RECUEIL DES PIECES QUI ONT REMPORTÉ LES PRIX DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

Depuis leur fondation.

TOME SEPTIEME.

Qui contient une partie des Pieces de 1751, 1752, 1753, 1759, 1760 & 1761.

A PARIS,

Chez PANCKOUCKE, rue & à côté de la Comédie Françoise.

M. DCC. LXIX.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

AVERTISSEMENT,

Au ſujet des Pièces qui compoſent ce Volume & de celles qui ont été réſervées pour le Volume ſuivant.

LE ſixieme Volume de ce Recueil parut en 1752, & il contenoit cinq Pieces : ſçavoir, celles des années 1745 & 1747, ſur la meilleure maniere de trouver l'heure en Mer. Depuis 1748 juſqu'à 1761 incluſivement, il y a 14 années dont nous allons parcourir la ſuite en peu de mots, pour que le Lecteur connoiſſe mieux la liaiſon des Pièces qu'on lui préſente avec celles qui ont déja été publiées.

En 1748 l'Académie adjugea le Prix à la Pièce de M. EULER ſur les Inégalités du mouvement de Saturne & de Jupiter. Elle fut imprimée en 1749, & quelquefois elle ſe trouve reliée à la fin du ſixieme Volume, elle eſt même indiquée dans le titre général ; quoi qu'il en ſoit elle ſe trouve chez Delatour, Libraire, rue ſaint Jacques, vis-à-vis la rue des Mathurins. Cette Pièce étoit deſtinée à commencer le ſeptieme Volume du Recueil ; mais le Privilége ayant paſſé ſucceſſivement entre les mains de pluſieurs Libraires, cette Pièce eſt reſtée avec les précédentes dans le fond de Librairie de M. Delatour.

En 1749 il n'y eut point de Prix d'adjugé, il fut remis à 1751.

En 1750 il fut également remis.

En 1751 le ſujet du Prix étoit la nature & la cauſe des Courans. M. BERNOULLI le remporta, & ſa Pièce eſt la premiere de ce ſeptieme Volume.

En 1752 il s'agiſſoit de déterminer les Inégalités de Saturne & de Jupiter ; la Pièce de M. EULER eſt la ſeconde de ce ſeptieme Volume. Celle du P. BOSCOVICH, qui eut l'*Acceſſit*, & qui avoit été deſtinée à l'impreſſion, ayant été publiée par l'Auteur à Rome en 1756, ne ſera point imprimée dans ce Recueil.

En 1753 on demandoit la maniere la plus avantageuſe de ſuppléer à l'action du vent ſur les grands Vaiſſeaux. La Pièce de M. BERNOULLI, qui remporta le Prix, eſt la troiſieme de ce Volume. Celles de M. EULER & de M. MATHON DE LA COUR, qui furent également deſtinées à l'impreſſion, ne ſont point encore imprimées.

AVERTISSEMENT.

En 1754 le Prix ne fut point adjugé.

Pour 1755 l'Académie avoit proposé la maniere de diminuer le plus qu'il est possible le Roulis & le Tangage d'un navire ; la Pièce de M. CHAUCHOT, qui fut couronnée, fut imprimée à Paris chez Delatour, où elle se vend séparément, elle ne fera point partie de ce Volume.

Pour 1756, le sujet étoit la Théorie des inégalités que les Planetes peuvent causer au mouvement de la Terre ; la Pièce de M. EULER obtint le Prix, mais elle ne sera point dans ce Volume.

Pour 1757, l'Académie avoit proposé de nouveau la question du Roulis, & du Tangage des navires, le Prix fut adjugé à M. BERNOULLI ; mais sa Pièce n'est pas encore imprimée.

Pour 1758, il s'agissoit de la nature des Atmosphères des Planetes. La Pièce du P. FRISI, qui obtint le Prix, a été imprimée séparément en Italie, & ne fera point partie de ce Recueil.

Pour 1759, le sujet étoit : l'examen des efforts qu'ont à soutenir toutes les *parties d'un Vaisseau dans le Roulis & dans le Tangage, & la meilleure maniere de procurer à leur assemblage la solidité nécessaire pour résister à ces efforts* ; le Prix fut partagé entre deux Pièces, l'une de M. EULER, l'autre de M. GROIGNARD. La premiere n'est point encore imprimée ; la seconde, qui fut imprimée dès lors, pour l'utilité des Constructeurs, est la quatrieme Pièce de ce Volume.

Pour 1760, l'Académie proposa d'examiner *S'il y avoit de l'altération dans le moyen mouvement des Planètes*, la Pièce de M. Charles EULER, qui eut le Prix, & celle du P. FRISI, qui eut l'*Accessit*, ne sont point encore imprimées.

La même année un Citoyen zélé ayant proposé un Prix extraordinaire sur la perfection des Verreries, l'Académie l'adjugea à une Pièce de M. d'ANTIC ; elle fut imprimée la même année, c'est la cinquieme de ce Volume.

Pour 1761, l'on proposa pour sujet, *la meilleure maniere de lester & d'arrimer un Vaisseau.* Le prix fut partagé entre les deux Pièces de M. Jean-Albert EULER & de M. l'Abbé BOSSUT ; elles formènt la sixieme & la septieme de ce Volume.

On voit par le détail précédent que sept Pièces détachées qui ont été imprimées en divers temps, se sont trouvées suffisantes pour former un septieme Volume de ce Recueil. Dans ces circonstances on a mieux aimé le publier dès-à-présent pour satisfaire le desir des Savans, que d'attendre l'impression d'un huitieme Volume, qui eût été nécessaire pour pouvoir observer l'ordre chronologique dans l'arrangement de ces Mémoires.

SUR LA NATURE

ET LA CAUSE

DES COURANS,

ET LA MEILLEURE MANIÉRE DE LES DÉTERMINER.

Pièce qui a remporté le Prix double, proposé par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, pour les années 1749 & 1751.

PAR M. DANIEL BERNOULLY, *Associé étranger de l'*ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, *Membre des Académies de Petersbourg & de Boulogne, &c. Professeur d'Anatomie & de Botanique à Basle.*

MÉMOIRE
SUR
LA NATURE
ET LA CAUSE DES COURANS;
ET LA MEILLEURE MANIERE DE LES OBSERVER ET DE LES DÉTERMINER.

agit tranquilla poteſtas
Quod violenta nequit.

PREMIÉRE PARTIE.

Sur la nature & la cauſe des courans.

I.

LA queſtion que l'Académie Royale des Sciences avoit propoſée pour le Prix de l'année 1749 me parut d'abord d'une nature à n'admettre que des ſolutions ou trop faciles à voir pour de certains cas particuliers, ou trop imparfaites hors de ces cas. Il s'agiſſoit de la meilleure manière d'obſerver & de déterminer les courans ſur mer, queſtion extrêmement importante pour la navigation. Il peut arriver que cette queſtion n'ait pas plus de difficulté que celle de déterminer le mouvement des eaux ſur une grande rivière navigable : mais hors de ces cas, ou d'autres ſemblables, on tombe facilement dans le préjugé, qu'il n'eſt pas plus poſſible de ſatisfaire au problême, que s'il s'agiſſoit d'obſerver le ſillage du vaiſſeau à fond de cale, ſans avoir la moindre communication avec rien qui environne le vaiſſeau, ou d'obſerver le mouvement de la terre par des obſervations purement méchaniques, faites ſur des objets terreſtres. L'Académie m'a tiré de ce préjugé par l'addition qu'elle a faite à ſon problême ; ſes vûes ſont toujours tournées du côté de la manière d'obſerver les courans ; mais elle demande encore une théorie bien fondée ſur la nature & la cauſe des courans. Comme cette ſeconde queſtion, purement théorique, n'eſt pas de la nature de celles que l'Académie a coutume de propoſer pour le ſecond Prix, il m'eſt venu l'idée que cette illuſtre ſociété, à la pénétration de laquelle rien ne ſçauroit échapper, ne demandoit cette théorie que comme un moyen pour parvenir à la ſolution de ſa première queſtion principale : j'ai vû auſſitôt qu'il falloit s'appliquer à déterminer les courans par eux-mêmes, & que le plus ſouvent il ne reſtoit aucun autre moyen de le faire. J'ai donc examiné avec le plus grand ſoin, dont je ſuis encore capable, quelles pourroient être les cauſes des courans, quelle ſorte de mouvement en devroient prendre les eaux, quelles pourroient être les inégalités de ce mouvement par rapport aux différentes profondeurs des eaux, & enfin de quelle manière on pourroit mettre à profit ces inégalités pour en déterminer le mouvement qui ſe fait vers la ſurface de la mer. C'eſt là le plan de mes recherches ſur lequel je ſuis bien sûr de n'avoir aucun ſuffrage contre moi.

I I.

On diſtingue ordinairement les marées d'avec les courans, & c'eſt avec raiſon; on connoît parfaitement la cauſe des marées, mais on ne convient pas également ſur celle des courans. Il y a même des ſçavans du premier ordre, dont je reſpecte infiniment l'autorité & la pénétration, qui ne donnent qu'une ſeule & même cauſe aux marées & aux courans, en regardant ceux-ci ſimplement comme une ſuite des marées. J'examinerai ce ſentiment dans ſa place, cette diſtinction ne convient pas avec notre ſujet; & nous ferons mieux d'entendre par *courant* tout mouvement horiſontal & progreſſif des eaux de la mer, quelles que ſoient les variations de ce mouvement, ainſi nous n'excluons que le mouvement ondoyant des vagues.

I I I.

Il y a différentes eſpèces de courans, & chaque eſpèce paroît provenir d'une cauſe différente. L'expérience nous a appris qu'il y a des courans qui ſont à-peu-près toujours les mêmes, qu'il y en a d'autres qui changent de force & de direction de ſix en ſix mois & qui reprennent leur état au bout de chaque année, que d'autres ſe règlent ſur le mouvement de la lune, & enfin, qu'il y en a de tout-à-fait irréguliers. On voit auſſi qu'il peut arriver que deux ou pluſieurs de ces différentes eſpèces de courans concourent & ne forment en apparence qu'un ſeul & même courant, que j'appellerai *mixte :* enfin la théorie, que je me ſuis formée ſur les courans, m'a conduit elle-même à une diviſion d'une toute autre nature & très-eſſentielle, c'eſt celle de *courans ſimples & courans doubles* : j'appelle courant ſimple celui dont toutes les eaux, depuis la ſurface juſqu'au fond, ſont portées vers la même plage ; & courant double, quand les eaux ont un mouvement oppoſé ou preſque tel vers la ſurface & vers le fond. Après avoir vû par ma théorie la néceſſité des courans doubles dans pluſieurs cas, & ramaſſant enſuite toutes les obſervations que je trouvois dans les auteurs ſur cette matière, j'en ai trouvé un exemple dans *le Voyage autour du monde de Dampier*, auteur digne de foi, quoique beaucoup critiqué ſur d'autres matières ; nous devons cette obſervation à un haſard, j'eſpère qu'elles deviendront beaucoup moins rares à l'avenir. Je commencerai ces recherches par les courans conſtans.

I V.

Il me paroît natutel de dire que les courans, qui demeurent conſtamment les mêmes, ne peuvent être cauſés ni par la lune, ni par le ſoleil, car les grands changemens en déclinaiſon de ces deux aſtres ne manqueroient pas d'y produire des changemens ſenſibles dans leur direction & dans leur force, outre que cet effet des deux aſtres ne ſçauroit être expliqué, à mon avis, par les loix de la méchanique, comme je tâcherai de démontrer ci-deſſous ; toute la théorie des marées confirme cette remarque. Si nous renonçons donc à l'une & l'autre de ces deux cauſes, il ne nous reſte abſolument d'autre reſſource, que le mouvement journalier de la terre, puiſque ſans l'action du ſoleil, ſans celle de la lune & ſans le mouvement diurne de la terre, il eſt évident que les eaux de la mer demeureroient dans un entier équilibre & dans un repos parfait ; c'eſt apparemment cette raiſon qui a engagé pluſieurs Auteurs avant moi à attribuer les courans conſtans au mouvement journalier de la terre ; mais je ne ſçache perſonne qui en ait bien montré le méchaniſme : je tâcherai donc de l'expliquer le plus clairement qu'il me ſera poſſible.

V.

Considérons la terre comme un grand noyau solide & sphérique tout couvert d'eau à la hauteur de quelques centaines de toises, qui tourne autour de son axe en vingt-quatre heures de tems : on sçait que quand même l'eau n'auroit d'abord aucun mouvement, elle seroit peu à peu entraînée par le noyau tournant jusqu'à ce que tout le systême parvienne à son état de permanence. Mais c'est une question, si dans cet état de permanence toutes les couches d'eau feront leur révolution parfaitement dans le même tems que le noyau solide ? Je dis que cela arriveroit, si tout notre systême étoit dans un vuide parfait ; l'adhérence des fluides, quelque petite qu'elle soit, doit nécessairement produire cet effet, & toutes les expériences physiques le confirment. Ainsi nous ne voyons encore rien qui puisse occasionner aucun courant.

V I.

Examinons donc à présent l'effet de l'atmosphère qui environne la surface des eaux. Il est encore certain, par la raison que je viens d'alléguer, quelqu'étendue qu'on donne à l'atmosphère, & quelque diminution qu'on suppose dans ses densités, que toute sa masse doit parfaitement suivre le tournoyement du noyau de la terre, après que tout le sÿstême aura atteint son état de permanence, pourvû qu'on suppose que l'atmophère ne soit enveloppée par aucune autre matière, & que toute sa matière ne reçoive absolument aucune autre impression. Mais une telle condition est sans doute absurde, de quelque façon qu'on l'envisage, & il faudra nous transporter au-delà des limites de notre atmosphère. Nous dirons donc que l'atmosphère de la terre est d'une étendue infinie ou bornée ; au premier cas, qui d'ailleurs n'est pas soutenable, il est visible que la matière de l'atmosphère, à une certaine distance de la terre, sera plus maîtrisée par le soleil, de ſorte qu'elle ne pourra plus ſuivre librement le mouvement diurne de la terre, & cette concluſion ſuffit pour notre deſſein ; auſſi n'y aura-t-il perſonne qui croie qu'une telle atmoſphère d'une étendue comme infinie pût tourner toute entière en vingt-quatre heures de tems autour de l'axe de la terre. Mais ſi cette atmoſphère eſt bornée, perſonne ne croira non plus qu'il puiſſe règner un vuide parfait autour de cette atmoſphère, & la matière qui lui eſt contigue en retardera le mouvement ; ce retardement ſe communiquera de couche en couche depuis les limites juſqu'à la ſurface de la terre. Il paroît que c'eſt dans ce retardement de la matière qui environne les eaux de la terre que conſiſte le vent aliſé d'orient en occident ; du moins cette façon de l'expliquer eſt entièrement conforme aux loix de méchanique, & aux expériences phyſiques faites ſur des fluides, qu'on fait tourner en rond par le moyen d'un cylindre vertical, placé au milieu des fluides, & qu'on tourne autour de ſon axe : Les fluides perdent ſenſiblement de leur vîteſſe angulaire depuis le cylindre vers les bords du vaſe qui les renferme, où les fluides ſentent le même empêchement, que l'atmoſphère ſouffre par la matière qui l'environne ; mais ſi l'air eſt empêché ou retardé dans ſa rotation journalière, il faut que les eaux de la mer le ſoient auſſi, & dans le même ſens. C'eſt-là la cauſe du courant conſtant entièrement indépendant du ſoleil & de la lune ; ſuivant cette explication, le courant en queſtion doit ſe faire d'orient en occident, & il obſerve effectivement cette direction.

VII.

On auroit tort de regarder cette explication comme un de ces raiſonnemens vagues aſſez ordinaires aux phyſiciens, qu'un eſprit de préciſion voit être faux, & qu'il ne ſçauroit refuter parce qu'ils ſont trop vagues. M. d'Alembert, ce grand & illuſtre Géomètre, refute à la vérité expreſſément ce ſentiment dans ſa diſſertation ſur les vents, qui a remporté le prix de l'Académie de Berlin de 1746; mais il n'a pas fait attention que l'atmosphère ne sçauroit suivre avec une liberté entière le mouvement journalier de la terre dans ses limites. Il n'y a donc entre nous qu'une diversité d'hypothèse physique. Au reste, il s'en faut de beaucoup que nous connoissions assez la nature de l'adhérence des fluides, pour pouvoir déterminer géométriquement tous les effets qu'elle doit produire. Concevons un vase cylindrique vertical d'une grande hauteur, rempli d'un fluide, & au milieu de ce vase un cylindre solide, qui tourne uniformément autour de son axe; le fluide sera sans doute peu à peu entrainé par le cylindre, & bientôt il aura atteint son mouvement uniforme. Dans cet état, le fluide qui touche immédiatement le cylindre tourne avec la même vîtesse que la surface du cylindre, pendant que le fluide, qui touche immédiatement les bords du vase, demeure dans un entier repos: voilà comment les eaux, au fond de la mer, suivent parfaitement le noyau solide, & y demeurent dans un entier repos relatif; voilà aussi comment l'air, qui touche immédiatement la surface de la mer, suit parfaitement le mouvement de celle-ci; & enfin, comment on doit supposer que l'air perd tout son mouvement là où il touche immédiatement la matière, qui n'appartient plus au systême de la terre. On me dira, que j'eusse mieux fait de considérer une sphère tournante à la place d'un cylindre; on voit cependant que les premières conséquences que je viens de marquer sont les mêmes pour la sphère & pour le cylindre: & quand aux autres questions, que nous allons examiner, je ne les crois plus susceptibles d'aucune solution géométrique pour la sphère; je n'ai donc voulu considérer qu'un cylindre & examiner le mouvement de tout le fluide compris entre le cylindre & les bords du vase; M. Newton a déjà examiné cette question dans *ses princ. math. phil. Nat. au liv. 2. sect. 9 prop.* 51. & j'y renverrois simplement le lecteur, si je n'y avois remarqué une faute essentielle. Un si grand homme n'en sçauroit faire qui ne soit remarquée tôt ou tard. Voici la proposition dont il s'agit.

VIII.

Problême. Si un cylindre solide d'une hauteur infinie est tourné uniformément autour de son axe vertical dans un fluide, & que tout le mouvement soit réduit à son état permanent, trouver le mouvement de tout le fluide qui environne le cylindre.

