpha_{ih} Z_i Z_h,$$

oppure simbolicamente:

$$\Phi = \alpha_Z^{(1)^2} = \alpha_Z^{(2)^2} = \dots = \alpha_Z^{(n)^2}.$$

La ragione della denominazione introdotta per Φ sta nel fatto che, se noi da Φ deduciamo una nuova forma quadratica collo stesso procedimento che ha servito a dedurre Φ da φ, ritroviamo la φ. Difatti siano α'_{ih} i coefficienti di questa nuova forma; dalla (19) abbiamo subito:

$$\alpha'_{ih} = a_i^{(r)} a_h^{(r)} = a_{ih}.$$

Avremo inoltre:

$$(a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(n)})^2 \alpha_{ih} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 (a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(n)})^2}{\partial a_i^{(r)} \partial a_h^{(r)}},$$

e reciprocamente:

$$(\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \ldots \alpha^{(n)})^2 a_{ih} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 (\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \ldots \alpha^{(n)})^2}{\partial \alpha_i^{(r)} \partial \alpha_h^{(r)}}.$$

Inoltre, essendo uguale all'unità il prodotto dei determinanti (16) (17) avremo anche:

$$(a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(n)})^2 (\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \ldots \alpha^{(n)})^2 = 1.$$

Queste considerazioni possono essere immediatamente estese a qualsiasi forma di grado pari. Sia:

$$\varphi = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_{2\nu}} a_{i_1 i_2 \ldots i_{2\nu}} z_{i_1} z_{i_2} \ldots z_{i_{2\nu}},$$

oppure simbolicamente:

$$\varphi = a_z^{(1)2\nu} = a_z^{(2)2\nu} = \cdots = a_z^{(n)2\nu},$$

la forma data di grado 2ν, essa ammette l'invariante di grado n:

$$a = (a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(n)})^{2\nu}.$$

Definiremo *forma reciproca* una forma Φ di grado 2ν, i cui coefficienti $\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{2\nu}}$ sono determinati dalla formula:

$$\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{2\nu}} = \alpha_{i_1}^{(r)} \alpha_{i_2}^{(r)} \ldots \alpha_{i_{2\nu}}^{(r)},$$

ove le $\alpha_i^{(r)}$ sono le espressioni definite dalle (18), ed r è un indice determinato qualunque; il secondo membro della formula precedente ha un significato reale, e non identicamente zero, in funzione dei coefficienti di φ. Noi porremo:

$$\Phi = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_{2\nu}} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{2\nu}} Z_{i_1} Z_{i_2} \ldots Z_{i_{2\nu}};$$

oppure simbolicamente:

$$\Phi = \alpha_Z^{(1)2\nu} = \alpha_Z^{(2)2\nu} = \cdots = \alpha_Z^{(n)2\nu}.$$

Se deduciamo da Φ una nuova forma di grado 2ν, collo stesso procedimento, col quale abbiamo dedotto Φ da φ, ritroviamo la φ. Difatti, indicando con $\alpha'_{i_1 i_2 \ldots i_{2\nu}}$ i coefficienti di questa nuova forma, dalla (19) abbiamo:

$$\alpha'_{i_1 i_2 \ldots i_{2\nu}} = a^{(r)}_{i_1} a^{(r)}_{i_2} \ldots a^{(r)}_{i_{2\nu}} = a_{i_1 i_2 \ldots i_{2\nu}}.$$

Abbiamo poi:

$$(a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(n)})^{2\nu} \alpha_{i_1 i_2 \ldots i_{2\nu}} = \frac{1}{2\nu!} \frac{\partial^{2\nu} (a'^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(n)})^{2\nu}}{\partial a^{(r)}_{i_1} \partial a^{(r)}_{i_2} \ldots \partial a^{(r)}_{i_{2\nu}}}, \tag{20}$$

e reciprocamente:

$$(\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \ldots \alpha^{(n)})^{2\nu} a_{i_1 i_2 \ldots i_{2\nu}} = \frac{1}{2\nu!} \frac{\partial^{2\nu} (\alpha'^{(1)} \alpha^{(2)} \ldots \alpha^{(n)})^{2\nu}}{\partial \alpha^{(r)}_{i_1} \partial \alpha^{(r)}_{i_2} \ldots \partial \alpha^{(r)}_{i_{2\nu}}}. \tag{21}$$

Finalmente, se formiamo per la Φ l'invariante α analogo all'invariante a della φ,

$$\alpha = (\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \ldots \alpha^{(n)})^{2\nu},$$

osservando che il prodotto dei due determinanti (16) (17) è uguale all'unità, avremo:

$$a\,\alpha = 1.$$

In tutte queste considerazioni naturalmente si deve supporre che la forma φ abbia l'invariante a differente da zero.

Ricordando la formula di EULERO per la espressione di una funzione omogenea di n variabili mediante le derivate di ordine 2ν, e osservando la (20) si trova:

$$\Phi = \frac{(a^{(1)} \ldots a^{(r-1)}\, Z\, a^{(r+1)} \ldots a^{(n)})^{2\nu}}{(a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(n)})^{2\nu}},$$

e così per la (21) si ha anche:

$$\varphi = \frac{(\alpha^{(1)} \ldots \alpha^{(r-1)}\, z\, \alpha^{(r+1)} \ldots \alpha^{(n)})^{2\nu}}{(\alpha^{(1)} \alpha^{(2)} \ldots \alpha^{(n)})^{2\nu}}.$$

La prima di queste formule mostra che la Φ è una forma contravariante di φ in modo assoluto.

Per avere un'idea delle legge di formazione dei coefficienti della forma reciproca possiamo osservare per es. che i coefficienti della reciproca di una ternaria quadratica, se si fa astrazione del denominatore comune, sono determinanti di 2.° ordine, cioè hanno forma analoga a quella dell'invariante $(a\,b)^2$ di una binaria quadratica; i coefficienti della reciproca di una quartica ternaria hanno forma analoga a quella dell' invariante $(a\,b)^4$ di una quartica binaria, ecc.; in generale i coefficienti della reciproca di una n-aria di grado 2ν sono formati in modo analogo all'invariante $(a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(n-1)})^{2\nu}$ di una $(n-1)$-aria, sempre all'infuori del denominatore comune $(a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(n)})^{2\nu}$.

Dalle considerazioni precedenti e dall'osservazione che le derivate prime di una funzione di n variabili sono controgredienti ai differenziali delle variabili stesse, risulta subito che data un'espressione:

$$\Delta_1[U_1, U_2, \ldots U_{2\nu}] = \sum_{i_1 i_2 \ldots i_{2\nu}} a_{i_1 i_2 \,.\, i_{2\nu}} \frac{\partial U_1}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial U_{2\nu}}{\partial x_{i_{2\nu}}}.$$

si otterrà una forma differenziale di grado 2ν rispetto alla quale tale espressione sarà invariabile, costruendo la forma differenziale reciproca della precedente, considerata come forma 2ν-plo lineare delle derivate delle funzioni $U_1, \ldots U_{2\nu}$.

Inversamente, data una forma differenziale di grado 2ν, lo stesso procedimento condurrà ad una espressione $\Delta_1[U_1, \ldots U_{2\nu}]$ invariabile rispetto alla forma.

§ 7. Equazioni del 4.° ordine.

Le formule pel cambiamento delle variabili indipendenti per la trasformazione della espressione:

$$\Delta_4[U] = \sum_{ihkl} a_{ihkl} \frac{\partial^4 U}{\partial x_i \partial x_h \partial x_k \partial x_l},$$

ci dànno:

$$\Delta_4[U] = \sum_{pqrs} \Delta_1[y_p, y_q, y_r, y_s] \frac{\partial^4 U}{\partial y_p \partial y_q \partial y_r \partial y_s} + \\ + 6 \sum_{pqr} \Delta_2[y_p \mid y_q, y_r] \frac{\partial^3 U}{\partial y_p \partial y_q \partial y_r} \\ + \sum_{pq} (3\Delta_2[y_p, y_q] + 4\Delta_3[y_p \mid y_q]) \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} + \sum_p \Delta_4[y_p] \frac{\partial U}{\partial y_p},$$

dove abbiamo:

$$\Delta_1[y_p, y_q, y_r, y_s] = \sum_{ihkl} a_{ihkl} \frac{\partial y_p}{\partial x_i} \frac{\partial y_q}{\partial x_h} \frac{\partial y_r}{\partial x_k} \frac{\partial y_s}{\partial x_l} = b_{pqrs}$$

$$\Delta_2[y_p \mid y_q, y_r] = \sum_{ihkl} a_{ihkl} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial y_q}{\partial x_k} \frac{\partial y_r}{\partial x_l} = b_{pqr}$$

$$\Delta_2[y_p, y_q] = \sum_{ihkl} a_{ihkl} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial^2 y_q}{\partial x_k \partial x_l} = b_{pq}$$

$$\Delta_3[y_p \mid y_q] = \sum_{ihkl} a_{ihkl} \frac{\partial^3 y_p}{\partial x_i \partial x_h \partial x_k} \frac{\partial y_q}{\partial x_l} = b'_{pq}$$

$$\Delta_4[y_p] = \sum_{ihkl} a_{ihkl} \frac{\partial^4 y_p}{\partial x_i \partial x_h \partial x_k \partial x_l} = b_p.$$

Col metodo che abbiamo indicato per stabilire la (10′) si trova:

$$\left.\begin{aligned} b_{pqr} &= \sum_{lm} H_{lm.p}\, b_{lmqr} \\ b_{pq} &= \sum_{lmni} H_{lm,p}\, H_{ni,q}\, b_{lmni} \\ b'_{pq} &= \sum_{lmn} H_{lmn\,p}\, b_{lmnq} \\ b_{p} &= \sum_{lmni} H_{lmni\,p}\, b_{lmni}. \end{aligned}\right\} \qquad (\alpha)$$

Dalle (5) poi abbiamo:

$$\left.\begin{aligned} H_{lmn,p} &= \frac{\partial H_{lm,p}}{\partial y_n} + \sum_k (H_{ln,k}\, H_{mk,p} + H_{mn,k}\, H_{lk\,p}) \\ H_{lmni,p} &= \frac{\partial H_{lmn,p}}{\partial y_i} + \sum_k (H_{li,k}\, H_{mnk\,p} + H_{mi\,p}\, H_{nlk\,p} + H_{ni,k}\, H_{lmk\,p}), \end{aligned}\right\} \qquad (\beta)$$

e finalmente dalla (11):

$$\frac{\partial b_{pqrs}}{\partial y_t} = \sum_l (H_{lt\,p}\, b_{lqrs} + H_{lt,q}\, b_{lrsp} + H_{lt\,r}\, b_{lspq} + H_{lt\,s}\, b_{lpqr}). \qquad (\gamma)$$

Il problema, secondo il metodo generale, si riduce alla eliminazione delle $H_{pq,r}$ dalle (α) (β) mediante le (γ).

I covarianti del gruppo dell'equazione in questo caso sono quattro; le loro espressioni colle variabili y sono:

$$\Delta_1[U, V, W, T] = \sum_{pqrs} \Delta_1[y_p, y_q, y_r, y_s] \frac{\partial U}{\partial y_p} \frac{\partial V}{\partial y_q} \frac{\partial W}{\partial y_r} \frac{\partial T}{\partial y_s}$$

$$\Delta_2[U \mid V, W] = \sum_{pqrs} \Delta_1[y_p, y_q, y_r, y_s] \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} \frac{\partial V}{\partial y_r} \frac{\partial W}{\partial y_s} + \\ + \sum_{pqr} \Delta_2[y_p \mid y_q, y_r] \frac{\partial U}{\partial y_p} \frac{\partial V}{\partial y_q} \frac{\partial W}{\partial y_r}$$

$$\Delta_2[U, V] = \sum_{pqrs} \Delta_1[y_p, y_q, y_r, y_s] \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} \frac{\partial^2 V}{\partial y_r \partial y_s} + \\ + \sum_{pqr} \Delta_2[y_p \mid y_q, y_r] \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_q \partial y_r} \frac{\partial V}{\partial y_p} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_q \partial y_r} \frac{\partial U}{\partial y_p} \right) + \\ + \sum_{pq} \Delta_2[y_p, y_q] \frac{\partial U}{\partial y_p} \frac{\partial V}{\partial y_q}$$

$$\Delta_3[U \mid V] = \sum_{pqrs} \Delta_1[y_p, y_q, y_r, y_s] \frac{\partial^3 U}{\partial y_p \partial y_q \partial y_r} + \\ + 3 \sum_{pqr} \Delta_2[y_p \mid y_q, y_r] \frac{\partial^2 U}{\partial y_p \partial y_q} \frac{\partial V}{\partial y_r} + \sum_{pq} \Delta_3[y_p \mid y_q] \frac{\partial U}{\partial y_p} \frac{\partial V}{\partial y_q}.$$

Si può osservare che tutte queste espressioni, al pari di quella della $\Delta_1[U]$, in virtù delle (10') si possono rappresentare come funzioni lineari delle b_{pqrs}.

Le relazioni che si deducono dalle (α) derivando rispetto alle y, e sostituendo poi alle derivate delle $H_{lm,p}$, $H_{lmn,p}$ e delle b_{lmni} i valori dati dalle (β) (γ) sono le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} b_{qrs} + b_{rsq} + b_{sqr} &= \frac{1}{B} \sum_p \frac{\partial}{\partial y_p} (B\, b_{pqrs}) \\ b'_{pq} + b_{pq} &= \frac{1}{B} \sum_r \frac{\partial}{\partial y_r} (B\, b_{pqr}) \\ b_p &= \frac{1}{B} \sum_q \frac{\partial}{\partial y_q} (B\, b'_{pq}), \end{aligned}\right\} \qquad (\delta)$$

ove possiamo prendere:

$$B = \frac{1}{\sqrt[4]{b}},$$

indicando con b l'invariante rappresentato simbolicamente da $(b^{(1)} b^{(2)} \ldots b^{(n)})^4$.

Per quanto abbiamo visto nel paragrafo precedente otterremo poi una forma differenziale di 4.° ordine, rispetto alla quale la forma $\Delta_4[U, V, W, T]$ sarà invariabile, costruendone la forma differenziale a coefficienti reciproci. Nel seguente paragrafo vedremo meglio le relazioni fra questa forma ed i covarianti dell'equazione; qui mi limiterò a dare la forma della trasformata dell'equazione, quale risulta dal principio di Jacobi oppure dalle relazioni (δ). Come nel caso dell'equazione di 3.° ordine abbiamo trovato due forme della trasformata, qui invece ne abbiamo tre.

Se si pone:

$$U_s = \frac{\partial \Delta_3[U \mid V]}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial y_s}\right)} = \sum_{pqr} b_{pqrs} \frac{\partial^3 U}{\partial y_p\, \partial y_q\, \partial y_r} + 3 \sum_{pq} b_{pqs} \frac{\partial^2 U}{\partial y_p\, \partial y_q} + \sum_p b'_{ps} \frac{\partial U}{\partial y_p},$$

si ha:

$$\Delta_4[U] = \frac{1}{B} \sum_s (B U_s). \qquad \text{(I)}$$

Ponendo invece:

$$U^*_{pq} = \frac{\partial \Delta_2[U, V]}{\partial\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial y_p\, \partial y_q}\right)} = \sum_{rs} b_{pqrs} \frac{\partial^2 U}{\partial y_r\, \partial y_s} + \sum_r b_{rpq} \frac{\partial U}{\partial y_r}$$

$$U^*_p = \frac{\partial \Delta_2[U, V]}{\partial\left(\dfrac{\partial V}{\partial y_p}\right)} = \sum_{rs} b_{prs} \frac{\partial^2 U}{\partial y_r\, \partial y_s} + \sum_r b_{rp} \frac{\partial U}{\partial y_r}$$

si trova:

$$\Delta_1[U] = \frac{1}{B}\sum_{pq}\frac{\partial^2}{\partial y_p \partial y_q}(BU^*_{pq}) - \frac{1}{B}\sum_{p}(BU^*_p). \tag{II}$$

Finalmente ponendo:

$$U^{**}_{pqr} = \frac{\partial \Delta_3[V \mid U]}{\partial\left(\frac{\partial^3 V}{\partial y_p \partial y_q \partial y_r}\right)} = \frac{\partial^3 \Delta_1[U, V, W, T]}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial y_p}\right)\partial\left(\frac{\partial W}{\partial y_q}\right)\partial\left(\frac{\partial T}{\partial y_r}\right)} = \sum_s b_{pqrs}\frac{\partial U}{\partial y_s}$$

$$U^{**}_{pq} = \frac{\partial \Delta_3[V \mid U]}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial y_p \partial y_p}\right)} = \sum_s b_{pqs}\frac{\partial U}{\partial y_s}$$

$$U^{**}_{p} = \frac{\partial \Delta_3[V \mid U]}{\partial\left(\frac{\partial V}{\partial y_p}\right)} = \sum_s b'_{ps}\frac{\partial U}{\partial y_s},$$

si ha:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_1[U] = \frac{1}{B}\sum_{pqr}\frac{\partial^3}{\partial y_p \partial y_q \partial y_r}(BU^{**}_{pqr}) - \frac{1}{B}\sum_{pq}\frac{\partial^2}{\partial y_p \partial y_q}(BU^{**}_{pq}) + \\ + \frac{1}{B}\sum_p \frac{\partial}{\partial y_p}(BU^{**}_p).\end{aligned}\right\} \tag{III}$$

Altre relazioni fra i quattro covarianti si possono ottenere assai facilmente col principio di Jacobi.

§ 8. Parametri differenziali.

Quelle espressioni, che nei paragrafi precedenti abbiamo chiamato *covarianti* dell'equazione:

$$\Delta_\nu[U] = 0,$$

allorchè esiste una forma differenziale rispetto alla quale le espressioni del 1.° ordine $\Delta_1[U_1, \ldots, U_\nu]$ sono invariabili, godono tutte di proprietà invariantiva rispetto alla forma stessa, e possono quindi essere chiamati *parametri differenziali* di questa, per analogia colla denominazione in uso per le forme quadratiche. Le forme, che abbiamo considerato però non erano generali, ma implicitamente era ammessa la condizione che fossero riducibili, con opportune trasformazioni di variabili, ad essere a coefficienti costanti. Ora possiamo affrancarci anche da questa restrizione e dare un procedimento generale per la formazione dei parametri di qualunque forma differenziale. Tale procedimento non è che la estensione, mediante una osservazione assai semplice, del metodo trovato dal prof. Ricci pel caso delle forme quadratiche, e può essere soggetto soltanto a quella restrizione a cui abbiamo accennato nel § 3.

Consideriamo una forma differenziale:

$$\varphi = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} a_{i_1 i_2 \dots i_\nu} d x_{i_1} \dots d x_{i_\nu},$$

di grado ν, i cui coefficienti siano funzioni delle variabili x; mutando le variabili x in altre variabili y, si ottenga:

$$\varphi = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} b_{i_1 i_2 \dots i_\nu} d y_{i_1} \dots d y_{i_\nu}; \tag{22}$$

e mutando similmente le x in altre variabili z si abbia:

$$\varphi = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\nu} b'_{i_1 i_2 \dots i_\nu} d z_{i_1} \dots d z_{i_\nu}. \tag{22'}$$

Poniamo come nei paragrafi precedenti:

$$H_{qr,p} = \sum_{ih} \frac{\partial^2 y_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial x_i}{\partial y_q} \frac{\partial x_h}{\partial y_r}, \tag{23}$$

e inoltre:

$$H'_{qr,p} = \sum_{ih} \frac{\partial^2 z_p}{\partial x_i \partial x_h} \frac{\partial x_i}{\partial z_q} \frac{\partial x_h}{\partial z_r}. \tag{23'}$$

Sappiamo che queste espressioni $H_{qr,p}$, $H'_{qr,p}$ si potranno in generale rappresentare in modo identico mediante le (15) (15'), come funzioni dei coefficienti b e delle loro derivate, e come funzioni dei coefficienti b' e delle loro derivate, rispettivamente. Cerchiamo ora quali relazioni esistono fra le $H_{qr,p}$ e le $H'_{qr,p}$.

La (23') può essere scritta nel seguente modo:

$$H'_{qr,p} = \sum_{ih} \left(\sum_{lm} \frac{\partial^2 z_p}{\partial y_l \partial y_m} \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_h} + \sum_k \frac{\partial z_p}{\partial y_k} \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_h} \right) \frac{\partial x_i}{\partial z_q} \frac{\partial x_h}{\partial z_r},$$

ossia:

$$H'_{qr,p} = \sum_{lm} \left(\frac{\partial^2 z_p}{\partial y_l \partial y_m} + \sum_k H_{lm,k} \frac{\partial z_p}{\partial y_k} \right) \frac{\partial y_l}{\partial z_q} \frac{\partial y_m}{\partial z_r},$$

da cui si ha:

$$\sum_{qr} H'_{qr,p} \frac{\partial z_q}{\partial y_i} \frac{\partial z_r}{\partial y_s} = \frac{\partial^2 z_p}{\partial y_i \partial y_s} + \sum_k H_{is,k} \frac{\partial z_p}{\partial y_k}. \tag{24}$$

Stabilita questa formula, supponiamo che si conosca una forma differenziale di grado λ:

$$\Phi = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} P_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} \, dx_{i_1} \dots dx_{i_\lambda},$$

la quale sia covariante di φ, ed i cui coefficienti siano funzioni delle $a_{i_1 \dots i_\nu}$, e delle loro derivate, ed inoltre delle derivate di una o più funzioni arbitrarie U, V,... Nelle due trasformate di Φ nelle variabili y e z

$$\Phi = \sum_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} Q_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} \, dy_{i_1} \dots dy_{i_\lambda}$$

$$\Phi = \sum_{l_1 l_2 \dots l_\lambda} Q'_{l_1 l_2 \dots l_\lambda} \, dz_{l_1} \dots dz_{l_\lambda},$$

i coefficienti saranno, per ipotesi, formati in modo identico ai coefficienti $P_{i_1 \dots i_\lambda}$ coi coefficienti delle (22) (22′) e colle derivate di questi e delle funzioni U, V,... rispetto alle variabili y e z rispettivamente. Fra i coefficienti $Q_{i_1 \dots i_\lambda}$ e $Q'_{l_1 \dots l_\lambda}$ poi avremo le relazioni:

$$Q_{i_1 i_2 \dots i_\lambda} = \sum_{l_1 l_2 \dots l_\lambda} Q'_{l_1 l_2 \dots l_\lambda} \frac{\partial z_{l_1}}{\partial y_{i_1}} \cdots \frac{\partial z_{l_\lambda}}{\partial y_{i_\lambda}}.$$

Derivando i due membri rispetto ad y_i avremo:

$$\frac{\partial Q_{i_1 i_2 \dots i_\lambda}}{\partial y_i} = \sum_{l l_1 \dots l_\lambda} \frac{\partial Q'_{l_1 l_2 \dots l_\lambda}}{\partial z_l} \frac{\partial z_l}{\partial y_i} \frac{\partial z_{l_1}}{\partial y_{i_1}} \cdots \frac{\partial z_{l_\lambda}}{\partial y_{i_\lambda}}$$

$$+ \sum_{l_1 l_2 \dots l_\lambda} Q'_{l_1 l_2 \dots l_\lambda} \left\{ \frac{\partial^2 z_{l_1}}{\partial y_i \partial y_{i_1}} \frac{\partial z_{l_2}}{\partial y_{i_2}} \cdots \frac{\partial z_{l_\lambda}}{\partial y_{i_\lambda}} + \cdots + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial z_{l_1}}{\partial y_{i_1}} \cdots \frac{\partial z_{l_{\lambda-1}}}{\partial y_{i_{\lambda-1}}} \frac{\partial^2 z_{l_\lambda}}{\partial y_i \partial y_{i_\lambda}} \right\}$$

Eliminando ora dal secondo membro le derivate seconde delle z rispetto alle y mediante la (24) e posto:

$$Q_{i i_1 \dots i_\lambda} = \frac{\partial Q_{i_1 \dots i_\lambda}}{\partial y_i} + \sum_k \sum_{j=1}^{\lambda} Q_{i_1 \dots i_{j-1} k i_{j+1} \dots i_\lambda} H_{i i_j, k} \tag{25}$$

$$Q'_{l l_1 \dots l_\lambda} = \frac{\partial Q'_{l_1 \dots l_\lambda}}{\partial y_l} + \sum_k \sum_{s=1}^{\lambda} Q'_{l_1 \dots l_{s-1} k l_{s+1} \dots l_\lambda} H'_{l l_s, k}, \tag{25'}$$

si trova:

$$Q_{i i_1 \dots i_\lambda} = \sum_{l l_1 \dots l_\lambda} Q'_{l l_1 \dots l_\lambda} \frac{\partial z_l}{\partial y_i} \frac{\partial z_{l_1}}{\partial y_{i_1}} \cdots \frac{\partial z_{l_\lambda}}{\partial y_{i_\lambda}}.$$

Da questa formula risulta il teorema: *La forma di grado* $\lambda + 1$

$$\Psi = \sum_{i\, i_1 \ldots i_\lambda} Q_{i\, i_1 \ldots i_\lambda}\, dx_i\, dx_{i_1} \ldots dx_{i_\lambda},$$

i cui coefficienti sono dedotti da quelli di Φ *mediante le* (25) *è, come* Φ, *covariante di* φ. Di qui si ha un procedimento per dedurre da una data forma covariante una serie di altre forme covarianti, di grado successivamente crescente di una unità.

