

ANNALI  
DI  
MATEMATICA  
PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori :

**Guido Fubini** in Torino

**Salvatore Pincherle** in Bologna

**Tullio Levi-Civita** in Roma

**Francesco Severi** in Roma

SERIE QUARTA - TOMO XIV.

(LXXIII DELLA RACCOLTA)

Fascicoli 1-2 - Febbraio-Luglio 1935



NICOLA ZANICHELLI, EDITORE

BOLOGNA, 1935-XIII

S O M M A R I O

G. SCORZA: Sulle algebre pseudonulle di ordine massimo . . . . .	pag. 1
V. BERNSTEIN: Rettifica alla Memoria: « Sulle direzioni di Borel di funzioni olo- morfe » . . . . .	» 15
A. ROSENBLATT: Sull'equazione biarmonica non lineare a due variabili indipen- denti in un'area generale semplicemente connessa . . . . .	» 17
V. GIULOTTO: Funzioni di Bessel del campo poliarmonico . . . . .	» 41
N. NERONOFF: Sur la loi de l'attraction . . . . .	» 75
T. VIOLA: Su una rappresentazione piana dei complessi lineari . . . . .	» 99
T. UNO: Sur les singularités des équations différentielles dans le problème des trois corps . . . . .	» 111
L. SOBRERO: La riflessione analitica delle funzioni biarmoniche attorno a un cerchio ed alcuni problemi di elasticità piana . . . . .	» 139
M. MANARINI: Sugli spazi di Weyl. . . . .	» 149

---

ANNALI DI MATEMATICA  
PURA ED APPLICATA

---

Questo giornale, il più antico periodico scientifico d'Italia, pubblica soltanto memorie origi-  
nali, opera di collaboratori italiani e stranieri: esse vengono stampate in lingua italiana,  
inglese, francese o tedesca.

La pubblicazione è giunta attualmente alla quarta serie:

- I SERIE - pubblicata a Roma del 1850 al 1866, constava di 15 volumi, completamente esauriti.
- II SERIE - pubblicata a Milano dal 1867 al 1897, consta di 26 volumi. Della I e II Serie venne pubblicato nel 1904 l'Indice Generale. (Sono esauriti i volumi I, II, III, IV, XXIV, XXV, XXVI). I 19 volumi disponibili costano L. 60 ciascuno.
- III SERIE - pubblicata a Milano dal 1898 al 1922 di 31 volumi, due dei quali (XX e XXI) dedicati alla memoria del matematico Lagrange, in occasione del centenario della sua morte nel 1913. (Sono esauriti i volumi I a XII, XV). I 18 volumi disponibili costano L. 60 ciascuno. È in vendita l'Indice Generale della III serie al prezzo di L. 25.
- IV SERIE - si pubblica a Bologna dal novembre 1923. Sono in vendita i Tomi dall'I al XIII al prezzo di L. 80 ciascuno.

---

Abbonamento al volume XIV della Serie IV: ITALIA L. 60 - ESTERO L. 90  
Per i Soci dell'Unione Matematica Italiana: ITALIA L. 55 - ESTERO L. 85

---

Esiste qualche copia di fascicoli separati. A richiesta, l'Editore darà gli  
schiarimenti necessari.

Per la Redazione e per la parte scientifica, dirigersi ad uno dei componenti  
il Comitato di Direzione.

Per ogni fatto pertinente all'Amministrazione e per l'invio dei Cambi  
dirigersi esclusivamente a

NICOLA ZANICHELLI, EDITORE IN BOLOGNA

---

NORME PER GLI AUTORI

I manoscritti vanno diretti sia alla Casa Editrice, sia ad uno dei componenti il Comitato  
di Direzione. Si desidera che i manoscritti siano perfettamente leggibili e possibilmente  
scritti a macchina; per i lavori non redatti in lingua italiana, la scrittura a macchina è  
indispensabile. Si rivolge viva preghiera agli Autori di usare la massima discrezione nelle  
modificazioni, ora costosissime, sulle bozze di stampa, le correzioni non puramente tipo-  
grafiche essendoci addebitate dalla Stamperia.

---

Gli Autori hanno diritto di N. 40 copie estratti gratuiti. Volendone un numero maggiore o coper-  
tina speciale, rivolgersi direttamente alla Coop. Tipografica Azzogni, Via Garibaldi 3, Bologna.

# Sulle algebre pseudonulle di ordine massimo.

Memoria di GAETANO SCORZA (a Napoli).

---

**Sunto.** - Con questa Nota si dimostra che le algebre pseudonulle di ordine massimo con indice  $r > 2$  sono tutte irriducibili e si determinano le algebre che le contengono come sotto-algebre eccezionali.

In una Nota recentemente presentata alla « R. Accademia dei Lincei » ho stabilito che, se un'algebra pseudonulla è di ordine  $n$  ed indice  $r$ , detto  $\delta$  il suo scarto, cioè la differenza fra il suo ordine e quello del suo quadrato, si ha

$$n \leq \delta + \delta^2 + \dots + \delta^{r-1} = \frac{\delta^r - 1}{\delta - 1} - 1;$$

che se poi si suppone che l'algebra sia commutativa si ha, più precisamente,

$$n \leq \binom{\delta}{1} + \binom{\delta + 1}{2} + \dots + \binom{\delta + r - 2}{r - 1} = \binom{\delta + r - 1}{\delta} - 1.$$

Ho stabilito inoltre che esistono — in qualsivoglia corpo numerico algebre pseudonulle (non commutative) di scarto  $\delta$ , indice  $r$  ed ordine

$$\frac{\delta^r - 1}{\delta - 1} - 1,$$

ed algebre pseudonulle commutative di scarto  $\delta$ , indice  $r$  ed ordine

$$\binom{\delta + r - 1}{\delta} - 1;$$

si le une, che le altre, riuscendo equivalenti fra di loro, quando sia fissato il corpo nel quale si intendono definite <sup>(1)</sup>.

Sono queste le algebre pseudonulle che, per semplicità di discorso, diremo di *ordine massimo*, e che formano l'oggetto delle seguenti considerazioni.

---

<sup>(1)</sup> G. SCORZA, *Sulla struttura delle algebre pseudonulle* [ Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », serie VI, vol. XX (1924), pp. 143-149].

### § 1. Quali sono le algebre pseudonulle d'ordine massimo irriducibili.

1. Le zero-algebre sono evidentemente delle algebre pseudonulle di ordine massimo; per esse l'indice vale 2 e l'ordine non differisce dallo scarto. Ora una zero-algebra è irriducibile o riducibile secondo che il suo ordine è 1 o  $> 1$ ; invece:

*Le algebre pseudonulle d'ordine massimo e indice  $r > 2$  sono tutte irriducibili.*

Sia infatti  $P$  una tale algebra con lo scarto  $\delta$ ; di guisa che il suo ordine sarà dato da

$$(1) \quad n = \delta + \delta^2 + \dots + \delta^{r-1},$$

oppure da

$$(2) \quad n = \binom{\delta}{1} + \binom{\delta+1}{2} + \dots + \binom{\delta+r-2}{r-1},$$

secondo che essa non è od è commutativa; e supponiamo, se è possibile, che  $P$  si spezzi nella somma diretta di due algebre  $P_1$  e  $P_2$  con gli ordini  $n_1$ ,  $n_2$  e gli scarti  $\delta_1$  e  $\delta_2$ .

Insieme con

$$P = P_1 + P_2,$$

sarà pure

$$P^2 = P_1^2 + P_2^2;$$

quindi sarà

$$(3) \quad n = n_1 + n_2,$$

ed

$$(n - \delta) = (n_1 - \delta_1) + (n_2 - \delta_2);$$

da cui si trae

$$(4) \quad \delta = \delta_1 + \delta_2.$$

Se gli indici di  $P_1$  e  $P_2$  si indicano con  $r_1$  ed  $r_2$  si ha

$$r \geq r_1, \quad r \geq r_2$$

— in una almeno di queste relazioni valendo il segno inferiore —; quindi sarà

$$(5) \quad \begin{cases} n_1 \leq \delta_1 + \delta_1^2 + \dots + \delta_1^{r_1-1} \leq \delta_1 + \delta_1^2 + \dots + \delta_1^{r-1}, \\ n_2 \leq \delta_2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_2^{r_2-1} \leq \delta_2 + \delta_2^2 + \dots + \delta_2^{r-1}; \end{cases}$$

che se poi  $P$  è commutativa, indi sono tali anche  $P_1$  e  $P_2$ , sarà

$$(6) \quad \begin{cases} n_1 \leq \binom{\delta_1}{1} + \binom{\delta_1+1}{2} + \dots + \binom{\delta_1+r_1-2}{r_1-1} \leq \binom{\delta_1}{1} + \binom{\delta_1+1}{2} + \dots + \binom{\delta_1+r-2}{r-1}, \\ n_2 \leq \binom{\delta_2}{1} + \binom{\delta_2+1}{2} + \dots + \binom{\delta_2+r_2-2}{r_2-1} \leq \binom{\delta_2}{1} + \binom{\delta_2+1}{2} + \dots + \binom{\delta_2+r-2}{r-1}. \end{cases}$$

Ora, se  $r > 2$ , le (5) sono incompatibili con le (1), (3) e (4), perchè, per  $s = 2, 3, 4, \dots$ , è

$$(\delta_1 + \delta_2)^s > \delta_1^s + \delta_2^s,$$

e le (6) sono incompatibili con le (2), (3) e (4), perchè, per  $s = 1, 2, \dots$ , è (2)

$$\binom{\delta_1 + \delta_2 + s}{s+1} > \binom{\delta_1 + s}{s+1} + \binom{\delta_2 + s}{s+1};$$

dunque è assurdo supporre che l'algebra  $P$  sia riducibile.

Quando lo scarto di un'algebra pseudonulla è l'unità, l'algebra è potenziale (3); dunque, come già è stato dedotto a titolo di corollario da un criterio di riducibilità per le algebre potenziali stabilito altrove (4):

*Le algebre pseudonulle potenziali sono irriducibili.*

Occorre appena avvertire che qui non è il caso di porre nell'enunciato la limitazione  $r > 2$ , perchè una zero-algebra potenziale è del 1° ordine e quindi necessariamente irriducibile.

## § 2. Comportamento delle algebre pseudonulle d'ordine massimo rispetto agli automoduli di algebre che le contengono come sotto-algebre invarianti.

2. Il comportamento cui allude il titolo di questo paragrafo è singolarmente semplice, quando si intendano escluse le zero-algebre: giacchè, come ora passiamo a dimostrare:

*Se  $u$  è un automodulo di un'algebra  $A$  contenente come sotto-algebra invariante un'algebra pseudonulla  $P$  d'ordine massimo, con lo scarto  $\delta$  e l'indice  $r > 2$ , gli elementi di  $P$  in  $u$  o hanno tutti un nullifico o hanno tutti un modulo (5).*

(2) Per convincersene basta osservare che fra le combinazioni ad  $s+1$  ad  $s+1$  dei  $\delta_1 + \delta_2 + s$  oggetti

$$a_1, a_2, \dots, a_{s_1}, b_1, b_2, \dots, b_{s_2}, c_1, c_2, \dots, c_s$$

quelle formate con gli oggetti  $a$  e  $c$  sono tutte diverse da quelle formate con gli oggetti  $b$  e  $c$  — in quanto ciascuna delle prime contiene almeno un oggetto  $a$  e ciascuna delle seconde almeno un oggetto  $b$  —, e che le combinazioni di queste due specie sono poi tutte diverse da quelle che contengono almeno un oggetto  $a$  e almeno un oggetto  $b$ .

(3) Loc. cit. (4), pag. 146.

(4) G. SCORZA, *Le algebre per ciascuna delle quali la sotto-algebra eccezionale è potenziale* (« Atti della R. Accademia di Torino », vol. 70 (1934-35-XIII).

(5) Per  $\delta = 1$  il teorema del testo si riduce a quello per le algebre pseudonulle potenziali dimostrato al luogo citato in (4).

Se  $P$  è commutativa, l'asserzione qui fatta rientra in un teorema che ho già precedentemente stabilito <sup>(6)</sup>; giova dunque supporre che  $P$  non sia commutativa, indi di ordine

$$\frac{\delta^r - 1}{\delta - 1} - 1.$$

Se  $S_1$  è un sistema complementare di  $P^2$  in  $P$  si ha

$$P = S_1 + S_1^2 + \dots + S_1^{r-1}$$

e i sistemi  $S_1, S_1^2, \dots, S_1^{r-1}$  — degli ordini rispettivi  $\delta, \delta^2, \dots, \delta^{r-1}$  — sono complementari in  $P$ .

Siano  $v_1, v_2, \dots, v_\delta, \delta$  elementi indipendenti di  $S_1$ ; allora i prodotti del tipo

$$v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_h} \quad (h=2, 3, \dots, r-1; i_1, i_2, \dots, i_h=1, 2, \dots, \delta)$$

saranno  $\delta^h$  elementi indipendenti di  $S_1^h$  e quindi gli elementi  $v$  insieme con tutti questi prodotti costituiranno un aggregato di unità di  $P$ .

Attesa l'invarianza di  $P$  in  $A$ , i prodotti  $uv_{i_1}$  ( $i_1=1, \dots, \delta$ ) appartengono a  $P$  al pari degli elementi  $v_{i_1}$ ; sussisteranno dunque delle eguaglianze del tipo

$$(7) \quad uv_{i_1} = \sum_{i_2}^{1\dots\delta} \alpha_{i_1 i_2} v_{i_2} + \sum_{i_2 i_3}^{1\dots\delta} \alpha_{i_1 i_2 i_3} v_{i_2} v_{i_3} + \dots + \sum_{i_2, \dots, i_r}^{1\dots\delta} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_r} v_{i_2} \dots v_{i_r} \quad (i_1=1 \dots \delta),$$

dove le  $\alpha$  saranno numeri opportuni del corpo in cui  $A$  è definita e che diremo  $\Gamma$ .

Dalle (7) si trae

$$(8) \quad \begin{aligned} u^2 v_{i_1} &= \sum_{i_2}^{1\dots\delta} \alpha_{i_1 i_2} u v_{i_2} + \sum_{i_2 i_3}^{1\dots\delta} \alpha_{i_1 i_2 i_3} u v_{i_2} v_{i_3} + \dots \\ &= \sum_{i_2}^{1\dots\delta} \alpha_{i_1 i_2} \left[ \sum_{j_2}^{1\dots\delta} \alpha_{i_2 j_2} v_{j_2} + \sum_{j_2 j_3}^{1\dots\delta} \alpha_{i_2 j_2 j_3} v_{j_2} v_{j_3} + \dots \right] \\ &+ \sum_{i_2 i_3}^{1\dots\delta} \alpha_{i_1 i_2 i_3} \left[ \sum_{j_2}^{1\dots\delta} \alpha_{i_2 j_2} v_{j_2} + \sum_{j_2 j_3}^{1\dots\delta} \alpha_{i_2 j_2 j_3} v_{j_2} v_{j_3} + \dots \right] v_{i_3} \\ &+ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

ma è

$$u^2 v_{i_1} = u v_{i_1},$$

dunque dal paragone delle (7) e (8) si deduce intanto che deve essere

$$\sum_{i_2}^{1\dots\delta} \alpha_{i_1 i_2} v_{i_2} = \sum_{i_2 i_3}^{1\dots\delta} \alpha_{i_1 i_2} \alpha_{i_2 i_3} v_{i_3}.$$

<sup>(6)</sup> Loc. cit. (4), ultima annotazione a piè di pagina.

ossia

$$(9) \quad \alpha_{i_1 j_2} = \sum_{i_2}^{1 \dots \delta} \alpha_{i_1 i_2} \alpha_{i_2 j_2} \quad (i_1, j_2 = 1, \dots, \delta).$$

Le (9) esprimono che la matrice d'ordine  $\delta$

$$\|\alpha_{i,j}\| \quad (i, j = 1, \dots, \delta)$$

coincide col proprio quadrato; e dunque codesta matrice o è nulla, o è un automodulo.

3. Se  $w_1, w_2, \dots, w_\delta$  sono altri  $\delta$  elementi indipendenti di  $S_1$  e si suppone che le  $v_i$  si esprimano in funzione delle  $w_i$  mediante le formole

$$(10) \quad v_i = \sum_j^{1 \dots \delta} \gamma_{i,j} w_j,$$

con le  $\gamma_{i,j}$  numeri di  $\Gamma$ , il determinante  $|\gamma_{i,j}|$  sarà diverso da zero, e detto  $\gamma'_{i,j}$  il reciproco di  $\gamma_{j,i}$  nella matrice  $|\gamma_{i,j}|$ , si avrà

$$(11) \quad w_i = \sum_j^{1 \dots \delta} \gamma'_{i,j} v_j.$$

Ciò posto, in virtù delle (11) e (7) sarà

$$\begin{aligned} w w_{i_1} &= \sum_{j_1}^{1 \dots \delta} \gamma'_{i_1 j_1} w v_{j_1} = \sum_{j_1}^{1 \dots \delta} \gamma'_{i_1 j_1} \left[ \sum_{j_2}^{1 \dots \delta} \alpha_{j_1 j_2} v_{j_2} + \sum_{j_2 j_3}^{1 \dots \delta} \alpha_{j_1 j_2 j_3} v_{j_2} v_{j_3} + \dots \right] \\ &= \sum_{j_1 j_2}^{1 \dots \delta} \gamma'_{i_1 j_1} \alpha_{j_1 j_2} v_{j_2} + \sum_{j_1 j_2 j_3}^{1 \dots \delta} \gamma'_{i_1 j_1} \alpha_{j_1 j_2 j_3} v_{j_2} v_{j_3} + \dots \\ &= \sum_{j_1 j_2 j_3}^{1 \dots \delta} \gamma'_{i_1 j_1} \alpha_{j_1 j_2} \gamma_{j_2 j_3} w_{j_3} + \sum_{j_1 \dots j_5}^{1 \dots \delta} \gamma'_{i_1 j_1} \alpha_{j_1 j_2 j_3} \gamma_{j_2 j_3 j_4} \gamma_{j_3 j_4} w_{j_4} w_{j_5} + \dots \end{aligned}$$

di guisa che, se si pone

$$(12) \quad w w_{i_1} = \sum_{i_2}^{1 \dots \delta} \beta_{i_1 i_2} w_{i_2} + \sum_{i_2 i_3}^{1 \dots \delta} \beta_{i_1 i_2 i_3} w_{i_2} w_{i_3} + \dots,$$

sarà

$$(13) \quad \beta_{i_1 i_2} = \sum_{j_1 j_2}^{1 \dots \delta} \gamma'_{i_1 j_1} \alpha_{j_1 j_2} \gamma_{j_2 i_2}.$$

Le (13) esprimono che la matrice  $\|\beta_{i,j}\|$  è la trasformata di  $\|\alpha_{i,j}\|$  mediante  $\|\gamma_{i,j}\|$ ; per conseguenza il passare in  $S_1$  dagli elementi  $v_i$  agli elementi  $w_i$  ha per effetto di far passare dalle (7) alle formole (12), nelle quali al posto della matrice  $\|\alpha_{i,j}\|$  si presenta la sua trasformata  $\|\beta_{i,j}\|$ .

Ora se  $\|\alpha_{i,j}\|$  è una matrice automodulo di caratteristica  $\delta_1$  ( $0 < \delta_1 \leq \delta$ ), fra le sue trasformate ve n'è necessariamente una per la quale all'infuori dei primi  $\delta_1$  elementi principali che sono eguali ad 1 tutti gli altri sono

nulli <sup>(7)</sup>, dunque, premettendo, ove occorra, un opportuno cambiamento di elementi indipendenti in  $S_1$ , si può supporre che nelle (7) per la matrice  $\|\alpha_{ij}\|$  o si abbia

$$\alpha_{ij} = 0 \quad \text{per } i, j = 1, \dots, \delta,$$

o si abbia

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \dots = \alpha_{\delta_1 \delta_1} = 1,$$

e le rimanenti  $\alpha_{ij}$  nulle.

Indicando, a volta a volta, con le  $x_i^{(2)}$  degli opportuni elementi di  $P^2$ , nel primo caso si avrà

$$uv_i = x_i^{(2)} \quad (i = 1, \dots, \delta);$$

nel secondo

$$uv_i = v_i + x_i^{(2)}, \quad \text{per } i = 1, \dots, \delta_1,$$

e

$$uv_i = x_i^{(2)}, \quad \text{per } i = \delta_1 + 1, \dots, \delta.$$

4. Poniamoci nel primo caso e consideriamo i  $\delta$  elementi di  $P$ :

$$(14) \quad v_1 - x_1^{(2)}, \dots, v_\delta - x_\delta^{(2)}.$$

Per ognuno di essi  $u$  è un nullifico sinistro, giacchè

$$u(v_i - x_i^{(2)}) = uv_i - ux_i^{(2)} = uv_i - u \cdot uv_i = uv_i - uv_i = 0;$$

inoltre nessuna loro combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli appartiene a  $P^2$ , perchè se fosse

$$\lambda_1(v_1 - x_1^{(2)}) + \dots + \lambda_\delta(v_\delta - x_\delta^{(2)}) = x^{(2)},$$

con le  $\lambda$  numeri non tutti nulli di  $\Gamma$  e  $x^{(2)}$  in  $P^2$ , l'espressione

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_\delta v_\delta$$

riuscirebbe eguale all'altra

$$\lambda_1 x_1^{(2)} + \dots + \lambda_\delta x_\delta^{(2)} + x^{(2)}$$

e sarebbe un elemento di  $P^2$ , che, attesa l'indipendenza di  $v_1, \dots, v_\delta$ , sarebbe diverso da zero; mentre, per ipotesi,  $S_1$  è complementare a  $P^2$  in  $P$ .

Segue, in particolare, che gli elementi (14) sono indipendenti e che, posto

$$v_i' = v_i - x_i^{(2)} \quad (i = 1, \dots, \delta),$$

(7) Vedi, per es., G. SCORZA, *Corpi numerici e algebre* (Messina, Principato, 1921), pag. 419.



il sistema  $S'_i$ , d'ordine  $\delta$ , generato da  $v'_1, \dots, v'_\delta$  riesce complementare a  $P^2$  in  $P$ ; di guisa che sarà

$$P = S'_1 + S_1'^2 + \dots + S_1'^{r-1}.$$

Ma  $u$ , essendo un nullifico per tutti gli elementi (14), riesce tale per ogni elemento di  $S'_i$ , indi di  $S_1'^2, \dots, S_1'^{r-1}$ , cioè di  $P$ , dunque è dimostrato, intanto, che nel caso attuale  $u$  è un nullifico sinistro per ogni elemento di  $P$ .

5. Poniamoci ora nel secondo caso e consideriamo gli elementi

$$(15) \quad v_1 + x_1^{(2)}, \dots, v_{\delta_1} + x_{\delta_1}^{(2)}, v_{\delta_1+1} - x_{\delta_1+1}^{(2)}, \dots, v_{\delta} - x_{\delta}^{(2)}.$$

Di essi i primi  $\delta_1$  hanno in  $u$  un modulo sinistro, giacchè per  $i = 1, \dots, \delta_1$

$$u(v_i + x_i^{(2)}) = u \cdot uv_i = u'v_i = uv_i = v_i + x_i^{(2)},$$

e gli ultimi  $\delta - \delta_1$  hanno in  $u$ , per quanto già è stato visto, un nullifico sinistro. Inoltre è chiaro, per ragioni già addotte, che nessuna loro combinazione lineare a coefficienti non tutti nulli appartiene a  $P^2$ , quindi essi sono indipendenti, e, se si pone

$$v_i'' = \begin{cases} v_i + x_i^{(2)}, & \text{per } i = 1, \dots, \delta_1, \\ v_i - x_i^{(2)}, & \text{per } i = \delta_1 + 1, \dots, \delta, \end{cases}$$

il sistema  $S_1''$  generato dagli elementi  $v_i''$  riesce d'ordine  $\delta$  e complementare a  $P^2$  in  $P$ .

Segue che, senza venir meno alla generalità si può supporre nel caso in esame che già le  $v_i$  siano state scelte in modo che  $u$  riesca un modulo sinistro per  $v_1, \dots, v_{\delta_1}$  ed un nullifico sinistro per  $v_{\delta_1+1}, \dots, v_\delta$ .

Dico ora che non può essere  $\delta_1 < \delta$ ; ossia che  $u$  è *modulo sinistro per tutte le*  $v_1, \dots, v_\delta$ .

Supponiamo, se è possibile, che ciò non sia, di guisa che  $u$  sarà certo per  $v_\delta$  un nullifico sinistro.

Sarà

$$v_1 u \cdot v_\delta = v_1 \cdot uv_\delta = 0,$$

e quindi, se si pone

$$(16) \quad v_1 u = \sum_{j_1}^{1 \dots \delta} \rho_{j_1} v_{j_1} + \sum_{j_1 j_2}^{1 \dots \delta} \rho_{j_1 j_2} v_{j_1} v_{j_2} + \dots + \sum_{j_1 j_2 \dots j_{r-1}}^{1 \dots \delta} \rho_{j_1 j_2 \dots j_{r-1}} v_{j_1} v_{j_2} \dots v_{j_{r-1}},$$

badando che  $P^r = 0$ , risulterà

$$(17) \quad \sum_{j_1}^{1 \dots \delta} \rho_{j_1} v_{j_1} v_\delta + \sum_{j_1 j_2}^{1 \dots \delta} \rho_{j_1 j_2} v_{j_1} v_{j_2} v_\delta + \dots + \sum_{j_1 \dots j_{r-2}}^{1 \dots \delta} \rho_{j_1 \dots j_{r-2}} v_{j_1} v_{j_2} \dots v_{j_{r-2}} v_\delta = 0.$$

Attesa l'indipendenza dei prodotti delle  $v_i$  a due a due, a tre a tre, ..., ad  $r-1$  ad  $r-1$ , dalla (17) si trae che sono nulle tutte le  $\rho$  con  $1, 2, \dots, r-2$  indici; per conseguenza la (16) si riduce a:

$$v_i u = \sum_{j_1 j_2 \dots j_{r-1}}^{1 \dots \delta} \rho_{j_1 j_2 \dots j_{r-1}} v_{j_1} v_{j_2} \dots v_{j_{r-1}}.$$

Ma allora, essendo

$$u v_i = v_i$$

e  $P^r = 0$ , sarà

$$v_i^2 = v_i \cdot u v_i = v_i u \cdot v_i = \sum_{j_1 \dots j_{r-1}}^{1 \dots \delta} \rho_{j_1 \dots j_{r-1}} v_{j_1} \dots v_{j_{r-1}} v_i = 0.$$

Questa conseguenza contrasta con l'ipotesi che sia  $r > 2$ ; dunque  $u$  è, come volevasi, un modulo sinistro per tutte le  $v_i$ , indi per ogni elemento di  $P$ .

6. Giunti a questo punto è dimostrato che in  $u$  gli elementi di  $P$  hanno tutti o un nullifico sinistro o un modulo sinistro.

In maniera simile si dimostrerebbe che in  $u$  gli elementi di  $P$  hanno tutti o un nullifico destro o un modulo destro; e quindi perchè il teorema enunciato a principio del n° 2 sia del tutto stabilito basterà far vedere che, per es.,  $u$  non può essere per gli elementi di  $P$  un modulo sinistro e un nullifico destro.

Ora ciò è immediato: e, infatti, se fosse

$$u v_i = v_i \quad \text{e} \quad v_i u = 0,$$

sarebbe

$$v_i^2 = v_i \cdot u v_i = v_i u \cdot v_i = 0.$$

### § 3. Le algebre che hanno come sotto-algebre eccezionali algebre pseudonulle d'ordine massimo e indice $> 2$ .

7. Per procedere alla determinazione delle algebre, di cui nel titolo di questo paragrafo, indichiamo con  $A$  un'algebra la cui sotto-algebra eccezionale  $E$  sia un'algebra pseudonulla d'ordine massimo con l'indice  $r > 2$  (\*).

Se  $A$  è pseudonulla, essa coincide addirittura con  $E$ ; in caso contrario essa è certo dotata di automoduli.

---

(\*) Per alcuni dei ragionamenti che seguono potrei rimandare alla nota citata in (\*): ho creduto più comodo per il lettore riprodurli rapidamente.

Poniamoci in questa ipotesi e sia  $u$  un automodulo principale di  $A$ ; allora potrà scriversi <sup>(9)</sup>

$$(18) \quad A = uAu + S,$$

con  $uAu$  ed  $S$  complementari in  $A$  e con  $S \leq E$ .

Per quanto precede, in  $u$ , gli elementi di  $E$  hanno tutti o un nullifico o un modulo: intanto  $uAu$  è l'insieme degli elementi di  $A$  che hanno un modulo in  $u$ , dunque  $uAu$  o non contiene alcun elemento non nullo di  $E$  o li contiene tutti. Segue che è  $S = E$ , oppure  $S = 0$ .

Se  $S = E$ , ossia se  $u$  è un nullifico per ogni elemento di  $E$ , accanto all'eguaglianza, in cui si converte la (18),

$$A = uAu + E,$$

si hanno le altre

$$uAu \cdot E = uA \cdot uE = 0, \quad E \cdot uAu = Eu \cdot Au = 0;$$

e dunque  $A$  è la somma diretta di  $uAu$  ed  $E$ . Intanto  $uAu$  è priva di elementi eccezionali, perchè se ne avesse essi sarebbero eccezionali anche per  $A$ , pur non appartenendo ad  $E$ , dunque:

*Nell'ipotesi attuale  $A$  è la somma diretta di un'algebra semi-semplice e di  $E$ .*

8. Supponiamo in secondo luogo che sia  $S = 0$ , cioè

$$A = uAu,$$

di guisa che  $A$  sarà dotata di modulo e questo sarà  $u$ .

Indichiamo con  $(p_1, p_2, \dots, p_t)$  la segnatura di  $A$  <sup>(10)</sup> e cominciamo dall'esaminare il caso in cui è  $t = 1$ .

9. Allora la segnatura di  $A$  è  $(p_1)$ , e dunque  $A$  può considerarsi <sup>(11)</sup> come il prodotto diretto di due sue sotto-algebre  $B$  e  $C$ , aventi lo stesso suo modulo, delle quali una, poniamo  $B$ , è a modulo primitivo e l'altra,  $C$ , è regolare e dell'ordine  $p_1^2$ . Inoltre se  $E_1$  è la sotto-algebra eccezionale di  $B$ , si ha

$$E = E_1 \times C,$$

indi, qualsiasi l'intero positivo  $s$ .

$$E^s = E_1^s \times C^s = E_1^s \times C;$$

<sup>(9)</sup> Loc. cit. (7), pag. 277.

<sup>(10)</sup> Loc. cit. (7), pag. 355.

<sup>(11)</sup> Loc. cit. (7), pag. 370.

per conseguenza l'indice di  $E_1$  eguaglia quello,  $r$ , di  $E$ , e, se gli scarti di  $E$  ed  $E_1$  si indicano con  $\delta$  e  $\delta_1$ , essendo

$$E = E_1 \times C \quad \text{ed} \quad E^2 = E_1^2 \times C,$$

sarà

$$(19) \quad \delta = \delta_1 p_1^2.$$

Ciò posto, dico che è necessariamente  $p_1 = 1$ .

Infatti si indichino con  $n$  ed  $n_1$  gli ordini di  $E$  ed  $E_1$ , per modo che sarà

$$(20) \quad n = n_1 p_1^2.$$

Se  $E$  non è commutativa, si ha

$$(21) \quad n = \delta + \delta^2 + \dots + \delta^{r-1}$$

ed

$$(22) \quad n_1 \leq \delta_1 + \delta_1^2 + \dots + \delta_1^{r-1};$$

se invece  $E$ , indi anche  $E_1$  è commutativa, si ha

$$(23) \quad n = \binom{\delta}{1} + \binom{\delta+1}{2} + \dots + \binom{\delta+r-2}{r-1}$$

ed

$$(24) \quad n_1 \leq \binom{\delta_1}{1} + \binom{\delta_1+1}{2} + \dots + \binom{\delta_1+r-2}{r-1};$$

ora le (21) e (22), e così le (22) e (23), essendo  $r > 2$ , non potrebbero coesistere con le (19) e (20), se fosse  $p_1 > 1$ , dunque si ha, come volevasi  $p_1 = 1$ .

Si conclude intanto che:

*Nel caso in esame  $A$  è a modulo primitivo, cioè l'algebra  $A - E$  è primitiva.*

10. La proposizione, cui ora siamo pervenuti, può essere ulteriormente precisata, se si suppone che il corpo numerico — diciamo  $\Gamma$  — entro il quale  $A$  è data, sia infinito o finito, secondo che tale è il suo sottocorpo fondamentale.

Dico infatti che:

*Sotto quest'ipotesi l'algebra primitiva  $A - E$  è del 1° ordine.*

Sia  $[x]$  la classe mod  $E$  individuata dall'elemento  $x$  di  $A$  e sia

$$\varphi(\xi) = \xi^v + \alpha_1 \xi^{v-1} + \dots + \alpha_{v-1} \xi + \alpha_v = 0$$

l'equazione minima dell'elemento  $[x]$  di  $A - E$ . Sarà  $\varphi(\xi)$  irriducibile in  $\Gamma$ ; di più, per un ragionamento che ho esposto altrove <sup>(12)</sup>, è lecito supporre

<sup>(12)</sup> G. SCORZA, *Sopra un teorema fondamentale della teoria delle algebre* [« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », serie VI, vol. XX, pp. 65-72].

che  $\varphi(\xi) = 0$  sia anche l'equazione minima di  $x$  in  $A$ , per modo che sarà

$$(25) \quad x^\nu + \alpha_1 x^{\nu-1} + \dots + \alpha_{\nu-1} x + \alpha_\nu u = 0.$$

Indichiamo con  $v_1, \dots, v_\delta$ ,  $\delta$  elementi di  $E$ , tali che, insieme con i loro prodotti a due a due, a tre a tre, ..., ad  $r-1$  ad  $r-1$ , costituiscano un aggregato di unità di  $E$ : naturalmente di codesti prodotti quelli distinti saranno

$$\delta^2 + \dots + \delta^{r-1},$$

o, soltanto,

$$\binom{\delta+1}{2} + \dots + \binom{\delta+r-2}{r-1},$$

secondo che  $E$  si suppone non commutativa o commutativa.

Attesa l'invarianza di  $E$  in  $A$  il prodotto  $xv_i$  sarà al pari di  $v_i$  un elemento di  $E$  e quindi si avrà, indicando con le  $\lambda$  dei numeri convenienti di  $\Gamma$ ,

$$(26) \quad xv_i = \sum_j^{1\dots\delta} \lambda_{ij} v_j + \sum_{j_1 j_2}^{1\dots\delta} \lambda_{ij_1 j_2} v_{j_1} v_{j_2} + \dots + \sum_{j_1 \dots j_{r-1}}^{1\dots\delta} \lambda_{ij_1 \dots j_{r-1}} v_{j_1} \dots v_{j_{r-1}} \quad (i=1, \dots, \delta).$$

Per  $s$  intero positivo qualsiasi poniamo

$$\|\lambda_{ij}^{(s)}\| = \|\lambda_{i,j}\|^s;$$

sarà, tralasciando di scrivere i termini che stanno certo in  $E^2$ :

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} xv_i = \sum_j^{1\dots\delta} \lambda_{ij} xv_j + \dots = \sum_{j,k}^{1\dots\delta} \lambda_{ij} \lambda_{jk} v_k + \dots = \sum_k^{1\dots\delta} \lambda_{ik}^{(2)} v_k + \dots \\ xv_i = \sum_j^{1\dots\delta} \lambda_{ij}^{(2)} xv_j + \dots = \sum_{j,k}^{1\dots\delta} \lambda_{ij}^{(2)} \lambda_{jk} v_k + \dots = \sum_k^{1\dots\delta} \lambda_{ik}^{(3)} v_k + \dots \\ \dots \\ xv_i = \sum_k^{1\dots\delta} \lambda_{ik}^{(v)} v_k + \dots \end{array} \right.$$

ma dalla (25) si trae

$$x^\nu v_i + \alpha_1 x^{\nu-1} v_i + \dots + \alpha_{\nu-1} xv_i + \alpha_\nu v_i = 0,$$

dunque, per le (27), sarà

$$(28) \quad \sum_k^{1\dots\delta} \lambda_{ik}^{(v)} v_k + \alpha_1 \sum_k^{1\dots\delta} \lambda_{ik}^{(v-1)} v_k + \dots + \alpha_{\nu-1} \sum_k^{1\dots\delta} \lambda_{ik} v_k + \alpha_\nu v_i + \dots = 0.$$

Poichè le  $v_i$  sono indipendenti dai termini di  $E^2$ , la (28) esige che sia

$$(29) \quad \lambda_{ik}^{(v)} + \alpha_1 \lambda_{ik}^{(v-1)} + \dots + \alpha_{\nu-1} \lambda_{ik} = \begin{cases} -\alpha_\nu, & \text{se } i = k, \\ 0, & \text{se } i \neq k. \end{cases}$$

Per procedere innanzi giova ora distinguere il caso in cui  $E$  è commutativa da quello in cui non è tale.

Nella prima alternativa è, qualunque siano  $i$  e  $k$  nella successione 1, 2, ...,  $\delta$ ,

$$xv_i v_k = xv_k v_i;$$

ma, per le (26), tralasciando di scrivere i termini che stanno certo in  $E^3$ , è

$$xv_i v_k = xv_i \cdot v_k = \sum_j^{1 \dots \delta} \lambda_{ij} v_j v_k + \dots,$$

$$xv_k v_i = xv_k \cdot v_i = \sum_j^{1 \dots \delta} \lambda_{kj} v_j v_i + \dots,$$

dunque deve essere

$$(30) \quad \sum_j^{1 \dots \delta} \lambda_{ij} v_j v_k = \sum_j^{1 \dots \delta} \lambda_{kj} v_j v_i.$$

Dalla (30) si deduce, supposto  $i \neq k$ .

$$\lambda_{ii} = \lambda_{kk}$$

e

$$\lambda_{ij} = 0 \text{ per } j \neq i, \quad \lambda_{kj} = 0 \text{ per } j \neq k;$$

cosicchè, insomma, indicando con  $\lambda$  un numero opportuno, sarà

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} \lambda, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

Ma allora, per  $s$  intero positivo qualsiasi, è

$$\lambda_{ij}^{(s)} = \begin{cases} \lambda^s, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

e la (29) dà

$$\lambda^v + \alpha_1 \lambda^{v-1} + \dots + \alpha_{v-1} \lambda + \alpha_v = 0.$$

Ciò significa che  $\lambda$  è una radice dell'equazione  $\varphi(\xi) = 0$ , e allora, poichè questa è irriducibile, deve essere necessariamente  $v = 1$ .

Segue che  $[x]$  è un multiplo scalare del modulo  $[u]$  di  $A - E$ ; ma  $[x]$  è un qualsiasi elemento di  $A - E$ , dunque  $A - E$  è, come volevasi, di ordine 1.

Supponiamo ora che  $E$  non sia commutativa e poniamo

$$(31) \quad v_i x = \sum_j^{1 \dots \delta} \mu_{ij} v_j + \sum_{j_1 j_2}^{1 \dots \delta} \mu_{ij_1 j_2} v_{j_1} v_{j_2} + \dots + \sum_{j_1 \dots j_{r-1}}^{1 \dots \delta} \mu_{ij_1 \dots j_{r-1}} v_{j_1} \dots v_{j_{r-1}} \quad (i=1 \dots \delta).$$

Sarà, tralasciando di scrivere i termini che stanno certo in  $E^3$ ,

$$v_i x v_i = v_i \cdot x v_i = \sum_j^{1 \dots \delta} \lambda_{ij} v_j v_i + \dots,$$

$$v_i x v_i = v_i x \cdot v_i = \sum_j^{1 \dots \delta} \mu_{ij} v_j v_i + \dots,$$

indi

$$\sum_j^{1\dots\delta} \lambda_{ij} v_i v_j = \sum_j^{1\dots\delta} \mu_{ij} v_j v_i.$$

Di qua si trae che le  $\lambda_{i,j}$  (e così le  $\mu_{i,j}$ ) con  $i \neq j$  sono tutte nulle, quindi è, per  $s$  intero positivo qualsiasi,

$$\lambda_{ik}^{(s)} = \begin{cases} \lambda_{ik}^s, & \text{per } i = k, \\ 0, & \text{per } i \neq k, \end{cases}$$

e la (29) dà, per  $i = 1, \dots, \delta$

$$\lambda_{ii}^v + \alpha_1 \lambda_{ii}^{v-1} + \dots + \alpha_{v-1} \lambda_{ii} + \alpha_v = 0.$$

Segue, come più sopra che è  $v = 1$  e che  $A - E$  è del 1° ordine.

**11.** Possiamo riassumere le osservazioni fatte nei n° 8, 9 e 10 dicendo che:

*Se  $A$  è dotata di modulo e la sua segnatura è del tipo  $(p_1)$ , è necessariamente  $p_1 = 1$ , ossia  $A$  è a modulo primitivo; che, se, poi, il corpo nel quale  $A$  è data, è infinito o finito, secondo che tale è il suo sottocorpo fondamentale,  $A$  è la somma (non diretta) di  $E$  e dell'algebra del 1° ordine generata dal suo modulo.*

**12.** Supponiamo ora che la segnatura di  $A$  sia  $(p_1, \dots, p_t)$ , con  $t > 1$ .

Allora sussiste per  $A$  un'eguaglianza del tipo <sup>(43)</sup>

$$A = H_1 + H_2 + \dots + H_t + N,$$

dove  $H_i$  è un'algebra con modulo di segnatura  $(p_i)$ ,  $N \leq E$  ed  $H_1, \dots, H_t$  sono complementari in  $A$ .

Se il modulo di  $H_i$  si indica con  $u_i$ , si ha

$$u = u_1 + u_2 + \dots + u_t$$

e gli automoduli  $u_i$  sono a due a due mutuamente nullifici

Per quanto precede, in ciascuno degli automoduli  $u_i$ , gli elementi di  $E$  hanno o tutti un modulo, o tutti un nullifico; d'altronde, se in uno degli automoduli  $u_i$  essi hanno un modulo, in tutti gli altri hanno dei nullifici, dunque, giacchè, per l'ipotesi quivi in discussione, in  $u$  hanno un modulo, essi avranno un modulo in uno degli  $u_i$ , poniamo in  $u_1$  e dei nullifici in  $u_2, \dots, u_t$ .

<sup>(43)</sup> Loc. cit. (7), pp. 374-375.

Ciò posto, basta ricordare che  $H_i$  è l'insieme degli elementi di  $A$  aventi per modulo  $u_i$  e che un elemento è eccezionale per una qualsiasi delle  $H_i$  quando, e solo quando, sia tale per  $A$ , per concludere che  $E < H_1$ , che  $N=0$ , che le algebre  $H_2, \dots, H_t$  sono semplici e che dunque  $A$  è la somma diretta di  $H_1$  e dell'algebra semi-semplice

$$H_2 + \dots + H_t.$$

Qui per  $H_1$  può esser ripetuto naturalmente quanto nei n° 9, 10, 11 è stato detto per  $A$ ; quindi è  $p_1 = 1$  ed  $H_1$  è a modulo primitivo. Che se  $\Gamma$  è infinito o finito, secondo che tale è il suo sottocorpo fondamentale,  $H_1$  è semplicemente la somma (non diretta) di  $E$  e dell'algebra del 1° ordine costituita dai multipli scalari di  $u_1$ .

**13.** Raccogliendo in un enunciato complessivo tutto quanto siamo venuti dicendo in questo paragrafo, si ha il seguente teorema:

*Se  $A$  è un'algebra nel corpo numerico  $\Gamma$  avente per sotto-algebra eccezionale un'algebra pseudonulla  $E$  d'ordine massimo e indice  $> 2$ :*

1) o  $A$  è priva di modulo ed allora o coincide con  $E$  o è la somma diretta di  $E$  e di un'algebra semi-semplice;

2) o  $A$  è dotata di modulo ed allora essa o è a modulo primitivo o è somma diretta di una tale algebra e di un'algebra semi-semplice.

*Aggiungasi che, se  $\Gamma$  è infinito o finito, secondo che tale è il suo sottocorpo fondamentale, ed  $A$  è a modulo primitivo, essa è addirittura la somma (non diretta) di  $E$  e dell'algebra costituita dai multipli scalari del modulo.*



Rettifica alla Memoria: *Sulle direzioni di Borel di funzioni olomorfe.* (« Ann. di Mat. », s. IV, t. XII, 1933, pp. 173-196).

Nota di VLADIMIRO BERNSTEIN (a Milano).

---

Il prof. W. SAXER mi ha fatto notare una svista in cui sono incorso nella Memoria citata nel titolo di questa Nota: nel valutare l'ordine di grandezza dell'espressione dell'ultima riga della pag. 185 [cioè nella dimostrazione della disuguaglianza

$$(a) \quad \sum_{\nu=p_1}^{\nu-p} \xi^{\nu\rho(\xi^\nu)} \leq A(\xi)r^{\rho(r)}$$

mi sono servito della disuguaglianza (14) di pag. 181; orbene, tale disuguaglianza è dimostrata solo per  $h$  fisso (oppure, ciò che è lo stesso, per  $h$  limitato), mentre nel ragionamento citato i valori che si danno ad  $h$  non sono limitati. Dunque, la dimostrazione della (a) data nella Memoria non è soddisfacente, e la validità della disuguaglianza stessa rimane incerta.

Siccome lo stesso dubbio del prof. SAXER può legittimamente venire ad ogni altro lettore, sarà utile chiarire come stiano le cose. In primo luogo giova precisare che *la validità dei teoremi I, II e III della Memoria (ai quali essa è consacrata) non dipende in nessun modo dalla validità o meno della disuguaglianza (a).* Infatti, se il lettore riprende la dimostrazione di quei teoremi (n° 6 e segg. della Memoria), egli si accorgerà subito che *tutti i richiami alla 1ª parte del lemma I [la cui dimostrazione dipende dalla (a)] possono senz'altro essere sostituiti da altrettanti richiami alla proposizione contenuta nelle righe 12-14 della pag. 185; e tale proposizione è indipendente dalla (a), la quale non interviene poi in altro modo nella dimostrazione di cui ora parliamo.*

Comunque, siccome la (a) interviene nella dimostrazione della 1ª parte del lemma I, e non è peraltro del tutto priva di interesse intrinseco, credo utile darne qui una dimostrazione rigorosa.

Dalla definizione degli ordini precisati (Memoria, pag. 173) si deduce subito che la funzione  $x^{\rho(x)}$  è certo non decrescente per  $x$  abbastanza grande, e per esempio, per  $x \geq X$ ; è poi chiaro che si può ammettere che si abbia

$\xi^{p_1} \geq X$  (notazioni del n° 5 della Memoria). Ciò fatto, si ponga

$$x^{\rho(x)} = W(\log x);$$

è ovvio che allora sarà

$$(b) \quad \sum_{\nu=p_1}^{\nu=p} \xi^{\nu\rho(\xi^\nu)} = \sum_{\nu=p_1}^{\nu=p} W(\nu \log \xi) \leq \sum_{\nu=p_1}^{\nu=p} \int_{\nu}^{\nu+1} W(t \log \xi) dt = \\ = \int_{p_1}^{p+1} W(t \log \xi) dt \leq \frac{1}{\log \xi} \int_X^{\xi^{p+1}} u^{\rho(u)-1} du \quad (1).$$

Ora, integrando per parti, si ottiene

$$(c) \quad \int_X^x u^{\rho(u)-1} du = [u^{\rho(u)}]_X^x - \int_X^x [\rho(u) - 1 + u \log u \rho'(u)] u^{\rho(u)-1} du.$$

Per la definizione degli ordini precisati, l'espressione rinchiusa fra le parentesi quadre tende al limite  $\rho - 1$  quando  $u \rightarrow \infty$ . Pertanto, aumentando ove occorra il valore di  $X$ , si può ammettere che, per  $u \geq X$ , il valore della parentesi differisca per meno di  $\omega$  da  $\rho - 1$ . La (c) dà dunque

$$\left| \rho \int_X^x u^{\rho(u)-1} du - [u^{\rho(u)}]_X^x \right| \leq \omega \int_X^x u^{\rho(u)-1} du,$$

e da qui scende subito che

$$\int_X^x u^{\rho(u)-1} du \leq \frac{x^{\rho(x)}}{\rho - \omega}.$$

La (b) diventa pertanto

$$(d) \quad \sum_{\nu=p_1}^{\nu=p} \xi^{\nu\rho(\xi^\nu)} \leq \frac{2}{\rho \log \xi} \xi^{(p+1)\rho(\xi^{p+1})}.$$

Ora, il rapporto  $\xi^{p+1}/r$  è inferiore a  $\xi^2$ , dunque esso è limitato da una costante indipendente da  $r$ ; pertanto basta applicare al secondo membro della (d) le disuguaglianze (14) della Memoria con  $h = \xi^{p+1}/r$  ed  $\alpha = \frac{1}{2}$ , per constatare che la (d) è equivalente alla (a), la quale risulta così dimostrata.

(1) L'ultima disuguaglianza si ottiene ponendo  $\xi^t = u$  nel penultimo integrale.

# Sull'equazione biarmonica non lineare a due variabili indipendenti in un'area generale semplicemente connessa.

Memoria di ALFREDO ROSENBLATT (Kraków - Polonia).

1. In due Note recenti dei « Comptes Rendus » <sup>(1)</sup> ho studiato l'equazione biarmonica non lineare

$$(1) \quad \Delta \Delta u = F(x, y, u, u_x, \dots, u_{yy})$$

in un cerchio  $K_1$  di raggio  $R$  nonchè in un dominio  $D$  che si rappresenta sopra il cerchio. Ho supposto verificata una *condizione generalizzata* di LIPSCHITZ. Il dominio era sottoposto a qualche restrizione concernente lo « Schwarziano »

$$(2) \quad S(z) = \frac{z_1'''}{z_1'} - \frac{3}{2} \left( \frac{z_1''}{z_1'} \right)^2$$

della funzione analitica  $z = \omega_1(z_1)$  che rappresenta il dominio  $D$  del piano complesso  $z$  sul cerchio  $K_1$  di centro  $O_1$  nel piano complesso  $z_1$ .

Ora vorrei mostrare che si può anche nel caso di un dominio arbitrario ottenere un integrale  $u(x, y)$  dell'equazione (1) che si annulla colla sua derivata normale  $\frac{du}{dn}$  sul contorno  $C$  del dominio  $D$ . Il procedimento è lo stesso delle approssimazioni successive del sig. E. PICARD, ma il punto di partenza è un'equazione integrale con un nucleo singolare.

2. Sia dunque

$$(3) \quad z = \omega_1(z_1)$$

la funzione che rappresenta  $D$  sul  $K_1$ . Sia

$$(4) \quad z_1 = \omega(z)$$

---

<sup>(1)</sup> *Sur l'application de la méthode des approximations successives de M. Picard à l'étude de certaines équations non linéaires du quatrième ordre.* p. 197, 1933; *Sur l'équation biharmonique à deux variables indépendantes.* Ibid., t. 198, 1934.

Veggasi anche la mia Nota: *Sur les équations m-harmoniques non linéaires à deux variables indépendantes.* Ibid., p. 198, 1934.

Gli sviluppi dei risultati di queste Note saranno esposti in alcuni lavori di prossima pubblicazione.

la funzione inversa. Supponiamo che il contorno  $C$  di  $D$  sia formato da una curva chiusa semplice di JORDAN, della quale  $D$  è il campo interno. Questa curva è supposta dotata di una tangente  $t$  continua e delle proprietà concernenti le derivate delle funzioni  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $s$  arco di  $C$ . Queste proprietà sono tali che assicurano la continuità e limitazione delle derivate  $z''$  e  $z'''$

$$z'' = \omega_1''(z_1), \quad z''' = \omega_1'''(z_1)$$

nel dominio chiuso  $D + C$ . Si hanno dunque le disuguaglianze

$$(5) \quad 0 < \alpha < |\omega_1'(z_1)| < \beta, \quad |\omega_1''| \leq \frac{\gamma}{R}, \quad |\omega_1'''| \leq \frac{\delta}{R^2}.$$

Denotiamo  $|\omega_1'(z_1)|$  con  $H$ .

Noi supponiamo che la funzione  $F$  sia una funzione continua degli argomenti indicati nel dominio  $\bar{D}$  seguente:  $P(x, y)$  in  $D + C$ , e  $u$  colle derivate soddisfacenti alle disuguaglianze

$$(6) \quad |u| \leq L; \quad |u_x|, |u_y| \leq \frac{L'}{d}; \quad |u_{xx}|, |u_{xy}|, |u_{yy}| \leq \frac{L''}{d^2},$$

$d$  essendo il diametro di  $D$ . Sia  $N$  il modulo massimo di  $F$  in  $\bar{D}$ .

Noi supponiamo, di più, che la funzione  $F$  soddisfi come funzione degli argomenti  $x, y$  ad una condizione di LIPSCHITZ in tutto il dominio  $D + C$ . Come funzione di  $u$  e delle derivate di  $u$ ,  $F$  soddisfa per tutti i valori di questi argomenti dati dalle disuguaglianze (6) alla seguente condizione generalizzata di Lipschitz

$$(7) \quad |F(x, y, u', \dots) - F(x, y, u, \dots)| \leq \frac{A_0}{\delta^3} |u' - u| + \\ + \frac{A_1}{\delta^3} [|u_x' - u_x| + |u_y' - u_y|] + \frac{A_2}{\delta^2} [|u_{xx}' - u_{xx}| + |u_{xy}' - u_{xy}| + |u_{yy}' - u_{yy}|]$$

nella quale  $A_i$  sono numeri positivi, e  $\delta$  è la distanza  $PM$  del punto  $P(x, y)$  del contorno  $C$  di  $D$ ,  $M$  essendo uno dei punti di  $C$  prossimi a  $P$ .

3. Sia  $P_i(x_i, y_i)$  il punto del cerchio  $K_i$  trasformato di  $P$  e sia  $\delta_i = P_i N_i$  la distanza di  $P_i$  della circonferenza  $C_i$  di  $K_i$ ,  $N_i$  essendo il punto (o uno dei punti) prossimo a  $P_i$ . Si hanno allora le seguenti disuguaglianze

$$(8) \quad \delta_i \leq \frac{\delta}{\alpha}, \quad \delta_i \geq \frac{\delta}{\beta}.$$

Sia  $u_i(x_i, y_i)$  la funzione trasformata della funzione  $u(x, y)$ . Abbiamo

$$x_i = x_i(x, y), \quad y_i = y_i(x, y),$$

e si ottiene la relazione

$$(9) \quad \Delta u = \Delta' u_1 \cdot \frac{1}{H^2}$$

nella quale  $\Delta'$  è l'operatore di LAPLACE nelle variabili  $x_1, y_1$ .

Per il bi-operatore  $\Delta \Delta u$  si ottiene l'espressione seguente

$$(10) \quad \Delta \Delta u = \frac{1}{H^4} \left\{ \Delta_2' u_1 - 2 \left( \frac{\partial \Delta' u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \log H^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta' u_1}{\partial y_1} \frac{\partial \log H^2}{\partial y_1} \right) + \right. \\ \left. + \Delta_1' u_1 \cdot \left[ \left( \frac{\partial \log H^2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \log H^2}{\partial y_1} \right)^2 \right] \right\},$$

nella quale  $\Delta_2'$  è il bi-operatore  $\Delta_1 \Delta_1 u_1$ .

L'equazione (1) si trasforma dunque nell'equazione seguente per la funzione  $u_1(x_1, y_1)$

$$(11) \quad \Delta_2' u_1 - 2 \left[ \frac{\partial \Delta' u_1}{\partial x_1} \frac{\partial \log H^2}{\partial x_1} + \frac{\partial \Delta' u_1}{\partial y_1} \frac{\partial \log H^2}{\partial y_1} \right] + \\ + \Delta_1' u_1 \left[ \left( \frac{\partial \log H^2}{\partial x_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial \log H^2}{\partial y_1} \right)^2 \right] = H^4 F(x, y, u, \dots) = H^4 \Phi(x_1, y_1, u_1, \dots).$$

4. Poniamo adesso

$$(12) \quad u_1 = u_2 H.$$

Si ottiene l'equazione

$$\Delta_2' (u_2 H) = H \left\{ \Delta_2' u_2 + u_{2x_1 x_1} \left[ \frac{2 \Delta' H}{H} + 4 \frac{H_{x_1 x_1}}{H} - 8 \left( \frac{H_{x_1}}{H} \right)^2 \right] + \right. \\ \left. + u_{2y_1 y_1} \left[ \frac{2 \Delta' H}{H} + 4 \frac{H_{y_1 y_1}}{H} - 8 \left( \frac{H_{y_1}}{H} \right)^2 \right] + 8 u_{2x_1 y_1} \left[ \frac{H_{x_1 y_1}}{H} - 2 \frac{H_{x_1}}{H} \frac{H_{y_1}}{H} \right] + \right. \\ \left. + u_2 \left[ \frac{\Delta_2' H}{H} - 4 \frac{\Delta' H_{x_1} \cdot H_{x_1} + \Delta' H_{y_1} \cdot H_{y_1}}{H^2} + 4 \Delta' H \frac{H^2_{x_1} + H^2_{y_1}}{H^3} \right] \right\}.$$

Introducendo  $k$  al posto di  $\log H$  otteniamo l'equazione

$$\Delta_2' u_2 + 2 u_{2x_1 x_1} (2k_{x_1 x_1} + k^2_{y_1} - k^2_{x_1}) + 2 u_{2y_1 y_1} (2k_{y_1 y_1} + k^2_{x_1} - k^2_{y_1}) + \\ + 8 u_{2x_1 y_1} (k_{x_1 y_1} - k_{x_1} k_{y_1}) + u_2 [(k^2_{x_1} + k^2_{y_1})^2 + 2(k^2_{x_1 x_1} + k^2_{y_1 y_1} + 2k^2_{x_1 y_1}) - \\ - 4(k^2_{x_1} k_{x_1 x_1} + k^2_{y_1} k_{y_1 y_1} + 2k_{x_1} k_{y_1} k_{x_1 y_1})] = H^3 F.$$

Ora si vede facilmente che, denotando con  $R$  e con  $I$  la parte reale ed il coefficiente dell'immaginaria di  $S(z)$ , si ha

$$4k_{x_1 x_1} + 2k^2_{y_1} - 2k^2_{x_1} = 4R, \\ 4k_{y_1 y_1} + 2k^2_{x_1} - 2k^2_{y_1} = -4R, \\ 8(k_{x_1 y_1} - k_{x_1} k_{y_1}) = -8I, \\ (k^2_{x_1} + k^2_{y_1})^2 + 2(k^2_{x_1 x_1} + k^2_{y_1 y_1} + 2k^2_{x_1 y_1}) - \\ - 4(k^2_{x_1} k_{x_1 x_1} + k^2_{y_1} k_{y_1 y_1} + 2k_{x_1} k_{y_1} k_{x_1 y_1}) = 4 |S|^2.$$

Si ottiene così l'equazione seguente

$$(13) \quad \Delta_2' u_2 + 4(u_{2x_1x_1} - u_{2y_1y_1})R - 8u_{2x_1y_1}I + 4u_2 |S|^2 = H^3F = H^3\Phi.$$

In un lavoro precedente (cfr. la seconda delle Note dei « C. R. » citate) ho applicato a questa equazione il procedimento delle approssimazioni successive, scrivendo  $T(x_1, y_1, u_2, \dots)$  al posto di

$$H^3\Phi(x_1, y_1, u_2, \dots) - 4(u_{2x_1x_1} - u_{2y_1y_1})R + 8u_{2x_1y_1}I - 4u_2 |S|^2$$

e formando le approssimazioni successive

$$u_2^0, u_2^1, \dots$$

date dalle espressioni integrali

$$(14) \quad u_2^n = \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} G_2(x_1, y_1; \xi_1, \eta_1) T[\xi_1, \eta_1, u_2^{n-1}(\xi_1, \eta_1), \dots] d\xi_1 d\eta_1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Le serie ottenute erano convergenti solamente per *piccoli valori* del prodotto  $|R^2S(z)|$ . Ponendo dunque

$$(15) \quad |S(z)| \leq \frac{\varepsilon}{R^2},$$

si doveva supporre  $\varepsilon$  *piccolo*. Si può prendere

$$(16) \quad \varepsilon = \frac{\delta}{\alpha} + \frac{3}{2} \left( \frac{\gamma}{\alpha} \right)^2.$$

$G_2$  è la funzione di GREEN dell'equazione biarmonica data dal LAURICELLA. Il prof. T. LEVI-CIVITA ha già mostrato che solamente per le trasformazioni lineari il bilaplaciano  $\Delta\Delta$  gode della proprietà d'invarianza.

5. Adesso il nostro punto di partenza sarà l'*equazione integrale*

$$(17) \quad u_2(x_1, y_1) - \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} G_2(x_1, y_1; \xi_1, \eta_1) \{-4(u_{2\xi_1\xi_1} - u_{2\eta_1\eta_1})R + 8u_{2\xi_1\eta_1}I - 4u_2 |S|^2\} d\xi_1 d\eta_1 = \\ = \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} G_2(x_1, y_1; \xi_1, \eta_1) \Psi[\xi_1, \eta_1, u_2(\xi_1, \eta_1), \dots] d\xi_1 d\eta_1.$$

Le derivazioni sono secondo  $\xi_1, \eta_1$ , che sono anche gli argomenti di  $R, I, S, u_2$ , ecc., a destra. Scriveremo  $P, P'$  al posto delle coordinate  $x_1, y_1$  et  $\xi_1, \eta_1$ .  $\Psi$  è la funzione

$$(18) \quad \Psi[x_1, y_1, u_2(x_1, y_1), \dots] = H^3(x_1, y_1)F[x, y, u(x, y), \dots].$$

Segue dalle relazioni che intercedono tra  $u$  e le sue derivate e tra  $u_2$  e le sue derivate che  $\Psi$  soddisfa anche come funzione di  $x_1, y_1$  ad una con-

dizione di LIPSCHITZ in uno dominio chiuso interno allo cerchio  $K_1$ . Come funzione di  $u_2$  e delle derivate,  $\Psi$  soddisfa ad una condizione generalizzata di LIPSCHITZ della forma analoga alla (7)

$$(19) \quad \begin{aligned} |\Psi[x_1, y_1, u_2', \dots] - \Psi[x_1, y_1, u_2, \dots]| &\leq \frac{\bar{A}_0}{\delta_1^4} |u_2' - u_2| + \\ &+ \frac{\bar{A}_1}{\delta_1^3} \{ |u_{2x_1}' - u_{2x_1}| + |u_{2y_1}' - u_{2y_1}| \} + \\ &+ \frac{\bar{A}_2}{\delta_1^2} \{ |u_{2x_1x_1}' - u_{2x_1x_1}| + |u_{2y_1y_1}' - u_{2y_1y_1}| + |u_{2x_1y_1}' - u_{2x_1y_1}| \}. \end{aligned}$$

Si possono determinare i numeri positivi  $\bar{A}_i$ ,  $i=0, 1, 2$  in modo che la disuguaglianza (7) abbia come conseguenza la disuguaglianza (19). Infatti basta che i numeri  $\bar{A}_i$  abbiano i valori

$$(20) \quad \begin{aligned} \bar{A}_0 &= A_0 \frac{\beta^4}{\alpha^4} + 4A_1 \frac{\beta^3\gamma}{\alpha^4} + 3A_2 \frac{\beta^3(3\alpha\delta + 5\gamma^2)}{\alpha^5}, \\ \bar{A}_1 &= 2A_1 \frac{\beta^3}{\alpha^3} + 18A_2 \frac{\beta^3\gamma}{\alpha^4}, \\ \bar{A}_2 &= 3A_2 \frac{\beta^3}{\alpha^3}. \end{aligned}$$

Dobbiamo anche determinare numeri positivi  $\bar{L}$ ,  $\bar{L}'$ ,  $\bar{L}''$  tali che le disuguaglianze

$$(21) \quad |u_2| \leq L; \quad |u_{2x_1}|, |u_{2y_1}| \leq \frac{\bar{L}'}{R}; \quad |u_{2x_1x_1}|, |u_{2x_1y_1}|, |u_{2y_1y_1}| \leq \frac{\bar{L}''}{R^2}$$

abbiano come conseguenza le disuguaglianze (6). Ho mostrato nei lavori citati che si possono prendere numeri  $\bar{L}$ ,  $\bar{L}'$ ,  $\bar{L}''$  soddisfacenti alle disuguaglianze

$$(22) \quad \begin{aligned} \bar{L} &\leq \frac{L}{\beta}, \quad \bar{L}' + \bar{L} \frac{\gamma}{\alpha} \leq \frac{L'}{\sqrt{2} \cdot h}, \\ \bar{L}'' + \bar{L}' \left( 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\gamma}{\alpha} + \bar{L} \left[ \frac{\delta}{\alpha} + \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \frac{\gamma^2}{\alpha^2} \right] &\leq \frac{\alpha L''}{2 h^2}, \end{aligned}$$

dove  $h$  è uguale a  $\frac{d}{R}$ .

6. Consideriamo allora l'equazione (17) che, introducendo i punti  $P, P'$  al posto delle loro coordinate  $x_1, y_1$  e  $\xi_1, \eta_1$ , scriveremo sotto la forma

$$(23) \quad \begin{aligned} u_2(P) - \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} G_2(P, P') \{ -4(u_{2\xi_1} - u_{2\eta_1})R + 8u_{2\xi_1\eta_1}I - \\ - 4u_2(P') |S|^2 \} dP' = \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} G_2(P, P') \Psi[P', u_2(P'), \dots] dP'. \end{aligned}$$

Supponiamo di avere stabilito l'esistenza di una funzione  $u_2(P)$  continua colle derivate fino al secondo ordine e soddisfacente all'equazione (23). Questa funzione si annulla evidentemente sulla circonferenza  $C_1$ . Di più, secondo HÖLDER e DINI, le derivate seconde di  $u_2$  soddisfano ad una condizione di HÖLDER con un esponente arbitrariamente vicino ad 1.

Segue che i coefficienti di  $G_2$  considerati come funzioni di  $P'$  soddisfano in ogni dominio chiuso interno al cerchio  $K_1$  ad una condizione di HÖLDER con un esponente arbitrariamente vicino ad 1. Dunque  $u_2$  possiede derivate continue fino al 4° ordine e soddisfa all'equazione differenziale (13).

Trasformiamo adesso l'equazione differenziale integrale (32) integrando per parti. Abbiamo le relazioni seguenti

$$G_2(u_{2\xi\xi} - u_{2\eta\eta})R = (G_2Ru_{2\xi\xi})_\xi - (G_2Ru_{2\eta\eta})_\eta - u_{2\xi}(G_2R)_\xi + u_{2\eta}(G_2R)_\eta, \\ u_{2\eta}(G_2R)_\eta - u_{2\xi}(G_2R)_\xi = [u_2(G_2R)_\eta]_\eta - [u_2(G_2R)_\xi]_\xi + u_2(G_2R)_{\xi\xi} - u_2(G_2R)_{\eta\eta}.$$

$G_2$  si annulla colle derivate prime su  $C_1$ . Dunque abbiamo

$$\int_{K_1} G_2(u_{2\xi\xi} - u_{2\eta\eta})R dP' = \int_{K_1} u_2(P') [(G_2R)_{\xi\xi} - (G_2R)_{\eta\eta}] dP'.$$

Si ha ancora

$$G_2u_{2\xi\xi\eta}I = (G_2Iu_{2\eta\eta})_\xi - u_{2\eta}(G_2I)_\xi = - [u_2(G_2I)_{\xi\eta}]_\eta + u_2(G_2I)_{\xi\eta},$$

dunque

$$\int_{K_1} G_2u_{2\xi\xi\eta}I dP' = \int_{K_1} u_2(G_2I)_{\xi\eta} dP'.$$

L'equazione (23) si trasforma dunque nell'equazione seguente

$$(24) \quad u_2 - \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} u_2(P') \{ -4[(G_2R)_{\xi\xi} - (G_2R)_{\eta\eta}] + 8(G_2I)_{\xi\eta} - 4G_2 |S|^2 \} dP' = \\ = \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} G_2(P, P') \Psi(P', u_2(P')) dP'.$$

7. L'equazione (24) può ancora trasformarsi. Si ha

$$-4[(G_2R)_{\xi\xi} - (G_2R)_{\eta\eta}] + 8(G_2I)_{\xi\eta} = \\ = -4[G_2R_{\xi\xi} - G_2R_{\eta\eta} + 2G_{2\xi}R_\xi - 2G_{2\eta}R_\eta + G_{2\xi\xi}R - G_{2\eta\eta}R] + \\ + 8[G_2I_{\xi\eta} + G_{2\xi}I_\eta + G_{2\eta}I_\xi + G_{2\xi\eta}I] = -4(G_{2\xi\xi} - G_{2\eta\eta})R + 8G_{2\xi\eta}I.$$



Otteniamo dunque l'equazione seguente

$$(25) \quad u_2(P) - \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} u_2(P') \{ -4(G_{2\xi\xi} - G_{2\eta\eta})R + 8G_{2\xi\eta}I - 4G_2 |S|^2 \} dP' = \\ = \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} G_2(P, P') \Psi[P', u_2(P')] dP'.$$

Abbiamo un'equazione integrale col *nucleo singolare*

$$(26) \quad K(P, P') = \frac{1}{8\pi} \{ -4(G_{2\xi\xi} - G_{2\eta\eta})R + 8G_{2\xi\eta}I - 4G_2 |S|^2 \},$$

e colla funzione « nota »

$$(27) \quad f(P) = \frac{1}{8\pi} \int G_2(P, P') \Psi[P', u_2(P')] dP',$$

$$(28) \quad u_2(P) - \int u_2(P') K(P, P') dP' = f(P).$$

Un integrale di questa equazione continua colle derivate fino al 2° ordine soddisfa all'equazione differenziale (13).

L'equazione integrale *omogenea* ottenuta dall'equazione (28) annullando il secondo membro possiede l'unica soluzione  $u_2(P) \equiv 0$ . Infatti, questa soluzione soddisfa all'equazione differenziale (13) e si annulla colla derivata normale su  $C_1$ . Dunque la funzione  $u(x, y)$  corrispondente in  $D$  soddisfa all'equazione biarmonica  $\Delta\Delta u = 0$  e si annulla su  $C$  colla derivata normale. Infatti,  $u_2$  e le derivate  $u_{2x_1}$ ,  $u_{2y_1}$  essendo nulle, anche  $u$  e  $u_x$ ,  $u_y$  si annullano su  $C$ . Reciprocamente da  $u = 0$ ,  $\frac{du}{dn} = 0$ , segue

$$\frac{du}{ds} \equiv u_x x_s + u_y y_s = 0, \quad \frac{du}{dn} \equiv u_x x_n + u_y y_n = 0,$$

dunque  $u_x = u_y = 0$ .

8. La singolarità dell'equazione (28) è *logaritmica*. Possiamo dunque risolvere l'equazione integrale col procedimento di FREDHOLM modificato da HILBERT. Si formano le serie

$$(29) \quad \delta(\lambda) = 1 - \delta_1 \lambda + \delta_2 \lambda^2 - \dots$$

$$(30) \quad \Delta\left(\lambda, \frac{s}{t}\right) = \Delta_1\left(\frac{s}{t}\right) - \lambda \Delta_2\left(\frac{s}{t}\right) + \lambda^2 \Delta_3\left(\frac{s}{t}\right) - \dots$$



Dunque è

$$u_2(P) = \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} \left\{ G_2(P, P') + \int K(P, P'') G_2(P'', P') dP'' \right\} \Psi[P', u_2(P')] dP'.$$

La formula (35) per il nucleo risolvante ci dà in conformità

$$(38) \quad u_2(P) = \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} \left\{ G_2(P, P') + \int \left[ K(P, P'') - \frac{1}{\delta(1)} \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{h-1} \cdot \frac{1}{h!} \cdot \iint_{(h)} \begin{vmatrix} 0, & K(P, P_1), & \dots & K(P, P_h) \\ K(P_1, P''), & 0, & \dots & K(P_1, P_h) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(P_h, P''), & K(P_h, P_1), & \dots & 0 \end{vmatrix} dP_1 \dots dP_h \right] G_2(P'', P') dP'' \right\} \cdot \Psi[P', u_2(P')] \dots dP'.$$

Questa formula sarà il nostro punto di partenza per le approssimazioni successive. Noi partiremo da una funzione  $u_2^0(x_1, y_1)$  che soddisfa colle derivate seconde continue alle disuguaglianze (21), e formeremo la serie delle approssimazioni date dalle formole

$$(39) \quad u_2^n(P) = \frac{1}{8\pi} \int \left\{ G_2(P, P') + \int K(P, P'') G_2(P'', P') dP'' \right\} \cdot \Psi[P', u_2^{n-1}(P')] dP', \quad n = 1, 2, \dots$$

Le funzioni  $u_2^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  soddisfano ad una condizione di HÖLDER. Dunque le funzioni  $u_2^n$ ,  $n = 2, 3, \dots$  soddisfanno alle equazioni differenziali che si ottengono dall'equazione (13) ponendo  $u_2 = u_2^n$  a destra e  $u_2 = u_2^{n-1}$  a sinistra.

10. Per dimostrare l'esistenza delle funzioni  $u_2^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  e la loro convergenza verso una funzione  $u_2$  limite, dobbiamo trasformare le espressioni (38), e per conseguenza gli integrali che figurano in queste formole.

Consideriamo dapprima l'integrale

$$(40) \quad \int K(P, P'') G_2(P'', P') dP'' = \frac{1}{8\pi} \int G_2(P'', P') \left\{ -4(G_{2\xi^2}^{(P, P'')} - G_{2\eta^2}^{(P, P'')})R + 8G_{2\xi\eta}^{(P, P'')}I - 4G_2^{(P, P'')} |S|^2 \right\} dP'',$$

dove le derivazioni sono da effettuarsi secondo  $\xi''$ ,  $\eta''$ .  $R$ ,  $I$ ,  $S$  sono funzioni di  $P''$ .

Abbiamo le relazioni

$$\begin{aligned}
 G_2(P'', P')G_{2\xi''\eta''}(P, P'')R(P'') &= [G_2(P'', P')G_{2\xi''}(P, P'')R(P'')]_{\xi''} - \\
 &\quad - G_{2\xi''}(P, P'')[G_2(P'', P')R(P'')]_{\xi''}, \\
 G_2(P'', P')G_{2\eta''\xi''}(P, P'')R(P'') &= [G_2(P'', P')G_{2\eta''}(P, P'')R(P'')]_{\eta''} - \\
 &\quad - G_{2\eta''}(P, P'')[G_2(P'', P')R(P'')]_{\eta''}, \\
 -G_{2\xi''}(P, P'')[G_2(P'', P')R(P'')]_{\xi''} &= -\{G_2^{(P, P'')}\cdot[G_2^{(P'', P'')}\cdot R^{(P'')}]_{\xi''}\}_{\xi''} + \\
 &\quad + G_2^{(P, P'')}\cdot[G_2^{(P'', P'')}\cdot R^{(P'')}]_{\xi''\eta''}, \\
 -G_{2\eta''}(P, P'')[G_2(P'', P')R(P'')]_{\eta''} &= -\{G_2^{(P, P'')}\cdot[G_2^{(P'', P'')}\cdot R^{(P'')}]_{\eta''}\}_{\eta''} + \\
 &\quad + G_2^{(P, P'')}\cdot[G_2^{(P'', P'')}\cdot R^{(P'')}]_{\eta''\xi''}.
 \end{aligned}$$

Abbiamo anche

$$\begin{aligned}
 G_2^{(P'', P')}G_{2\xi''\eta''}^{(P, P'')}I^{(P'')} &= [G_2^{(P'', P')}G_{2\eta''}^{(P, P'')}I^{(P'')}]_{\xi''} - G_{2\eta''}^{(P, P'')}[G_2^{(P'', P')}I^{(P'')}]_{\xi''}, \\
 -G_{2\eta''}^{(P, P'')}[G_2^{(P'', P')}I^{(P'')}]_{\xi''} &= -\{G_2^{(P, P'')}\cdot[G_2^{(P'', P'')}I^{(P'')}]_{\xi''}\}_{\eta''} + \\
 &\quad + G_2^{(P, P'')}\cdot[G_2^{(P'', P'')}I^{(P'')}]_{\xi''\eta''}.
 \end{aligned}$$

$G_2$  e le sue derivate del primo ordine si annullano se  $P''$  è su  $C_4$ . Abbiamo dunque la formula

$$\begin{aligned}
 (41) \quad \int K(P, P'')G_2(P'', P')dP'' &= \frac{1}{8\pi} \int G_2(P, P'') \{ -4[(G_2^{(P'', P'')}R^{(P'')}]_{\xi''} - \\
 &\quad - (G_2^{(P'', P'')}R^{(P'')})_{\eta''\xi''}] + 8(G_2^{(P'', P'')}I^{(P'')})_{\xi''\eta''} - 4G_2^{(P'', P'')} | S(P'')|^2 \} dP''.
 \end{aligned}$$

Possiamo anche trasformare questa formula. Abbiamo

$$\begin{aligned}
 &-4[G_2^{(P'', P'')}R^{(P'')}]_{\xi''\eta''} + 4[G_2^{(P'', P'')}R^{(P'')}]_{\eta''\xi''} + 8[G_2^{(P'', P'')}I^{(P'')}]_{\xi''\eta''} \\
 &= -4G_2^{(P'', P'')}[R_{\xi''\eta''}^{(P'')} - R_{\eta''\xi''}^{(P'')} + I_{\xi''\eta''}^{(P'')}] - 8[G_{2\xi''}^{(P'', P'')}R_{\xi''}^{(P'')} - \\
 &\quad - G_{2\eta''}^{(P'', P'')}R_{\eta''}^{(P'')} - G_{2\xi''}^{(P'', P'')}I_{\eta''}^{(P'')} - G_{2\eta''}^{(P'', P'')}I_{\xi''}^{(P'')}] - \\
 &\quad - 4[G_{2\xi''\eta''}^{(P'', P'')} - G_{2\eta''\xi''}^{(P'', P'')}]R^{(P'')} + 8G_{2\xi''\eta''}^{(P'', P'')}I^{(P'')} = \\
 &= -4[G_{2\xi''\eta''}^{(P'', P'')} - G_{2\eta''\xi''}^{(P'', P'')}]R^{(P'')} + 8G_{2\xi''\eta''}^{(P'', P'')}I^{(P'')}.
 \end{aligned}$$

Otteniamo così la formula importante

$$(42) \quad \int K(P, P'')G_2(P'', P')dP'' = \int G_2(P, P'')K(P', P'')dP''.$$

11. Avremo nel seguito da considerare integrali della forma

$$(43) \quad I = \int K(P, P_1)K(P_1, P_2) \dots K(P_{s-1}, P_s)G(P_s, P')dP_1 \dots dP_s.$$

Trasformando secondo la formula (42) si vede che si può trasformare suc-

cessivamente l'integrando in

$$K(P, P_1) \dots K(P_{s-2}, P_{s-1})G(P_{s-1}, P_s)K(P', P_s),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$G(P, P_1)K(P_2, P_1) \dots K(P_s, P_{s-1})K(P', P_s)$$

e si ottiene

$$(44) \quad I = \int G(P, P_1)K(P_2, P_1) \dots K(P', P_s)dP_1 \dots dP_s.$$

Consideriamo anche l'integrale

$$(45) \quad J = \int K(P_1, P_2)K(P_2, P_3) \dots K(P_{s-1}, P_s)K(P_s, P_1)dP_1 \dots dP_s.$$

Invertendo i simboli  $P_1, P_2, \dots, P_s$ , si ottiene

$$J = \int K(P_s, P_{s-1})K(P_{s-1}, P_{s-2}) \dots K(P_2, P_1)K(P_1, P_s)dP_1 \dots dP_s,$$

si ha dunque

$$(46) \quad J = \int K(P_s, P_1) \dots K(P_s, P_{s-1})K(P_1, P_s)dP_1 \dots dP_s.$$

Consideriamo adesso l'integrale

$$(46) \quad I(P'') = \int G_2(P'', P')\Psi[P', u_2(P')]\mathcal{d}P'.$$

La funzione  $\Psi$  soddisfa come funzione di  $P'$  solo ad una condizione di HÖLDER in ogni dominio chiuso interno a  $C_1$ . Supponiamo che essa soddisfi in  $K_1$  ad una disuguaglianza della forma seguente

$$(47) \quad |\Psi| \leq \frac{M}{\delta'^{2+\mu}},$$

$\delta'$  essendo la distanza di  $P'(\xi_1, \eta_1)$  da  $C_1$  e  $\mu$  un numero positivo e tale che si abbia  $0 < \mu < \frac{1}{2}$ .

Abbiamo mostrato nei lavori precedenti che  $I(P'')$  soddisfa alla disuguaglianza

$$(48) \quad |I(P'')| \leq B_0 M \delta''^{2-\mu}$$

e le sue derivate alle disuguaglianze

$$(49) \quad |I_{j,k}(P'')| \leq B_i M \delta''^{2-\mu-i}, \quad j+k=i=1, 2$$

i  $B_i$ ,  $i=0, 1, 2$  essendo numeri positivi che abbiamo calcolati.

Supponiamo d'altra parte che  $\Psi$  soddisfi alla disuguaglianza

$$(50) \quad |\Psi| \leq \bar{N},$$

dove si ha

$$(51) \quad \bar{N} = N\beta^3.$$

Questo accade per la funzione  $\Psi$  che figura nell'equazione differenziale (13) purchè  $u_2$  e le sue derivate soddisfino alle disuguaglianze (21). In questo caso abbiamo le ulteriori disuguaglianze:

$$(52) \quad |I(P'')| \leq \bar{N}C_0R^2\delta''^2,$$

$$(53) \quad |I_{j, \kappa}(P'')| \leq \bar{N}C_iR^2\delta''^{2-i}, \quad j + \kappa = i = 1, 2$$

dove  $C_i$  sono numeri positivi che abbiamo anche calcolati.

12. Adesso considereremo gli integrali della forma

$$(54) \quad J(P) = \int K(P, P'')I(P'')dP''$$

che figurano anche nella formula (38). Abbiamo

$$J(P) = \frac{1}{8\pi} \int I(P'') \{ -4(G_{2\xi''2} - G_{2\eta''2})R + 8G_{2\xi''\eta''}I - 4G_2|S|^2 \} dP''$$

dove gli argomenti di  $G$  sono  $P, P''$ , e di  $R, I, S$  è argomento  $P''$ . Integrando per parti otteniamo

$$\begin{aligned} G_{2\xi''2}RI(P'') &= (G_{2\xi''}RI(P''))_{\xi''} - G_{2\xi''}(RI(P''))_{\xi''}, \\ -G_{2\xi''}(RI(P''))_{\xi''} &= -[G_2(RI(P''))_{\xi''}]_{\xi''} + G_2[RI(P'')]_{\xi''2}, \\ G_{2\eta''2}RI(P'') &= (G_{2\eta''}RI(P''))_{\eta''} - G_{2\eta''}(RI(P''))_{\eta''}, \\ -G_{2\eta''}(RI(P''))_{\eta''} &= -[G_2(RI(P''))_{\eta''}]_{\eta''} + G_2[RI(P'')]_{\eta''2}, \\ G_{2\xi''\eta''}II(P'') &= [G_{2\xi''}II(P'')]_{\eta''} - G_{2\xi''}(II(P''))_{\eta''}, \\ -G_{2\xi''}(II(P''))_{\eta''} &= -[G_2(II(P''))_{\xi''}]_{\eta''} + G_2(II(P''))_{\xi''\eta''}. \end{aligned}$$

Abbiamo così

$$\begin{aligned} J(P) &= \frac{1}{8\pi} \int G_2(P, P'') \{ -4(RI(P''))_{\xi''2} + 4(RI(P''))_{\eta''2} + \\ &\quad + 8(II(P''))_{\xi''\eta''} - 4I(P'')|S|^2 \} dP''. \end{aligned}$$

Abbiamo anche

$$\begin{aligned} -4(RI(P''))_{\xi''2} + 4(RI(P''))_{\eta''2} + 8(II(P''))_{\xi''\eta''} &= -4RI_{\xi''2}(P'') + \\ &\quad + 4RI_{\eta''2}(P'') + 8II_{\xi''\eta''}(P'') - 4R_{\xi''2}I(P'') + 4R_{\eta''2}I(P'') + \\ + 8I(P'')I_{\xi''\eta''} - 8R_{\xi''}I_{\xi''}(P'') + 8R_{\eta''}I_{\eta''}(P'') + 8I_{\xi''}I_{\eta''}(P'') + 8I_{\eta''}I_{\xi''}(P'') &= \\ = -4R[I_{\xi''2}(P'') - I_{\eta''2}(P'')] + 8II_{\xi''\eta''}(P''). \end{aligned}$$



nel prodotto si avrebbero due elementi della  $\alpha + 1$  colonna,  $K(P, P_\alpha)$  e  $K(P_\gamma, P_\delta)$ . Nemmeno può essere  $\delta$  uguale ad uno dei numeri  $\beta, \dots$  perchè si avrebbe  $K(P_\alpha, P_\beta), K(P_\gamma, P_\delta)$  nel prodotto.

Dunque abbiamo prodotti del tipo

$$(62) \quad K(P, P_{i_1})K(P_{i_1}, P_{i_2}) \dots K(P_{i_{s-1}}, P_{i_s})G_2(P_{i_s}, P'').$$

Abbiamo (forse) anche prodotti del tipo

$$(63) \quad K(P_{j_1}P_{j_2})K(P_{j_2}P_{j_3}) \dots K(P_{j_{s-1}}P_{j_s})K(P_{j_s}P_{j_1}).$$

Ora abbiamo visto che si ha

$$(64) \quad \int K(P, P_{i_1})K(P_{i_1}, P_{i_2}) \dots K(P_{i_{s-1}}, P_{i_s})G(P_{i_s}, P'')dP_{i_1} \dots dP_{i_s} = \\ = \int G_2(P, P_{i_1})K(P_{i_1}, P_{i_2}) \dots K(P_{i_s}, P_{i_{s-1}})dP_{i_1} \dots dP_{i_s},$$

$$(65) \quad \int K(P_{j_1}P_{j_2})K(P_{j_2}P_{j_3}) \dots K(P_{j_{s-1}}P_{j_s})K(P_{j_s}P_{j_1})dP_{j_1} \dots dP_{j_s} = \\ = \int K(P_{j_2}P_{j_1})K(P_{j_3}P_{j_2}) \dots K(P_{j_s}P_{j_{s-1}})K(P_{j_1}P_{j_s})dP_{j_1} \dots dP_{j_s}.$$

Segue che il determinante

$$(66) \quad \begin{vmatrix} 0, & K(P, P_1), \dots & K(P, P_n) \\ G_2(P_1, P''), & 0, \dots & K(P_1, P_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ G_2(P_n, P''), & K(P_n, P_1), \dots & 0 \end{vmatrix}$$

può essere sostituito dal determinante

$$(67) \quad \begin{vmatrix} 0, & G_2(P, P_1), \dots & G_2(P, P_n) \\ K(P'', P_1), & 0, \dots & K(P_n, P_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(P'', P_n), & K(P_1, P_n), \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Possiamo dunque considerare al posto della serie (61) la serie

$$(68) \quad u_2 = \frac{1}{8\pi} \left\{ I(P) + J(P) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\delta(1)} \sum_{h=1}^{\infty} (-1)^{h-1} \cdot \frac{1}{h!} \int \begin{vmatrix} 0, & G(P, P_1), \dots & G(P, P_n) \\ K(P'', P_1), & 0, \dots & K(P_n, P_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ K(P'', P_n), & K(P_1, P_n), \dots & 0 \end{vmatrix} dP_1 \dots dP_n \cdot U(P'')dP'' \right\}.$$



14. Risulta dalla formula (26) che si ha la disuguaglianza

$$(69) \quad |K(P, P')| \leq \frac{kR^{x-2}}{\rho - \rho'^x}$$

nella quale  $k > 0$  è un numero fisso e  $\alpha$  è un numero che soddisfa alle disuguaglianze  $0 < \alpha < \frac{1}{4}$ ;  $\alpha$  può essere arbitrariamente piccolo;  $\rho, \rho'$  sono le distanze  $OP, OP'$ .

Consideriamo adesso gli integrali

$$(70) \quad C(P_i) = \int K(P'', P_i) U(P'') dP''.$$

Essi dipendono da  $u_2$ . Segue dalle disuguaglianze precedenti che si ha nel caso della disuguaglianza (47) la disuguaglianza

$$(71) \quad |C(P_i)| \leq kMB_0'R^{x-4} \int_{K_1} \frac{dP''}{|\rho_i - \rho''|^{\alpha}(R - \rho'')^{\mu}}$$

e nel caso della disuguaglianza (50) la disuguaglianza

$$(72) \quad |C(P_i)| \leq k\bar{N}C_0'R^{x-2} \int_{K_1} \frac{dP''}{|\rho_i - \rho''|^{\alpha}}.$$

Ma abbiamo le disuguaglianze

$$\begin{aligned} \int_{\rho=0}^{\rho_i} dP'' \cdot \frac{1}{|\rho_i - \rho''|^{\alpha}(R - \rho'')^{\mu}} &\leq 2\pi R \int_0^{\rho_i} \frac{d\rho''}{(\rho_i - \rho'')^{\alpha+\mu}} = \\ &= 2\pi R \frac{1}{1 - \alpha - \mu} \rho_i^{1-\alpha-\mu} \leq \frac{2\pi R^{2-\alpha-\mu}}{1 - \alpha - \mu}, \\ \int_{\rho_i}^R dP'' \cdot \frac{1}{|\rho_i - \rho''|^{\alpha}(R - \rho'')^{\mu}} &\leq 2\pi R \int_0^{R-\rho_i} \frac{du}{u^{\alpha}(R - \rho_i - u)^{\mu}}, \quad u = \rho'' - \rho_i, \end{aligned}$$

e ponendo  $\frac{u}{R - \rho_i} = v$  si ha

$$\begin{aligned} \int_{\rho_i}^R dP'' \cdot \frac{1}{|\rho_i - \rho''|^{\alpha}(R - \rho'')^{\mu}} &\leq 2\pi R (R - \rho_i)^{1-\alpha-\mu} \int_0^1 \frac{dv}{v^{\alpha}(1-v)^{\mu}} \leq \\ &\leq 2\pi m R^{2-\alpha-\mu}, \end{aligned} \quad m > 0.$$

Si ottiene dunque la disuguaglianza

$$(73) \quad |C(P_i)| \leq k B_0'' M R^{-2-\mu}$$

essendo  $B_0''$  un numero positivo fisso.

Nel secondo caso della disuguaglianza (50) si ha invece

$$\int_{\rho_i}^R dP'' \frac{1}{|\rho_i - \rho''|^\alpha} \leq 2\pi R \int_{\rho_i}^R \frac{d\rho''}{(\rho'' - \rho_i)^\alpha} = 2\pi R \frac{1}{1-\alpha} (\rho'' - \rho_i)^{1-\alpha} \Big|_{\rho_i}^R = \frac{2\pi R (R - \rho_i)^{1-\alpha}}{1-\alpha},$$

$$\int_0^{\rho_i} dP'' \frac{1}{|\rho_i - \rho''|^\alpha} \leq 2\pi R (\rho_i - \rho'')^{1-\alpha} \Big|_0^{\rho_i} \cdot \frac{1}{1-\alpha} = 2\pi R \frac{\rho_i^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Otteniamo pertanto la disuguaglianza

$$|C(P_i)| \leq A k N C_0' \cdot 2\pi R^{2-\alpha} \cdot R^{\alpha-2},$$

dunque viene

$$(74) \quad |C(P_i)| \leq k C_0'' \bar{N},$$

essendo  $C_0''$  un numero positivo fisso.

**15.** Adesso effettueremo nella formula (68) le integrazioni secondo  $P''$ . Potremo allora scrivere la formula

$$(75) \quad u_2 = \frac{1}{8\pi} \left\{ I(P) + J(P) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\delta(1)} \sum_{h|1} (-1)^{h-1} \iint_{(h)} \begin{matrix} 0, G(P_1, P), \dots, G(P_h, P) \\ C(P_i), 0, \dots, K(P_h, P_i) \\ \dots \dots \dots \\ C(P_h), K(P_1, P_h), \dots, 0 \end{matrix} dP_1 \dots dP_h \right\}.$$

Questa formula sar  il nostro punto di partenza per le approssimazioni successive che otterremo nel modo seguente:

$$(76) \quad u_2^n = \frac{1}{8\pi} \left\{ I^{n-1}(P) + J^{n-1}(P) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\delta(1)} \sum_{h|1} (-1)^{h-1} \iint_h \begin{matrix} 0, G(P_1, P), \dots, G(P_h, P) \\ C^{n-1}(P_i), 0, \dots, K(P_h, P_i) \\ \dots \dots \dots \\ C^{n-1}(P_h), K(P_1, P_h), \dots, 0 \end{matrix} dP_1 \dots dP_h \right\} \quad n = 1, 2, \dots.$$

In questa formula abbiamo posto

$$(77) \quad C^{n-1}(P_i) = \int_{K_1} K(P'', P_i) U^{n-1}(P'') dP'',$$

$$(78) \quad U^{n-1}(P'') = \frac{1}{8\pi} \{ -4(\bar{I}_{\xi''}^{n-1} - \bar{I}_{\eta''}^{n-1})R + 8I_{\xi''\eta''} - 4I^{n-1} |S|^2 \},$$

$$(79) \quad \bar{I}^{n-1} = I^{n-1}(P) = \int_{K_1} G_2(P, P') \mathfrak{U}[P', u_2^{n-1}(P')] dP',$$

$$(79^a) \quad J^{n-1}(P_i) = \int G_2(P_i, P'') U^{n-1}(P'') dP''.$$

Consideriamo adesso gli integrali  $h$ -pli che figurano nella formula (76). Possiamo dividere con il sig. HILBERT il campo d'integrazione in  $h!$  campi corrispondenti alle  $h!$  permutazioni degli indici 1, 2, ...  $h$  dei punti  $P_1 \dots P_h$ . Dico che tutti questi integrali sono uguali. Infatti consideriamo il campo definito dalle condizioni

$$P_{i_1} > P_{i_2} > \dots > P_{i_h}.$$

Possiamo effettuare la trasposizione dei punti  $P$  che ci dà la permutazione  $P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_h}$ . Possiamo trasportare le righe e le colonne del determinante d'ordine  $h + 1$  mettendo al posto delle righe e colonne dei punti  $P_1, P_2, \dots, P_h$  quelle dei punti  $P_{i_1} \dots P_{i_h}$ . Il determinante non cambia di valore; e poi si possono cambiare le notazioni.

I due numeri  $h!$  nel denominatore e  $h!$  nel numeratore si elidono. Possiamo dunque supporre che le integrazioni sono da effettuarsi nell'ipotesi

$$P_1 > P_2 > \dots > P_h.$$

16. Vogliamo adesso *maggiorare* con il sig. HILBERT i determinanti. Divideremo la prima colonna per il numero  $B_0'' MR^{-\mu}$  nel primo caso e per  $C_0'' \bar{N}R^2$  nel caso secondo. Allora, in entrambi i casi, secondo le disuguaglianze (73), (74), gli elementi di questa colonna saranno in valore assoluto  $\leq \frac{k}{R^2}$ .

Moltiplichiamo ora le righe 2, 3, ...  $h + 1$  per le espressioni seguenti

$$(80) \quad (\rho_1 - \rho_2)^z, \frac{1}{\frac{1}{(\rho_1 - \rho_2)^z} + \frac{1}{(\rho_2 - \rho_3)^z}} \dots \frac{1}{\frac{1}{(\rho_{n-2} - \rho_{n-1})^z} + \frac{1}{(\rho_{n-1} - \rho_n)^z}}, (\rho_{n-1} - \rho_n)^z.$$

Evidentemente tutte queste espressioni non sorpassano  $R^z$ . Dunque si vede, attese le disuguaglianze (69), che *tutti gli elementi* del determinante

d'ordine  $h + 1$  delle righe 2, ...  $h + 1$  non sorpassano il numero

$$kR^{z-2}.$$

Possiamo adesso *sviluppare* il determinante d'ordine  $h + 1$  ed applicare il celebre teorema del sig. HADAMARD per ottenere le disuguaglianze seguenti

$$(81) \quad \left| \int_{(h)} \begin{vmatrix} 0, & G(P_1, P), \dots, & G(P_h, P) \\ C(P_1), & 0, \dots, & K(P_h, P_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ C(P_h), & K(P_1, P_h), \dots & 0 \end{vmatrix} dP_1 \dots dP_h \right| \leq$$

$$\leq B_0'' MR^{-\nu} (kR^{z-2})^h \sqrt{h} \sum_{h|1}^h \int |G(P, P_i)| (\rho_1 - \rho_2)^{-\alpha} \left[ \frac{1}{(\rho_1 - \rho_2)^z} + \frac{1}{(\rho_1 - \rho_3)^z} \right] \dots$$

$$\dots \left[ \frac{1}{(\rho_{h-2} - \rho_{h-1})^z} + \frac{1}{(\rho_{h-1} - \rho_h)^z} \right] (\rho_{h-1} - \rho_h)^z dP_1 \dots dP_h$$

colla condizione  $P_1 > P_2 > \dots > P_h$ .

Nel secondo caso si ha  $C_0'' \bar{N}R^2$  al posto di  $B_0'' MR^{-\nu}$ .

L'integrale a destra nella formola (81) è una somma di  $2^{h-1}$  integrali della forma seguente

$$(82) \quad J_i = \int |G(P, P_i)| dP_1 \dots dP_h \cdot \frac{1}{(\rho_1 - \rho_2)^{\alpha_1}} \dots \frac{1}{(\rho_{h-1} - \rho_h)^{\alpha_{h-1}}}.$$

La somma dei numeri  $\alpha_i$ ,  $\sum_1^{h-1} \alpha_i$  è sempre uguale ad  $\alpha h$  ed i numeri  $\alpha_i$  sono uguali a 0,  $\alpha$  o  $2\alpha$ .

17. Ora abbiamo secondo SCHWARZ

$$(83) \quad |J_i|^2 \leq \int |G^2(P, P_i)| dP_1 \dots dP_h \cdot \int \frac{1}{(\rho_1 - \rho_2)^{2\alpha_1}} \dots \frac{1}{(\rho_{h-1} - \rho_h)^{2\alpha_{h-1}}} \cdot dP_1 \dots dP_h.$$

Consideriamo il secondo integrale e poniamo

$$(84) \quad \sigma_1 = \rho_1 - \rho_2, \sigma_2 = \rho_2 - \rho_3, \dots, \sigma_{h-1} = \rho_{h-1} - \rho_h, \sigma_h = \rho_h,$$

donde si ha inversamente

$$(85) \quad \rho_1 = \sum_1^h \sigma_i, \rho_2 = \sum_2^h \sigma_i, \dots, \rho_h = \sigma_h.$$

Abbiamo

$$\sigma_i > 0, \quad i = 1, \dots, h, \quad 0 < \sum_1^h \sigma_i = \rho_i \leq R.$$

Il secondo integrale sarà

$$(86) \quad J_2 = (2\pi R)^h \int_0^R \sigma_1^{-2\alpha_1} \dots \sigma_{h-1}^{-2\alpha_{h-1}} \cdot \sigma_h^{-2\alpha_h} d\sigma_1 \dots d\sigma_h, \quad \alpha_h = 0,$$

Introducendo le nuove variabili  $\xi_i = \frac{\sigma_i}{R}$ ,  $i = 1, \dots, h$  avremo

$$J_2 = (2\pi R)^h \cdot R^{h-2\alpha h} \int_0^1 \xi_1^{-2\alpha_1} \dots \xi_h^{-2\alpha_h} d\xi_1 \dots d\xi_h.$$

Ora l'integrale è uguale a

$$(87) \quad \frac{\prod_{i=1}^h \Gamma(1 - 2\alpha_i)}{\Gamma(h + 1 - 2\alpha h)}, \quad 2\alpha_i < 1, \quad 1 - 2\alpha_i > 0.$$

Otteniamo dunque la disuguaglianza

$$(88) \quad |J_2| \leq \frac{A^h \cdot R^{2h(1-\alpha)}}{h^{h(1-2\alpha)}}.$$

Consideriamo adesso il primo integrale

$$(89) \quad J_1^i = \int |G_2^2(P, P_i)| dP_1 \dots dP_n, \quad P_1 > P_2 > \dots > P_n.$$

Questo integrale sarà maggiorato dall'integrale nel quale  $P_i$  varia da 0 a  $R$ . Dunque si ha

$$(90) \quad |J_1^i| \leq \int |G_2^2(P, P_i)| dP_i \int dP_1 \dots dP_{i-1} dP_{i+1} \dots dP_n, \\ P_1 > \dots > P_{i-1} > P_{i+1} > \dots > P_n.$$

Ora abbiamo la disuguaglianza

$$(91) \quad \int dP_1 \dots dP_n \leq (2\pi R)^{h-1} \int d\rho_1 \dots d\rho_n = (2\pi R)^{h-1} \cdot \frac{R^{h-1}}{\Gamma(h)},$$

sicchè

$$(92) \quad \left| \int dP_1 \dots dP_n \right| \leq \frac{A'^h \cdot R^{2h-2}}{h^h},$$

ed anche

$$(93) \quad |J_i| \leq |J_1^i|^{\frac{1}{2}} |J_2|^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \int |G_2^2(P, P_i)| dP_i \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{A''^h \cdot R^{h-1}}{h^{\frac{h}{2}}} \cdot \frac{R^{h(1-\alpha)}}{h^{\frac{h}{2}(1-2\alpha)}} = \\ = \left\{ \int |G_2^2(P, P_i)| dP_i \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{A''^h \cdot R^{2h-\alpha h-1}}{h^{h(1-\alpha)}}.$$

18. Dobbiamo allora maggiorare l'integrale

$$(94) \quad J_3^i = \int |G_2^2(P, P_i)| dP_i.$$

Questo integrale va trasformato colla trasformazione, che abbiamo già applicata, del cerchio  $K_1$  in sè stesso:

$$(95) \quad \zeta_i = R^2 \frac{\zeta_i' + z}{R^2 + z\bar{\zeta}_i'}$$

$P_i(\zeta_i)$  è trasformato nel punto  $P_i'(\zeta_i')$ . Otteniamo allora la disuguaglianza

$$(96) \quad |G_2| \leq C \frac{(R - \rho_i')^2 (R^2 - a^2)^2}{|R^2 + z\bar{\zeta}_i'|^2},$$

dove  $a = OP$ ,  $C > 0$  è un numero noto. Dunque abbiamo la formula

$$(97) \quad |J_3^t| \leq C' \int_0^R \rho_i' d\rho_i' \int_0^{2\pi} d\varphi_i \frac{R^4 (R^2 - a^2)^2 (R - \rho_i')^4 (R^2 - a^2)^4}{|R^2 + z\bar{\zeta}_i'|^4 |R^2 + z\bar{\zeta}_i'|^4} \leq \\ \leq C'' (R^2 - a^2)^6 \cdot R^5 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi_i \int_0^R d\rho_i' \frac{(R - \rho_i')^4}{|R^2 + z\bar{\zeta}_i'|^8}.$$

Or bene, abbiamo

$$(98) \quad \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_i}{|R^2 + z\bar{\zeta}_i'|^8} \leq \frac{D}{(R^2 - a\rho_i')^7 R^2}$$

secondo le formule da noi ottenute precedentemente. D'altra parte dobbiamo maggiorare l'integrale

$$(99) \quad I = \int_0^R \frac{(R - \rho_i')^4}{(R^2 - a\rho_i')^7} d\rho_i'.$$

Dividendo in due parti  $0, a$  e  $a, R$  abbiamo

$$\int_0^a \leq \frac{1}{R^7} \int_0^a \frac{d\rho_i'}{(R - \rho_i')^3} \leq \frac{D'}{R^7 (R - a)^2}, \\ \int_a^R \leq \frac{1}{R^7} \int_a^R \frac{(R - \rho_i')^4}{(R - a)^7} d\rho_i' = \frac{1}{R^7 (R - a)^7} \frac{(R - a)^5}{5} = \frac{1}{5R^7 (R - a)^2}.$$

Otteniamo così la disuguaglianza

$$(100) \quad |I| \leq \frac{D''}{R^7 (R - a)^2}.$$

Ne consegue

$$(101) \quad |J_3^t| \leq C''' (R - a)^4 R^2.$$

Si ottiene così la disuguaglianza

$$(102) \quad |J_i| \leq \frac{A'''h \cdot R^{h(2-\alpha)}}{h^{h(1-\alpha)}} \cdot (R - a)^2.$$

19. Possiamo adesso scrivere le maggiorazioni degli integrali  $h$ -pli che figurano nella formula (76) e che abbiamo già maggiorato colle formule (81). Le maggiorazioni sono nel primo caso

$$(103) \quad B_0'' MR^{-\mu} (kR^{2-\alpha})^h \sqrt{h^h} \cdot h \cdot 2^{h-2} \cdot \frac{A'''h \cdot R^{h(2-\alpha)}}{h^{h(1-\alpha)}} (R - a)^2,$$

mentre nel secondo caso si deve mettere  $C_0''' \bar{N} R^2$  al posto di  $B_0'' MR^{-\mu}$ . Abbiamo dunque le maggiorazioni

$$(104) \quad B_0''' MR^{-\mu} (R - a)^2 \cdot \frac{A^{ivh}}{h^{2(1-2\alpha)}}$$

nel primo caso, e nel secondo dobbiamo mettere  $C_0''' \bar{N} R^2$  al posto di  $B_0''' MR^{-\mu}$ .

Otteniamo infine le *serie maggioranti* seguenti:

$$(105) \quad \frac{1}{8\pi} M \left\{ B_0 \delta^{2-\mu} + B_0'' \delta^{2-\mu} + \frac{B_0'''}{|\delta(1)|} \sum_{h|1}^{\infty} \frac{A^{ivh}}{h^{\frac{h}{2}(1-2\alpha)}} \delta^{2-\mu} \right\}$$

nel primo caso, e

$$(106) \quad \frac{1}{8\pi} \bar{N} \left\{ C_0 R^2 \delta^2 + C_0'' R^2 \delta^2 + \frac{C_0'''}{|\delta(1)|} \sum_{h|1}^{\infty} \frac{A^{ivh}}{h^{\frac{h}{2}(1-2\alpha)}} R^2 \delta^2 \right\}$$

nel secondo caso.

Risulta che le funzioni  $u_2^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  esistono tutte e sono contenute colle derivate entro i limiti dati dalle formule (21) purchè  $N$  soddisfi alle disuguaglianze seguenti

$$(107) \quad D_i \bar{N} R^i \leq \bar{L}_i, \quad i = 0, 1, 2.$$

Abbiamo già calcolato il valore di  $D_0$  che è uguale a

$$(108) \quad D_0 = \frac{1}{2\pi} \left\{ C_0 + C_0'' + \frac{C_0'''}{|\delta(1)|} \sum_{h|1}^{\infty} \frac{A^{ivh}}{h^{\frac{h}{2}(1-2\alpha)}} \right\}.$$

Si può evidentemente calcolare nello stesso modo i numeri  $D_1$ ,  $D_2$  che sono tali da rendere

$$(109) \quad |u_{2,i}| \leq \bar{N} D_i R^i (R - a)^{2-i}, \quad i = 1, 2.$$

20. Adesso formiamo le differenze  $v_2^n$ ,  $n = 2, 3, \dots$ . Ponendo

$$(110) \quad |\Psi(y_1, y_1, u_2^1, \dots) - \Psi(x_1, y_1, u_2^0, \dots)| \leq \frac{M}{\delta^{2+\mu}},$$

$0 < \mu < \frac{1}{2}$  si vede che le serie delle approssimazioni successive convergono assolutamente ed uniformemente purchè la condizione seguente sia soddisfatta. Denotiamo con  $E_0$  il numero positivo

$$(111) \quad E_0 = \frac{1}{8\pi} \left\{ B_0 + B_0'' + \frac{B_0'''}{|\delta(1)|} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{A^{1vh}}{h^2(1-2\alpha)} \right\}.$$

Denotiamo anche con  $E_i$ ,  $i = 1, 2$  i numeri analoghi, facilmente calcolabili, tali che, valendo la (110), risulti

$$(112) \quad |v_{2,i}^2| \leq ME_i(R - a)^{2-\mu-t}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Purchè si abbia la disuguaglianza

$$(113) \quad A_0 E_0 + 2\bar{A}_1 E_1 + 3\bar{A}_2 E_2 < 1$$

la serie delle funzioni  $v_2^n$ ,  $n = 2, 3, \dots$  converge assolutamente ed uniformemente, perchè si ha

$$(114) \quad |v_{2,i}^n| \leq \frac{ME_i}{8\pi} \delta^{2-\mu-t} (\bar{A}_0 E_0 + 2\bar{A}_1 E_1 + 3\bar{A}_2 E_2)^{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots$$

21. Possiamo infine enunciare il teorema seguente:

TEOREMA. — Esiste un integrale dell'equazione biarmonica non lineare nel dominio generale  $D$  limitato da una curva  $C$  di JORDAN senza punti doppi colla tangente continua.  $F$  soddisfa in  $D$  alle condizioni enunciate.  $u$  si annulla colla derivata normale  $\frac{du}{dn}$  su  $C$ . Per ottenere  $u(x, y)$  si rappresenta  $D$  sopra il cerchio  $K_1$  di raggio  $R$  ottenendo  $u_1(x_1, y_1) = u(x, y)$ . Poniamo

$$u_1(x_1, y_1) = u_2(x_1, y_1)H,$$

$H$  essendo il modulo della derivata  $\frac{dz}{dz_1}$  della funzione rappresentante  $D$  su  $K_1$ .

Si ottiene la funzione  $u_2(x_1, y_1)$  colle approssimazioni successive

$$(38) \quad u_2^n(P) = \frac{1}{8\pi} \int_{K_1} \left[ G_2(P, P') + \int_{K_1} K(P, P'') G_2(P'', P') dP'' \right] \cdot \Psi[P', u_2^{n-1}(P'), \dots] dP', \quad n = 1, 2, \dots$$

partendo da una funzione  $u_2^0$  che soddisfa alle disuguaglianze date.  $G_2$  è la







# Funzioni di Bessel del campo poliarmonico.

Memoria di VIRGILIO GIULOTTO (a Bergamo).

---

**Sunto.** - Seguendo la via tracciata da HEINE per passare dalle ordinarie funzioni sferiche alle ordinarie funzioni di BESSEL si deducono, dalle funzioni sferiche poliarmoniche, nuove funzioni alle quali si dà la denominazione di funzioni poliarmoniche di BESSEL e di esse si rilevano parecchie proprietà differenziali, integrali e ricorrenti.

Nel 1732 DANIELE BERNOULLI <sup>(1)</sup>, studiando le condizioni necessarie perchè una catena pesante, omogenea, sospesa per un estremo compia oscillazioni periodiche infinitesime, trova che il rapporto fra lo spostamento di un punto generico la cui distanza sia  $x$  dall'estremo libero e la lunghezza  $l$  della catena è dato, esprimendomi con l'odierno linguaggio scientifico, dalla funzione cilindrica d'ordine zero avente per variabile  $2\sqrt{\frac{x}{n}}$ , purchè  $n$  sia tale da annullare la funzione cilindrica d'ordine zero avente per variabile  $2\sqrt{\frac{l}{n}}$ .

In una successiva Memoria dello stesso BERNOULLI <sup>(2)</sup> la accennata funzione che dà il rapporto fra lo spostamento del punto e la lunghezza della catena è dedotta da un'equazione differenziale che, con sostituzione della variabile, si riconduce all'ordinaria equazione caratteristica della funzione cilindrica d'ordine zero.

Alla stessa equazione perviene LEONARDO EULERO <sup>(3)</sup> in una nota inserita nello stesso tomo dei Commentari contenente la seconda Memoria del Bernoulli studiando, con metodo diverso, lo stesso argomento.

Il Bernoulli nelle sopracitate due Memorie e L. EULER <sup>(4)</sup> anche in suc-

---

<sup>(1)</sup> D. BERNOULLI, *Theoremata de oscillationibus...*, « Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae » (anni 1732-33, t. 6, pag. 108-122).

<sup>(2)</sup> D. BERNOULLI, *Demonstrationes theorematum de oscillationibus...*, « Comm. Acad. Sc. Imp. Petropolitanae » (anni 1734-35, t. 7, pag. 162-179).

<sup>(3)</sup> L. EULERO, *De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexibilium*, « Comm. Acad. Petrop. », anni 1734-35, t. 7, pag. 99.

<sup>(4)</sup> L. EULER, *De oscillationibus minimis funis libere suspensi. De perturbatione motus chordarum ab aerum pondere oriunda*, « Acta Acad. Sc. Imp. Petropolitanae » (anno 1781, t. 5, p. 157, p. 178).

cessive, studiano le proprietà degli integrali di detta equazione differenziale, della quale Eulero determina l'integrale completo, introducendo così nell'analisi la funzione cilindrica d'indice zero e di seconda specie.

Nel 1822 la funzione cilindrica d'indice zero si presenta a J.-B. J. FOURIER <sup>(5)</sup> che studia la distribuzione della temperatura al tempo  $t$  in un cilindro circolare solido infinitamente lungo abbandonato a sè stesso in un ambiente mantenuto a zero gradi riscaldato in modo che la temperatura, in ogni punto dell'interno, dipenda solamente dalla distanza del punto stesso dall'asse del cilindro. Due anni più tardi il BESSEL <sup>(6)</sup> è condotto allo studio delle funzioni cilindriche d'indice  $n$  effettuando lo sviluppo in serie delle coordinate di un pianeta.

Dopo Bessel le funzioni cilindriche formano oggetto di numerosissimi studi da parte di matematici insigni e prendono comunemente nome da questo illustre astronomo.

La precedenza di Fourier rispetto a Bessel fu fatta notare da HEINE <sup>(7)</sup> nel 1868, ma fu merito del prof. G. A. MAGGI <sup>(8)</sup>, dal quale ricavai i precedenti dati storici, d'aver messo in evidenza, nel 1879, la precedenza su tutti di Daniele Bernoulli.

Le funzioni cilindriche o di Bessel trovano applicazione in vari problemi di fisica-matematica e più specialmente in quelli riguardanti il movimento del pendolo di lunghezza variabile, la propagazione del calore, la diffrazione della luce, la propagazione delle correnti oscillanti lungo fili conduttori, e inoltre nelle moderne ricerche di meccanica ondulatoria e in aerodinamica. In meccanica celeste poi sono la base degli sviluppi in serie delle coordinate di un pianeta nel moto ellittico.

Problemi di fisica-matematica relativi al cilindro (al disco) ellittico e parabolico conducono, verso il 1880, allo studio delle funzioni del cilindro ellittico e del cilindro parabolico. Fra i matematici che si occuparono delle prime funzioni vanno ricordati in modo speciale: H. E. HEINE <sup>(9)</sup>, F. LIN-

<sup>(5)</sup> J.-B. J. FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur*, Paris 1822, p. 369. Oeuvres publiées par les soins de M. G. DARBOUX, t. 1, Paris 1888, p. 332.

<sup>(6)</sup> F. W. BESSEL, *Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht*, « Abhandlungen der Berl. Akad. der Wissenschaft, math. Klasse » (1816-17), p. 49; id. (1824), p. 1.

<sup>(7)</sup> E. HEINE, *Ueber die Fourier-Bessel'sche Function*, Crelle t. 69.

<sup>(8)</sup> G. A. MAGGI, *Sulla storia delle funzioni cilindriche*. « Atti Reale Acc. dei Lincei », Serie III, 1879-80, t. IV.

<sup>(9)</sup> H. E. HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*, 2<sup>a</sup> ed. 1, p. 401; 2. p. 202.

DEMANN <sup>(10)</sup>, E. SAERCHINGER <sup>(11)</sup>, E. HAENTZCHEL <sup>(12)</sup>; fra coloro che si occupano dello studio delle seconde, K. BAER <sup>(13)</sup>, E. HAENTZCHEL <sup>(14)</sup>, E. T. WHITTAKER <sup>(15)</sup>, G. N. WATSON <sup>(16)</sup>, M. BÖCHER <sup>(17)</sup>.

Nel 1915 da P. APPELL <sup>(18)</sup> sono studiate funzioni di Bessel a più variabili che, come egli dimostra, trovano applicazione nell'inversione di un

integrale della forma  $\int_{-1}^x \frac{P(x)dx}{\sqrt{1-x^2}}$  e nella risoluzione di problemi di meccanica

nei quali interviene l'equazione di Képler generalizzata. La teoria di tali funzioni è in seguito sviluppata da J. PÉRÈS <sup>(19)</sup>, da JEKHOWSKI <sup>(20)</sup> e da M. AKIMOFF <sup>(21)</sup> che, nel 1926, impiega i risultati ottenuti per lo sviluppo in serie trigonometriche di funzioni condizionalmente periodiche.

Nel 1920 da P. HUMBERT <sup>(22)</sup> sono introdotte per la prima volta nell'analisi le funzioni ipercilindriche che, rispetto alle funzioni armoniche dello spazio a un numero qualunque di dimensioni, hanno rapporti analoghi a quelli delle note funzioni di Bessel rispetto alle funzioni armoniche dello spazio ordinario. La loro teoria è sviluppata in successive Memorie dello stesso Humbert e in una nota di M. J. KAMPÉ DE FÉRIET <sup>(23)</sup>.

<sup>(10)</sup> F. LINDEMANN, « *Mathem. Annalen* », 22 (1883), p. 117.

<sup>(11)</sup> E. SAERCHINGER, « *Programme Chemnitz* », 1894.

<sup>(12)</sup> E. HAENTZSCHEL, « *Programme Duisburg* », 1886.

<sup>(13)</sup> K. BAER, « *Programme Küstrin* », 1883.

<sup>(14)</sup> E. HAENTZSCHEL, « *Zeitschrift. Math. Phys.* », 33 (1888), p. 22.

<sup>(15)</sup> E. T. WHITTAKER, « *Proceeding London math. Soc.* », (1), 35 (1902-3), p. 417.

<sup>(16)</sup> G. N. WATSON, *Idem* (2), 8 (1910), p. 393.

<sup>(17)</sup> M. BÖCHER, *Ueber die Reihenentwicklung der Potentialtheorie ecc.*, Leipzig 1894, p. 193.

<sup>(18)</sup> P. APPELL, *Sur l'inversion approchée de certaines intégrales réelles et sur l'extension de l'équation de Képler et des fonctions de Bessel* (« *Comptes Rendus* », t. 160, 1915, p. 419).

<sup>(19)</sup> J. PÉRÈS, *Sur les fonctions de Fourier-Bessel à plusieurs variables*, (« *Comptes Rendus* », t. 161, 1915, p. 168).

<sup>(20)</sup> JEKHOWSKI, *Sur les fonctions de Bessel à plusieurs variables*, (« *Comptes Rendus* », t. 162, 1916, p. 318; t. 164, 1917, p. 719; « *Bulletin des Sciences math.* », t. XXI, 1917, p. 58; « *Bulletin astronomique* », t. XXXIV). *Sur les fonctions de Bessel à deux variables*, (« *Comptes Rendus* », t. CLXXII, 1921, p. 1331).

<sup>(21)</sup> M. AKIMOFF, « *Comptes Rendus* », t. 163, 1916, p. 26; t. 165, 1917, pp. 23 e 1100; t. 17, 1924, p. 435; t. 183, 1926, p. 333; Thèse (pubbl. in russo), 1922.

<sup>(22)</sup> P. HUMBERT, *Sur les fonctions hypercylindriques*, (« *Comptes Rendus* », t. 171, 1920, p. 490). *Les fonctions hypercylindriques dans l'espace à n + 2 dimensions*, (« *Comptes Rendus* », t. 171, 1920, p. 537). *The Confluent hypergeometric Functions of two variables*, (« *Proceedings of the Royal Society of Edimburgh* », v. 41, Paris I, n. 9, 1921).

<sup>(23)</sup> M. J. KAMPÉ DE FÉRIET, *Sur les fonctions hypercylindriques*, (« *Comptes Rendus* », t. CLXXII, 1921, p. 1464).

Oltre a queste importanti generalizzazioni, altre ne furono escogitate, in tempi recenti, da E. ROTHE, da J. COULOMB e da alcuni matematici inglesi che condussero a funzioni che conservano ora l'una ora l'altra proprietà delle ordinarie funzioni cilindriche.

Nella presente Memoria studio una nuova generalizzazione che non ha collegamenti con le ricerche alle quali ho accennato.

Sono noti i tentativi per gettare, come dice Heine, un ponte di passaggio tra le funzioni sferiche e le funzioni cilindriche. Meritano, a questo riguardo, di essere particolarmente ricordati il trattato di C. NEUMANN <sup>(24)</sup>, edito nel 1867, nel quale la teoria delle funzioni di Bessel è svolta in analogia con la teoria delle funzioni sferiche e una Memoria di G. MEHLER <sup>(25)</sup> in cui egli dimostra che la funzione di Bessel d'indice zero è il limite, per  $n = \infty$ , dell'ordinaria funzione di Legendre di argomento  $\frac{\theta}{n}$ . Il risultato più notevole in queste ricerche è raggiunto da HEINE <sup>(26)</sup> che ricava l'equazione differenziale caratteristica delle funzioni di Bessel d'indice  $n$  dall'equazione differenziale della funzione sferica aggiunta dello stesso ordine e di argomento  $\frac{\theta}{n}$  passando al limite per  $n = +\infty$ .

La generalizzazione delle funzioni di Bessel, che forma oggetto della presente Memoria, si riallaccia ai miei precedenti studi sulle funzioni sferiche poliarmoniche <sup>(27)</sup> in quanto l'equazione differenziale caratteristica di queste nuove funzioni, che chiamerò funzioni cilindriche o di Bessel del campo poliarmonico d'indice  $n$  e d'ordine  $q$ , e che indicherò col simbolo  $J_n^q(x)$  o semplicemente col simbolo  $J_n^q$ , è ottenuta estendendo al più vasto dominio il procedimento sopraindicato seguito da Heine nel dominio semplicemente armonico.

Sviluppando in serie secondo le potenze di  $z$  la funzione  $\left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} E^x 2^{z(z-1)}$  ( $E$  base dei logaritmi neperiani) che per  $q = 1$  si riduce alla nota genera-

<sup>(24)</sup> C. NAUMANN, *Theorie der Bessel'schen functionen ein analogon...*, (Leipzig-G. B. Teubner, 1867).

<sup>(25)</sup> G. MEHLER, *J. reine angew. Math.*, 68 (1868), p. 140.

<sup>(26)</sup> E. HEINE, *Handbuch der Kugelfunctionen*, 1, pp. 216 e 233.

<sup>(27)</sup> V. GIULOTTO, *Sopra una nuova estensione delle funzioni sferiche di Legendre*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », t. XVII, 1903, p. 1-43; V. GIULOTTO, *Funzioni ipersferiche poliarmoniche a due variabili*, « Annali di Matematica », Serie IV, t. 1 (1923-24), pp. 219-240.

trice che dà luogo allo sviluppo dal quale prese le mosse O. SCHLÖMICH <sup>(28)</sup> per lo studio delle ordinarie funzioni di Bessel, ottengo come coefficiente di  $z^{n-(q-1)}$  (con la limitazione  $n \geq q - 1$  che in seguito viene tolta), una funzione trascendente che indico col simbolo  $J_{n,q}(x)$  la quale, per  $q = 1$ , si identifica con la nota funzione cilindrica del campo semplicemente armonico. Tale funzione soddisfa a numerose relazioni ricorrenti che legano le  $J_{n,q}$  di ordine uguale, ma di diverso indice e ad una equazione differenziale del secondo ordine. Tale equazione ottengo anche con passaggio al limite per  $n = +\infty$ , dalla equazione caratteristica delle funzioni sferiche aggiunte  $q$ -armoniche, da me studiate nella Memoria pubblicata nel 1924, d'ordine  $n$  e d'argomento  $\frac{\theta}{n}$  e ciò giustifica la denominazione di funzioni di Bessel del campo poliarmonico data alla  $J_{n,q}(x)$ . Cercando la soluzione generale di detta equazione differenziale trovo, come integrali particolari, la  $J_{n,q}(x)$  e una nuova funzione (della quale stabilisco in seguito due interessanti relazioni ricorrenti) che per analogia con la teorica delle ordinarie funzioni di Bessel chiamo funzione ausiliaria e rappresento col simbolo  $W_{n,q}(x)$ . Tolta la limitazione di  $n$  intero, determino quindi alcune interessanti espressioni della  $J_{n,q}(x)$  per mezzo di integrali definiti e fra esse quella che estende al campo poliarmonico la definizione data da Bessel nella Memoria già citata per le ordinarie  $J_n$ .

Partendo da essa ritrovo l'equazione differenziale caratteristica delle  $J_{n,q}$  e, con procedimento già seguito in una mia nota riguardante le ordinarie funzioni cilindriche <sup>(29)</sup>, risalgo dalle relazioni ricorrenti precedentemente stabilite alla funzione generatrice.