Solution. Concevons une section horisontale de tout le systême; soit *ALF*, celle du cylindre, dont le centre est en *S*; qu'on tire ensuite la droite *SQ*, depuis le centre jusqu'au bord du vase, & qu'on prenne dans cette droite horisontale trois élémens égaux *gh*, *hl* & *lm*, qui marquent les épaisseurs des couches fluides concentriques : nous considérons chacune de ces couches élémentaires comme solide; en vertu de cette supposition chaque point d'une seule & même couche doit faire sa révolution dans un tems parfaitement égal. Pour voir que cette supposition est permise ici, il n'y a qu'à considérer les fluides comme un assemblage de particules solides extrêmement petites; mais cette considération même demande qu'on suppose les élémens *gh*, *hl* & *lm* constans, parce que le même fluide doit être supposé formé par des petites parties égales. Il est essentiel de faire cette remarque, parce que dans toute la solution analytique, il ne paroîtra aucun vestige où il soit fait mention de cette constante. On pourroit donc croire facilement que, dans l'application de notre solution, il est permis de choisir telle constante qu'on voudroit; cependant cela n'est pas, & chaque autre constante donneroit une autre solution finale. Je suis surpris que M. Newton, qui prend le même élément pour constant, n'ait pas fait la même remarque.

Là-dessus j'observe 1°. que l'action étant toujours égale à la réaction, l'adhérence mutuelle de deux couches contigues, de quelque nature qu'elle soit, exerce une force egale pour retarder la couche intérieure & pour accélérer la couche extérieure. 2°. Qu'une seule & même couche, telle que $h\,l$, soutient deux forces contraires, une intérieure en h qui tend à l'accélérer, & une extérieure en l qui tend à la retarder. 3°. Qu'à cause de l'état permanent ces deux forces doivent s'entre-détruire parfaitement. Tout cela jusqu'ici est parfaitement conforme aux remarques préliminaires de M. Newton : mais il a manqué, qu'on me permette de franchir le terme, dans l'application de la troisième remarque : pour y satisfaire, il fait la force en h égale à la force contraire en l : voici ses paroles : *Proinde ut orbis unusquisque in motu suo uniformiter perseveret, debent impressiones* (il entend par ce terme les forces de l'adhérence) *ex parte utraque sibi invicem æquari & fieri in regiones contrarias :* pendant qu'il devoit dire, *debent MOMENTA impressionum ex parte utraque sibi invicem æquari.* La correction est trop claire pour y insister.

Soit à présent $Sh=x$; $hl=dx$; la force de l'adhérence en $h=\phi$ & en $l=\phi+d\phi$; il faut que le produit de ϕ par x soit égal au produit de $\phi+d\phi$ par $x+dx$, ce qui donne ϕx égale à une constante, au lieu qu'en négligeant la considération de l'inégalité des léviers $S\,h$ & $S\,l$ on parvient à la fausse équation $\phi=$ const. Supposant ensuite une relation donnée entre ϕ & les vîtesses relatives élémentaires, cette relation donnera une équation entre les distances x & les vîtesses du fluide qui y répondent. *C.Q.F.J.*

I X.

Coroll. 1. S'il y avoit une seule couche qui pût tourner avec une liberté entière dans la couche voisine, il faudroit faire $\phi\,x=o$ ou $\phi=o$; cela demande que tout le systême du cylindre & du fluide jusqu'à la couche en question tourne comme un même corps solide, chaque point faisant sa révolution en temps égal, pendant que le reste de la masse fluide, au-delà de ladite couche, demeure dans un repos parfait.

X.

Coroll. 2. Si l'adhésion ϕ ne dépendoit aucunement de la vîtesse, il arriveroit toujours ce que je viens de dire ; c'est-à-dire, que là, où le *momentum* de l'adhérence seroit le plus petit, se termineroit la révolution, que toutes les couches au delà demeureroient en repos, & toutes les autres en deçà feroient leur révolution en même tems que le cylindre qu'on tourne ; cette remarque nous apprend ce qui arriveroit dans une suite de tuyaux ajustés & emboités l'un dans l'autre, dont on affermiroit l'extérieur pendant qu'on tourneroit l'intérieur sur son axe ; car comme on suppose ordinairement que le frottement des corps solides ne dépend point de leur vîtesse relatives, il n'arrivera pas toujours que tous les tuyaux soient entraînés ; quelques-uns des extérieurs pourront demeurer immobiles, & tous ceux qui seront mis en mouvement demeureront comme collés ensemble ; on voit aussi par la plus simple méchanique, que le dernier tuyau qui tourne sera toujours celui qui, avec son voisin, forme, non le moindre frottement, comme il s'ensuivroit de la solution de M. Newton, mais le moindre *momentum* de frottement.

X I.

Corrol. 3. Si au contraire on remplit un vase cylindrique d'un fluide, & si on y tourne sur son axe un cylindre solide, l'expérience nous apprend que tout le fluide se tourne en rond, & que les vîtesses angulaires du fluide diminuent depuis la surface du cylindre, vers les bords du vase ; c'est là une preuve que l'adhérence des fluides est d'une nature tout-à-fait différente de celle du frottement des corps solides, & qu'elle dépend du petit élément de vîteſſe relative, avec laquelle chaque couche eſt mûe ſur ſa voiſine. M. Newton ſuppoſe l'intenſité de l'adhérence proportionnelle à ladite vîteſſe relative élémentaire, & cette hypothèſe phyſique, de laquelle dépend la ſolution entière de notre queſtion, me paroît auſſi la plus vraiſemblable : Il ſemble effectivement que les parties d'un fluide, qui ſont obligées de ſe ſéparer, doivent être enviſagées comme attachées enſemble par des fils infiniment ſubtils qu'on déchire, & qu'ainſi l'intenſité de l'adhérence doit être cenſée proportionnelle au nombre des fils qui ſe déchirent dans un temps égal, & par conſéquent proportionnelle à la vîteſſe relative. Il paroît même que c'eſt une loi générale de la nature, que toutes les variations cauſées par des cauſes infiniment petites ſont proportionnelles à ces cauſes. La courbure des lames à reſſort, par exemple, dépend abſolument du même principe : chaque élément y fait, avec ſon voiſin, un angle infiniment petit, qu'on ſuppoſe proportionnel au *momentum* de la force qui plie & courbe la lame. Je ne me fais donc point de peine d'employer la même hypothèſe. Dans les corps ſolides, il faudroit encore faire attention à l'appreſſion de chaque couche contre ſa voiſine, laquelle rend le frottement plus ou moins grand, ſelon que cette appreſſion eſt plus ou moins grande ; mais les expériences qu'on a faites ſur l'adhérence des fluides, de même que l'idée que nous avons donnée de cette adhérence, prouvent également que la compreſſion du fluide ne ſçauroit faire varier l'intenſité de l'adhérence.

X I I.

Pour appliquer notre ſolution générale & purement géométrique du §. 8. à notre ſujet principal, nous conſidérerons près de l'équateur deux plans paralèles à l'équateur proches l'un de l'autre, qui coupent la terre, & nous ferons abſtraction de l'adhérence des eaux contre les deux plans ; soit la section du noyau solide de la terre ; représentée par le cercle AFL, & que AQ représente la hauteur verticale des eaux de la mer ; soit le rayon $AS = r$; $AQ = a$; $Sg = x$; $gh = hl = lm = dx$; la vîtesse absolue au point $A = C$; la vîtesse absolue des eaux à la surface de la mer $= c$: Examinons à présent comment il faudra exprimer l'adhérence ϕ entre les deux orbes gh & hl, lesquels étant élémentaires peuvent être considérés comme solides. Or il est clair que l'adhérence entière entre deux orbes est d'abord d'autant plus grande, que le rayon des orbes est plus grand, parce que le nombre des particules adhérentes suit la proportion des rayons : mais outre cela cette adhérence est en vertu du §. 11. proportionnelle à la vîtesse relative de la surface extérieure de l'orbe gh & de la surface intérieure de l'orbe hl ; il faudra donc exprimer cette petite vîtesse relative ; soit la vîtesse absolue de la surface intérieure de l'orbe $gh = v$, il faudra donc nommer $v + dv$ la vîtesse absolue de la surface intérieure de l'orbe suivant hl, pendant que la vîtesse absolue de la surface extérieure de l'orbe $gh = v + \frac{dx}{x} \times v$ à cause de la solidité supposée pour chaque orbe élémentaire : ainsi la petite vîtesse relative est $= v + \frac{dx}{x} \times v - v - dv = \frac{vdx - xdv}{x}$; ainsi l'adhérence ϕ est en raison composée du rayon x & de la petite vîtesse relative $\frac{vdx-xd}{x}$ & par conséquent proportionnelle à la quantité $vdx - xdv$; or la quantité $\phi\, x$ est $=$ const. (§. 8.) Il faut donc que $(vdx - xdv)\, x$ soit $=$ const. Il paroît d'abord ici qu'il est encore permis de choisir tel élément qu'on veut pour constant, puisque dans toute notre analyse nous ne nous sommes servis d'aucun élément constant ; cependant tout autre élément que celui de dx donneroit une fausse solution ; c'est pourquoi j'ai cru nécessaire d'expliquer préalablement ce paradoxe vers le milieu du §. 8. Nous aurons donc cette équation,

$$(vdx - xdv) \times x = fdx$$

& nous verrons dans la suite ce qu'il faudra entendre par le coëfficient conſtant f : Diviſant cette équation par x^3, on aura $\frac{dx - xdv}{xx} = \frac{f\,x}{x^3}$, dont l'intégrale avec l'addition de la conſtante convenable eſt

$$-\frac{v}{x} + \frac{c}{r} = \frac{f}{2\,r} - \frac{f}{2xx}.$$

Cette équation marque, que la différence des vîteſſes angulaires ſuit la proportion de la quantité $\frac{1}{rr} - \frac{1}{xx}$. La quantité f ſe détermine par la condition, qu'en faiſant $x = SQ = r + a$, la viteſſe v devient $= c$.

XIII.

Coroll. 1. Si on ſuppoſe $f = o$, la vîteſſe angulaire devient par-tout la même, & cela arrive en ſuppoſant $\frac{c}{r+a} = \frac{C}{r}$. En effet, ſi on détermine par notre précédent article la valeur de f pour le cas de $\frac{c}{r+a} = \frac{C}{r}$, on obtient $f = o$; auſſi la vérité de ce corollaire eſt-elle manifeſte par elle-même.

XIV.

Coroll. 2. Si on ſuppoſe $f = 2\,rC$, on obtient $v = \frac{x}{r}C$; cela arrive en ſuppoſant $c = \frac{r}{r+a}\,C$; on aura donc en ce cas les vîteſſes abſolues réciproquement proportionnelles aux diſtances du fluide à l'axe du cylindre. On voit en général qu'on ne ſçauroit déterminer les vîteſſes abſolues, ſans que cette vîteſſe ſoit connue pour deux points tels que A & Q.

XV.

Corol. 3. Comme le rayon du noyau ſolide de la terre repréſenté par SA peut être cenſé incomparablement plus grand que la profondeur de la mer, repréſentée par AQ, nous pourrons ſuppoſer $x = r + Z$, & conſidérer Z comme incomparablement plus petit que r. En ce cas la différence des vîteſſes angulaires devient $\frac{fZ}{r^3}$, & par conſéquent proportionnelle à l'élévation des eaux par-deſſus le fond de la mer. Comme les courans ne ſe font ſentir que par la différence des vîteſſes angulaires, c'eſt à cette différence qu'il convient de faire attention. Cependant pour peu que les courans ſoient ſenſibles, la différence des vîteſſes angulaires ne diffère pas ſenſiblement des vîteſſes abſolues : Voici un exemple qui le confirme. La différence des vîteſſes abſolues pour les points A & Q eſt $C - c$, & la différence des vîteſſes angulaires pour les mêmes points eſt $C - \frac{r}{r+a} \times c$. Soit donc $C = 1435$; $c = 1434$; $r = 19616000$; $a = 1000$; ces poſitions conviennent aveç un courant qui fait un pied par ſeconde dans une mer qui auroit mille pieds de profondeur ; en ce cas les deux dites différences ſont à-peu-près comme 13 à 14 & par conſéquent preſque égales.

X V I.

Scholie. Si au lieu de faire $\phi x =$ conſt. nous ſuppoſions $\phi =$ conſt. comme M. Newton a fait, nous aurions cette équation

$$v\,dx - x\,dv = f\,dx,$$

laquelle donneroit après ſon intégration

$$-\frac{v}{x} + \frac{c}{r} = \frac{f}{r} - \frac{f}{x}$$

& cette équation eſt conforme à tout ce que M. Newton dit ſur cette matière. Il eſt même à remarquer, que les deux ſolutions ne diffèrent pas entre elles, tant qu'on conſidére la profondeur de la mer comme incomparablement plus petite que le rayon de la terre ſolide, puiſque la différence des vîteſſes angulaires devient encore en ce cas proportionnelle à A, c'eſt-à-dire, à l'élévation des eaux par-deſſus le noyau ſolide. Au reſte, s'il s'agiſſoit ici de déterminer encore la nature du vent aliſé oriental, qui dépend tout-à-fait de la même cauſe, il faudroit dans l'eſtime de l'adhérence ϕ avoir égard aux diminutions des denſités de l'air, qui font diminuer dans une certaine raiſon le nombre des particules adhérentes, après quoi le calcul ſe fera de la même façon que ci-deſſous ; je me contenterai d'avoir indiqué cette précaution.

XVII.

XVII.

Voilà donc quelle eſt la cauſe & la nature de ce courant général & conſtant d'orient en occident, que tous les Navigateurs reconnoiſſent, ſur-tout dans la zone torride ; & quoique nous ayons fondé nos concluſions ſur l'action d'un cylindre tournant dans un fluide, il eſt viſible qu'une portion de ſphère telle qu'eſt la zone torride par rapport à la terre, ne ſçauroit manquer de faire à peu-près le même effet : mais quand nous conſidérerions la mer depuis l'équateur juſqu'aux poles, nous pourrions toujours tirer de notre théorie cette conſéquence, qu'il doit ſe former un courant d'orient en occident ; que la vîteſſe de ce courant commence au fond de la mer ; qu'elle augmente en progreſſion arithmétique depuis le fond de la mer juſqu'à la ſurface, & que c'eſt dans la ſurface que le courant doit être plus rapide : cependant tout cela ſuppoſe encore toute la terre inondée à la même hauteur.

XVIII.

On voit bien à préſent que cette cauſe générale & permanente, que nous avons expliquée, peut être diverſifiée d'une infinité de manières par l'irrégularité de la terre ſolide. Ici les calculs ne trouvent ſans doute plus lieu ; mais je fais ſouvent plus de cas de l'eſtime naturelle d'un homme verſé dans la méchanique & dans l'hydrodynamique, que des plus ſublimes calculs, toujours fondés ſur des hypothèſes, qui ne ſont jamais exactement vraies, qu'on perd de vûe auſſitôt pour ſe jetter tout entier dans l'analyſe ſans aucun examen ultérieur de la violence qu'on leur fait, de ſorte qu'on tombe à la fin dans des réſultats tout-à-fait ridicules, pendant qu'une bonne eſtime nous approche toujours du vrai : Mais pour former une telle eſtime, il faut avoir toujours devant les yeux la cauſe & la nature des courans ſuivant la théorie que nous avons exposée, & tous les obstacles qui s'y opposent jusqu'à une très-grande étendue ; il faut sur tout joindre à la théorie une connoissance de toutes les expériences physiques qu'on a faites sur de pareilles matières. On voit en général, sans autre examen, que les eaux changeront de direction lorsqu'elles trouvent de côté des passages plus libres & plus ouverts ; que leur vîtesse augmentera lorsqu'elles enfilent des passages qui vont en se rétrecissant, comme il arrive, par exemple, au détroit de Magellan ; c'est par la même raison que le flux & reflux, qui sont insensibles dans la pleine mer méditerranée, deviennent très-sensibles au Golfe de Venise: On voit aussi que les eaux pourront couler vers un même endroit, par des chemins opposés, & diminuer par-là ou détruire le courant ; le courant contraire pourra même emporter le courant naturel, de sorte que les eaux soient portées d'occident en orient.

X I X.

Ce n'est pas seulement la conformation des terres qu'on voit élevées au-dessus de la mer qui dirige & change les courans ; celle du fond de la mer ne sçauroit manquer de faire souvent le même effet. M. de Buffon a fait la même remarque dans son excellente Histoire naturelle, art. 13 des courans. La sagacité de cet illustre sçavant, ne me permet pas d'apporter d'autres preuves ou éclaircissemens sur cet effet des chaînes de montagnes & des vallées, qui forment le fond de la mer. Je ne m'arrêterai qu'à une seule remarque essentielle par l'usage que j'en ferai pour observer & mesurer les courans sur mer. C'est que les chaînes de montagnes, dont la direction est presque perpendiculaire à celle du courant, doivent sans doute arrêter presque entièrement toutes les eaux qui sont dans les vallées. Les chaînes pourront être éloignées de 10, 20, 30 dégrés ou davantage, & faire encore le même effet. Pour vérifier entièrement cette remarque, nous aurons encore recours à notre expérience du cylindre ſolide tourné uniformément dans un vaſe cylindrique rempli de fluide ; il eſt bien clair que ſi ce cylindre étoit garni de pluſieurs aîles parallèles à ſon axe, ces aîles feroient le même effet qu'un cylindre ſolide, qui s'étendît juſqu'au bout des aîles ; il ſera facile de confirmer cet effet par des experiences : quand il n'y auroit même qu'une ſeule aîle, l'expérience ne laiſſeroit pas d'être preſque la même. Si donc le rayon du cylindre tourné eſt $=b$, la largeur des aîles $=c$, la diſtance depuis la ſurface du cylindre juſqu'aux bords du vaſe $=e$, il convient de ſuppoſer un cylindre dont le rayon ſoit $=b+c$, & de cenſer le fluide réduit à la largeur $e-c$; ce n'eſt qu'après ces changemens que l'on pourra faire une juſte application de toute la théorie que nous avons expoſée depuis le §. 8. juſqu'au §. 16.

X X.