Nella Memoria: *Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades* (Crelle, Bd. 70), CHRISTOFFEL ha dimostrato un teorema perfettamente analogo al precedente (*), nel quale però, al posto delle $H_{qr, p}$ compaiono i valori che per queste quantità abbiamo trovato al § 4 nel caso delle forme quadratiche; il teorema vale quindi soltanto pel caso in cui φ è quadratica. Noi, avendo sostituito le $H_{qr,p}$, abbiamo reso il teorema applicabile a forme di qualsiasi grado.

Se ora U è una funzione arbitraria delle variabili $x_1, \ldots x_n$, e poniamo:

$$U_r = \frac{\partial U}{\partial x_r};$$

la forma lineare

$$\Delta U = \sum_r U_r\, dx_r,$$

che rappresenta il differenziale completo del 1.° ordine della funzione U, può sempre essere considerata come covariante di φ; applicando ad essa il teorema di CHRISTOFFEL generalizzato, potremo dedurne altre forme di grado successivamente crescente di una unità, i cui coefficienti conterranno le derivate parziali della U di ordine uguale al grado della forma, ed inoltre le $a_{i_1 \ldots i_\nu}$ e le loro derivate. Noi porremo secondo la (25):

$$U_{r\, r_1 \ldots r_\lambda} = \frac{\partial U_{r_1 \ldots r_\lambda}}{\partial x_r} + \sum_k \sum_{j=1}^{\lambda} U_{r_1 \ldots r_{j-1}\, k\, r_{j+1} \ldots r_\lambda} H_{r\, r_j, k}, \tag{25'}$$

ove si intende che le $H_{r\, r_j, k}$ siano espresse mediante le $a_{i_1 \ldots i_\nu}$ e le loro derivate, come abbiamo visto al § 3; e avremo allora che la m-esima forma covariante di φ sarà:

$$\Delta^m U = \sum_{r_1 r_2 \ldots r_m} U_{r_1 r_2 \ldots r_m}\, dx_{r_1} \ldots dx_{r_m}.$$

(*) CHRISFOFFEL considera invece della forma Φ di grado λ, una forma λ volte lineare rispetto a λ serie di differenziali delle variabili; noi, per semplicità, non abbiamo introdotto questa estensione, che del resto è evidente potersi fare anche nel nostro caso.

Tutti gli invarianti algebrici simultanei della forma φ e delle

$$\Delta U, \qquad \Delta^2 U, \ldots \qquad \Delta^m U, \ldots, \tag{26}$$

saranno altrettante espressioni invariabili rispetto a φ per qualsiasi trasformazione di variabili (ossia *parametri differenziali* di φ) salvo al più quella restrizione, a cui accennato al § 3, relativamente alle condizioni per la risolubilità delle equazioni, da cui si devono ricavare le $H_{r r_j, k}$.

Nel caso in cui φ è di 2.° grado il metodo precedente per la formazione dei parametri coincide con quello citato del prof. Ricci.

Insieme alle serie delle forme (26), potremo considerare altre serie analoghe formate con altre funzioni arbitrarie V, W,... ed ottenere così dei parametri dipendenti da parecchie funzioni.

Moltiplicando fra loro le forme di ν di queste serie si potrà formare un numero finito di forme di grado ν, uguale al grado della forma differenziale data; chiameremo *gruppo principale* dei parametri l'insieme di quelli che si ottengono dalla considerazione degli invarianti simultanei di questo sistema di forme. Una qualunque di queste forme sarà:

$$\varphi_\rho = \Delta^{\lambda_1} U_1 \Delta^{\lambda_2} U_2 \ldots \Delta^{\lambda_\rho} U_\rho,$$

e dovrà essere:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_\rho = \nu.$$

Considerando come identiche alla φ_ρ, quelle forme che si ottengono da essa permutando fra loro le funzioni $U_1, \ldots U_\nu$, il numero delle forme che compongono il sistema sarà uguale a quello delle soluzioni intere della equazione precedente, per $\rho = 1, 2, \ldots \nu$.

Come applicazione, costruiamo le forme del gruppo principale per $\nu = 4$. Sia:

$$\varphi = \sum_{ihkl} a_{ihkl}\, dx_i\, dx_h\, dx_k\, dx_l,$$

la forma data di 4.° grado; si hanno in questo caso 5 forme del gruppo principale:

$$\left.\begin{array}{lll} \varphi_1 = \Delta U \Delta V \Delta W \Delta S & \varphi'_2 = \Delta^2 U \Delta^2 V & \varphi_4 = \Delta^4 U \\ \varphi_2 = \Delta^2 U \Delta V \Delta W & \varphi_3 = \Delta^3 U \Delta V. & \end{array}\right\} \tag{27}$$

La φ ammette l'invariante rappresentato simbolicamente da

$$(a^{(1)}\, a^{(2)} \ldots a^{(n)})^4 = a,$$

che supporremo differente da zero. Se nella espressione simbolica di a, al posto di una serie di simboli $a_1^{(i)}, \dots a_n^{(i)}$, sostituiamo un'altra serie $C_1^{(i)}, \dots C_n^{(i)}$ di simboli relativi ad un'altra forma di 4.° grado di coefficienti C_{ihkl}, e formiamo l'espressione simbolica:

$$\frac{1}{a}\left(a^{(1)} \dots a^{(i-1)}\, C^{(i)}\, a^{(i+1)} \dots a^{(n)}\right)^4, \tag{28}$$

questa rappresenterà un invariante simultaneo delle due forme, il quale è lineare nei coefficienti C_{ihkl}, e sarà quindi della forma:

$$\sum_{ihkl} A_{ihkl}\, C_{ihkl}, \tag{28'}$$

Le A_{ihkl} saranno i coefficienti della forma reciproca di φ. Se per forma di coefficienti C_{ihkl} prendiamo successivamente ciascuna delle (27) otteniamo 5 parametri, che sono lineari nei coefficienti di queste forme, e che possiamo rappresentare con:

$$\Delta_1[U,\ V,\ W,\ S], \quad \Delta_2[U \mid V,\ W], \quad \Delta_2[U,\ V], \quad \Delta_3[U \mid V], \quad \Delta_4[U]. \tag{29}$$

Supponiamo che le A_{ihkl} coincidono colle b_{pqrs} del § 7, e le variabili x colle y dello stesso paragrafo; allora la φ coinciderà colla forma, i cui coefficienti sono reciproci delle b_{pqrs}. L'invariante (28') diviene:

$$\sum_{pqrs} b_{pqrs}\, C_{pqrs},$$

ed i cinque parametri ora trovati si possono scrivere:

$$\begin{aligned}
\Delta_1[U,\ V,\ W,\ T] &= \sum_{pqrs} b_{pqrs}\, U_p\, V_q\, W_r\, T_s \\
\Delta_2[U \mid V,\ W] &= \sum_{pqrs} b_{pqrs}\, U_{pq}\, V_r\, W_s \\
\Delta_2[U,\ V] &= \sum_{pqrs} b_{pqrs}\, U_{pq}\, V_{rs} \\
\Delta_3[U \mid V] &= \sum_{pqrs} b_{pqrs}\, U_{pqr}\, V_s \\
\Delta_4[U] &= \sum_{pqrs} b_{pqrs}\, U_{pqrs},
\end{aligned}$$

ove le U_p, $U_{pq}, \dots V_r, \dots$ sono determinati colla legge che risulta dalla (25''). È ora assai facile verificare che le espressioni dei secondi membri coincidono con quelle rappresentate colle notazioni dei primi membri nel § 4, cioè colle trasformate del primo membro dell'equazione del 4.° ordine e dei suoi quattro covarianti. La invariabilità di queste espressioni resta così dimostrata, salvo le solite condizioni, senza la limitazione della riducibilità a coefficienti costanti.

Questi risultati completano quelli a cui io era arrivato considerando le forme differenziali binarie del 4.° grado, rispetto alle trasformazioni lineari (tomo 18 di questi *Annali*).

Se le variabili sono in numero maggiore di 2, le due forme di coefficienti a_{ihkl}, C_{ihkl}, oltre l'invariante simultaneo (28), hanno tutti quelli che si ottengono dalla espressione simbolica:

$$\frac{1}{a}(a^{(1)} \dots a^{(i)}\, C^{(i+1)} \dots C^{(n)})^4,$$

facendo $i = 0, 1, 2, \dots, n-2$. Supponendo che i simboli C si riferiscano ai coefficenti delle forme (27), otteniamo oltre i parametri (29) che sono lineari nei coefficienti di queste forme, altri $5(n-1)$ parametri, che contengono i coefficienti delle forme stesse ai gradi $n, n-1, \dots 3, 2$.

È chiaro che risultati analoghi si possono trovare per tutte le forme di grado pari.

Luglio, 1890.

Correzione. Le formule generali del § 8 stanno, come è detto in principio del paragrafo stesso, per forme differenziali, i cui coefficienti sono funzioni qualsiansi delle variabili indipendenti; ma non è esatto asserire che il procedimento indicato conduca alla formazione dei parametri di forme non riducibili a coefficienti costanti, poichè in questo caso le equazioni (11') del § 3 assumono una forma diversa. Il procedimento si deve dunque, per ora, ritenere applicabile soltanto a forme che possono essere ridotte, con opportune trasformazioni di variabili, ad avere tutti i coefficienti costanti.

Sopra alcune nuove classi di superficie e di sistemi tripli ortogonali.

(*Di* Luigi Bianchi, *a Pisa.*)

PREFAZIONE.

I principali risultati sulla teoria delle superficie e dei sistemi di raggi, contenuti nel presente lavoro, furono già da me enunciati in due note inserite nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (*).

Nel § 1 riproduco alcune formole generali ben note, relative alla teoria delle linee assintotiche di una superficie, che qui mi è sembrato utile riunire per facilitare la lettura della Memoria.

Il § 2 tratta di una singolare classe di sistemi di raggi, che stanno in relazione colla teoria delle deformazioni infinitesime delle superficie e furono per la prima volta considerati dal sig. Ribaucour nella sua bella Memoria sulle superficie d'area minima (**). Questi sistemi di raggi si ottengono, considerando una coppia qualunque di superficie S, $\overline{S}$, che si corrispondono punto per punto per ortogonalità d'elementi, e conducendo pei punti dell'una superficie, per es. della $\overline{S}$, i raggi paralleli alle normali nei punti corrispondenti dell'altra S. Li diciamo *congruenze di* Ribaucour e chiamiamo *superficie generatrice* la superficie S, alle cui normali sono paralleli i raggi della congruenza. Giovandomi delle eleganti formole per le deformazioni infinitesime dovute al sig. Weingarten, dimostro i principali teoremi enunciati da Ribaucour alla fine della citata Memoria, fermandomi anche ad alcuni che, sebbene non necessarii per il seguito, derivano troppo spontaneamente dalle formole generali stabilite per essere omessi. Quando la congruenza di Ribaucour

(*) Vol. 6, 1890, fascicoli 10 e 12 (pag. 435 e 552).

(**) *Étude des élassoides.* Mémoire couronnée par l'Académie Royale de Belgique, 1880, tomo 44.

è a fuochi reali, le sviluppabili della congruenza tagliano la superficie media secondo linee coniugate. Tale proprietà è d'altronde caratteristica per le congruenze di Ribaucour che, sotto questo secondo aspetto, furono recentemente studiate dal sig. Guichard in una interessante Memoria (*) a cui più volte dovrò ricorrere nel corso del presente lavoro.

Nel § 3 pongo in relazione le congruenze di Ribaucour coi sistemi ∞^2 di circoli che ammettono una serie di superficie ortogonali. Un tale sistema di circoli si dirà brevemente un sistema *normale*. Alla considerazione di questi sistemi è utile associare quella della congruenza formata dagli *assi* dei circoli, cioè dalle normali elevate ai piani dei circoli nei loro centri. Una congruenza si dirà *ciclica* quando ai suoi raggi si può coordinare un sistema normale di circoli, di cui i raggi stessi siano gli assi. A punto di partenza delle ricerche seguenti pongo il problema: *Quali congruenze di* Ribaucour *sono cicliche?* Dimostro che, affinchè ciò accada, è necessario e sufficiente che, riferendo la superficie generatrice S della congruenza alle sue linee assintotiche u, v, l'espressione della sua curvatura K abbia la forma:

$$K = -\frac{1}{\{\varphi(u)+\psi(v)\}^2}, \qquad a)$$

dove $\varphi(u)$, $\psi(v)$ sono funzioni di u, v rispettivamente. Due circostanze degne di nota sono qui da rilevarsi. In primo luogo tutte le congruenze di Ribaucour, che hanno a superficie generatrice una superficie della classe a), sono cicliche, comunque si scelga la superficie $\bar{S}$ corrispondente alla S per ortogonalità d'elementi. In secondo luogo una tale congruenza *è infinite volte* ciclica, poichè ad essa possono associarsi ∞^1 sistemi normali di circoli, di cui i raggi della congruenza sono assi. La determinazione effettiva delle superficie ortogonali ai circoli dipende da un'equazione di Riccati, che ha la notevole proprietà di cangiare soltanto colla superficie generatrice della congruenza.

Nei paragrafi seguenti tratto direttamente le superficie della classe a), delle quali si ha subito un effettivo esempio nelle superficie conoidali rette. Ma per rendere queste nuove ricerche indipendenti da quelle dei §§ 2, 3 (colle quali offrono tuttavia strette e notevoli relazioni) ho riprodotto nel § 4

(*) *Surfaces rapportées à leurs lignes asymtotiques et congruences rapportées à leurs développables.* Annales de l'École Normale Supérieure, tomo 6, 3.me série, pagina 333-348.

la determinazione analitica, data dal sig. Guichard, per le congruenze sulle cui falde della superficie focale si corrispondono le assintotiche, aggiungendovi un' interpretazione geometrica, che collega nuovamente questa teoria con quella delle deformazioni infinitesime.

Nel § 5 comincio dal provare che alle superficie della classe a), sopra mentovata, si è condotti anche dall'esame della questione seguente: *Quando accade che le due falde della superficie focale di una congruenza, oltre al corrispondersi per le loro linee assintotiche, abbiano in ogni coppia di punti corrispondenti eguale curvatura?*

Si trova infatti che, in tale ipotesi, ambedue le falde appartengono alla classe a). Inversamente ogni superficie S della classe a) è una falda della superficie focale di ∞^2 congruenze della specie richiesta; ne segue che ogni volta anche la 2.ª falda S_1 viene nuovamente ad appartenere alla classe a). La determinazione di queste congruenze, assegnata la superficie S, dipende da un'equazione di Riccati, la quale coincide precisamente con quella trovata al § 3 per l'altro problema ivi trattato. Così alle superficie generali della classe a) sono applicabili quei metodi di trasformazione, che per le superficie pseudosferiche [corrispondenti al caso di $\varphi(u)$, $\psi(v)$ costanti] ho studiato in dettaglio, sotto il nome di trasformazione complementare e di Bäcklund, in una Memoria precedente (*) e che vengono quindi a costituire un caso particolarissimo della teoria qui esposta.

Il § 6 tratta di una classe di superficie intermedia fra le superficie generali della classe a) e le superficie pseudosferiche, quelle cioè in cui una soltanto delle funzioni $\varphi(u)$, $\psi(v)$ è costante, nel qual caso le linee $K =$ cost.^{e} (linee di egual curvatura) sono altresì assintotiche. Pel teorema di Enneper queste superficie sono anche definite dalla proprietà che ciascuna linea assintotica *in un sistema* è una curva a torsione costante. Se ne ha un primo e semplice esempio nell'ordinaria elicoide rigata ad area minima. Dimostro che in ogni tale superficie le linee assintotiche a torsione costante sono divise in parti proporzionali dalle assintotiche del 2.° sistema e la stessa proprietà compete alle immagini sferiche delle linee assintotiche. Se ad una di queste superficie S si applica la trasformazione sopra descritta per ottenerne una nuova S_1, si offre l'ulteriore particolarità che gli archi corrispondenti delle assintotiche a torsione costante sopra S, S_1 sono eguali.

(*) Tomo 13, serie 2.ª di questi Annali.

Alla teoria di queste superficie e delle loro deformazioni infinitesime si riconduce l'altro problema di trovare le superficie il cui elemento lineare, riferito alle linee di curvatura u, v prende la forma:

$$ds^2 = E du^2 + G dv^2,$$

dove $\frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$ è funzione della sola u. Queste ultime superficie si ottengono infatti come superficie focali delle congruenze di Ribaucour, aventi per superficie generatrice S una superficie della particolare classe a) di cui qui è parola.

Nel § 7 riprendo in esame i sistemi normali di circoli e i sistemi tripli di superficie ortogonali, cui danno luogo le congruenze di Ribaucour trattate al § 3, limitandomi al caso di superficie generatrici pseudosferiche. Tali sistemi tripli ortogonali sono caratterizzati dalla proprietà che sopra ciascuna delle superficie ortogonali ai circoli le linee, lungo le quali è costante il segmento infinitesimo di normale a questa superficie, intercetto dalla consecutiva nel sistema (linee di livello), tagliano sotto angolo costante α le linee di curvatura. Queste superficie Σ possono anche definirsi direttamente per mezzo della seguente proprietà. Il doppio sistema di traiettorie sotto l'angolo costante α di un sistema di linee di curvatura divide la superficie Σ in parallelogrammi infinitesimi equivalenti, proprietà che può utilizzarsi per tracciare una carta della superficie che conservi le aree. Inversamente tutte le superficie, dotate della proprietà enunciata, si deducono dalle deformazioni infinitesime delle superficie pseudosferiche per mezzo della trasformazione di Bäcklund. Notevole è il caso di $\alpha = 45°$, nel quale le traiettorie isogonali in questione delle linee di curvatura sono le loro bisettrici; esso corrisponde alla trasformazione complementare.

La sfera può considerarsi in infiniti modi come superficie della classe superiore e così la ricerca dei doppii sistemi di linee che, intersecandosi sotto angolo costante, dividono la sfera in parallelogrammi infinitesimi equivalenti, si riconduce alla teoria delle superficie pseudosferiche.

In una Memoria che farà seguito alla presente tratterò la teoria di quei sistemi tripli di superficie ortogonali, che contengono una serie di superficie con un sistema di linee di curvatura piane, teoria che si collega intimamente coi risultati del presente lavoro.

§ 1. Superficie riferite alle loro linee assintotiche.

1. Consideriamo una superficie a curvature opposte e riferiamola alle sue linee assintotiche u, v. Siano x, y, z le coordinate cartesiane ortogonali di un punto della superficie e X, Y, Z i coseni di direzione della normale. Se poniamo:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2, \tag{1}$$

avremo le note formole:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 X}{\partial u^2} &= \begin{Bmatrix}1\,1\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial X}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,1\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial X}{\partial v} - EX\\
\frac{\partial^2 X}{\partial u\,\partial v} &= \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial X}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial X}{\partial v} - FX\\
\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} &= \begin{Bmatrix}2\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial X}{\partial u} + \begin{Bmatrix}2\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial X}{\partial v} - GX,
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

e le analoghe per Y, Z, dove $\begin{Bmatrix}i\,r\\s\end{Bmatrix}$ sono i simboli introdotti dal sig. Christoffel nella teoria delle forme differenziali quadratiche, calcolati per la forma (1) (*). Le formole generali della teoria delle superficie applicate al caso attuale dànno i risultati seguenti (**). Indicando con

$$K = -\frac{1}{\lambda^2},$$

la curvatura della superficie, si ha:

$$\frac{\partial \log \lambda}{\partial u} = -2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}, \qquad \frac{\partial \log \lambda}{\partial v} = -2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} \tag{3}$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \lambda^2(E du^2 - 2F du dv + G dv^2). \tag{4}$$

(*) I valori effettivi dei simboli $\begin{Bmatrix}i\,r\\s\end{Bmatrix}$ che a noi occorrerà considerare sono soltanto i due seguenti:

$$\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} = \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial v} - F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG - F^2)}$$

$$\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG - F^2)}.$$

(**) Il primo a porre in rilievo le formole del presente numero fu, per quanto io so, il prof. Dini (tomo 4, serie 2.ª di questi Annali).

Affinchè le lineo sferiche u, v siano le immagini delle assintotiche di una superficie è adunque necessario che si abbia:

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}=\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}. \tag{5}$$

Questa condizione è d'altronde sufficiente e, quando sia soddisfatta, la superficie corrispondente sarà definita, a meno di un'omotetia, dalle formole (3) e dalle altre:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u}&=-\frac{\lambda F}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{\lambda E}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial v}\\ \frac{\partial x}{\partial v}&=\frac{\lambda G}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial u}-\frac{\lambda F}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial v}\end{aligned}\right\}\quad \Delta=\sqrt{EG-F^2}, \tag{6}$$

insieme alle analoghe per y, z, le quali, note le espressioni di X, Y, Z per u, v, permettono di determinare la superficie per quadrature.