Considerazioni sulla accennata formula di definizione di Bessel estesa al campo poliarmonico mi conducono a determinare alcune relazioni ricorrenti fra  $J_{n,q}$  di uguale indice, ma di diverso ordine, relazioni che fanno riscontro a quelle precedentemente stabilite: partendo da esse deduco nuovamente l'equazione differenziale caratteristica delle funzioni poliarmoniche di Bessel e determino una nuova funzione di  $x$  e di  $z$  che sviluppata in serie (supposto  $q$  variabile da  $-\infty$  e  $+\infty$ ) dà, nel coefficiente di  $z^{q-1}$ , la funzione  $J_{n,q}$  con la limitazione  $q \geq n + 1$  limitazione che in seguito è tolta in quanto si può dare un significato alle  $J_{n,q}$  con armonicità nulla o negativa.

<sup>(28)</sup> O. SCHLÖMILCH, *Ueber die Bessel'sche Function*, « Zeitschrift für Math. und Physik », II. Jahrgang, p. 137 (1857).

<sup>(29)</sup> V. GIULOTTO, *Sopra un sistema di relazioni ricorrenti al quale soddisfano le funzioni cilindriche*, (« Boll. Un. Mat. Italiana », Anno XIV, n. 1, Febr. 1935).

Infine, estese al più vasto dominio alcune fra le più note relazioni della teoria delle ordinarie funzioni di Bessel, generalizzo la formola di addizione e studio brevemente i punti zero della funzione  $J_n^q(x)$ .

L'importanza sempre maggiore che va assumendo la teoria delle ordinarie funzioni cilindriche e la perfetta analogia tra le funzioni qui studiate e le classiche trascendenti di Bessel, mi fanno ritenere possa non essere priva di qualche interesse la generalizzazione, condotta a un termine relativo, che forma oggetto del presente lavoro.

§ 1. Consideriamo la funzione :

$$(1) \quad F = \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} E^{\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)}$$

nella quale  $E$  indica la base dei logaritmi neperiani,  $x$  e  $z$  due quantità qualunque, reali o immaginarie,  $q$  un numero intero positivo.

Essa, per  $q = 1$ , si riduce alla nota funzione generatrice delle ordinarie trascendenti di BESSEL. La funzione  $E^{\frac{x}{2}z}$  è sviluppabile in serie convergente secondo le potenze di  $\frac{x}{2}z$  ed  $E^{-\frac{x}{2}z}$  è sviluppabile in serie convergente secondo le potenze di  $-\frac{x}{2z}$  eccettuato il caso di  $\text{mod } z = 0$  per cui si avrà:

$$F = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\beta} \left(\frac{x}{2}\right)^{x+\beta+q-1}}{\pi(\alpha) \cdot \pi(\beta)} z^{x-\beta}.$$

Poniamo ora:

$$\alpha - \beta = n - (q - 1)$$

e indichiamo con  $J_n^q(x)$ , o più semplicemente con  $J_n^q$  ( $n$  indice,  $q$  ordine della funzione), il coefficiente di  $z^{n-(q-1)}$ . Sarà:

$$(2) \quad J_n^q = \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\beta} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2\beta}}{\pi(n-q+1+\beta)\pi(\beta)} = \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\beta} x^{n+2\beta}}{2^{n+2\beta} \pi(\beta) \cdot \pi(n-q+1+\beta)} \quad (n \geq q-1).$$

D'altra parte si ha pure:

$$(3) \quad J_n^q = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(-1)^{x+q-1-n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\alpha+2q-2-n}}{\pi(\alpha) \cdot \pi(\alpha+q-1-n)} = \\ = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(-1)^{x+q-1-n} x^{2\alpha+2q-2-n}}{2^{2\alpha+2q-2-n} \pi(\alpha) \cdot \pi(\alpha+q-1-n)} \quad (n \leq q-1).$$



Mettiamo in evidenza il fatto che la (2) è valida per  $n \geq q - 1$  e la (3) per  $n \leq q - 1$ , ponendo nella (2)  $n = q - 1 + s$  e nella (3)  $n = q - 1 - s$  con  $s$  intero e positivo. Si ricava dal confronto delle espressioni così ottenute:

$$(4) \quad J_{q-1-s}^q = (-1)^s J_{q-1+s}^q \quad (s=0, 1, 2, \dots).$$

Questa relazione conferisce un significato alle  $J_n^q$  con indice intero non maggiore di  $q - 1$  e quindi anche con indice negativo e permette di limitare lo studio alle  $J_n^q$  con  $n \geq q - 1$ .

La (4) può essere verificata nel seguente modo:

Scriviamo per esteso lo sviluppo:

$$(5) \quad F = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^q(x) z^{n-(q-1)}.$$

Sarà:

$$(6) \quad \begin{aligned} F = & J_{q-1}^q + J_{q-1}^q z + J_{q+1}^q z^2 + J_{q+2}^q z^3 + \dots \\ & + J_{q-2}^q z^{-1} + J_{q-3}^q z^{-2} + J_{q-4}^q z^{-3} + \dots \end{aligned}$$

Cambiando  $z$  in  $-\frac{1}{z}$  la  $F$  non cambia, per cui si avrà:

$$(7) \quad \begin{aligned} F = & J_{q-1}^q - J_{q-2}^q z + J_{q-3}^q z^2 - J_{q-4}^q z^3 + \dots \\ & - J_{q-2}^q z^{-1} + J_{q+1}^q z^{-2} - J_{q+2}^q z^{-3} + \dots \end{aligned}$$

e dal confronto delle (6) e (7) si deduce di nuovo la (4).

La (2) può scriversi più distesamente così:

$$(8) \quad J_n^q = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\pi(n-q+1)} \left[ 1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1 \cdot (n-q+2)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1 \cdot 2 \cdot (n-q+2)(n-q+3)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (n-q+2)(n-q+3)(n-q+4)} + \dots \right].$$

Facilmente si dimostra la convergenza della serie a secondo membro poichè, se consideriamo due termini consecutivi di essa a partire da  $u_n$ , e cioè  $(-1)^p u_p$  e  $(-1)^{p+1} u_{p+1}$ , si ha la relazione:

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{(p+1)(n-q+p+2)}$$

nella quale, essendo  $n \geq q - 1$ , il denominatore è positivo e il rapporto tende a zero col crescere indefinito di  $p$ . Fissato  $q$ , la convergenza sarà tanto più

rapida quanto più  $x$  sarà piccola ed  $n$  grande. Se  $x$  sarà considerata come una piccola quantità del primo ordine,  $J_n^q$  sarà dell'ordine  $n$ .

Nel caso particolare di  $n = q - 1$  la (8) diventa:

$$J_{q-1}^q = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{q-1}}{1} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{q+1}}{1^2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{q+3}}{1^2 \cdot 2^2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{q+5}}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots$$

La trascendente  $J_n^q$ , definita per ora nel caso di  $n$  qualunque purchè intero, che per  $q=1$  si riduce alla ordinaria funzione di Bessel, sarà in seguito indicata con la denominazione di funzione di Bessel d'indice  $n$  e d'ordine  $q$  o, per ragioni che vedremo nel terzo paragrafo, con la denominazione di funzione di Bessel nel campo poliarmonico.

La (8), nel caso di  $q=1$ , costituisce per J. H. GRAF ed E. GUBLER (1) il punto di partenza per lo sviluppo della teoria delle ordinarie funzioni cilindriche.

§ 2. Fra le  $J_n^q$  dello stesso ordine, ma di vario indice, sussistono relazioni ricorrenti notevoli.

Riprendiamo la (2) del precedente paragrafo:

$$(1) \quad J_n^q = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{n+2s}}{2^{n+2s} \pi(s) \pi(n+s-q+1)}$$

deduciamo:

$$\frac{dJ_n^q}{dx} = \frac{n}{x} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{n+2s}}{2^{n+2s} \pi(s) \pi(n+s-q+1)} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^s s x^{n+2s-1}}{2^{n+2s-1} \pi(s) \pi(n+s-q+1)}$$

e da essa, cambiando  $s$  in  $s+1$  nella seconda sommatoria, si ricava:

$$(2) \quad \frac{dJ_n^q}{dx} = \frac{n}{x} J_n^q - J_{n+1}^q \quad (n \geq q-1).$$

Questa relazione ricorrente è particolarmente interessante perchè è indipendente dall'ordine di armonicità del campo.

Dalla (5) del precedente paragrafo derivando rispetto ad  $x$  e sostituendo all'espressione del primo membro quella del secondo, si ottiene:

$$\left[ \frac{q-1}{x} + \frac{1}{2} \left( z - \frac{1}{z} \right) \right] \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n^q z^{n-q+1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{dJ_n^q}{dx} z^{n-q+1}$$

(1) J. H. GRAF e E. GUBLER, *Einleitung in die Theorie der Besselschen Funktionen*, 1, Berne 1898; 2, Berne 1900.

e uguagliando in questa relazione i coefficienti di  $z^{n-q+1}$  si ha:

$$(3) \quad \frac{dJ_n^q}{dx} = \frac{q-1}{x} J_n^q + \frac{1}{2} [J_{n-1}^q - J_{n+1}^q].$$

Tale espressione si può ricavare direttamente dalla (1) del presente paragrafo

$$\begin{aligned} \frac{dJ_n^q}{dx} &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s [(n+s-q+1) + (q-1)] x^{n+2s-1}}{2^{n+2s} \pi(s) \pi(n+s-q+1)} + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s s x^{n+2s-1}}{2^{n+2s} \pi(s) \pi(n+s-q+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{n+2s-1}}{2^{n+2s-1} \pi(s) \pi(n+s-q)} + \frac{q-1}{x} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{n+2s}}{2^{n+2s} \pi(s) \pi(n+s-q+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{n+2r+1}}{2^{n+2r+1} \pi(r) \pi(n+r-q+2)} \end{aligned}$$

avendo posto nell'ultima sommatoria  $s = r + 1$ . Da quest'ultima uguaglianza, per la (1), segue senz'altro la (3).

Eliminando  $J_{n+1}^q$  fra la (2) e la (3) si ottiene:

$$(4) \quad \frac{dJ_n^q}{dx} = J_{n-1}^q + \frac{2q-2-n}{x} J_n^q$$

similmente eliminando fra la (2) e la (3)  $\frac{dJ_n^q}{dx}$  si ha:

$$(5) \quad J_{n-1}^q + \frac{2(q-1-n)}{x} J_n^q + J_{n+1}^q = 0.$$

Dalla (3), derivando rispetto ad  $x$ , si ricava:

$$\frac{d^2 J_n^q}{dx^2} = -\frac{q-1}{x^2} J_n^q + \frac{q-1}{x} \frac{dJ_n^q}{dx} + \frac{1}{2} \left[ \frac{dJ_{n-1}^q}{dx} - \frac{dJ_{n+1}^q}{dx} \right]$$

e tenendo presente la (3) si ottiene:

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 J_n^q}{dx^2} &= -\frac{q-1}{x^2} J_n^q + \frac{q-1}{x} \frac{dJ_n^q}{dx} + \frac{q-1}{2x} [J_{n-1}^q - J_{n+1}^q] + \\ &\quad + \frac{1}{4} [J_{n-2}^q + J_{n+2}^q - 2J_n^q]. \end{aligned}$$

Quest'ultima relazione ci sarà utile in seguito per la determinazione dell'equazione differenziale cui soddisfa la  $J_n^q$ .

Deriviamo la (5) del precedente paragrafo rispetto a  $z$  ricordando la formula di definizione della  $F$  e sostituiamo, in detta derivata, all'espressione

del primo membro, quella del secondo; otteniamo:

$$\frac{x}{2} \left(1 + \frac{1}{z^2}\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^q z^{n-q+1} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n - q + 1) J_n^q z^{n-q}.$$

Uguagliando i coefficienti di  $z^{n-q}$  si perviene alla relazione:

$$(7) \quad (n - q + 1) J_n^q = \frac{x}{2} [J_{n-1}^q + J_{n+1}^q]$$

identica alla (5).

Per la determinazione dell'equazione differenziale alla quale soddisfa la  $J_n^q$  cambiamo successivamente nella (7)  $n$  in  $n+1$  e in  $n-1$ ; sommando membro a membro le relazioni così ottenute abbiamo:

$$(n - q + 1)[J_{n+1}^q + J_{n-1}^q] - [J_{n-1}^q - J_{n+1}^q] = \frac{x}{2} [J_{n+2}^q + J_{n-2}^q + 2J_n^q].$$

Per la (7) e per la (3) quest'ultima relazione diventa:

$$(8) \quad \frac{2(n - q + 1)^2}{x} J_n^q - 2 \frac{dJ_n^q}{dx} + \frac{2(q - 1)}{x} J_n^q = 2x J_n^q + \frac{x}{2} [J_{n+2}^q + J_{n-2}^q - 2J_n^q].$$

Moltiplicata la (6) per  $2x$  risolviamola rispetto all'ultimo termine a secondo membro e sostituiamo nel risultato alla differenza  $J_{n-1}^q - J_{n+1}^q$  il valore fornito dalla (3); si otterrà:

$$\begin{aligned} \frac{x}{2} [J_{n+2}^q + J_{n-2}^q - 2J_n^q] &= 2x \frac{d^2 J_n^q}{dx^2} + \frac{2(q-1)}{x} J_n^q - 2(q-1) \frac{dJ_n^q}{dx} \\ &\quad - (q-1) \left[ 2 \frac{dJ_n^q}{dx} - \frac{2(q-1)}{x} J_n^q \right]. \end{aligned}$$

Sostituendo nella (8) e ordinando opportunamente si giunge alla seguente equazione differenziale:

$$(9) \quad \frac{d^2 J_n^q}{dx^2} + \frac{3 - 2q}{x} \frac{dJ_n^q}{dx} + \left[ 1 - \frac{n(n - 2q + 2)}{x^2} \right] J_n^q = 0$$

valida per ogni valore intero di  $n$ .

§ 3. L'interesse delle funzioni di cui la (9), come vedremo, è l'equazione caratteristica, sta specialmente in questo che la (9) si deduce dalle funzioni sferiche del campo  $q$ -armonico come l'equazione caratteristica delle ordinarie funzioni di Bessel si deduce dalle funzioni sferiche ordinarie.

In due mie precedenti Memorie <sup>(1)</sup> mi sono occupato dello studio delle funzioni sferiche poliarmoniche, che ho definite come funzioni razionali, intere, omogenee di grado  $n$ , soddisfacenti all'equazione di Laplace reiterata  $q$  volte in cui le variabili siano coordinate di un punto generico della sfera di raggio uno e centro nell'origine e quindi legate dalla relazione:

$$(1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Nella Memoria pubblicata nel 1924 determino, nel primo paragrafo, per ogni valore di  $n$ ,  $2n + 1$  funzioni sferiche  $q$ -armoniche linearmente indipendenti che considero come l'estensione, nel campo poliarmonico, delle ordinarie funzioni sferiche fondamentali. Tali funzioni sono:

$$(2) \quad \cos m\psi P_{n,m}^q; \quad \sin m\psi P_{n,m}^q \quad (m=0, 1, 2 \dots n).$$

In esse  $\psi$  rappresenta la longitudine del punto variabile sulla sfera rispetto al piano  $xy$  e  $P_{n,m}$  è definita, per ogni valore di  $m$  da zero ad  $n$  (gli estremi inclusi), dalla relazione:

$$(3) \quad P_{n,m} = (1 - x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m X_{n,q}(x)}{dx^m} \quad (m=0, 1, 2 \dots n)$$

intendendosi che la derivata d'ordine zero rappresenti la funzione  $X_{n,q}(x)$ . Tale funzione  $X_{n,q}(x)$ , della quale nella Memoria pubblicata nel 1903 dò numerose espressioni analitiche, è l'unica funzione sferica poliarmonica dipendente dalla sola variabile  $x$  che rappresenta il coseno della colatitudine del punto mobile sulla sfera rispetto al polo determinato dall'intersezione della sfera stessa con l'asse delle ascisse.

Le  $P_{n,m}$  definite dalla (3) sono la generalizzazione delle note funzioni aggiunte studiate da HEINE <sup>(2)</sup>. L'equazione differenziale caratteristica di esse, come abbiamo in detta Memoria dimostrato al paragrafo secondo, è la seguente:

$$(4) \quad \frac{d^2 z}{d\theta^2} + (3 - 2q) \cotg. \theta \frac{dz}{d\theta} + \left[ n(n - 2q + 3) - \frac{m(m - 2q + 2)}{\text{sen}^2 \theta} \right] z = 0.$$

Cambiato ora  $\theta$  in  $\frac{\theta}{n}$  si ha:

$$n^2 \frac{d^2 z}{d\theta^2} + (3 - 2q)n \cotg. \frac{\theta}{n} \frac{dz}{d\theta} + \left[ n(n - 2q + 3) - \frac{m(m - 2q + 2)}{\text{sen}^2 \frac{\theta}{n}} \right] z = 0.$$

<sup>(1)</sup> V. GIULOTTO, *Sopra una nuova estensione delle funzioni sferiche di Legendre*, « Rend. Circolo Mat. di Palermo », t. XVII (1903), pp. 1-43; *Funzioni sferiche poliarmoniche a due variabili*, « Annali Mat. », Serie IV, t. I (1923-24), pp. 219-240.

<sup>(2)</sup> E. HEINE. *Handbuch der Kugelfunctionen*, I Theil (p. 216 e p. 233).

Moltiplicato il primo membro per  $\frac{\theta}{n^2}$  si ha l'equazione:

$$\theta^2 \frac{d^2 z}{d\theta^2} + (3 - 2q) \frac{\theta}{n} \frac{\cos \frac{\theta}{n} dz}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{n} d\theta} + \left[ \left( 1 + \frac{3 - 2q}{n} \right) \theta - \frac{\theta^2 m(m - 2q + 2)}{\theta \operatorname{sen}^2 \frac{\theta}{n}} \right] z = 0$$

e passando al limite per  $n = \infty$  si ottiene:

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} + (3 - 2q) \frac{1}{\theta} \frac{dz}{d\theta} + \left[ 1 - \frac{m(m - 2q + 2)}{\theta^2} \right] z = 0.$$

Questa equazione differenziale coincide con la (9) del precedente paragrafo ed è stata ottenuta con lo stesso procedimento col quale Heine dall'equazione differenziale delle ordinarie aggiunte ricava l'equazione caratteristica delle funzioni di Bessel. Resterà così giustificata, dopo le ricerche del seguente paragrafo, la denominazione di funzione di Bessel del campo poliarmonico data alla  $J_n^q(x)$ . E poichè nel caso di  $m = 0$  la (4) coincide con l'equazione differenziale caratteristica delle  $X_n^q(\cos \theta)$  avremo la relazione:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} X_n^q \left( \cos \frac{\theta}{n} \right) = J_0^q(\theta)$$

che estende al campo poliarmonico l'interessante formula di MEHLER (\*).

§ 4. Ci proponiamo di trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale (9) del paragrafo secondo.

Indicato il primo membro con  $\Psi(y)$  e sostituito per un momento  $\nu$  a  $2q - 2$ , si ha:

$$(1) \quad \Psi(y) = x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (1 + \nu)x \frac{dy}{dx} + [x^2 - n(n + \nu)]y.$$

In accordo con la teoria generale delle equazioni differenziali lineari cerchiamo di soddisfare alla equazione che si ottiene uguagliando a zero la (1) con la:

$$(2) \quad y = x^{-n-\nu} \sum_{s=0}^{\infty} (a_s + b_s \lg x) x^s.$$

Essendo  $z$  una funzione di  $x$  poniamo in generale:

$$\varphi(z) = x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + (1 + \nu)x \frac{dz}{dx}.$$

(\*) G. MEHLER, *J. reine angew. Math.*, 68 (1868), p. 140.

Si trova con facili calcoli:

$$(3) \quad \varphi(a_s x^{s-n-\nu}) = a_s (s-n-\nu)(s-n)x^{s-n-\nu}$$

$$(4) \quad \varphi(b_s x^{s-n-\nu} \lg x) = b_s (s-n-\nu)(s-n)x^{s-n-\nu} \lg x + b_s (2s-2n-\nu)x^{s-n-\nu}.$$

Tenendo presente la (2) si deduce:

$$(5) \quad \begin{aligned} \varphi(y) = & a_0(n^2 + n\nu)x^{-n-\nu} + b_0(n^2 + n\nu)x^{-n-\nu} \lg x + b_0(-2n-\nu)x^{-n-\nu} \\ & + a_1(n^2 + 1 - 2n - \nu + n\nu)x^{-n-\nu+1} + b_1(n^2 + 1 - 2n - \nu + n\nu)x^{-n-\nu+1} \lg x \\ & + b_1(-2n - \nu + 2)x^{-n-\nu+1} + \\ & + \sum_{s=2}^{\infty} [a_s(s-n-\nu)(s-n) + b_s(s-n-\nu)(s-n) \lg x + b_s(2s-2n-\nu)]x^{s-n-\nu}. \end{aligned}$$

Per la (2) è anche:

$$(6) \quad \begin{aligned} [x^2 - (n^2 + n\nu)]y = & x^{-n-\nu+2} \sum_{s=0}^{\infty} (a_s + b_s \lg x)x^s - (n^2 + n\nu)x^{-n-\nu} \sum_{s=0}^{\infty} (a_s + b_s \lg x)x^s \\ = & \sum_{s=2}^{\infty} (a_{s-2} + b_{s-2} \lg x)x^{-n-\nu+s} - (n^2 + n\nu)(a_0 + b_0 \lg x)x^{-n-\nu} \\ & - (n^2 + n\nu)(a_1 + b_1 \lg x)x^{-n-\nu+1} - (n^2 + n\nu) \sum_{s=2}^{\infty} (a_s + b_s \lg x)x^{-n-\nu+s}. \end{aligned}$$

Ricordato il valore di  $\nu$ , poichè le (5) e (6) sommate danno  $\Psi(y)$ , possiamo concludere che essendo:

$$(7) \quad \Psi(y) = x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (3 - 2q)x \frac{dy}{dx} + [x^2 - n(n+2-2q)]y$$

qualora si faccia

$$(8) \quad y = x^{-n-2+2q} \sum_{s=0}^{\infty} (a_s + b_s \lg x)x^s$$

si ha:

$$(9) \quad \begin{aligned} \psi(y) = & -2(n+1-q)b_0 + \\ & + [(1-2n+2q-2)a_1 + (-2n+2q)b_1]x^{-n+2q-1} + (-2n+1+2q)b_1 x^{-n+2q-1} \lg x \\ & + \sum_{s=2}^{\infty} [(s^2 - 2ns - 2s + 2sq)a_s + a_{s-2} + (2s-2n-2+2q)b_s]x^{s-n-2+2q} \\ & + \sum_{s=2}^{\infty} [(s^2 - 2ns - 2s + 2sq)b_s + b_{s-2}]x^{s-n-2+2q} \lg x \end{aligned}$$

Ora perchè la  $y$  definita dalla (8) sia soluzione dell'equazione differenziale che si ottiene uguagliando a zero la (7), è necessario che la (9) sia nulla per qualsivoglia valore di  $x$  e quindi siano nulli i coefficienti dei vari termini. Dovranno pertanto annullarsi  $b_0$  e  $b_1$  e quindi, per l'ultima sommatoria, tutte le  $b$  (di indice pari e dispari) fino a  $b_{2n+1-2q}$  compreso; non è neces-

sario sia nullo  $b_{2n+2-2q}$  perchè il coefficiente di  $x^n \lg x$  di detta sommatoria si annulla per  $s = 2n + 2 - 2q$ . I coefficienti di  $b$  con indice dispari continuano ad essere nulli anche dopo  $b_{2n+1-2q}$ . Essendo  $b_1 = 0$  è necessariamente, per l'annullarsi del secondo termine di  $\Psi(y)$ ,  $a_1 = 0$  e per l'annullarsi della prima sommatoria saranno zero  $a_3, a_5, \dots$  ossia tutte le  $a$  con indice dispari. Osservo che  $a_0$  è arbitrario e scelto  $a_0$  si possono calcolare successivamente  $a_2, a_4 \dots a_{2n-2q}$ . È chiaro che questi coefficienti si possono dedurre da uno di essi preso ad arbitrio. Sceglieremo a tale fine  $a_{2n-2q}$ . Il coefficiente  $a_{2n+2-2q}$  si può assumere ad arbitrio perchè l'espressione che lo moltiplica nel coefficiente di  $x^n$  si annulla di per sè. L'annullarsi del coefficiente di  $x^n$  lega  $b_{2n+2-2q}$  con  $a_{2n-2q}$ . Dopo tali considerazioni appaiono chiari i calcoli seguenti:

$$b_{2n-2q+4} = - \frac{b_{2n+2-2q}}{2 \cdot (2n+4-2q)}$$

$$b_{2n-2q+6} = - \frac{b_{2n+4-2q}}{4(2n+6-2q)} = \frac{b_{2n+2-2q}}{2 \cdot 4 \cdot (2n+4-2q)(2n+6-2q)}$$

e in generale:

$$(10) \quad b_{2n+2-2q+2s} = \frac{(-1)^s b_{2n+2-2q}}{2 \cdot 4 \dots 2s \cdot (2n+4-2q)(2n+6-2q) \dots (2n+2-2q+2s)}$$

La (10) determina, in funzione di  $b_{2n+2-2q}$ , tutti i coefficienti  $b$  diversi da zero.

Per ciò che riguarda i coefficienti  $a$  abbiamo:

$$a_{2n-2q} = - (2n+2-2q)b_{2n+2-2q} = -$$

$$\frac{2^{2n-2q+1} \pi(n-q+1) \pi(n-q) b_{2n+2-2q}}{[2 \cdot 4 \dots (2n-2q-6)(2n-2q-4) \dots (2n-2q)]^2}$$

$$a_{2n-2q-2} = 2(2n-2q)a_{2n-2q} = - (2n+2-2q)(2n-2q) \cdot 2 \cdot b_{2n+2-2q}$$

$$= \frac{- 2^{2n-2q+1} \pi(n-q+1) \pi(n-q) b_{2n+2-2q}}{(2n-2q-2)(2n-2q-4) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n-2q)}$$

$$a_{2n-2q-4} = \frac{- 2^{2n-2q+1} \pi(n-q+1) \pi(n-q) b_{2n+2-2q}}{(2n-2q-4)(2n-2q-6) \dots 6 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 6 \cdot 8 \dots (2n-2q)}$$

e in generale:

$$(11) \quad a_{2n-2q-2s} = \frac{- 2^{2n-2q+1} \pi(n-q+1) \pi(n-q) b_{2n+2-2q}}{2 \cdot 4 \dots (2n-2q-2s) \cdot (2+2s)(4+2s) \dots (2n-2q)} \quad (s=0, 1, \dots, n-q).$$

La (11) determina, in funzione di  $b_{2n+2-2q}$ , i coefficienti  $a$  con indice pari non superiore a  $2n-2q$  purchè, nel caso di  $s = n-q$ , si dia al denominatore il valore uno. Il coefficiente  $a_{2n-2q+2}$ , come abbiamo detto, è arbitrario e gli altri coefficienti  $a$ , con indice pari superiore a  $2n-2q+2$ ,



tenendo conto della (1), sono:

$$\begin{aligned}
 a_{2^n-2q+4} &= -\frac{a_{2^n-2q+2}}{2 \cdot (2n-2q+4)} - \frac{(2n-2q+6)b_{2^n-2q+4}}{2 \cdot (2n-2q+4)} \\
 &= -\frac{a_{2^n-2q+2}}{2 \cdot (2n-2q+4)} + \frac{1}{2 \cdot (2n-2q+4)} \left( 2 + \frac{1}{2n-2q+4} \right) b_{2^n-2q+2} \\
 a_{2^n-2q+6} &= -\frac{a_{2^n-2q+4}}{4 \cdot (2n-2q+6)} - \frac{(2n-2q+10)b_{2^n-2q+6}}{4 \cdot (2n-2q+6)} \\
 &= \frac{a_{2^n-2q+2}}{2 \cdot 4 \cdot (2n-2q+4)(2n-2q+6)} - \\
 &\quad - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot (2n-2q+4)(2n-2q+6)} \left( 2 + \frac{1}{2n-2q+4} \right) b_{2^n-2q+2} \\
 &\quad - \frac{2n-2q+10}{4 \cdot (2n-2q+6)} \cdot \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot (2n-2q+4)(2n-2q+6)} b_{2^n-2q+2} \\
 &= \frac{a_{2^n-2q+2}}{2 \cdot 4 \cdot (2n-2q+4)(2n-2q+6)} - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot (2n-2q+4)(2n-2q+6)} \cdot \\
 &\quad \cdot \left( 2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2n-2q+4} + \frac{1}{2n-2q+6} \right) \cdot b_{2^n-2q+2}
 \end{aligned}$$

e in generale:

$$(12) \quad a_{2^n-2q+2+2s} = \frac{(-1)^s}{2 \cdot 4 \dots 2s \cdot (2n-2q+4)(2n-2q+6) \dots (2n-2q+2+2s)} \cdot \left[ a_{2^n-2q+2} - b_{2^n-2q+2} \sum_{s=1}^s \left( \frac{1}{2s} + \frac{1}{2n-2q+2+2s} \right) \right] \quad (s=1, 2, 3\dots)$$

La (12) determina, in funzione di  $a_{2^n-2q+2}$  e di  $b_{2^n-2q+2}$ , tutte le  $a$  di indice pari superiore a  $2n-2q+2$  e poichè le  $a$  con indice dispari sono nulle, le (11) e (12) determinano tutte le  $a$  diverse da zero.

Scriviamo per esteso la (8) omettendo i termini che sappiamo essere nulli; avremo:

$$\begin{aligned}
 y &= x^{-(n-2q+2)} [a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_{2n-2q-4} x^{2n-2q-4} + a_{2n-2q-2} x^{2n-2q-2} + \\
 &\quad + a_{2n-2q} x^{2n-2q} + a_{2n-2q+2} x^{2n-2q+2} + b_{2n-2q+2} x^{2n-2q+2} \lg x + \\
 &\quad + a_{2n-2q+4} x^{2n-2q+4} + b_{2n-2q+4} x^{2n-2q+4} \lg x + \\
 &\quad + a_{2n-2q+6} x^{2n-2q+6} + b_{2n-2q+6} x^{2n-2q+6} \lg x + \dots \\
 &\quad \dots + a_{2n-2q+2+2s} x^{2n-2q+2+2s} + b_{2n-2q+2+2s} x^{2n-2q+2+2s} \lg x + \dots].
 \end{aligned}$$

Sostituiamo ai singoli coefficienti i valori dati dalle (10), (11), (12) e raccogliamo i termini in  $a_{2n-2q+2}$  e in  $b_{2n-2q+2}$ . Allora posto  $a_{2n-2q+2} = A$  e  $b_{2n-2q+2} = B$  ( $A$  e  $B$  costanti arbitrarie) la soluzione generale dell'equazione:

$$(4) \quad x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + (3-2q)x \frac{dy}{dx} + [x^2 - n(n+2-2q)]y = 0$$

è:

$$y = Ay_1 + By_2$$

essendo:

$$(5) \quad y_1 = x^n \left[ 1 - \frac{x^2}{2(2n+4-2q)} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot (2n-2q+4)(2n-2q+6)} - \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{(-1)^s x^{2s}}{2 \cdot 4 \dots 2s \cdot (2n-2q+4)(2n-2q+6) \dots (2n-2q+2+2s)} + \dots \right]$$

$$(6) \quad y_2 = x^n \lg x \left[ 1 - \frac{x^2}{2(2n+4-2q)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{(-1)^s x^{2s}}{2 \cdot 4 \dots 2s \cdot (2n-2q+4)(2n-2q+6) \dots (2n-2q+2+2s)} \right] \\ - 2^{2n-2q+1} \pi(n-q+1) \pi(n-q) \left[ x^{-n+2q-2} + \frac{x^{-n+2q}}{2 \cdot (2n-2q)} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{x^{n-2}}{[2 \cdot 4 \dots (2n-2q)]^2} \right] + \frac{1}{2(2n-2q+4)} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2n-2q+4} \right) x^{n+2} - \\ - \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot (2n-2q+4)(2n-2q+6)} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-2q+6} \right) x^{n+4} + \dots \\ \dots + \frac{(-1)^{s+1} x^{n+2s}}{2 \cdot 4 \dots 2s \cdot (2n+4-2q)(2n+6-2q) \dots (2n+2-2q+2s)} \cdot \\ \cdot \sum_1^s \left( \frac{1}{2s} + \frac{1}{2n-2q+2+2s} \right) + \dots$$

Possiamo assumere come integrali particolari  $y_1$  e  $y_2$  entrambi divisi per  $2^n \pi(n+1-q)$ ,

Per la (2) del primo paragrafo è:

$$\frac{y_1}{2^n \pi(n+1-q)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{n+2s}}{2^{2s} \pi(s)(n-q+2)(n-q+3) \dots (n-q+1+s)} \frac{1}{2^n \pi(n+1-q)} \\ = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{n+2s}}{2^{n+2s} \pi(s) \pi(n-q+1+s)} = J_{n,q} \quad (n \geq q-1).$$

E poichè il coefficiente di  $\log x$  in  $y_2$  diviso per  $2^n \pi(n+1-q)$  è pure uguale a  $J_{n,q}$ , indicando con  $W_{n,q}(x)$  l'integrale  $y_2$  diviso per detta espressione, avremo come soluzione generale della (4):

$$y = AJ_{n,q} + BW_{n,q}$$

essendo

$$(7) \quad J_{n,q} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s x^{n+2s}}{2^{n+2s} \pi(s) \pi(n-q+1+s)} \quad (n \geq q-1)$$

$$(8) \quad W_n^q = J_n^q \lg x - \left[ 2^{n-2q+1} \pi(n-q) x^{-n+2q-2} + \frac{2^{n-2q-1} \pi(n-q-1)}{\pi(1)} x^{-n+2q} \right. \\ \left. + \frac{2^{n-2q-3} \pi(n-q-2) x^{-n+2q+2}}{\pi(2)} + \dots + \frac{x^{n-2}}{2^{n-1} \pi(n-q)} \right] + \\ + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-1)^{s+1} x^{n+2s}}{2^{n+2s} \pi(s) \pi(n+1-q+s)} \cdot \sum_{s=1}^s \left( \frac{1}{2s} + \frac{1}{2n-2q+2+2s} \right) \quad (n \geq q - 1).$$

La  $W_n^q$ , per  $x=0$ , diventa infinita dell'ordine di  $x^{-(n-2q+2)}$  per  $n > 2q - 2$  e quindi per  $n > 0$  nel caso delle ordinarie funzioni di Bessel; per ogni altro valore di  $x$  ha valore finito, ma non unico in causa del logaritmo.

Nella teoria delle ordinarie trascendenti di Bessel detta funzione è generalmente conosciuta col nome di funzione ausiliare; essa non soddisfa alle relazioni ricorrenti che si deducono da quelle stabilite al paragrafo secondo (fatta eccezione come vedremo in seguito per la (2)) ponendo in esse  $q = 1$ , ma a formule analoghe deducibili con procedimenti affatto simili.

Sempre nel caso di  $q = 1$  si giunge a costruire una funzione che sia, della equazione differenziale caratteristica ottenuta in detto paragrafo, soluzione distinta della  $J_n^1$  e pure soddisfi alle stesse relazioni ricorrenti fondamentali, combinando linearmente la  $W_n^1$  e la  $J_n^1$  secondo un criterio suggerito da C. Neumann.

Noi però lasciamo a questo punto, come meno interessante, lo studio della  $W_n^q$  e riprendiamo a considerare la  $J_n^q$ , non senza prima osservare che il secondo termine della (8) fornisce la seguente espressione analitica per i polinomi di SCHLAEFLI (1) estesi al campo poliarmónico:

$$S_n^{(q)} = \sum_{s=0}^{s \leq \frac{n-q}{2}} \frac{\pi(n-s-q)}{\pi(s)} \left(\frac{2}{x}\right)^{n-2q+2-2s}$$

§ 5. Si può estendere la  $J_n^q$ , definita dalla (2) del primo paragrafo, al caso di  $n$  non intero facendo uso della funzione  $\pi(m)$  di Gauss (generalmente indicata col simbolo  $\Gamma(m+1)$ ). Come è noto, detta funzione è definita dall'espressione:

$$\pi(m) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \dots k}{(m+1)(m+2) \dots (m+k)} k^n$$

Per  $m$  intero e positivo  $\pi(m)$  ha il significato ben noto di  $m! = 1 \cdot 2 \dots m$ .

(1) SCHLAEFLI, « Math. Ann. », 3, pp. 134-149 (1871).

Infatti in tal caso è:

$$\begin{aligned}\pi(m) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 \dots (m+1)(m+2) \dots k}{(m+1)(m+2) \dots k(k+1) \dots (k+m)} k^n = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{m!}{k^m + a_1 k^{m-1} + \dots + a_m} k^m = m!.\end{aligned}$$

Si estende poi in modo assai facile al caso di  $m$  non intero la proprietà:

$$\pi(m) = m\pi(m-1).$$

Per convenzione si assume  $\pi(0) = 1$ .

L'estensione data alla  $\pi(m)$  porta un'analogia estensione alla  $J_n^q$ . Il caso più interessante, che terremo anche in seguito particolarmente presente, è però sempre quello di  $n$  intero.

§ 6. Diamo alcune interessanti espressioni della  $J_n^q$  per mezzo di integrali definiti. Sviluppando la (2) del primo paragrafo possiamo scrivere:

$$(1) \quad J_n^q = \frac{x^n}{2^{q-1}} \left[ \frac{1}{2 \cdot 4 \dots 2(n-q+1)} \dots \dots \dots \right. \\ \left. \dots (-1)^p \frac{x^{2p}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p)} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{2 \cdot 4 \dots 2(n-q+p+1)} \dots \dots \right]$$

dove per  $p=0$  devesi porre:

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (2p)} = 1.$$

Ricordiamo la formula:

$$\int_0^\pi \sin^{2A} \varphi \cos^{2B} \varphi d\varphi = \frac{[1 \cdot 3 \dots (2A-1)][1 \cdot 3 \dots (2B-1)]}{2 \cdot 4 \dots 2(A+B)} \pi$$

nella quale  $A$  e  $B$  indicano due numeri interi e positivi e nel caso di  $B=0$  è:

$$1 \cdot 3 \dots (2B-1) = 1.$$

Diamo ad  $A$  il valore  $n-q+1$  ( $n \geq q-1$ ) e a  $B$  successivamente i valori zero e  $p$ ; si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2 \cdot 4 \dots 2(n-q+1)} &= \frac{1}{1 \cdot 3 \dots (2n-2q+1)} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{2(n-q+1)} \varphi d\varphi \\ \frac{1 \cdot 3 \dots (2p-1)}{2 \cdot 4 \dots 2(n-q+p+1)} &= \frac{1}{1 \cdot 3 \dots (2n-2q+1)} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^{2(n-q+1)} \varphi \cos^{2p} \varphi d\varphi\end{aligned}$$

e portati questi valori nella (1) si ha:

$$J_n^q = \frac{x^n}{2^{q-1} \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n - 2q + 1)} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \text{sen}^{2(n-q+1)} \varphi \left[ 1 - \frac{x^2 \cos^2 \varphi}{1 \cdot 2} + \dots \right. \\ \left. \dots \frac{(-1)^p x^{2p} \cos^{2p} \varphi}{1 \cdot 2 \dots 2p} + \dots \right] d\varphi$$

o anche:

$$(2) \quad J_n^q = \frac{x^n}{2^{q-1} \cdot 1 \cdot 3 \dots (2n - 2q + 1)} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \cos \varphi) \text{sen}^{2(n-q+1)} \varphi d\varphi.$$

Questa formula, valida per  $n \geq q - 1$ , ha il vantaggio di mettere in evidenza il fattore  $x^n$ . Se  $x$  è considerata come grandezza infinitesima del primo ordine,  $J_n^q$  sarà infinitesima dell'ordine  $n$  come fu già osservato. L'espressione (2), nel caso di  $q = 1$  è dovuta a BESSEL (1).

In seguito la ritrovò JACOBI (2) con un procedimento più generale.

Un'altra espressione notevole della  $J_n^q$  mediante integrale definito si può ottenere nel seguente modo:

Nella (5) del primo paragrafo:

$$F = \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} E^{\frac{x}{2}}(z^{-1}) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p^q z^{p-q+1}$$

poniamo:

$$z = E^\varphi \sqrt{-1}.$$

Avremo:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} E^x \sqrt{-1} \text{sen } \varphi = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n^q E^{(n-q+1)\varphi} \sqrt{-1}$$

e quindi:

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} E^x \sqrt{-1} \text{sen } \varphi E^{-(n-q+1)\varphi} \sqrt{-1} \varphi d\varphi = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p^q \int_0^{2\pi} E^{(p-n)\varphi} \sqrt{-1} d\varphi$$

ed essendo:

$$\int_0^{2\pi} E^{h\varphi} \sqrt{-1} d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{per } h \geq 0 \\ 2\pi & \text{» } h = 0 \end{cases}$$

(1) F. W. BESSEL, *Untersuchung des Theils der planetarischen Störungen, welcher aus der Bewegung der Sonne entsteht*, « Abhandlung der Math. Classe der Berliner Akademie », aus dem Jahre 1824, S. 22.

(2) JACOBI, *Formula transformationis integralium definitorum*, « Crelle's Journal », Bd. 15, S. 13.

si ha:

$$2\pi J_{n,q} = \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} \int_0^{2\pi} E^{-[(n-q+1)\varphi - x \operatorname{sen} \varphi] \sqrt{-1}} d\varphi$$

e quindi:

$$(3) \quad J_n^q = \frac{x^{q-1}}{2^{q-1}\pi} \int_0^\pi \cos[(n-q+1)\varphi - x \operatorname{sen} \varphi] d\varphi \quad (n \geq q-1 \text{ e intero}).$$

Questa formula estende al campo poliarmónico la definizione data da BESSEL (1) per le ordinarie  $J_{n,q}$ .

§ 7. La (3) del precedente paragrafo costituisce per Bessel il punto da cui prende le mosse per lo sviluppo di tutta la teoria. Partendo da essa noi ricaveremo di nuovo l'equazione caratteristica delle  $J_{n,q}$  e risaliremo alla funzione generatrice.

La (3), nel caso di  $n > q-1$  può scriversi come segue:

$$(1) \quad J_{n,q}(y) = \frac{y^{q-1}}{2^{q-1}\pi} \int_0^\pi \cos(n-q+1)\left(\varphi - \frac{y}{n-q+1} \operatorname{sen} \varphi\right) d\varphi.$$

Poniamo:

$$y = x(n-q+1) \quad I = \int_0^\pi \cos(n-q+1)(\varphi - x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi$$

ne segue:

$$(2) \quad I = kx^{1-q} J_n^q$$

dove  $k$  rappresenta la quantità costante  $\pi 2^{q-1} (n-q+1)^{1-q}$ .

Ora si ha:

$$(3) \quad \frac{dI}{dx} = (n-q+1) \int_0^\pi \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen}(n-q+1)(\varphi - x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi$$

$$(4) \quad \frac{d^2 I}{dx^2} = -(n-q+1)^2 \int_0^\pi \operatorname{sen}^2 \varphi \cos(n-q+1)(\varphi - x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi.$$

Con una integrazione per parti la (3) diventa:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dx} &= (n-q+1) \left[ -\cos \varphi \operatorname{sen}(n-q+1)(\varphi - x \operatorname{sen} \varphi) \right]_0^\pi + \\ &+ (n-q+1)^2 \int_0^\pi \cos \varphi \cos(n-q+1)(\varphi - x \operatorname{sen} \varphi)(1 - x \cos \varphi) d\varphi \end{aligned}$$

(1) F. W. BESSEL, *Untersuchung des Theils ecc...*, « Ab. der Math. Cl. der Ber. Akad. », aus dem Jahre 1824.

e da essa si deduce:

$$\frac{1}{x} \frac{dI}{dx} = \frac{(n-q+1)^2}{x} \int_0^\pi \cos \varphi \cos (n-q+1)(\varphi - x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi - \\ - (n-q+1)^2 \int_0^\pi \cos^2 \varphi \cos (n-q+1)(\varphi - x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi$$

e quindi:

$$\frac{d^2 I}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dI}{dx} = -(n-q+1)^2 \int_0^\pi \cos (n-q+1)(\varphi - x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi + \\ + \frac{(n-q+1)^2}{x} \int_0^\pi \cos \varphi \cos (n-q+1)(\varphi - \operatorname{sen} \varphi) d\varphi \\ = -(n-q+1)^2 I - \frac{n-q+1}{x^2} \int_0^\pi [(1-x \cos \varphi)(n-q+1) - \\ - (n-q+1)] \cos (n-q+1)(\varphi - x \operatorname{sen} \varphi) d\varphi \\ = -(n-q+1)^2 I - \frac{n-q+1}{x^2} [\operatorname{sen} (n-q+1)(\varphi - x \operatorname{sen} \varphi)]_0^\pi + \\ + \frac{(n-q+1)^2}{x^2} I$$

$$\frac{d^2 I}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dI}{dx} = -I \left[ (n-q+1)^2 - \frac{(n-q+1)^2}{x^2} \right]$$

o meglio:

$$(5) \quad \frac{d^2 I}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dI}{dx} + (n-q+1)^2 \left( 1 - \frac{1}{x^2} \right) I = 0.$$

Posto  $(n-q+1)x = x_1$ , e soppresso l'indice come insignificante, si ottiene per  $I$  l'equazione differenziale:

$$(6) \quad \frac{d^2 I}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dI}{dx} + \left[ 1 - \frac{(n-q+1)^2}{x^2} \right] I = 0$$

dalla quale, in virtù della (2), si ricava per la  $J_n^q$  la (9) del secondo paragrafo. Essa è valida anche per  $n=q-1$ , come si può facilmente verificare ripetendo i calcoli fatti dopo aver attribuito ad  $n$  tale valore nella relazione (3) del paragrafo precedente. Integrando la (9) in tal guisa ottenuta giungiamo,

come è noto, alla  $J_n^q$  espressa dalla (7) del paragrafo quarto, coincidente con la (2) del primo paragrafo, dalla quale, come s'è visto, si è condotti alle relazioni ricorrenti (2) e (3) del paragrafo secondo.

Ora ci proponiamo, di determinare la funzione di  $x$  e di  $z$  più generale che sviluppata in serie secondo le potenze di  $z$  dia, nei coefficienti dello sviluppo, funzioni soddisfacenti alle relazioni ricorrenti (2) e (3). Indichiamo una tale funzione con  $\Phi(x, z)$  e poniamo:

$$(1) \quad \Phi(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(x) z^{n-q+1}.$$

Ammissa la convergenza in ugual grado della serie a secondo membro e delle serie delle derivate parziali rispetto ad  $x$  e a  $z$ , si ricava:

$$(2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi_n}{dx} z^{n-(q-1)}$$

$$(3) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n - q + 1) \varphi_n z^{n-q}.$$

Ora facciamo l'ipotesi che le  $\varphi_n$  soddisfino alle relazioni seguenti:

$$(4) \quad \frac{d\varphi_n}{dx} = \frac{n}{x} \varphi_n - \varphi_{n+1}$$

$$(5) \quad \frac{d\varphi_n}{dx} = \frac{q-1}{x} \varphi_n + \frac{1}{2} (\varphi_{n-1} - \varphi_{n+1}).$$

Sostituendo nella (2) la (4) e aggiungendo e togliendo  $\frac{1}{x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1-q) \varphi_n z^{n-q+1}$  si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{1}{x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \varphi_n z^{n-q+1} + \frac{1}{x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1-q) \varphi_n z^{n-q+1} + \\ &+ \frac{1}{x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (q-1) \varphi_n z^{n-q+1} - \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{n+1} z^{n-q+1} \end{aligned}$$

o anche:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{z}{x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (n - q + 1) \varphi_n z^{n-q} + \frac{q-1}{x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n z^{n-q+1} - \frac{1}{z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{n+1} z^{n-q+2}$$

e per le (1) e (3):

$$(6) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{z}{x} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{q-1}{x} \Phi - \frac{1}{z} \Phi.$$



Sostituendo invece nella (2) la (5) si ha:

$$(7) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{q-1}{x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n z^{n-q+1} + \frac{z}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{n-1} z^{n-q} - \frac{1}{2z} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_{n+1} z^{n-q+2}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \left( \frac{q-1}{x} + \frac{z^2-1}{2z} \right) \Phi.$$

Dalle (6) e (7) uguagliando fra loro i secondi membri si ricava:

$$(8) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{xz^2+1}{2z^2} \Phi$$

per cui si è condotti al sistema più semplice formato dalla (8) e dalla (7) ossia al seguente:

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial z} \lg \Phi = \frac{xz^2+1}{2z^2}$$

$$(10) \quad \frac{\partial}{\partial x} \lg \Phi = \frac{q-1}{x} + \frac{z^2-1}{2z}.$$

La condizione d'integrabilità del sistema espressa dalla relazione:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{xz^2+1}{2z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{q-1}{x} + \frac{z^2-1}{2z} \right) = 0$$

è soddisfatta.

La (10), integrata, dà:

$$(11) \quad \lg \Phi = (q-1) \lg x + \frac{z^2-1}{2z} x + f(z)$$

e per la (9) si ottiene:

$$f'(z) = 0$$

per cui, indicando con  $k$  una costante arbitraria, si ha:

$$f(z) = k.$$

Detta  $E$  la base dei logaritmi neperiani si ha dalla (11):

$$\lg \Phi = \lg x^{q-1} + \lg E^{\frac{xz^2-1}{z}} + \lg E^k.$$

Finalmente indicando con  $C$  una costante qualsiasi si ha:

$$(12) \quad \Phi = Cx^{q-1} E^{\frac{xz^2-1}{z}}.$$

Poichè le condizioni imposte alla  $\Phi$  sono soddisfatte, essa definisce la funzione più generale che sviluppata in serie da  $-\infty$  e  $+\infty$  secondo le potenze di  $z$ , dà nei coefficienti di  $z^{n-q+1}$  ( $q \geq 1$ ) un sistema di funzioni  $\varphi_n$

soddisfacenti alle relazioni ricorrenti (4) e (5). Quando sia  $C = 2^{1-q}$ , le  $\varphi_n$  coincidono con le funzioni poliarmoniche di Bessel.

§ 8. L'espressione della  $J_n^q$  data dalla (3) del paragrafo 6 permette di ricavare alcune relazioni ricorrenti fra le  $J_n^q$  di diverso ordine. Prima però di determinarle, diamo una più ampia estensione alla relazione (2) del secondo paragrafo.

Osserviamo che detta  $U$  una qualunque funzione di  $x$ , è sempre verificata la seguente uguaglianza:

$$(1) \quad \left(\frac{n}{x} - \frac{\partial}{\partial x}\right) \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{3-2q}{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{x^2 - n(n+2-2q)}{x^2} U \right] = \\ = \left[ \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{3-2q}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x^2 - (n+1)(n+3-2q)}{x^2} \right] \left( \frac{n}{x} - \frac{\partial}{\partial x} \right) U.$$

Ciò significa che se  $U$  è soluzione dell'equazione caratteristica delle funzioni di Bessel poliarmoniche d'indice  $n$ , la funzione definita dalla relazione:

$$V = \left( \frac{n}{x} - \frac{\partial}{\partial x} \right) U$$

è soluzione dell'equazione stessa nella quale sia cambiato  $n$  in  $n+1$ .

Posto dunque

$$Z_n^q = aJ_n^q + bW_n^q,$$

dove  $a$  e  $b$  sono costanti arbitrarie,  $J_n^q$  è la nota funzione di Bessel e  $W_n^q$  la funzione ausiliaria del paragrafo quarto, avremo la relazione:

$$(2) \quad Z_{n+1}^q = \frac{n}{x} Z_n^q - \frac{dZ_n^q}{dx}$$

valida in particolare per la  $J_n^q$  e la  $W_n^q$ .

È interessante notare che le operazioni di calcolo con le quali si passa dalla  $Z_n^q$  alla  $Z_{n+1}^q$  sono indipendenti dall'ordine della funzione.

Nella espressione di Bessel estesa al campo poliarmonico:

$$(3) \quad J_n^q = \frac{x^{q-1}}{2^{q-1}\pi} \int_0^\pi \cos[(n-q+1)\omega - x \sin \omega] d\omega$$

poniamo:

$$(4) \quad U = (n-q+1)\omega - x \sin \omega.$$

Si avrà:

$$(5) \quad J_n^q = \frac{x^{q-1}}{2^{q-1}\pi} \int_0^\pi \cos U \, d\omega$$

$$(6) \quad J_n^{q-1} = \frac{x^{q-2}}{2^{q-2}\pi} \int_0^\pi \cos (U + \omega) \, d\omega$$

$$(7) \quad J_n^{q+1} = \frac{x^q}{2^q\pi} \int_0^\pi \cos (U - \omega) \, d\omega.$$

Differenziando la (4) rispetto ad  $\omega$ , integrando poi fra 0 e  $\pi$ , tenendo presente la (5), si ottiene:

$$(n - q + 1) \frac{2^{q-1}\pi}{x^{q-1}} J_n^q - x \int_0^\pi \cos U \cos \omega \, d\omega = 0$$

e quindi:

$$(8) \quad \int_0^\pi \cos U \cos \omega \, d\omega = \frac{(n - q + 1)2^{q-1}\pi}{x^q} J_n^q.$$

Ora è identicamente:

$$2 \int_0^\pi \cos U \cos \omega \, d\omega = \int_0^\pi \cos (U + \omega) \, d\omega + \int_0^\pi \cos (U - \omega) \, d\omega$$

per cui, tenendo presente le relazioni (6), (7), (8), si ottiene:

$$(9) \quad (n - q + 1)J_n^q = \frac{x^2}{2^2} J_n^{q-1} + J_n^{q+1} \quad (q \geq 2).$$

Si deduce dalla (3) tenendo conto della (4) e dell'identità:

$$\text{sen } U \text{ sen } \omega = \cos (U - \omega) - \cos (U + \omega)$$

$$\begin{aligned} \frac{dJ_n}{dx} &= \frac{(q-1)x^{q-2}}{2^{q-1}\pi} \int_0^\pi \cos [(n-q+1)\omega - x \text{ sen } \omega] \, d\omega + \\ &+ \frac{x^{q-1}}{2^q\pi} \int_0^\pi [\cos (U - \omega) - \cos (U + \omega)] \, d\omega \end{aligned}$$

e per le (5), (6), (7) si ottiene:

$$(10) \quad \frac{dJ_n}{dx} = \frac{q-1}{x} J_n^q + \frac{1}{x} J_n^{q+1} - \frac{x}{2^2} J_n^{q-1} \quad (q \geq 2).$$

Con la eliminazione della  $J_n^{q-1}$  fra le (9) e (10) si ottiene la seguente interessante relazione fra due funzioni dello stesso indice, ma di ordini successivi:

$$(11) \quad \frac{dJ_n^q}{dx} = \frac{2(q-1) - n}{x} J_n^q + \frac{2}{x} J_n^{q+1} \quad (q \geq 2).$$

Infine dalla (1) del secondo paragrafo si deduce facilmente:

$$J_{n+s}^{q+s} = \binom{x}{2}^s J_n^q.$$

§ 9. Le relazioni (9), (10) e (11) del precedente paragrafo hanno rispettivamente la stessa importanza delle relazioni ricorrenti (7), (3), (2) del paragrafo secondo. Si può intanto dare alla (11) estensione analoga a quella data alla (2). Per questo basta osservare che detta  $U$  una qualsiasi funzione di  $x$  è soddisfatta l'uguaglianza:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{n-2q+2}{2} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{3-2q}{x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{x^2 - n(n+2-2q)}{x^2} U \right] = \\ & = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1-2q}{x} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x^2 - n(n-2q)}{x^2} \right] \left( \frac{n-2q+2}{2} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} \right) U. \end{aligned}$$

Per cui si avrà, qualunque sia  $q$ :

$$Z_n^{q+1} = \frac{n-2q+2}{2} Z_n^q + \frac{x}{2} \frac{dZ_n^q}{dx}$$

e questa relazione è valida in particolare per la  $J_n^q$  e la  $W_n^q$ .

Ora mostreremo che, come dalle relazioni del secondo paragrafo, si può dedurre da quelle del paragrafo precedente l'equazione differenziale caratteristica delle nostre funzioni.

Derivata detta relazione (10) rispetto ad  $x$  e sostituendo a  $\frac{dJ_n^{q+1}}{dx}$  e a  $\frac{dJ_n^{q-1}}{dx}$  i valori ricavati dalla (10) stessa si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 J_n^q}{dx^2} = & -\frac{q-1}{x^2} J_n^q + \frac{q-1}{x} \frac{dJ_n^q}{dx} - \frac{1}{x^2} J_n^{q+1} + \frac{1}{x} \left[ \frac{q}{x} J_n^{q+1} + \frac{1}{x} J_n^{q+2} - \frac{x}{4} J_n^q \right] - \\ & - \frac{1}{4} J_n^{q-1} - \frac{x}{4} \left[ \frac{q-2}{x} J_n^{q-1} + \frac{1}{x} J_n^q - \frac{x}{4} J_n^{q-2} \right]. \end{aligned}$$

Sommando membro a membro le equazioni che si ottengono dalla (9) cambiando in essa successivamente  $q$  in  $q-1$  e  $q$  in  $q+1$ , si ha:

$$(n-q+1) \left[ \frac{x^2}{4} J_n^{q-1} + J_n^{q+1} \right] + \frac{x^2}{4} J_n^{q-1} - J_n^{q+1} = \frac{x^2}{4} J_n^q + J_n^{q+2} + \frac{x^4}{16} J_n^{q-2} + \frac{x^2}{4} J_n^q.$$

Ricavata dalla (9) l'espressione di  $\frac{x^2}{4} J_n^{q-1} + J_n^{q+1}$ , dalla (10) moltiplicata per  $x$  l'espressione di  $\frac{x^2}{4} J_n^{q-1} - J_n^{q+1}$ , dalla (12) moltiplicata per  $x^2$  l'espressione di  $\frac{x^4}{16} J_n^{q-2} + J_n^{q+2}$  e sostituendo nella precedente uguaglianza si giunge alla relazione:

$$(n - q + 1)^2 J_n^q + (q - 1) J_n^q - x \frac{dJ_n^q}{dx} = x^2 J_n^q + x^2 \frac{d^2 J_n^q}{dx^2} + (q - 1) J_n^q - (q - 1)x \frac{dJ_n^q}{dx} - (q - 1) J_n^{q+1} + \frac{q - 1}{4} x^2 J_n^{q-1}.$$

Da ultimo, ricavata dalla (10) moltiplicata per  $(q - 1)x$  l'espressione di  $-(q - 1) J_n^{q+1} + \frac{(q - 1)x^2}{4} J_n^{q-1}$  e sostituita detta espressione nella precedente uguaglianza, si giunge all'equazione caratteristica delle nostre funzioni già stabilite al paragrafo secondo, valida, come sappiamo, per qualsivoglia valore di  $q$  e di  $n$ .

Ora supposto, come analiticamente è lecito,  $q$  variabile per valori interi anche nel campo dei numeri negativi, proponiamoci di determinare (analogamente a quanto è stato fatto al paragrafo 7) una funzione che sviluppata in serie secondo le potenze di  $z^{q-1}$  dia, nei coefficienti dello sviluppo, funzioni soddisfacenti alle relazioni ricorrenti (10) ed (11). Indicata tale funzione con  $F(x, z)$  e posto quindi:

$$F(x, z) = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} f_q(x) z^{q-1}$$

seguendo il procedimento del paragrafo 7 si trova che la funzione più generale che soddisfa alle condizioni volute è:

$$F(x, z) = K x^n z^n E^{\frac{4-x^2 z^2}{4z}}$$

dove  $K$  è una costante arbitraria ed  $E$  la base dei logaritmi neperiani.

Posto  $K = \frac{1}{2^n}$  sviluppiamo infatti la precedente funzione in serie seguendo il procedimento del primo paragrafo. Avremo:

$$F = \frac{1}{2^n} x^n z^n E^{\frac{4-x^2 z^2}{4z}} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(-1)^\beta \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta+n}}{\pi(\alpha)\pi(\beta)} z^{\beta-\alpha+n}$$

ed essendo pure

$$F = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} J_n^q z^{q-1}$$

posto:

$$\beta - \alpha + n = q - 1$$

si ricavano per  $J_n^q$  le espressioni seguenti:

$$(1) \quad J_n^q = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha+q-1-n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\alpha+2q-2-n}}{\pi(\alpha)\pi(\alpha+q-1-n)} \quad (q > n+1)$$

$$(2) \quad J_n^q = \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(-1)^\beta \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta+n}}{\pi(n-q+1+\beta)\pi(\beta)} \quad (q \leq n+1)$$

già da noi trovate per altra via al primo paragrafo.

Posto ora nella (1)  $q = n+1+s$  e nella (2)  $q = n+1-s$  con  $s$  intero e positivo, si ottiene:

$$J_n^{n+1+s} = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\alpha+s} \left(\frac{x}{2}\right)^{2\alpha+n+2s}}{\pi(\alpha)\pi(\alpha+s)} \quad (s = 0, 1, 2, \dots)$$

$$J_n^{n+1-s} = \sum_{\beta=0}^{\infty} \frac{(-1)^\beta \left(\frac{x}{2}\right)^{2\beta+n}}{\pi(s+\beta)\pi(\beta)} \quad (s = 0, 1, 2, \dots)$$

e dal confronto fra queste due ultime espressioni si deduce

$$(3) \quad J_n^{n+1+s} = (-1)^s \left(\frac{x}{2}\right)^{2s} J_n^{n+1-s} \quad (s = 0, 1, 2, \dots)$$

Questa relazione (3), che ricorda la (4) del primo paragrafo, è interessante perchè dà un significato alle  $J_n^q$  con  $q$  nullo o negativo.

§ 10. Estendiamo ora alle nostre funzioni alcune delle più notevoli relazioni alle quali soddisfano le ordinarie funzioni di Bessel.

La (7) del primo paragrafo, tenendo conto della (1) e della (4) dello stesso paragrafo, può scriversi così:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} E^{\frac{x}{2}} \left(z - \frac{1}{z}\right) &= J_{q-1}^q + J_{q+1}^q (z^2 + z^{-2}) + J_{q+3}^q (z^4 + z^{-4}) + \dots \\ &+ J_q^q (z - z^{-1}) + J_{q+2}^q (z^3 - z^{-3}) + \dots \end{aligned}$$

Poniamo in essa

$$z = E^{\varphi} \sqrt{-1}$$

dove al solito  $E$  indica la base dei logaritmi neperiani. Avremo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} E^{x\sqrt{-1}\sin\varphi} &= J_{q-1}^q + 2J_{q+1}^q \cos 2\varphi + 2J_{q+3}^q \cos 4\varphi + \dots \\ &+ \sqrt{-1} [2J_q^q \sin \varphi + 2J_{q+2}^q \sin 3\varphi + \dots]. \end{aligned}$$

Da quest'ultima relazione, supposti  $x$  e  $\varphi$  reali, deduciamo, uguagliando le parti reali e i coefficienti delle parti immaginarie:

$$(1) \quad \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} \cos(x \sin \varphi) = J_{q-1}^q + 2J_{q+1}^q \cos 2\varphi + 2J_{q+3}^q \cos 4\varphi + \dots$$

$$(1') \quad \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} \sin(x \sin \varphi) = 2J_q^q \sin \varphi + 2J_{q+2}^q \sin 3\varphi + \dots$$

o anche, cambiando nelle precedenti  $\varphi$  in  $\varphi + \frac{\pi}{2}$ :

$$(2) \quad \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} \cos(x \cos \varphi) = J_{q-1}^q - 2J_{q+1}^q \cos 2\varphi + 2J_{q+3}^q \cos 4\varphi - \dots$$

$$(2') \quad \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} \sin(x \cos \varphi) = 2J_q^q \cos \varphi - 2J_{q+2}^q \cos 3\varphi + \dots$$

Posto nelle (1) e (1')  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  si ricava in particolare:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} \cos x = J_{q-1}^q - 2J_{q+1}^q + 2J_{q+3}^q - 2J_{q+5}^q + \dots$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} \sin x = 2J_q^q - 2J_{q+2}^q + 2J_{q+4}^q - \dots$$

Dalle (1) e (1') seguono pure le seguenti relazioni assai note nel caso di  $q=1$ :

$$(3) \quad \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} = J_{q-1}^q + 2J_{q+1}^q + 2J_{q+3}^q + 2J_{q+5}^q + \dots$$

$$(3') \quad x \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} = 2J_q^q + 2 \cdot 3J_{q+2}^q + 2 \cdot 5J_{q+4}^q + 2 \cdot 7J_{q+6}^q + \dots$$

la prima si deduce dalla (1) ponendo  $\varphi=0$  e la seconda dalla (1') derivandola rispetto a  $\varphi$  e ponendo quindi  $\varphi=0$ .

Con l'introduzione dell'unità immaginaria  $i$  possiamo dare alle (1) e (1') la seguente forma:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} \cos(x \cos \varphi) = J_{q-1}^q + 2i^2 J_{q+1}^q \cos 2\varphi + 2i^4 J_{q+3}^q \cos 4\varphi + \dots$$

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} i \sin(x \cos \varphi) = 2iJ_q^q \cos \varphi + 2i^3 J_{q+2}^q \cos 3\varphi + \dots$$

e addizionandole membro a membro deduciamo:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} E^{ix \cos \varphi} = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon_s i^s J_{q+s-1}^q \cos s\varphi$$

essendo  $\varepsilon_s$  una costante che per  $s=0$  ha il valore uno e per  $s>0$  è uguale a due.

Ricordato ora che, a seconda che è  $r \geq s$ ,  $r = s > 0$ ,  $r = s = 0$ ,

$$\int_0^{\pi} \cos s\varphi \cos r\varphi d\varphi$$

ha rispettivamente i valori zero,  $\frac{\pi}{2}$  e  $\pi$ , si deduce facilmente dalla precedente uguaglianza la seguente espressione per la  $J_{q+s-1}^q$ :

$$J_{q+s-1}^q = \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} \frac{(-i)^s}{\pi} \int_0^{\pi} E^{ix \cos \varphi} \cos(s\varphi) d\varphi \quad (s=0, 1, 2 \dots)$$

dalla quale si ricava la seguente espressione assai semplice:

$$(4) \quad J_{q+s-1}^q = \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} J_s^q.$$

Le (3) e (3') sono casi particolari di una relazione molto più generale che mi propongo di stabilire.

Riprendiamo la (2):

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} \cos(x \cos \varphi) &= J_{q-1}^q - 2J_{q+1}^q \cos 2\varphi + 3J_{q+3}^q \cos 4\varphi - \dots \\ &+ (-1)^n 2J_{q+2n-1}^q \cos 2n\varphi + (-1)^{n+1} 2J_{q+2n-1}^q \cos 2(n+1)\varphi \dots \end{aligned}$$

Il secondo membro può essere trasformato in virtù dell'uguaglianza:

$$\begin{aligned} 2 \cos n\varphi &= (2 \cos \varphi)^n - \frac{n}{\pi(1)} (2 \cos \varphi)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{\pi(2)} (2 \cos \varphi)^{n-4} - \dots \\ &+ (-1)^s \frac{n(n-s-1)(n-s-2) \dots (n-2s+1)}{\pi(s)} (2 \cos \varphi)^{n-2s} + \dots \end{aligned}$$

che permette di mettere in vista, nella precedente relazione, il termine che contiene  $(\cos \varphi)^{2n}$ . Basta infatti osservare che dalla precedente uguaglianza



discendono le seguenti relazioni:

$$2 \cos (2n\varphi) = (2 \cos \varphi)^{2n} - \frac{2n}{\pi(1)} (2 \cos \varphi)^{2n-2} + \dots$$

$$2 \cos (2n + 2)\varphi + (2 \cos \varphi)^{2(n+1)} - \frac{2(n+1)}{\pi(1)} (2 \cos \varphi)^{2n} + \dots$$

per dedurre:

$$(5) \quad \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} \cos(x \cos \varphi) = \dots 2^{2n} \cos^{2n} \varphi \left[ (-1)^n J_{2n+q-1}^q + \frac{2(n+1)}{\pi(1)} (-1)^n J_{2n+q+1}^q + \dots \right. \\ \left. + (-1)^n J_{2n+q+2s-1}^q \frac{(2n+2s) \cdot (2n+s-1) \dots (2n+1)}{\pi(s)} + \dots \right].$$

D'altra parte  $\cos(x \cos \varphi)$  si può svolgere secondo le potenze di  $x \cos \varphi$  per cui si ha la seguente relazione:

$$(6) \quad \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} \cos(x \cos \varphi) = \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n} \cos^{2n} \varphi}{\pi(2n)}.$$

Uguagliando i coefficienti di  $\cos^{2n} \varphi$  delle (5) e (6) si ha infine:

$$(7) \quad x^{2n+q-1} = 2^{2n+q-1} \pi(2n) \left[ J_{2n+q-1}^q + \frac{2(n+1)}{\pi(1)} J_{2n+q+1}^q + \dots \right. \\ \left. + \frac{(2n+2s)(2n+s-1)(2n+s-2) \dots (2n+1)}{\pi(s)} J_{2n+q-1+2s}^q + \dots \right].$$

Partiamo ora dalla (2'):

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} \sin(x \cos \varphi) = 2J_q^q \cos \varphi - 2J_{q+2}^q \cos 3\varphi + 2J_{q+4}^q \cos 5\varphi - \dots \\ (-1)^n 2J_{q+2n}^q \cos (2n+1)\varphi + (-1)^{n+1} \cdot 2 \cdot J_{q+2n+2}^q \cos (2n+3)\varphi + \dots$$

Abbiamo dalla (4):

$$2 \cos (2n + 1)\varphi = (2 \cos \varphi)^{2n+1} - \frac{2n+1}{\pi(1)} (2 \cos \varphi)^{2n-1} + \\ + \frac{(2n+1)(2n-2)}{\pi(2)} (2 \cos \varphi)^{2n-3} - \dots$$

$$2 \cos (2n + 3)\varphi = (2 \cos \varphi)^{2n+3} - \frac{2n+3}{\pi(1)} (2 \cos \varphi)^{2n+1} + \\ + \frac{(2n+3)2n}{\pi(2)} (2 \cos \varphi)^{2n-1} - \dots$$

Fatte le opportune sostituzioni nella relazione precedente si ottiene:

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} \operatorname{sen}(x \cos \varphi) = \dots 2^{2n+1} \cos^{2n+1} \varphi \left[ (-1)^n J_{q+2n}^q + (-1)^n J_{q+2n+2}^q \frac{2n+3}{\pi(1)} + \dots \right. \\ \left. + \dots (-1)^n J_{2n+q+2s}^q \frac{(2n+2s+1)(2n+s) \dots (2n+2)}{\pi(s)} + \dots \right]$$

ed essendo anche:

$$(9) \quad \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} \operatorname{sen}(x \cos \varphi) = \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1} \cos^{2n+1} \varphi}{\pi(2n+1)}$$

uguagliando fra loro i coefficienti di  $\cos^{2n+1} \varphi$  delle (8) e (9) si ha infine:

$$(10) \quad x^{2n+q} = 2^{2n+q} \pi(2n+1) \left[ J_{2n+q}^q + \frac{2n+3}{\pi(1)} J_{2n+q+2}^q + \dots \right. \\ \left. + \frac{(2n+2s+1) \cdot (2n+s)(2n+s-1) \dots (2n+2)}{\pi(s)} J_{2n+q+2s}^q + \dots \right].$$

Posto ora uguale ad  $m$  nelle (7) e (10) l'esponente di  $x$  si ottiene da esse la seguente relazione valida per  $m \geq q-1$  che comprende le (3) e (3') come casi particolari:

$$x^m = 2^m \pi(m-q+1) \left[ J_m^q + \frac{m-q+3}{\pi(1)} J_{m+2}^q + \frac{(m-q+5)(m-q+2)}{\pi(2)} J_{m+4}^q + \dots \right. \\ \left. + \dots \frac{(m-q+1+2s)(m-q+1+(s-1))(m-q+1+(s-2)) \dots (m-q+1+1)}{\pi(s)} J_{m+2s}^q + \dots \right].$$

§ 11. Termineremo queste ricerche con la determinazione di una relazione che nel caso delle ordinarie funzioni di Bessel è comunemente nota col nome di formula dell'addizione e con brevi considerazioni sui punti zero della  $J_n^q(x)$ .

Dalla nota uguaglianza:

$$(1) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n^q(x) z^{n-q+i} = \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1} E^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})}$$

si deduce:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} J_n^q(x+y) z^{n-q+i} = \left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)^{q-1} E^{\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right)(z-z^{-1})}$$

e applicando la formula del binomio:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} J_n^q(x+y) z^{n-q+i} = \sum_{r=0}^{q-1} \binom{q-1}{r} \left(\frac{x}{2}\right)^{q-1-r} E^{\frac{x}{2}(z-z^{-1})} \left(\frac{y}{2}\right)^r E^{\frac{y}{2}(z-z^{-1})}$$

e quindi per la (1):

$$\begin{aligned} \sum_{-\infty}^{+\infty} J_n^q(x+y)z^{n-q+1} &= \sum_r^{q-1} \binom{q-1}{r} \left[ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m^{q-r}(x)z^{m-q+1+r} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} J_p^{r+1}(y)z^{p-r} \right] \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \left[ \sum_r^{q-1} J_m^{q-r}(x)J_p^{r+1}(y) \right] z^{m+p-q+1}. \end{aligned}$$

Uguagliando i coefficienti di  $z^{n-q+1}$  si ottiene:

$$J_n^q(x+y) = \sum_{r=0}^{q-1} \binom{q-1}{r} J_m^{q-r}(x)J_p^{r+1}(y) \quad (m+p=n)$$

o anche:

$$J_n^q(x+y) = \sum_r^{q-1} \binom{q-1}{r} \left[ \sum_{m=0}^n J_m^{q-r}(x)J_{n-m}^{r+1}(y) + \sum_{s=1}^{\infty} J_{n+s}^{q-r}(x)J_{-s}^{r+1}(y) + \sum_{s=1}^{\infty} J_{n+s}^{q-r}(x)J_{n+s}^{r+1}(y) \right]$$

e finalmente, tenendo conto della (4) del paragrafo primo, si ottiene:

$$\begin{aligned} (2) \quad J_n^q(x+y) &= \sum_r^{q-1} \binom{q-1}{r} \left[ \sum_{m=0}^n J_m^{q-r}(x)J_{n-m}^{r+1}(y) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^{s+q-r} (J_{n+s}^{q-r}(x)J_{s+2q-2}^{r+1}(y) + J_{s+2q-2}^q(x)J_{n+s}^{r+1}(y)) \right] \end{aligned}$$

formula complessa che permette di esprimere la  $J_n^q(x+y)$  in funzione delle  $J_s^p(x)$  e  $J_s^p(y)$  ( $p=1, 2 \dots q$ ) dei vari indici.

Nel caso di  $q=1$  la (2) si semplifica notevolmente e si ha:

$$J_n^1(x+y) = \sum_{m=0}^n J_m^1(x)J_{m-n}^1(x) + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s (J_{n+s}^1(x)J_s^1(y) + J_s^1(x)J_{n+s}^1(y)).$$

Nel caso più particolare di  $q=1$  e  $n=0$  si ottiene per la  $J_0^1(x+y)$  l'espressione seguente:

$$J_0^1(x+y) = J_0^1(x)J_0^1(y) - 2J_1^1(x)J_1^1(y) + 2J_2^1(x)J_2^1(y) - \dots$$

determinata da CARLO NEUMANN (4) fin dal 1867.

Per ciò che riguarda gli zeri della  $J_n^q(x)$  osserviamo che ricavate dalla (3) del paragrafo 6 le espressioni di  $J_{q-1}^q(x)$  e di  $J_0^1(x)$ , fra esse sussiste la relazione:

$$J_{q-1}^q(x) = \frac{x^{q-1}}{2^{q-1}} J_0^1(x)$$

che si può anche ottenere dalla (4) del paragrafo 10 ponendo  $s=0$ .

(4) C. NEUMANN, *Theorie der Bessel'schen Functionen*, p. 40 (Leipzig 1867).

Poichè, come è noto dalla teoria delle ordinarie funzioni di Bessel, la  $J_0'(x) = 0$  ha un numero infinito di radici reali positive, possiamo affermare che la  $J_{q-1}^q(x) = 0$  ha  $q - 1$  radici nulle e infinite radici reali e positive coincidenti con le radici della  $J_0'(x) = 0$ .

Dimostrata tale proprietà per la  $J_{q-1}^q(x) = 0$  questa si può estendere ad ogni  $J_{q-1+s}^q(x) = 0$  ( $s = 1, 2, \dots$ ).

Poniamo:

$$R_{q-1+s}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-q-1+s} J_{q-1+s}^q(x)$$

e deriviamo i due membri rispetto alla variabile  $\xi$  legata alla  $x$  dalla relazione:

$$\xi = \frac{x^2}{4}.$$

Abbiamo:

$$\frac{dR_{q-1+s}}{d\xi} = \left[ \frac{dJ_{q-1+s}^q}{dx} - \frac{q-1+s}{x} J_{q-1+s}^q \right] \left(\frac{x}{2}\right)^{-q+s}.$$

Per la (2) del paragrafo secondo cambiando, come è lecito  $n$  in  $q-1+s$ , si deduce:

$$\frac{dR_{q-1+s}}{d\xi} = -J_{q+s}^q \left(\frac{x}{2}\right)^{-q-s} = R_{q+s} \quad (s=0, 1, 2, \dots)$$

e poichè per la (4) del paragrafo secondo quest'ultima relazione sussiste col cambiamento di  $s$  in  $-s$ , possiamo affermare che, per qualsivoglia valore di  $n$  intero, fra due radici successive di  $R_n = 0$  ve ne sarà una di  $R_{n+1} = 0$ , per cui concludiamo che l'equazione  $J_n^q(x) = 0$  ( $n$  intero qualunque) ha infinite radici reali.

# Sur la loi de l'attraction

par N. NERONOFF (Leningrad - U. R. S. S.).

1. **La représentation du potentiel de la force d'attraction par une série infinie.** — Supposons la loi de l'attraction ayant telle forme que le potentiel de la force d'attraction agissant entre deux points matériels de masses  $M$  (le soleil) et  $m$  (une planète) s'exprime par la série

$$(1) \quad U = fmM \left( \frac{1}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho^2} + \frac{\mu}{\rho^3} + \frac{\nu}{\rho^4} + \dots + \frac{\kappa}{\rho^j} + \dots \right),$$

où  $\rho$  est leur distance et  $f$  désigne une constante. Cette série converge absolument et uniformément dans l'intervalle

$$(2) \quad \rho \geq \rho_0 > 0.$$

La force  $F$  d'attraction a l'expression

$$(3) \quad F = \frac{dU}{d\rho} = -fmM \left( \frac{1}{\rho^2} + \frac{2\lambda}{\rho^3} + \frac{3\mu}{\rho^4} + \frac{4\nu}{\rho^5} + \dots + \frac{j\kappa}{\rho^{j+1}} + \dots \right).$$

Les coefficients  $\lambda, \mu, \nu, \dots$  des séries précédentes peuvent être déterminés si nous prenons pour la fonction  $F$  une forme particulière admettant le développement suivant les puissances entières positives de  $\frac{1}{\rho}$ .

Si nous conservons la loi de l'attraction de NEWTON ( $\lambda = \mu = \nu = \dots = 0$ ), la position relative d'une planète par rapport au soleil se détermine au bout du temps  $t$  par les équations connues

$$(4) \quad \begin{aligned} n &= \sqrt{\frac{f(M+m)}{a^3}}, \quad \zeta = n(t - \tau), \quad u - e \sin u = \zeta, \\ r &= a(1 - e \cos u), \\ \text{tang} \frac{w}{2} &= \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \text{tang} \frac{u}{2}, \quad r = \frac{p}{1 - e \cos w}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \end{aligned}$$

où sont introduites les notations suivantes:  $a$  le demi grand axe de l'orbite elliptique de la planète;  $b$  son demi petit axe;  $e$  l'excentricité;  $r$  la distance du centre de gravité du soleil à celui de la planète;  $w$  l'anomalie vraie de

la planète;  $u$  l'anomalie excentrique;  $\zeta$  l'anomalie moyenne;  $\tau$  le moment du passage de la planète par le périhélie. En conservant les notations de la Mécanique céleste et la terminologie correspondante, introduisons les angles suivants déterminant la position de la planète dans l'espace par rapport au soleil, avec seulement cette distinction que le plan de l'équateur du soleil jouera le rôle du plan de l'ecliptique au 1.<sup>er</sup> janvier 1850:  $\theta$  la longitude du noeud ascendant du plan de l'orbite par rapport au plan de l'équateur du soleil;  $\varphi$  l'inclinaison de l'orbite par rapport au même plan;  $\bar{\omega}$  la longitude du périhélie;  $\bar{\nu}$  la longitude de la planète dans son orbite.

Alors les anomalies vraie et moyenne se présentent sous la forme

$$(5) \quad w = \bar{\nu} - \bar{\omega}, \quad \zeta = nt + \varepsilon - \bar{\omega}$$

si nous introduisons  $\varepsilon$  — la longitude moyenne de l'époque

$$(6) \quad \varepsilon = \bar{\omega} - n\tau.$$

Si la loi de l'attraction est différente de celle de NEWTON, les constantes  $a$ ,  $e$ ,  $\varphi$ ,  $\theta$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $\varepsilon$  dans les équations (4) du mouvement elliptique de la planète peuvent être considérées comme des fonctions inconnues qu'on doit trouver.

En admettant que la force d'attraction entre deux points matériels s'exprime par la série (3), calculons le potentiel des forces d'attraction, en envisageant le soleil comme un corps continu et la planète comme un point matériel, puisque sa masse est très faible par rapport à la masse du soleil.

Prenons l'ellipsoïde central d'inertie du soleil pour un ellipsoïde de rotation. Nous avons

$$(7) \quad U = fm \int_M \left( \frac{1}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho^2} + \frac{\mu}{\rho^3} + \frac{\nu}{\rho^4} + \dots + \frac{\alpha}{\rho^j} + \dots \right) dm,$$

où  $\rho$ ,  $\rho = PQ$ , désigne la distance de la planète  $P$  à un point arbitraire  $Q$  du volume du soleil (voir fig. 1). Soit  $G$  son centre de gravité. Comme auparavant, désignons la distance  $PG$  par  $r$ . Présentons la série (7) dans sa nouvelle forme en l'ordonnant suivant les puissances entières positives de  $\frac{1}{r}$

$$(8) \quad U = fm \left\{ \frac{M}{r} + \frac{\lambda M}{r^2} + \frac{2\mu' M + 3i \sin^2(\bar{\nu} - \theta) \sin^2 \varphi}{2r^3} + \left[ \frac{1}{r} \right]_4 \right\},$$

où sont introduites les notations abrégées

$$(9) \quad \mu' = \mu - \frac{i}{2M}, \quad i = A - C.$$

Enfin,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  désignent les moments d'inertie du soleil par rapport aux

axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité  $G$ . Les deux premiers sont relatifs aux axes disposés dans le plan de l'équateur du soleil,  $A$  étant égal à  $B$ , et le troisième  $C$  est relatif à l'axe de rotation du soleil.

En appliquant la méthode des fonctions majorantes, on peut montrer que

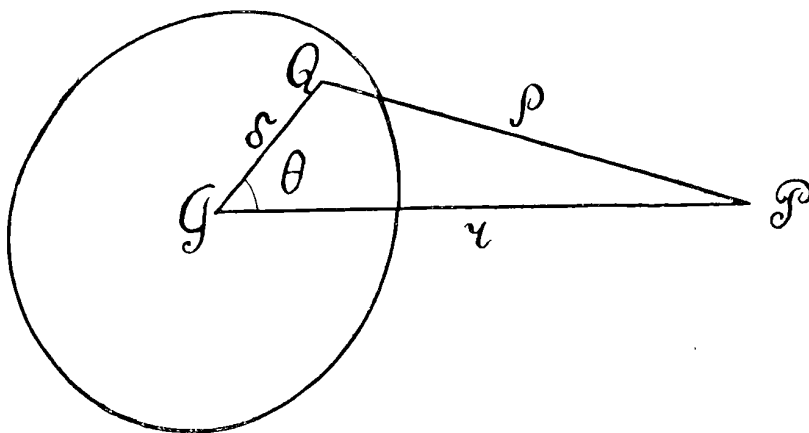


Fig. 1

la série (8) sera convergente absolument et uniformément si a lieu l'inégalité

$$(10) \quad r > \rho_0 + \delta_{\max},$$

où  $\delta_{\max}$  désigne le maximum de la distance du centre de gravité  $G$  du soleil à sa surface.

En effet, indiquons par  $\delta$  la distance  $GQ$  du centre de gravité  $G$  du soleil à un point arbitraire  $Q$  de son volume et par  $\Theta$  l'angle formé par les directions  $GP$  et  $GQ$  (voir fig. 1). Nous avons

$$(11) \quad \rho = \sqrt{r^2 - 2r\delta \cos \Theta + \delta^2}.$$

On sait que les coefficients du développement de  $\frac{r}{\rho}$  suivant les puissances entières positives de  $\frac{\delta}{r}$  sont les polynomes de LEGENDRE (en  $\cos \Theta$ ) dont la valeur absolue ne dépasse pas l'unité, quel que soit la valeur de l'angle  $\Theta$ . Cette remarque permet de signaler la fonction majorante pour le développement de  $\frac{1}{\rho}$  et, par conséquent, celle pour le développement de  $\frac{1}{\rho^j}$  suivant les puissances de  $\frac{1}{r}$

$$(12) \quad \frac{1}{\rho^j} << \frac{1}{(r - \delta_{\max})^j}, \quad r > \delta_{\max}, \quad j = 1, 2, 3, \dots$$

La valeur absolue du terme général de la série (1) convergeant dans l'intervalle  $\rho \geq \rho_0 > 0$  satisfait à l'inégalité

$$\frac{|\alpha|}{\rho_0^j} < \mathfrak{N},$$

où  $\mathfrak{N}$  désigne un nombre déterminé positif. D'ici

$$(13) \quad |\alpha| < \mathfrak{N}\rho_0^j.$$

Maintenant on peut trouver la fonction majorante pour le développement en  $\frac{1}{r}$  du terme général de la série (7)

$$(14) \quad \int_{\mathfrak{M}} \frac{|\alpha|}{\rho^j} d\mathfrak{m} \ll \frac{M\mathfrak{N}\rho_0^j}{(r - \delta_{\max})^j}$$

et, par conséquent, celle pour la même série (7)

$$(15) \quad \frac{U}{fm} = \int_{\mathfrak{M}} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{\lambda}{\rho^2} + \frac{\mu}{\rho^3} + \frac{\nu}{\rho^4} + \dots \right) d\mathfrak{m} \ll M\mathfrak{N} \sum_{j=1}^{\infty} \left( \frac{\rho_0}{r - \delta_{\max}} \right)^j.$$

C'est pourquoi la condition

$$\frac{\rho_0}{r - \delta_{\max}} < 1$$

ou la condition

$$r > \rho_0 + \delta_{\max}$$

est suffisante pour la convergence absolue et uniforme de la série (8).

De la même manière on démontre la convergence de la série obtenue de la série (8) par sa différentiation par rapport aux coordonnées rectangulaires de la planète ou à un paramètre dont ces coordonnées peuvent dépendre.

Dans le cas général, la force d'attraction cesse d'être centrale. Elle sera centrale si nous supposons que le soleil est limité par la surface de la sphère et que sa densité en chaque point ne dépend que de la distance de ce point au centre de la sphère ( $i = 0$ ). Alors dans ce cas particulier le potentiel des forces d'attraction peut être représenté par la série semblable à la série (1), mais les coefficients  $\lambda, \mu, \nu, \dots$  seront maintenant remplacés par leurs fonctions dépendant aussi de la loi du changement de la densité.

Dans les deux paragraphes suivants nous examinons quelques cas particuliers de la force d'attraction centrale quand le mouvement de la planète par rapport au soleil peut être étudié à l'aide des fonctions élémentaires et elliptiques.



**2. Le premier cas particulier.** — Si dans les séries (1) et (2) tous les coefficients, excepté  $\lambda$ , sont égaux à zéro et à part cela le soleil et la planète sont considérés comme des points matériels, la force d'attraction étant centrale, on peut montrer d'après l'intégrale de la force vive et celle des aires que les équations du mouvement de la planète ne différeront des équations du mouvement elliptique que par un facteur

$$\sqrt{\frac{p}{p+2\lambda}}$$

que l'anomalie vraie recevra alors (1). Si le dernier est un nombre rationnel, la trajectoire de la planète est une courbe fermée algébrique.

Le déplacement du périhélie à chaque révolution de la planète autour du soleil se présente par la série entière en  $\lambda$ , dont la valeur absolue est supposée petite,

$$2\pi\left(\sqrt{1+\frac{2\lambda}{p}}-1\right)=\frac{2\pi\lambda}{p}+\dots$$

**3. Le deuxième cas particulier.** — Tenons le soleil et la planète pour des points matériels et supposons que dans les séries (1) et (2) il n'y ait que les coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  qui soient différents de zéro. Déterminons le mouvement de la planète par les coordonnées polaires  $r$  et  $w$ . L'intégrale de la force vive et celle des aires dans notre cas ont la forme

$$(16) \quad \frac{m}{2}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r^2\left(\frac{dw}{dt}\right)^2\right]=U+\frac{mh}{2}, \quad r^2\frac{dw}{dt}=D,$$

en désignant par  $\frac{mh}{2}$  et  $D$  des constantes arbitraires. Par l'élimination du temps  $t$  nous obtenons, après l'intégration, l'équation de la trajectoire de la planète en coordonnées polaires

$$(17) \quad r=\frac{b_0}{4\mathcal{F}(\omega'+w)-b_1},$$

où par  $\mathcal{F}(w)$  est indiquée comme d'ordinaire la fonction elliptique de WEIERSTRASS ayant les invariants

$$g_2=\frac{3}{4}(b_1^2-b_0b_2), \quad g_3=\frac{1}{16}(3b_0b_1b_2-2b_1^3-b_0^2b_3),$$

(1) Cette forme de la loi d'attraction ainsi que quelques autres ont été examinées par NEWTON: voir ROUTH, *A treatise on Dynamics of a particle*, 1898, § 359, p. 233.

où

$$b_0 = \frac{2f\mu}{D^2}(M+m), \quad 3b_1 = -1 + \frac{2f\lambda}{D^2}(M+m),$$

$$3b_2 = \frac{2f}{D^2}(M+m), \quad b_3 = \frac{h}{D^2}.$$

Enfin  $2\omega$  et  $2\omega'$  sont les périodes, dont la première est réelle et la seconde purement imaginaire, de la fonction elliptique susmentionnée. Désignons par

$$e_1 = \wp(\omega), \quad e_2 = \wp(\omega + \omega'), \quad e_3 = \wp(\omega'), \quad e_1 > e_2 > e_3$$

les racines réelles du polynome

$$4x^3 - g_2x - g_3 = 4(x - e_1)(x - e_2)(x - e_3).$$

Quand l'angle polaire  $w$  croit de zéro jusqu'à  $\omega$ , la fonction  $\wp(\omega' + w)$  croit de  $e_3$  jusqu'à  $e_2$ . Avec l'accroissement ultérieur de  $w$ , la fonction  $\wp(\omega' + w)$  varie entre les mêmes limites. La valeur correspondante du rayon  $r$  varie entre un minimum et un maximum <sup>(1)</sup>.

L'équation de la trajectoire de la planète étant trouvée, déterminons maintenant la loi de son mouvement sur cette trajectoire. Dans ce but, nous revenons à l'intégrale des aires et y substituons la valeur de  $r$  trouvée de l'équation (17). En posant

$$u = \omega' + w, \quad \frac{b_1}{4} = \wp(v),$$

où  $v$  est une constante, nous aurons

$$\frac{16D}{b_0^2} dt = \frac{du}{[\wp(u) - \wp(v)]^2}.$$

Soit  $\tau$  le temps du passage de la planète par la position pour laquelle  $w = 0$ , c'est à dire  $u = \omega'$ . L'intégration donne

$$\frac{16D}{b_0^2} (t - \tau) = \int_{\omega'}^{\omega'+w} \frac{du}{[\wp(u) - \wp(v)]^2}.$$

En effectuant l'opération de l'intégration, nous obtenons une équation expri-

(1) La théorie générale de la relativité donne pour la trajectoire une équation ayant la même forme, voir FORSYTH, « Proceedings of the Royal Society », Section A, vol. XCVII, 1920, p. 145; MORLEY, « American Journal of Mathematics », vol. XLIII, 1921, p. 29; JANS, « Académie Royale de Belgique », Classe des sciences, 1923, Mémoires, t. VII, fasc. 5.

mant la loi du mouvement de la planète sur sa trajectoire

$$(18) \quad \frac{16D\mathcal{J}'(v)}{b_0^2} (t - \tau) = \frac{d}{dv} \frac{\log \frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u+v)} + 2u\zeta(v)}{\mathcal{J}'(v)} \Bigg|_{u=\omega'}^{u=\omega'+v},$$

où sont introduites les notations habituelles des fonctions de WEIERSTRASS.

Pour trouver le temps  $T$  s'écoulant entre les passages successifs de la planète par le périhélie, nous posons dans l'égalité (18)  $v = 2\omega$ . Il vient

$$T = \frac{b_0^2}{4D\mathcal{J}'(v)} \frac{d}{dv} \frac{\omega\zeta(v) - v\zeta(\omega)}{\mathcal{J}'(v)}.$$

Si les valeurs des coefficients  $\lambda$  et  $\mu$  sont petites, le déplacement du périhélie à chaque révolution de la planète autour du soleil peut être représenté par la série entière en  $\lambda$  et  $\mu$

$$2\omega - 2\pi = \frac{2\pi\lambda}{p} + \frac{6\pi\mu}{p^2} + \dots$$

La valeur du paramètre  $p$  dans le cas considéré diffère très peu de sa valeur dans le mouvement elliptique.

**4. Sur l'application de la méthode des approximations successives à l'intégration des équations différentielles du mouvement de la planète.** — En passant des cas particuliers examinés plus haut au cas général, employons la méthode de la variation des constantes arbitraires et admettons que les intégrales du mouvement étudié coïncident avec celles du mouvement elliptique, mais que les six constantes arbitraires  $\alpha, e, \varphi, \theta, \bar{\omega}, \varepsilon$  du dernier sont des fonctions inconnues du temps  $t$ . Intégrons le système obtenu d'équations différentielles par la méthode des approximations successives en admettant  $t_0$  pour la valeur initiale de la variable indépendante  $t$  et  $\alpha_0, e_0, \varphi_0, \theta_0, \bar{\omega}_0, \varepsilon_0$  pour les valeurs initiales des fonctions inconnues. Avant tout, nous cherchons l'intervalle de temps  $(t_0, t_0 + h)$  pour lequel cette méthode donne des séries convergentes, en supposant, pour simplifier les formules, que le soleil et la planète sont des points matériels et, par conséquent, la force d'attraction est centrale. Cette restriction ne s'étend pas au paragraphe suivant.

Introduisons la fonction perturbatrice  $R$

$$(19) \quad R = k^2 \left( \frac{\lambda}{r^2} + \frac{\mu}{r^3} + \frac{\nu}{r^4} + \dots \right),$$

où

$$k = \sqrt{f(M+m)} = na^2.$$

Alors nous aurons

$$(20) \quad U = m \left( \frac{k^2}{r} + R \right).$$

Les équations différentielles déterminant les fonctions inconnues se présentent dans la forme bien connue (4)

$$(21) \quad \begin{aligned} (1) \quad & \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ (2) \quad & \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin \varphi} \frac{\partial R}{\partial \varphi}, \\ (3) \quad & \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \varphi} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ (4) \quad & \frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} - \sqrt{1-e^2} \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ (5) \quad & \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin \varphi} \frac{\partial R}{\partial \theta} - \frac{\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} + \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} \right), \\ (6) \quad & \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \varphi} + \sqrt{1-e^2} \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}. \end{aligned}$$

La fonction perturbatrice  $R$  ne dépendant pas explicitement des variables  $\varphi$  et  $\theta$ , la deuxième équation et la cinquième du système précédent donnent  $\varphi = \text{const.}$ ,  $\theta = \text{const.}$ , c'est à dire le mouvement de la planète se produit dans un plan. Les équations différentielles (21) prennent la forme

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \quad \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} - \sqrt{1-e^2} \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} + \sqrt{1-e^2} \frac{1 - \sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e}. \end{aligned}$$

Au préalable nous examinerons un cas particulier quand la fonction pertu-

(4) TISSERAND, *Traité de Mécanique céleste*, t. 1, chap. IX. X.

batrice a la forme

$$(23) \quad R = \frac{k^2 \lambda}{r^2}.$$

Ce cas, déjà signalé antérieurement (§ 2) présente un certain intérêt, parce qu'ici comme la fonction perturbatrice on a pris le premier terme de son développement dans le cas général.

Nous avons

$$(24) \quad \begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial a} &= -\frac{2k^2 \lambda}{r^3} \frac{\partial r}{\partial a}, & \frac{\partial R}{\partial e} &= -\frac{2k^2 \lambda}{r^3} \frac{\partial r}{\partial e}, \\ \frac{\partial R}{\partial \varepsilon} &= -\frac{2k^2 \lambda}{r^3} \frac{\partial r}{\partial \varepsilon}, & \frac{\partial R}{\partial \omega} &= -\frac{2k^2 \lambda}{r^3} \frac{\partial r}{\partial \omega}. \end{aligned}$$

Le rayon vecteur  $r$  est une fonction implicite de  $t, a, e, \bar{\omega}, \varepsilon$  déterminée par le système d'équations

$$(25) \quad r = a(1 - e \cos u), \quad u - e \sin u = nt + \varepsilon - \bar{\omega}, \quad n = ka^{-\frac{3}{2}}.$$

D'ici

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial a} &= 1 - e \cos u - \frac{3net \sin u}{2(1 - e \cos u)}, & \frac{\partial r}{\partial e} &= a \frac{e - \cos u}{1 - e \cos u}, \\ \frac{\partial r}{\partial \varepsilon} &= \frac{ae \sin u}{1 - e \cos u}, & \frac{\partial r}{\partial \omega} &= -\frac{ae \sin u}{1 - e \cos u}. \end{aligned}$$

D'après les égalités précédentes, calculons les valeurs des dérivées (24) de la fonction perturbatrice et substituons ces dernières dans les équations (22). On a

$$(27) \quad \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{4n\lambda e \sin u}{(1 - e \cos u)^4}, \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= -\frac{2n\lambda \sqrt{1 - e^2}}{ae} \frac{e - \cos u}{(1 - e \cos u)^4}, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{2n\lambda(1 - e^2)}{a} \frac{\sin u}{(1 - e \cos u)^4}, \\ \frac{d\varepsilon}{dt} &= \frac{2n\lambda}{a(1 - e \cos u)^3} \left[ 2(1 - e \cos u) - \frac{3net \sin u}{1 - e \cos u} - \frac{e \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}} \frac{e - \cos u}{1 - e \cos u} \right]. \end{aligned}$$

Au lieu des variables  $a$  et  $e$  introduisons les variables  $x$  et  $y$  suivant les formules

$$a = a_0 x, \quad e = e_0 y.$$

Avec cela

$$x_0 = 1, \quad y_0 = 1.$$

En appliquant la méthode des approximations successives (1), il faut trouver un nombre positif  $\mathfrak{N}_1$  dépassant les valeurs absolues des seconds membres des équations différentielles (27) quand les variables  $t, x, y, \omega, \varepsilon$  varient dans les intervalles  $(t_0, t_0 + h)$ ,

$$(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x), (y_0 - \Delta y, y_0 + \Delta y), (\bar{\omega}_0 - \Delta \bar{\omega}, \bar{\omega}_0 + \Delta \bar{\omega}), (\varepsilon_0 - \Delta \varepsilon, \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon)$$

toutes les quantités  $\Delta t, \Delta x, \Delta y, \Delta \bar{\omega}, \Delta \varepsilon$  étant positives. Soient en outre  $\Delta x < 1, \Delta y < 1$  et  $t_0 = 0$ .

Le nombre  $h$  est égal à la plus petite des quantités

$$\Delta t, \frac{\Delta x}{\mathfrak{N}_1}, \frac{\Delta y}{\mathfrak{N}_1}, \frac{\Delta \bar{\omega}}{\mathfrak{N}_1}, \frac{\Delta \varepsilon}{\mathfrak{N}_1}.$$

Les variables  $t, \varepsilon, \bar{\omega}$  entrent dans les seconds membres des équations (27) sous le signe des fonctions trigonométriques, excepté la dernière équation, où le temps  $t$  paraît comme un multiplicateur. C'est pourquoi les quantités  $\Delta \bar{\omega}$  et  $\Delta \varepsilon$  peuvent être prises aussi grandes que l'on voudra et les nombres  $\frac{\Delta \bar{\omega}}{\mathfrak{N}_1}, \frac{\Delta \varepsilon}{\mathfrak{N}_1}$  n'influencent pas la valeur de  $h$ , qui se détermine par les inégalités

$$(28) \quad h \leq \Delta t, \quad h \leq \frac{\Delta x}{\mathfrak{N}_1}, \quad h \leq \frac{\Delta y}{\mathfrak{N}_1}.$$

Les équations (27) nous donnent

$$(29) \quad \begin{aligned} \left| \frac{dx}{dt} \right| &< \frac{4n_0 |\lambda| e_0 (1 + \Delta y)}{\alpha_0 (1 - \Delta x)^{\frac{3}{2}} [1 - e_0 (1 + \Delta y)]^4}, \\ \left| \frac{d\bar{\omega}}{dt} \right| &< \frac{4n_0 |\lambda|}{\alpha_0 e_0 (1 - \Delta x)^{\frac{5}{2}} (1 - \Delta y) [1 - e_0 (1 + \Delta y)]^4}, \\ \left| \frac{dy}{dt} \right| &< \frac{2n_0 |\lambda|}{\alpha_0 e_0 (1 - \Delta x)^{\frac{5}{2}} [1 - e_0 (1 + \Delta y)]^4}, \\ \left| \frac{d\varepsilon}{dt} \right| &< \frac{4n_0 |\lambda| (1 + e_0 + 3n_0 e_0 \Delta t)}{\alpha_0 (1 - \Delta x)^4 [1 - e_0 (1 + \Delta y)]^4}, \end{aligned}$$

où

$$n_0 = k\alpha_0^{-\frac{3}{2}}.$$

(1) GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, 1929, t. II, n° 388.

En considérant les seconds membres des inégalités (29), nous voyons que celui de la deuxième inégalité dépasse toujours le second membre de la première ainsi que celui de la troisième.

Plus loin nous envisageons deux variantes possibles: la première, quand la quantité  $\mathfrak{N}_1$  se détermine au moyen de la deuxième inégalité et la seconde, quand dans ce but nous employons la quatrième inégalité.

*1<sup>re</sup> variante.* - Déterminons la valeur de  $\mathfrak{N}_1$  par la deuxième inégalité

$$(30) \quad \mathfrak{N}_1 = \frac{4n_0 |\lambda|}{\alpha_0 e_0 (1 - \Delta x)^{\frac{5}{2}} (1 - \Delta y) [1 - e_0 (1 + \Delta y)]^4}.$$

Les valeurs de  $\Delta x$  et de  $\Delta y$  sont limitées par les inégalités

$$0 < \Delta x < 1, \quad 0 < \Delta y < 1.$$

Si les valeurs de  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$  sont données, le système suivant d'inégalités détermine  $h$

$$(31) \quad \begin{aligned} h \leq \Delta t, \quad h &\leq \frac{\alpha_0 e_0}{4n_0 |\lambda|} (1 - \Delta x)^{\frac{5}{2}} (1 - \Delta y) [1 - e_0 (1 + \Delta y)]^4 \Delta x, \\ h &\leq \frac{\alpha_0 e_0}{4n_0 |\lambda|} (1 - \Delta x)^{\frac{5}{2}} (1 - \Delta y) [1 - e_0 (1 + \Delta y)]^4 \Delta y. \end{aligned}$$

Invertissons le problème et cherchons les valeurs de  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$  correspondant au maximum de  $h$ . Les deux dernières des inégalités (31) permettent de conclure que ce maximum a lieu simultanément avec le maximum des fonctions

$$(1 - \Delta x)^{\frac{5}{2}} (1 - \Delta y) [1 - e_0 (1 + \Delta y)]^4 \Delta x \quad \text{et} \quad (1 - \Delta x)^{\frac{5}{2}} (1 - \Delta y) [1 - e_0 (1 + \Delta y)]^4 \Delta y.$$

La valeur de  $e_0$  étant supposée petite, les valeurs correspondantes de  $\Delta x$  et de  $\Delta y$

$$\Delta x = \Delta y = \frac{2}{9} - \frac{112}{729} e_0 + \dots$$

diffèrent peu de celles-ci

$$\Delta x = \Delta y = \frac{2}{9}$$

que nous maintenons pour plus de simplification.

C'est pourquoi nous prenons

$$(32) \quad h = \frac{1}{18} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{7}{2}} \frac{\alpha_0 e_0}{n_0 |\lambda|} \left(1 - \frac{11}{9} e_0\right)^4.$$

Le résultat obtenu reste vrai à condition que la valeur (30) de  $\mathfrak{N}_1$  dé-

passé la partie droite de la quatrième des inégalités (29) dans l'intervalle  $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$ ,  $(y_0 - \Delta y, y_0 + \Delta y)$ , où

$$x_0 = y_0 = 1, \quad \Delta x = \Delta y = \frac{2}{9}.$$

Introduisons la condition mentionnée ci-dessus

$$\Delta t < \frac{\left(\frac{7}{9}\right)^2 - e_0(1 + e_0)}{3n_0 e_0^2}.$$

En tenant compte de la dernière inégalité et de la première des inégalités (31), nous obtenons

$$(33) \quad |\lambda| > \frac{1}{6} \left(\frac{7}{9}\right)^3 \frac{a_0 e_0^3 \left(1 - \frac{11}{9} e_0\right)^4}{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}} e_0(1 + e_0)}.$$

Si l'inégalité (33) est satisfaite, l'intervalle de la convergence des séries données par la méthode des approximations successives se détermine par l'égalité (32).

2<sup>me</sup> variante. — Revenons, pour la détermination de  $\mathfrak{N}_1$ , à la quatrième des inégalités (29). Admettons

$$(34) \quad \mathfrak{N}_1 = \frac{4n_0 |\lambda| (1 + e_0 + 3n_0 e_0 \Delta t)}{a_0 (1 - \Delta x)^4 [1 - e_0 (1 + \Delta y)]^4}.$$

Les inégalités suivantes déterminent  $h$

$$(35) \quad h \leq \Delta t, \quad h \leq \frac{a_0}{4n_0 |\lambda|} \frac{(1 - \Delta x)^4 [1 - e_0 (1 + \Delta y)]^4 \Delta x}{1 + e_0 + 3n_0 e_0 \Delta t},$$

$$h \leq \frac{a_0}{4n_0 |\lambda|} \frac{(1 - \Delta x)^4 [1 - e_0 (1 + \Delta y)]^4 \Delta y}{1 + e_0 + 3n_0 e_0 \Delta t},$$

$\Delta t$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  étant envisagés comme des quantités données.

Comme antérieurement, nous invertissons le problème et cherchons le maximum simultané des fonctions  $(1 - \Delta x)^4 [1 - e_0 (1 + \Delta y)]^4 \Delta x$  et  $(1 - \Delta x)^4 [1 - e_0 (1 + \Delta y)]^4 \Delta y$ .

On peut admettre approximativement

$$\Delta x = \Delta y = \frac{1}{5}.$$



Après la substitution des valeurs trouvées de  $\Delta x$  et de  $\Delta y$ , nos inégalités (35) s'écrivent dans la forme de

$$h \leq \Delta t, \quad h \leq \frac{1}{20} \left(\frac{4}{5}\right)^4 \frac{a_0}{n_0 |\lambda|} \frac{\left(1 - \frac{6}{5} e_0\right)^4}{1 + e_0 + 3n_0 e_0 \Delta t},$$

d'où l'on peut déterminer la valeur de  $h$  et celle de  $\Delta t$  correspondant au maximum de  $h$

$$(36) \quad h = \Delta t = \frac{1}{6n_0 e_0} \left[ -(1 + e_0) + \sqrt{(1 + e_0)^2 + \frac{3}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^4 \frac{a_0 e_0}{|\lambda|} \left(1 - \frac{6}{5} e_0\right)^4} \right].$$

Notre raisonnement suppose que la valeur de  $\mathfrak{D}\zeta$ , mentionnée ci-dessus dépasse les parties droites des trois premières inégalités (29) dans l'intervalle  $(t_0, t_0 + \Delta t)$ ,  $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$ ,  $(y_0 - \Delta y, y_0 + \Delta y)$ , où

$$t_0 = 0, \quad x_0 = y_0 = 1, \quad \Delta t = h, \quad \Delta x = \Delta y = \frac{1}{5}.$$

D'après la remarque faite antérieurement concernant la deuxième des inégalité (29), il suffit pour cela qu'une seule inégalité soit satisfaite

$$(37) \quad e_0 \left[ 1 + e_0 + \sqrt{(1 + e_0)^2 + \frac{3}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^4 \frac{a_0 e_0}{|\lambda|} \left(1 - \frac{6}{5} e_0\right)^4} \right] > 2 \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ayant étudié le cas particulier où la fonction perturbatrice se présente dans la forme

$$R = \frac{k^2 \lambda}{r^2},$$

passons au cas général et considérons la force centrale d'attraction s'exprimant par la série (§ 1)

$$F = -mk^2 \left( \frac{1}{r^2} + \frac{2\lambda}{r^3} + \frac{3\mu}{r^4} + \frac{4\nu}{r^5} + \dots \right) = -mk^2 \left[ \frac{1}{r^2} + \frac{2\lambda}{r^3} + S(r) \right],$$

où

$$S(r) = \frac{3\mu}{r^4} + \frac{4\nu}{r^5} + \dots$$

Le potentiel aura la forme

$$U = mk^2 \left[ \frac{1}{r} + \frac{\lambda}{r^2} - \int_{\infty}^r S(r) dr \right].$$

L'expression de la fonction perturbatrice est la suivante :

$$R = k^2 \left[ \frac{\lambda}{r^2} - \int_{\infty}^r S(r) dr \right].$$

Nous devons calculer les dérivées partielles de la fonction  $R$  par rapport aux variables  $a, e, \bar{\omega}, \varepsilon$  et substituer leurs valeurs dans les équations différentielles de mouvement (22). Désignons par  $z$  une quelconque des variables  $a, e, \bar{\omega}, \varepsilon$ . Alors

$$\frac{\partial R}{\partial z} = -k^2 \left[ \frac{2\lambda}{r^3} + S(r) \right] \frac{\partial r}{\partial z}$$

et

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k^2 \lambda}{r^2} \right) = -\frac{2k^2 \lambda}{r^3} \frac{\partial r}{\partial z}.$$

Divisons la première des deux dernières égalités par la seconde

$$\frac{\partial R}{\partial z} = \left[ 1 + \frac{r^3}{2\lambda} S(r) \right] \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k^2 \lambda}{r^2} \right).$$

Si  $\lambda \neq 0$ , la fonction  $\frac{r^3}{2\lambda} S(r)$  bornée dans un intervalle ( $r \geq \rho_0$ ) tend vers zéro quand  $r$  croît indéfiniment. Soit dans un intervalle

$$\left| \frac{r^3}{2\lambda} S(r) \right| < \chi,$$

où  $\chi$  tend vers zéro avec la croissance de  $r$ .

Nous avons

$$(38) \quad \left| \frac{\partial R}{\partial z} \right| < (1 + \chi) \left| \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{k^2 \lambda}{r^2} \right) \right|.$$

Indiquons par  $\mathfrak{N}_2$  la quantité analogue à la quantité  $\mathfrak{N}_1$  du cas particulier précédent. De nos considérations il découle, d'après l'inégalité (38) et les équations (22),

$$\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_1(1 + \chi).$$

Dans la première variante du cas particulier précédent nous avons eu les intervalles suivants de la variation des variables  $x$  et  $y$ : ( $x_0 \pm \Delta x$ ) et ( $y_0 \pm \Delta y$ ), où  $x_0 = y_0 = 1$  et  $\Delta x = \Delta y = \frac{2}{9}$ .

Les intervalles de la variation des quantités  $a$  et  $e$  ( $a = a_0 x$ ,  $e = e_0 y$ ) seront respectivement

$$a_0 \left( 1 \pm \frac{2}{9} \right), \quad e_0 \left( 1 \pm \frac{2}{9} \right).$$

Trouvons l'intervalle correspondant ( $r_{\min}, r_{\max}$ ) de la variation de la variable  $r$ . En vertu de la formule

$$r = a(1 - e \cos u)$$

nous obtenons

$$r_{\min} = \frac{7}{9} a_0 \left(1 - \frac{11}{9} e_0\right), \quad r_{\max} = \frac{11}{9} a_0 \left(1 + \frac{11}{9} e_0\right).$$

Soit  $\chi_1$  satisfaisant à l'inégalité

$$\left| \frac{r^3}{2\lambda} S(r) \right| < \chi_1$$

dans l'intervalle

$$r_{\min} < r < r_{\max}.$$

De la même façon, aux intervalles de la variation des variables  $x$  et  $y$  dans la deuxième variante ( $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{5}$ ) correspondra l'intervalle  $(r_{\min}, r_{\max})$  de la variation de  $r$  défini par les égalités

$$r_{\min} = \frac{4}{5} a_0 \left(1 - \frac{6}{5} e_0\right), \quad r_{\max} = \frac{6}{5} a_0 \left(1 + \frac{6}{5} e_0\right).$$

Soit  $\chi_2$  satisfaisant à l'inégalité

$$\left| \frac{r^3}{2\lambda} S(r) \right| < \chi_2, \quad r_{\min} < r < r_{\max}.$$

Le deuxième intervalle est renfermé dans le premier et  $\chi_1 \geq \chi_2$ . En répétant tous les raisonnements antérieurs, nous aurons dans le cas général deux variantes:

*1-ère variante.* — Si

$$(39) \quad \frac{1}{6} \left(\frac{7}{9}\right)^3 \frac{a_0 e_0^3 \left(1 - \frac{11}{9} e_0\right)^4}{|\lambda| (1 + \chi_1) \left[1 - \left(\frac{9}{7}\right)^{\frac{1}{2}} e_0 (1 + e_0)\right]} < 1,$$

nous aurons

$$(40) \quad h = \frac{1}{18} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{7}{2}} a_0 e_0 \left(1 - \frac{11}{9} e_0\right)^4.$$

Les variables  $a$  et  $e$  seront comprises dans les intervalles

$$a_0 \left(1 \pm \frac{2}{9}\right), \quad e_0 \left(1 \pm \frac{2}{9}\right).$$

*2-ème variante.* — Si

$$(41) \quad e_0 \left[ 1 + e_0 + \sqrt{(1 + e_0)^2 + \frac{3}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^4 \frac{a_0 e_0 \left(1 - \frac{6}{5} e_0\right)^4}{|\lambda| (1 + \chi_2)}} \right] > 2 \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{2}},$$

on a

$$(42) \quad h = \frac{1}{6n_0 e_0} \left[ - (1 + e_0) + \sqrt{(1 + e_0)^2 + \frac{3}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^4 \frac{a_0 e_0 \left(1 - \frac{6}{5} e_0\right)^4}{|\lambda| (1 + \chi_2)}} \right].$$

Les valeurs des fonctions  $a$  et  $e$  varient respectivement entre les limites

$$a_0 \left(1 \pm \frac{1}{5}\right), \quad e_0 \left(1 \pm \frac{1}{5}\right).$$

L'intervalle de temps ( $t_0, t_0 + h$ ) pour lequel le procédé des approximations successives donne des séries convergentes, se trouve dans le cas général naturellement plus petit que dans le cas particulier précédent. Si  $a_0$  croît indéfiniment, les coefficients  $\chi_1$  et  $\chi_2$  tendent vers zéro et nous revenons aux résultats du cas particulier mentionné ci-dessus.

Dans ce qui précède nous avons supposé que le coefficient  $\lambda$  n'est pas égal à zéro. S'il est égal à zéro, on doit, en suivant la méthode précédente, examiner d'abord le cas particulier, où la fonction perturbatrice a la forme ( $\mu \neq 0$ )

$$R = \frac{k^2 \mu}{r^3}$$

et ensuite passer, par une voie analogue, au cas général de la force d'attraction centrale. La fonction  $S(r)$  aura l'expression

$$S(r) = \frac{4\nu}{r^5} + \dots$$

L'inégalité suivante détermine le coefficient  $\chi_3$  dans un intervalle ( $r_{\min}, r_{\max}$ ) de la variation de  $r$

$$\left| \frac{r^4}{3\mu} S(r) \right| < \chi_3, \quad r_{\min} < r < r_{\max},$$

où

$$r_{\min} = \frac{9}{11} a_0 \left(1 - \frac{13}{11} e_0\right), \quad r_{\max} = \frac{13}{11} a_0 \left(1 + \frac{13}{11} e_0\right).$$

Déterminons le coefficient  $\chi_4$  au moyen de l'inégalité

$$\left| \frac{r^4}{3\mu} S(r) \right| < \chi_4, \quad r_{\min} < r < r_{\max},$$

où

$$r_{\min} = \frac{5}{6} a_0 \left(1 - \frac{7}{6} e_0\right), \quad r_{\max} = \frac{7}{6} a_0 \left(1 + \frac{7}{6} e_0\right).$$

Il est évident que  $\chi_3 \geq \chi_4$ .

En définitive, nous aurons dans le cas général deux variantes:

1-<sup>ère</sup> variante. — Si

$$(43) \quad \frac{1}{11} \left( \frac{9}{11} \right)^4 \frac{a_0^2 e_0^3 \left( 1 - \frac{13}{11} e_0 \right)^5}{|\mu| (1 + \chi_3) \left[ 1 - \left( \frac{11}{9} \right)^{\frac{1}{2}} e_0 (1 + e_0) \right]} < 1,$$

nous avons

$$(44) \quad h = \frac{1}{33} \left( \frac{9}{11} \right)^{\frac{9}{2}} \frac{a_0^2 e_0 \left( 1 - \frac{13}{11} e_0 \right)^5}{n_0 |\mu| (1 + \chi_3)}.$$

Les variables  $a$  et  $e$  seront comprises dans les intervalles

$$a_0 \left( 1 \pm \frac{2}{11} \right), \quad e_0 \left( 1 \pm \frac{2}{11} \right).$$

2-<sup>ème</sup> variante. — Si

$$(45) \quad e_0 \left[ 1 + e_0 + \sqrt{(1 + e_0)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{5}{6} \right)^5 \frac{a_0^2 e_0 \left( 1 - \frac{7}{6} e_0 \right)^5}{|\mu| (1 + \chi_4)}} \right] > 2 \left( \frac{5}{6} \right)^{\frac{1}{2}},$$

on a

$$(46) \quad h = \frac{1}{6n_0 e_0} \left[ -(1 + e_0) + \sqrt{(1 + e_0)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{5}{6} \right)^5 \frac{a_0^2 e_0 \left( 1 - \frac{7}{6} e_0 \right)^5}{|\mu| (1 + \chi_4)}} \right].$$

Les valeurs des fonctions  $a$  et  $e$  varient respectivement entre les limites

$$a_0 \left( 1 \pm \frac{1}{6} \right), \quad e_0 \left( 1 \pm \frac{1}{6} \right).$$

Pour les grandes valeurs de  $a_0$  reste en force la remarque précédente, concernant les petites valeurs de  $\chi_3$  et de  $\chi_4$ .

Si nous nous bornons à la première approximation, l'erreur, ayant lieu quand nous calculons une quelconque des fonctions cherchées (pour le moment du temps compris dans l'intervalle mentionné ci-dessus), sera en grandeur absolue plus petite que

$$\frac{M}{A + B + C + D} [e^{(A+B+C+D)(t-t_0)} - 1 - (A + B + C + D)(t - t_0)],$$

où  $e$  est la base des logarithmes naturels et  $M, A, B, C, D$  désignent certaines quantités positives <sup>(1)</sup>.

(1) GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, 1929, t. II, n° 388.

Les expressions trouvées (40), (42), (44), (46) pour  $h$  nous montrent que l'intervalle de la convergence des séries obtenues par le procédé des approximations successives dépend de la relation  $\frac{e_0}{|\lambda|}$  si  $\lambda \neq 0$  ou de la relation  $\frac{e_0}{|\mu|}$  si  $\lambda = 0$ ,  $\mu \neq 0$ . Mais quelles que soient les valeurs des coefficients  $\lambda$  et  $\mu$ , si l'excentricité initiale  $e_0$  diffère peu de zéro, la valeur de  $h$  est très petite. Le cas  $e_0 = 0$  n'est pas l'objet de nos considérations.

**5. Le cas général.** — Dans le cas général nous envisageons le soleil comme un corps continu. Ici la force d'attraction cesse d'être centrale et l'expression de son potentiel a été trouvée par nous dans le paragraphe 1-er sous la forme suivante

$$U = fm \left\{ \frac{M}{r} + \frac{\lambda M}{r^2} + \frac{2\mu' M + 3i \sin^2(\bar{\nu} - \theta) \sin^2 \varphi}{2r^3} + \left[ \frac{1}{r} \right]_4 \right\},$$

où

$$\mu' = \mu - \frac{i}{2M}, \quad i = A - C.$$

Comme la masse  $m$  est très faible par rapport à la masse  $M$ , nous négligeons l'influence de la planète sur le mouvement du soleil et nous prenons

$$k = \sqrt{fM}.$$

Introduisons la notation abrégée  $\delta = \frac{3}{2} fi$ .

En vertu de l'équation  $U = m \left( \frac{k^2}{r} + R \right)$ , la fonction perturbatrice a la forme

$$(47) \quad R = k^2 \left( \frac{\lambda}{r^2} + \frac{\mu'}{r^3} \right) + \frac{\delta}{r^3} \sin^2(\bar{\nu} - \theta) \sin^2 \varphi + \dots$$

Revenons aux formules (4) du mouvement elliptique. De l'équation de KÉPLER nous avons le développement bien connu de l'anomalie excentrique  $u$  de la planète suivant les puissances de l'excentricité  $e$

$$(48) \quad u = \zeta + e \sin \zeta + \frac{e^2}{1.2} \sin 2\zeta + \dots + \frac{e^j}{1.2 \dots j} \frac{d^{j-1} \sin^j \zeta}{d\zeta^{j-1}} + \dots,$$

où

$$\zeta = nt + \varepsilon - \bar{\omega}. \quad \bullet$$

Laplace a démontré que la série précédente est convergente pourvu que  $e$  soit inférieur à la limite 0,662743...

Outre le développement (48), nous obtenons aussi d'autres développements

$$\begin{aligned}
 \frac{r}{a} &= 1 - e \cos \zeta + \frac{e^2}{2} (1 - \cos 2\zeta) + \dots, \\
 \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} &= 1 + 2e \cos \zeta + \frac{e^2}{2} (1 + 5 \cos 2\zeta) + \dots, \\
 \left(\frac{r}{a}\right)^{-3} &= 1 + 3e \cos \zeta + \frac{3e^2}{2} (1 + 3 \cos 2\zeta) + \dots, \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}
 \tag{49}$$

et enfin celui de l'anomalie vraie

$$w = \zeta + 2e \sin \zeta + \frac{5e^2}{2} \sin 2\zeta + \dots$$

D'après la dernière série il vient, en tenant compte de l'égalité  $\bar{v} = w + \omega$ ,

$$\begin{aligned}
 \sin^2(\bar{v} - \theta) &= \frac{1}{2} [1 - \cos (nt + \varepsilon - \theta)] + e [\cos (nt + \varepsilon + \bar{\omega} - 2\theta) - \\
 (50) \quad &- \cos (3nt + 3\varepsilon - \bar{\omega} - 2\theta)] + \frac{e^2}{4} [\cos 2(\bar{\omega} - \theta) + 8 \cos 2(nt + \varepsilon - \theta) - \\
 &- 9 \cos 2(2nt + 2\varepsilon - \bar{\omega} - \theta)] + \dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

En faisant la substitution au moyen des égalités (49) et (50), nous obtenons l'expression (47) de la fonction perturbatrice  $R$  dans la forme d'une série entière en  $e$

$$\begin{aligned}
 R &= \frac{k^2\lambda}{a^2} + \frac{k^2\mu'}{a^3} + \frac{\delta \sin^2 \varphi}{2a^3} [1 - \cos 2(nt + \varepsilon - \theta)] + \dots\dots\dots \\
 &+ e \left\{ \left( \frac{2k^2\lambda}{a^2} + \frac{3k^2\mu'}{a^3} \right) \cos (nt + \varepsilon - \bar{\omega}) + \frac{\delta \sin^2 \varphi}{4a^3} [6 \cos (nt + \varepsilon - \bar{\omega}) - \right. \\
 &\quad \left. - 7 \cos (3nt + 3\varepsilon - \bar{\omega} - 2\theta) + \cos (nt + \varepsilon + \bar{\omega} - 2\theta)] + \dots \right\} + \\
 (51) \quad &+ e^2 \left\{ \frac{k^2\lambda}{2a^2} [1 + 5 \cos 2(nt + \varepsilon - \bar{\omega})] + \frac{3k^2\mu'}{2a^3} [1 + 3 \cos 2(nt + \varepsilon - \bar{\omega})] + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\delta \sin^2 \varphi}{8a^3} [6 + 5 \cos 2(\bar{\omega} - \theta) + 18 \cos 2(nt + \varepsilon - \bar{\omega}) + 10 \cos 2(nt + \varepsilon - \theta) - \right. \\
 &\quad \left. - 39 \cos 2(2nt + 2\varepsilon - \bar{\omega} - \theta)] + \dots \right\} + \dots\dots\dots, \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

ayant en vue que pour les grandes planètes l'excentricité varie de

$e_0 = \sin 0^\circ 23' 31''{,}5$  (Vénus) jusqu'à  $e_0 = \sin 11^\circ 51' 53''{,}7$  (Mercure) et par conséquent reste petite (1).