Ce que nous venons de dire nous fait voir que les courans s'étendront rarement juſqu'au fond de la mer ; à mon avis cela ne pourra arriver que dans les mers peu profondes ; on pourra ſe trouver à pic d'une grande vallée ; les eaux y pourront avoir plus de mille toiſes de profondeur, il pourra y avoir un courant conſidérable vers la ſurface de la mer ; mais je ſuis bien éloigné de croire pour cela, que ce courant s'étende juſqu'au fond de la mer ; cela ſuppoſeroit le fond de la mer tout-à-fait uni & ſphérique ; il y a plutôt toutes les apparences qu'il n'y aura plus aucun courant ſenſible au-delà de 50, 60, ou tout au plus de cent toiſes de profondeur. Les rapports des plongeurs, & pluſieurs autres obſervations, me confirment entièrement dans cette opinion. C'eſt par cette raiſon que je diſtinguerai dans la ſuite *le fond de la mer* d'avec le *fond du courant* en entendant par ce dernier terme la région horiſontale où les courans commencent à ſe former, & au-deſſous de laquelle les eaux sont comme tout-à-fait calmes & sans aucun mouvement commun avec celui du courant ; je ne prétends pourtant pas que les courans finissent brusquement & perdent tout d'un coup tout ce qu'ils avoient encore de mouvement un peu au-dessus ; les eaux pourront conserver un petit reste de mouvement bien plus bas, mais je suis persuadé qu'il sera toujours au-dessous de ces limites comme insensible par rapport au mouvement des eaux près la surface de la mer. Ces réflexions nous conduisent à l'examen d'un tout autre obstacle.

X X I.

Supposons maintenant une grande digue tout le long d'un méridien d'un pole à l'autre, puisque les terres de toute l'Amérique forment presque une telle digue ; il est question d'examiner l'effet que fera une telle digue sur le courant général qui se fait d'orient en occident. Les eaux ne sçauroient en ce cas faire tout le tour de la terre ; il faut cependant pour chaque endroit de la mer qu'il y arrive autant d'eau qu'il en part. Dira-t-on donc que ladite digue détruira entièrement le courant général ? On annéantiroit par-là l'effet de l'adhérence de l'air contre les eaux de la surface de la mer ; cette adhérence, si bien avérée par toutes les expériences, fait que chaque goutte d'eau à la surface de la mer doit être considérée comme animée par une petite force tangentielle d'orient en occident.

Après ces réflexions on est porté à croire que l'effet de ladite adhérence consistera simplement à élever les eaux du côté oriental de la digue, & à les baisser du côté occidental, de manière que chaque parallèle prenne la figure d'un tour de spirale, & que les eaux demeurent entièment en repos sous cette figure de la surface de la mer. Je crois bien que ce sera là une partie de l'effet, mais non pas l'effet tout entier ; car les eaux, disposées de cette façon, ne sçauroient absolument point tenir l'équilibre, puiſque l'adhérence qui agit de la manière que nous avons indiquée ne change en rien l'action de la peſanteur. Voici donc enfin comment je crois qu'on peut ſe débarraſſer de toutes ces difficultés & de toutes ces contradictions apparentes ; c'eſt de dire que vers la ſurface les eaux couleront continuellement depuis le côté occidental de la digue juſqu'à l'autre côté oppoſé, en faiſant tout le tour de la terre ; que les eaux s'éleveront inſenſiblement dans leur route, qu'elles feront les plus hautes près du côté oriental de la digue, & qu'enfin cet excès continuel de hauteur eſt employé à former au-deſſous dudit courant oriental un autre courant contraire en tout au premier. J'appellerai dans la ſuite ce ſecond courant, oppoſé à celui qui ſe fait au-deſſus, *contrecourant*.

XXII.

Voilà une circulation des eaux de la mer, à laquelle je ne ſçache pas que perſonne ait encore penſé ; elle paroîtra peut-être d'abord contraire aux loix de méchanique, & ſuppoſer un certain faux principe de mouvement perpétuel: cette idée me parut d'abord à moi-même trop hardie ; mais après y avoir murement réfléchi, j'en ai été entièrement convaincu. Je m'aviſai donc, pour m'éclaircir ſur cette conjecture, de faire l'expérience qui ſuit.

Expérience. Si on remplit d'eau un petit vaſe formé en parallèlepipéde long de 10 à 12 pouces, large & haut d'environ deux pouces ; ſi enſuite on y jette de petits brins de papier mâché, ou d'autres petits corps qui aillent légérement à fond, & qu'enfin on ſouffle pardeſſus la ſurface de l'eau d'un bout du vaſe à l'autre, on verra tous les petits corps, qui ſont au fond du vaſe, ſe mouvoir vers l'endroit d'où part le ſouffle, pendant que tout ce qui nage ſur l'eau s'en éloigne.

Cette expérience ſuffit ſeule pour éclaircir & pour prouver notre nouvelle théorie ſur les courans & les contrecourans. Nous aurons cependant occaſion de nous étendre ſur cette matière, & de la mettre dans tout ſon jour.

XXIII.

On voit bien que les terres de l'Amérique ne ſçauroient manquer de faire à peu-près le même effet que cette digue dont nous avons parlé; nous ſommes donc en droit de ſuppoſer un contrecourant conſtant & général d'occident en orient, au deſſous du courant général oriental. Ces contrecourans ſeront cependant de même que les courans extrêmement diverſifiés par la conformation irrégulière des terres, des côtes & du fond de la mer; ils pourront même dans quelques endroits reprendre le deſſus & reparoître ſous la forme des courans. Il paroît que cela arrive tout le long des côtes de la Guinée depuis le Cap Verd juſqu'à la Baie de Fernando-poo, où les courans vont d'occident en orient; car le grand promontoire de l'Afrique ne permet pas au courant général de ſe former tout le long deſdites côtes. Toutes ces variations ſont d'une grande reſſource pour expliquer pluſieurs phénomênes qu'on a remarqués ſur les courans. La théorie des vents & des autres changemens de notre atmoſphère dépend en grande partie du principe de la circulation des fluides, qui peut être produite de pluſieurs manières, comme nous verrons ci-deſſous.

XXIV.

J'ai dit ſur la fin du §. 21. que les eaux doivent ſe tenir plus hautes du côté oriental de la grande digue que du côté occidental; les terres de l'Amérique doivent donc encore faire le même effet: Par conſéquent le baromêtre doit ſe tenir plus bas aux bords de la mer du nord qu'à ceux de la mer du ſud, & cela eſt effectivement ainſi: car M. Bouguer, dans ſon ouvrage ſur la figure de la terre, fruit précieux de la puiſſante & efficace protection que le plus grand monarque de la terre accorde aux ſciences, dit expreſſément, que le mercure ſe ſoutenoit dans le vuide au bord de la mer (du ſud près l'équateur) à 28 pouces 1 ligne; il ajoûte que les plus grandes variations n'y ſont que de deux ou tout au plus de trois lignes, & il me ſemble que cet illuſtre académicien parle de ladite hauteur de 28 pouces 1 ligne, comme de la hauteur moyenne. Comparons cette obſervation avec celle d'un académicien, feu M. Richer, qui a été envoyé par ordre de Louis le Grand en l'Iſle de Cayenne, pareillement pour y faire les obſervations aſtronomiques & phyſiques les plus recherchées dans ces temps-là. Voici comme M. Richer s'exprime là-deſſus dans le recueil de ſes obſervations pag. 68. » On étoit » en peine de ſçavoir ſi vers l'équateur la hauteur du vif-» argent dans les baromètres étoit la même qu'à Paris ou » non : de quoi je me ſuis éclairci par les obſervations » que j'ai faites en Cayenne pendant une année entière, » où j'ai remarqué que ſa plus grande hauteur n'a ja-» mais ſurpaſſé vingt-ſept pouces 1 ligne dans un lieu » qui n'étoit élevé au-deſſus de la ſuperficie de la mer » que de vingt-cinq à trente pieds ». Comme le lieu de l'obſervation a été d'un côté un peu élevé par-deſſus la ſurface de la mer, & que de l'autre la hauteur de 27 pouces 1 ligne eſt annoncée comme la plus grande qui ait été obſervée, nous ſommes encore fondés à prendre cette hauteur pour moyenne dans un lieu où les variations ſont preſque nulles. En comparant donc l'obſertion de M. Richer avec celle de M. Bouguer, nous voyons que le baromètre ſe tient d'un pouce entier plus bas près de l'Iſle de Cayenne que vis-à-vis au bord de la mer du ſud. Si on vouloit attribuer cette différence des hauteurs barométriques toute entière à une élévation actuelle des eaux près de l'Iſle de Cayenne, nous trouverions par la règle de M. Bouguer, que les eaux de la mer ſont ſous l'équateur de 152 toiſes plus hautes près des côtes orientales de l'Amérique que près des côtes occidentales. Si cette élévation des eaux paroissoit excessive, il faudroit tâcher de trouver encore une autre raison de la petite hauteur barométrique en l'Isle de Cayenne; mais quelle que soit l'élévation des eaux près des côtes orientales de l'Amérique, elle diminueroit uniformément sous l'équateur d'occident en orient, si tout le reste du noyau de la terre étoit inondé, & les eaux de la mer auroient tout le long de l'équateur une petite pente égale vers l'orient, & cette pente seroit d'environ une seconde & demie, si l'élévation des eaux près de l'isle de Cayenne étoit de 152 toises. Ainsi l'adhérence de l'air entraîne les eaux près la surface de la mer à contre-mont de ladite pente. Mais si la grande hauteur du baromètre sous l'équateur est de 28 pouces 1 ligne, & la petite de 27 pouces 1 ligne, la hauteur moyenne sera de 27 pouces 7 lignes, & je présume qu'elle sera à peu près telle sous l'équateur autour de la longitude des Philippines. Les côtes orientales de l'Afrique pourroient bien faire en partie le même effet, & élever les eaux de la mer rouge pardessus celles de la mer méditerranée les plus proches, conformément à l'opinion de plusieurs auteurs. J'ai cependant appris de bonne main que la hauteur barométrique est à peu près égale des deux côtés de l'Isthme de Panama; mais aussi les courans y sont-ils bien différens du courant général d'est. Je ne sçai pas non plus si M. Richer aura pris toutes les mesures qu'on doit prendre pour pouvoir bien juger des hauteurs absolues des baromètres; mais ce seroit outrer infiniment la chose, que de présumer dans ses observations des erreurs d'un pouce. Nous ne pouvons donc nous dispenser d'adopter les faits tels que nous les avons indiqués, quoiqu'ils soient peut-être moins sensibles. Il seroit fort à souhaiter qu'on fît dans tous les cours de navigation des journaux exacts des hauteurs barométriques; la physique en général & notre question en particulier, en pourroient retirer de très-

très-grands avantages, & on peut presque toujours saisir un moment favorable pour faire ces observations, quand même la mer est assez agitée. Mais comme ces sortes d'observations demandent qu'on soit bien informé de toutes les circonstances qui peuvent faire varier les hauteurs absolues des baromètres, j'ajouterai ici une remarque singulière que j'ai faite sur cette matière; si cette petite digression paroissoit à quelques-uns trop étrangère à notre question, je les prie de passer l'article qui suit.

X X V.

On sçait qu'il est rare que les hauteurs absolues de différens baromètres s'accordent parfaitement entre elles: plusieurs causes peuvent concourir à produire ces petites inégalités. Une petite inégalité entre les pesanteurs spécifiques de différentes sortes de mercure, les différens dégrés de chaleur, qui changent un peu la pesanteur spécifique d'un même mercure, la nature des tuyaux capillaires, dans lesquels le mercure monte moins haut que dans des tuyaux plus larges, & enfin l'imperfection du vuide, sont les causes qu'on allégue ordinairement; mais il y en a encore une autre qu'on n'a pas remarquée jusqu'ici, que je sçache. Elle consiste en ce que tous les fluides forment autour d'eux dans le vuide une atmosphère ou une vapeur élastique; & ces vapeurs ont des propriétés singulières. Plusieurs expériences que j'ai faites, avec une excellente pompe pneumatique, m'ont fait d'abord remarquer l'activité de ces vapeurs: j'observois que le mercure dans l'*index* appliqué à la pompe ne montoit jamais si haut, qu'il se tenoit dans un bon baromètre; ce défaut étoit ordinairement de 4 à 5 lignes, & quand il faisoit bien chaud il alloit jusqu'à 8 lignes. La pompe étoit cependant parfaitement bonne, & le vuide s'y conservoit pendant plusieurs jours de suite. Je reconnus donc qu'une certaine vapeur élastique, qui se formoit toujours à mesure qu'on la pompoit, en étoit la véritable cause. La plus petite humidité suffit pour fournir une quantité immense de ces vapeurs. C'est cette vapeur élastique, qui fut sans doute la cause d'un phénomène que je me souviens d'avoir lû dans les Mémoires de l'Académie; c'est que des tuyaux baromètriques ayant été lavés avec de l'esprit de vin en dedans, & puis remplis de mercure, celui-ci s'y est tenu constamment de 7, 8 à 9 lignes, si je me souviens bien, plus bas que dans les autres baromètres. Voici à présent quelques propriétés sur ces vapeurs élastiques; mais que je ne sais encore que présumer. 1°. Il m'a paru que l'activité de ces vapeurs n'est pas augmentée en les resserrant dans un plus petit espace; c'est qu'à mesure qu'on resserre les vapeurs, les parties se réunissent & reprennent la forme du fluide primitif. 2°. L'activité de ces vapeurs est augmentée par une plus grande chaleur, & diminuée par un plus grand froid. 3°. Il m'a paru que ces vapeurs demandent un certain dégré de chaleur déterminé pour se former, & qu'au-dessous de ce dégré elles ne se forment point du tout; Voici ce qui m'a induit à former cette hypothèse. J'avois un baromètre à double branche, l'une remplie de mercure & l'autre d'huile de tartre, qui étoit fort bien fait, & qui ne me paroissoit aucunement susceptible aux changemens du froid & du chaud; ayant une fois couché ce baromètre sur la table & puis relevé, je fus fort surpris de voir cet instrument changé en thermomètre extrêmement sensible; cependant il ne s'étoit absolument point glissé d'air dans la boule d'en-haut, & d'ailleurs les changemens thermomètriques étoient de beaucoup trop grands pour être attribués à cette cause; je reconnus enfin qu'il s'étoit glissé une petite quantité, presque imperceptible, d'huile de tartre au-dessus de la surface du mercure dans la boule d'en-haut, laquelle par l'élasticité de sa vapeur produisoit le phénomème en question; je fis longtemps des observations avec cet instrument, & l'ayant une fois exposé à un grand froid d'environ onze dégrés au-dessous de zéro du thermomètre de M. Reaumur, je remarquai qu'il ne varioit plus ſenſiblement, quoique le thermomètre ſimple mis à côté eut encore baiſſé de trois dégrés, & que le baromètre n'eut point changé pendant cette augmentation du froid. 4°. Tous les fluides fourniſſent une telle vapeur; mais l'élaſticité reſpective pour un même dégré de chaleur n'eſt pas la même: le mercure n'en eſt pas exempt; mais s'il eſt tout-à-fait bien purifié, l'activité de ſa vapeur eſt preſque inſenſible. J'ai approché la flamme d'une bougie de l'extrêmité du mercure d'un baromètre lumineux juſqu'à faire bouillonner le mercure, il ne deſcendoit que de quelques lignes, pendant que dans d'autres baromètres, dont le vuide étoit également parfait, mais dont le mercure n'étoit pas purifié, j'ai pu faire deſcendre le mercure d'autant de pouces qu'il y avoit de lignes dans le premier; peut-être auſſi que les tuyaux des autres baromètres renfermoient une petite humidité. Je conclus de ces remarques que, pour obvier à l'inconvénient deſdites vapeurs élaſtiques, il faut ſe ſervir de tuyaux parfaitement ſecs & les remplir d'un mercure bien purifié, & enfin examiner les baromètres ainſi conſtruits par la flamme d'une bougie de la façon que je viens de le dire. Pour faire voir que ces prècautions ne ſont pas inutiles, je citerai les obſervations baromètriques qui ont été faites en l'iſle de Gorée par Meſſieurs Varin, des Hayes & de Glos; la plus grande hauteur depuis le 31 mars 1682 juſques au 4 juillet de la même année y a été obſervée de 27 pouces 9 lignes & $\frac{3}{4}$, & la plus petite de 27 pouces 3 lignes & $\frac{1}{4}$; à quoi il eſt ajouté: » On a obſervé qu'ordinairement à la Gorée » le baromètre étoit plus bas quand le thermomètre étoit » plus haut; & généralement le baromètre étoit plus » haut la nuit que le jour de deux, trois ou quatre lignes, & il faiſoit plus de changement du matin juſqu'au » ſoir, que du ſoir juſqu'au matin «. Je m'aſſure que tout cela n'étoit qu'un effet de la vapeur élaſtique dont je viens de parler, & qui jette tout d'un coup un doute de

4 lignes ſur les hauteurs abſolues du baromètre obſervé en l'iſle de Gorée près du Cap-verd.

XXVI.

Les remarques que je viens de faire, pourroient bien nous laiſſer douter de l'obſervation de M. Richer pour 3 ou 4 lignes ; mais je ne crois pas qu'il faille pouſſer ſes doutes plus loin. M. de la Condamine, qui a fait les mêmes obſervations, à en juger par ſa relation du voyage depuis la côte de la mer du ſud juſqu'aux côtes du Breſil & de la Guyane, & à qui rien n'a pu échapper de ce qui a pu rendre toutes ſes obſervations plus ſûres & plus exactes, en pourra décider : mais je n'ai rien trouvé dans ſadite relation qui en décide abſolument, quoique j'y aie trouvé pluſieurs circonſtances qui me confirment dans l'opinion que la mer eſt réellement plus haute ſur les côtes du Bréſil, qu'au bord de la mer du ſud ſous les mêmes parallèles. Meſſieurs Bouguer & de la Condamine font auſſi fort mention d'une petite variation journalière du baromètre, obſervée par M. Godin, que j'attribue de même à l'activité de la vapeur élaſtique du baromètre ; ſurquoi je m'en rapporte au jugement de ces Meſſieurs qui auront fait les obſervations thermomètriques correſpondantes. Mais en voilà aſſez, peut-être trop, ſur la cauſe & la nature du courant général & conſtant d'orient en occident. Je ne ferai donc plus qu'examiner en deux mots ſi ce courant peut être conſidéré comme une ſuite du flux & reflux de la mer.