2. Le formole (6) sono suscettibili di un'elegante ed utile trasformazione (*). In forza delle identità:

$$-\frac{F}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{E}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial v}=\quad Y\frac{\partial Z}{\partial u}-Z\frac{\partial Y}{\partial u},$$

$$\frac{G}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial u}-\frac{F}{\Delta}\frac{\partial X}{\partial v}=-Y\frac{\partial Z}{\partial v}+Z\frac{\partial Y}{\partial v},$$

le (6) possono scriversi:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\lambda\begin{vmatrix}Y & Z\\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial u}\end{vmatrix},\qquad \frac{\partial x}{\partial v}=-\lambda\begin{vmatrix}Y & Z\\ \frac{\partial Y}{\partial v} & \frac{\partial Z}{\partial v}\end{vmatrix},$$

ovvero, ponendo:

$$\xi=\sqrt{\lambda}X,\qquad \eta=\sqrt{\lambda}Y,\qquad \zeta=\sqrt{\lambda}Z, \tag{7}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u}&=\begin{vmatrix}\eta & \zeta\\ \frac{\partial \eta}{\partial u} & \frac{\partial \zeta}{\partial u}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial y}{\partial u}=\begin{vmatrix}\zeta & \xi\\ \frac{\partial \zeta}{\partial u} & \frac{\partial \xi}{\partial u}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial z}{\partial u}=\begin{vmatrix}\xi & \eta\\ \frac{\partial \xi}{\partial u} & \frac{\partial \eta}{\partial u}\end{vmatrix}\\ \frac{\partial x}{\partial v}&=-\begin{vmatrix}\eta & \zeta\\ \frac{\partial \eta}{\partial v} & \frac{\partial \zeta}{\partial v}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=-\begin{vmatrix}\zeta & \xi\\ \frac{\partial \zeta}{\partial v} & \frac{\partial \xi}{\partial v}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=-\begin{vmatrix}\xi & \eta\\ \frac{\partial \xi}{\partial v} & \frac{\partial \eta}{\partial v}\end{vmatrix}.\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

(*) Lelieuvre, Bulletin des Sciences Mathématiques, tomo 12, Pag. 126. — Guichard, Comptes Rendus, tomo 110, pag. 126.

E poichè, per la seconda delle (2), X, Y, Z sono integrali dell'equazione:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}+\frac{\partial\log\sqrt{\lambda}}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{\partial\log\sqrt{\lambda}}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+F\varphi=0,$$

saranno ξ, η, ζ tre integrali dell'altra:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\partial v}=M\theta, \tag{9}$$

ove si ponga:

$$M=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial^2\sqrt{\lambda}}{\partial u\partial v}-F. \tag{9*}$$

Inversamente è importante osservare che, presa ad arbitrio un'equazione di Laplace dalla forma (9) e tre sue soluzioni ξ, η, ζ linearmente indipendenti, le formole (8) daranno per quadrature una superficie che avrà le linee u, v per linee assintotiche e per curvatura totale:

$$K=-\frac{1}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2}.$$

E infatti, essendo ξ, η, ζ soluzioni della medesima equazione (9), le condizioni d'integrabilità delle (8) sono identicamente soddisfatte. Riguardando x, y, z come coordinate di un punto P, la superficie S luogo del punto P avrà evidentemente i coseni di direzione della normale X, Y, Z proporzionali a ξ, η, ζ, sicchè ponendo:

$$\lambda=\xi^2+\eta^2+\zeta^2,$$

si avranno le (7). Dalle (8) seguono subito le formole:

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial Z}{\partial u}=0$$

$$\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial Z}{\partial v}=0,$$

le quali esprimono che le linee u, v sono assintotiche sulla S. In fine, se si pone, come sopra:

$$dX^2+dY^2+dZ^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,$$

si avrà ancora, per le (8) o per le equivalenti (6),

$$dx^2+dy^2+dz^2=\lambda^2(Edu^2-2Fdudv+Gdv^2),$$

ovvero:

$$K=-\frac{1}{\lambda^2}=-\frac{1}{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)^2},$$

il che dimostra la proprietà enunciata.

§ 2. Congruenze di Ribaucour-Guichard.

3. Secondo un'osservazione fondamentale del sig. Moutard, la ricerca delle deformazioni infinitesime di una data superficie S, supposta flessibile ed inestendibile, equivale a quella delle superficie $\overline{S}$ corrispondenti punto per punto alla S *per ortogonalità d'elementi*, in guisa cioè che due elementi lineari qualunque che si corrispondono sopra S, $\overline{S}$ siano fra loro perpendicolari. E infatti se ogni punto $P \equiv (x, y, z)$ di S riceve, nella deformazione, uno spostamento infinitesimo, le cui componenti secondo gli assi coordinati siano:

$$\varepsilon \overline{x}, \qquad \varepsilon \overline{y}, \qquad \varepsilon \overline{z},$$

dove ε è una costante infinitesima (di cui si trascurano le potenze superiori), la condizione perchè l'elemento lineare di S non varii è espressa dalla relazione:

$$dx\, d\overline{x} + dy\, d\overline{y} + dz\, d\overline{z} = 0.$$

Ora questa, riguardando $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ come coordinate di un punto $\overline{P}$, le cui superficie luogo si indichi con $\overline{S}$, esprime appunto che S, $\overline{S}$ si corrispondono per ortogonalità d'elementi.

Chiameremo *congruenza di* Ribaucour il sistema di raggi che si ottiene, conducendo per ogni punto $\overline{P}$ di $\overline{S}$ la parallela alla normale nel corrispondente punto P di S, e diremo la S *superficie generatrice* della congruenza. Per stabilire, secondo Kummer (*), le formole fondamentali relative a queste congruenze, ricorreremo alle formole date dal sig. Weingarten nel vol. 100 del Giornale di Crelle (**). Quivi la ricerca delle deformazioni infinitesime di una superficie S, ossia delle superficie $\overline{S}$ corrispondenti ad S per ortogonalità d'elementi, è ridotta alla determinazione di un'unica funzione φ *(Verschiebungs function)*. Riferendo la superficie S a un sistema di linee coordinate u, v e ponendo:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \mathsf{E} du^2 + 2\mathsf{F} du\, dv + \mathsf{G} dv^2$$

$$-(dx\, dX + dy\, dY + dz\, dZ) = D du^2 + 2D' du\, dv + D'' dv^2,$$

(*) *Allgemeine Theorie der geradlinigen Stralensysteme.* Crelle's Journal, Bd. 54.
(**) *Ueber die Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche.*

la funzione φ di WEINGARTEN è definita dall'equazione a derivate parziali:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{\sqrt{\mathsf{EG}-\mathsf{F}^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{D''\frac{\partial\varphi}{\partial u}-D'\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{K\sqrt{\mathsf{EG}-\mathsf{F}^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{D\frac{\partial\varphi}{\partial v}-D'\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{K\sqrt{\mathsf{EG}-\mathsf{F}^2}}\right)\right]+\\&\qquad+\frac{\mathsf{G}D+\mathsf{E}D''-2\mathsf{F}D'}{\mathsf{EG}-\mathsf{F}^2}\varphi=0,\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

dove $K=\frac{DD''-D'^2}{\mathsf{EG}-\mathsf{F}^2}$ è la curvatura totale della superficie. Nota una soluzione qualunque φ di questa equazione si ha per quadrature una corrispondente superficie $\overline{S}$ dalle formole:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}&=\frac{D\left(X\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\varphi\frac{\partial X}{\partial v}\right)-D'\left(X\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\varphi\frac{\partial X}{\partial u}\right)}{K\sqrt{\mathsf{EG}-\mathsf{F}^2}}\\\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}&=-\frac{D''\left(X\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\varphi\frac{\partial X}{\partial u}\right)-D'\left(X\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\varphi\frac{\partial X}{\partial v}\right)}{K\sqrt{\mathsf{EG}-\mathsf{F}^2}},\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

e dalle analoghe in $\bar{y}$, $\bar{z}$.

Giova per noi considerare il caso particolare in cui le linee coordinate u, v siano le assintotiche della S. Mantenendo le notazioni del n.° 1, si dovrà porre allora:

$$D=0,\qquad D'=\lambda\sqrt{EG-F^2},\qquad D''=0$$

$$K\sqrt{\mathsf{EG}-\mathsf{F}^2}=-\sqrt{EG-F^2},\qquad \mathsf{F}=-\lambda^2F,$$

e quindi le (1), (2) diventano:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log\lambda}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}+\frac{1}{2}\frac{\partial\log\lambda}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}+F\varphi=0\tag{1*}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}&=\lambda\left(X\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\varphi\frac{\partial X}{\partial u}\right)\\\frac{\partial\bar{x}}{\partial v}&=-\lambda\left(X\frac{\partial\varphi}{\partial v}-\varphi\frac{\partial X}{\partial v}\right)\end{aligned}\right\}\tag{2*}$$

4. Ciò posto, consideriamo la congruenza di RIBAUCOUR che si ottiene conducendo per i punti della $\overline{S}$ le parallele alle normali nei punti corrispon-

denti della S. Se poniamo:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$$e = \Sigma \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \qquad f = \Sigma \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}, \qquad f' = \Sigma \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}, \qquad g = \Sigma \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial \bar{x}}{\partial c},$$

ed applichiamo le formole di Kummer (loc. cit.), avremo le due equazioni di 2.° grado:

$$(EG - F^2)d^2 + \{gE - (f + f')F + eG\}d + eg - \frac{1}{4}(f + f')^2 = 0 \tag{3}$$

$$(EG - F^2)\delta^2 + \{gE - (f + f')F + eG\}\delta + eg - ff' \qquad = 0, \tag{4}$$

delle quali la prima ha per radici le ascisse d_1, d_2 dei punti limiti e la seconda quelle δ_1, δ_2 dei fuochi, mentre l'equazione differenziale:

$$(f'E - eF)du^2 + \{gE - (f - f')F - eG\}dudv + (gF - fG)dv^2 = 0,$$

determina le due serie di superficie sviluppabili della congruenza. Ora, per le (2), essendo:

$$K\sqrt{\mathsf{EG} - \mathsf{F}^2} = -\sqrt{EG - F^2},$$

si trova:

$$e = \frac{FD - ED'}{\sqrt{EG - F^2}}\cdot\varphi, \qquad f = \frac{FD' - ED''}{\sqrt{EG - F^2}}\cdot\varphi, \qquad f' = \frac{GD - FD'}{\sqrt{EG - F^2}}\cdot\varphi,$$

$$g = \frac{GD' - FD''}{\sqrt{EG - F^2}}\cdot\varphi.$$

Sostituiamo nelle (3), (4), (5), osservando che se si indicano con r_1, r_2 i raggi principali di curvatura della S si hanno le formole:

$$\frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = r_1 r_2, \qquad \frac{2FD' - ED'' - GD}{EG - F^2} = r_1 + r_2,$$

e troveremo rispettivamente:

$$d^2 = \frac{(r_1 - r_2)^2}{4}\cdot\varphi^2 \tag{3*}$$

$$\delta^2 = -r_1 r_2 \cdot \varphi^2 \tag{4*}$$

$$Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2 = 0. \tag{5*}$$

Si ha quindi il risultato:

In ogni congruenza di Ribaucour *la superficie $\bar{S}$ di partenza dei raggi, corrispondente per ortogonalità d'elementi alla superficie generatrice S, è la* *superficie media del sistema. Le sviluppabili della congruenza corrispondono alle assintotiche della superficie generatrice* (*).

5. Supponiamo che la superficie generatrice S sia a curvature opposte e quindi, pel teorema precedente, le sviluppabili della congruenza siano reali. Le linee sferiche, che ne sono le immagini, essendo altresì le immagini delle assintotiche della superficie S, segue subito da un teorema di GUICHARD (Mem. cit., § 4) che: *Le sviluppabili della congruenza tagliano la superficie media secondo un sistema di linee coniugate.*

Inversamente: *Ogni congruenza, le cui sviluppabili tagliano la superficie media secondo un sistema di linee coniugate, è una congruenza di* RIBAUCOUR.

Per dimostrarlo osserviamo che esiste allora (GUICHARD, loc. cit.) una superficie, le immagini sferiche delle cui assintotiche coincidono con quelle delle sviluppabili della congruenza. Prendendo queste linee per linee coordinate u, v, per la superficie media della congruenza si hanno le formole (ibid.):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= \left[\frac{\partial \rho}{\partial u} + 2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\rho\right]X - \rho\frac{\partial X}{\partial u} \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= -\left[\frac{\partial \rho}{\partial v} + 2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\rho\right]X + \rho\frac{\partial X}{\partial v}, \end{aligned}\right\} \qquad \alpha)$$

e le analoghe in $\bar{y}$, $\bar{z}$, dove ρ, che rappresenta la semidistanza dei fuochi, è una soluzione qualunque dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} + \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial \rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial \rho}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} + F\right]\rho = 0. \qquad \beta)$$

Ora se si pone:

$$\rho = \lambda\varphi,$$

avendo riguardo alle formole del § 1, le β) α) si mutano appunto nelle equazioni (1*) (2*) di WEINGARTEN. Dunque la $\bar{S}$ corrisponde per ortogonalità d'elementi alla S e la congruenza è una congruenza di RIBAUCOUR.

6. Facciamo una prima applicazione delle formole (3*), (4*) al caso in cui la superficie generatrice S della congruenza è una sfera. Allora, avendosi $d = 0$, i due punti limiti coincidono e la (5*) diventando:

$$E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2 = 0,$$

dimostra che le sviluppabili (immaginarie) della congruenza hanno le gene-

(*) RIBAUCOUR, loc. cit., § 188.

ratrici appoggiate al circolo immaginario all'infinito; tali congruenze si dicono, secondo Ribaucour, *isotrope*. Inversamente se in una congruenza i punti limiti coincidono, essa è una congruenza isotropa. E infatti scegliendo per superficie di partenza la superficie media $\overline{S}$ e per linee coordinate quelle che rendono simultaneamente:

$$F=0, \qquad f+f'=0,$$

ne seguirà altresì:

$$e=0, \qquad g=0.$$

Ora le equazioni:

$$e=\Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}=0, \qquad f+f'=\Sigma\left(\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}+\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial \overline{x}}{\partial u}\right)=0,$$

$$g=\Sigma\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial \overline{x}}{\partial v}=0,$$

esprimono appunto che la superficie media $\overline{S}$ corrisponde per ortogonalità d'elementi alla sfera.

In secondo luogo ricerchiamo se una congruenza di Ribaucour può essere costituita dalle normali ad una superficie. Per ciò si deve avere:

$$d^2=\delta^2, \quad \text{cioè} \quad r_1+r_2=0;$$

dunque: *Le congruenze di* Ribaucour *che ammettono superficie ortogonali sono tutte e sole quelle che hanno per superficie generatrice una superficie d'area minima.*

Poichè le sviluppabili della congruenza corrispondono alle assintotiche della superficie generatrice (n.° 4), ne segue che nel caso attuale: *Le superficie ortogonali alla congruenza sono a rappresentazione isoterma delle linee di curvatura* (*).

Inversamente si dimostra subito: *Le normali ad una superficie con rappresentazione isoterma delle linee di curvatura formano una congruenza di* Ribaucour *la cui superficie generatrice è ad area minima.*

7. In una congruenza di Ribaucour consideriamo i piani normali ai raggi nei punti medii e la loro superficie inviluppo Σ. Ponendo:

$$W=\Sigma X\overline{x},$$

sarà W la distanza del piano tangente della superficie Σ dall'origine. Appli-

(*) Ribaucour, loc. cit., § 189.

chiamo ora le formole di WEINGARTEN, relative alle coordinate tangenziali (*), per trovare la somma dei raggi principali di curvatura ρ_1, ρ_2 della superficie inviluppo Σ, avremo:

$$\left.\begin{aligned} \rho_1+\rho_2=2W+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\Bigg[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\frac{\partial W}{\partial u}-F\frac{\partial W}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)&+\\ +\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\frac{\partial W}{\partial v}-F\frac{\partial W}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\Bigg]& \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Ora dalle (2) segue:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial u}&=\frac{D\frac{\partial\varphi}{\partial v}-D'\frac{\partial\varphi}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}+\Sigma\bar{x}\frac{\partial X}{\partial u}\\ \frac{\partial W}{\partial v}&=-\frac{D''\frac{\partial\varphi}{\partial u}-D'\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}+\Sigma\bar{x}\frac{\partial X}{\partial v}; \end{aligned}\right\}$$

sostituendo nella (6) coll'osservare che per le (2) § 1 si ha identicamente:

$$2W+\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\Sigma\bar{x}\frac{\partial X}{\partial u}-F\Sigma\bar{x}\frac{\partial X}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E\Sigma\bar{x}\frac{\partial X}{\partial v}-F\Sigma\bar{x}\frac{\partial X}{\partial u}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)\right]=0,$$

risulterà la formola richiesta:

$$\begin{aligned} (\rho_1+\rho_2)\sqrt{EG-F^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{(FD''-GD')\frac{\partial\varphi}{\partial u}+(GD-FD')\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{EG-F^2}\right)&+\\ +\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{(FD'-ED'')\frac{\partial\varphi}{\partial u}+(ED'-FD)\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{EG-F^2}\right)&. \end{aligned}$$

Se la superficie generatrice della congruenza di RIBAUCOUR è una sfera, cioè se la congruenza è isotropa si ha:

$$D:D':D''=E:F:G,$$

e però $\rho_1+\rho_2=0$. Sussiste adunque il teorema (RIBAUCOUR, loc. cit., § 26).

In ogni congruenza isotropa i piani normali ai raggi nel punto limite inviluppano una superficie ad area minima.

(*) *Ueber die Theorie der auf einander abwickelbaren Oberflächen.* Festschrift der K. Technischen Hochschule zu Berlin, 1884. — Vedi anche KNOBLAUCH: *Allgemeine Theorie der krummen Flächen*, § 30.

§ 3. Congruenze di Ribaucour cicliche.

8. Un sistema ∞^2 di circoli si dirà *normale* quando ammetta una serie di superficie ortogonali Σ. Per un teorema di Ribaucour, le superficie Σ fanno sempre parte di un sistema triplo ortogonale e le superficie Σ_1, Σ_2 degli altri due sistemi, avendo ciascuna un sistema di linee di curvatura circolari, sono inviluppi di sfere (*). Insieme al sistema normale di circoli consideriamo la congruenza formata dai loro *assi*. Essa è una congruenza a fuochi reali, come si rileva subito dall'osservare che il luogo dei centri delle sfere inviluppanti una superficie Σ_1 (o Σ_2) ha appunto per tangenti gli assi dei circoli sopra Σ_1 (o Σ_2). Riguardando ad ogni circolo del sistema come associato il suo asse, si vede adunque che le sviluppabili della congruenza degli assi corrispondono appunto alle superficie Σ_1, Σ_2, essendo queste il luogo dei circoli associati alle loro generatrici. Inoltre se sopra l'asse di un circolo del sistema il cui centro sia O ed il raggio R i punti F_1, F_2 sono i fuochi, l'ortogonalità delle due sfere che, avendo i centri rispettivamente in F_1, F_2, passano pel circolo, ci dà subito la relazione che occorre ricordare:

$$\overline{OF_1}\cdot\overline{OF_2}=R^2. \tag{1}$$

Diremo che una congruenza di raggi è *ciclica* quando essa è formata dagli assi di un sistema normale di circoli.

Proponiamoci ora la questione: *Quali congruenze di* Ribaucour *sono cicliche?*

Sia S la superficie generatrice di una tale congruenza. Le sviluppabili della congruenza essendo reali, saranno pure reali le assintotiche u, v della superficie S, alle quali potremo riferire la S colle formole del n.° 1. Indicando con ρ la semidistanza dei fuochi sopra ogni raggio della congruenza, cioè ponendo (n.^{i} 4, 5):

$$\rho=\lambda\varphi,$$

le coordinate $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ del punto medio del raggio saranno determinate dalle formole:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\bar{x}}{\partial u}&=\left[\frac{\partial\rho}{\partial u}+2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\rho\right]X-\rho\frac{\partial X}{\partial u}\\ \frac{\partial\bar{x}}{\partial v}&=-\left[\frac{\partial\rho}{\partial v}+2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\rho\right]X+\rho\frac{\partial X}{\partial v},\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

(*) Cfr. il § 7 della mia Nota 2.^{a}: *Sui sistemi ciclici.* Giornale di Battaglini, vol. 22.

e dalle analoghe in $\overline{y}$, $\overline{z}$ e ρ sarà un integrale (qualunque) dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial v} + \left[\frac{\partial}{\partial u} \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} + F \right] \rho = 0. \tag{3}$$

Supponendo ora che la congruenza sia ciclica denotiamo con $\rho \cos\sigma$, essendo σ un conveniente angolo ausiliario (*), la distanza del centro del circolo dal punto medio $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ talchè, per la (1), il raggio R del circolo sarà dato da:

$$R = \rho \operatorname{sen} \sigma.$$

9. Dobbiamo ricercare la condizione perchè il sistema ∞^2 di circoli così tracciato ammetta una serie di superficie ortogonali. Nel piano di ogni circolo del sistema tracciamo per il centro le due rette ortogonali parallele alle tangenti alle linee di curvatura nel corrispondente punto della superficie generatrice S e indichiamone con

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \gamma_1; \qquad \alpha_2, \quad \beta_2, \quad \gamma_2,$$

i coseni di direzione. Ponendo:

$$F = \cos\Omega \sqrt{EG}, \tag{4}$$

cioè indicando con Ω l'angolo delle linee sferiche coordinate u, v, troveremo subito le formole:

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{\Omega}{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial X}{\partial u} - \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial X}{\partial v} \right\} \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2 \cos \frac{\Omega}{2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial X}{\partial v} \right\}, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

e le analoghe per β_1, γ_1, β_2, γ_2. È utile dare a queste formole anche la forma:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u} &= \sqrt{E} \left(\alpha_1 \operatorname{sen} \frac{\Omega}{2} + \alpha_2 \cos \frac{\Omega}{2} \right) \\ \frac{\partial X}{\partial v} &= \sqrt{G} \left(- \alpha_1 \operatorname{sen} \frac{\Omega}{2} + \alpha_2 \cos \frac{\Omega}{2} \right). \end{aligned}\right\} \tag{5*}$$

Ora, essendo:

$$x_1 = \overline{x} + \rho \cos\sigma X, \qquad y_1 = \overline{y} + \rho \cos\sigma Y, \qquad z_1 = \overline{z} + \rho \cos\sigma Z, \tag{6}$$

(*) Il suo significato geometrico è il seguente: $\frac{\sigma}{2}$ è l'angolo sotto cui il piano del circolo taglia una delle sfere sopra considerate.