Substituons les valeurs des dérivées partielles de la fonction perturbatrice par rapport aux variables  $a, e, \varphi, \theta, \omega, \varepsilon$  dans le système des équations différentielles (21) et intégrons les équations obtenues par la méthode des approximations successives.

Pour obtenir la première approximation, donnons aux variables  $a, e, \varphi, \theta, \bar{\omega}, \varepsilon$  entrant dans les parties droites de nos équations leurs valeurs initiales  $a_0, e_0, \varphi_0, \theta_0, \bar{\omega}_0, \varepsilon_0$ . Ces parties renfermeront des termes périodiques ayant les périodes  $\frac{2\pi}{n_0}, \frac{2\pi}{2n_0}, \frac{2\pi}{3n_0}, \dots$ , où  $n_0 = k\alpha_0^{-\frac{3}{2}}$ , ainsi que ceux non-périodiques. Dans le but de trouver les accroissements des fonctions  $a, e, \varphi, \theta, \bar{\omega}, \varepsilon$  correspondant à une révolution de la planète sur son orbite, nous prenons  $t_0$  et  $t_0 + T$  pour les limites de l'intégration dans les quadratures de la première approximation (ici  $T$  désigne la durée d'une révolution de la planète autour du soleil égale à  $\frac{2\pi}{n_0}$ ). C'est pourquoi nous omettons dans les équations différentielles de la première approximation les termes périodiques qui disparaîtraient également après la substitution des limites d'intégration. On a donc en première approximation

$$\begin{aligned}
 & 1) \frac{da}{dt} = \frac{2}{n_0 \alpha_0} \{ \dots \}, \\
 & 2) \frac{d\theta}{dt} = \frac{\delta \cos \varphi_0}{n_0 \alpha_0^5 \sqrt{1 - e_0^2}} \left\{ 1 + \frac{e_0^2}{4} [6 + 5 \cos 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0)] + \dots \right\}, \\
 & 3) \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{2\delta \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cos \varphi_0}{n_0 \alpha_0^5 \sqrt{1 - e_0^2}} \left\{ 1 + \frac{e_0^2}{4} [6 + 5 \cos 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0)] + \dots \right\} + \\
 & \quad + \frac{\sqrt{1 - e_0^2}}{n_0 \alpha_0^2} \left\{ 2 \left[ \frac{k^2 \lambda}{2\alpha_0^2} + \frac{3k^2 \mu'}{2\alpha_0^3} + \frac{\delta \sin^2 \varphi_0}{8\alpha_0^3} (6 + 5 \cos 2(\omega_0 - \theta_0)) \right] + \dots \right\}, \\
 & 4) \frac{de}{dt} = - \frac{\sqrt{1 - e_0^2}}{n_0 \alpha_0^2} \left\{ - \frac{5\delta e_0}{4\alpha_0^3} \sin^2 \varphi_0 \sin 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0) + \dots \right\} - \\
 & \quad - \sqrt{1 - e_0^2} \frac{1 - \sqrt{1 - e_0^2}}{n_0 \alpha_0^2 e_0} \{ \dots \},
 \end{aligned}
 \tag{52}$$

(1) CHARLIER, *Die Mechanik des Himmels*, 1902. Band 1. Tafel 1.



$$\begin{aligned}
 5) \quad \frac{d\varphi}{dt} &= -\frac{1}{n_0 a_0^2 \sqrt{1 - e_0^2} \sin \varphi_0} \left\{ \frac{5\delta e_0^2}{4a_0^3} \sin^2 \varphi_0 \sin 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0) + \dots \right\} - \\
 &\quad - \frac{\operatorname{tang} \frac{\varphi_0}{2}}{n_0 a_0^5 \sqrt{1 - e_0^2}} \left\{ -\frac{5\delta e_0^2}{4a_0^3} \sin^2 \varphi_0 \sin 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0) + \dots \right\}, \\
 6) \quad \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{n_0 a_0} \left\{ -\frac{2k^2\lambda}{a_0^3} - \frac{3k^2\mu'}{a_0^4} - \frac{3\delta \sin^2 \varphi_0}{2a_0^4} - \frac{3k\delta \sin^2 \varphi_0}{2a_0^{\frac{11}{2}}} t \sin 2(n_0 t + \varepsilon_0 - \theta_0) + \right. \\
 &\quad + \dots - \frac{3ke_0 t}{2a_0^{\frac{5}{2}}} \left[ -\left(\frac{2k^2\lambda}{a^2} + \frac{3k^2\mu'}{a^3}\right) \sin(n_0 t + \varepsilon_0 - \bar{\omega}_0) + \right. \\
 &\quad + \frac{\delta \sin^2 \varphi_0}{4a_0^3} (-6 \sin(n_0 t + \varepsilon_0 - \bar{\omega}_0) + 21 \sin(3n_0 t + 3\varepsilon_0 - \bar{\omega}_0 - 2\theta_0) - \\
 &\quad - \sin(n_0 t + \varepsilon_0 + \bar{\omega}_0 - 2\theta_0)) \left. \right] + e_0^2 \left[ -\frac{k^2\lambda}{a_0^3} - \frac{9k^2\mu'}{2a_0^4} + \right. \\
 (52) \quad &\quad + \frac{15k^3\lambda t}{9} \sin 2(n_0 t + \varepsilon_0 - \bar{\omega}_0) + \frac{27k^3\mu' t}{2a_0^{\frac{11}{2}}} \sin 2(n_0 t + \varepsilon_0 - \bar{\omega}_0) - \\
 &\quad - \frac{3\delta \sin^2 \varphi_0}{8a_0^4} (6 + 5 \cos 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0)) - \frac{3k\delta t \sin^2 \varphi_0}{4a_0^{\frac{11}{2}}} (-9 \sin 2(n_0 t + \varepsilon_0 - \bar{\omega}_0) - \\
 &\quad - 5 \sin 2(n_0 t + \varepsilon_0 - \theta_0) + 39 \cos 2(2n_0 t + 2\varepsilon_0 - \bar{\omega}_0 - \theta_0)) \left. \right] + \dots \left\{ + \right. \\
 &\quad + \frac{2\delta \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \cos \varphi_0}{n_0 a_0^5 \sqrt{1 - e_0^2}} \left\{ 1 + \frac{e_0^2}{4} (6 + 5 \cos 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0)) + \dots \right\} + \\
 &\quad + \sqrt{1 - e_0^2} \frac{1 - \sqrt{1 - e_0^2}}{n_0 a_0^2} \left\{ 2 \left[ \frac{k^2\lambda}{2a_0^3} + \frac{3k^2\mu'}{2a_0^3} + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\delta \sin^2 \varphi_0}{8a_0^3} (6 + 5 \cos 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0)) \right] + \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

Effectuons l'intégration de ces équations dans les limites mentionnées ci-dessus. L'opération de l'intégration demande la convergence uniforme des séries infinies par lesquelles s'expriment les dérivées partielles de la fonction perturbatrice. La question se simplifie dans le cas du paragraphe 4<sup>ème</sup> lorsque le soleil et la planète sont considérés comme des points matériels.

En effet, envisageons par exemple la dérivée partielle  $\frac{\partial R}{\partial a}$ . La fonction  $R$  ne dépendant, d'après l'égalité (19), que d'une variable  $r$ , on a

$$\frac{\partial R}{\partial a} = \frac{dR}{dr} \frac{\partial r}{\partial a}.$$

D'après les formules (4) du mouvement elliptique de la planète,

$$\frac{\partial r}{\partial a} = 1 - e \cos u - \frac{3net \sin u}{2(1 - e \cos u)}.$$

La dérivée  $\frac{dR}{dr}$  se présente sous forme d'une série entière en  $r$ , convergente si  $r \geq \rho_0$  (§ 1), dont tous les termes sont des fonctions holomorphes de l'excentricité  $e$  dans un domaine de la variation de  $e$ . En vertu du théorème connu de WEIERSTRASS (1), cette série est aussi une fonction holomorphe de  $e$ . Pareillement, de la considération de l'expression de la dérivée  $\frac{\partial r}{\partial a}$  on peut conclure qu'elle est une fonction holomorphe de  $e$ . Comme les deux dérivées  $\frac{dR}{dr}$  et  $\frac{\partial r}{\partial a}$  s'expriment par des séries entières en  $e$  convergentes dans un certain domaine, quelle que soit la valeur finie du paramètre  $t$ , il est évident que leur produit, c'est à dire la dérivée  $\frac{\partial R}{\partial a}$ , présente aussi une série entière en  $e$  convergente dans un certain domaine, quelle que soit la valeur finie du temps  $t$  et, par conséquent, convergente uniformément par rapport à  $t$ .

Retournons donc à l'intégration des équations différentielles de la première approximation. Nous avons les expressions suivantes pour les accroissements des fonctions inconnues présentées sous la forme des séries infinies

$$\begin{aligned} (53) \quad a \Big|_{t_0}^{t_0+T} &= 0, & \theta \Big|_{t_0}^{t_0+T} &= \frac{3\pi i \cos \varphi_0}{Ma_0^2} + \dots, \\ \bar{\omega} \Big|_{t_0}^{t_0+T} &= \frac{2\pi\lambda}{a_0} + \frac{6\pi\mu'}{a_0^2} + \frac{3\pi i \sin^2 \varphi_0}{4Ma_0^2} \left[ 8 + 5 \cos 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0) - 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_0}{2} \right] + \dots, \\ e \Big|_{t_0}^{t_0+T} &= \frac{15\pi i e_0 \sin^2 \varphi_0 \sin 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0)}{4Ma_0^2} + \dots, \\ \varphi \Big|_{t_0}^{t_0+T} &= - \frac{15\pi i e_0^2 \sin 2\varphi_0 \sin 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0)}{8Ma_0^2} + \dots, \\ \varepsilon \Big|_{t_0}^{t_0+T} &= \frac{8\pi\lambda}{a_0} + \frac{12\pi\mu'}{a_0^2} + \frac{3\pi i \sin^2 \varphi_0}{2Ma_0^2} \left[ 7 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_0}{2} - 3 \cos 2(n_0 t_0 + \varepsilon_0 - \theta_0) \right] + \dots \end{aligned}$$

Dans le système héliocentrique, l'angle  $\bar{\omega} - \theta$  est compris entre deux rayons dont l'un passe par le noeud ascendant et l'autre par le périhélie.

(1) GOURSAT, *ibidem*, n° 290.

Le déplacement du périhélie à chaque révolution de la planète a la forme de

$$(54) \quad (\bar{\omega} - \theta) \Big|_{t_0}^{t_0+T} = \frac{2\pi\lambda}{a_0} + \frac{6\pi\mu'}{a_0^2} + \frac{3\pi i}{4Ma_0^3} \{ [6 + 5 \cos 2(\bar{\omega}_0 - \theta_0)] \sin^2 \varphi_0 - 4 \cos^2 \varphi_0 \} + \dots$$

En posant  $i = 0$ , nous obtenons un résultat concordant avec les expressions (§§ 2, 3) trouvées par une autre voie et appliquées au cas particulier des orbites presque circulaires ( $p = a_0$ ).

Les premiers termes des séries (53) et (54) montrent que :

1) la variation des angles  $\theta$  et  $\varphi$  dépend du coefficient  $i$  caractérisant la distribution de la masse du soleil. C'est à cause de la variation de ces angles qu'a lieu le mouvement des noeuds du plan de l'orbite.

2) la variation de l'excentricité  $e$  dépend du même coefficient  $i$ .

3) le déplacement du périhélie dépend en même temps du coefficient  $i$  et des coefficients  $\lambda, \mu, \nu, \dots$  de la série (1).

Les valeurs exactes des coefficients  $\lambda, \mu, \nu, \dots$  peuvent être obtenues des calculs astronomiques. L'examen suivant ne permet de trouver que l'ordre de la grandeur du coefficient  $\lambda$ . C'est M. EINSTEIN qui a donné la formule suivante découlant de la théorie générale de la relativité pour le déplacement du périhélie à chaque révolution de la planète

$$\frac{24\pi^3 a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)} = \frac{6\pi f M}{p c^2},$$

où  $c$  désigne la vitesse de la lumière,  $p = \frac{b^2}{a}$  et pour les orbites presque circulaire  $p = a_0$ . Les autres notations coïncident avec les nôtres. Comme on sait, cette formule donne pour Mercure un résultat satisfaisant.

Si nous supposons que le coefficient  $\lambda$  n'est pas égal à zéro, on peut retenir seulement le premier terme dans la série (54) pour les valeurs de  $a_0$  suffisamment grandes

$$(55) \quad (\bar{\omega} - \theta) \Big|_{t_0}^{t_0+T} = \frac{2\pi\lambda}{a_0}$$

La comparaison de notre formule (55) avec celle de M. EINSTEIN donne la valeur approximative du coefficient  $\lambda$

$$\lambda = \frac{3fM}{c^2}.$$



# Su una rappresentazione piana dei complessi lineari.

Memoria di TULLIO VIOLA (a Torino).

---

**Sunto.** - *Studio della rappresentazione piana dei sistemi lineari di complessi lineari a una e due dimensioni secondo il metodo del MAYOR.*

1. L'applicazione degli ordinari metodi della Geometria Descrittiva (proiezioni ortogonale, centrale, quotata, ecc.) alla rappresentazione dei sistemi di forze nello spazio, conduce a un'eccessiva complicazione anche quando si cerchi la soluzione dei più elementari problemi della statica <sup>(1)</sup>: per questa ragione la statica grafica non ha trovato notevole applicazione pratica, fino ad oggi, alla risoluzione dei problemi riguardanti i sistemi dello spazio. Il MAYOR, ritenendo che questa difficoltà debba essere attribuita alla natura speciale degli elementi geometrici che sono in giuoco nella teoria dei sistemi di forze, propose, or sono molti anni, un nuovo metodo di rappresentazione, al cui principio fondamentale si ricollegano visibilmente gli studi più recenti del v. MISES <sup>(2)</sup>. Lo studio del bel libro del MAYOR, in vista delle applicazioni a questioni tecniche relative ai sistemi articolati a tre dimensioni e alle cupole, mi ha indotto alla ricerca che esporrò, intorno alla rappresentazione piana dei complessi lineari. Ma prima riassumerò brevemente gli elementi della teoria del MAYOR indispensabili per l'esatta comprensione del seguito.

Il principio del metodo è analogo a quello, ben noto, sul quale il CREMONA ha fondato la teoria delle *figure reciproche*. Può definirsi un « *metodo di rappresentazione dello spazio rigato* », in quanto l'elemento fondamentale rappresentato non è il punto, ma la retta. Poichè una retta dello spazio

---

<sup>(1)</sup> Per convincersi di ciò, basta che il lettore esamini per es. nel trattato di *Scienza delle Costruzioni* di C. GUIDI (Torino, Bona, 1922, pp. 44 e segg.), la complicata risoluzione grafica (in proiezione ortogonale) di un problema così semplice come la composizione di tre forze comunque situate nello spazio (cioè la determinazione della risultante di traslazione e del momento risultante)!

<sup>(2)</sup> B. MAYOR, *Statique graphique des systèmes de l'espace* (Lausanne-Paris, 1910). R. v. MISES, *Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik* (« Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik », Bd. 4, 1924, p. 155).

dipende da quattro parametri, la sua immagine nel piano deve essa pure dipendere da quattro parametri. Nel sistema del MAYOR tale immagine è costituita da una retta e da un punto. Fissiamo una volta per tutte, nello spazio, un sistema di forze ( $F_0$ ) che chiamiamo « Sistema direttore » e che supponiamo per semplicità ridotto ad una forza d'intensità  $\omega$  (risultante di traslazione) normale al piano  $\pi$  sul quale si vuol fare la rappresentazione e ad un momento (momento risultante) d'intensità  $\omega\alpha$ , il cui asse abbia la medesima direzione e il medesimo verso. Rispetto a una terna di assi cartesiani ortogonali, il cui asse  $z$  abbia direzione e verso di detta risultante e la cui origine  $O$  giaccia in  $\pi$ , le componenti del sistema direttore sono:

$$X_0 = 0, \quad Y_0 = 0, \quad Z_0 = \omega, \quad L_0 = 0, \quad M_0 = 0, \quad N_0 = \omega\alpha.$$

Le rette in involuzione col sistema direttore, cioè di momento nullo rispetto a questo sistema, costituiscono un complesso lineare (« complesso d'azione del sistema direttore ») la cui equazione può scriversi in coordinate omogenee ( $XYZLMN$ )

$$N + \alpha Z = 0 \quad (^3).$$

Una retta arbitraria ( $f$ )  $\equiv$  ( $XYZLMN$ ) dello spazio ammette sempre una coniugata ed una sola ( $f'$ ) rispetto al complesso d'azione del sistema direttore. Le coordinate ( $X'Y'Z'L'M'N'$ ) di questa coniugata sono date (a meno di un coefficiente di proporzionalità) dalle relazioni

$$X' = -X, \quad Y' = -Y, \quad Z' = \frac{1}{\alpha}N, \quad L' = -L, \quad M' = -M, \quad N' = \alpha Z.$$

( $f$ ) coincide con ( $f'$ ) sempre e solo quando appartiene al complesso (retta « singolare »). In caso contrario le due forze « coniugate l'una dell'altra », ( $F$ )  $\equiv$  ( $XYZ$ ), ( $F'$ )  $\equiv$  ( $X'Y'Z'$ ), l'una agente lungo ( $f$ ), l'altra lungo ( $f'$ ) costituiscono (a meno di un coefficiente di proporzionalità) un sistema equivalente al sistema direttore: esse dunque individuano lo stesso complesso d'azione. Ciò posto una retta ( $f$ ) dello spazio si rappresenta sul piano  $\pi$  con gli elementi seguenti che, in generale, la determinano completamente:

- 1°) la sua proiezione ortogonale  $f$  su  $\pi$ ;
- 2°) la traccia  $\varphi'$  su  $\pi$ , della sua coniugata ( $f'$ ).

A questi elementi è utile (e in certi casi necessario) aggiungere quelli che rappresentano la retta coniugata di ( $f$ ), cioè:

(<sup>3</sup>) ( $XYZ$ ) sono le componenti di una forza agente lungo la retta, ( $LMN$ ) le componenti del suo momento rispetto ad  $O$ . Esse, com'è noto, sono sempre legate dall'equazione  $LX + MY + NZ = 0$ .

3°) la proiezione ortogonale  $f'$  della retta ( $f$ );

4°) la traccia  $\varphi$  di ( $f$ ) su  $\pi$ .

Si dimostra che le proiezioni  $f$  ed  $f'$  di due rette coniugate ( $f$ ) ed ( $f'$ ) sono parallele e le tracce  $\varphi$  e  $\varphi'$  allineate con  $O$ . Naturalmente  $\varphi$  sta su  $f$  e  $\varphi'$  su  $f'$ . Se ( $f$ ) è singolare,  $f$  coincide con  $f'$ ,  $\varphi$  con  $\varphi'$ . Se ( $f$ ) incontra l'asse  $z$ , cioè l'asse centrale del sistema direttore (retta « speciale »),  $f$  passa per  $O$  e  $\varphi'$  è all'infinito (quindi comune ad  $f, f'$ ): se in particolare ( $f$ ) è normale a  $\pi$ ,  $f$  è indeterminata ed  $f'$  è la retta all' $\infty$  di  $\pi$ . Questa rappresentazione cade in difetto per le rette ( $f$ ) singolari e speciali ad un tempo (cioè incidenti e normali all'asse): si ha infatti allora un'indeterminazione analoga a quella che presentano, in proiezione ortogonale, le rette situate in un piano di profilo, indeterminazione che si può d'altra parte eliminare facilmente, per es. dando contemporaneamente la rappresentazione di un'altra retta incidente all'asse nello stesso punto, ma non singolare.

**2. Rappresentazione dei sistemi di forze e dei complessi lineari.** — Un sistema ( $F$ ) di forze comunque disposte nello spazio è sempre riducibile in modo univoco a due componenti, l'una  $F$  situata nel piano  $\pi$ , l'altra  $\Phi$  normale a  $\pi$ . Indichiamo analogamente con ( $F'$ ) il sistema costituito dalle forze coniugate delle singole forze che costituiscono ( $F$ ), rispetto al sistema direttore, con  $F'$  e  $\Phi'$  le due componenti di ( $F'$ ), l'una situata in  $\pi$ , l'altra normale a  $\pi$ . Si dimostra allora che gli elementi geometrici che rappresentano queste forze e cioè precisamente da una parte le linee d'azione  $f, f'$  delle  $F, F'$ ; dall'altra i punti d'applicazione  $\varphi, \varphi'$  delle  $\Phi, \Phi'$  si corrispondono in una stessa omotetia di centro  $O$ . In altre parole le rette  $f, f'$  sono parallele, i punti  $\varphi, \varphi'$  sono allineati con  $O$ , e il rapporto delle distanze di  $O$  dalle rette  $f, f'$ , è uguale a quello delle distanze  $O\varphi, O\varphi'$ . Indicando con ( $XYZLMN$ ) le sei coordinate del sistema ( $F$ ), quelle ( $X'Y'Z'L'M'N'$ ) del sistema ( $F'$ ) sono date ancora dalle relazioni

$$X' = -X, \quad Y' = -Y, \quad Z' = \frac{1}{a}N, \quad L' = -L, \quad M' = -M, \quad N' = aZ,$$

le coordinate cartesiane omogenee dei punti  $\varphi, \varphi'$  sono rispettivamente (a meno di un coefficiente di proporzionalità)

$$\begin{aligned} x_1 &= -M, & x_2 &= L, & x_3 &= Z, \\ x_1' &= -M, & x_2' &= L, & x_3' &= -\frac{1}{a}N, \end{aligned}$$

e le equazioni delle rette  $f, f'$  sono rispettivamente

$$\begin{aligned} Yx_1 - Xx_2 - Nx_3 &= 0, \\ Yx_1 - Xx_2 + aZx_3 &= 0. \end{aligned}$$

Il sistema  $(F)$  è riducibile a una sola risultante (e quindi anche il sistema  $(F')$ ), sempre e solo quando  $f$  passa per  $\varphi$  (e quindi anche  $f'$  per  $\varphi'$ ): il modo di rappresentazione descritto al n. 1 non è dunque che un caso particolare di questo. Se tale risultante è normale a  $\pi$ , allora il sistema coniugato  $(F')$  è riducibile a una coppia:  $f'$  e  $\varphi'$  sono all'  $\infty$  ed  $f$  è indeterminata. L'inverso avviene se  $(F)$  è riducibile a una coppia (\*).

È noto che le sei coordinate d'un sistema  $(F)$  di forze possono assumersi come coordinate omogenee del suo « complesso d'azione ». E inversamente ogni complesso lineare  $(\Gamma)$  può essere considerato come il complesso d'azione d'un sistema di forze  $(F)$ . Si vede dunque che i quattro elementi puramente geometrici  $f, f', \varphi, \varphi'$ , utilizzati nella rappresentazione dei sistemi di forze, valgono a rappresentare completamente non soltanto il complesso d'azione  $(\Gamma)$  d'un sistema di forze  $(F)$ , ma anche il suo « coniugato »  $(\Gamma')$  rispetto al sistema direttore cioè il complesso d'azione  $(\Gamma')$  del sistema  $(F')$ , coniugato di  $(F)$  rispetto al sistema direttore.

**3. Sistemi lineari di complessi lineari.** — Mi propongo ora di studiare la rappresentazione dei sistemi lineari di complessi lineari, di cui il MAYOR dà soltanto un rapido cenno limitatamente a quelli ad una sola dimensione, ma la cui importanza è notevole, perchè è appunto su questa rappresentazione dei complessi lineari che l'A. si appoggia per estendere allo spazio la nozione fondamentale nella statica grafica, di « poligono funicolare ». Siano

$$(\Gamma_i) \equiv (X_i Y_i Z_i L_i M_i N_i) \quad (i = 1, 2, \dots, p)$$

$p$  complessi lineari fra loro linearmente indipendenti: il che implica, com'è noto,  $p \leq 6$ . Si dice che essi determinano un « sistema lineare  $(C)$  a  $p - 1$  dimensioni », le coordinate  $(XYZLMN)$  di ogni complesso lineare  $(\Gamma)$  di questo sistema esprimendosi come combinazioni lineari delle coordinate omologhe dei complessi  $(\Gamma_i)$ :

$$\begin{aligned} X &= \sum_{i=1}^p \lambda_i X_i, & Y &= \sum_{i=1}^p \lambda_i Y_i, & Z &= \sum_{i=1}^p \lambda_i Z_i, \\ L &= \sum_{i=1}^p \lambda_i L_i, & M &= \sum_{i=1}^p \lambda_i M_i, & N &= \sum_{i=1}^p \lambda_i N_i. \end{aligned}$$

Usiamo anche la notazione abbreviata  $(\Gamma) = \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i \Gamma_i \right)$ .

(\*) Il caso  $N = Z = 0$  è l'unico veramente degenere, nel quale la rappresentazione cade in difetto e che noi quindi escluderemo nel seguito. Si ha quando  $(F)$  è riducibile a una forza e ad un momento entrambi normali all'asse.



Le coordinate cartesiane omogenee dei punti rappresentativi  $\varphi, \varphi'$  del complesso  $(\Gamma)$  saranno dunque proporzionali ai valori

$$(1) \quad x_1 = -\sum_{i=1}^p \lambda_i M_i, \quad x_2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i L_i, \quad x_3 = \sum_{i=1}^p \lambda_i Z_i,$$

$$(2) \quad x'_1 = -\sum_{i=1}^p \lambda_i M_i, \quad x'_2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i L_i, \quad x'_3 = -\frac{1}{a} \sum_{i=1}^p \lambda_i N_i,$$

mentre le coordinate plückeriane omogenee delle rette rappresentative  $f, f'$  dello stesso complesso saranno proporzionali ai valori

$$(3) \quad u_1 = \sum_{i=1}^p \lambda_i Y_i, \quad u_2 = -\sum_{i=1}^p \lambda_i X_i, \quad u_3 = -\sum_{i=1}^p \lambda_i N_i,$$

$$(4) \quad u'_1 = \sum_{i=1}^p \lambda_i Y_i, \quad u'_2 = -\sum_{i=1}^p \lambda_i X_i, \quad u'_3 = a \sum_{i=1}^p \lambda_i Z_i.$$

Queste formole mostrano che per  $p=2$ , quando il rapporto  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  varia, cioè quando  $(\Gamma)$  descrive il sistema o fascio  $(C)$ , la retta  $f$  genera il fascio piano avente per centro il punto  $C \equiv (f_1 f_2)$ , mentre la retta  $f'$  genera il fascio avente per centro il punto  $C' \equiv (f'_1 f'_2)$ . Parimenti il punto  $\varphi$  genera la punteggiata  $c \equiv (\varphi_1 \varphi_2)$ , il punto  $\varphi'$  la punteggiata  $c' \equiv (\varphi'_1 \varphi'_2)$ . Si conclude che ogni sistema lineare a una dimensione, di complessi lineari, può essere rappresentato da una coppia di rette  $c, c'$  e da una coppia di punti  $C, C'$ . La stessa rappresentazione vale per una congruenza lineare, che è l'insieme di tutte le rette comuni a tutti i complessi lineari che formano un sistema lineare a una dimensione.

Fissati nel piano i punti  $C, C'$  e le rette  $c, c'$ , ogni complesso del sistema lineare è determinato quando si precisi la posizione di uno solo dei quattro elementi  $ff'\varphi\varphi'$  che lo rappresentano. Sup-

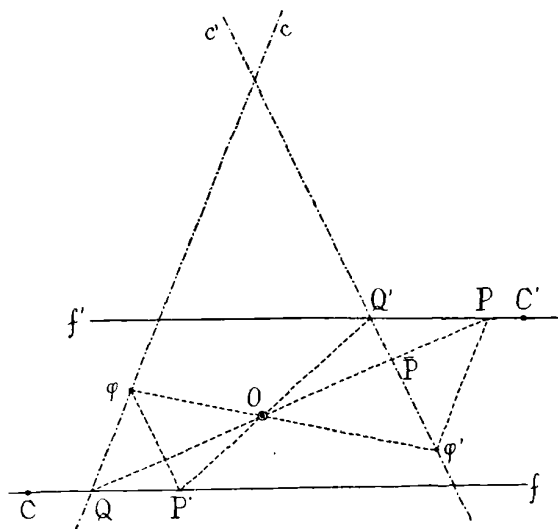


Fig. 1

poniamo per es. che sia precisata la posizione di  $f$ . Graficamente si opererà così. Intanto si potrà subito tracciare per  $C'$  la  $f'$  parallela alla  $f$ . Si proietterà poi da  $O$  il punto  $Q \equiv cf$  e si determinerà l'intersezione  $P$  di questa proiettante

con la  $f'$ . Da  $P$  si traccerà la parallela alla  $c$ . L'intersezione di questa parallela con la  $c'$  sarà il punto rappresentativo  $\varphi'$  e, per conseguenza, l'altro punto rappresentativo  $\varphi$  sarà l'intersezione della  $c$  con la  $O\varphi'$ . È chiaro che si può procedere in modo perfettamente simmetrico, proiettando da  $O$  il punto  $Q' \equiv c'f'$  nel punto  $P'$  di  $f$ . La parallela condotta per  $P'$  alla  $c'$  taglierà allora la  $c$  nel punto  $\varphi$ . Ma queste due operazioni non sono sempre *entrambe* eseguibili per *ogni* posizione della coppia di rette parallele  $ff'$ . La prima infatti cade in difetto quando  $f, f'$  sono parallele alla  $c$ , la seconda quando

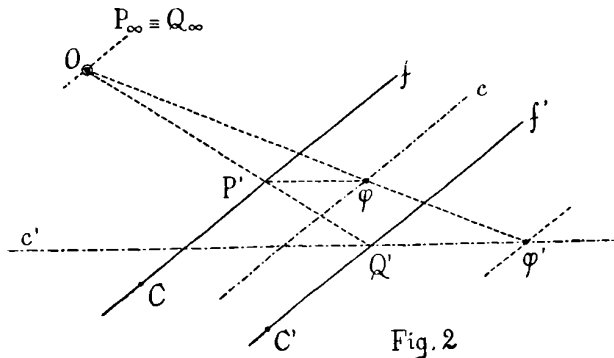


Fig. 2

esse sono parallele alla  $c'$ . La Fig. 2 rende manifesto che nel primo caso i punti  $P$  e  $Q$  vengono a cadere l'uno sull'altro sulla retta all'  $\infty$ .

Quando  $f$  passa per  $C'$ , allora anche  $f'$  passa per  $C$  e i due punti  $\varphi, \varphi'$  vengono a cadere entrambi nell'intersezione delle rette  $c, c'$ . D'altra parte, a prescindere da ogni considerazione sui sistemi lineari, un complesso per il quale le rette rappresentative  $f, f'$  sono identiche, dev'essere tale che  $N = -aZ$  (come risulta dalle equazioni sopra scritte), cioè  $N + aZ = 0$ , e cioè il complesso è in involuzione col sistema direttore. E le formole che danno le coordinate dei punti  $\varphi, \varphi'$ , mostrano che questi sono necessariamente uniti.

Le punteggiate  $c, c'$  e i fasci  $C, C'$  sono fra loro legati da corrispondenze proiettive che è facile individuare in modo geometrico. Infatti basta osservare che le punteggiate  $c, c'$  sono prospettive con centro  $O$ , i fasci  $C, C'$  prospettivi con asse la retta all'  $\infty$ ; tra  $c$  e  $C'$  il raggio limite di questo fascio è  $C'O$ , e tra  $c'$  e  $C$  il raggio limite è  $CO$ ; finalmente al punto  $cc'$  corrisponde nei fasci  $C$  e  $C'$ , come sopra si è detto, il raggio  $CC'$ . Si hanno così *tre* quaterne di elementi corrispondenti e le quattro proiettività sono determinate.

Tre sono i casi degeneri di effettiva indeterminazione, quelli in cui si ha  $\frac{N_1}{N_2} = \frac{Z_1}{Z_2}$ , oppure  $\frac{M_1}{M_2} = \frac{L_1}{L_2}$ , oppure  $\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{X_1}{X_2}$ . Nel primo caso, infatti, le due rette  $c, c'$  sono parallele e i punti  $C, C'$  sono allineati col centro  $O$ , con-

dizioni queste che non possono mai verificarsi separatamente. Il secondo e il terzo caso sono duali l'uno dell'altro. Se  $\frac{M_1}{M_2} = \frac{L_1}{L_2}$ , le rette  $c, c'$  si confondono in una sola passante per il centro  $O$ ; se invece  $\frac{Y_1}{Y_2} = \frac{X_1}{X_2}$ , i punti  $C, C'$  si confondono in uno solo all' $\infty$ . E qui pure non può accadere che le rette  $c, c'$  coincidano senza passare per  $O$ , o che l'una di esse passi per  $O$  senza che vi passi anche l'altra, coincidendo così con la prima; nè può accadere — dualmente — che i punti  $C$  e  $C'$  coincidano al finito, o che l'uno di essi sia all' $\infty$  senza che vi sia anche l'altro, coincidendo così col primo.

Inversamente, presi ad arbitrio nel piano due punti  $C, C'$  al finito, distinti e non allineati con  $O$ , e due rette  $c, c'$  non parallele e non passanti nè l'una nè l'altra per  $O$ , questi quattro elementi valgono sempre a rappresentare un sistema lineare ad una dimensione ed uno solo. Basta infatti porre le quattro forme di prima specie  $c, c', C, C'$  in corrispondenza proiettiva fra di loro, stabilendo fra  $c$  e  $c'$  la prospettiva di centro  $O$ , fra  $C$  e  $C'$  la prospettiva di asse la retta all' $\infty$ , e fra  $C$  e  $c', C'$  e  $c$  le due proiettività definite geometricamente dalle terne di elementi corrispondenti che poco sopra abbiamo individuate.

Ancora risulta manifesto da quel che precede che, quando  $f$  descrive il fascio di centro  $C$ , il punto  $P$ , intersezione della retta  $OQ$  del fascio di centro  $O$  con la retta  $f'$  del fascio di centro  $C'$  (rette che si corrispondono in una proiettività), descrive necessariamente una parabola con asse parallelo alla retta  $c$  <sup>(5)</sup>. Parimenti il punto  $P'$  descrive una parabola con asse parallelo alla retta  $c'$ .

I complessi che appartengono al nostro sistema hanno in comune una congruenza lineare. Le due direttrici  $d_1, d_2$  di questa congruenza possono essere reali (distinte o coincidenti) o immaginarie: nel primo caso esse sono le direttrici dei due complessi lineari speciali appartenenti al sistema (o coincidono con la direttrice dell'unico complesso lineare speciale appartenente al sistema), nel secondo il sistema non contiene alcun complesso lineare speciale. Il primo caso si ha quando la retta  $c'$  taglia la (o è tangente alla) parabola descritta da  $P$  o, il che è lo stesso, quando la proiettività che intercede fra le due punteggiate sovrapposte a  $c'$ , descritte da  $\varphi'$  e dalla proiezione  $\bar{P}$  di  $P$  da  $O$  su  $c'$ , è iperbolica (o parabolica) <sup>(6)</sup>.

<sup>(5)</sup> Infatti  $P$  raggiunge la retta all' $\infty$  una sola volta. Perchè, se  $P$  è all' $\infty$ , allora  $OQ$  è parallela ad  $f'$  e quindi ad  $f$ . Dunque  $Q$  è all' $\infty$ , perciò  $f$  è parallela a  $c$  e  $P$  è all' $\infty$  su  $c$ .

<sup>(6)</sup> Si vede allora che la medesima eventualità deve presentarsi nei rapporti della retta  $c$  con la parabola descritta da  $P'$ .

4. Per i sistemi lineari ( $C$ ) a più di una dimensione ( $p = 3, 4, 5$ ), le costruzioni grafiche possono farsi in vario modo. Si può per es. operare per induzione: allora, quanto alla rappresentazione dei complessi base  $(\Gamma_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ), sarà necessario che, fatta esclusione — se si vuole — di due di essi, per es.  $(\Gamma_{p-1})(\Gamma_p)$  (alla rappresentazione dei quali si potrà sostituire, per semplicità, quella del loro fascio), tutti gli altri siano rappresentati ciascuno in modo completo (e cioè dando per ciascuno per es. la retta  $f_i$  e il punto  $\varphi'_i$ , poichè, salve eccezioni, questi due elementi permettono di trovare gli altri due). Assegnati i valori dei parametri  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ , si troverà la rappresentazione del complesso  $(\Gamma) \equiv (\lambda_1\Gamma_1 + \lambda_2\Gamma_2 + \dots + \lambda_p\Gamma_p)$  trovando prima, nel sistema a  $p - 2$  dimensioni i cui complessi base sono  $(\Gamma_2)(\Gamma_3) \dots (\Gamma_p)$ , la rappresentazione del complesso  $(\bar{\Gamma}) \equiv (\lambda_2\Gamma_2 + \lambda_3\Gamma_3 + \dots + \lambda_p\Gamma_p)$ , e poi quello del complesso  $(\Gamma) \equiv (\lambda_1\Gamma_1 + \bar{\Gamma})$  nel fascio  $(\Gamma_1)(\bar{\Gamma})$ . Se il complesso  $(\Gamma)$  è assegnato non mediante i valori dei parametri  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ , ma mediante uno o due dei suoi quattro elementi rappresentativi  $ff'\varphi\varphi'$ , sarà possibile individuare univocamente gli altri elementi soltanto se quelli dati valgono a determinare, nel loro insieme e a meno di un coefficiente di proporzionalità, tutti i  $p$  parametri di  $(\Gamma)$ . E precisamente sarà possibile assegnare *ad arbitrio* un certo numero di elementi rappresentativi di  $(\Gamma)$ , soltanto se questi, nel loro insieme e sempre a meno di un coefficiente di proporzionalità, determinano *una sola volta* ciascuno dei  $p$  parametri di  $(\Gamma)$ . Esaminando le formole sopra scritte, possiamo comporre il seguente specchio:

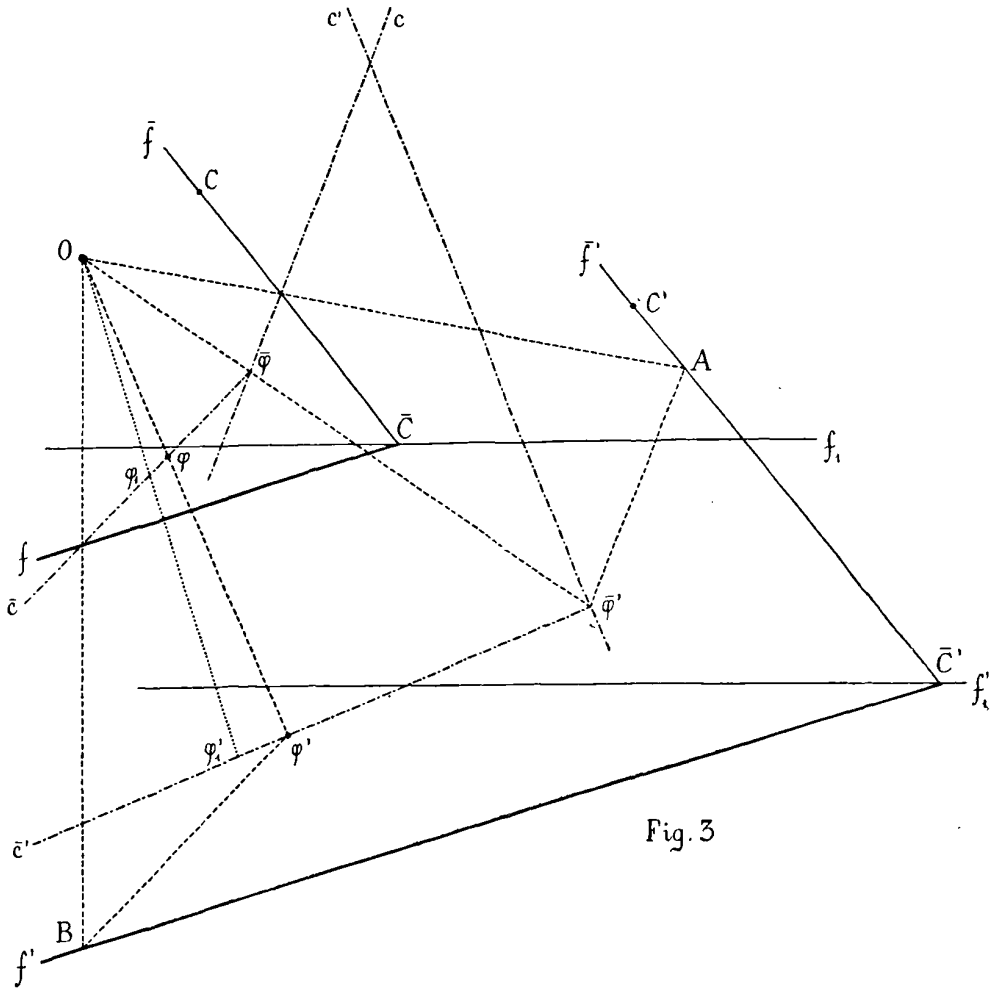
Per	Assegnati ad arbitrio			
		op.	op.	op.
$p = 3$	$f$	$f'$	$\varphi$	$\varphi'$
$p = 4$	$ff'$	—	$\varphi\varphi'$	—
$p = 5$	$f\varphi'$	$f'\varphi$	—	—

Ognuno di questi casi darà luogo a problemi particolari di rappresentazione la cui soluzione sarà affidata all'abilità dell'operatore.

Diamo per es. la costruzione completa, essendo assegnato l'elemento  $f$ , nel caso  $p = 3$  (« *Rete di complessi lineari* »).

Il fascio  $(\Gamma_2)(\Gamma_3)$  sia rappresentato mediante i due centri  $C, C'$  e le due direttrici  $c, c'$ . Proiettiamo da  $C$  il punto  $\bar{C} \equiv (ff_1)$  e da  $C'$  tracciamo la parallela a questa retta. Queste due parallele sono manifestamente le  $\bar{f}, f'$  rap-

presentative del complesso  $(\bar{\Gamma})$ . La  $f'$  è dunque la parallela alla  $f$  condotta per il punto  $\bar{C}' \equiv (\bar{f}', f_1')$ . Per trovare gli elementi  $\varphi, \varphi'$ , proiettiamo il punto  $c\bar{f}$  da  $O$  su  $\bar{f}'$  in  $A$ . Per  $A$  conduciamo la parallela alla  $c$  fino a incontrare la  $c'$



in  $\bar{f}'$ . Da  $O$  proiettiamo  $\bar{c}'$  su  $c$  in  $\bar{\varphi}$ . Completata così la rappresentazione del complesso  $(\bar{\Gamma})$ , conduciamo le rette  $\bar{c} \equiv (\bar{\varphi}, \varphi_1)$  e  $\bar{c}' \equiv (\bar{\varphi}', \varphi_1')$ . I quattro elementi  $\bar{C}, \bar{C}', \bar{c}, \bar{c}'$  rappresentano manifestamente il fascio  $(\Gamma_1)(\bar{\Gamma})$ . Si proseguirà dunque proiettando da  $O$  il punto  $c\bar{f}$  in  $B$  su  $f'$ . Per  $B$  si condurrà la parallela alla  $\bar{c}$  fino ad incontrare la  $\bar{c}'$  in  $\varphi'$ . Infine il punto  $\varphi$  si troverà nell'intersezione della  $O\varphi'$  con la  $\bar{c}$ .

Non ci soffermiamo sui casi degeneri che possono presentarsi. Osserviamo invece, in base alle formole sopra scritte, che due qualunque dei quattro elementi  $ff'\varphi\varphi'$  si corrispondono manifestamente in una proiettività. Le rispettive equazioni si possono ottenere ricavando i valori dei parametri  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  da una delle quattro righe (1), (2), (3), (4) (n. 3) (ammesso che il relativo determinante non sia nullo) e sostituendoli in una delle altre tre. Precisamente è facile verificare che gli elementi  $ff'$  si corrispondono in un'omotetia il cui centro  $Q$  è il punto della retta  $CC'$  tale che il rapporto (rapporto dell'omotetia) dei segmenti orientati  $\overline{QC}, \overline{QC'}$  è uguale in valore assoluto e in segno, a quello delle distanze orientate  $Cf_1, C'f_1'$  (e quindi è l'intersezione della  $CC'$  con la congiungente i piedi delle perpendicolari condotte da  $C$  alla  $f_1$  e da  $C'$  alla  $f_1'$ ). Dunque i punti  $C, C'$  si corrispondono in quest'omotetia. Gli elementi  $\varphi\varphi'$  si corrispondono in un'omologia di centro  $O$ , in cui asse è una retta passante per il punto  $cc'$ : se si proietta un punto  $\bar{\varphi}$  qualunque della  $c$  da  $O$  su  $c'$  in  $\bar{\varphi}'$ , un altro punto di detto asse è l'intersezione delle rette  $\bar{\varphi}\varphi_1, \bar{\varphi}'\varphi_1'$  (Fig. 4). Dunque le rette  $c, c'$  si corrispondono in quest'omologia.

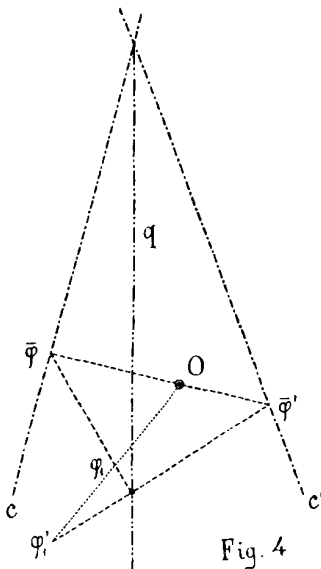


Fig. 4

Anche le reciprocità fra gli elementi  $f$  e  $\varphi$  o  $\varphi'$ , oppure tra  $f'$  e  $\varphi'$  o  $\varphi$ , si possono caratterizzare facilmente dando quattro coppie di elementi corrispondenti. Così per es. si può caratterizzare la prima osservando che ad  $f_1$  deve

corrispondere  $\varphi_1$ , alla retta  $CC'$  il punto  $cc'$ , alla retta  $CO$  l'intersezione della retta  $c$  con la parallela alla  $c'$  condotta per  $O$ ; infine, per avere una quarta coppia di elementi corrispondenti, si può scegliere una retta  $f$  qualunque uscente dall'intersezione delle rette  $CC'$  ed  $f_1$  (senza coincidere però nè con l'una nè con l'altra di queste due rette): e ciò per poter tracciare senz'altro i due assi  $\bar{c}, c$  che devono in questo caso uscire dal punto  $cc'$ , come mostra la Fig. 5.

Può interessare anche di conoscere l'equazione della conica dei punti autoreciproci, che si ottiene facilmente mediante eliminazione di  $\lambda_1\lambda_2\lambda_3u_1u_2u_3$  dalle relazioni (1), (3) (n. 3) unitamente alla

$$u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 = 0.$$

Tale equazione è

$$\begin{aligned} & \left| \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{array} \right| x_1^2 - \left| \begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & X_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{array} \right| x_2^2 - \left| \begin{array}{ccc} N_1 & N_2 & N_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{array} \right| x_3^2 + \\ & + \left( \left| \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & X_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{array} \right| \right) x_1 x_2 + \left( \left| \begin{array}{ccc} Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} N_1 & N_2 & N_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{array} \right| \right) x_1 x_3 - \\ & - \left( \left| \begin{array}{ccc} N_1 & N_2 & N_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{ccc} X_1 & X_2 & X_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 \\ M_1 & M_2 & M_3 \end{array} \right| \right) x_2 x_3. \end{aligned}$$

La rete contiene, com'è noto, una semplice infinità di complessi speciali le cui direttrici costituiscono una schiera rigata  $R$ . Volendo rappresentare

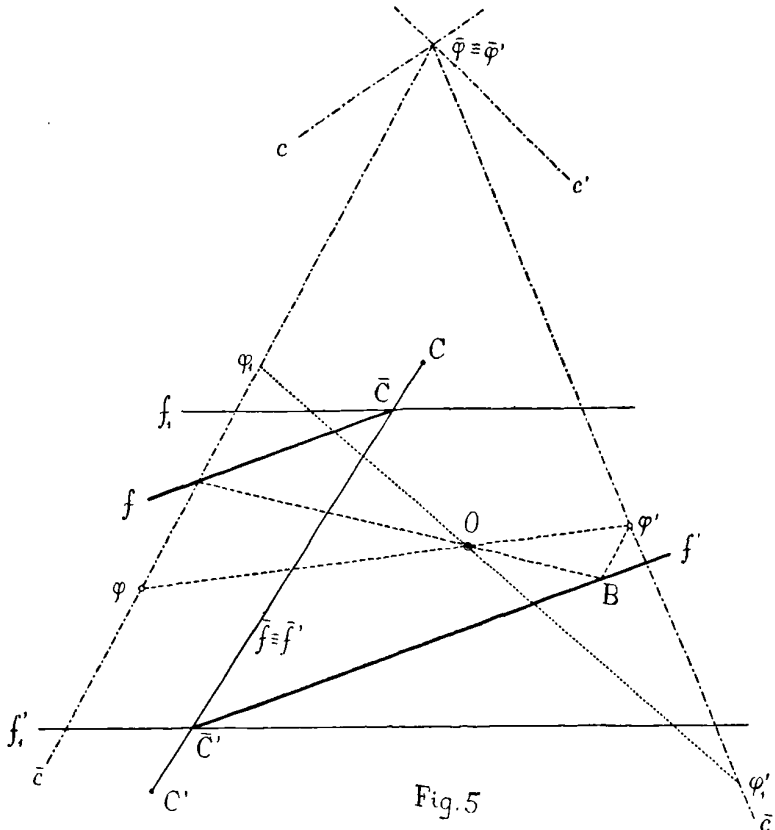


Fig. 5

tale schiera, basterebbe tracciare la conica involuppo  $\rho$  che ne costituisce il contorno apparente su  $\pi$  (quando questa conica esista reale) e la conica

luogo  $\rho'$  traccia della coniugata  $R'$  di  $R$  rispetto al sistema direttore, ed inoltre determinare la corrispondenza proiettiva che fa passare dalle tangenti di  $\rho$  ai punti di  $\rho'$  <sup>(7)</sup>. Queste coniche si possono dedurre facilmente se della schiera  $R$  sono date tre generatrici. Il fascio  $(\Gamma_2)(\Gamma_3)$ , già rappresentato, e così gli altri due fasci  $(\Gamma_1)(\Gamma_2)$ ,  $(\Gamma_1)(\Gamma_3)$ , possono fornire ciascuno una coppia di tali generatrici, secondo quanto si è detto al n. 3.

5. Per i sistemi lineari a tre e a quattro dimensioni, il metodo di rappresentazione che abbiamo descritto in via generale al principio del n. 4 non è più consigliabile: esso implicherebbe infatti, soprattutto per i sistemi a quattro dimensioni, costruzioni tanto complicate da rendere la soluzione del problema praticamente ineseguibile. Si ottiene invece una notevole semplificazione se si sostituiscono ai sistemi dati quelli che sono in involuzione con essi e si sfruttano opportunamente le condizioni d'involutorietà di cui il MAYOR si occupa a p. 76 del suo libro. In una prossima breva nota faremo appunto lo studio della rappresentazione dei sistemi lineari a tre e a quattro dimensioni da questo punto di vista.

---

<sup>(7)</sup> E. G. TOGLIATTI, *Rappresentazione delle rigate dei primi ordini, in Geometria Descrittiva, col metodo di Mayor* (Torino, Bona, 1921), p. 5.



# Sur les singularités des équations différentielles dans le problème des trois corps.

Par TOSIO UNO (Tokyo).

---

## INTRODUCTION

J'étudie dans ce Mémoire les singularités des équations différentielles dans le problème des trois corps. Dans le domaine réel du temps et des coordonnées, elles sont déjà étudiées par plusieurs auteurs. Citons les principaux résultats déjà connus.

Pour que les coordonnées des trois corps en fonction du temps cessent d'être holomorphes pour une valeur finie du temps, il faut que le minimum des trois distances tende vers zéro <sup>(1)</sup>. Dans le domaine réel, elles sont de deux sortes:

1°) Choc binaire <sup>(2)</sup>. Dans ce cas, il y a un choc de deux corps, c'est-à-dire que leur distance, soit  $r_{12}$ , tend vers zéro. Supposons que le choc ait lieu à l'instant  $t=0$ . Le quotient  $\frac{r_{12}}{t^{\frac{2}{3}}}$  tend vers une limite finie quand  $t$  tend vers zéro. De plus, au voisinage de cet instant, les coordonnées des trois corps sont développables en séries entières de  $t^{\frac{1}{3}}$ , leurs termes non constants commençant par  $t^{\frac{2}{3}}$ .

2°) Choc triple. Dans ce cas, les trois corps se choquent simultanément. De même que dans le cas précédent, les distances mutuelles des trois corps sont d'ordre de  $t^{\frac{2}{3}}$ . Les développements de leurs coordonnées contiennent les puissances entières de  $t^{\frac{1}{3}}$ ,  $t^\lambda$  et  $t^\mu$ , où  $\lambda$  et  $\mu$  sont généralement

---

<sup>(1)</sup> PAINLEVÉ, *Leçons de Stockholm*, p. 582.

<sup>(2)</sup> LEVI-CIVITA, « *Annali di Matematica* », Ser. III, t. 9 (1904) et « *Acta Mathematica* », t. 42 (1920). SUNDMAN, « *Acta Mathematica* », t. 36 (1913).

des nombres irrationnels <sup>(3)</sup>; donc cette sorte de singularité est en général transcendante, tandis que dans le premier cas, elle est algébrique.

J'ai cherché comment on peut étendre cette sorte de recherches au domaine complexe, et j'ai obtenu quelques résultats que je vais développer dans la suite.

Je dis que deux corps se choquent quand leur distance tend vers zéro. Dans le domaine imaginaire, les deux corps peuvent se choquer sans que leurs coordonnées coïncident. En effet, dans le domaine réel, de la relation

$$r_{12}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = 0,$$

il suit que

$$x_1 = x_2, \quad y_1 = y_2, \quad z_1 = z_2,$$

mais cela ne subsiste pas dans le cas imaginaire.

Dans les numéros 1 et 2, j'ai étudié un tel choc qui a lieu entre les deux corps, soient  $m_1$  et  $m_2$ . Désignons par  $r_{12}$  leur distance.

Le quotient  $\frac{r_{12}}{t^{\frac{1}{2}}}$  <sup>(4)</sup> tend vers une limite finie non nulle, et les coordonnées de chaque corps sont développées en séries entières de  $t^{\frac{1}{2}}$ .

Dans le numéro 3, j'ai montré qu'il peut y avoir un choc tel que

$$\lim_{t \rightarrow 0} r_{12} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} r_{13} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} r_{23} \neq 0,$$

où l'on désigne par  $r_{ik}$  la distance des deux corps  $m_i$  et  $m_k$ . Un tel choc n'est possible que dans le domaine imaginaire, dans lequel le choc et la coïncidence des deux corps ne sont pas la même chose. Comme cas possible de tel choc, j'ai obtenu la singularité suivante.

Les deux quotients  $\frac{r_{12}}{t^{\frac{2}{5}}}$  et  $\frac{r_{13}}{t^{\frac{2}{5}}}$  tendent vers des limites finies non nulles.

Les coordonnées des trois corps sont développables en séries entières de  $t^{\frac{1}{5}}$ , dont les termes non constants commencent par le terme  $t^{\frac{4}{5}}$ .

<sup>(3)</sup> BLOCK, « Lund Meddelanden », Ser. II, n.° 6 (1909). CHAZY, « Bulletin astronomique », t. 35 (1918).

<sup>(4)</sup> Dorénavant, nous supposerons que le choc a lieu à l'instant  $t = 0$ , car cette réduction est toujours possible par une simple translation sans détruire la généralité. Par cette réduction le temps devient réel, mais les coordonnées restent imaginaires, et cela est essentiel pour nous.

Dans le numéro 4, j'ai introduit une nouvelle variable  $u$ , définie par la relation

$$du = \frac{dt}{r_{12}r_{13}r_{23}},$$

par laquelle on peut régulariser les deux sortes de singularités obtenues ci-dessus; c'est-à-dire au voisinage de ces singularités, le temps et les coordonnées sont tous exprimés par des fonctions holomorphes de cette même variable.

Enfin dans le numéro 5, j'ai donné des exemples qui illustrent les résultats précédents.

1. Soient  $x, y$  et  $z$  les coordonnées de la masse  $m_2$  par rapport à la masse  $m_1$ , et soient  $\xi, \eta$  et  $\zeta$  les coordonnées de la masse  $m_3$  par rapport au centre de gravité des masses  $m_1$  et  $m_2$ . On a les équations du mouvement

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = -M\xi\left(\frac{\lambda}{r_{13}^3} + \frac{\mu}{r_{23}^3}\right) + \lambda\mu Mx\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right), \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = -M\eta\left(\frac{\lambda}{r_{13}^3} + \frac{\mu}{r_{23}^3}\right) + \lambda\mu My\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right), \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -M\zeta\left(\frac{\lambda}{r_{13}^3} + \frac{\mu}{r_{23}^3}\right) + \lambda\mu Mz\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right), \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{(m_1 + m_2)x}{r^3} - m_3x\left(\frac{\lambda}{r_{23}^3} + \frac{\mu}{r_{13}^3}\right) + m_3\xi\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right), \\ \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{(m_1 + m_2)y}{r^3} - m_3y\left(\frac{\lambda}{r_{23}^3} + \frac{\mu}{r_{13}^3}\right) + m_3\eta\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right), \\ \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{(m_1 + m_2)z}{r^3} - m_3z\left(\frac{\lambda}{r_{23}^3} + \frac{\mu}{r_{13}^3}\right) + m_3\zeta\left(\frac{1}{r_{23}^3} - \frac{1}{r_{13}^3}\right), \end{cases}$$

où l'on a posé

$$r_{12} = r, \quad M = m_1 + m_2 + m_3, \\ \lambda = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

L'équation des forces vives s'écrit

$$(3) \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) + \frac{(m_1 + m_2)m_3}{M} (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) = \\ = 2\left(\frac{m_1 m_2}{r} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}\right) + 2h,$$

où  $h$  est la constante des forces vives.

Supposons qu'à l'instant  $t=0$ , le choc ait lieu dans le domaine fini, entre les deux corps  $m_1$  et  $m_2$ , et que le troisième corps  $m_3$  reste à une distance finie de ces deux premiers, tel qu'on ait  $r=0$ ,  $r_{13} \neq 0$  et  $r_{23} \neq 0$  pour  $t=0$ . Dans ces conditions, on voit aisément d'après les équations (1) que les quantités  $\xi''$ ,  $\eta''$  et  $\zeta''$  restent finies au voisinage de  $t=0$ . De cela, on déduit que les quantités  $\xi'$ ,  $\eta'$  et  $\zeta'$  sont aussi finies dans le même voisinage. Cela établi, multiplions l'équation (3) par  $r$ , faisons tendre  $t$  vers zéro. On a immédiatement

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(x'^2 + y'^2 + z'^2)}{m_1 + m_2} = 2.$$

Or, en vertu de la relation

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

on a

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{(r^2)''}{2} - (xx'' + yy'' + zz'').$$

Multiplions les équations (2) par  $x$ ,  $y$  et  $z$  respectivement, et faisons la somme. On a alors

$$xx'' + yy'' + zz'' = -\frac{m_1 + m_2}{r} + \text{quantité finie},$$

d'où on obtient

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{(r^2)''}{2} + \frac{m_1 + m_2}{r} + \text{quantité finie}.$$

En substituant cette relation dans (4), on a

$$(5) \quad \lim_{t \rightarrow 0} r(r^2)'' = 2(m_1 + m_2).$$

Posons, pour abrégier,  $r^2 = R$ . La relation (5) devient alors

$$\sqrt{R}R'' = 2(m_1 + m_2) + \varepsilon \quad (5),$$

qui multipliée par  $\frac{R'}{\sqrt{R}}$ , donne

$$R'R'' = \frac{2(m_1 + m_2) + \varepsilon}{\sqrt{R}} R'.$$

En intégrant cette relation d'un certain instant voisin de  $t=0$  à l'in-

---

(5) Dans la suite, nous allons souvent employer la lettre  $\varepsilon$  pour désigner une quantité qui s'évanouit avec  $t$ .

stant  $t$ , on obtient

$$(6) \quad \frac{R'^2}{2} = 2b + [4(m_1 + m_2) + \epsilon] \sqrt{R},$$

où  $2b$  est une certaine constante.

Il y a deux cas, selon que  $b$  est ou n'est pas égale à zéro:

1<sup>o</sup>) Quand  $b \neq 0$ ; Puisque  $R$  est une quantité s'évanouissant avec  $t$ , on peut écrire

$$\frac{R'^2}{2} = 2b + \epsilon.$$

De cela, on déduit

$$R' = 2\sqrt{b} + \epsilon.$$

Intégrons cette dernière relation de l'instant  $t = 0$  à l'instant  $t$ . On a

$$R = 2\sqrt{b}t(1 + \epsilon),$$

par laquelle on obtient finalement

$$(7) \quad r = (4b)^{\frac{1}{4}} t^{\frac{1}{2}} (1 + \epsilon).$$

2<sup>o</sup>) Quand  $b = 0$ ; De l'équation (6), on a

$$\frac{R'}{R^{\frac{1}{4}}} = \sqrt{8(m_1 + m_2)} + \epsilon.$$

En intégrant cette relation, on obtient

$$\frac{4}{3} R^{\frac{3}{4}} = \sqrt{8(m_1 + m_2)} t(1 + \epsilon),$$

d'où il résulte que

$$(8) \quad r = \sqrt[3]{\frac{9(m_1 + m_2)}{2}} t^{\frac{2}{3}} (1 + \epsilon).$$

Cherchons maintenant la signification de la quantité  $b$ . De la relation (6), on déduit

$$b = \lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{R'}{2} \right)^2 = \lim_{t \rightarrow 0} (xx' + yy' + zz')^2.$$

Or, on a

$$(xx' + yy' + zz')^2 = r^2 Sx'^2 - S(xy' - yx')^2 \quad (6).$$

(6) Dans la suite, nous allons désigner par  $S$  la sommation par rapport aux coordonnées, et par  $\Sigma$  celle par rapport aux corps, par exemple

$$Sx = x + y + z, \quad \Sigma m_1 x_1 = m_1 x_1' + m_2 x_2 + m_3 x_3.$$

Comme  $r^2 Sx^2$  tend vers zéro par (4), on a enfin

$$b = - \lim_{t \rightarrow 0} S(xy' - yx')^2,$$

par laquelle on voit que  $\frac{-b}{2}$  est la limite du carré de la vitesse aréolaire.

De la relation

$$\lim_{t \rightarrow 0} (xx' + yy' + zz')^2 = - \lim_{t \rightarrow 0} S(xy' - yx')^2,$$

on voit immédiatement que cette expression est nécessairement égale à zéro quand les variables sont toutes réelles.

En résumé, on a :

1°) Quand la vitesse aréolaire ne tend pas vers zéro, le quotient  $\frac{r}{t^{\frac{1}{2}}}$  tend vers une limite finie non nulle.

2°) Quand la vitesse aréolaire tend vers zéro, le quotient  $\frac{r'}{t^3}$  tend vers une limite finie non nulle. C'est nécessairement ce dernier cas qui a lieu quand les variables sont toutes réelles.

Nous allons étudier ce premier cas dans le numéro suivant.

2. Substituons la relation (7) dans les équations (2). On obtient

$$x'' = 0 \left( t^{-\frac{3}{2}} \right).$$

En intégrant deux fois cette relation, on voit que  $x$  tend vers une limite finie, soit  $A$ , quand  $t$  tend vers zéro, c'est-à-dire

$$x = A + \varepsilon,$$

de même

$$y = B + \varepsilon,$$

$$z = C + \varepsilon,$$

où les trois constantes  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont liées par une équation

$$(9) \quad A^2 + B^2 + C^2 = 0.$$

Celles-ci étant substituées dans (2), on a

$$x'' = - \frac{m_1 + m_2}{(4b)^4} (A + \varepsilon) t^{-\frac{3}{2}}.$$

En intégrant cette relation successivement, on a

$$x' = \frac{2(m_1 + m_2)}{(4b)^{\frac{3}{4}}} (A + \epsilon)t^{-\frac{1}{2}} + K,$$

$$x = A + \frac{4(m_1 + m_2)}{(4b)^{\frac{3}{4}}} (A + \epsilon)t^{\frac{1}{2}} + Kt,$$

où  $K$  est une constante d'intégration. Posons pour abrégier

$$\frac{4(m_1 + m_2)}{(4b)^{\frac{3}{4}}} = \alpha.$$

On a enfin

$$(10) \quad \begin{cases} x = A(1 + \alpha t^2) + \epsilon t^{\frac{1}{2}}, \\ y = B(1 + \alpha t^2) + \epsilon t^{\frac{1}{2}}, \\ z = C(1 + \alpha t^2) + \epsilon t^{\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Introduisons une nouvelle variable définie par

$$\tau = t^{\frac{1}{2}}.$$

À l'aide de cela, les équations (2) deviennent

$$(11) \quad \begin{cases} \tau \frac{d^2x}{d\tau^2} - \frac{dx}{d\tau} = -\frac{4(m_1 + m_2)x\tau^3}{r^3} + \dots, \\ \tau \frac{d^2y}{d\tau^2} - \frac{dy}{d\tau} = -\frac{4(m_1 + m_2)y\tau^3}{r^3} + \dots, \\ \tau \frac{d^2z}{d\tau^2} - \frac{dz}{d\tau} = -\frac{4(m_1 + m_2)z\tau^3}{r^3} + \dots. \end{cases}$$

Posons

$$(12) \quad \begin{cases} x = A(1 + \alpha\tau) + X\tau, \\ y = B(1 + \alpha\tau) + Y\tau, \\ z = C(1 + \alpha\tau) + Z\tau, \end{cases}$$

où l'on voit d'après (10) que les quantités  $X$ ,  $Y$  et  $Z$  tendent vers zéro avec  $\tau$ . Formons à l'aide de (12) l'expression de  $r^2$ , en tenant compte de la relation (9).

On a

$$r^2 = 2(AX + BY + CZ)\tau(1 + \alpha\tau) + SX^2\tau^2.$$

Puisque  $\frac{r^2}{\tau^2}$  doit tendre vers  $2\sqrt{b}$  par (7), on a nécessairement

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{AX + BY + CZ}{\tau} = \sqrt{b}.$$

Par suite, quand on pose

$$(13) \quad AX + BY + CZ = \tau(\sqrt{b} + w),$$

$w$  tend vers zéro avec  $\tau$ . Cela étant substitué dans  $r^2$ , on a

$$(14) \quad r^2 = 2\tau^2(1 + \alpha\tau) \left\{ \sqrt{b} + w + \frac{SX^2}{2(1 + \alpha\tau)} \right\}.$$

En employant cela, les équations (11) s'écrivent

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau^2 \frac{d^2 X}{d\tau^2} + \tau \frac{dX}{d\tau} = X + \alpha A - \frac{\alpha(A + \alpha A\tau + X\tau)}{(1 + \alpha\tau)^3 \left\{ 1 + \frac{w}{\sqrt{b}} + \frac{SX^3}{2\sqrt{b}(1 + \alpha\tau)} \right\}^{\frac{3}{2}}} + \dots, \\ \tau^2 \frac{d^2 Y}{d\tau^2} + \tau \frac{dY}{d\tau} = Y + \alpha B - \frac{\alpha(B + \alpha B\tau + Y\tau)}{(1 + \alpha\tau)^3 \left\{ 1 + \frac{w}{\sqrt{b}} + \frac{SX^2}{2\sqrt{b}(1 + \alpha\tau)} \right\}^{\frac{3}{2}}} + \dots, \\ \tau^2 \frac{d^2 Z}{d\tau^2} + \tau \frac{dZ}{d\tau} = Z + \alpha C - \frac{\alpha(C + \alpha C\tau + Z\tau)}{(1 + \alpha\tau)^3 \left\{ 1 + \frac{w}{\sqrt{b}} + \frac{SX^2}{2\sqrt{b}(1 + \alpha\tau)} \right\}^{\frac{3}{2}}} + \dots. \end{array} \right.$$

Puis, en développant les deuxièmes membres, on obtient pour les équations du mouvement

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau^2 \frac{d^2 X}{d\tau^2} + \tau \frac{dX}{d\tau} = X + \frac{3\alpha A}{2\sqrt{b}} w + \frac{\alpha^2 A}{2} \tau + \dots, \\ \tau^2 \frac{d^2 Y}{d\tau^2} + \tau \frac{dY}{d\tau} = Y + \frac{3\alpha B}{2\sqrt{b}} w + \frac{\alpha^2 B}{2} \tau + \dots, \\ \tau^2 \frac{d^2 Z}{d\tau^2} + \tau \frac{dZ}{d\tau} = Z + \frac{3\alpha C}{2\sqrt{b}} w + \frac{\alpha^2 C}{2} \tau + \dots, \end{array} \right.$$

où les termes non écrits sont de degré supérieur à un, quand ils sont considérés comme des séries entières de  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $w$  et  $\tau$ .

Multiplions les équations (15) par  $A$ ,  $B$  et  $C$  respectivement, et faisons la somme. En tenant compte des relations (9) et (13), on obtient

$$\tau^2 \frac{d^2 w}{d\tau^2} + 3\tau \frac{dw}{d\tau} = - \frac{\alpha\tau(\sqrt{b} + w)}{(1 + \alpha\tau)^3 \left\{ 1 + \frac{w}{\sqrt{b}} + \frac{SX^2}{2\sqrt{b}(1 + \alpha\tau)} \right\}^{\frac{3}{2}}} + \dots,$$

ou en développant le deuxième membre

$$(17) \quad \tau^2 \frac{d^2 w}{d\tau^2} + 3\tau \frac{dw}{d\tau} = -\alpha \sqrt{b} \tau + \dots,$$

les termes non écrits étant de degré supérieur à un.



Posons

$$(18) \quad w = W - \frac{\alpha \sqrt{b}}{3} \tau.$$

Cela étant substitué dans les expressions (16) et (17), on a

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau^2 \frac{d^2 X}{d\tau^2} + \tau \frac{dX}{d\tau} = X + \frac{3\alpha A}{2\sqrt{b}} W + \dots, \\ \tau^2 \frac{d^2 Y}{d\tau^2} + \tau \frac{dY}{d\tau} = Y + \frac{3\alpha B}{2\sqrt{b}} W + \dots, \\ \tau^2 \frac{d^2 W}{d\tau^2} + 3\tau \frac{dW}{d\tau} = \dots \dots \dots, \end{array} \right.$$

où l'on emploie  $W$  au lieu de  $Z$ .

D'autre part, par les équations (1), on a

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \text{quantité finie, etc.}$$

En les intégrant

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = F + Lt(1 + \varepsilon) \\ \eta = G + Mt(1 + \varepsilon) \\ \zeta = H + Nt(1 + \varepsilon) \end{array} \right.$$

où  $F, G, H, L, M$  et  $N$  sont des constantes d'intégration. Il résulte que  $\xi, \eta$  et  $\zeta$  tendent respectivement vers les limites finies  $F, G$  et  $H$ . De plus, si l'on pose

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau \Xi = \xi - F \\ \tau H = \eta - G \\ \tau Z = \zeta - H \end{array} \right.$$

on voit que les quantités  $\Xi, H$  et  $Z$  tendent vers zéro avec  $\tau$ . Par cette transformation, les équations (1) deviennent

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau^2 \frac{d^2 \Xi}{d\tau^2} + \tau \frac{d\Xi}{d\tau} = \Xi + \dots, \\ \tau^2 \frac{d^2 H}{d\tau^2} + \tau \frac{dH}{d\tau} = H + \dots, \\ \tau^2 \frac{d^2 Z}{d\tau^2} + \tau \frac{dZ}{d\tau} = Z + \dots, \end{array} \right.$$

où les termes non écrits sont de degré supérieur à 2 par rapport à  $\tau$ .

On doit résoudre les systèmes (19) et (21) par rapport à  $X, Y, W, \Xi, H$  et  $Z$  sous la condition

$$X = Y = W = \Xi = H = Z = 0$$

pour  $\tau=0$ . Nous les traiterons en les réduisant à ce que M. PICARD avait traité dans son *Traité d'Analyse*, tome 3, chap. 1. Dans ce but, posons

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \frac{dX}{d\tau} = \bar{X}, \quad \tau \frac{dY}{d\tau} = \bar{Y}, \quad \tau \frac{dW}{d\tau} = \bar{W}, \\ \tau \frac{d\Xi}{d\tau} = \bar{\Xi}, \quad \tau \frac{dH}{d\tau} = \bar{H}, \quad \tau \frac{dZ}{d\tau} = \bar{Z}. \end{array} \right.$$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau \frac{d\bar{X}}{d\tau} = X + \frac{3\alpha A}{2\sqrt{b}} W + \dots, \\ \tau \frac{d\bar{Y}}{d\tau} = Y + \frac{3\alpha B}{2\sqrt{b}} W + \dots, \\ \tau \frac{d\bar{W}}{d\tau} = -2\bar{W} + \dots, \\ \tau \frac{d\bar{\Xi}}{d\tau} = \Xi + \dots, \\ \tau \frac{d\bar{H}}{d\tau} = H + \dots, \\ \tau \frac{d\bar{Z}}{d\tau} = Z + \dots, \end{array} \right.$$

les termes non écrits étant de degré supérieur à un, quand ils sont considérés comme des séries entières de  $X, Y, W, \Xi, H$  et  $Z$ .

Puis, par les transformations

$$\left\{ \begin{array}{l} X_1 = X + \bar{X} + \frac{\alpha A}{2\sqrt{b}} (3W + \bar{W}), \\ X_2 = X - \bar{X} + \frac{3\alpha A}{2\sqrt{b}} (W + \bar{W}), \\ Y_1 = Y + \bar{Y} + \frac{\alpha B}{2\sqrt{b}} (3W + \bar{W}), \\ Y_2 = Y - \bar{Y} + \frac{3\alpha B}{2\sqrt{b}} (W + \bar{W}), \\ W_1 = \bar{W}, \quad W_2 = 2W + \bar{W}, \\ \xi_1 = \Xi + \bar{\Xi}, \quad \xi_2 = \Xi - \bar{\Xi}, \\ \eta_1 = H + \bar{H}, \quad \eta_2 = H - \bar{H}, \\ \zeta_1 = Z + \bar{Z}, \quad \zeta_2 = Z - \bar{Z}, \end{array} \right.$$

on déduit

$$(22) \left\{ \begin{aligned} \frac{\tau \frac{dX_1}{d\tau}}{X_1 + \dots} &= \frac{\tau \frac{dX_2}{d\tau}}{-X_2 + \dots} = \frac{\tau \frac{dY_1}{d\tau}}{Y_1 + \dots} = \frac{\tau \frac{dY_2}{d\tau}}{-Y_2 + \dots} = \\ &= \frac{\tau \frac{dW_1}{d\tau}}{-2W_1 + \dots} = \dots = \frac{\tau \frac{d\xi_1}{d\tau}}{\xi_1 + \dots} = \frac{\tau \frac{d\xi_2}{d\tau}}{-\xi_2 + \dots} = \\ &= \frac{\tau \frac{d\eta_1}{d\tau}}{\eta_1 + \dots} = \frac{\tau \frac{d\eta_2}{d\tau}}{-\eta_2 + \dots} = \frac{\tau \frac{d\zeta_1}{d\tau}}{\zeta_1 + \dots} = \frac{\tau \frac{d\zeta_2}{d\tau}}{-\zeta_2 + \dots} = 1. \end{aligned} \right.$$

Sous cette forme on peut appliquer le résultat de M. PICARD (7). D'après cela, on peut conclure que les solutions sont développables en séries entières de  $\tau$ , qui sont convergentes quand  $|\tau|$  est assez petit. En résolvant ainsi les équations (22) et en substituant ses solutions dans les relations (20), (19), (18), (13) et (12), on obtient finalement les expressions pour  $x, y, z, \xi, \eta$  et  $\zeta$  qui sont aussi des séries entières de  $\tau$ , convergentes quand  $|\tau|$  est assez petit. Elles s'écrivent

$$(23) \left\{ \begin{aligned} x &= A + \alpha A t^{\frac{1}{2}} + a_0 t + a_1 t^{\frac{3}{2}} + \dots, \\ y &= B + \alpha B t^{\frac{1}{2}} + b_0 t + b_1 t^{\frac{3}{2}} + \dots, \\ z &= C + \alpha C t^{\frac{1}{2}} + c_0 t + c_1 t^{\frac{3}{2}} + \dots, \\ \xi &= F + f_0 t + f_1 t^2 + f_2 t^{\frac{5}{2}} + \dots, \\ \zeta &= H + h_0 t + h_1 t^2 + h_2 t^{\frac{5}{2}} + \dots, \\ \eta &= G + g_0 t + g_1 t^2 + g_2 t^{\frac{5}{2}} + \dots, \end{aligned} \right.$$

où les coefficients  $A, B, C, F, G, H, a_0, b_0, c_0, f_0, g_0$  et  $h_0$  sont des constantes susceptibles d'être choisies arbitrairement à l'avance, sauf que  $A, B$  et  $C$  sont liés par la relation

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0.$$

Les autres coefficients s'obtiennent, si l'on veut les calculer directement, par la dérivation successive des équations (19) et (20), et en y posant  $\tau = 0$ . Dans les expressions de  $\xi, \eta$  et  $\zeta$ , les puissances fractionnaires de  $t$  n'entrent

(7) PICARD. « Traité d'Analyse », tome 3, deuxième édition, p. 21.

que dans des termes de degré supérieur à 2, ce que l'on voit aisément par les équations (21) dont les termes non écrits sont de degré supérieur à 2 par rapport à  $\tau$ .

3. Quand les deux distances  $r_{12}$ ,  $r_{13}$  tendent vers zéro, la troisième  $r_{23}$  tend nécessairement aussi vers zéro dans le domaine réel, mais dans le domaine imaginaire, elle peut rester non nulle, avec

$$\lim_{t \rightarrow 0} r_{12} = \lim_{t \rightarrow 0} r_{13} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} r_{23} \neq 0.$$

C'est ce dernier cas que nous allons étudier dans ce numéro.

Nous adopterons pour équations du mouvement

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\frac{m_2(x_1 - x_2)}{r_{12}^3} - \frac{m_3(x_1 - x_3)}{r_{13}^3}, \text{ etc.} \\ \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{m_3(x_2 - d_3)}{r_{23}^3} - \frac{m_1(x_2 - x_1)}{r_{12}^3}, \text{ etc.} \\ \frac{d^2 x_3}{dt^2} = -\frac{m_1(x_3 - x_1)}{r_{13}^3} - \frac{m_2(x_3 - x_2)}{r_{23}^3}, \text{ etc.} \end{array} \right.$$

où  $x_i$ ,  $y_i$  et  $z_i$  sont les coordonnées de la masse  $m_i$  par rapport au centre de gravité des trois masses. Nous supposerons d'ailleurs que les coordonnées de chaque corps tendent vers les valeurs finies telles que

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 0} x_i = A_i, \\ \lim_{t \rightarrow 0} y_i = B_i, \\ \lim_{t \rightarrow 0} z_i = C_i. \end{array} \right.$$

Pour simplifier, posons

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{ik} = A_i - A_k, \\ B_{ik} = B_i - B_k, \\ C_{ik} = C_i - C_k. \end{array} \right.$$

On a nécessairement

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{12}^2 + B_{12}^2 + C_{12}^2 = 0, \\ A_{13}^2 + B_{13}^2 + C_{13}^2 = 0, \\ A_{23}^2 + B_{23}^2 + C_{23}^2 = R_{23}^2 \neq 0. \end{array} \right.$$

De plus, par les relations

$$A_{23} = A_{13} - A_{12},$$

on obtient

$$(27) \quad 2(A_{12}A_{13} + B_{12}B_{13} + C_{12}C_{13}) = -R_{23}^2.$$

Il résulte que les quantités  $A_{1i}$ ,  $B_{1i}$  et  $C_{1i}$  ( $i = 2, 3$ ) ne s'annulent pas simultanément.

Cherchons la solution en supposant que (\*)

$$\begin{aligned} r_{12} &= (\rho_{12} + \varepsilon)t^\mu, \\ r_{13} &= (\rho_{13} + \varepsilon)t^\mu, \end{aligned}$$

où  $\rho_{12}$  et  $\rho_{13}$  sont des constantes finies. Alors, des équations (24) on déduit

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -\frac{m_2 A_{12} + \varepsilon}{\rho_{12}^3 t^{3\mu}} - \frac{m_3 A_{13} + \varepsilon}{\rho_{13}^3 t^{3\mu}}, & \text{etc.} \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= \frac{m_1 A_{12} + \varepsilon}{\rho_{12}^3 t^{3\mu}}, & \text{etc.} \\ \frac{d^2x_3}{dt^2} &= \frac{m_1 A_{13} + \varepsilon}{\rho_{13}^3 t^{3\mu}}, & \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

En intégrant, on a

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{-1}{1-3\mu} \left( \frac{m_2 A_{12}}{\rho_{12}^3} + \frac{m_3 A_{13}}{\rho_{13}^3} + \varepsilon \right) t^{-3\mu+1} + K_1, & \text{etc.} \\ \frac{dx_2}{dt} &= \frac{1}{1-3\mu} \left( \frac{m_1 A_{12}}{\rho_{12}^3} + \varepsilon \right) t^{-3\mu+1} + K_2, & \text{etc.} \\ \frac{dx_3}{dt} &= \frac{1}{1-3\mu} \left( \frac{m_1 A_{13}}{\rho_{13}^3} + \varepsilon \right) t^{-3\mu+1} + K_3, & \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

où  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$  etc. sont des constantes d'intégration. Si on les substitue dans l'équation des forces vives qui s'écrit

$$(30) \quad \begin{aligned} m_1 S \left( \frac{dx_1}{dt} \right)^2 + m_2 S \left( \frac{dx_2}{dt} \right)^2 + m_3 S \left( \frac{dx_3}{dt} \right)^2 &= \\ &= \frac{2m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{2m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{2m_2 m_3}{r_{23}} + 2h, \end{aligned}$$

on a aisément

$$\frac{-1}{(1-3\mu)^2} \left( \frac{m_1 m_2 m_3}{\rho_{12}^3 \rho_{13}^3} R_{23}^2 + \varepsilon \right) t^{-6\mu+2} = \left( \frac{2m_1 m_2}{\rho_{12}} + \frac{2m_1 m_3}{\rho_{13}} + \varepsilon \right) t^{-\mu},$$

d'où l'on déduit

$$-6\mu + 2 = -\mu,$$

c'est-à-dire

$$(31) \quad \mu = \frac{2}{5}.$$

---

(\*) Dans ce qui va suivre, j'ai montré que les solutions de cette forme existent vraiment, mais je n'ai pu démontrer qu'il n'en existe pas d'autres.

Intégrons encore une fois les équations (29) en tenant compte de (31); on a

$$(32) \quad \begin{cases} x_1 = A_1 + (a_1 + \varepsilon)t^{\frac{4}{5}}, \text{ etc.} \\ x_2 = A_2 + (a_2 + \varepsilon)t^{\frac{4}{5}}, \text{ etc.} \\ x_3 = A_3 + (a_3 + \varepsilon)t^{\frac{4}{5}}, \text{ etc.} \end{cases}$$

où

$$(33) \quad \begin{cases} a_1 = \frac{25}{4} \left( \frac{m_2}{\rho_{12}^3} A_{12} + \frac{m_3}{\rho_{23}^3} A_{13} \right), \text{ etc.} \\ a_2 = -\frac{25}{4} \frac{m_1}{\rho_{12}^3} A_{12}, \quad \text{etc.} \\ a_3 = -\frac{25}{4} \frac{m_1}{\rho_{13}^3} A_{13}, \quad \text{etc.} \end{cases}$$

Calculons maintenant  $r_{12}$  et  $r_{13}$  par les relations (32) et (33), en tenant compte de (26) et (27). On a

$$\begin{aligned} r_{12}^2 &= S(x_1 - x_2)^2 \\ &= S \left\{ A_{12} + (a_1 - a_2)t^{\frac{4}{5}} + \dots \right\}^2 \\ &= S \left\{ A_{12} + \frac{25}{4} \left( \frac{m_1 + m_2}{\rho_{12}^3} A_{12} + \frac{m_3}{\rho_{13}^3} A_{13} \right) t^{\frac{4}{5}} + \dots \right\}^2 \\ &= -\frac{25}{4} \frac{m_3}{\rho_{13}^3} R_{23}^2 t^{\frac{4}{5}} + \dots, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$r_{12} = \frac{5}{2} \sqrt{-\frac{m_3}{\rho_{13}^3} R_{23}^2 t^{\frac{2}{5}} + \dots},$$

de même

$$r_{13} = \frac{5}{2} \sqrt{-\frac{m_2}{\rho_{12}^3} R_{23}^2 t^{\frac{2}{5}} + \dots};$$

Puisque

$$r_{1k} = \rho_{1k} t^{\frac{2}{5}} + \dots,$$

il résulte que

$$\begin{cases} \rho_{12} = \frac{5}{2} \sqrt{-\frac{m_3}{\rho_{13}^3} R_{23}}, \\ \rho_{13} = \frac{5}{2} \sqrt{-\frac{m_2}{\rho_{12}^3} R_{23}}, \end{cases}$$

qui nous donne

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_{12}^5 = -\frac{25}{4} \frac{m_2^3}{m_3^2} R_{23}^2, \\ \rho_{13}^5 = -\frac{25}{4} \frac{m_3^3}{m_2^2} R_{23}^2. \end{array} \right.$$

Cela définit l'allure des trois distances quand  $t$  tend vers zéro. Pour résoudre les équations du mouvement, posons d'après (32)

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_i = A_i + a_i \tau^4 + X_i \tau^4, \\ y_i = B_i + b_i \tau^4 + Y_i \tau^4, \\ z_i = C_i + c_i \tau^4 + Z_i \tau^4, \end{array} \right.$$

où l'on introduit une nouvelle variable  $\tau = t^{\frac{1}{5}}$ . On a

$$\begin{aligned} r_{12}^2 &= 2SA_{12}(a_1 - a_2)\tau^4 + 2SA_{12}(X_1 - X_2)\tau^4 + \tau^8 P \\ &= \rho_{12}^2 \tau^4 + 2SA_{12}(X_1 - X_2)\tau^4 + \tau^8 P, \end{aligned}$$

d'où il résulte que

$$\left\{ \begin{array}{l} r_{12}^{-3} = \rho_{12}^{-3} \tau^{-6} \left\{ 1 - \frac{3SA_{12}(X_1 - X_2)}{\rho_{12}^3} + \tau^4 P \right\}, \\ r_{13}^{-3} = \rho_{13}^{-3} \tau^{-6} \left\{ 1 - \frac{3SA_{13}(X_1 - X_3)}{\rho_{13}^3} + \tau^4 P \right\}, \end{array} \right.$$

où  $P$  désigne des séries entières de  $\tau^4$ ,  $X_1$ ,  $Y_1$  et  $Z_1$ .

Les équations du mouvement deviennent

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{25} \left\{ \tau^2 \frac{d^2 X_1}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dX_1}{d\tau} - 4X_1 \right\} = \\ \quad = \frac{3m_2 A_{12} SA_{12}(X_1 - X_2)}{\rho_{12}^5} + \frac{3m_3 A_{13} SA_{13}(X_1 - X_3)}{\rho_{13}^5} + \tau^4 P, \\ \frac{1}{25} \left\{ \tau^2 \frac{d^2 Y_1}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dY_1}{d\tau} - 4Y_1 \right\} = \\ \quad = \frac{3m_2 B_{12} SA_{12}(X_1 - X_2)}{\rho_{12}^5} + \frac{3m_3 B_{13} SA_{13}(X_1 - X_3)}{\rho_{13}^5} + \tau^4 P, \\ \frac{1}{25} \left\{ \tau^2 \frac{d^2 Z_1}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dZ_1}{d\tau} - 4Z_1 \right\} = \\ \quad = \frac{3m_2 C_{12} SA_{12}(X_1 - X_2)}{\rho_{12}^5} + \frac{3m_3 C_{13} SA_{13}(X_1 - X_3)}{\rho_{13}^5} + \tau^4 P, \\ \frac{1}{25} \left\{ \tau^2 \frac{d^2 X_2}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dX_2}{d\tau} - 4X_2 \right\} = -\frac{3m_1 A_{12} SA_{12}(X_1 - X_2)}{\rho_{12}^5} + \tau^4 P, \\ \frac{1}{25} \left\{ \tau^2 \frac{d^2 Y_2}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dY_2}{d\tau} - 4Y_2 \right\} = -\frac{3m_1 B_{12} SA_{12}(X_1 - X_2)}{\rho_{12}^5} + \tau^4 P, \end{array} \right.$$

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{25} \left\{ \tau^2 \frac{d^2 Z_2}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dZ_2}{d\tau} - 4Z_2 \right\} = - \frac{3m_1 C_{12} SA_{12} (X_1 - X_2)}{\rho_{12}^5} + \tau^4 P, \\ \frac{1}{25} \left\{ \tau^2 \frac{d^2 X_3}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dX_3}{d\tau} - 4X_3 \right\} = - \frac{3m_1 A_{13} SA_{13} (X_1 - X_3)}{\rho_{13}^5} + \tau^4 P, \\ \frac{1}{25} \left\{ \tau^2 \frac{d^2 Y_3}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dY_3}{d\tau} - 4Y_3 \right\} = - \frac{3m_1 B_{13} SA_{13} (X_1 - X_3)}{\rho_{13}^5} + \tau^4 P, \\ \frac{1}{25} \left\{ \tau^2 \frac{d^2 Z_3}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dZ_3}{d\tau} - 4Z_3 \right\} = - \frac{3m_1 C_{13} SA_{13} (X_1 - X_3)}{\rho_{13}^5} + \tau^4 P. \end{array} \right.$$

On doit résoudre ces neuf équations par rapport à  $X_i$ ,  $Y_i$  et  $Z_i$ , à la condition qu'elles réduisent à zéro pour  $\tau = 0$ . Or, d'après les intégrales du mouvement du centre de gravité, on a

$$(37) \quad \Sigma m_i X_i = \Sigma m_i Y_i = \Sigma m_i Z_i = 0;$$

donc parmi les neuf inconnues précédentes, six sont indépendantes, et par elles les autres sont exprimées. Préférons ici pour les variables indépendantes  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$  et les quantités définies ci-dessous:

$$(38) \quad \left\{ \begin{array}{l} W_2 = SA_{12} (X_1 - X_2) \\ W_3 = SA_{13} (X_1 - X_3). \end{array} \right.$$

On a

$$(39) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{25} \left\{ \tau^2 \frac{d^2 X_2}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dX_2}{d\tau} - 4X_2 \right\} = - \frac{3m_1 A_{12} W_2}{\rho_{12}^5} + \tau^4 P, \\ \frac{1}{25} \left\{ \tau^2 \frac{d^2 Y_2}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dY_2}{d\tau} - 4Y_2 \right\} = - \frac{3m_1 B_{12} W_2}{\rho_{12}^5} + \tau^4 P, \\ \frac{1}{25} \left\{ \tau^2 \frac{d^2 X_3}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dX_3}{d\tau} - 4X_3 \right\} = - \frac{3m_1 A_{13} W_3}{\rho_{13}^5} + \tau^4 P, \\ \frac{1}{25} \left\{ \tau^2 \frac{d^2 Y_3}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dY_3}{d\tau} - 4Y_3 \right\} = - \frac{3m_1 B_{13} W_3}{\rho_{13}^5} + \tau^4 P, \\ \frac{1}{25} \left\{ \tau^2 \frac{d^2 W_2}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dW_2}{d\tau} - 4W_2 \right\} = - \frac{3m_2 R_{23}^2 W_3}{2\rho_{13}^5} + \tau^4 P, \\ \frac{1}{25} \left\{ \tau^2 \frac{d^2 W_3}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dW_3}{d\tau} - 4W_3 \right\} = - \frac{3m_2 R_{23}^2 W_2}{2\rho_{12}^5} + \tau^4 P. \end{array} \right.$$

Posons enfin

$$(40) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_2 - \frac{2m_1 A_{12}}{m_2 R_{23}^2} W_3 = u_2, \quad Y_2 - \frac{2m_1 B_{12}}{m_1 R_{23}^2} W_3 = v_2 \\ X_3 - \frac{2m_1 A_{13}}{m_3 R_{23}^2} W_2 = u_3, \quad Y_3 - \frac{2m_1 B_{13}}{m_3 R_{23}^2} W_2 = v_3 \\ m_3^2 W_2 + m_2^2 W_3 = w_1, \quad m_3^2 W_2 - m_2^2 W_3 = w_2. \end{array} \right.$$



On a

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau^2 \frac{d^2 u_2}{d\tau^2} + 4\tau \frac{du_2}{d\tau} - 4u_2 = \tau^4 P, \\ \tau^2 \frac{d^2 v_2}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dv_2}{d\tau} - 4v_2 = \tau^4 P, \\ \tau^2 \frac{d^2 u_3}{d\tau^2} + 4\tau \frac{du_3}{d\tau} - 4u_3 = \tau^4 P, \\ \tau^2 \frac{d^2 v_3}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dv_3}{d\tau} - 4v_3 = \tau^4 P, \\ \tau^2 \frac{d^2 w_1}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dw_1}{d\tau} - 10w_1 = \tau^4 P, \\ \tau^2 \frac{d^2 w_2}{d\tau^2} + 4\tau \frac{dw_2}{d\tau} + 2w_2 = \tau^4 P. \end{array} \right.$$

Quand on dérive ces équations  $k$  fois, et que l'on y pose  $\tau = 0$ , on a dans les premiers membres les  $k^e$  dérivées des fonctions inconnues multipliées par les coefficients

$$k(k-1) + 4k - p = k^2 + 3k - p, \quad (p = 4, 10 \text{ ou } -2)$$

et dans les deuxièmes membres les polynomes des dérivées d'ordre au plus égal à  $k - 4$ . Il résulte que la dérivation successive des équations permet de calculer de proche en proche les dérivées des fonctions inconnues pour la valeur zéro de  $\tau$ . En particulier, les dérivées d'ordre au plus égal à 3 doivent s'annuler pour  $\tau = 0$ , sauf que  $\frac{du_2}{d\tau}$ ,  $\frac{du_3}{d\tau}$ ,  $\frac{dv_2}{d\tau}$ ,  $\frac{dv_3}{d\tau}$  et  $\frac{d^2 w_1}{d\tau^2}$  sont susceptibles d'être choisies arbitrairement, parce que leurs coefficients s'annulent avec les deuxièmes membres.

Par les dérivées ainsi calculées, on peut former les séries entières de  $\tau$  qui satisfont formellement à ces équations. Dans la suite, nous allons montrer que ces séries sont convergentes.

Pour ce but, modifions un peu la cinquième équation de (41), en y posant  $w_1 = \bar{w}_1$ . On a

$$(42) \quad \tau^2 \frac{d^2 \bar{w}_1}{d\tau^2} + 6\tau \frac{d\bar{w}_1}{d\tau} - 6\bar{w}_1 = \tau^3 P.$$

Ici la valeur de la dérivée  $\frac{d\bar{w}_1}{d\tau}$  pour  $\tau = 0$  est susceptible d'être choisie arbitrairement, et les autres sont calculées par la dérivation successive qui

nous donne pour le coefficient de  $\frac{d^k \bar{w}_1}{d\tau^k}$

$$k(k-1) + 6k - 6 = k^2 + 5k - 6.$$

Cela établi, nous allons montrer la convergence des séries précédentes par une comparaison avec un système convenable. Soit  $M$  le module maximum des  $\tau P$  ( $P$ , pour la cinquième équation) quand  $\tau$  reste dans son plan à l'intérieur d'un cercle de rayon  $a$  ayant l'origine pour centre, et que  $u_2, u_3, v_2, v_3, \bar{w}_1$  et  $w_2$  restent respectivement dans leur plan à l'intérieur d'un cercle de rayon  $b$ . On peut prendre comme fonction de comparaison

$$\frac{\tau^3 M}{\left(1 - \frac{\tau}{a}\right) \left(1 - \frac{u_2 + u_3 + v_2 + v_3 + \bar{w}_1 + w_2}{b}\right)}.$$

Nous formons alors le système des équations différentielles

$$5 \left( \tau \frac{dV_i}{d\tau} - V_i \right) = \frac{\tau^3 M}{\left(1 - \frac{\tau}{a}\right) \left(1 - \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4 + V_5 + V_6}{b}\right)},$$

( $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ).

Par raison de symétrie, tous les  $V_i$  sont égaux, donc on a une seule équation de la forme

$$(43) \quad 5 \left( \tau \frac{dV}{d\tau} - V \right) = \frac{\tau^3 M}{\left(1 - \frac{\tau}{a}\right) \left(1 - \frac{6V}{b}\right)},$$

dont la solution formelle est obtenue par la dérivation successive, qui nous donne dans son premier membre pour le coefficient de  $\frac{d^k V}{d\tau^k}$ ,  $5(k-1)$ . Particulièrement, puisqu'il s'annule avec le deuxième membre pour  $k=1$ , on voit que la valeur de la dérivée première pour  $\tau=0$  est susceptible d'être choisie arbitrairement.

Or, pour les coefficients de la  $k^e$  dérivée dans le système (41) et (42), on a

$$\begin{aligned} k^2 + 3k + 2 &> k^2 + 3k - 4 > 5(k-1), \\ k^2 + 5k - 6 &> 5(k-1), \end{aligned}$$

pour  $k > 1$ . On voit donc que les séries calculées précédemment pour les systèmes (41) et (42) sont majorées par la série ici obtenue.

Il faut prouver maintenant que cette série est convergente. En posant  $V = \tau V'$ , on a

$$\frac{dV'}{d\tau} = \frac{\tau M}{5 \left(1 - \frac{\tau}{a}\right) \left(1 - \frac{6\tau V'}{b}\right)}$$

dont le deuxième membre est holomorphe en fonction de  $\tau$  et  $V'$ , au voisinage de  $\tau = 0$  et la valeur finie quelconque de  $V'$ . On voit donc que cette équation a une solution holomorphe prenant une valeur finie arbitraire pour  $\tau = 0$ , qui n'est autre chose que la série calculée ci-dessus divisée par  $\tau$ . On a ainsi démontré la convergence des séries calculées précédemment.

Enfin, par les transformations inverses, on obtient les expressions de  $x_i$ ,  $y_i$  et  $z_i$  qui sont les séries entières de  $\tau$ , convergentes quand  $|\tau|$  est assez petit. Elles s'écrivent

$$(44) \quad \begin{cases} x_i = A_i + a_i t^{\frac{4}{5}} + a_{i1} t + a_{i2} t^{\frac{6}{5}} + \dots, \\ y_i = B_i + b_i t^{\frac{4}{5}} + b_{i1} t + b_{i2} t^{\frac{6}{5}} + \dots, \\ z_i = C_i + c_i t^{\frac{4}{5}} + c_{i1} t + c_{i2} t^{\frac{6}{5}} + \dots \end{cases}$$

Les coefficients  $A_i$ ,  $B_i$  et  $C_i$  sont liés par les relations (26) et les intégrales du mouvement du centre de gravité,  $a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  sont déterminées par (33), et les autres sont obtenues par la dérivation successive des équations (41), où les cinq quantités

$$\begin{aligned} \alpha_{21} - \frac{2m_1 A_{12}}{m_2 R_{23}^2} SA_{12}(a_{11} - a_{21}), \quad b_{21} - \frac{2m_1 B_{12}}{m_2 R_{23}^2} SA_{12}(a_{11} - a_{21}), \\ \alpha_{31} - \frac{2m_1 A_{13}}{m_3 R_{23}^2} SA_{12}(a_{11} - a_{21}), \quad b_{31} - \frac{2m_1 B_{13}}{m_3 R_{23}^2} SA_{12}(a_{11} - a_{21}), \\ m_3^2 SA_{12}(a_{12} - a_{22}) + m_3^2 SA_{13}(a_{12} - a_{32}) \end{aligned}$$

sont choisies arbitrairement, et qui correspondent aux valeurs arbitraires des dérivées  $\frac{du_2}{d\tau}$ ,  $\frac{dv_2}{d\tau}$ ,  $\frac{du_3}{d\tau}$ ,  $\frac{dv_3}{d\tau}$  et  $\frac{d^2 w_1}{d\tau^2}$  pour la valeur zéro de  $\tau$ .

4. Introduisons maintenant une nouvelle variable  $u$  définie par la relation

$$(45) \quad du = \frac{dt}{r_{12} r_{13} r_{23}}.$$

Il est déjà connu que dans le choc binaire du domaine réel, le temps et les coordonnées sont exprimés en fonction holomorphe de cette nouvelle

variable <sup>(9)</sup>. Pour les singularités ici étudiées, cette même propriété subsiste-t-elle? Nous nous en occuperons dans ce qui suit en envisageant les deux cas que voici:

*Premier cas.* — D'abord nous allons étudier la singularité traitée dans le numéro 2. Pour elle, les distances  $r_{12}$ ,  $r_{13}$  et  $r_{23}$  sont

$$(46) \quad r_{12} = t^{\frac{1}{2}} P\left(t^{\frac{1}{2}}\right), \quad r_{13} = P\left(t^{\frac{1}{2}}\right), \quad r_{23} = P\left(t^{\frac{1}{2}}\right),$$

où l'on désigne par  $P(z)$  <sup>(10)</sup> une fonction qui est holomorphe, si  $z$  est assez petit et ne s'annule pas pour la valeur zéro de  $z$ .

En employant ces expressions, on a

$$(47) \quad u = \int \frac{dt}{r_{12} r_{13} r_{23}} = \int t^{-\frac{1}{2}} \frac{dt}{P\left(t^{\frac{1}{2}}\right)} = t^{\frac{1}{2}} P\left(t^{\frac{1}{2}}\right) \text{ <sup>(11)</sup>},$$

d'où l'on déduit par l'inversion de la variable

$$(48) \quad t^{\frac{1}{2}} = uP(u).$$

Or les coordonnées de chaque corps sont développées en séries entières de  $t^{\frac{1}{2}}$ , donc si l'on substitue l'expression ci-dessus obtenue, on voit qu'elles sont des fonctions holomorphes de  $u$ , quand  $u$  est assez petit. D'autre part, de la relation (48), on voit évidemment que  $t$  est aussi une fonction holomorphe de  $u$ . Ainsi on obtient le résultat voulu pour le premier cas.

*Deuxième cas.* — Étudions maintenant la singularité obtenue dans le numéro 3. Dans ce cas, les distances sont

$$(49) \quad r_{12} = t^{\frac{2}{5}} P\left(t^{\frac{1}{5}}\right), \quad r_{13} = t^{\frac{2}{5}} P\left(t^{\frac{1}{5}}\right), \quad r_{23} = P\left(t^{\frac{1}{5}}\right).$$

En employant cela, on a

$$(50) \quad u = \int \frac{dt}{r_{12} r_{13} r_{23}} = \int t^{-\frac{4}{5}} \frac{dt}{P\left(t^{\frac{1}{5}}\right)} = t^{\frac{1}{5}} P\left(t^{\frac{1}{5}}\right),$$

d'où il résulte que

$$(51) \quad t^{\frac{1}{5}} = uP(u).$$

<sup>(9)</sup> SUNDMAN, « Acta Mathematica », t. 36 (1913).

<sup>(10)</sup> Dans la suite nous utiliserons cette notation comme ayant la même signification ici posée.

<sup>(11)</sup> On fait ici  $u = 0$  pour  $t = 0$ .

Substituons cela dans les expressions des coordonnées qui sont les séries entières de  $t^{\frac{1}{2}}$ . On voit qu'elles sont des fonctions holomorphes de  $u$ . De plus, de la relation (51), on voit que  $t$  est aussi une fonction holomorphe de  $u$ , si  $u$  est assez petit. Par conséquent, pour le deuxième cas aussi, la même propriété subsiste.

Ainsi on a démontré qu'au voisinage de chaque singularité étudiée précédemment, on peut faire une uniformisation locale des coordonnées et du temps, si l'on emploie la même variable  $u$ .

5. Dans ce numéro, nous donnerons des exemples qui illustrent les résultats précédents.

### Premier exemple.

Un cas particulier de la première sorte de singularité étudiée dans le numéro 2 est le choc imaginaire dans le problème des deux corps.

Dans le problème des deux corps, on a

$$\begin{cases} r = a(1 - e \cos u), \\ u - e \sin u = ka^{-\frac{3}{2}}(t - t_0), \end{cases}$$

pour le mouvement elliptique et hyperbolique, et

$$\begin{cases} r = q(1 + w^2), \\ w + \frac{1}{3}w^3 = \frac{k}{\sqrt{2}}q^{-\frac{3}{2}}(t - t_0), \end{cases}$$

pour le mouvement parabolique, en utilisant les notations habituelles.

Dans le premier cas, on a  $r = 0$  pour la valeur  $\cos^{-1} \frac{1}{e}$  de  $u$ . Désignons par  $u_1$  cette valeur de  $u$ , et par  $t_1$  la valeur de  $t$  correspondante.

En développant les expressions de  $r$  et  $t$  en séries entières de  $u - u_1$ , on a aisément

$$\begin{cases} r = ae \sin u_1(u - u_1) + \dots, \\ t - t_1 = \frac{a^{\frac{3}{2}}e}{2k} \sin u_1(u - u_1)^2 + \dots, \end{cases}$$

d'où l'on déduit par l'élimination de  $u$

$$r = \sqrt{2ke \sin u_1} a^{\frac{1}{4}}(t - t_1)^{\frac{1}{2}} + \dots$$

De plus, on a par l'inversion

$$u - u_1 = \sqrt{\frac{2k}{e \sin u_1}} a^{-\frac{3}{4}} (t - t_1)^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

et s'il est substitué dans les relations bien connues

$$\begin{cases} x = a(\cos u - e) \\ y = a \sqrt{1 - e^2} \sin u \end{cases}$$

on voit que les coordonnées sont développées en séries entières de  $(t - t_1)^{\frac{1}{2}}$ .

Puis considérons le mouvement parabolique. Dans ce cas on a  $r = 0$  pour la valeur  $\pm i$  de  $w$ . En développant les expressions de  $r$  et  $t$  en séries de  $w \mp i$ , on a

$$\begin{cases} r = \pm 2qi(w \mp i) + \dots, \\ t - t_1 = \pm \frac{\sqrt{2}}{k} q^{\frac{3}{2}} i (w \mp i)^2 + \dots, \end{cases}$$

d'où l'on déduit par l'élimination de  $w$

$$r = \sqrt{\mp ki} 2^{\frac{3}{4}} q^{\frac{1}{4}} (t - t_1)^{\frac{1}{2}} + \dots$$

De plus, on a par l'inversion

$$w \mp i = \sqrt{\pm ki} 2^{-\frac{1}{4}} q^{-\frac{3}{4}} (t - t_1)^{\frac{1}{2}} + \dots,$$

et s'il est substitué dans les relations

$$\begin{cases} x = q(1 - w^2), \\ y = 2qw, \end{cases}$$

on voit dans ce cas aussi que les coordonnées sont développées en séries entières de  $(t - t_1)^{\frac{1}{2}}$ .

En somme, dans le mouvement non rectiligne des deux corps, le choc a lieu dans le domaine imaginaire des coordonnées, et à cet instant le quotient  $\frac{r}{(t - t_1)^{\frac{1}{2}}}$  tend vers une limite finie non nulle. De plus, les coordon-

nées sont développées en séries entières de  $(t - t_1)^{\frac{1}{2}}$  au voisinage de cet instant. Ceux-ci coïncident avec les résultats étudiés dans les numéros 1 et 2.

### Deuxième exemple.

Nous donnerons maintenant un exemple qui explique les résultats étudiés dans le numéro 3.

Considérons le cas où  $m_1 = m_2 = m \neq 0$  et  $m_3 = 0$ . Supposons que les premiers deux corps font un mouvement circulaire autour de leur centre de gravité, et le troisième  $m_3$  se meut sur la ligne droite qui est perpendiculaire sur le plan du mouvement des deux premiers corps et passe par leur centre de gravité

Preçons comme origine le centre de gravité et comme axe- $z$  la ligne du mouvement de  $m_3$ . Soit  $a$  le rayon de l'orbite circulaire des deux premiers corps. On a pour l'équation du mouvement du corps  $m_3$

$$(52) \quad \frac{1}{2} \left( \frac{dz}{dt} \right)^2 = \frac{2m}{\sqrt{z^2 + a^2}} + h,$$

où  $h$  est une constante d'intégration.

D'abord considérons le cas où  $h = 0$ . On a d'après (52)

$$2 \sqrt{mt} = \int \sqrt{z^2 + a^2} dz.$$

Posons

$$z = \sqrt{r^2 - a^2}.$$

On voit évidemment  $r = r_{1,3} = r_{2,3}$ . En employant cela, on a au lieu de l'équation précédente

$$(53) \quad \sqrt{mt} = \int \frac{r^2 dr}{\sqrt{4r(r^2 - a^2)}}.$$

Posons maintenant

$$(54) \quad u = \int \frac{dr}{\sqrt{4r(r^2 - a^2)}}.$$

On voit aisément

$$(55) \quad r = \wp u,$$

où

$$(55^*) \quad e_1 = a, e_2 = 0, e_3 = -a; \quad g_2 = 4a^2, g_3 = 0,$$

si l'on emploie les notations usuelles des fonctions elliptiques.

En employant  $u$ , l'équation (53) s'écrit

$$\sqrt{mt} = \int \wp^2 u \, du,$$

qui nous donne

$$(56) \quad \sqrt{mt} = \frac{a^2 u}{3} + \frac{\wp' u}{6},$$

parce que

$$\wp^2 u = \frac{g_2}{12} + \frac{\wp'' u}{6} = \frac{a^2}{3} + \frac{\wp'' u}{6}.$$

Enfin de la relation

$$z = \sqrt{r^2 - a^2} = \sqrt{\wp^2 u - a^2} = \sqrt{(\wp u - e_1)(\wp u - e_3)},$$

on déduit

$$(57) \quad z = \frac{\sigma_4 u \sigma_3 u}{\sigma^2 u}.$$

Si l'on pose  $r = 0$  dans l'équation (55), on obtient la deuxième sorte de singularité étudiée dans le numéro 3. La valeur de  $u$  qui lui correspond est

$$u_0 \equiv \omega + i\omega' \pmod{2\omega, 2i\omega'},$$

par laquelle s'obtient aussi la valeur correspondante de  $t$

$$t_0 = \frac{a^2}{2\sqrt{m}} u_0.$$

Dérivons successivement la relation (56) par rapport à  $u$ . On a

$$\sqrt{m} \frac{dt}{du} = \frac{a^2}{3} + \frac{\wp'' u}{6} = \wp^2 u,$$

$$\sqrt{m} \frac{d^2 t}{du^2} = 2\wp u \wp' u,$$

$$\sqrt{m} \frac{d^3 t}{du^3} = 2\wp^2 u + 2\wp u \wp'' u = 20\wp^3 u - 12a^2 \wp u,$$

$$\sqrt{m} \frac{d^4 t}{du^4} = 60\wp^2 u \wp' u - 12a^2 \wp' u,$$

$$\begin{aligned} \sqrt{m} \frac{d^5 t}{du^5} &= 60(\wp^2 u \wp'' u + 2\wp u \wp^2 u) - 12a^2 \wp'' u \\ &= 840\wp^4 u - 672a^2 \wp^2 u + 24a^2. \end{aligned}$$

Posons dans ces relations,  $u = u_0$ . Puisque  $\wp u = \wp' u = 0$  pour cette valeur de  $u$ , on a

$$\left( \frac{d^i t}{du^i} \right)_{u=u_0} = 0 \quad (i < 5),$$

et

$$\left( \frac{d^5 t}{du^5} \right)_{u=u_0} = 24a^2.$$

On a alors

$$\sqrt{m}(t - t_0) = \frac{a^2}{5} (u - u_0)^5 + \dots$$

D'une même manière, on a aussi

$$r = -a^2(u - u_0)^2 + \dots$$



Ces deux développements nous donnent

$$(58) \quad r = - (5a)^{\frac{2}{5}} m^{\frac{4}{5}} (t - t_0)^{\frac{2}{5}} + \dots,$$

qui coïncident avec le résultat dans le numéro 3.

De plus des équations (53) et (54), on obtient

$$\frac{du}{dt} = \frac{\sqrt{m}}{r^2} = \frac{2a\sqrt{m}}{r_{12}r_{13}r_{23}},$$

d'où l'on voit que  $u$  d'ici n'est autre chose que celui du numéro 4 multiplié par une constante  $2a\sqrt{m}$ . Par conséquent, les relations (55), (56) et (57) nous expliquent le résultat obtenu dans le numéro 4. Il est remarquable dans cet exemple que la nouvelle variable  $u$  fait une uniformisation non seulement localement, mais dans tout le domaine complexe.  $t$ ,  $z$  et  $r$  sont des fonctions méromorphes de  $u$ .

Considérons maintenant le cas général où  $h \neq 0$ . Dans ce cas, la relation (52) nous donne

$$t = \int \frac{\sqrt[4]{z^2 + a^2}}{\sqrt{4m + h\sqrt{z^2 + a^2}}} dz,$$

ou en employant la variable  $r$

$$(59) \quad 2\sqrt{mt} = \int \frac{r^2 dr}{\sqrt{r(1 + \gamma r)(r^2 - a^2)}},$$

où  $\gamma = \frac{h}{4m}$ .

Posons de nouveau

$$s = -\frac{1}{r} - \frac{\gamma}{3}.$$

Il résulte que

$$(60) \quad a\sqrt{mt} = \int \frac{1}{\left(s + \frac{\gamma}{3}\right)^2 \sqrt{4\left(s - \frac{2\gamma}{3}\right)\left(s + \frac{\gamma}{3} - \frac{1}{a}\right)\left(s + \frac{\gamma}{3} + \frac{1}{a}\right)}} ds.$$

Considérons une nouvelle variable  $u$  définie par

$$(61) \quad s = \wp u,$$

où

$$(61^*) \quad \begin{cases} e_i = \frac{2\gamma}{3}, & e_j = -\frac{\gamma}{3} + \frac{1}{a}, & e_k = -\frac{\gamma}{3} - \frac{1}{a}, \\ g_2 = \frac{4\gamma^2}{3} + \frac{4}{a^2}, & g_3 = \frac{8\gamma^3}{27} - \frac{8\gamma}{3a^2}, \end{cases}$$

en employant les notations usuelles des fonctions elliptiques.

On a d'après cela

$$(62) \quad r = -\frac{1}{\wp u + \frac{\gamma}{3}},$$

et en substituant dans l'expression  $z = \sqrt{r^2 - a^2}$ , on a

$$\begin{aligned} z &= \frac{a}{\wp u + \frac{\gamma}{3}} \sqrt{\left(\frac{1}{a} - \frac{\gamma}{3} - \wp u\right)\left(\frac{1}{a} + \frac{\gamma}{3} + \wp u\right)} \\ &= \frac{ia}{\wp u + \frac{\gamma}{3}} \sqrt{(\wp u - e_j)(\wp u - e_k)}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(63) \quad z = \frac{ia\sigma_j u \sigma_k u}{\sigma^2 u \left(\wp u + \frac{\gamma}{3}\right)}.$$

De plus de l'équation (60), on a

$$(64) \quad a \sqrt{mt} = \int \frac{du}{\left(\wp u + \frac{\gamma}{3}\right)^2}.$$

Or on a, en posant  $\wp \alpha = -\frac{\gamma}{3}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(\wp u + \frac{\gamma}{3}\right)^2} &= -\frac{\wp'' \alpha}{\wp'^3 \alpha} \{ \zeta(u - \alpha) - \zeta(u + \alpha) + 2\zeta \alpha \} \\ &\quad + \frac{1}{\wp'^2 \alpha} \{ \wp(u - \alpha) + \wp(u + \alpha) - 2\wp \alpha \}, \quad (12) \end{aligned}$$

done

$$(65) \quad \begin{aligned} a \sqrt{mt} &= -\frac{2}{\wp'^2 \alpha} \left( \wp \alpha + \frac{\wp'' \alpha \zeta \alpha}{\wp' \alpha} \right) u - \frac{\wp'' \alpha}{\wp'^3 \alpha} \text{Log} \frac{\sigma(u - \alpha)}{\sigma(u + \alpha)} - \\ &\quad - \frac{1}{\wp'^2 \alpha} \{ \zeta(u - \alpha) + \zeta(u + \alpha) \} + \text{const.} \end{aligned}$$

(12) En dérivant la formule

$$\frac{1}{\wp u - \wp v} = \frac{1}{\wp' v} \{ \zeta(u - v) - \zeta(u + v) + 2\zeta v \}$$

par rapport à  $v$ , on a

$$\frac{\wp' v}{(\wp u - \wp v)^2} = -\frac{\wp'' v}{\wp'^2 v} \{ \zeta(u - v) - \zeta(u + v) + 2\zeta v \} + \frac{1}{\wp' v} \{ \wp(u - v) + \wp(u + v) - 2\wp v \}.$$

Posons maintenant  $r = 0$  dans l'équation (62). On voit que le choc a lieu à l'instant où

$$u \equiv 0 \pmod{2\omega, 2i\omega'}.$$

Puisque

$$\frac{1}{\left(\delta \mathcal{O}u + \frac{\gamma}{3}\right)^2} = u^4 + \dots,$$

de l'équation (64) on a pour le développement de  $t$

$$a \sqrt{m}(t - t_0) = \frac{u^5}{5} + \dots,$$

où l'on désigne par  $t_0$  la valeur de  $t$  pour  $u = 0$ . On a d'autre part, de l'équation (62)

$$r = -u^2 + \dots$$

Des deux développements ainsi calculés, on conclut que

$$(66) \quad r = -(\bar{5}a)^{\frac{2}{5}} m^{\frac{1}{5}} (t - t_0)^{\frac{2}{5}} + \dots,$$

et qu'ils coïncident avec le résultat obtenu dans le numéro 3.

De plus, d'après l'équation (64), on a

$$\frac{du}{dt} = \frac{a \sqrt{m}}{r^2} = \frac{2a \sqrt{m}}{r_{12} r_{13} r_{23}},$$

d'où l'on voit que  $u$  n'est autre chose que la variable introduite dans le numéro 4 multipliée par une constante. Or, les équations (62), (63) et (65) nous montrent que  $r$ ,  $z$  et  $t$  sont les fonctions holomorphes de  $u$ , au voisinage de  $u \equiv 0$ , donc elles nous expliquent le résultat obtenu dans le numéro 4. (Dans ce cas, l'uniformisation par  $u$  n'est pas étendue, comme au cas précédent, à tout le domaine complexe, parce que l'équation (65) contient dans son deuxième membre le terme contenant  $\text{Log } \sigma(u \pm \alpha)$ ).

Outre les deux sortes de singularités ici étudiées, il peut y en avoir d'autres sortes, par exemple le choc triple dans le domaine complexe. Si elles étaient étudiées d'une manière approfondie, le problème des trois corps serait bien éclairci.

En terminant j'adresse mes très vifs remerciements à M. MATUKUMA qui m'a vivement encouragé pendant mon travail.



# La riflessione analitica delle funzioni biarmoniche attorno a un cerchio ed alcuni problemi di elasticità piana.

Memoria di L. SOBRERO (a Roma).

**Sunto.** - Due funzioni  $f(x, y)$  e  $\varphi(x, y)$ , biarmoniche (e cioè soddisfacenti all'equazione  $\Delta\Delta = 0$ ), rispettivamente definite nei semipiani  $x > 0$  ed  $x < 0$ , le cui derivate seconde si annullano all'infinito, e tali che nei punti dell'asse  $y$  risulti  $f = \varphi$  e  $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$ , si dicono l'una « riflessa » dell'altra attorno all'asse  $y$ . Da ognuna delle due funzioni  $f$  e  $\varphi$  l'altra si ottiene con sole operazioni di sostituzione e derivazione (indicando, precisamente, con  $\{f\}$ ,  $\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\}$  e  $\{\Delta f\}$  le funzioni che si ottengono da  $f$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\Delta f$  ponendo, in queste, in luogo di  $x$  il suo contrario  $-x$ , si ha  $\varphi = \{f\} + 2x \left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\} + x^2 \{\Delta f\}$  e, reciprocamente,  $f = \{\varphi\} + 2x \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right\} + x^2 \{\Delta \varphi\}$ ). In modo analogo si definisce una operazione di riflessione analitica attorno a un cerchio. La retta potendosi riguardare come cerchio degenere (di raggio infinito) l'operazione di riflessione analitica attorno alla retta viene ottenuta, nel testo, come caso limite di quella di riflessione attorno al cerchio. L'operazione di riflessione analitica trova applicazione in alcuni problemi di elasticità piana (perturbazione prodotta da un foro circolare nella sollecitazione di un sistema piano; determinazione degli sforzi in un semipiano elastico sollecitato da una forza applicata in un punto interno).

§ 1. **Oggetto della ricerca.** — Siano  $r$  e  $\theta$  le coordinate polari nel piano,  $f(r, \theta)$  una funzione biarmonica <sup>(1)</sup> definita nei punti interni al cerchio di raggio unitario e centro nell'origine. Se, nell'espressione di  $f(r, \theta)$  poniamo, in luogo di  $r$ , il suo inverso  $\frac{1}{r}$ , e moltiplichiamo l'espressione così ottenuta per  $r^2$  otteniamo una nuova funzione  $\psi(r, \theta)$ , definita nei punti esterni al cerchio unitario, la quale soddisfa ancora, in virtù di un teorema del LEVI-CIVITA, all'equazione  $\Delta\Delta = 0$ . Se conveniamo di indicare con  $\{f(r, \theta)\}$  la fun-

---

(1) e cioè soddisfacente all'equazione  $\Delta\Delta f = 0$ , dove  $\Delta$  designa l'operatore di LAPLACE (in coordinate polari:  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ ).

zione che si ottiene da  $f(r, \theta)$  ponendo in luogo di  $r$  il suo inverso  $\frac{1}{r}$ , avremo (in simboli)

$$\psi(r, \theta) = r^2 \{ f(r, \theta) \} \quad (1).$$

Si constata che nei punti del cerchio unitario le due funzioni  $f(r, \theta)$  e  $\psi(r, \theta)$  assumono gli stessi valori, mentre assumono valori generalmente differenti le loro derivate normali <sup>(2)</sup>.

Un problema di elasticità del quale in seguito faremo cenno ci ha condotti a ricercare l'operazione (di tipo analogo a quella che fa passare dalla funzione  $f$  alla funzione  $\psi$ ) la quale muta un'assegnata funzione biarmonica  $f(r, \theta)$  (definita nei punti interni al cerchio unitario) in una nuova funzione biarmonica  $\varphi(r, \theta)$ , definita nei punti esterni al cerchio unitario, di cui si annullano all'infinito le derivate seconde rispetto ad  $r$ , e tale (infine) che essa e la sua derivata normale rispettivamente eguagliano, nei punti del cerchio unitario, la funzione  $f$  e la sua derivata normale. Proveremo nel prossimo paragrafo che ogni funzione  $\varphi(r, \theta)$  soddisfacente a queste condizioni è fornita dalla formula:

$$(1) \quad \varphi = \{ f \} + \left( r - \frac{1}{r} \right) \left\{ \frac{\partial f}{\partial r} \right\} + \frac{1}{4} \left( r - \frac{1}{r} \right)^2 \{ \Delta f \} + \\ + \left[ \frac{1}{4} (\Delta f)_{r=0} (1 + 2 \log r - r^2) + (a \cos \theta + b \sin \theta) \left( \frac{1}{r} + 2r \log r - r \right) \right],$$

(1) Si veda in proposito: T. LEVI-CIVITA, *Sopra una trasformazione in sè stessa dell'equazione  $\Delta \Delta = 0$* , « Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti », To. IX, Ser. VII, 1897-8, pp. 1399-1410. La proprietà dimostrata dal LEVI-CIVITA immediatamente si estende alle funzioni  $m$ -armoniche di ordine qualunque: se  $f(r, \theta)$  è una funzione  $m$ -armonica (e cioè soddisfacente all'equazione  $\Delta^m f = 0$ , dove  $\Delta^m$  designa l'operatore  $\Delta$  ripetuto  $m$  volte) anche la funzione  $\psi = r^{2(m-1)} \{ f \}$  risulta  $m$ -armonica. Ciò si vede, nel miglior modo, ricordando (con E. ALMANSI, *Sull'integrazione dell'equazione  $\Delta^{2n} = 0$* , « Annali di Matematica », Ser. III, To. II, 1899, pp. 1-51) che ogni funzione  $m$ -armonica  $f(r, \theta)$  definita nei punti di un'area monoconnessa può sempre scomporsi in una somma del tipo

$$(*) \quad f_0 + r^2 f_1 + \dots + r^{2(m-1)} f_{m-1},$$

dove  $f_0, f_1, \dots, f_{m-1}$  sono funzioni armoniche. Segue immediatamente:

$$\psi = r^{2(m-1)} \{ f_0 \} + r^{2(m-2)} \{ f_1 \} + \dots + \{ f_{m-1} \}.$$

Poichè  $\{ f_0 \}, \{ f_1 \}, \dots, \{ f_{m-1} \}$  sono ancora notoriamente funzioni armoniche il secondo membro della precedente relazione è una somma del tipo (\*), e quindi funzione  $m$ -armonica.