XXVII.

Il eſt d'abord certain qu'on n'a rien remarqué dans ce courant général qui ait le moindre rapport avec la lune, qui eſt pour la plus grande partie la cauſe du flux & reflux. On ſçait auſſi que l'action de la lune conſiſte à allonger un peu le diamètre de la terre, dont la direction paſſe par la lune : cette action jointe au mouvement journalier de la terre, fait toute la cauſe du flux & reflux de la mer en tant qu'il eſt produit par la lune. Suppoſons à préſent que la lune réponde au point *A* (*fig.* 2.), & que l'ellipſe preſque circulaire *AECFBGDHA*, repréſente la ſurface de la mer, *AB* étant le diamètre un peu allongé de la terre. Si un moment après la lune répond au point *a*, il faut que les eaux prennent la figure *a e C f b g D h a*, qui ne différe en rien de la figure précédente, excepté la poſition : ce changement de poſition ne ſçauroit ſe faire ſans que les deux méniſques *AHDhA* & *BFCfB* ſe vuident pour emplir les deux autres méniſques *AECeA*, & *BGDgB*. Il n'eſt donc plus queſtion que d'examiner par quel mouvement des eaux ſe forme cette transfuſion continuelle. On voit d'abord que pour la plus grande partie ce mouvement conſiſtera en ce que les eaux baiſſent verticalement dans les deux premiers méniſques & montent dans les deux autres ; mais il eſt clair auſſi que les eaux prendront en même temps un mouvement horiſontal, & il n'eſt queſtion que de ce ſeul mouvement. Si on diſoit que toutes les eaux du méniſque *AHDhA* iront emplir le méniſque *DGBgD*, & que ce ſera la même choſe des deux méniſques ſuivans, ce ſeroit là le courant général oriental ; mais il n'y a abſolument aucune raiſon qui puiſſe nous empêcher de renverſer l'ordre de ce mouvement, & de dire, que les eaux *AHDhA*, ſeront tranſportées en *AECeA*, & ainſi des deux méniſques ſuivans, ce qui formeroit un courant général occidental. On n'eſt donc pas plus fondé à tirer de cette cauſe un courant oriental qu'un autre tout-à-fait contraire. Pour déterminer le vrai mouvement horiſontal des eaux, nous partagerons les quatre méniſques en deux parties égales par les petites verticales *Hh*, *Gg*, *Ff* & *Ee*. Alors on voit que les eaux des deux demi-méniſques *AHhA* & *CFfC*, ont une pente tout-à-fait égale pour aller remplir le méniſque *AECeA*, ou plutôt les deux demi-méniſques contigus *AEeA*,

& *CEeC*, & que de la même façon les deux demi-ménisques *BGgB* & *DGgD* seront emplis par les eaux des deux autres demi misques *FBfF* & *HDhH.* C'est là visiblement le vrai mouvement; aussi est-il entièrement conforme aux observations qu'on a faites sur le flux & reflux. Suivant cette explication, le mouvement se fera d'occident en orient depuis *H* jusqu'en *E*, de même que depuis *F* jusqu'en *G*, & il y aura un mouvement d'orient en occident depuis *F* jusqu'en *E*, & depuis *H* jusqu'en *G*. Ces mouvemens forment un flux & reflux sans produire jamais un mouvement progressif continuel. On remarquera qu'aux points cardinaux *A*, *B*, *C* & *D*, la vîtesse des eaux est la plus grande, & qu'elle est nulle aux points intermédiaires *E*, *G*, *F* & *f*. Cependant la chose ne sera entièrement telle que dans les mers profondes à une grande étendue, & elle peut-être extrêmement changée par la configuration particulière des côtes & d'un grand nombre d'autres circonstances. A mon avis, il faudroit recourir à une structure toute particulière du noyau solide de la terre, qui donnât plus de facilité à se mouvoir d'orient en occident que d'occident en orient, pour pouvoir déduire le courant oriental général de l'action de la lune; mais ce seroit là multiplier les hypothèses sans aucune nécessité; après tout je ne rejette pas cette opinion comme entièrement absurde, mais comme peu naturelle & ne pouvant subsister qu'avec les secours d'autres hypothèses entièrement précaires: Je suis même porté à croire que certains courans particuliers peuvent réellement être une suite du flux & reflux.

XXVIII.

Je viens maintenant aux courans qui changent de direction de six en six mois, & qui reprennent assez régulièrement leur état au bout de chaque année. On sçait qu'il y a de tels courans périodiques. Messieurs de Buffon, Varenne, Dampier & d'autres auteurs en citent:

grand nombre d'exemples. Ces courans ne peuvent être une ſuite du courant général ni du flux & reflux, ni être cauſés par la ſtructure de la terre ; il faut néceſſairement les déduire de l'action du ſoleil, puiſque leur état, tant en direction qu'en force, dépend uniquement des ſaiſons & de la poſition du ſoleil. Il eſt clair auſſi que le ſoleil ne peut pas former ces courans réciproques de ſix en ſix mois par le principe de ſon attraction, par lequel il concourt avec la lune à former le flux & reflux de la mer ; car comme l'action de la lune prédomine beaucoup à cet égard ſur celle du ſoleil, la période de ces courans ſeroit plutôt de mois en mois que d'année en année. Tâchons donc de développer la vraie manière de laquelle le ſoleil peut former ces courans en queſtion ; nous en connoîtrons beaucoup mieux leur nature : ces recherches nous mèneront à de nouvelles réflexions fort intéreſſantes. Nous commencerons cet examen en ſuppoſant d'abord toute la terre inondée & en faiſant premièrement abſtraction de l'inclinaiſon de l'écliptique, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant un équinoxe perpétuel & univerſel.

XXIX.

Il eſt clair que les eaux ſous l'équateur ſeront beaucoup plus échauffées par le ſoleil que vers les poles, elles y ſeront donc encore, comme on ſçait, plus dilatées & perdront par-là une petite partie de leur peſanteur ſpécifique ; ainſi la peſanteur ſpécifique des eaux ſera à cet égard d'autant plus grande qu'elles ſeront plus proches des poles. Le Père Feuillée a obſervé aſſidument les variations des peſanteurs ſpécifiques des eaux de la mer ; il a trouvé huit grains de diminution ſur deux onces trois dragmes cinquante-ſept grains depuis la hauteur de Gibraltar juſqu'à l'équateur, ce qui donne les péſanteurs ſpécifiques de ces deux eaux en raiſon de 1197 à 1180. Le principe de l'équilibre demande donc que les eaux s'élévent un peu ſous l'équateur & ſe baiſſent vers les poles ; tout cela découle immédiatement des premiers élémens de la physique & de l'hydrostatique. Supposons, par exemple, la pesanteur spécifique moyenne des eaux sous l'équateur à celle qui répond à la latitude de 60 dégrés, comme 120 à 121, & donnons 1200 toises de profondeur à la mer ; en ce cas, la mer sera de dix toises plus haute sous l'équateur que sous le parallèle qui en est éloigné de 60 dégrés ; mais, par-là même, la surface de la mer prendra une petite pente depuis l'équateur vers les poles, de sorte qu'elles ne seront plus tout-à-fait de niveau : cette pente fera que les eaux coulent continuellement depuis l'équateur vers les deux poles ; mais par-là la mer deviendroit bientôt plus haute vers les poles, pendant qu'elle y doit nécessairement être un peu plus basse : Que doit-on répondre à cette contradiction apparente ? Il n'y a absolument aucun autre moyen que celui de dire qu'il y aura une circulation continuelle. Voici comment se formera cette circulation. Je dis que les eaux au lieu de s'élever de dix toises sous l'équateur ne s'y éleveront que d'environ cinq toises ; il arrivera par-là que, d'un côté, les eaux de la mer vers la surface descendront depuis l'équateur vers les poles à cause de la petite pente, & que de l'autre les eaux retournent par le bas des poles vers l'équateur étant sollicitées à ce mouvement par l'excès du poids des colonnes d'eau qui sont par cette distribution plus pesantes près des poles que sous l'équateur. Voilà une légère ébauche d'une nouvelle circulation des eaux de la mer, qui forme un courant & un coutrecourant continuel de l'équateur vers les poles, & des poles vers l'équateur. Mais avant que d'entrer dans un plus grand détail sur ces courans, je tâcherai de dissiper les doutes qu'on pourroit se former contre le principe qui en fait la base.

X X X.

C'est ici surtout que les loix ordinaires de la mécha-

nique

nique ſemblent entièrement renverſées. On voit un certain mouvement perpétuel ſans voir diſtinctement aucune force qui l'entretienne. Avec tout cela, la nature eſt extrêmement fertile à produire une infinité de mouvemens perpétuels phyſiques plus ou moins réguliers ſuivant les circonſtances. C'eſt que dans la théorie de la méchanique, on ſuppoſe qu'un corps eſt toujours animé également vers un centre de force quelconque, s'il en eſt également éloigné; tout le principe de la conſervation des forces vives eſt uniquement fondée ſur cette ſuppoſition : on peut même en ce cas donner une étendue infiniment plus grande à ce principe, qu'on n'a encore remarqué : Voici ce principe dans toute ſon étendue. » Qu'on s'imagine un tel nombre de points qu'on » voudra, comme autant de centres de forces, que ces » points ſoient tous matériels ou en partie immatériels, » qu'ils décrivent des courbes quelconques, qu'on leur » ſuppoſe une loi d'attraction ou de gravitation telle qu'on » voudra; il n'y a qu'à combiner chaque point avec cha» que point, examiner enſuite pour chaque combinaiſon, » quelle ſeroit la force vive, ſi un des deux points étant » immobile, l'autre s'en étoit approché en ligne droite » de la même quantité, que ces deux points ſe ſont ap» prochés dans le ſyſtême; & la ſomme de toutes ces for« ces vives donnera conſtamment la force vive de tout » le ſyſtême «.

La généralité de ce théorème nous fait voir d'abord l'impoſſibilité de ce qu'on appelle mouvement perpétuel purement méchanique; mais le méchaniſme ſuivant lequel nous avons expliqué au précédent article notre nouvelle circulation des eaux de la mer, n'eſt pas compris dans le cas de ce théorème général ſur la conſervation des forces vives, puiſque chaque goute d'eau change de nature en changeant continuellement ſon volume, ſa denſité & ſa peſanteur ſpécifique : ainſi ces ſortes de circulations perpétuelles peuvent fort bien ſubſiſter avec les principes de méchanique généralement reconnus. J'établirai notre théorie par des raisons & expériences physiques d'une manière à n'en pas douter, après que nous aurons examiné l'effet que les différentes chaleurs doivent produire dans l'air.

X X X I.

Notre question sur les courans est tellement liée avec celle des vents réguliers, que je ne saurois me dispenser d'en faire presque un seul & même sujet : Nous avons vû ci-dessus, que l'adhérence des fluides, qui est la cause du courant général oriental, doit produire en même-temps un vent oriental constant & d'autant plus sensible, que l'air est plus élevé par-dessus la surface de la mer : nous allons voir que c'est tout le contraire dans le cas dont il s'agit ici.

La dilatation qu'un certain degré de chaleur produit dans l'aïr est beaucoup plus grande, que dans l'eau : j'ai trouvé par des expériences, que les dilatations des eaux pour des variations égales dans les thermomètres faits d'esprit-de-vin, sont fort inégales; elles sont imperceptibles dans les eaux, qui sont peu éloignées du point de la congellation; ensuite ces variations augmentent dans les eaux moins froides & deviennent enfin presque uniformes. Il paroît que c'est là une propriété commune à tous les fluides; si on compare les variations d'un thermomètre à esprit-de-vin avec celles d'un thermomètre à mercure, on voit que dans les froids excessifs prêts à geler l'esprit-de-vin, le premier thermomètre ne montre plus que des variations très-petites pendant que l'autre fait des variations très-sensibles : je ne doute pas qu'un thermomètre à mercure comparé avec un thermomètre à air ne montre de pareilles diminutions dans les froids excessifs ; &, par les diminutions de la marche du mercure, on pourroit juger à peu près, à quel degré de froid le mercure se géleroit. On voit donc que les eaux de la mer ne souffriront plus aucun changement sensible vers les équinoxes au-delà de 50 ou 60 dégrés de latitude, pendant que la densité de l'air augmentera jusqu'aux poles. On a éprouvé des froids à Kamtschatka, à Tornao, à Kola, &c. qui augmentent presque de la moitié la densité d'un air tel que celui de nos etés, de sorte que les densités de ces deux sortes d'air peûvent être censées être en raison de 3 à 2. Mais cette grande inégalité ne trouve lieu que bien près de la terre, y ayant toutes les apparences, que toute la masse d'air prend la même temperature au-dessus d'une certaine hauteur. C'est là la raison pourquoi dans la zone torride le froid augmente à mesure qu'on s'élève par-dessus la surface de la mer. M. Bouguer a fait là dessus d'excellentes remarques : Mais en passant dans les saisons moyennes les alpes de la Suisse, on ne sent pas à beaucoup près ces grandes augmentations de froid ; & je ne doute pas que près des poles on ne sentît un air d'autant plus chaud, qu'on s'éleveroit davantage, si on pouvoit faire ces observations. Je suis fort porté à croire qu'à la hauteur verticale d'environ 300 toises l'air commence à prendre sa température uniforme ; mais j'entends des élévations qui seroient prises en plein air & dans les lieux où il n'y auroit point de montagnes. Si je ne me trompe, dans cette conjecture, la pression de l'air doit élever le mercure dans le baromètre d'environ six lignes plus haut vers les poles que vers l'équateur, & cela s'accorde fort bien avec ce que j'ai dit au § 24 fondé sur l'observation de M. Richer, que j'ai comparée avec celle de M. Bouguer ; de laquelle comparaison il résulte que la hauteur moyenne du baromètre sous l'équateur n'est que de 27 pieds 7 lignes, si cependant, ce que je répéte, l'observation de M. Richer est tout à fait sure. C'est sans doute cette uniformité de chaleur dans les régions hautes de l'air, qui fait que les hauteurs barométriques different si peu vers les poles & près de l'équateur. On voit auſſi pourquoi, dans les pays ſeptentrionaux, une élévation de 65 pieds ſuffit pour faire baiſſer le mercure d'une ligne, pendant que, ſelon M. Bouguer, dont je reſpecte toujours l'autorité, il faut s'élever de 90 pieds près de l'équateur pour la premiere ligne de deſcente du baromètre.

X X X I I.

Examinons maintenant l'effet que doit produire cette inégalité dans les preſſions des colonnes d'air. Il eſt clair que ſon premier effet ſera d'applatir tant ſoit peu la ſurface de la mer vers les poles & d'élever les eaux vers l'équateur : la pente de la ſurface de la mer depuis l'équateur vers les poles, dont nous avons déja parlé au § 29, en ſera un peu augmentée, mais ce ne ſera que d'environ un demi pied ſur tout le quart du méridien : ce premier effet ſera donc comme inſenſible. Mais le ſecond effet ſera de produire une circulation perpétuelle d'air ; cette circulation ſe fera depuis les poles vers l'équateur près la ſurface de la mer, pendant qu'une quantité d'air égale retourne de l'équateur vers les poles dans une plus haute région de l'atmoſphère. Ce n'eſt ici qu'une eſquiſſe de notre ſyſtême ſur les courans & ſur les vents réguliers ; nous entrerons dans un plus grand détail ci-deſſous.

X X X I I I.

Je crains toujours, malgré tout ce que je viens dire, que ces circulations d'eau & d'air ne paroiſſent trop paradoxes pour pouvoir être admiſes. Je ne me ferai donc point de peine de les établir davantage par des expériences phyſiques.

1. *Expérience.* Qu'on échauffe bien une chambre à fourneau, pendant que l'anti-chambre demeure froide ; qu'on ouvre enſuite la porte entre les deux chambres & qu'on y tienne deux bougies allumées, l'une tout au bas & l'autre tout au haut, on verra que la flamme de la

première sera fort sensiblement dirigée vers la chambre échauffée & celle de l'autre vers l'anti-chambre froide. Si on tient la bougie à la mi-hauteur de la porte, la flamme n'en est point agitée du tout. Cette expérience suffit sans doute toute seule pour établir la circulation de l'air, que j'ai indiquée.

Explication. La raison de cette circulation d'air consiste en ce que le poids d'une colonne d'air dans la chambre chaude est plus petit que celui d'une colonne tout-à-fait semblable dans la chambre froide; ainsi l'air d'en bas coulera continuellement de la chambre froide dans la chambre chaude: &, comme l'élasticité de l'air doit demeurer la même dans les deux chambres, il faut que la chambre chaude se vuide continuellement d'autant d'air qu'elle en reçoit, ce qui ne sçauroit se faire que par la partie supérieure de la porte, parce que la différence entre les poids des colonnes d'air, doit nécessairement produire cette circulation continuelle. Il n'est presque pas possible, que d'autres n'aient fait cette observation avant moi.

2. *Expérience.* Dans les mines profondes, où il règne souvent un air extrêmement échauffé par les exhalaisons, on peut rafraîchir l'air & le faire circuler continuellement par le moyen d'un long tuyau, qui depuis l'air libre descend jusqu'au fond de la mine : l'air entre continuellement dans le tuyau par l'ouverture d'en-haut & la circulation se fait d'autant plus vîte que l'air de dehors est plus froid. Cette expérience a été faite en Suéde & elle est rapportée dans les transactions Philosophiques de Londres.

Explication. L'air extérieur étant plus froid que celui des mines en question, on n'a qu'à supposer la circulation commencée pour voir qu'elle doit continuer sans fin, puisque l'air frais étant entré dans le tuyau ne sçauroit prendre dans l'instant la température des mines & doit par conséquent demeurer plus pesant que celui des mines; mais l'air qui sort par l'ouverture inférieure du tuyau entre dans un grand eſpace, où il a tout le tems pour s'échauffer, ſans cependant refroidir ſenſiblement celui des mines par ſon mêlange. Ainſi la circulation continuera toujours. Cela étant ainſi, il eſt facile de voir que la moindre choſe, qui ne ſçauroit jamais manquer d'arriver d'elle-même, ſuffit pour commencer & pour former une circulation, qui s'augmente d'abord & puis ſe continue par ſes propres forces.