le coordinate del centro del circolo, se nel circolo (u, v) del sistema tracciamo un raggio qualunque e indichiamo con θ l'angolo che esso fa colla direzione $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ le coordinate ξ, η, ζ dell'estremo del raggio saranno:

$$\left.\begin{array}{c} \xi = x_1 + R(\alpha_1 \cos\theta + \alpha_2 \operatorname{sen}\theta), \qquad \eta = y_1 + R(\beta_1 \cos\theta + \beta_2 \operatorname{sen}\theta), \\ \zeta = z_1 + R(\gamma_1 \cos\theta + \gamma_2 \operatorname{sen}\theta). \end{array}\right\} \quad (7)$$

Ponendo:

$$T = \frac{1}{R}\Sigma\left(\frac{\partial\xi}{\partial\theta}\right)^2, \qquad U = \frac{1}{R}\Sigma\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial\theta}, \qquad V = \frac{1}{R}\Sigma\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\xi}{\partial\theta},$$

dove le derivate parziali sono prese riguardando in ξ, η, ζ le u, v, θ come variabili indipendenti, per ogni superficie ortogonale ai circoli dovrà essere θ una tale funzione di u, v da soddisfare l'equazione a differenziali totali:

$$T d\theta + U du + V dv = 0, \qquad A)$$

e, nell'ipotesi fatta, dovrà essere identicamente soddisfatta la condizione d'integrabilità:

$$T\left(\frac{\partial U}{\partial v} - \frac{\partial V}{\partial u}\right) + U\left(\frac{\partial V}{\partial\theta} - \frac{\partial T}{\partial v}\right) + V\left(\frac{\partial T}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial\theta}\right) = 0. \qquad B)$$

Essendo:

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1, \qquad \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1, \qquad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0,$$

si trova nel caso nostro:

$$\left.\begin{array}{l} T = \rho \operatorname{sen}\sigma, \qquad U = \cos\theta\,\Sigma\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial u} - \operatorname{sen}\theta\,\Sigma\alpha_1\frac{\partial x_1}{\partial u} + \rho\operatorname{sen}\sigma\,\Sigma\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial u} \\ \qquad\qquad\qquad V = \cos\theta\,\Sigma\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial v} - \operatorname{sen}\theta\,\Sigma\alpha_1\frac{\partial x_1}{\partial v} + \rho\operatorname{sen}\sigma\,\Sigma\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}. \end{array}\right\} \quad (8)$$

10. Calcoliamo le somme che figurano nelle espressioni di T, U, V. Per ciò osserviamo che dalle (2), (5*), (6) segue intanto:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial x_1}{\partial u} = \left[\dfrac{\partial}{\partial u}\left\{(1+\cos\sigma)\rho\right\} + 2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\rho\right]X - \\ \qquad\qquad - \sqrt{E}(1-\cos\sigma)\rho\left[\alpha_1\operatorname{sen}\dfrac{\Omega}{2} + \alpha_2\cos\dfrac{\Omega}{2}\right] \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v} = -\left[\dfrac{\partial}{\partial v}\left\{(1-\cos\sigma)\rho\right\} + 2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\rho\right]X + \\ \qquad\qquad + \sqrt{G}(1+\cos\sigma)\rho\left[-\alpha_1\operatorname{sen}\dfrac{\Omega}{2} + \alpha_2\cos\dfrac{\Omega}{2}\right], \end{array}\right\}$$

e quindi:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma\alpha_1\frac{\partial x_1}{\partial u}&=-\sqrt{E}(1-\cos\sigma)\rho\,\mathrm{sen}\,\frac{\Omega}{2}, & \Sigma\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial u}&=-\sqrt{E}(1-\cos\sigma)\rho\cos\frac{\Omega}{2}\\ \Sigma\alpha_1\frac{\partial x_1}{\partial v}&=-\sqrt{G}(1+\cos\sigma)\rho\,\mathrm{sen}\,\frac{\Omega}{2}, & \Sigma\alpha_2\frac{\partial x_1}{\partial v}&=\sqrt{G}(1+\cos\sigma)\rho\cos\frac{\Omega}{2}.\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

Per la somma $\Sigma\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}$, tenendo presenti le (5) e l'altra $\Sigma\alpha_1\alpha_2=0$, troviamo dapprima:

$$\Sigma\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}=\frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\Omega}\Sigma\left[\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial X}{\partial u}\right)-\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial X}{\partial v}\right)\right];$$

ora:

$$\Sigma\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial X}{\partial u}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial X}{\partial v}=\cos\Omega,$$

e perciò, essendo:

$$\Sigma\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial X}{\partial u}\right)=-\,\mathrm{sen}\,\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial u}-\Sigma\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial X}{\partial v}\right),$$

avremo:

$$\Sigma\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}=-\frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\Omega}\left\{\mathrm{sen}\,\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial u}+\frac{2}{\sqrt{E}}\Sigma\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial X}{\partial v}\right)\right\}.$$

Facendo uso della formola (2) n.° 1:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u\partial v}=\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial X}{\partial u}+\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial X}{\partial v}-FX,$$

la precedente diviene:

$$\Sigma\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}=-\frac{1}{2\,\mathrm{sen}\,\Omega}\left\{\mathrm{sen}\,\Omega\frac{\partial\Omega}{\partial u}+\frac{2}{\sqrt{EG}}\left[E\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}+F\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}-\frac{F}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}\right]\right\},$$

e poichè identicamente:

$$E\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}+F\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}-\frac{F}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}=\frac{EG-F^2}{G}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}=E\,\mathrm{sen}^2\Omega\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix},$$

avremo finalmente:

$$-\Sigma\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}=\Sigma\alpha_1\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u}+\sqrt{\frac{E}{G}}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\mathrm{sen}\,\Omega.\qquad(10)$$

Similmente troviamo:

$$\Sigma\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}=-\Sigma\alpha_1\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}+\sqrt{\frac{G}{E}}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\mathrm{sen}\,\Omega.\qquad(10^*)$$

Le formole (9)', (10), (10*) bastano già allo scopo indicato, ma nel seguito ne occorrono altre che deduciamo facilmente da queste. Osserviamo perciò che dalle (5*) si deducono subito le seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\alpha_1\frac{\partial X}{\partial u}=-\Sigma X\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}=\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\frac{\Omega}{2}, \quad \Sigma\alpha_2\frac{\partial X}{\partial u}=-\Sigma X\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}=\sqrt{E}\cos\frac{\Omega}{2}\\
&\Sigma\alpha_1\frac{\partial X}{\partial v}=-\Sigma X\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}=-\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\frac{\Omega}{2}, \quad \Sigma\alpha_2\frac{\partial X}{\partial v}=-\Sigma X\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}=\sqrt{G}\cos\frac{\Omega}{2}.
\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

Dalle (10), (10*), (11) risolvendo rapporto a $\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}$, $\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}$, $\frac{\partial\ {}_2}{\partial u}$, $\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}$ ecc., coll'osservare che le tre direzioni (X, Y, Z), $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ formano una terna ortogonale otteniamo le formole accennate:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}&=-\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u}+\sqrt{\frac{E}{G}}\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}\mathrm{sen}\,\Omega\right]\alpha_2-\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\frac{\Omega}{2}X\\
\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}&=\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}+\sqrt{\frac{G}{E}}\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}\mathrm{sen}\,\Omega\right]\alpha_2+\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\frac{\Omega}{2}X\\
\frac{\partial\alpha_2}{\partial u}&=\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u}+\sqrt{\frac{E}{G}}\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}\mathrm{sen}\,\Omega\right]\alpha_1-\sqrt{E}\cos\frac{\Omega}{2}X\\
\frac{\partial\alpha_2}{\partial v}&=-\left[\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}+\sqrt{\frac{G}{E}}\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}\mathrm{sen}\,\Omega\right]\alpha_1-\sqrt{G}\cos\frac{\Omega}{2}X.
\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

11. Per il calcolo dell'equazione a differenziali totali è utile dare alle (10) (10*) un'altra forma. Indicando con $\frac{1}{\rho_u}$, $\frac{1}{\rho_v}$ le curvature geodetiche delle linee sferiche u, v si ha:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\sqrt{G}}{\rho_u}&=\frac{\partial\Omega}{\partial v}+\sqrt{\frac{G}{E}}\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}\mathrm{sen}\,\Omega\\
\frac{\sqrt{E}}{\rho_v}&=\frac{\partial\Omega}{\partial u}+\sqrt{\frac{E}{G}}\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}\mathrm{sen}\,\Omega.
\end{aligned}\right\}$$

e perciò le (10) (10*) possono scriversi:

$$\Sigma\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u}-\frac{\sqrt{E}}{\rho_v}, \qquad \Sigma\alpha_2\frac{\partial\alpha_1}{\partial v}=-\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}+\frac{\sqrt{G}}{\rho_u}.$$

Sostituendo i valori trovati nella A) e dividendola per $\rho\,\mathrm{sen}\,\sigma$, troviamo per l'equazione a differenziali totali:

$$\left.\begin{aligned} d\theta - \left\{\sqrt{E}\,\mathrm{tg}\,\frac{\sigma}{2}\cos\left(\theta+\frac{\Omega}{2}\right)-\frac{1}{2}\,\frac{\partial\Omega}{\partial u}+\frac{\sqrt{E}}{\rho_v}\right\}du\,+ \\ +\left\{\sqrt{G}\cot\frac{\sigma}{2}\cos\left(\theta-\frac{\Omega}{2}\right)-\frac{1}{2}\,\frac{\partial\Omega}{\partial v}+\frac{\sqrt{G}}{\rho_u}\right\}dv=0. \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Sviluppiamo la condizione d'integrabilità B) osservando che l'elemento lineare:

$$ds_1^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

appartiene alla sfera di raggio $=1$ e quindi, per la nota formola di Liouville che dà la curvatura, si ha:

$$\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\partial v}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{\rho_u}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{\rho_v}\right)\right\}=1,$$

cioè:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\partial v}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\sqrt{G}}{\rho_x}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{\rho_v}\right)=\sqrt{EG}\,\mathrm{sen}\,\Omega.$$

Col calcolo effettivo troviamo che tale condizione assume la forma:

$$A\,\mathrm{sen}\,\theta - B\cos\theta = 0,$$

dove A, B hanno i valori seguenti:

$$\begin{aligned} A = \mathrm{sen}\,\frac{\Omega}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E}\,\mathrm{tg}\,\frac{\sigma}{2}\right)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G}\cot\frac{\sigma}{2}\right)+\right. \\ \left.+\,2\sqrt{E}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\cot\frac{\sigma}{2}\cos^2\frac{\Omega}{2}-2\sqrt{G}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\mathrm{tg}\,\frac{\sigma}{2}\cos^2\frac{\Omega}{2}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B = \cos\frac{\Omega}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E}\,\mathrm{tg}\,\frac{\sigma}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G}\cot\frac{\sigma}{2}\right)+\right. \\ \left.+\,2\sqrt{E}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\cot\frac{\sigma}{2}\,\mathrm{sen}^2\frac{\Omega}{2}+2\sqrt{G}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\mathrm{tg}\,\frac{\sigma}{2}\,\mathrm{sen}^2\frac{\Omega}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Perchè la congruenza di Ribaucour sia ciclica occorre adunque che si possa determinare σ in funzione di u, v in guisa da rendere $A=0$, $B=0$, cioè:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{G}\cot\frac{\sigma}{2}\right) &= \sqrt{E}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\cot\frac{\sigma}{2}\cos\Omega-\sqrt{G}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\mathrm{tg}\,\frac{\sigma}{2} \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{E}\,\mathrm{tg}\,\frac{\sigma}{2}\right) &= \sqrt{G}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\mathrm{tg}\,\frac{\sigma}{2}\cos\Omega-\sqrt{E}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\cot\frac{\sigma}{2}\,. \end{aligned}\right\}$$

Osservando le identità:

$$\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u}-\sqrt{\frac{E}{G}}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\cos\Omega=\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}-\sqrt{\frac{G}{E}}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\cos\Omega=\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix},$$

possiamo dare a queste ultime equazioni la forma:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma}{\partial u}&=\quad 2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\\ \frac{\partial\sigma}{\partial v}&=-2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\cot\frac{\sigma}{2}.\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

Eguagliando i due valori che ne risultano per $\frac{\partial^2\sigma}{\partial u\,\partial v}$, col ricordare che si ha:

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}=\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix},$$

si trova:

$$\frac{\partial}{\partial u}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}=\frac{\partial}{\partial v}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}=2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix},\tag{15}$$

ovvero per le (3) n.° 1:

$$\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v}=0.\tag{15*}$$

Perveniamo quindi al risultato: *Perchè una congruenza di* Ribaucour *sia ciclica è necessario e sufficiente che la curvatura K della superficie generatrice S, espressa pei parametri u, v delle linee assintotiche abbia la forma:*

$$K=-\frac{1}{\{\varphi(u)+\psi(v)\}^2},\tag{a}$$

dove $\varphi(u)$ è funzione della sola u e $\psi(v)$ della sola v.

Si noti ancora che, essendo $\lambda=\varphi(u)+\psi(v)$, le (14) integrate dànno:

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}=\sqrt{\frac{\psi(v)-k}{\varphi(u)+k}},\tag{16}$$

denotando k una costante arbitraria. Ne segue che ad ogni congruenza di Ribaucour, la cui superficie generatrice appartenga alla classe a), possono associarsi ∞^1 sistemi normali di circoli i cui assi siano i raggi della congruenza, ciascuno di questi sistemi corrispondendo ad un particolar valore di k (*).

12. L'equazione a differenziali totali (13) offre la notevole particolarità di dipendere soltanto dalla superficie generatrice S della congruenza e dal valore scelto per k nella (16), mentre è affatto indipendente dalla soluzione ρ della (3), cioè dalla particolare deformazione infinitesima della S che dà luogo alla congruenza. La (13), prendendo per incognita $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$, è un'equazione del tipo di Riccati e s'integra per quadrature, appena noto un suo integrale particolare.

Se indichiamo con w la costante arbitraria che figura nell'integrale θ della (13), le formole (7), ovvero:

$$\left.\begin{aligned}\xi &= \bar{x} + \rho\cos\sigma X + \rho\operatorname{sen}\sigma(\alpha_1\cos\theta + \alpha_2\operatorname{sen}\theta)\\ \eta &= \bar{y} + \rho\cos\sigma Y + \rho\operatorname{sen}\sigma(\beta_1\cos\theta + \beta_2\operatorname{sen}\theta)\\ \zeta &= \bar{z} + \rho\cos\sigma Z + \rho\operatorname{sen}\sigma(\gamma_1\cos\theta + \gamma_2\operatorname{sen}\theta).\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

dànno le coordinate ξ, η, ζ di un punto dello spazio in funzione dei parametri u, v, w di un sistema triplo ortogonale (n.° 8). Qui verifichiamo direttamente tale proprietà e troviamo la forma effettiva:

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = H^2 du^2 + H_2^2 dv^2 + H_3^2 dw^2, \qquad (18$$

dell'elemento lineare dello spazio servendoci delle formole (5*), (12), (13), (14). E infatti, ponendo:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\xi}{\partial u} = AX + B\alpha_1 + C\alpha_2, \qquad \frac{\partial\xi}{\partial v} = A'X + B'\alpha_1 + C'\alpha_2,\\ &\qquad\qquad \frac{\partial\xi}{\partial w} = A''X + B''\alpha_1 + C''\alpha_2\\ &\frac{\partial\eta}{\partial u} = AY + B\beta_1 + C\beta_2, \qquad \frac{\partial\eta}{\partial v} = A'Y + B'\beta_1 + C'\beta_2,\\ &\qquad\qquad \frac{\partial\eta}{\partial w} = A''Y + B''\beta_1 + C''\beta_2\\ &\frac{\partial\zeta}{\partial u} = AZ + B\gamma_1 + C\gamma_2, \qquad \frac{\partial\zeta}{\partial v} = A'Z + B'\gamma_1 + C'\gamma_2,\\ &\qquad\qquad \frac{\partial\zeta}{\partial w} = A''Z + B''\gamma_1 + C''\gamma_2,\end{aligned}\right\}$$

(*) La proprietà di essere infinite volte cicliche è una proprietà caratteristica di queste congruenze; ad ogni altra congruenza ciclica corrisponde un solo sistema normale di circoli come dimostrerò nella prossima Memoria.

troviamo:

$$\left.\begin{aligned}
A &= (\cos\sigma + 1)L, & B &= \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\sigma\,L, & C &= \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\sigma\,L\\
A' &= (\cos\sigma - 1)L', & B' &= \cos\theta\,\mathrm{sen}\,\sigma\,L', & C' &= \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\sigma\,L'\\
A'' &= 0, & B'' &= -\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\sigma\frac{\partial\theta}{\partial w}, & C'' &= \rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\sigma\frac{\partial\theta}{\partial w},
\end{aligned}\right\}$$

dove L, L' hanno i valori seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
L &= \frac{\partial\rho}{\partial u} - \sqrt{E}\,\mathrm{tg}\,\frac{\sigma}{2}\,\mathrm{sen}\left(\theta + \frac{\Omega}{2}\right)\rho + 2\,\frac{\cos\sigma}{1+\cos\sigma}\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}\rho\\
L' &= \frac{\partial\rho}{\partial v} + \sqrt{G}\cot\frac{\sigma}{2}\,\mathrm{sen}\left(\theta - \frac{\Omega}{2}\right)\rho - 2\,\frac{\cos\sigma}{1-\cos\sigma}\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}\rho.
\end{aligned}\right\}$$

Ora si verificano subito le formole:

$$AA' + BB' + CC' = 0, \qquad A'A'' + B'B'' + C'C'' = 0,$$
$$A''A + B''B + C''C = 0,$$

e ne risulta quindi la (18) coi seguenti valori per H_1, H_2, H_3:

$$\left.\begin{aligned}
H_1 &= 2\cos\frac{\sigma}{2}\left[\frac{\partial\rho}{\partial u} - \sqrt{E}\,\mathrm{tg}\,\frac{\sigma}{2}\,\mathrm{sen}\left(\theta + \frac{\Omega}{2}\right)\rho + \frac{2\cos\sigma}{1+\cos\sigma}\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}\rho\right]\\
H_2 &= 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\sigma}{2}\left[\frac{\partial\rho}{\partial v} + \sqrt{G}\cot\frac{\sigma}{2}\,\mathrm{sen}\left(\theta - \frac{\Omega}{2}\right)\rho - \frac{2\cos\sigma}{1-\cos\sigma}\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}\rho\right]\\
H_3 &= \rho\,\mathrm{sen}\,\sigma\,\frac{\partial\theta}{\partial w}\cdot
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

13. I raggi principali di curvatura r_{31}, r_{32} delle superficie $w = \text{cost.}^e$ ortogonali ai circoli sono dati, secondo le note formole di Lamè, da:

$$\frac{1}{r_{31}} = \frac{1}{H_3 H_1}\frac{\partial H_1}{\partial w} = -\frac{\sqrt{E}\cos\left(\theta + \dfrac{\Omega}{2}\right)}{\cos\dfrac{\sigma}{2}\cdot H_1}, \qquad \frac{1}{r_{32}} = \frac{1}{H_3 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial w} = \frac{\sqrt{G}\cos\left(\theta - \dfrac{\Omega}{2}\right)}{\mathrm{sen}\,\dfrac{\sigma}{2}\cdot H_2}.$$

Per mezzo di queste formole è facile vedere che scegliendo convenientemente la soluzione ρ della (3), si può sempre ottenere che fra le superficie ortogonali ai circoli figuri una sfera di raggio arbitrario a. Indicando infatti con θ_0 l'integrale particolare della (13), che sostituito nelle (17) deve dare una sfera di raggio a, basterà determinare ρ in guisa che soddisfi la (3) e insieme le altre due:

$$r_{31} = a \qquad r_{32} = a,$$

ovvero:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\rho}{\partial u} &= \sqrt{E}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\operatorname{sen}\left(\theta_0+\frac{\Omega}{2}\right)\rho - 2\,\frac{\cos\sigma}{1+\cos\sigma}\left\{\begin{matrix}1\,2\\2\end{matrix}\right\}\rho - \\ &\qquad - \frac{a\sqrt{E}}{1+\cos\sigma}\cos\left(\theta_0+\frac{\Omega}{2}\right)\\ \frac{\partial\rho}{\partial v} &= -\sqrt{G}\cot\frac{\sigma}{2}\operatorname{sen}\left(\theta_0-\frac{\Omega}{2}\right)\rho + 2\,\frac{\cos\sigma}{1-\cos\sigma}\left\{\begin{matrix}1\,2\\1\end{matrix}\right\}\rho + \\ &\qquad + \frac{a\sqrt{G}}{1-\cos\sigma}\cos\left(\theta_0-\frac{\Omega}{2}\right).\end{aligned}\right\}\quad(20)$$

Ora, tenendo presenti le (13), (14), si verifica con facilità che la condizione d'integrabilità per le equazioni simultanee (20) è soddisfatta e il loro integrale comune, che, per la forma lineare delle (20), si ottiene con quadrature, soddisfa altresì la (3).

Particolarmente interessante è il caso in cui si faccia $a = 0$, cioè la sfera si riduca ad un punto. Per questo punto fisso vengono allora a passare tutti i circoli del sistema normale. Gli integrali particolari della (3), qui considerati, dànno luogo (n.° 5) a speciali deformazioni infinitesime della superficie generatrice S, sulle quali avremo occasione di ritornare in seguito. (Cfr. n.° 22.)

§ 4. Congruenze sulle cui falde della superficie focale si corrispondono le linee assintotiche.