(2) Per derivate normali intenderemo quelle eseguite in direzione normale al cerchio unitario, e cioè le derivate rispetto ad  $r$ .

dove: ...  $\{f\}$ ,  $\left\{\frac{\partial f}{\partial r}\right\}$  e  $\{\Delta f\}$  sono le funzioni che rispettivamente si ottengono da  $f$ ,  $\frac{\partial f}{\partial r}$  e  $\Delta f$  ponendo, in tali espressioni, in luogo di  $r$  il suo inverso  $\frac{1}{r}$ ;

...  $(\Delta f)_{r=0}$  è il valore di  $\Delta f$  calcolato nell'origine del riferimento;

...  $a$  e  $b$  sono coefficienti arbitrari. Tutte le funzioni (1), qualunque sia il valore dei coefficienti  $a$  e  $b$ , soddisfano al problema proposto. L'operazione che muta l'assegnata funzione biarmonica  $f(r, \theta)$  nella funzione  $\varphi(r, \theta)$  si dirà di « riflessione analitica » attorno al cerchio unitario; la funzione  $\varphi(r, \theta)$  prenderà il nome di « funzione riflessa » (1).

§ 2. **Esame della funzione riflessa.** — Proviamo, anzitutto, che il secondo membro della (1) è funzione biarmonica. Poichè son (notoriamente) biarmonici i termini contenuti entro parentesi quadre, basterà dimostrare che è funzione biarmonica la somma

$$(2) \quad \{f\} + \left(r - \frac{1}{r}\right) \left\{\frac{\partial f}{\partial r}\right\} + \frac{1}{4} \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \{\Delta f\}.$$

Il modo più comodo per convincersene consiste nello scomporre la funzione  $f$  in una somma del tipo

$$(3) \quad f = f_0 + r^2 f_1 \quad (2),$$

$f_0$  ed  $f_1$  essendo funzioni armoniche. Si vede allora con breve calcolo che l'espressione (2) assume l'aspetto:

$$(4) \quad \left\{f_0 - r \frac{\partial f_0}{\partial r} - r \frac{\partial f_1}{\partial r}\right\} + r^2 \left\{f_1 + r \frac{\partial f_0}{\partial r} + r \frac{\partial f_1}{\partial r}\right\}.$$

Poichè  $f_0$ ,  $f_1$ ,  $r \frac{\partial f_0}{\partial r}$ ,  $r \frac{\partial f_1}{\partial r}$  sono funzioni armoniche, tali risultano anche le espressioni  $\left\{f_0 - r \frac{\partial f_0}{\partial r} - r \frac{\partial f_1}{\partial r}\right\}$  ed  $\left\{f_1 + r \frac{\partial f_0}{\partial r} + r \frac{\partial f_1}{\partial r}\right\}$ . La somma (4) è dunque del tipo (3), e quindi funzione biarmonica.

Nessuna difficoltà s'incontrerebbe a provare che il secondo membro della (1) verifica le condizioni al contorno richieste per la funzione  $\varphi$ ; e che tutte le funzioni  $\varphi$  soddisfacenti al problema si ottengono colla formula (1).

(1) Per una analoga formula di transizione da « problemi interni » a « problemi esterni » (nel caso di funzioni armoniche) si veda: C. A. BJERKNES, *Hydrodynamische Fernkräfte*, « Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften » (N. 195), p. 101.

(2) Cfr. la forma di scrittura (\*) nella nota (2) della pagina precedente.

Aggiungeremo che alla formula (1) siamo pervenuti cercando, per la funzione  $\varphi(r, \theta)$ , uno sviluppo in serie. I relativi calcoli, banali e laboriosi, non offrono alcun interesse. Il fatto che le serie ottenute col procedimento indicato si possano sommare così da ottenere la formula finita (1), lascia tuttavia sospettare che si debba poter giungere a questa formula con altro più adeguato procedimento.

§ 3. **Il problema della piastra forata.** — Della formula (1) faremo uso nella soluzione del seguente problema: « Un sistema elastico piano indefinito è soggetto a un insieme di forze esterne in equilibrio agenti nel suo medesimo piano. In una regione nella quale non cadono punti d'applicazione di forze esterne si pratica un foro circolare. Con ciò viene evidentemente ad alterarsi lo stato di sollecitazione elastica del sistema. Qual'è l'entità di questa perturbazione? » (1).

Immediata è la traduzione analitica del problema. Prima che si pratichi il foro lo stato di sollecitazione elastica è caratterizzato da una certa funzione di AIRY  $f(r, \theta)$  (2). Praticato nella piastra un foro circolare (che potremo supporre di centro nell'origine e raggio unitario) verrà ad alterarsi lo stato di sollecitazione elastica del sistema. Il nuovo stato di equilibrio sarà caratterizzato da una nuova funzione di AIRY  $F(r, \theta)$  (definita nei punti esterni al cerchio unitario) la quale potrà riguardarsi come somma dell'antica funzione  $f(r, \theta)$  e di una funzione, che potremmo dire aggiuntiva,  $\varphi(r, \theta)$ . Si vede facilmente che tale funzione aggiuntiva  $\varphi(r, \theta)$ , la quale sta a rappresentare la perturbazione elastica prodotta dalla presenza del foro, risulta soggetta alle seguenti condizioni:

(1) Il problema non è nuovo. Posto e risolto (empiricamente) dal KIRSCH in un caso particolare (*Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre*, « Zeit. des Vereins Deut. Ing. », Band 42, 1892, n. 29, p. 797) fu, in seguito, razionalmente ripreso dal WOLF (*Beiträge zur ebenen Elastizitätstheorie*, « Zeit. für techn. Physik », 1921, Heft. 8, p. 29; 1922, Heft. 5, p. 160), dal PÖSCHL e da altri. Il metodo di soluzione che noi qui proponiamo si differenzia sia per la semplicità del mezzo analitico cui fa ricorso, sia perchè porge una formula risolutiva unica, indipendentemente dalla natura dello sforzo che sollecita la piastra in assenza di foro.

(2) È ben noto che le derivate seconde (pure e mista) della funzione  $f$ , secondo due direzioni ortogonali  $x$  ed  $y$ , rappresentano (a meno di un segno) le componenti della sollecitazione elastica secondo quelle direzioni. Si ha precisamente, indicando con  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau$  le componenti della sollecitazione elastica,:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Queste formule possono, reciprocamente, servire come definizione della funzione  $f$ .



1) Essa verifica, in tutti i punti dove è definita (e cioè nei punti esterni al cerchio unitario) l'equazione  $\Delta\Delta\varphi = 0$ .

2) Dovendosi ritenere che la sollecitazione « aggiuntiva » dovuta alla presenza del foro si avverta solo nella immediata prossimità di quest'ultimo (e cioè abbia carattere nettamente locale), la derivata  $\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}$  (che appunto rappresenta una delle componenti della sollecitazione elastica aggiuntiva) dovrà tendere a zero al crescere di  $r$  ad infinito.

3) Si deduce infine dalla teoria della funzione di AIRY che la funzione  $F(r, \theta)$  e la sua derivata prima rispetto ad  $r$  devono annullarsi lungo il bordo del foro (<sup>1</sup>). E poichè  $F = f + \varphi$  si trae che dovrà essere (nei punti del cerchio unitario)  $\varphi = -f$  e  $\frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{\partial f}{\partial r}$ .

(<sup>1</sup>) Che sia così appare quasi immediato se si ricorda il significato meccanico della funzione di AIRY (cfr. L. SOBRERO, *Del significato meccanico della funzione di Airy*, « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », 1935, fascicolo 4; e « Ricerche d'Ingegneria », 1935). Sia un sistema elastico piano, eventualmente pluriconnesso (v. figura 1), privo di torze superficiali e sollecitato da forze esterne soltanto nei punti del suo contorno esterno  $E$ . Nel piano del sistema siano:  $O$  un punto fisso (p. es. l'origine del riferimento),  $P$  un punto generico di coordinate  $x$  ed  $y$ ,  $C$  una curva con l'origine in  $O$  e l'estremo in  $P$ . Supporremo che tale curva (e con essa gli estremi  $O$  e  $P$ ) sia tracciata completamente all'interno del contorno  $E$  del sistema piano; ma ammetteremo che alcuni tratti della curva (ed anche i suoi punti terminali) possano eventualmente cadere nell'interno delle cavità del sistema. È facile constatare che il momento  $M$ , preso rispetto al punto  $P$ , degli sforzi che la parte di sistema situata alla destra della curva  $C$  esercita (attraverso tale curva) sulla parte di sistema situata alla sinistra, non dipende dall'andamento della curva  $C$ , ma solo dall'estremo (variabile)  $P$  di tale curva. Quando, inoltre, il punto  $P$  cade nell'interno del sistema elastico, il momento  $M$  coincide col valore, nel punto  $P$ , della funzione di Airy (della quale, pertanto, fornisce l'interpretazione meccanica). Si noti che la funzione  $M(x, y)$  conserva significato, contrariamente alla funzione di AIRY, anche nei punti interni alle cavità del sistema.

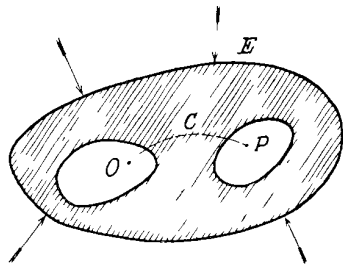


Fig. 1

Se il punto  $P(x, y)$  si muove entro una di queste cavità, la funzione  $M(x, y)$  varia con legge lineare (in  $x$  ed  $y$ ); se il punto  $P$ , uscendo da una cavità, entra nel sistema piano, le derivate seconde, terze, ... della funzione  $M(x, y)$  subiscono una brusca variazione, ma la funzione stessa e le sue derivate prime variano con legge continua.

Nel sistema piano cui si riferisce il testo (sistema indefinito con foro circolare unico) si prenda come punto fisso  $O$  il centro del foro. È allora manifesto che la funzione  $M$  e le sue derivate prime si mantengono nulle in tutti i punti interni al foro. Dalla proprietà di continuità di  $M$  e delle sue derivate prime si trae inoltre che, se il punto  $P$  è situato sul sistema piano e si sposta verso un punto qualunque del foro, la funzione  $M$  (e cioè la funzione di AIRY) e le sue derivate prime tendono a zero. Di qui la condizione al contorno espressa nel testo.

Ma una funzione  $\varphi(r, \theta)$  soddisfacente alle condizioni ora dette differisce solo per il segno da quella ottenibile da  $f(r, \theta)$  con l'operazione di riflessione analitica attorno al cerchio unitario. Sicchè risulterà, per quanto si è visto nel precedente § 1:

$$\varphi(r, \theta) = -\{f\} - \left(r - \frac{1}{r}\right) \left\{ \frac{\partial f}{\partial r} \right\} - \frac{1}{4} \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \{\Delta f\} - \left[ \frac{1}{4} (\Delta f)_{r=0} (1 + 2 \log r - r^2) + (a \cos \theta + b \sin \theta) \left( \frac{1}{r} + 2r \log r - r \right) \right].$$

I coefficienti  $a$  e  $b$  comparenti in questa formula non risultano determinabili con le condizioni finora imposte alla funzione  $\varphi(r, \theta)$ . Ma è noto, d'altra parte, che negli sviluppi in serie della funzione di AIRY devono mancare i termini in  $\cos \theta \cdot r \log r$  ed in  $\sin \theta \cdot r \log r$  se si vuole conservare la monodromia degli spostamenti (<sup>1</sup>). Dovrà dunque risultare, nello sviluppo soprascritto,  $a = b = 0$ , e la funzione  $F(r, \theta)$  avrà l'espressione che segue:

$$\begin{aligned} (5) \quad F(r, \theta) &= f(r, \theta) + \varphi(r, \theta) = \\ &= f - \{f\} - \left(r - \frac{1}{r}\right) \left\{ \frac{\partial f}{\partial r} \right\} - \frac{1}{4} \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \{\Delta f\} - \frac{1}{4} (\Delta f)_{r=0} (1 + 2 \log r - r^2). \end{aligned}$$

La formula (5) risolve compiutamente il problema proposto.

§ 4. **Piastra forata: casi particolari.** — Supponiamo, in primo luogo, che la piastra risulti sollecitata a trazione pura (cosicchè, scegliendo come asse delle  $x$  la direzione di trazione, risulti, in assenza di foro:  $\sigma_x = p$ ,  $\sigma_y = \tau = 0$ ,  $p$  essendo una costante). Avremo allora (assunto un riferimento polare in cui l'asse coincida coll'asse  $x$ ):

$$f = \frac{1}{2} y^2 p = \frac{1}{2} r^2 \sin^2 \theta \cdot p,$$

e quindi, per la (5),

$$F = \left[ \left( \frac{r^2}{4} - \frac{1}{2} \log r - \frac{1}{4} \right) - \frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right)^2 \cos 2\theta \right] p.$$

Indicando pertanto con  $\sigma_r, \sigma_t, \tau_r, \tau_t$  le componenti della sollecitazione elastica della piastra forata nella direzione del raggio vettore e della sua

(<sup>1</sup>) Si confronti: L. SOBRERO, *Contributo alla teoria della funzione di Airy*, « Memorie della R. Acc. d'Italia », Roma, 1935.

normale (orientata nel senso delle  $\theta$  crescenti) si avrà:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = \left[ \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) \left( 1 + \left[ 1 - \frac{3}{r^2} \right] \cos 2\theta \right) \right] p, \\ \sigma_t = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \left[ \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{3}{r^2} \right) \cos 2\theta \right] p, \\ \tau_{r,t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} = \left[ -\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) \left( 1 + \frac{3}{r^2} \right) \sin 2\theta \right] p, \end{array} \right.$$

(le quali naturalmente coincidono con quelle indicate dal KIRSCH).

Consideriamo, in secondo luogo, il caso di un sistema piano indefinito sollecitato da uno sforzo tagliante di entità  $t$  (così che risulti, in assenza di foro,  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ ,  $\tau = t$ , dove  $t$  è una costante). Avremo

$$f = -xyt = -\frac{1}{2} r^2 \sin 2\theta \cdot t,$$

e quindi, per la formula (5),

$$F = -\frac{1}{2} \left( r - \frac{1}{r} \right)^2 \sin 2\theta \cdot t,$$

da cui:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_r = \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) \left( 1 - \frac{3}{r^2} \right) \sin 2\theta \cdot t, \\ \sigma_t = -\left( 1 + \frac{3}{r^2} \right) \sin 2\theta \cdot t, \\ \tau_{r,s} = \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) \left( 1 + \frac{3}{r^2} \right) \cos 2\theta \cdot t \quad (1). \end{array} \right.$$

§ 5. **La riflessione analitica attorno a una retta.** — Sia  $f(x, y)$  una funzione biarmonica delle variabili  $x$  ed  $y$ , definita nei punti del semipiano  $x > 0$ . Se, nell'espressione di  $f(x, y)$ , poniamo in luogo di  $x$  il suo contrario  $-x$ , otteniamo una nuova funzione, anch'essa biarmonica, definita nei punti del semipiano  $x < 0$ . Designamo questa nuova funzione col simbolo  $\{f\}$ . È facile constatare che, nei punti dell'asse  $y$ , le due funzioni  $f$  ed  $\{f\}$  assumono i medesimi valori; mentre assumono valori generalmente differenti le loro derivate rispetto ad  $x$ .

(1) Si confronti: L. SOBRERO, *Algebra delle funzioni ipercomplesse e sue applicazioni alla teoria matematica dell'elasticità*, « Memorie della R. Acc. d'Italia », Roma, 1934, p. 44; idem, *Theorie der ebenen Elastizität unter Benutzung eines Systems hypercomplexer Zahlen*, « Hamburger mathematische Einzelschriften », Teubner, Leipzig, 1934.

Seguendo l'indirizzo già indicato nei precedenti paragrafi abbiám cercata un'operazione (di tipo analogo a quella che muta la funzione  $f$  nella funzione  $\{f\}$ ), la quale faccia passare da una (data) funzione biarmonica  $f(x, y)$ , definita nel semipiano  $x > 0$ , e tale che le sue derivate seconde si annullino all'infinito, ad una nuova funzione biarmonica  $\varphi(x, y)$ , definita nei punti del semipiano  $x < 0$ , ed ivi soddisfacente alle seguenti condizioni al contorno: che le sue derivate seconde si annullino all'infinito, e che essa e le sue derivate parziali prime assumano, nei punti dell'asse  $y$ , rispettivamente gli stessi valori della funzione  $f$  e delle sue derivate parziali prime.

Ad una siffatta operazione daremo il nome di « riflessione analitica » attorno ad una retta. Potendosi, la retta, riguardare come un cerchio degenero (di raggio infinito) l'operazione di riflessione attorno alla retta risulta come caso limite di quella di riflessione attorno a un cerchio. Eseguendo l'indicato passaggio al limite sulla formula (1) si vede che la richiesta funzione  $\varphi$  risulta espressa dalla relazione

$$(6) \quad \varphi = \{f\} + 2x \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\} + x^2 \{ \Delta f \},$$

dove con le notazioni  $\{f\}$ ,  $\left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\}$  e  $\{ \Delta f \}$  abbiamo indicate le funzioni che da  $f$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}$  e  $\Delta f$  rispettivamente si ottengono, ponendo in tali espressioni in luogo di  $x$  il suo contrario  $-x$ .

È facile constatare che *il quadrato dell'operazione di riflessione analitica attorno alla retta è l'identità*. Con ciò intendendo affermare che se si applica alla funzione riflessa  $\varphi(x, y)$  l'operazione di riflessione analitica, si ritorna alla funzione primitiva  $f(x, y)$ . In simboli:

$$f = \{ \varphi \} + 2x \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} + x^2 \{ \Delta \varphi \} \quad (1).$$

§ 6. **Il problema del semipiano elastico.** — Faremo applicazione della formula (6) al seguente problema di elasticità piana: « Un sistema piano indefinito è soggetto a un insieme di forze esterne agenti nel suo medesimo piano, ed applicate in punti del semipiano (che diremo positivo)  $x > 0$ . Se si

---

(1) Riteniamo che operazioni di « riflessione analitica » analoghe a quelle indicate nel testo sussistano per altri tipi di funzioni (diverse dalle biarmoniche) e per altri tipi di curve (diverse dal cerchio e dalla retta).

taglia il piano elastico lungo l'asse delle  $x$  viene manifestamente ad alterarsi lo stato di sollecitazione del sistema. Qual'è l'entità di questa perturbazione? ».

Indichiamo con  $f(x, y)$  la funzione di AIRY che definisce lo stato di sollecitazione elastica del sistema piano prima del taglio; con  $F(x, y)$  la funzione che individua la sollecitazione elastica del piano tagliato.

A taglio avvenuto il semipiano negativo ( $x < 0$ ) viene a formare un sistema a sè nel quale mancano forze esterne direttamente applicate; talchè risulterà (in tutti i punti di questo semipiano negativo)  $\sigma_x = \sigma_y = \tau = 0$ , e quindi  $F(x, y) \equiv 0$ .

Per quanto, invece, riguarda il semipiano positivo, si può dimostrare (con ragionamento analogo a quello svolto nel § 3) che la funzione  $F(x, y)$  ivi risulta come differenza tra la funzione  $f(x, y)$  e la funzione  $\varphi(x, y)$  ottenuta per riflessione di  $f(x, y)$  attorno all'asse delle  $y$ . Si ha cioè:

$$(7) \quad F(x, y) = f - \{f\} - 2x \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} \right\} - x^2 \{ \Delta f \},$$

la quale risolve compiutamente il problema.

§ 7. Semipiano elastico: caso particolare. — In applicazione alla formula (7) proponiamoci, a titolo di esempio, di determinare la sollecitazione prodotta nel semipiano elastico  $x > 0$  (con il bordo  $x = 0$  libero da forze esterne) da una forza di entità  $P$ , diretta secondo l'asse  $x$ , ed applicata nel punto di coordinate  $(1, 0)$  (v. figura 2) <sup>(4)</sup>.

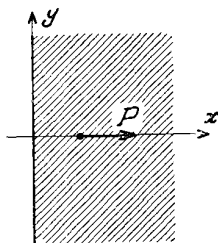


Fig. 2

Nel piano indefinito lo stato di sollecitazione elastica prodotto dalla forza  $P$  risulta espresso dalla funzione:

$$(8) \quad f(x, y) = \frac{P}{\pi} \left( \frac{1}{2} y\theta - \frac{m-1}{4m} [x-1] \log r \right),$$

dove si è indicato con  $m$  il rapporto degli allungamenti alle contrazioni laterali, e si è posto  $\theta = \arctang \frac{y}{x-1}$ ,  $r = \sqrt{y^2 + (x-1)^2}$ .

Nel semipiano elastico la funzione  $F(r, \theta)$  che definisce lo stato di sollecitazione provocato dalla forza  $P$ , si otterrà dalla formula (7) tenendo conto

<sup>(4)</sup> Il problema è stato posto ed esaminato da E. MELAN, *Der Spannungszustand der durch eine Einzelkraft im Innern beanspruchten Halbscheibe*, « Zeit. für angew. Math. und Mech. », Band 12, Heft. 6, Dic. 1932, pp. 343-346.

dell'espressione (8) di  $f(x, y)$ . Con breve calcolo si ha:

$$F = \frac{P}{\pi} \left( \frac{1}{2} y[\theta + \theta'] - \frac{m-1}{4m} [x-1] \log \frac{r}{r'} - \frac{m+1}{2m} \frac{x(x+1)}{r'^2} + x \right),$$

dove si è posto  $\theta' = \arctang \frac{y}{x+1}$ ,  $r' = \sqrt{y^2 + (x+1)^2}$ . La funzione  $F$  ora determinata coincide, sostanzialmente, con quella indicata dal MELAN (1).

---

(1) Nella formula del MELAN non figura l'ultimo termine,  $\frac{P}{\pi} x$ , della nostra formula. Ma tale differenza non porta evidentemente ad alcun divario nell'espressione degli sforzi (che si ottengono come derivate *seconde* della  $F$ ).

---

# SUGLI SPAZI DI WEYL

## INTRODUZIONE GEOMETRICA VETTORIALE ASSOLUTA ALLA TEORIA DELLA RELATIVITÀ GENERALE

Memoria di MARIO MANARINI (a Bologna).

---

**Sunto.** - *In questa Memoria viene istituito un calcolo vettoriale assoluto intrinseco nelle varietà a connessione affine e metriche del WEYL e viene vantaggiosamente sostituito al Calcolo differenziale assoluto nello studio degli spazi di RIEMANN generalizzati dal WEYL per le applicazioni alle teorie unitarie relativistiche.*

In questo lavoro studio gli spazi del WEYL (nell'indirizzo assiomatico seguito dal WEYL stesso) con metodo vettoriale assoluto intrinseco, del quale ne faccio nuove estensioni con applicazione di quelle da me fatte in una serie di recenti ricerche.

Nelle varietà a connessione affine del WEYL ho introdotto la derivazione intrinseca per vettori ed omografie, estensione di quella da me già considerata per varietà riemanniane. Con questa derivazione procedo allo studio delle geodetiche per la varietà, alla considerazione del vettore associato (dal BIANCHI introdotto per le varietà riemanniane) alla definizione e sviluppo dell'algoritmo metrico vettoriale differenziale nello spazio metrico di WEYL: rotazionale di un campo vettoriale, gradiente di un'omografia, divergenze di un bivettore, ecc. Inoltre di tale derivazione intrinseca è conseguenza una suggestiva interpretazione vettoriale assoluta della derivazione covariante tensoriale nelle varietà a connessione affine.

L'esistenza in ogni punto di una varietà a connessione affine di WEYL di un'omografia del terzo ordine — curvatura di connessione affine — caratterizza il distacco di essa varietà dalle varietà piane o euclideanamente affini, per le quali detta omografia si annulla ovunque dando la condizione d'integrabilità del trasporto per parallelismo.

La connessione metrica, che si impone alle varietà metriche amorfe per passare da un punto ad uno vicino del suo intorno, dipende dall'introduzione, punto per punto, di una forma metrica tarata di vettore ed ancora di un vettore  $\omega$  — vettore di connessione metrica —.

Nello spazio metrico di WEYL, fusione di connessione metrica ed affine, per il quale il trasporto per parallelismo subordina il trasporto per congruenza dei moduli dei vettori, l'esistenza del bivettore  $\underset{2}{\mathfrak{r}} = \text{rot } \mathfrak{w}$  — curvatura di connessione metrica — caratterizza il distacco dello spazio di WEYL dallo spazio metrico riemanniano per il quale detto bivettore risulta nullo in ogni punto; nel caso della taratura normale per lo spazio riemanniano, risulta pure nullo ovunque il vettore di connessione metrica  $\mathfrak{w}$ .

Col metodo vettoriale intrinseco assoluto qui istituito, la chiarezza intuitiva dei problemi è messa in piena luce; e credo con ciò di aver assolto un compito utile e non facile giacchè lo stesso WEYL nel suo fondamentale libro *Raum, Zeit, Materie* in cui tratta la geometria infinitesimale pura con l'algoritmo tensoriale, scrive (4<sup>a</sup> ed., traduzione francese, p. 119): « malgré les efforts sincères de l'Auteur, les considérations qui nous ont amené à l'achèvement des principes de la géométrie infinitésimale ne sont pas allées sans une débauche de formules et d'indices qui peuvent parfois masquer la clarté intuitive des problèmes. Mais il est impossible de renoncer à cet appareil qui semble à quelques-uns un peu rebutant » (1).

In questa Memoria vi sono qua e là passaggi al calcolo tensoriale distinti tipograficamente con carattere più minuto dal testo della Memoria stessa. Sono fatti per comodo del lettore che conosce questo calcolo, onde possa fare i debiti confronti.

L'esperienza delle mie recenti ricerche sulla estensione ed applicazione del metodo vettoriale agli spazi generali, come già accennai in altro luogo, ha dimostrato la necessità di procedere per esse con criterio diverso da quello che si segue ordinariamente per lo sviluppo del metodo vettoriale in  $S_3$ . Fra l'altro si è dimostrato efficace l'uso sistematico dei plurivettori, conseguendone il fatto notevole di ottenere definizioni e proposizioni valide formalmente qualunque siano le dimensioni dello spazio. Il calcolo vettoriale in  $S_3$  ne diviene allora un caso particolare che per le speciali circostanze di ambiente può venire modificato in guisa da presentarsi sotto l'aspetto ordinario.

Con l'indirizzo da me seguito, il calcolo vettoriale negli spazi generali si afferma efficace per gli studi geometrici e di fisica-matematica nella stessa maniera che lo è, universalmente riconosciuto, quello ordinario in  $S_3$ .

---

(1) L'originale tedesco (cfr. pag. 124) aggiunge in più come « sia spiacevole la fatica che si deve fare per le parti puramente formali, obbligati come siamo a dare loro un posto così vasto ».



## § 1.

**Derivazione vettoriale intrinseca e curvatura di connessione per le varietà a connessione affine simmetrica di Weyl.**

1. **Varietà affini amorfe.** Data una varietà  $n$ -dimensionale di punti  $P(q_1, q_2, \dots, q_n)$ , due punti  $P$  e  $P'$  vicinissimi, per la qual cosa  $P'$  si indica con  $P'(q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, \dots, q_n + dq_n)$ , definiscano un elemento lineare o vettore infinitesimo per la varietà in  $P$ , che potremo convenire di indicare scrivendo

$$(1) \quad P' - P = dP.$$

Ammettiamo che il vettore  $dP$  possa essere moltiplicato per un numero  $\lambda$  ottenendosi un vettore  $\lambda dP$  avente con  $dP$  in comune la direzione; il segno di  $\lambda$  determinerà l'uguaglianza o l'opposizione del verso dei due vettori. Possiamo anche dire che il rapporto dei due moduli è  $|\lambda|$ , mentre qui non ha senso parlare di modulo in sè di ciascuno dei due vettori. Potremo scrivere:

$$(2) \quad P'' - P = \lambda(P' - P) = \lambda dP,$$

convenendo di rimanere nella varietà qualora si spicchino da  $P$  vettori infinitesimi.

Tirati in  $P$  i due vettori infinitesimi  $P_1 - P$  e  $P_2 - P$ , ammetteremo che esista la loro « somma » che rappresenteremo con

$$(3) \quad P_3 - P = (P_1 - P) + (P_2 - P).$$

In tal maniera veniamo a postulare che per la varietà generale e per i vettori infinitesimi in  $P$  valga la geometria vettoriale affine euclidea, costituendone (1), (2) e (3) gli assiomi fondamentali.

Associando a direzione e verso nella varietà in  $P$ , determinati dai punti  $P$  e  $P' = P + dP$ , un numero finito, postuliamo il concetto di *vettore finito in  $P$  tangenziale alla varietà*. Per vettori finiti proporzionali a quelli infinitesimi che entrano nella relazione (3), che non potremo però indicare con gli stessi simboli ma che indicheremo con  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , converremo che continui a valere la (3) stessa, la quale pertanto verrà a costituire l'assioma anche per la somma dei vettori finiti. In altre parole si viene a postulare col WEYL la validità dell'algoritmo vettoriale affine euclideo per i vettori finiti tangenziali alla varietà spiccati da  $P$ .

Questo algoritmo vettoriale affine può essere completato con l'algoritmo affine omografico ed iperomografico in  $P$ , essendo le omografie ed iperomografie vettoriali, operazioni vettoriali affini dello spazio euclideo.

In tal modo si è postulato per la varietà l'esistenza in  $P$  della geometria vettoriale affine o geometria lineare: in questa è possibile confrontare due vettori spiccati da  $P$  aventi uguali direzioni, aventi cioè in comune punti infinitamente vicini, ma non si può confrontare vettori di direzione diversa; nemmeno si può parlare di modulo di un vettore in sè. In altre parole resta così allegata nel punto  $P$  della varietà generale una varietà vettoriale affine di vettori tangenziali con la validità in essa dell'algoritmo vettoriale affine algebrico, omografico ed iperomografico.

Associando una simile varietà vettoriale ad ogni punto della varietà generale data, siamo nello stadio di *varietà affine amorfa* o di *continuo affine amorfo*. Nessun legame intercede fra i vettori delle varietà vettoriali affini associate ai singoli punti.

Nel punto  $P$  della varietà e nella varietà vettoriale affine tangente restano determinati i vettori fondamentali

$$(4) \quad \mathbf{e}_i = \frac{\partial P}{\partial q_i} = \lim_{\delta q_i \rightarrow 0} \frac{P(q_i + \delta q_i) - P(q_i)}{\delta q_i} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Se  $\mathbf{u}$  è un vettore della varietà in  $P$ , posto

$$(5) \quad \mathbf{u} = \Sigma u^i \mathbf{e}_i,$$

abbiamo nelle  $u^i$  le componenti contravarianti di  $\mathbf{u}$ ; nel caso particolare del vettore infinitesimo  $dP = P' - P$  si ha:

$$(6) \quad dP = \Sigma_i dq_i \mathbf{e}_i,$$

per modo che le  $dq_i$  sono le sue componenti contravarianti.

In  $P$  si possono introdurre nella varietà vettoriale associata i bivettori e in generale i plurivettori; due elementi lineari  $dP$  e  $\delta P$  spiccati da  $P$  determinano un *bivettore semplice* (infinitesimo) le cui componenti contravarianti sono

$$(7) \quad \Delta q_{ik} = dq_i \delta q_k - \delta q_i dq_k.$$

Se  $\alpha$  è un'omografia vettoriale in  $P$  (cioè operante sui vettori della varietà vettoriale allegata a  $P$ ) ponendo

$$(8) \quad \alpha \mathbf{e}_i = \Sigma_k \alpha_i^k \mathbf{e}_k,$$

abbiamo che le componenti  $\alpha_i^k$  costituiscono un tensore doppio misto con l'indice  $i$  di covarianza e l'indice  $k$  di contravarianza; per un'omografia  $\mu$  di ordine  $m$ , ponendo

$$(9) \quad \mu \mathbf{e}_{i_1} \mathbf{e}_{i_2} \dots \mathbf{e}_{i_m} = \Sigma_{i_{m+1}} \mu_{i_1 i_2 \dots i_m}^{i_{m+1}} \mathbf{e}_{i_{m+1}},$$

abbiamo che le componenti  $\mu_{i_1 i_2 \dots i_m}^{i_{m+1}}$ , ove gli indici  $i_1 i_2 \dots i_m i_{m+1}$  variano separatamente da 1 ad  $m$ , costituiscono un tensore  $(m+1)$ -plo con  $m$  indici di covarianza ed uno di contravarianza precisati nel modo indicato dalla (9) stessa.

**2. Varietà a connessione affine simmetrica.** — Considerata una varietà affine amorfa avremo intanto che le due  $n$ -ple fondamentali  $(\mathbf{e}_i)$  e  $(\mathbf{e}'_i)$  rispettivamente nei punti generici  $P$  e  $P_1$ , fatte corrispondere ordinatamente vettore

a vettore, determinano una omografia vettoriale operante fra varietà vettoriali affini in punti diversi e che indicheremo con  $\beta(P, P_1)$ .

Avremo dunque

$$(10) \quad \mathbf{e}_i = \beta(P, P_1)\mathbf{e}'_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

e se consideriamo in  $P_1$  il vettore

$$\mathbf{u} = \Sigma_i u^i \mathbf{e}'_i,$$

risulterà in  $P$  il vettore corrispondente

$$(11) \quad \mathbf{u}_* = \beta(P, P_1)\mathbf{u} = \Sigma_i u^i \mathbf{e}_i,$$

il quale, come si vede, possiede in  $P$  le stesse componenti contravarianti del vettore  $\mathbf{u}$  in  $P_1$ .

Ora, introduciamo un'altra corrispondenza fra i vettori  $\mathbf{u}$  della varietà lineare vettoriale in  $P$  ed i vettori  $\mathbf{u}'$  della analoga varietà in  $P' = P + dP$ , indipendentemente dalle coordinate  $q_i$  introdotte; ossia consideriamo un'omografia  $(\gamma dP)$ , non degenera, dipendente da  $dP$  in modo che si abbia

$$(12) \quad \mathbf{u}' = (\gamma dP)\mathbf{u},$$

e assumiamo, per definizione, che il vettore  $\mathbf{u}'$  in  $P'$  sia il « parallelo » al vettore  $\mathbf{u}$  in  $P$ .

In virtù della (11) al vettore  $\mathbf{u}'$  in  $P'$  corrisponde in  $P$  il vettore

$$\mathbf{u}'_* = \beta(P, P')\mathbf{u}',$$

distinto in generale dal vettore  $\mathbf{u}$  che corrisponde ad  $\mathbf{u}'$  per parallelismo. Consideriamo allora in  $P$  la differenza infinitesima

$$(13) \quad d\mathbf{u} = \mathbf{u}'_* - \mathbf{u} = [\beta(\gamma dP) - 1]\mathbf{u},$$

dalla quale ricaviamo

$$\mathbf{u}'_* = \mathbf{u} + d\mathbf{u}.$$

Per la (13) si scorge in  $P$  una corrispondenza lineare fra  $\mathbf{u}$  e  $d\mathbf{u}$  che indicheremo con l'omografia infinitesima  $(\mu dP)$  dipendente da  $dP$ , subordinata all'introdotta parallelismo e porremo

$$(14) \quad d\mathbf{u} = -(\mu dP)\mathbf{u},$$

con la qual cosa si viene a porre

$$\mu dP = 1 - \beta(\gamma dP)$$

da cui

$$(15) \quad \gamma dP = \beta^{-1}[1 - \mu dP],$$

ove  $\beta^{-1}$  è l'omografia inversa di  $\beta$ , che farà corrispondere a vettori in  $P$ , vettori in  $P'$  delle due varietà vettoriali lineari in  $P$  e in  $P'$ .

Per sua natura il primo membro di (15) è indipendente dalle coordinate ( $q_i$ ) introdotte nella varietà affine amorfa considerata; perciò tale dovrà risultare anche il secondo membro, il quale pure servirà per determinare la corrispondenza vettoriale omografica (corrispondenza affine) fra i vettori in  $P$  e quelli in  $P'$  ossia, in altre parole, applicato ad  $\mathbf{u}$  in  $P$  ci darà il vettore parallelo  $\mathbf{u}'$  in  $P' = P + dP$ :

$$(15') \quad \mathbf{u}' = \beta^{-1}(1 - \mu dP)\mathbf{u}.$$

Viceversa, per stabilire il parallelismo nell'intorno di  $P$  possiamo pensare di introdurre in  $P$  l'operatore vettoriale del secondo ordine  $\mu$  da applicarsi ai vettori infinitesimi  $dP$  in  $P$  in guisa tale da dare l'omografia infinitesima  $\mu dP$  operante in  $P$  nel modo precisato da (14).

Sottoporremo in più il parallelismo che stiamo introducendo alle due condizioni fondamentali di *continuità* e di *commutabilità* il che equivale a porre opportune condizioni per l'operatore vettoriale del secondo ordine  $\mu$ .

A meno di infinitesimi del secondo ordine imporranno anzitutto, relativamente agli spostamenti infinitesimi in  $P$ , la condizione di linearità:

$$\mu(dP + \delta P) = \mu dP + \mu \delta P, \quad \mu(m dP) = m \cdot \mu dP, \quad (m = \text{numero reale}).$$

Per  $dP = 0$  si ha allora in base alla (14)

$$d\mathbf{u} = 0$$

e per la (13), in  $P$ ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}', \quad \gamma dP = 1.$$

Pertanto  $\mu$ , limitatamente ai vettori infinitesimi in  $P$ , ha le caratteristiche di una ordinaria omografia vettoriale finita del secondo ordine. Si discosta però dalle ordinarie omografie per il fatto che nella sua definizione non rientra il caso dell'applicazione di  $\mu$  a vettori finiti.

Se  $\mathbf{a}$  è un vettore finito in  $P$ , converremo che  $\mu\mathbf{a}$  moltiplicato per un infinitesimo  $dq$  paragonabile con gli infinitesimi principali  $dq_i$ , dia per risultato  $\mu(dq \cdot \mathbf{a})$ , ricevendo in tal modo significato la scrittura  $\mu\mathbf{a}$ :

$$\mu\mathbf{a} = \frac{\mu(dq \cdot \mathbf{a})}{dq}.$$

Veniamo ora alla condizione di commutabilità a cui sottoporremo ancora l'operatore vettoriale del secondo ordine  $\mu$ . Essendo  $\mu dP$  un'omografia ordinaria, infinitesima in  $P$ , supporremo di tener conto degli infinitesimi del secondo ordine  $\mu dP \delta P$ , essendo  $\delta P$  un altro spostamento infinitesimo spiccato da  $P$ ; il risultato servirà per il trasporto parallelo di  $\delta P$  lungo  $dP$ , mentre  $\mu \delta P dP$  servirà per il trasporto parallelo di  $dP$  lungo  $\delta P$ .

In virtù delle (14) e (13) avremo quindi in  $P$ :

$$\begin{aligned}\mu dP\delta P &= \delta P - (\delta P)'_* \\ \mu\delta PdP &= dP - (dP)'_*\end{aligned}$$

Aggiungiamo l'ipotesi che i punti terminali di questi vettori  $(\delta P)'$  e  $(dP)'$  spiccati da  $P' = P + dP$  e  $P_1 = P + \delta P$  rispettivamente, appartengano alla varietà e siano coincidenti, per il che deve valere l'uguaglianza vettoriale in  $P$ :

$$\delta P + dP - \mu\delta PdP = dP + \delta P - \mu dP\delta P.$$

L'ipotesi fatta equivale a porre per l'operatore  $\mu$  la condizione (in  $P$ ):

$$(16) \quad \mu dP\delta P = \mu\delta PdP$$

che diremo *condizione di commutabilità* per il parallelismo introdotto nell'intorno di  $P$ , la quale pertanto risulta analiticamente espressa dalla (16).

In queste condizioni per  $\mu$  si è introdotto la *connessione affine nell'intorno di  $P$* , che sarà detta *simmetrica* (connessione affine di WEYL) per distinguerla da un'altra più generale dovuta al CARTAN per la quale manca la precedente restrizione, e  $\mu$ , soddisfacente alle condizioni imposte, lo chiameremo l'operatore vettoriale di connessione affine simmetrica in  $P$  per la varietà affine amorfa; esso determina una speciale legge di parallelismo intrinseco nell'intorno di  $P$ : in base alla (15') per ogni  $dP$  ed  $u$  spiccati da  $P$  si ottiene il parallelo  $u'$  in  $P' = P + dP$ , indipendentemente dalle coordinate introdotte.

Riferendoci a queste coordinate  $q_i$ , posto

$$dP = \Sigma_s dq_s \cdot e_s,$$

per le convenzioni fatte avremo

$$\mu dP e_r = \mu(\Sigma_s dq_s e_s) e_r = \Sigma_s dq_s \mu e_s e_r,$$

e dovendo essere il risultato un vettore infinitesimo in  $P$ , potremo porlo sotto la forma

$$\Sigma_{is} \Gamma_{rs}^i dq_s e_i,$$

per la qual cosa si possono chiamare le  $\Gamma_{rs}^i$ , componenti dell'operatore  $\mu$  o *componenti di connessione affine simmetrica* in  $P$  e si viene a porre, col significato che la scrittura riceve dalle relazioni precedenti,

$$\mu e_s e_r = \Sigma_i \Gamma_{rs}^i e_i.$$

Se  $G_r^i$  sono le componenti (infinitesime) dell'omografia infinitesima  $\mu dP$ , confrontando con

$$\mu dP e_r = \Sigma_i G_r^i e_i,$$

si viene ad avere

$$G_r^i = \Sigma_s \Gamma_{rs}^i dq_s.$$

In particolare abbiamo:

$$\mu dP \varepsilon P = \Sigma_r (\mu dP) \varepsilon q_r e_r = \Sigma_r \varepsilon q_r (\mu dP) e_r = \Sigma_{rst} \varepsilon q_r dq_s \Gamma_{rs}^t e_i.$$

La condizione di commutabilità (16), per l'arbitrarietà delle  $\varepsilon q_r$  e  $dq_s$ , in base alla precedente, dà per le componenti  $\Gamma_{rs}^i$  dell'operatore  $\mu$  le condizioni di simmetria

$$(17) \quad \Gamma_{rs}^i = \Gamma_{sr}^i.$$

Detta condizione di commutabilità imposta all'operatore  $\mu$ , ossia la condizione di simmetria imposta alla connessione affine in  $P$ , equivale ad ammettere col WEYL l'esistenza a priori per la varietà di un sistema di coordinate localmente geodetiche in  $P$  per il quale le  $\Gamma_{rs}^i$  e quindi  $\mu$  risulterebbero nulli. Per un sistema generico di coordinate  $q_i$ , posto

$$\mathbf{u} = \Sigma_r u^r \mathbf{e}_r$$

e, al solito,

$$dP = \Sigma_s dq_s \mathbf{e}_s,$$

la (14) in  $P$  diviene

$$\Sigma_i du^i \mathbf{e}_i = - \Sigma_r u^r \mu dP \mathbf{e}_r = - \Sigma_{rsi} \Gamma_{rs}^i u^r dq_s \mathbf{e}_i$$

da cui

$$(14') \quad du^i = - \Sigma_{rs} \Gamma_{rs}^i u^r dq_s, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

le quali costituiscono le ordinarie equazioni scalari tensoriali corrispondenti al trasporto per parallelismo di  $\mathbf{u}$  da  $P$  in  $P + dP$ , nella suddetta connessione affine simmetrica introdotta.

Estendendo la connessione a tutti i punti della varietà affine amorfica, questa assume lo stadio di *varietà a connessione affine simmetrica*.

**3. Derivazione vettoriale intrinseca nelle varietà a connessione affine simmetrica.** — Con le considerazioni seguenti viene esteso alle varietà a connessione affine simmetrica di WEYL il concetto di derivazione vettoriale intrinseca da me introdotto per le varietà riemanniane mediante il parallelismo di LEVI-CIVITA in un altro lavoro <sup>(1)</sup>.

Consideriamo il campo vettoriale  $\mathbf{u}(P)$  nella data varietà con connessione affine simmetrica determinata dall'operatore vettoriale  $\mu$  definito in ogni punto; sia  $\mathbf{a}$  un vettore prefissato in  $P$  ed  $h$  un numero infinitesimo.

Definiamo in  $P$  l'operazione dipendente da  $\mathbf{u}$  da applicarsi ad  $\mathbf{a}$ :

$$\frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(P + h\mathbf{a}) - \mathbf{u}(P)}{h},$$

nella quale per calcolare il numeratore

$$\mathbf{u}(P + h\mathbf{a}) - \mathbf{u}(P)$$

trasporteremo il vettore  $\mathbf{u}(P)$  nel punto vicinissimo  $P' = P + h\mathbf{a}$  mediante il parallelismo intrinseco precedentemente introdotto, servendoci dell'operatore

<sup>(1)</sup> Cfr. M. MANARINI, *Considerazioni sul calcolo vettoriale assoluto in una  $V_3$  e sui tensori doppi a divergenza unica*, « Rend. Acc. Lincei », Serie 6°, Vol. XIX, 1° scm., p. 301.

di connessione affine  $\mu$ . Per ridurre poi ad operare con vettori spiccati da  $P$  ci serviremo al solito dell'omografia  $\beta(P, P')$ .

Il risultato, quando esiste, è un vettore in  $P$  della varietà.

Sostituendo il vettore  $\mathbf{a}$  con i vettori  $m\mathbf{a}$  ed  $\mathbf{a} + \mathbf{b}$  si può constatare che è

$$\frac{d\mathbf{u}}{dP} m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{a}, \quad (m = \text{numero reale})$$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dP} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{a} + \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{b},$$

e perciò  $\frac{d\mathbf{u}}{dP}$  è un'omografia vettoriale in  $P$  che chiameremo *derivata intrinseca di u rapporto a P* nella varietà a connessione affine simmetrica data.

Posto  $\mathbf{u} = \Sigma u^i \mathbf{e}_i$  le componenti  $\alpha_s^i$  del tensore doppio misto corrispondente all'omografia precedente assumono la forma

$$(18) \quad \alpha_s^i = \frac{\partial u^i}{\partial q_s} + \Sigma_r \Gamma_{rs}^i u^r$$

ove il secondo membro è la derivata covariante secondo WEYL del vettore contravariante  $u^i$ .

Invero è per definizione

$$\frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{e}_s = \Sigma_i \alpha_s^i \mathbf{e}_i;$$

d'altra parte si ha

$$\frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{e}_s = \lim_{\delta q_s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}(P + \delta q_s \mathbf{e}_s) - \mathbf{u}(P)}{\delta q_s} = \lim_{\delta q_s \rightarrow 0} \frac{\mathbf{u}_s(P + \delta q_s \mathbf{e}_s) - \mathbf{u}(P) + \mu(\delta q_s \mathbf{e}_s) \mathbf{u}(P)}{\delta q_s},$$

onde, essendo

$$\mu(\delta q_s \mathbf{e}_s) \mathbf{u}(P) = \Sigma_r u^r \mu(\delta q_s \mathbf{e}_s) \mathbf{e}_r = \Sigma_{r,i} u^r \delta q_s \Gamma_{rs}^i \mathbf{e}_i,$$

considerando la componente secondo il vettore  $\mathbf{e}_i$  dei due membri abbiamo

$$\alpha_s^i = \lim_{\delta q_s \rightarrow 0} \frac{u^i(P + \delta q_s \mathbf{e}_s) - u^i(P) + \Sigma_r \Gamma_{rs}^i \delta q_s u^r}{\delta q_s} = \frac{\partial u^i}{\partial q_s} + \Sigma_r \Gamma_{rs}^i u^r. \quad \text{c. d. d.}$$

Posto

$$dP = h\mathbf{a}$$

con  $h$ , al solito, infinitesimo, per modo che risulta

$$\mathbf{a} = \frac{dP}{h},$$

sostituendo abbiamo

$$\frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dP} \cdot \frac{dP}{h} = \frac{1}{h} \frac{d\mathbf{u}}{dP} dP.$$

Prima del limite possiamo scrivere in  $P$

$$\mathbf{u}_*(P + dP) - \mathbf{u}'_*(P + dP) = \frac{d\mathbf{u}}{dP} dP + hv,$$

essendo  $\mathbf{v}$  un vettore finito in  $P$ . Passando al limite e ponendo

$$(19) \quad \frac{d\mathbf{u}}{dP} dP = d_n \mathbf{u},$$

vediamo che esso rappresenta, trasportato in  $P$  mediante l'omografia  $\beta(P, P')$ , la parte principale del divario fra il vettore  $\mathbf{u}(P + dP)$ , valore del campo in  $P + dP$  e il parallelo  $\mathbf{u}'(P + dP)$  ad  $\mathbf{u}$  in  $P + dP$ .

Applicando all'espressione (19) la  $\beta^{-1}(P, P')$  si ottiene la stessa quantità in  $P'$ .

Se per ogni  $h$  infinitesimo, il vettore  $\mathbf{u}(P + h\mathbf{a})$  è senz'altro il vettore  $\mathbf{u}(P)$  trasportato per parallelismo nella direzione del vettore  $\mathbf{a}$ , si ha in  $P$

$$\frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{a} = 0.$$

Quando ciò avviene qualunque sia  $\mathbf{a}$ , si ha in  $P$

$$(20) \quad \frac{d\mathbf{u}}{dP} = 0,$$

ed il campo vettoriale  $\mathbf{u}(P)$  può dirsi *stazionario* in  $P$ .

La (20) in coordinate diviene il sistema di equazioni ai differenziali totali

$$(20') \quad \frac{\partial u^i}{\partial q_s} + \Sigma_r \Gamma_{rs}^i u^r = 0.$$

Assegnato a priori un vettore  $\mathbf{u}$  in  $P$ , soddisfacendo alla (20) od alle equivalenti (20') si può ottenere un campo stazionario in  $P$  avente quella determinazione in  $P$ . Se la (20) è verificata ovunque nella varietà il campo  $\mathbf{u}(P)$  può chiamarsi *uniforme*: ciò si può realizzare soltanto in varietà euclideanamente affini o piane (spazi lineari) di cui parleremo più innanzi.

Se la (20) si verifica lungo una curva della varietà il vettore  $\mathbf{u}$  si sposta per parallelismo lungo quella curva.

Una varietà a connessione affine simmetrica di assegnato  $\mu$  è *omogenea* per quanto concerne la natura della imposta connessione, come pure a questo riguardo non vi è differenza fra le diverse varietà a connessione affine simmetrica.

**4. Linee geodetiche.** — Consideriamo nella varietà a connessione affine simmetrica la linea  $P(s)$  rappresentata in coordinate dalle equazioni

$$(21) \quad q_i = q_i(s) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

con  $s$  parametro numerico variabile in un certo intervallo che col WEYL possiamo chiamare « tempo ».



Consideriamo in corrispondenza il vettore velocità  $\mathbf{v} = \frac{dP}{ds}$  tangente alla curva e funzione di  $s$ . Se  $\mathbf{u}(P)$  è un campo vettoriale definito nella varietà e quindi anche lungo la curva assegnata, possiamo considerare lungo questa il vettore

$$(22) \quad \mathbf{V}(s) = \frac{d\mathbf{u}}{dP} \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{ds},$$

ove naturalmente per  $\frac{d\mathbf{u}}{ds}$ , affinché abbia senso, deve intendersi la derivata di  $\mathbf{u}(s)$  rispetto al parametro  $s$  fatta col solito criterio intrinseco.

Se  $\mathbf{u}(s)$  è definito soltanto lungo la curva ed è

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = 0$$

in un punto  $P(s)$  della curva stessa, il campo vettoriale  $\mathbf{u}(s)$  è stazionario sulla curva nell' « istante »  $s$ .

Si ha ancora dalla (22)

$$(23) \quad \mathbf{V}(s)ds = \frac{d\mathbf{u}}{dP} dP = d_{\nu}\mathbf{u}$$

ed il primo membro rappresenta, in  $P$ , il divario fra il vettore  $\mathbf{u}(s + ds)$  ed il parallelo  $\mathbf{u}'(s + ds)$  ad  $\mathbf{u}(s)$  nel punto  $P(s + ds)$ . Con una locuzione introdotta dal BIANCHI nel caso delle varietà riemanniane, si può chiamare  $\mathbf{V}(s)$  *vettore associato* al vettore  $\mathbf{u}(s)$  lungo la curva o con denominazione più felice dovuta al LEVI-CIVITA, *vettore derivato* lungo la curva; quest'ultima è giustificata pienamente dalla (22).

Se il vettore  $\mathbf{V}(s)$  è nullo qualunque sia l'istante  $s$  il vettore  $\mathbf{u}(s)$  si sposta invariabilmente seguendo il punto mobile  $P(s)$  sulla curva, cioè si sposta per parallelismo. In queste circostanze si ha quindi lungo la curva

$$(24) \quad \frac{d\mathbf{u}}{ds} = 0,$$

Questa, come si verifica facilmente, compendia le  $n$  equazioni differenziali del calcolo tensoriale

$$(24') \quad \frac{du^i}{ds} + \sum_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^i u^\alpha \frac{dq^\beta}{ds} = 0. \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Se per vettore  $\mathbf{u}(s)$  prendiamo proprio il vettore velocità  $\mathbf{v}(s) = \frac{dP}{ds}$  abbiamo

$$(25) \quad \mathbf{V}(s) = \frac{d\mathbf{v}}{ds} = \frac{d^2P}{ds^2},$$

ove naturalmente la seconda derivazione del punto  $P$  deve essere eseguita col solito criterio; può chiamarsi *vettore curvatura geodetica* per la curva  $P(s)$  relativamente al parametro  $s$ .

Con linguaggio cinematico detto vettore può chiamarsi ancora *vettore accelerazione* rappresentando il divario della velocità dallo spostamento per parallelismo e per unità di tempo.

Per le sue componenti contravarianti, abbiamo

$$(25') \quad V^i = \frac{dv^i}{ds} + \Sigma_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^i v^\alpha v^\beta = \frac{d^2 q^i}{ds^2} + \Sigma_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dq^\alpha}{ds} \cdot \frac{dq^\beta}{ds},$$

essendo

$$\mathbf{v} = \Sigma v^i \mathbf{e}_i, \quad v^i = \frac{dq^i}{ds}.$$

Se in ogni istante  $s$  il suddetto vettore è nullo significa che la velocità  $\mathbf{v}$  rimane invariabile e il moto di  $P$  dato dalla curva  $P(s)$  può logicamente essere chiamato « *traslatorio* » o dire che costituisce una « *traslazione* ».

La traiettoria di una traslazione è quindi una curva che conserva la sua direzione e può essere chiamata *linea geodetica* o *linea retta* della varietà.

Ciò è conforme al criterio di dedurre il concetto di retta da quello di traslazione basandosi sulla proprietà essenziale di venire conservata la direzione: autoparallelismo.

Pertanto l'equazione vettoriale di una geodetica della varietà a connessione affine è

$$(26) \quad \frac{d^2 P}{ds^2} = 0.$$

In base alle (24') questa corrisponde in coordinate alle  $n$  equazioni differenziali

$$(26') \quad \frac{d^2 q_i}{ds^2} + \Sigma_{\alpha\beta} \Gamma_{\alpha\beta}^i \frac{dq_\alpha}{ds} \cdot \frac{dq_\beta}{ds} = 0.$$

È interessante notare che anche nello spazio euclideo ad  $n$  dimensioni l'equazione della retta (geodetica) è pure

$$\frac{d^2 P}{ds^2} = 0$$

ove s'intende, la derivazione è quella ordinaria che del resto ne è la derivazione intrinseca che gli compete.

In coordinate curvilinee qualunque e sempre nello spazio euclideo  $S_n$ , le sue equazioni sono della forma (26') salvo la sostituzione delle componenti di connessione affine  $\Gamma_{\alpha\beta}^i$  con i simboli di CHRISTOFFEL di seconda specie.

Vediamo così dal punto di vista assoluto e da quello delle coordinate una forma delle equazioni della retta invariante rispetto alla natura della varietà.

**5. Derivazione intrinseca per le omografie e per le iperomografie vettoriali.** — Dato un campo omografico vettoriale qualunque  $\alpha(P)$  nella varietà a connessione affine, per il quale presupponiamo soddisfatte le condizioni analitiche necessarie affinché abbiano senso le operazioni che eseguiremo su esso nel seguito, sia  $\mathbf{a}$  un vettore funzione di  $P$ ,  $\mathbf{b}$  un vettore generico in  $P$ , e consideriamo in  $P$  l'operazione su  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$ , dipendente da  $\alpha$ :

$$\frac{d(\alpha\mathbf{a})}{dP} \mathbf{b} - \alpha \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dP} \mathbf{b},$$

ove le derivazioni vanno intese al solito nel senso intrinseco. L'operazione che applicata ad  $\mathbf{a}$  e  $\mathbf{b}$  dà il vettore soprascritto è una omografia del secondo ordine, naturalmente funzione di  $P$ .

Si possono invero verificare le condizioni necessarie di linearità.

Verrà indicata con

$$\frac{d\alpha}{dP},$$

e porremo per definizione

$$(27) \quad \left(\frac{d\alpha}{dP}\right) \mathbf{b}\mathbf{a} = \frac{d(\alpha\mathbf{a})}{dP} \mathbf{b} - \alpha \frac{d\mathbf{a}}{dP} \mathbf{b}$$

chiamando  $\frac{d\alpha}{dP}$  *derivata intrinseca di  $\alpha$* .

Analoghe definizioni valgono per le derivate intrinseche delle iperomografie vettoriali di ordine via via maggiore.

È interessante vedere la relazione che intercede fra questa operazione vettoriale assoluta  $\frac{d\alpha}{dP}$  e la derivazione covariante dei tensori.

Siano  $\alpha_k^i$  le componenti del tensore misto rappresentato dall'omografia data  $\alpha$ :

$$\alpha\mathbf{e}_k = \Sigma_i \alpha_k^i \mathbf{e}_i.$$

Poniamo per  $\frac{d\alpha}{dP}$ :

$$\frac{d\alpha}{dP} \mathbf{e}_l \mathbf{e}_k = \frac{d(\alpha\mathbf{e}_k)}{dP} \mathbf{e}_l - \alpha \frac{d\mathbf{e}_k}{dP} \mathbf{e}_l = \Sigma_i (\alpha_k^i)_l \mathbf{e}_i$$

ossia

$$\Sigma_i (\alpha_k^i)_l \mathbf{e}_i = \frac{\partial(\Sigma_i \alpha_k^i \mathbf{e}_i)}{\partial q_l} - \alpha \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q_l}.$$

Per le formule (18) abbiamo

$$\Sigma_i (\alpha_k^i)_l e_i = \Sigma_i \left( \frac{\partial \alpha_k^i}{\partial q_l} + \Sigma_r \Gamma_{rl}^i \alpha_k^r \right) e_i - \Sigma_r \Gamma_{lk}^r \alpha_r^i e_i,$$

da cui per le componenti  $\alpha_k^i$  di  $\frac{dx}{dP}$  ricaviamo le espressioni notevoli

$$(28) \quad (\alpha_k^i)_l = \frac{\partial \alpha_k^i}{\partial q_l} + \Sigma_r \Gamma_{rl}^i \alpha_k^r - \Sigma_r \Gamma_{lk}^r \alpha_r^i,$$

le quali costituiscono un campo tensoriale del terzo ordine covariante in  $k$ ,  $l$  e contravariante in  $i$  che chiamasi derivata covariante secondo WEYL del tensore doppio misto  $\alpha_k^i$ .

Facendo in particolare nella (27)  $\mathbf{b} = dP$  si ha

$$\frac{dx}{dP} dP \cdot \mathbf{a} = \frac{d(\alpha \mathbf{a})}{dP} dP - \alpha \frac{d\mathbf{a}}{dP} dP,$$

ossia, con simbolismo già introdotto:

$$(27') \quad d_n \alpha \cdot \mathbf{a} = d_n(\alpha \mathbf{a}) - \alpha d_n \mathbf{a} \quad (1).$$

Dalla (18), che permette di scrivere

$$\frac{d\mathbf{u}}{dP} e_s = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial q_s} = \Sigma_i \alpha_s^i e_i = \Sigma_i \left( \frac{\partial u^i}{\partial q_s} + \Sigma_r \Gamma_{rs}^i u^r \right) e_i,$$

abbiamo in particolare

$$\frac{\partial e_k}{\partial P} e_l = \frac{\partial \theta_k}{\partial q_l} = \Sigma_r \Gamma_{lk}^r e_r,$$

(1) L'operazione  $\frac{dx}{dP}$  si potrebbe introdurre senza l'uso del generico vettore  $\mathbf{b}$  in  $P$ , ponendo per definizione in  $P$ :

$$(27'') \quad \frac{d(\alpha \mathbf{a})}{dP} - \alpha \frac{d\mathbf{a}}{dP} = \left( k \frac{dx}{dP} \right) \mathbf{a},$$

essendo  $k$  il noto operatore di BOGGIO e BURALI-FORTI per le omografie del terzo ordine che per  $\mathbf{m}$  ed  $\mathbf{n}$  vettori generici in  $P$  dà

$$\left( k \frac{dx}{dP} \right) \mathbf{m} \mathbf{n} = \frac{dx}{dP} \mathbf{m} \mathbf{n}.$$

Negli spazi euclidei, come è noto, se è  $\alpha = \frac{d\mathbf{u}}{dP}$  si ha  $k \frac{dx}{dP} = \frac{dx}{dP}$ ; qui invece ciò non avviene come lo dimostrano ad es. le componenti  $(\alpha_k^i)_l$  di  $\frac{dx}{dP}$  ove non si può scambiare  $k$  con  $l$  nemmeno quando in particolare è  $\alpha_k^i = \frac{\partial u^i}{\partial q_k} + \Sigma_s u^s \Gamma_{sk}^i$ , risultando in generale

$$\frac{\partial \Gamma_{rl}^i}{\partial q_k} \neq \frac{\partial \Gamma_{rk}^i}{\partial q_l}.$$

da cui per la simmetria di  $\Gamma_{lk}^r$ :

$$\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q_l} = \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 P}{\partial q_l \partial q_k},$$

ed avendo posto

$$\Sigma_r \Gamma_{lk}^r \mathbf{e}_r = \mu_{lj} \mathbf{e}_k,$$

dal confronto abbiamo l'identità

$$\mu_{lj} \mathbf{e}_k = \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial q_l} = \frac{\partial \mathbf{e}_l}{\partial q_k} = \frac{\partial^2 P}{\partial q_l \partial q_k}.$$

che potrà essere utile per altre considerazioni.

**6. Curvatura di connessione affine.** — Siano  $P$  e  $P'$  due punti della varietà a connessione affine collegati mediante una curva; consideriamo in  $P$  il vettore  $\mathbf{u}$  e spostiamolo parallelamente lungo la curva: otterremo un vettore  $\mathbf{u}(s)$  soddisfacente all'equazione

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = 0,$$

per la quale risulta determinato in  $P'$  il vettore  $\mathbf{u}'$  parallelo ad  $\mathbf{u}$  in  $P$ . In generale il vettore  $\mathbf{u}'$  dipende dalla curva lungo la quale si compie lo spostamento, ossia in generale questo trasporto non è integrabile.

Nel caso speciale in cui abbia luogo l'integrabilità si può parlare dello « stesso » vettore nei punti  $P$  e  $P'$ , giacchè qualunque sia il cammino che collega i due punti si ottiene sempre il medesimo risultato.

Quando ciò si verifica qualunque siano le coppie di punti  $P$  e  $P'$  che si considerano, la varietà è detta *euclideamente affine* o *piana*; in essa si può parlare quindi di uno stesso vettore in ogni punto qualora venga trasportato per parallelismo ed ancora in essa si potrà parlare di « traslazione » d'insieme per una figura.

La varietà nella predetta condizione costituirà uno *spazio affine* o *lineare* o *piano* contraddistinguendosi dalla generica varietà a connessione affine per il fatto di valere la proprietà geometrica differenziale dell'integrabilità del trasporto dei vettori per parallelismo.

Nel caso di una varietà generica a connessione affine per la non integrabilità del parallelismo, spostando un vettore  $\mathbf{u}$  parallelamente a sè stesso lungo una curva chiusa che parte da  $P$  e ritorna in  $P$ , si ritornerà in  $P$  con un vettore  $\mathbf{u}'$  diverso da  $\mathbf{u}$  (parallelismo non monodromo).

Per contorno chiuso infinitesimo limitiamoci a considerare il parallelogramma determinato dai vettori  $dP$  e  $\delta P$  spiccati da  $P$ . Poniamo in  $P$

$$(29) \quad \Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}' - \mathbf{u}$$

ed avremo per i caratteri stessi del trasporto, che fra il divario  $\Delta \mathbf{u}$  ed il

vettore iniziale  $\mathbf{u}$  intercederà una corrispondenza lineare, ossia esisterà un' omografia infinitesima  $\Delta\Gamma$  funzione di  $P$ , dipendente dalla faccetta  $(dP, \delta P)$  tale che dia in  $P$

$$(30) \quad \Delta\mathbf{u} = (\Delta\Gamma)\mathbf{u}.$$

Avendosi  $\Delta\Gamma = 0$  in  $P$  la varietà risulta piana in  $P$  rispetto alla considerata faccetta  $(dP, \delta P)$ ; se ciò accade per tutte le faccette elementari di una superficie finita contenuta nella varietà, limitata da un contorno  $s$  che parte da  $P$  e ritorna in  $P$ , evidentemente ogni vettore  $\mathbf{u}$  che percorre una qualunque curva posta in essa, come ad es. la  $s$  stessa, ritorna nel suo punto di partenza senza divario (parallelismo intrinseco monodromo).

Inoltre l'omografia infinitesima  $\Delta\Gamma$  dipende linearmente dall'elemento superficiale  $(dP, \delta P)$  e quindi dal bivettore infinitesimo  $\mathbf{a} = (dP, \delta P)$  che lo determina. Pertanto si avrà in  $P$  un'omografia del terzo ordine  $\Gamma_3$  funzione di  $P$ , tale che per i bivettori semplici infinitesimi  $\mathbf{a} = (dP, \delta P)$  spiccati da  $P$ , si abbia

$$(31) \quad \Gamma_3 \mathbf{a} = \Gamma_3 dP \delta P = \Delta\Gamma.$$

Per la linearità rispetto ai bivettori dovrà essere

$$(32) \quad \Gamma_3(-\mathbf{a}) = -\Gamma_3 \mathbf{a} \quad \text{ossia} \quad \Gamma_3 dP \delta P = -\Gamma_3 \delta P dP.$$

Concludendo, si ha in  $P$  l'omografia del terzo ordine  $\Gamma_3$  funzione di  $P$  tale che il divario  $\Delta\mathbf{u}$  relativo al trasporto parallelo del vettore lungo il parallelogramma  $(dP, \delta P)$  ha in  $P$  l'espressione

$$(33) \quad \Delta\mathbf{u} = \Gamma_3 dP \delta P \mathbf{u}.$$

Con questa omografia del terzo ordine  $\Gamma_3$  si viene a caratterizzare mediante la valutazione del  $\Delta\mathbf{u}$  lo scostamento in  $P$  fra la varietà considerata ed una varietà che sia piana o euclideamente affine in  $P$  rispetto a tutte le giaciture bidimensionali o direzioni superficiali che passano per  $P$ .

Chiameremo pertanto detta omografia  $\Gamma_3$  *curvatura di connessione affine per la varietà*.

Passando alle coordinate, ponendo

$$dP = \Sigma_i dq_i \mathbf{e}_i, \quad \delta P = \Sigma_i \delta q_i \mathbf{e}_i,$$

$$\mathbf{a} = (dP, \delta P) = \Sigma_{(ik)} \Delta q_{ik} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k),$$

con

$$\Delta q_{ik} = \delta q_i dq_k - dq_i \delta q_k,$$

abbiamo

$$\begin{aligned} \Gamma_3 dP \delta P \mathbf{e}_\beta &= \Gamma_3 (\Sigma_i dq_i \mathbf{e}_i) (\Sigma_k \delta q_k \mathbf{e}_k) \mathbf{e}_\beta = \\ &= [\Sigma_{ik} dq_i \delta q_k \Gamma_3 \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k] \mathbf{e}_\beta = \Sigma_{ik} dq_i \delta q_k \Gamma_3 \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k \mathbf{e}_\beta = \Sigma_{ik\alpha} dq_i \delta q_k \Gamma_{\beta ik}^\alpha \mathbf{e}_\alpha \end{aligned}$$

ove le  $\Gamma_{\beta ik}^{\alpha}$  sono manifestamente le componenti di  $\Gamma_3$ ; onde dal confronto con

$$\Delta\Gamma\theta_{\beta} = \Sigma_{\alpha}\Delta\Gamma_{\beta}^{\alpha}\theta_{\alpha},$$

ove  $\Delta\Gamma_{\beta}^{\alpha}$  sono le componenti dell'omografia infinitesima  $\Delta\Gamma$ , risulta

$$\Delta\Gamma_{\beta}^{\alpha} = \Sigma_{ih\alpha}dq_i\delta q_k\Gamma_{\beta ik}^{\alpha}.$$

Essendo  $\mathbf{u} = \Sigma_{\beta}u^{\beta}\theta_{\beta}$  ne segue

$$(34) \quad \Delta\mathbf{u} = \Sigma_{ik\alpha\beta}\Gamma_{\beta ik}^{\alpha}u^{\beta}dq_i\delta q_k\theta_{\alpha},$$

la quale mostra che le componenti  $\Gamma_{\beta ik}^{\alpha}$  di  $\Gamma_3$  costituiscono le componenti di un tensore misto del quarto ordine contravariante in  $\alpha$  e covariante in  $\beta, i, k$ .

Dal EISENHART è appunto chiamato « curvature tensor of the space with symmetric connection ».

La proprietà (32) dell'omografia  $\Gamma_3$  si traduce per il tensore  $\Gamma_{\beta ik}^{\alpha}$  nell'emisimmetria rispetto agli indici  $i$  e  $k$ :

$$(35) \quad \Gamma_{\beta ik}^{\alpha} = -\Gamma_{\beta ki}^{\alpha}.$$

Inoltre per l'omografia  $\Gamma_3$  vale la simmetria ciclica:

$$(36) \quad \Gamma_3 dP\delta P\vartheta P + \Gamma_3 \vartheta PdP\delta P + \Gamma_3 \delta P\vartheta PdP = 0,$$

essendo  $\vartheta P$  un terzo vettore infinitesimo spiccato da  $P$  distinto da  $dP$  e  $\delta P$ .

Invero cominciamo col ricordare che nel trasporto per parallelismo del vettore  $\mathbf{u}$  in  $P_1 = P + dP$  lungo  $dP$  spiccato da  $P$ , l'incremento corrispondente, in  $P$ , è dato da (cfr. (14))

$$d\mathbf{u} = -\mu dP\mathbf{u}.$$

Considerato lo spostamento  $\delta P$ , applicando la traslazione  $\delta$  all'elemento  $dP$  portandolo in  $P_3 - P_2$ , essendo  $P_2 = P + \delta P$ , lasciando i vettori  $\mathbf{u}$  in  $P$  e  $\mathbf{u}'$  in  $P_1$  legati dalle relazioni del parallelismo, il  $d\mathbf{u}$  subirà una variazione che trasportata in  $P$  mediante l'omografia  $\beta(P, P_2)$  sarà indicata con  $\delta d\mathbf{u}$ . A meno di infinitesimi di ordine superiore avremo la linearità dell'operatore differenziale  $\delta$  rispetto ai tre contributi che possono dipendere da  $\mu, dP, \mathbf{u}$ ; perciò possiamo scrivere in  $P$

$$\delta d\mathbf{u} = -(\delta\mu)dP\mathbf{u} - \mu\delta dP\mathbf{u} - \mu dP\delta\mathbf{u}.$$

Essendo d'altra parte, ancora per la (14)

$$\delta\mathbf{u} = -\mu\delta P\mathbf{u},$$

sostituendo viene

$$\delta d\mathbf{u} = -(\delta\mu)dP\mathbf{u} - \mu\delta dP\mathbf{u} + \mu dP\mu\delta P\mathbf{u}.$$

Scambiando  $\delta$  con  $d$  abbiamo in  $P$

$$\Delta\mathbf{u} = \delta d\mathbf{u} - d\delta\mathbf{u} = (-\delta\mu dP + d\mu\delta P + \mu dP \cdot \mu\delta P - \mu\delta P \cdot \mu dP)\mathbf{u}.$$

Confrontando con la (33):

$$\Delta \mathbf{u} = \Gamma_3 dP \delta P \mathbf{u}$$

risulta

$$\Gamma_3 dP \delta P = \Delta \Gamma = -\delta \mu dP + d\mu \delta P + \mu dP \cdot \mu \delta P - \mu \delta P \cdot \mu dP.$$

Considerando al posto di  $\mathbf{u}$  il terzo vettore infinitesimo  $\delta P$  distinto da  $dP$  e  $\delta P$ , per esso abbiamo in  $P$

$$\Delta \delta P = \Gamma_2 dP \delta P \delta P = \delta \mu dP \delta P + d\mu \delta P \delta P + \mu dP \cdot \mu \delta P \cdot \delta P - \mu \delta P \cdot \mu dP \cdot \delta P.$$

Scambiando ciclicamente i tre spostamenti  $dP$ ,  $\delta P$ ,  $\delta P$  e sommando otteniamo la (36).

La (36) corrisponde, per il tensore  $\Gamma_{\beta ik}^{\alpha}$  alla proprietà

$$(36') \quad \Gamma_{\beta ik}^{\alpha} + \Gamma_{ik\beta}^{\alpha} + \Gamma_{k\beta i}^{\alpha} = 0.$$

L'annullarsi in  $P$  della omografia curvatura di connessione affine  $\Gamma_3$  porta di conseguenza la euclidicità affine della varietà in  $P$ ; l'annullarsi ovunque dà la condizione di integrabilità del trasporto per parallelismo e determina la circostanza che la varietà sia uno spazio lineare, o piano, o euclideamente affine.

## § 2.

### Lo spazio metrico di Weyl.

**7. Determinazione metrica.** — Consideriamo una varietà affine amorfa e introduciamo in ogni punto una particolare omografia simmetrica del terzo ordine che faccia corrispondere ad ogni coppia di vettori un numero reale, ciò che equivale, in altre parole ad introdurre, con altri Autori, punto per punto, una *forma quadratica di vettore* non degenerare che chiameremo *forma metrica amorfa* o *semplice* designandola con  $\chi$  (da altri Autori è chiamata con l'APPEL forma metrica brutta).

Converremo che con essa si possano paragonare le lunghezze dei vettori spiccati da  $P$ .

Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sono due vettori in  $P$ , la loro uguaglianza in modulo comporterà per convenzione l'uguaglianza

$$\chi(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = \chi(\mathbf{v}, \mathbf{v}),$$

o più semplicemente

$$\chi(\mathbf{u}) = \chi(\mathbf{v}),$$

e viceversa.



Viene così introdotto un criterio di confronto per i moduli di due vettori in  $P$ , ma non ancora riceve significato il modulo di un vettore in sè. Per quanto precede la forma  $\chi$  può essere determinata a meno di un fattore non nullo di proporzionalità  $h$ .

Assegnando in  $P$  il fattore  $h$  di proporzionalità, detto *fattore di taratura*, la varietà è detta *tarata* in  $P$  e in tali condizioni assumiamo come lunghezza o modulo del vettore  $\mathbf{u}$  il numero

$$u = \sqrt{h\chi(\mathbf{u})},$$

dipendente soltanto dal segmento determinato da  $\mathbf{u}$ .

La forma metrica

$$(37) \quad \chi^* = h\chi$$

è detta *forma metrica tarata*. Estendendo ciò ad ogni punto  $P$  della varietà, questa viene ad ammettere in ogni punto una *determinazione metrica* e, oltre che varietà affine amorfa, potrà essere chiamata *varietà metrica amorfa*.

Cambiando il fattore di taratura  $h$  in

$$(38) \quad \bar{h} = \lambda h,$$

con  $\lambda$  detto *rapporto di taratura*, il modulo  $u$  del vettore  $\mathbf{u}$  diviene evidentemente

$$\bar{u} = \sqrt{\lambda}u.$$

Si noti ancora che il rapporto dei moduli dei due vettori in un punto è indipendente dal fattore  $h$  di taratura.

L'introduzione in  $P$  della forma metrica tarata  $\chi^*$  permette di costruire con i vettori in  $P$  una geometria metrica analoga a quella ordinaria, ma non permette ancora di paragonare, anche se estesa a tutti i punti della varietà, le lunghezze di due vettori in punti diversi.

Si può sviluppare in ogni punto l'ordinario algoritmo vettoriale ed omografico: prodotto scalare e vettoriale di due vettori, coniugata, dilatazione, assiale di un'omografia, bivettore di una omografia ecc. Per quanto riguarda l'analisi differenziale metrica dei campi vettoriali, bivettoriali, omografici ecc. ricorreremo ad una *connessione metrica* mentre per ora rimane determinato il concetto di gradiente di uno scalare  $f(P)$ , come vettore normale alla ipersuperficie  $f = \text{cost.}$  passante per  $P$ .

Assegnando in  $P$  soltanto la forma metrica semplice  $\chi$  per i vettori in  $P$ , sono lecite soltanto le solite definizioni angolari:

$$\cos \theta = \frac{\chi(\mathbf{u}, \mathbf{v})}{\sqrt{\chi(\mathbf{u}) \cdot \chi(\mathbf{v})}}$$

e tutte le conseguenze geometriche di perpendicolarità. In altre parole è possibile soltanto la *geometria conforme*.

**8. Riferimento alle coordinate.** — In coordinate la forma metrica semplice  $\chi$  risulta determinata dai numeri

$$g_{ik} = \chi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = g_{ki}, \quad (i, k = 1, 2, \dots, n)$$

essendo al solito

$$\mathbf{e}_i = \frac{\partial P}{\partial q_i}, \quad \mathbf{e}_k = \frac{\partial P}{\partial q_k}.$$

Non assegnare la taratura in  $P$ , ossia considerare in  $\mathcal{L}$  la geometria conforme, equivale ad introdurre concetti metrici dipendenti dai rapporti dei coefficienti  $g_{ik}$ . Così la perpendicolarità di due vettori  $\mathbf{u} = \Sigma_i u^i \mathbf{e}_i$  e  $\mathbf{v} = \Sigma_i v^i \mathbf{e}_i$  in  $P$  risulta espressa da

$$\chi(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \Sigma_{ik} g_{ik} u^i v^k = 0,$$

indipendentemente dalla taratura.

Per la relatività interessa che la forma metrica semplice  $\chi$  da associarsi alla varietà a connessione affine sia indefinita.

La forma metrica tarata  $\chi^*$  in coordinate è rappresentata dai numeri

$$g_{ik}^* = h g_{ik} = g_{ki}^*,$$

e in corrispondenza il modulo  $u$  in  $P$  del vettore

$$\mathbf{u} = \Sigma u^i \mathbf{e}_i$$

è dato da

$$u^2 = h\chi(\mathbf{u}) = \chi^*(\mathbf{u}) = \Sigma_{ik} h g_{ik} u^i u^k = \Sigma_{ik} g_{ik}^* u^i u^k.$$

In queste condizioni, dal punto di vista tensoriale, si può passare dalle componenti contravarianti alle covarianti in  $P$  per un medesimo vettore; lo stesso dicasi per un plurivettore, per una iperomografia e in generale per un tensore qualunque tenendo presente la formula

$$p_i = \Sigma_{ij} g_{ij}^* p^j.$$

Sono estendibili a queste varietà di WEYL a determinazione metrica, le considerazioni da me fatte per le varietà riemanniane nella mia Nota: *Sopra i significati geometrici delle componenti covarianti e contravarianti di un vettore o plurivettore in una varietà riemanniana*, « Boll. dell' Un. Mat. It. », 1934, pp. 30-36. Così, in particolare, riferendomi a questo lavoro, essendo  $\mathbf{R}$  un vettore in  $P$  della varietà di WEYL a forma metrica tarata  $\chi^*$ , abbiamo

$$\mathbf{R} = \Sigma_i R^i \mathbf{a}_i = \Sigma_i R_i \mathbf{b}_i$$

dove

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{e}_i = \frac{\partial P}{\partial q_i}$$

sono vettori di modulo  $\sqrt{g_{ii}^*}$  tangenti alle linee coordinate ( $q_i$ ),  $\mathbf{b}_i$  sono vettori normali alle ipersuperfici coordinate  $q_i = \text{cost.}$  e di modulo  $\sqrt{g^{ii}}$ , essendo  $g^{ii}$  gli elementi reciproci della diagonale principale del discriminante  $|g_{ik}^*|$  della forma metrica tarata  $\chi^*$ .

Inoltre abbiamo

$$\begin{aligned} g_{ik}^* &= \chi^*(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_k = \mathbf{a}_i \times \mathbf{a}_k, \\ g_{ik}^* &= \chi^*(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_k) = \mathbf{b}_i \times \mathbf{b}_k, \end{aligned}$$

e se  $\mathbf{t}_i$  ed  $\mathbf{n}_i$  sono i versori dei vettori  $\mathbf{a}_i$  e  $\mathbf{b}_i$ , per le componenti covarianti e contravarianti di  $\mathbf{R}$  abbiamo le espressioni

$$\begin{aligned} R_i &= \sqrt{g_{ii}^*} \mathbf{R} \times \mathbf{t}_i = R \sqrt{g_{ii}^*} \cos \alpha_i, \\ R^i &= \sqrt{g^{ii}^*} \mathbf{R} \times \mathbf{n}_i = R \sqrt{g^{ii}^*} \cos \beta_i, \end{aligned}$$

essendo  $\alpha_i$  e  $\beta_i$  gli angoli del vettore  $\mathbf{R}$  in  $P$  con le linee coordinate e con le normali alle ipersuperficie coordinate per  $P$ .

Variando il fattore di taratura  $h$  in  $P$ , alla maniera (38) i versori  $\mathbf{t}_i$  ed  $\mathbf{n}_i$  mantengono direzioni invariabili mentre i loro moduli risultano moltiplicati rispettivamente per  $\sqrt{\lambda}$  e per  $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$ , essendo  $\lambda$  il rapporto di taratura.

**9. Connessione metrica di Weyl.** — Il dotare una varietà affine amorfa o a connessione affine di una determinazione metrica non è sufficiente per poter parlare di varietà metrica in senso completo o spazio metrico, non potendosi ancora paragonare le lunghezze dei vettori in punti diversi, anche vicinissimi.

Con le tappe compiute raggiungeremo prima la varietà affine amorfa poi la varietà a connessione affine simmetrica di WEYL e infine la varietà metrica amorfa; con una quarta ed ultima tappa raggiungeremo lo spazio metrico di WEYL assegnando in ogni punto oltre alla determinazione metrica una *connessione metrica* col suo intorno.

Per stabilire un criterio di raccordo fra le grandezze dei vettori spiccati dai punti nell'intorno di  $P$ , provvederemo che l'uguaglianza dei moduli dei vettori in punti diversi debba essere invariante rispetto a qualsivoglia cambiamento del fattore di taratura  $h$  e con il WEYL indipendentemente dalle loro direzioni.

La dipendenza anche dalla direzione fu considerata dall'EDDINGTON <sup>(1)</sup> dando luogo alla cosiddetta *geometria di Eddington*.

Nelle suddette condizioni del WEYL, per il confronto dei moduli di vettori in punti diversi parleremo di « congruenza » e conseguentemente di « corrispondenza o trasporto per congruenza ».

<sup>(1)</sup> Cfr. A. S. EDDINGTON, *The mathematical Theory of Relativity*, Cambridge 1923, p. 213, od anche dello stesso Autore, *A generalisation of Weyl's Theory of the Electromagnetic and gravitational Fields*, « Proc. Roy. Soc. A. », 99, 1921, p. 104.

Essendo  $P'$  un punto infinitamente vicino a  $P$ , faremo in modo che questa « congruenza » rispetti le seguenti condizioni:

1) Il congruente in  $P'$  di un vettore di lunghezza nulla in  $P$  ha pure lunghezza nulla.

2) Se un vettore in  $P$  ha lunghezza uguale alla somma delle lunghezze di due altri vettori in  $P$ , anche per i vettori rispettivamente congruenti in  $P'$  vale la stessa relazione.

3) Portando il punto  $P'$  in  $P$ , la metrica in  $P'$  viene a coincidere con quella in  $P$ :

$$h(P') = h(P) \quad \text{per } P' \rightarrow P.$$

Il tipo più generale di trasporto o rappresentazione per congruenza in  $P$  e  $P'$  che risponda alle condizioni precedenti è subordinato dalla legge che assoggetta i moduli dei vettori congruenti ad essere proporzionali.

Detto  $u(P)$  il modulo in  $P$  ed  $u(P')$  quello congruente in  $P' = P + dP$  si porrà tale legge di proporzionalità sotto la forma

$$(39) \quad u(P') = u(P) \left[ 1 - \frac{1}{2} \Phi(P, P') \right],$$

od anche

$$(39') \quad du = -\frac{1}{2} u(P) \cdot \Phi(P, P'),$$

dove  $\Phi(P, P')$  è un numero infinitesimo indipendente dal modulo  $u$  spostato, dipendente invece da  $P$  e  $P'$  in guisa da rispettare le condizioni imposte al trasporto per congruenza.

Queste condizioni sono evidentemente soddisfatte ponendo, a meno di infinitesimi di ordine superiore,

$$\Phi(P, P') = \chi^*(\omega, dP) = \omega \times dP,$$

essendo  $\omega$  un vettore dato arbitrariamente in  $P$  al fine di subordinare nell'intorno di  $P$  una connessione metrica la cui legge allora assume la forma

$$(40) \quad u(P') = u(P) \left( 1 - \frac{1}{2} \omega \times dP \right),$$

o l'altra equivalente

$$(40') \quad du = -\frac{1}{2} u(P) \cdot \omega \times dP.$$

Il vettore  $\omega$  che rispetto ad una determinata taratura può essere preso arbitrariamente in  $P$  per stabilire una connessione metrica nell'intorno di  $P$ , lo chiameremo *vettore di connessione metrica in P*.

Procediamo ora ad un cambiamento di taratura ponendo, al solito,

$$\bar{h} = \lambda h,$$

ove  $\lambda$  è un rapporto di taratura positivo funzione di  $P$  che supporremo continua e derivabile.

Diciamo  $\bar{\omega}$  il vettore di connessione metrica in  $P$  corrispondente al nuovo fattore di taratura  $\bar{h}$ ; per la legge di connessione metrica in  $P$  avremo nella nuova taratura

$$(41) \quad \bar{u}(P') = \bar{u}(P) \left( 1 - \frac{1}{2} \bar{\omega} \times dP \right),$$

essendo  $\bar{u}(P')$  ed  $\bar{u}(P)$  le nuove misure delle lunghezze in  $P$  e  $P'$  rispettivamente del vettore  $u$  spostato per congruenza; possiamo porla sotto la forma equivalente

$$(41') \quad \bar{u}^2(P') = \bar{u}^2(P) (1 - \bar{\omega} \times dP).$$

D'altra parte abbiamo in  $P$

$$(42) \quad \bar{u}^2(P) = \bar{h} \chi(u) = \lambda h \chi(u) = \lambda(P) u^2(P),$$

ed analogamente in  $P'$

$$(42') \quad \bar{u}^2(P') = \lambda(P') u^2(P').$$

Per le ipotesi fatte su  $\lambda(P)$ , a meno di infinitesimi di ordine superiore, avremo

$$\lambda(P') = \lambda(P) + \text{grad } \lambda \times dP,$$

con la qual cosa (42') diviene

$$(43) \quad \bar{u}^2(P') = [\lambda(P) + \text{grad } \lambda \times dP] u^2(P').$$

Tenendo conto di (42) e (43) la (41') diviene:

$$\bar{u}^2(P') [\lambda(P) + \text{grad } \lambda \times dP] = \lambda u^2(P) \cdot (1 - \bar{\omega} \times dP)$$

e per essere

$$u^2(P') = u^2(P) (1 - \bar{\omega} \times dP),$$

sostituendo, nella approssimazione adottata risulta:

$$-\lambda \cdot \bar{\omega} \times dP + \text{grad } \lambda \times dP = -\lambda \bar{\omega} \times dP.$$

Dovendo valere per ogni  $dP$  dell'intorno di  $P$ , ricaviamo la relazione

$$(44) \quad \bar{\omega} = \omega - \text{grad } \log \lambda,$$

la quale esprime la legge di variazione a cui deve essere sottoposto il vettore

di connessione metrica  $\omega$  in corrispondenza del cambiamento di taratura affinchè la relazione di connessione metrica in  $P$  risulti invariante.

Dunque, cambiando il fattore di taratura  $h$  nel rapporto  $\lambda$  funzione positiva continua e derivabile del posto, la forma metrica tarata  $\chi^*$  diviene  $\lambda\chi^*$  mentre il vettore di connessione metrica  $\omega$  risulta diminuito di  $\text{grad log } \lambda$ .

La forma metrica tarata  $\chi^*$  ed il vettore di connessione metrica  $\omega$  dovranno evidentemente entrare in tutte le grandezze e in tutte le relazioni che esprimono dei rapporti metrici; affinchè la legge di connessione metrica in  $P$  rimanga inalterata di fronte ad un cambiamento generale del fattore di taratura  $h$ :

$$\bar{h} = \lambda h,$$

$\chi^*$  e  $\omega$  devono mutarsi rispettivamente in

$$\lambda\chi^* \quad \text{e} \quad \omega - \text{grad log } \lambda.$$

In queste condizioni siamo per la varietà metrica amorfa in uno stadio di connessione metrica completamente indipendente dalla connessione affine.

In coordinate, posto

$$\omega = \Sigma \omega_i \mathbf{b}_i,$$

ove  $\omega_i$  sono le componenti covarianti del vettore di connessione metrica  $\omega$  (cfr. n. 8), la legge (44) si traduce in

$$\omega_i = \omega_i - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \omega_i}$$

e la legge di connessione metrica (40), invariante rispetto al cambiamento del fattore di taratura, assume la forma

$$u'(P) = u(P) \left( 1 - \frac{1}{2} \Sigma_i \omega_i dq_i \right).$$

Il sistema di coordinate e taratura metrica fusi insieme per determinare le componenti di connessione metrica  $\omega_i$  costituiscono per il WEYL un « Bezugssystem » (4).

**10. Varietà a connessione metrica ed affine. Spazio di Weyl. Curvatura di connessione metrica. Spazio di Riemann.** — Supponiamo ora che la data varietà amorfa sia ad un tempo dotata di una connessione affine per quanto riguarda il confronto delle direzioni dei vettori prescindendo dalla lunghezza in sè del modulo e di una connessione metrica per quanto riguarda il confronto dei segmenti o moduli dei vettori.

(4) Cfr. H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, loc. cit., pag. 111.

Col WEYL faremo l'ipotesi che lo spostamento parallelo della connessione affine subordini la congruenza dei moduli dei vettori, ossia, in altre parole, postuleremo che lo spostamento parallelo dei vettori nella connessione affine realizzi lo spostamento dei loro moduli per congruenza nella connessione metrica.

Naturalmente intercederà una dipendenza fra gli elementi che definiscono le due connessioni e si può verificare che la connessione affine rimane univocamente determinata dalla connessione metrica.

In tale fusione di connessione affine con la connessione metrica siamo nello stadio finale di *spazio metrico del Weyl* ed in esso un vettore potrà essere trasportato per parallelismo e per congruenza di modulo lungo una certa curva dando in generale un risultato dipendente dalla curva trasporto.

Precedendo alcune considerazioni osserviamo che per lo spazio inteso nel senso di RIEMANN tale dipendenza dal trasporto non riguarda i moduli ma soltanto le direzioni.

Nello spazio metrico di WEYL possiamo estendere l'algoritmo differenziale metrico dei campi vettoriali, plurivettoriali, ed omografici.

In corrispondenza alla derivazione intrinseca del campo vettoriale  $\mathbf{u}(P)$  con la conseguente omografia vettoriale  $\frac{d\mathbf{u}}{dP}$  (cfr. n. 3) risultano allora precisati intrinsecamente alla varietà il numero  $\text{div } \mathbf{u}$ , il bivettore  $\text{rot } \mathbf{u}$ , il gradiente di un'omografia, l'omografia del terzo ordine divergenza di un campo bivettoriale <sup>(4)</sup>, ecc.

In questo lavoro abbiamo occasione di fare applicazione di questo algoritmo metrico vettoriale assoluto per esprimere la cosiddetta curvatura segmentaria dello spazio di WEYL.

Consideriamo all'uopo il punto  $P$  della varietà e calcoliamo la variazione  $\Delta u$  della misura del segmento  $u$ , modulo del vettore  $\mathbf{u}(P)$ , trasportando per parallelismo il vettore  $\mathbf{u}$  e conseguentemente per congruenza il suo modulo lungo il parallelogramma infinitesimo costruito sui due vettori  $dP$  e  $\delta P$  spiccati da  $P$ .

Per lo spostamento  $dP$  si ha:

$$du = -\frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \times dP$$

ed applicando l'operatore differenziale intrinseco  $\delta$  relativo allo sposta-

<sup>(4)</sup> Cfr. M. MANARINI, *Interpretazione vettoriale assoluta dei tensori lineari del terzo ordine e applicazione al campo elettromagnetico stazionario*, « Rend. Acc. Lincei », V. XXI, 1° sem., pp. 173-178, 76-283, 1935.

mento  $\delta P$ , si ha

$$\delta du = -\frac{1}{2} \delta u \cdot \boldsymbol{\omega} \times dP - \frac{1}{2} u \cdot \delta(\boldsymbol{\omega} \times dP).$$

Per essere a sua volta

$$\delta u = -\frac{1}{2} u \cdot \boldsymbol{\omega} \times \delta P,$$

si ricava

$$\delta du = \frac{1}{4} u \cdot (\boldsymbol{\omega} \times dP)(\boldsymbol{\omega} \times \delta P) - \frac{1}{2} u \cdot \delta(\boldsymbol{\omega} \times dP).$$

Analogamente si ottiene

$$d\delta u = \frac{1}{4} u \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \delta P)(\boldsymbol{\omega} \times dP) - \frac{1}{2} u \cdot d(\boldsymbol{\omega} \times \delta P).$$

Abbiamo pertanto

$$(45) \quad \Delta u = \delta du - d\delta u = \frac{1}{2} u \cdot [d(\boldsymbol{\omega} \times \delta P) - \delta(\boldsymbol{\omega} \times dP)] = \\ = \frac{1}{2} u \cdot \text{rot } \boldsymbol{\omega} \times dP \wedge \delta P,$$

ove è

$$\text{rot } \boldsymbol{\omega} = 2V \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dP},$$

doppio del bivettore dell'omografia  $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dP}$ , con  $\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dP}$  omografia vettoriale funzione di  $P$  ottenuta con la derivazione intrinseca relativamente alla connessione affine assegnata.

Chiameremo *curvatura di connessione metrica* in  $P$  per lo spazio di WEYL il bivettore

$$(46) \quad \boldsymbol{\kappa} = \text{rot } \boldsymbol{\omega}.$$

Esso va associato alla curvatura di connessione affine rappresentata dalla omografia del terzo ordine  $\Gamma_3$  introdotta al n. 6.

Si può verificare che la curvatura di connessione metrica è indipendente dalla taratura  $h$  per lo spazio, ossia che cambiando questa  $h$  detta curvatura rimane inalterata.

Infatti, osserviamo anzitutto che è sempre

$$\text{rot grad } f = 0$$

e procediamo al cambiamento di taratura in  $P$  ponendo al solito

$$\bar{h} = \lambda h.$$



Per il nuovo vettore di connessione metrica corrispondente (cfr. il n.º 9), abbiamo:

$$\bar{\omega} = \omega - \text{grad} \log \lambda$$

e pertanto risulta

$$\text{rot } \bar{\omega} = \text{rot } \omega,$$

il che dimostra l'asserto.

Affinchè un bivettore  $\mathfrak{r}_2$  possa rappresentare la curvatura di connessione metrica di uno spazio di WEYL, deve soddisfare alla condizione

$$(47) \quad \text{div } \mathfrak{r}_2 = 0$$

ove  $\text{div } \mathfrak{r}_2$  è l'omografia del terzo ordine introdotta in altro lavoro per gli spazi di RIEMANN ed estendibile, come dicemmo, agli spazi di WEYL (cfr. l'ultima citazione in calce).

Riprendiamo allora l'espressione dell'incremento  $du$  del modulo di un vettore  $u(P)$  dello spazio di WEYL allorchè il vettore stesso passa da  $P$  a  $P + dP$ :

$$du = -\frac{1}{2} u \cdot (\omega \times dP)$$

e consideriamo una curva della varietà congiungente  $P$  con un altro punto  $P_1$ . Spostando  $u(P)$  lungo questa curva per parallelismo e quindi il modulo per congruenza, si ottiene la variazione totale  $Du$  del modulo di  $u$  integrando la precedente.

Questa variazione in generale dipende dal cammino che si percorre per collegare i punti  $P$  e  $P_1$ .

Se  $\omega \times dP$  risulta un differenziale esatto detta variazione  $Du$  risulta in corrispondenza indipendentemente dal cammino percorso ed allora il trasporto per congruenza del modulo può dirsi integrabile in analogia al caso della integrabilità del trasporto per parallelismo.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè risulti integrabile lo spostamento per congruenza del modulo di un vettore è che risulti nullo in ogni punto il bivettore curvatura di connessione metrica  $\mathfrak{r}_2 = \text{rot } \omega$ .

Siamo allora nelle circostanze degli spazi di RIEMANN ed in particolare euclidei, con in più l'arbitrarietà della taratura.

In questo caso il vettore di connessione metrica  $\omega$  è il gradiente di una funzione  $\xi$ .

Naturalmente il vettore  $\omega$  è relativo ad una prefissata taratura in  $P$  di fattore  $h$ .

Nelle circostanze metriche riemanniane suaccennate espresse analiticamente da

$$\omega = \text{grad } \xi,$$

eseguiamo un cambiamento di taratura  $h$  ponendo

$$\bar{h} = \lambda h \quad \text{con} \quad \lambda = e^{\xi}.$$

Nella nuova taratura il vettore  $\bar{\omega}$  di connessione metrica risulta dato da

$$\bar{\omega} = \text{grad } \xi - \text{grad } \log \lambda = \text{grad } \xi - \text{grad } \xi = 0,$$

ossia può risultare nullo in tutti i punti dello spazio di Weyl che ha carattere metrico riemanniano ed in particolare euclideo.

Questa particolare taratura a cui possiamo sempre ridurci nel caso che la curvatura di connessione metrica sia nulla in ogni punto, è detta *taratura normale* ed è quella che ordinariamente si viene tacitamente a considerare nelle circostanze metriche degli spazi riemanniani ed in particolare degli spazi euclidei la cui natura metrica globale è comune a quelli riemanniani.

In tal modo si vede come uno spazio di WEYL contiene come casi particolari gli spazi di RIEMANN e conseguentemente gli spazi euclidei.

L'annullarsi della curvatura di connessione metrica in ogni punto dello spazio di WEYL che ammetta non nulla la curvatura di connessione affine  $\Gamma_3$  caratterizza in detto spazio uno spazio di RIEMANN; annullandosi anche la curvatura di connessione affine si è nel caso delle varietà *euclidee*, o *lineari* ordinarie, cioè euclideamente affini ed euclideamente metriche.

Per la taratura normale dello spazio di RIEMANN la forma metrica fondamentale  $\chi^*$  è determinata a meno di un fattore qualunque, tutt'al più positivo, che si può determinare una volta per tutte con la scelta dell'unità (campione) per i moduli dei vettori che può essere fatta in un punto qualsiasi.

Il vettore  $\omega$  che scelto a priori serve con  $\chi^*$  a caratterizzare la metrica di uno spazio di WEYL ha notevole importanza nella teoria del campo unitario del WEYL stesso, con la quale l'illustre Autore ha creduto di interpretare geometricamente sia il campo gravitazionale, sia il campo elettromagnetico, completando la teoria della relatività generale di EINSTEIN.

Lo spazio quadridimensionale Universo in presenza di masse elettriche è stato inteso dal WEYL non semplicemente riemanniano, ma uno spazio metrico della natura di quelli studiati per il quale il vettore di connessione metrica  $\omega$  ad esso relativo compendia il potenziale scalare della distribuzione di cariche ed il potenziale vettore: una componente di esso vale il primo e le altre tre determinano il secondo.

In coordinate il bivettore  $\tau_2$ , curvatura di connessione metrica è determinato dal tensore lineare del secondo ordine

$$\tau_{ik} = \frac{\partial \omega_i}{\partial q_k} - \frac{\partial \omega_k}{\partial q_i},$$

essendo  $\omega_i$  le componenti covarianti del vettore di connessione metrica  $\omega$ , definite come al n. 8.

Si tratta del tensore chiamato col WEYL dagli altri Autori *curvatura segmentaria*.

Le condizioni affinché un tensore doppio lineare rappresenti la curvatura segmentaria di uno spazio di WEYL, sono date dalle equazioni

$$\frac{\partial \tau_{kl}}{\partial q_i} + \frac{\partial \tau_{li}}{\partial q_k} + \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial q_l} = 0$$

che si deducono traducendo in coordinate la (47).



Il Consiglio Nazionale delle Ricerche comunica :

È prorogata al 31 Marzo 1936-XIV la scadenza del concorso a premio già bandito dal Comitato per l'Astronomia, la Matematica Applicata e la Fisica del Consiglio Nazionale delle Ricerche sul seguente tema :

« *Applicazione concreta di metodi matematici ai fenomeni fisici ed alle « attuazioni tecniche in cui entrano in gioco fenomeni di ereditarietà e di « isteresi ».*

Possono concorrere a detto premio cittadini italiani (d'ambo i sessi) con un lavoro stampato o dattilografato, in lingua italiana, da inviarsi entro il 31 Marzo 1936-XIV alla Segreteria Generale del Consiglio Nazionale delle Ricerche (Ministero dell'Educazione Nazionale, Viale del Re - Roma).

L'ammontare del premio è di L. 5.000.

P. S. - I manoscritti già inviati potranno essere ritirati dagli Autori.



# Linear difference equations containing a parameter.

By W. J. TRJITZINSKY (Urbana, Ill. U. S. A.).

---

1. **Introduction.** — Our present object is to investigate *the asymptotic character of the solutions of the linear difference equation*

$$(A) \quad L_n(x, \lambda; y) \equiv \sum_{k=0}^n a_{n-k}(x, \lambda)y(x+k) = 0 \quad [a_0(x, \lambda) \neq 0; a_n(x, \lambda) \neq 0]$$

*inasmuch as the complex parameter  $\lambda$  is concerned.* The functions  $a_{n-k}(x, \lambda)$  are here assumed to satisfy asymptotic relations

$$(1) \quad a_{n-k}(x, \lambda) \sim \alpha_{n-k}(x, \lambda) = \lambda^{m_k} \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_{n-k, \nu}(x) \lambda^{-\nu}$$

[ $k = 0, 1, \dots, n$ ; the  $m_k$  integers]

in the parameter  $\lambda$ , at  $\lambda = \infty$ , when  $\lambda$  ( $|\lambda| \geq \lambda_0 > 1$ ) is in a region  $R$ , extending to infinity. In this region the angle of  $\lambda$  is to possess finite upper and lower bounds. These relations will be supposed to be in the ordinary sense (that is, to infinitely many terms).

The coefficients  $\alpha_{n-k, \nu}(x)$ , involved in (1), are assumed to be analytic in  $x$  for  $|x| \geq 1$  in every finite part of a region  $K$ . *This region will extend to infinity (to the left) and it will be such that whenever  $x$  is in  $K$  so is  $x - 1$ .* The  $\alpha_{n-k, \nu}(x)$  are assumed to satisfy certain asymptotic relations, valid in the ordinary sense in  $K$ ,

$$(1a) \quad \alpha_{n-k, \nu}(x) \sim x^{c_{n-k, \nu}} [ \alpha_{n-k, \nu}^0 + \alpha_{n-k, \nu}^1 x^{-1} + \alpha_{n-k, \nu}^2 x^{-2} + \dots ] = \alpha_{n-k, \nu}^*(x)$$

[ $k = 0, 1, \dots, n$ ;  $\nu = 0, 1, \dots$ ;  $c_{n-k, \nu}$  integers].

The coefficients in (A) are to be analytic in  $x$  and in  $\lambda$  in every finite part of the specified regions.

Since in this paper the emphasis is on the character of the solutions with respect to  $\lambda$ , rather than with respect to  $x$ , in order to gain simplicity *it will be assumed that formally and in an extended sense (A) is of « Fuchsian type » in  $x$ .* However, *no restrictions will be made with regard to the parameter.* In this connection it will be recalled that the theory of difference equations, without a parameter, of the Fuchsian type has been completely developed

by N. E. NÖRLUND <sup>(1)</sup>, who considers equations whose coefficients are represented by convergent factorial series.

The implication of our hypothesis is as follows. Transform (A) into an equation (A<sub>1</sub>) involving differences of  $y$ , of orders 0, 1, ...  $n$ . In the new equation the coefficients of the various differences will be asymptotic, in  $x$  and in  $\lambda$ , to certain formal double series. Let (A<sub>2</sub>) denote (A<sub>1</sub>) with the coefficients replaced by these series, respectively. In the formal equation (A<sub>2</sub>) arrange the coefficients in powers of  $x$ . The coefficients of these powers will be series, possibly divergent, in powers of  $\lambda$ . Our hypothesis signifies that, disregarding the possible divergence of the series in  $\lambda$ , the coefficients of the various differences in the equation (A<sub>2</sub>) are in a sense to be of the same formal character in  $x$  as in an equation of Fuchsian type <sup>(2)</sup>.

More precisely, our hypothesis is that the difference polynomials  $\mathcal{H}$  (11; § 2) are of Fuchsian type. On the basis of this supposition we shall arrive at (24; § 2). In the text after (24; § 2) we then make an additional assumption.

Without any loss of generality one may assume that  $\alpha_0(x, \lambda) = \alpha_0(x, \lambda) = 1$ .

Throughout the paper asymptotic relations with respect to  $\lambda$  are to be understood as follows. If the  $J_\nu(x)$  ( $\nu = 0, 1, \dots$ ) are functions defined in  $K$  or in a region of type  $K$ , such that

$$|J_\nu(x)| \leq |x|^h J_\nu \quad [\nu = 0, 1, \dots; \lambda \text{ in } K],$$

it will be said that  $z(x, \lambda)$  is asymptotic in  $\lambda$  (in  $R$ , at  $\lambda = \infty$ ) to a series

$J(x, \lambda) = J_0(x) + J_1(x)\lambda^{-\frac{1}{p}} + \dots$  (integer  $p \geq 1$ ), provided

$$z(x, \lambda) = J_0(x) + J_1(x)\lambda^{-\frac{1}{p}} + \dots + J_{m-1}(x)\lambda^{-\left(\frac{m-1}{p}\right)} + J_m(x, \lambda)\lambda^{-\frac{m}{p}},$$

$$|J_m(x, \lambda)| \leq |x|^H J_m \quad [x \text{ in } K; \lambda \text{ in } R],$$

where  $H(\geq Rh)$  is some number independent of  $m$ . If  $m$  cannot be increased the asymptotic relation will be to  $m$  terms (in  $\lambda$ ). If  $m$  can be indefinitely increased the asymptotic relation will be to infinitely many terms (that is, it will be in the ordinary sense).

The theory to be established in this paper is in line with the several complete asymptotic theories developed for various important types of linear equations as follows: by G. D. BIRKHOFF and W. J. TRJITZINSKY for dif-

<sup>(1)</sup> *Leçons sur les équations linéaires aux différences finies*, Paris, 1929, pp. 28-56. A factorial series is formally compatible with a power series.

<sup>(2)</sup> NÖRLUND, l. c., p. 29. The indicial equation (l' équation déterminante) is on pp. 30, 31.



ference equations <sup>(1)</sup>; by TRJITZINSKY for  $q$ -difference equations <sup>(2)</sup> and by the same author for linear differential equations <sup>(3)</sup>. The mentioned works refer to equations not containing a parameter. More closely related to the problem at hand is the general asymptotic theory of linear differential equations, containing a parameter, developed by TRJITZINSKY <sup>(4)</sup>.

Prominently associated with the various problems, relating to the various fields indicated above, are the names of G. D. BIRKHOFF, R. D. CARMICHAEL, J. D. TAMARKIN (the latter in the field of linear differential equations with a parameter and in the field of the related boundary value problems), N. E. NÖRLUND and J. HORN. The last two authors, as well as TRJITZINSKY <sup>(5)</sup>, carried out extensive application of LAPLACE integrals and factorial series to difference and differential equations not containing a parameter. At the base of the developments of this type of fundamental importance are certain results and methods due to NÖRLUND. The very interesting question concerning the extent to which the methods of this type are applicable to equations (difference and differential) containing a parameter still remains open. This method, whenever applicable, amounts to a method of summing divergent formal series solutions.

References to the developments by the mentioned authors, as well as references to some significant contributions of other writers, may be found in the indicated papers.

**2. Formal solutions.** — It will be necessary to establish some formal results relating to the equation (A). For convenience it will be said that  $m_k$ , involved in (1; § 1), is  $-\infty$  whenever the corresponding series is identically zero; that is, whenever the functions  $\alpha_{n-k, \nu}(x)$  ( $\nu = 0, 1, \dots$ ) are all identically zero for the value of  $k$  under consideration. Accordingly, the functions  $\alpha_{n-k, 0}(x)$  corresponding to a finite  $m_k$  could be considered as not all identically zero. In view of the assumptions previously made concerning  $\alpha_0(x, \lambda)$  and  $\alpha_n(x, \lambda)$  it follows that  $m_n = 0$  and that  $m_0$  is finite.

<sup>(1)</sup> *Analytic theory of singular difference equations*, « Acta Math. », vol. 60 (1932): pp. 1-89.

<sup>(2)</sup> *Analytic theory of linear  $q$ -difference equations*, « Acta Math. », vol. 61 (1933); pp. 1-38. In this work for the first time asymptotic methods are applied to  $q$ -difference equations.

<sup>(3)</sup> *Analytic theory of linear differential equations*. « Acta Math. », vol. 62 (1934): pp. 167-226.

<sup>(4)</sup> This work will appear in the « Acta Math. ». It presents a general asymptotic theory for the complex plane of the parameter. On the otherhand,  $x$  is restricted to an interval in which the involved functions of  $x$  are merely indefinitely differentiable.

<sup>(5)</sup> TRJITZINSKY, *Laplace integrals and factorial series in the theory of linear differential and linear difference equations*. « Trans. Am. Math. Soc. », vol. 37 (1935): pp. 80-146.

Consider a rectangular system of coordinates  $(k, m)$  with the  $k$ - and  $m$ -axes as the axes of abscissas and ordinates, respectively. Plot the points  $(k, m_k)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) corresponding to the finite  $m_k$  only. In the set of all the rectilinear segments

$$[(0, m_0), (1, m_1)], [(0, m_0), (2, m_2)], \dots [(0, m_0), (n, 0)]$$

there exists at least one which has the greatest slope, say  $-M_1$ . Let  $[(0, m_0), (n_1, m_{n_1})]$  be the particular one of these segments which is of greatest length. If  $n_1 \neq n$  selection of segments is continued as follows. Amongst the segments

$$[(n_1, m_{n_1}), (n_1 + 1, m_{n_1+1})], \\ [(n_1, m_{n_1}), (n_1 + 2, m_{n_1+2})], \dots, [(n_1, m_{n_1}), (n, 0)]$$

there will be some with the greatest slope, say  $-M_2$ . One of these segments whose slope is  $-M_2$ , say  $[(n_1, m_{n_1}), (n_2, m_{n_2})]$ , will be of maximum length. After a finite number of steps we obtain a polygonal line, joining the points

$$(1) \quad (n_0, m_0), (n_1, m_{n_1}), (n_2, m_{n_2}), \dots, (n_{\alpha-1}, m_{n_{\alpha-1}}), (n_{\alpha}, m_{n_{\alpha}}) \\ [0 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_{\alpha} = n; \alpha \geq 1],$$

such that, if  $-M_{\nu}$  is the slope of the segment  $[(n_{\nu-1}, m_{n_{\nu-1}}), (n_{\nu}, m_{n_{\nu}})]$  we have

$$(2) \quad M_1 < M_2 < \dots < M_{\alpha}.$$

No points  $(k, m_k)$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ) will lie above the polygonal line. It is also seen that the  $M_{\nu}$  ( $\nu = 1, \dots, \alpha$ ) are all finite. On letting  $S(i, j)$  denote the slope of the segment  $[(i, m_i), (j, m_j)]$  it follows that

$$(3) \quad -M_{\nu} = S(n_{\nu-1}, n_{\nu}) = \frac{m_{n_{\nu-1}} - m_{n_{\nu}}}{n_{\nu-1} - n_{\nu}} \geq S(n_{\nu-1}, k) = \frac{m_{n_{\nu-1}} - m_k}{n_{\nu-1} - k} \quad (n_{\nu-1} < k < n_{\nu})$$

and

$$(3a) \quad -M_{\nu} < S(k, n_{\nu-1}) = \frac{m_k - m_{n_{\nu-1}}}{k - n_{\nu-1}} \quad [k < n_{\nu-1}], \\ -M_{\nu} > S(n_{\nu}, k) = \frac{m_{n_{\nu}} - m_k}{n_{\nu} - k} \quad [k > n_{\nu}].$$

By (3)  $M_{\nu} = l_{\nu}/p_{\nu}$  [ $l_{\nu}, p_{\nu}$  integers;  $p_{\nu} \geq 1$ ], where the fraction will be assumed to be in its lowest terms. In consequence of (3) and (3a)

$$(4) \quad \frac{H_{\nu}}{p_{\nu}} = m_{n_{\nu-1}} + n_{\nu-1}M_{\nu} = m_{n_{\nu}} + n_{\nu}M_{\nu} \geq m_k + kM_{\nu} \quad [n_{\nu-1} < k < n_{\nu}],$$

$$(4a) \quad \frac{H_{\nu}}{p_{\nu}} > m_k + kM_{\nu} \quad [k < n_{\nu-1}; k > n_{\nu}; H_{\nu} \text{ an integer}].$$

For the moment attention will be fixed on a particular  $M_\nu$ . Corresponding to the given equation (A), we have a formal equation

$$(A^*) \quad L_n^*(x, \lambda; s) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n-k}(x, \lambda) s(x+k) = 0.$$

It will be proved that (A\*) possesses  $n_\nu - n_{\nu-1}$  linearly independent formal solutions

$$(5) \quad s_j(x, \lambda) = \lambda^{M_\nu x} \left[ \sigma_j^0(x) + \sigma_j^1(x) \lambda^{-\frac{1}{p_\nu}} + \sigma_j^2(x) \lambda^{-\frac{2}{p_\nu}} + \dots \right] \\ [n_{\nu-1} + 1 \leq j \leq n_\nu; M_\nu = l_\nu/p_\nu; l_\nu, \text{ an integer}].$$

Perform the transformation

$$(6) \quad s(x, \lambda) = \lambda^{M_\nu x} \sigma(x, \lambda).$$

We then have

$$(7) \quad \lambda^{-M_\nu x} L_n^*(x, \lambda; s) \equiv \bar{L}_n^*(x, \lambda; \sigma) \equiv \sum_{k=0}^n \bar{\alpha}_{n-k}(x, \lambda) \sigma(x+k, \lambda) = 0,$$

where

$$(7a) \quad \bar{\alpha}_{n-k}(x, \lambda) = \lambda^{M_\nu k} \alpha_{n-k}(x, \lambda) = \lambda^{\bar{m}_k} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \alpha_{n-k, \gamma}(x) \lambda^{-\gamma}, \\ \bar{m}_k = m_k + M_\nu k = \bar{l}_k(\nu)/p_\nu \quad [\text{the } \bar{l}_k(\nu) \text{ integers}].$$

Corresponding to the formal equation

$$(A^*) \quad \bar{L}_n^*(x, \lambda; \sigma) = 0$$

there will be a polygonal line of the same character as for the equation (A\*). Corresponding to  $M_\nu$ , we shall have  $\bar{M}_\nu = 0$ . Whence it follows that

$$(8) \quad \bar{\alpha}_{n-k}(x, \lambda) = \lambda^{\bar{m}_{n_\nu}} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \beta_{n-k, \gamma}(x) \lambda^{-\frac{\gamma}{p_\nu}}$$

where

$$(8a) \quad \beta_{n, 0}(x) = \beta_{n-1, 0}(x) = \dots = \beta_{n-(n_{\nu-1}-1), 0}(x) = \beta_{n-(n_\nu+1), 0}(x) = \dots = \beta_{0, 0}(x) = 0$$

and

$$(8b) \quad \beta_{n-n_{\nu-1}, 0}(x) = \alpha_{n-n_{\nu-1}, 0}(x), \quad \beta_{n-n_\nu, 0}(x) = \alpha_{n-n_\nu, 0}(x).$$

The  $\beta_{n-k, \gamma}(x)$  may depend on  $\nu$ ; they are simply expressed in terms of the  $\alpha_{n-k, \gamma}(x)$ . Moreover, the two functions displayed in (8b) are not identically zero. Furthermore, it is to be noted that if from the totality of functions

$$(8c) \quad \beta_{n-k, 0}(x) \quad [n_{\nu-1} \leq k \leq n_\nu]$$

those are picked out which are not identically zero we get precisely the

functions  $\alpha_{n-k, \gamma}(x)$  (1; § 1), corresponding to the points  $(k, m_k)$  which actually lie on the segment  $[(n_{v-1}, m_{v-1}), (n_v, m_v)]$  of the polygonal line corresponding to  $(A^*)$ .

Substitution of

$$(9) \quad \sigma(x, \lambda) = \sigma^0(x) + \sigma^1(x)\lambda^{-\frac{1}{p_v}} + \dots$$

in  $(\bar{A}^*)$  [cf. (7) and (8)] will result in

$$(10) \quad \lambda^{-\bar{m}_{n_v}} \bar{L}_n^*(x, \lambda; \sigma) \equiv \sum_{k=0}^n \left( \sum_{\gamma=0}^{\infty} \beta_{n-k, \gamma}(x) \lambda^{-\frac{\gamma}{p_v}} \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i(x+k) \lambda^{-\frac{i}{p_v}} \right) \equiv \\ \equiv f_0(x) + f_1(x)\lambda^{-\frac{1}{p_v}} + f_2(x)\lambda^{-\frac{2}{p_v}} + \dots = 0.$$

On letting

$$(11) \quad {}_v H(x; \sigma) \equiv \sum_{k=n_{v-1}}^{n_v} \beta_{n-k, 0}(x) \sigma(x+k)$$

it is observed that

$$(12) \quad f_0(x) \equiv {}_v H(x; \sigma^0),$$

$$(12a) \quad f_r(x) \equiv {}_v H(x; \sigma^r) + {}_v \Gamma_r(x; \sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^{r-1}), \quad [r = 1, 2, \dots]$$

where

$$(12b) \quad {}_v \Gamma_r(x; \sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^{r-1}) = \sum_{\delta=0}^{r-1} \left( \sum_{k=0}^n \beta_{n-k, r-\delta}(x) \sigma^\delta(x+k) \right) = -h^r(x+n_{v-1}).$$

In view of (10) it follows that

$$(13) \quad f_r(x) = 0 \quad [r = 0, 1, \dots].$$

The homogeneous difference equation  $f_0(x) = 0$  is of order  $n_v - n_{v-1}$ , and it will serve to determine  $n_v - n_{v-1}$  linearly independent functions  $\sigma_j^0(x)$  ( $j = n_{v-1} + 1, \dots, n_v$ ). We pick out a particular one of these solutions. With the aid of the non-homogeneous equation  $f_1(x) = 0$  (cf. (11), (12a), (12b)) a corresponding determination of  $\sigma^1(x)$  can be found. Successive applications of the equations (13) will yield a formal solution (5). Corresponding to the various  $\sigma_j^0(x)$  ( $n_{v-1} < j \leq n_v$ ) a set of  $n_v - n_{v-1}$  formally linearly independent series (5) is obtained. Such a construction can be effected for  $v = 1, 2, \dots, \alpha$ , yielding a set of  $n$  distinct formal solutions.

Since (A) is of extended Fuchsian type in  $x$  (cf. § 1), the equation  ${}_v H(x; \sigma^0) = 0$  could not be otherwise than formally of Fuchsian type. Hence this equation will possess  $n_v - n_{v-1}$  linearly independent formal solutions

$$(14) \quad \sigma_j^{*0}(x) = x^{r_j} \cdot (F_{q_j}\text{-series})$$

The term «  $F_q$ -series », involved in (14) and in the sequel, will be defined as follows.

DEFINITION 1. — An  $F_q$ -series is an expression (possibly divergent) of the form

$$J^0(x) + J^1(x) \log x + \dots + J^q(x) \log^q x$$

where

$$J^H(x) = \sum_{\gamma=0}^{\infty} J_{\gamma}^H x^{-\gamma} \quad [q \geq 1; H=0, \dots, q].$$

Let  $(a_{i,j})$  denote a square matrix of  $(n_{\nu} - n_{\nu-1})^2$  elements  $a_{i,j}$ , the element  $a_{i,j}$  being in the  $i$ -th row and in the  $j$ -th column. The determinant

$$(15) \quad |(\sigma_{n_{\nu-1}+j}^{*0}(x+i-1))| \quad [i, j=1, \dots, n_{\nu} - n_{\nu-1}]$$

does not vanish. Thus, on letting  $(\bar{\sigma}_{n_{\nu-1}+j,i}^{*0}(x))$  denote the inverse of the matrix

$$(\sigma_{n_{\nu-1}+j}^{*0}(x+i-1)) \quad [i, j=1, \dots, n_{\nu} - n_{\nu-1}]$$

it follows that the elements  $\bar{\sigma}_{n_{\nu-1}+j,i}^{*0}(x)$  are of the type

$$(15a) \quad \bar{\sigma}_{n_{\nu-1}+j,i}^{*0}(x) = x^{-r_{n_{\nu-1}+j,i}+c_{\nu}} \cdot (F_q^r\text{-series}) \quad [i, j=1, \dots, n_{\nu} - n_{\nu-1}].$$

Here the integer  $c_{\nu}$  is non negative. Such facts can be stated for  $\nu=1, \dots, \alpha$ .

Functions  $\sigma_j^0(x)$  ( $j=n_{\nu-1}+1, \dots, n_{\nu}$ ), analytic in  $K(x \neq \infty)$ , can be found so as to satisfy (13;  $r=0$ ) and so that

$$(17) \quad \sigma_j^0(x) \asymp \sigma_j^{*0}(x) \quad [x \text{ in } K].$$

In the case when the series in the second members of (1a) converge and  $\asymp$  is replaced by  $=$ ; or, more generally, in the case when the  $\alpha_{n-k,\nu}(x)$  are expressible in terms of factorial series, convergent in a left half-plane and formally compatible with the  $\alpha_{n-k,\nu}^{*0}(x)$ , in view of the well known results of NÖRLUND <sup>(4)</sup>, the functions  $\sigma_j^0(x)$  ( $j=n_{\nu-1}+1, \dots, n_{\nu}$ ) could be then determined with the aid of convergent factorial series (compatible with the formal solutions). The subsequent  $\sigma_j^r(x)$  ( $r=1, 2, \dots$ ) are determined with the aid of non-homogeneous difference equations.

Using matrix notation, it is observed that a solution of an equation

$$(18) \quad L_{\tau}(y) \equiv b_0(x)y(x+\tau) + b_1(x)y(x+\tau-1) + \dots + b_{\tau}(x)y(x) = p(x) \\ (b_0(x) \equiv 0; b_{\tau}(x) \equiv 0)$$

is given by the formula

$$(18a) \quad y(x) = \sum_{\gamma=1}^{\tau} y_{\gamma}(x) \underset{t=x}{\mathfrak{S}} \bar{y}_{\gamma,\tau}(t+1)p(t).$$

<sup>(4)</sup> NÖRLUND, l. c..

Here the  $y_j(x)$  ( $j = 1, \dots, \tau$ ) form a set of  $\tau$  linearly independent solutions of the equation  $L_\tau(y) = 0$  and the  $\bar{y}_{i,j}(x)$  are the elements of the inverse of the matrix  $(y_j(x + i - 1))$  ( $i, j = 1, \dots, \tau$ ); that is,

$$(18b) \quad (\bar{y}_{i,j}(x)) = (y_j(x + i - 1))^{-1}.$$

Moreover,

$$(18c) \quad \sum_{t=x+1} \varphi(t) - \sum_{t=x} \varphi(t) = \varphi(x).$$

The summations involved in (18a) have to be performed dependig on the character of the equation (18).