Quant à la circulation des fluides, on n'a qu'à mettre une grande marmite remplie d'eau à côté du feu pour voir une circulation tout-à-fait ſemblable à celle que nous avons ſuppoſée : la nature ſe plaît à former ces ſortes de circulation juſques dans les matières ſubtiles : celles de la matière magnètique ſont aſſez connues ; cependant celles-ci ſe forment par un tout autre principe. Les expériences ſur l'électricité montrent de même manifeſtement une circulation de la matière électrique : on peut même, par le moyen de cette matière, produire dans les corps ſolides des mouvemens réguliers, qui durent tant que l'électricité ſubſiſte : on ſçait que de petites boules d'yvoire ſuſpendues près d'un corps électriſé s'en approchent & s'en éloignent alternativement par des balancemens réguliers. La raiſon de ces balancemens perpétuels doit être tirée de notre §. 30. c'eſt que la boule d'yvoire eſt plus fortement attirée par le corps électriſé en s'en approchant, qu'elle ne l'eſt en s'en éloignant, les diſtances étant égales. On ne doutera pas de cette raiſon, quand on conſidère que la force attirante devient même répulſive, ſi on donne aſſez de tems à ce changement. J'ajouterai ici deux expériences ſur cette matière, tant parce qu'elles confirment nos principes, que parce que ce mémoire s'adreſſe à une Société, qui reçoit toujours avec bonté toutes les nouvelles obſervations & expériences faites ſur des matières auſſi intéreſſantes, que l'eſt aujourd'hui l'électricité.

3. *Expérience.* Si on met une aiguille *a c* (*fig.* 3.) de

fer ou de bois auprès d'un globe de fer fortement électrisé par communication *A B*, & que l'aiguille soit librement mobile u point *b*; cette aiguille sera d'abord irrégulièrement agitée : mais bientôt elle s'élancera jusqu'à faire le tour & alors elle continuera à tourner toujours dans le sens qu'elle à commencé sa première révolution & quelquefois avec une rapidité étonnante. J'ai diversifié ces expériences de plusieurs façons, que je passe sous silence, mon dessein n'étant que de confirmer notre principe; car considérant le centre *C* du globe *A B* comme un centre de forces, & prenant dans l'orbite de l'extrêmité de l'aiguille deux points *d* & *e* également éloignés du centre *C*, il semble que l'extrêmité de l'aiguille est attirée plus fortement au point *d* qu'au point *e*, si elle tourne dans le sens *d a e c d*; & plus fortement au point *e* qu'au point *d*, si elle tourne dans le sens contraire: & cette raison explique parfaitement ces expériences.

Voici à présent une autre expérience, qui montre la façon de circuler de la matière électrique & que cette matière est sujette aux loix hydrodynamiques comme les fluides ordinaires, de laquelle j'ai prévû le succès avant que de la faire: je l'imaginois d'abord dans le dessein de produire des tournoyemens toujours dans le même sens.

4. *Expérience.* Soit *a b* (*fig.* 4.) une verge de fer fichée verticalement dans un gâteau de résine & électrisée par communication; qu'on fasse ensuite une aiguille de fer telle que *e c d f* recourbée à angle droit par les deux bouts *c e* & *d f*, chacun dans le plan horizontal & à contre-sens; que les extrêmités *e f* soient pointues; qu'on mette cette aiguille sur la pointe de la verge *a b* de manière à se tenir horizontalement & à tourner librement, on verra que l'aiguille commencera peu-à-peu à tourner & toujours dans le sens *e c f d*; Si on donne à l'aiguille une impression contraire, son mouvement sera peu-à-peu retardé pour faire ensuite ses tournoyemens naturels &

avec beaucoup de vîteſſe. De nuit le cercle *e c f d* paroît lumineux. Cette expérience prouve clairement, que la matière électrique paſſe continuellement de la verge dans l'aiguille au point *b* & que là elle ſe diviſe en deux torrens oppoſés pour ſortir par les deux pointes *e* & *f*, & enfin que la réaction de ce fluide, forcé à changer de direction dans les coudes *c* & *d*, fait tourner l'aiguille dans le ſens *e c f d*.

XXXIV.

Je me flatte après toutes ces raiſons tant phyſiques que méchaniques, qu'on n'aura plus aucune peine à admettre les circulations des eaux de la mer & de l'air telles que je les ai expliquées aux §. §. 29. & 32. & cela d'autant moins qu'elles ſont très conformes aux phénomènes qu'on a remarqués ſur les mouſſons & ſur les courans périodiques anniverſaires. Examinons donc à préſent de plus près la nature de ces circulations ſans ſortir encore de notre hypothèſe de l'inondation entière de la terre & de la coïncidence de l'écliptique avec l'équateur.

J'ai allégué vers le milieu du §. 31. une raiſon phyſique, qui me fait croire, que cette circulation des eaux ne s'étend pas au-delà du 50e dégré de latitude ; je regarde donc la vîteſſe horizontale des eaux comme nulle tant près de l'équateur, où les eaux ne font que monter du fond de la mer vers la ſurface, que près deſdites latitudes, où les eaux deſcendent de la ſurface vers le fond. Je préſume auſſi que le courant ſera le plus ſenſible autour du 25e dégré de latitude, qu'il ſera dirigé vers le nord dans les pays Septentrionaux & vers le Sud dans les pays méridionaux, pendant que les contre-courans auront une direction contraire de part & d'autre, & cette double circulation des eaux ſe feroit uniformément pendant tout le cours de l'année, ſi le Soleil décrivoit conſtamment l'équinoctial.

XXXV.

XXXV.

Il eſt facile à préſent de voir les changemens périodiques qui doivent arriver par l'obliquité de l'écliptique; ſuppoſons, par exemple, que le ſoleil décrive le tropique du Cancer: ce ne ſera, ſans doute, plus l'équateur qui partagera les deux circulations & où la vîteſſe horiſontale des Eaux ſera nulle ; ce ſera plutôt un parallèle ſeptentrional qui ne ſçauroit être fort éloigné du tropique du Cancer. Il ſuit de là que, ſous l'équateur, il doit ſe former un courant dirigé vers le nord depuis l'équinoxe du printems juſqu'à l'équinoxe d'automne & un courant tout contraire pendant les autres ſix mois. Si on conſidère un parallèle entre l'équateur & le tropique du Cancer, il pourra arriver que le courant dirigé vers le nord ne dure que deux ou trois mois d'été ſuivant la latitude du lieu, & que pendant tout le reſte de l'année on ſente un courant contraire. Ces exemples ſuffiſent pour voir ce qui doit arriver dans tous les parallèles & pendant toute l'année, tant que l'on ſuppoſe toute la terre inondée. On remarquera cependant que les changemens ſe feront toujours un peu plus tard, parce que l'effet du ſoleil eſt toujours poſtérieur à ſa poſition. Mais ces courans périodiques ſeront extrêmement changés par les terres fermes, par la configuration des côtes, par les Iſles, par la conformation du fond de la mer & par un grand nombre d'autres circonſtances. Je ſuis cependant perſuadé qu'en combinant cette théorie avec celle que nous avons donnée ſur le courant général d'eſt, la ſimple inſpection d'une grande mappe-monde ſuffira pour voir l'origine de tous les courans réguliers tels qu'on les remarque.

XXXVI.

L'explication que je viens de donner des courans périodiques anniverſaires nous fait voir en même-tems la ſource des vents périodiques & leur nature; il n'y a qu'à appliquer le précédent article au §. 32. pour comprendre tous les changemens deſdits vents pendant le cours de l'année. Je pourrois faire voir ici une conformité frappante entre notre théorie & les obſervations conſtatées ſur les vents, ſi cet examen appartenoit immédiatement à notre ſujet. D'autres ont conſidéré à la vérité avant moi la raréfaction de l'air cauſée par la chaleur du Soleil pour en déduire une théorie ſur les vents; comme ils n'ont pas fait attention aux circulations, que je crois d'avoir ſi bien établies, & qu'on voit très-ſouvent aux yeux par le mouvement contraire des nuages des régions baſſes & des régions hautes de l'air, cette hypothèſe n'a pas dû les mener bien loin. Ce que j'ai dit au §. 27. montre auſſi à mon avis l'inſuffiſance de ce principe pour en déduire le vent général d'eſt. Il me ſemble toujours que les variations de la chaleur du jour à la nuit ne ſçauroient produire qu'une eſpèce de flux & reflux de l'air alternativement d'orient en occident, & d'occident en orient, que l'expérience même confirme aſſez, & qu'il n'y a pas plus de raiſon d'en déduire un vent oriental permanent que d'en déduire un vent occidental conſtant. Je ne me laſſe point d'admirer les ſublimes calculs, que M. d'Alembert a ſçu employer pour expliquer le vent oriental; mais comme ces ſortes de calculs ſont fondées ſur la conception qu'on ſe forme de la manière dont les fluides reprennent leur état d'équilibre, c'eſt à celle-ci que ſe réduit toute la queſtion, & il me ſemble que la nôtre du §. 27. eſt plus naturelle & qu'elle répond à tous les phénomènes; je la croirois entièrement ſure, ſi je n'avois pas Meſſieurs de Buffon & d'Alembert contre moi, ou pour mieux dire, ſi ces illuſtres ſçavans autoriſoient notre théorie, car enfin leur ſentiment n'eſt pas contradictoire à notre théorie. Si nous combinons le mouvement de l'air, qui près la ſurface de la mer ſe fait depuis les deux poles vers l'équateur, nous trouvons la raiſon, pourquoi généralement parlant le vent aliſé eſt nord-eſt dans l'hémiſphère ſeptentrional & ſud-eſt dans l'hémiſphère méridional, & notre théorie bien entendue nous fournit une explication très-ample & très-naturelle de toutes les variations anniverſaires de ces vents aliſés. Remarquons auſſi, que le même mouvement de l'air depuis les poles vers l'équateur dans la région baſſe de l'atmoſphère, fournit une nouvelle ſource du vent général d'eſt dans la zone torride : car cet air continuellement tranſporté dans un plus grand parallèle, doit auſſi continuellement augmenter ſa vîteſſe d'occident en orient pour ſuivre le mouvement journalier de la terre ; &, comme il n'y a aucune force qui lui imprime cette augmentation de vîteſſe d'occident en orient, excepté l'adhérence des fluides qui ne ſçauroit la produire toute entière, il faut néceſſairement qu'il en provienne un mouvement d'air relatif d'orient en occident. C'eſt apparemment de cette façon qu'il arrive que généralement parlant les vents d'eſt ſont plus froids que les vents d'oueſt : car un vent qui part dans ſon origine des régions polaires vers l'équateur, & qui doit être bien froid, ſe tournera à l'eſt à meſure qu'il avance ; & au contraire un vent qui va d'abord directement de l'équateur vers les poles, & qui doit naturellement être chaud, ſe tournera à l'oueſt. On pourroit appliquer ce raiſonnement aux courans, & dire que les eaux qui partent d'abord directement de l'équateur vers les poles par la ſurface de la mer, prennent peu-à-peu une direction de l'oueſt à l'eſt : mais je ne crois pas ces changemens de direction dans les courans en queſtion bien ſenſibles ; parce que l'adhérence mutuelle eſt beaucoup plus grande dans l'eau que dans l'air, que les grands continens forcent l'eau à ſuivre le mouvement journalier de la terre, & enfin parce que le mouvement des courans d'eau eſt plus lent que celui des courans d'air.

XXXVII.

On aura remarqué que, suivant notre théorie, les mouvemens des eaux & de l'air sont précisément opposés entre eux près la surface de la mer. Cette circonstance ne sçauroit manquer de changer un peu la chose à cause de cette adhérence des fluides, dont nous avons si souvent parlé, & qui est la cause que tous les vents de durée produisent des courans du même côté : il se pourra donc faire que tout près la surface de mer les courans en question soient tout-à-fait insensibles, ou peut-être même qu'ils prennent une direction contraire à leur direction naturelle ; mais je suis persuadé qu'ils seront tels que je les ai décrits, pour peu que les eaux soient profondes : c'est ainsi que les vents arrêtent souvent les eaux d'une rivière vers la surface à son embouchure, & qu'elle ne laisse pas de jetter la même quantité d'eau dans la mer. Qu'on me permette d'alléguer ici deux observations faites par Dampier, qui éclaircissent toute notre théorie, & qui prouvent que dans de très petites profondeurs les courans peuvent être entièrement opposés. Ce célèbre voyageur dit dans le second tome de son *Voyage autour du Monde*, *p.* 387, édition de Rouen, de 1715. » Ce » n'est pas une chose extraordinaire de voir deux cou- » rans opposés en même-temps & en même lieu, la sur- » face de l'eau courant d'un côté, & le reste du côté » contraire ; j'ai vû moi-même étant à l'ancre, le cable » emporté par deux courans contraires, le bas du cable » tors d'un côté, & le haut d'un autre. « Nous voyons notre théorie sur les courans & contre-courans & sur la circulation des eaux de la mer, confirmée par cet exemple. En voici un autre qui prouve que les courans peuvent être opposés dans de très-petites profondeurs. Le même auteur dit au même endroit *que les courans repoussent quelquefois le navire, la poupe avant contre-vent & marée ;* c'est là un effet qu'un courant simple ne sçauroit jamais produire, & il faut que le navire nage entre-deux eaux, qui aient un mouvement contraire pour être sujet à un tel accident. Il arrive aussi souvent que le vaisseau obéit peu ou point du tout au gouvernail sans qu'on en voie aucune raison; cela ne sçauroit arriver à mon avis que lorsque le vaisseau se trouve dans un double courant: ce double courant tend à mettre le vaisseau dans une certaine position déterminée dont il est difficile de le détourner. Nous voyons donc qu'il peut y avoir des courans à moins de 16 pieds de profondeur & entièrement opposés à ceux de la surface. Cette remarque est très-essentielle à notre sujet. Il pourroit y avoir à la surface de la mer un courant du nord au midi : je suppose qu'on soit à même d'observer parfaitement ce courant, il ne faudroit pas d'abord conclure de cette observation que le vaisseau sera porté vers le Sud, puisqu'il pourroit par un contre-courant plus fort dériver vers le nord.

XXXVIII.

La circulation de l'air qui se fait, dans chaque hémisphère, nous fournit encore une explication assez naturelle des saisons sèches & humides. Je présume que cette région verticale d'air, qui sépare les deux tourbillons, qui dans le temps des équinoxes est à l'équateur, qui s'approche alternativement des deux tropiques, est toujours plus sujette aux pluies que les autres régions. La description qu'on nous fait des saisons sèches & humides me paroît fort conforme à cette conjecture. M. Dampier dit, par exemple, au tome 2. *page* 358. *en général les pays ou les parages qui sont sous la ligne ou auprès ont le plus fort des pluies aux mois de mars & de septembre :* mais je ne m'arrêterai pas à cette remarque, ne l'ayant faite que pour confirmer notre système en général.

XXXIX.

Voilà les deux grandes causes primitives des courans, l'une constante & l'autre périodique anniversaire. Je serai encore mention d'une troisième, différente de la seconde, si on l'examine de près. Il est clair que notre hémisphère septentrional doit être plus chargé d'eau pendant les six mois d'hiver, que pendant le reste de l'année ; il faut donc qu'une certaine quantité d'eau aille & revienne de six en six mois d'un hémisphère en l'autre ; le passage des eaux se fera sous la forme d'un courant simple sans produire aucun contre-courant par le fond. Je ne m'arrêterai pas à ces courans, parce qu'ils ne sçauroient qu'être extrêmement petits. Je remarquerai plutôt que ce flux & reflux annuel d'un hémisphère à l'autre, quoique fort petit, par rapport à la masse de la terre, ne sçauroit cependant manquer de causer une petite nutation annuelle de l'axe de la terre.

X L.

Les courans périodiques Lunaires ne peuvent être que des suites du flux & reflux de la mer : l'irrégularité de la terre diversifie le mouvement des marées à l'infini ; elle leur donne quelquefois le mouvement des courans, en ce que les eaux sont portées d'un même côté, pendant quelques jours de suite ; on pourroit même concevoir une telle structure, comme j'ai déjà insinué ci-dessus, qui fît que les eaux coulassent constamment d'un même côté dans certains endroits particuliers ; les marées deviendroient de vrais courans, & ces courans ne manqueroient pas d'avoir des inégalités périodiques Lunaires, mais comme toute cette matière a déjà été traitée par d'autres avec toute l'exactitude possible, je ne m'y arrêterai pas.

X L.

Ces variations de chaleur du jour à la nuit pourroient bien encore produire quelque mouvement dans les eaux de la mer, sous la forme de marées de douze en douze heures solaires. Mais ce mouvement sera peut-être imperceptible, parce qu'un temps de 24 heures ne suffit pas pour changer considérablement, & à de grandes profondeurs, la chaleur & la densité des eaux. Il seroit à souhaiter que nous eussions un grand nombre d'observations sur le degré de chaleur des eaux de la mer, faites en différentes heures du jour, en différentes saisons, en différentes hauteurs, & à plusieurs différentes profondeurs: la physique en général, & notre sujet en particulier, en tireroient de grandes lumières, tout comme des observations barométriques. M. de Buffon dit dans son histoire naturelle, *tom.* 1. *pag.* 440, que les plongeurs assurent qu'il fait fort froid dans les vallées de la mer: cette circonstance me confirme dans ma conjecture (§ 20) que les montagnes du fond de la mer, sur tout celles qui sont perpendiculaires à la direction des courans, les arrêtent; car si les eaux des vallées de la mer avoient un mouvement sensible, elles ne pourroient avoir une température fort différente de celle des autres eaux, tant parce que les eaux se mêleroient trop, que parce qu'étant continuellement transportées d'un endroit à l'autre, elles ne pourroient changer assez tôt leur degré de chaleur.