14. Supponiamo che in una congruenza di raggi le assintotiche (reali) delle due falde S, S_1 della superficie focale si corrispondano. Sulla S prendiamo a linee coordinate le assintotiche u, v e riteniamo le notazioni del § 1 mentre per la superficie S_1 le quantità analoghe si distingueranno coll'indice 1. Siano adunque x, y, z; x_1, y_1, z_1 le coordinate di due punti corrispondenti F, F_1 sopra S, S_1; avremo le formole (§ 1):

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u} &= \begin{vmatrix}\eta & \zeta\\ \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u}\end{vmatrix}, & \frac{\partial y}{\partial u} &= \begin{vmatrix}\zeta & \xi\\ \frac{\partial\zeta}{\partial u} & \frac{\partial\xi}{\partial u}\end{vmatrix}, & \frac{\partial z}{\partial u} &= \begin{vmatrix}\xi & \eta\\ \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\eta}{\partial u}\end{vmatrix}\\ \frac{\partial x}{\partial v} &= -\begin{vmatrix}\eta & \zeta\\ \frac{\partial\eta}{\partial v} & \frac{\partial\zeta}{\partial v}\end{vmatrix}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= -\begin{vmatrix}\zeta & \xi\\ \frac{\partial\zeta}{\partial v} & \frac{\partial\xi}{\partial v}\end{vmatrix}, & \frac{\partial z}{\partial v} &= -\begin{vmatrix}\xi & \eta\\ \frac{\partial\xi}{\partial v} & \frac{\partial\eta}{\partial v}\end{vmatrix}\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x_1}{\partial u}=\begin{vmatrix}\eta_1 & \zeta_1\\ \frac{\partial\eta_1}{\partial u} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial u}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial y_1}{\partial u}=\begin{vmatrix}\zeta_1 & \xi_1\\ \frac{\partial\zeta_1}{\partial u} & \frac{\partial\xi_1}{\partial u}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial z_1}{\partial u}=\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \frac{\partial\xi_1}{\partial u} & \frac{\partial\eta_1}{\partial u}\end{vmatrix}\\
&\frac{\partial x_1}{\partial v}=-\begin{vmatrix}\eta_1 & \zeta_1\\ \frac{\partial\eta_1}{\partial v} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial v}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial y_1}{\partial v}=-\begin{vmatrix}\zeta_1 & \xi_1\\ \frac{\partial\zeta_1}{\partial v} & \frac{\partial\xi_1}{\partial v}\end{vmatrix},\quad \frac{\partial z_1}{\partial v}=-\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \frac{\partial\xi_1}{\partial v} & \frac{\partial\eta_1}{\partial v}\end{vmatrix}.
\end{aligned}\right\}\quad (2)$$

Il raggio FF_1, essendo per ipotesi tangente in F alla S e in F_1 alla S_1, dovremo avere:

$$\xi(x_1-x)+\eta(y_1-y)+\zeta(z_1-z)=0$$

$$\xi_1(x_1-x)+\eta_1(y_1-y)+\zeta_1(z_1-z)=0,$$

e potremo quindi porre, indicando con m un conveniente fattore di proporzionalità:

$$x_1-x=m\begin{vmatrix}\eta_1 & \zeta_1\\ \eta & \zeta\end{vmatrix},\quad y_1-y=m\begin{vmatrix}\zeta_1 & \xi_1\\ \zeta & \xi\end{vmatrix},\quad z_1-z=m\begin{vmatrix}\xi_1 & \eta_1\\ \xi & \eta\end{vmatrix}. \quad (3)$$

Derivando queste ultime rispetto ad u e moltiplicando le equazioni ottenute ordinatamente una prima volta per ξ, η, ζ, una seconda volta per $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$ e, ciascuna volta, sommando otteniamo:

$$\begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \frac{\partial\xi_1}{\partial u} & \frac{\partial\eta_1}{\partial u} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial u}\end{vmatrix}=m\begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u}\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \frac{\partial\xi}{\partial u} & \frac{\partial\eta}{\partial u} & \frac{\partial\zeta}{\partial u}\end{vmatrix}=m\begin{vmatrix}\xi & \eta & \zeta\\ \xi_1 & \eta_1 & \zeta_1\\ \frac{\partial\xi_1}{\partial u} & \frac{\partial\eta_1}{\partial u} & \frac{\partial\zeta_1}{\partial u}\end{vmatrix}.$$

Se adunque non sono nulli i due determinanti del 3.° ordine scritti, ciò che, per le (1), implicherebbe la relazione:

$$\xi_1\frac{\partial x}{\partial u}+\eta_1\frac{\partial y}{\partial u}+\zeta_1\frac{\partial z}{\partial u}=0, \qquad \alpha)$$

sarà $m^2=1$. Ora operando nello stesso modo sulle (3) col derivare rispetto a v, se ne trae nuovamente $m^2=1$ a meno che insieme alla α) non sussista l'altra:

$$\zeta_1\frac{\partial x}{\partial v}+\eta_1\frac{\partial y}{\partial v}+\zeta_1\frac{\partial z}{\partial v}=0. \qquad \beta)$$

Ma la coesistenza delle α) β) porterebbe la proporzione:

$$\xi_1:\eta_1:\zeta_1=\xi:\eta:\zeta,$$

cioè le normali in F, F_1 alle S, S_1 sarebbero parallele e conseguentemente S, S_1 coinciderebbero, caso che naturalmente escludiamo. Sarà dunque $m = \pm 1$ e potremo senz'altro porre $m = 1$, bastando nel caso opposto cangiare per es. i segni di ξ_1, η_1, ζ_1 cioè il senso positivo della normale alla S_1. Così le (3) diventeranno:

$$x_1 - x = \begin{vmatrix} \eta_1 & \zeta_1 \\ \eta & \zeta \end{vmatrix}, \qquad y_1 - y = \begin{vmatrix} \zeta_1 & \xi_1 \\ \zeta & \xi \end{vmatrix}, \qquad z_1 - z = \begin{vmatrix} \xi_1 & \eta_1 \\ \xi & \eta \end{vmatrix}, \qquad (3^*)$$

e quelle che se ne ottengono per derivazione rapporto ad u e v potranno scriversi, per le (1) (2):

$$\begin{vmatrix} \eta_1 + \eta, & \zeta_1 + \zeta \\ \dfrac{\partial(\eta_1 - \eta)}{\partial u}, & \dfrac{\partial(\zeta_1 - \zeta)}{\partial u} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \zeta_1 + \zeta, & \xi_1 + \xi \\ \dfrac{\partial(\zeta_1 - \zeta)}{\partial u}, & \dfrac{\partial(\xi_1 - \xi)}{\partial u} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \xi_1 + \xi, & \eta_1 + \eta \\ \dfrac{\partial(\xi_1 - \xi)}{\partial u}, & \dfrac{\partial(\eta_1 - \eta)}{\partial u} \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \eta_1 - \eta, & \zeta_1 - \zeta \\ \dfrac{\partial(\eta_1 + \eta)}{\partial v}, & \dfrac{\partial(\zeta_1 + \zeta)}{\partial v} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \zeta_1 - \zeta, & \xi_1 - \xi \\ \dfrac{\partial(\zeta_1 + \zeta)}{\partial v}, & \dfrac{\partial(\xi_1 + \xi)}{\partial v} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \xi_1 - \xi, & \eta_1 - \eta \\ \dfrac{\partial(\xi_1 + \xi)}{\partial v}, & \dfrac{\partial(\eta_1 + \eta)}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Indicando adunque con α, β due convenienti funzioni di u, v possiamo porre:

$$\frac{\partial(\xi - \xi_1)}{\partial u} = \alpha(\xi + \xi_1), \qquad \frac{\partial(\eta - \eta_1)}{\partial u} = \alpha(\eta + \eta_1), \qquad \frac{\partial(\zeta - \zeta_1)}{\partial u} = \alpha(\zeta + \zeta_1) \quad (4)$$

$$\frac{\partial(\xi + \xi_1)}{\partial v} = \beta(\xi - \xi_1), \qquad \frac{\partial(\eta + \eta_1)}{\partial v} = \beta(\eta - \eta_1), \qquad \frac{\partial(\zeta + \zeta_1)}{\partial v} = \beta(\zeta - \zeta_1). \quad (4^*)$$

Deriviamo ciascuna delle (4) rapporto a v e sommiamola colla corrispondente (4*) derivata rapporto a u, ricordando (n.° 2) che ξ, η, ζ sono integrali della medesima equazione di Laplace:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = M\theta, \qquad M = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial^2 \sqrt{\lambda}}{\partial u \partial v} - F; \qquad (5)$$

otteniamo così:

$$\left.\begin{aligned}\left(2M-2\alpha\beta-\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)\xi&=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)\xi_1\\\left(2M-2\alpha\beta-\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)\eta&=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)\eta_1\\\left(2M-2\alpha\beta-\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)\zeta&=\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)\zeta_1.\end{aligned}\right\}\qquad\gamma)$$

Moltiplicando ordinatamente queste ultime per $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ e sommando e similmente per $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ abbiamo:

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)\left(\xi_1\frac{\partial x}{\partial u}+\eta_1\frac{\partial y}{\partial u}+\zeta_1\frac{\partial z}{\partial u}\right)=0,\quad\left(\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)\left(\xi_1\frac{\partial x}{\partial v}+\eta_1\frac{\partial y}{\partial v}+\zeta_1\frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

I secondi fattori non potendo essere simultaneamente nulli per quanto si è visto sopra, sarà necessariamente:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial v}=\frac{\partial\beta}{\partial u}.$$

Indicando con ρ una conveniente funzione di u, v potremo dunque porre:

$$\alpha=\frac{\partial\log\rho}{\partial u},\qquad\beta=\frac{\partial\log\rho}{\partial v},$$

dopo di che le γ) dànno:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}=M\rho,$$

e dimostrano che ρ è un'altra soluzione della equazione (5) di Laplace cui soddisfano ξ, η, ζ. In fine la (4) (4*) diventano:

$$\left.\begin{gathered}(\xi+\xi_1)\frac{\partial\rho}{\partial u}=\rho\frac{\partial(\xi-\xi_1)}{\partial u},\qquad(\eta+\eta_1)\frac{\partial\rho}{\partial u}=\rho\frac{\partial(\eta-\eta_1)}{\partial u},\\(\zeta+\zeta_1)\frac{\partial\rho}{\partial u}=\rho\frac{\partial(\zeta-\zeta_1)}{\partial u}\\(\xi-\xi_1)\frac{\partial\rho}{\partial v}=\rho\frac{\partial(\xi+\xi_1)}{\partial v},\qquad(\eta-\eta_1)\frac{\partial\rho}{\partial v}=\rho\frac{\partial(\eta+\eta_1)}{\partial v},\\(\zeta-\zeta_1)\frac{\partial\rho}{\partial v}=\rho\frac{\partial(\zeta+\zeta_1)}{\partial v},\end{gathered}\right\}\qquad(6)$$

e possono anche scriversi sotto la forma:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial u}(\rho\xi_1)=\rho\frac{\partial\xi}{\partial u}-\xi\frac{\partial\rho}{\partial u}, \qquad \frac{\partial}{\partial u}(\rho\eta_1)=\rho\frac{\partial\eta}{\partial u}-\eta\frac{\partial\rho}{\partial u},\\
&\qquad\qquad \frac{\partial}{\partial u}(\rho\zeta_1)=\rho\frac{\partial\zeta}{\partial u}-\zeta\frac{\partial\rho}{\partial u}\\
&\frac{\partial}{\partial v}(\rho\xi_1)=-\rho\frac{\partial\xi}{\partial v}+\xi\frac{\partial\rho}{\partial v}, \qquad \frac{\partial}{\partial v}(\rho\eta_1)=-\rho\frac{\partial\eta}{\partial v}+\eta\frac{\partial\rho}{\partial v},\\
&\qquad\qquad \frac{\partial}{\partial v}(\rho\zeta_1)=-\rho\frac{\partial\zeta}{\partial v}+\zeta\frac{\partial\rho}{\partial v}.
\end{aligned}\right\} \qquad (6^*)$$

15. Inversamente è facile ora vedere che, supponendo data S, si ottiene sempre una congruenza della specie voluta di cui S è una falda della superficie focale, prendendo per ρ una soluzione qualunque dell'equazione (5) di LAPLACE cui soddisfano ξ, η, ζ, calcolando con quadrature $\xi_1\ \eta_1\ \zeta_1$ dalle (6*) che soddisfano allora alle condizioni d'integrabilità e sostituendo nelle (3*). E infatti derivando ora le (3*) osservando che le (6*) equivalgono alle (6) ne risultano le (2) per cui le linee u, v sono intanto assintotiche anche sulla S_1. Poichè inoltre:

$$\xi(x_1-x)+\eta(y_1-y)+\zeta(z_1-z)=0$$
$$\xi_1(x_1-x)+\eta_1(y_1-y)+\zeta_1(z_1-z)=0,$$

la congiungente FF_1 di due punti $F\equiv(x,y,z)$, $F_1\equiv(x_1\ y_1\ z_1)$ che si corrispondono sopra S, S_1 tocca in F la S e in F_1 la S_1, cioè S_1 è la 2.ª falda della superficie focale della congruenza formata dai raggi FF_1, c. d. d.

È questa la soluzione analitica, dovuta al sig. GUICHARD, del problema enunciato.

Possiamo dedurne subito una conseguenza che merita di essere rilevata. Avendosi:

$$\xi=\sqrt{\lambda}X, \qquad \eta=\sqrt{\lambda}Y, \qquad \zeta=\sqrt{\lambda}Z$$
$$\xi_1=\sqrt{\lambda_1}X_1, \qquad \eta_1=\sqrt{\lambda_1}Y_1, \qquad \zeta_1=\sqrt{\lambda_1}Z_1,$$

se indichiamo con σ l'angolo dei due piani focali, ossia l'angolo di due normali corrispondenti di S, S_1 risulterà:

$$\xi\xi_1+\eta\eta_1+\zeta\zeta_1=\sqrt{\lambda\lambda_1}\cos\sigma.$$

Le (3*) dànno quindi:

$$(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2=\lambda\lambda_1\operatorname{sen}^2\sigma,$$

e poichè $\delta = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$ rappresenta la distanza dei due fuochi e conseguentemente $\frac{\delta}{\operatorname{sen}\sigma}$ quella dei punti limiti, mentre le curvature K, K_1 di S, S_1 sono date da:

$$K = -\frac{1}{\lambda^2}, \qquad K_1 = -\frac{1}{\lambda_1^2},$$

avremo:

$$KK_1 = +\left(\frac{\operatorname{sen}\sigma}{\delta}\right)^4,$$

cioè il teorema: *In ogni congruenza, sulle cui falde della superficie focale si corrispondono le linee assintotiche, il prodotto delle curvature delle due falde in due punti corrispondenti uguaglia l'inversa della quarta potenza della distanza dei punti limiti.*

Nel caso di $\sigma = \frac{\pi}{2}$ la congruenza ammette una serie di superficie ortogonali, i cui raggi principali di curvatura sono funzioni l'uno dell'altro, e si ricade nel noto teorema di Halphen relativo alle due falde dell'evoluta di una tale superficie.

16. Perveniamo facilmente ad una notevole interpretazione geometrica delle formole (6) (6*) di Guichard osservando che ove si ponga:

$$\rho\xi_1 = x, \qquad \rho\eta_1 = y, \qquad \rho\zeta_1 = z$$

$$\xi = \sqrt{\lambda}X, \qquad \eta = \sqrt{\lambda}Y, \qquad \zeta = \sqrt{\lambda}Z$$

$$\rho = \sqrt{\lambda}\varphi,$$

l'equazione:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\frac{\partial^2\sqrt{\lambda}}{\partial u\,\partial v} - F\right)\rho,$$

cui soddisfa ρ e le (6*) si mutano appunto nelle formole di Weingarten (1*) (2*) n.° 3, che definiscono una deformazione infinitesima della superficie S.

Per quanto sopra si è visto, ne risulta quindi la seguente *generale* costruzione geometrica per trovare le congruenze della specie proposta, assegnata che sia una falda S della superficie focale:

A) Si consideri una deformazione infinitesima qualunque della superficie S e per ogni punto F di S, nel piano ivi tangente, si conduca il raggio perpendicolare alla direzione dello spostamento che subisce il punto F nella *deformazione; i raggi tangenti alla S così costruiti formeranno una congruenza della specie voluta* (*).

Inversamente sussiste il teorema:

B) Quando sulle due falde della superficie focale di una congruenza si corrispondono le linee assintotiche, ciascuna di queste superficie è suscettibile di una deformazione infinitesima, nella quale ogni suo punto si sposta parallelamente alla normale nel punto corrispondente all'altra falda (**).

Come esempio, consideriamo una superficie S applicabile sopra una superficie di rotazione. Essa ammette una deformazione infinitesima in sè stessa, nella quale ogni punto P di S si muove sulla superficie nella direzione di una linea trasformata di un parallelo. Dal teorema I) segue quindi che le tangenti alle deformate dei meridiani formano una congruenza della specie in questione. Si ha cioè il teorema di RIBAUCOUR: *Sulle due falde dell'evoluta di una superficie, i cui raggi principali di curvatura sono funzioni l'uno dell'altro, si corrispondono le linee assintotiche.*

Similmente da B) segue il teorema inverso.

Senza trattenermi per ora a rilevare ulteriori conseguenze dei teoremi A) B) mi limiterò qui ad osservare che le note proprietà della trasformazione di BÄCKLUND per le superficie pseudosferiche (***) provano l'esistenza di particolari deformazioni infinitesime di queste superficie nelle quali la direzione dello spostamento di ciascun punto è inclinata di un angolo costante sulla superficie.

(*) Si osserverà che la costruzione riuscirebbe indeterminata *solo* quando ogni punto ricevesse uno spostamento normale alla superficie; ma allora la S sarebbe un piano, caso ovvio che trascuriamo.

(**) Si osserverà che nei teoremi A) B) non vi è più traccia dell'ipotesi fatta che le linee assintotiche siano *reali.* E infatti essi valgono anche nel caso di superficie focali a curvatura positiva. Per queste superficie si può stabilire un sistema di formole perfettamennte analogo a quelle di LELIEUVRE e GUICHARD riportate nel presente paragrafo, senza rinunciare alla *realità* delle linee coordinate. Basta per ciò introdurre a sistema coordinato un sistema (u, v) *isotermo rispetto alla forma differenziale* $D du^2 + 2 D' du dv + D'' dv^2$ che renda cioe $D = D''$ $D' = 3$. Su tali formole, importanti per la teoria generale delle superficie, ritornerò forse in seguito.

(***) V. la mia Memoria nel tomo 13, serie 2.ª di questi Annali e il § 5, 6 della presente.

§ 5. Superficie in cui la curvatura K, espressa pei parametri u, v delle assintotiche, ha la forma

$$K = -\frac{1}{\{\varphi(u)+\psi(v)\}^2} \tag{a}$$

17. Arriviamo in altro modo alla considerazione della superficie del § 3, generatrici di congruenze di Ribaucour cicliche, proponendoci la questione seguente:

In quali congruenze accade che sulle due falde della superficie focale si corrispondano le linee assintotiche e inoltre le curvature totali delle due falde in ogni coppia di punti corrispondenti siano eguali?

Per risolverla ricorriamo ai risultati e alle formole del paragrafo precedente, osservando che nel caso attuale si ha per ipotesi:

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2=\lambda, \tag{1}$$

e indicando con σ l'angolo dei piani focali si ha inoltre:

$$\xi\xi_1+\eta\eta_1+\zeta\zeta_1=\lambda\cos\sigma. \tag{2}$$

Ora moltiplicando le tre prime (6) n.° 14 per ξ, η, ζ e sommando risulta per le (1) (2):

$$\lambda(1+\cos\sigma)\frac{\partial\rho}{\partial u}=\rho\left(\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial u}-\Sigma\xi\frac{\partial\xi_1}{\partial u}\right), \tag{α}$$

mentre operando nello stesso modo sulle medesime equazioni con ξ_1, η_1, ζ_1 risulta:

$$\lambda(1+\cos\sigma)\frac{\partial\rho}{\partial u}=\rho\left(\Sigma\xi_1\frac{\partial\xi}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial u}\right), \tag{β}$$

e confrontando α) β) coll'osservare la (2), abbiamo:

$$(1-\cos\sigma)\frac{\partial\log\lambda}{\partial u}=-\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial u}. \tag{α^*}$$

Trattando analogamente le tre seconde (6) n.° 14, si ottiene:

$$(1+\cos\sigma)\frac{\partial\log\lambda}{\partial v}=\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial v}. \tag{β^*}$$

Le equazioni α^*) β^*) possono scriversi come le (14) n.° 11:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}=2\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2},\qquad \frac{\partial\sigma}{\partial v}=-2\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\cot\frac{\sigma}{2},$$

e dànno nuovamente per condizione d'integrabilità $\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u \partial v} = 0$, cioè:

$$K = K_1 = -\frac{1}{\{\varphi(u) + \psi(v)\}^2}.$$

Dunque: *Se in una congruenza si presenta la circostanza supposta, ambedue le falde della superficie focale appartengono alla classe a).*

Nei seguenti numeri vedremo che ogni superficie della classe *a*) è superficie focale di ∞^2 congruenze della specie richiesta.

18. Prima di procedere alle indicate ricerche sarà bene che esaminiamo un caso semplice di superficie della classe *a*). Intanto tutte le superficie pseudosferiche vi appartengono corrispondendo al caso di $\varphi(u)$, $\psi(v)$ costanti; un ulteriore caso di particolare interesse, quando cioè una sola delle funzioni $\varphi(u)$, $\psi(v)$ è costante, verrà esaminato nel paragrafo seguente. Qui, rimanendo nel caso generale, dimostriamo:

Tutte le superficie conoidali rette appartengono alla classe a).

Prendiamo l'asse del conoide retto per asse delle z e indichiamo con u_1 la lunghezza di generatrice, contata dall'asse e con v l'angolo che essa fa coll'asse delle x. Le formole che dànno le coordinate di un punto del conoide sono:

$$x = u_1 \cos v, \qquad y = u_1 \operatorname{sen} v, \qquad z = \varphi(v),$$

essendo $\varphi(v)$ una funzione arbitraria di v, la cui forma speciale individua il conoide. Tenendo le solite notazioni, troviamo qui:

$$\mathsf{E} = 1, \qquad \mathsf{F} = 0, \qquad \mathsf{G} = u_1^2 + \varphi'^2(v)$$

$$D = 0 \qquad D' = -\frac{\varphi'(v)}{\sqrt{u_1^2 + \varphi'^2(v)}}, \qquad D'' = \frac{u_1 \varphi''(v)}{\sqrt{u_1^2 + \varphi'^2(v)}},$$

quindi:

$$K = -\frac{\varphi'^2(v)}{\{u_1^2 + \varphi'^2(v)\}^2}.$$

L'equazione differenziale delle linee assintotiche del 2.° sistema sarà dunque:

$$2D' du_1 + D'' dv = 0,$$

ossia:

$$\frac{du_1}{u_1} = \frac{1}{2} \frac{\varphi''(v)}{\varphi'(v)} dv.$$

Ponendo adunque:

$$\frac{u_1}{\sqrt{\varphi'(v)}} = u,$$

le linee assintotiche del conoide retto sono le $u = \text{cost.}^e$ e le $v = \text{cost.}^e$ (generatrici). Ora, risultando:

$$K = -\frac{1}{\{u^2 + \varphi'^2(v)\}^2},$$

vediamo appunto che la superficie appartiene alla classe a).

Per queste superficie l'equazione (5) n.° 14 da cui dipende la ricerca delle deformazioni infinitesime della superficie diventa:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = 0, \qquad \gamma)$$

e s'integra immediatamente.

In modo diretto si può far derivare il teorema del presente numero dai risultati dei n.^{i} 14, 15 considerando i tre seguenti integrali della γ):

$$\xi = v, \qquad \eta = \psi(v), \qquad \zeta = u,$$

ove $\psi(v)$ è funzione arbitraria di v, che dànno appunto per $\lambda = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ la forma voluta. La corrispondente superficie della classe a) si ottiene secondo le (8) n.° 2 dalle formole:

$$x = u\psi(v), \qquad y = -uv, \qquad z = \int \{\psi(v) - v\psi'(v)\} dv,$$

ed è appunto un conoide retto (generale) le cui assintotiche sono le u, v. In fine osserviamo che prendendo l'integrale $\theta = 1$ della γ) per costruire una superficie corrispondente al conoide per ortogonalità d'elementi troviamo la superficie cilindrica:

$$\bar{x} = v, \qquad \bar{y} = \psi(v), \qquad z = -u,$$

e la corrispondente congruenza ciclica di Ribaucour consta delle rette appoggiate all'asse delle z e ad una curva arbitraria tracciata in un piano perpendicolare all'asse stesso (*).