We have

$$(19) \quad \beta_{n-k,\gamma}(x) \circ \beta_{n-k,\gamma}^*(x) = x^{\beta_{n-k,\gamma}} [\beta_{n-k,\gamma}^{*0} + \beta_{n-k,\gamma}^{*1} x^{-1} + \dots] \\ [k = 0, 1, \dots, n; \gamma = 0, 1, \dots; \text{the } \beta_{n-k,\gamma} \text{ integers}].$$

On continuing the developments for a fixed  $j$  ( $n_{v-1} < j \leq n_v$ ), in view of (13;  $r = 1$ ), (12a), (11) and (12b) it will follow that  $\sigma^i(x)$  satisfies

$$(20) \quad \nu H(x - n_{v-1}; \sigma^i(x - n_{v-1})) \equiv \sum_{k=0}^{n_v - n_{v-1}} \beta_{n - n_{v-1} - k} (x - n_{v-1}) \sigma^i(x - n_{v-1} + k) = h^i(x).$$

Here, for  $x$  in  $K$ ,

$$(20a) \quad h^i(x) \circ h^{*i}(x) = x^{h^i} \cdot (F_q\text{-series}) = - \sum_{k=0}^n \beta_{n-k,1}^*(x - n_{v-1}) \sigma_j^{*0}(x - n_{v-1} + k).$$

The functions

$$(\bar{\sigma}_{n_v - i + j, i}^0(x)) = (\sigma_{n_v - i + j}^0(x + i - 1))^{-1} \quad [i, j = 1, \dots, n_v - n_{v-1}],$$

corresponding to the series (15a), are analytic in  $K(x \neq \infty)$  and they are asymptotic in  $K$  to those series. An application of (18a) to the equation (20) will give

$$(21) \quad \sigma^i(x - n_{v-1}) = W(h^i(x)) \equiv \sum_{\gamma=1}^{n_v - n_{v-1}} \sigma_{n_v - i + \gamma}^0(x - n_{v-1}) \sum_{t=x} \bar{\sigma}_{n_v, \gamma}^0(t - n_{v-1}) h^i(t).$$

In view of (20a) and of (15a) it follows that the function displayed in (21) after the symbol of summations is asymptotic, in  $K$ , to the series

$$(21a) \quad \bar{\sigma}_{n_v, \gamma}^{*0}(t - n_{v-1}) h^{*i}(t) = t^{-r_{n_v - i + \gamma} + c_v} \cdot (F_q\text{-series}).$$

On the basis of the formal evaluation

$$(21b) \quad \sum_{t=x} \bar{\sigma}_{n_v, \gamma}^{*0}(t - n_{v-1}) h^{*i}(t) = x^{-r_{n_v - i + \gamma} + c_v + 1} \cdot (F_{q+1}\text{-series})$$

and on taking into account the summation methods of BIRKHOFF and the present author <sup>(1)</sup>, it follows that a summation, displayed in the second

(1) BIRKHOFF and TRJITZINSKY, l. c..

member of (21), can be evaluated as a function analytic in  $K(x \neq \infty)$  and asymptotic, in  $K$ , to the second member of (21b). By virtue of (17) and (14) from (21) we then have

$$(22) \quad \sigma^1(x) \asymp \sigma^{*1}(x) = x^{\sigma^1} \cdot (F_{q_1}\text{-series}) \quad [x \text{ in } K].$$

Functions  $\sigma^r(x)$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) and  $h^r(x)$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) are determined in succession. We have, for  $x$  in  $K$  and  $r = 1, 2, \dots$

$$(23) \quad h^r(x) \asymp h^{*r}(x) = x^{h^r} \cdot (F_{q_r}\text{-series}) = - \sum_{\delta=0}^{r-1} \sum_{k=0}^n \beta_{n-k, r-\delta}^* (x - n_{v-1}) \sigma^{*\delta}(x - n_{v-1} + k),$$

$$(24) \quad \sigma^r(x - n_{v-1}) = W(h^r(x)) \asymp x^{\sigma^r} \cdot (F_{q_r}\text{-series}) \quad [\sigma(0) = r_j].$$

Here  $W$  denotes the functional involved in (21).

We define extended Fuchsian type so that the following will hold. For a fixed  $v$  and  $j(1 \leq v \leq \alpha; n_{v-1} < j \leq n_v)$  the numbers  $\sigma(r)$  ( $r = 0, 1, \dots$ ), involved in (24), may differ only by integers; the absolute values of these numbers possess a finite upper bound, attained for some  $r$ . The  $q_r \leq q(j)$  ( $r = 0, 1, \dots$ ), where  $q(j)$  is an integer. Thus, in (24) we may replace  $\sigma(r)$  and  $q_r$  by  $\sigma_j$  and by  $q(j)$ , respectively; the two latter numbers being independent of  $r$ .

The above construction can be effected for  $j = n_{v-1} + 1, \dots, n_v$  and for  $v = 1, 2, \dots, \alpha$ . Accordingly, the following can be stated.

LEMMA 1. — *The formal equation (A\*), corresponding to the equation (A), possesses n formally linearly independent formal solutions  $s_j(x, \lambda)$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , specified by (5) (cf. (2), (3)). The involved coefficients of the various powers of  $\lambda$ , that is the  $\sigma^r(x)$  ( $j = 1, \dots, n; r = 0, 1, \dots$ ), are functions of  $x$  only, analytic in  $K$  and satisfying asymptotic relations, valid in the ordinary sense in  $K$ , of the form*

$$(25) \quad \sigma_j^r(x) \asymp \sigma_j^{*r}(x) = x^{\sigma_j^r} \cdot (F_{q(j)}\text{-series})$$

[cf. Def. 1;  $r = 0, 1, \dots; j = 1, \dots, n$ ].

Here the  $F_{q(j)}$ -series depend on  $r$ , while the numbers  $\sigma_j, q(j)$  may be taken independent of  $r$ .

**3. Parametric summation.** — *In this section and in the sequel  $\Gamma$  will denote a subregion of  $K$  for which  $a \leq Jx \leq b$  ( $a < b$ ) <sup>(1)</sup>. It will be essential, in view of the purposes on hand, to establish the asymptotic properties of a solution of the equation*

$$(1) \quad y(x + 1) - y(x) = \lambda^{-\frac{l}{p}x} x^{hp} h(x, \lambda) \quad [\text{integers } l, p; l \geq 1; p \geq 1].$$

(1)  $Ix$  = imaginary part of  $x$ .

Here  $h(x, \lambda)$  is assumed to be a function defined for  $x$  in  $\Gamma$  and for  $\lambda$  in  $R$ . Except at  $x = \infty$  and except at  $\lambda = \infty$  it is to be analytic in these regions. Moreover, it is assumed that

$$(1a) \quad h(x, \lambda) \asymp x^h [h_0(x) + h_1(x)\lambda^{-\frac{1}{p}} + \dots]$$

$$[x \text{ in } \Gamma(|x| \geq r_1 > 0); \lambda \text{ in } R],$$

$$(1b) \quad h_r(x) \asymp H_r(x) = F_q\text{-series} \quad [r = 0, 1, \dots; x \text{ in } \Gamma],$$

where the asymptotic relation (1a) is with respect to  $\lambda$  and is to  $\rho (\geq l)$  terms, while the relations (1b) are in the ordinary sense. The above hypotheses imply that

$$(2) \quad h(x, \lambda) = h_0(x) + \dots + h_{\rho-1}(x)\lambda^{-\left(\frac{\rho-1}{p}\right)} + h_\rho(x, \lambda)\lambda^{-\frac{\rho}{p}},$$

$$(2a) \quad |h_r(x)| \leq h_r |x|^\xi \quad [r = 0, 1, \dots, \rho - 1; \xi > 0; x \text{ in } \Gamma],$$

$$(2b) \quad |h_\rho(x, \lambda)| \leq b_\rho |x|^\xi \quad [x \text{ in } \Gamma(|x| \geq r_1); \lambda \text{ in } R].$$

Let  $x_a = -c + \sqrt{-1} a$ ,  $x_b = -c + \sqrt{-1} b$  be two suitable fixed points in  $\Gamma(c > r_1)$ . Let  $x$  be in the region  $\Gamma_\varepsilon$  for which  $Rx < -c$ ,  $a + \varepsilon \leq \text{Im} x \leq b - \varepsilon$  ( $\varepsilon$  positive and arbitrarily small). Form the well known integral

$$(3) \quad y(x) = \int_{L_x} \frac{\lambda^{-\frac{1}{p} t} t^h h(t, \lambda) dt}{1 - e^{2\pi \sqrt{-1}(x-t)}}$$

which under appropriate conditions will give an analytic solution of (1). Here  $L_x$  is a path extending from  $x_a$  to  $x_b$  between the points  $x$  and  $x - 1$ . Corresponding to every  $x$  in the indicated region there exists an integer  $k_x (\geq 0)$  such that  $R(x + k_x) < -c$  and  $R(x + k_x + 1) > -c$ , unless  $x$  is congruent <sup>(1)</sup> to the segment  $L_1$ , joining  $x_a$  and  $x_b$ . In the case when  $x$  is congruent or is nearly congruent to  $L_1$  we form another path,  $L_2$ , extending from  $x_a$  to  $x_b$ . Moreover, the part of  $L_2$  lying in  $\Gamma_\varepsilon$  is to consist of a segment parallel to  $L_1$  and at a suitable distance from  $L_1$  <sup>(2)</sup>. The integer  $k_x$  will now be defined as before, but with reference to  $L_1$ . Let  $L$  denote  $L_1$  or  $L_2$ , depending on the position of  $x$  in  $\Gamma_\varepsilon$ . Form a loop  $l_x$  containing the points  $x, x + 1, \dots, x + k_x$ , not containing  $x - 1$ , and passing between  $x + k_x$  and  $L$ . It then follows that

$$(4) \quad \int_{L_x} = \int_{l_x} + \int_L.$$

<sup>(1)</sup> That is, unless  $R(x + c)$  — integer.

<sup>(2)</sup>  $c$  is so chosen that  $L_1$  and  $L_2$  are in the part of  $\Gamma$  for which  $|x| \geq r_1$ .



Here the integration over  $l_x$  is extended in the clockwise direction and that along  $L$  is extended from  $x_a$  to  $x_b$  (1). On using (2) it is seen that

$$(4a) \quad \int_{l_x} = -\lambda^{-\frac{l}{p}} x^n h(x, \lambda) - \lambda^{-\frac{l}{p}} \lambda^{-\frac{l}{p}} (x+1)^n h(x+1, \lambda) - \dots \\ - \lambda^{-\frac{l_x}{p}} \lambda^{-lk_x/p} \cdot (x+k_x)^n h(x+k_x, \lambda) = \lambda^{-\frac{l}{p}} x^n J(x, \lambda),$$

where

$$(4b) \quad J(x, \lambda) = -h(x, \lambda) - \lambda^{-\frac{l}{p}} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n h(x+1, \lambda) - \dots - \lambda^{-\frac{l}{p} k_x} \left(1 + \frac{k_x}{x}\right)^n h(x+k_x, \lambda).$$

In consequence of (2)

$$(5) \quad J(x, \lambda) = J_1(x, \lambda) + J_2(x, \lambda),$$

$$(5a) \quad J_1(x, \lambda) = \left[ -h_0(x) - h_1(x) \lambda^{-\frac{l}{p}} - \dots - h_{\rho-1}(x) \lambda^{-\left(\frac{\rho-1}{p}\right)} \right] + \\ + \left[ -\left(1 + \frac{1}{x}\right)^n h_0(x+1) \lambda^{-\frac{l}{p}} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n h_1(x+1) \lambda^{-\left(\frac{l+1}{p}\right)} - \dots \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n h_{\rho-1}(x+1) \lambda^{-\left(\frac{l+\rho-1}{p}\right)} \right] + \\ \dots \\ + \left[ -\left(1 + \frac{k_x}{x}\right)^n h_0(x+k_x) \lambda^{-\frac{l}{p} k_x} - \left(1 + \frac{k_x}{x}\right)^n h_1(x+k_x) \lambda^{-\left(\frac{lk_x+1}{p}\right)} - \dots \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{k_x}{x}\right)^n h_{\rho-1}(x+k_x) \lambda^{-\left(\frac{lk_x+\rho-1}{p}\right)} \right],$$

$$(5b) \quad J_2(x, \lambda) = -h_\rho(x, \lambda) \lambda^{-\frac{\rho}{p}} - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n h_\rho(x+1, \lambda) \lambda^{-\left(\frac{l+\rho}{p}\right)} - \dots \\ - \left(1 + \frac{k_x}{x}\right)^\rho h_\rho(x+k_x, \lambda) \lambda^{-\left(\frac{lk_x+\rho}{p}\right)}.$$

There exists a number  $r_2 (> r_1)$  so that, for all  $x$  in  $\Gamma_\varepsilon (|x| \geq r_2)$ ,  $lk_x > \rho - 1$ . On the other hand, for  $x$  in  $\Gamma_\varepsilon$  we have  $k_x/|x| < 1$  so that

$$(6) \quad \left| \left(1 + \frac{i}{x}\right)^n \right| < s2^n, \quad [x \text{ in } \Gamma_\varepsilon; i = 1, \dots, k_x].$$

Here  $h_i = Rh$  if  $Rh \geq 0$ ; if  $Rh < 0$  we take  $h_i = 0$ .

Moreover, the functions  $(1 + i/x)^n$  ( $i = 1, \dots, k_x$ ) will be expressible in negative integral powers of  $x$ . Accordingly, from (5a) it follows that, for  $x$

---

(1) Each term in the second member of (4) will represent a discontinuous function. However, their sum will be continuous.

in  $\Gamma_\varepsilon(|x| \geq r_2)$ ,

$$(7) \quad J_1(x, \lambda) = \eta_0(x) + \eta_1(x)\lambda^{-\frac{1}{p}} + \dots + \eta_{\rho-1}(x)\lambda^{-\left(\frac{\rho-1}{p}\right)} + \lambda^{-\frac{\rho}{p}} \eta_{1;\rho}(x, \lambda).$$

Here the coefficients  $\eta_0(x), \dots, \eta_{\rho-1}(x)$  are given by

$$(7a) \quad \eta_{x+l+\beta}(x) = -h_{x+l+\beta}(x) - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^h h_{(x-1)l+\beta}(x+1) - \dots - \left(1 + \frac{\alpha}{x}\right)^h h_\rho(x+\alpha)$$

$[\alpha = 0, 1, \dots, \alpha' = 1; \beta = 0, 1, \dots, l-1; \alpha = \alpha'; \beta = 0, 1, \dots, \beta']$  (4)

and they are consequently defined in  $\Gamma_\varepsilon(|x| \geq r_2)$ . In this region they satisfy in the ordinary sense asymptotic relations of the form

$$(7b) \quad \eta_\gamma(x) \sim F_\rho\text{-series} \quad [\gamma = 0, 1, \dots, \rho-1].$$

The last term in (7) consists of the sum of those terms in (5a) which are multiplied by the powers  $\lambda^{-(\rho+\nu)/p}$  ( $\nu = 0, 1, \dots$ ). On letting  $b(\rho)$  denote the greatest of the numbers  $h_r$  ( $r = 0, \dots, \rho-1$ ),  $b_\rho$  and on using (6), (2a) and (2b) it follows that for  $x$  in  $\Gamma_\varepsilon(|x| \geq r_2)$  and for  $\lambda$  in  $R(|\lambda| \geq \lambda_0 > 1)$

$$(8) \quad \begin{aligned} |\lambda^{-\rho/p} \eta_{1;\rho}(x, \lambda)| < s2^h b(\rho) |x|^\xi \left\{ \left[ |\lambda|^{-\frac{\rho}{p}} + \dots + |\lambda|^{-\left(\frac{l-1+\rho}{p}\right)} \right] + \right. \\ \left. + \left[ |\lambda|^{-\frac{\rho}{p}} + \dots + |\lambda|^{-\left(\frac{2l-1+\rho}{p}\right)} \right] + \dots + \left[ |\lambda|^{-\frac{\rho}{p}} + \dots + |\lambda|^{-\left(\frac{\alpha_1 l-1+\rho}{p}\right)} \right] + \right. \\ \left. + \left[ |\lambda|^{-\frac{(\alpha_1+1)l}{p}} + \dots + |\lambda|^{-\left(\frac{(\alpha_1+1)l-1+\rho}{p}\right)} \right] + \dots + \left[ |\lambda|^{-\frac{k_x l}{p}} + \dots + |\lambda|^{-\left(\frac{k_x l-1+\rho}{p}\right)} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Let

$$g = 1 + |\lambda_0|^{-\frac{1}{p}} + |\lambda_0|^{-\frac{2}{p}} + \dots; \quad g_1 = 1 + |\lambda_0|^{-\frac{l}{p}} + |\lambda_0|^{-\frac{2l}{p}} + \dots$$

Then (8) is seen to imply

$$(8a) \quad \begin{aligned} \left| \lambda^{-\frac{\rho}{p}} \eta_{1;\rho}(x, \lambda) \right| < s2^h b(\rho) |x|^\xi \left\{ \alpha_1 g \left| \lambda^{-\frac{\rho}{p}} + g g_1 \left| \lambda^{-\left(\frac{\alpha_1+1}{p} \cdot l\right)} \right. \right\} \\ [x \text{ in } \Gamma_\varepsilon(|x| \geq r_2); \lambda \text{ in } R]. \end{aligned}$$

Here the last term within the brackets, involved in the second number of (8a), is present only if  $lk_x - (\rho-1) \geq l - \beta'$ . Thus

$$(9) \quad |\eta_{1;\rho}(x, \lambda)| < b_1(\rho) |x|^\xi \quad [x \text{ in } \Gamma_\varepsilon(|x| \geq r_2); \lambda \text{ in } R].$$

From (5b) by virtue of (6) and (2b) it follows that

$$(10) \quad \begin{aligned} |J_2(x, \lambda)| < s2^h b_\rho |x|^\xi \left[ \left| \lambda^{-\frac{\rho}{p}} + |\lambda|^{-\left(\frac{l+\rho}{p}\right)} + \dots + |\lambda|^{-\left(\frac{lk_x+\rho}{p}\right)} \right| \right] \\ < b_2(\rho) |x|^\xi |\lambda|^{-\frac{\rho}{p}} \quad [b_2(\rho) = s2^h g_1; x \text{ in } \Gamma_\varepsilon(|x| \geq r_2); \lambda \text{ in } R]. \end{aligned}$$

(4) We express  $\rho-1$  in the form  $\alpha'l + \beta'$  ( $\alpha', \beta'$  integers;  $\alpha' \geq 0; 0 \leq \beta' < l-1$ ). The subscript  $\alpha$  varies from 0 to  $\alpha'$ . For every  $x$  such that  $0 \leq \alpha \leq \alpha' - 1$  the subscript  $\beta$  varies from 0 to  $l-1$ ; for  $\alpha = \alpha'$ ,  $\beta$  varies from 0 to  $\beta'$ .

In consequence of (4a), (5), (7), (9) and (10) it is concluded that

$$(11) \quad \int_{l_x} = \lambda^{-\frac{l}{p}x} x^h \left[ \eta_0(x) + \eta_1(x) \lambda^{-\frac{1}{p}} + \dots + \eta_{\rho-1}(x) \lambda^{-\left(\frac{\rho-1}{p}\right)} + \lambda^{-\frac{\rho}{p}} \eta'_\rho(x, \lambda) \right],$$

$$(11a) \quad |\eta'_\rho(x, \lambda)| \leq \eta'_\rho |x|^\xi \quad [x \text{ in } \Gamma_\varepsilon(|x| \geq r_2); \lambda \text{ in } R],$$

where the  $\eta_\gamma(x)$  ( $\gamma = 0, \dots, \rho - 1$ ) satisfy (7a) and (7b).

Consider now the last integral displayed in (4),

$$(12) \quad \int_L = \lambda^{-\frac{l}{p}x} \lambda^{-\frac{\rho}{p}} \varphi(x, \lambda),$$

$$(12a) \quad \varphi(x, \lambda) = \int_L \frac{\lambda^{l \cdot (x-t) + \rho} |x| t^h h(t, \lambda) dt}{1 - e^{2\pi\sqrt{-1}(x-t)}}.$$

The following is noted. For  $t$  on  $L$  and for  $x$  in  $\Gamma_\varepsilon$  we have

$$(13) \quad |1 - e^{2\pi\sqrt{-1}(x-t)}| > f_1 > 0.$$

Moreover, on taking account of (2), (2a), (2b) it is seen that

$$(13a) \quad |t^h h(t, \lambda)| < f_2 \quad (x \text{ in } \Gamma_\varepsilon; t \text{ on } L; \lambda \text{ in } R).$$

On the other hand, on letting  $\bar{\lambda}$  denote the angle of  $\lambda$ , we have

$$(13b) \quad \left| \lambda^{\frac{l(x-t)+\rho}{p}} \right| = e^{\frac{l}{p} [R(x-t) \log |\lambda| - I(x-t) \bar{\lambda}]} < f_3$$

$$[t \text{ on } L; \lambda \text{ in } R; x \text{ in } \Gamma_\varepsilon(|x| \geq r_3 \geq r_2)],$$

provided  $r_3$  is taken, depending only on  $\rho$ , sufficiently great so that

$$(14) \quad lR(x-t) < -\rho \quad (x \text{ in } \Gamma_\varepsilon(|x| \geq r_3); t \text{ on } L).$$

The truth of (13b) will follow by (14) and because  $\bar{\lambda}$  and  $|I(x-t)|$  are bounded for the indicated values of the variables. On observing that the length of the path  $L$  is bounded, the inequalities (13), (13a) and (13b) are seen to imply

$$(15) \quad |\varphi(x, \lambda)| \leq \varphi \quad [x \text{ in } \Gamma_\varepsilon(|x| \geq r_3); \lambda \text{ in } R].$$

Accordingly, in consequence of (4), (11), (11a), (12) and (15) there exists a solution of (1) of the form

$$(16) \quad y(x, \lambda) = \lambda^{-\frac{l}{p}x} x^h \left[ \eta_0(x) + \eta_1(x) \lambda^{-\frac{1}{p}} + \dots + \eta_{\rho-1}(x) \lambda^{-\left(\frac{\rho-1}{p}\right)} + \lambda^{-\frac{\rho}{p}} \psi_\rho(x, \lambda) \right]$$

where

$$(16a) \quad |\psi_\rho(x, \lambda)| \leq \psi_\rho |x|^\xi; \quad [x \text{ in } \Gamma_\varepsilon(|x| \geq r_3); \lambda \text{ in } R] \quad (1).$$

(1)  $\xi_1 = \xi$  if  $Rh \geq 0$ ;  $\xi_1 = \xi - Rh$  if  $Rh < 0$ .

The above results will be formulated as follows.

LEMMA 2. — Consider the equation (1), (1a), (1b) specified at the beginning of this section. Depending on  $\rho$  there exists a positive number  $r_3 (> r_1)$  so that (1) has a solution  $y(x, \lambda)$  satisfying an asymptotic relation

$$(17) \quad y(x, \lambda) \asymp \lambda^{-\frac{1}{p}x} x^n \left[ \eta_0(x) + \eta_1(x) \lambda^{-\frac{1}{p}} + \dots \right]$$

$$[x \text{ in } \Gamma_\varepsilon(|x| \geq r_3); \lambda \text{ in } R]$$

to  $\rho$  terms in  $\lambda$  [cf. (16), (16a), (7a), (7b)]. Here  $\Gamma_\varepsilon$  is a subregion of  $\Gamma$  (cf. the italics following (2b)).

4. Iterations. — With the equation (A) one may associate the matrix system

$$(B) \quad Y(x+1, \lambda) = D(x, \lambda)Y(x, \lambda),$$

$$D(x, \lambda) = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_n(x, \lambda), & \dots, & -a_1(x, \lambda) \end{pmatrix} = (d_{i,j}(x, \lambda)).$$

If a matrix  $Y(x, \lambda) = (y_{i,j}(x, \lambda))$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) constitutes a matrix solution of (B) then necessarily

$$(1) \quad (y_{i,j}(x, \lambda)) = (y_j(x+i-1, \lambda)),$$

and the  $y_j(x, \lambda)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) will form a complete set of solutions of (A). On the other hand, if a set of functions  $y_j(x, \lambda)$  constitutes a full set of solutions of (A) the matrix  $(y_{i,j}(x, \lambda))$ , defined by (1), will satisfy (B) <sup>(1)</sup>. Corresponding to (B) we shall have a formal matrix system

$$(B^*) \quad S(x+1, \lambda) = D^*(x, \lambda)S(x, \lambda), \quad S(x, \lambda) = (s_{i,j}(x, \lambda)), \quad D^*(x, \lambda) = (d_{i,j}^*(x, \lambda)).$$

Here  $D^*(x, \lambda)$  is defined as  $D(x, \lambda)$  with the functions  $a_{n-k}(x, \lambda)$  replaced by the double series  $a_{n-k}^*(x, \lambda)$ ,

$$(2) \quad a_{n-k}^*(x, \lambda) = \lambda^{m_k} \sum_{\gamma=0}^{\infty} \alpha_{n-k,\gamma}^*(x) \lambda^{-\gamma} \quad [k=0, 1, \dots, n],$$

respectively [cf. (1; § 1); (1a; § 1)].

Now according to Lemma 1 (§ 2) the equation (A) (that is, (A\*)) possesses  $n$  distinct formal solutions  $s_j(x, \lambda)$  [ $j = 1, \dots, n$ ; (5; § 2)]. The coefficients of various powers of  $\lambda$  in these series are functions of  $x$  which, as indicated in (25; § 2), are asymptotic to certain series  $\sigma_j^{*r}(x)$ . Throughout this section, unless stated otherwise,  $s_j(x, \lambda)$  will have a modified significance. The involved

(1) The elements in a column will constitute a solution.

functions  $\sigma_j^r(x)$  ( $r = 0, 1, \dots; j = 1, \dots, n$ ) are to be replaced by the corresponding series  $\sigma_j^{*r}(x)$ . Thus, the  $s_j(x, \lambda)$  will be, so to say, solutions formal in both variables and they will constitute a set of solutions of the formal equation

$$(3) \quad \sum_{k=0}^n a_{n-k}^*(x, \lambda) s(x+k, \lambda) = 0,$$

associated with the system (B\*). In view of (1) the connection between the solutions of (3) and those of (B\*) is obvious. Thus, on letting  $p$  denote the l. c. m. of the  $p_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ), involved in the  $s_j(x, \lambda)$ , a formal matrix solution of (B\*) may be written as follows:

$$(4) \quad S(x, \lambda) = (s_{i,j}(x, \lambda)) = (\lambda^{c_j} x x^{\sigma_j} \sigma_{i,j}(x, \lambda)) \quad [i, j = 1, \dots, n].$$

Here the  $pc_j$  are integers such that

$$(4a) \quad M_1 = c_1 = \dots = c_{n_1} < M_2 = c_{n_1+1} = \dots = c_{n_2} < M_3 = c_{n_2+1} = \dots \\ \dots < M_x = c_{n_{x-1}+1} = \dots = c_{n_x} (n_x = n)$$

and

$$(4b) \quad \sigma_{i,j}(x, \lambda) = \sum_{\beta=0}^{\infty} \sigma_{i,j:\beta}(x) \lambda^{-\frac{\beta}{p}},$$

$$(4c) \quad \sigma_{i,j:\beta}(x) = F_{g(j)}\text{-series} \quad [\text{cf. Def. 2; } \S 2].$$

The determinant  $|S(x, \lambda)|$  will not formally vanish. That is, in the formal development

$$(5) \quad e^{-(c_1+\dots+c_n)x} x^{-(\sigma_1+\dots+\sigma_n)} |S(x, \lambda)| = |\sigma_{i,j}(x, \lambda)| = \sum_{\beta, \gamma=0}^{\infty} \sigma_{i,j:\beta, \gamma} x^{-\beta} \lambda^{-\frac{\gamma}{p}}$$

not all the coefficients vanish. Logarithms will not enter in the last member of (5) because in the determinant of the second member the columns can be combined so as to eliminate them (4). The elements of the inverse of  $S(x, \lambda)$  are

$$(6) \quad S^{-1}(x, \lambda) = (s_{i,j}(x, \lambda)) = (\lambda^{-c_i} x x^{-\sigma_i + \bar{\beta}} \lambda^{\bar{\gamma}} p \bar{\sigma}_{i,j}(x, \lambda)) \\ [\text{integers } \beta, \bar{\gamma}; \bar{\beta} \geq 0; \bar{\gamma} \geq 0],$$

where

$$(6a) \quad \bar{\sigma}_{i,j}(x, \lambda) = \sum_{\beta=0}^{\infty} \bar{\sigma}_{i,j:\beta}(x) \lambda^{-\frac{\beta}{p}},$$

$$(6b) \quad \bar{\sigma}_{i,j:\beta}(x) = F_{g(j)}\text{-series} \quad [i, j = 1, \dots; \beta = 0, 1, \dots].$$

Here  $g(j)$  can be considered independent of  $\beta$ .

---

(4) This presupposes that the logarithms enter in a particular manner, which is the case. This can be established, for instance, by noting that  $S(x, \lambda)$  satisfies a certain formal difference equation of order one.

Let  $m$  and  $\nu$  be suitably great integers. Let

$$(7) \quad \tau_{i,j}(x, \lambda) = \sum_{\beta=0}^m \tau_{i,j;\beta}(x) \lambda^{-\frac{\beta}{p}} \quad [i, j = 1, \dots, n],$$

where  $\tau_{i,j;\beta}(x)$  denotes  $\sigma_{i,j;\beta}(x)$  (cf. (4c)), with only the powers

$$x^0, x^{-1}, \dots, x^{-\nu}$$

retained in the involved power series. We form the matrix

$$(8) \quad T(x, \lambda) = (t_{i,j}(x, \lambda)) = (\lambda^{c_j} x x^{\sigma_j} \tau_{i,j}(x, \lambda)).$$

With  $m$  and  $\nu$  sufficiently great  $|T(x, \lambda)| \neq 0$ . For the elements of the inverse of  $T(x, \lambda)$  we have

$$(8a) \quad T^{-1}(x, \lambda) = (\bar{t}_{i,j}(x, \lambda)) = (\lambda^{-c_i} x x^{-\sigma_i} + \bar{\beta} \lambda^{\bar{\gamma}/p} \bar{\tau}_{i,j}(x, \lambda)),$$

$$(8b) \quad \bar{\tau}_{i,j}(x, \lambda) = \sum_{\beta=0}^{\infty} \bar{\tau}_{i,j;\beta}(x) \lambda^{-\frac{\beta}{p}},$$

$$(8c) \quad \bar{\tau}_{i,j;\beta}(x) = \text{convergent } F_{g(j)}\text{-series,}$$

provided  $|x| \geq x_0$ ,  $|\lambda| \geq \lambda_0$ , where  $x_0$  and  $\lambda_0$  are sufficiently great. The series (8b) will all converge. In view of the manner in which the coefficients of the various powers of  $x$  and  $\lambda$  are formally computed in (6a), (6b) and in (8a), (8b) it becomes evident that there exist numbers  $w_1$  and  $w_2$  such that the following holds.

In the series  $\bar{\tau}_{i,j;\beta}(x)$  ( $\beta = 0, 1, \dots, w_1; i, j = 1, \dots, n$ ) the coefficients of the powers  $x^0, x^{-1}, \dots, x^{-w_2}$ , entering in the involved  $F_{g(j)}$ -series are correspondingly the same as those in the series  $\bar{\sigma}_{i,j;\beta}(x)$ . Moreover,  $w_1$  and  $w_2$  can be made as great as desired by a suitable choice of the functions (7).

A matrix  $B(x, \lambda) = (b_{i,j}(x, \lambda))$  will be defined by the relation

$$(9) \quad T(x + 1, \lambda) = B(x, \lambda)T(x, \lambda).$$

On noting that  $B(x, \lambda) = T(x + 1, \lambda)T^{-1}(x, \lambda)$  while, formally,

$$D^*(x, \lambda) = S(x + 1, \lambda)S^{-1}(x, \lambda)$$

it is observed that the functions  $b_{i,j}(x, \lambda)$  can be expressed as convergent series in  $x$  and  $\lambda$  of the same form as the  $d_{i,j}^*(x, \lambda)$ . In fact, there exist integers  $\eta_1, \eta_2$  such that, on writing

$$(10) \quad d_{i,j}^*(x, \lambda) = \lambda^{m_i} x^{c_i} \sum_{\beta=0}^{\infty} d_{i,j;\beta}^*(x) \lambda^{-\beta} \quad [i, j = 1, \dots, n],$$

$$(10a) \quad d_{i,j;\beta}^*(x) = \sum_{\delta=0}^{\infty} d_{i,j;\beta,\delta}^* x^{-\beta} \quad [\text{the } m_{i,j}, c_{i,j} \text{ integers}],$$

we shall have

$$(11) \quad b_{i,j}(x, \lambda) = \lambda^{m_i} x^{c_{i,j}} \sum_{\beta=0}^{\infty} b_{i,j;\beta}(x) \lambda^{-\beta} \quad [i, j = 1, \dots, n],$$

$$(11a) \quad b_{i,j;\beta}(x) = \sum_{\delta=0}^{\infty} b_{i,j;\beta,\delta} x^{-\delta}$$

where

$$(12) \quad b_{i,j;\beta,\delta} = d_{i,j;\beta,\delta}^* \\ [i, j = 1, \dots, n; \beta = 0, 1, \dots, \eta_1; \delta = 0, 1, \dots, \eta_2].$$

By a suitable choice of  $T(x, \lambda)$  the numbers  $\eta_1, \eta_2$  can be made arbitrarily great. In consequence of (12) and in view of the fact that, in a sense specified before,  $D(x, \lambda) \sim D^*(x, \lambda)$  ( $x$  in  $K$ ;  $\lambda$  in  $R$ ) to any number of terms in  $x$  and  $\lambda$ , it follows that

$$(13) \quad D(x, \lambda) = B(x, \lambda) + C(x, \lambda) = T(x + 1, \lambda)T^{-1}(x, \lambda) + C(x, \lambda),$$

$$(13a) \quad C(x, \lambda) = (c_{i,j}(x, \lambda)) = (x^{-\gamma_1} \lambda^{-\gamma_2} \gamma_{i,j}(x, \lambda))$$

where

$$(13b) \quad |\gamma_{i,j}(x, \lambda)| \leq \gamma \quad [x \text{ in } K; \lambda \text{ in } R].$$

In this connection it is essential to note that the integers  $\gamma_1, \gamma_2$  increase indefinitely with the numbers  $m$  and  $\nu$ , involved in  $T(x, \lambda)$ .

We shall now apply a modification of the fruitful method of iterations, originally due to BIRKHOFF. Define the matrix

$$(14) \quad Y_r(x, \lambda) = (y_{r;i,j}(x, \lambda)) = D(x - 1, \lambda)D(x - 2, \lambda) \dots D(x - r, \lambda)T(x - r, \lambda).$$

We have

$$(14a) \quad Y_r(x, \lambda) = T(x, \lambda) \prod_{k=1}^r [T^{-1}(x - k + 1, \lambda)D(x - k, \lambda)T(x - k, \lambda)].$$

It follows by (13) that

$$(15) \quad T^{-1}(x + 1, \lambda)D(x, \lambda)T(x, \lambda) = I + F(x, \lambda),$$

$$(15a) \quad F(x, \lambda) = T^{-1}(x + 1, \lambda)C(x, \lambda)T(x, \lambda) = (f_{i,j}(x, \lambda)).$$

Furthermore, in view of (13a), (13b), (8), (8a), (8b), (8c),

$$(16) \quad f_{i,j}(x, \lambda) = \sum_{\tau_1=1}^n \sum_{\tau_2=1}^n \lambda^{-c_i x} (x + 1)^{\sigma_i + \bar{\beta}} \lambda^{-c_i + \frac{\bar{\gamma}}{p}} \tau_{i,\tau_1}(x + 1, \lambda) x^{-\gamma_1} \lambda^{-\gamma_2} \cdot \\ \cdot \gamma_{\tau_1, \tau_2}(x, \lambda) \lambda^{c_j x} x^{\sigma_j} \tau_{\tau_2, j}(x, \lambda).$$

In consequence of (16), (13b) and of the character of the functions  $\tau_{i,j}(x, \lambda)$ ,  $\bar{\tau}_{i,j}(x, \lambda)$  we have

$$(16a) \quad f_{i,j}(x, \lambda) = \lambda^{(c_i - c_j)x} x^{-f_1} \lambda^{-f_2} \varphi_{i,j}(x, \lambda), \quad |\varphi_{i,j}(x, \lambda)| \leq \varphi \quad [x \text{ in } K; \lambda \text{ in } R],$$

where the real numbers  $f_1, f_2$  increase indefinitely with  $m$  and  $\nu$ . Thus, from (14a) we obtain

$$(17) \quad T^{-1}(x, \lambda) Y_r(x, \lambda) = \prod_{k=1}^r [I + F(x - k, \lambda)] = I + \sum_{s=1}^r L_{(s)}(x, \lambda),$$

$$(17a) \quad L_{(s)}(x, \lambda) = (l_{(s):i,j}(x, \lambda)) = \left( \sum_{k_1 < k_2 < \dots < k_s=1}^r F(x - k_1, \lambda) \dots F(x - k_s, \lambda) \right),$$

$$(17b) \quad l_{(s):i,j}(x, \lambda) = \sum_{k_1, \dots, k_s} \sum_{\tau_1, \dots, \tau_{s-1}=1}^n \cdot f_{i, \tau_1}(x - k_1, \lambda) f_{\tau_1, \tau_2}(x - k_2, \lambda) \dots f_{\tau_{s-1}, j}(x - k_s, \lambda) = \\ = \sum_{k_1, \dots, k_s} \sum_{\tau_1, \dots, \tau_{s-1}} \lambda^{-sf_2} W^{(x)}(x - k_1)^{-f_1} (x - k_2)^{-f_1} \dots (x - k_s)^{-f_1} \cdot \\ \cdot \varphi_{i, \tau_1}(x - k_1, \lambda) \varphi_{\tau_1, \tau_2}(x - k_2, \lambda) \dots \varphi_{\tau_{s-1}, j}(x - k_s, \lambda),$$

where, with  $c_{\alpha, \beta}$  denoting  $c_\alpha - c_\beta$ ,

$$(17c) \quad W(x) = c_{\tau_1, i}(x - k_1) + c_{\tau_2, \tau_1}(x - k_2) + c_{\tau_3, \tau_2}(x - k_3) + \dots \\ \dots + c_{\tau_{s-1}, \tau_{s-2}}(x - k_{s-1}) + c_{j, \tau_{s-1}}(x - k_s) = c_{j, i}x + c_{i, \tau_1}k_1 + c_{\tau_1, \tau_2}k_2 + \\ + c_{\tau_2, \tau_3}k_3 + \dots + c_{\tau_{s-2}, \tau_{s-1}}k_{s-1} + c_{\tau_{s-1}, j}k_s = c_{j, i}x + c_{i, j}k_1 + \\ + (k_2 - k_1)c_{\tau_1, j} + (k_3 - k_2)c_{\tau_2, j} + (k_4 - k_3)c_{\tau_3, j} + \dots + (k_s - k_{s-1})c_{\tau_{s-1}, j}.$$

Since the integers  $k_1, k_2 - k_1, \dots, k_s - k_{s-1}$  are all positive and since, by (4a), the real numbers  $c_{i, j}, c_{\tau_1, j}, c_{\tau_2, j}, \dots, c_{\tau_{s-1}, j}$  are all non positive, provided  $n_{x-1} < j \leq n$ , from (17c) it will follow that

$$(18) \quad |\lambda^{W(x)}| \leq |e^{c_{j, i}x}| \quad [|\lambda| \geq 1; j = n_{x-1} + 1, \dots, n].$$

Thus, by virtue of (18) and (16a), (17b) will yield the inequalities

$$(19) \quad |l_{(s):i,j}(x, \lambda)| \leq |e^{c_{j, i}x}| |\lambda|^{-sf_2\varphi^s} \sum_{k_1, \dots, k_s} \sum_{\tau_1, \dots, \tau_{s-1}} |x - k_1|^{-f_1} \dots |x - k_s|^{-f_1} = \\ = \frac{1}{n} |e^{c_{j, i}x}| |\lambda|^{-sf_2(n\varphi)^s} \sum_{k_1 < \dots < k_s} |x - k_1|^{-f_1} \dots |x - k_s|^{-f_1} \quad [n_{x-1} < j \leq n]$$

which are valid for  $x$  in  $K$  and for  $\lambda$  in  $R$ . Hence

$$(19a) \quad \left| \sum_{s=1}^r l_{(s):i,j}(x, \lambda) \right| \leq \frac{1}{n} |\lambda^{c_{j, i}x}| h_{r:i,j}(x) \quad [n_{x-1} < j \leq n],$$

$$(20) \quad h_{r:i,j}(x, \lambda) = \sum_{s=1}^r \sum_{k_1 < \dots < k_s=1}^r \left( \frac{n\varphi}{|\lambda|^{f_2} |x - k_1|^{f_1}} \right) \dots \left( \frac{n\varphi}{|\lambda|^{f_2} |x - k_s|^{f_1}} \right) = \\ = -1 + \prod_{s=1}^r \left( 1 + \frac{n\varphi}{|\lambda|^{f_2} |x - s|^{f_1}} \right) < -1 + \prod_{s=1}^r e^{\left( \frac{n\varphi}{|\lambda|^{f_2} |x - s|^{f_1}} \right)} < -1 + e^{g(x, \lambda)},$$

$$(20a) \quad g(x, \lambda) = \frac{n\varphi}{|\lambda|^{f_2}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{|x - s|^{f_1}}.$$



Now by a certain well known inequality of BIRKHOFF

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{|x-s|^{f_1}} < \frac{\pi}{|x|^{f_1-1}} \quad [ |x| \geq 1; Rx \leq 0].$$

Accordingly, in consequence of (20) and (20a)

$$(21) \quad h_{r:,i,j}(x, \lambda) < -1 + e^{\pi n \varphi} |\lambda|^{-f_2} |x|^{-f_1+1} < nh |\lambda|^{-f_2} |x|^{-f_1+1}$$

[ $x$  in  $K(Rx \leq 0)$ ;  $\lambda$  in  $R$ ;  $r = 1, 2, \dots$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = n_{x-1} + 1, \dots, n$ ];

here  $h$  is independent of  $r, x$  and  $\lambda$ .

Whence, by (17), (19a) and (21),

$$(22) \quad (z_{r:,i,j}(x, \lambda) = T^{-1}(x, \lambda)Y_r(x, \lambda) = (\delta_{i,j} + \lambda^{-f_2} x^{-f_1+1} \lambda^{c_j} J_{r:,i,j}(x, \lambda)),$$

$$(22a) \quad |J_{r:,i,j}(x, \lambda)| < h \quad [x \text{ in } K(Rx \leq 0); \lambda \text{ in } R; i = 1, \dots, n; n_{x-1} < j \leq n].$$

Here  $(\delta_{i,j}) = I$ . Hence

$$(23) \quad y_{r:,i,j}(x, \lambda) = \sum_{H=1}^n \lambda^{c_H} x^{\sigma_H} \tau_{i,H}(x, \lambda) z_{r:,H,j}(x, \lambda) = \lambda^{c_j} x^{\sigma_j} \tau_{i,j}(x, \lambda) +$$

$$+ \lambda^{-f_2} x^{-f_1+1} \sum_{H=1}^n \lambda^{c_H} x^{\sigma_H} \tau_{i,H}(x, \lambda) \lambda^{c_j} J_{r:,H,j}(x, \lambda) =$$

$$= \lambda^{c_j} x^{\sigma_j} [\tau_{i,j}(x, \lambda) + \lambda^{-f_2} x^{-f_1} \beta_{r:,i,j}(x, \lambda)]$$

where  $f' = f_1 - \bar{f}$  ( $\bar{f}$  independent of  $f_1, f_2, r$ ) and, in consequence of (22a),

$$(23a) \quad |\beta_{r:,i,j}(x, \lambda)| \leq \beta$$

[ $x$  in  $K(Rx \leq 0)$ ;  $\lambda$  in  $R$ ;  $i = 1, \dots, n$ ;  $j = n_{x-1} + 1, \dots, n$ ;  $r = 1, 2, \dots$ ],

the constant  $\beta$  being independent of  $r$ . One can now conclude that *the elements in the last  $n - n_{x-1}$  columns of the matrix  $Y_r(x, \lambda)$ , defined by (14), possess limits*

$$(24) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} y_{r:,i,j}(x, \lambda) = y_{i,j}(x, \lambda) = \lambda^{c_j} x^{\sigma_j} [\tau_{i,j}(x, \lambda) + \lambda^{-f_2} x^{-f_1} \beta_{i,j}(x, \lambda)],$$

where

$$(24a) \quad |\beta_{i,j}(x, \lambda)| \leq \beta \quad [x \text{ in } K(Rx \leq 0); \lambda \text{ in } R; i = 1, \dots, n; n_{x-1} < j \leq n].$$

For a fixed  $j$  these elements will be constituent elements of a solution of (B). This is a consequence of the matrix relation

$$Y_{r+1}(x+1, \lambda) = D(x, \lambda)Y_r(x, \lambda) = \left( \sum_H d_{i,H}(x, \lambda) y_{r:,H,j}(x, \lambda) \right)$$

and of the fact of existence of the limits for  $j = n_{x-1} + 1, \dots, n$ . Now  $f_2$  and  $f'$  may be both made as great as desired by a suitable choice of  $T(x, \lambda)$ . Suppose  $T'(x, \lambda)$  is a choice of  $T(x, \lambda)$  giving numbers  $f_2', f''$  ( $f_2' = f_2$ ;  $f'' > f'$ )

in place of  $f_2$  and  $f'$ , respectively. Let  $Y_r(x, \lambda) = (y'_{r; \dots; i, j}(x, \lambda))$  be the matrix corresponding to  $Y_r(x, \lambda)$ . By (14)

$$(25) \quad Y_r^{-1}(x, \lambda)Y_r(x, \lambda) = T^{-1}(x - r, \lambda)T'(x - r, \lambda) = (p_{i, j}(x - r, \lambda));$$

$$(25a) \quad (p_{i, j}(x, \lambda)) = I + T^{-1}(x, \lambda)(T'(x, \lambda) - T(x, \lambda)).$$

On making use of (4a) and of (8) and (8a) (as applied to  $T(x, \lambda)$  and to  $T'(x, \lambda)$ ) from (25a) one can obtain the relations

$$(26) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} p_{i, j}(x - r, \lambda) = \delta_{i, j} \quad [x \text{ in } K(Rx \leq 0); \lambda \text{ in } R]$$

which are valid for  $j = n_{z-1} + 1, \dots, n$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Hence, by (25) and (26),

$$(27) \quad \lim_r y'_{r; \dots; i, j}(x, \lambda) = y'_{i, j}(x, \lambda) = y_{i, j}(x, \lambda) \quad [i = 1, \dots, n; j = n_{z-1} + 1, \dots, n].$$

It follows therefore that the limits  $y_{i, j}(x, \lambda)$  ( $n_{z-1} < j \leq n$ ), involved in (24), are asymptotic to the corresponding formal series to infinitely many terms (that is, in the ordinary sense) in so far as  $x$  is concerned.

An analogous property in general cannot be stated with respect to the parameter. The preceding results may be formulated as follows.

LEMMA 3. — *Consider a full set of formal series solutions, associated with the equation (A; § 1) of Lemma 1 (§ 2)*

$$(28) \quad s_j(x, \lambda) = \lambda^{c_j} x^{\sigma_j} \left[ \sigma_{j; 0}(x) + \sigma_{j; 1}(x) \lambda^{-\frac{1}{p}} + \dots \right]$$

[ $j = 1, \dots, n$ ; the  $c_j$  defined in (4a); the  $\sigma_{j; r}(x) x^{\sigma_j}$  are the  $\sigma_j^r(x)$  of Lemma 1]. Here the  $\sigma_j^r(x)$  are functions analytic in  $K(x \neq \infty)$ , satisfying in the ordinary sense asymptotic relations of the type

$$(28a) \quad \sigma_{j; r}(x) \in F_{q(j)}^r\text{-series}$$

$[r = 0, 1, \dots; j = 1, \dots, n; x \text{ in } K; \text{ cf. Def. 1 (§ 2)}].$

The iteration process specified in this section will yield a set of  $(n - n_x)$  linearly independent solutions  $y_j(x, \lambda)$ , analytic in  $x$  for  $x$  in  $K(Rx < 0; x \neq \infty)$  and analytic in  $\lambda$  for  $\lambda$  in  $R(\lambda \neq \infty)$  such that

$$(29) \quad y_j(x, \lambda) = \lambda^{c_j} x^{\sigma_j} \left[ \sigma_{j; 0}(x) + \dots + \sigma_{j; \rho-1}(x) \lambda^{-\left(\frac{\rho-1}{p}\right)} + \sigma_{j; \rho}(x, \lambda) \lambda^{-\frac{\rho}{p}} \right],$$

where

$$(29a) \quad |\sigma_{j; \rho}(x, \lambda)| < \sigma |x|^\xi$$

$[\xi > 0; j = n_{z-1} + 1, \dots, n; x \text{ in } K(Rx \leq 0); \lambda \text{ in } R].$

That is, for these solutions asymptotic relations will be satisfied, in the indicated regions, in the ordinary sense in  $x$ , and to  $\rho$  terms in  $\lambda$ . The

integer  $\rho$  can be made as great as desired by a suitable choice of the matrix  $T(x, \lambda)$ , employed in the iterations.

The above Lemma continues to hold when the coefficients of (A) satisfy the asymptotic relations (1; § 1) to a finite number of terms (in  $\lambda$ ), say  $\nu$  terms. In this case the iterations will give asymptotic relations valid to  $\rho$  terms (in  $\lambda$ ), where  $\rho$  can be made arbitrarily great<sup>2</sup> whenever  $\nu$  can be indefinitely increased.

**5. The Existence Theorem.** — It will be convenient to introduce the following Definition.

**DEFINITION 2.** — *A difference polynomial  $L_n(x, \lambda; y)$  (where  $a_0(x, \lambda) = 1$ ), of the character specified in § 1, as well as the equation  $L_n(x, \lambda; y) = 0$  will be said to be of type T. In the case when the asymptotic relations (1; § 1) are to  $\rho$  terms with respect to the parameter the above polynomial and the corresponding equation will be said to be of the type T. These definitions will also be used when in place of integral powers of  $\lambda$  there are integral powers of  $\lambda^p$  (integer  $p \geq 1$ ).*

Throughout this section the displayed asymptotic relations are with respect to  $\lambda$ . Moreover, in the involved formal series the coefficients are functions asymptotic in the ordinary sense to certain series containing  $x$  only. In the sequel  $L^*(x, \lambda; y)$  will denote the formal difference polynomial obtained by replacing the coefficients in  $L(x, \lambda; y)$  (of type T or  $T_\rho$ ) by the corresponding formal series (in  $\lambda$ ). An equation  $L^*(x, \lambda; y) = 0$  corresponding to an equation  $L(x, \lambda; y) = 0$ , of type T (or  $T_\rho$ ), will be said to be of type  $T^*$ ; the polynomial  $L^*(x, \lambda; y)$  will be also said to be of type  $T^*$ .

Consider a polynomial  $L_n^*(x, \lambda; y)$  of type  $T^*$  and of order  $n (\geq 2)$ . Let  $L_\tau^*(x, \lambda; y)$ , of type  $T^*$ , be of order  $\tau (1 \leq \tau < n)$  <sup>(1)</sup>. A formal factorization

$$(1) \quad L_n^*(x, \lambda; y) \equiv L_n^* \cdot (L_\tau^*(x, \lambda; y)),$$

where

$$(1a) \quad L_n^*(x, \lambda; y) = \sum_k^n \alpha_{n-k}(x, \lambda) y(x+k), \quad L_\tau^*(x, \lambda; y) = \sum_k^\tau \beta_{\tau-k}(x, \lambda) y(x+k).$$

$$(1b) \quad L_{n-\tau}^*(z) \equiv L_{n-\tau}^*(x, \lambda; z) = \sum_{k=0}^{n-\tau} \gamma_{n-\tau-k}(x, \lambda) z(x+k) \quad [\gamma_0(x, \lambda) \equiv 1],$$

will take place if and only if the sets of relations (2), (2a), given below, are

<sup>(1)</sup> The coefficient of  $y(x+n)$ , in  $L_n^*$ , and that of  $y(x+\tau)$ , in  $L_\tau^*$ , is unity.

compatible:

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \gamma_1(x, \lambda) = \alpha_1(x, \lambda) - \beta_1(x + n - \tau, \lambda), \\
 & \gamma_2(x, \lambda) = \alpha_2(x, \lambda) - \beta_2(x + n - \tau, \lambda) - \gamma_1(x, \lambda)\beta_1(x + n - \tau - 1, \lambda), \\
 & \gamma_3(x, \lambda) = \alpha_3(x, \lambda) - \beta_3(x + n - \tau, \lambda) - \gamma_1(x, \lambda)\beta_2(x + n - \tau - 1, \lambda) - \\
 & \quad - \gamma_2(x, \lambda)\beta_1(x + n - \tau - 2, \lambda), \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2a) \quad & \gamma_{n-\tau}(x, \lambda) = \alpha_n(x, \lambda) \div \beta_\tau(x, \lambda), \\
 & \gamma_{n-\tau-1}(x, \lambda) = [\alpha_{n-1}(x, \lambda) - \gamma_{n-\tau}(x, \lambda)\beta_{\tau-1}(x, \lambda)] \div \beta_\tau(x + 1, \lambda), \\
 & \gamma_{n-\tau-2}(x, \lambda) = [\alpha_{n-2}(x, \lambda) - \gamma_{n-\tau}(x, \lambda)\beta_{\tau-2}(x, \lambda) - \gamma_{n-\tau-1}(x, \lambda)\beta_{\tau-1}(x + 1, \lambda)] \div \\
 & \quad \div \beta_\tau(x + 2, \lambda), \\
 & \dots \dots \dots
 \end{aligned}$$

In the case of compatibility either set may serve to determine  $L_{n-\tau}^*(z)$  <sup>(1)</sup> in terms of the coefficients of  $L_n^*$  and of  $L_\tau^*$ .

If  $L_\tau^*(x, \lambda; y)$  of type  $T^*$ , with coefficients in integral powers of  $\lambda^{p_1}$  (integer  $p_1 \geq 1$ ), is a factor of a polynomial  $L_n^*(x, \lambda; y)$ , of type  $T^*$  and with coefficients in integral powers of  $\lambda^{p_2}$  (integer  $p_2 \geq 1$ ), the polynomial  $L_{n-\tau}^*(z)$  (such that (1) holds) will be also of type  $T^*$ ; its coefficients will be in powers of  $\lambda^{\frac{1}{p}}$  ( $p = l. c. m. \text{ of } p_1 \text{ and } p_2$ ). The truth of this statement follows in consequence of (2) and (2a).

The equation  $L_n^*(x, \lambda; s) = 0$  possesses  $n$  linearly independent solutions (28; § 4),  $s_j(x, \lambda)$  ( $j = 1, \dots, n$ ). The involved  $c_j$  are of the form

$$c_j = M_\nu = l_\nu/p_\nu \quad [n_{\nu-1} + 1 \leq j \leq n_\nu; \nu = 1, \dots, \alpha; n_\alpha = n],$$

where the  $l_\nu$  are integers and the fractions  $l_\nu/p_\nu$  are in lowest terms. These numbers satisfy (4a; § 4). In all the power series involved in the  $s_j(x, \lambda)$  the number  $p$  for convenience will be taken equal to the l. c. m. of  $p_1, p_2, \dots, p_\alpha$ . In the sequel the coefficients of the various difference polynomials will be looked upon as in integral powers of  $\lambda^{\frac{1}{p}}$ .

(1) Since, by hypothesis,  $L_\tau^*(x, \lambda; y)$  is of type  $T^*$  in the series  $\beta_\tau(x, \lambda)$  not all the coefficients of the various powers of  $\lambda$  will be identically zero. Moreover, the first non vanishing coefficient will be asymptotic to a series (in  $x$ ) with constant coefficients, not all of which are zero. Consequently  $1/\beta_\tau(x, \lambda)$  will be a series with the same properties.

Form the polynomial  $L_{n-n_{x-1}}^*(x, \lambda; s)$  (with  $\lambda$  for simplicity not displayed in the determinants, below),

$$\begin{aligned}
 (3) \quad L_{n-n_{x-1}}^*(x, \lambda; s) &= \begin{vmatrix} s(x+n-n_{x-1}) & \dots & s(x) \\ s_n(x+n-n_{x-1}) & \dots & s_n(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{n_{x-1}+1}(x+n-n_{x-1}) & \dots & s_{n_{x-1}+1}(x) \end{vmatrix} \div \\
 &\div \begin{vmatrix} s_n(x+n-n_{x-1}-1) & \dots & s_n(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ s_{n_{x-1}+1}(x+n-n_{x-1}-1) & \dots & s_{n_{x-1}+1}(x) \end{vmatrix} = \\
 &= \sum_{k=0}^{n-n_{x-1}} \beta_{n-n_{x-1}-k}(x, \lambda) s(x+k) \quad [{}_1\beta_0(x, \lambda) = 1].
 \end{aligned}$$

It is noted that, on one hand,  $L_{\tau}^*(x, \lambda; s)$  is of type  $T^*$ ; on the other hand, the equation

$$(3a) \quad L_{n-n_{x-1}}^*(x, \lambda; s) = 0$$

has in common with the equation  $L_n^*(x, \lambda; s) = 0$  a set of  $n - n_{x-1}$  solutions,  $s_j(x, \lambda)$  ( $j = n_{x-1} + 1, \dots, n$ ). In view of the linear independence of these series and in consequence of (3) the equation (3a) is, of course, effectively of order  $n - n_{x-1}$ . Moreover, every formal solution of (3a) will also satisfy  $L_n^*(x, \lambda; s) = 0$ . Hence there exists a factorization

$$(4) \quad L_n^*(x, \lambda; s) = L_{n_{x-1}}^*(L_{n-n_{x-1}}^*(x, \lambda; s)).$$

By virtue of the satisfied conditions of the italicized statements following (2a)

$$(5) \quad L_{n_{x-1}}^*(\gamma) = L_{n_{x-1}}^*(x, \lambda; \gamma) = \sum_{k=0}^{n_{x-1}} \gamma_{n_{x-1}-k}(x, \lambda) \gamma(x+k) \quad [{}_1\gamma_0(x, \lambda) = 1]$$

is a difference polynomial of type  $T^*$  and of order  $n_{x-1}$ . The related equation

$$(5a) \quad L_{n_{x-1}}^*(x, \lambda; \gamma) = 0$$

will possess  $n_{x-1}$  distinct solutions

$$(5b) \quad \gamma_j(x, \lambda) = \lambda^{-\frac{H_1}{p}} L_{n_{x-1}}^*(x, \lambda; \gamma_j(x, \lambda)) = \lambda^{c_j x} x^{\sigma_j} \tilde{\gamma}_j(x, \lambda),$$

$$(5c) \quad \tilde{\gamma}_j(x, \lambda) = \gamma_{j:0}(x) + \gamma_{j:0}(x) \lambda^{-\frac{1}{p}} + \dots \quad [j = 1, \dots, n_{x-1}].$$

Here  $H_1$  is the smallest integer for which the indicated form may be obtained <sup>(1)</sup>. The coefficients in (5c) and in analogous series to follow (that

(1) A similar statement is made for the subsequent  $H_v$  ( $v = 2, 3, \dots$ ).

is, in the series  ${}_v\tilde{\eta}_j(x, \lambda)$  ( $v = 2, 3, \dots$ ) are functions asymptotic to certain  $F_{q(j)}$ -series (cf. Def. 1 (§ 2)).

More generally, in an entirely analogous manner the following is established.

There exists a polynomial

$$(6) \quad L_{n-n_{x-v}}^*(x, \lambda; s) = \sum_{k=0}^{n-n_{x-v}} {}_v\beta_{n-n_{x-v}-k}(x, \lambda) s(x+k)$$

of type  $T^*$  and of order  $n - n_{x-v}$ , such that the corresponding equation

$$(6a) \quad L_{n-n_{x-v}}^*(x, \lambda; s) = 0$$

is satisfied by  $s_j(x, \lambda)$  ( $j = n_{x-v} + 1, \dots, n$ ). Moreover,

$$(7) \quad L_n^*(x, \lambda; s) = L_{n_{x-v}}^*(L_{n-n_{x-v}}^*(x, \lambda; s)),$$

$$(8) \quad L_{n_{x-v}(v\eta)}^* = \sum_{k=0}^{n_{x-v}} {}_v\gamma_{n_{x-v}-k}(x, \lambda) {}_v\eta(x+k),$$

where  $L_{n_{x-v}(v\eta)}^*$  is of type  $T^*$  and is of order  $n_{x-v}$ . The corresponding equation

$$(8a) \quad L_{n_{x-v}(v\eta)}^* = 0$$

has a set of  $n_{x-v}$  solutions

$$(8b) \quad {}_v\eta_j(x, \lambda) = \lambda^{-\frac{H_v}{p}} L_{n-n_{x-v}}^*(x, \lambda; s_j(x, \lambda)) = \lambda^{c_j} x^{s_j} {}_v\tilde{\eta}_j(x, \lambda),$$

$$(8c) \quad {}_v\tilde{\eta}_j(x, \lambda) = {}_v\eta_{j:0}(x) + {}_v\eta_{j:1}(x) \lambda^{-\frac{1}{p}} + \dots \quad [j = 1, \dots, n_{x-v}].$$

The above facts, specified by (6), (6a), (7), (8), (8a), (8b), (8c), hold for  $v = 1, 2, \dots, \alpha - 1$ . With this in mind we shall now proceed to construct a full set of solutions of the equation (A; § 1). These solutions will be analytic in  $x$ , for  $x$  in  $K(Rx \leq 0; x \neq \infty)$  and they will be analytic in  $\lambda$  for  $\lambda$  in  $R(\lambda \neq \infty)$ .

By Lemma 3 (§ 4) (A) possesses  $n - n_{x-1}$  solutions  $y_j(x, \lambda)$ , satisfying asymptotic relations

$$(9) \quad y_j(x, \lambda) \sim s_j(x, \lambda) \quad [j = n_{x-1} + 1, \dots, n; \lambda \text{ in } R; x \text{ in } K(Rx \leq 0)]$$

to  $\rho$  terms <sup>(1)</sup>. Form the polynomial

$$(10) \quad L_{n-n_{x-1}}(x, \lambda; y) = \sum_{k=0}^{n-n_{x-1}} b_{n-n_{x-1}-k}(x, \lambda) y(x+k)$$

<sup>(1)</sup> To begin with, these solutions will be supposed to be so constructed so that  $\rho$  is suitably great (cf. Lemma 3).

by replacing  $s(x, \lambda)$  and the  $s_j(x, \lambda)$  in  $L_{n-n_{x-1}}^*(x, \lambda; s)$ , as defined by (3), by  $y(x)$  and the  $y_j(x, \lambda)$  ( $j = n_{x-1} + 1, \dots, n$ ), respectively. The equation

$$(10a) \quad L_{n-n_{x-1}}(x, \lambda; y) = 0$$

will be satisfied by the functions  $y_j(x, \lambda)$  ( $j = n_{x-1} + 1, \dots, n$ ); both (10) and (10a) will be of type  $T_{\rho_i}$  ( $\rho_i < \rho$ ;  $\rho_i \rightarrow \infty$  with  $\rho$ ). In fact, the involved coefficients will be asymptotic to  $\rho_i$  terms to the corresponding coefficients of  $L_{n-n_{x-1}}^*(x, \lambda; s)$ . Since the  $y_j(x, \lambda)$  ( $j = n_{x-1} + 1, \dots, n$ ) are linearly independent and since they satisfy both (A) and (10a) necessarily there will be a factorization

$$(11) \quad L_n(x, \lambda; y) = L_{n_{x-1}}(L_{n-n_{x-1}}(x, \lambda; y)),$$

where

$$(11a) \quad L_{n_{x-1}}(z) = L_{n_{x-1}}(x, \lambda; z) = \sum_{k=0}^{n_{x-1}} c_{n_{x-1}-k}(x, \lambda) z(x+k),$$

The latter polynomial will be of type  $T_{g_i}$  ( $g_i < \rho$ ;  $g_i \rightarrow \infty$  with  $\rho$ ) and its coefficients will be correspondingly asymptotic, to  $g_i$  terms, to the coefficients involved in (5). Lemma 3 will be applicable to the equation

$$(11b) \quad L_{n_{x-1}}(z) = 0.$$

We obtain a linearly independent set of  $n_{x-1} - n_{x-2}$  solutions  $z_j(x, \lambda)$ ,

$$(12) \quad z_j(x, \lambda) \sim \lambda^c x^{\sigma_j} \tilde{\eta}_j(x, \lambda) \quad [\text{cf. (5c)}; j = n_{x-2} + 1, \dots, n_{x-1}],$$

where the asymptotic relations are to  $z_i$  ( $z_i < \rho$ ;  $z_i \rightarrow \infty$  with  $\rho$ ) terms. A solution of the non-homogeneous equation

$$(13) \quad L_{n-n_{x-1}}(x, \lambda; y) = z_k(x, \lambda) \quad [n_{x-2} < k \leq n_{x-1}]$$

will also satisfy the equation (A). An application of (18), (18a) will give

$$(14) \quad y_k(x, \lambda) = \sum_{\gamma=n_{x-1}+1}^n y_{\gamma}(x, \lambda) \mathfrak{S}_{\gamma, n}(t+1, \lambda) z_k(t, \lambda)$$

where

$$(14a) \quad (\bar{y}_{n_{x-1}+i, n_{x-1}+j}(x, \lambda)) = (y_{n_{x-1}+j}(x+i-1, \lambda))^{-1} [i, j = 1, \dots, n - n_{x-1}].$$

For the sake of simplicity in writing use will be made of the symbol  $[x, \lambda; \rho]$  which in a generic sense will denote a function, defined for  $x$  in  $K(Rx \leq 0)$  or  $\Gamma$  (cf. § 3), as the case may be, and defined for  $\lambda$  in  $R$ . Moreover, this function will be of the form

$$\sigma_0(x) + \sigma_1(x)\lambda^{-\frac{1}{p}} + \dots + \sigma_{\rho-1}(x)\lambda^{-\left(\frac{\rho-1}{p}\right)} + \sigma_{\rho}(x, \lambda)\lambda^{-\frac{\rho}{p}} \quad [\rho \geq 1].$$

Here the  $\sigma_i(x)$  satisfy in the ordinary sense asymptotic relations

$$\sigma_i(x) = x^\sigma \cdot (F_q\text{-series}) \quad [x \text{ in } K(Rx \leq 0) \text{ or in } \Gamma; i = 0, \dots, \rho - 1]$$

and

$$|\sigma_\rho(x, \lambda)| \leq \sigma_\rho |x|^H \quad [H \geq R\sigma; x \text{ in } K(Rx \leq 0) \text{ or in } \Gamma; \lambda \text{ in } R].$$

Thus, in consequence of (9), the elements involved in (14a) are given by expressions

$$(15) \quad \bar{y}_{n_{x-1}+i, n_{x-1}+j}(x+1, \lambda) = \lambda^{-c_{n_{x-1}+i}} x^{-\sigma_{n_{x-1}+i}} \lambda^{-1} \bar{y}_{i, j}(x, \lambda; \bar{\rho})$$

$[x \text{ in } K(Rx \leq 0); \bar{\rho} \rightarrow \infty \text{ with } \rho; \text{ integer } i, c \text{ independent of } \rho].$

By (15) and (12) the summand displayed in (14) is seen to be of the form

$$(15a) \quad \lambda^{-ct} t^\sigma \lambda^{-\frac{ic}{p}} [t, \lambda; \rho'] \quad [t \text{ in } K(Rt \leq 0)]$$

where  $c = c_i - c_k > 0$  ( $cp$  an integer),  $\sigma = \sigma_k - \sigma_i$  and  $\rho' \rightarrow \infty$  with  $\rho$ . Hence Lemma 2 (§ 3) is applicable for the purpose of evaluating the « sum » displayed in (14), giving

$$(16) \quad \sum_{t=x} \bar{y}_{r, n}(t+1, \lambda) z_k(t, \lambda) = \lambda^{(c_k - c_r)x} x^{\sigma_k - \sigma_r} \lambda^{-\frac{ic}{p}} [x, \lambda; \rho(1)]$$

$[x \text{ in } \Gamma(|x| \geq r(\rho(1))); \rho(1) \rightarrow \infty \text{ with } \rho; \rho(1) \leq \rho].$

The relations (16), (9) and (14) imply that, on discarding the factor  $\lambda^{-\frac{ic}{p}}$ ,

$$(17) \quad {}_i y_j(x, \lambda) = \lambda^{c_j} x^{\sigma_j} [x, \lambda; \rho(1)]$$

$[j = n_{x-2} + 1, \dots, n_{x-1}; x \text{ in } \Gamma(|x| \geq r(\rho(1)))].$

These functions constitute a set of  $n_{x-1} - n_{x-2}$  distinct solutions of (A). Together with the previously determined  $y_j(x, \lambda) = {}_i y_j(x, \lambda)$  ( $n_{x-1} < j \leq n$ ), we now have a set of  $n - n_{x-2}$  distinct solutions of (A),  ${}_i y_j(x, \lambda)$  ( $n_{x-2} < j \leq n$ ), which in the indicated sense [for  $x$  in  $\Gamma(|x| \geq r(\rho(1)))$ ] satisfy the asymptotic relations

$$(18) \quad {}_i y_j(x, \lambda) \asymp s_j(x, \lambda) \quad [j = n_{x-2} + 1, \dots, n; \lambda \text{ in } R]$$

where the  $s_j(x, \lambda)$  are formal series of the type specified before.

Suppose that there exist distinct solutions  ${}_{v-1} y_j(x, \lambda)$  satisfying the following asymptotic relations, to  $\rho(v-1)$  terms in  $\lambda$ ,

$$(19) \quad {}_{v-1} y_j(x, \lambda) \asymp s_j(x, \lambda)$$

$[j = n_{x-v} + 1, \dots, n; x \text{ in } \Gamma(|x| \geq g_{v-1}); \lambda \text{ in } R; \rho(v-1) \rightarrow \infty \text{ with } \rho].$



Here  $\nu$  is some integer such that  $2 \leq \nu \leq \alpha - 1$ . We form the polynomial

$$(20) \quad L_{n-n_{\alpha-\nu}}(x, \lambda; \nu y) \equiv \sum_{k=0}^{n-n_{\alpha-\nu}} \nu b_{n-n_{\alpha-\nu}-k}(x, \lambda) \nu y(x+k) =$$

$$= \begin{vmatrix} \nu_{-1} y_n(x+n-n_{\alpha-\nu}-1, \lambda) & \dots & \nu_{-1} y_n(x, \lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ \nu_{-1} y_{n_{\alpha-\nu}+1}(x+n-n_{\alpha-\nu}-1, \lambda), \dots & \dots & \nu_{-1} y_{n_{\alpha-\nu}+1}(x, \lambda) \end{vmatrix}^{-1}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} \nu_{-1} y(x+n-n_{\alpha-\nu}, \lambda) & \dots & \nu_{-1} y(x, \lambda) \\ \nu_{-1} y_n(x+n-n_{\alpha-\nu}, \lambda) & \dots & \nu_{-1} y_n(x, \lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ \nu_{-1} y_{n_{\alpha-\nu}+1}(x+n-n_{\alpha-\nu}, \lambda), \dots & \dots & \nu_{-1} y_{n_{\alpha-\nu}+1}(x, \lambda) \end{vmatrix}.$$

In view of (19) *this polynomial will be of type  $T_{g(\nu)}(g(\nu) \rightarrow \infty$  with  $\rho$ ), provided  $x$  is in  $\Gamma(|x| \geq r_\nu)$ .* In fact, we note that the formal polynomial (6) is defined, as a ratio of determinants, precisely in the same manner as  $L_{n-n_{\alpha-\nu}}(x, \lambda; y)$ , except that the  $\nu_{-1} y_j(x, \lambda)$  are replaced by the  $s_j(x, \lambda)$ , respectively. In consequence of (18), the coefficients of the second member of (20) are correspondingly asymptotic to the coefficients of the second member of (6). This makes the truth of the preceding statement in italics immediately evident. An analytic factorization will take place,

$$(21) \quad L_n(x, \lambda; \nu y) = L_{n_{\alpha-\nu}}(L_{n-n_{\alpha-\nu}}(x, \lambda; \nu y)).$$

The polynomial

$$(21a) \quad L_{n_{\alpha-\nu}}(\nu z) = \sum_{k=0}^{n_{\alpha-\nu}} \nu c_{n_{\alpha-\nu}-k}(x, \lambda) \nu z(x+k)$$

will be of type  $T_{g_1(\nu)}(g_1(\nu) \rightarrow \infty$  with  $\rho$ ) and it will be of order  $n_{\alpha-\nu}$ , provided  $x$  is in  $\Gamma(|x| \geq r'_\nu)$ . The inference regarding (21) is a consequence of the satisfied relations of compatibility. These relations are finite in number and they determine the coefficients of (21a) in terms of those of (20) and of (A) in a manner analogous to that in which the coefficients of (8) are defined in terms of those of (6) and of  $L_n^*$ . Whence it will follow that the asymptotic relations, satisfied by the coefficients of  $L_n$  and of  $L_{n-n_{\alpha-\nu}}$ , necessarily imply that the coefficients involved in (21a) are asymptotic to the corresponding coefficients of  $L_{n_{\alpha-\nu}}^*$ . Moreover, by choosing  $\rho$  sufficiently great the latter asymptotic relations can be made valid to as many terms (with regard to  $\lambda$ ) as desired.

Applying iterations to the equation

$$(22) \quad L_{n_{\alpha-\nu}}(\nu z) = 0$$

we find  $n_{x-v} - n_{x-v-1}$  distinct solutions  ${}_v z_j(x, \lambda)$  such that

$$(22a) \quad {}_v z_j(x, \lambda) \sim \lambda^{c_j} x^{\sigma_j} {}_v \tilde{\eta}_{ij}(x, \lambda) \\ [j = n_{x-v-1} + 1, \dots, n_{x-v}; \text{ cf. (8b), (8c)}]$$

where the asymptotic relations are to  $z_v$  ( $z_v < \rho$ ;  $z_v \rightarrow \infty$  with  $\rho$ ) terms, provided  $x$  is in  $\Gamma(|x| \geq r_v)$ . Consider the non-homogeneous equation

$$(23) \quad L_{n_x - n_{x-v}}(x, \lambda; {}_v y) = {}_v z_k(x, \lambda) \quad [n_{x-v-1} < k \leq n_{x-v}].$$

It has a solution

$$(24) \quad {}_v y_k(x, \lambda) = \sum_{\gamma = n_{x-v} + 1}^n {}_v y_\gamma(x, \lambda) \mathfrak{S}_{\substack{v-1 \bar{y}_\gamma, n \\ t=x}}(t+1, \lambda) {}_v z_k(t, \lambda) \\ [n_{x-v-1} < k \leq n_{x-v}]$$

where

$$(24a) \quad ({}_{v-1} \bar{y}_{n_{x-v} + i, n_{x-v} + j}(x, \lambda)) = (y_{n_{x-v} + j}(x + i - 1, \lambda))^{-1} \\ [i, j = 1, \dots, n - n_{x-v}].$$

In consequence of (21) and (22) this function will also satisfy (A). On taking account of (22a) and of (19) the summand, displayed in (24), is seen to be of the form

$$(25) \quad \lambda^{(c_k - c_\gamma)t} t^{\sigma_k - \sigma_\gamma} \lambda^{-\frac{\nu c}{p}} [t, \lambda; \rho^\nu] \quad [\nu c \text{ an integer}],$$

provided  $x$  is in  $\Gamma(|x| \geq r_v)$ , where  $r_v$  is the greater one of the numbers  $r_v', r(\rho(\nu - 1))$  (1). Here  $c_k - c_\gamma < 0$ ,  $(c_k - c_\gamma)p$  is an integer and  $\rho^\nu \rightarrow \infty$  with  $\rho$ . Discarding, as is possible, the factor  $\lambda^{-\nu c/p}$  the « sums » in (24) can be evaluated with the aid of Lemma 2. It follows then that

$$(26) \quad \mathfrak{S}_{t=x} {}_{v-1} \bar{y}_\gamma, n(t+1, \lambda) {}_v z_k(t, \lambda) = \lambda^{(c_k - c_\gamma)x} x^{\sigma_k - \sigma_\gamma} [x, \lambda; \rho(\nu)] \\ [x \text{ in } \Gamma(|x| \geq r(\rho(\nu))); \rho(\nu) \rightarrow \infty \text{ with } \rho].$$

By (24), (26) and (19)

$$(27) \quad {}_v y_k(x, \lambda) \sim s_k(x, \lambda) \quad [j = n_{x-v-1} + 1, \dots, n; x \text{ in } \Gamma(|x| \geq g_v)]$$

to  $\rho(\nu)$  terms in  $\lambda$ . The functions involved in (27) form a set of distinct solutions of (A). *By induction it follows that such a set exists for  $\nu = \alpha - 1$ .* Thus, a fundamental set of solutions of (A) has been obtained. It is to be noted that in constructing a full set of solutions of (A) use is made of a succession of summations. Every such set arises in the process of solving a non-homogeneous difference equation, giving asymptotic relations valid in a

(1)  $r_v''$  depends on  $\rho$  and, in general, increases with  $\rho$ .

region  $\Gamma$ . Thus, a finite succession of regions  $\Gamma$  is obtained. *Every such region, beginning with the second, is entirely interior to the preceding region.*

The results obtained above can be formulated as follows.

**EXISTENCE THEOREM.** — *Consider the equation (A; § 1) and the corresponding full set of formal solutions  $s_j(x, \lambda)$  [ $j = 1, \dots, n$ ; cf. (28; § 4), (28a; § 4)]. The coefficients in these series are defined in a region  $K$ , specified in § 1. We let  $\Gamma$  denote any subregion <sup>(1)</sup> of  $K$  for which  $c_1 \leq \text{Ix} \leq c_2$ .*

*There exists a fundamental set of solutions  $y_j(x, \lambda)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) such that the asymptotic relations*

$$(28) \quad y_j(x, \lambda) \sim s_j(x, \lambda) \quad [j = 1, \dots, n; x \text{ in } \Gamma; \lambda \text{ in } R]$$

*hold in the following sense. Given  $\rho$ , however large, there exists a number  $r (> 0)$  such that, for  $j = 1, \dots, n$ , we have*

$$(28a) \quad y_j(x, \lambda) = \lambda^{c_j} x^{\sigma_j} \left[ \sigma_{j:0}(x) + \sigma_{j:1}(x) \lambda^{-\frac{1}{p}} + \dots + \sigma_{j:\rho-1}(x) \lambda^{-\left(\frac{\rho-1}{p}\right)} + \sigma_{j,\rho}(x, \lambda) \lambda^{-\frac{\rho}{p}} \right]$$

*where*

$$(28b) \quad |\sigma_{j,\rho}(x, \lambda)| < b_\rho |x|^\xi \quad [\xi > 0; \lambda \text{ in } R],$$

*provided  $x$  is in the part of  $\Gamma$  for which  $|x| \geq r$ . The functions  $\sigma_{j:0}(x), \dots, \sigma_{j:\rho-1}(x)$  are asymptotic to infinitely many terms in  $x$ , for  $x$  in  $\Gamma$ , to certain  $F_q$ -series (cf. Def. 1 (§ 2)). These solutions, in general, depend on  $\rho$ . In every finite part of the specified regions they are analytic.*

Entirely analogous results are obtained when  $K$  extends to the right and is such that whenever  $x$  is in  $K$  so is  $x + 1$ .

**6. The non-homogeneous problem.** — With the aid of the Existence Theorem, established above, it is possible to solve the non-homogeneous equation

$$(1) \quad L_n(x, \lambda, y) = b(x, \lambda)$$

where  $L_n(x, \lambda; y)$  is the same difference polynomial as is (A; § 1) and  $b(x, \lambda)$  is a function of the same character as are the coefficients in (1; § 1); that is

$$(2) \quad b(x, \lambda) \sim \beta(x, \lambda) = \lambda^m \sum_{\nu=0}^{\infty} \beta_\nu(x) \lambda^{-\nu} \quad [m \text{ an integer}]$$

where the asymptotic relation is in the ordinary sense with respect to  $\lambda$ , for  $\lambda$  in  $R$ . The involved coefficients  $\beta_\nu(x)$  are functions analytic in  $K(x \neq \infty)$

---

<sup>(1)</sup> The upper and lower boundaries of  $\Gamma$  are to have no points in common with the boundary of  $K$  (at least sufficiently far from the origin).

and satisfying asymptotic relations, valid in the ordinary sense in  $K$ ,

$$(2a) \quad \beta_\nu(x) \asymp x^{\delta_\nu} [\beta_\nu^0 + \beta_\nu^1 x^{-1} + \dots] = \beta_\nu^*(x) \\ [\nu = 0, 1, \dots; \text{the } \delta_\nu \text{ integers}].$$

Moreover,  $b(x, \lambda)$  is to be analytic in  $x$  and  $\lambda$  in every finite part of the specified regions.

Let the  $y_j(x, \lambda)$  ( $j = 1, \dots, n$ ) constitute a fundamental set of solutions, referred to in the Existence Theorem (cf. (28), (28a), (28b) of § 5). A solution of (1) will be given by the formula (cf. (18), (18a), (18b) of § 2)

$$(3) \quad y(x, \lambda) = \sum_{\gamma=1}^n y_\gamma(x, \lambda) \mathfrak{S}_{t=x} \bar{y}_{\gamma,n}(t+1, \lambda) b(t, \lambda)$$

where

$$(3a) \quad (\bar{y}_{i,j}(t, \lambda)) = (y_j(t+i-1, \lambda))^{-1} \quad [i, j = 1, \dots, n].$$

In consequence of the asymptotic character of the  $y_j(x, \lambda)$  (in  $\Gamma$  for  $|x| \geq r$ ) we have

$$(4) \quad \bar{y}_{i,j}(t+1, \lambda) = \lambda^{-c_i} t^{-\sigma_i} \lambda^{-H' |x|} [t, \lambda; \bar{\rho}] \\ [i, j = 1, \dots, n; t \text{ in } \Gamma(|t| \geq r_1 > r); \lambda \text{ in } R; H' \text{ an integer; } \bar{\rho} \rightarrow \infty \text{ with } \rho].$$

Here and in the sequel  $[t, \lambda; \bar{\rho}]$  is defined by the italicized statement following (14a; § 5). By (4) and (2)

$$(5) \quad \bar{y}_{\gamma,n}(t+1, \lambda) b(t, \lambda) = \lambda^{-c_\gamma} t^{-\sigma_\gamma} \lambda^{H |x|} [t, \lambda; \bar{\rho}] \\ [\gamma = 1, \dots, n; t \text{ in } \Gamma(|t| \geq r_1); \lambda \text{ in } R; H = mp - H'; c_\gamma = l_\gamma/p \text{ (cf. 4a; § 4)}].$$

Lemma 2 enables evaluation of a sum, displayed in (3), for every  $\gamma$  for which  $l_\gamma \geq 1$ . It will be necessary to solve the problem of summation for the cases when  $l_\gamma \leq 0$ .

Thus, consider the equation

$$(6) \quad y(x+1) - y(x) = \lambda^{\frac{l}{p} x} h(x, \lambda) \quad [\text{integer } l \geq 0]$$

where

$$(6a) \quad h(x, \lambda) = h^0(x) + \dots + h^{g-1}(x) \lambda^{-\left(\frac{g-1}{p}\right)} + h^g(x, \lambda) \lambda^{-\frac{g}{p}} \quad [g > l]$$

$$(6b) \quad h^i(x) = x^h h_i(x) \asymp x^h H_i(x) = x^h \cdot (F_g\text{-series}), \quad h^g(x, \lambda) = x^h h_g(x, \lambda) \\ [i = 0, \dots, g-1; x \text{ in } \Gamma(|x| \geq r_1); \lambda \text{ in } R],$$

$$(6c) \quad |h_g(x, \lambda)| < b_g |x|^\xi \quad [x \text{ in } \Gamma(|x| \geq r_1; \lambda \text{ in } R; \xi > 0].$$

Here the relations (6b) are in the ordinary sense. The function  $h(x, \lambda)$  is to be analytic in  $x$  and in  $\lambda$  in every finite part of the specified regions.

CASE I. —  $l = 0$ . Summing term by term we obtain a solution

$$(7) \quad y(x, \lambda) = \eta^0(x) + \dots + \eta^{g-1}(x)\lambda^{-\left(\frac{g-1}{p}\right)} + \eta^g(x, \lambda)\lambda^{-\frac{g}{p}}$$

where

$$(7a) \quad \eta^i(x) = \mathfrak{S}_{t=x} h^i(t) \quad [c = 0, 1, \dots, g - 1],$$

$$(7b) \quad \eta^g(x, \lambda) = \mathfrak{S}_{t=x} h^g(x, \lambda).$$

The sums (7a) can be evaluated so that the  $\eta^i(x)$  are analytic in  $\Gamma(|x| \geq r_1; x \neq \infty)$ , while we have, in the ordinary sense,

$$(8) \quad \eta^i(x) \sim x^{h+i} \cdot (F_{q+i}\text{-series}) \quad [i = 0, \dots, g - 1; x \text{ in } \Gamma].$$

The sum (7b) will be evaluated as follows:

$$(9) \quad \eta^g(x, \lambda) = \int_{L_x} \frac{h^g(t, \lambda) dt}{1 - e^{2\pi\sqrt{-1}(x-t)}} = \int_{l_x} + \int_L.$$

Here  $L_x$  is a path, formed as in § 3 and extending between  $x$  and  $x - 1$  (for  $x$  in  $\Gamma(|x| > r_1)$ ), in the part of  $\Gamma$  for which  $|x| \geq r_1$ . Depending on  $x$  the path  $L$  has a position  $L_1$  or  $L_2$  (cf. § 3). As in § 3, we define  $k_x (\geq 0)$  as an integer such that, when  $x$  is in  $\Gamma$  (to the left of  $L$ ), the points  $x + k_x$ ,  $x + k_x + 1$  are on the opposite sides of  $L$ . Let  $\Gamma_\varepsilon$  denote a subregion of  $\Gamma$  whose upper and lower boundaries are parallel to those of  $\Gamma$ ; these boundaries being slightly (by a distance  $\varepsilon$ ) interior to  $\Gamma$ . It is to be noted that, for  $x$  in  $\Gamma_\varepsilon(|x| > r_1)$  and for  $t$  on  $L$ , the function  $|1 - e^{2\pi\sqrt{-1}(t-x)}|$  satisfies (13; § 3). In consequence of this fact, of (6b) and of (6c) it follows that

$$(10) \quad \left| \int_L \right| \leq h' \quad [x \text{ in } \Gamma_\varepsilon(|x| > r_1); \lambda \text{ in } R].$$

The integral along  $l_x$  will yield the expression

$$(11) \quad \int_{l_x} = -h^g(x, \lambda) - h^g(x + 1, \lambda) - \dots - h^g(x + k_x, \lambda) = \eta^{1,g}(x, \lambda).$$

Let  $h' = Rh + \xi$  if  $Rh + \xi \geq 0$ ; otherwise, take  $h' = 0$ . In view of (6b) and of (6c) we then have

$$(11a) \quad |h^g(x + i, \lambda)| < b_g' |x + i|^{h'} \leq b_g' |x|^{h'} \\ [i = 0, 1, \dots, k_x; x \text{ in } \Gamma_\varepsilon \text{ to the left of } L; \lambda \text{ in } R].$$

The function  $\eta^{1,g}(x, \lambda)$ , defined in (11), accordingly satisfies the inequality

$$(12) \quad |\eta^{1,g}(x, \lambda)| < (k_x + 1)b_g' |x|^{h'} < b_g' |x|^{h'+1} \\ [x \text{ in } \Gamma_\varepsilon \text{ to the left of } L; \lambda \text{ in } R].$$

Thus, in view of (8), (9), (10), (11) and (12), it is concluded that *there exists a solution of (6), for the case when  $l = 0$ , of the form*

$$(13) \quad y(x, \lambda) = x^{h+l}[x, \lambda; g] \\ [x \text{ in } \Gamma_\varepsilon(|x| > r_1); \text{ cf. italics after (9); } \lambda \text{ in } E].$$

CASE II. —  $l > 0$ . We consider a formal equation, corresponding to (6),

$$(14) \quad s(x+1) - s(x) = \lambda^{\frac{l}{p}x} [h^0(x) + h^1(x)\lambda^{-\frac{1}{p}} + \dots]$$

where the  $h^i(x)$  ( $i = 0, 1, \dots$ ) are analytic in  $\Gamma(|x| \geq r_1; x \neq \infty)$  and satisfy relations (6b) in the ordinary sense for  $i = 0, 1, \dots$ . On substituting

$$(15) \quad s(x) = s(x, \lambda) = \lambda^{\frac{l}{p}x} \lambda^{-\frac{l}{p}} \eta(x, \lambda),$$

$$(15a) \quad \eta(x, \lambda) = \eta^0(x) + \eta^1(x)\lambda^{-\frac{1}{p}} + \dots$$

we obtain

$$(15b) \quad \eta^{2l+\gamma}(x) = h^{2l+\gamma}(x-1) + h^{(x-1)l+\gamma}(x-2) + \dots + h^\gamma(x-\alpha-1) \\ [\alpha = 0, 1, \dots; \gamma = 0, 1, \dots, l-1].$$

Write  $g-1 = \alpha_1 l + \gamma_1$ , where the integers  $\alpha_1, \gamma_1$  are such that  $\alpha_1 \geq 1$  and  $0 \leq \gamma_1 < l$ . Let  $r_2$  be the greater one of the numbers  $r_1, \alpha_1 + 1$ . By (15b) and (6b) it follows then that the  $\eta^i(x)$  ( $i = 0, 1, \dots, g-1$ ) are analytic in  $\Gamma(|x| \geq r_2; x \neq \infty)$  and that these functions satisfy, in the ordinary sense, asymptotic relations

$$(16) \quad \eta^i(x) \sim x^{h \cdot} (F_q\text{-series}) \quad [i = 0, \dots, g-1; x \text{ in } \Gamma(|x| \geq r_2)].$$

Form the function

$$(17) \quad t(x, \lambda) = \lambda^{\frac{l}{p}x} \lambda^{-\frac{l}{p}} \tau(x, \lambda),$$

$$(17a) \quad \tau(x, \lambda) = \eta^0(x) + \dots + \eta^{g-1}(x)\lambda^{-\left(\frac{g-1}{p}\right)}.$$

The transformation

$$(18) \quad y(x, \lambda) = t(x, \lambda) + z(x, \lambda)$$

will yield

$$(18a) \quad z(x+1, \lambda) - z(x, \lambda) = \lambda^{\frac{l}{p}x} h(x, \lambda) - t(x+1, \lambda) + t(x, \lambda) = \lambda^{\frac{l}{p}x} c(x, \lambda)$$

where

$$(18b) \quad c(x, \lambda) = h^g(x, \lambda)\lambda^{-\frac{g}{p}} + \eta^{g-l}(x)\lambda^{-\frac{g}{p}} + \dots + \eta^{g-l}(x)\lambda^{-\left(\frac{g+l-1}{p}\right)} + \bar{c}(x, \lambda),$$

$$(18c) \quad \bar{c}(x, \lambda) = \sum_{i=0}^{g-1} \lambda^{-\frac{i}{p}} [h^i(x) - \eta^i(x+1) + \eta^{i-l}(x)] \quad (1^4).$$

(<sup>4</sup>) For  $j > 0$  let  $\eta^{-j}(x) = 0$ .

Application of (15b) will give  $\bar{c}(x, \lambda) \equiv 0$ . Thus, by (6b), (6c) and (16) from (18) we have

$$(19) \quad c(x, \lambda) = \lambda^{-g/p} x^{h+\xi} c_1(x, \lambda),$$

$$(19a) \quad |c_1(x, \lambda)| \leq c \quad [x \text{ in } \Gamma(|x| \geq r_2); \lambda \text{ in } R].$$

The equation (18a) will possess an analytic solution

$$(20) \quad z(x, \lambda) = \lambda^{\frac{l}{p}(x-1)} c(x-1, \lambda) + \lambda^{\frac{l}{p}(x-2)} c(x-2, \lambda) + \dots = \lambda^{\frac{l}{p}x} \lambda^{-\frac{l}{p}} \lambda^{-\frac{g}{p}} J(x, \lambda),$$

$$J(x, \lambda) = (x-1)^{h+\xi} c_1(x-1, \lambda) + \lambda^{-\frac{l}{p}} (x-2)^{h+\xi} c_1(x-2, \lambda) + \dots$$

where, by virtue of (19a),

$$(20a) \quad |J(x, \lambda)| < c' |x|^{h_1+\xi} \left( \left| 1 - \frac{1}{x} \right|^{h_1+\xi} + |\lambda|^{-\frac{l}{p}} \left| 1 - \frac{2}{x} \right|^{h_1+\xi} + \dots \right) <$$

$$< c' |x|^{h_1+\xi} \left[ \left( 1 + \frac{1}{r_2} \right)^{h_1+\xi} + \lambda_0^{-\frac{l}{p}} \left( 1 + \frac{2}{r_2} \right)^{h_1+\xi} + \lambda_0^{-\frac{2l}{p}} \left( 1 + \frac{3}{r_2} \right)^{h_1+\xi} + \dots \right]$$

$$[x \text{ in } \Gamma(|x| \geq r_2); \lambda \text{ in } R(|x| \geq \lambda_0 > 1)].$$

Here  $h_1 = Rh$  if  $Rh + \xi \geq 0$ ; if  $Rh + \xi < 0$  we take  $h_1 + \xi = 0$ .

Now the series within the square brackets in the last member of (20a) converges. Therefore, in consequence of (20) and of (20a)

$$(21) \quad z(x, \lambda) = \lambda^{\frac{l}{p}x} \lambda^{-\frac{l}{p}} \lambda^{-\frac{g}{p}} x^{h+\xi} b(x, \lambda), \quad |b(x, \lambda)| < b$$

$$[x \text{ in } \Gamma(|x| \geq r_2); \lambda \text{ in } R].$$

Whence, by (18), (17), (17a), (16) and (21), *there exists a solution of (6), for the case when  $l > 0$ , of the form*

$$(22) \quad y(x, \lambda) = \lambda^{\frac{l}{p}x} \lambda^{-\frac{l}{p}} x^h [x, \lambda; g]$$

$$[x \text{ in } \Gamma(|x| > r_2); \lambda \text{ in } R]$$

where  $r_2$  depends on  $g$ .

Returning now to the non-homogeneous problem (1) use will be made of the summation methods outlined above and of the summation method of Lemma 2. With  $\rho$  sufficiently great the integer  $\bar{\rho}$ , involved in (5), will be greater than any of the integers  $-l_\gamma$  ( $\gamma = 1, \dots, n$ ). On taking account of (5) it follows that

$$(23) \quad \sum_{t=x} \bar{y}_{\gamma, n}(t+1, \lambda) b(t, \lambda) = \lambda^{-c_\gamma} x x^{-\sigma_\gamma+1} \lambda^{\frac{H}{p}} [x, \lambda; \bar{\rho}]$$

$$[\gamma = 1, \dots, n; x \text{ in } \Gamma_\varepsilon(|x| \geq r'_1 > r_1; \lambda \text{ in } R),$$

where  $r'$  may depend on  $\bar{\rho}$ . On using the asymptotic relations satisfied by

the  $y_\gamma(x, \lambda)$  ( $\gamma = 1, \dots, n$ ), substitution of (23) in (3) will give

$$(24) \quad y(x, \lambda) = \lambda^{\frac{H}{p}} x[x, \lambda; \rho] \\ [x \text{ in } \Gamma_\varepsilon(|x| \geq r'); \lambda \text{ in } R].$$

In view of the above results the following theorem can be stated.

**THEOREM.** — *Consider the non-homogeneous problem (1), (2), (2a). Let  $\Gamma$  be a region of the type defined in the Existence Theorem (§ 5). Let  $\rho$  be an integer, however large. The equation (1) will possess a solution  $y(x, \lambda)$ , depending on  $\rho$ , asymptotic to a certain series  $s(x, \lambda)$  in the following sense:*

$$(25) \quad y(x, \lambda) = \lambda^{\frac{H}{p}} x \left[ \sigma_0(x) + \sigma_1(x) \lambda^{-\frac{1}{p}} + \dots + \sigma_{\rho-1}(x) \lambda^{-\left(\frac{\rho-1}{p}\right)} + \sigma_\rho(x, \lambda) \lambda^{-\frac{\rho}{p}} \right].$$

Here the  $\sigma_i(x)$  ( $i = 0, 1, \dots, \rho - 1$ ) are functions asymptotic to infinitely many terms in  $x$ , for  $x$  in  $\Gamma$ , to certain  $F_g$ -series (cf. Def. 1; (§ 2)). Moreover,

$$(25a) \quad |\sigma_\rho(x, \lambda)| < b_\rho |x|^\xi \quad [\xi > 0; \lambda \text{ in } R],$$

provided  $x$  is in the part of  $\Gamma$  for which  $|x| \geq r$  ( $r$  depends on  $\rho$ ). This solution is analytic in  $x$  and in  $\lambda$ , in every finite part of the specified regions.



# Il problema di Dirichlet in domini infiniti e le equazioni del secondo tipo misto ellittico-paraboliche.

Memoria di MARIA CIBRARIO<sup>1</sup> (a Torino).

---

**Sunto.** - Si studia il problema di DIRICHLET in certi domini infiniti, in cui un punto può allontanarsi indefinitamente in una direzione soltanto; i risultati sono ottenuti mediante un cambiamento di variabili, che all'equazione di LAPLACE fa corrispondere una equazione del secondo tipo misto ellittico-parabolica. Si dimostrano così per tali equazioni svariati teoremi di esistenza e di unicità.

Lo studio del problema di Dirichlet in certi domini infiniti (che preciseremo in seguito), in cui un punto può allontanarsi indefinitamente in una direzione soltanto, rivela un legame inaspettato tra l'equazione di LAPLACE:

$$(A) \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

e una equazione che in un lavoro precedente <sup>(1)</sup> era classificata come una equazione del secondo tipo misto ellittico-parabolica. Infatti il cambiamento di variabili:

$$(1) \quad X = \frac{1}{x}, \quad Y = y,$$

muta la (A) nella:

$$(B) \quad X^4 u_{XX} + u_{YY} + 2X^3 u = 0;$$

se si pone:

$$(2) \quad z(X, Y) = Xu(X, Y),$$

si trova che  $z$  soddisfa la:

$$(C) \quad X^4 z_{XX} + z_{YY} = 0,$$

che è ottenuta dall'equazione generale del secondo tipo misto ellittico-parabolica:

$$(a) \quad X^{2m} z_{XX} + z_{YY} = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

ponendo in essa  $m = 2$ .

---

<sup>(1)</sup> M. CIBRARIO, *Sulla riduzione a forma canonica delle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto*, « Rendiconti del R. Istituto Lombardo », Vol. LXV, fasc. XI-XV, 1932.

In altro lavoro si studierà in modo completo l'equazione generale per  $m \neq 2$ , mentre qui ci si occuperà delle equazioni (A), (B) e (C), giungendo ad alcuni nuovi teoremi di esistenza e di unicità per la (A) in domini infiniti, e a teoremi analoghi per le (B) e (C) <sup>(4)</sup>.

Tenuto conto delle (1) e (2) si vede che le soluzioni della (C) sono comprese tutte nella formula:

$$z(X, Y) = Xu(X, Y),$$

dove  $u$  denota una qualsiasi soluzione dell'equazione di LAPLACE:

$$(A) \quad \Delta_2 u = 0$$

nelle variabili  $x = \frac{1}{X}$  e  $y = Y$ .

Il fatto che il cambiamento di variabili (1) fa corrispondere alla (A) l'equazione (B) ha un interesse particolare; la (B) ammette la retta  $X = 0$  come retta parabolica; l'asse  $Y$  è la sua unica caratteristica reale. Il cambiamento di variabili (1) muta l'asse  $Y$  nella *retta impropria*, intendendo questa locuzione nel senso che preciseremo. In questa teoria infatti si presenta opportuna per la natura stessa delle questioni che si studiano, una *convenzione sugli elementi all'infinito del piano*, che è *diversa* dalle due, che si applicano usualmente, cioè la convenzione della geometria proiettiva, che considera come un punto unico le direzioni di due rette parallele, e la convenzione della teoria delle funzioni di variabile complessa, che considera come unico l'elemento all'infinito del piano.

Precisamente è opportuna qui la convenzione di *ritenere come distinti i punti all'infinito delle rette parallele all'asse  $x$ , ma unico il punto all'infinito per ognuna di esse* sia per  $x \rightarrow +\infty$  che per  $x \rightarrow -\infty$ ; la retta impropria insomma è qui ciò che si ottiene facendo tendere  $|x|$  a infinito per  $y = \text{cost.}$  e facendo variare la  $y$ . Nel corso del lavoro parleremo sempre di retta impropria nel senso che abbiamo spiegato, e la chiameremo retta  $|x| = \infty$ , considerandola come unica sia per  $x \rightarrow +\infty$ , che per  $x \rightarrow -\infty$ . Mentre il piano di GAUSS è pensato come limite di una sfera, nella presente teoria il piano è assimilato, in un certo senso, a un cilindro, di cui una generatrice è la retta  $|x| = \infty$ .

L'equazione di LAPLACE (A) non muta, quando si facciano ruotare gli assi coordinati; si possono considerare dunque infinite rette improprie nel piano  $x, y$ , rette che risultano *paraboliche per la (A)*. Si vedrà ancora meglio

(4) I primi risultati del presente lavoro sono contenuti in una breve nota di ugual titolo, pubblicata negli « Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino », aprile 1925.

nel corso del lavoro che questo modo di considerare i punti all'infinito del piano non è artificioso, ma sorge spontaneo dai problemi al contorno in domini infiniti, che noi prenderemo in considerazione, domini in cui, come si è detto in principio, un punto può allontanarsi indefinitamente in una direzione soltanto.

La retta  $x=0$  corrisponde nel piano  $X, Y$  alla retta impropria, anche qui considerata nel senso detto più sopra, cioè intendendo come distinti i punti all'infinito di due rette parallele all'asse  $X$ , ma come unico il punto all'infinito di una retta, sia per  $X \rightarrow +\infty$ , che per  $X \rightarrow -\infty$ ; anche nel piano  $X, Y$  parleremo della retta  $|X| = \infty$ .

Le equazioni (B) e (C) non restano invariate, quando si fanno ruotare gli assi coordinati, e ciò perchè il cambiamento di variabili (1) introduce una direzione privilegiata, quella dell'asse  $X$ . Nel piano  $X, Y$  la natura stessa del problema porta a considerare solo la retta all'infinito  $|X| = \infty$ , e, in qualche problema al contorno, come si vedrà poi, anche la retta  $|Y| = \infty$ , ottenuta considerando come distinte le direzioni delle rette parallele all'asse  $Y$ , ma unico il punto all'infinito di ognuna di esse; gli elementi all'infinito del piano  $X, Y$  risultano cioè disposti su due rette  $|X| = \infty$  e  $|Y| = \infty$ ; si potrebbe assimilare in un certo senso il piano  $X, Y$  a un toro. Questo modo di considerare gli elementi impropri si era già presentato (1) nello studio delle equazioni del secondo tipo misto iperbolico-paraboliche:

$$\frac{x^{2(k+1)}}{k^2} z_{xx} - z_{yy} = 0,$$

per cui si era risolto un problema analogo al problema di CAUCHY, quando il segmento portante i dati apparteneva alla retta  $|x| = \infty$ . In altro lavoro si vedrà che considerazioni dello stesso tipo valgono anche per le più generali equazioni (a) del secondo tipo misto ellittico-paraboliche per  $m > 2$ .

Per  $X = 0$  la (B) e la (C) divengono:

$$u_{YY} = 0; \quad z_{YY} = 0.$$

Dunque un integrale della (B) o della (C), che sia  $D^II$  (2) anche per  $X = 0$ , si riduce sull'asse  $Y$  a una funzione lineare di  $Y$ ; a concludere questo basta

(1) M. CIBRARIO, *Sui teoremi di esistenza e di unicità per le equazioni lineari alle derivate parziali del secondo tipo misto iperbolico-paraboliche*,  $x^{2m}z_{xx} - z_{yy} = 0$ , « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », T. LVIII, 1934, pp. 217-284. V. per questo il T. V del § 5 e i successivi § 6 e § 7.

(2) Al solito con funzioni  $D^n$  indichiamo funzioni finite e continue con tutte le loro derivate fino all'ordine  $n$  incluso.

che siano soddisfatte le condizioni:

$$\lim_{X \rightarrow 0} X^4 u_{XX} = 0; \quad \lim_{X \rightarrow 0} X^3 u_X = 0 \text{ nel caso della (B),}$$

o la:

$$\lim_{X \rightarrow 0} X^4 z_{XX} = 0 \text{ nel caso della (C).}$$

Diremo che un integrale della (B) o della (C), che soddisfi condizioni di questo tipo è *regolare* per  $X=0$ ; potremo allora supporre senz'altro:

$$u(0, Y) = 0, \quad z(0, Y) = 0,$$

chè, se invece fosse p. es.  $u(0, Y) = aY + b$ , basterebbe porre  $u - aY - b = u^*$  per ricondursi a un integrale della (B) nullo sull'asse  $Y$ . Ci si può dunque limitare a studiare integrali della (B) o della (C) nulli sull'asse  $Y$ . Si ha così, *dalla forma stessa delle equazioni (B) e (C), una condizione per gli integrali della (B) e della (C) sull'asse  $Y$* ; ciò fa presumere che i teoremi di esistenza e di unicità in domini limitati o attraversati dall'asse  $Y$  abbiano forma diversa dal consueto.

Si dirà che un integrale della (B) o della (C) è *regolare sulla retta*  $|X| = \infty$ , se il cambiamento di variabili (1) lo muta in una funzione di  $x$  e di  $y$ ,  $D^II$  anche per  $x=0$ .

Si dirà infine che un integrale della (A) è *regolare per*  $|x| = \infty$  se il cambiamento di variabili (1) lo muta in un integrale della (B) regolare per  $X=0$ . Ne segue che *gli integrali della (A) regolari sulla retta impropria*  $|x| = \infty$  *sono ivi funzioni lineari di*  $y$ .

Per evitare inutili ripetizioni indicheremo qui i tipi principali di domini sia del piano  $x, y$  che del piano  $X, Y$ , di cui ci occuperemo nel corso del lavoro. Definiamo i domini, p. es., nel piano  $x, y$ ; le stesse definizioni valgono nel piano  $X, Y$ .

TIPO  $D_1$ ). - *Dominio* posto tutto a distanza finita in un semipiano  $x \geq 0$  o  $x \leq 0$  *avente per contorno un segmento*  $MN$  *dell'asse*  $y$  *e un arco di curva*  $\gamma$  *terminato ai punti*  $M$  *e*  $N$  *e non avente altri punti in comune coll'asse*  $y$  (fig. 1, fatta però nel piano  $X, Y$ , considerando qui la sola parte posta nel semipiano  $X > 0$ ).

TIPO  $D_2$ ). - *Dominio*, tutto a distanza finita, *attraversato dall'asse*  $y$  (fig. 1).

TIPO  $D_3$ ). - *Dominio infinito*, *avente per contorno un arco*  $\gamma$  *aperto illimitato di curva*, posto tutto nel semipiano  $x > 0$  (o  $x < 0$ ), che ha come asintoti rispettivamente le rette  $y = a$ ,  $y = b$  ( $a < b$ ), quando il punto che percorre  $\gamma$  si allontana indefinitamente da una parte o dall'altra di  $\gamma$  in

modo che sia  $x \rightarrow +\infty$  (fig. 2 di cui si consideri il solo semipiano  $x \geq 0$ ). Il dominio ha dunque per contorno  $\gamma$  e il segmento  $ab$  della retta impropria  $|x| = \infty$ .

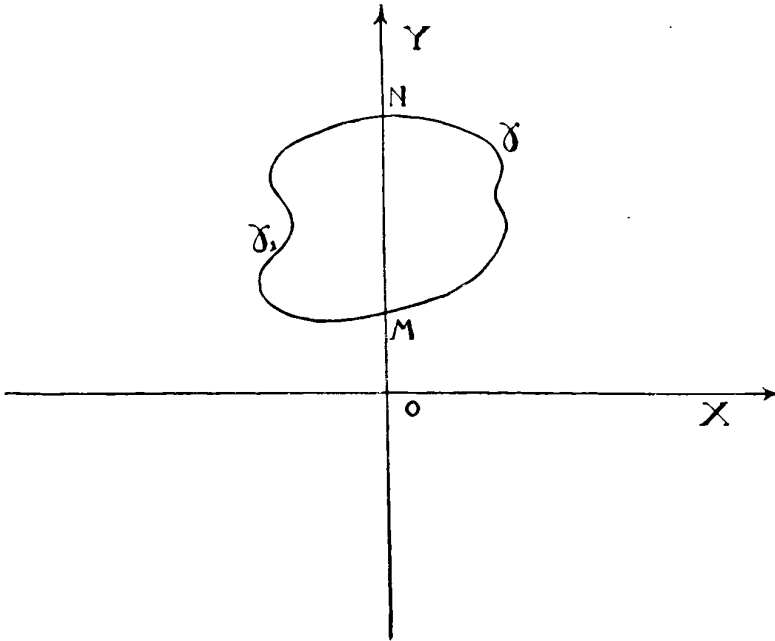


Fig. 1

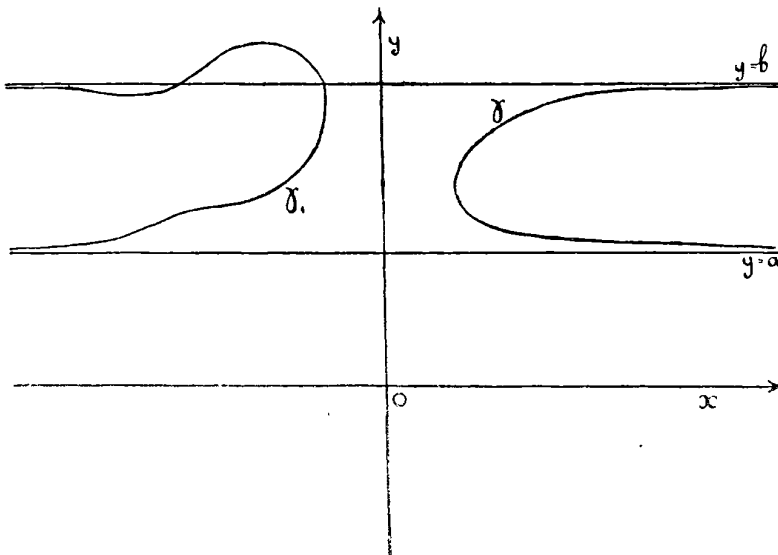


Fig. 2

TIPO  $D_4$ ). - Dominio costituito di due del tipo  $D_3$  posti uno nel semipiano  $x > 0$  e l'altro nel semipiano  $x < 0$  e tali che le due curve di contorno  $\gamma$  e  $\gamma_1$  abbiano una per  $x \rightarrow +\infty$  e l'altra per  $x \rightarrow -\infty$  gli stessi asintoti  $y = a$ ,  $y = b$ . Il dominio contiene il segmento  $ab$  della retta impropria  $|x| = \infty$  (fig. 2).

TIPO  $D_5$ ). - Dominio infinito avente per contorno due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , senza punti a comune, di cui una ha per  $x \rightarrow \pm\infty$  un unico asintoto  $y = a$  e l'altra ha per  $x \rightarrow \pm\infty$  un unico asintoto  $y = b$  ( $a > b$ ) (fig. 3). Caso particolare del dominio di tipo  $D_5$  è la striscia limitata da due rette parallele  $y = a$  e  $y = b$ .

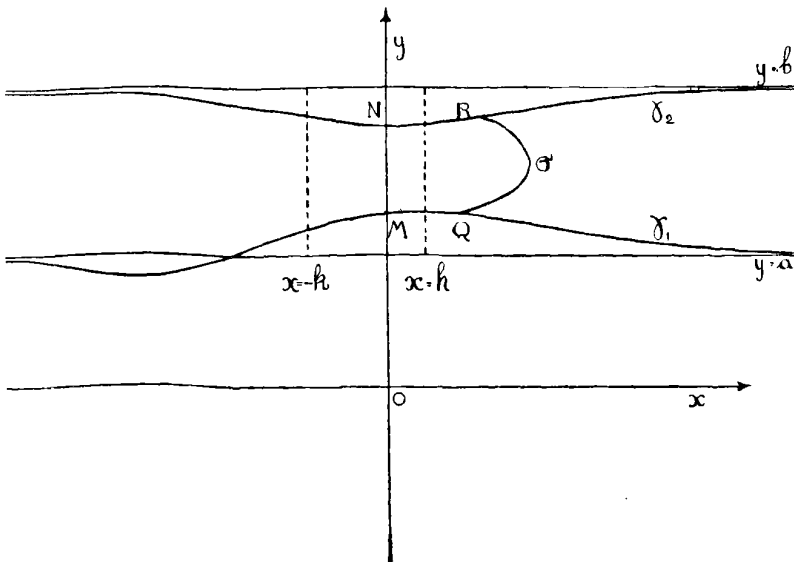


Fig. 3

Per l'equazione di LAPLACE (A), che non muta per una rotazione o per una traslazione degli assi coordinati si considereranno anche domini dei tipi  $D_3$ ,  $D_4$  e  $D_5$ , il cui contorno è costituito da curve incontrate o no dagli assi coordinati e aventi gli asintoti paralleli a una direzione qualunque del piano.

Nel piano  $X, Y$  si considererà anche qualche altro tipo di dominio infinito, su cui per ora non ci soffermeremo. Nel seguito chiameremo per brevità dominio  $D_1$ , dominio  $D_2$ , ecc. un dominio di tipo  $D_1$ , di tipo  $D_2$ , ecc.

Esponiamo ora brevemente il contenuto del lavoro.

Il § 1, che ha carattere introduttivo, è dedicato alla ricerca dei teoremi di esistenza e di unicità per le equazioni (B) e (C) nei domini di tipo  $D$ ,

o  $D_2$  (fig. 1); tale ricerca permetterà di risolvere, nei paragrafi successivi, il problema di DIRICHLET in domini infiniti di tipo  $D_3$ ,  $D_4$  e  $D_5$ .

Precisamente nel § 1 si trova che *un integrale della (B) o della (C), regolare per  $X=0$ , è determinato in un dominio  $D_1$  dandone i valori sul solo arco  $\gamma$ , perchè sul segmento  $MN$  dell'asse  $Y$  l'integrale è determinato dai valori assegnati in  $M$  e in  $N$ , dovendo essere funzione lineare di  $Y$ . Per studiare i domini di tipo  $D_2$ , che sono attraversati dall'asse  $Y$ , occorre conoscere il comportamento delle derivate di un integrale della (B) o della (C) per  $X=0$ . Tale studio costituisce nella presente ricerca una difficoltà, che si supera, introducendo una espressione analoga al potenziale di doppio strato. Si vede così che *in un dominio di tipo  $D_2$  esiste ed è unico l'integrale della (B) o della (C), che assume valori assegnati sul contorno, che  $\lim_{X \rightarrow 0} u_X(X, Y) = 0$  e**

che la  $u_{XX}(X, Y)$  diviene infinita per  $X \rightarrow 0$ ; la  $u(X, Y)$  e la  $z(X, Y)$  non sono, in generale, analitiche, quando si attraversa l'asse  $Y$ , così che i valori di  $u$  oppure di  $z$  nella parte del dominio posta nel semipiano  $X \geq 0$  sono del tutto indipendenti dei valori di  $u$  o di  $z$  nella parte del dominio posta nel semipiano  $X \leq 0$ .

Nel § 2 si passa allo studio del problema di DIRICHLET per domini infiniti di tipo  $D_3$  (fig. 2); mediante i risultati del § 1 e il cambiamento di variabili (1) si dimostra che *un integrale dell'equazione di LAPLACE (A) è determinato nel dominio  $D_3$ , quando lo si supponga regolare all'infinito e ne siano dati i valori sul contorno  $\gamma$ ; per  $|x| \rightarrow +\infty$  tale integrale tende a una funzione lineare di  $y$ , pienamente determinata dai valori di  $u$  su  $\gamma$ . Un punto interno a  $D_3$  può allontanarsi indefinitamente in una direzione soltanto: la direzione parallela all'asse  $x$ ; ecco dunque un caso in cui è opportuna la convenzione adottata circa la retta impropria.*

Il risultato si estende a un dominio di tipo  $D_4$ . Poichè l'equazione di LAPLACE (A) non muta, facendo ruotare gli assi coordinati, il risultato vale per domini del tipo  $D_3$  o  $D_4$ , *qualunque sia la direzione, a cui sono paralleli i due asintoti del contorno del dominio stesso.*

Se nel piano  $X, Y$  si considera un dominio  $D_3$  o  $D_4$  (fig. 2 in cui si pongano  $X, Y$ , invece di  $x, y$ ), il cambiamento di variabili (1) muta il dominio  $D_3$  o  $D_4$  del piano  $X, Y$  in un dominio  $D_1$  o  $D_2$  del piano  $x, y$  e muta la (B) nella (A), per cui i teoremi di esistenza in un dominio  $D_1$  o  $D_2$  sono classici; si ricavano così subito i teoremi di esistenza e di unicità per la (B) nei domini  $D_3$  o  $D_4$ . La (C) col cambiamento di variabili (1) si muta nella:

$$(3) \quad z_{xx} + z_{yy} + \frac{2}{x} z_x = 0,$$

che è singolare per  $x=0$ ; si trova qui un risultato nuovo: un integrale della (C), finito per  $|X|=\infty$ , è funzione pari di  $X$  ed è funzione analitica di  $X, Y$  anche nei punti della retta impropria, così che  $z$  è determinato in un dominio  $D_3$  e nel dominio simmetrico rispetto all'asse  $Y$ , dandone i valori sull'arco  $\gamma$  soltanto. Inoltre dando i valori di  $z$  soltanto su un segmento della retta impropria  $|x|=\infty$  come funzione analitica di  $Y$ , si può risolvere il problema di CAUCHY;  $z$  è determinato col dare il solo valore di  $z$  per  $|X|=\infty$ , perchè la retta  $|X|=\infty$  è singolare per la (C), che ha dunque due rette eccezionali, la  $X=0$  e la  $|X|=\infty$ .

Nel § 3 si passa allo studio del problema di DIRICHLET in un dominio di tipo  $D_5$  (fig. 3) e si dimostra che in un tale dominio esiste uno e un solo integrale dell'equazione di LAPLACE (A), regolare all'infinito, che assume valori assegnati sulle due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , che costituiscono il contorno del dominio; tale integrale si riduce ad una stessa funzione lineare di  $y$  per  $x \rightarrow \pm\infty$  ( $a \leq y \leq b$ ). Al risultato per la (A) si giunge attraverso a un risultato analogo per la (B), quando si considera un dominio  $D_5$  nel piano  $X, Y$ ; l'integrale della (B) è funzione lineare di  $Y$  per  $X=0$ , e per  $X \rightarrow \pm\infty$  ( $a < Y < b$ ) tende ad una stessa funzione analitica di  $Y$ . Nel caso dell'equazione di LAPLACE (A) gli asintoti delle curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  possono essere paralleli ad una direzione qualsiasi del piano.

Nel § 4, tenendo conto dei risultati ottenuti nei § 2 e 3, si dimostrano altri teoremi di esistenza e di unicità per le equazioni (B) e (C) in domini infiniti di tipi diversi.

§ 1. Poichè l'equazione:

$$(B) \quad X^4 u_{XX} + u_{YY} + 2X^3 u_X = 0,$$

col cambiamento di variabili:

$$(1) \quad X = \frac{1}{x}; \quad Y = y$$

si muta nella equazione di LAPLACE (A), mentre colla posizione:

$$(2) \quad z(X, Y) = Xu(X, Y)$$

si muta nella:

$$(C) \quad X^4 z_{XX} + z_{YY} = 0,$$

segue subito il:

T. I. « In un dominio  $\delta$ , tutto a distanza finita, senza punti a comune coll'asse  $Y$ , esiste ed è unico l'integrale della (B) o della (C), che sul contorno di  $\delta$  assume valori assegnati ».



Si dimostra pure facilmente il:

T. II. « In un dominio, tutto a distanza finita, avente o no punti a comune coll'asse  $Y$ , esiste al più un integrale della (B) o della (C), che assume valori assegnati sul contorno del dominio stesso; il massimo e il minimo valore di un tale integrale è raggiunto sul contorno di quel dominio ».

Infatti nelle equazioni lineari (B) e (C) mancano il termine contenente la funzione e il termine noto, e il coefficiente di  $u_{YY}$ ,  $z_{YY}$  non è mai nullo; le equazioni (B) e (C) rientrano dunque nella categoria di quelle studiate dal prof. PICONE in un suo lavoro (1).

Si consideri ora un arco aperto di curva  $\gamma$ , posto nel semipiano  $X \geq 0$  (fig. 1, di cui si consideri per ora sola la parte corrispondente a  $X > 0$ ), avente gli estremi in due punti  $M(0, m)$  e  $N(0, n)$  dell'asse  $Y$ , e il dominio  $D_1$ , avente per contorno l'arco  $\gamma$  e il segmento  $MN$ . Siano  $X = \xi(t)$ ,  $Y = \eta(t)$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) le equazioni parametriche di  $\gamma$ ;  $t = t_0$  e  $t = t_1$  siano i valori del parametro, che corrispondono ai punti  $M$  e  $N$ ;  $\xi(t)$  e  $\eta(t)$  siano funzioni  $D^II$ ;  $\xi'(t)$  e  $\eta'(t)$  non si annullino contemporaneamente. Su  $\gamma$  sia assegnata una funzione continua  $f(t)$ ; si ricerca un integrale della (B) o della (C), che sia regolare per  $X=0$ , e che su  $\gamma$  si riduca alla funzione  $f(t)$ . Se  $u(X, Y)$  e  $z(X, Y)$  sono regolari per  $X=0$ ,  $u(0, Y)$  e  $z(0, Y)$  sono funzioni lineari di  $Y$ . Si può determinare una funzione lineare  $pY + q$ , dove  $p$  e  $q$  sono costanti, tali che sia

$$pm + q = f(t_0); \quad pn + q = f(t_1),$$

e sostituire a  $u(X, Y)$ ,  $z(X, Y)$  e  $f(t)$  le funzioni

$$u^*(X, Y) = u(X, Y) - pY - q; \quad z^*(X, Y) = z(X, Y) - pY - q; \\ f^*(t) = f(t) - p\eta(t) - q.$$

Nel caso della (C), che non contiene  $z_X$ , bisogna imporre in più la condizione che la funzione  $\varphi(t) = \frac{f^*(t)}{\xi(t)}$  sia finita e continua anche per  $t = t_0$  e  $t = t_1$ , cioè nei punti  $M$  e  $N$  di  $\gamma$ ; allora si può determinare una funzione  $hY + k$ , tale che sia:

$$hm + k = \varphi(t_0); \quad hn + k = \varphi(t_1),$$

(1) M. PICONE, *Sopra alcuni problemi di analisi matematica posti dalla fisica*, « Esercitazioni Matematiche di Catania ». t. 2, pag. 183-205 (1922); v. in particolare il T. VI, p. 195 e il T. IX, pp. 197-198. I risultati più importanti sono riportati nella nota: M. PICONE, *Maggiorazione degli integrali delle equazioni lineari ellittico-paraboliche alle derivate parziali del secondo ordine*, « Rendiconti della R. Acc. dei Lincei », S. 6<sup>a</sup>, vol. V, 1<sup>o</sup> sem., fasc. 3, 1927, pp. 138-143; v. il T. III, p. 139 e T. V p. 141.

e sostituire a  $z^*(X, Y)$  e a  $\varphi(t)$  le:

$$z^{**}(X, Y) = z^*(X, Y) - X(hY + k); \quad \varphi^*(t) = \varphi(t) - h\eta(t) - k.$$

Ci si riconduce così all'ipotesi  $f(t_0) = f(t_1) = 0$ , e nel caso della (C) anche alla  $\varphi(t_0) = \varphi(t_1) = 0$ . Si può allora enunciare il teorema:

T. III. « *Nel dominio  $D_1$  esiste ed è unico l'integrale della (B) oppure della (C), che è regolare anche per  $X=0$ , e che su  $\gamma$  si riduce ad una funzione continua assegnata  $f(t)$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ), colla condizione, nel caso della (B), che sia  $f(t_0) = f(t_1) = 0$ , e nel caso della (C) che sia inoltre:*

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t)}{\bar{\xi}(t)} = \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{f(t)}{\bar{\xi}(t)} = 0 \quad (1).$$

*Tale integrale è analitico nei punti interni a  $D_1$ ; nel caso della (C), esso è nullo colle sue derivate prime e seconde per  $X \rightarrow 0$ , nel caso della (B) è nullo colle sue derivate prime e colla  $u_{YY}(X, Y)$  per  $X \rightarrow 0$ , mentre  $u_{XX}(X, Y)$  diviene in generale infinita per  $X \rightarrow 0$ , pur essendo  $\lim_{X \rightarrow 0} Xu_{XX}(X, Y) = 0$  ».*

Se  $u(X, Y)$ ,  $z(X, Y)$  sono regolari per  $X \rightarrow 0$ , dalle ipotesi del teorema segue che  $u(0, Y) = z(0, Y) = 0$ . Allora la  $u(X, Y)$  e la  $z(X, Y)$  sono note sull'intero contorno di  $D_1$ , e, se esiste l'integrale  $u(X, Y)$  (o rispettivamente  $z(X, Y)$ ), che soddisfa il T. III, esso è unico per il T. II. Dimostriamo l'esistenza prima della  $u(X, Y)$ , poi della  $z(X, Y)$ .