L'air recevra une beaucoup plus grande impression des changemens journaliers du chaud & du froid que les eaux: aussi suis-je persuadé que ces changemens causent, pendant les 24 heures, alternativement un petit vent oriental & occidental. Les vents de terre & les vents de mer, dont Dampier donne une description fort exacte, & qui proviennent sans doute des variations du chaud & du froid, pendant le jour & la nuit, prouvent assez que lesdits changemens suffisent pour produire ces allées & venues réciproques de l'air. Voici comme il me semble qu'on doit expliquer les vents de terre & les vents de mer. Les rayons du soleil échauffent l'air beaucoup plus par reverbération, qu'ils ne le font immédiatement; c'est-là la raison pourquoi l'air de la Zone-Torride devient d'autant plus froid qu'il est d'autant plus élevé par-dessus la surface de la mer ; cela étant, le soleil échauffera moins l'air de mer que l'air de terre, parce que les eaux sont transparentes, & moins propres à la reverbération que la terre : d'où je conclus que pendant le jour l'air de terre est plus chaud que l'air de mer ; & que pendant la nuit c'est le contraire, parce que la chaleur moyenne doit être de part & d'autre égale ; d'autres causes peuvent concourir à produire le même effet : ainsi on voit, par la premiere expérience du § 33, que pendant le jour l'air de mer sera porté vers la terre, & qu'il reviendra vers la mer par la haute région ; cette circulation augmentera jusqu'à midi, après quoi elle diminuera ; après le coucher du soleil elle commencera à se faire en sens contraire ; elle se renforcera jusqu'à minuit, & finira au lever du soleil ; pour recommencer peu après la premiere circulation : tout cela est conforme à l'expérience. Ce qui confirme notre explication, est que, dans les saisons humides pendant lesquelles les variations journalieres de la chaleur sont extrêmement petites, ces vents alternatifs s'évanouissent presque entierement.

Ces vents de terre & vents de mer sont très propres pour confirmer les circulations telles que nous les avons décrites : car si on vouloit supposer que tout l'air apporté par le vent de mer dans l'isle y soit retenu pendant tout le jour, les petites isles seroient bientôt surchargées d'air. Supposons, par exemple, une petite isle ronde, de 44000 pieds de circonférence, elle sera assez grande, suivant les observations de Dampier, pour former lesdits vents. Je ne donnerai au vent de mer qu'une vîtesse moyenne de cinq pieds par seconde, & il faudroit au bout des 12 heures, que l'air de l'isle fût deux fois plus dense qu'il n'eût été au commencement du vent de mer. Il est cependant sûr que les densités de l'air y restent à peu près les mêmes, il faut donc que l'air s'échappe par la haute région à mesure qu'il arrive près la surface de la mer.

XLII.

XLII.

Voilà ce que j'avois à dire de principal ſur les courans réguliers, ſoit conſtans ſoit périodiques. Je paſſe donc aux courans variables irréguliers, & en quelque façon accidentels. C'eſt une choſe également conforme à la théorie & à l'expérience, que les vents frais pouſſent devant ſoi les eaux de la pleine mer, & forment des courans du même côté, qui durent auſſi longtemps que les vents. Ces courans ne ſont d'abord qu'un effet de l'adhérence mutuelle de l'air & de l'eau : ces premieres eaux entraînées, rencontrent des eaux calmes, ce qui fait qu'elles ſe lévent un peu, & commencent à former des ondes, qui augmentant peu à peu, forment enfin de groſſes lames; celles-ci ſont enſuite directement expoſées au vent : ce n'eſt plus alors la ſimple adhérence qui entraîne les eaux, c'eſt, en même temps, une impulſion du vent très-forte; cette double action peut cauſer des courans aſſez rapides. Ces courans primitifs, formés en pleine mer, pourront encore être changés, d'une infinité de façons, par les terres voiſines, par la différente configuration des côtes, par la conformation du fond d'une mer peu profonde, &c.; ils pourront cauſer des inondations, d'autant plus grandes, que les courans ont plus d'étendue & qu'ils ſont arrêtés plus bruſquement. Si ce que j'ai dit au § 24, fondé ſur l'obſervation barométrique de M. Richer, eſt vrai, nous voyons que le courant général d'eſt, arrêté par les terres de l'Amérique, élève les eaux autour de l'iſle de Cayenne de 552 toiſes, il s'enſuit qu'un courant de la même force, & de dix dégrés d'étendue, pourra élever les eaux de plus de quatre toiſes. Il eſt clair auſſi, que les eaux entraînées doivent être remplacées, & ce remplacement pourra cauſer, par un ſecond effet, d'autres courans accidentels, qui ne doivent pas être conſidérés comme produits immédiatement par les vents, puiſque ces ſeconds courans peuvent être hors des limites des vents. Dans les endroits d'où partent les vents, les eaux pourront baiſſer conſidérablement, ſur-tout lorſque d'autres eaux ne peuvent pas remplacer librement celles qui ſont entraînées, tout comme il arrive aux bords de la mer du Sud; ces baiſſemens ſont quelquefois aſſez conſidérables, & durent aſſez longtemps pour détruire les effets du flux de la mer, de maniere qu'il paroiſſe y avoir un reflux continuel de pluſieurs jours de ſuite.

XLIII.

Les grandes variations barométriques peuvent encore cauſer des courans accidentels: cette cauſe accompagne le plus ſouvent celle que nous venons d'expoſer; mais elle agit par un autre principe. Si le barométre vient tout d'un coup à baiſſer conſidérablement, il faut que la mer s'éléve au même endroit; & ſi nous conſidérons que les mêmes variations barométriques s'étendent ordinairement fort loin, nous voyons que les eaux doivent couler en grande quantité vers le milieu de tout cet eſpace, qui peut être de 30 ou 40 dégrés à la ronde

LXIV.

Il me ſemble encore que dans la Zone Torride, la quantité des abondantes pluies, pendant la ſaiſon humide, peut tellement ſurpaſſer l'évaporation des eaux, & au contraire que dans la bande, où il règne au même temps la ſaiſon ſéche, l'évaporation peut tellement prédominer, que l'équilibre entre les eaux des deux bandes en ſoit ſenſiblement dérangé, & que ce défaut d'équilibre occaſionne des courans. A ces cauſes, on pourroit en ajouter pluſieurs autres; les ſimples rivières peuvent cauſer des courans ſenſibles juſqu'à de grandes diſtances; les moindres forces ſuffiſent pour entretenir des courans circulaires ſuperficiels, ſur-tout dans les golphes: quelques-uns prétendent qu'il y a un tel courant tout le long des côtes de la mer Méditerranée, & que les eaux circulent continuellement tout le long des côtes Européennes jusqu'au détroit de Gibraltar; & que de-là elles s'en retournent tout le long des côtes Africaines. En examinant ces causes, on se souviendra toujours qu'un très-petit défaut d'équilibre est capable de produire des courans sensibles. C'est une vérité que tous les phénomènes du flux & reflux prouvent absolument.

X L V.

Je finirai cette premiere partie par une réflexion générale sur la nature des courans, qui servira de base à notre seconde partie. Nous avons démontré, par rapport au courant simple général d'est, causé par l'adhérence des fluides, que la vîtesse doit diminuer uniformément depuis la surface jusqu'au fond de la mer, en supposant un fond de niveau & tout uni; c'est une vérité que toutes les expériences physiques confirment: mais quand même on substitueroit une autre cause, elle ne laissera pas de faire à peu près le même effet dans les courans simples, l'adhérence des eaux contre le fond sera toujours assez forte pour que les eaux y soient comme entierement arrêtées; & comme, depuis la surface jusqu'au fond, chaque lit d'eau d'une même épaisseur, doit produire une même diminution de vîtesse, il faut que les vîtesses diminuent uniformément. Je me souviens qu'en me promenant un jour tout le long d'un canal droit, large d'environ 16 pieds, & profond de trois pieds, dont les eaux couloient tout doucement, & qui charioit par hasard des feuilles d'arbre, les unes vers la surface, d'autres vers le milieu, & d'autres enfin plus bas jusqu'à toucher le fond; je vis toujours les feuilles supérieures devancer les inférieures assez uniformément, & que celles du fond furent presque sans aucun movement. J'ai expliqué ensuite aux §§ 19 & 20, comment les énormes inégalités du fond de la mer diminuent extrêmement les profondeurs des courans : c'eſt ce qui m'a engagé à conſidérer au milieu des eaux, un fond des courans, qui peut être beaucoup au-deſſus du fond de la mer. J'enviſagerai de la même manière les courans doubles ou plus compoſés, parce que la même raiſon y ſubſiſte. Cette ſuppoſition ſi naturelle m'a toujours paru conforme aux rélations des plongeurs, & aux obſervations faites avec la ſonde. D'ailleurs quand même il y auroit en pleine mer des endroits où le fond des courans fût extrêmement profond, ces courans ne pourroient être que très-foibles, & preſque ſans aucune conſéquence, à cauſe de la quantité d'eau déterminée qu'ils amènent.

SECONDE PARTIE.

Sur la meilleure manière d'obſerver & de déterminer les courans.

I.

Il s'agit à préſent d'examiner ſi l'on pourra toujours connoître les courans, & en déterminer la direction & la vîteſſe ; c'étoit d'abord l'unique queſtion de l'Académie. Il faudroit être bien peu verſé dans l'hiſtoire de la navigation, pour ignorer d'un côté ſon importance, & de l'autre le peu de progrès qu'on y a encore fait. Il n'y a aucun doute que les plus grands génies, préférant toujours l'utile au brillant, n'en aient déjà fait l'objet de leurs recherches. Comme je n'ai rien trouvé de ſatisfaiſant, ſur cette matière, dans aucun auteur, je me ſerois taxé moi-même d'une trop grande témérité de l'entreprendre, ſi je n'avois fait réflexion que l'illuſtre Académie a trop de pénétration pour ne rien propoſer d'impoſſible par ſa nature ; & en même temps trop d'équité pour rejetter des idées qui, quoiqu'imparfaites, ne laiſſent pas d'être utiles, & peut-être les meilleures ; & qu'une bonne logique eſt ſouvent plus capable de nous conduire à de pareilles idées, qu'une grande fertilité d'eſprit.

II.

Commençons par les réflexions les plus générales. Dans toutes les queſtions de pratique, il faut d'abord chercher dans la théorie, les principes ſur leſquels on prétend fonder les moyens que la pratique doit fournir. Tant qu'on ne voit aucun de ces principes, on n'avancera pas plus que ſi on cherchoit un mouvement perpétuel purement méchanique, auquel bien des gens qui ne manquoient ni de bon sens ni de talens, ne se seroient jamais appliqués, s'ils avoient suivi ce précepte. Or, si un observateur se trouve dans un système, dont toutes les parties se meuvent uniformément & dans une direction parallèle, sans avoir aucune communication ni directe ni indirecte avec aucun objet pris hors du système, il lui est tout-à-fait impossible de s'appercevoir de ce mouvement.

I I I.

La réflexion que nous venons de faire nous mène d'abord à cette conclusion indubitable, sçavoir, que si on suppose toutes les eaux d'un courant, mues avec une vîtesse uniforme, parallèle & constante, depuis la surface jusqu'au fond de la mer, & qu'un navire nage au milieu de ces eaux, il sera entièrement impossible de s'appercevoir de ce courant, tant qu'on n'aura aucune communication ou relation avec rien qui soit hors du système commun du courant & du vaisseau, puisque le navire aura toujours le même mouvement que le courant, s'il n'est poussé par aucune force, & que le sillage du vaisseau sera le même que s'il n'y avoit aucun courant. Ainsi pour déterminer ces sortes de courans, il faut recourir à quelque principe indépendant du courant; & il est facile de faire une énumération parfaite de tous les principes possibles pour examiner ensuite l'usage qu'on en peut faire. Ces principes ne sçauroient être que les astres, ou l'air, ou quelque terre voisine, ou enfin le fond de la mer. J'examinerai en peu de mots l'usage qu'on peut faire de chacun de ces quatre principes, en faisant d'abord abstraction du sillage du vaisseau, qui n'est que le mouvement relatif du vaisseau & du courant, qu'on peut & qu'on doit toujours déterminer à part, pour réduire la question au cas le plus simple, qui est de supposer le vaisseau simplement emporté par le courant, sans avoir aucun mouvement relatif avec le courant.

IV.

Quant aux aſtres, ils ne pourront être d'aucun uſage qu'au bout d'un grand intervalle de temps, en cherchant le plus ſouvent, & le mieux qu'on peut, les variations en longitude & en latitude. C'eſt effectivement par ce ſeul principe qu'on a reconnu l'exiſtence des courans en pleine mer ; mais comme les courans ſont fort variables d'un endroit à l'autre, il eſt impoſſible de tirer aucun fruit de ce principe pour déterminer les courans en tout temps & en tout lieu. On voit auſſi que l'air ne peut ſervir, tout au plus, que pour déterminer le mouvement relatif des eaux & de l'air; de ſorte qu'il n'y a rien à eſpérer non plus de ce côté-là. Si l'on ſe trouve dans le voiſinage de quelque terre, ou côte, ou iſle, la ſimple géométrie enſeigne tout ce qu'on peut faire pour voir le chemin du vaiſſeau, en tant qu'il eſt emporté par le courant: ce cas eſt trop facile & trop rare pour que je m'y arrête. Quant au fond de la mer, ſuppoſé qu'on puiſſe l'atteindre, toutes les opérations qu'on peut faire pour déterminer les courans par ſon moyen, ſe réduiront au principe de l'ancrage. J'examinerai ce cas ci-deſſous, & je ne fais ces remarques préliminaires, que pour ne point ſortir de la ſeule route qui peut conduire, en quelque façon, à tous les moyens poſſibles de déterminer les courans, & nous mettre en état d'en choiſir les meilleurs.

V.

Nous voyons donc qu'en ſuppoſant toutes les eaux, qui forment un certain courant, mues d'une vîteſſe & direction commune depuis la ſurface juſqu'au fond de la mer, il n'y a aucun autre moyen de ſatisfaire à notre queſtion, que celui de rapporter le mouvement des eaux au fond de la mer : ce moyen eſt à la vérité le plus ſûr & le plus exact, mais il eſt fort rare de ſe trouver dans les circonſtances qu'il demande ; & hors de ces circonſtances, nous ſommes réduits à ne rien eſpérer davantage. Voilà ſans doute la raiſon du peu de progrès qu'on a fait juſqu'ici ſur notre queſtion : c'eſt qu'on n'a pas enviſagé les courans comme ils doivent l'être.

J'aurois moi-même renoncé à toute eſpérance d'aller plus loin, ſi je n'avois examiné ſcrupuleuſement les cauſes & la nature des courans avant que de penſer aux moyens de pouvoir les déterminer. Nous avons vû, dans notre première Partie, que les courans, bien loin d'être les mêmes pour toute la profondeur de la mer, ſont néceſſairement fort inégaux, & que les eaux ne ſçauroient qu'être comme entièrement calmes au-deſſous d'une certaine profondeur. Cette heureuſe propriété nous fournit un principe tout nouveau pour déterminer les courans; c'eſt celui de rapporter le mouvement des eaux qui ſont vers la ſurface, aux eaux qui ſont au-deſſous du *fond des courans*. Ce dernier principe nous ſeroit devenu abſolument inutile, ſi toute la maſſe d'eau n'avoit qu'un ſeul & même mouvement depuis la ſurface juſqu'au fond de la mer.

V I.

Il eſt évident que nous avons fait juſqu'ici une énumération parfaite de tous les principes, & qu'ainſi nous ne pouvons encore nous être écartés du chemin de parvenir à la meilleure ſolution de notre problême ; Nous voyons donc qu'excepté le cas de quelque terre voiſine & viſible, qui ne mérite pas que nous nous y arrêtions davantage, nous n'aurons plus aucun autre principe à conſidérer que celui du fond de la mer, & celui du fond du courant ; cette conſidération m'engage à diviſer notre queſtion en deux cas. Le premier ſera celui où l'on pourra atteindre le fond de la mer ; & le ſecond, quand on pourra avoir quelque communication avec la région des eaux calmes, qui ſont au-deſſous du fond du courant ;

courant ; hors de ces deux cas, j'ose avancer positivement qu'il est tout-à-fait impossible de déterminer les courans en pleine mer ; car enfin quel autre point pourroit-on considérer, qui fût ou fixe, ou dont le mouvement fût connu, pour y rapporter le mouvement des eaux? J'avouerai même que le premier cas ne sçauroit être bien fréquent en pleine mer ; mais je crois par-contre, qu'il sera fort rare qu'on ne se trouve dans le second cas ; & pour peu qu'on veuille se relâcher de l'exactitude entière, je suis persuadé qu'on s'y trouvera toujours : je me flatte que ceux qui auront daigné lire avec attention notre première partie en conviendront avec moi. Ainsi le principe le plus général & le plus utile sera celui de rapporter le mouvement des courans aux eaux calmes, qui sont au-dessous du fond des courans. C'est cependant un principe auquel personne n'a encore pensé, que je sçache. J'aurai d'autant plus de soin à l'examiner & à le mettre à profit.

VII.

Avant que de m'engager dans ces recherches de pratique, il sera bon de remarquer encore que les changemens du mouvement des eaux d'un seul & même courant par rapport à leurs différentes profondeurs, peuvent se faire assez brusquement ; c'est ce que nous avons encore établi dans notre première partie, tant par des raisons solides que par des observations faites par Dampier : ainsi, pour déterminer entièrement les courans, il ne suffira pas de rechercher le mouvement des eaux à la surface de la mer ; il faudra trouver encore une manière d'en déterminer le mouvement depuis la surface de la mer, jusqu'au fond du courant : cela nous servira non-seulement à connoître plus distinctement la nature des courans par observations, mais il en résultera encore une beaucoup plus grande utilité pour la navigation ; les courans pourront souffrir des changemens sensibles de-

H

puis la ſurface de la mer juſqu'à la profondeur qui répond à la quille du vaiſſeau, & en ce cas on jugera mieux de la dérive par le mouvement des eaux qui auroient 6 ou 7 pieds de profondeur, que par celui qu'il y auroit tout près de la ſurface. Tâchons à préſent de tirer le plus d'uſage qu'il nous ſera poſſible, des deux principes que j'ai expoſés au §. 6. les ſeuls qu'on peut employer.

VIII.