19. Supponiamo ora data una superficie qualunque S della classe a) e cerchiamo di costruire effettivamente una congruenza della specie indicata al n.° 17, di cui la S sia una falda della superficie focale.

Riteniamo per questa superficie le solite notazioni e indichiamo, come al n.° 9, con $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ i coseni di direzione delle tangenti alle sue linee di curvatura, sicchè sussistano le (5) (5*) n.° 8 e le (12) n.° 10. Sia poi S_1 la 2.^{a} falda della superficie focale e σ l'angolo delle due normali

(*) Cfr. Guichard, loc. cit., § 4.

alle S, S_1 in due punti corrispondenti F, F_1; pel n.° 15 la lunghezza del segmento FF_1 sarà:

$$\overline{FF_1} = \lambda \operatorname{sen} \sigma.$$

Se indichiamo in fine con $\theta - \frac{\pi}{2}$ l'angolo che la direzione FF_1 fa colla $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ (*), le coordinate $x_1\ y_1\ z_1$ di F_1 saranno date dalle formole:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x + \lambda \operatorname{sen}\sigma(\alpha_1 \operatorname{sen}\theta - \alpha_2 \cos\theta) \\ y_1 &= y + \lambda \operatorname{sen}\sigma(\beta_1 \operatorname{sen}\theta - \beta_2 \cos\theta) \\ z_1 &= z + \lambda \operatorname{sen}\sigma(\gamma_1 \operatorname{sen}\theta - \gamma_2 \cos\theta), \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

e dovremo ora ricercare se si possono determinare σ, θ in funzione di u, v in guisa da soddisfare alle condizioni imposte.

Per ciò, cominciamo dall'osservare che la normale in F_1 alla S_1 dovendo formare l'angolo σ colla normale in F alla S ed essere perpendicolare al segmento $\overline{FF_1}$, avrà per coseni di direzione X_1, Y_1, Z_1 le espressioni seguenti:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \cos\sigma X + \operatorname{sen}\sigma(\alpha_1 \cos\theta + \alpha_2 \operatorname{sen}\theta) \\ Y_1 &= \cos\sigma Y + \operatorname{sen}\sigma(\beta_1 \cos\theta + \beta_2 \operatorname{sen}\theta) \\ Z_1 &= \cos\sigma Z + \operatorname{sen}\sigma(\gamma_1 \cos\theta + \gamma_2 \operatorname{sen}\theta), \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

e si dovrà avere in primo luogo:

$$\left.\begin{aligned} X_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} + Y_1 \frac{\partial y_1}{\partial u} + Z_1 \frac{\partial z_1}{\partial u} &= 0 \\ X_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} + Y_1 \frac{\partial y_1}{\partial v} + Z_1 \frac{\partial z_1}{\partial v} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

ove per X_1, Y_1, Z_1 si pongano i valori (4) e si calcolino $\frac{\partial x_1}{\partial u}$, $\frac{\partial x_1}{\partial v}$ ecc. dalle (3). Ora, avendo riguardo alle (5*) n.° 9 e alle (12) n.° 10, troviamo:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial x_1}{\partial u} = AX + B\alpha_1 + C\alpha_2, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial u} = AY + B\beta_1 + C\beta_2, \\ &\qquad\qquad \frac{\partial z_1}{\partial u} = AZ + B\gamma_1 + C\gamma_2 \\ &\frac{\partial x_1}{\partial v} = A'X + B'\alpha_1 + C'\alpha_2, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial v} = A'Y + B'\beta_1 + C'\beta_2, \\ &\qquad\qquad \frac{\partial z_1}{\partial v} = A'Z + B'\gamma_1 + C'\gamma_2, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

(*) Come si vedrà, conviene adottare questa denominazione pel confronto colle formole del § 3.

dove A, B, C; A', B', C' hanno i valori seguenti:

$$\left.\begin{aligned}
A &= \lambda\sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma\cos\left(\theta+\frac{\Omega}{2}\right)\\
B &= -\lambda\sqrt{E}\cos\frac{\Omega}{2}+\operatorname{sen}\theta\frac{\partial(\lambda\operatorname{sen}\sigma)}{\partial u}+\lambda\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\left[\frac{\partial\theta}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u}-\sqrt{\frac{E}{G}}\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}\operatorname{sen}\Omega\right]\\
C &= \lambda\sqrt{E}\operatorname{sen}\frac{\Omega}{2}-\cos\theta\frac{\partial(\lambda\operatorname{sen}\sigma)}{\partial u}+\lambda\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\left[\frac{\partial\theta}{\partial u}-\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u}-\sqrt{\frac{E}{G}}\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}\operatorname{sen}\Omega\right]
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
A' &= \lambda\sqrt{G}\operatorname{sen}\sigma\cos\left(\theta-\frac{\Omega}{2}\right)\\
B' &= \lambda\sqrt{G}\cos\frac{\Omega}{2}+\operatorname{sen}\theta\frac{\partial(\lambda\operatorname{sen}\sigma)}{\partial v}+\lambda\operatorname{sen}\sigma\cos\theta\left[\frac{\partial\theta}{\partial v}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}+\sqrt{\frac{G}{E}}\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}\operatorname{sen}\Omega\right]\\
C' &= \lambda\sqrt{G}\operatorname{sen}\frac{\Omega}{2}-\cos\theta\frac{\partial(\lambda\operatorname{sen}\sigma)}{\partial v}+\lambda\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\theta\left[\frac{\partial\theta}{\partial v}+\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}+\sqrt{\frac{G}{E}}\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}\operatorname{sen}\Omega\right].
\end{aligned}\right\}$$

Le (5) diventano quindi:

$$A\cos\sigma+\operatorname{sen}\sigma(B\cos\theta+C\operatorname{sen}\theta)=0$$
$$A'\cos\sigma+\operatorname{sen}\sigma(B'\cos\theta+C'\operatorname{sen}\theta)=0,$$

ovvero:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\theta}{\partial u} &= \sqrt{E}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cos\left(\theta+\frac{\Omega}{2}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial u}+\sqrt{\frac{E}{G}}\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}\operatorname{sen}\Omega\\
\frac{\partial\theta}{\partial v} &= -\sqrt{G}\cot\frac{\sigma}{2}\cos\left(\theta-\frac{\Omega}{2}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial\Omega}{\partial v}-\sqrt{\frac{G}{E}}\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}\operatorname{sen}\Omega;
\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

queste equivalgono precisamente alla equazione a differenziali totali (13) n.° 11.

Esprimendo ora che anche sopra la superficie S_1 le linee u, v sono assintotiche, dimostreremo che l'angolo σ deve soddisfare le equazioni (14) n.° 11:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial u}=2\begin{Bmatrix}1\ 2\\2\end{Bmatrix}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2},\qquad \frac{\partial\sigma}{\partial v}=-2\begin{Bmatrix}1\ 2\\1\end{Bmatrix}\cot\frac{\sigma}{2},\tag{8}$$

le quali integrate dànno la (16) n.° 11:

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}=\sqrt{\frac{\psi(v)-k}{\varphi(u)+k}}.\tag{8*}$$

Come ivi si è visto, le (7) ammetteranno allora un integrale comune θ contenente una costante arbitraria.

20. Le equazioni (6) diventano per le (7):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}\frac{\partial x_1}{\partial u} &= \sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\sigma\cos\left(\theta+\frac{\Omega}{2}\right)X+\\
&+\left\{(1-\cos\sigma)\sqrt{E}\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{\Omega}{2}\right)+\mathrm{sen}\,\theta\cos\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial u}-2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\sigma\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}-\sqrt{E}\cos\frac{\Omega}{2}\right\}\alpha_1+\\
&+\left\{(1-\cos\sigma)\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\left(\theta+\frac{\Omega}{2}\right)-\cos\theta\cos\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial u}+2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\sigma\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}+\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\frac{\Omega}{2}\right\}\alpha_2,\\
\frac{1}{\lambda}\frac{\partial x_1}{\partial v} &= \sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\sigma\cos\left(\theta-\frac{\Omega}{2}\right)X+\\
&+\left\{-(1+\cos\sigma)\sqrt{G}\cos\theta\cos\left(\theta-\frac{\Omega}{2}\right)+\mathrm{sen}\,\theta\cos\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial v}-2\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\sigma\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}+\sqrt{G}\cos\frac{\Omega}{2}\right\}\alpha_1+\\
&+\left\{-(1+\cos\sigma)\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\left(\theta-\frac{\Omega}{2}\right)-\cos\theta\cos\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial v}+2\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\sigma\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}+\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\frac{\Omega}{2}\right\}\alpha_2.
\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

D'altronde derivando le (4) troviamo:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial X_1}{\partial u} &= -\,\mathrm{sen}\,\sigma\left\{\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\left(\theta+\frac{\Omega}{2}\right)+\frac{\partial\sigma}{\partial u}\right\}X+\\
&+\left\{(\cos\sigma-1)\sqrt{E}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\left(\theta+\frac{\Omega}{2}\right)+\cos\theta\cos\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\sqrt{E}\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\frac{\Omega}{2}\right\}\alpha_1+\\
&+\left\{(1-\cos\sigma)\sqrt{E}\cos\theta\cos\left(\theta+\frac{\Omega}{2}\right)+\mathrm{sen}\,\theta\cos\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial u}+\sqrt{E}\cos\sigma\cos\frac{\Omega}{2}\right\}\alpha_2,\\
\frac{\partial X_1}{\partial v} &= -\,\mathrm{sen}\,\sigma\left\{\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\left(\theta-\frac{\Omega}{2}\right)+\frac{\partial\sigma}{\partial v}\right\}X+\\
&+\left\{(1+\cos\sigma)\sqrt{G}\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\left(\theta-\frac{\Omega}{2}\right)+\cos\theta\cos\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial v}-\sqrt{G}\cos\sigma\,\mathrm{sen}\,\frac{\Omega}{2}\right\}\alpha_1+\\
&+\left\{-(1+\cos\sigma)\sqrt{G}\cos\theta\cos\left(\theta-\frac{\Omega}{2}\right)+\mathrm{sen}\,\theta\cos\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial v}+\sqrt{G}\cos\sigma\cos\frac{\Omega}{2}\right\}\alpha_2,
\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

e costruendo le equazioni:

$$\Sigma\frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial u}=0,\qquad \Sigma\frac{\partial X_1}{\partial v}\frac{\partial x_1}{\partial v}=0,\qquad \alpha)$$

le quali esprimono che le linee u, v sulla S_1 sono assintotiche, troviamo appunto le (8).

Inversamente è facile ora provare che assegnando nella (8*) alla costante k un valore arbitrario e prendendo per θ una soluzione comune delle (7) si avrà una congruenza della specie voluta. E infatti, avendosi:

$$\Sigma X_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} = 0, \qquad \Sigma X_1 \frac{\partial x_1}{\partial v} = 0,$$

la superficie S_1 luogo del punto $(x_1\ y_1\ z_1)$ sarà la 2.^{a} superficie focale della congruenza costruita e le linee u, v, trovandosi verificate le α), ne saranno le linee assintotiche. Resta a provarsi che le curvature K, K_1 di S, S_1 in due punti corrispondenti sono eguali. Ciò risulta facilmente dal teorema del n.° 15 e discende anche subito dalle (8), (9), (10) poichè troviamo:

$$\Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2 = \lambda^2 \Sigma\left(\frac{\partial X_1}{\partial u}\right)^2, \qquad \Sigma \frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v} = -\lambda^2 \Sigma \frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial v},$$

$$\Sigma\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2 = \lambda^2 \Sigma\left(\frac{\partial X_1}{\partial v}\right)^2,$$

e quindi:

$$K_1 = -\frac{1}{\lambda^2} = K.$$

Perveniamo adunque al risultato:

Ogni superficie della classe a) è superficie focale di ∞^2 *congruenze della specie richiesta; queste sono definite dalle formole* (7) (8).

Si osserverà che, per la dimostrazione fatta, queste sono le uniche congruenze per le quali accade che sulle due falde della superficie focale si corrispondono le assintotiche e le curvature delle due falde in due punti corrispondenti sono eguali.

È utile osservare che dalle (10) ponendo:

$$dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2 = E_1 du^2 + 2F_1 du dv + G_1 dv^2,$$

seguono le altre:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= E + 4\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\left[\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 2\end{Bmatrix}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} + \sqrt{E}\operatorname{sen}\left(\theta + \frac{\Omega}{2}\right)\right] \\ G_1 &= G + 4\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}\cot\frac{\sigma}{2}\left[\begin{Bmatrix}1\ 2\\ 1\end{Bmatrix}\cot\frac{\sigma}{2} - \sqrt{G}\operatorname{sen}\left(\theta - \frac{\Omega}{2}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

21. La coincidenza delle equazioni (7) colle (13) n.° 11 dimostra che fra il problema del presente paragrafo e quello trattato al § 3 passa una notevole relazione di cui sarebbe interessante conoscere l'origine geometrica.

Per fissare le idee, supponiamo nella formola (8*) assegnato alla costante k un determinato valore, cosicchè corrispondentemente alle ∞^1 soluzioni θ delle (7) avremo ∞^1 congruenze A della specie richiesta, aventi a comune la prima falda S della superficie focale, mentre le seconde falde S_1 formeranno un sistema ∞^1. D'altronde se scegliamo una particolare superficie $\overline{S}$, corrispondente alla S per ortogonalità d'elementi, avremo una congruenza ciclica Γ di Ribaucour conducendo pei punti di $\overline{S}$ i raggi paralleli alle normali nei punti corrispondenti di S (§ 3). Dal valore scelto per k verrà fissato un sistema normale di circoli C di cui i raggi della Γ sono gli assi ed ogni soluzione particolare θ delle (7) individuerà altresì una delle superficie Σ ortogonali ai circoli C; per tal modo viene stabilita una corrispondenza univoca fra le ∞^1 superficie S_1 e le ∞^1 superficie Σ. Riguardando ad ogni punto F_1 sulla S_1 come corrispondente sopra Σ il punto M ove Σ incontra (normalmente) il circolo C, dalla notata coincidenza risulta la seguente costruzione geometrica per dedurre da una S_1 nota la corrispondente Σ. Sia F_1 un punto di S_1, F il corrispondente di S talchè la retta FF_1 è un raggio della congruenza A che ha per superficie focale S ed S_1; sia poi α il raggio della congruenza Γ corrispondente al punto F di S e C il circolo del sistema normale avente per asse il raggio α. Conducendo il raggio del circolo C perpendicolare alla $\overline{FF_1}$, il suo estremo M darà il punto della Σ corrispondente ad F_1 sulla S_1.

22. Delle proprietà al n.° 20 diamo un'altra dimostrazione che si appoggia direttamente sui risultati generali dei n.i 14-15 (*). Per ciò basta provare che se si pone:

$$\left.\begin{array}{lll} \xi = \sqrt{\lambda}X, & \eta = \sqrt{\lambda}Y, & \zeta = \sqrt{\lambda}Z \\ \xi_1 = \sqrt{\lambda}X_1, & \eta_1 = \sqrt{\lambda}Y_1, & \zeta_1 = \sqrt{\lambda}Z_1, \end{array}\right\} \tag{12}$$

e si determina convenientemente una soluzione R dell'equazione:

$$\frac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v} = -\left\{\cos\Omega\sqrt{EG} + \frac{1}{4}\frac{\partial\log\lambda}{\partial u}\frac{\partial\log\lambda}{\partial v}\right\}R, \tag*{α)}$$

sussistono le formole (6) n.° 14:

$$\left.\begin{array}{lll} (\xi+\xi_1)\dfrac{\partial R}{\partial u} = R\dfrac{\partial(\xi-\xi_1)}{\partial u}, & (\eta+\eta_1)\dfrac{\partial R}{\partial u} = R\dfrac{\partial(\eta-\eta_1)}{\partial u}, & (\zeta+\zeta_1)\dfrac{\partial R}{\partial u} = R\dfrac{\partial(\zeta-\zeta_1)}{\partial u} \\ (\xi-\xi_1)\dfrac{\partial R}{\partial v} = R\dfrac{\partial(\xi+\xi_1)}{\partial v}, & (\eta-\eta_1)\dfrac{\partial R}{\partial v} = R\dfrac{\partial(\eta+\eta_1)}{\partial v}, & (\zeta-\zeta_1)\dfrac{\partial R}{\partial v} = R\dfrac{\partial(\zeta+\zeta_1)}{\partial v}. \end{array}\right\} \tag{13}$$

(*) Si osserverà che i calcoli al n.° 20 si potrebbero molto abbreviare assumendo già come necessarie le equazioni (8), quali risultano effettivamente dal n.° 17.

Ora, tenendo presente le (12) e le (10), troviamo:

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma\xi^2=\lambda,\qquad \Sigma\xi_1^2=\lambda,\qquad \Sigma\xi\xi_1=\lambda\cos\sigma\\
&\Sigma\xi\frac{\partial\xi}{\partial u}=\Sigma\xi_1\frac{\partial\xi_1}{\partial u}=\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial u},\qquad \Sigma\xi\frac{\partial\xi}{\partial v}=\Sigma\xi_1\frac{\partial\xi_1}{\partial v}=\frac{1}{2}\frac{\partial\lambda}{\partial v}\\
&\Sigma\xi_1\frac{\partial\xi}{\partial u}=\lambda\left[\sqrt{E}\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\Omega}{2}\right)-\cos\sigma\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\right],\\
&\Sigma\xi\frac{\partial\xi_1}{\partial u}=\frac{\partial(\lambda\cos\sigma)}{\partial u}-\Sigma\xi_1\frac{\partial\xi}{\partial u}\\
&\Sigma\xi_1\frac{\partial\xi}{\partial v}=\lambda\left[\sqrt{G}\operatorname{sen}\sigma\operatorname{sen}\left(\theta-\frac{\Omega}{2}\right)-\cos\sigma\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\right],\\
&\Sigma\xi\frac{\partial\xi_1}{\partial v}=\frac{\partial(\lambda\cos\sigma)}{\partial v}-\Sigma\xi_1\frac{\partial\xi}{\partial v}.
\end{aligned}\right\}\qquad \beta)$$

Alle (13) possiamo sostituire quelle che si ottengono moltiplicando ordinatamente le tre di una stessa linea una prima volta per ξ, η, ζ, una seconda per ξ_1, η_1, ζ_1, una terza infine per $\alpha_1\operatorname{sen}\theta-\alpha_2\cos\theta$, $\beta_1\operatorname{sen}\theta-\beta_2\cos\theta$, $\gamma_1\operatorname{sen}\theta-\gamma_2\cos\theta$ e ogni volta sommando. Ora l'ultima volta si ottiene un'identità e le altre due risulta concordemente per le β):

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial R}{\partial u}&=\left[\sqrt{E}\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\Omega}{2}\right)+\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\operatorname{tg}^2\frac{\sigma}{2}\right]R\\
\frac{\partial R}{\partial v}&=\left[-\sqrt{G}\cot\frac{\sigma}{2}\operatorname{sen}\left(\theta-\frac{\Omega}{2}\right)+\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\cot^2\frac{\sigma}{2}\right]R.
\end{aligned}\right\}\qquad (14)$$

Queste soddisfano, per le (7) (8) alle condizioni d'integrabilità e determinano R a meno di un fattore costante. D'altronde dalle (14) segue subito che R soddisfa la α).

Infine osserviamo che se si pone $R=\frac{\rho}{\sqrt{\lambda}}$, le (14) si mutano nelle (20) n.° 13 ove si faccia $a=0$. La deformazione infinitesima della superficie S a cui corrispondono i sistemi normali di circoli, considerati al n.° 13, che passano per un punto fisso, è adunque quella in cui ogni punto di S si sposta parallelamente alla normale nel punto corrispondente della 2.ª superficie focale S_1. (Cfr. n.° 16.)

23. Facciamo un'applicazione dei risultati del presente paragrafo prendendo per superficie di partenza S della classe a) il paraboloide iperbolico equilatero (n.° 18):

$$x^2-y^2=2z.$$

Le formole che dànno le coordinate di un punto del paraboloide espresse pei parametri u, v delle assintotiche (generatrici) sono le seguenti:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v), \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(u-v), \qquad z = uv.$$

Se ne trae:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = (1+v^2)du^2 + 2uv\,du\,dv + (1+u^2)dv^2,$$

indi:

$$K = -\frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}, \qquad \lambda = u^2 + v^2 + 1$$

Avremo poi:

$$X = \frac{u+v}{\sqrt{2}\sqrt{u^2+v^2+1}}, \qquad Y = \frac{-u+v}{\sqrt{2}\sqrt{u^2+v^2+1}}, \qquad Z = \frac{-1}{\sqrt{u^2+v^2+1}},$$

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \frac{1}{(u^2+v^2+1)^2}\left\{(1+v^2)du^2 - 2uv\,du\,dv + (1+u^2)dv^2\right\},$$

e quindi:

$$\sqrt{E} = \frac{\sqrt{v^2+1}}{u^2+v^2+1}, \qquad \sqrt{G} = \frac{\sqrt{u^2+1}}{u^2+v^2+1}.$$

$$\cos\Omega = -\frac{uv}{\sqrt{u^2+1}\sqrt{v^2+1}}, \qquad \operatorname{sen}\Omega = \frac{\sqrt{u^2+v^2+1}}{\sqrt{u^2+1}\sqrt{v^2+1}}$$

$$\sqrt{\frac{E}{G}}\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}\operatorname{sen}\Omega + \frac{\partial\Omega}{\partial u} = 0, \qquad \sqrt{\frac{G}{E}}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\operatorname{sen}\Omega + \frac{\partial\Omega}{\partial v} = 0.$$

Le equazioni (7) che determinano θ diventano:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\theta + \frac{\Omega}{2}\right)}{\partial u} &= \sqrt{E}\,\mathrm{tg}\,\frac{\sigma}{2}\cos\left(\theta + \frac{\Omega}{2}\right)\\
\frac{\partial\left(\theta - \frac{\Omega}{2}\right)}{\partial v} &= -\sqrt{G}\cot\frac{\sigma}{2}\cos\left(\theta - \frac{\Omega}{2}\right).
\end{aligned}\right\}$$

Secondo la formola (8*) dobbiamo prendere:

$$\mathrm{tg}\,\frac{\sigma}{2} = \sqrt{\frac{v^2-k}{u^2+1+k}},$$

e facendo $k = -1$ risulterà:

$$\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}\left(\theta + \frac{\Omega-\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{u^2+v^2+1}}{u\left\{C\sqrt{v^2+1} - v\right\}}.$$

Qualunque valore si attribuisca alla costante arbitraria C, si vede facilmente che le (3) n.° 19 dànno per la 2.ª falda della superficie focale una superficie algebrica. In particolare se si fa $C = 0$, si trova:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{3u - v\,\frac{1-3u^2}{1+u^2}\right\}, \quad y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{3u + v\,\frac{1-3u^2}{1+u^2}\right\}, \quad z_1 = \frac{uv}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3-u^2}{1+u^2};$$

in tal caso la superficie S_1 è una superficie rigata del 4.° ordine le cui assintotiche del 2.° sistema $v = \text{cost.}^e$ sono cubiche gobbe.