La classica soluzione dell'equazione di LAPLACE:  $\text{arctg} \frac{y - \eta}{x - \bar{\xi}}$  col cambiamento di variabili:

$$(3) \quad X = \frac{1}{x}, \quad Y = y; \quad \bar{\xi} = \frac{1}{\xi}, \quad \bar{\eta} = \eta$$

si muta nella soluzione della (B):

$$\text{arctg} \frac{(Y - \eta)X\xi}{\xi - X}.$$

Se  $\mu(t)$  è una qualsiasi funzione continua, un integrale della (B) è dato dall'espressione:

$$(4) \quad u(X, Y) = \int_{\gamma} \mu(t) \frac{d}{dt} \text{arctg} \frac{[Y - \eta(t)]X\xi(t)}{X - \xi(t)} dt,$$

(1) Di queste condizioni è restrittiva solo l'ipotesi che siano determinati e finiti i:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - p\eta(t) - q}{\bar{\xi}(t)}, \quad \lim_{t \rightarrow t_1} \frac{f(t) - p\eta(t) - q}{\bar{\xi}(t)}.$$

cioè:

$$(4) \quad u(X, Y) = X \int_{t_0}^{t_1} \mu(t) \frac{\xi'(t)[Y - \eta(t)]X + \eta'(t)[\xi(t) - X]\xi(t)}{\Delta} dt$$

dove:

$$(5) \quad \Delta = [\xi(t) - X]^2 + X^2 \xi^2(t)[Y - \eta(t)]^2,$$

e  $\xi = \xi(t)$  e  $\eta = \eta(t)$  sono le coordinate di un punto, che descrive  $\gamma$ .

Per studiare il comportamento della funzione  $u(X, Y)$  sul contorno  $\gamma$ , si tiene un metodo analogo a quello usuale per l'integrale di doppio strato. Supposto  $\mu(t) = 1$ , si osservi, anzi tutto, che, se il punto  $(X, Y)$  è interno al dominio  $D_1$ , l'integrale:

$$I = \int_{\gamma} \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{[Y - \eta(t)]X \xi(t)}{X - \xi(t)} dt$$

si può considerare come esteso al contorno completo del dominio  $D_1$ , perchè lungo il segmento  $MN$  la funzione da integrarsi è nulla; essa è regolare nei punti interni a  $D_1$ , tranne che nel punto  $\xi = X, \eta = Y$ .

Allora se  $c$  è una curva chiusa tutta interna a  $D_1$ , senza punti a comune coll'asse  $Y$  e racchiudente all'interno il punto  $(X, Y)$ , è:

$$I = \int_{\gamma} \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{(Y - \eta)X \xi}{X - \xi} dt = \int_c \frac{d}{dt} \left[ \operatorname{arctg} \frac{(Y - \eta)X \xi}{X - \xi} \right] dt,$$

dove nell'ultimo integrale si indicano con  $\xi, \eta$  le coordinate di un punto che percorre  $c$ . Ma  $c$  non ha punti a comune coll'asse  $Y$ ; dunque col cambiamento di variabili (3), se  $c_1$  è la curva trasformata di  $c$ , descritta in verso antiorario, e se  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$  sono le coordinate di un punto che percorre  $c_1$ , è:

$$I = \int_{c_1} d \left[ \operatorname{arctg} \frac{y - \bar{\eta}}{x - \bar{\xi}} \right],$$

e quindi, come è ben noto:

$$I = 2\pi.$$

Se il punto  $(X, Y)$  è esterno al dominio  $D_1$ , è  $I = 0$ ; se il punto  $(X, Y)$  sta su  $\gamma$ , e se si indica con  $\gamma_{AB}$  un archetto di  $\gamma$ , contenente il punto  $(X, Y)$  e avente per estremi i punti  $A$  e  $B$ , e si indica con  $\lambda$  un arco (non di  $\gamma$ ) tutto interno al dominio  $D_1$  e avente per estremi i punti  $A$  e  $B$ , è:

$$I = \int_{\gamma_{AB} + \lambda} d \left[ \operatorname{arctg} \frac{(Y - \eta)X \xi}{X - \xi} \right],$$

dove, al solito, il punto  $(\xi, \eta)$  descrive il contorno  $\gamma_{AB} + \lambda$ ; ma tale contorno non ha punti a comune coll'asse  $Y$ ; dunque mediante il cambiamento di variabili (3) si prova che in questo caso è:  $I = \pi$ .

Da questi risultati si trae subito, come nella teoria del potenziale di doppio strato, l'equazione integrale a cui deve soddisfare la funzione  $\mu(t)$  affinché la funzione  $u(X, Y)$  data dalla (4) si riduca su  $\gamma$  alla funzione assegnata  $f(t)$ .

Scrivendo nella (4)  $\tau$  al posto di  $t$  e imponendo che al tendere di un punto  $P$  di coordinate  $X, Y$  appartenente al dominio  $D_1$  a un punto  $P_0$  di  $\gamma$  di coordinate  $\xi(t), \eta(t)$  sia:

$$\lim_{P \rightarrow P_0} u(X, Y) = f(t),$$

si trova che  $\mu(t)$  deve soddisfare l'equazione integrale:

$$(6) \quad \mu(t) = \frac{1}{\pi} f(t) - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma} \mu(\tau) \frac{d}{d\tau} \operatorname{arctg} \frac{[\eta(t) - \eta(\tau)] \xi(t) \xi(\tau)}{\xi(t) - \xi(\tau)} d\tau.$$

Il nucleo:

$$K(t, \tau) = \frac{d}{d\tau} \operatorname{arctg} \frac{[\eta(t) - \eta(\tau)] \xi(t) \xi(\tau)}{\xi(t) - \xi(\tau)}$$

di questa equazione è finito anche per  $\tau = t$ ; infatti esso, eseguendo la derivazione, diviene:

$$(7) \quad K(t, \tau) = \xi(t) \frac{\xi'(\tau) \xi(t) [\eta(t) - \eta(\tau)] + \eta'(\tau) \xi(\tau) [\xi(t) - \xi(\tau)]}{[\xi(\tau) - \xi(t)]^2 + \xi^2(t) \xi^2(\tau) [\eta(t) - \eta(\tau)]^2},$$

e, ponendo  $\tau - t = h$  e sviluppando  $\xi(\tau), \eta(\tau), \xi'(\tau), \eta'(\tau)$  secondo la formula di TAYLOR in cui ci si arresti ai termini contenenti le derivate seconde:

$$K(t, \tau) = \xi(t) \frac{-\xi(t) [\xi'(t) + h \xi''(t_1)] \left[ h \eta'(t) + \frac{h^2}{2} \eta''(t_2) \right] + \left[ h \xi'(t) + \frac{h^2}{2} \xi''(t_4) \right]^2 + \left[ \eta'(t) + h \eta''(t_3) \right] \left[ h \xi'(t) + \frac{h^2}{2} \xi''(t_4) \right] \left[ \xi(t) + h \xi'(t) + \frac{h^2}{2} \xi''(t_4) \right] + \xi^2(t) \left[ \xi(t) + h \xi'(t) + \frac{h^2}{2} \xi''(t_4) \right]^2 \left[ h \eta'(t) + \frac{h^2}{2} \eta''(t_2) \right]^2}{\left[ h \xi'(t) + \frac{h^2}{2} \xi''(t_4) \right]^2 + \left[ \eta'(t) + h \eta''(t_3) \right] \left[ h \xi'(t) + \frac{h^2}{2} \xi''(t_4) \right] \left[ \xi(t) + h \xi'(t) + \frac{h^2}{2} \xi''(t_4) \right] + \xi^2(t) \left[ \xi(t) + h \xi'(t) + \frac{h^2}{2} \xi''(t_4) \right]^2 \left[ h \eta'(t) + \frac{h^2}{2} \eta''(t_2) \right]^2}$$

dove  $t_1, t_2, t_3, t_4$  sono valori convenienti, compresi tra  $t$  e  $\tau$ .

Semplificando, dividendo tutto per  $h^2$ , e poi passando al limite per  $h \rightarrow 0$ , cioè per  $\tau \rightarrow t$ , si trova con qualche semplificazione:

$$(8) \quad K(t, t) = \frac{1}{2} \xi(t) \frac{\xi(t) \xi'(t) \eta''(t) + 2 \eta'(t) \xi^2(t) - \eta'(t) \xi(t) \xi''(t)}{\xi^2(t) + \xi^4(t) \eta'^2(t)},$$

che è finito (1). Si può dunque applicare la teoria di FREDHOLM; il valore  $-\frac{1}{\pi}$  non può essere un parametro del nucleo, perchè se lo fosse, supposta l'equazione (6) omogenea, cioè  $f(t) = 0$ , essa avrebbe una soluzione almeno  $\bar{\mu}(t)$  non identicamente nulla, e la (4) darebbe un integrale della (A) nullo sul contorno e non identicamente nullo in  $D_1$  (2).

La  $u(X, Y)$  è dunque un integrale della (B), che si riduce a  $f(t)$  sulla curva  $\gamma$ ; si ha:

$$\lim_{X \rightarrow 0} u(X, Y) = 0,$$

perchè, considerando p. es. la  $u(X, Y)$  nella forma (4'), si vede che la funzione sotto il segno di integrale resta finita per  $X \rightarrow 0$ . La  $u(X, Y)$  data dalla (4) soddisfa dunque alle condizioni volute dal teorema.

Per dimostrare l'esistenza della funzione  $z(X, Y)$ , che soddisfa la (C) e su  $\gamma$  si riduce ad una funzione assegnata  $f(t)$ , tenuto conto che, colla posizione:  $z(X, Y) = Xu(X, Y)$ , la (C) si muta nella (B), basta determinare l'integrale della (B), che su  $\gamma$  si riduce a  $\frac{f(t)}{\xi(t)}$ . Le funzioni  $u(X, Y)$ ,  $z(X, Y)$ , di cui si è dimostrata l'esistenza sono, evidentemente, analitiche nei punti interni al dominio  $D_1$ .

Studiamo ora l'andamento delle derivate di  $u(X, Y)$  e di  $z(X, Y)$  per  $X \rightarrow 0$ . Si trova:

$$u_{X(X, Y)} = \int_{t_0}^{t_1} \mu(t) \frac{2X\xi'\xi(X-\xi)(\eta-Y) - \eta'\xi^2 X^2(Y-\eta)^2 + \eta'\xi^2(\xi-X)^2}{\Delta^2} dt$$

(1) Per  $\xi(t) \neq 0$  dall'ipotesi fatta che  $\xi'(t)$  e  $\eta'(t)$  non si annullino contemporaneamente segue senz'altro che  $K(t, t)$  è finito. Per  $\xi(t) = 0$ , cioè nei punti  $M$  e  $N$ , è certamente  $K(t, t) = 0$  se  $\xi'(t) \neq 0$ . Se poi è  $\xi'(t) = 0$  per  $\xi(t) = 0$ , cioè se la curva  $\gamma$  tocca l'asse  $Y$  nel punto  $M$  o nel punto  $N$ , l'espressione (8) riesce indeterminata. Ma in questo caso già dalla (7) segue che per  $\xi(t) = 0$  è  $K(t, \tau) = 0$ , comunque sia  $\tau$  e quindi anche per  $\tau = t$ , e per  $\xi(\tau) = 0$  è  $K(t, \tau) = \xi'(\tau)[\eta(t) - \eta(\tau)]$  e per  $t = \tau$ :  $K(t, t) = 0$ .

(2) Il ragionamento cadrebbe, se per tale soluzione  $\bar{\mu}(t)$  fosse:

$$\int_{t_0}^{t_1} \bar{\mu}(\tau) \frac{d}{d\tau} \operatorname{arctg} \frac{[Y - \eta(\tau)]X\xi(\tau)}{X - \xi(\tau)} d\tau = 0,$$

se il punto  $(X, Y)$  è interno a  $D_1$ , mentre lo stesso integrale è uguale a  $\bar{\mu}(t)$ , se  $X = \xi(t)$ ,  $Y = \eta(t)$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ); si vede subito che da queste condizioni segue che  $\bar{\mu}(t) = 0$  identicamente.

dove  $\Delta$  è dato dalla (5); allora:

$$(9) \quad u_X(0, Y) = \lim_{X \rightarrow 0} u_X(X, Y) = \int_{t_0}^{t_1} \mu(t) \eta'(t) dt.$$

$$u_Y(X, Y) = \int_{t_0}^{t_1} \mu(t) \frac{\xi' X^2 (\xi - X)^2 - 2X^3 \xi^2 \eta'(Y - \eta) (\xi - X) - \xi^2 \xi^2 X^4 (Y - \eta)^2}{\Delta^2} dt$$

da cui:

$$u_Y(0, Y) = 0.$$

$$u_{YY}(X, Y) = 2 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mu(t)}{\Delta^3} \{ X^6 \xi^4 \xi'(Y - \eta)^3 + 3X^5 \xi^5 \eta'(Y - \eta)^2 (\xi - X) - \\ 3X^4 \xi^2 \xi'(Y - \eta) (X - \xi)^2 - X^3 \xi^3 \eta' (\xi - X)^3 \} dt,$$

e:

$$u_{YY}(0, Y) = 0.$$

Invece si trova:

$$u_{XX}(X, Y) = 2 \int_{t_0}^{t_1} \frac{\mu(t)}{\Delta^3} \{ \eta' \xi^6 X^3 (Y - \eta)^4 - 3X^2 \xi^4 \xi'(Y - \eta)^3 + \\ + 2X^3 \xi^3 \xi'(Y - \eta)^2 - 3\eta' \xi^5 X (\xi - X) (Y - \eta)^2 + 2(\xi - X)^2 X \xi \xi'(Y - \eta) + \\ + \xi' \xi^2 (\xi - X)^2 (Y - \eta) + \eta' \xi^2 (\xi - X)^3 \} dt,$$

e questa per  $X \rightarrow 0$  diviene in generale infinita, perchè l'integrale diverge in generale (cioè tranne ipotesi particolari per  $f(t)$ ). Però si ha:

$$\lim_{X \rightarrow 0} X u_{XX}(X, Y) = 0.$$

Riprendiamo ora in considerazione la (9); da essa segue che  $u_X(0, Y)$  è costante al variare di  $Y$ . Poichè si è dimostrata l'esistenza e l'unicità della funzione  $u(X, Y)$ , che soddisfa le condizioni volute dal T. III, se noi ricerchiamo un integrale della (B), nullo per  $X = 0$ , e che assuma gli stessi valori di  $u(X, Y)$  lungo una curva  $\bar{\gamma}$ , tutta interna a  $D$ , e avente per estremi due punti  $M_1$  e  $N_1$  del segmento  $MN$ , si ottiene di nuovo la funzione  $u(X, Y)$ , che, in questo caso, sarà data dalla formula (4), in cui si sostituisca  $\bar{\gamma}$  a  $\gamma$ . e si determini convenientemente  $\mu(t)$ .

Sia  $m < Y_0 < n$  e sia  $\rho > 0$ ; si consideri la curva  $\bar{\gamma}$ , tutta interna al dominio  $D_1$ , di equazione:

$$\xi = \rho[\rho^4 - (\eta - Y_0)^4].$$

dove  $\xi$  e  $\eta$  sono ora le coordinate di un punto variabile su  $\gamma$ . Si ponga:

$$u[\rho \{ \rho^4 - (\eta - Y_0)^4 \}, \eta] = \varphi(\eta).$$

All'interno di  $\bar{\gamma}$  si può esprimere la  $u(X, Y)$  mediante la formula:

$$u(X, Y) = \int_{Y_0 - \rho}^{Y_0 + \rho} \mu(\eta) \frac{d}{d\eta} \operatorname{arctg} \frac{(Y - \eta)X\rho[\rho^4 - (\eta - Y_0)^4]}{X - \rho[\rho^4 - (\eta - Y_0)^4]} d\eta,$$

dove  $\mu(\eta)$  soddisfa l'equazione integrale:

$$\mu(\eta) = \frac{1}{\pi} \varphi(\eta) - \frac{1}{\pi} \int_{Y_0 - \rho}^{Y_0 + \rho} \mu(\sigma) \frac{d}{d\sigma} \operatorname{arctg} \frac{\rho[(\eta - Y_0)^4 - \rho^4][\rho^4 - (\sigma - Y_0)^4]}{[(\sigma - Y_0)^2 + (\eta - Y_0)^2][\sigma + \eta - 2Y_0]} d\sigma.$$

È allora:

$$u_X(0, Y) = \int_{Y_0 - \rho}^{Y_0 + \rho} \mu(\eta) d\eta.$$

Si vede subito che si può determinare una quantità positiva  $H$  tale che il nucleo dell'equazione in valore assoluto sia minore di  $\rho H$ , comunque siano  $\rho$ ,  $\eta$  e  $\sigma$ . Si ottiene  $\mu(\eta)$  nella forma:

$$\mu(\eta) = \frac{1}{\pi} \varphi(\eta) - \frac{1}{\pi^2} \int_{Y_0 - \rho}^{Y_0 + \rho} \varphi(\sigma) \frac{D\left(\eta \middle| -\frac{1}{\pi}\right)}{D\left(-\frac{1}{\pi}\right)} d\sigma,$$

per il primo teorema di FREDHOLM. Se si tiene conto dell'espressione di  $D(\lambda)$  <sup>(1)</sup>, si vede che è qui:

$$D(\lambda) = 1 + \rho \delta(\lambda),$$

dove  $\delta(\lambda)$  è una serie, convergente comunque siano  $\rho$  e  $\lambda$ ; allora per  $\rho$  abbastanza piccolo si può fare in modo che sia:

$$\rho \left| \delta\left(-\frac{1}{\pi}\right) \right| < 1.$$

Dunque  $D\left(-\frac{1}{\pi}\right)$  non è mai nullo per  $\rho$  abbastanza piccolo; sia:

$$0 < h < D\left(-\frac{1}{\pi}\right).$$

(1) GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. III, 2<sup>e</sup> éd., Paris 1915, Chap. XXX, I, § 565, pag. 370-373. V. in particolare form. (5), pag. 371, e form. (9), pag. 372.

Tenendo conto dell'espressione di  $D\left(\frac{\eta}{\sigma} \middle| \lambda\right)$ , si vede che si può determinare una quantità positiva  $N$  in modo che sia:

$$\left| D\left(\frac{\eta}{\sigma} \middle| -\frac{1}{\pi}\right) \right| < N.$$

Allora se:  $|u(X, Y)| < M$ , si trova:

$$|\mu(\eta)| < \frac{M}{\pi} + \frac{2}{\pi^2} \rho^3 \frac{NM}{h} = L.$$

Dunque:

$$|u_X(0, Y)| = \left| \int_{Y_0-\rho}^{Y_0+\rho} \mu(\eta) d\eta \right| < 2\rho L.$$

Poichè la quantità  $\rho$  si può rendere piccola a piacere, è:

$$u_X(0, Y) = 0.$$

Poichè è:  $z(X, Y) = Xu(X, Y)$ , si vede subito che  $z(X, Y)$  per  $X=0$  è nullo colle sue derivate prime e seconde.

Il T. III vale anche nel caso che i punti  $M$  e  $N$  coincidano, cioè nel caso in cui il dominio  $D$  abbia un solo punto  $M$  del suo contorno  $\gamma$  in comune con l'asse  $Y$ , punto che corrisponde ai due valori  $t=t_0$  e  $t=t_1$  del parametro (4). Nel caso della (C) bisogna imporre la condizione per la funzione  $f(t)$  assegnata su  $\gamma$  che:  $\frac{f(t) - f(t_0)}{\xi(t)}$  resti finita nel punto  $M$ .

Vale tutto quanto si è detto, ma non occorre tener conto delle derivate di  $u$  e di  $z$  nel punto  $M$ .

Si consideri ora il contorno chiuso  $\sigma$  formato dall'arco  $\gamma$  considerato sopra e da un arco  $\gamma_1$  posto nel semipiano  $X \leq 0$  e terminato ai punti  $M$  e  $N$  (v. fig. 1); il dominio, di tipo  $D_2$ , interno a  $\sigma$  è dunque attraversato dall'asse  $Y$ . Siano  $\xi = \xi(t)$ ,  $\eta = \eta(t)$  le equazioni parametriche di  $\sigma$ . Allora:

T. IV. « Esiste uno e un solo integrale della (B), oppure della (C), definito nel dominio  $D_2$ , interno a un contorno  $\sigma$ , attraversato dall'asse  $Y$ , che su  $\sigma$  si riduce ad una funzione assegnata  $f(t)$ , colla condizione, nel caso della (B), che  $f(t)$  sia nulla in  $M$  e in  $N$ , e nel caso della (C) che sia inoltre:

(4) Non occorre supporre che nel punto  $M$  la tangente a  $\gamma$  varii con continuità;  $M$  può essere un punto angoloso di  $\gamma$ .



$\lim_{\xi(t) \rightarrow 0} \frac{f(t)}{\xi(t)} = 0$  <sup>(4)</sup>. Tale integrale nel caso della (C) è funzione  $D^{\text{II}}$  in tutti i punti del dominio e anche per  $X=0$ , dove è nullo colle sue derivate prime e seconde, mentre nel caso della (B) la  $u(X, Y)$  è nulla colle sue derivate prime e colle  $u_{XY}$  per  $X=0$ , ma la  $u_{XX}(X, Y)$  diviene in generale infinita per  $X \rightarrow 0$ , pur essendo  $\lim_{X \rightarrow 0} Xu_{XX}(X, Y) = 0$ . L'integrale della (B) o della (C) è analitico nei punti interni a  $D_2$ , tranne che in generale per  $X \rightarrow 0$ , così che esso può ridursi a funzioni analitiche distinte per  $X > 0$  o per  $X < 0$  ».

Se esiste un integrale della (B) o della (C) che soddisfa il teorema, esso è regolare per  $X=0$  e quindi nullo per  $X=0$ , ed è unico per il T. II. In quanto all'esistenza di un tale integrale, per il T. III nella parte  $D_1$  di  $D_2$  limitata da  $\gamma$  e dal segmento  $MN$  esiste l'integrale della (B) o della (C), nullo per  $X=0$  e che su  $\gamma$  si riduce a  $f(t)$ , e nella parte  $D_1'$  di  $D_2$  limitata da  $\gamma_1$  e dal segmento  $MN$  esiste l'integrale della (B) o della (C), che su  $\gamma_1$  si riduce a  $f(t)$  ed è nullo per  $X=0$ . Il comportamento degli integrali  $z(X, Y)$  e  $u(X, Y)$  e delle loro derivate prime e seconde per  $X=0$  è noto dal T. III; esse sono dunque continue (tranne la  $u_{XX}(X, Y)$ ), quando si attraversa l'asse  $Y$ . Poichè i valori della  $z(X, Y)$  (o della  $u(X, Y)$ ) nel dominio  $D_1$  sono completamente indipendenti dai valori nel dominio  $D_1'$ , la  $z(X, Y)$  (o la  $u(X, Y)$ ) si riduce, in generale, a funzioni analitiche distinte nei domini  $D_1$  e  $D_1'$ ; dunque  $z(X, Y)$  (e  $u(X, Y)$ ) non è in generale analitica per  $X=0$ .

§ 2. Consideriamo l'equazione di LAPLACE:

(A) 
$$u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

e poniamoci il problema di dimostrare l'esistenza e l'unicità di un integrale della (A) in un dominio estendentesi all'infinito, che abbia per contorno una curva  $\gamma$  aperta, senza punti doppi, dotata di tangente variabile con continuità, avente per asintoti due rette parallele tra loro, quando siano assegnati i valori di  $u$  su  $\gamma$ . Poichè la (A) non muta per una traslazione oppure per una rotazione degli assi coordinati, si può supporre che i due asintoti siano paralleli, p. es., all'asse  $x$ , e che il dominio, di tipo  $D_3$ , non abbia punti a comune coll'asse  $y$ , e sia posto nel semipiano  $x > 0$  (v. fig. 2, di cui si consideri, per ora, la sola parte corrispondente al semipiano  $x \geq 0$ ).

(4) Se è  $z(0, Y) = pY + q$ , delle condizioni imposte nel teorema è essenziale solo l'ipotesi che la funzione  $\frac{f(t) - p\eta(t) - q}{\xi(t)}$  sia finita e continua in  $M$  e in  $N$  (v. il precedente T. III).

Siano  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) le equazioni parametriche di  $\gamma$ ; sia  $x(t) = \frac{1}{H(t)}$ , dove  $H(t)$  è funzione  $D^II$  ed è  $H(t_0) = H(t_1) = 0$ , così che:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \lim_{t \rightarrow t_1} x(t) = +\infty \quad (1).$$

$y(t)$  sia funzione  $D^II$  tale che

$$\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a; \quad \lim_{t \rightarrow t_1} y(t) = b \quad (a < b).$$

Sia  $f(t)$  la funzione assegnata nei punti di  $\gamma$ . Il cambiamento di variabili:

$$(1) \quad X = \frac{1}{x}; \quad Y = y$$

muta la (A) nella (B) e il dominio  $D_3$  e la curva  $\gamma$  in un dominio  $D_1$  e in una curva  $\bar{\gamma}$ , del tipo considerato nel T. III del § 1;  $\bar{\gamma}$  sta nel semipiano  $X \geq 0$  e termina ai punti  $A(0, a)$  e  $B(0, b)$  dell'asse  $Y$ ; nei punti del segmento  $AB$ , che corrispondono ai punti all'infinito del dominio  $D_3$ , la  $u$  è una funzione lineare di  $Y$ ; dunque per  $x \rightarrow +\infty$  la  $u(x, y)$  tende a una funzione lineare di  $y$ . Tenendo conto del T. III del § 1 si giunge al:

T. V. « *Esiste uno e un solo integrale della (A), definito nel dominio infinito  $D_3$ , che è regolare sulla retta impropria e che su  $\gamma$  si riduce ad una funzione assegnata  $f(t)$ , finita anche per  $t = t_0$  e  $t = t_1$ , cioè per  $x(t) \rightarrow +\infty$ . La funzione  $u(x, y)$ , così definita, per  $x \rightarrow +\infty$  tende a una funzione lineare di  $y$ :  $py + q$  (dove  $p$  e  $q$  sono determinate in modo che  $pa + q = f(t_0)$ ,  $pb + q = f(t_1)$ ); inoltre è:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_y(x, y) = p; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_{xx}(x, y) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_{yy}(x, y) = 0.$$

La  $u(x, y)$  è funzione analitica nei punti interni al dominio  $D_3$ , ma non per  $x \rightarrow +\infty$ , nel senso che essa in generale non si può sviluppare in serie di potenze di  $\frac{1}{x}$  e di  $y - y_0$  ( $a < y_0 < b$ ) ».

(1) Supporremo sempre nel seguito che, se è p. es.  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = +\infty$ , sia  $x(t) = \frac{1}{H(t)}$ , dove  $H(t_0) = 0$  e  $H(t)$  è funzione  $D^II$  (o  $D^I$ , secondo i problemi, che si considerano). Analoga ipotesi faremo nel caso, in cui sia  $y(t) \rightarrow +\infty$ , in problemi che troveremo poi, oppure quando si considerino curve nel piano  $X, Y$ .

Per la retta impropria non vale dunque in generale la proprietà fondamentale delle funzioni armoniche, per cui una di esse è prolungabile analiticamente al di là di un arco del contorno del dominio, in cui è definita, purchè tale arco sia analitico e i valori assunti dalla funzione sull'arco stesso siano analitici.

Il T. V vale anche se  $a = b$ , cioè se l'arco  $\gamma$ , quando  $x \rightarrow +\infty$  dall'una o dall'altra parte di esso, ha lo stesso asintoto  $y = a$ .

Si consideri ora un dominio del tipo  $D_4$  costituito dal dominio  $D_3$  definito sopra, e da un dominio  $D_3'$  dello stesso tipo di  $D_3$ , posto nel semipiano  $x < 0$  (fig. 2), avente per contorno una curva  $\gamma_1$  di equazioni parametriche  $x = x_1(t)$ ,  $y = y_1(t)$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ); sia  $\lim_{t \rightarrow t_0} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow t_1} x_1(t) = -\infty$ ;  $\lim_{t \rightarrow t_0} y_1(t) = a$ ;  $\lim_{t \rightarrow t_1} y_1(t) = b$ , cioè  $\gamma_1$  abbia per  $x \rightarrow -\infty$  gli stessi asintoti, che ha  $\gamma$  per  $x \rightarrow +\infty$ . Il dominio  $D_3$  contiene all'interno il segmento  $ab$  della retta impropria. Si dia su  $\gamma_1$  la funzione continua  $f_1(t)$ , colla condizione che sia  $f_1(t_0) = f(t_0)$ ,  $f_1(t_1) = f(t_1)$ ; allora nel dominio  $D_4$  esiste ed è unico l'integrale dell'equazione di LAPLACE (A), che su  $\gamma$  si riduce a  $f(t)$  e su  $\gamma_1$  a  $f_1(t)$ . Per  $|x| \rightarrow \infty$  vi è continuità per la  $u(x, y)$  e per le sue derivate prime e seconde; la  $u(x, y)$  per  $x \rightarrow \pm\infty$  tende a una stessa funzione lineare di  $y$ , ma si riduce in generale in  $D_3$  e in  $D_3'$  a due distinte funzioni analitiche, cioè la  $u(x, y)$  non è, in generale, analitica quando si attraversa la retta impropria.

Come già si è detto, il T. V e tutte le sue conseguenze valgono, qualunque sia la direzione a cui sono paralleli gli asintoti della curva  $\gamma$  (e della curva  $\gamma_1$ ), e comunque sia disposta  $\gamma$  (o  $\gamma_1$ ) rispetto agli assi coordinati, attraversata o no da questi.

Nei T. III, IV e V si può supporre che  $\gamma$  (o  $\gamma_1$ ) soddisfi condizioni meno restrittive di quelle imposte nei relativi enunciati;  $\gamma$  (o  $\gamma_1$ ) può avere un numero finito di punti angolosi; è facile ricondurre questo caso a quelli studiati nei T. III, IV e V. In particolare il T. V vale per una *semistriscia*, limitata da due semirette parallele dirette nello stesso verso, e dal segmento che ne congiunge gli estremi.

Una conseguenza importante della discussione effettuata è che la funzione armonica risultante dalla risoluzione del problema di DIRICHLET in un rettangolo  $ABCD$  con un lato  $CD$  mobile (fig. 4) non può mantenersi regolare (nel senso dato a questo termine nell'introduzione), se, allontanandosi  $CD$  indefinitamente, i valori dati su  $CD$  non tendono alla linearità.

Passiamo ora a considerare domini di tipo  $D_3$  o  $D_4$  nel piano  $X, Y$  per le equazioni (B) e (C). Si ha immediatamente il:

T. VI. « In un dominio infinito  $D_3$ , posto, p. es., tutto nel semipiano  $X > 0$  e avente per contorno un arco di curva  $\gamma$  <sup>(1)</sup> di equazioni parametriche  $X = X(t)$ ,  $Y = Y(t)$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) avente per asintoti le rette  $Y = a$ ,  $Y = b$  (fig. 2, in cui si pongano  $X, Y$  invece di  $x, y$ , e si consideri il solo semi-

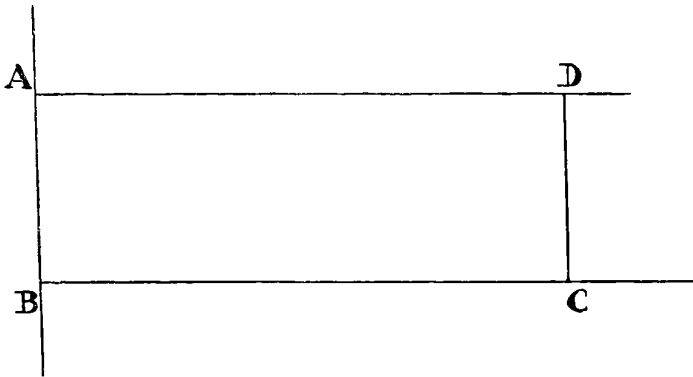


Fig. 4

piano  $X > 0$ ), esiste uno e un solo integrale della (B), che su  $\gamma$  si riduce ad una funzione continua assegnata  $f(t)$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) e per  $X \rightarrow +\infty$  tende ad una funzione  $g(Y)$ , tale che  $g(a) = f(t_0)$ ,  $g(b) = f(t_1)$ ; tale integrale è analitico nei punti interni al dominio  $D_3$  ».

Infatti il cambiamento di variabili (1) muta la (B) nella (A) e il dominio  $D_3$  in un dominio  $D_1$  del piano  $x, y$ , in cui il problema di DIRICHLET è senz'altro risolubile.

Il T. VI vale anche se  $a = b$ . Analogamente vale il:

T. VII. « In un dominio  $D_4$ , costituito dal dominio  $D_3$ , definito nel T. VI. e da un dominio analogo  $D_3'$ , posto nel semipiano  $X < 0$  e avente per contorno una curva  $\gamma_1$ , che per  $X \rightarrow -\infty$  ha gli stessi asintoti  $Y = a$ ,  $Y = b$  che ha  $\gamma$  per  $X \rightarrow +\infty$  (fig. 2, in cui si pongano  $X, Y$  al posto di  $x, y$ ), esiste uno e un solo integrale della (B), che su  $\gamma$  e su  $\gamma_1$  si riduce a funzioni continue assegnate,  $f(t)$  e  $f_1(t)$  rispettivamente, tali che sia  $f(t_0) = f_1(t_0)$ ,  $f(t_1) = f_1(t_1)$ . Tale integrale è funzione analitica nei punti interni a  $D_3$  e a  $D_3'$  e anche quando si attraversa la retta impropria, cioè per  $|X|$  abbastanza grande  $u(X, Y)$  è sviluppabile in serie di potenze di  $\frac{1}{X}$  e di  $Y - Y_0$  ( $a < Y_0 < b$ ):

(1) Si suppone che  $\gamma$  sia un contorno del tipo, che si considera usualmente nella teoria delle funzioni armoniche.

sulla retta impropria la  $u(X, Y)$  si riduce a una funzione analitica di  $Y$ , ed è:

$$\lim_{|X| \rightarrow +\infty} u_X(X, Y) = \lim_{|X| \rightarrow +\infty} u_{XX}(X, Y) = 0 \gg.$$

Infatti il cambiamento di variabili (1) muta il dominio  $D_4$  in un dominio  $D_2$  tutto a distanza finita nel piano  $x, y$ , attraversato dall'asse  $y$ , per cui è risolubile il problema di DIRICHLET. Dalla (B) stessa segue che  $\lim_{X \rightarrow +\infty} u_{XX}(X, Y) = 0$ ; inoltre, poichè  $u_X(X, Y) = -\frac{1}{X^2} u_x$ , si vede che è:  $\lim_{|X| \rightarrow +\infty} u_X(X, Y) = 0$ , e precisamente che per  $|X| \rightarrow +\infty$  la  $u_X(X, Y)$  si annulla come  $\frac{1}{X^2}$ .

Si consideri infine nel piano  $X, Y$  un dominio  $\delta$  avente per contorno due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  poste, p. es., nel semipiano  $X \geq 0$ , senza punti a comune (fig. 5), di cui  $\gamma_1$  ha in comune coll'asse  $Y$  il solo estremo  $M(0, m)$ , ha per asintoto per  $X \rightarrow +\infty$  la retta  $Y = a$  e ha le equazioni parametriche

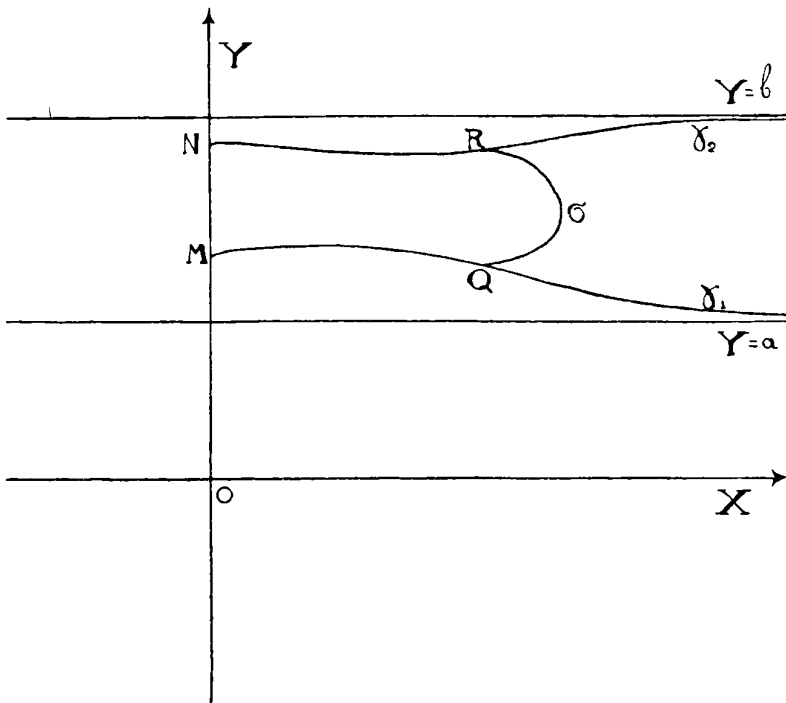


Fig. 5

$X = X_1(t), Y = Y_1(t)$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ), e  $\gamma_2$  ha in comune coll'asse  $Y$  il solo estremo  $N(0, n)$ , ha come asintoto per  $X \rightarrow +\infty$  la retta  $Y = b$  e ha le equazioni parametriche  $X = X_2(t), Y = Y_2(t)$  ( $t_0 \leq t \leq t_1; m < n; a < b$ ;

$$Y_1(t_0) = m; \quad Y_2(t_0) = n; \quad Y_1(t_1) = a; \quad Y_2(t_1) = b; \quad X_1(t_0) = 0; \quad X_2(t_0) = 0; \\ \lim_{t \rightarrow t_1} X_1(t) = \lim_{t \rightarrow t_1} X_2(t) = +\infty.$$

In queste ipotesi vale il:

T. VIII. « Nel dominio  $\delta$  esiste uno e un solo integrale della (B), regolare per  $X=0$ , che si riduce a funzioni continue assegnate  $f_1(t)$  su  $\gamma_1$  e  $f_2(t)$  su  $\gamma_2$ , e che soddisfa la condizione:

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} u(X, Y) = \varphi(Y) \quad (a \leq Y \leq b),$$

dove  $\varphi(Y)$  è una funzione continua assegnata ad arbitrio, ma tale che  $f_1(t_1) = \varphi(a)$ ,  $f_2(t_1) = \varphi(b)$ . Tale integrale è funzione analitica di  $X, Y$  nei punti interni a  $\delta$ ; è  $u(0, Y) = pY + q$  (dove  $p$  e  $q$  sono tali che  $pm + q = f_1(t_0)$ ,  $pn + q = f_2(t_0)$ );  $u_Y(0, Y) = p$ ,  $\lim_{X \rightarrow 0} u_X(X, Y) = \lim_{X \rightarrow 0} u_{Y^2}(X, Y) = 0$ , mentre  $u_{XX}(X, Y)$  per  $X \rightarrow 0$  tende a infinito in generale, ma  $\lim_{X \rightarrow 0} Xu_{XX}(X, Y) = 0$  ».

Infatti il cambiamento di variabili (1) muta la (B) nella (A) e il dominio  $\delta$  nel piano  $X, Y$  in un dominio dello stesso tipo nel piano  $x, y$ ; al segmento  $ab$  della retta impropria  $|X| = \infty$  corrisponde il segmento  $ab$  dell'asse  $y$ , e al segmento  $mn$  dell'asse  $Y$  corrisponde il segmento  $mn$  della retta impropria  $|x| = \infty$ . Il T. VIII è così ricondotto al T. V (1). Per studiare il comportamento della funzione  $u(X, Y)$ , di cui si è dimostrata l'esistenza, per  $X \rightarrow 0$  basta considerare il dominio compreso tra il segmento  $MN$  dell'asse  $Y$ , due archi parziali  $MQ$  e  $NR$  di  $\gamma_1$  e di  $\gamma_2$  rispettivamente (fig. 5) e un arco  $\sigma$  tutto interno a  $\delta$  che congiunge i punti  $Q$  e  $R$  e non ha altri punti a comune colle curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , e ricercare in tale dominio l'integrale della (B) che è regolare per  $X=0$  e che sugli archi  $MQ, NR$  e  $\sigma$  (e quindi in tutto il dominio) coincide con  $u(X, Y)$ ; il T. III del § 1 mostra che  $u(X, Y)$  ha per  $X \rightarrow 0$  il comportamento che è detto nell'enunciato. Il teorema vale anche quando  $a = b$ , oppure quando coincidono i punti  $M$  e  $N$ .

Risultati di maggiore interesse si hanno nello studio degli integrali  $z(X, Y)$  della (C) che restano finiti sulla retta  $|X| = \infty$ , o su un segmento di questa. Se un integrale  $z(X, Y)$  della (C) è definito in un dominio  $D$  al cui contorno appartiene un segmento  $ab$  della retta impropria  $|X| = \infty$ , ed è finito, p. es., per  $X \rightarrow +\infty$ , poichè è  $z(X, Y) = Xu(X, Y)$ , è anche

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} u(X, Y) = 0.$$

(1) Nel T. V si supponeva che il dominio  $D_3$  non avesse punti a comune coll'asse  $y$ ; ciò però non è restrittivo, perchè l'equazione (A) non muta per una traslazione degli assi coordinati.

Col cambiamento di variabili (1), ponendo:  $u\left(\frac{1}{x}, y\right) = v(x, y)$ , la funzione  $v(x, y)$  soddisfa l'equazione di LAPLACE (A) e la condizione:  $v(0, y) = 0$  ( $a \leq y \leq b$ ), per una proprietà nota (4) delle funzioni armoniche è allora  $v(-x, y) = -v(x, y)$ . Dunque è anche:  $u(-X, Y) = -u(X, Y)$ , e la  $u(X, Y)$  è una funzione dispari di  $X$ , definita, oltre che nel dominio  $D$ , anche nel dominio  $D'$  simmetrico di  $D$  rispetto all'asse  $Y$ , ed è analitica anche per  $|X| \rightarrow +\infty$ . La funzione  $z(X, Y) = Xu(X, Y)$  è allora definita in  $D$  e nel dominio simmetrico  $D'$  ed è funzione pari di  $X$ ; si vede subito che è

$$\lim_{|X| \rightarrow +\infty} z_X(X, Y) = \lim_{|X| \rightarrow +\infty} z_{XX}(X, Y) = 0. \text{ Dunque:}$$

T. IX. « Ogni integrale della (C), finito sulla retta impropria  $|X| = \infty$ , è necessariamente una funzione pari di  $X$  ed è analitico, quando si attraversa la retta impropria, su cui esso si riduce ad una funzione analitica di  $Y$  ».

Ne segue che i teoremi di esistenza e di unicità per la (C) in domini il cui contorno contiene un segmento della retta impropria  $|X| = \infty$  hanno una forma particolarmente semplice. Così dai precedenti T. VI e T. VII tenendo conto della relazione  $z(X, Y) = Xu(X, Y)$  si trae subito il:

T. X. « Nel dominio  $D_3$  definito nel T. VI (oppure nel dominio  $\delta$ , definito nel T. VIII) e nel dominio simmetrico rispetto all'asse  $Y$ , esiste uno e un solo integrale  $z(X, Y)$  della (C), che è finito per  $X \rightarrow +\infty$  e che assume valori assegnati sul contorno  $\gamma$  del dominio  $D_3$  (su  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  nel caso di un dominio  $\delta$ , caso in cui bisogna imporre inoltre che  $z$  sia regolare per  $X = 0$ ) ».

Il dominio  $\delta$  e il suo simmetrico rispetto all'asse  $Y$  costituiscono un dominio di tipo  $D_5$  compreso tra le curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  e le loro simmetriche rispetto all'asse  $Y$ . L'integrale  $z(X, Y)$  è funzione pari di  $X$  e quindi costituisce una stessa funzione analitica per  $X > 0$  e per  $X < 0$ ; il prolungamento però avviene attraverso alla retta impropria, e non, in generale, attraverso all'asse  $Y$ .

Le relazioni tra le equazioni (A), (B), (C) permettono di risolvere il problema di CAUCHY per le (B) e (C), quando la retta portante i dati è la retta impropria. Vale infatti il:

T. XI. « Nel dominio  $C$  costituito dalle due aree infinite, simmetriche rispetto all'asse  $Y$ , aventi per contorno nei due semipiani  $X > 0$  e  $X < 0$  i

(4) GOURSAT, *Cours d'Analyse*, 2<sup>e</sup> ed., Paris 1915, t. III, Chap. XXVII, *Équations linéaires du type elliptique*, I. *Fonctions harmoniques. Intégrale de Poisson*, § 511, *Prolongement analytique d'une fonction harmonique*, pag. 192-195.

due archi della curva:

$$\frac{1}{X^2} + (Y - Y_0)^2 = R^2,$$

e corrispondenti a  $X > \frac{1}{R}$  e a  $X < -\frac{1}{R}$ , esiste uno e un solo integrale della (B) oppure della (C), regolare all'infinito, che soddisfa nel caso della (B) le condizioni ai limiti:

$$\lim_{|X| \rightarrow \infty} u(X, Y) = \sum_n \alpha_n (Y - Y_0)^n; \quad \lim_{|X| \rightarrow \infty} X^2 u_X(X, Y) = \sum_n \beta_n (Y - Y_0)^n,$$

e nel caso della (C) l'unica condizione:

$$\lim_{|X| \rightarrow \infty} z(X, Y) = \sum_n \gamma_n (Y - Y_0)^n,$$

dove le serie convergono per  $|Y - Y_0| < R$ .

Tali integrali sono analitici nei punti interni a C e anche quando si attraversa la retta impropria. Le  $u_X$ ,  $z_X$ ,  $u_{XX}$ ,  $z_{XX}$  tendono a zero per  $|X| \rightarrow +\infty$ .

Nel caso della (B) il teorema segue subito, mediante il cambiamento di variabili (1) dal teorema analogo per la (A), tenendo conto che  $u_x = -X^2 u_X$ . Per la (C), poichè  $z = Xu$ , il problema si riconduce a determinare una funzione  $u$  che soddisfi la (B) e le condizioni:

$$\begin{aligned} \lim_{|X| \rightarrow \infty} u(X, Y) &= 0; \\ \lim_{|X| \rightarrow \infty} X^2 u_X(X, Y) &= - \lim_{|X| \rightarrow \infty} z(X, Y) = - \sum_n \gamma_n (Y - Y_0)^n. \end{aligned}$$

L'ultima parte del teorema segue da proprietà già dimostrate. Nel caso della (C) per il T. IX l'integrale  $z(X, Y)$  è funzione pari di  $X$ ; è notevole il fatto che  $z(X, Y)$  è determinato nel dominio C, quando si diano i valori di  $z$  soltanto sulla retta impropria, che per la (C) è eccezionale, così che *un integrale della (C) regolare sulla retta  $|X| = \infty$  e nullo su di essa è identicamente nullo*. Sarebbe facile dare le espressioni esplicite di  $u$  e di  $z$  mediante serie di polinomi armonici in  $\frac{1}{X}$  e in  $Y$ .

Non si può risolvere invece il problema di CAUCHY per la (A), quando la retta portante i dati sia la retta impropria, oppure per la (B) e la (C), quando la retta portante i dati sia l'asse  $Y$ ; infatti se l'integrale della (B) o della (C) è analitico (o anche solo funzione  $D^H$ ), quando si attraversa l'asse  $Y$ , le  $z(0, Y)$ ,  $u(0, Y)$ ,  $z_X(0, Y)$ ,  $u_X(0, Y)$  devono essere funzioni lineari di  $Y$ . Ciò dipende dal fatto che l'asse  $Y$  è una caratteristica per le (B) e (C) e la retta impropria è una caratteristica per la (A).



§ 3. Si consideri nel piano  $x, y$  il dominio infinito di tipo  $D_5$ , avente per contorno due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , prive di punti doppi e di cuspidi, di equazioni parametriche rispettive:

$$x = x_1(t), y = y_1(t) \quad \text{e} \quad x = x_2(t), y = y_2(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1),$$

coll'ipotesi che sia:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} x_2(t) = -\infty; \quad \lim_{t \rightarrow t_1} x_1(t) = \lim_{t \rightarrow t_1} x_2(t) = +\infty,$$

e precisamente che sia:

$$x_1(t) = \frac{1}{H_1(t)}; \quad x_2(t) = \frac{1}{H_2(t)},$$

dove  $H_1(t)$  e  $H_2(t)$  sono funzioni  $D^H$  nulle per  $t = t_0$  e  $t = t_1$ , mentre:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} y_1(t) = \lim_{t \rightarrow t_1} y_1(t) = a; \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y_2(t) = \lim_{t \rightarrow t_1} y_2(t) = b \quad (a < b);$$

cioè la curva  $\gamma_1$  abbia sia per  $x \rightarrow +\infty$  che per  $x \rightarrow -\infty$  per asintoto la stessa retta  $y = a$ , e analogamente  $\gamma_2$  abbia l'asintoto  $y = b$ . Le curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  non abbiano punti a comune; ognuna di esse incontri in un punto soltanto l'asse  $y$ ; p. es.  $\gamma_1$  incontri l'asse  $y$  nel punto  $M(0, m)$  e  $\gamma_2$  nel punto  $N(0, n)$  (fig. 3).

Per brevità chiameremo spesso un dominio del tipo  $D_5$  *striscia compresa tra le curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$* ; caso tipico è la striscia compresa tra due rette parallele. Analoga definizione di striscia si dà nel piano  $X, Y$ .

Nelle ipotesi precedenti circa le curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , risolveremo il problema di DIRICHLET nella striscia compresa tra esse. Si ha il:

T. XII. « *Esiste una e una sola funzione armonica  $u(x, y)$  definita nella striscia  $D_5$  compresa tra le curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  (fig. 3), che è regolare per  $|x| \rightarrow \infty$ ,  $c$  che su  $\gamma_1$  e su  $\gamma_2$  si riduce a funzioni assegnate  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$ , colla condizione che sia  $f_1(t_0) = f_1(t_1) = h$ ,  $f_2(t_0) = f_2(t_1) = k$ . Tale funzione  $u(x, y)$  per  $x \rightarrow \pm\infty$  ( $a \leq y \leq b$ ) tende ad una stessa funzione lineare  $py + q$ , dove  $p$  e  $q$  sono determinate in modo che sia  $pa + q = h$ ,  $pb + q = k$ ; è  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_y(x, y) = p$ ,*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_x(x, y) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u_{xx}(x, y) = 0.$$

*La  $u(x, y)$  è analitica nei punti interni alla striscia, ma in generale non in un intorno dei punti della retta impropria »* (\*).

(\*) Nel senso che per  $a < y_0 < b$ , la  $u(x, y)$  non è in generale sviluppabile in serie di potenze di  $\frac{1}{x}$  e di  $y - y_0$ .

In particolare può essere  $a = b$ , cioè le curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  possono avere lo stesso asintoto  $y = a$ ; in tale caso deve essere  $f_1(t_0) = f_1(t_1) = f_2(t_0) = f_2(t_1)$  e non occorre studiare il comportamento delle derivate di  $u$  all'infinito.

Il cambiamento di variabili:

$$(1) \quad X = \frac{1}{x}, \quad Y = y$$

muta l'equazione di LAPLACE (A) nella (B) e la striscia compresa tra le curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  in una striscia analoga nel piano  $X, Y$ . Il T. XII sarà senz'altro dimostrato, quando sarà stato dimostrato il:

T. XIII. « *In una striscia  $D_5$ , compresa tra due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  (fig. 3, in cui si pongano  $X, Y$  al posto di  $x$  e  $y$ ) esiste uno e un solo integrale  $u(X, Y)$  della (B), regolare per  $X = 0$  e per  $|X| = \infty$ , che si riduce a funzioni assegnate  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ) su  $\gamma_1$  e su  $\gamma_2$ , tali che  $f_1(t_0) = f_1(t_1)$ ,  $f_2(t_0) = f_2(t_1)$  (così che vi sia continuità nei punti all'infinito di  $\gamma_1$  e di  $\gamma_2$ ). Tale integrale è analitico in tutti i punti del dominio  $D_5$  e anche per  $|X| = \infty$ , cioè nei punti del segmento  $ab$  (1) della retta impropria, quando si attraversa tale retta (2). Non è analitico, in generale, quando si attraversa l'asse  $Y$ ; precisamente  $u(0, Y) = pY + q$ , dove  $p$  e  $q$  sono determinate in modo che  $u$  assuma i valori assegnati in  $M$  e in  $N$ ; è poi:*

$$u_Y(0, Y) = p, \quad \lim_{X \rightarrow 0} u_X(X, Y) = \lim_{X \rightarrow 0} u_{YY}(X, Y) = 0,$$

mentre la  $u_{XX}(X, Y)$  per  $X \rightarrow 0$  tende a infinito, ma è  $\lim_{X \rightarrow 0} Xu_X(X, Y) = 0$  ».

Dimostriamo, anzi tutto, l'unicità della funzione che soddisfa il teorema. Un integrale  $u(X, Y)$  della (B) non può avere nè massimi nè minimi in punti interni a  $D_5$  a distanza finita, e ciò per il T. II del § 1; dunque i massimi e i minimi di  $u(X, Y)$  sono o su  $\gamma_1$  o su  $\gamma_2$  oppure nei punti all'infinito di  $D_5$ .

Il cambiamento di variabili (1) muta la (B) nella (A) e i punti, in cui  $|X| = \infty$ , nei punti in cui  $x = 0$ ; ma allora i punti della retta  $x = 0$  sono interni alla striscia ottenuta da  $D_5$  col cambiamento di variabili (1), e in essi un integrale della (A), definito in tale striscia, non può avere nè massimi nè minimi. I massimi e i minimi di  $u(X, Y)$  sono dunque su  $\gamma_1$  o su  $\gamma_2$ , e se  $u$  è nulla su  $\gamma_1$  e su  $\gamma_2$ , è nulla in tutto  $D_5$ .

(1) Manteniamo qui nel piano  $X, Y$  le identiche notazioni usate sopra nel piano  $x, y$ , indicando ancora con  $Y = a$  e  $Y = b$  gli asintoti di  $\gamma_1$  e di  $\gamma_2$ .

(2) Ciò significa che comunque sia  $Y_0$  ( $a < Y_0 < b$ ), per  $|X|$  abbastanza grande e  $Y - Y_0$  abbastanza piccolo, la  $u(X, Y)$  è sviluppabile in serie di potenze di  $\frac{1}{X}$  e di  $Y - Y_0$ .

Passiamo ora a dimostrare l'esistenza della funzione  $u(X, Y)$ , che soddisfa le condizioni volute dal teorema. Se  $\tau_1$  e  $\tau_2$  sono i valori di  $t$  corrispondenti ai punti  $M$  e  $N$ , si determinino le costanti  $p$  e  $q$  in modo che sia  $pm + q = f(\tau_1)$ ;  $pn + q = f(\tau_2)$ ; allora se un integrale  $u(X, Y)$  soddisfa le condizioni volute dal teorema, è  $u(0, Y) = pY + q$ , e mutando  $u(X, Y)$ ,  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  in  $u(X, Y) - pY - q$ ,  $f_1(t) - p\gamma_1(t) - q$ ,  $f_2(t) - p\gamma_2(t) - q$ , si può supporre addirittura che sia:  $u(0, X) = 0$ ,  $f_1(\tau_1) = f_2(\tau_2) = 0$ . Inoltre non è restrittivo supporre  $f_1(t) \geq 0$ ,  $f_2(t) \geq 0$  <sup>(1)</sup>; sia infine  $f_1(t) < M$ ,  $f_2(t) < N$ .

Se  $h$  e  $k$  sono due quantità positive, si consideri la parte di  $D_5$  corrispondente a  $X \geq h$ , e a  $X \leq -k$ , e si indichi con  $D_{hk}$  il dominio parziale, così ottenuto (v. fig. 3, in cui si scrivano  $X, Y$  al posto di  $x$  e di  $y$ ). Si costruisca l'integrale della (B), definito in  $D_{hk}$ , che sulle parti di  $\gamma_1$  e di  $\gamma_2$ , che fanno parte del contorno di  $D_{hk}$  si riduce a  $f_1$  e a  $f_2$  rispettivamente, e che è nullo sulle rette  $X = h$  e  $X = -k$ . L'integrale della (B),  $u(X, Y; h, k)$ , così ottenuto, certo esistente per il T. VII del § 2, soddisfa la condizione:

$$0 \leq u(X, Y; h, k) \leq M.$$

Facendo variare  $h$  e  $k$  si ricerchi  $\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} u(X, Y; h, k)$  <sup>(2)</sup>; ora  $u(X, Y; h, k)$

è funzione decrescente di  $h$  e  $k$ , perchè, se è, p. es.,  $h > h_1$ ,  $k > k_1$ , le due funzioni  $u(X, Y; h, k)$  e  $u(X, Y; h_1, k_1)$  hanno uguali valori su  $\gamma_1$  e su  $\gamma_2$ , per  $X = h$  è:  $u(h, Y; h, k) = 0$ ;  $u(h, Y; h_1, k_1) \geq 0$ , e per  $X = -k$  è:  $u(-k, Y; h, k) = 0$ ;  $u(-k, Y; h_1, k_1) \geq 0$ , e allora sul contorno di  $D_{hk}$  e quindi in  $D_{hk}$  è:  $u(X, Y; h_1, k_1) - u(X, Y; h, k) \geq 0$ ; la stessa relazione vale se  $h = h_1$  e  $k > k_1$ , o  $h > h_1$  e  $k = k_1$ .

Dunque  $u(X, Y; h, k)$  è funzione decrescente limitata di  $h$  e  $k$ , e tende a un limite  $u(X, Y)$  per  $h \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 0$ . Si deve provare che la funzione  $u(X, Y)$  così costruita soddisfa la (B) per  $X \neq 0$ . Siano  $h_1, h_2 \dots h_n, \dots$   $k_1, k_2 \dots k_n, \dots$  due successioni decrescenti di quantità positive, e sia  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = 0$ ;

(1) Se non è  $f_1(t) \geq 0$ ,  $f_2(t) \geq 0$ , si possono trovare delle funzioni  $\varphi_1(t)$ ,  $\psi_1(t)$ ,  $\varphi_2(t)$ ,  $\psi_2(t)$  sempre positive o nulle, tali che sia  $f_1(t) = \varphi_1(t) - \psi_1(t)$ ;  $f_2(t) = \varphi_2(t) - \psi_2(t)$  (si può prendere, p. es.,  $\varphi_1 = f_1$  e  $\psi_1 = |f_1| - f_1$ ) e porre  $u(x, y) = v(x, y) - w(x, y)$ , dove  $v(x, y)$  è un integrale della (B), che si riduce a  $\varphi_1(t)$  e a  $\varphi_2(t)$  rispettivamente su  $\gamma_1$  e su  $\gamma_2$ , e  $w(x, y)$  è un integrale della (B) che si riduce a  $\psi_1(t)$  e a  $\psi_2(t)$  rispettivamente su  $\gamma_1$  e su  $\gamma_2$ .

(2) Si segue qui con qualche modificazione, dovuta alla diversità del problema il metodo di G. ASCOLI. *Sull'equazione di Laplace nello spazio iperbolico*. « Math. Zeit ». B. 31, H. 1. 1929, cfr. in particolare parte 4. § 21-25, pag. 76-80.

allora è anche:  $u(X, Y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u(X, Y; h_n, k_n)$ , che si può scrivere:

$$u(X, Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} [u(X, Y; h_{n+1}, k_{n+1}) - u(X, Y; h_n, k_n)] + u(X, Y; h_1, k_1);$$

i termini di questa serie sono soluzioni della (B) sempre positive, e quindi, in ogni dominio  $\delta$  senza punti a comune coll'asse  $Y$ , sono funzioni armoniche nelle variabili  $x, y$ ; per un teorema di HARNACK <sup>(1)</sup> sulle serie convergenti di funzioni armoniche positive la  $u$  è funzione armonica nelle  $x, y$  e quindi soddisfa la (B) nelle  $X, Y$ .

Si dimostra subito che su  $\gamma_1$  e su  $\gamma_2$  la  $u(X, Y)$  si riduce alle funzioni assegnate  $f_1(t)$  e  $f_2(t)$  <sup>(2)</sup>.

Si deve ancora studiare il comportamento della  $u(X, Y)$  per  $X \rightarrow 0$ ; si prenda, p. es., nel semipiano  $X > 0$  un arco di curva  $\sigma$  tutto interno alla striscia  $D_\varepsilon$ , avente un estremo  $Q$  su  $\gamma_1$ , e un estremo  $R$  su  $\gamma_2$ , e si consideri il contorno, che indichiamo con  $\gamma$ , formato dagli archetti  $MQ$  di  $\gamma_1$ ,  $\sigma$  e  $RN$  di  $\gamma_2$  (v. fig. 3, in cui si sostituiscano  $X, Y$  ad  $x, y$ ); la curva  $\gamma$  soddisfi le ipotesi del T. III del § 1.

Si costruisca la funzione:

$$v(X, Y) = \int_{\gamma} \mu(t) \frac{d}{dt} \operatorname{arctg} \frac{[Y - \eta(t)]X \xi(t)}{X - \xi(t)} dt,$$

dove  $\xi(t), \eta(t)$  sono le coordinate correnti di un punto variabile su  $\gamma$  e  $\mu(t)$  è determinata in modo che  $v(X, Y)$  su  $\gamma$  assuma gli stessi valori di  $u(X, Y)$ .

Allora nel dominio compreso tra  $\gamma$  e l'asse  $Y$  è:

$$(2) \quad v(X, Y) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} u(X, Y; h, k) = u(X, Y).$$

Infatti sia data una quantità  $\varepsilon$ , e si fissi un valore  $h_0$  abbastanza piccolo, perchè per  $h < h_0$  la  $X = h$  incontri gli archetti  $MQ$  e  $NR$ , e perchè valgano le condizioni, che diremo sotto. Sulla retta  $X = h$  è  $u(h, Y; h, k) = 0$  e  $v(h, Y) < \varepsilon$ , se  $h$  è abbastanza piccolo, perchè  $\lim_{X \rightarrow 0} v(X, Y) = 0$  (v. T. III del § 1). Sulle parti di  $MQ$  e di  $NR$  corrispondenti a  $X > h$  è  $v(X, Y) - u(X, Y; h, k) = 0$ ; se  $h$  e  $k$  sono abbastanza piccoli su  $\sigma$  è:

$$v(X, Y) - u(X, Y; h, k) = u(X, Y) - u(X, Y; h, k) < \varepsilon.$$

<sup>(1)</sup> GOURSAT, *Cours d'Analyse*, t. III, 2<sup>e</sup> éd., Paris 1915, Chap. XXVII, *Équations linéaires du type elliptique*, I. *Fonctions Harmoniques. Intégrale de Poisson*, § 510, *Théorème de Harnack* (pp. 189-192).

<sup>(2)</sup> La dimostrazione è del tutto analoga a quella data da G. ASCOLI, l. c., § 24, pag. 79.

Allora, per  $h$  e  $k$  abbastanza piccoli, sul contorno del dominio, e quindi in tutto il dominio limitato da  $\gamma$  e dalla retta  $X = h$  è:

$$v(X, Y) - u(X, Y; h, k) < \varepsilon.$$

Ne segue la (2) (1).

Quindi si possono applicare i risultati del T. III del § 1, ottenendo:

$$u(0, Y) = u_X(0, Y) = u_Y(0, Y) = u_{YY}(0, Y) = 0,$$

mentre  $u_{XX}(X, Y)$  tende a infinito per  $X \rightarrow 0$ , ma  $\lim_{X \rightarrow 0} Xu_{XX}(X, Y) = 0$ .

L'integrale  $u(X, Y)$  è analitico nei punti interni a  $D_5$  e per  $|X| \rightarrow +\infty$ , cioè quando si attraversa la retta impropria, come si vede mediante il cambiamento di variabili (1); non è analitico per  $X = 0$ . L'integrale  $u(X, Y)$  nelle due semistrisce, corrispondenti a  $X > 0$  e a  $X < 0$  costituisce una stessa funzione analitica, ma il collegamento avviene attraverso alla retta impropria, e non attraverso all'asse  $Y$ .

Il T. XIII è dunque completamente dimostrato; esso vale anche se le due curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  hanno in comune un punto sull'asse  $Y$ , cioè se  $M \equiv N$ .

Ne riesce dimostrato contemporaneamente anche il T. XII; poichè l'equazione di LAPLACE (A) non muta per una rotazione degli assi coordinati, il T. XII è valido, qualunque sia la direzione del piano, a cui sono paralleli gli asintoti delle curve  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ .

§ 4. Il T. V del § 2 e il T. XII del § 3 valgono per l'equazione (A), qualunque sia la direzione a cui sono paralleli gli asintoti del contorno, in particolare se questi sono paralleli all'asse  $y$ ; basta nei relativi enunciati scambiare  $x$  con  $y$ . Questa osservazione permette mediante il cambiamento di variabili:

$$(1) \quad X = \frac{1}{x}, \quad Y = y$$

di studiare per le equazioni (B) e (C) i teoremi di esistenza e di unicità in domini del piano  $X, Y$  aventi come parti del loro contorno segmenti o semirette della retta impropria  $|Y| = \infty$ . Poichè un integrale dell'equazione di LAPLACE (A) è funzione lineare di  $x$  sulla retta  $|y| = \infty$ , un integrale della (B) regolare sulla retta impropria  $|Y| = \infty$ , si riduce su di essa a una funzione del tipo  $\frac{p}{X} + q$ , e un integrale della (C) a una funzione lineare  $p + qX$ .

(1) Il metodo qui seguito può servire a introdurre ipotesi un po' più generali circa il contorno  $\gamma$  nei T. III, IV e V precedenti.

Si considerino nel piano  $x, y$  domini di tipo  $D_3, D_4, D_5$  i cui contorni abbiano asintoti paralleli all'asse  $y$ , ma non coincidenti con esso; tali domini siano posti, p. es., per intero nel semipiano  $x > 0$ . Il cambiamento di variabili (1) muta quei domini rispettivamente in domini di tipo  $D_3, D_4, D_5$ , i cui contorni hanno asintoti paralleli all'asse  $Y$ . Dunque il T. VI del § 2 e il T. XII del § 3, in cui si scambino  $x$  con  $y$  e si scrivano poi  $X, Y$  al posto di  $x$  e  $y$ , valgono anche per le (B) e (C), tenendo però conto che qui

$$\lim_{|Y| \rightarrow +\infty} u(X, Y) = \frac{p}{X} + q.$$

Sia data ora una curva  $\gamma$  posta, p. es., nel semipiano  $X > 0$ , di equazioni parametriche  $X = X(t), Y = Y(t)$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ), tale che sia  $\lim_{t \rightarrow t_0} X(t) = m$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_1} X(t) = +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} Y(t) = +\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_1} Y(t) = a$ , cioè una curva  $\gamma$ , che abbia due asintoti ortogonali tra loro (fig. 6, in cui si consideri per ora il solo semipiano  $X > 0$ ). Vale il:

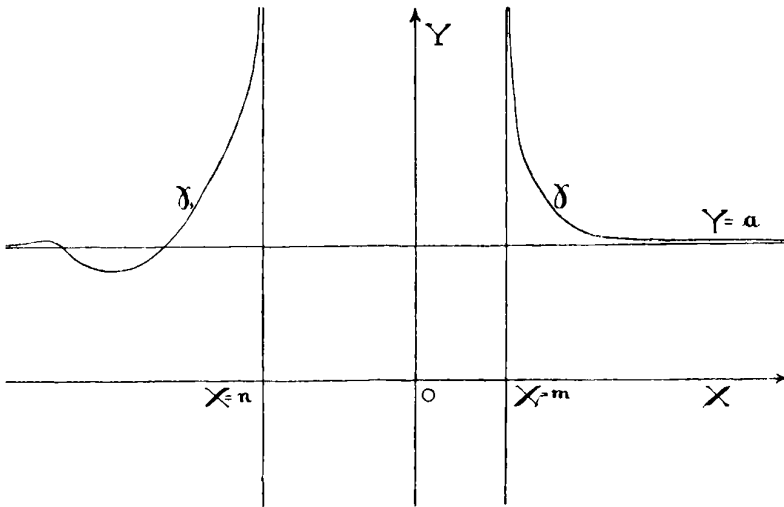


Fig. 6

T. XIV. « Nel dominio  $D$ , avente per contorno la curva  $\gamma$  e le semirette  $Y \geq a$  della retta impropria  $|X| = \infty$  e  $X \geq m$  della retta impropria  $|Y| = \infty$ , esiste uno e un solo integrale della (B), che è regolare all'infinito, che su  $\gamma$  si riduce ad una funzione assegnata  $f(t)$ , e che soddisfa la condizione:

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} u(X, Y) = \varphi(Y) \quad (a \leq Y \leq +\infty),$$

dove  $\varphi(Y)$  è una funzione assegnata sempre finita, supposto che sia  $\lim_{Y \rightarrow +\infty} \varphi(Y) = 0$ ,

$f(t_0) = 0$  <sup>(1)</sup> e  $f(t_1) = \varphi(a)$ . Tale integrale è analitico nei punti interni a  $D$  ed è nullo colle sue derivate prime e seconde per  $Y \rightarrow +\infty$ ,  $m \leq X \leq +\infty$ .

Infatti il cambiamento di variabili (1) riduce il teorema al teorema di esistenza e di unicità nel dominio (che è di tipo  $D_3$ ), compreso tra una curva  $\sigma$ , trasformata di  $\gamma$ , avente un asintoto  $x = \frac{1}{m}$  per  $y \rightarrow +\infty$ , terminata a un punto  $(0, a)$  dell'asse  $y$ , e il semiasse  $y$ , corrispondente a  $y \geq a$ , quando ne siano dati i valori su  $\gamma$  e su tale semiasse; il risultato è allora una conseguenza del T. V del § 2 per la (A).

Tenendo conto del T. IX del § 2 si trova subito che una funzione  $z(X, Y)$ , integrale della (C), che sia finita sulle rette  $|X| = \infty$  e  $|Y| = \infty$ , è determinata come funzione pari di  $X$  nel dominio  $D$  e nel dominio simmetrico di esso rispetto all'asse  $Y$ , dando i valori di  $z(X, Y)$  su  $\gamma$  soltanto; sulla semiretta  $X \geq m$  della retta impropria  $|Y| = \infty$ ,  $z$  si riduce alla costante  $f(t_0)$  e le sue derivate prime e seconde si annullano; sulla semiretta  $Y > a$  della retta  $|X| = \infty$  la  $z(X, Y)$  si riduce ad una funzione analitica di  $Y$  ben determinata.

Sempre tenendo conto delle (1), si vede che se  $D'$  è un dominio analogo a  $D$ , posto però nel semipiano  $X < 0$ , e se il suo contorno  $\gamma_1$  ha gli asintoti  $Y = a$  per  $X \rightarrow -\infty$  e  $X = n$  ( $n < 0$ ) per  $Y \rightarrow +\infty$  (fig. 6), nel dominio  $\delta$ , costituito di  $D$  e  $D'$ , esiste ed è unico l'integrale  $u(X, Y)$  della (B), che assume valori dati su  $\gamma$  e su  $\gamma_1$  ed è regolare per  $|X| = \infty$  e  $|Y| = \infty$ ;  $u$  è analitico quando si attraversa la retta  $|X| = \infty$ , non è analitico in generale, quando si attraversa la retta  $|Y| = \infty$ . Ciò mostra il differente comportamento degli integrali della (B) e della (C) sulle due rette improprie  $|X| = \infty$  e  $|Y| = \infty$ .

Passando ad un altro tipo di dominio infinito nel piano  $X, Y$ , si consideri in esso una curva  $\gamma$  posta nel semipiano  $X > 0$ , di equazioni parametriche  $X = X(t)$ ,  $Y = Y(t)$  ( $t_0 \leq t \leq t_1$ ), tale che  $\lim_{t \rightarrow t_0} Y(t) = -\infty$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_1} Y(t) = +\infty$ ,  $X(t_0) = X(t_1) = m$ , cioè avente l'unico asintoto  $X = m$  ( $m > 0$ ) per  $Y \rightarrow \pm\infty$  (fig. 7, di cui si consideri per ora la sola parte posta nel semipiano  $X > 0$ ).

(1) Ci si riconduce a supporre  $f(t_0) = 0$ ,  $\lim_{Y \rightarrow +\infty} \varphi(Y) = 0$ , sostituendo eventualmente alle  $u(X, Y)$ ,  $f(t)$  e  $\varphi(Y)$  le  $u(X, Y) - \frac{p}{X} - q$ ,  $f(t) - \frac{p}{X(t)} - q$ ,  $\varphi(Y) - q$ , dove  $p$  e  $q$  sono determinate in modo che sia  $\frac{p}{X(t_0)} + q = f(t_0)$ ,  $q = \lim_{Y \rightarrow +\infty} \varphi(Y)$ .

Si consideri il dominio infinito  $D$  compreso tra la curva  $\gamma$ , la retta impropria  $|X| = \infty$ , e la semiretta  $X \geq m$  della retta impropria  $|Y| = \infty$ . In queste ipotesi il cambiamento di variabili (1) permette di dimostrare il:

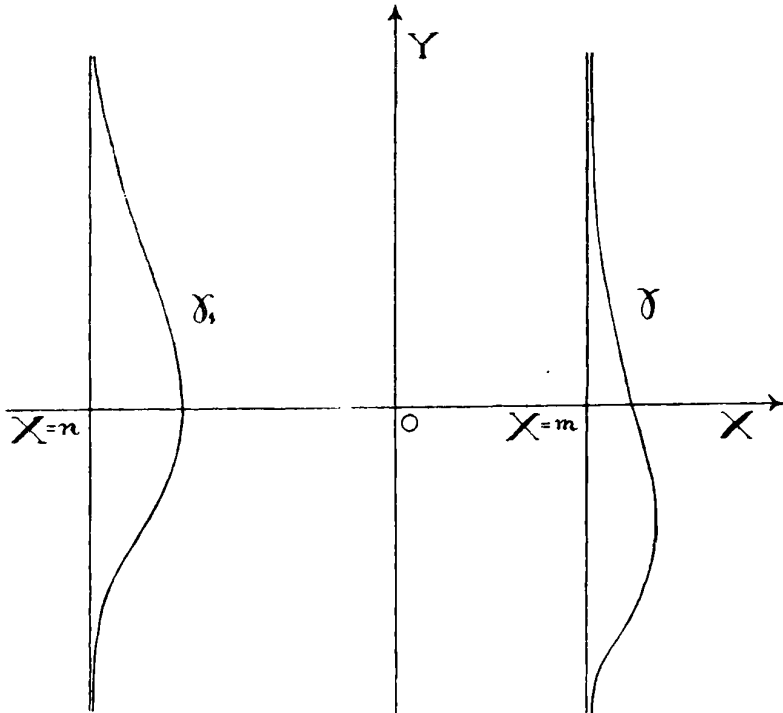


Fig. 7

T. XV. « Nel dominio  $D$  esiste uno e un solo integrale della (B)  $u(X, Y)$ , che è regolare per  $|Y| = \infty$ , su  $\gamma$  si riduce a una funzione assegnata  $f(t)$  e soddisfa la  $\lim_{X \rightarrow +\infty} u(X, Y) = \varphi(Y)$ , dove  $\varphi(Y)$  è pure una funzione assegnata, tale che sia  $f(t_0) = f(t_1) = \lim_{Y \rightarrow +\infty} \varphi(Y) = 0$  (\*). Tale integrale è funzione analitica nei punti interni a  $D$ ; per  $Y \rightarrow \pm \infty$  esso tende a zero colle sue derivate prime e seconde. La  $u(X, Y)$  non è funzione analitica, quando si attraversa la retta impropria  $|Y| = \infty$ , cioè non è sviluppabile in serie di potenze di  $\frac{1}{Y}$  e di  $X - X_0$  (per  $X_0 > m$ ) ».

(\*) Come nel T. XIV si vede che queste condizioni non sono restrittive: devono essere però finiti  $f(t_0) = f(t_1)$ ;  $\lim_{Y \rightarrow +\infty} \varphi(Y) = \lim_{Y \rightarrow -\infty} \varphi(Y)$ .



Il T. XV in particolare si applica quando  $D$  è il semipiano  $X \geq m$  ( $m > 0$ ).

Per il T. IX del § 2 un integrale  $z(X, Y)$  della (C), finito per  $|X| = \infty$  e  $|Y| = \infty$ , è determinato in  $D$  e nel dominio simmetrico rispetto all'asse  $Y$  come funzione pari di  $X$ , quando ne siano dati i valori  $f(t)$  su  $\gamma$  soltanto, colla condizione  $f(t_0) = f(t_1)$ ; sulla semiretta  $X > m$  della retta  $|Y| = \infty$ , è  $z = f(t_0)$ .

Se infine  $\gamma_1$  è una curva analoga a  $\gamma$  (fig. 7) posta nel semipiano  $X < 0$ , che per  $Y \rightarrow \pm \infty$  ha l'unico asintoto  $X = n$  ( $n < 0$ ), nel dominio  $\delta$  esterno alle curve  $\gamma$  e  $\gamma_1$  cioè contenente la retta impropria  $|X| = \infty$ , esiste ed è unico l'integrale della (B), che assume valori dati su  $\gamma$  e  $\gamma_1$  ed è regolare sulle rette improprie;  $u$  è analitico quando si attraversa la retta impropria  $X = \infty$ , ma non quando si attraversa la retta impropria  $|Y| = \infty$ .



# Sui sistemi lineari, a tre e a quattro dimensioni, di complessi lineari.

Memoria di TULLIO VIOLA (a Torino).

**Sunto.** - *Si completa uno studio precedente, sulla rappresentazione piana dei sistemi lineari di complessi lineari, secondo il metodo dualistico del MAYOR.*

In una nota pubblicata recentemente negli « Annali di Matematica » (Serie IV, t. XIV, 1935-36, p. 99), ho studiato la rappresentazione piana dei fasci e delle reti di complessi lineari secondo il metodo del MAYOR. Mi voglio ora occupare della rappresentazione, con lo stesso metodo, dei sistemi a tre e a quattro dimensioni.

Per non incontrare difficoltà e complicazioni eccessive nel disegno, è consigliabile di rappresentare questi sistemi in via indiretta, rappresentare cioè non i sistemi stessi ma quelli che sono in involuzione con essi.

**1.** Sia  $(\bar{\Gamma}) \equiv (\bar{f} \bar{f}' \bar{\varphi} \bar{\varphi}')$  un complesso lineare qualunque. Se  $(\Gamma) \equiv (f f' \varphi \varphi')$  è un altro complesso lineare in involuzione con  $(\bar{\Gamma})$ , il MAYOR dimostra che

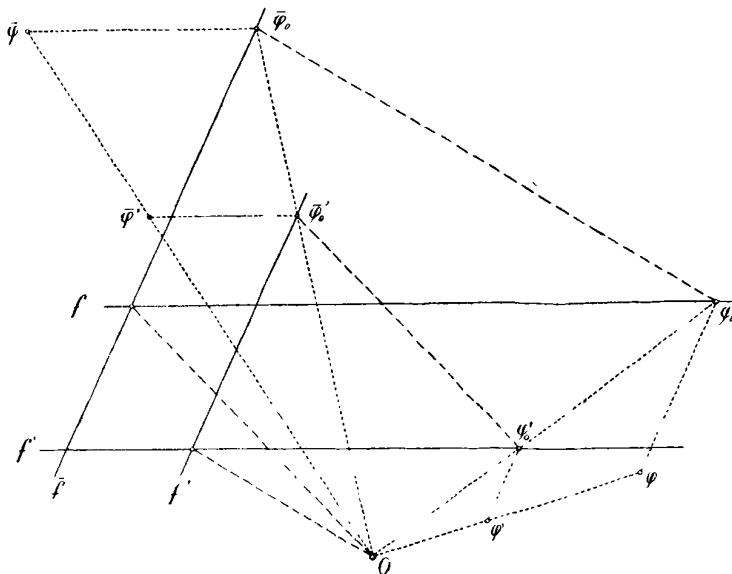


Fig. 1

esso non cessa di esserlo, quando  $\varphi$  e  $\varphi'$  si spostino parallelamente alla direzione di  $f$  ed  $f'$  (sempre naturalmente mantenendosi allineati con  $O$ ) (Fig. 1). Spostiamoli dunque finchè vengano a cadere rispettivamente in  $\varphi_0$  su  $f$  e in  $\varphi'_0$  su  $f'$ . Così pure spostiamo  $\bar{\varphi}$  e  $\bar{\varphi}'$  parallelamente ad  $f$  finchè vengano a cadere rispettivamente in  $\bar{\varphi}_0$  su  $f$  ed in  $\bar{\varphi}'_0$  su  $f'$ . La condizione d'involutorietà dei due complessi  $(\Gamma)(\bar{\Gamma})$  equivarrà a quella d'incidenza delle due rette  $(f'f'\varphi_0\varphi'_0)(\bar{f}\bar{f}'\bar{\varphi}_0\bar{\varphi}'_0)$ , e cioè al parallelismo della retta  $\varphi'_0\bar{\varphi}'_0$  alla retta che da  $O$  proietta il punto  $f\bar{f}$  (oppure, il che è lo stesso, al parallelismo della retta  $\varphi_0\bar{\varphi}_0$  alla retta che da  $O$  proietta il punto  $f'\bar{f}'$ ).

2. Tutti i complessi lineari  $(\Gamma) \equiv (f'f'\varphi\varphi')$  in involuzione con uno stesso complesso  $(\bar{\Gamma}) \equiv (\bar{f}\bar{f}'\bar{\varphi}\bar{\varphi}')$ , costituiscono un sistema lineare  $\infty^4$ . Dunque può convenirsi che *un solo complesso valga a rappresentare un sistema lineare  $\infty^4$  di complessi*, cioè il sistema  $(C)$  dei complessi in involuzione con esso.

Abbiamo visto che di un complesso  $(\Gamma)$  di un tale sistema  $(C)$  possono darsi ad arbitrio due elementi rappresentativi, e cioè precisamente gli elementi  $f, \varphi'$  oppure gli elementi  $f', \varphi$ : gli altri due restano determinati di conseguenza.

Se sono assegnati ad arbitrio per es. gli elementi  $f, \varphi'$ , basta trasportare anzitutto  $\bar{\varphi}$  su  $f$  in  $\bar{\varphi}_0$  e  $\bar{\varphi}'$  su  $f'$  in  $\bar{\varphi}'_0$ , parallelamente a  $f$ ; poi condurre per  $\bar{\varphi}'_0$  la parallela alla retta che unisce  $O$  col punto  $f\bar{f}$ , e per  $\varphi'$  la parallela alla  $\bar{f}$ . Queste due parallele s'incontreranno nel punto  $\varphi'_0$ . Quindi  $f'$  sarà la parallela alla  $f$  condotta per  $\varphi'_0$ . Infine la determinazione di  $\varphi$  sarà immediata (Fig. 1).

3. Parimenti tutti i complessi lineari  $(\Gamma) \equiv (f'f'\varphi\varphi')$  in involuzione con due complessi fissi  $(\bar{\Gamma}_1) \equiv (\bar{f}_1\bar{f}'_1\bar{\varphi}_1\bar{\varphi}'_1)$ ,  $(\bar{\Gamma}_2) \equiv (\bar{f}_2\bar{f}'_2\bar{\varphi}_2\bar{\varphi}'_2)$ , costituiscono un sistema lineare  $\infty^3$ . Può dunque anche qui convenirsi che *due complessi valgano a rappresentare un sistema lineare  $\infty^3$  di complessi*, cioè il sistema  $(C)$  dei complessi in involuzione con entrambi.

Di un generico complesso  $(\Gamma)$  di  $(C)$  potranno darsi ad arbitrio gli elementi  $f, f'$  oppure gli elementi  $\varphi, \varphi'$  (i due casi sono duali l'uno dell'altro) (Fig. 2). Siano per es. dati gli elementi  $f, f'$ . Si comincino anzitutto a trasportare  $\bar{\varphi}_1\bar{\varphi}'_1, \bar{\varphi}_2\bar{\varphi}'_2$  parallelamente a  $f$  sulle rispettive rette  $\bar{f}_1\bar{f}'_1, \bar{f}_2\bar{f}'_2$  nei punti  $\bar{\varphi}_{10}, \bar{\varphi}'_{10}, \bar{\varphi}_{20}, \bar{\varphi}'_{20}$  (nella figura si suppone che questo trasporto sia già stato eseguito). Si congiunge  $O$  col punto  $f'\bar{f}'_1$  e da  $\bar{\varphi}_{10}$  si traccia la parallela a questa retta fino ad incontrare la  $f$  nel punto  $\varphi_{10}$ . Parimenti si congiunge  $O$  col



5. È necessario, per quanto ci resta da dire, che risolviamo anche i problemi della costruzione di un complesso in involuzione con tre oppure con quattro complessi dati, il quale sia ulteriormente determinato in modo conveniente. A tal fine esaminiamo nuovamente la Fig. 2. Supponiamo di tener fissa la retta  $f'$  e di far variare la  $f$ . Allora le rette  $\bar{\varphi}_{10}\bar{\varphi}_{10}$  e  $\bar{\varphi}_{20}\bar{\varphi}_{20}$  restano fisse e perciò i punti  $\varphi_{10}\varphi_{20}$  percorrono, rispettivamente su queste due rette, due punteggiate prospettive il cui centro è il punto improprio della  $f'$ . Le rette  $\varphi_{10}\varphi$  e  $\varphi_{20}\varphi$  descrivono due fasci impropri proiettivi, anzi prospettivi, poichè la retta (impropria) che unisce i loro centri è unita. Dunque  $\varphi$  descrive una punteggiata proiettiva al fascio descritto da  $f$ .

Supponiamo ora assegnato un terzo complesso  $(\bar{\Gamma}_3) \equiv (\bar{f}_3\bar{f}'_3\bar{\varphi}_3\bar{\varphi}'_3)$ , linearmente indipendente dai due primi complessi  $(\bar{\Gamma}_1)(\bar{\Gamma}_2)$  e proponiamoci la costruzione di  $(\Gamma) \equiv (ff'\varphi\varphi')$  in modo che sia in involuzione con tutti e tre i complessi  $(\bar{\Gamma}_1)(\bar{\Gamma}_2)(\bar{\Gamma}_3)$ . Tutti i complessi  $(\Gamma)$  costituiscono una rete e perciò *uno* di questi complessi sarà individuato assegnando ad arbitrio uno qualunque dei suoi quattro elementi  $ff'\varphi\varphi'$  (nota citata, p. 106).

Sia assegnato ad arbitrio per es. l'elemento  $f'$ . Intanto come prima cosa si trasporteranno i punti  $\bar{\varphi}_1\bar{\varphi}'_1\bar{\varphi}_2\bar{\varphi}'_2\bar{\varphi}_3\bar{\varphi}'_3$  parallelamente ad  $f'$  rispettivamente sulle rette  $\bar{f}_1\bar{f}'_1\bar{f}_2\bar{f}'_2\bar{f}_3\bar{f}'_3$  nei punti  $\bar{\varphi}_{10}\bar{\varphi}'_{10}\bar{\varphi}_{20}\bar{\varphi}'_{20}\bar{\varphi}_{30}\bar{\varphi}'_{30}$ . Così i complessi  $(\bar{\Gamma}_1)(\bar{\Gamma}_2)(\bar{\Gamma}_3)$  saranno diventati tutti e tre speciali e basterà costruire  $(\Gamma)$  in involuzione con tre rette (le tre direttrici di quei tre complessi). Tracciamo ora ad arbitrio una  $f$  parallela ad  $f'$  (Fig. 2) ed eseguiamo le costruzioni indicate al n. 3 *come se*  $(\Gamma)$  *dovesse essere in involuzione coi soli complessi*  $(\bar{\Gamma}_1)(\bar{\Gamma}_2)$ . Otterremo un punto  $\varphi$  che in generale *non* sarà quello cercato. Indichiamolo con  $\varphi_1$ . Analogamente eseguiamo le costruzioni indicate al n. 3 *come se*  $(\Gamma)$  *dovesse essere in involuzione coi soli complessi*  $(\bar{\Gamma}_2)(\bar{\Gamma}_3)$ . Il punto  $\varphi$  corrispondente, che non sarà neppur esso quello cercato, lo indicheremo con  $\varphi_2$ . Se si varia la posizione di  $f$ , variano le posizioni di  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  e, per quanto sopra si è osservato,  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  devono descrivere due punteggiate entrambe proiettive al fascio improprio descritto da  $f$  e quindi proiettive fra di loro. Anzi possiamo dire senz'altro che queste due punteggiate sono *prospettive*, poichè sappiamo a priori che esiste una ed una sola ben determinata posizione della retta  $f$ , per la quale i due punti  $\varphi_1\varphi_2$  coincidono. Eseguite dunque al più due volte le costruzioni indicate (cioè per due posizioni provvisorie della retta  $f$ ), sarà possibile tracciare i sostegni delle due punteggiate prospettive descritte da  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ . L'intersezione di questi due sostegni è il punto  $\varphi$  cercato.

La costruzione si semplifica, se si ha cura di scegliere due posizioni particolarmente convenienti della  $f$ . Per le osservazioni fatte sulla Fig. 2, si

vede che, se  $f$  passa per l'intersezione della parallela condotta per  $\bar{\varphi}_{1_0}$  alla retta che da  $O$  proietta il punto  $f'f'_1$ , con la parallela condotta per  $\bar{\varphi}_{2_0}$  alla retta che da  $O$  proietta il punto  $f'\bar{f}'_2$ , allora  $\varphi$  coincide con quest'intersezione. Dunque allora  $\varphi$  sta su  $f$ ,  $\varphi'$  su  $f'$ , e il complesso  $(ff'\varphi\varphi')$  è speciale. Analogamente si può scegliere  $f$  in modo che il complesso  $(ff'\varphi\varphi')$  costruito in involuzione coi soli due complessi  $(\bar{\Gamma}_2)(\bar{\Gamma}_3)$ , sia speciale. Queste due scelte particolari di  $f$  semplificano notevolmente la costruzione.

6. Il procedimento può essere perfettamente imitato per la risoluzione del problema di costruire un complesso  $(\Gamma)$  che sia in involuzione con quattro complessi dati  $(\bar{\Gamma}_1)(\bar{\Gamma}_2)(\bar{\Gamma}_3)(\bar{\Gamma}_4)$ , per quanto naturalmente qui le complicazioni del disegno si moltiplichino.

Osserviamo anzitutto che, nella rete costituita dai complessi  $(\Gamma)$  che sono in involuzione coi soli primi tre complessi  $(\bar{\Gamma}_1)(\bar{\Gamma}_2)(\bar{\Gamma}_3)$ , gli elementi  $f\varphi$  si corrispondono in una reciprocità (nota cit., p. 108). Se dunque  $f'$  descrive un un fascio improprio,  $\varphi$  descrive necessariamente una punteggiata proiettiva a quel fascio.

Se noi vogliamo che  $(\Gamma)$  sia in involuzione anche col quarto complesso  $(\bar{\Gamma}_4)$ , e cioè appartenga a un determinato fascio (del quale però non conosciamo ancora nè i centri nè gli assi), non possiamo assegnare a priori nessuno dei quattro elementi  $ff'\varphi\varphi'$ . Ma possiamo assegnare o la direzione delle due rette  $ff'$ , oppure la proiettante i punti  $\varphi\varphi'$  dal punto  $O$  (i due casi essendo duali l'uno dell'altro).

Sia assegnata per es. la direzione delle due rette  $ff'$ . Tracciamo ad arbitrio una  $f'$  parallela a quella direzione ed eseguiamo le costruzioni del n. 5 come se  $(\Gamma)$  dovesse essere in involuzione coi soli tre complessi  $(\bar{\Gamma}_1)(\bar{\Gamma}_2)(\bar{\Gamma}_3)$ . Si chiami  $\varphi_1$  il punto  $\varphi$  corrispondente. Eseguiamo pure le stesse costruzioni come se  $(\Gamma)$  dovesse essere in involuzione coi soli tre complessi  $(\bar{\Gamma}_2)(\bar{\Gamma}_3)(\bar{\Gamma}_4)$ , e si chiami  $\varphi_2$  il punto  $\varphi$  corrispondente. Al variare di  $f'$ , i due punti  $\varphi_1\varphi_2$  percorrono due punteggiate proiettive, anzi prospettive, poichè sappiamo a priori che, per una ben determinata posizione della retta  $f'$ , i due punti  $\varphi_1\varphi_2$  devono coincidere. Sarà dunque possibile, con due soli tentativi (cioè con due sole posizioni provvisorie della retta  $f'$ ), tracciare i sostegni delle due punteggiate prospettive descritte da  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ . L'intersezione di questi due sostegni è il punto  $\varphi$  cercato.

7. Siamo ora in grado d'invertire i problemi risolti ai nn. 3, 2.

1°) Dati quattro complessi qualunque  $(\Gamma_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), non appartenenti ad una stessa rete, rappresentare il sistema  $(C)$  lineare  $\infty^3$  che li contiene.

Si costruiscono due complessi lineari qualunque  $(\Gamma_1)$ ,  $(\bar{\Gamma}_2)$ , che siano in involuzione con tutti e quattro i complessi  $(\Gamma_i)$  (n. 6). Il fascio individuato da questi due complessi  $(\bar{\Gamma}_1)$ ,  $(\bar{\Gamma}_2)$  rappresenta, secondo quanto si è convenuto al n. 3, il sistema  $(C)$ .

2°) *Dati cinque complessi qualunque  $(\Gamma_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 4, 5$ ), non appartenenti ad uno stesso sistema  $\infty^3$ , rappresentare il sistema  $(C)$  lineare  $\infty^4$  che li contiene.*

Si rappresentano separatamente il fascio  $(\bar{C}_1)$  involutorio al sistema lineare  $\infty^3$  definito dai quattro complessi  $(\Gamma_1)(\Gamma_2)(\Gamma_3)(\Gamma_4)$ , e il fascio  $(\bar{C}_2)$  involutorio al sistema lineare  $\infty^3$  definito dai quattro complessi  $(\Gamma_2)(\Gamma_3)(\Gamma_4)(\Gamma_5)$  (n. 6). I due fasci  $(\bar{C}_1)(\bar{C}_2)$  hanno in comune un unico ben definito complesso  $(\bar{\Gamma})$  <sup>(1)</sup>. Questo complesso  $(\bar{\Gamma})$  rappresenta, secondo quanto si è convenuto al n. 2, il sistema  $(C)$ .

(1) Affinchè due fasci  $(\bar{C}_1) \equiv (\bar{C}_1 C_1 \bar{c}_1 \bar{c}'_1)$ ,  $(\bar{C}_2) \equiv (\bar{C}_2 C_2 \bar{c}_2 \bar{c}'_2)$  abbiano un complesso in comune, sono necessarie e sufficienti tre condizioni:

- a) Le rette  $\bar{C}_1 \bar{C}_2$ ,  $\bar{C}_1' \bar{C}_2'$  sono parallele;
- b) I punti  $\bar{c}_1 \bar{c}_2$ ,  $\bar{c}_1' \bar{c}_2'$  sono allineati con  $O$ ;
- c) Queste due rette e questi due punti sono due coppie di una stessa omotetia di centro  $O$ .



# Sulla geometria d'una superficie poco differente da un ellissoide con applicazione al caso della Terra.

Memoria di CORRADINO MINEO (a Palermo).

---

*Sunto.* - Si assumono come punti corrispondenti, sulla superficie  $S$  e sull'ellissoide, due punti situati su una stessa normale di  $S$ . ammettendo che l'angolo delle normali alle superficie in due punti corrispondenti sia una piccola quantità della quale si possa trascurare il quadrato. Si confrontano in questa ipotesi gli elementi metrici di  $S$  con i corrispondenti ellissoidici, studiando in particolare le trasformate ellissoidiche delle geodetiche di  $S$ . Si fa una applicazione della teoria alla determinazione del « geoide » per mezzo delle deviazioni della verticale, ponendo questa determinazione su fondamenti più rigorosi.

Dell'argomento mi occupai in un lavoro del 1911 (1). Più recentemente il TORTORICI vi ha dedicato una importante Memoria, giovandosi di alcune formole inedite del WEINGARTEN, pubblicate dal BIANCHI (2). Qui ci torno, perchè la questione della così detta *deviazione in azimut* va maggiormente approfondita. Già il POINCARÉ aveva richiamato l'attenzione sull'insufficienza della formola comunemente adoperata per l'anzidetta deviazione (3). In questa formola, invero, come in quella famosa di LAPLACE, che se ne deduce, la deviazione in discorso è soltanto una funzione del punto, non dipendendo dalla direzione uscente dal punto. Ora, se così fosse, la rappresentazione della superficie  $S$  (in particolare del « geoide ») sull'ellissoide sarebbe conforme; il che non è, salvo che non si trascurino quantità che possono andare fino a qualche decimo di secondo d'arco.

Non basta. Quand'anche la rappresentazione, limitata a una conveniente regione di  $S$ , si potesse considerare come conforme, quella formola non sa-

---

(1) Vedi MINEO, *Sulle formole fondamentali per il confronto della superficie geoidica con l'ellissoide besseliano*, « Giornale di Matematiche di Battaglini », Vol. XLIX, Napoli, 1911.

(2) Vedi TORTORICI, *Estensione di alcune formole di Weingarten ed applicazione al problema della forma della Terra*, « Atti della R. Accademia di Scienze, Lettere e Belle Arti di Palermo », Vol. XV, Palermo, 1928.

(3) Cfr. POINCARÉ, *Sur les déviations de la verticale en géodésie*, « Bulletin astronomique », Vol. XVIII, Paris, 1901.

rebbe per questo menç inesatta. Infatti, nella pratica non si considerano le deviazioni in azimut lungo curve corrispondenti, per es. lungo un arco geodetico della superficie  $S$  e lungo il corrispondente arco ellissoidico: a quest'ultimo arco, invece, si sostituisce l'arco di geodetica ellissoidica passante per gli stessi estremi. La formola, dunque, quand'anche valga per due archi corrispondenti, non può mai valere per due archi che non si corrispondono: occorrerebbe per ciò che la rappresentazione di  $S$  sull'ellissoide conservasse le geodetiche, cosa che non può avvenire.

Il POINCARÉ, nello scritto citato, fu condotto, con rapidi cenni, a stabilire una formola più esatta per la deviazione in discorso. Per una deduzione rigorosa della formola, è necessario uno studio delle trasformate ellissoidiche delle geodetiche di  $S$  e un confronto di queste curve con le geodetiche stesse dell'ellissoide. Nel mio lavoro citato, questo studio fu fatto e fu ritrovata la formola del POINCARÉ; ma, nel dedurla, si ammise, con un ragionamento intuitivo, che le due curve da confrontare (trasformata di una geodetica di  $S$  e geodetica ellissoidica), passanti per due punti dell'ellissoide *abbastanza vicini* (a un centinaio di chilometri di distanza, sull'ellissoide terrestre), si confondano *linearmente*, nel senso che le coordinate curvilinee in punti corrispondenti sono eguali (nell'ordine d'approssimazione prefissato); mentre, come fu dimostrato rigorosamente, gli azimut corrispondenti non sono eguali.

Nella presente Memoria la questione è completamente risolta con uno studio più approfondito del sistema differenziale del prim'ordine delle trasformate ellissoidiche delle geodetiche di  $S$ ; sistema i cui integrali (ottenuti per serie) ho potuto confrontare con gl'integrali delle geodetiche ellissoidiche. Sono così pervenuto a formole più approssimate e più generali: come caso particolare ho ritrovato la primitiva formola di deviazione in azimut, restando così confermata l'intuizione che mi servì a stabilirla nel lavoro del 1911.

Dei risultati ho fatto un'applicazione al caso della Terra, giustificando in parte i procedimenti in uso e mostrando come essi si debbano correggere al lume della teoria.

1. Supponendo riferito l'ellissoide di rotazione a coordinate geografiche  $\varphi$  e  $\omega$ , le sue equazioni parametriche sono

$$(1) \quad x = \frac{a \cos \varphi \cos \omega}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad y = \frac{a \cos \varphi \sin \omega}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}, \quad z = \frac{a(1 - e^2) \sin \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}},$$

dove  $a$  è il semiasse maggiore ed  $e$  l'eccentricità.

Ne segue che i coseni direttori della normale nel punto  $(\varphi, \omega)$  sono

$$(2) \quad L = \cos \varphi \cos \omega, \quad M = \cos \varphi \sin \omega, \quad N = \sin \varphi.$$

E per il quadrato dell'elemento lineare della superficie si ha la seguente espressione:

$$(3) \quad ds^2 = Ed\varphi^2 + Gd\omega^2,$$

essendo

$$(4) \quad E = \Sigma \left( \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right)^2 = \frac{a^2(1 - e^2)^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^3}, \quad G = \Sigma \left( \frac{\partial x}{\partial \omega} \right)^2 = \frac{a^2 \cos^2 \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi};$$

mentre i coefficienti della seconda forma differenziale quadratica sono i seguenti

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} D = - \Sigma \frac{\partial L}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = - \frac{a(1 - e^2)}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}, \\ D' = - \Sigma \frac{\partial L}{\partial \varphi} \frac{\partial x}{\partial \omega} = - \Sigma \frac{\partial L}{\partial \omega} \frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0, \\ D'' = - \Sigma \frac{\partial L}{\partial \omega} \frac{\partial x}{\partial \omega} = - \frac{a \cos^2 \varphi}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}. \end{array} \right.$$

2. Sia  $S$  una superficie poco differente dall'ellissoide, nel senso che ora diremo. Supporremo che della  $S$  sia assegnata la congruenza delle normali, rispetto all'ellissoide, preso come superficie di partenza. La retta della congruenza passante per il punto  $M(\varphi, \omega)$  dell'ellissoide sarà individuata dall'angolo  $\varepsilon$  che essa forma con la normale ellissoidica passante per  $M$  (*deviazione totale*) e dall'angolo  $\gamma$  che il piano delle due normali (*piano di deviazione*) forma con il meridiano ellissoidico passante per  $M$ . Noi supporremo che l'angolo  $\varepsilon$  sia una quantità piccola, della quale si possa trascurare il quadrato. Teoricamente si può dire che  $\varepsilon$  è il nostro infinitesimo principale o del primo ordine, e che gl'infinitesimi d'ordine superiore saranno trascurati.

Chiamiamo  $M^*$  il punto di  $S$  che sta sul raggio della nostra congruenza passante per  $M$ : tra i punti  $M$  dell'ellissoide e i punti  $M^*$  di  $S$  si stabilisce così una corrispondenza, che supporremo biunivoca, e che si può chiamare *corrispondenza secondo le normali di S*, perchè due punti corrispondenti stanno su una normale di  $S$ .

Riferiamo anche la  $S$  a coordinate geografiche  $l$  e  $\lambda$ , rispetto all'asse di rotazione dell'ellissoide:  $l$  (*latitudine*) è il complemento dell'angolo che la normale alla  $S$  in  $M^*$  forma con l'asse  $z$ ;  $\lambda$  (*longitudine*) è l'angolo che il piano meridiano di  $S$  passante per  $M^*$  (cioè il piano contenente la normale

a  $S$  in  $M$  e la parallela per  $M$  all'asse  $z$ ) forma con un piano fondamentale (*primo meridiano*) passante per l'asse  $z$ .

Posto

$$(6) \quad \xi = \varepsilon \cos \gamma, \quad \eta = \varepsilon \sin \gamma,$$

è facile dedurre (giovandosi della rappresentazione sferica delle direzioni) le seguenti relazioni

$$(7) \quad l = \varphi + \xi, \quad \lambda = \omega + \eta \sec \varphi,$$

che valgono, beninteso, a meno di  $\varepsilon^2$  (e quindi di  $\xi^2$ ,  $\eta^2$ , ecc.).

Da un punto di vista affatto teorico, considereremo  $\xi$  ed  $\eta$  come date funzioni di  $\varphi$  e  $\omega$ ; le quali funzioni determinano la nostra congruenza a partire dalla superficie ellissoidica. Supporremo inoltre che le (7) siano reversibili, cioè definiscano univocamente  $\varphi$  e  $\omega$  come funzioni di  $l$  e  $\lambda$ : la corrispondenza tra i punti  $M(\varphi, \omega)$  dell'ellissoide e i punti  $M^*(l, \lambda)$  di  $S$  è allora biunivoca.

Segue quindi dalle (7):

$$(8) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial l} = 1 - \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}, & \frac{\partial \omega}{\partial l} = -\frac{\partial}{\partial \varphi} (\eta \sec \varphi), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} = -\frac{\partial \xi}{\partial \omega}, & \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} = 1 - \frac{\partial \eta}{\partial \omega} \sec \varphi. \end{cases}$$

Le funzioni  $\xi$  ed  $\eta$  di  $\varphi$  e  $\omega$  si possono anche considerare come funzioni di  $l$  e  $\lambda$ , composte per mezzo di  $\varphi$  e  $\omega$ ; le quali, per ipotesi, sono funzioni di  $l$  e  $\lambda$  definite dalle (7). Indicheremo con  $\bar{\xi}$  e  $\bar{\eta}$  le funzioni di  $l$  e  $\lambda$  nelle quali si trasformano le funzioni  $\xi$  e  $\eta$ , quando  $\varphi$  e  $\omega$  si considerano come funzioni di  $l$  e  $\lambda$  definite dalle (7).

Si deduce allora

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial l} + \frac{\partial \xi}{\partial l} = 1, & \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} + \frac{\partial \xi}{\partial \lambda} = 0, \\ \frac{\partial \omega}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial l} (\bar{\eta} \sec l) = 0, & \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} + \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \lambda} \sec l = 1. \end{cases}$$

Infine si ha (sempre a meno d'infinitesimi d'ordine superiore):

$$(10) \quad \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial l} = \frac{\partial \xi}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \xi}{\partial \omega}, \quad \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial l} = \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \lambda} = \frac{\partial \eta}{\partial \omega}.$$

3. Chiamando  $X, Y, Z$  i coseni direttori della normale alla superficie  $S$  in un punto  $M^*(x^*, y^*, z^*)$ , si ha

$$(11) \quad X = \cos l \cos \lambda, \quad Y = \cos l \sin \lambda, \quad Z = \sin l;$$

ovvero, tenendo presenti le (2) e le (7):

$$(12) \quad \begin{cases} X = L - \xi \operatorname{sen} \varphi \cos \omega - \eta \operatorname{sen} \omega, \\ Y = M - \xi \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \omega + \eta \cos \omega, \\ Z = N + \xi \cos \varphi. \end{cases}$$

Indicando con  $h$  il segmento  $MM^*$  compreso tra il punto  $M(x, y, z)$  dello ellissoide e il corrispondente  $M^*(x^*, y^*, z^*)$  di  $S$ , abbiamo

$$(13) \quad x^* = x + hX, \quad y^* = y + hY, \quad z^* = z + hZ.$$

E la condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie  $S$  esista, ovvero affinchè la congruenza definita dalle funzioni  $\xi$  e  $\eta$  sia normale, è che si abbia:

$$Xdx^* + Ydy^* + Zdz^* = 0,$$

ovvero, per le (13):

$$dh = -(Xdx + Ydy + Zdz).$$

Tenendo presenti le (1), (5) e (12), si trova

$$(14) \quad dh = D\xi d\varphi + D''\eta \operatorname{sec} \varphi d\omega.$$

E quindi la condizione

$$(15) \quad \frac{\partial \xi}{\partial \omega} = \frac{D'}{D} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\eta \operatorname{sec} \varphi) + \frac{1}{D} \frac{dD''}{d\varphi} \eta \operatorname{sec} \varphi,$$

che è necessaria e sufficiente affinchè la nostra congruenza sia normale.

Quando si trascurino i termini in  $\xi e^2$ ,  $\eta e^2$ , la (15) si riduce alla condizione

$$\frac{\partial \xi}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \varphi} (\eta \cos \varphi),$$

trovata dal VILLARCEAU.

Se la (14) è verificata, esiste una famiglia di superficie parallele, che ammettono come normali i raggi della nostra congruenza. Noi supporremo che la  $S$  sia molto vicina all'ellissoide di partenza, e ammetteremo che  $\frac{h}{a}$  sia una quantità piccola dell'ordine di  $\epsilon$  (un infinitesimo del 1° ordine, dal punto di vista teorico).

4. Riferita la  $S$  al sistema definito (n° 2) di coordinate curvilinee geografiche, calcoliamo i coefficienti  $D_*$ ,  $D_*'$ ,  $D_*''$  della seconda forma diffe-

renziale quadratica di  $S$ ; dalla quale forma dipende più direttamente la determinazione di  $S$  (\*).

Si trova:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_* = -\Sigma \frac{\partial X}{\partial t} \frac{\partial x^*}{\partial l} = D \left( 1 - \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) - h, \\ D_*' = -\Sigma \frac{\partial X}{\partial l} \frac{\partial x^*}{\partial \lambda} = -\Sigma \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial x^*}{\partial l} = D\eta \sec \varphi - D' \frac{\partial}{\partial \varphi} (\eta \sec \varphi), \\ D_*'' = -\Sigma \frac{\partial X}{\partial \lambda} \frac{\partial x^*}{\partial \lambda} = D'' \left( 1 - \xi \tan \varphi - \frac{\partial \eta}{\partial \omega} \sec \varphi \right) - h \cos^2 \varphi. \end{array} \right.$$

Avuti i coefficienti  $D_*$ ,  $D_*'$ ,  $D_*''$ , quelli  $E_*$ ,  $F_*$ ,  $G_*$ , della prima forma fondamentale si deducono dalle formole generali (5)

$$\begin{aligned} E_* &= D_*^2 + D_*'^2 \sec^2 l, \\ F_* &= D_*'(D_* + D_*'' \sec^2 l), \\ G_* &= D_*''^2 + D_*''^2 \sec^2 l; \end{aligned}$$

e si trova (nell'ipotesi di  $h$  infinitesimo del 1° ordine) (6):

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} E_* = D^2 \left( 1 - 2 \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right) - 2Dh, \\ F_* = D^2 \eta \sec \varphi - D''^2 \sec^2 \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} (\eta \sec \varphi) - DD' \sec \varphi \frac{\partial \eta}{\partial \varphi}, \\ G_* = D''^2 \left( 1 - \frac{\partial \eta}{\partial \omega} \sec \varphi \right) \sec^2 \varphi - 2D''h. \end{array} \right.$$

5. Sia  $c^*$  una curva, appartenente alla superficie  $S$ , di equazione

$$(18) \quad \lambda = \lambda(l).$$

L'equazione

$$(19) \quad \omega = \omega(\varphi)$$

della curva  $c$  corrispondente a  $c^*$  sull'ellissoide, si trova eliminando  $l$  e  $\lambda$  tra la (18) e le (7); e facilmente si stabilisce la relazione

$$(20) \quad \frac{d\lambda}{dl} = \frac{d\omega}{d\varphi} \left( 1 - \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} - \frac{\partial \eta}{\partial \omega} \sec \varphi - \frac{\partial \xi}{\partial \omega} \frac{d\omega}{d\varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (\eta \sec \varphi).$$

(\*) Cfr. MINEO, *Sulle superficie riferite a un sistema geografico e sulla determinazione intrinseca del Geoide*, « Giornale di Matematiche di Battaglini », Vol. XLVIII, 1910.

(5) Vedi MINEO, *ibidem*.

(6) Si tenga presente che è

$$\sec^2 l = \sec^2 \varphi (1 + 2\xi \tan \varphi).$$

Per l'angolo  $A$  che la linea  $c^*$  di  $S$  forma con le linee Nord, si ha

$$(21) \quad \text{tang } A = \sec l \frac{D_*' + D_*'' \frac{d\lambda}{dl}}{D_* + D_*' \frac{d\lambda}{dl}}.$$

E per l'angolo  $\Theta$  che la corrispondente linea  $c$  forma con le linee Nord dell'ellissoide (linee coincidenti con i meridiani o linee  $\omega = \text{costante}$ ), si ha

$$(22) \quad \text{tang } \Theta = \sec \varphi \frac{D'}{D} \frac{d\omega}{d\varphi}.$$

Con un facile calcolo, che per brevità omettiamo, si trova, tenendo presenti le relazioni (15), (16) e (20):

$$(23) \quad \text{tang } A = \text{tang } \Theta + \eta \text{ tang } \varphi \left\{ 1 - \frac{D'}{D} \left( 1 + \frac{dD'}{d\varphi} \frac{1}{\text{sen } \varphi \cos \varphi} \right) \left( \frac{d\omega}{d\varphi} \right)^2 \right\} - \\ - \frac{h}{D} \cos \varphi \left( 1 - \frac{D'}{D} \sec^2 \varphi \right) \frac{d\omega}{d\varphi}.$$

E da questa si deduce:

$$(24) \quad A - \Theta = \eta \text{ tang } \varphi + \frac{e^2}{1 - e^2} \frac{hD \frac{d\omega}{d\varphi} \cos^3 \varphi}{D^2 + D'^2 \left( \frac{d\omega}{d\varphi} \right)^2 \sec^2 \varphi},$$

o anche

$$(24^{\text{bis}}) \quad A - \Theta = \eta \text{ tang } \varphi + \frac{e^2}{1 - e^2} \frac{h}{D} \frac{d\omega}{d\varphi} \cos^3 \varphi \cos^2 \Theta.$$

Si vede che soltanto se si trascurano le quantità dell'ordine di  $e^2 \frac{h}{a}$  o di  $e^2 \varepsilon$ , le precedenti formole si riducono alla formola solita

$$A - \Theta = \eta \text{ tang } \varphi.$$

In quest'ultimo caso la deviazione in azimut è indipendente dalla direzione considerata; e quindi la rappresentazione della superficie  $S$  sull'ellissoide è conforme.

6. Dimostriamo l'importante proprietà, che, *nella corrispondenza (7) tra le due superficie, al sistema ortogonale dei meridiani e paralleli dell'ellissoide corrisponde un doppio sistema ortogonale sulla  $S$ .*

A questo scopo trasformiamo il quadrato

$$ds^{*2} = E_* dl^2 + 2F_* dl d\lambda + G_* d\lambda^2$$

dell'elemento lineare di  $S$  per mezzo delle formole (7) e teniamo presente la condizione (15). Si trova, con un calcolo che non presenta alcuna difficoltà:

$$(25) \quad ds^{*2} = (E - 2Dh)d\varphi^2 + (G - 2D'h)d\omega^2.$$

La (25) prova la nostra asserzione.

Poichè il quadrato dell'elemento lineare dell'ellissoide è dato dalla (3), si vede subito che la rappresentazione (7) non è conforme, essendo

$$1 - 2\frac{D}{E}h \neq 1 - 2\frac{D'}{G}h.$$

Si ha, infatti,

$$h\left(\frac{D}{E} - \frac{D'}{G}\right) = \frac{e^2}{1-e^2} \frac{h}{D'} \cos^4 \varphi = -\frac{e^2}{1-e^2} \frac{h}{a} (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} \cos^2 \varphi;$$

e quindi la rappresentazione (7) non è conforme se non quando si trascurino le quantità dell'ordine di  $\frac{h}{a} e^2$ , come avevamo previsto per altra via (n° 5).

Nella rappresentazione di  $S$  sull'ellissoide, i meridiani e i paralleli di questo sono le *linee principali* della deformazione (lineare). I moduli principali di deformazione sono

$$m_\varphi^2 = \frac{E}{E - 2Dh}, \quad m_\omega^2 = \frac{G}{G - 2D'h};$$

donde, tenendo presenti le (4) e (5):

$$(26) \quad m_\varphi = 1 - \frac{h}{a} \frac{(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{1 - e^2}, \quad m_\omega = 1 - \frac{h}{a} (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}.$$

In generale, si ha

$$m^2 = \frac{ds^2}{ds^{*2}} = \frac{Ed\varphi^2 + Gd\omega^2}{(E - 2Dh)d\varphi^2 + (G - 2D'h)d\omega^2},$$

dalla quale si trae

$$(27) \quad m = 1 + h \frac{D + D' \left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right)^2}{E + G \left(\frac{d\omega}{d\varphi}\right)^2};$$



e quindi

$$(28) \quad s = s^* + \int_{\varphi_a}^{\varphi_b} h \frac{D + D' \left( \frac{d\omega}{d\varphi} \right)^2}{\sqrt{E + G \left( \frac{d\omega}{d\varphi} \right)^2}},$$

essendo  $\varphi_a$  e  $\varphi_b$  i valori del parametro  $\varphi$  negli estremi dei due archi.

Facilmente si trova la deformazione angolare. Se  $\beta^*$  è l'angolo di due curve di  $S$  e  $\beta$  quello delle corrispondenti curve ellissoidiche, si ha

$$(29) \quad \beta^* - \beta = h \left( \frac{D}{E} - \frac{D''}{G} \right) (\text{sen } \gamma_2 \cos \gamma_2 - \text{sen } \gamma_1 \cos \gamma_1),$$

essendo  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  gli angoli che le due curve ellissoidiche formano con il meridiano.

Tenendo conto delle (4) e (5), la (29) si scrive:

$$(29\text{bis}) \quad \beta^* - \beta = \frac{e^2}{1 - e^2} \frac{h}{D'} (\text{sen } \gamma_2 \cos \gamma_2 - \text{sen } \gamma_1 \cos \gamma_1) \cos^4 \varphi.$$

7. Torniamo ad adoperare sulla superficie  $S$  le coordinate geografiche. Le geodetiche di  $S$  verificano il sistema differenziale di primo ordine

$$(30) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dA}{dl} = \frac{d\lambda}{dl} \text{sen } l, \\ \text{tang } A = \text{sec } l \frac{D_*' + D_*'' \frac{d\lambda}{dl}}{D_* + D_*' \frac{d\lambda}{dl}}; \end{array} \right.$$

dove  $A$  (n° 5) è l'angolo che la curva forma con le linee Nord (<sup>7</sup>).

Per avere il sistema differenziale al quale verifica la curva corrispondente sull'ellissoide, trasformiamo la prima delle (30), giovandosi della (22) e tenendo presente la (20). La seconda delle (30) si muta manifestamente nella (22). Si ha:

$$(31) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Theta}{d\varphi} = \frac{d\omega}{d\varphi} (\text{sen } \varphi + \xi \cos \varphi) - \eta - \frac{e^2}{1 - e^2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{h}{D} \frac{d\omega}{d\varphi} \cos^2 \varphi \cos^2 \Theta \right), \\ \text{tang } \Theta = \text{sec } \varphi \frac{D'}{D} \frac{d\omega}{d\varphi}. \end{array} \right.$$

(<sup>7</sup>) Cfr. MINEO, ibidem, § 8.

È questo il sistema differenziale delle curve ellissoidiche corrispondenti alle geodetiche di  $S$ . Com'è naturale, alle geodetiche di  $S$  non corrispondono geodetiche ellissoidiche: queste ultime verificano il sistema

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{d\omega}{d\varphi} \operatorname{sen} \varphi, \\ \operatorname{tang} \alpha = \sec \varphi \frac{D'}{D} \frac{d\omega}{d\varphi}; \end{array} \right.$$

denotando con  $\alpha$  l'angolo della geodetica ellissoidica con i meridiani.

Ora, si tratta di confrontare una curva del sistema (31), passante per due punti dell'ellissoide, con la geodetica ellissoidica passante per gli stessi punti. Noi supporremo che i due punti siano abbastanza vicini in modo che le due curve si possano ritenere poco differenti nel senso che ora precisiamo. Supponiamo di partire da una geodetica ellissoidica, cioè da un sistema integrale

$$(33) \quad \omega = \omega(\varphi), \quad \alpha = \alpha(\varphi)$$

delle (32); e cerchiamo un sistema integrale  $\bar{\omega}(\varphi)$  e  $\Theta(\varphi)$  delle (31), *molto vicino* al sistema (33); cioè poniamo

$$(34) \quad \bar{\omega} = \omega + u, \quad \Theta = \alpha + v,$$

dove  $u$  e  $v$  sono incognite funzioni di  $\varphi$  dell'ordine di  $\varepsilon$  ( $n^\circ 1$ ), o infinitesime del 1° ordine, dal punto di vista teorico. Allora le funzioni incognite  $u$  e  $v$  devono verificare il sistema

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dv}{d\varphi} = \frac{du}{d\varphi} \operatorname{sen} \varphi + \frac{d\omega}{d\varphi} \xi \cos \varphi - \frac{e^2}{1-e^2} \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{h}{D} \frac{d\omega}{d\varphi} \cos^3 \varphi \cos^2 \alpha \right), \\ v \sec^2 \alpha = \frac{D'}{D} \sec \varphi \frac{du}{d\varphi}. \end{array} \right.$$

Nelle (35) le funzioni

$$\xi(\varphi, \bar{\omega}), \quad \eta(\varphi, \bar{\omega}), \quad h(\varphi, \bar{\omega})$$

sono da riguardare come affatto note, perchè in esse al posto di  $\bar{\omega}$  si può sostituire senz'altro la prima delle (33), cioè la funzione nota  $\omega(\varphi)$ . Non si dimentichi, infatti, che  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $h$  sono del primo ordine; sicchè, per es.,

$$\xi(\varphi, \bar{\omega}(\varphi)) = \xi(\varphi, \omega(\varphi)),$$

a meno di quantità del second'ordine.

È poi quasi superfluo avvertire che nelle (35) il parametro  $\varphi$  non deve essere vicino a  $\frac{\pi}{2}$  (peraltro, per le stesse formole (7), restano escluse le regioni vicine ai poli terrestri); nè vicino a  $\frac{\pi}{2}$  si può supporre l'azimut  $\alpha$  della geodetica ellissoidica considerata: nel caso che si tratti di una geodetica ellissoidica che corra molto vicina a un parallelo dell'ellissoide, è ovvio come si debba modificare il procedimento; ecc., ecc.

L'integrazione del sistema (25) si riconduce facilmente a quadrature; ma gl'integrali generali si presenterebbero sotto una forma estremamente complicata. Per fare un'applicazione pratica della teoria al caso della Terra, noi integreremo per serie.

8. Nel caso della Terra, la superficie  $S$  è il così detto « geoide », le cui normali geometriche sono le verticali. Noi supporremo che si abbia sempre

$$(36) \quad \varepsilon \leq 0.0001;$$

il che equivale a supporre che la deviazione totale della verticale non superi un angolo di 30". Non già che non si siano riscontrate deviazioni maggiori; ma esse sono assai rare.

Ne viene che le quantità dell'ordine di  $\varepsilon^2$  non sono trascurabili; giacchè si ha

$$\varepsilon^2 \leq 7 \times 10^{-7},$$

mentre sono trascurabili le quantità dell'ordine di  $10^{-8}$ .