On profitera du fond de la mer, en jettant l'ancre; le vaiſſeau étant amarré, c'eſt ſans doute une choſe très-facile d'obſerver le courant, s'il y en a un, & d'en déterminer la vîteſſe & la direction. Si on veut ſe contenter de connoître le mouvement des eaux à la ſurface, on pourra ſe ſervir de cet inſtrument qu'on emploie pour trouver le ſillage du vaiſſeau; c'eſt un morçeau de bois fait en forme de navette garni par le bas d'un morçeau de plomb & attaché à une ficelle, qui eſt roulée ſur un eſpèce de devidoir, & diſtinguée de diſtance en diſtance par des nœuds: on jettera la navette dans la mer, qui ſera auſſitôt emportée par le courant; on comptera le nombre des nœuds qui ſe dévident dans un temps donné, & par-là on ſçaura auſſitôt la vîteſſe du courant, près la ſurface de la mer; on remarquera auſſi la direction de la ficelle, qui ſera la même que celle du courant; cette manœuvre eſt trop connue pour que je m'arrête à la décrire avec un plus grand détail, & à marquer les précautions qu'il faut prendre pour la faire avec plus d'exactitude.

IX.

La méthode précédente ne pouvant ſervir qu'à déterminer le mouvement des eaux à la ſurface de la mer, il faudra recourir à une autre méthode pour déterminer le mouvement des eaux à telle profondeur, qu'on voudra.

A cet effet il n'y a qu'un ſeul moyen, ou s'il n'eſt pas le ſeul, du moins ſera-t-il viſiblement le meilleur; il conſiſte à attacher une boule d'un diamètre & d'une péſanteur ſpécifique donnée à une longue ficelle, à deſcendre cette boule dans les eaux de la mer à telle profondeur qu'on voudra, à obſerver l'inclinaiſon de la ficelle, & la direction de ſon plan vertical : on ſçait qu'on peut connoître exactement la vîteſſe des eaux qui pouſſent la boule par l'inclinaiſon de la ficelle ; & la direction du plan vertical de la ficelle, marquera immédiatement celle des eaux. J'ai penſé à cette méthode, & j'en ai même fait pluſieurs eſſais ſur mer, avec beaucoup de ſuccès l'année 1733, & par conſéquent longtemps avant que l'Académie ait fait imprimer une piéce de M. Poléni, qu'elle avoit couronnée, & dans laquelle l'auteur indique cette même méthode ; au reſte elle exige beaucoup de diſcuſſions géomètriques, que je réſerve pour la fin de ce mémoire, pour n'en point interrompre le fil. C'eſt une matière que j'ai examinée avec d'autant plus de ſoin, qu'elle doit ſervir de baſe à preſque tout ce que nous avons à propoſer ſur notre ſujet.

On pourra donc reconnoître les courans de toiſe en toiſe de hauteur verticale, & on jugera de cette hauteur verticale par la longueur de la ficelle mouillée, multipliée par le coſinus de ſon inclinaiſon. On ſçaura par-là toutes les variations des courans ; & quand la ficelle ne marquera plus aucune variation ni inclinaiſon ſenſible, ce ſera une marque que la boule attachée à la ficelle ſera parvenue dans la région des eaux calmes. Nous ſerions bien plus en état de raiſonner ſur la nature des courans, & de perfectionner nos méthodes, ſi nous trouvions dans les auteurs un grand nombre de ces ſortes d'obſervations ſi faciles à faire, quand le vaiſſeau eſt à l'ancre : il eſt fâcheux que nous n'en trouvions aucune. On ſera auſſi attentif que le vaiſſeau ſoit bien amarré dans le temps qu'on fait les obſervations ; car ſi le vaiſſeau chaſſoit ſur l'ancre, la détermination des courans ne ſeroit pas juſte.

X.

J'eſtime à la vérité le mouillage comme le moyen le plus exact de déterminer les courans ; mais il faut avouer auſſi, d'un autre côté, que c'eſt un moyen incommode, s'il faut jetter l'ancre uniquement dans cette vûe, & que d'ailleurs il eſt rare que la mer ne ſoit trop profonde pour mouiller l'ancre, la plus grande profondeur des mouillages n'étant que de 40 ou 50 braſſes. J'ai cependant fait réflexion, à l'égard de cette difficulté, qu'on pourroit bien employer le même principe pour des profondeurs beaucoup plus grandes: on donne aux cordeaux des ſondes juſqu'à 200 braſſes de longueur ; on pourroit donc attacher à ces cordeaux de petites ancres qui n'auroient pas plus de 18 à 20 livres de poids, qui eſt eſt celui qu'on donne aux corps des ſondes : cette petite ancre ne ſeroit deſtinée qu'à amarrer une petite bouée ou un morceau de liege, qui flotteroit ſur l'eau ; moyennant ce petit morceau de liége arrêté à la ſurface de la mer, il ſeroit facile de déterminer le courant, ſurtout ſi on vouloit ſe contenter de le connoître tel qu'il eſt à la ſurface ; on n'auroit qu'à attacher au morceau de liége cette ficelle, dont j'ai parlé au §. 8. & à faire enſuite la même opération, qu'on fait pour trouver le ſillage. Il eſt aiſé à comprendre que tout cela ſera fort facile à exécuter ſur la chaloupe, dont je prévois que le ſecours ſera fort ſouvent néceſſaire pour la ſolution de notre queſtion : mais ſi l'on vouloit déterminer le courant dans toute ſa profondeur de la manière que j'ai expoſée au §. 9. je trouve que le meilleur moyen en ſera de retenir la chaloupe, moyennant la rame, toujours près du morceau de liége, & de faire cependant ſur la chaloupe les mêmes obſervations, que j'ai propoſées de faire audit §. 9. ſur le vaiſſeau amarré.

X I.

Voilà tout ce que j'ai pu imaginer pour mettre à profit notre premier principe, qui eſt de ſe ſervir du fond de la mer : on voit même aſſez clairement que c'eſt tout ce qu'on peut faire. Voyons à préſent quels moyens nous reſtent lorſqu'on ne trouve point de fond avec la ſonde. S'il y a de tels moyens, ils ne peuvent abſolument être fondés que ſur le ſeul principe qui nous reſte, & qui conſiſte à rapporter le mouvement des lits d'eau de différentes profondeurs, aux eaux calmes, qui ſont au-deſſous du fond des courans. Nous ſommes donc réduits à ſuppoſer qu'on puiſſe atteindre le fond des courans, ou du moins une région vers le fond, où les eaux n'aient plus qu'un mouvement inſenſible. Sans une ſemblable ſuppoſition nous aurions actuellement épuiſé toute cette matière*; mais les raiſons que nous avons expoſées dans notre première partie pour l'établir, me ſemblent ſi convaincantes, & cette hypothèſe me paroît ſi conforme aux obſervations & aux expériences, qui ont quelque rapport avec cette matière, que je croirois avoir grand tort, ſi je n'en faiſois pas notre reſſource principale. Je n'héſiterois pas même d'adopter cette hypothèſe, quand toute notre théorie ſur les cauſes des courans ſeroit fauſſe ; car enfin quelles que puiſſent être les cauſes des courans, elles ne ſçauroient être qu'extrêmement petites vers le fond de la mer, & les moindres obſtacles ſeront capable d'en prévenir tout l'effet : à mon avis, une chaîne de montagnes pourra arrêter les courans juſqu'à des diſtances énormes, de ſorte que les courans paſſent par deſſus les montagnes du fond de la mer, ſans ſe mêler preſque avec les eaux plus baſſes ; c'eſt de cette manière que ſe forme la région des eaux calmes ; c'eſt ainſi que le vent général d'eſt eſt arrêté par les terres de l'Amérique, & qu'on ne le trouve dans la mer du ſud, qu'à une très-grande diſtance des côtes ; la même choſe arrivera à bien plus forte raiſon aux eaux de la mer, & cela d'autant plus, qu'il n'y a nul doute que de pareils obſtacles ne reviennent de diſtance en diſtance, & que tout le fond de la mer entière n'en ſoit couvert. Je prie le lecteur de ſe rappeller tout ce que j'ai dit ſur cette matière dans notre première partie : cette hypotèſe doit d'ailleurs nous faire d'autant moins de peine, que les courans ſont néceſſairement d'autant plus foibles par eux-mêmes, qu'ils ſont plus profonds. J'avoue que les profondeurs des courans ſenſibles pourront être inégales ; il y aura peut-être des courans, qui ne ſeront ſenſibles que juſqu'à la profondeur de 8 ou 10 braſſes, d'autres juſqu'à 20 ou 30 : apparemment il ſera rare d'en trouver de plus profonds, & il ſe peut qu'il n'y en ait aucun qui ait plus de 50 braſſes de profondeur : moins les courans ſeront profonds, plus on pourra les déterminer exactement ; & j'ai trouvé qu'on peut les déterminer avec aſſez d'exactitude juſqu'à cent braſſes de profondeur : au-delà de cette profondeur, on commence à rencontrer des obſtacles que nous verrons cependant n'être qu'accidentels, qui peu-à-peu augmentent juſqu'à devenir enfin inſurmontables.

X I I.

Suppoſons à la place du vaiſſeau un ſimple radeau, qui flotte ſur les eaux de la mer ; ce radeau aura tout-à-fait le même mouvement que le courant près de ſa ſurface. S'il ſe trouve ſur ce radeau un obſervateur muni d'un globe attaché à un long cordeau qu'il faſſe deſcendre dans les eaux de la mer, à pluſieurs différentes profondeurs, il arrivera ou que le cordeau conſerve ſa direction verticale, & en ce cas l'obſervateur pourra être aſſuré qu'il n'y a point de courant, ou bien que le cordeau prenne ſucceſſivement de différentes inclinaiſons, ce qui marquera auſſitôt qu'on ſe trouve dans un courant. Je ſuppoſe que moyennant ces inclinaiſons obſervées on puiſſe déterminerexactement les vîteſſes des différens lits d'eau, relativement à celle du radeau,& c'eſt-là un article que je traiterai ci-deſſous, avec toute l'attention qu'il mérite ; ſi l'on ſe trouve dans un courant ſimple, le cordeau ſera incliné de plus en plus, à meſure qu'on le file, & les vîteſſes relatives qui répondront à toutes ces inclinaiſons augmenteront ſuivant notre théorie à peu près en même raiſon que les profondeurs verticales ; mais il arrivera bientôt que cette loi ſoit viſiblement interrompue, & que le cordeau commence à n'augmenter que très-peu ſon inclinaiſon, c'eſt alors une marque que la boule attachée au cordeau s'approche du fond du courant. Enfin, la boule pourra être cenſée avoir atteint la région des eaux calmes, quand le cordeau ne montrera plus de variations ſenſibles, quoiqu'on en file encore pluſieurs braſſes. Alors la dernière inclinaiſon du cordeau donnera à connoître la vîteſſe abſoluedu courant à la ſurface de la mer, & par les vîteſſes relatives qu'on a obſervées précédemment, on pourra déterminer auſſi les vîteſſes abſolues de chaque lit d'eau, à telle profondeur qu'on voudra : ſi on ſe trouve dans un double courant, ou dans un autre courant compoſé, la méthode ſera entièrement la même. Je remarquerai ſeulement que les vîteſſes relatives n'iront pas en augmentant depuis la ſurface juſqu'au fond du courant ; elles n'augmenteront que juſqu'à une certaine profondeur, & puis elles décroîtront ; les vîteſſes relatives formeront donc à une certaine profondeur ce qu'on appelle *maximum*, & la boule étant parvenue dans cette région, le cordeau ne montrera aucune variation ſenſible pendant quelque temps ; on pourroit croire d'avoir actuellement atteint la région des eaux calmes pendant qu'on en ſeroit encore fort éloigné ; il ne faudra donc pas s'arrêter à ces premières apparences, & filer encore pluſieurs braſſes de cordeau ; ſi après cela le cordeau ſe rapproche de la verticale, il faudra continuer l'opération juſqu'à ce qu'on ſoit ſûr d'avoir atteint la région des eaux calmes. Voilà une petite ébauche de notre nouvelle méthode, fondée ſur le ſeul principe qui nous reſtoit, qui a ce grand avantage, qu'on peut la ſuivre en tout temps, & en tout lieu. Mais cette première idée que nous venons de donner de notre méthode, demande pluſieurs éclairciſſemens & corrections.

XIII.

Si nous conſidérons maintenant un vaiſſeau à la place du radeau, il pourra arriver que le vaiſſeau flotte, (car je fais encore abſtraction de ſon ſillage) dans un courant aſſez variable pour avoir des inégalités depuis la ſurface de la mer, juſqu'à la profondeur de la quille : en ce cas il y aura quelque inégalité entre la vîteſſe abſolue du vaiſſeau & celle de la ſurface du courant. On obſervera donc alors que le cordeau s'incline ſenſiblement auſſitôt que la boule eſt plongée dans l'eau ; la quantité de cette première inclinaiſon & la poſition du plan vertical qui paſſe par le cordeau donneront à connoître le mouvement relatif des eaux de la ſurface, & celui du vaiſſeau : les obſervations ſuivantes doivent être rapportées pareillement au mouvement du vaiſſeau ; & enfin la dernière obſervation montrera le mouvement abſolu du vaiſſeau, qui fait ſa vraie dérive en tant qu'elle eſt produite par les courans : ce n'eſt que celle-ci qui intéreſſe la navigation ; mais ſçachant le mouvement abſolu du vaiſſeau, & connoiſſant en même-temps par toutes les obſervations réunies le mouvement relatif de chaque lit d'eau, avec celui du vaiſſeau, on en pourra déterminer le mouvement abſolu de chaque lit d'eau, & toutes les inégalités du courant, tant en direction qu'en force : ainſi les obſervations intermédiaires ne ſont tournées que du côté de la phyſique. Ce que j'ai dit au §. 37. de la première partie, fait aſſez voir que cette réflexion n'eſt pas à négliger.

XIV.

X I V.

Nous avons ſuppoſé encore que le vaiſſeau flotte ſimplement dans les eaux de la mer, ſans ſouffrir aucune autre impreſſion que celle du courant; il faut tâcher de ſe mettre autant qu'il eſt poſſible dans le cas de cette ſuppoſition; les mariniers ſçauront mieux que moi ce qu'il convient de faire pour cet effet; s'il faut amener toutes les voiles, ou s'il convient mieux d'en iſſer d'autres qui arrêtent le vaiſſeau, de façon qu'on ne remarque plus aucun ſillage: peut-être que le meilleur expédient ſera de faire les obſervations ſur la chaloupe, qu'on abandonneroit à elle même, ſans employer ni rame ni voile; encore conviendroit-il d'examiner ſi le vent ne fait pas cheminer la chaloupe par l'effort qu'il exerce contre les bords: en ce cas quelques legers coups de rame pourront prévenir le petit ſillage. Je conſeillerois de jetter à la mer un corps flottant d'une peſanteur ſpécifique preſque égale à celle des eaux de la mer; il ſera facile aux rameurs de gouverner la chaloupe de manière qu'elle n'ait pas le moindre mouvement ſenſible relativement au corps flottant. En général les calmes & une mer unie ſont extrêmement favorables pour la détermination des courans: les tempêtes & une mer fort agitée rendront toutes ces obſervations fort difficiles & douteuſes. Ce ſont-là des inconvéniens qu'aucune induſtrie humaine ne pourra éviter; dans la mer Pacifique, on ſera toujours à même d'obſerver les courans avec beaucoup d'exactitude.

X V.

La mauvaiſe humeur & le peu de complaiſance des Capitaines de vaiſſeau ſont ſouvent le plus grand obſtacle aux obſervations qu'on pourroit faire; la plûpart des Phyſiciens & aſtronomes, qui ſe ſont trouvés ſur mer, s'en ſont plaint; Ceux qui commandent le vaiſſeau pourroient bien se refuser aux conseils que je viens de donner, & prétendre qu'on observe le courant sur le vaisseau, au milieu du cinglage : notre méthode s'étend à la vérité jusques-là ; mais il est à remarquer que la détermination des courans est d'une nature à faire craindre presque toujours quelque petite erreur, qui par elle-même seroit de très-peu de conséquence, mais qui doit devenir d'autant plus grande que le sillage est plus rapide. Il conviendra donc de ne pas aller à pleines voiles, pendant qu'on fait les observations ; après avoir ferlé ou du moins cargué les voiles, on attendra quelques momens que le vaisseau ait pris son sillage uniforme. M. Bouguer, à qui les mathématiques, la physique & la navigation sont redevables de tant d'importantes découvertes, a démontré dans son excellent mémoire inséré aux mémoires de l'Académie de l'année 1745, page 314, que, dans un vaisseau du premier rang, une ou deux minutes de temps suffisent pour censer tel le sillage. Cette uniformité du sillage durant les observations est très-essentielle ; c'est pourquoi il faut ne rien changer, ni aux voiles, ni au gouvernail pendant tout ce temps. Ensuite on plongera d'abord la boule dans l'eau tout près de la surface, pour connoître le mouvement relatif du vaisseau, par rapport aux eaux de la surface ; c'est ce mouvement apparent qu'on prend pour le sillage. J'exprimerai la direction & la force de ce mouvement, observé par *A B* (*fig.* 5.) ; après cela on descendra la boule jusques dans la région des eaux calmes, & l'on reconnoîtra toujours d'avoir atteint cette région quand le cordeau ne varie plus, ni en direction, ni en inclinaison sur plusieurs brasses de descente de la boule : observant alors de rechef l'inclinaison du cordeau, & la direction de son plan vertical, on en pourra déduire le mouvement du vaisseau relativement aux eaux calmes, c'est-à-dire, le mouvement vrai du vaisseau. J'exprimerai la direction & la force de ce mouvement par *A C* ; si on tire ensuite la droite

B C, celle-ci marquera la direction & la force du courant tel qu'il eſt près de la ſurface de la mer. Cette méthode demande quelques éclairciſſemens & réflexions.

X V I.

(*a*) Comme la poſition & la grandeur de la ligne *B C* dépend de la juſte détermination des lignes *A B* & *A C*, il peut arriver que de petites erreurs dans la détermination de ces deux lignes jettent une erreur beaucoup plus grande ſur la ligne *B C*, qu'elle n'eut été, ſi l'on eût ſuivi la méthode expoſée aux §. §. 13 & 14.