Come si vede, nel caso considerato nel presente numero, l'integrazione della equazione di Riccati si fa per quadrature e, per note considerazioni, lo stesso accadrà applicando alle nuove superficie ottenute la medesima trasformazione e così di seguito. Per tutte le superficie della classe a) in tal modo ottenute si può integrare completamente, con sole quadrature, l'equazione che ne determina le deformazioni infinitesime.

§ 6. Superficie le cui linee assintotiche in un sistema sono curve a torsione costante.

24. Fra le superficie della classe a) del paragrafo precedente, definite dalla proprietà:

$$K = -\frac{1}{\{\varphi(u) + \psi(v)\}^2}, \qquad a)$$

consideriamo ora in modo particolare quelle in cui una delle due funzioni $\varphi(u)$, $\psi(v)$, per es. $\psi(v)$ è costante. In queste le linee assintotiche $u = \text{cost.}^e$ sono altresì le linee lungo le quali è costante la curvatura K, o, come diremo, le linee di egual curvatura. Pel noto teorema di Enneper, il raggio di torsione delle assintotiche in ogni punto è dato da $\sqrt{-\frac{1}{K}}$, cioè le assintotiche $u = \text{cost.}^e$ delle nostre superficie sono curve a torsione costante. Inversamente, pel teorema stesso, se le linee assintotiche di un sistema sono curve a torsione costante esse sono anche linee di egual curvatura. Per ciò: *Le superficie in questione possono anche definirsi come quelle in cui ciascuna linea assintotica di un sistema è una curva a torsione costante.* Si aggiunga che se la torsione è la stessa per tutte le assintotiche considerate, la superficie sarà a curvatura costante e anche le assintotiche del 2.° sistema saranno curve colla medesima torsione.

La determinazione delle attuali superficie dipende da un'equazione alle derivate parziali *terze*, che facilmente si può formare. Supposto che sia $z=z(x, y)$ l'equazione ordinaria di una tale superficie, e servendoci delle solite notazioni per le derivate parziali di z, avremo per l'equazione indicata:

$$r\left(\frac{\partial K}{\partial y}\right)^2 - 2s\frac{\partial K}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial y} + t\left(\frac{\partial K}{\partial x}\right)^2 = 0, \tag{α}$$

ove:

$$K = \frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}.$$

Fra le superficie di questa classe citeremo, come semplice esempio, l'elicoide rigata ad area minima, cioè il conoide retto $z = m \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$, che corrisponde, nelle notazioni del n.° 18, all'ipotesi $\varphi(v)=mv$.

Ora sembra notevole che i risultati del paragrafo precedente permettano, partendo da questo integrale particolare della α), di ottenere, con sole quadrature, quanti si vogliano nuovi integrali contenenti un numero grande ad arbitrio di costanti arbitrarie.

25. Per le speciali superficie della classe a), che qui consideriamo, essendo:

$$\lambda = \varphi(u),$$

le formole (3) del n.° 1 dànno:

$$\begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix} = \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial v} - F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)} = 0, \qquad \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)} = -\frac{\varphi'(u)}{2\varphi(u)}.$$

La 2.ª, essendo per la 1.ª $\frac{\partial E}{\partial v} = \frac{F}{G}\frac{\partial G}{\partial u}$, può scriversi:

$$\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix} = \frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial u} = -\frac{\varphi'(u)}{2\varphi(u)},$$

e dà quindi:

$$G = \frac{V}{\varphi(u)},$$

dove V è funzione della sola v. Cangiando il parametro v potremo fare senz'altro $V=1$ ed avremo:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = E\,du^2 + 2\cos\Omega\sqrt{\frac{E}{\varphi(u)}}\,du\,dv + \frac{dv^2}{\varphi(u)} \tag{1}$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = \varphi^2(u)\left\{E\,du^2 - 2\cos\Omega\sqrt{\frac{E}{\varphi(u)}}\,du\,dv + \frac{dv^2}{\varphi(u)}\right\}. \tag{2}$$

Ora consideriamo sulla nostra superficie un quadrilatero $ABCD$ racchiuso da quattro linee assintotiche AB, BC, CD, DA di cui la 1.ª e la 3.ª appartengono al sistema u e siano le $u = u_0$, $u = u_1$ e la 2.ª e la 4.ª al sistema v e siano le $v = v_0$, $v = v_1$. Indicando con ds_u l'arco elementare di una linea u, abbiamo dalla (2):

$$ds_u = \sqrt{\varphi(u)}\,dv,$$

e quindi:

$$\operatorname{arc}(AB) = \sqrt{\varphi(u_0)}\,(v_1 - v_0)$$

$$\operatorname{arc}(DC) = \sqrt{\varphi(u_1)}\,(v_1 - v_0),$$

da cui:

$$\frac{\operatorname{arc}(AB)}{\operatorname{arc}(DC)} = \sqrt{\frac{\varphi(u_0)}{\varphi(u_1)}}.$$

Questo rapporto è adunque indipendente dalle speciali assintotiche $v = v_0$, $v = v_1$ del 2.° sistema e poichè, per la (1), la stessa proprietà compete evidentemente alle linee sferiche u, v immagini delle assintotiche della superficie, possiamo enunciare il teorema:

Sulle assintotiche a torsione costante delle attuali superficie le assintotiche del 2.° sistema staccano archi proporzionali; la medesima proprietà sussiste per le immagini sferiche delle linee assintotiche.

Questa *doppia* proprietà è d'altronde caratteristica, come facilmente si dimostra, per le nostre superficie.

Nel caso particolare delle superficie pseudosferiche si ha $\operatorname{arc}(AB) = \operatorname{arc}(DC)$ come pure $\operatorname{arc}(BC) = \operatorname{arc}(AD)$, teorema osservato la prima volta dal prof. Dini (*).

26. Se applichiamo il processo generale descritto ai n.ⁱ 19-20 ad una superficie S della particolare classe considerata nel presente paragrafo, vediamo immediatamente che le nuove superficie S_1 ottenute appartengono alla classe stessa. Di più nel caso attuale si verifica una circostanza particolare degna d'osservazione. Le formole (11) n.° 20, essendo $\left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0$, dànno:

$$G_1 = G, \qquad \lambda^2 G_1 = \lambda^2 G,$$

e si ha in conseguenza il teorema: *La trasformazione dei n.ⁱ 19-20, applicata alle attuali superficie, conserva gli archi di assintotiche corrispondenti a torsione costante.*

(*) Annali, serie 2.ª, tomo 4.

Considerata per ogni singola assintotica a torsione costante questa trasformazione è precisamente la stessa che si presenta per le assintotiche delle superficie pseudosferiche nella trasformazione di Bäcklund, la quale si ottiene nel caso particolare di $\varphi(u) = \text{cost.}^e$.

Osserveremo che dal teorema B) n.° 16 segue che le nostre superficie sono suscettibili di deformazioni infinitesime, nelle quali tutti i punti situati sopra una linea assintotica a torsione costante subiscono spostamenti, le cui direzioni sono egualmente inclinate sulla superficie. (Cfr. n.° 16 in fine.)

Nella mia Nota citata nella prefazione i risultati precedenti sono stabiliti per altra via, prendendo per linee coordinate le assintotiche a torsione costante $u = \text{cost.}^e$ e le loro traiettorie ortogonali $v = \text{cost.}^e$. Con queste coordinate si ha:

$$\mathsf{F} = 0 \qquad D'' = 0 \qquad \frac{D'}{\sqrt{\mathsf{E}\,\mathsf{G}}} = \sqrt{-K} = U,$$

dove U è funzione della sola u e le formole di Codazzi diventano:

$$\left.\begin{aligned} U\frac{\partial \mathsf{E}}{\partial v} + \frac{D}{\sqrt{\mathsf{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathsf{G}}}{\partial u} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{U}}\frac{D}{\sqrt{\mathsf{E}}}\right) &= 2\frac{\partial}{\partial u}(\sqrt{U}\sqrt{\mathsf{G}}) \\ U^2\sqrt{\mathsf{E}\mathsf{G}} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathsf{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathsf{G}}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{\mathsf{G}}}\frac{\partial\sqrt{\mathsf{E}}}{\partial v}\right). \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Mediante queste formole, data una superficie qualunque, si può facilmente decidere se esiste una superficie della nostra classe applicabile sopra di essa. Così per es. se la superficie data è di rotazione, basterà fare nella (3):

$$\mathsf{E} = 1 \qquad \mathsf{G} = \varphi(u),$$

e ne risulterà $D = 0$. La superficie deformata, avendo le assintotiche u, v ortogonali è adunque una superficie d'area minima; di più le $v = \text{cost.}^e$, essendo geodetiche, sono linee rette. Conseguentemente la superficie deformata è l'elicoide rigata ad area minima e la superficie di rotazione su cui è applicabile, il catenoide.

27 Facciamo un'applicazione della teoria generale per dedurre dall'elicoide rigata ad area minima nuove superficie a linee di egual curvatura assintotiche. Osserviamo che, ammettendo questa superficie un movimento continuo che la sovrappone a sè medesima, le superficie derivate distinte formeranno in realtà una semplice anzichè una doppia infinità.

Prescindendo da una similitudine, le formole che dànno le coordinate di un punto della elicoide espresse pei parametri u, v delle eliche e delle generatrici sono le seguenti:

$$x = \operatorname{senh} u \cos v, \qquad y = \operatorname{senh} u \operatorname{sen} v, \qquad z = v.$$

Qui abbiamo:

$$X = \frac{\operatorname{sen} v}{\cosh u}, \qquad Y = -\frac{\cos v}{\cosh u}, \qquad Z = \operatorname{tgh} u,$$

e perciò:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \frac{1}{\cosh^2 u}(du^2 + dv^2).$$

Dobbiamo quindi fare nelle nostre formole generali:

$$\sqrt{E} = \sqrt{G} = \frac{1}{\cosh u}, \qquad \Omega = \frac{\pi}{2}$$

$$\lambda = \cosh^2 u, \qquad \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0, \qquad \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = -\operatorname{tgh} u.$$

Le equazioni (7) n.° 19 diventano:

$$\frac{\partial \theta}{\partial u} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}}{\cosh u}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), \qquad \frac{\partial \theta}{\partial v} = -\frac{\cot\frac{\sigma}{2}}{\cosh u}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{tgh} u,$$

e poichè si ha per la (8*) dello stesso numero:

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2} = -\frac{a}{\sqrt{\cosh^2 u - a^2}},$$

denotando a una costante arbitraria, le precedenti ponendo:

$$\theta = \frac{\pi}{4} + \varphi,$$

integrate dànno:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{\cosh^2 u - a^2} + a \operatorname{senh} u}{\sqrt{a^2 - 1}\cosh u}\operatorname{tg}\left(\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{2a}v + C\right), \tag{4}$$

ove C indica una nuova costante arbitraria, che essendo per altro additiva in v non influisce, come è chiaro, sulla forma della superficie derivata. Sostituendo nella (3) n.° 19 si ottengono facilmente le nuove superficie. Qui noteremo soltanto le formole corrispondenti al valore $a = 1$; allora la (4) è surrogata dall'altra:

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = v \operatorname{tgh} u,$$

e per la superficie derivata risulta:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \operatorname{senh} u \frac{3\cosh^2 u - v^2 \operatorname{senh}^2 u}{v^2 \operatorname{senh}^2 u + \cosh^2 u} \cos v + \frac{4 v \operatorname{senh}^3 u}{v^2 \operatorname{senh}^2 u + \cosh^2 u} \operatorname{sen} v \\ y_1 &= \operatorname{senh} u \frac{3\cosh^2 u - v^2 \operatorname{senh}^2 u}{v^2 \operatorname{senh}^2 u + \cosh^2 u} \operatorname{sen} v - \frac{4 v \operatorname{senh}^3 u}{v^2 \operatorname{senh}^2 u + \cosh^2 u} \cos v \\ z_1 &= v - \frac{4 v \operatorname{senh}^2 u}{v^2 \operatorname{senh}^2 u + \cosh^2 u}. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

La superficie S_1 così definita ha le linee assintotiche $u = \text{cost.}^e$ a torsione costante mentre quelle del 2.° sistema, $v = \text{cost.}^e$, sono cubiche gobbe.

28. Consideriamo una congruenza di Ribaucour la cui superficie generatrice S abbia le linee assintotiche u a torsione costante. In queste congruenze cicliche (§ 3) la superficie focale luogo degli spigoli di regresso delle sviluppabili $v = \text{cost.}^e$ gode di una proprietà caratteristica di cui ora andiamo a trattare. Ricordiamo che, secondo i risultati già citati del sig. Guichard (cfr. n.° 8), se si indicano con ξ, η, ζ le coordinate di un punto mobile sulla superficie focale indicata, si hanno le formole:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = 2\left[\frac{\partial \rho}{\partial u} + \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} \rho\right] X, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial v} = -2 \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} \rho X + 2\rho \frac{\partial X}{\partial v}, \qquad (6)$$

e le analoghe in η, ζ, dove ρ, che rappresenta la semidistanza focale, è una soluzione della equazione (3) n.° 8.

Nel nostro caso, essendo (n.° 25):

$$\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0, \qquad \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = -\frac{\varphi'(u)}{2\varphi(u)}, \qquad G = \frac{1}{\varphi(u)},$$

la equazione per ρ e le (6) diventano:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u \partial v} + \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \frac{\partial \rho}{\partial v} + \cos\Omega \sqrt{EG}\, \rho = 0 \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} = 2\left[\frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{\varphi'(u)}{2\varphi(u)} \rho\right] X, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial v} = 2\rho \frac{\partial X}{\partial v}, \qquad (8)$$

onde risulta intanto:

$$\frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \frac{\partial \eta}{\partial u} \frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\partial \zeta}{\partial u} \frac{\partial \zeta}{\partial v} = 0,$$

cioè le linee u, v sulla superficie focale sono ortogonali e poichè sono anche coniugate ne saranno le linee di curvatura. Inversamente segue dalle (6) che se le linee u, v sulla superficie focale sono le linee di curvatura, si avrà $\left\{ \begin{matrix} 1\,2 \\ 1 \end{matrix} \right\} = 0$, cioè la superficie generatrice della congruenza di Ribaucour avrà le linee assintotiche u a torsione costante. Calcoliamo ora l'elemento lineare:

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \mathsf{E}\,du^2 + \mathsf{G}\,dv^2,$$

della superficie focale riferito alle linee di curvatura u, v. Abbiamo dalle (8):

$$\sqrt{\mathsf{E}} = 2\left(\frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{\varphi'(u)}{2\varphi(u)}\rho\right), \qquad \sqrt{\mathsf{G}} = \frac{2\rho}{\sqrt{\varphi(u)}},$$

e perciò:

$$\frac{1}{\sqrt{\mathsf{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathsf{G}}}{\partial u} = \frac{1}{\sqrt{\varphi(u)}}. \tag{9}$$

È questa la proprietà caratteristica delle superficie focali considerate che volevamo stabilire.

Facendo uso dei risultati all'ultimo paragrafo della mia Nota 2.ª: *Sui sistemi ciclici* (*), la formola (9) dimostra nuovamente che le congruenze di Ribaucour, aventi per superficie generatrice una superficie a linee di egual curvatura assintotiche, sono cicliche.

29. Inversamente dimostriamo: *Tutte le superficie per le quali i coefficienti dell'espressione dell'elemento lineare:*

$$ds^2 = \mathsf{E}\,du^2 + \mathsf{G}\,dv^2,$$

riferito alle linee di curvatura u, v, soddisfano la condizione:

$$\frac{1}{\sqrt{\mathsf{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathsf{G}}}{\partial u} = U,$$

dove U è funzione della sola u, derivano dalle superficie con un sistema di linee assintotiche a torsione costante nel modo descritto.

Indichiamo con x, y, z le coordinate di un punto della Σ, con X, Y, Z i coseni di direzione della normale e con r_1, r_2 i raggi principali di curvatura. Dimostreremo che le tangenti alle linee di curvatura $v = \text{cost.}^{\text{e}}$ formano una congruenza di Ribaucour, la cui superficie generatrice appartiene alla classe del presente paragrafo. Se poniamo:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= \frac{1}{\sqrt{\mathsf{E}}}\frac{\partial x}{\partial u}, & Y_1 &= \frac{1}{\sqrt{\mathsf{E}}}\frac{\partial y}{\partial u}, & Z_1 &= \frac{1}{\sqrt{\mathsf{E}}}\frac{\partial z}{\partial u} \\ X_2 &= \frac{1}{\sqrt{\mathsf{G}}}\frac{\partial x}{\partial v}, & Y_2 &= \frac{1}{\sqrt{\mathsf{G}}}\frac{\partial y}{\partial v}, & Z_2 &= \frac{1}{\sqrt{\mathsf{G}}}\frac{\partial z}{\partial v}, \end{aligned}\right\}$$

(*) Giornale di matematiche, vol. 22.

avremo per note formole:

$$\frac{\partial X_1}{\partial u} = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} X_2 - \frac{\sqrt{E}}{r_2} X, \qquad \frac{\partial X_1}{\partial v} = U X_2,$$

e analogamente per Y_1 Z_1. Ponendo adunque:

$$d X_1^2 + d Y_1^2 + d Z_1^2 = E du^2 + 2 F du dv + G dv^2, \tag{10}$$

avremo:

$$E = \left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right)^2, \qquad F = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} U, \qquad G = U^2, \tag{10*}$$

e poichè X_1, Y_1, Z_1 sono appunto i coseni di direzione delle tangenti alle linee di curvatura v, la proprietà enunciata sarà provata quando si verifichi che per l'espressione (10) dell'elemento lineare sferico risulta:

$$\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0 \ (*).$$

Ora si ha:

$$\frac{1}{2}\left(G \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial G}{\partial u}\right) = U^2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) + \frac{\sqrt{E}}{r_2} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right) + \frac{U'}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \right\},$$

e per la nota formola:

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\sqrt{E}}{r_2}\right) = \frac{1}{r_1} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v},$$

possiamo scrivere:

$$\frac{1}{2}\left(G \frac{\partial E}{\partial v} - F \frac{\partial G}{\partial u}\right) = \frac{U^2}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \left\{ \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right) + U + \frac{\sqrt{EG}}{r_1 r_2} \right\},$$

La quantità fra parentesi è nulla per la formola che dà la curvatura della superficie Σ e quindi appunto $\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 1 \end{Bmatrix} = 0$. Inoltre si ha:

$$\begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{U'}{U}, \qquad \frac{\partial}{\partial v} \begin{Bmatrix} 1\,2 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0, \quad \text{c. d. d.}$$

Esempio. Un caso particolare delle superficie Σ qui considerate si ha nelle superficie *modanate* (moulures) a sviluppabile direttrice cilindrica, il cui elemento lineare, riferito alle linee di curvatura u, v, ha la forma:

$$ds^2 = du^2 + \{\alpha(u) + \beta(v)\}^2 dv^2.$$

(*) Cfr. n.° 1 e la Memoria di GUICHARD.

Risultando di qui, per le (10*) $F=0$, vediamo che esse corrispondono, nel modo indicato, alle deformazioni infinitesime dell'elicoide rigata ad area minima.

30. Applichiamo questi ultimi risultati alla risoluzione del problema:

Ridurre l'elemento lineare sferico alla forma:

$$ds^2 = \mathsf{E}du^2 + \mathsf{G}dv^2,$$

colla condizione:

$$\frac{1}{\sqrt{\mathsf{E}}}\frac{\partial\sqrt{\mathsf{G}}}{\partial u} = U,$$

essendo U funzione della sola u.

Per ciò dobbiamo esaminare quando accade che la superficie focale considerata al n.° 28 si riduce ad una sfera, il cui raggio potremo porre $=1$. Ora colle formole (8) troviamo che i coseni di direzione $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ della normale all'indicata superficie sono dati da:

$$\overline{X} = \frac{1}{\sqrt{E}\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial X}{\partial u} - \frac{\cos\Omega}{\sqrt{G}\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial X}{\partial v}, \tag{11}$$

e analogamente per $\overline{Y}$, $\overline{Z}$. Essendo le linee u, v linee di curvatura per la superficie focale (n.° 28), ove si indichino con R_1, R_2 i raggi principali di curvatura si avrà:

$$\frac{\partial\overline{X}}{\partial u} = \frac{1}{R_2}\frac{\partial\xi}{\partial u}, \qquad \frac{\partial\overline{X}}{\partial v} = \frac{1}{R_1}\frac{\partial\xi}{\partial v}.$$

Derivando le (11), colle formole (5*) (12) n.° 10 troviamo:

$$R_1 = \frac{2\rho}{\dfrac{\operatorname{sen}\Omega}{\sqrt{EG}}\dfrac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\Omega}{\partial v}}, \qquad R_2 = -\frac{2}{\sqrt{E}\operatorname{sen}\Omega}\left\{\frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\rho\right\}.$$

Se la superficie deve essere una sfera di raggio $=1$, dovremo avere:

$$\rho = \frac{1}{2}\left\{\frac{\operatorname{sen}\Omega}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} + \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\Omega}{\partial v}\right\} \tag{12}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{1}{2\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\rho + \frac{1}{2}\sqrt{E}\operatorname{sen}\Omega = 0. \tag{13}$$

Ora osservando che l'elemento lineare:

$$ds_1^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

appartiene alla sfera di raggio $= 1$, per la formola che dà la curvatura si ha:

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}\operatorname{sen}\Omega}\left[\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\sqrt{\frac{G}{E}}\begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}\operatorname{sen}\Omega\right)\right]=1,$$

ossia:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\operatorname{sen}\Omega}{\sqrt{EG}}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\sqrt{EG}\operatorname{sen}\Omega=0;$$

da questa si deduce subito che la (13) è una conseguenza della (12). D'altronde derivando la (13) rapporto a v si trova che ρ soddisfa l'equazione (7) n.° 28. Così: *Ad ogni superficie con un sistema di linee assintotiche a torsione costante corrisponde una forma dell'elemento lineare sferico della specie indicata che si ottiene dando a ρ il valore* (10), *e assumendo per le coordinate $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ di un punto mobile sulla sfera l'espressione* (11) *e le analoghe per $\overline{Y}$, Z.*

Per i risultati della mia Nota già sopra citata (*) la questione qui trattata equivale alla ricerca delle congruenze cicliche di cui una falda della superficie focale sia una sfera.

§ 7. Superficie che da un doppio sistema di traiettorie isogonali delle linee di curvatura sono divise in parallelogrammi infinitesimi equivalenti.

31. Ritorniamo ora ai risultati del § 3 per studiare più da vicino i sistemi tripli ortogonali considerati al n.° 12 e in particolare le superficie ortogonali ai circoli. Qui però mi limiterò al caso dei sistemi corrispondenti a quelle congruenze cicliche di Ribaucour che hanno una superficie generatrice pseudosferica.