Nel paragonare un arco di curva del sistema (35), cioè delle trasformate ellissoidiche delle geodetiche geoidiche, con la geodetica ellissoidica che ne congiunge gli estremi, ci limiteremo ad archi la cui corda geodetica non superi i 100 chilometri sull'ellissoide terrestre; il che, tenendo presenti i valori dei parametri dell'anzidetto ellissoide, cioè

$$a \cong 6377 \text{ km}, \quad e^2 \cong 0.0067,$$

porta a porre le seguenti limitazioni per le differenze  $\Delta\varphi$  e  $\Delta\omega$  di latitudine e di longitudine negli estremi dell'arco:

$$(37) \quad |\Delta\varphi|, \quad |\Delta\omega| \leq 0.0157.$$

Ne viene che sono trascurabili nel nostro studio, perchè dell'ordine di  $\varepsilon^2$ , le quantità dell'ordine di

$$(\Delta\varphi)^4, \quad (\Delta\omega)^4, \quad \varepsilon(\Delta\varphi)^2, \quad \varepsilon(\Delta\omega)^2, \quad \varepsilon e^2 |\Delta\varphi|, \quad \varepsilon e^2 |\Delta\omega|.$$

In quest'ordine d'approssimazione, per la geodetica ellissoidica passante per i punti  $M_i(\varphi_i, \omega_i)$ ,  $M_{i+1}(\varphi_{i+1}, \omega_{i+1})$  dell'ellissoide terrestre, si hanno le equazioni (8):

$$(38) \left\{ \begin{aligned} \omega &= \omega_i + \frac{\rho_i}{r_i} \operatorname{tang} \alpha_i (\varphi - \varphi_i) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\rho_i^2}{r_i^2} \operatorname{sen} \varphi_i \operatorname{tang} \alpha_i \left\{ 1 + \sec^2 \alpha_i + \frac{3e^2}{1-e^2} \cos^2 \varphi_i \right\} (\varphi - \varphi_i)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{6} \frac{\operatorname{tang}^2 \varphi_i \operatorname{tang} \alpha_i}{\cos \varphi_i} (1 + \sec^2 \alpha_i)^2 + \frac{1 + \sec^2 \alpha_i}{\operatorname{sen}^2 \varphi_i} + \frac{2 \operatorname{tang}^2 \alpha_i}{\cos^2 \alpha_i} \left\{ (\varphi - \varphi_i)^3, \right. \\ \alpha &= \alpha_i + \frac{\rho_i}{N_i} \operatorname{tang} \varphi_i \operatorname{tang} \alpha_i (\varphi - \varphi_i) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\rho_i}{N_i} \operatorname{tang} \alpha_i \left\{ \sec^2 \varphi_i + \frac{\rho_i}{N_i} \operatorname{tang}^2 \varphi_i \sec^2 \alpha_i + 2e^2 \frac{N_i^2}{a^2} \operatorname{sen}^2 \varphi_i \right\} (\varphi - \varphi_i)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{6} \operatorname{tang}^3 \varphi_i \operatorname{tang} \alpha_i \left\{ \frac{2 + 3 \sec^2 \alpha_i}{\operatorname{sen}^2 \varphi_i} + \frac{1 + 2 \operatorname{sen}^2 \alpha_i}{\cos^4 \alpha_i} \right\} (\varphi - \varphi_i)^3; \end{aligned} \right.$$

dove  $\rho_i$ ,  $N_i$ ,  $r_i$  indicano rispettivamente il raggio di curvatura del meridiano, la gran normale e il raggio del parallelo relativi al punto  $(\varphi_i, \omega_i)$ . Poichè la geodetica considerata passa anche per il punto  $(\varphi_{i+1}, \omega_{i+1})$ , i secondi membri delle (38), per  $\varphi = \varphi_{i+1}$ , devono assumere i valori  $\omega_{i+1}$  e  $\alpha_{i+1}$ . Le (38), nell'approssimazione che ci siamo prefissi, sono integrali della (32).

Per avere la curva (34), passante per i punti  $(\varphi_i, \omega_i)$ ,  $(\varphi_{i+1}, \omega_{i+1})$ , bisogna trovare le funzioni  $u$  e  $v$ , cioè integrare le (35) con le condizioni

$$u(\varphi_i) = u(\varphi_{i+1}) = 0.$$

Porremo dunque

$$(39) \quad \begin{cases} u = X_1(\varphi - \varphi_i) + X_2(\varphi - \varphi_i)^2 + X_3(\varphi - \varphi_i)^3, \\ v = Y_0 + Y_1(\varphi - \varphi_i) + Y_2(\varphi - \varphi_i)^2 + Y_3(\varphi - \varphi_i)^3; \end{cases}$$

e cercheremo di determinare i coefficienti  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $X_3$ ,  $Y_0$ ,  $Y_1$ ,  $Y_2$ ,  $Y_3$ , con la condizione

$$(40) \quad X_1(\varphi_{i+1} - \varphi_i) + X_2(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 + X_3(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^3 = 0.$$

(8) Cfr. MINEO, *Sui problemi della trigonometria sferoidica*, « Atti dell'Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania ». Vol. VII, 1914.

Ora, nell'approssimazione stabilita, il sistema (35) si può scrivere

$$(41) \left\{ \begin{aligned} \frac{dv}{d\varphi} &= \frac{du}{d\varphi} [\text{sen } \varphi_i + (\varphi - \varphi_i) \cos \varphi_i] + (1 - e^2 \cos^2 \varphi_i) \xi_i \text{ tang } \alpha_i + \\ &+ (\varphi - \varphi_i) \left[ \xi_i \text{ tang } \alpha_i \sec^2 \alpha_i + \left( \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right)_i + \left( \frac{\partial \xi}{\partial \omega} \right)_i \frac{\text{tang } \alpha_i}{\cos \varphi_i} \right] \text{ tang } \alpha_i \\ &- \eta_i - (\varphi - \varphi_i) \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right)_i + \left( \frac{\partial \eta}{\partial \omega} \right)_i \frac{\text{tang } \alpha_i}{\cos \varphi_i} \right] - \\ &- e^2 (\xi_i + \eta_i \text{ tang } \alpha_i) \cos^2 \varphi_i \text{ sen } \alpha_i \cos \alpha_i - \\ &- e^2 \frac{h_i}{a} \text{ sen } \varphi_i \cos \varphi_i \text{ tang } \alpha_i, \\ v \sec^2 \alpha_i [1 + 2 \text{ tang } \varphi_i \text{ tang}^2 \alpha_i (\varphi - \varphi_i)] &= \\ &= \frac{du}{d\varphi} [\cos \varphi_i (1 + e^2 \cos^2 \varphi_i) - (\varphi - \varphi_i) \text{ sen } \varphi_i]; \end{aligned} \right.$$

essendo

$$\xi_i = \xi(\varphi_i, \omega_i), \quad \left( \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right)_i = \left( \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=\varphi_i, \omega=\omega_i}; \text{ ecc.}$$

Ponendo nelle (41) le espressioni (39) di  $u$  e  $v$  e identificando, si trova:

$$(42) \left\{ \begin{aligned} Y_1 &= X_1 \text{ sen } \varphi_i + (1 - e^2 \cos^2 \varphi_i) \xi_i \text{ tang } \alpha_i - \eta_i - \\ &- e^2 (\xi_i + \eta_i \text{ tang } \alpha_i) \cos^2 \varphi_i \text{ sen } \alpha_i \cos \alpha_i - \\ &- e^2 \frac{h_i}{a} \text{ sen } \varphi_i \cos \varphi_i \text{ tang } \alpha_i, \\ Y_0 \sec^2 \alpha_i &= X_1 (1 + e^2 \cos^2 \varphi_i) \cos \varphi_i, \\ 2Y_2 &= X_1 \cos \varphi_i + 2X_2 \text{ sen } \varphi_i + \\ &+ \left[ \xi_i \text{ tang } \varphi_i \sec^2 \alpha_i + \left( \frac{\partial \xi}{\partial \varphi} \right)_i + \left( \frac{\partial \xi}{\partial \omega} \right)_i \frac{\text{tang } \alpha_i}{\cos \varphi_i} \right] \text{ tang } \alpha_i \\ &- \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} \right)_i + \left( \frac{\partial \eta}{\partial \omega} \right)_i \frac{\text{tang } \alpha_i}{\cos \varphi_i} \right], \\ (2Y_0 \text{ tang } \varphi_i \text{ tang}^2 \alpha_i + Y_1) \sec^2 \alpha_i &= 2X_2 (1 + e^2 \cos^2 \varphi_i) \cos \varphi_i - X_1 \text{ sen } \varphi_i. \end{aligned} \right.$$

Poichè, per ipotesi,  $Y_0$  è dell'ordine di  $\epsilon$ , la 2<sup>a</sup> delle (42) mostra che anche  $X_1$  è dell'ordine di  $\epsilon$ ; ne segue, per la prima delle (42), che  $Y_1$  è dell'ordine di  $\epsilon$ ; ecc. Com'era da prevedere, *tutti i coefficienti degli sviluppi di  $u$  e  $v$  sono (almeno) dell'ordine di  $\epsilon$ .*

Epperò, essendo trascurabili nella nostra approssimazione i termini dell'ordine di  $\epsilon |\Delta\varphi|^2$ , basterà scrivere

$$(43) \quad u = X_1(\varphi - \varphi_i), \quad v = Y_0 + Y_1(\varphi - \varphi_i),$$

limitandoci a dedurre  $Y_0$ ,  $Y_1$ ,  $X_1$  dalle (42). Inoltre, nel calcolo di  $X_1$  e  $Y_1$ , si potrà prescindere dai termini dell'ordine di  $\varepsilon^2$ , essendo trascurabili i termini dell'ordine di  $\varepsilon^2 |\Delta\varphi|$ .

La (40), allora, dà

$$(44) \quad X_1 = -X_2(\varphi_{i+1} - \varphi_i);$$

quindi dalle (42) segue

$$\begin{aligned} Y_0 &= -X_2(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \cos \varphi_i \cos^2 \alpha_i, \\ Y_1 &= -X_2(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \operatorname{sen} \varphi_i + \xi_i \operatorname{tang} \alpha_i - \eta_i, \\ 2X_2(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \operatorname{sen} \varphi_i \operatorname{sen}^2 \alpha_i + X_2(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \operatorname{sen} \varphi_i - \xi_i \operatorname{tang} \alpha_i - \eta_i &= \\ &= [-2X_2 \cos \varphi_i - X_2(\varphi_{i+1} - \varphi_i) \operatorname{sen} \varphi_i] \cos^2 \alpha_i. \end{aligned}$$

Dall'ultima di queste equazioni si deduce

$$X_2 = \frac{(\xi_i \operatorname{tang} \alpha_i - \eta_i) \sec^2 \alpha_i}{2 \cos \varphi_i \left[ 1 + \frac{1}{2} (\varphi_{i+1} - \varphi_i) \operatorname{tang} \varphi_i (2 + \operatorname{sen}^2 \alpha_i) \sec^2 \alpha_i \right]},$$

cioè, nella nostra approssimazione:

$$(45) \quad X_2 = \frac{(\xi_i \operatorname{tang} \alpha_i - \eta_i) \sec^2 \alpha_i}{2 \cos \varphi_i}.$$

Epperò le (43) diventano:

$$(46) \quad u = 0, \quad v = \left( \varphi - \frac{1}{2} (\varphi_i + \varphi_{i+1}) \right) (\xi_i \operatorname{tang} \alpha_i - \eta_i).$$

In conclusione, *i due archi (di geodetica ellissoidica e di trasformata ellissoidica d'una geodetica geoidica) passanti per i punti  $M_i(\varphi_i, \omega_i)$  e  $M_{i+1}(\varphi_{i+1}, \omega_{i+1})$ , si confondono linearmente, nel senso che sono incontrati dalle curve  $\int \varphi = \text{costante}$  in punti le cui differenze di longitudine sono dell'ordine di  $\varepsilon(\Delta\varphi)^2$  e quindi trascurabili ( $u = 0$ ); mentre gli azimut, negli anzidetti punti, differiscono per quantità dell'ordine di  $\varepsilon |\Delta\varphi|$ , avendosi <sup>(9)</sup>:*

$$(47) \quad \alpha - \Theta = \left( \frac{1}{2} (\varphi_i + \varphi_{i+1}) - \varphi \right) (\xi_i \operatorname{tang} \alpha_i - \eta_i).$$

(9) Nel lavoro citato del 1911, mi son limitato a paragonare la curva (31), passante per  $M_i$  e  $M_{i+1}$ , con la geodetica ellissoidica passante per  $M_i$  e tangente ivi all'anzidetta curva. In questo caso, il calcolo precedente è da modificare. Ora, in fatti, si ha

$$u = A_1(\varphi - \varphi_i) + \dots, \quad v = B_1(\varphi - \varphi_i) + \dots,$$

come soluzione di (41); e facilmente si deduce

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \xi_i \operatorname{tang} \alpha_i - \eta_i.$$

Dunque, le due curve *linearmente* si confondono; gli azimut sono ora legati dalla relazione

$$\alpha - \Theta = -(\varphi - \varphi_i)(\xi_i \operatorname{tang} \alpha_i - \eta_i);$$

e naturalmente coincidono nell'origine  $M_i$  dell'arco (vedi formola (52) del citato lavoro).

9. Veniamo ora alla formola della deviazione in azimut. Nelle applicazioni geodetiche, alla trasformata ellissoidica della geodetica passante per due punti del geoide  $M_i^*$  e  $M_{i+1}^*$  (vertici della rete geodetica) si sostituisce la geodetica ellissoidica passante per i punti  $M_i$  e  $M_{i+1}$ , dell'ellissoide: quindi all'angolo  $\Theta$  si sostituisce l'angolo  $\alpha$ . La formola (24<sup>bis</sup>) della deviazione in azimut va dunque modificata, tenendo conto della formola (47).

Siano  $M_0^*, M_1^*, M_2^*, \dots$  i vertici successivi d'una *poligonale geodetica* (i cui lati sono gli archi geodetici  $M_0^*M_1^*, M_1^*M_2^*, \dots$ ) e siano  $M_0, M_1, M_2, \dots$  i punti corrispondenti (n° 2) sull'ellissoide. Considerato un arco geodetico generico  $M_i^*M_{i+1}^*$  sul geoide, chiamiamo  $A_{i,i+1}$  e  $A_{i+1,i+1}$  gli azimut di esso arco (percorso positivamente da  $M_i^*$  a  $M_{i+1}^*$ ) nei vertici  $M_i^*$  e  $M_{i+1}^*$ . Similmente, consideriamo l'arco  $M_iM_{i+1}$  di geodetica ellissoidica (arco non corrispondente all'arco  $M_i^*M_{i+1}^*$ ) e chiamiamo  $\alpha_{i,i+1}$  e  $\alpha_{i+1,i+1}$  gli azimut di esso (contato positivamente da  $M_i$  a  $M_{i+1}$ ) negli estremi  $M_i$  e  $M_{i+1}$ . Tenendo presenti la (24<sup>bis</sup>) e le (47), si può scrivere, nell'approssimazione presente:

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} A_{i,i+1} - \alpha_{i,i+1} &= \eta_i \operatorname{tang} \varphi_i - e^2 \frac{h_i}{a} \cos^2 \varphi_i \operatorname{sen} \alpha_{i,i+1} \cos \alpha_{i,i+1} - \\ &\quad - \frac{1}{2} (\varphi_{i+1} - \varphi_i) (\xi_i \operatorname{tang} \alpha_{i,i+1} - \eta_i), \\ A_{i+1,i+1} - \alpha_{i+1,i+1} &= \eta_{i+1} \operatorname{tang} \varphi_{i+1} - e^2 \frac{h_{i+1}}{a} \cos^2 \varphi_{i+1} \operatorname{sen} \alpha_{i+1,i+1} \cos \alpha_{i+1,i+1} + \\ &\quad + \frac{1}{2} (\varphi_{i+1} - \varphi_i) (\xi_i \operatorname{tang} \alpha_{i,i+1} - \eta_i); \end{aligned} \right.$$

le quali sono le formole generali della deviazione in azimut (nei vari vertici della rete).

Ora si ha, in generale, per la (14):

$$h_{i+1} - h_i = \int_{\varphi_i}^{\varphi_{i+1}} \left( D\xi + D''\eta \sec \varphi \frac{d\omega}{d\varphi} \right) d\varphi,$$

dove l'integrale si può intendere calcolato lungo l'arco geodetico  $M_iM_{i+1}$ .

Si può anche scrivere

$$h_{i+1} - h_i = (\varphi_{i+1} - \varphi_i) \left( D\xi + D''\eta \sec \varphi \frac{d\omega}{d\varphi} \right)_{\varphi^*},$$

dove  $\varphi^*$  è un punto dell'intervallo  $(\varphi_i, \varphi_{i+1})$ . Ma poichè, nella presente approssimazione, i termini dell'ordine di  $e^2 |\Delta\varphi|$  sono trascurabili, e così pure quelli dell'ordine di  $e(\Delta\varphi)^2$ , si potrà prescindere dai termini in  $e^2$  nella pre-

cedente; e al punto  $\varphi^*$  della teoria si potrà sostituire il punto  $\varphi_{i+1}$ . Epperò si può scrivere

$$(49) \quad h_{i+1} - h_i = -a(\varphi_{i+1} - \varphi_i)(\xi_{i+1} + \eta_{i+1} \operatorname{tang} \alpha_{i+1, i+1});$$

o anche, nella stessa approssimazione, per le (48):

$$(49^{\text{bis}}) \quad h_{i+1} - h_i = -a(\varphi_{i+1} - \varphi_i)(\xi_{i+1} + \eta_{i+1} \operatorname{tang} A_{i+1, i+1}).$$

Supponiamo che nel punto  $M_0$  si abbia

$$(50) \quad \xi_0 = \eta_0 = h_0 = 0.$$

Si può allora scrivere

$$(51) \quad -\frac{h_{i+1}}{a} = \sum_{r=1}^{r=i+1} (\varphi_r - \varphi_{r-1})(\xi_r + \eta_r \operatorname{tang} A_{r,r}),$$

per valori, s'intende, non molto grandi di  $i$ . se non si vuole che l'accumularsi degli errori *teorici* (derivanti dai termini trascurati) ci allontani dall'approssimazione desiderata.

La (51), con le avvertenze fatte, ci mostra che  $\frac{h_i}{a}$  è dell'ordine di  $\varepsilon |\Delta\varphi|$ ; ne viene che  $e^2 \frac{h_i}{a}$  è trascurabile nella presente approssimazione, essendo dell'ordine di  $\varepsilon e^2 |\Delta\varphi|$ . Le (48), dunque, si possono ridurre alle seguenti:

$$(52) \quad \begin{cases} A_{i, i+1} - \alpha_{i, i+1} = \eta_i \operatorname{tang} \varphi_i - \frac{1}{2} (\varphi_{i+1} - \varphi_i) (\xi_i \operatorname{tang} \alpha_{i, i+1} - \eta_i), \\ A_{i+1, i+1} - \alpha_{i+1, i+1} = \eta_{i+1} \operatorname{tang} \varphi_{i+1} + \frac{1}{2} (\varphi_{i+1} - \varphi_i) (\xi_i \operatorname{tang} \alpha_{i, i+1} - \eta_i). \end{cases}$$

E la (24) diventa semplicemente

$$A - \Theta = \eta \operatorname{tang} \varphi,$$

cioè la rappresentazione (7) è conforme in quest'ordine di approssimazione.

10. Convieni ora paragonare le lunghezze di due archi

$$s_{i+1}^* = M_i^* M_{i+1}^*, \quad s_{i+1} = M_i M_{i+1},$$

corrispondenti nella trasformazione (7). A questo effetto, adopereremo la formula (28), che, nell'approssimazione presente (n° 8), si può scrivere così:

$$(53) \quad \begin{aligned} s_{i+1}^* - s_{i+1} = \\ = a(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 (\xi_{i+1} + \eta_{i+1} \operatorname{tang} A_{i+1, i+1}) \frac{1 + \cos \varphi_{i+1} \operatorname{tang} A_{i+1, i+1}}{\sqrt{\cos^2 \varphi_{i+1} + \operatorname{tang}^2 A_{i+1, i+1}}} \cos \varphi_{i+1}. \end{aligned}$$



Segue

$$\frac{s_{i+1}^*}{a} = \frac{s_{i+1}}{a},$$

perchè la differenza dei due rapporti è dell'ordine di  $\epsilon(\Delta\varphi)^2$  e quindi trascurabile (n° 8).

Ma anche i due archi  $s_{i+1}$  e  $s_{i+1}^*$  si possono, il più delle volte, ritenere eguali, perchè, nell'ipotesi che siano compresi dentro i 100 chilometri e con le avvertenze fatte alla fine del n° 7, si ha

$$|s_{i+1}^* - s_{i+1}| \leq \text{cm } 16.$$

11. Veniamo, in fine, al paragone degli angoli  $M_i^*M_{i+1}^*M_{i+2}^*$  e  $M_iM_{i+1}M_{i+2}$  delle due poligonali geodetiche (n° 9), situate rispettivamente sul geoide e sull'ellissoide. Nel presente ordine di approssimazione, la rappresentazione (7) è conforme (n° 9); ma i due angoli predetti non si corrispondono nella rappresentazione in discorso.

Intendendo che l'angolo  $M_iM_{i+1}M_{i+2}$  venga generato dalla rotazione positiva che deve compiere la tangente in  $M_{i+1}$  al lato  $M_{i+1}M_i$  per sovrapporsi alla tangente in  $M_{i+1}$  al lato  $M_{i+1}M_{i+2}$ , si può scrivere, con le nostre notazioni (n° 9):

$$M_i\widehat{M_{i+1}}M_{i+2} \equiv \alpha_{i+1, i+2} - \pi - \alpha_{i+1, i+1} \pmod{2\pi}.$$

E similmente:

$$M_i^*\widehat{M_{i+1}^*}M_{i+2}^* \equiv A_{i+1, i+2} - \pi - A_{i+1, i+1} \pmod{2\pi}.$$

E quindi per le (52):

$$(54) \quad M_i\widehat{M_{i+1}}M_{i+2} = M_i^*\widehat{M_{i+1}^*}M_{i+2}^* + \frac{1}{2}(\varphi_{i+1} - \varphi_i)(\xi_i \text{ tang } \alpha_{i, i+1} - \eta_i) + \frac{1}{2}(\varphi_{i+2} - \varphi_{i+1})(\xi_{i+1} \text{ tang } \alpha_{i+1, i+2} - \eta_{i+1}).$$

Come si vede, i due angoli hanno una differenza dell'ordine di  $\epsilon|\Delta\varphi|$ , quindi non trascurabile (potendo raggiungere 0"3 e più).

12. Vediamo, ora, rapidamente, fino a qual punto si possa giustificare il procedimento pratico con il quale la rete geoidica, determinata con le osservazioni astronomico-geodetiche, si attribuisce e si distende sull'ellissoide. Qui non tocchiamo il problema della riduzione delle misure al geoide, supponendo che lati e angoli della rete appartengano addirittura al geoide (come se la superficie di questo fosse accessibile e su di essa si compissero le

misure). Ma il modo con il quale questa rete si distende sull'ellissoide ha in ogni caso capitale importanza, perchè dà luogo a una corrispondenza *di fatto* tra i vertici della rete geoidica e quelli ellissoidici; e bisogna vedere se e fino a qual punto tale corrispondenza sia una corrispondenza per normali geoidiche o per verticali, giusta le (7).

A questo effetto, partiamo dal punto origine  $M_0^*$  della rete geoidica, nel qual punto sono verificate le (50). Dalle (52), per  $i = 0$ , tenendo presenti le (50), segue:

$$(55) \quad A_{01} = \alpha_{01}, \quad A_{11} = \alpha_{11} + \eta_1 \operatorname{tang} \varphi_1.$$

Dalle (53), dove ora possiamo intendere che  $s_{i+1}$  sia la lunghezza dell'  $(i + 1)^{\text{mo}}$  lato  $M_i M_{i+1}$  della poligonale geodetica, situata sull'ellissoide [perchè esso si confonde linearmente (n° 8) con il trasformato ellissoidico dell'arco  $M_i^* M_{i+1}^*$  di geodetica geoidica], si deduce, per  $i = 0$ , badando alla seconda delle (55):

$$(56) \quad s_1 = s_1^* - a(\varphi_1 - \varphi_0)^2 (\xi_1 + \eta_1 \operatorname{tang} A_{11}) \frac{1 + \cos \varphi_1 \operatorname{tang} A_{11}}{\sqrt{\cos^2 \varphi_1 + \operatorname{tang}^2 A_{11}}} \cos \varphi_1.$$

Potendosi prendere  $s_1 = s_1^*$ , si vede che distendendo il primo lato  $M_0^* M_1^*$  della rete sull'ellissoide, a partire dal punto  $M_0$ , dove  $\varphi_0 = l_0$ , in modo che nel punto  $M_0$  l'azimut ellissoidico  $\alpha_{01}$  coincida con quello astronomico  $A_{01}$ , si perviene proprio al punto  $M_1$ , che è il corrispondente ellissoidico di  $M_1^*$ , giusta la (7). Il procedimento pratico resta quindi giustificato, per questo primo lato della rete.

Se si dovesse tener conto della correzione da apportare a  $s_1^*$  per avere  $s_1$ , giusta la (56), bisognerebbe procedere per approssimazioni successive: il valore *provvisorio*  $s_1^*$  potrebbe servire al trasporto delle coordinate ellissoidiche lungo l'arco geodetico  $M_0 M_1$ ; avuti  $\varphi_1$  e  $\omega_1$  dal detto trasporto e conoscendo le coordinate astronomiche  $l_1$  e  $\lambda_1$  del punto  $M_1^*$ , si dedurrebbero  $\xi_1$  e  $\eta_1$ ; ecc. ecc.

Passiamo al secondo lato  $M_1^* M_2^*$  della rete geoidica. Dalle (54) abbiamo, per  $i = 0$ :

$$(57) \quad M_0 \widehat{M}_1 M_2 = M_0^* \widehat{M}_1^* M_2^* + \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1) (\xi_1 \operatorname{tang} \alpha_{12} - \eta_1).$$

E questa mostra che non è lecito, come si fa in pratica, confondere l'angolo misurato  $M_0^* \widehat{M}_1^* M_2^*$  con l'angolo  $M_0 \widehat{M}_1 M_2$ : il secondo lato della rete ellissoidica deve formare con il primo l'angolo  $M_0 M_1 M_2$ , dato dalla (57). Il termine correttivo possiamo procurarcelo, giacchè la (57), nella stessa approssimazione, si può scrivere:

$$(57^{\text{bis}}) \quad M_0 \widehat{M}_1 M_2 = M_0^* \widehat{M}_1^* M_2^* + \frac{1}{2} (l_2 - l_1) (\xi_1 \operatorname{tang} A_{12} - \eta_1);$$

e nel secondo membro tutto è noto, posto che si siano determinati i due elementi astronomici  $l_2$  e  $A_{1,2}$ . Riportando, sulla geodetica ellissoidica uscente da  $M_1$  e formante l'angolo predetto con la geodetica  $M_1M_0$ , un arco di lunghezza  $s_2^*$  <sup>(10)</sup>, si ottiene il punto  $M_2$ , corrispondente al punto  $M_2^*$ , secondo le (7).

Così continuando, si vede che per distendere convenientemente sull'ellissoide la poligonale geoidica  $M_0^*M_1^*M_2^*...$ , in modo che i vertici  $M_0, M_1, M_2...$  siano, sull'ellissoide, i corrispondenti secondo le (7) dei punti  $M_0^*, M_1^*, M_2^*, ...$  bisogna avere, da misure geodetiche, gli elementi

$$s_1^*, s_2^*, \dots; M_0^*\widehat{M}_1^*M_2^*, M_1^*\widehat{M}_2^*M_3^*, \dots,$$

e, da determinazioni astronomiche, gli elementi

$$l_0, \lambda_0, A_{01}; l_1, \lambda_1, A_{12}; \dots$$

Quando manchino alcuni di questi dati o quando non siano verificate sufficientemente le condizioni volute dalla teoria, il procedimento pratico in uso non costituisce se non una prima approssimazione; sarebbe poi necessaria una seconda approssimazione della quale non vogliamo qui occuparci.

---

<sup>(10)</sup> Riteniamo pure che sia  $s_{i+1}^* = s_{i+1}$ . Nell'ordine d'approssimazione fissato, i due intorni considerati, del geode e dell'ellissoide, appaiono applicabili e può sembrare quindi contraddittorio che le geodetiche non si corrispondano o che gli angoli non siano conservati. In verità, l'eguaglianza  $s_{i+1}^* = s_{i+1}$  è soltanto approssimata e quindi non è lecito dedurre le conseguenze alle quali porta l'applicabilità rigorosa. È lecito soltanto fare le seguenti affermazioni: la differenza di due archi corrispondenti è dell'ordine di  $\alpha\varepsilon(\Delta\varphi)^2$ ; l'arco geodetico  $M_i^*M_{i+1}^*$  e il trasformato ellissoidico dell'arco geodetico  $M_i^*M_{i+1}^*$  sono incontrati dalle linee  $\varphi = \text{costante}$  in punti in cui le longitudini differiscono per quantità dell'ordine di  $\varepsilon(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2$ , mentre gli azimut negli stessi punti differiscono per quantità dell'ordine di  $\varepsilon|\varphi_{i+1} - \varphi_i|$ ; ecc. ecc.



# Ueber vollständig un stabile dynamische Systeme.

Von V. NIEMYTZKI (Moskau, U. d. S. S. R.).

## § I. Problemstellung. Bezeichnungen.

1. Wir betrachten ein System von Differentialgleichungen

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2 \dots n),$$

deren rechte Seiten stetige Funktionen sind, die in jedem beschränkten Gebiete des  $R^n$  den Lipschitzschen Bedingungen genügen. Unter diesen Voraussetzungen geht durch jeden Punkt  $(x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0)$  des Phasenraumes eine und nur eine Integralkurve oder Bahnkurve des gegebenen Systems (1) oder m. a. W. des gegebenen dynamischen Systems <sup>(1)</sup>.

2. Wir bezeichnen die Bahnkurve durch den Punkt  $a$  mit  $a(t)$  Seien  $a_1 = a(t_1)$  und  $a_2 = a(t_2)$  zwei Punkte auf einer und derselben Bahnkurve. Die Differenz  $t_2 - t_1$  wird als der Zeitabstand der beiden Punkte definiert und durch den Symbol  $\rho_t(a_1, a_2)$  bezeichnet.

Es ist leicht ersichtlich, dass der Zeitabstand von dem Anfangspunkte der betrachteten Bahnkurve unabhängig ist.

Wir führen ferner folgende Definition ein.

DEFINITION 1. — *Es sei E eine Punktmenge des Phasenraumes. Die Vereinigungsmenge der Punkte aller derjenigen Bahnkurven, die sich mit E schneiden, wird eine Röhre durch E genannt. Eine Röhre durch E (die eine invariante Menge ist, d. h. aus ganzen Bahnkurven besteht) wird  $T_E$  bezeichnet.*

Ein jeder Punkt von  $E$ , als Punkt seiner Bahnkurve betrachtet, entspreche dem Parameterwert  $t=0$ ; die Gesamtheit der Punkte dieser Bahnkurven, die dem Werte  $t$  entsprechen, bildet eine neue Menge, die wir als  $E_t$  bezeichnen.

---

<sup>(1)</sup> BIRKHOFF, *Dynamical Systems*, Ch. 1, S. 2.

3. Für die von uns betrachteten dynamischen Systeme gilt der sogenannte Satz von Integralstetigkeit, den wir oft gebrauchen werden.

*Der Satz von Integralstetigkeit.* Für jede abgeschlossene und beschränkte Menge  $F$  und für vor-gegebene Zahlen  $T$  und  $\varepsilon$ , gibt es eine Zahl  $\delta$  derart, dass falls  $x \in F$ ,  $y \in F$  und  $\rho(x, y) < \delta$ , so ist  $\rho(x(t), y(t)) < \varepsilon$  wenn nur  $t_2 \leq T$ ,  $t_2 \leq T$  und  $|t_2 - t_1| < \delta$ .

Die betrachteten Systeme haben weiter folgende Eigenschaften, die man z. B. in dem schon zitierten Buche von BIRKHOFF <sup>(2)</sup> finden kann.

Ist  $a$  ein gewöhnlicher Punkt des Systems, d. h. verschwinden nicht alle rechten Seiten gleichzeitig in diesem Punkte, so ist das System (1) in einer Umgebung dieses Punktes dem System

$$\frac{dy_1}{dt} = 1, \quad \frac{dy_i}{dt} = 0 \quad (i = 2, 3 \dots n)$$

äquivalent, d. h. dass die Integralkurven des Systems (1) in dieser Umgebung einer einparametrischen Schar von Parallelgeraden topologisch äquivalent sind, oder, anders angedrückt, dass die Transformationsgruppe, die durch das Vektorfeld (1) bestimmt ist, in Kleinem eine Translationsgruppe ist.

Der Zweck vorliegender Arbeit ist eine Klasse von Differentialgleichungen zu finden und vollständig zu charakterisieren, deren Integralkurven auch « in Grössem » die oben beschriebene Eigenschaft besitzen, d. h. deren Transformationsgruppe eine Translationsgruppe ist.

## § II. Vollständig un stabile Systeme.

1. In seiner Arbeit: *Quelques théorèmes sur les mouvements des systèmes dynamiques* <sup>(3)</sup>, hat BIRKHOFF folgende Definition eingeführt.

Eine Bahnkurve  $a(t)$  heisst positiv (negativ) stabil, falls sie für  $t > T$  ( $t < T$ ) in einem beschränkten abgeschlossenen Gebiete bleibt, in welchem die Lipschitzschen Bedingungen erfüllt sind, und keine singuläre Stellen vorhanden sind.

Wir bezeichnen die Bahnkurve  $a(t)$  un stabil, falls für genügend grosse absolute Werte von  $t$ ,  $a(t)$  in keinem beschränkten Gebiete bleibt.

Hat das System (1) keine einzige stabile Bahnkurve, so heisst das System un stabil.

<sup>(2)</sup> BIRKHOFF, *Dynamical Systems*, Ch. 1, S. 6.

<sup>(3)</sup> « Bull. Soc. Math. de France », 40, (1912).

Ein solches System kann keine einzige Gleichgewichtsstelle haben und keine periodische Lösung. Für das folgende brauchen wir noch einen von BIRKHOFF eingeführten Begriff (4).

Der Punkt des dynamischen Systems (1) heisst *ein wandernder Punkt*, falls man eine so kleine (sphärische) Umgebung  $S = S(a, \delta)$  des Punktes  $a$  und eine Zahl  $T > 0$  finden kann, dass für  $|t| > T$ ,  $S \cdot S_t = 0$  ist. Alle andere Punkte sind nichtwandernde.

Wir führen jetzt folgende Definition ein.

DEFINITION. — *Das dynamische System heisst vollständig instabil falls alle seine Punkte wandernde Punkte sind.*

Solche Systeme können keine einzige rekurrente Lösung haben (5). Wir bemerken zunächst, dass jedes vollständig instabile System erst recht instabil ist. In der Tat, hat ein System mindestens eine positiv oder negativ stabile Bahnkurve, so wird es  $\alpha$  oder  $\omega$ -Limespunkte (6) haben, ein jeder solcher Punkt ist aber bekanntlich ein nichtwandernder Punkt.

Die Umkehrung dieses Satzes ist nur für das System von zwei Gleichungen (Satz 1) richtig. Schon für den Fall von drei Gleichungen gibt es instabile Systeme die nicht vollständig instabil sind (Beispiel 1).

SATZ 1. — *Für den Fall des zweidimensionalen Phasenraumes ist jedes instabiles System vollständig instabil.*

*Beweis:* Es sei  $a$  ein nichtwandernder Punkt. Da  $a$  keine Gleichgewichtsstelle sein kann, so gibt es eine so kleine Umgebung des Punktes  $a$ ,  $S(a, \varepsilon)$ , dass sämtliche Bahnkurven, die gemeinsame Punkte mit der Normalen zu  $a(t)$  im Punkte  $a$  haben, das Stück  $\overline{PQ}$  dieser Normalen in innern von  $S(a, \varepsilon)$  unter den Winkeln schneiden, die zwischen  $\frac{\pi}{2} - \delta$  und  $\frac{\pi}{2} + \delta$  enthalten sind ( $\delta > 0$  beliebig klein).

Es gibt ferner eine so kleine Umgebung  $S(a, \eta)$ , dass jede Bahnkurve mit  $S(a, \eta)$  einen gemeinsamen Punkt  $b$  hat, und das  $\overline{PQ}$  in einem Punkte  $c$  schneiden, so dass der Bogen  $bc \subset S(a, \varepsilon)$ . Da  $a$  nach Voraussetzung ein nichtwandernder Punkt ist, so gibt es für jede auch so grosse Zahl  $T$  einen Punkt  $x \subset S(a, \eta)$ , und einen Wert  $t \geq T$  so dass  $y = x(t) \subset S(a, \eta)$  Wir können dabei voraussetzen, dass der Bogen  $\overline{xy}$  Punkte ausserhalb  $S(a, \varepsilon)$

(4) BIRKHOFF, *Ueber gewisse zentrale Bewegungen dynamischer Systeme*. Gotting. Nachrichten 1926.

(5) BIRKHOFF, *Quelques théorèmes sur les systèmes dynamiques*, (loc. cit., 2).

(6)  $\alpha$  (bzw.  $\omega$ )-Limespunkt ist ein Limespunkt der Bahnkurve  $a(t)$  für  $t \rightarrow -\infty$  ( $t \rightarrow +\infty$ ) (loc. cit., (4)).

besitzt (im entgegengesetztem Falle würde der Punkt  $a$  ein Gleichgewichtspunkt sein).

Es seien  $R$  (bzw.  $S$ ) die dem Punkte  $x$  (bzw.  $y$ ) nächstliegende Schnittpunkte von  $x(t)$  mit  $\overline{PQ}$ . Der Bogen  $\overline{xR}$  (bzw.  $\overline{yS}$ ) enthält den Punkt  $y$  (bzw.  $x$ ) nicht. Solche Punkte existieren wegen der Wahl der Umgebung  $S(a, \eta)$ . Wir betrachten das Innere durch den Bogen der Bahnkurve  $\overline{RS}$  und das Stück der Normalen  $\overline{SR}$  begrenzte abgeschlossene Gebiet. Eine jede für  $t > 0$  oder  $t < 0$  durch  $\overline{SR}$  durchgehende Bahnkurve tritt in dieses Gebiet ein, und wegen der Wahl von  $S(a, \varepsilon)$ , bleibt dort für  $t \rightarrow +\infty$  oder  $t \rightarrow -\infty$ , also ist entweder positiv oder negativ stabil. Also zieht die Existenz eines einzigen nichtwandernden Punktes Stabilität unseres Systems nach sich ein, was zu beweisen war.

BEISPIEL 1. — *Ein un stabiles aber nicht vollständig un stabiles System in dreidimensionalem Phasenraume.*

Wir betrachten eine einparametrische Schar von Spiralen von Archimedes.  $\rho = \omega + a$ ,  $\omega + a > 0$  in Polarkoordinaten  $\rho, \omega$ ;  $a$  ist der Parameter dieser Schar. Durch jeden Punkt der Ebene, ausser dem Anfangspunkt, geht eine und nur eine Spirale unserer Schar. Jede Spirale schneidet den Einheitskreis in einem einzigen Punkte.

Wir betrachten jetzt die Kurve  $z = \frac{(y^2 - 1)^2}{y^2}$  in  $(zy)$ -Ebene. Diese Kurve hat die  $Y$ -Achse als Tangente in Punkten  $y = +1$ ,  $y = -1$ . Wir betrachten ferner die Rotationsfläche  $z = \frac{(x^2 + y^2 - 1)^2}{x^2 + y^2}$ , die durch Rotation der Kurve  $z = \frac{(y^2 - 1)^2}{y^2}$  um die  $z$ -Achse entsteht. Diese Fläche berührt die  $(xy)$ -Ebene längs des Einheitskreises  $x^2 + y^2 = 1$ . Wir projizieren parallel der  $z$ -Achse die Teile der Spiralen  $\rho = \omega + a$ , die im Innern und auf der Grenze des Einheitskreises verlaufen, auf diese Fläche. Man erhält eine Kurvenschar, die diese Fläche bedeckt, von der Beschaffenheit, dass für  $\rho \rightarrow 0$ ,  $z \rightarrow \infty$ . Wenn man dazu die Teile der Spiralen äusserhalb des Einheitskreises hinzufügt, erhält man eine Kurvenschar, die unsere Fläche und das Aussere des Einheitskreises bedeckt und überall eine stetige Tangente haben.

Die Gleichungen dieser Kurvenfamilie kann man in Zylinderkoordinaten folgendermassen schreiben:

$$z = f(\omega + a) + b, \quad x = (\omega + a) \cos \omega, \quad y = (\omega + a) \sin \omega$$

$$f(\alpha) = \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{\alpha^2} \quad \text{für } 0 \leq \alpha \leq 1, \quad f(\alpha) = 0 \quad \text{für } \alpha \geq 1.$$



Dann bedeckt die zweiparametrische Kurvenschar den ganzen dreidimensionalen Raum, ausser der  $z$ -Achse, eindeutig und stetig.

Durch jeden Punkt des Raumes geht eine und nur eine Kurve der Schar, und die Tangenten dieser Kurven bilden ein stetiges Vektorfeld, auch dann noch wenn man zu der Schar die  $z$ -Achse hinzufügt.

Wir unterwerfen jetzt den ganzen Raum der Transformation:

$$x_1 = e^x - 2; \quad y_1 = y; \quad z_1 = z.$$

Diese Abbildung ist eine eineindeutige Abbildung des ganzen Raumes auf den Halbraum  $x > -2$ . Da unsere Transformation analytisch ist, so wird die Stetigkeit des Vektorfeldes dabei erhalten (auch auf der Ebene  $x = -2$  geht dieses Feld in die Parallelen zu der  $y$ -Achse stetig über). In Halbraume  $x < -2$  definieren wir das Vektorfeld mittels der zur  $Y$ -Achse parallelen Geraden.

Die Teile der Spiralen, die ausserhalb der Zylinderfläche  $x^2 + y^2 = 1$  liegt, gehen in solche Kurven über, die als Häufungspunkte sämtliche Punkte der Geraden  $x_1 = -2, z = b$  haben. Die Kurven, die auf der Flächen  $z + b = \rho(x, y)$  verlaufen, werden jetzt an die Gerade  $x_1 = -1, y_1 = 0$  asymptotisch anschmiegen.

Wenn wir das so gebaute Vektorfeld als Vektorfeld eines dynamischen Systems betrachten, so wird dieses System unstabil, und zugleich sind sämtliche Punkte der Ebene  $x = -2$  nichtwandernde Punkte.

Um die Rolle der eingeführten Begriffe im aufgestellten Probleme sofort klarzumachen, beweisen wir den

**SATZ 2.** — *Die vollständige Unstabilität des dynamischen Systems ist eine notwendige Bedingung für die eineindeutige und stetige Abbildbarkeit diesen Systems auf eine Schar der Parallelgeraden* (7).

*Beweis:* Es sei in der Tat  $M$  die Bahnkurvenschar eines dynamischen Systems, das auf die Parallelgeradenschar  $M$  abgebildet ist. Es sei zugleich  $x$  ein nicht wandernder Punkt und  $y$  sein Bild in  $M$ . Infolge der Stetigkeit der Abbildung ist die Urbildmenge einer genügend kleinen sphärischen Umgebung  $S(y, \epsilon)$  in  $M$  ein beschränktes Gebiet  $G \subset M$ . Zwei Punkte  $x'$  und  $x''$ , die auf einer und derselben Bahnkurve in  $G$  liegen, entsprechen zwei Punkten  $y'$  und  $y''$  in  $S(y, \epsilon)$ , die auf einer Geraden liegen.

(7) Die Abbildbarkeit des dynamischen Systems auf die Scharen der Parallelgeraden ist eine solche topologische Abbildung des Phasenraumes, wobei die Bahnkurven in die Geraden übergehen.

Da  $S(y, \epsilon)$  konvex ist, so liegt das Segment  $y'y''$  im Innern von  $S(y, \epsilon)$ , also liegt sein Urbild  $x'x''$  im Innern von  $G$ .

Andererseits, da  $x$  ein nicht wandernder Punkt ist, so gibt es in  $G$  solche Punktepaare  $x_1x_2$ , die auf einer und derselben Bahnkurve liegen, so dass  $\rho_t(x_1x_2) > T$ , wobei  $T$  beliebig gross ist. Ist dabei  $G$  genügend klein, so müssen die Bogen  $\widehat{x_1x_2}$  Punkte ausserhalb  $G$  haben.

Im entgegengesetztem Falle würde die aus  $x$  ausgehende Bahnkurve für beliebig grosse Werte von  $\tau$  in einer genügend kleinen Umgebung von  $x$  bleiben, also wäre  $x$  ein Gleichgewichtspunkt des Systems, was unmöglich ist. Also bekommen wir einen Widerspruch, der unseren Satz beweist.

Wir werden in folgendem Paragraphen zeigen, dass die vollständige Unstabilität des Systems für die Abbildbarkeit auf eine Parallelgeradenschar nicht hinreicht.

### § III. Der Sattelpunkt im Unendlichen.

Wir werden in diesem Paragraphen eine Singularität untersuchen, die so wie für un stabile, auch für vollständig un stabile Systeme stattfinden kann.

DEFINITION. — *Das dynamische System hat einen Sattelpunkt im Unendlichen, falls es eine positive Zahl  $K$  gibt, so dass man für jede Zahl  $N > K$  in der Sphäre  $S(0, K)$  um den Anfangspunkt von Radius  $K$ , zwei Punkte  $a$  und  $b$  auf einer und derselben Bahnkurve finden kann, derart, dass der sie verbindende Bogen der Bahnkurve Punkte ausserhalb  $S(0, N)$  enthält.*

Eine solche Beschaffenheit besitzt das Beispiel des vorigen Paragraphen. Wir wollen jetzt ein anderes Beispiel angeben.

BEISPIEL 2. — Ein vollständig un stabiles System mit einem Sattelpunkt in Unendlichem.

Wir betrachten das System der Differentialgleichungen  $\frac{dx}{dt} = -2 \cos y$ ;  $\frac{dy}{dt} = \sin^3 y$ ; sein Integral ist  $x + c = \frac{1}{\sin^2 y}$ . Die Geraden  $y = \pm k\pi$  ( $k = 0, 1, 2 \dots$ ) sind auch die Bahnkurven dieses Systems. Im Innern des Kreises  $S\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$  liegen die Stücke der Geraden  $y = 0$ ,  $y = +\pi$ ,  $y = -2$ .

Für jede beliebig grosse Zahl  $N$ , gibt es ein Punktepaar, auf einer und derselben Bahnkurve, so dass der eine Punkt in der Nähe der Geraden  $y = 0$ , und der andere in der Nähe von  $y = +\pi$  liegt, und dass der diese Punkte verbindende Bogen Punkte ausserhalb  $S(0, N)$  haben wird.

HILFSSATZ 1. — *Es sei  $\widehat{p_1q_1}, \widehat{p_2q_2} \dots \widehat{p_nq_n} \dots$  eine Folge von Bogen der*

*Bahnkurve eines un stabilen Systems ohne Sattelpunkt im Unendlichen. Konvergieren die Punktfolgen:  $p_1 p_2 p_3 \dots p_n \dots$  gegen  $p$  und  $q_1 q_2 q_3 \dots q_n \dots$  gegen  $q$ , so ist  $|\rho_t(p_n q_n)| < A$  unabhängig von  $n$ .*

*Beweis:* In der Tat, da  $\{p_t\}; \{q_t\}$  konvergent sind, so sind es beschränkte Punktfolgen, etwa  $\{p_n\} \subset S(0, K); \{q_n\} \subset S(0, K)$ . Folglich ist  $p \in \overline{S(0, K)}; q \in \overline{S(0, K)}$ . Da unser System keinen Sattelpunkt im Unendlichen besitzt, so liegen sämtliche Bogen unserer Folge in einem beschränktem Gebiete  $S(0, R)$ . Sei  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\rho_t(p_n, q_n)| = \infty$ . Wir betrachten die Bahnkurve  $p(t)$  und eine beliebig grosse Zahl  $T$ . Wir wählen auf Grund des Integralstetigkeitssatzes eine so kleine Zahl  $\delta$  dass für  $\rho(p, p_n) < \delta$  und  $t \leq T, \rho(p(t), p_n(t)) < R$  gilt.

Andererseits, da  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\rho_t(p_n, q_n)| = \infty$  ist, gilt es eine Zahl  $N$ , so dass  $\rho(p, p_N) < \delta, \rho_t(p_N, q_N) > T$  ausfällt, da aber der Bogen  $p_N q_N \subset S(0, R)$  und, gemäss der Wahl von  $\delta, \rho(p(t), p_n(t)) < R$  ist für  $t \leq T$ , so liegt der Bogen  $(p, p(T))$  unabhängig von  $N$  in  $S(0, 2R)$ , d. h. die Bahnkurve  $p(t)$  ist stabil. Der Widerspruch beweist unseren Hilfssatz.

**SATZ 3.** — *Hat ein un stabiles System kein Sattelpunkt im Unendlichen, so ist es vollständig un stabil.*

*Beweis:* Wir setzen voraus, dass ein dynamisches System  $M$  un stabil ist, dass es aber einen nichtwandernden Punkt  $x$  hat. Wir betrachten zwei Zahlenfolgen  $T_1 T_2 \dots T_n \dots, T_{k+1} > T_k, \lim T_n = \infty$  und  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots, \varepsilon_{k+1} > \varepsilon_k, \lim \varepsilon_n = 0$ . Da  $x$  ein nichtwandernder Punkt ist, so gibt es für jedes  $\varepsilon_n$  und  $T_n$  ein Punktepaar  $x_n x_n'$  derart, dass  $\rho(x_n, x) < \varepsilon_n; \rho(x_n', x) < \varepsilon_n; \rho_t(x_n, x_n') \geq T_n$ , also hat das System auf Grund des Hilfssatzes einen Sattelpunkt im Unendlichen, w. z. b. w.

Wir gehen jetzt zum Beweise des Satzes über, der uns, zusammen mit dem Beispiel 2, zeigt, dass die vollständige Unstabilität des Systems für die Abbildbarkeit auf den Parallelgeradenschar nicht hinreicht.

**SATZ 4.** — *Hat ein dynamisches System einen Sattelpunkt im Unendlichen, so kann es nicht auf eine Schar der Parallelgeraden abgebildet werden.*

*Beweis:* Wir bemerken zunächst, dass falls eine Abbildung der Bahnkurven auf eine Parallelgeradenschar möglich ist, so gilt folgende Eigenschaft.

Ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(a_n, a) = 0; \lim_{n \rightarrow \infty} \rho(b_n, b) = 0$  und liegen dabei  $a_n$  und  $b_n$  auf einer und derselben Bahnkurve, so liegen auch  $a$  und  $b$  auf einer Bahnkurve. In der Tat, da die Abbildung stetig ist, so konvergieren die Geraden Bildmengen der Bahnkurven durch  $a_n$  also auch durch  $b_n$ , gegen die Gerade  $\alpha$  Bildmenge der Bahnkurve durch  $a$ .

Also konvergieren die Bilder der Punkte  $b_n$  gegen einen Punkt auf der

Geraden  $\alpha$ . Da aber wegen der Stetigkeit der Abbildung diese Bilder zum Bilde von konvergieren, so gehöht  $b$  der Bahnkurve durch  $a$ , w. z. b. w.

Wir gehen jetzt zum Beweise des Satzes 4 über.

Es sei  $N_1, N_2, N_3, \dots, N_k \dots$  eine monoton wachsende Folge von ganzen Zahlen,  $\lim N_k = \infty$ . Auf Grund der Definition des Sattelpunktes im Unendlichen gibt es eine Sphäre  $S(0, K)$ , die eine Folge von Punktepaaren  $(a_1 b_1), (a_2 b_2) \dots (a_k b_k) \dots$  enthält, derart, dass auf dem Bogen  $\widehat{a_k b_k}$  ein Punkt  $c_k$  gibt, der ausserhalb  $S(0, N_k)$  liegt.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, dass die Folge  $a_1 a_2 \dots a_n \dots$  gegen einen Punkt  $a' < \overline{S(0, k)}$  konvergiert und die Folgen  $b_1 b_2 \dots b_n \dots$  gegen einen Punkt  $b' < \overline{S(0, k)}$  konvergieren. Wir wollen zeigen, dass die Punkte  $a'$  und  $b'$  auf zwei verschiedenen Bahnkurven liegen, was nach oben Bewiesenem die Richtigkeit unserer Behauptung feststellt.

Nehmen wir an, dass  $a'$  und  $b'$  auf einer und derselben Bahnkurve liegen. Es sei  $\rho_t(a', b') = T$ . Es könnten zwei Fälle eintreten: 1)  $\lim \rho_t(a_n, b_n) = \infty$ ; 2)  $|\rho_t(a_n, b_n)| < c$  wobei  $c$  unabhängig von  $n$  ist.

Wir betrachten zuerst den Fall 1).

Es ist  $\rho_t(a', b') = T$ ;  $\lim \rho(a', a_n) = 0$ ,  $\lim \rho(b', b_n) = 0$ . Wir betrachten die Punktfolge  $a_1(T), a_2(T), \dots, a_k(T) \dots$ . Diese Punktfolge konvergiert gegen  $b'$ , wegen des Integralstetigkeitssatzes. In einer beliebigen Umgebung des Punktes  $b'$  gibt es für genügend grosse Werte von  $k$  Punkte  $b_k$  und  $a_k(T)$  derart, dass  $|\rho_t(b_k, a_k(T))| = |\rho_t(a_k, b_k) - \rho_t(a_k, a_k(T))| \geq \rho_t(a_k, b_k) - T$ , d. h. Punkte auf derselben Bahnkurve mit beliebig grossem Zeitabstande und der Punkt  $b'$  wäre ein nichtwandernder Punkt, was für ein auf Parallelgeradenschar abbildbares System unmöglich ist (siehe Satz 1). Der erste Fall ist also unmöglich. Wir betrachten jetzt den zweiten Fall:

In diesem Falle würde die aus ausgehende Bahnkurve in eine endliche Zeit sich ins Unendliche entfernen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir diesen Fall überhaupt ausschliessen, da wir durch Multiplikation der rechten Seiten unserer Differentialgleichungen mit einer und derselben passender Weise ausgewählten Funktion stets erreichen können, dass diese rechte Seiten im ganzen Phasenraume beschränkt bleiben.

#### § IV. Die Querschnitte.

Es sei eine invariante Menge  $E$  gegeben.

DEFINITION. — Eine beschränkte in  $E$  abgeschlossene Untermenge von  $E$  heisst ein Querschnitt von  $E$  und wird durch  $P_E$  bezeichnet, falls jede Bahnkurve von einem und nur einen gemeinsamen Punkt mit  $P_E$  hat.

Der Zweck dieses Paragraphen ist der Beweis des folgenden Satzes.

**SATZ 5.** — *Hat eine invariante Menge  $E$  eines un stabilen Systems ohne Sattelpunkt im Unendlichen einen Querschnitt, so ist  $E$  eineindeutig und stetig auf ein Parallelgeradenschar in  $n + 1$  dimensionalen Raume abbildbar.*

*Beweis:* Sei  $P_E$  ein Querschnitt von  $E$ . Wir definieren die Abbildung von  $E$  auf den  $n + 1$ -dimensionalen Raum folgendermassen <sup>(8)</sup>.

Es sei  $b \in E$ , dann hat die Bahnkurve  $b(t)$  mit  $P_E$  einen gemeinsamen Punkt  $c(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n)$ ; es sei  $\rho_t(cb) = T_b$ . Dann wird dem Punkte  $b$  im  $n + 1$  dimensionalen Raume des Punkt  $\bar{b}$  mit den Koordinaten  $(\xi_1 \dots \xi_n, T_b)$  zugeordnet.

Es sei  $\mathcal{G}$  das auf diese Weise gewonnene Bild von  $E$ . Da zwei verschiedene Punkte von  $E$  entweder auf verschiedenen Bahnkurven liegen, oder, falls auf einer, einen verschiedenen Zeitabstand von  $P_E$  haben, so entsprechen diesen Punkten verschiedene Punkte von  $\mathcal{G}$ . Auch umgekehrt entsprechen zwei verschiedenen Punkten aus  $\mathcal{G}$  zwei Punkte auf verschiedenen Bahnkurven (falls die  $n$ -ersten Koordinaten nicht zusammenhalten) oder verschiedene Punkte auf einer Bahnkurve (falls nur die  $n + 1$ -ten Koordinaten verschieden sind). Also ist die Abbildung von  $E$  auf  $\mathcal{G}$  eineindeutig. Die Punkte, die auf einer und derselben Bahnkurve in  $E$  liegen, werden in die Punkte mit ersten zusammenfallenden Koordinaten übergehen, also in eine Gerade, die auf die Hyperebene  $(\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n)$  senkrechtsteht.

Also wird  $E$  in eine Parallelgeradenschar in  $n + 1$ -dimensionalem Raume übergehen. Wir haben die Stetigkeit der Abbildung zu beweisen. Es sei  $b_1 b_2 \dots b_n \dots$  eine in  $E$  liegende gegen  $b$  konvergente Punktfolge. Es seien  $c_1 c_2 \dots c_n \dots$  Punkte von  $P_E$ , die auf  $b_1(t), b_2(t) \dots b_n(t) \dots$  liegen <sup>(9)</sup>. Es ist nach dem Hilfssatz  $|\rho_t(b_n, c_n)| < A$ , unabhängig von  $n$ . Wir wählen eine Unterfolge von Bogen  $(b'_1 c'_1) \dots (b'_n c'_n) \dots$  derart, dass  $\lim \rho_t(b'_n c'_n)$  existiert und gleich  $T$  ist. Da  $\lim \rho_t(b'_n, b) = 0$ ;  $\rho_t(b'_n c'_n) = T_n$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T$ , so ist dem Satze von Integralstetigkeit gemäss  $\lim_{n \rightarrow \infty} \rho(c'_n, b(T)) = 0$ , da aber  $c'_n = c$  so ist  $c = b(t)$ , d. h.  $c \in E$  also  $c \in P_E$ .

Konvergiert also  $b_1 b_2 \dots b_n \dots$  gegen  $b$ , so konvergiert auch  $c_1 c_2 \dots c_n \dots$  gegen  $c$ , dem Punkte von  $P_E$  der auf derselben Bahnkurve liegt wie  $b$ .

Es ist ferner  $\lim \rho_t(b_n, c_n) = \rho_t(b, c)$ . Das zeigt aber, dass die Bilder von  $\{b_i\}$ ;  $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, \bar{b}_n, \dots$  in  $\varepsilon$  gegen den Bildpunkt von  $b$ , d. h.  $b$  konvergieren.

<sup>(8)</sup> Die Idee dieser Abbildung gehört WHITNEY (« Trans. Am. Math. Soc. », 1933).

<sup>(9)</sup> Da  $P_E$  ein Querschnitt und eine kompakte Menge ist, so genügt es zu zeigen, dass, wenn die Folge  $c_1 c_2 \dots c_n \dots$  gegen ein Punkt  $c$  konvergiert, so  $c$  auf der Bahnkurve  $b(t)$  liegt.

Ist umgekehrt  $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \dots, b_n \dots$ , eine gegen  $\bar{b}$  konvergente Punktfolge aus  $\mathcal{E}$ , so folgt eine dem Satze von Integralstetigkeit, dass die Urbilder dieser Folge in  $E$  gegen das Urbild von  $b$  konvergieren. Der Satz 2 ist foglich bewiesen.

### § V. Der Hauptsatz.

Es wird in diesem Paragraphen eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Abbildbarkeit der Integralkurven eines dynamischen Systems auf eine Parallelgeradenschar aufgestellt.

Es sei  $T_F$  eine abgeschlossene beschränkte Punktmenge und die Röhre durch  $T_A, T_B$  gezeichnet.

HILFSSATZ 2. — *Hat das dynamische System keinen Sattelpunkt in  $\infty$  und ist  $F$  kompakt, so ist auch  $T_F$  abgeschlossen.*

*Beweis:* Wir nehmen umgekehrt an, dass  $T_F$  nicht abgeschlossen ist. Dann existiert im Phasenraume eine konvergente Punktfolge  $x_n$  aus  $T_F$ , derer Limespunkt ausserhalb  $T_F$  liegt. Wir betrachten eine Punktfolge  $y_1, y_2 \dots y_n \dots$  aus  $F$  derart, dass  $x_n$  und  $y_n$  einer und derselben Bahnkurve angehören.

Da  $F$  kompakt ist, so haben die Punkte  $y_i$  einen Häufungspunkt  $y$  in  $F$ . Um die Bezeichnungen nicht zu komplizieren, nehmen wir an, dass  $\lim y_n = y$  ist. Wäre  $\rho_t(x_n, y_n) < k$  für jedes  $n$ , so würde der Punkt  $x$  auf der Bahnkurve  $y(t)$  liegen, d. h.  $x \in T_F$  da der Punkt  $x$  der Menge  $T_F$  nicht angehört, so ist  $\rho_t(x_n, y_n) \rightarrow \infty$  und da die Folgen  $x_1, x_2 \dots x_n \dots$ ;  $y_1, y_2 \dots y_n \dots$  konvergente Punktfolgen sind, so hat unser System, dem Hilfssatze 1 gemäss, einen Sattelpunkt im Unendlichen, was den Voraussetzungen unseres Satzes widerspricht.

HILFSSATZ 3. — *Sind die Röhren  $T_A$  und  $T_B$  eines vollständig instabilen Systems ohne Sattelpunkt im Unendlichen abgeschlossen (die Mengen  $A$  und  $B$  werden auch kompakt vorausgesetzt), und lassen  $T_A$  und  $T_B$  eine Abbildung auf eine Parallelgeradenschar zu, so lässt sich auch die Röhre  $T_{A|B}$  auf eine Parallelgeradenschar abbilden, und zwar derart, dass diese Abbildung mit der auf  $T_A$  gegebenen Abbildung zusammenfällt.*

*Beweis:* Es sei  $T_A$  auf eine Parallelgeradenschar  $P_A$  abgebildet. Wir schneiden  $P_A$  mit einer auf dieser Geraden senkrecht stehenden Hyperebene. Der Schnitt bezeichnen wir mit  $C_A$ . Wir beweisen zunächst, dass  $C_A$  in sich kompakt ist. Sei  $x_1, x_2 \dots x_n \dots$  eine Punktfolge aus  $C_A$ ;  $y_1, y_2, y_3 \dots y_n \dots$  seien die Urbilder dieser Punkte in  $T_A$ . Wir wählen in  $A$  Punkte  $\widehat{y}_1, \widehat{y}_2, \dots, \widehat{y}_n, \dots$  so dass  $\widehat{y}_i$  auf der Bahnkurve  $y_i(t)$  liegt. Dann ist  $\rho_t(y_n, \widehat{y}_n) < \infty$ . Die Punkte  $\widehat{y}_i$  haben einen Häufungspunkt in  $A$ , und wir können voraussetzen, dass diese

Folge gegen  $\widehat{y} \in A$  konvergiert, sonst könnte man eine konvergente Unterfolge betrachten. Die Bilder dieser Punkte seien  $\widehat{x}_1, \widehat{x}_2, \dots, \widehat{x}_n, \dots, \widehat{x}$  dabei liegen  $x_n$  und  $\widehat{x}_n$  auf einer und derselben Geraden. Da  $\rho(x_m, x_n) \leq \rho(\widehat{x}_m, \widehat{x}_n)$  (die Punkte  $x_m$  und  $x_n$  liegen in einer Ebene), so ist die Punktfolge  $x_1 x_2 \dots x_n \dots$  konvergent. Also ist  $C_A$  kompakt. Wir wollen jetzt beweisen, dass  $C_A$  abgeschlossen ist.

Sei  $x$  der Limespunkt der Folge  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ . Da  $\rho_i(x_i, \widehat{x}_i) < \infty$  ist, und die Folge  $\widehat{x}_i$  gegen einen Punkt  $\widehat{x}$  in  $P_A$  konvergiert, so konvergiert auch die Folge  $x_i$  gegen einen Punkt der Geraden durch  $\widehat{x}$ , also  $x \in P_A$ , folglich auch  $x \in C_A$ . Bei der Umkehrung unserer Abbildung geht die Menge  $C_A$  in eine kompakte Menge  $\Pi(A)$  über, die einen Querschnitt für  $T_A$  bildet  $\Pi(A)$  schneidet  $T_B$  in einer in sich kompakte Menge  $\Phi_B = \Pi(A) \cdot T_B$ .

Betrachten wir die Abbildung von  $T_B$  auf eine Parallelgeradenschar  $P_B$ .  $\Phi_B$  wird in eine in sich kompakte Menge  $\tilde{\Phi}_B$  übergehen derart, dass jede Gerade aus  $P_B$  entweder keinen oder einen einzigen gemeinsamen Punkt mit  $P_B$  hat.

Wir projektieren die Menge  $\tilde{\Phi}_B$  längs der Geraden  $P_B$  auf eine zu den Geraden senkrechte Hyperebene. Sei  $\widehat{\Phi}_B$  diese Projektion. Wir bezeichnen den Schnitt von  $P_B$  mit dieser Ebene durch dann ist  $D$  dann ist  $\tilde{\Phi}_B \subset D$ . Wir definieren auf  $\tilde{\Phi}_B$  eine Funktion  $f(x) = \rho(x, \widehat{x})$  wobei  $x \in \tilde{\Phi}_B$ ,  $\widehat{x}$  seine Projektion in  $\widehat{\Phi}_B$  ist. Wegen der Kompaktheit von  $\tilde{\Phi}_B$  und der Stetigkeit der Projektionsabbildung, wird die Funktion  $f(x)$  auf  $\widehat{\Phi}_B$  stetig sein. Wir erweitern diese Funktion zu einer auf  $D$  definierten stetigen Funktion  $f(x)$  und betrachten die Gesamtheit der Punkte, die von  $D$  einen Abstand (nach Geraden gemessen)  $f(x)$  haben.

Da  $D$  kompakt und  $f(x)$  stetig ist, ist diese Menge kompakt und hat mit jeder Geraden aus  $\theta_B$  einen und nur einen gemeinsamen Punkt. Diese Menge, die wir  $C_B$  bezeichnen, enthält  $\tilde{\Phi}_B$ . Wir betrachten die umgekehrte Abbildung von  $P_B$  auf  $T_B \cdot C_B$  geht in eine kompakte Menge  $\Pi(B)$  über, die  $\Phi_B$  enthält und einen Querschnitt von  $T_B$  bildet. Dann ist  $\Pi(A) + \Pi(B)$  ein Querschnitt von  $T_{A+B}$ , also, da unser System vollständig un stabil und keinen Sattelpunkt im Unendlichen besitzt, ist  $T_{A+B}$  auf ein Parallelgeradenschar abbildbar.

Es ist noch zu bemerken, dass, da  $\Pi(A)$  als ein Teil im Querschnitt  $\Pi(A) + \Pi(B)$  enthalten ist, so liefert unsere Konstruktion die Abbildung von  $T_{A+B}$  als eine Erweiterung der Abbildung von  $T_A$ . Da die Abbildung eindeutig durch den Querschnitt bestimmt.

SATZ 6. — Ist  $F$  eine in sich kompakte Menge und ist das dynamische

System uninstabil und ohne Sattelpunkt im Unendlichen, so lässt sich  $T_F$  auf eine Parallelgeradenschar abbilden.

*Beweis:* Wir betrachten einen beliebigen Punkt  $x \in F$ . Da dieser Punkt ein wandernder ist, so gibt es eine kleine Sphäre  $S(x, \rho)$  derart, dass der Schnitt  $R_x$  dieser Sphäre mit einer zu der Bahnkurve  $x(t)$  senkrechten Hyperebene durch  $x$ , sein Bild  $R_x(t)$  nicht schneidet.

Wir betrachten die Röhre  $T_{R_x}$ . Da  $R_x$  in sich kompakt ist, so ist, dem Hilfssatz 2 gemäss,  $T_R$  abgeschlossen.

Da die Menge  $F$  in sich kompakt ist, so gibt es eine endliche Anzahl von Sphären  $\overline{S(x_1, \rho_{x_1})}, \overline{S(x_2, \rho_{x_2})}, \dots, \overline{S(x_k, \rho_{x_k})}$ ; die eine Ueberdeckung von  $F$  bilden. Dann bilden die Röhren  $\overline{T_{S(x_1, \rho_{x_1})}}, \overline{T_{S(x_2, \rho_{x_2})}}, \dots, \overline{T_{S(x_k, \rho_{x_k})}}, \dots$  eine Ueberdeckung von  $T_F$ . Jede dieser Röhren ist abgeschlossen und hat einen Querschnitt  $R_{x_1}, R_{x_2}, \dots, R_{x_k}, \dots$  also ist auf Grund des Satzes 5 auf ein Parallelgeradenschar abbildbar.

Die  $k$ -malige Anwendung des Hilfssatzes 3 gibt uns den gewünschten Beweis.

**HAUPTSATZ.** — *Damit die Bahnkurven eines dynamischen Systems, das durch die Gleichungen*

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

*gegeben ist, wobei  $f_i$  in jedem beschränktem Gebiete den Lipschitzschen Bedingungen genügen, auf eine Parallelgeradenschar umkehrbar eindeutig und stetig abbildbar seien, ist notwendig und hinreichend, dass das System uninstabil sei und keinen Sattelpunkt im Unendlichen besitze.*

*Beweis:* Die Notwendigkeit der Bedingungen folgt aus den Sätzen 2 und 4.

Wir beweisen, dass sie hinreichend sind. Auf Grund des Satzes 3 ist das System vollständig uninstabil. Wir betrachten die Folge von Sphären  $\overline{S(0, 1)}, \overline{S(0, 2)}, \dots, \overline{S(0, k)}, \dots$ .

Auf Grund des Satzes 6, lässt sich jede Röhre  $\overline{T_{(0, n)}}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) auf ein Parallelgeradenschar abbilden. Auf Grund des Hilfssatzes 3, ist die Röhre

$$\overline{T_{S(0, n+1)}} = \overline{T_{S(0, n)}} + \overline{T_{S(0, n+1)}}$$

auf ein Parallelgeradenschar abbildbar und zwar derart, dass die Abbildung auf  $\overline{T_{S(0, n)}}$  erhalten bleibt. Folglich lässt sich die Abbildung in ganzen Raume definieren.



# Operatori lineari e numeri di Stirling generalizzati.

Memoria di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

**Sunto.** - *L'Autore inizia lo studio degli operatori  $A, X^n$ , tali che*

$$AX - XA = 1,$$

*e dei polinomi ad essi collegati (numeri di STIRLING generalizzati).*

Nella recente Nota « *Sull' iterazione degli operatori  $xD$  e  $Dx$*  » (1), studiando gli operatori  $xD$  e  $Dx$ , siamo pervenuti a delle relazioni che riguardano tali operatori ed i numeri di STIRLING.

D'altra parte il prof. PINCHERLE, nella sua Nota « *Operatori lineari e coefficienti di fattoriali* » (2), ha mostrato che lo sviluppo di  $(xD)^n$  con un polinomio di  $n$  termini in  $xD, x^2D^2, \dots, x^nD^n$ , i cui coefficienti sono i numeri di STIRLING di seconda specie, è caso particolare di una proprietà che si presenta in generale nella teoria degli operatori lineari associativi.

Sarebbe allora facile vedere che le altre relazioni note sugli operatori  $xD$  e  $Dx$  valgono per i generici operatori lineari associativi  $A, X$ .

Ma noi, qui, prendendo le mosse dal risultato del PINCHERLE, più in generale, intendiamo estendere tali relazioni agli operatori  $A, X^n$ , che applicheremo altrove, ed ai numeri di STIRLING generalizzati.

**1. Numeri di Stirling generalizzati.** — Chiamiamo numeri di STIRLING generalizzati di prima specie, i numeri  $a_{n,i}^{(u)}, b_{n,i}^{(u)}, c_{n,i}^{(u)}$ , definiti dalle relazioni

$$(1) \quad \begin{cases} a_{n,1}^{(u)} = (-1)^{n-1} u(u+1)(u+2) \dots (u+n-2) \\ a_{n,n}^{(u)} = 1 \\ a_{n,i}^{(u)} = a_{n-1,i-1}^{(u)} - [n+i(u-1)-1] a_{n-1,i}^{(u)}, \end{cases}$$

(1) « Rend. R. Istituto Lombardo », vol. LXVII, fasc. XI-XV, 1934.

(2) « Rend. R. Accademia Lincei », serie VI, sem. II, vol. XVIII, 1934.

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} b_{n,1}^{(u)} \approx (-1)^{n-1}(n-1)! \\ b_{n,n}^{(u)} \approx 1 \\ b_{n,i}^{(u)} \approx b_{n-1,i-1}^{(u)} - [n - (i-1)(u-1) - 1]b_{n-1,i}^{(u)}, \end{array} \right.$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{n,1}^{(u)} \approx (u-1)(u-2)(u-3) \dots (u-n+1) \\ c_{n,n}^{(u)} \approx 1 \\ c_{n,i}^{(u)} \approx c_{n-1,i-1}^{(u)} - [n - i(u-1) - 2]c_{n-1,i}^{(u)}; \end{array} \right.$$

e numeri di STIRLING generalizzati di seconda specie <sup>(1)</sup> i numeri  $\alpha_{n,i}^{(u)}$ ,  $\beta_{n,i}^{(u)}$ ,  $\gamma_{n,i}^{(u)}$ , definiti dalle relazioni

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_{n,1}^{(u)} = u(2u-1)(3u-2) \dots [(n-1)u - (n-2)] \\ \alpha_{n,n}^{(u)} = 1 \\ \alpha_{n,i}^{(u)} = \alpha_{n-1,i-1}^{(u)} + [(n-1)(u-1) + i]\alpha_{n-1,i}^{(u)}, \end{array} \right.$$

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \beta_{1,1}^{(u)} = 1, \beta_{2,1}^{(u)} = 1, \beta_{n,1}^{(u)} = \\ \quad = (-1)^n(u-2)(2u-3)(3u-4) \dots [(n-2)u - (n-1)], \quad n > 2 \\ \beta_{n,n}^{(u)} = 1 \\ \beta_{n,i}^{(u)} = \beta_{n-1,i-1}^{(u)} - [(n-2)(u-1) - i]\beta_{n-1,i}^{(u)}, \end{array} \right.$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{n,1}^{(u)} = (-1)^{n-1}(n-1)!(u-1)^{n-1} \\ \gamma_{n,n}^{(u)} = 1 \\ \gamma_{n,i}^{(u)} = \gamma_{n-1,i-1}^{(u)} - [(n-1)(u-1) - i + 1]\gamma_{n-1,i}^{(u)}. \end{array} \right.$$

Introduciamo ancora i numeri  $p_{n,i}^{(u)}$ ,  $q_{n,i}^{(u)}$ ,  $r_{n,i}^{(u)}$ , definiti dalle relazioni

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_{n,1}^{(u)} = (n-1)!(u-1)^{n-1} \\ p_{n,n}^{(u)} = 1 \\ p_{n,i}^{(u)} = p_{n-1,i-1}^{(u)} + (n-1)(u-1)p_{n-1,i}^{(u)}, \end{array} \right.$$

<sup>(1)</sup> I numeri  $\alpha_{n,i}^{(u)}$  si trovano già nelle Note: L. TOSCANO, *Somma delle potenze simili fattoriali dei numeri naturali* (« Annuario del R. Liceo Ginnasio Galluppi » di Catanzaro, 1929-1930); *Sul triangolo di Tartaglia generalizzato* (« Rend. R. Istituto Lombardo », vol. LXIV, fasc. XI-XV, 1931).

Per i numeri di STIRLING semplici si confronti la monografia, *On Stirling's Numbers*, di C. JORDAN (« The Tôhoku Mathematical Journal », vol. 37, 1933).

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} q_{n,1}^{(u)} = (-1)^{n-1} u(2u-1)(3u-2) \dots [(n-1)u - (n-2)] \\ q_{n,n}^{(u)} = 1 \\ q_{n,i}^{(u)} = q_{n-1,i-1}^{(u)} - [(n-1)(u-1) + 1] q_{n-1,i}^{(u)}, \end{array} \right.$$

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} r_{1,1}^{(u)} = 1, r_{2,1}^{(u)} = 1, r_{n,1}^{(u)} = \\ \quad = (-1)^n (u-2)(2u-3)(3u-4) \dots [(n-2)u - (n-1)] \\ r_{n,n}^{(u)} = 1 \\ r_{n,i}^{(u)} = r_{n-1,i-1}^{(u)} - [(n-2)(u-1) - 1] r_{n-1,i}^{(u)}. \end{array} \right.$$

Tutti i numeri introdotti li intendiamo definiti per  $i \leq n$ , mentre per  $i > n$  li riteniamo nulli.

Esaminiamo particolarmente questi numeri per  $u$  uguale a 1 o 2.

Denotando con  $h_{n,i}$  i numeri di STIRLING semplici di prima specie, definiti dalle relazioni

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} h_{n,1} = (-1)^{n-1} (n-1)! \\ h_{n,n} = 1 \\ h_{n,i} = h_{n-1,i-1} - (n-1)h_{n-1,i}, \end{array} \right.$$

e con  $k_{n,i}$  i numeri di STIRLING semplici di seconda specie, definiti dalle relazioni

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} k_{n,1} = 1 \\ k_{n,n} = 1 \\ k_{n,i} = k_{n-1,i-1} + ik_{n-1,i}. \end{array} \right.$$

si deducono le relazioni

$$(12) \quad \begin{array}{l} a_{n,i}^{(1)} = b_{n,i}^{(1)} = c_{n+1,i+1}^{(1)} = h_{n,i} \\ \alpha_{n,i}^{(1)} = \beta_{n,i}^{(1)} = \gamma_{n+1,i+1}^{(1)} = k_{n,i}. \end{array}$$

Denotando infine con  $\sigma_{n,i}$  la somma dei prodotti a  $n-i$  a  $n-i$ , secondo le combinazioni semplici, degli  $n-1$  numeri

$$l_1, l_2, \dots, l_{n-1},$$

definita dalle relazioni

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{n,1} = l_1 l_2 l_3 \dots l_{n-1} \\ \sigma_{n,n} = 1 \\ \sigma_{n,i} = \sigma_{n-1,i-1} + l_{n-i} \sigma_{n-1,i}, \end{array} \right.$$

si deduce

$$(14) \quad \begin{array}{l} p_{n,i}^{(u)} = \sigma_{n,i} \quad \text{con} \quad l_j = j(u-1) \\ (-1)^{n-i} q_{n,i}^{(u)} = \sigma_{n,i} \quad \text{con} \quad l_j = j(u-1) + 1 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n-1) \\ (-1)^{n-i} r_{n,i}^{(u)} = \sigma_{n,i} \quad \text{con} \quad l_j = (j-1)(u-1) - 1, \end{array}$$

e da queste

$$(15) \quad p_{n,i}^{(1)} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ per } i \begin{cases} <=n \\ \neq n \\ <=n \end{cases}, \quad (-1)^{n-i} q_{n,i}^{(1)} = r_{n,i}^{(1)} = \binom{n-1}{i-1}.$$

Per  $u = 2$  si trovano i risultati

$$(16) \quad \begin{aligned} a_{n,i}^{(2)} &= (-1)^{n-i} \frac{n!}{i!} \binom{n-1}{i-1} \\ b_{n,i}^{(2)} &= (-1)^{n-i} (n-i)! \binom{n-1}{i-1} = (-1)^{n-i} \frac{(n-1)!}{(i-1)!} \\ c_{n,i}^{(2)} &= \begin{cases} 1 \\ n-1 \\ 0 \end{cases} \text{ per } i \begin{cases} <=n \\ =n-1 \\ <n-1 \end{cases} \\ \alpha_{n,i}^{(2)} &= (-1)^{n-i} a_{n,i}^{(2)} = \frac{n!}{i!} \binom{n-1}{i-1} \\ \beta_{n,i}^{(2)} &= c_{n,i}^{(2)} = \begin{cases} 1 \\ n-1 \\ 0 \end{cases} \text{ per } i \begin{cases} <=n \\ =n-1 \\ <n-1 \end{cases} \\ \gamma_{n,i}^{(2)} &= b_{n,i}^{(2)} = (-1)^{n-i} (n-i)! \binom{n-1}{i-1} = (-1)^n \frac{(n-1)!}{(i-1)!} \\ p_{n,i}^{(2)} &= (-1)^{n-i} h_{n,i} \\ (-1)^{n-i} q_{n,i}^{(2)} &= \sigma_{n,i} \text{ con } l_j = j + 1 \quad (j = 1, 2, 3, \dots, n-1) \\ (-1)^{n-i} r_{n,i}^{(2)} &= \sigma_{n,i} \text{ con } l_j = j - 2. \end{aligned}$$

**2. Operatori lineari.** — Siano  $A$  ed  $X$  due operatori lineari che intenderemo applicati agli elementi di uno spazio lineare ad infinite dimensioni e che, secondo una denominazione usata dal PINCHERLE <sup>(1)</sup> diremo associati, cioè soddisfacenti alla relazione

$$(17) \quad AX - XA = 1.$$

Da questa si deducono le altre

$$(18) \quad AX^u - X^u A = uX^{u-1}, \quad A^u X - X A^u = uA^{u-1},$$

con  $u$  intero.

Se consideriamo ora gli operatori  $AX^u, X^u A, A^s X^s, X^s A^s, Y = X^{-(u-1)}$ , valgono le relazioni <sup>(2)</sup>

$$(19) \quad (-1)^{n-1} A^n X^n = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} a_{n,i}^{(n)} (AX^u)^i Y^i$$

$$(20) \quad (-1)^n A^n X^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i a_{n+1,i+1}^{(n)} (X^u A)^i Y^i$$

<sup>(1)</sup> « Memorie dell'Accad. delle Scienze dell'Istituto di Bologna », S. 8. T. IX, pag. 40, 1932. (Cfr. id., « Atti Società italiana per il Progresso delle Scienze », Milano 1931).

<sup>(2)</sup> Analoghe relazioni si potrebbero dedurre considerando gli operatori  $A^u X, X A^u, A^{-(u-1)}$ .

$$(21) \quad X^n A^n = \sum_{i=1}^{i=n} a_{n,i}^{(u)} Y^i (X^u A)^i$$

$$(22) \quad X^n A^n = \sum_{i=0}^{i=n} a_{n+1,i+1}^{(u)} Y^i (AX^u)^i$$

$$(23) \quad (-1)^n A^n X^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i b_{n+1,i+1}^{(u)} Y^i (X^u A)^i$$

$$(24) \quad X^n A^n = \sum_{i=0}^{i=n} b_{n+1,i+1}^{(u)} (AX^u)^i Y^i$$

$$(25) \quad (-1)^n A^n X^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i c_{n+1,i+1}^{(u)} Y^i (AX^u)^i$$

$$(26) \quad X^n A^n = \sum_{i=0}^{i=n} c_{n+1,i+1}^{(u)} (X^u A)^i Y^i$$

$$(27) \quad (-1)^{n-1} (AX^u)^n Y^n = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} \alpha_{n,i}^{(u)} A^i X^i$$

$$(28) \quad (-1)^n (X^u A)^n Y^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \alpha_{n+1,i+1}^{(u)} A^i X^i$$

$$(29) \quad Y^n (X^u A)^n = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_{n,i}^{(u)} X^i A^i$$

$$(30) \quad Y^n (AX^u)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \alpha_{n+1,i+1}^{(u)} X^i A^i$$

$$(31) \quad (-1)^n Y^n (X^u A)^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \beta_{n+1,i+1}^{(u)} A^i X^i$$

$$(32) \quad (AX^u)^n Y^n = \sum_{i=0}^{i=n} \beta_{n+1,i+1}^{(u)} X^i A^i$$

$$(33) \quad (-1)^n Y^n (AX^u)^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \gamma_{n+1,i+1}^{(u)} A^i X^i$$

$$(34) \quad (X^u A)^n Y^n = \sum_{i=0}^{i=n} \gamma_{n+1,i+1}^{(u)} X^i A^i$$

$$(35) \quad (-1)^{n-1} (AX^u)^n Y^n = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} p_{n,i}^{(u)} (AX)^i$$

$$(36) \quad Y^n (X^u A)^n = \sum_{i=1}^{i=n} p_{n,i}^{(u)} (XA)^i$$

$$(37) \quad Y^n (AX^u)^n = \sum_{i=0}^{i=n} p_{n+1,i+1}^{(u)} (AX)^i$$

$$(38) \quad (-1)^n (X^u A)^n Y^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i q_{n+1,i+1}^{(u)} (XA)^i$$

$$(39) \quad (-1)^n Y^n (AX^u)^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i q_{n+1,i+1}^{(u)} (XA)^i$$

$$(40) \quad (X^u A)^n Y^n = \sum_{i=0}^{i=n} q_{n+1, i+1}^{(u)} (AX)^i$$

$$(41) \quad (AX^u)^n Y^n = \sum_{i=0}^{i=n} r_{n+1, i+1}^{(u)} (XA)^i$$

$$(42) \quad (-1)^n Y^n (X^u A)^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i r_{n+1, i+1}^{(u)} (AX)^i.$$

Queste relazioni, verificate per i primi valori di  $n$ , si possono verificare in generale

moltiplicando le (19) e (20) a destra per  $X^{-n} A X^{n+1}$   
 » » (21) » (22) a sinistra »  $X^{-n+1} A X^{-n}$   
 » » (27) » (35) » destra »  $- Y^{-n} (A X^u) Y^{n+1}$   
 » » (28) » (38) » » »  $- Y^{-n} (X^u A) Y^{n+1}$   
 » » (29) » (36) » sinistra »  $Y^{n+1} (X^u A) Y^{-n}$   
 » » (30) » (37) » » »  $Y^{n+1} (A X^u) Y^{-n}$   
 » » (31) » (42) » » »  $- Y^{n+1} (X^u A) Y^{-n}$   
 » » (32) » (41) » destra »  $Y^{-n} (A X^u) Y^{n+1}$   
 » » (33) » (39) » sinistra »  $- Y^{n+1} (A X^u) Y^{-n}$   
 » » (34) » (40) » destra »  $Y^{-n} (X^u A) Y^{n+1}$ ;

applicando per le (23) e (25) la relazione

$$(43) \quad A^{n+1} X^{n+1} = A X A^n X^n + n A^n X^n,$$

per le (24) e (26) la relazione

$$(44) \quad X^{n+1} A^{n+1} = X^n A^n X A - n X^n A^n;$$

e tenendo conto per tutte della prima delle (18) e delle leggi di formazione dei numeri  $a_{n,i}^{(u)}, b_{n,i}^{(u)}, c_{n,i}^{(u)}, \alpha_{n,i}^{(u)}, \beta_{n,i}^{(u)}, \gamma_{n,i}^{(u)}, p_{n,i}^{(u)}, q_{n,i}^{(u)}, r_{n,i}^{(u)}$ .

Le relazioni dalla (35) alla (42), per le (14), si possono scrivere

$$(35)_1 \quad (A X^u)^n Y^n = [A X][A X - (u - 1)][A X - 2(u - 1)] \dots [A X - (n - 1)(u - 1)]$$

$$(36)_1 \quad Y^n (X^u A)^n = [X A][X A + (u - 1)][X A + 2(u - 1)] \dots [X A + (n - 1)(u - 1)]$$

$$(37)_1 \quad Y^n (A X^u)^n = [A X + (u - 1)][A X + 2(u - 1)][A X + 3(u - 1)] \dots [A X + n(u - 1)]$$

$$(38)_1 \quad (X^u A)^n Y^n = [X A - (u - 1)][X A - 2(u - 1)][X A - 3(u - 1)] \dots [X A - n(u - 1)]$$

$$(39)_1 \quad Y^n (A X^u)^n = [X A + (u - 1) + 1][X A + 2(u - 1) + 1][X A + 3(u - 1) + 1] \dots [X A + n(u - 1) + 1]$$

$$(40)_1 \quad (X^u A)^n Y^n = [A X - (u - 1) - 1][A X - 2(u - 1) - 1][A X - 3(u - 1) - 1] \dots [A X - n(u - 1) - 1]$$

$$(41)_1 \quad (AX^u)^n Y^n = [XA + 1][XA - (u - 1) + 1][XA - 2(u - 1) + 1] \dots \\ \dots [XA - (n - 1)(u - 1) + 1]$$

$$(42)_1 \quad Y^n (X^u A)^n = [AX - 1][AX + (u - 1) - 1][AX + 2(u - 1) - 1] \dots \\ \dots [AX + (n - 1)(u - 1) - 1].$$

E queste, indipendentemente dalle (14), si possono dedurre direttamente applicando le relazioni

$$(45) \quad (AX^u)^n Y^n = (AX^u)^{n-1} Y^{n-1} [AX - (n - 1)(u - 1)] \text{ per le } (35)_1 \text{ e } (41)_1$$

$$(46) \quad Y^n (X^u A)^n = [XA + (n - 1)(u - 1)] Y^{n-1} (X^u A)^{n-1} \quad \gg \gg (36)_1 \gg (42)_1$$

$$(47) \quad Y^n (AX^u)^n = [AX + n(u - 1)] Y^{n-1} (AX^u)^{n-1} \quad \gg \gg (37)_1 \gg (39)_1$$

$$(58) \quad (X^u A)^n Y^n = (X^u A)^{n-1} Y^{n-1} (XA - n(u - 1)) \quad \gg \gg (38)_1 \gg (40)_1.$$

Per  $u = 1$  le relazioni assegnate diventano

$$(19') \quad (-1)^{n-1} A^n X^n = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} h_{n,i} (AX)^i$$

$$(20') \quad (-1)^n A^n X^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i h_{n+1,i+1} (XA)^i$$

$$(21') \quad X^n A^n = \sum_{i=1}^{i=n} h_{n,i} (XA)^i$$

$$(22') \quad X^n A^n = \sum_{i=0}^{i=n} h_{n+1,i+1} (AX)^i$$

$$(27') \quad (-1)^{n-1} (AX)^n = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} k_{n,i} A^i X^i$$

$$(28') \quad (-1)^n (XA)^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i k_{n+1,i+1} A^i X^i$$

$$(29') \quad (XA)^n = \sum_{i=1}^{i=n} k_{n,i} X^i A^i$$

$$(30') \quad (AX)^n = \sum_{i=0}^{i=n} k_{n+1,i+1} X^i A^i$$

$$(39') \quad (AX)^n = \sum_{i=0}^{i=n} \binom{n}{i} (XA)^i$$

$$(40') \quad (XA)^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} (AX)^i;$$

le (19'), (20'), (21'), (22'), dato il significato di  $h_{n,i}$ , si possono ancora scrivere

$$(19')_1 \quad A^n X^n = AX(AX + 1)(AX + 2) \dots (AX + n - 1)$$

$$(20')_1 \quad A^n X^n = (XA + 1)(XA + 2)(XA + 3) \dots (XA + n)$$

$$(21')_1 \quad X^n A^n = XA(XA - 1)(XA - 2) \dots (XA - n + 1)$$

$$(22')_1 \quad X^n A^n = (AX - 1)(AX - 2)(AX - 3) \dots (AX - n),$$

e in questa ultima forma si possono dedurre direttamente con le relazioni già applicate (43) e (44)

$$A^n X^n = (AX + n - 1)A^{n-1}X^{n-1}, \quad X^n A^n = X^{n-1}A^{n-1}(XA - n + 1).$$

Per  $n = 2$  si ottengono le altre relazioni

$$(19'') \quad A^n X^n = n! \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i!} \binom{n-1}{i-1} (AX^2)^i X^{-i}$$

$$(20'') \quad A^n X^n = (n+1)! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{(i+1)!} \binom{n}{i} (X^2 A)^i X^{-i}$$

$$(21'') \quad (-1)^{n-1} X^n A^n = n! \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(-1)^{i-1}}{i!} \binom{n-1}{i-1} X^{-i} (X^2 A)^i$$

$$(22'') \quad (-1)^n X^n A^n = (n+1)! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{(i+1)!} \binom{n}{i} X^{-i} (AX^2)^i$$

$$(23'') \quad A^n X^n = n! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!} X^{-i} (X^2 A)^i$$

$$(24'') \quad (-1)^n X^n A^n = n! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{i!} (AX^2)^i X^{-i}$$

$$(25'') \quad X^{n-1} A^n X^n = (AX - n + 1)(AX^2)^{n-1}$$

$$(26'') \quad X^n A^n X^{n-1} = (X^2 A)^{n-1} (XA + n - 1)$$

$$(27'') \quad (-1)^{n-1} (AX^2)^n X^{-n} = n! \sum_{i=1}^{i=n} \frac{(-1)^{i-1}}{i!} \binom{n-1}{i-1} A^i X^i$$

$$(28'') \quad (-1)^n (X^2 A)^n X^{-n} = (n+1)! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{(i+1)!} \binom{n}{i} A^i X^i$$

$$(29'') \quad X^{-n} (X^2 A)^n = n! \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{i!} \binom{n-1}{i-1} X^i A^i$$

$$(30'') \quad X^{-n} (AX^2)^n = (n+1)! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{(i+1)!} \binom{n}{i} X^i A^i$$

$$(31'') \quad X^{-n} (X^2 A)^n = A^{n-1} X^n A \quad \text{o meglio} \quad (X^2 A)^n = X^n A^{n-1} X^n A$$

$$(32'') \quad (AX^2)^n X^{-n} = AX^n A^{n-1} \quad \gg \quad \gg \quad (AX^2)^n = AX^n A^{n-1} X^n$$

$$(33'') \quad X^{-n} (AX^2)^n = n! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{1}{i!} A^i X^i$$

$$(34'') \quad (-1)^n (X^2 A)^n X^{-n} = n! \sum_{i=0}^{i=n} \frac{(-1)^i}{i!} X^i A^i$$

$$(35'')_1 \quad (AX^2)^n X^{-n} = AX(AX - 1)(AX - 2) \dots (AX - n + 1)$$

$$(36'')_1 \quad X^{-n} (X^2 A)^n = XA(XA + 1)(XA + 2) \dots (XA + n - 1)$$

$$(37'')_1 \quad X^{-n} (AX^2)^n = (AX + 1)(AX + 2)(AX + 3) \dots (AX + n)$$

$$(38'')_1 \quad (X^2 A)^n X^{-n} = (XA - 1)(XA - 2)(XA - 3) \dots (XA - n)$$



$$\begin{aligned}
 (39'')_1 & \quad X^{-n}(AX^2)^n = (XA + 2)(XA + 3)(XA + 4) \dots (XA + n + 1) \\
 (40'')_1 & \quad (X^2A)^n X^{-n} = (AX - 2)(AX - 3)(AX - 4) \dots (AX - n - 1) \\
 (41'')_1 & \quad (AX^2)^n X^{-n} = (XA + 1)XA(XA - 1) \dots (XA - n + 2) \\
 (42'')_1 & \quad X^{-n}(X^2A)^n = (AX - 1)AX(AX + 1) \dots (AX + n - 2).
 \end{aligned}$$

**3. Applicazioni.** — In questo ultimo paragrafo vediamo come, confrontando le relazioni precedenti, sia possibile dedurne altre che legano gli operatori o i numeri di STIRLING.

Così, sottraendo dalla (30) la (29) e sommando la (27) con la (28) si ricavano le

$$(49) \quad Y^n[(AX^u)^n - (X^uA)^n] = \sum_{i=1}^{i=n} [n(u-1) + i] \alpha_{n,i}^{(u)} X^{i-1} A^{i-1}$$

$$(50) \quad (-1)^{n-1} [(AX^u)^n - (X^uA)^n] Y^n = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} [n(u-1) + i] \alpha_{n,i}^{(u)} A^{i-1} X^{i-1}.$$

D'altra parte si dimostrano le relazioni

$$(51) \quad Y^{n-1} \sum_{i=0}^{i=n-1} (AX^u)^{n-i-1} (X^uA)^i = \sum_{i=1}^{i=n} i \alpha_{n,i}^{(u)} X^{i-1} A^{i-1}$$

$$(52) \quad (-1)^{n-1} \sum_{i=0}^{i=n-1} (AX^u)^{n-i-1} (X^uA)^i \cdot Y^{n-1} = \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^{i-1} i \alpha_{n,i}^{(u)} A^{i-1} X^{i-1},$$

e combinando queste con le precedenti si ricavano le

$$(53) \quad (AX^u)^n - (X^uA)^n = \frac{AX^u - X^uA}{u} \left\{ n(u-1)(AX^u)^{n-1} + \sum_{i=0}^{i=n-1} (AX^u)^{n-i-1} (X^uA)^i \right\}$$

$$(54) \quad (AX^u)^n - (X^uA)^n = \left\{ n(u-1)(X^uA)^{n-1} + \sum_{i=0}^{i=n-1} (AX^u)^{n-i-1} (X^uA)^i \right\} \frac{AX^u - X^uA}{u},$$

che per  $u = 1$  e  $u = 2$  diventano

$$(53') \quad (AX)^n - (XA)^n = \sum_{i=0}^{i=n-1} (AX)^{n-i-1} (XA)^i$$

$$(53'') \quad (AX^2)^n - (X^2A)^n = \frac{AX^2 - X^2A}{2} \left\{ n(AX^2)^{n-1} + \sum_{i=0}^{i=n-1} (AX^2)^{n-i-1} (X^2A)^i \right\}$$

$$(54'') \quad (AX^2)^n - (X^2A)^n = \left\{ n(X^2A)^{n-1} + \sum_{i=0}^{i=n-1} (AX^2)^{n-i-1} (X^2A)^i \right\} \frac{AX^2 - X^2A}{2}.$$

Combinando le (19)<sub>1</sub> e (37'')<sub>1</sub>, le (21'<sub>1</sub>) e (38'')<sub>1</sub> si ricavano le relazioni

$$(55) \quad (AX^2)^n = X^{n-1} A^n X^{n+1}$$

$$(56) \quad (X^2A)^n = X^{n+1} A^n X^{n-1}$$

che potrebbero pure dedursi dalle (32'') e (31'').

Uguagliando la (30) alla (39) e tenendo conto in quest'ultima della (29) si hanno dopo un certo sviluppo la relazione

$$(57) \quad \alpha_{n+1, i+1}^{(u)} = \sum_{j=0}^{j=n-i} (-1)^j Q_{n+1, n-j+1} k_{n-j, i}$$

con le particolari

$$(57') \quad k_{n+1, i+1} = \sum_{j=0}^{j=n-i} \binom{n}{j} k_{n-j, i}$$

$$(57'') \quad \frac{(n+1)!}{(i+1)!} \binom{n}{i} = \sum_{j=0}^{j=n-i} h_{n+1; n-j+1} k_{n-j, i}.$$

Sostituendo nel secondo membro della (21) la (29) e sviluppando, si hanno la relazione

$$(58) \quad \sum_{j=i}^{j=n} a_{n,j}^{(u)} \alpha_{j,i}^{(u)} = 0 \quad (i < n)$$

e le particolari

$$(58') \quad \sum_{j=i}^{j=n} h_{n,j} k_{j,i} = 0 \quad (i < n)$$

$$(58'') \quad \sum_{j=i}^{j=n} (-1)^j \frac{1}{i!} \binom{n-1}{j-1} \binom{j-1}{i-1} = 0 \quad (i < n).$$

Gli operatori s'intendano infine applicati al campo di base 1,  $x$ ,  $x^2$ , ... e si prenda per  $A$  la derivazione ordinaria  $D$  rispetto ad  $x$  e per  $X$  la moltiplicazione per  $x$  (4).

(4) In tal caso particolare alcune relazioni sugli operatori  $Dx$ ,  $xD$ ,  $D^s x^s$ ,  $x^s D^s$ , si possono ricavare con procedimento semplice e rapido che ci ha comunicato gentilmente il prof. A. MAMBRIANI.

Così dalle

$$(Dx)^m x^n = (n+1)^m x^n = \sum_{i=0}^{i=m} \binom{m}{i} n^i x^n = \sum_{i=0}^{i=m} \binom{m}{i} (xD)^i x^n$$

$$(Dx)^m x^n - (xD)^m x^n = [(n+1)^m - n^m] x^n = \sum_{i=0}^{i=m-1} (n+1)^{m-i-1} n^i x^n = \sum_{i=0}^{i=m-1} (Dx)^{m-i-1} (xD)^i x^n$$

$$(x^m D^m) x^n = \sum_{i=1}^{i=m} h_{m,i} n^i x^n = \sum_{i=1}^{i=m} h_{m,i} (xD)^i x^n,$$

si ricavano le relazioni

$$(Dx)^m = \sum_{i=0}^{i=m} \binom{m}{i} (xD)^i$$

$$(Dx)^m - (xD)^m = \sum_{i=0}^{i=m-1} (Dx)^{m-i-1} (xD)^i$$

$$x^m D^m = \sum_{i=1}^{i=m} h_{m,i} (xD)^i.$$

Applicando gli operatori  $(Dx^n)^n$ ,  $(xD)^l$  alla funzione  $e^{x-1}$ , sostituendo nella (39) per  $A = D$ ,  $X = x$ , e ponendo

$$x = 1, \quad S_i^{(u)} = \alpha_{i1}^{(u)} + \alpha_{i2}^{(u)} + \dots + \alpha_{ii}^{(u)},$$

si ha la relazione

$$(59) \quad S_{n+1}^{(u)} = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^{n-i} q_{n+1, i+1}^{(u)} S_i^{(1)}.$$

Posto sempre  $A = D$ ,  $X = x$ , applicando la (21) alla funzione  $x^s$ , si ha dopo calcolo piuttosto lungo la relazione

$$(60) \quad \alpha_{n,i}^{(u)} = \begin{vmatrix} h_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \nu h_{2,1} & h_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ \nu^2 h_{3,1} & \nu h_{3,2} & h_{3,3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu^{i-2} h_{i-1,1} & \nu^{i-3} h_{i-1,2} & \nu^{i-4} h_{i-1,3} & \dots & 0 \\ (-1)^{n-1} h_{n,1} & (-1)^{n-2} h_{n,2} & (-1)^{n-3} h_{n,3} & \dots & h_{n,n} \\ \nu^i h_{i+1,1} & \nu^{i-1} h_{i+1,2} & \nu^{i-2} h_{i+1,3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \nu^{n-1} h_{n,1} & \nu^{n-2} h_{n,2} & \nu^{n-3} h_{n,3} & \dots & h_{n,n} \end{vmatrix},$$

con  $\nu = u - 1$ ; e per  $u = 2$  l'altra relazione

$$(60'') \quad \frac{n!}{i!} \binom{n-1}{i-1} = \begin{vmatrix} h_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{2,1} & h_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ h_{3,1} & h_{3,2} & h_{3,3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{i-1,1} & h_{i-1,2} & h_{i-1,3} & \dots & 0 \\ (-1)^{n-1} h_{n,1} & (-1)^{n-2} h_{n,2} & (-1)^{n-3} h_{n,3} & \dots & h_{n,n} \\ h_{i+1,1} & h_{i+1,2} & h_{i+1,3} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n,1} & h_{n,2} & h_{n,3} & \dots & h_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Con analoghi confronti si potrebbero dedurre delle relazioni per gli altri numeri introdotti, ed altre ancora mediante l'impiego delle relazioni notevoli

$$(61) \quad A^n X^n = \sum_{i=0}^{i=n} (n-i)! \binom{n}{i}^2 X^i A^i$$

$$(62) \quad (-1)^n X^n A^n = \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i (n-i)! \binom{n}{i}^2 A^i X^i.$$



# Ueber Primzahlen in aufeinander folgenden Intervallen.

Von RICHARD OBLÁTH (in Budapest).

---

In früheren Publikationen (<sup>1</sup>) habe ich den Satz mitgeteilt:  
*Bei hinreichend grossem  $x$  enthält jedes der gleich langen Intervalle*

$$(1) \quad \langle 1, \dots, x \rangle, \langle x, \dots, 2x \rangle, \dots, \langle (n-1)x, \dots, nx \rangle$$

*weniger Primzahlen als das Vorhergehende, wenn*

$$(2) \quad 3n < \log x$$

*ist.*

Die Herren MICHAEL BAUER und WERNER WEBER hatten die Liebeshwürdigkeit, mich aufmerksam zu machen, dass mein Beweis diese Aussage nicht vollständig deckt, und zwar hauptsächlich deshalb, weil die benützte Form des Primzahlsatzes nicht genug scharf war. Der Satz selber ist jedoch richtig, man kann sogar wesentlich mehr behaupten. Es gilt nämlich der folgende:

SATZ 1. — *Bei hinreichend grossem  $x$  enthält jedes der Intervalle (1) von der Länge  $x$  weniger Primzahlen als das Vorhergehende, solange*

$$(3) \quad n < \log^m x$$

*ist, wo  $m$  eine beliebige feste ganze Zahl bedeutet.*

Dieser Satz, den ich einer freundlichen Mitteilung des Herren PAUL ERDÖS verdanke, besagt deshalb mehr als der Vorausgeschickte, weil infolge der letzten Ungleichung,  $n$  — die Anzahl derjenigen Intervalle, in welchen die monotone Abnahme der Primzahlhäufigkeit sichergestellt ist — jede Potenz von  $\log x$  überschreiten darf, während nach (2)  $n$  nur von der Gröszenordnung des  $\log x$  ist. Herr WEBER teilte mir einen Beweis mit, nach welchem  $m \leq 9$  ausfallen kann.

(<sup>1</sup>) OBLÁTH, « Math. és. Termtud. Ért. », 47, (1930), p. 250: und « Tö. Math. Journ. », 32, (1930), p. 328.

Der Beweis beruht auf dem Primzahlsatze mit dem von Herren LITTLEWOOD gegebenen Restglieder <sup>(2)</sup>, nach welchem die Anzahl der  $x$  nicht übertreffenden Primzahlen

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dz}{\log z} + O(xe^{-z \sqrt{\log x \log \log x}})$$

beträgt, wo  $\alpha$  eine positive Konstante bezeichnet, auf deren numerischen Wert es nicht ankommt. Die Anzahl der Primzahlen zwischen  $(k-1)x$  und  $kx$  liefert daher die Formel

$$(4) \quad u_k(x) = \pi(kx) - \pi((k-1)x) = \\ = \int_{(k-1)x}^{kx} \frac{dz}{\log z} + O(kxe^{-z \sqrt{\log(k-1)x \log \log(k-1)x}}).$$

Die positive ganze Zahl  $k$  haben wir so zu wählen, dass für  $k < n$

$$(5) \quad u_{k+1}(x) < u_k(x)$$

zutreffen soll.

Aus der Formel (4) folgt

$$U_k(x) = u_k(x) - u_{k+1}(x) = \\ = \int_{(k-1)x}^{kx} \frac{dz}{\log z} - \int_{kx}^{(k+1)x} \frac{dz}{\log z} + O(kxe^{-z \sqrt{\log x \log \log x}}) = \\ = \int_{(k-1)x}^{kx} \left( \frac{1}{\log z} - \frac{1}{\log(z+x)} \right) dz + O(kxe^{-z \sqrt{\log x \log \log x}})$$

wobei das Ordoglied vergrößert wurde. Der Integrand nimmt für  $z \geq 2$  monoton ab, wovon man durch Differenzieren überzeugt wird <sup>(3)</sup>. Wenn daher

<sup>(2)</sup> LANDAU, « Math. Zeitschrift. », 20, (1924), p. 90, besonders p. 103, und ebenda p. 105. S. weiter LANDAU, *Zahlentheorie* II, (1927), p. 47, Satz 403. Meines Wissens ist Herrn LITTLEWOODS Annäherung noch immer die beste. S. z. B. INGHAM, *The Distr. of Prime Numbers*, (« Cambridge Tracts in Math. n.º 30 »), Cambridge, 1932, p. 66, Theor. 24.

<sup>(3)</sup> In meinen zitierten Arbeiten habe ich den Satz schon für jedes  $k < M$  bewiesen, wo  $M$  eine beliebige gegebene Zahl bedeutet; der Nachweis der Tatsache  $u_2(x) < u_1(x)$  stammt schon von Herrn LANDAU « *Nouv. Ann. de Math.* », s. 4, t. 1, p. 281, (1901). Wir brauchen uns also nur um grosse  $k$ -s zu kümmern. Die für  $k=1$  nötige Modifikation lässt sich aber auch aus der hier benützten schärferen Formel in wenigen Strichen entwickeln,

für das in  $U_k(x)$  auftretende Integral ohne Restglied  $V_k(x)$  gesetzt wird, dann hat man <sup>(4)</sup> für  $k \geq 2$

$$\begin{aligned} U_k(x) &= \int_{(k-1)x}^{kx} \left( \frac{1}{\log z} - \frac{1}{\log(z+x)} \right) dz \geq x \left( \frac{1}{\log kx} - \frac{1}{\log(k+1)x} \right) = \\ &= \frac{x \log \left( 1 + \frac{1}{k} \right)}{\log kx \log(k+1)x} > x \frac{\log \left( 1 + \frac{1}{k+1} \right)}{\log^2(k+1)x} > \frac{\gamma x}{(k+1) \log^2(k+1)x} \end{aligned}$$

wo  $\gamma$  eine positive absolute Konstante bezeichnet. Nach der Fussnote <sup>(3)</sup> gilt diese Abschätzung auch für  $k=1$ .

Der Unterschied der Anzahlen der Primzahlen in beiden benachbarten Intervallen beträgt also

$$U_k(x) \geq \frac{\gamma x}{(k+1) \log^2(k+1)x} + O(kxe^{-\alpha \sqrt{\log x \log \log x}}).$$

Damit es im letzteren Intervalle weniger Primzahlen gebe als im Vorhergehenden, ist das Ueberwiegen des ersten Gliedes hinreichend, d. h. es muss

$$\frac{\gamma x}{(k+1) \log^2(k+1)x} > O(kxe^{-\alpha \sqrt{\log x \log \log x}})$$

stattfinden. Dieser Bedingung kann durch

$$e^{\alpha \sqrt{\log x \log \log x}} > O((k+1)^2 \log^2(k+1)x)$$

denn es ist

$$\begin{aligned} V_1(x) &= \int_2^x \frac{dz}{\log z} - \int_x^{2x} \frac{dz}{\log z} = \int_2^x \left( \frac{1}{\log z} - \frac{1}{\log(z+x)} \right) dz - \int_x^{x+2} \frac{dz}{\log z} \geq \\ &\geq (x-2) \left( \frac{1}{\log x} - \frac{1}{\log 2x} \right) - \frac{2}{\log x} \end{aligned}$$

daher hat man für ein hinreichend grosses  $x$

$$V_1(x) > \beta x \left( \frac{1}{\log x} - \frac{1}{\log 2x} \right)$$

wo  $\beta$  eine positive absolute Konstante bezeichnet.

<sup>(4)</sup> Weil aus

$$\begin{aligned} \log \left( 1 + \frac{1}{k+1} \right) &= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k+1} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{k+1} \right)^3 - + \dots \\ \log \left( 1 + \frac{1}{k+1} \right) &\geq \frac{1}{k+1} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{k+1} \right) \geq \frac{3}{4} \frac{1}{k+1} \end{aligned}$$

folgt.

genügt werden. Wenn also  $k < x$  ist, finden wir die hinreichende Bedingung

$$e^{x \sqrt{\log x \log \log x}} > O(k^2 \log^2 x).$$

Die Anzahl der in den Intervallen der Folge (1) enthaltenen Primzahlen nimmt daher bei der Wahl

$$(6) \quad k = o\left(\frac{e^{\frac{x}{2} \sqrt{\log x \log \log x}}}{\log x}\right)$$

monoton ab. Eine einfache Rechnung zeigt, dass — für  $k$  seinen grössten zulässigen Wert  $n$  eingesetzt — die Bedingung (6) durch die Wahl

$$n < \log^m x$$

befriedigt wird, wo  $m$  eine beliebige positive ganze Zahl sein darf, womit unser Satz vollständig bewiesen ist.

*Ein analoger Satz besteht für die Primzahlen der arithmetischen Reihe.*

Unser Satz gibt eine Folge von Intervallen an, in welchen die Primzahlhäufigkeit monoton abnimmt. Als Gegenstück dazu beweisen wir den:

SATZ 2. — *Es sei  $\lambda > 1$  eine positive Konstante. Für ein hinreichend grosses  $x$  enthält jedes der Intervalle*

$$\langle x, \dots, \lambda x \rangle, \langle \lambda x, \dots, \lambda^2 x \rangle, \dots, \langle \lambda^{n-1} x, \dots, \lambda^n x \rangle, \dots$$

*mehr Primzahlen als das Vorhergehende.*

Der Beweis ist dem Vorangegangenen nachgebildet.

Die Differenz der Anzahl der in zwei benachbarten Intervallen befindlichen Primzahlen ist also (°)

$$\begin{aligned} U_n(x) &= \int_{\lambda^n x}^{\lambda^{n+1} x} \frac{dz}{\log z} - \int_{\lambda^{n-1} x}^{\lambda^n x} \frac{dz}{\log z} + O(\lambda^{n+1} x e^{-x \sqrt{\log \lambda^n x \log \log \lambda^n x}}) = \\ &= \int_{\lambda^n x}^{\lambda^{n+1} x} \left( \frac{dz}{\log z} - \frac{1}{\lambda} \frac{dz}{\log \frac{z}{\lambda}} \right) + O(\lambda^{n+1} x e^{-\alpha \sqrt{\log \lambda^n x \log \log \lambda^n x}}). \end{aligned}$$

(°) Bei der Bewertung des Ordogliedes denke man daran, dass zu grösseren Werten der Variablen ein grösseres Ordoglied gehört, es ist also

$$O(\lambda^{n+1} x e^{-x \sqrt{\log \lambda^{n+1} x \log \log \lambda^{n+1} x}}) \leq O(\lambda^{n+1} x e^{-\alpha \sqrt{\log \lambda^n x \log \log \lambda^n x}}).$$

Das Restglied des Textes ist daher richtig.



Der Integrand nimmt für  $z > \lambda \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}-1}$  monoton ab. Wenn also das Integral ohne Restglied wieder mit  $V_n(x)$  bezeichnet wird, erhalten wir die Abschätzung

$$V_n(x) = \int_{\lambda^n x}^{\lambda^{n+1} x} \left( \frac{dz}{\log z} - \frac{dz}{\lambda \log \frac{z}{\lambda}} \right) > (\lambda^{n+1} x - \lambda^n x) \left( \frac{1}{\log \lambda^{n+1} x} - \frac{1}{\lambda \log \lambda^n x} \right).$$

Wir setzen  $\lambda^n x = y$  und schreiben

$$V_n(x) > y(\lambda - 1) \left( \frac{1}{\log \lambda y} - \frac{1}{\lambda \log y} \right).$$

Der Ausdruck rechts übertrifft stets das Ordoglied wegen

$$\begin{aligned} & (\lambda - 1) \frac{\lambda \log y - \log \lambda y}{\log y \log \lambda y} e^{x \sqrt{\log y \log \log y}} > \\ & > (\lambda - 1) \frac{\lambda \log y - \log \lambda y}{\log y \log \lambda y} e^{\log(\log^m y)} > \\ & > (\lambda - 1) \frac{\lambda \log y - \log \lambda y}{\log y \log \lambda y} \log^m y > \log^v y \end{aligned}$$

wo  $m$  eine beliebige ganze Zahl bedeutet, und  $v < m$  ist. Q. e. d.

*Ein analoger Satz besteht für die Primzahlen der arithmetischen Reihe.*

Ich erfülle eine angenehme Pflicht, indem ich den Herren MICHAEL BAUER und PAUL ERDÖS, deren wertvolle Bemerkungen ich auch im Beweise verwenden konnte, meinen herzlichsten Dank ausspreche.



# Sulla rappresentazione delle funzioni di variabile bicomplessa totalmente derivabili.

Memoria di NICOLÒ SPAMPINATO (a Catania).

---

**Sunto.** - *Si studiano le superficie e le trasformazioni caratteristiche dell' $S_4$  complesso, immagini dei legami e delle trasformazioni su due variabili bicomplesse, ottenute con funzioni totalmente derivabili.*

In una importante Memoria <sup>(1)</sup>, BENIAMINO SEGRE ha studiato geometricamente i *legami analitici* e le *trasformazioni analitiche* su due variabili complesse, che danno luogo, nell' $S_4$  rappresentativo di queste coppie di variabili, alle *superficie caratteristiche* e alle *trasformazioni pseudoconformi*.

L'idea semplificatrice che il SEGRE ha avuto è stata quella di non restringersi a considerare nell' $S_4$  soltanto elementi reali, ma anche quelli immaginari e ha ricordato, in proposito, che tale estensione nell' $S_4$  rappresentativo è stata fatta da CORRADO SEGRE, quando ha introdotto nel piano complesso i punti bicomplessi <sup>(2)</sup>, ed equivale a prolungare nel corpo complesso le componenti reali delle coppie di variabili complesse, ovvero a considerare *coppie di variabili bicomplesse* anzichè coppie di variabili complesse <sup>(3)</sup>.

Si osservi ora che se la variabile complessa  $y$  è funzione olomorfa della variabile complessa  $x$ , prolungando le componenti reali di  $x$  e  $y$  nel corpo complesso, cioè prolungando le variabili  $x$  e  $y$  nell'algebra dei numeri bicomplessi, si ottiene la variabile *bicomplessa*  $y$  funzione olomorfa secondo

---

<sup>(1)</sup> B. SEGRE. *Questioni geometriche legate alla teoria delle funzioni di due variabili complesse* [« Rendiconti del Seminario Matematico della R. Università di Roma », Vol. VII, Parte II, 1930-31-X, pp. 59-107].

<sup>(2)</sup> C. SEGRE, *Sulle rappresentazioni reali delle forme complesse e gli enti iperalgebrici* [« Mathematische Annalen », XL Band (1892), pp. 413-467].

<sup>(3)</sup> Si veda in proposito la mia nota: *I punti bicomplessi e le varietà iperalgebriche del SEGRE* [« Esercitazioni Matematiche », Vol. VIII, pp. 67-76, « Circolo Matematico di Catania »; 1935-XIII].

SCORZA DRAGONI <sup>(4)</sup> della variabile *bicomplexa*  $x$ . Ne segue che, corrispondentemente, i *legami analitici* e le *trasformazioni analitiche* su due variabili complesse si prolungano nei *legami* e nelle *trasformazioni su due variabili bicomplesse ottenute con funzioni olomorfe secondo SCORZA DRAGONI*. Pertanto questi legami e queste trasformazioni danno luogo, nell' $S_4$  complesso rappresentativo, alle superficie e alle trasformazioni che generalizzano le superficie caratteristiche e le trasformazioni pseudoconformi dell' $S_4$  reale, e che chiameremo superficie caratteristiche e trasformazioni caratteristiche dell' $S_4$  complesso.

In una nota in corso di stampa nei « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei » ho dimostrato che le funzioni di variabile bicomplexa olomorfe secondo SCORZA DRAGONI coincidono con le funzioni, nell'algebra dei numeri bicompleksi, *totalmente derivabili* ovvero con le funzioni *a derivata caratteristica unica*. Da tale nota risulta manifesta la convenienza di usare nello stadio di dette funzioni il sistema di unità che mette in evidenza la riducibilità dell'algebra dei numeri bicompleksi.

A riguardo si osservi che il SEVERI nell'applicare il *metodo* che chiama *del passaggio dal reale al complesso* <sup>(5)</sup> per la risoluzione generale del problema di DIRICHLET per le funzioni biarmoniche, eseguisce la seguente trasformazione sulle due coppie di variabili complesse  $(x_1, x_2)$ ,  $(x, \bar{x})$ :

$$(1) \quad \begin{cases} x = x_1 + ix_2 & | \quad x_1 = (x + \bar{x})/2 \\ \bar{x} = x_1 - ix_2 & | \quad x_2 = (x - \bar{x})/2. \end{cases}$$

Ebbene, le (1) sono le relazioni che intercedono fra le coordinate  $x_1, x_2$  e  $x, \bar{x}$  di uno stesso numero bicomplexo nei due sistemi di unità  $u, v$  e  $v_1, v_2$  con le seguenti tabelle di moltiplicazione:

$$(2) \quad u^2 = u, \quad uv = vu = v, \quad v^2 = -u$$

$$(3) \quad v_1^2 = v_1, \quad v_1v_2 = v_2v_1 = 0, \quad v_2^2 = v_2.$$

Sicchè quando dalle variabili complesse  $x_1$  e  $x_2$  si passa alle variabili complesse  $x$  e  $\bar{x}$ , si viene ad esprimere la variabile *bicomplexa*  $z = x_1u + x_2v$  (*prolungamento* della variabile complessa  $x_1 + ix_2$ , corrispondente al prolungamento dei numeri reali  $x_1$  e  $x_2$  nel corpo complesso) nella forma  $z = xv_1 + \bar{x}v_2$ .

<sup>(4)</sup> G. SCORZA DRAGONI, *Sulle funzioni olomorfe di una variabile bicomplexa* [« Reale Accademia d'Italia », Memorie della Classe di Scienze, Vol. V, pp. 597-665].

<sup>(5)</sup> F. SEVERI, *Risoluzione generale del problema di DIRICHLET per le funzioni biarmoniche* [« Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », Vol. XIII, 1931, pp. 795-804].

cioè nel sistema di unità  $v_1, v_2$  che è quello che mette in evidenza la riducibilità dell'algebra dei numeri bicomplexi.

Le superiori osservazioni spiegano perchè nello studio che faccio in questa Nota intorno alle superficie e alle trasformazioni caratteristiche dell' $S_4$  complesso, uso sistematicamente le unità  $v_1$  e  $v_2$ , ottenendo notevoli semplificazioni.

### § I.

1. Le superficie dell' $S_4$  complesso immagini delle funzioni di una variabile bicomplexa totalmente derivabili. — Sia  $C'$  l'algebra dei numeri bicomplexi

$$(1) \quad x = x_1 v_1 + x_2 v_2,$$

con  $v_1, v_2$  unità soddisfacenti alle condizioni

$$(2) \quad v_1^2 = v_1, \quad v_1 v_2 = v_2 v_1 = 0, \quad v_2^2 = v_2$$

e  $x_1, x_2$  numeri complessi. In corrispondenza ad una coppia di numeri bicomplexi  $(x, y)$ , posto per  $y$

$$(3) \quad y = y_1 v_1 + y_2 v_2,$$

consideriamo in un  $S_4$  complesso, dove si suppone fissato un sistema di coordinate non omogene, cartesiane, il punto  $P(x_1, x_2, y_1, y_2)$ , che si dirà immagine della coppia di numeri bicomplexi  $(x, y)$ .

Ciò posto, consideriamo una funzione  $y(x)$  della variabile bicomplexa  $x$ , totalmente derivabile, cioè olomorfa secondo SCORZA DRAGONI, e quindi del tipo

$$[1] \quad y(x) = y_1(x_1) v_1 + y_2(x_2) v_2$$

con  $y_1(x_1)$  e  $y_2(x_2)$  funzioni olomorfe delle variabili complesse  $x_1$  e  $x_2$  rispettivamente.

Mentre  $x$  varia in un campo contenuto nel campo di esistenza della  $y(x)$ , il punto  $P$  dell' $S_4$  complesso immagine della coppia di numeri bicomplexi  $(x, y(x))$  descriverà un pezzo della superficie, di equazioni

$$[2] \quad y_1 = y_1(x_1), \quad y_2 = y_2(x_2),$$

che si dirà la *superficie caratteristica dell' $S_4$  complesso*, immagine della funzione bicomplexa  $y(x)$  totalmente derivabile.

In particolare, come immagini delle funzioni lineari totalmente derivabili

$$(4) \quad y(x) = (ax_1 + b)v_1 + (cx_2 + d)v_2$$

avremo i piani caratteristici dell' $S_4$  complesso di equazioni

$$(5) \quad y_1 = ax_1 + b, \quad y_2 = cx_2 + d.$$

2. **Piani caratteristici dell' $S_4$  complesso.** — Indichiamo con  $r'$  e  $r''$  le rette improprie dei piani coordinati  $\rho_1(x_1, y_1)$  e  $\rho_2(x_2, y_2)$ . La retta impropria del piano caratteristico di equazioni (5) s'appoggia alle rette sghembe  $r'$  e  $r''$  e precisamente nei punti impropri delle due rette tracce, in detti piani, dei due iperpiani che le (5) rappresentano separatamente. Le stesse equazioni rappresentano nei due piani  $(x_1, y_1)$  e  $(x_2, y_2)$  tali tracce. Evidentemente il punto di appoggio in  $r'$  ( $r''$ ) è distinto dal punto improprio  $Y_1$  ( $Y_2$ ) di  $y_1$  ( $y_2$ ). Viceversa ogni piano dell' $S_4$ , appoggiato ad  $r'$  e ad  $r''$  in punti distinti da  $Y_1$  e  $Y_2$ , ha le equazioni del tipo (5) e quindi rappresenta una funzione lineare bicomplexa totalmente derivabile, cioè è un piano caratteristico. Si osservi che le eccezioni presentate da  $Y_1$  e  $Y_2$  provengono dal fatto che si considerano le funzioni  $y(x)$  totalmente derivabili scritte sotto la forma esplicita [1]. Se alla [1] si sostituisce l'equazione

$$[1'] \quad H_1(x_1, y_1)v_1 + H_2(x_2, y_2)v_2 = 0$$

con  $H_1$  e  $H_2$  simboli di legami analitici fra  $x_1$  e  $y_1$  e fra  $x_2$  e  $y_2$ , e quindi alla (4) si sostituisce l'equazione

$$(4') \quad (a_1x_1 + b_1y_1 + c_1)v_1 + (a_2x_2 + b_2y_2 + c_2)v_2 = 0,$$

i casi di eccezione, che corrispondono ai valori  $b_1 = 0$  e  $b_2 = 0$  vengono ad essere eliminati. Abbiamo pertanto che:

I) *I piani caratteristici dell' $S_4$  complesso, cioè i piani immagini delle funzioni lineari della variabile bicomplexa  $x$ , derivabili totalmente, ovvero olomorfe secondo SCORZA DRAGONI, sono tutti e soli i piani appoggiati alle rette sghembe  $r'$  e  $r''$  (6).*

3. **Superficie caratteristiche dell' $S_4$  complesso.** — Consideriamo nuovamente la superficie caratteristica  $F$  di equazioni [2], immagine della funzione  $y(x)$ , totalmente derivabile, data dalla [1]. La prima (seconda) delle equazioni [2] rappresenta nel piano coordinato  $\rho_1(x_1, y_1)$  ( $\rho_2(x_2, y_2)$ ) un pezzo di

(6) Si noti che le rette  $r'$  e  $r''$ , rette improprie dei piani coordinati  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , coincidono con le rette  $r'$  e  $r''$ , assi della congruenza  $K$  considerata dal SEGRE nella sua memoria citata in (4), prefazione e n° 1. Nel sistema di coordinate usato dal SEGRE (che corrisponde alle unità  $u$  e  $v$ ) le rette  $r'$  e  $r''$  sono immaginarie coniugate. Nel sistema di coordinate considerato in questa nota (che corrisponde alle unità  $v_1$  e  $v_2$ ) le rette  $r'$  e  $r''$  sono reali.

curva analitica  $f_1 (f_2)$ . Se  $P_1 (P_2)$  è un punto qualunque di  $f_1 (f_2)$  i piani  $P_1 r''$  e  $P_2 r'$  si secano in un punto  $P$  di  $F$ . La  $F$  è pertanto intersezione di due pezzi di  $S_1$ -coni, che si ottengono proiettando  $f_1$  da  $r''$  e  $f_2$  da  $r'$ . Gli  $\infty^1$  piani proiettanti i punti di  $f_1$  da  $r''$  secano  $F$  in un sistema, di dimensione complessa 1, di curve ciascuna delle quali è proiettata da  $r'$  sul piano  $\rho_2$  nella curva  $f_2$ .

Un secondo sistema di curve, di dimensione complessa 1, si ottiene secando la  $F$  con i piani proiettanti i punti di  $f_2$  da  $r'$ . Ciascuna curva di questo secondo sistema è proiettata da  $r''$  su  $\rho_1$  nella curva  $f_1$ . La proiezione della  $F$  da  $r'' (r')$  su  $\rho_1 (\rho_2)$  non è, pertanto, un pezzo di piano a 2 dimensioni, ma un pezzo di curva  $f_1 (f_2)$ . Viceversa se si ha nello spazio complesso  $S_4$  una superficie (o pezzo di superficie)  $F$  che è proiettata da  $r' (r'')$  su  $\rho_1 (\rho_2)$  in un pezzo di curva analitica  $f_1 (f_2)$ , se questa è immagine di una funzione olomorfa  $y_1(x_1) (y_2(x_2))$ , la  $F$  è caratteristica e precisamente è l'immagine della funzione bicomplexa totalmente derivabile avente per coefficienti di  $v_1$  e  $v_2$  le due funzioni  $y_1(x_1)$  e  $y_2(x_2)$ . Concludendo si ha:

II) *Le superficie caratteristiche dell'  $S_4$  complesso, cioè immagini delle funzioni di variabile bicomplexa totalmente derivabili, o olomorfe secondo SCORZA DRAGONI, sono tutte e sole le superficie dell'  $S_4$  complesso proiettate da  $r'$  e  $r''$ , rispettivamente sui piani coordinati  $\rho_2$  e  $\rho_1$  in curve analitiche immagini di funzioni olomorfe  $y_1(x_1), y_2(x_2)$  delle variabili complesse  $x_1$  e  $x_2$  rispettivamente.*

4. **Curve e piani seminulli dell'  $S_4$  complesso.** — Ricordiamo che un numero bicomplexo  $x = x_1 v_1 + x_2 v_2$  è nullo se è  $x_1 = x_2 = 0$ , è un *divisore dello zero* se è nulla una delle sue coordinate  $x_1, x_2$ . Se è  $x_1 = 0$ ,  $x$  si dirà divisore dello zero del 1° sistema, se è  $x_2 = 0$ ,  $x$  si dirà, invece, divisore dello zero del 2° sistema. I punti dello spazio complesso rappresentativo delle coppie di numeri bicomplessi  $(x, y)$ , con  $x$  e  $y$  divisori dello zero di uno stesso sistema o nulli sono, evidentemente i punti del piano  $\rho_1$  e del piano  $\rho_2$ . Per tal fatto i piani paralleli a  $\rho_1$  o a  $\rho_2$  si diranno *seminulli*. Essi sono i piani propri passanti per  $r'$  o per  $r''$  (?).

Le curve appartenenti ad un piano seminullo si diranno *seminulle*. In base a quanto abbiamo detto nel n. precedente possiamo affermare che:

(?) Pertanto i piani che qui si chiamano *seminulli* coincidono con i piani che B. SEGRE ha chiamato *nulli*. Essi derivano dalla presenza dei divisori dello zero nell'algebra  $C'$  dei numeri bicomplessi. Ne segue che le linee che qui vengono chiamate *seminulle* sono le linee *bicaratteristiche* di B. SEGRE (Loc. cit. (4), n° 6).

II) Ogni superficie caratteristica dell'  $S_4$  complesso contiene due sistemi di curve analitiche seminulle. Questa proprietà è caratteristica per dette superficie.

5. **Un teorema dei fili analitici.** — Sia  $f(t)$  una funzione olomorfa complessa della variabile reale  $t$  data da

$$(6) \quad f(t) = h(t) + g(t)i$$

con  $h(t)$  e  $g(t)$  funzioni reali olomorfe della variabile reale  $t$ , definite in un intervallo  $(t', t'')$ , e quindi sviluppabili in serie di potenze

$$(7) \quad h(t) = \sum_m a_m (t - t_1)^m$$

$$(8) \quad g(t) = \sum_m b_m (t - t_1)^m$$

nell'intorno di ogni punto  $t_1$  di  $(t', t'')$ . In detto intorno per la  $f(t)$  si ha lo sviluppo in serie

$$(9) \quad f(t) = \sum_m (a_m + b_m i) (t - t_1)^m.$$

Posto  $z = t + iq$ , consideriamo la serie, che si ottiene dalla (9) sostituendo alla variabile reale  $t$  la variabile complessa  $z$ ,

$$(10) \quad \sum_m (a_m + b_m i) (z - t_1)^m.$$

Questa serie, al variare di  $t_1$  in  $(t', t'')$ , fornisce infiniti elementi di una funzione analitica della variabile complessa  $z$  con i centri nei punti  $t_1$  del segmento dell'asse reale  $t$ , posto nel piano di GAUSS  $(t, q)$ , avente per estremi i punti  $t'$  e  $t''$ . I cerchi di convergenza di dette infinite serie costituiranno un campo  $C$  a cui appartiene il segmento  $t't''$ , e in  $C$  definiscono una funzione olomorfa (uniforme)  $f(z)$  della variabile complessa  $z$  che lungo detto segmento si riduce alla data funzione  $f(t)$ . La  $f(z)$  dicesi il *prolungamento* della  $f(t)$  nel corpo dei numeri complessi.

Ciò ricordato, consideriamo quattro funzioni complesse olomorfe, non tutte costanti,

$$(11) \quad x_1(t), \quad x_2(t), \quad y_1(t), \quad y_2(t)$$

della variabile reale  $t$ , definite in uno stesso intervallo  $(t', t'')$ , e le funzioni loro prolungamento nel corpo complesso

$$(12) \quad x_1(z), \quad x_2(z), \quad y_1(z), \quad y_2(z).$$

Indichiamo con  $C$  un campo contenuto nei campi di esistenza delle funzioni (12) e contenente il segmento  $t't''$ .



Mentre la variabile reale  $t$  descrive l'intervallo  $(t', t'')$ , il punto  $P$  dell' $S_4$  complesso di coordinate (11) descrive un insieme continuo di dimensione reale 1, che dicesi un tratto di *filo analitico* dell' $S_4$  complesso. (Secondo una nomenclatura introdotta da CORRADO SEGRE, una varietà di uno spazio *complesso* di dimensioni *reali* 1, 2, 3 dicesi *filo*, *tela*, *trivarietà*, rispettivamente).

Mentre la variabile complessa  $z$  descrive il campo  $C$ , il punto di  $S_4$  di coordinata (12) descrive un tratto di curva analitica (di dimensione complessa 1 e di dimensione reale 2). È evidente che questo tratto di curva, diciamo  $l_1$ , contiene il tratto di filo  $l$  sopra considerato, dunque:

III) *Un tratto di filo analitico appartiene sempre ad un tratto di curva analitica determinato dal filo.*

Questa proposizione è l'estensione ai fili analitici di una proprietà dei fili iperalgebrici dovuta a CORRADO SEGRE.

Ciò posto, supponiamo che il tratto di filo  $l$  sia tale che l'intorno di ogni suo punto  $P$  non appartenga ad un piano seminullo, o, come diremo, che non sia *seminullo*. Anche il tratto di curva  $l_1$  sarà di conseguenza non seminullo. Proiettando  $l_1$  da  $r''$  ( $r'$ ) sul piano  $\rho_1$  ( $\rho_2$ ) si ottiene un tratto di curva analitica  $f_1$  ( $f_2$ ). Precisamente  $f_1$  ( $f_2$ ) è rappresentata in  $\rho_1$  ( $\rho_2$ ) dalle prima e terza (seconda e quarta) delle equazioni (12). L'intersezione  $P$  di due piani  $P_1 r''$  e  $P_2 r'$ , con  $P_1$  ( $P_2$ ) variabile in  $f_1$  ( $f_2$ ), descrive un pezzo di superficie caratteristica  $F$  contenente il tratto di curva  $l_1$  e quindi il tratto di filo  $l$ .

Supponiamo ora che  $F_1$  sia una superficie caratteristica contenente il tratto di filo  $l$  e quindi il tratto di curva  $l_1$  determinato da  $l$ ; le proiezioni di un pezzo di  $F_1$  contenente  $l_1$  da  $r''$  e  $r'$  su  $\rho_1$  e  $\rho_2$  dovranno essere due tratti di curve contenenti  $f_1$  e  $f_2$  perchè  $f_1$  e  $f_2$  sono le proiezioni di  $l_1$ . Ma allora sarà  $F = F_1$ , perchè anche  $F$  è proiettata da  $r''$  e  $r'$  su  $\rho_1$  e  $\rho_2$  in  $f_1$  e  $f_2$ . Dunque per un tratto di filo analitico passa un solo pezzo di superficie caratteristica.

Mettiamoci ora nell'ipotesi che il tratto di filo  $l$  sia seminullo, e per fissare le idee supponiamo che appartenga ad un piano seminullo passante per  $r''$ , cioè del 2° sistema. Proiettando  $l$  da  $r''$  su  $\rho_1$  si ottiene un punto  $P_1(a, 0, b, 0)$ , il che equivale ad affermare che in questo caso le funzioni  $x_1(t)$  e  $y_1(t)$  sono due costanti  $a$  e  $b$ . Si conduca per  $P_1$ , nel piano  $\rho_1$ , un qualunque tratto di curva analitica  $f_1$ . In corrispondenza ai due tratti di curve analitiche  $f_1$  e  $f_2$ , avremo una superficie caratteristica  $F$ , intersezione delle varietà che si ottengono proiettando  $f_1$  e  $f_2$  da  $r''$  e  $r'$ , passante per il tratto di filo  $l$ . Concludendo si ha il teorema:

IV) *Per un tratto di filo analitico non seminullo passa una ed una sola superficie caratteristica dell' $S_4$  complesso.*

Per un tratto di filo analitico seminullo passano infinite superficie caratteristiche dell'  $S_4$  complesso <sup>(8)</sup>.

6. Le trasformazioni caratteristiche dell'  $S_4$  complesso. — Una trasformazione bicomplessa su due variabili

$$[3] \quad X = X(x, y), \quad Y = Y(x, y)$$

si dirà *caratteristica* se le funzioni  $X(x, y)$  e  $Y(x, y)$  delle due variabili bicomplesse indipendenti  $x$  e  $y$  sono totalmente derivabili rispetto ad  $x$  e rispetto ad  $y$  e, applicate ad un campo convenientemente ristretto dell'  $S_4$  complesso, risultano invertibili e tali da definire  $y$  e  $x$  come funzioni totalmente derivabili di  $X$  e  $Y$ . Se diciamo omologhi due punti di  $S_4$  immagini di due coppie  $(x, y)$  e  $(X, Y)$  legate dalle [3], resta determinata fra due campi di  $S_4$  una trasformazione biunivoca  $w$  che si dirà una *trasformazione caratteristica dell'  $S_4$  complesso*.

Posto

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = X_1 v_1 + X_2 v_2 \\ Y = Y_1 v_1 + Y_2 v_2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = x_1 v_1 + x_2 v_2 \\ y = y_1 v_1 + y_2 v_2 \end{array} \right. ,$$

le  $X_1, Y_1$  saranno funzioni olomorfe delle sole variabili complesse indipendenti  $x_1$  e  $y_1$ ; invece  $X_2$  e  $Y_2$  saranno funzioni olomorfe delle sole variabili indipendenti  $x_2$  e  $y_2$ . Sicchè posto

$$[3'] \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = X_1(x_1, y_1) \\ Y_1 = Y_1(x_1, y_1) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} X_2 = X_2(x_2, y_2) \\ Y_2 = Y_2(x_2, y_2) \end{array} \right. ,$$

saranno le [3'] le equazioni della trasformazione caratteristica  $w$  dell'  $S_4$  com-

<sup>(8)</sup> B. SEGRE ha dimostrato nella sua memoria citata in (4), n° 5, p. 66, che per un tratto regolare di linea analitica (reale) assegnata comunque in  $S_4$  passa uno ed un sol pezzo di superficie caratteristica. Nel seguente n° 6 il SEGRE ha osservato che la proposizione enunciata vale anche nel campo complesso per una linea analitica assegnata non reale, purchè non sia bicaratteristica e che la superficie che si viene a determinare non sarà in generale reale (Nota <sup>(24)</sup> della pag. 68). Tenendo conto di quanto abbiamo osservato nella nota (7), si scorge che la prima parte del teorema IV) non è altro che la proposizione di B. SEGRE, su ricordata, nel campo complesso. La eccezionalità delle linee bicaratteristiche, cioè dei fili seminulli, che nella dimostrazione del SEGRE proveniva dall'annullarsi identicamente di una certa espressione, nella nostra dimostrazione proviene dal fatto che un filo seminullo è proiettato da  $r''$  e  $r'$ , in uno dei piani coordinati  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , in un punto. Da quanto sopra si è osservato si conclude che le superficie non reali dell'  $S_4$  complesso a cui il SEGRE accenna nella citata nota <sup>(24)</sup> di pag. 68, non sono altro che le superficie immagini delle funzioni di variabile bicomplessa olomorfe secondo SCORZA DRAGONI o totalmente derivabili.

plesso. Le [3'], separatamente, determinano nei piani coordinati  $\rho_1(x_1, y_1)$  e  $\rho_2(x_2, y_2)$  due trasformazioni  $w_1$  e  $w_2$  in cui si corrispondono le proiezioni  $P_1$  e  $P_1'$ ,  $P_2$  e  $P_2'$  di due punti omologhi  $P$  e  $P'$  in  $w$  fatte, rispettivamente, da  $r''$  e  $r'$ .

Un campo piano seminullo, cioè appartenente ad un piano seminullo del 1° o del 2° sistema, sarà trasformato da  $w$  evidentemente in un campo piano seminullo dello stesso sistema, perchè punti del piano seminullo  $r''P_1$  ( $r'P_2$ ) vengono trasformati da  $w$  in punti del piano seminullo  $r''P_1'$  ( $r'P_2'$ ). Viceversa se una trasformazione analitica invertibile dell' $S_4$  complesso deve trasformare campi seminulli in campi seminulli dello stesso sistema, subordinerà in convenienti insiemi di piani seminulli, cioè passanti per  $r'$  o  $r''$ , una trasformazione analitica e quindi subordinerà una trasformazione analitica in ciascuno dei piani coordinati  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , chiamando omologhi in  $\rho_1$  ( $\rho_2$ ) due punti sezioni di piani seminulli omologhi passanti per  $r''$  ( $r'$ ). Le equazioni di tali trasformazioni sono del tipo [3'] e quindi la trasformazione analitica assegnata è una trasformazione caratteristica. Si ha pertanto:

V) *Condizione necessaria e sufficiente affinché una trasformazione analitica invertibile dell' $S_4$  complesso sia una trasformazione caratteristica, è che trasformi campi seminulli in campi seminulli dello stesso sistema* <sup>(9)</sup>.

Ne segue che: una trasformazione caratteristica trasforma curve seminulle in curve seminulle dello stesso sistema, e, quindi, tenendo conto del teorema II') del n. 4, si ricava che:

VI) *Una trasformazione caratteristica dell' $S_4$  complesso trasforma superficie caratteristiche in superficie caratteristiche, trasformando le curve seminulle dell'una nelle curve seminulle dell'altra appartenenti allo stesso sistema.*

Si osservi che se una trasformazione caratteristica  $w$  trasforma una superficie caratteristica  $F$  in una superficie (caratteristica)  $F'$  e  $f_1, f_2$  e  $f_1', f_2'$  sono le proiezioni di  $F$  e  $F'$  su  $\rho_1$  e  $\rho_2$  da  $r''$  e  $r'$ , le [3'] a sinistra (a destra) devono trasformare  $f_1$  ( $f_2$ ) in  $f_1'$  ( $f_2'$ ). Se, in particolare, la  $F$  è un pezzo di piano caratteristico, nel qual caso le  $f_1$  e  $f_2$  sono segmenti rettilinei, perchè  $F'$  sia pur un pezzo di piano (caratteristico) occorre e basta che anche  $f_1'$  e  $f_2'$  siano segmenti rettilinei. Ora perchè le trasformazioni, in  $\rho_1$  e  $\rho_2$ ,  $w_1$  e  $w_2$ , di equazioni [3'], trasformino segmenti rettilinei in segmenti

<sup>(9)</sup> Questa proposizione generalizza la seguente proposizione di B. SEGRE: *Le trasformazioni pseudoconformi possono venire caratterizzate fra le trasformazioni puntuali analitiche (e reali) dell' $S_4$  in sè stesso dalla proprietà di trasformare piani nulli in piani nulli associando fra loro piani dello stesso sistema* (Loc. cit. <sup>(1)</sup>, p. 85).

rettilinei, occorre e basta che  $X_1, Y_1 (X_2, Y_2)$  siano funzioni lineari fratte di  $x_1, y_1 (x_2, y_2)$ . Ne segue immediatamente che:

VI) *Le trasformazioni caratteristiche dell' $S_4$  complesso trasformanti regioni piane caratteristiche in regioni piane (caratteristiche) sono le immagini delle trasformazioni bicomplesse rappresentate da sostituzioni lineari fratte nelle due variabili bicomplesse  $x$  e  $y$  <sup>(40)</sup>.*

**7. Superficie semicaratteristiche.** — Una superficie o un pezzo di superficie dell' $S_4$  complesso si dirà *semicaratteristica del 1° (2°) sistema* se proiettata da  $r''$  ( $r'$ ) su  $\rho_1$  ( $\rho_2$ ) dà, anzichè una regione a due dimensioni, un pezzo di curva che non si riduca ad un punto (nel qual caso la superficie è una regione piana seminulla).

Una superficie semicaratteristica del 1° (2°) sistema è secata da piani seminulli passanti per  $r''$  ( $r'$ ) in curve seminulle, quindi ogni tale superficie o pezzo di superficie contiene un sistema di curve seminulle. È evidente che:

VII) *Una trasformazione caratteristica dell' $S_4$  complesso trasforma una superficie semicaratteristica del 1° (2°) sistema in una superficie semicaratteristica dello stesso sistema, trasformando le curve seminulle della prima nelle curve seminulle della seconda.*

**8. Teorema fondamentale.** — Sia  $G$  una regione superficiale analitica dell' $S_4$  complesso, cioè una superficie o un pezzo di superficie analitica, e diciamo  $G_1$  e  $G_2$  le proiezioni di  $G$  da  $r''$  e  $r'$  su  $\rho_1$  e  $\rho_2$  rispettivamente. Se  $G_1$  o  $G_2$  si riduce ad un punto sarà  $G$  una regione piana posta in un piano seminullo, cioè una regione piana seminulla. Se  $G$  non è una regione piana seminulla nè  $G_1$  nè  $G_2$  potranno ridursi ad un punto. In questa ipotesi  $G_1$  o  $G_2$  si ridurrà ad un tratto di curva quando e solo quando la  $G$  è semicaratteristica. Ne segue che se  $G$  non è seminulla nè semicaratteristica,  $G_1$  e  $G_2$  saranno due regioni piane di  $\rho_1$  e  $\rho_2$  nessuna delle quali può ridursi ad un punto o ad un tratto di curva. In questa ipotesi il piano proiettante da  $r''$ , o  $r'$ , un punto generico  $P$  di  $G$ , secherà  $G$  in un numero finito di punti e quindi, considerando la regione superficiale  $G$  convenientemente piccola, possiamo supporre che il piano proiettante da  $r''$ , o  $r'$ , ogni punto  $P$  di  $G$  sechi  $G$  nel solo punto  $P$ . In tal caso la corrispondenza che nasce fra  $G$  e  $G_1$  o  $G_2$ , chiamando omologo di  $P$  il punto  $P_1$  o  $P_2$  sua proiezione

<sup>(40)</sup> Questa proposizione generalizza la proposizione di B. SEGRE del n° 25, p. 90 della memoria citata in <sup>(4)</sup>.

da  $r''$  o  $r'$  su  $\rho_1$  o  $\rho_2$ , è biunivoca senza eccezioni. Ciò posto vogliamo dimostrare il seguente teorema:

VIII) Se  $G$  e  $G'$  sono due regioni superficiali dell'  $S_4$  complesso, non seminulle nè semicaratteristiche, sufficientemente piccole, e  $W$  è una corrispondenza biunivoca analitica fissata ad arbitrio fra esse, esiste una ed una sola trasformazione caratteristica fra due intorni quadrimensionali di  $G$  e  $G'$  che trasformi  $G$  in  $G'$ , subordinandovi la corrispondenza  $W$  assegnata <sup>(14)</sup>.

Infatti siano  $P_1, P_1', P_2, P_2'$  le proiezioni su  $\rho_1$  e  $\rho_2$  da  $r''$  e  $r'$  di due punti  $P$  e  $P'$  di  $G$  e  $G'$  omologhi in  $W$ . Mentre  $P$  descrive  $G$ , e quindi  $P'$  descrive  $G'$ , i punti  $P_1$  e  $P_1'$  del piano  $\rho_1$  descriveranno le proiezioni  $G_1$  e  $G_1'$  di  $G$  e  $G'$  su  $\rho_1$ , e, per le ipotesi fatte, la corrispondenza biunivoca  $W$  esistente fra  $G$  e  $G'$  si proietterà in una corrispondenza biunivoca  $W_1$  fra  $G_1$  e  $G_1'$  in cui si corrisponderanno le proiezioni  $P_1$  e  $P_1'$ . Analoga osservazione si può fare relativamente alle proiezioni  $G_2$  e  $G_2'$  di  $G$  e  $G'$ , sul piano  $\rho_2$ , da  $r'$ . Fra  $G_2$  e  $G_2'$  avremo una corrispondenza biunivoca  $W_2$ , proiezione di  $W$ , in cui si corrisponderanno  $P_2$  e  $P_2'$ . Ciò posto diciamo  $D$  ( $D'$ ) la regione quadrimensionale dell'  $S_4$  complesso costituita da tutti i punti  $P$  ( $P'$ ) le cui proiezioni da  $r''$  e  $r'$  su  $\rho_1$  e  $\rho_2$  cadano rispettivamente in  $G_1$  e  $G_2$  (in  $G_1'$  e  $G_2'$ ).

Sia  $P$  un punto di  $D$  e  $P_1, P_2$  le sue proiezioni da  $r''$  e  $r'$  su  $\rho_1$  e  $\rho_2$ : Siano  $P_1'$  e  $P_2'$  i punti, di  $G_1'$  e  $G_2'$ , omologhi di  $P_1$  e  $P_2$  in  $W_1$  e  $W_2$  rispettivamente.

I piani  $r''P_1'$  e  $r'P_2'$  si segheranno in un punto  $P'$  di  $D'$  che diremo omologo di  $P$  in una corrispondenza  $w$ . La  $w$  risulta biunivoca e analitica perchè sono biunivoche e analitiche le corrispondenze  $W_1$  e  $W_2$  proiezioni della corrispondenza biunivoca analitica  $W$  assegnata fra  $G$  e  $G'$ . Inoltre la  $w$  trasforma evidentemente  $G$  in  $G'$  subordinandovi la corrispondenza  $W$ . Si osservi infine che se  $P$  descrive una sezione piana seminulla di  $D$ , fatta per es. col piano seminullo  $P_1r''$ , il punto omologo  $P'$  di  $D'$  descriverà la sezione piana seminulla di  $D'$  fatta col piano seminullo  $P_1'r''$ , e quindi, per il teorema V), la trasformazione analitica  $w$  è una trasformazione caratteristica. Il teorema risulta pertanto dimostrato per la parte che riguarda l'esistenza della trasformazione caratteristica trasformante  $G$  in  $G'$  subordinandovi la  $W$ . Dimostriamo ora che una tale trasformazione è unica. Infatti

(14) Questa proposizione generalizza il teorema di B. SEGRE del n° 24, pag. 86 della memoria citata in (\*). Il SEGRE impone che le due superficie  $G$  e  $G'$  (per il SEGRE  $F$  e  $G$ ) non siano caratteristiche. Nel campo complesso questa condizione non è sufficiente: bisogna invece in questo caso imporre che non siano semicaratteristiche nè seminulle.

una trasformazione caratteristica che goda delle proprietà indicate subordinerà negl'insiemi di piani per  $r''$  ( $r'$ ) proiettanti i punti di  $G$  e  $G'$ , la trasformazione analitica che si ottiene proiettando la  $W_1$  ( $W_2$ ) e quindi tale trasformazione coinciderà con la  $w$ .

**9. Un teorema relativo alle  $V_3$  analitiche.** — Sia  $V_3$  una varietà analitica di  $S_4$  a 3 dimensioni. Se  $P$  è un suo punto, il piano seminullo  $r''P$  la secherà in una curva analitica  $s_1$  o, per posizioni particolari di  $V_3$  rispetto alla retta  $r''$ , in una regione piana  $\sigma_1$ . In questo secondo caso diremo che la  $V_3$  contiene una regione piana seminulla del 1° sistema.

Secando la  $V_3$  con il piano seminullo  $r'P$ , si ottiene una curva analitica  $s_2$  o, in casi particolari, una regione piana  $\sigma_2$ , che si dirà una regione piana seminulla del 2° sistema.

È evidente che se si trasforma la  $V_3$  con una trasformazione caratteristica  $w$ , la  $V_3'$  trasformata sarà priva di regioni piane seminulle se è tale la  $V_3$ , perchè ogni eventuale regione piana seminulla di  $V_3$  sarà trasformata da  $w$  in una regione piana seminulla (dello stesso sistema), della  $V_3'$ .

Mettiamoci nell'ipotesi che la  $V_3$  sia priva di regioni piane seminulle. In tal caso per ogni punto  $P$  di  $V_3$  passa una curva seminulla  $s_1$  del 1° sistema ed una curva seminulla  $s_2$  del 2° sistema. Queste due curve si ottengono secando la  $V_3$  con i piani seminulli  $r''P$  e  $r'P$ . La  $V_3$  possiede due sistemi  $\infty^2$  di curve seminulle che indicheremo con  $(s_1)$  e  $(s_2)$ . Mentre  $P$  descrive  $V_3$  le sue proiezioni  $P_1$  e  $P_2$  da  $r''$  e  $r'$ , su  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , descriveranno due regioni  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , nessuna delle quali può ridursi ad una curva, perchè se per es. fosse  $\sigma_1$  una curva, i punti della  $V_3$  dovrebbero essere distribuiti negli  $\infty^1$  piani proiettanti i punti di  $\sigma_1$  da  $r''$ , e quindi, per essere la  $V_3$  a tre dimensioni, in  $\infty^1$  di tali piani dovrebbe ammettere una regione piana, contro l'ipotesi che la  $V_3$  sia priva di regioni piane seminulle.

Sia  $P_1$  un punto di  $\sigma_1$ . Il piano  $P_1r''$  segherà la  $V_3$  in una curva  $s_1$  di  $(s_1)$ . Questa proiettata da  $r'$  su  $\rho_2$  darà una curva  $f_2$  di  $\sigma_2$  che diremo omologa di  $P_1$  in una trasformazione analitica  $\lambda$  che porta un punto  $P_1$  di  $\sigma_1$  in una curva  $f_2$  di  $\sigma_2$ . Viceversa è evidente che l'inversa di  $\lambda$  porta un punto  $P_2$  di  $\sigma_2$  in una curva  $f_1$  di  $\sigma_1$ , curva che si ottiene proiettando da  $r''$  su  $\rho_1$  la curva  $s_2$  sezione di  $V_3$  con il piano  $P_2r'$ . — Se  $P_1$  e  $P_2$  sono le proiezioni di uno stesso punto  $P$  di  $V_3$ , la curva  $f_2$  passa per  $P_2$  e la curva  $f_1$  passa per  $P_1$ . È evidente che la corrispondenza  $\lambda$  e la  $V_3$  si determinano a vicenda.

Ciò posto, consideriamo in  $\sigma_1$  una curva analitica  $g_1$ . Mentre un punto  $P_1$  descrive  $g_1$ , la curva seminulla  $s_1$ , sezione di  $V_3$  con il piano  $P_1r''$ , descrive

una superficie semicaratteristica  $G$  di  $V_3$ , appartenente al 1° sistema, perchè è proiettata da  $r''$  su  $\rho_1$  nella curva  $g_1$  data. Sicchè per ogni curva  $g_1$  di  $\sigma_1$  si ha in corrispondenza una superficie semicaratteristica  $G$  del 1° sistema appartenente a  $V_3$ . (Analogamente si fa relativamente alle curve  $g_2$  di  $\sigma_2$  alle quali corrisponderanno superficie semicaratteristiche del 2° sistema appartenenti alla  $V_3$ ). La superficie semicaratteristica  $G$ , di cui sopra, per essere caratteristica occorre e basta che sia semicaratteristica anche del 2° sistema, cioè che proiettata da  $r'$  su  $\rho_2$  dia una curva  $g_2$ . In questo caso le  $\infty^1$  curve seminulle  $s_1$  giacenti nei piani  $P_1 r''$ , con  $P_1$  in  $g_1$ , vengono tutte proiettate da  $r'$  su  $\rho_1$  nella curva  $g_2$ . Sicchè  $g_2$  è la curva omologa in  $\lambda$  di ogni punto  $P_1$  di  $g_1$ . La  $G$  conterrà inoltre  $\infty^1$  curve  $s_2$ , quelle poste nei piani  $P_2 r'$ , con  $P_2$  in  $g_2$ , e tutte queste curve saranno proiettate da  $r'$  su  $\rho_1$  nella curva  $g_1$ . Quindi ad ogni punto  $P_2$  di  $g_2$  corrisponde, per l'inversa di  $\lambda$ , la curva  $g_1$ . Viceversa è evidente che se si hanno in  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  due curve analitiche  $g_1$  e  $g_2$  tali che ad ogni punto di  $g_1$  ( $g_2$ ) corrisponde per la  $\lambda$  ( $\lambda^{-1}$ ) la curva  $g_2$  ( $g_1$ ), la superficie caratteristica riempita dai punti  $P$  aventi le proiezioni  $P_1$  ( $P_2$ ) [da  $r''$  ( $r'$ ) su  $\rho_1$  ( $\rho_2$ )] appartenenti a  $g_1$  ( $g_2$ ), appartiene alla  $V_3$ . Dunque:

IX) *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una  $V_3$  analitica contenga una superficie caratteristica è che la corrispondente trasformazione  $\lambda$  ammetta due curve singolari  $g_1$  e  $g_2$ , cioè tali che ad ogni punto di  $g_1$  ( $g_2$ ) corrisponda  $g_2$  ( $g_1$ ).*

10. **Ipersuperficie analitiche caratteristiche.** — Una ipersuperficie analitica  $V_2$  priva di regioni piane seminulle, si dirà caratteristica se è costituita da un sistema  $\infty^1$  di superficie caratteristiche. Se la  $V_3$  considerata nel n. 8 è caratteristica, la regione  $\sigma_1$  ( $\sigma_2$ ) dovrà contenere un sistema  $\infty^1$  di curve analitiche  $g_1$  ( $g_2$ ) tali che la corrispondenza  $\lambda$  ( $\lambda^{-1}$ ) deve far corrispondere ad ogni punto  $P_1$  ( $P_2$ ) di una assegnata curva  $g_1$  ( $g_2$ ) del sistema, una determinata curva  $g_2$  ( $g_1$ ), sicchè fra i due sistemi  $\infty^1$  di curve  $g_1$  e  $g_2$  la trasformazione  $\lambda$  determina una corrispondenza biunivoca  $L$ . Alle varie coppie di curve ( $g_1$ ,  $g_2$ ) corrispondentisi in  $L$  (coppie di curve singolari per la  $\lambda$ ) corrispondono le superficie caratteristiche contenute nella  $V_3$  caratteristica considerata, nel senso precisato nel n. 8.

Sia  $V_3'$  un'altra ipersuperficie caratteristica di  $S_4$  e siano  $\sigma_1'$ ,  $\sigma_2'$ ,  $g_1'$ ,  $g_2'$ ,  $\lambda'$  e  $L'$  le regioni di  $\rho_1$  e  $\rho_2$ , le curve di  $\sigma_2$  e  $\sigma_2$  e le trasformazioni che per  $V_3'$  hanno lo stesso significato che per la  $V_3$  hanno  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ,  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $\lambda$  e  $L$ .

Sia  $w_1$  ( $w_2$ ) una trasformazione analitica invertibile nel piano  $\rho_1$  ( $\rho_2$ ) che trasformi  $\sigma_1$  ( $\sigma_2$ ) in  $\sigma_1'$  ( $\sigma_2'$ ) e tale che trasformi il sistema di curve anali-

tiche  $g_1$  di  $\sigma_1$  ( $g_2$  di  $\sigma_2$ ) nel sistema di curve  $g'_1$  di  $\sigma'_1$  (di curve  $g'_2$  di  $\sigma'_2$ ), portando coppie di curve omologhe in  $L$  in coppie di curve omologhe in  $L'$ .

Se diciamo  $D$  il campo quadridimensionale formato dai punti  $P$  con le proiezioni  $P_1$  e  $P_2$  da  $r''$  e  $r'$  su  $\rho_1$  e  $\rho_2$  appartenenti rispettivamente a  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , le trasformazioni analitiche  $w_1$  e  $w_2$  determinano una trasformazione caratteristica  $w$  che opera su  $D$ : un punto  $P$  di  $D$  è trasformato da  $w$  nel punto intersezione dei piani  $r''P'_1$ ,  $r'P'_2$ , essendo  $P'_1$  e  $P'_2$  i trasformati di  $P_1$  e  $P_2$  in  $w_1$  e  $w_2$ . Se  $P$  appartiene a  $V_2$ ,  $P_1$  e  $P_2$  saranno due punti appartenenti a due curve  $g_1$  e  $g_2$  omologhe in  $L$ . Ne segue che i loro trasformati mediante  $w_1$  e  $w_2$  saranno due punti  $P'_1$  e  $P'_2$  appartenenti a due curve  $g'_1$  e  $g'_2$  omologhe in  $L'$ , e quindi il punto  $P'$  apparterrà a  $V'_3$ . La  $w$  trasforma, pertanto, la  $V_3$  nella  $V'_3$ . Dunque:

X) *Date due ipersuperficie caratteristiche, è sempre possibile trasformarle una nell'altra mediante una trasformazione caratteristica.*

NOTA. — Si osservi che esistono infinite trasformazioni caratteristiche che portano la  $V_3$  nella  $V'_3$ , perchè esistono infinite trasformazioni  $w_1$  e  $w_2$  soddisfacenti alle condizioni poste nella dimostrazione del teorema X). Infatti per determinare due tali corrispondenze  $w_1$  e  $w_2$  si può procedere nel seguente modo: Si fissino, in primo luogo, due superficie analitiche  $H$  e  $H'$  non semicaratteristiche nè seminulle contenute rispettivamente in  $V_3$  e  $V'_3$ . Se  $P$  è un punto di  $H$ , e quindi di  $V_3$ , le proiezioni  $P_1$  e  $P_2$  su  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  apparterranno a due curve  $g_1$  e  $g_2$  omologhe in  $L$ , sicchè chiamando omologhi due punti  $P_1$  e  $P_2$  proiezioni su  $\rho_1$  e  $\rho_2$  da  $r''$  e  $r'$  di uno stesso punto  $P$  di  $H$ , resta determinata una trasformazione analitica  $h$  fra  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  che trasforma le curve  $g_1$  nelle omologhe  $g_2$  per la trasformazione  $L$ . Mentre  $P_1$  descrive una curva  $g_1$ , e quindi l'omologo  $P_2$  in  $h$  descrive la curva  $g_2$  omologa di  $g_1$  in  $L$ , il punto  $P$  di  $H$  descriverà una curva  $g$  appartenente alla superficie caratteristica  $G$  corrispondente alla coppia di curve  $g_1$  e  $g_2$ . Analoghe osservazioni si facciano relativamente alla superficie  $H'$  di  $V'_3$ , usando gli stessi simboli con gli apici.

Ciò posto, fra le superficie  $H$  ed  $H'$  fissiamo una corrispondenza analitica biunivoca  $W$  che trasformi il sistema di curve  $g$  di  $H$  nel sistema di curve  $g'$  di  $H'$ .

Proiettando da  $r''$  su  $\rho_1$  (da  $r'$  su  $\rho_2$ ) le coppie  $(P, P')$  omologhe in  $W$  si ottengono coppie di punti  $(P_1, P'_1)$ ,  $(P_2, P'_2)$  omologhe in una corrispondenza analitica  $w_1$  ( $w_2$ ) invertibile. Queste due trasformazioni soddisfano alle condizioni di cui sopra.

Si osservi, anzi, che la trasformazione caratteristica  $w$  determinata da  $w_1$



e  $w_2$  è la trasformazione che trasforma la  $H$  nella  $H'$  subordinandovi la  $W$ . Questa stessa trasformazione trasforma la  $V_3$  nella  $V_3'$ .

11. **Gli  $S_3$  caratteristici.** — Sia  $S_3$  un iperpiano dell'  $S_4$  complesso  $\sigma$ , distinto dall'  $S_3$  improprio. Se  $S_3$  passa per  $r'$  o  $r''$ , conterrà un fascio di piani seminulli. Un tale  $S_3$  non è pertanto caratteristico, perchè, per definizione, una  $V_3$  caratteristica non deve contenere regioni piane seminulle.

Se  $S_3$  non passa nè per  $r'$  nè per  $r''$ , secherà queste due rette in due punti  $R'$  e  $R''$ . Tutti i piani di  $S_4$  passanti per  $R'$  e  $R''$  sono piani caratteristici e di questi un fascio appartiene all'  $S_3$  considerato. Un tale  $S_3$  è, pertanto, una varietà  $V_3$  caratteristica perchè contiene  $\infty^1$  superficie caratteristiche. Dunque:

XI) *Gli  $S_3$  caratteristici dell'  $S_4$  complesso sono tutti e soli gli  $S_3$  non passanti nè per  $r'$  nè per  $r''$ .*

Dal teorema X) segue che:

XII) *Ogni  $V_3$  caratteristica è trasformabile con una trasformazione caratteristica in un pezzo di iperpiano secante  $r'$  ed  $r''$  in un punto <sup>(12)</sup>.*

## § II.

1. **Rappresentazione reale dei numeri bicomplexi.** — Rappresentiamo la variabile bicomplexa  $x = x_1v_1 + x_2v_2 = (x_1' + x_1''i)v_1 + (x_2' + x_2''i)v_2$  nel punto  $X(x_1', x_1'', x_2', x_2'')$  di un  $S_4$  reale euclideo. Questo punto si può considerare pure come l'immagine del punto  $(x_1, x_2)$  del piano coordinato  $\sigma_1(x_1, x_2)$  dell'  $S_4$  complesso considerato nel § I, per rappresentare le coppie di variabili bicomplesse  $(x, y)$ . Analogamente rappresentiamo la variabile bicomplexa  $y = y_1v_1 + y_2v_2 = (y_1' + iy_1'')v_1 + (y_2' + iy_2'')v_2$  nel punto  $Y(y_1', y_1'', y_2', y_2'')$  dello stesso  $S_4$  reale euclideo. Questo punto si può considerare pure l'immagine del punto  $(y_1, y_2)$  del piano coordinato  $\sigma_2(y_1, y_2)$  dell'  $S_4$  complesso.

Ciò posto, osserviamo che assegnare nell'  $S_4$  complesso un punto  $P$ , immagine di una coppia  $(x, y)$  di numeri bicomplexi, equivale ad assegnare due punti  $X$  e  $Y$  nell'  $S_4$  reale, immagini dei due numeri bicomplexi  $x$  e  $y$ .

Consideriamo nell'  $S_4$  complesso il tratto di filo analitico di equazioni

$$(1) \quad x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad y_1 = y_1(t), \quad y_2 = y_2(t)$$

<sup>(12)</sup> Per questa proprietà le  $V_3$  caratteristiche si diranno pure *iperplanoidi* dell'  $S_4$  complesso. Esse generalizzano gl'iperplanoidi dell'  $S_4'$  reale.

essendo  $x_1, x_2, y_1, y_2$  funzioni complesse olomorfe della variabile reale  $t$  definite in un intervallo  $(t', t'')$ , non tutte e quattro costanti. In corrispondenza ad ogni punto  $P$  del tratto di filo considerato, diciamolo  $l$ , fissiamo nell' $S_4$  reale i due punti  $X$  e  $Y$  di cui sopra. Mentre  $P$  descrive  $l$ , i punti  $X$  e  $Y$  descriveranno due linee (reali)  $l_x$  e  $l_y$ . Può, in particolare,  $l_x$  ( $l_y$ ) ridursi ad un punto: ciò avviene quando e solo quando le funzioni  $x_1, x_2$  ( $y_1, y_2$ ) sono entrambe costanti. Non possono però  $l_x$  ed  $l_y$  ridursi contemporaneamente ad un punto, perchè le funzioni (1) non sono, per ipotesi, tutte e quattro costanti. Per fissare le idee, supponiamo che  $l_x$  sia effettivamente un tratto di linea. In questa ipotesi *l'assegnare il filo  $l$  nell' $S_4$  complesso equivale ad assegnare la linea  $l$  nell' $S_4$  reale e una funzione bicomplessa  $y^*(x)$  lungo questo tratto di linea*: quella che nel punto di  $l_x$ , rispondente ad un assegnato valore del parametro reale  $t$ , assume il valore bicompleso  $y_1(t)v_1 + y_2(t)v_2$ .

Nel caso che anche  $l_y$  non si riduca ad un punto, chiamando omologhi due punti di  $l_x$  e  $l_y$  se corrispondono ad uno stesso valore del parametro reale  $t$ , si viene a stabilire fra  $l_x$  e  $l_y$  una corrispondenza analitica invertibile, e quindi, in questa ipotesi: *l'assegnare il tratto di filo  $l$  nell' $S_4$  complesso equivale ad assegnare due tratti di linee analitiche (regolari, aperte) dell' $S_4$  reale e una corrispondenza analitica invertibile fra detti tratti*.

Si osservi ora che l'assegnare nell' $S_4$  reale una regione superficiale (a due dimensioni complesse e a quattro dimensioni reali) equivale ad assegnare nell' $S_4$  reale una regione quadridimensionale ed una funzione  $y(x)$  bicomplessa del punto variabile in detta regione; e se la regione superficiale assegnata nell' $S_4$  complesso è *caratteristica*, la funzione bicomplessa del punto variabile nella regione quadridimensionale dell' $S_4$  reale è *totalmente derivabile* o *olomorfa secondo SCORZA DRAGONI*.

Se la regione superficiale considerata contiene il tratto di filo  $l$  la funzione bicomplessa  $y(x)$  assumerà lungo la linea  $l_x$  [che apparterrà alla regione quadridimensionale dell' $S_4$  reale dove  $y(x)$  è definita] i valori della funzione bicomplessa  $y^*(x)$  determinata lungo  $l_x$  dello stesso filo  $l$ , per quanto sopra è stato osservato.

Le osservazioni fatte bastano per poter affermare che la prima parte del teorema IV) equivale alla risoluzione del problema dell'*equivalenza di due tratti di linea reali dell' $S_4$  reale*, questione trattata e risolta nel modo più completo da G. SCORZA DRAGONI nel § 7 della sua memoria citata in (\*), (ovvero al teorema conclusivo del n. 40 di p. 635). Si osservi che le *curve singolari* a cui accenna lo SCORZA nel n. 41 corrispondono ai *fili seminulli*.

2. **Equivalenza di due superficie dell' $S_4$  reale.** — Per interpretare nell' $S_4$  complesso il problema dell'equivalenza di due superficie reali dell' $S_4$  reale, risolto dallo SCORZA DRAGONI nel § 8 della sua memoria citata in (1), osserviamo quanto segue.

Siano date quattro funzioni complesse olomorfe

$$(2) \quad x_1 = x_1(t, p), \quad x_2 = x_2(t, p), \quad y_1 = y_1(t, p), \quad y_2 = y_2(t, p)$$

delle due variabili *reali* indipendenti  $t, p$  definite in un rettangolo  $R$

$$(R) \quad t' \leq t \leq t'', \quad p' \leq p \leq p''.$$

Mentre il punto  $(t, p)$  descrive il rettangolo  $R$ , il punto  $P(x_1, x_2, y_1, y_2)$  dell' $S_4$  complesso descriva ciò che si dice una *tela analitica*  $T$ , cioè una varietà complessa dell' $S_4$  complesso a due dimensioni *reali*. Ciò equivale a supporre che le funzioni (2) non sono tutte e quattro costanti, nè si possono ridurre a quattro funzioni olomorfe di un solo parametro reale, nel qual caso il punto  $P$  non descriverebbe una *tela*, ma un *filo*.

Mentre il punto  $P$  descrive la tela  $T$  i punti  $X$  e  $Y$  dell' $S_4$  reale, considerati nel n. precedente, descrivono due varietà analitiche reali  $T_x$  e  $T_y$  di dimensioni  $\leq 2$  (dimensioni reali).

La  $T_x$  ( $T_y$ ) si riduce ad un punto quando e solo quando le prime (le ultime) funzioni (2) sono costanti. Questi due casi non si possono verificare contemporaneamente, anzi se  $T_x$  ( $T_y$ ) si riduce ad un punto,  $T_y$  ( $T_x$ ) deve essere a due dimensioni, altrimenti la  $T$  non potrebbe essere a due dimensioni.

La  $T_x$  ( $T_y$ ) si riduce ad una linea quando e solo quando le prime (le ultime) due funzioni (2) si riducono a due funzioni olomorfe di un solo parametro reale. Può accadere che  $T_x$  e  $T_y$  siano entrambe linee. In questo caso le (2) sono del tipo

$$(2') \quad x_1 = x_1(s_1), \quad x_2 = x_2(s_1), \quad y_1 = y_1(s_2), \quad y_2 = y_2(s_2)$$

con  $s_1$  e  $s_2$  parametri reali, e la tela  $T$  è proiettata dalla retta impropria del piano coordinato  $\sigma_2(y_1, y_2)$  [ $\sigma_1(x_1, x_2)$ ] sul piano  $\sigma_1, (\sigma_2)$  in un *filo* e precisamente in quello che è rappresentato dalle prime (ultime) equazioni (2'). La  $T$  viene ad essere l'immagine complessa delle coppie di punti dei due fili  $T_x$  e  $T_y$  e rappresenta pertanto la funzione bicomplessa che assume in ogni punto di  $T_x$  gl'infiniti valori bicomplessi rappresentati dai punti di  $T_y$ . Questo caso pertanto non offre alcun interesse.

Supporremo dunque che una almeno delle varietà  $T_x$  e  $T_y$  sia a due dimensioni, cioè una regione superficiale dell' $S_4$  reale. Per fissare le idee

supporremo che sia di dimensione 2 la  $T_x$ , cioè supporremo che le prime due funzioni (2) non si riducano a funzioni di un solo parametro reale. In quest'ipotesi l'assegnare la tela  $T$  dell' $S_4$  complesso equivale ad assegnare nell' $S_4$  reale una superficie reale  $T_x$  e una funzione bicomplessa  $y^*(x)$  del punto variabile su  $T_x$ . Nel caso poi che anche la  $T_y$  sia a 2 dimensioni, l'assegnare nell' $S_4$  complesso la tela  $T$  equivale ad assegnare nell' $S_4$  reale due superficie  $T_x$  e  $T_y$  e una corrispondenza analitica invertibile fra di esse (chiamando omologhi due punti rispondenti agli stessi valori dei parametri  $t$  e  $p$ ).

Ne segue che l'esistenza di una funzione  $y(x)$  bicomplessa olomorfa secondo SCORZA DRAGONI, definita in un intorno quadridimensionale di  $T_x$ , che su  $T_x$  si riduca alla funzione  $y^*(x)$ , o, nell'altra ipotesi, l'equivalenza delle superficie  $T_x$  e  $T_y$  dell' $S_4$  reale, equivale, nell' $S_4$  complesso all'esistenza di una superficie caratteristica passante per la tela  $T$ .

Ora la tela  $T$  può essere *curvilinea* o *superficiale* secondo che le funzioni (2), *prolungate* nel corpo complesso, danno le funzioni olomorfe

$$(2'') \quad x_1 = x_1(z, q), \quad x_2 = x_2(z, q), \quad y_1 = y_1(z, q), \quad y_2 = y_2(z, q),$$

delle variabili indipendenti  $z$  e  $q$ , che si riducano o no a quattro funzioni olomorfe di una sola variabile complessa, cioè secondo che le (2'') rappresentino nell' $S_4$  complesso un tratto di curva  $f_T$  o una regione superficiale  $F_T$ . Nel primo caso la  $T$  essendo a due dimensioni reali, come la  $f_T$ , coinciderà con questo tratto di curva, cioè la tela  $T$  è un tratto di curva. Nel secondo caso la tela  $T$  non è un tratto di curva, ma appartiene ad una superficie  $F_T$  da essa determinata.

Nel primo caso:

a) se il tratto di curva  $f_T = T$  è seminullo, per esso passano infinite superficie caratteristiche.

b) se il tratto di curva  $f_T = T$  non è seminullo, per esso passa una sola superficie caratteristica.

Nel secondo caso:

c) se la superficie  $F_T$  determinata dalla tela  $T$  è caratteristica, per  $T$  passa una ed una sola superficie caratteristica: la  $F_T$ .

d) se la  $F_T$  non è caratteristica, per la tela  $T$  non passa alcuna superficie caratteristica.

Si ricordi che la condizione necessaria e sufficiente perchè la superficie  $F_T$  dell' $S_4$  complesso sia caratteristica è che la sua proiezione da  $r''$  ( $r'$ ) su  $\rho_1$  ( $\rho_2$ ) sia una curva. Si osservi, pertanto, che nei casi b) e c) la proiezione della tela  $T$  su  $\rho_1$  ( $\rho_2$ ) da  $r''$  ( $r'$ ) è *curvilinea*, cioè appartiene ad una curva. Concludendo si ha il teorema:

I) Sia  $T_x$  una superficie analitica reale dell' $S_4$  reale e  $y^*(x)$  una funzione bicomplexa del punto variabile su  $T_x$ , e  $T$  la tela dell' $S_4$  complesso determinata da  $T_x$  e dalla funzione  $y^*(x)$ . Il problema della determinazione di una funzione bicomplexa totalmente derivabile, o olomorfa secondo SCORZA DRAGONI, definita in un intorno quadridimensionale di  $T_x$  che su  $T_x$  si riduca alla  $y^*(x)$ ,

1) ammette infinite soluzioni se  $T$  è un tratto di curva seminulla;

2) ammette una e una sola soluzione se le proiezioni di  $T$  da  $r''$  e  $r'$  su  $\rho_1$  e  $\rho_2$  appartengono ad un tratto di curva, senza ridursi ad un punto;

3) non ammette alcuna soluzione se  $T$  non presenta uno dei casi 1) e 2).

Sotto altro aspetto il teorema I) si può enunciare nel seguente modo.

Siano

$$(T_x) \quad x_1' = x_1'(t, p), \quad x_1'' = x_1''(t, p), \quad x_2' = x_2'(t, p), \quad x_2'' = x_2''(t, p)$$

quattro funzioni olomorfe reali delle due variabili reali  $t, p$ , rappresentanti una superficie  $T_x$  dell' $S_4$  reale, e

$$(3) \quad y^*(x) = y_1(t, p)v_1 + y_2(t, p)v_2$$

una funzione bicomplexa del punto variabile su  $T_x$  con  $y_1(t, p)$  e  $y_2(t, p)$  funzioni complesse olomorfe delle due variabili reali  $t$  e  $p$  definite, insieme alle  $(T_x)$ , in uno stesso rettangolo del piano reale  $(t, p)$ .

Siano

$$(4) \quad x_1 = x_1(z, q), \quad x_2 = x_2(z, q)$$

le funzioni che si ottengono prolungando nel corpo complesso le funzioni

$$(5) \quad x_1 = x_1'(t, p) + x_1''(t, p)i, \quad x_2 = x_2'(t, p) + x_2''(t, p)i$$

e siano  $y_1 = y_1(z, q)$ ,  $y_2 = y_2(z, q)$  le funzioni che si ottengono prolungando nel corpo complesso le funzioni  $y_1 = y_1(t, p)$ ,  $y_2 = y_2(t, p)$ . Ciò posto:

I) *Condizione necessaria e sufficiente affinché esista una funzione bicomplexa totalmente derivabile, o olomorfa secondo SCORZA DRAGONI, definita in un intorno quadridimensionale di  $T_x$ , che su  $T_x$  si riduca alla funzione (3), è che le funzioni  $x_1$  e  $y_1$  ( $x_2$  e  $y_2$ ) delle due variabili complesse  $z$  e  $q$  si riducano a due funzioni di una sola variabile complessa  $z_1$  ( $z_2$ ). Nel caso particolare che  $x_1$  e  $y_1$  (o  $x_2$  e  $y_2$ ) siano costanti, esistono infinite funzioni bicomplesse soddisfacenti alle condizioni volute; se nessuna di queste due circostanze si verifica, esiste una sola funzione bicomplexa che soddisfa alle condizioni imposte.*

3. **Equivalenza di due  $V_3$  dell' $S_4$  reale.** — Il problema dell'equivalenza di due  $V_3$  reali dell' $S_4$  reale risolto dallo SCORZA DRAGONI nel § 9 della sua memoria citata in (1), interpretato nell' $S_4$  complesso, dà luogo a considerazioni del tutto analoghe a quelle svolte nel n. precedente relativamente al problema dell'equivalenza di due superficie.

L'assegnare nell' $S_4$  reale una varietà reale tridimensionale  $V_x$  rappresentata dalle quattro funzioni reali

$$(V_x) \quad x_1' = x_1'(r, t, p), \quad x_1'' = x_1''(r, t, p), \quad x_2' = x_2'(r, t, p), \quad x_2'' = x_2''(r, t, p)$$

olomorfe, delle variabili reali  $r, t, p$ , in un parallelepipedo dell' $S_3$  reale  $(r, t, p)$ , e una funzione bicomplessa del punto variabile su  $V_x$ , che nel punto rispondente ai valori  $r, t, p$  assume il valore bicompleso

$$(6) \quad y^*(x) = y_1(r, t, p)v_1 + y_2(r, t, p)v_2,$$

essendo  $y_1(r, t, p)$  e  $y_2(r, t, p)$  due funzioni complesse olomorfe definite nel detto parallelepipedo, equivale ad assegnare nell' $S_4$  complesso la *trivarietà* analitica  $V$  di equazioni

$$(V) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_1'(r, t, p) + x_1''(r, t, p)i \\ y_1 = y_1(r, t, p) \end{array} \right\}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = x_2'(r, t, p) + x_2''(r, t, p)i \\ y_2 = y_2(r, t, p) \end{array} \right\}$$

Inoltre l'esistenza di una funzione bicomplessa  $y(x)$  totalmente derivabile, o olomorfa secondo SCORZA DRAGONI, definita in un intorno quadridimensionale di  $V_x$  e che su  $V_x$  si riduca alla funzione bicomplessa (6), equivale all'esistenza di una superficie caratteristica dell' $S_4$  complesso passante per la trivarietà  $V$ .

Supponiamo che per la trivarietà  $V$  passi una superficie caratteristica  $F$ , e siano  $f_1$  e  $f_2$  le proiezioni di  $F$  da  $r''$  e  $r'$  su  $\rho_1$  e  $\rho_2$  rispettivamente; le proiezioni  $V_1$  e  $V_2$  di  $V$  da  $r''$  e  $r'$  su  $\rho_1$  e  $\rho_2$  dovranno appartenere a  $f_1$  e  $f_2$ , e quindi  $V_1$  e  $V_2$  non possono essere delle trivarietà, ma al più delle tele, anzi tele curvilinee, cioè coincidenti con  $f_1$  o  $f_2$ . In particolare  $V_1$  o  $V_2$  (ma non entrambe) possono ridursi ad un filo (di  $f_1$  o  $f_2$  rispettivamente). In ogni caso  $V_1$  e  $V_2$  prolungate nel corpo complesso, devono dare i due tratti di curve  $f_1$  e  $f_2$ , cioè le funzioni  $x_1, y_1$  ( $x_2, y_2$ ) date dalle (V), che rappresentano in  $\rho_1$  ( $\rho_2$ )  $V_1$  ( $V_2$ ) prolungate nel corpo complesso, devono dare due funzioni complesse olomorfe di tre variabili complesse che devono ridursi a funzioni olomorfe di una sola variabile complessa  $z_1$  ( $z_2$ ).

Viceversa, se queste condizioni sono soddisfatte, le proiezioni  $V_1$  e  $V_2$  della trivarietà  $V$  apparterranno a due tratti di curve  $f_1$  e  $f_2$  e la  $V$  appar-

terrà alla superficie caratteristica  $F$  rispondente a  $f_1$  e  $f_2$ . Si ha pertanto il teorema:

II) Sia  $V_x$  una varietà reale tridimensionale dell' $S_4$  reale di equazioni  $(V_x)$  e  $y^*(x)$  una funzione bicomplexa del punto variabile su  $V_x$  data dalla (6).

Sia inoltre  $V$  la trivarietà dell' $S_4$  complesso determinata da  $V_x$  e da  $y^*(x)$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché esista una funzione bicomplexa  $y(x)$  definita in un intorno quadridimensionale di  $V_x$ , che su  $V_x$  si riduca alla  $y^*(x)$ , e olomorfa secondo SCORZA DRAGONI, o totalmente derivabile, è che le proiezioni della trivarietà  $V$  da  $r''$  e  $r'$  sui piani coordinati  $\rho_1$  e  $\rho_2$  siano curvilinee, ovvero che le prime (seconde) funzioni  $(V)$ , prolungate nel campo complesso, si riducano a due funzioni olomorfe di una sola variabile complessa. Se queste condizioni sono soddisfatte, la funzione  $y(x)$  soddisfacente alle condizioni volute è unica.













Die Koeffizienten (3) werden aus den Gleichungen (17)-(18) gefunden; die ersten  $q$  von ihnen sind die Lösungen der vollständigen (\*) Systeme von linearen Gleichungen mit rechten Theilen:

$$(19) \quad \begin{cases} X_1(\eta_1) = \lambda_{11} \\ \dots \\ X_k(\eta_1) = \lambda_{k1} \\ \dots \\ X_q(\eta_1) = \lambda_{q1} \end{cases}; \quad \begin{cases} X_1(\eta_2) = \lambda_{12} \\ \dots \\ X_k(\eta_2) = \lambda_{k2}; \dots \\ \dots \\ X_q(\eta_2) = \lambda_{q2} \end{cases}; \dots \quad \begin{cases} X_1(\eta_q) = \lambda_{1q} \\ \dots \\ X_k(\eta_q) = \lambda_{kq} \\ \dots \\ X_q(\eta_q) = \lambda_{qq} \end{cases}.$$

Bezeichnen wir die partiellen Lösungen der Systeme (19) durch:

$$(20) \quad r_1, r_2, \dots, r_q.$$

Sie sind die willkürlichen Funktionen der unabhängigen Veränderlichen, welche mit den Funktionen  $\lambda_{kj}$  durch die Beziehungen:

$$(21) \quad X_k(r_1) \equiv \lambda_{k1}, \quad X_k(r_2) \equiv \lambda_{k2}, \dots, \quad X_k(r_q) \equiv \lambda_{kq}, \quad k = 1, 2, \dots, q,$$

verbunden sind.

Die allgemeine Lösung des Systems (19) ist so:

$$(22) \quad \begin{aligned} \eta_1 &= r_1 + \theta_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-q}), \\ \eta_2 &= r_2 + \theta_2(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-q}), \\ &\dots \\ \eta_q &= r_q + \theta_q(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-q}), \end{aligned}$$

$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ -willkürliche Funktionen der Argumente.

Das System von Beziehungen (5) nennen wir vollständig, wenn auch einer von den Koeffizienten  $\lambda_{kj}$  von der Null verschieden ist, und homogen, wenn alle Koeffizienten  $\lambda_{kj}$ , gleich Null sind.

Das vollständige System (5) hat die partiellen Lösungen:

$$(23) \quad Y(f) = r_1 X_1(f), \quad Y(f) = r_2 X_2(f), \dots, \quad Y(f) = r_q X_q(f).$$

Indem wir in dem vollständigen Systeme (5) die Transformation:

$$(24) \quad Y(f) = \sum_{j=1}^q r_j X_j(f) + Z(f),$$

$$(25) \quad Z(f) = \sum_{\nu=1}^n z_\nu \frac{\partial f}{\partial x_\nu} = z_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + z_q \frac{\partial f}{\partial x_q} + z_{q+1} \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \dots + z_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

$$(26) \quad z_j = \eta_j - r_j = \theta_j(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-q}), \quad j = 1, 2, \dots, q,$$

$$(27) \quad z_i = \eta_i - \sum_{j=1}^q r_j \xi_i^j, \quad i = q + 1, \dots, n,$$

(\*) Vollständigen der Bedingungen (14) zufolge.



$$(33) \quad U_\tau(f) = \frac{\partial f}{\partial x_\tau} + \sum_{i=q+1}^n \xi_i^\tau \frac{\partial f}{\partial x_i} + Z(\xi_{q+1}^\tau) \frac{\partial f}{\partial z_{q+1}} + \dots$$

$$\dots + Z(\xi_n^\tau) \frac{\partial f}{\partial z_n} \equiv X_\tau(f) + \sum_{i=q+1}^n Z(\xi_i^\tau) \frac{\partial f}{\partial z_i} = 0.$$

Da

$$(34) \quad U_\sigma(\xi_i^\tau) = X_\sigma(\xi_i^\tau) \quad \text{und} \quad U_\tau(\xi_i^\sigma) = X_\tau(\xi_i^\sigma),$$

so ist:

$$(35) \quad U_\sigma(\xi_i^\tau) \equiv U_\tau(\xi_i^\sigma),$$

$$\sigma, \tau = 1, 2, \dots, q; \quad \sigma \neq \tau, \quad i = q+1, \dots, n.$$

Der Identität:

$$(36) \quad X_\sigma(\xi_i^\tau) \equiv X_\tau(\xi_i^\sigma),$$

$$\frac{\partial(\xi_i^\tau)}{\partial x_\sigma} + \sum_{\rho=q+1}^n \xi_\rho^\sigma \frac{\partial(\xi_i^\tau)}{\partial x_\rho} \equiv \frac{\partial(\xi_i^\tau)}{\partial x_\tau} + \sum_{\rho=q+1}^n \xi_\rho^\tau \frac{\partial(\xi_i^\sigma)}{\partial x_\rho},$$

$$(37) \quad \frac{\partial^2(\xi_i^\tau)}{\partial x_\nu \partial x_\sigma} + \sum_{\rho=q+1}^n \left[ \frac{\partial(\xi_\rho^\sigma)}{\partial x_\nu} \frac{\partial(\xi_i^\tau)}{\partial x_\rho} + \xi_\rho^\sigma \frac{\partial^2(\xi_i^\tau)}{\partial x_\nu \partial x_\rho} \right] \equiv$$

$$\equiv \frac{\partial^2(\xi_i^\sigma)}{\partial x_\nu \partial x_\tau} + \sum_{\rho=q+1}^n \left[ \frac{\partial(\xi_\rho^\tau)}{\partial x_\nu} \frac{\partial(\xi_i^\sigma)}{\partial x_\rho} + \xi_\rho^\tau \frac{\partial^2(\xi_i^\sigma)}{\partial x_\nu \partial x_\rho} \right] \quad \nu = 1, 2, \dots, n,$$

zufolge sind die Ausdrücke:

$$(38) \quad U_\sigma Z(\xi_i^\tau) = U_\sigma \left[ \sum_{\nu=1}^n z_\nu \frac{\partial(\xi_i^\tau)}{\partial x_\nu} \right] = \sum_{\nu=1}^n z_\nu \left\{ X_\sigma \left[ \frac{\partial(\xi_i^\tau)}{\partial x_\nu} \right] + \sum_{\rho=q+1}^n \frac{\partial(\xi_\rho^\sigma)}{\partial x_\nu} \frac{\partial(\xi_i^\tau)}{\partial x_\rho} \right\} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^n z_\nu \left\{ \frac{\partial^2(\xi_i^\tau)}{\partial x_\nu \partial x_\sigma} + \sum_{\rho=q+1}^n \left[ \xi_\rho^\sigma \frac{\partial^2(\xi_i^\tau)}{\partial x_\nu \partial x_\rho} + \frac{\partial(\xi_\rho^\sigma)}{\partial x_\nu} \frac{\partial(\xi_i^\tau)}{\partial x_\rho} \right] \right\}$$

und:

$$(39) \quad U_\tau Z(\xi_i^\sigma) = U_\tau \left[ \sum_{\nu=1}^n z_\nu \frac{\partial(\xi_i^\sigma)}{\partial x_\nu} \right] = \sum_{\nu=1}^n z_\nu \left\{ X_\tau \left[ \frac{\partial(\xi_i^\sigma)}{\partial x_\nu} \right] + \sum_{\rho=q+1}^n \frac{\partial(\xi_\rho^\tau)}{\partial x_\nu} \frac{\partial(\xi_i^\sigma)}{\partial x_\rho} \right\} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^n z_\nu \left\{ \frac{\partial^2(\xi_i^\sigma)}{\partial x_\nu \partial x_\tau} + \sum_{\rho=q+1}^n \left[ \xi_\rho^\tau \frac{\partial^2(\xi_i^\sigma)}{\partial x_\nu \partial x_\rho} + \frac{\partial(\xi_\rho^\tau)}{\partial x_\nu} \frac{\partial(\xi_i^\sigma)}{\partial x_\rho} \right] \right\}$$

gleich:

$$(40) \quad U_\sigma Z(\xi_i^\tau) \equiv U_\tau Z(\xi_i^\sigma),$$

$$\sigma, \tau = 1, 2, \dots, q; \quad \sigma \neq \tau, \quad i = q+1, \dots, n.$$

Die ersten  $q$  Beziehungen (18):

$$(41) \quad z_1 = \psi_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}),$$

$$\dots \dots \dots$$

$$z_q = \psi_q(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-q}),$$

sind den Beziehungen (22) äquivalent.





Diese Bedeutung wird den Klammern in weiterer Schrift angegeben. Indem wir die Bezeichnungen:

$$(50) \quad [Z(\xi_i^j)] = \sum_{\nu=1}^q z_\nu \left[ \frac{\partial \xi_i^j}{\partial x_\nu} \right] + \sum_{\rho=q+1}^n [z_\rho] \left[ \frac{\partial \xi_i^j}{\partial x_\rho} \right] = e_{ij},$$

$$= n(z_1, \dots, z_q, [z_{q+1}], \dots, [z_n], x_1, \dots, x_q, c_1, \dots, c_{n-q}),$$

$$j = 1, 2, \dots, q; \quad i = q + 1, \dots, n;$$

$$(51) \quad \left[ \frac{\partial \xi_i^j}{\partial x_\nu} \right] = a_{ij\nu} = \omega_{ij\nu}(x_1, \dots, x_q, c_1, \dots, c_{n-q}),$$

$$(52) \quad \left[ \frac{\partial \xi_i^j}{\partial x_\rho} \right] = b_{ij\rho} = \tilde{\omega}_{ij\rho}(x_1, x_2, \dots, x_q, c_1, c_2, \dots, c_{n-q}),$$

$$(53) \quad \sum_{\nu=1}^q z_\nu \left[ \frac{\partial \xi_i^j}{\partial x_\nu} \right] = \sum_{\nu=1}^q a_{ij\nu} z_\nu = a_{ij} = \omega_{ij}(z_1, z_2, \dots, z_q, x_1, x_2, \dots, x_q, c_1, c_2, \dots, c_{n-q}),$$

$$(54) \quad \sum_{\rho=q+1}^n [z_\rho] \left[ \frac{\partial \xi_i^j}{\partial x_\rho} \right] = \sum_{\rho=q+1}^n b_{ij\rho} [z_\rho] = b_{ij} = \tilde{\omega}_{ij}([z_{q+1}], [z_{q+2}], \dots, [z_n], x_1, x_2, \dots, x_q, c_1, c_2, \dots, c_{n-q}),$$

$$j = 1, 2, \dots, q; \quad i = q + 1, \dots, n; \quad \rho = q + 1, \dots, n; \quad \nu = 1, 2, \dots, q;$$

$$e_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$$

$$(55) \quad = \sum_{\rho=q+1}^n b_{ij\rho} [z_\rho] + a_{ij}$$

$$= \sum_{\rho=q+1}^n b_{ij\rho} [z_\rho] + \sum_{\nu=1}^q a_{ij\nu} z_\nu,$$

$$j = 1, 2, \dots, q; \quad i = q + 1, \dots, n,$$

eingeführt, wird das System (47), (48) folgendermassen überschrieben:

$$(56) \quad dz_1 = 0, \quad dz_2 = 0, \dots, \quad dz_q = 0;$$

$$d[z_{q+1}] = e_{q+1,1} dx_1 + e_{q+1,2} dx_2 + \dots + e_{q+1,q} dx_q,$$

$$(57) \quad d[z_{q+2}] = e_{q+2,1} dx_1 + e_{q+2,2} dx_2 + \dots + e_{q+2,q} dx_q,$$

. . . . .

$$d[z_n] = e_{n,1} dx_1 + e_{n,2} dx_2 + \dots + e_{n,q} dx_q,$$

oder:

$$(58) \quad dz_1 = 0, \quad dz_2 = 0, \dots, \quad dz_q = 0;$$

$$d[z_{q+1}] = \sum_{j=1}^q \left\{ \sum_{\rho=q+1}^n b_{q+1,j\rho} [z_\rho] + \sum_{\nu=1}^q a_{q+1,j\nu} z_\nu \right\} dx_j,$$

$$(59) \quad d[z_{q+2}] = \sum_{j=1}^q \left\{ \sum_{\rho=q+1}^n b_{q+2,j\rho} [z_\rho] + \sum_{\nu=1}^q a_{q+2,j\nu} z_\nu \right\} dx_j,$$

. . . . .

$$d[z_n] = \sum_{j=1}^q \left\{ \sum_{\rho=q+1}^n b_{nj\rho} [z_\rho] + \sum_{\nu=1}^q a_{nj\nu} z_\nu \right\} dx_j.$$

In dem System (56), (57)-(58), (59):

$$(60) \quad z_1 = K_1 = \text{const.}, \quad z_2 = K_2 = \text{const.}, \dots, \quad z_q = K_q = \text{const.}$$

Bezeichnen wir die Integrationskonstanten des Systems (56), (57)-(58), (59) durch:

$$(61) \quad K_1, K_2, \dots, K_n.$$

Sie sind die Funktionen von Konstanten:

$$(62) \quad c_1, c_2, \dots, c_{n-q}.$$

Um das allgemeine Integral des Systems (30) und folglich, auch des Systems (9) aus dem allgemeinen Integrale des Systems (56), (57)-(58), (59) zu erhalten, ist es in dem letzten die Konstanten (61) durch die Ausdrücke (18) zu ersetzen.

Wenn man beachtet, dass für die beliebige Funktion  $w$  der unabhängigen Veränderlichen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  die Identität:

$$(63) \quad d[w] = \sum_{j=1}^q \left\{ \frac{\partial w}{\partial x_j} \right\} + \sum_{i=q+1}^n [\xi_i^j] \left\{ \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\} dx_j = \sum_{j=1}^q [X_j(w)] dx_j$$

statt findet, so kommt man leicht zum Schlusse, dass den partiellen Lösungen (29) des Systems von homogener Beziehungen (28) die partiellen Lösungen:

$$(64_1) \quad z_1 = 1, z_2 = 0, \dots, z_v = 0, \dots, z_q = 0, [z_{q+1}] = [\xi_{q+1}^1], \dots, [z_n] = [\xi_n^1];$$

. . . . .

$$(64_2) \quad z_1 = 0, z_2 = 0, \dots, z_v = 1, \dots, z_q = 0, [z_{q+1}] = [\xi_{q+1}^v], \dots, [z_n] = [\xi_n^v];$$

. . . . .

$$(64_q) \quad z_1 = 0, z_2 = 0, \dots, z_v = 0, \dots, z_q = 1, [z_{q+1}] = [\xi_{q+1}^q], \dots, [z_n] = [\xi_n^q],$$

des Systems (58), (59) entsprechen; nicht aber des Systems (59) bei

$$z_1 = K_1 = \text{const.}, z_2 = K_2 = \text{const.}, \dots, z_q = K_q = \text{const.}$$

Unter den Lösungen (64) nehmen wir die Lösung (64<sub>v</sub>). Sie verwandelt die Gleichungen (58) in Identitäten; wenn aber sie in die Gleichungen (59) eingestellt wird, so erhält man die Beziehungen:

$$(65) \quad \begin{aligned} d[\xi_{q+1}^v] &= \sum_{j=1}^q \left\{ \sum_{\rho=q+1}^n [\xi_\rho^v] \left[ \frac{\partial \xi_{q+1}^j}{\partial x_\rho} \right] + \left[ \frac{\partial \xi_{q+1}^j}{\partial x_v} \right] \right\} dx_j = \sum_{j=1}^q [X_v(\xi_{q+1}^j)] dx_j, \\ d[\xi_{q+2}^v] &= \sum_{j=1}^q \left\{ \sum_{\rho=q+1}^n [\xi_\rho^v] \left[ \frac{\partial \xi_{q+2}^j}{\partial x_\rho} \right] + \left[ \frac{\partial \xi_{q+2}^j}{\partial x_v} \right] \right\} dx_j = \sum_{j=1}^q [X_v(\xi_{q+2}^j)] dx_j, \\ &\dots \dots \dots \\ d[\xi_n^v] &= \sum_{j=1}^q \left\{ \sum_{\rho=q+1}^n [\xi_\rho^v] \left[ \frac{\partial \xi_n^j}{\partial x_\rho} \right] + \left[ \frac{\partial \xi_n^j}{\partial x_v} \right] \right\} dx_j = \sum_{j=1}^q [X_v(\xi_n^j)] dx_j, \end{aligned}$$

$v = 1, 2, \dots, q.$

Das System (1) ist ein Involutionssystem, deswegen:

$$(66) \quad \begin{aligned} X_\nu(\xi_{q+1}^j) &\equiv X_j(\xi_{q+1}^\nu), \\ X_\nu(\xi_{q+2}^j) &\equiv X_j(\xi_{q+2}^\nu), \\ &\dots \dots \dots \\ X_\nu(\xi_n^j) &\equiv X_j(\xi_n^\nu). \end{aligned}$$

Daher folgt, dass die Beziehungen (65) auch Identitäten sind:

$$(67) \quad \begin{aligned} d[\xi_{q+1}^\nu] &\equiv \sum_{j=1}^q [X_j(\xi_{q+1}^\nu)] dx_j, \\ d[\xi_{q+2}^\nu] &\equiv \sum_{j=1}^q [X_j(\xi_{q+2}^\nu)] dx_j, \\ &\dots \dots \dots \\ d[\xi_n^\nu] &\equiv \sum_{j=1}^q [X_j(\xi_n^\nu)] dx_j, \end{aligned} \quad \nu = 1, 2, \dots, q.$$

Das System (54) bei  $z_1 = K_1 = \text{const.}$ ,  $z_2 = K_2 = \text{const.}$ , ...  $z_q = K_q = \text{const.}$  nimmt die Gestalt an:

$$(68) \quad \begin{aligned} d[z_{q+1}] &= \sum_{j=1}^q \left\{ \sum_{\rho=q+1}^n b_{q+1, j\rho} [z_\rho] + \sum_{\nu=1}^q a_{q+1, j\nu} K_\nu \right\} dx_j, \\ d[z_{q+2}] &= \sum_{j=1}^q \left\{ \sum_{\rho=q+1}^n b_{q+2, j\rho} [z_\rho] + \sum_{\nu=1}^q a_{q+2, j\nu} K_\nu \right\} dx_j, \\ &\dots \dots \dots \\ d[\xi_n] &= \sum_{j=1}^q \left\{ \sum_{\rho=q+1}^n b_{nj\rho} [z_\rho] + \sum_{\nu=1}^q a_{nj\nu} K_\nu \right\} dx_j. \end{aligned}$$

Ihm gehört die partielle Lösung:

$$(69) \quad [z_{q+1}] = \sum_{\nu=1}^q K_\nu [\xi_{q+1}^\nu], [z_{q+2}] = \sum_{\nu=1}^q K_\nu [\xi_{q+2}^\nu], \dots [z_n] = \sum_{\nu=1}^q K_\nu [\xi_n^\nu].$$

Wirklich, das Resultat des Einsetzens der Ausdrücke (69) in das System (68) gibt die Beziehungen:

$$(70) \quad \begin{aligned} d \sum_{\nu=1}^q K_\nu [\xi_{q+1}^\nu] &= \sum_{j=1}^q \left\{ \sum_{\rho=q+1}^n \sum_{\nu=1}^q K_\nu [\xi_\rho^\nu] \left[ \frac{\partial \xi_{q+1}^j}{\partial x_\rho} \right] + \sum_{\nu=1}^q K_\nu \left[ \frac{\partial \xi_{q+1}^j}{\partial x_\nu} \right] \right\} dx_j, \\ d \sum_{\nu=1}^q K_\nu [\xi_{q+2}^\nu] &= \sum_{j=1}^q \left\{ \sum_{\rho=q+1}^n \sum_{\nu=1}^q K_\nu [\xi_\rho^\nu] \left[ \frac{\partial \xi_{q+2}^j}{\partial x_\rho} \right] + \sum_{\nu=1}^q K_\nu \left[ \frac{\partial \xi_{q+2}^j}{\partial x_\nu} \right] \right\} dx_j, \\ &\dots \dots \dots \\ d \sum_{\nu=1}^q K_\nu [\xi_n^\nu] &= \sum_{j=1}^q \left\{ \sum_{\rho=q+1}^n \sum_{\nu=1}^q K_\nu [\xi_\rho^\nu] \left[ \frac{\partial \xi_n^j}{\partial x_\rho} \right] + \sum_{\nu=1}^q K_\nu \left[ \frac{\partial \xi_n^j}{\partial x_\nu} \right] \right\} dx_j. \end{aligned}$$



Die allgemeinen Integrale der Systeme (30), (9) nehmen die Gestalt an:

$$\begin{aligned}
 z_1 &= \psi_1, \\
 &\dots \\
 z_q &= \psi_q, \\
 z_{q+1} &= \sum_{\nu=1}^q \psi_\nu \xi_{q+1}^\nu + \psi_{q+1} \gamma_{q+1}^{q+1} + \dots + \psi_n \gamma_{q+1}^n, \\
 &\dots \\
 z_n &= \sum_{\nu=1}^q \psi_\nu \xi_n^\nu + \psi_{q+1} \gamma_n^{q+1} + \dots + \psi_n \gamma_n^n;
 \end{aligned}
 \tag{76}$$

$$\begin{aligned}
 \eta_1 &= r_1 + \psi_1, \\
 &\dots \\
 \eta_q &= r_q + \psi_q, \\
 \eta_{q+1} &= \sum_{j=1}^q r_j \xi_{q+1}^j + \sum_{\nu=1}^q \psi_\nu \xi_{q+1}^\nu + \psi_{q+1} \gamma_{q+1}^{q+1} + \dots + \psi_n \gamma_{q+1}^n, \\
 &\dots \\
 \eta_n &= \sum_{j=1}^q r_j \xi_n^j + \sum_{\nu=1}^q \psi_\nu \xi_n^\nu + \psi_{q+1} \gamma_n^{q+1} + \dots + \psi_n \gamma_n^n.
 \end{aligned}
 \tag{77}$$

Daraus rückt die Form des allgemeinen Operators des Systems (1):

$$\begin{aligned}
 Y(f) &= (r_1 + \psi_1)X_1(f) + \dots + (r_q + \psi_q)X_q(f) + \\
 &\quad + \psi_{q+1}Y_{q+1}(f) + \dots + \psi_n Y_n(f) \\
 &= \sum_{i=q+1}^n \psi_i Y_i(f) + \rho_1 X_1(f) + \dots + \rho_q X_q(f).
 \end{aligned}
 \tag{78}$$

wo:

$$\begin{aligned}
 Y_{q+1}(f) &= \gamma_{q+1}^{q+1} \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \dots + \gamma_n^{q+1} \frac{\partial f}{\partial x_n}, \\
 &\dots \\
 Y_n(f) &= \gamma_{q+1}^n \frac{\partial f}{\partial x_{q+1}} + \dots + \gamma_n^n \frac{\partial f}{\partial x_n}
 \end{aligned}
 \tag{79}$$

die partiellen Operatoren des Systems (1) sind, welche unter sich und mit den trivialen Operatoren  $X_1(f), \dots, X_q(f)$  unabhängig sind;  $\rho_1, \dots, \rho_q$  sind die willkürlichen Funktionen der unabhängigen Veränderlichen.

Es versteht sich von selbst, dass der Charakter des Resultats sich nicht ändern wird, wenn anstatt des Involutionssystems (1) ein beliebiges vollständiges System genommen wäre.

Es muss interessant sein eine praktische Methode der Konstruktion des allgemeinen Operators (78) des Systems (1) zu geben.



Auf Grund der Formeln (88), (89) kommen wir zum Schlusse, dass das System der Gleichungen:

$$(90) \quad X_\sigma(f) = \frac{1}{\omega} K_\sigma(f) = 0, \quad Y_\tau(f) = \frac{1}{\omega} L_\tau(f) = 0,$$

$\sigma$  — beliebige Zahl der Reihe 1, 2, ... q,  
 $\tau$  — » » » » 1, 2, ... (n - q)

ein Involutionssystem ist <sup>(8)</sup>:

$$(91) \quad X_\sigma Y_\tau(f) - Y_\tau X_\sigma(f) \equiv 0.$$

Die infinitesimalen Transformationen:

$$(92) \quad Y_\tau(f) = \frac{1}{\omega} L_\tau(f), \quad \tau = 1, 2, \dots (n - q)$$

sind die Operatoren des Systems (1). Sie sind unabhängig unter sich und mit den trivialen Operatoren:

$$(93) \quad X_\sigma(f) = \frac{1}{\omega} K_\sigma(f), \quad \sigma = 1, 2, \dots q.$$

In dieser Weise hat der allgemeine Operator des Systems (1) die Ansicht:

$$(94) \quad Y(f) = \sum_{\tau=1}^{n-q} \psi_\tau Y_\tau(f) + \sum \rho_\sigma X_\sigma(f) \\ = \frac{1}{\omega} \left\{ \sum_{\tau=1}^{n-q} \psi_\tau L_\tau(f) + \sum_{\sigma=1}^q \rho_\sigma K_\sigma(f) \right\},$$

$\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-q}$  sind die willkürlichen Funktionen der Integrale (2),  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$  sind die willkürlichen Funktionen der unabhängigen Veränderlichen.

---

<sup>(8)</sup> G. PFEIFFER, *Théorèmes expliquant une série de questions dans le problème de la permutation des solutions d'une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre* (« Comptes rendus de l'Académie des Sciences de l'U. R. S. S. », 1929, pp. 177-182); *Sur la permutation des intégrales d'une équation linéaire homogène aux dérivées partielles du premier ordre* (« Ann. de Toulouse », s. 3, t. XXIII, 1931, pp. 139-181).





# Le dilatazioni nello spazio delle serie di potenze.

Nota di S. PINCHERLE (a Bologna).

**Sunto.** - *Nello spazio lineare, ad infinite dimensioni, avente per base le potenze intere di una variabile si considera un gruppo di operatori, semplici omografie di questo spazio, e se ne studiano le principali proprietà.*

1. Con  $S_x$  verrà indicato l'insieme, o spazio, degli elementi costituiti dalle combinazioni lineari a coefficienti costanti delle potenze  $1, x, x^2, \dots x^n, \dots$  di una variabile  $x$  generalmente complessa. Questo spazio è lineare, ad una infinità numerabile di dimensioni: esso comprende i polinomi interi e le serie di potenze della variabile  $x$ , elementi che si possono considerare come vettori del detto spazio e pei quali si prescinde da considerazioni di convergenza finchè esse non siano esplicitamente enunciate.

2. Data una successione  $(a_n)$  di numeri reali o complessi  $a_0, a_1, a_2, \dots a_n, \dots$  l'operatore distributivo (lineare)  $A$  definito in  $S_x$  dalla trasformazione

$$(1) \quad A(x^n) = a_n x^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

è un'omografia dello spazio cui si darà il nome di *dilatazione*; la successione  $(a_n)$  ne dà i *coefficienti*.

L'insieme degli operatori così definiti gode delle seguenti proprietà:

*a)* La somma di due operatori dell'insieme, di coefficienti  $(a_n)$  e  $(b_n)$  rispettivamente, dà un operatore dello stesso insieme, di coefficienti  $(a_n + b_n)$ .

*b)* Il prodotto di due operatori, di coefficienti  $(a_n)$  e  $(b_n)$ , dà un operatore dell'insieme, di coefficienti  $(a_n b_n)$ . Ne risulta che l'insieme degli operatori (1) costituisce un gruppo infinito, permutabile.

Secondo una denominazione in uso nell'algebra moderna, gli operatori (1) costituiscono un *anello permutabile*; in esso esistono divisori dello zero, come mostra, ad esempio, il prodotto dei due operatori aventi rispettivamente per coefficienti le successioni  $1, 0, 1, 0, \dots$  e  $0, 1, 0, 1, \dots$ .

3. Se alcuni fra i numeri della successione  $(a_n)$  sono nulli, se è cioè  $a_{r_1} = a_{r_2} = a_{r_3} = \dots = 0$ , l'operatore  $A$ , applicato agli elementi di  $S_x$  della forma

$$c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2} + c_3 x^{r_3} + \dots$$

darà come risultato lo zero: un tale elemento è *radice* di  $A$ .

L'operatore fa corrispondere, in tale ipotesi, allo spazio  $S_x$  lo spazio che se ne deduce sopprimendone lo spazio parziale avente per base  $x^{r_1}, x^{r_2}, x^{r_3}, \dots$

4. Applicando uno qualunque dei noti metodi che valgono ad ottenere le trasformazioni infinitesime di un gruppo, si trova senza difficoltà che la trasformazione infinitesima  $X$  del gruppo (1) è definita da

$$(2) \quad X(x^n) = nx^n;$$

se dunque  $D$  è il simbolo ordinario di derivazione, la trasformazione in discorso è data da

$$X(\varphi) = xD\varphi$$

per ogni elemento  $\varphi$  di  $S_x$ . Per l'iterata *r<sup>esima</sup>* di  $X$ , si ha

$$(3) \quad X^r(\Sigma a_n x^n) = \Sigma a_n n^r x^n.$$

Fra queste iterate e la successione dei prodotti  $xD, x^2D^2, \dots, x^nD^n$  passa una relazione assai semplice; si ha infatti

$$(4) \quad X^m(x^n) = n^m x^n, \quad x^m D^m = n_m x^n,$$

dove si è posto  $n_m$  ad indicare il prodotto  $n(n-1) \dots (n-m+1)$ ; ora, fra  $n^m$  ed  $n_m$  passa la nota relazione

$$(5) \quad n_m = n^m + c_{m,m-1} n^{m-1} + c_{m,m-2} n^{m-2} + \dots + c_{m,1} n,$$

dove le  $c_{i,j}$  sono i cosiddetti *coefficienti di fattoriali*, soddisfacenti alla relazione ricorrente

$$c_{n+1,n} = -nc_{m,n} + c_{n,n-1},$$

coi valori iniziali  $c_{1,1} = 1, c_{2,1} = -1$ ; mentre le (5) si invertono mediante la relazione

$$(6) \quad n^m = n_m + g_{m,m-1} n_{m-1} + g_{m,m-2} n_{m-2} + \dots + g_{m,1} n,$$

dove la ricorrenza delle  $g_{i,j}$  è espressa da

$$g_{m+1,n} = ng_{m,n} + g_{m,n-1},$$

coi valori iniziali  $g_{1,1} = 1, g_{2,1} = 1$ . Tenendo conto delle (5) e (6), si ottiene

senz'altro dalle (4)

$$(7) \quad X^m = x^m D^m + g_{m,m-1} x^{m-1} D^{m-1} + g_{m,m-2} x^{m-2} D^{m-2} + \dots + g_{m,1} x D$$

e inversamente

$$(8) \quad x^m D^m = X^m + c_{m,m-1} X^{m-1} + c_{m,m-2} X^{m-2} + \dots + c_{m,1} X \quad (1).$$

In relazione con questa osservazione, si ha

$$x^m D^m = X(X-1)(X-2)\dots(X-m+1),$$

formula notata da BOOLE quasi un secolo fa <sup>(2)</sup>.

5. Ogni dilatazione è permutabile con  $X$ ; reciprocamente, ogni operatore lineare in  $S_x$ , permutabile con  $X$ , è una dilatazione. Infatti, sia  $P$  un tale operatore, per il quale venga ammesso soltanto che trasforma  $x^n$  in una funzione  $\alpha_n(x)$  derivabile. Essendo  $PX = XP$ , viene, applicando ad  $x^n$ ,

$$P(nx^n) = x D\alpha_n(x)$$

onde, le  $c_n$  essendo costante,

$$\frac{d\alpha_n}{dx} : \alpha_n = \frac{n}{x}, \quad \log \alpha_n = \log x^n + \log c_n$$

e quindi

$$P(x^n) = \alpha_n(x) = c_n x^n;$$

l'operatore  $P$  è dunque una dilatazione.

6. Fra gli operatori lineari applicabili allo spazio  $S_x$ , è indubbiamente il più semplice quello dato dalla moltiplicazione per  $x$ . Dato un altro  $A$  fra quelli operatori, il suo scarto dall'operazione di moltiplicazione, espresso da

$$(9) \quad A'(\varphi) = A(x\varphi) - xA(\varphi)$$

è stato detto da tempo <sup>(3)</sup> *derivata funzionale* di  $A$ , e analogamente si diranno *derivate funzionali seconda, terza, ecc.*, gli scarti successivi:

$$(10) \quad A''(\varphi) = A(x^2\varphi) - 2xA(x\varphi) + x^2A(\varphi), \dots, A^{(m)}(\varphi) = A(x^m\varphi) - mxA(x^{m-1}\varphi) + \\ + \binom{m}{2}x^2A(x^{m-2}\varphi) - \dots + (-1)^m x^m A(\varphi).$$

(1) Un primo studio sui coefficienti di fattoriali è dovuto a SCHLAEFLI (« Crelle », T. XLIII, pag. 1, 1852). Su questi coefficienti v. anche L. GALVANI, « Periodico di Matematica », S. III, T. IX (1912); S. PINCHERLE, « Annali di Matematica », S. IV, T. VII (1929); « Bollett. dell'Unione Matematica Italiana », T. X (1932); « Rendic. Lincei », S. VI, T. XVIII (1933).

(2) Nella « Philosophical Transactions », del 1844.

(3) V. in « Math. Annalen », T. XLIX (1897), il *Mémoire sur le Calcul fonctionnel distributif*, pag. 352.

Queste, applicate al caso di  $\varphi = x^n$ , ed usando il solito simbolo  $\Delta$  ad indicare la differenza finita, danno, per la (1):

$$(11) \quad A'(x^n) = \Delta a_n \cdot x^{n+1}, \quad A''(x^n) = \Delta^2 a_n \cdot x^{n+2}, \dots, \quad A^{(m)}(x^n) = \Delta^m a_0 \cdot x^{n+m}.$$

7. Dalle (10) si deduce facilmente

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} A(\varphi) = A(\varphi), \quad A(x\varphi) = xA(\varphi) + A'(\varphi), \quad A(x^2\varphi) = x^2A(\varphi) + 2xA'(\varphi) + A''(\varphi), \dots \\ \dots, \quad A(x^n\varphi) = x^nA(\varphi) + nx^{n-1}A'(\varphi) + \binom{n}{2}x^{n-2}A''(\varphi) + \dots + A^{(n)}(\varphi). \end{array} \right.$$

Essendo  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$  un elemento di  $S_x$ , si moltiplichino le (12) per  $c_0, c_1, c_2, \dots$  e si sommi; indicando con  $f', f'', \dots$  le derivate successive di  $f(x)$ , e sottintese, come si è detto, le condizioni di convergenza, si ottiene lo sviluppo

$$(13) \quad A(f\varphi) = A(\varphi)f(x) + A'(\varphi)f'(x) + \frac{1}{2!}A''(\varphi)f''(x) + \dots + \frac{1}{n!}A^{(n)}(\varphi)f^{(n)}(x) + \dots$$

al quale si può dare il nome di « sviluppo funzionale di TAYLOR ».

Assumendo come elemento  $\varphi(x)$  l'unità, e notando che dalla (11) si ha

$$A(1) = a_0, \quad A'(1) = \Delta a_0 \cdot x, \quad A''(1) = \Delta^2 a_0 \cdot x^2, \dots, \quad A^{(m)}(1) = \Delta^m a_0 \cdot x^m, \dots$$

la (13) diviene

$$(14) \quad A(f(x)) = a_0 f(x) + \Delta a_0 \cdot x Df + \frac{1}{2!} \Delta^2 a_0 \cdot x^2 D^2 f + \dots + \frac{1}{n!} \Delta^n a_0 \cdot x^n D^n f + \dots$$

8. Se nella formola (14) poniamo  $f(x) = x^s$ , essa dà:

$$(15) \quad A(x^s) = x^s \left( a_0 + \Delta a_0 \cdot s + \Delta^2 a_0 \cdot \binom{s}{2} + \dots + \Delta^n a_0 \cdot \binom{s}{n} + \dots \right).$$

Ora, la parentesi del secondo membro non è altro che la formola di interpolazione di NEWTON applicata alla successione  $(a_n)$ ; ammessa la convergenza, l'operatore  $A$  viene così extrapolato ad uno spazio lineare ad una infinità di dimensioni, generato dalle  $x^s$  per i valori di  $s$  reali o complessi che rendono la detta parentesi convergente. Indicandone la somma con  $a_s$ , la  $A$  viene definita in questo nuovo spazio della relazione della forma (1) generalizzata:

$$A(x^s) = a_s x^s.$$

9. È da notare l'extrapolazione data dalla (14) allo spazio lineare  $\mathcal{L}$  la cui base è data da  $\log^m x$ , ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ). Osservando infatti che

$$\begin{aligned} x D \log^m x &= m \log^{m-1} x, \quad x^2 D^2 \log^m x = m(m-1) \log^{m-2} x, \dots \\ \dots, \quad x^m D^m \log^m x &= m!, \quad x^n D^n \log^m x = 0 \quad \text{per } n > m, \end{aligned}$$

si vede che nello spazio  $\mathcal{L}$  l'operatore  $A$  si riduce alla omografia espressa da

$$(16) \quad A(\log^m x) = a_0 \log^m x + m\Delta a_0 \cdot \log^{m-1} x + m(m-1)\Delta^2 a_0 \cdot \log^{m-2} x + \dots \\ \dots + m! \Delta^m a_0.$$

10. Si aggiungano alcune considerazioni relative alla validità effettiva degli sviluppi che sono trattati nei n.<sup>i</sup> precedenti in modo puramente formale. Applicando la (14) alla funzione  $\frac{1}{1-x}$  e le (1) al suo sviluppo in serie geometrica, si ottiene

$$(17) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n a_0 \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}},$$

eguaglianza detta di EULER-LINDELÖF: essa vale effettivamente, se  $r$  è il raggio di convergenza della serie  $\sum \Delta^n a_0 \cdot t^n$ , per  $x$  interno al cerchio con centro nell'origine e tangente alla circonferenza di Apollonio  $|x|:|1-x|=r$ , internamente per  $r < 1$ , esternamente per  $r > 1$ : per  $r = 1$ , la circonferenza si riduce all'asse del segmento  $0 \dots 1$ . In particolare, se la successione  $\Delta^n a_0$  è ologene <sup>(4)</sup>, l'uguaglianza (17) vale per tutti i valori di  $x$  diversi dall'unità; la  $\sum a_n x^n$  è cioè una funzione quasi-intera col solo punto singolare  $x = 1$ .

11. Sia  $f(x)$  una funzione analitica regolare entro un campo  $C$  contenente il punto  $x = 0$ ; sia  $\gamma$  il contorno di  $C$ ; sia  $\delta(x)$  la minima distanza di un punto  $x$  interno a  $C$  dal contorno  $\gamma$ . Si consideri poi il campo  $C_1$  limitato da un contorno  $\gamma_1$  omotetico a  $\gamma$  col centro di omotetia in  $x = 0$ , interno a  $C$  e prossimo a  $\gamma$  quanto si vuole; sia  $\delta_1(x) < \delta(x)$  la minima distanza di  $x$  da  $\gamma_1$ ; sia infine  $m$  il massimo valore assoluto di  $f(x)$  entro  $C_1$ . La serie  $\sum \frac{1}{n!} t^n f^{(n)}(x)$  essendo convergente per  $|t| < \delta(x)$ , verrà

$$\frac{1}{n!} |f^{(n)}(x)| < \frac{m}{\delta_1^n(x)},$$

e quindi, per la (14), sarà

$$|A(f)| \leq m \sum_{n=0}^{\infty} \Delta^n a_0 \frac{|x|^n}{\delta_1^n(x)}.$$

Se la serie di potenze  $\sum \Delta^n a_0 \cdot z^n$  ammette un raggio  $r$  non nullo di convergenza, la  $A(f)$  rappresenterà dunque una funzione analitica regolare per

(4) Una successione  $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$  è detta ologene quando la serie di potenze  $\sum c_n x^n$  è una funzione trascendente intera.

i valori di  $x$  soddisfacenti alla condizione

$$|x| : \delta_1(x) < r,$$

e quindi in un campo  $C_2$  interno a  $C$  e tanto più ristretto quanto più  $r$  è piccolo. Nel caso in cui la successione  $\Delta^n a_0$  è ologene, il rapporto  $|x| : \delta_1(x)$  può essere arbitrariamente grande, cioè  $x$  arbitrariamente vicino a  $\gamma_1$  e quindi a  $\gamma$ : la  $A(f)$  ammette dunque lo stesso campo di validità  $C$  della  $f(x)$ . Onde « l'essere la  $\Delta^n a_0$  ologene, o ciò che è lo stesso, l'essere la  $\Sigma a_n x^n$  « quasi-intera col punto singolare  $x=1$ , è condizione sufficiente perchè  $f(x)$  « ed  $A(f)$  abbiano in  $S_x$  lo stesso campo di validità ».

« La medesima condizione è anche necessaria ». Infatti, se  $f(x)$  ed  $A(f)$  hanno in  $S_x$  lo stesso campo di validità, ciò accadrà in particolare prendendo  $f(x)$  uguale ad  $\frac{1}{1-x}$  e quindi per  $\Sigma \Delta^n a_0 \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$ , in virtù delle (14); quest'ultima serie dovrà dunque avere l'unico punto singolare  $x=1$ , e quindi  $\Delta^n a_0$  sarà ologene.

# Déformation d'une congruence rectiligne avec conservation des surfaces réglées principales.

Par M. SERGE ROSSINSKI (Moscou-U.R.S.S.).

---

## PRÉFACE

Les premières recherches sur la déformation des congruences rectilignes, commencées par BELTRAMI et RIBAUCCOUR, développées ensuite dans les beaux travaux de LUIGI BIANCHI, GUICHARD et d'autres géomètres, ont été, dans ces dernières années, prolongées avec succès par M. M. FINIKOFF <sup>(1)</sup>, VINCENSINI <sup>(2)</sup> et VASSEUR <sup>(3)</sup>.

Dans le présent Mémoire nous donnons la solution du problème suivant.

*Une congruence rectiligne (C) a ses rayons orthogonaux aux plans tangents d'une surface (S), chacun étant invariablement lié au plan tangent correspondant de la surface: pour quelles surfaces (S) les surfaces réglées principales de (C) restent-elles invariables, (S) se déformant soit avec un réseau conjugué persistant, soit d'une façon continue tout à fait arbitraire?*

Le cas banal des surfaces développables étant rejeté, on trouve qu'au cours de la déformation avec réseau conjugué persistant (§ 2) (S) doit être une surface moulure arbitraire, tandis que la congruence correspondante (C) est une congruence de normales (§ 2, n.º 3).

Une autre solution est donnée par une surface minima arbitraire; c'est une solution banale, car dans ce cas (C) se réduit à une congruence isotrope, ayant, comme il est connu, ses surfaces réglées principales indéterminées (§ 2, n.º 2).

---

<sup>(1)</sup> *Déformation d'une congruence rectiligne avec développables persistantes*, (« Bulletin des Sciences Mathématiques », t. 53, 1929), pp. 341-360.

<sup>(2)</sup> M. VINCENSINI a publié dans ce dernier temps une série de Mémoires concernant la déformation de congruences; en particulier citons les suivants: « Bulletin des Sciences Mathématiques », (2), t. 53, 1929, pp. 77-96; *ibid.*, t. 54, 1930, p. 117; « Bulletin de la Société Mathém. de France », t. 59, 1931, pp. 211-228; « Annales de Toulouse », (3), t. XXIV, 1932, pp. 49-66.

<sup>(3)</sup> « Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris », t. 191, 1930, p. 819.

Ensuite on peut signaler un cas particulier du cas précédent de surfaces moulures; dans ce cas,  $(S)$  est une surface de révolution arbitraire et le rayon de la congruence  $(C)$  de normales perce le plan tangent de la surface  $(S)$  au centre de courbure géodésique du parallèle correspondant (§ 2, n.º 4).

Enfin, considérant (§ 3) dans ce problème une déformation arbitraire de la surface  $(S)$ , on n'arrive qu'au cas banal des surfaces développables.

Les résultats de ce travail ont été publiés dans une Note parue aux « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences de Paris » (t. 200, 1935, pp. 515-516, séance de II février).

§ 1. Formules fondamentales. — Soit  $\vec{\rho}(u, v)$  le vecteur définissant une surface  $(S)$  invariablement liée à une congruence rectiligne  $(C)$  dont les rayons sont orthogonaux aux plans tangents de  $(S)$ ; soient, ensuite,  $\vec{n}(u, v)$  le vecteur unitaire de la normale de la surface  $(S)$  et  $\vec{\rho}_1(u, v)$  le vecteur définissant le pied du rayon de la congruence  $(C)$ , sur le plan tangent de  $(S)$ . Le vecteur  $\vec{\rho}_1(u, v)$  a pour expression

$$(1) \quad \vec{\rho}_1(u, v) = \vec{\rho}(u, v) + \xi(u, v) \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial u} + \eta(u, v) \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial v}$$

$\xi(u, v)$  et  $\eta(u, v)$  étant deux fonctions données de  $u$  et de  $v$ . Soient

$$\begin{aligned} ds^2 &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ -d\vec{\rho} \cdot d\vec{n} &= Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2 \end{aligned}$$

l'élément linéaire et la seconde forme quadratique de la surface  $(S)$ , puis

$$(2) \quad E_0 = \left( \frac{\partial \vec{n}}{\partial u} \right)^2, \quad F_0 = \frac{\partial \vec{n}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{n}}{\partial v}, \quad G_0 = \left( \frac{\partial \vec{n}}{\partial v} \right)^2$$

$$(3) \quad e = \frac{\partial \vec{n}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{\rho}_1}{\partial u}, \quad f = \frac{\partial \vec{n}}{\partial u} \cdot \frac{\partial \vec{\rho}_1}{\partial v}, \quad f' = \frac{\partial \vec{n}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{\rho}_1}{\partial u}, \quad g = \frac{\partial \vec{n}}{\partial v} \cdot \frac{\partial \vec{\rho}_1}{\partial v}$$

les coefficients des première et seconde formes quadratiques de Kummer pour la congruence  $(C)$ .

Posant, maintenant, pour abrégier

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha = \frac{FD' - GD}{H^2}, & \beta = \frac{FD - ED}{H^2}, \\ \alpha' = \frac{FD'' - GD'}{H^2}, & \beta' = \frac{FD - ED''}{H^2}, \end{cases} \quad (H^2 = EG - F^2)$$

nous avons

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial u} = \alpha \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial u} + \beta \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial v}, \quad \frac{\partial \vec{n}}{\partial v} = \alpha' \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial u} + \beta' \frac{\partial \vec{\rho}}{\partial v}.$$



Alors les coefficients (2) prennent la forme :

$$(5) \quad \begin{cases} E_0 = \alpha^2 E + 2\alpha\beta F + \beta^2 G \\ F_0 = \alpha\alpha' E + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)F + \beta\beta' G \\ G_0 = \alpha'^2 E + 2\alpha'\beta' F + \beta'^2 G. \end{cases}$$

Posant, ensuite,

$$(6) \quad \begin{cases} e_1 = E \left[ 1 + \frac{\partial \xi}{\partial u} + \xi \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix} \right] + F \left[ \frac{\partial \eta}{\partial u} + \xi \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{pmatrix} \right] \\ e_2 = F \left[ 1 + \frac{\partial \xi}{\partial u} + \xi \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{pmatrix} \right] + G \left[ \frac{\partial \eta}{\partial u} + \xi \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{pmatrix} \right] \end{cases}$$

nous trouvons pour les coefficients (3) de la seconde forme de Kummer les expressions suivantes

$$(7) \quad \begin{cases} e = \alpha e_1 + \beta e_2, & f = \alpha g_1 + \beta g_2 \\ f' = \alpha' e_2 + \beta' e_2, & g = \alpha' g_1 + \beta' g_2, \end{cases}$$

$g_2$  et  $g_1$  se déduisant de  $e_1$  et  $e_2$  respectivement par substitution  $(u, v)$ ,  $(E, G)$ ,  $(\xi, \eta)$ . Nous savons, enfin, que les surfaces réglées principales de la congruence (C) sont définies par l'équation

$$(8) \quad [(f + f')E_0 - 2eF_0]du^2 + 2(gE_0 - eG_0)dudv + [2gF_0 - (f + f')G_0]dv^2 = 0.$$

## § 2. Déformation de la surface (S) avec réseau conjugué persistant. —

I. - Rapportons la surface (S) à un réseau conjugué  $(u, v)$ ; autrement dit, supposons  $D' = 0$ .

Introduisant dans l'équation (8) les expressions (5) et (7) des coefficients de Kummer, puis, remplaçant dans ces coefficients  $\alpha, \beta, \alpha'$  et  $\beta'$  par leurs valeurs (4), nous trouvons, après réductions évidentes, l'équation suivante des surfaces réglées principales de (C):

$$\begin{aligned} & D^2[GD(Fg_2 - Gg_1) + D''(2F^2e_2 - EGe_2 - FGe_1)]du^2 + \\ & + 2DD''[GD(Fg_1 - Eg_2) - ED''(Fe_2 - Ge_1)]dudv - \\ & - D''^2[ED''(Fe_1 - Ee_2) + D(2F^2g_1 - EGg_1 - FEg_2)]dv^2 = 0. \end{aligned}$$

En tenant compte de l'équation de GAUSS

$$K = \frac{DD''}{H^2}$$

éliminons le coefficient  $D''$ ; on trouve finalement:

$$(A) \quad \begin{cases} D^2[G(Fg_2 - Gg_1)du^2] + \\ + D^2KH^2[(2F^2e_2 - EGe_2 - FGe_1)du^2 + 2G(Fg_1 - Eg_2)dudv] = \\ = (KH^2)^2[E(Fe_1 - Ee_2)dv^2] + \\ + D^2(KH^2)^2[(2F^2g_1 - EGg_1 - FEg_2)dv^2 + 2E(Fe_2 - Ge_1)dudv]. \end{cases}$$

Supposons maintenant que la surface  $(S)$  se déforme avec conservation du réseau conjugué  $(u, v)$  et que la congruence  $(C)$  invariablement liée aux plans tangents de  $(S)$  conserve les-mêmes surfaces réglées principales au cours de cette déformation. Il faut et il suffit pour cela que les équations suivantes aient lieu :

$$(9) \quad \begin{cases} G(Fg_2 - Gg_1)du^2 = 0 \\ KH^2[(2F^2e_2 - EGe_2 - FGe_1)du^2 + 2G(Fg_1 - Eg_2)dudv] = 0 \\ KH^2[E(Fe_1 - Ee_2)dv^2] = 0 \\ KH^2[(2F^2g_1 - EGg_1 - FEg_2)dv^2 + 2E(Fe_2 - Ge_1)dudv] = 0. \end{cases}$$

Rejetons dans tout ce qui suit le cas des surfaces développables  $(S)$  [ $K=0$ ] comme cas depourvu d'intérêt.

II. - En considérant les équations (9), nous voyons que deux cas seulement sont possibles :

PREMIER CAS. — Les coefficients de  $du^2$ ,  $dudv$  et  $dv^2$  dans toutes les équations (9) s'annulent simultanément. L'équation (8) étant indéterminée, la congruence  $(C)$  appartient à la classe des congruences isotropes. En supposant  $E=0$ ,  $G=0$ , nous tirons des équations (9) la conséquence

$$e_2 = 0, \quad g_1 = 0$$

c'est-à-dire précisément les mêmes équations que dans le problème sur la déformation d'une congruence isotrope à base principale <sup>(4)</sup>.

Par conséquent,  $(S)$  étant une surface minima et  $(C)$  étant une congruence isotrope dont les rayons sont orthogonaux aux plans tangents de  $(S)$ , le problème posé n'admet dans ce cas qu'une solution banale.

Toutes les autres hypothèses qui se présentent dans le cas considéré d'une congruence isotrope conduisent aux surfaces développables  $(S)$  ou bien sont impossibles.

Pour tout ce qui concerne les détails du calcul, nous renverrons le lecteur au paragraphe 3 de notre Mémoire cité plus haut :

DEUXIÈME CAS. — Les coefficients de  $du^2$ ,  $dudv$  et  $dv^2$  dans les équations (9) n'étant pas nuls simultanément, trois de ces équations doivent ou bien disparaître identiquement ou bien être des conséquences de la qua-

<sup>(4)</sup> Voir ma Note: *Sur un cas de déformation des congruences isotropes à réseau conjugué persistant*, (« Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris », t. 197, séance du 18 décembre 1933, pp. 1562-1565), ou le Mémoire détaillé: *Sur un cas de déformation des congruences isotropes et sur une transformation des surfaces minima qui s'y rattache*, (à paraître aux « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo » en 1935).

trième; cette dernière représente alors les surfaces réglées principales de la congruence (C).

Écartons le cas des surfaces réglées principales confondues; il ne peut donner que des congruences dégénérées <sup>(5)</sup>. Par suite dans tout ce qui suit nous aurons

$$(10) \quad G(Fg_2 - Gg_1) = 0, \quad E(Fe_1 - Ee_2) = 0,$$

de sorte que les équations (9) se réduisent à deux.

III. - Considérons d'abord le cas où l'une des deux équations (9) restantes est une conséquence de l'autre. Nous devons ajouter alors aux équations (10) les deux suivantes:

$$(11) \quad 2F^2e_2 - EGe_2 - FGe_1 = 0, \quad 2F^2g_1 - EGg_1 - FEg_2 = 0.$$

L'hypothèse  $E = 0, G = 0$  conduit au cas déjà indiqué d'une surface minima (S).

Supposons maintenant  $E \neq 0, G \neq 0$ ; les équations (10) et (11) se réduisent au système

$$(12) \quad e_2 = 0, \quad g_1 = 0, \quad Fe_1 = 0, \quad Fg_2 = 0.$$

$F$  n'étant pas nul, les conditions d'intégrabilité du système  $e_1 = 0, e_2 = 0, g_1 = 0, g_2 = 0$  entraînent  $K = 0$ , donc (S) est une surface développable; c'est un cas privé d'intérêt <sup>(6)</sup>.

Considérons maintenant le système (12) en supposant  $F = 0$ .

Dans ce cas la base principale de la surface (S) est composée de *lignes de courbure*.

Le problème de la déformation continue d'une surface avec conservation des lignes de courbure a été abordé pour la première fois par CODAZZI <sup>(7)</sup> en 1856 et, ensuite, complètement résolu par OSSIAN BONNET dans son Mémoire célèbre, publié en 1867 <sup>(8)</sup>. Il a trouvé qu'il n'y a que les surfaces

<sup>(5)</sup> En effet, si l'équation des surfaces réglées principales (8) se réduit à la forme  $du^2 = 0$ , on a

$$\frac{g}{G_0} = \frac{e}{E_0}, \quad \frac{g}{G_0} = \frac{f + f'}{2F_0}, \quad \frac{f + f'}{2F_0} \neq \frac{e}{E_0}$$

d'où  $g = 0, G_0 = \left(\frac{\partial \vec{n}}{\partial v}\right)^2 = 0$ , c'est-à-dire  $\vec{n} = \vec{n}(u)$  et, par suite, les rayons de la congruence sont ordonnés suivant les génératrices rectilignes de  $\infty^4$  cylindres.

<sup>(6)</sup> Pour les détails du calcul, voir mon Mémoire précédemment cité.

<sup>(7)</sup> CODAZZI, *Intorno alle superficie le quali deformatosi ritengono le stesse linee di curvatura*, (« Annali di Tortolini », t. VII, 1856, p. 410).

<sup>(8)</sup> BONNET, *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surfaces donnée*, (« Journal de l'École Polytechnique », t. XXV, cahier 42, 1867, pp. 58-65).

mouleurs de Monge qui se déforment avec conservation des lignes de courbure; c'est en 1862 que BOUR a indiqué la déformation de ces surfaces <sup>(9)</sup>.

Par conséquent, dans le cas considéré, la surface (S) doit être *une surface moulure arbitraire*.

Quant à la congruence (C), c'est *une congruence de normales*, car en vertu des formules (4) et (7) on trouve aisément  $f = f' = 0$ .

Sur le plan tangent de la surface (S), le pied du rayon de (C) est déterminé par les équations  $e_2 = 0$ ,  $g_1 = 0$ , avec deux fonctions arbitraires des arguments  $u$  et  $v$  respectivement. En effet, rapportant la surface moulure (S) à ses lignes de courbure, prenons les équations de (S) sous la forme

$$(13) \quad \begin{cases} x = aU \cos \frac{v}{a} + \int V \sin \frac{v}{a} dv \\ y = aU \sin \frac{v}{a} - \int V \cos \frac{v}{a} dv \\ z = \int \sqrt{1 - a^2 U'^2} du, \end{cases}$$

$a$  étant le paramètre de déformation; l'élément linéaire de la surface (S) a la forme <sup>(10)</sup>

$$(14) \quad ds^2 = du^2 + (U - V)^2 dv^2,$$

$U(u)$ ,  $V(v)$  désignant deux fonctions arbitraires des arguments  $u$  ou  $v$ . Ensuite, les équation  $e_2 = 0$ ,  $g_1 = 0$ , après un calcul simple, prennent la forme

$$(U - V)^2 \frac{\partial \eta}{\partial u} + \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial u} [(U - V)^2 \eta] = \frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

En éliminant  $\xi$ , nous trouvons

$$\frac{\partial}{\partial u} [(U - V)\eta] = 0$$

et, par suite, en intégrant, on obtient

$$(15) \quad \eta = \frac{V_1'}{U - V}, \quad \left( V_1' = \frac{dv}{dV_1} \right)$$

<sup>(9)</sup> BOUR, *Théorie de la déformation des surfaces*, (« Journal de l'École Polytechnique », t. XXII, cahier 39, 1862, p. 89).

<sup>(10)</sup> DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, t. I, deuxième édition, 1914, p. 144.

$V_1$  étant une fonction arbitraire de  $v$ . Alors

$$\frac{\partial \xi}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} [(U - V)V_1] = U'V_1'$$

(16)  $\xi = U'V_1 + U_1,$

$U_1$  étant une fonction arbitraire par rapport à  $u$ . Les formules (15) et (16) définissent, sur le plan tangent de la surface (13), le pied du rayon de la congruence (C).

REMARQUE. — M. VASSEUR <sup>(14)</sup> a montré que (C) étant une congruence de normales, dont les rayons sont orthogonaux aux plans tangents d'une surface (S) et invariablement liés à cette surface, elle reste une congruence de normales pour toutes les surfaces (S), qui se déforment avec réseau conjugué persistant.

On voit d'ailleurs que, si l'on ajoute aux conditions du problème de M. VASSEUR la conservation des surfaces réglées principales de (C), la surface (S) se réduit à une surface mouleure.

En effet, (C) étant une congruence de normales, on a

$$f = f'$$

ou bien, en tenant compte des égalités

$$D' = 0, \quad DD' = KH^2,$$

on a

$$D^2(Fg_2 - Gg_1) = KH^2(Fe_1 - Ee_2)$$

et, par suite, (C) restant une congruence de normales au cours de la déformation de (S) à base principale, on trouve

$$Fg_2 - Gg_1 = 0, \quad Fe_1 - Ee_2 = 0$$

et par suite, puisque le cas  $E=0, G=0$  est exclu, on retrouve les équations (10).

IV. — Supposons maintenant que, sur l'une des deux équations (9) restantes, une disparaisse identiquement. Dans ce cas il faut ajouter aux équations (10), par exemple, les deux suivantes

$$2F^2e_2 - EGe_2 - FGe_1 = 0, \quad G(Fg_1 - Eg_2) = 0.$$

Parmi les cas qui se présentent ici il faut surtout signaler celui où l'on a

(17)  $F = 0, \quad e_2 = 0, \quad g_1 = 0, \quad g_2 = 0.$

<sup>(14)</sup> VASSEUR, *Sur la déformation des congruences de normales*. (« Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris », t. 191, 1930. p. 819).

C'est un cas particulier de celui du n.º 3; néanmoins sa considération n'est pas privée d'intérêt.

La surface ( $S$ ) appartenant à la classe de surfaces moulures, soient (13) ses équations et, par conséquent, (14) son élément linéaire. Posons, pour abrégier,  $U - V = W$ .

Les conditions (17) conduisent au système:

$$(18) \quad W \frac{\partial \eta}{\partial u} + \eta U' = 0$$

$$(19) \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} - \eta W U' = 0$$

$$(20) \quad 1 + \frac{\partial \eta}{\partial v} + \frac{\xi U' - \eta V'}{W} = 0.$$

Les équations (18) et (19) nous donnent

$$(21) \quad \frac{\partial \xi}{\partial v} + W^2 \frac{\partial \eta}{\partial u} = 0$$

$$(22) \quad \frac{\partial}{\partial u} [\eta W^2] = \frac{\partial \xi}{\partial v}.$$

Introduisons une fonction auxiliaire  $\varphi$  de la manière suivante

$$(23) \quad \xi = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$

$$(24) \quad \eta = \frac{1}{W^2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Les équations (20) et (21) prennent maintenant la forme

$$(25) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial v^2} = -W U' \frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{V'}{W} \frac{\partial \varphi}{\partial v} - W^2$$

$$(26) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v} = \frac{U'}{W} \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

En dérivant (25) par rapport à  $u$  et (26) par rapport à  $v$  et comparant les résultats, on obtient

$$(27) \quad U'' \frac{\partial \varphi}{\partial u} + U' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} + U' = 0$$

En dérivant, ensuite, (27) par rapport à  $v$  et (26) par rapport à  $u$  et éliminant les dérivées  $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial u^2 \partial v}$  et  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}$ , nous arrivons à l'égalité

$$(28) \quad U' U'' \frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0.$$

Considérons d'abord le cas où l'on a  $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$ . Dans ce cas, les équations (23) et (24) donnent  $\xi = \frac{d\varphi}{du}$ ,  $\eta = 0$ . Les équations (21) et (22) étant vérifiées pour ces valeurs de  $\xi$  et  $\eta$ , l'équation (20) nous donne

$$\xi U' + U = V$$

d'où,  $\xi$  étant fonction de  $u$  seulement, il suit

$$\xi U' + U = \text{const.} = c, \quad V = c;$$

ainsi, nous avons

$$(29) \quad \xi = \frac{c - U}{U'}, \quad \eta = 0.$$

L'élément linéaire (14) de la surface (S) ayant la forme

$$ds^2 = du^2 + (U - c)^2 dv^2$$

(S) doit être une surface de révolution arbitraire.

La formule (29) montre que  $\xi$  coïncide avec le rayon de courbure géodésique du parallèle  $u = \text{const.}$  de la surface (S).

Par conséquent le rayon de la congruence de normales (C) perce le plan tangent de la surface (S) au centre de courbure géodésique du parallèle correspondant.

Un point parcourant le parallèle de la surface (S), le rayon correspondant de la congruence (C) décrit un cône, ayant son sommet sur l'axe de révolution de (S).

L'équation des surfaces développables de la congruence (C), qui se confondent dans le cas considéré avec les surfaces réglées principales de (C), étant  $dudv = 0$ , ces surfaces se réduisent aux cônes, dont les sommets se trouvent sur l'axe de révolution de (S) et aux plans passant l'axe de révolution.

Soit maintenant  $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$  différent de zéro. Alors l'équation (28) donne  $U'' = 0$  et, par suite,

$$U = bu + c.$$

L'élément linéaire (14) prend la forme

$$ds^2 = du^2 + (bu + c - V)^2 dv^2$$

et réduit (S) à une surface développable.

Enfin le cas  $U' = 0$  est un cas particulier de celui considéré tout à l'heure ( $b = 0$ ).

§ 3. **Cas d'une déformation arbitraire de la surface (S).** — La conservation des surfaces réglées principales de la congruence (C), dont les rayons sont orthogonaux aux plans tangents correspondents de la surface (S) au cours d'une déformation continue arbitraire de (S) n'est possible que dans le cas banal des surfaces développables (S). Ce cas étant privé d'intérêt, il suffit d'indiquer brièvement le calcul.

Portant dans l'équation (8) les valeurs (5) et (7) des coefficients de Kummer, remplaçant, ensuite,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha'$  et  $\beta'$  par leurs valeurs (4), nous éliminons, en tenant compte de l'équation de GAUSS

$$KH^2 = DD'' - D'^2,$$

le coefficient  $D''$  de l'équation obtenue. Ainsi nous trouvons une équation (A) analogue à celle du paragraphe 2.

Si l'on exige que cette équation (A) soit indépendante de la déformation arbitraire de la surface (S), on obtient une série de conditions analogues aux conditions (9), mais l'on n'arrive qu'au cas banal des surfaces développables (S).



## INDICE DEL TOMO XIV DELLA SERIE 4<sup>a</sup>

---

G. SCORZA: Sulle algebre pseudonulle di ordine massimo . . . . .	pag. 1
V. BERNSTEIN: Rettifica alla Memoria: « Sulle direzioni di Borel di funzioni olo- morfe » . . . . .	» 15
A. ROSENBLATT: Sull'equazione biarmonica non lineare a due variabili indipen- denti in un'area generale semplicemente connessa . . . . .	» 17
V. GIULOTTO: Funzioni di Bessel del campo poliarmonico . . . . .	» 41
N. NERONOFF: Sur la loi de l'attraction . . . . .	» 75
T. VIOLA: Su una rappresentazione piana dei complessi lineari . . . . .	» 99
T. UNO: Sur les singularités des équations différentielles dans le problème des trois corps . . . . .	» 111
L. SOBRERO: La riflessione analitica delle funzioni biarmoniche attorno a un cerchio ed alcuni problemi di elasticità piana . . . . .	» 139
M. MANARINI: Sugli spazi di Weyl. . . . .	» 149
W. J. TRJITZINSKY: Linear difference equations containing a parameter . . . . .	» 181
M. CIBRARIO: Il problema di Dirichlet in domini infiniti e le equazioni del se- condo tipo misto ellittico-paraboliche . . . . .	» 215
T. VIOLA: Sui sistemi lineari, a tre e a quattro dimensioni, di complessi lineari . . . . .	» 249
C. MINEO: Sulla geometria d'una superficie poco differente da un ellissoide con applicazione al caso della Terra . . . . .	» 255
V. NIEMYTZKI: Ueber vollständig unstabile dynamische Systeme . . . . .	» 275
L. TOSCANO: Operatori lineari e numeri di Stirling generalizzati . . . . .	» 287
R. OBLÁTH: Ueber Primzahlen in aufeinander folgenden Intervallen . . . . .	» 299
N. SPAMPINATO: Sulla rappresentazione delle funzioni di variabile bicomplessa totalmente derivabili . . . . .	» 305
G. PFEIFFER: Die Konstruktion des allgemeinen Operators des Involutionssystems von homogenen linearen partiellen Differentialgleichungen . . . . .	» 327
S. PINCHERLE: Le dilatazioni nello spazio delle serie di potenze . . . . .	» 343
S. ROSSINSKI: Déformation d'une congruence rectiligne avec conservation des sur- faces réglées principales . . . . .	» 349
<i>Indice</i> . . . . .	» 359

---