Nelle formole generali del § 3 dovremo porre in conseguenza:

$$E=1,\qquad G=1;\qquad \begin{Bmatrix}1\,2\\1\end{Bmatrix}=0,\qquad \begin{Bmatrix}1\,2\\2\end{Bmatrix}=0;$$

la funzione Ω di u, v sarà un integrale dell'equazione:

$$\frac{\partial^2\Omega}{\partial u\,\partial v}+\operatorname{sen}\Omega=0, \tag{1}$$

mentre ρ rappresenta una soluzione qualunque dell'altra:

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}+\cos\Omega\cdot\rho=0. \tag{2}$$

(*) Giornale di matematiche, vol. 22.

La formola (16) n.° 11 dimostra che nel caso attuale l'angolo σ può avere un valore costante qualunque e le equazioni che determinano θ diventano:

$$\frac{\partial\left(\theta-\frac{\Omega}{2}\right)}{\partial u}=\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cos\left(\theta+\frac{\Omega}{2}\right),\qquad \frac{\partial\left(\theta+\frac{\Omega}{2}\right)}{\partial v}=-\cot\frac{\sigma}{2}\cos\left(\theta-\frac{\Omega}{2}\right);\quad (3)$$

esse coincidono, salvo le denominazioni colle formole generalizzate di Darboux per la trasformazione di Bäcklund che ho dato nella Memoria citata (*).

Per l'elemento lineare dello spazio riferito al sistema triplo ortogonale avremo [vedi (19) n.° 22].

$$ds^2=H_1^2du^2+H_2^2dv^2+H_3^2dw^2,\qquad (4)$$

dove H_1, H_2, H_3 hanno i valori seguenti:

$$\left.\begin{aligned}H_1&=2\cos\frac{\sigma}{2}\left[\frac{\partial\rho}{\partial u}-\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\Omega}{2}\right)\rho\right]\\ H_2&=2\operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}\left[\frac{\partial\rho}{\partial v}+\cot\frac{\sigma}{2}\operatorname{sen}\left(\theta-\frac{\Omega}{2}\right)\rho\right]\\ H_3&=\rho\operatorname{sen}\sigma\frac{\partial\theta}{\partial w}\cdot\end{aligned}\right\}\qquad (5)$$

Osservando le (2), (3), per i raggi principali di curvatura del sistema triplo ortogonale troviamo (**):

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{r_{12}}=\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial u}=\frac{\operatorname{sen}\left(\theta-\frac{\Omega}{2}\right)}{H_2},\qquad \frac{1}{r_{21}}=\frac{1}{H_2H_1}\frac{\partial H_1}{\partial v}=-\frac{\operatorname{sen}\left(\theta+\frac{\Omega}{2}\right)}{H_1}\\ &\frac{1}{r_{13}}=\frac{1}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial u}=\frac{1}{2\cos\frac{\sigma}{2}\cdot\rho},\qquad \frac{1}{r_{31}}=\frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial H_1}{\partial w}=-\frac{\cos\left(\theta+\frac{\Omega}{2}\right)}{H_1\cos\frac{\sigma}{2}}\\ &\frac{1}{r_{23}}=\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial v}=\frac{1}{2\operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}\rho},\qquad \frac{1}{r_{32}}=\frac{1}{H_3H_2}\frac{\partial H_2}{\partial w}=\frac{\cos\left(\theta-\frac{\Omega}{2}\right)}{H_2\operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}}\cdot\end{aligned}\right\}\qquad (6)$$

Sopra ogni superficie $w=\text{cost.}^e$ le linee $H_3=\text{cost.}^e$ si diranno *linee di li-*

(*) Annali, tomo 13, serie 2.ª

(**) Per le notazioni, vedi Memoria citata.

vello, come quelle lungo le quali è costante il segmento infinitesimo di normale che sulla superficie $w = \text{cost.}^e$ stacca la superficie consecutiva nel sistema. Le formole precedenti dimostrano che: *Sulle superficie w ortogonali ai circoli le linee di livello tagliano sotto angolo costante $\frac{\sigma}{2}$ le linee di curvatura* $v = \text{cost.}^e$.

Risulterà poi dai numeri seguenti che inversamente se in un sistema normale di circoli le superficie ortogonali ai circoli hanno le linee di livello inclinate di un angolo costante sulle linee di curvature, la congruenza degli assi dei circoli è una congruenza di Ribaucour a superficie generatrice pseudosferica.

32. Indipendentemente dai sistemi tripli ortogonali, cui appartengono, le superficie w sono caratterizzate da una proprietà geometrica che ora andiamo a stabilire. Per ciò osserviamo che in ogni tale superficie l'elemento lineare, riferito alle linee di curvatura u, v, prende la forma:

$$ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2, \tag{7}$$

ove, in forza delle (3), (5), sussiste la relazione:

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial v}\right) = \cot\frac{\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial u}\right). \tag{8}$$

L'espressione:

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}du + \cot\frac{\sigma}{2}\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}dv,$$

è quindi un differenziale esatto, e noi porremo:

$$\tau = \int\left(\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial v}du + \cot\frac{\sigma}{2}\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial u}dv\right). \tag{9}$$

Consideriamo ora il doppio sistema di traiettorie (isogonali) sotto l'angolo $\frac{\sigma}{2}$ delle linee di curvatura $v = \text{cost.}^e$; le loro rispettive equazioni differenziali sono:

$$H_1 \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}du + H_2\cos\frac{\sigma}{2}dv = 0 \qquad a)$$

$$H_1 \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}du - H_2\cos\frac{\sigma}{2}dv = 0. \qquad b)$$

I loro primi membri ammettono i rispettivi fattori integranti e^{τ}, $e^{-\tau}$ e se definiamo due funzioni α, β di u, v colle relazioni:

$$e^{\tau}\left(H_1 \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}\,du + H_2\cos\frac{\sigma}{2}\,dv\right) = \operatorname{sen}\sigma\, d\alpha$$

$$e^{-\tau}\left(H_1 \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}\,du - H_2\cos\frac{\sigma}{2}\,dv\right) = \operatorname{sen}\sigma\, d\beta,$$

ne risulterà:

$$H_1 du = \cos\frac{\sigma}{2}\,(e^{-\tau}d\alpha + e^{\tau}d\beta), \qquad H_2 dv = \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}\,(e^{-\tau}d\alpha - e^{\tau}d\beta),$$

e quindi:

$$ds^2 = H_1^2 du^2 + H_2^2 dv^2 = e^{-2\tau}d\alpha^2 + 2\cos\sigma\, d\alpha\, d\beta + e^{2\tau}d\beta^2. \tag{10}$$

Le linee $\alpha =$ cost.^{e}, $\beta =$ cost.^{e} sono appunto le indicate traiettorie isogonali delle linee di curvatura, e la forma (10) dell'elemento lineare riferito alle linee α, β dimostrano la proprietà:

Il doppio sistema di traiettorie isogonali sotto l'angolo $\frac{\sigma}{2}$ *delle linee di curvatura* $v =$ cost.^{e} *divide la superficie in parallelogrammi infinitesimi di eguale area* (*).

L'elemento d'area essendo infatti: $\operatorname{sen}\sigma\, d\alpha\, d\beta$, basta supporre $d\alpha$, $d\beta$ costanti per ottenere la voluta distribuzione delle linee α, β.

Questa proprietà analoga, in certo modo, a quella dei sistemi isotermi (mediante i quali una superficie vien divisa in quadrati infinitesimi) può utilizzarsi per fare una rappresentazione equivalente della superficie sul piano, come l'altra per stabilirne una rappresentazione conforme. Se si riguardano infatti α, β come coordinate cartesiane ortogonali di un punto nel piano, avremo una rappresentazione piana della nostra superficie che conserva i rapporti delle aree e alle dette traiettorie isogonali delle linee di curvatura fa corrispondere un doppio sistema di rette ortogonali nel piano.

Osservazione. Benchè qui abbiamo considerato soltanto i sistemi tripli ortogonali *ciclici*, cui appartengono le nostre superficie, il risultato conseguito è generale, cioè, se in un sistema triplo ortogonale una superficie ha le linee di livello egualmente inclinate sulle linee di curvatura, essa appartiene alla nostra classe.

33. Sussiste il teorema: *Escluse le superficie sviluppabili, e quelle in cui le sezioni fatte con un sistema di piani paralleli sono traiettorie isogonali*

(*) Proprietà del medesimo genere s'incontrano anche in altre ricerche. Per es. sussiste il teorema: *Le superficie che hanno costante la differenza delle curvature principali sono divise in rettangoli equivalenti delle loro linee di curvatura.*

delle linee di curvatura, tutte le superficie, che risultano divise in parallelogrammi infinitesimi equivalenti da un doppio sistema di traiettorie isogonali delle linee di curvatura, si ottengono dalle superficie pseudosferiche nel modo descritto. Riguardo ai due casi eccezionali menzionati osserviamo subito che per le superficie sviluppabili la (8) è identicamente soddisfatta, qualunque sia σ, e perciò ogni doppio sistema di traiettorie isogonali delle generatrici gode della proprietà geometrica descritta. Della seconda classe che comprende come caso particolare le superficie modanate a sviluppabile direttrice cilindrica, tratterò in altro luogo.

Nel dimostrare il teorema ricorrerò, per abbreviare, ai risultati della mia Nota già citata (*). Prendendo per linee coordinate sulla superficie supposta S le dette traiettorie isogonali, sotto l'angolo $\frac{\sigma}{2}$, delle linee di curvatura, l'elemento lineare prenderà, per ipotesi, la forma:

$$ds^2 = e^{-2\tau}d\alpha^2 + 2\cos\sigma\, d\alpha\, d\beta + e^{2\tau}d\beta^2.$$

Le equazioni differenziali delle linee di curvatura che sono le bisettrici del doppio sistema α, β saranno:

$$e^{-\tau}d\alpha + e^{\tau}d\beta = 0, \qquad e^{-\tau}d\alpha - e^{\tau}d\beta = 0,$$

e, indicando con $\frac{1}{\sqrt{E}}$, $\frac{1}{\sqrt{G}}$ due rispettivi fattori integranti dei loro primi membri, potremo porre:

$$\sqrt{E}\,du = \cos\frac{\sigma}{2}(e^{-\tau}d\alpha + e^{\tau}d\beta), \qquad \sqrt{G}\,dv = \operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}(e^{-\tau}d\alpha - e^{\tau}d\beta), \quad (11)$$

essendo u, v convenienti funzioni di α, β che eguagliate a costanti dànno le equazioni delle linee di curvatura; avremo per tal modo:

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2.$$

Ora riguardando come variabili indipendenti u, v segue dalle (11):

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\alpha}{\partial u} &= \frac{e^{\tau}\sqrt{E}}{\cos\frac{\sigma}{2}}, & \frac{\partial\alpha}{\partial v} &= \frac{e^{\tau}\sqrt{G}}{\operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}} \\ \frac{\partial\beta}{\partial u} &= \frac{e^{-\tau}\sqrt{E}}{\cos\frac{\sigma}{2}}, & \frac{\partial\beta}{\partial v} &= -\frac{e^{-\tau}\sqrt{G}}{\operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}}, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

(*) Giornale di matematiche, vol. 22.

indi:

$$\operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial v}(e^{\tau}\sqrt{E})-\cos\frac{\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial u}(e^{\tau}\sqrt{G})=0,$$

$$\operatorname{sen}\frac{\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial v}(e^{-\tau}\sqrt{E})+\cos\frac{\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial u}(e^{-\tau}\sqrt{G})=0,$$

e però:

$$\frac{\partial\tau}{\partial u}=\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v},\qquad \frac{\partial\tau}{\partial v}=\cot\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}. \tag{13}$$

Dalle (12), (13) risulta che α, β sono due integrali dell'equazione di Cayley:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial u\partial v}=\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}+\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}, \tag{A}$$

e pei risultati del § 4 della Nota citata si può quindi descrivere un sistema normale di circoli ortogonali alla superficie S, sulla quale le linee di livello siano appunto le α o le β (*). Dalle formole del § 7 (loc. cit.) segue ora che nella congruenza formata dagli assi dei circoli il centro di ogni circolo divide in rapporto costante il segmento fra i due fuochi. Due casi eccezionali si possono però presentare e cioè: 1.° gli assi dei circoli possono formare una semplice infinità e allora le superficie ortogonali ai circoli sono sviluppabili; 2.° la congruenza degli assi può constare di tutte le rette di un piano; in tal caso i circoli sono ortogonali a questo piano e le linee di livello $\alpha=$ cost.^{e} sono in piani paralleli. Questi sono appunto i casi eccezionali menzionati nel teorema. Ricorrendo nel caso generale alle formole del § 22 (loc. cit.), relative alla superficie focale, ed osservando che la quantità ivi indicata con $\frac{\Lambda}{R}$ è costante, risulta che le linee inviluppate dai raggi della congruenza su ciascuna superficie focale sono linee di curvatura e perciò, secondo un teorema del sig. Guichard (Mem. cit., § 5), la congruenza degli assi dei circoli è una congruenza di Ribaucour a superficie generatrice pseudosferica.

Fra le superficie considerate nel presente paragrafo meritano speciale considerazione quelle che corrispondono al valore $\frac{\pi}{2}$ per l'angolo σ; esse godono, per quanto si è dimostrato in generale, della proprietà *caratteristica*

(*) Propriamente di tali sistemi di circoli possono tracciarsene infiniti, poichè $\alpha+$ cost.^{e}, $\beta+$ cost.^{e} sono pure integrali della A). E, benchè qui basti considerarne uno, non sarebbe privo d'interesse esaminare la relazione geometrica fra gli infiniti sistemi di raggi di Guichard, che possono dedursi da uno noto dietro l'osservazione superiore.

seguente: *Le linee bisettrici delle linee di curvatura le dividono in rettangoli infinitesimi d'eguale area.* Queste superficie derivano dalle congruenze di Ribaucour a superficie generatrice pseudosferica nel modo seguente. Si descriva nel piano normale ad ogni raggio nel punto medio e col centro in questo punto un circolo di raggio eguale alla semidistanza focale; il sistema di circoli è un sistema normale e le superficie ortogonali ai circoli sono le superficie richieste. E come nel caso generale la determinazione delle superficie ortogonali ai circoli si effettua colle formole della trasformazione di Bäcklund, così nel caso particolare, ora considerato, si effettua colle formole della trasformazione complementare.

Osservazione. Per le ricerche dei numeri seguenti è importante osservare che sebbene le formole qui utilizzate suppongano che la superficie S non sia sferica, la conclusione vale anche in questo caso, come risulta da semplici considerazioni.

34. Da ultimo applicheremo i risultati conseguiti alla risoluzione del problema: *Trovare i doppii sistemi di linee tracciate sopra una sfera, che, intersecandosi sotto angolo costante, la dividono in parallelogrammi infinitesimi equivalenti.*

Basterà esaminare, secondo quanto è detto sopra, quando accade che nel sistema triplo ortogonale del n.° 31 una delle superficie ortogonali ai circoli, per es. la $w = w_0$, è una sfera. Tale questione è già stata risoluta in generale al n.° 13 per i sistemi che derivano dalle congruenze cicliche di Ribaucour. Applicando quelle formole al caso attuale, vediamo che basterà conoscere una soluzione θ_0 delle (3), cioè una trasformata di Bäcklund della superficie pseudosferica data, indi determinare ρ dalle equazioni:

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} = \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\operatorname{sen}\left(\theta_0 + \frac{\Omega}{2}\right)\rho - \frac{\cos\left(\theta_0 + \frac{\Omega}{2}\right)}{1 + \cos\sigma}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} = -\cot\frac{\sigma}{2}\operatorname{sen}\left(\theta_0 - \frac{\Omega}{2}\right)\rho + \frac{\cos\left(\theta_0 - \frac{\Omega}{2}\right)}{1 - \cos\sigma},$$

ove, per semplicità si è fatto il raggio a della sfera $= 1$. Dopo di ciò le formole (4) (5) dànno per l'elemento lineare sferico la forma:

$$ds_1^2 = \frac{\cos^2\left(\theta_0 + \frac{\Omega}{2}\right)}{\cos^2\frac{\sigma}{2}}du^2 + \frac{\cos^2\left(\theta_0 - \frac{\Omega}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\frac{\sigma}{2}}dv^2, \tag{14}$$

colla proprietà caratteristica (8) segnalata al n.° 32, dalla quale discende che il doppio sistema di traiettorie sotto l'angolo $\frac{\sigma}{2}$ delle linee $v = \text{cost.}^e$ divide la sfera in parallelogrammi infinitesimi equivalenti.

È facile dare le formole effettive che esprimono le coordinate ξ, η, ζ di un punto della sfera per le variabili u, v. Basta infatti osservare che ξ, η, ζ sono i coseni di direzione della tangente al circolo (u, v) nel punto ove incontra (normalmente) la sfera $w = w_0$. Ora questa tangente è parallela (n.° 21) al corrispondente raggio (u, v) della congruenza (pseudosferica) le cui due superficie focali sono la superficie pseudosferica iniziale S e la sua trasformata di Bäcklund corrispondente alla soluzione θ_0 scelta delle (3); si avrà quindi (n.° 19):

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \alpha_1 \operatorname{sen}\theta_0 - \alpha_2 \cos\theta_0, \qquad \eta = \beta_1 \operatorname{sen}\theta_0 - \beta_2 \cos\theta_0, \\ &\zeta = \gamma_1 \operatorname{sen}\theta_0 - \gamma_2 \cos\theta_0. \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Col calcolo diretto si constata facilmente l'esattezza di queste formole, osservando che per le (12) n.° 10 e per le (3) n.° 31 sussistono le formole:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial u} &= \cos\left(\theta_0 + \frac{\Omega}{2}\right)\left[\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}(\alpha_1 \cos\theta_0 + \alpha_2 \operatorname{sen}\theta_0) + X\right] \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} &= -\cos\left(\theta_0 - \frac{\Omega}{2}\right)\left[\cot\frac{\sigma}{2}(\alpha_1 \cos\theta_0 + \alpha_2 \operatorname{sen}\theta_0) - X\right], \end{aligned}\right\} \tag{15*}$$

e le analoghe per η, ζ, che dànno appunto per $d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2$ l'espressione del 2.° membro della (14). Dal n.° 32 vediamo poi che le linee α, β, alle quali riferito l'elemento lineare sferico prende la forma cercata:

$$ds_1^2 = e^{-2\tau} d\alpha^2 + 2\cos\sigma\, d\alpha\, d\beta + e^{2\tau} d\beta^2,$$

si trovano con sole quadrature. Abbiamo quindi il risultato:

Da ogni congruenza pseudosferica nota, si deduce con sole quadrature una divisione della sfera della specie indicata.

35. Resta in fine a determinarsi la dipendenza geometrica delle linee α, β che effettuano sulla sfera la divisione richiesta colla congruenza pseudosferica. Per ciò calcoliamo, secondo le formole di Kummer riportate al n.° 4, le quantità fondamentali relative alla congruenza pseudosferica. La superficie di partenza essendo la superficie pseudosferica S avremo per le (6) n.° 1:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\cot\Omega \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial X}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{1}{\operatorname{sen}\Omega}\frac{\partial X}{\partial u} - \cot\Omega\frac{\partial X}{\partial v}.$$

ovvero per le (5*) n.° 9:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -\cos\frac{\Omega}{2}\alpha_1 + \operatorname{sen}\frac{\Omega}{2}\alpha_2, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \cos\frac{\Omega}{2}\alpha_1 + \operatorname{sen}\frac{\Omega}{2}\alpha_2,$$

colle analoghe per y, z. Da queste e dalle (15*) numero precedente deduciamo:

$$E = \frac{\cos^2\left(\theta_0 + \frac{\Omega}{2}\right)}{\cos^2\frac{\sigma}{2}}, \qquad F = 0, \qquad G = \frac{\cos^2\left(\theta - \frac{\Omega}{2}\right)}{\operatorname{sen}^2\frac{\sigma}{2}}$$

$$e = \Sigma\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = -\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cos^2\left(\theta_0 + \frac{\Omega}{2}\right),$$

$$f = \Sigma\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = \operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cos\left(\theta_0 + \frac{\Omega}{2}\right)\cos\left(\theta_0 - \frac{\Omega}{2}\right)$$

$$f' = \Sigma\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = \cot\frac{\sigma}{2}\cos\left(\theta_0 + \frac{\Omega}{2}\right)\cos\left(\theta_0 - \frac{\Omega}{2}\right),$$

$$g = \Sigma\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = -\cot\frac{\sigma}{2}\cos^2\left(\theta_0 - \frac{\Omega}{2}\right).$$

Per l'equazione (5) n.° 4 che determina le sviluppabili della congruenza, troviamo quindi:

$$\cos^2\left(\theta_0 + \frac{\Omega}{2}\right)du^2 - \cos^2\left(\theta_0 - \frac{\Omega}{2}\right)dv^2 = 0,$$

cioè le due equazioni separate:

$$\cos\left(\theta_0 + \frac{\Omega}{2}\right)du + \cos\left(\theta_0 - \frac{\Omega}{2}\right)dv = 0$$

$$\cos\left(\theta_0 + \frac{\Omega}{2}\right)du - \cos\left(\theta_0 - \frac{\Omega}{2}\right)dv = 0.$$

Consideriamo le linee sferiche definite da queste equazioni differenziali, ossia le immagini delle sviluppabili della congruenza; le loro rispettive traiettorie ortogonali, a causa della forma (14) dell'elemento lineare sferico, avranno per equazioni differenziali:

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cos\left(\theta_0 + \frac{\Omega}{2}\right)du - \cot\frac{\sigma}{2}\cos\left(\theta_0 - \frac{\Omega}{2}\right)dv = 0$$

$$\operatorname{tg}\frac{\sigma}{2}\cos\left(\theta_0 + \frac{\Omega}{2}\right)du + \cot\frac{\sigma}{2}\cos\left(\theta_0 - \frac{\Omega}{2}\right)dv = 0,$$

e per le $a)$ $b)$ n.° 32 saranno quindi le linee α, β cercate. Ne concludiamo: *Ogni doppio sistema di linee sferiche che s'intersecano sotto angolo costante e dividono la sfera in parallelogrammi infinitesimi equivalenti, si ottiene facendo la rappresentazione sferica di una qualsiasi congruenza pseudosferica e prendendo le traiettorie ortogonali delle immagini delle sviluppabili della congruenza.*

Termineremo coll'osservare che la curvatura K della forma differenziale:

$$\frac{du^2}{G} + 2\cos\sigma\, du\, dv + G\, dv^2,$$

dove σ è costante, essendo data da:

$$K = -\frac{1}{2\,\mathrm{sen}^2\sigma}\left\{\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{G}\right)}{\partial v^2}\right\},$$

il problema che qui abbiamo ricondotto alla teoria delle congruenze pseudosferiche, trattato direttamente, conduce all'equazione a derivate parziali:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{G}\right)}{\partial v^2} + c = 0,$$

in cui c è una costante *positiva*. I casi di $c = 0$ o c negativa corrispondono al problema analogo per le superficie sviluppabili e pseudosferiche e possono risolversi in modo simile.

FINE DEL TOMO XVIII.° (SERIE II.ª).

INDICE.