(*b*) On remarquera toujours que *A C* marque le vrai mouvement du vaiſſeau, pendant que *A B* exprime ſon mouvement relatif, par rapport aux eaux de la ſurface de la mer ; ainſi la ligne *B C* exprimera la direction & la force du courant près de la ſurface de la mer. Mais les obſervations intermédiaires qu'on aura faites ſur l'inclinaiſon du cordeau, & ſur la direction de ſon plan vertical, détermineront entièrement le courant pour telle profondeur qu'on voudra ; car ſi l'on faiſoit, par exemple, une obſervation à la profondeur de dix braſſes, & qu'on trouvât le mouvement relatif du vaiſſeau avec les eaux de dix braſſes de profondeur répondre à la ligne *A D*, la droite *D C* exprimeroit le courant pour la profondeur de dix braſſes.

(*c*) Si le courant conſerve la même direction dans toute ſa profondeur, chaque point *D* ſe trouvera dans la droite *B C* ; mais ſi les eaux du courant changent de direction dans leurs différentes profondeurs, ces points intermédiaires tels que *D* pourront s'écarter de la ligne *B C*.

(*d*) La dérive du vaiſſeau cauſée par le courant peut être exprimée en un certain ſens par la même droite *B C* ; mais je trouve qu'on n'attache pas à ce mot de *dérive* un ſens aſſez précis : ce n'eſt cependant que pour connoître en tout temps la dérive, qu'on ſouhaite ſi fort de pouvoir déterminer les courans. Je ferai donc un article à part ſur cette importante matière.

XVII.

On appelle communément dérive, la différence entre la vraie route du vaiſſeau, & ſa route eſtimée : il faut donc pour attacher un même ſens au mot de *dérive*, convenir ſur la façon d'eſtimer la route du vaiſſeau, & par conſéquent ſur la manière d'eſtimer ſa vîteſſe & ſa direction. Nous avons ſuppoſé qu'on eſtime la vîteſſe, ſoit par la navette qu'on jette dans l'eau, ſoit par l'inclinaiſon du cordeau en plongeant la boule tout près de la ſurface de la mer, ces deux manières reviennent au même; & on voit que la vîteſſe du vaiſſeau eſtimée de l'une ou de l'autre manière, n'eſt proprement que la vîteſſe relative du vaiſſeau, par rapport aux eaux de la ſurface de la mer ; En ce ſens donc la dérive du vaiſſeau doit être réellement exprimée par *BC*. Mais je ne ſçais s'il n'y a pas quelque équivoque ſur l'eſtime de la direction du vaiſſeau : ſi on veut que la ligne *BC* marque la dérive du vaiſſeau, il faut eſtimer la direction du vaiſſeau, par celle du plan vertical du cordeau, en plongeant la boule près de la ſurface de la mer, & il eſt à remarquer que cette direction n'eſt pas préciſément celle de la quille, qu'on prend, ſi je ne me trompe, pour la direction de la route du vaiſſeau. Il eſt vrai que l'une & l'autre manière d'eſtimer la direction de la route du vaiſſeau reviendroient encore au même, ſi le vaiſſeau ne dérivoit que par l'action d'un courant, qui ne ſouffrît aucune variation depuis la ſurface de la mer, juſqu'à la profondeur de la quille : mais ſi le courant eſt ſenſiblement variable tout près de la ſurface, & ſurtout ſi un vent de côté fait dériver en même-temps le vaiſſeau, il eſt ſûr que la direction de la quille n'eſt plus la même, avec celle du plan vertical du cordeau ; en tenant la boule plongée un peu au-deſſous de la ſurface de la mer, l'angle compris entre ces deux directions donnera principalement l'eſtime de la dérive du vaiſſeau, en tant qu'elle eſt produite par le vent ; mais ſi l'on ſuit les régles que nous avons données pour la conſtruction des lignes *AB* & *AC*, alors la ligne *BC* marquera la vraie dérive, ſur laquelle la dérive cauſée par le vent n'aura aucune influence, & le point *C* marquera le vrai lieu du vaiſſeau. On voit bien au reſte que dans toutes ces opérations il n'y a point de diſtinction à faire entre les courans & les marées, les uns & les autres faiſant la même impreſſion ſur le vaiſſeau. Cependant un phyſicien les reconnoîtra facilement par les variations, qu'il obſervera aux mouvemens des eaux, en réitérant les mêmes obſervations de trois en trois heures.

XVIII.

Je n'ai mis le précédent article que pour me conformer aux principes ordinaires de la Navigation, car en adoptant nos principes, on eſt en état de déterminer immédiatement la ligne *AC* & le point *C*, qui marquent la vraie route & le vrai lieu du vaiſſeau, ſans qu'on ait beſoin de s'embarraſſer en aucune façon des courans, des marées ou des vents de côté, ni des dérives qu'ils cauſent. En tenant la boule plongée dans la région des eaux calmes, l'inclinaiſon du cordeau & la direction de ſon plan vertical marqueront à chaque moment le vrai ſillage, & la vraie route du vaiſſeau. Il n'y aura alors plus d'autre dérive ou erreur à craindre, que celle qui pourroit provenir d'une variation inconnue de la déclinaiſon de l'aiguille aimantée : l'expérience pourra décider, ſi un journal dreſſé conformément à notre principe, ne ſera pas plus exact qu'un autre qu'on formeroit ſelon les principes ordinaires, ſurtout ſi on prend ſoin de vérifier ſouvent par des obſervations aſtronomiques la déclinaiſon de l'aiguille. Il n'y a en ce cas plus rien à craindre, que les fautes d'obſervations qui ne ſçauroient être de grande conséquence, comme devant naturellement se redresser d'elles-mêmes par leur grand nombre, puisqu'il n'y a point de raison pour les trouver plutôt trop grandes, que trop petites, ou pour s'écarter de la vraie direction, plutôt d'un côté que de l'autre : il n'est pas de ces erreurs comme de celles que les courans jettent sur l'estime ordinaire de la route, parce que les courans peuvent porter le vaisseau d'un même côté pendant une longue navigation.

XIX.

La grande utilité & l'excellence de nos méthodes & de nos principes, doit nous faire redoubler notre attention pour tout ce qui peut contribuer à la justesse des observations. Pour mesurer l'angle d'inclinaison du cordeau, on se servira d'un quart de cercle, dont l'alidade mobile soit garnie de deux petits anneaux, l'un placé précisément au centre du quart de cercle, & l'autre à l'extrêmité de l'alidade, & on fera passer le cordeau par ces deux anneaux : cette alidade sera librement mobile, & son centre de gravité placé au centre du quart de cercle : de cette manière on pourra filer le cordeau à travers les deux anneaux, sans que l'alidade en soit dérangée. Quant à la meilleur manière de s'assurer sur mer de la position horizontale de l'alidade immobile, c'est un article qui a déjà été examiné souvent, & avec tout le succès qu'on pouvoit espérer : je ne m'arrêterai donc pas à cette recherche, non plus qu'à celle de la meilleure manière d'observer la direction du plan vertical du quart de cercle, qui doit être le même que celui du cordeau prolongé, à quoi on sera attentif. Ce n'est pas dans ces recherches que l'Académie fera consister ce que notre pratique peut avoir d'essentiel, surtout dans une question de cette nature. La seule difficulté qui me fait de la peine, consiste dans l'action des eaux contre le cordeau, qui tient la boule suspendue ; Dans les courans qui n'auroient qu'une vingtaine de toises de profondeur, cette difficulté ne sera d'aucune importance : mais elle augmentera à mesure que les courans seront plus profonds, & si l'on vouloit supposer des courans dont le mouvement fût sensible à plus de cent toises de profondeur, ce ne seroit plus qu'assez imparfaitement qu'on pourroit déterminer ces courans : mais je suis fort trompé, si de tels courans existent ; quoiqu'il en soit, notre méthode étant l'unique, il ne s'agit que de lui donner toute la perfection dont elle est susceptible, & de remédier autant qu'il est possible aux inconvéniens qui se présentent. Cette nouvelle tâche nous fournira en même-temps quelques réflexions particulieres pour la détermination des courans. Nous ne pouvons plus nous dispenser dans ces recherches du secours de l'analyse.

X X.

Proposition 1. Si on nomme Z la hauteur verticale de laquelle un corps tombant librement acquière la vîtesse relative du courant & de la boule, l'effort horizontal du courant contre la boule est égal au poids d'un cylindre d'eau, dont la base est le grand cercle de la boule & la hauteur $\frac{1}{2} Z$.

On a fait, & surtout M. Newton, un grand nombre d'expériences, qui confirment cette proposition avec une exactitude surprenante : il est vrai cependant que, dans les mouvemens extrêmement lents, les expériences s'écartent un peu de la proposition. M. Robins a démontré par d'autres expériences que les mouvemens extrêmement rapides s'en éloignent beaucoup d'avantage; mais pour les mouvemens moyens, tels que ceux des courans sensibles, cette régle satisfera toujours avec toute l'exactitude imaginable : avec tout cela je ne la traite que comme une vérité physique, quoique je n'ignore pas les théories qu'on emploie pour la démontrer ; car ces mêmes théories ne satisfont pas à beaucoup près avec autant d'exactitude aux expériences, quand les corps préſentent aux fluides une autre ſurface qu'une ſurface ſphérique. Il en eſt tout autrement de l'action d'un filet ou d'une veine d'eau, qui donne perpendiculairement contre une ſurface plane. Cette action peut-être déterminée par les vraies loix de la méchanique, parce qu'on voit clairement la façon d'agir. Les expériences bien imaginées & exécutées en confirment exactement la théorie, de même que celle de la réaction ; & cependant depuis les temps de Mariote, qui a été trompé par de fauſſes expériences, la plupart des phyſiciens & des mathématiciens la ſuppoſent encore de la moitié plus petite qu'elle n'eſt.

X X I.

Propoſition 2. L'effort horiſontal d'un courant contre la ſurface d'un cylindre vertical, eſt égal au poids d'un priſme d'eau, dont la baſe eſt la ſection du cylindre par l'axe & la hauteur $\frac{2}{3}Z$.

Cette propoſition eſt fondée ſur la théorie ordinaire qu'on ſe forme dans ces ſortes de queſtions : je doute cependant ſi elle ſatisfait aux expériences avec autant de préciſion que la précédente ; quoiqu'il en ſoit, elle ſera toujours aſſez exactement vraie pour l'uſage que nous en ferons.

X X I I.

Coroll. Si l'on ſuppoſe les peſanteurs ſpécifiques de l'eau & de la boule ou du cylindre, comme g & γ, & ſi le diamètre de la boule, ou celui de la baſe du cylindre eſt $= d$, on trouve que le rapport du poids de la boule plongée, à l'effort horiſontal du courant contre la boule, eſt comme $\frac{2}{3}.\overline{\gamma - g}.d$ à $\frac{1}{2}gZ$, & que le rapport du poids du cylindre plongé, à l'effort du courant contre le cylindre vertical, eſt comme $\overline{\gamma - g}.d$ à $\frac{28}{33}gZ$, en ſuppoſant la proportion d'Archimède entre la circonférence & le diamètre d'un cercle.

XXIII.

XXIII.

Problème. La boule, ou le cylindre, étant suspendu par un fil & plongé dans un courant, déterminer la relation qu'il y a entre la vîtesse du courant & l'inclinaison du fil, en faisant abstraction de l'effort du courant contre le fil.

Solution. Soit le sinus total $= 1$, le sinus de l'angle d'inclinaison du fil, c'est-à-dire, de l'angle que le fil fait avec la verticale $= m$; on sçait, par les élémens de la méchanique, que le poids du corps plongé est généralement à l'effort du courant contre le corps comme $\sqrt{1 - mm}$ à m : cette analogie donne pour la boule $Z = \frac{4}{3} \cdot \frac{\gamma - g}{g} \cdot \frac{m}{\sqrt{1 - mm}} \cdot d$ & pour le cylindre vertical, $Z = \frac{33}{28} \cdot \frac{\gamma - g}{g} \cdot \frac{m}{\sqrt{1 - mm}} \cdot d$. si on exprime les quantités d & Z par pouces, alors la quantité $2\sqrt{181 Z}$, marque le nombre de pouces que le courant fait dans une seconde de temps, que j'appellerai N; substituant donc pour Z, sa valeur trouvée, nous aurons pour la boule

$$N = 2\sqrt{181\, Z} = 4\sqrt{\frac{181}{3} \cdot \frac{\gamma - g}{g} \cdot \frac{m}{\sqrt{1 - mm}} \cdot d}$$

& pour le cylindre vertical

$$N = \sqrt{\frac{5973}{7} \cdot \frac{\gamma - g}{g} \cdot \frac{m}{\sqrt{1 - mm}} \cdot d}$$

soit, par exemple, $d = 12$ pouces; $\gamma = \frac{5}{4} g$, l'inclinaison du fil de 45 dégrés, on trouve en ce cas, $N = 53, 8$ pour la boule, & $N = 50, 5$ pour le cylindre, & ces nombres marquent autant de pouces que le courant fait dans une seconde de temps.

K

X X I V.

Scholie 1. Toutes ces propoſitions ſuppoſent que le fil ne ſouffre aucun effort par l'action du courant; mais ſi cet effort eſt ſenſible, par rapport à celui du corps ſuſpendu, le fil en ſera courbé, & l'angle d'inclinaiſon changé. On pourroit, à la vérité, déterminer ces changemens par le calcul, ſi les vîteſſes relatives du courant étoient entièrement connues; mais comme une telle correction eſt en quelque façon douteuſe, il faut faire tout ce qui eſt poſſible pour diminuer l'action du courant contre le cordeau auquel le corps plongé eſt attaché; & il n'y a d'autre reméde à cela, que celui de ſe ſervir de cordeaux les plus forts que l'induſtrie humaine puiſſe imaginer, ſans augmenter leur épaiſſeur: c'eſt-là un article ſi eſſentiel, que je demande qu'on n'y épargne ni ſoin ni frais. Je ne ſçais quelle ſorte de matière, ni quel tiſſu il faudra donner à ces cordeaux pour les rendre les plus forts; mais quelques expériences me font croire qu'il peut être permis de ſuppoſer des cordeaux d'un quart de ligne de diamètre, qui puiſſent ſoutenir 20 liv. de poids ſans ſe rompre: peut-être en pourra-t-on faire de cette épaiſſeur, qui puiſſent ſoutenir un plus grand poids: ſi je me trompe beaucoup dans cette eſtime, il ſera facile d'imiter nos calculs pour telle autre ſuppoſition qu'on voudra faire à cet égard. Si les cordeaux étoient d'un tiſſu & d'une matière à ſe gonfler ſenſiblement ſous l'eau, il faudroit y faire attention, & meſurer toujours leur épaiſſeur lorſqu'ils ſont mouillés.

X X V.

Scholie 2. Pour avoir quelque idée de l'effort que le courant peut faire contre le cordeau de la boule, & pour voir ſi on peut négliger cet effort, par rapport à celui que ſoutient immédiatement la boule, je ne conſidererai ici que le cas le plus ſimple. Soit la longueur du cordeau $= l$, ſon diamétre $= \delta$; & ſuppoſons que le cordeau ſoit arrêté dans ſa ſituation verticale, pendant que le même courant, porté avec une vîteſſe uniforme, donne contre le cordeau & la boule. En ce cas, nous voyons par les § § 20 & 21, que l'effort du courant contre la boule ſera à celui du même courant contre le cordeau comme $\frac{1}{2} \cdot \frac{11}{14} \cdot dd$ eſt à $\frac{2}{3} l \delta$, ou comme 1 à $\frac{56}{33} \cdot \frac{l\delta}{dd}$. Ainſi, ſi la boule n'avoit qu'un pied de diamétre, & que la longueur du cordeau fut de 600 pieds, & le diamétre du cordeau de $\frac{1}{4}$ ligne, les deux efforts en queſtion ſeroient comme 369 à 700; & par conſéquent, le cordeau ſoutiendroit un effort preſque double de celui que la boule ſouffre par le même courant. Il eſt vrai qu'il y a pluſieurs autres circonſtances à conſidérer, qui rendent cet effort, contre le cordeau, conſidérablement plus petit. Mais après avoir examiné toutes ces circonſtances, j'ai trouvé que l'effort de la boule ſera, pour notre exemple, tout au plus le double de celui du cordeau. J'avoue que c'eſt ici un grand inconvénient: faudra-t-il donc ſe contenter d'employer notre méthode pour les courans beaucoup moins profonds? Je ne crois pas qu'il faille venir à une telle extrém té; tâchons plutôt de remédier à cet inconvénient, autant qu'il eſt poſſible. Quand une méthode eſt bonne par ſon eſſence, il eſt rare qu'on ne puiſſe remédier aux inconvéniens phyſiques qu'on y rencontre. Du moins trouverons nous tous les ſecours que nous pouvons ſouhaiter dans la géométrie, pourvu qu'on veuille ſe donner aſſez de peine pour faire toutes les obſervations que les méthodes géométriques demandent.

XXVI.

Scholie 3. On peut changer d'une infinité de façons le volume & la péſanteur ſpécifique des corps à plonger, & donner par-là une proportion quelconque du poids qu'ils ont ſous l'eau, à l'effort du courant d'une certaine vîtesse contre les mêmes corps. On pourroit rendre la résistance du cordeau insensible, par rapport à celle du corps plongé, en augmentant le volume de ce corps & en diminuant son poids sous l'eau. Mais on tombe par-là dans d'autres inconvéniens : car l'inclinaison du cordeau deviendroit trop grande, & ses variations, relativement à celles du courant, trop petites. Je crois, après avoir bien considéré toutes les circonstances, qu'il convient de faire toujours que la plus grande inclinaison du cordeau soit d'environ 45 dégrés. Je vais donc donner toutes les mesures, en quantité absolue, pour ce cas.

1. Si l'on exprime, pour la boule, le diamétre d par des pouces, son poids sous l'eau sera en livres $= 0,0218 . \frac{\gamma - g}{g} . d^3$, & l'effort du courant contre la boule, sera de même égal à ce poids.

2. Si on plonge un cylindre, dont le diamétre $= d$, & la hauteur $= a$ en pouces, son poids sera $= 0,0327 . \frac{\gamma - g}{g} . a\,d\,d$, & cette quantité exprimera aussi sa résistance.

3. Si on multiplie ces poids marqués par $\sqrt{2}$, on aura la tension du cordeau pour la boule $= 0,0308 . \frac{\gamma - g}{g} . d^3$, & pour le cylindre

$$= 0,0462 . \frac{\gamma - g}{g} . a\,d\,d.$$

4. La force du cordeau doit être proportionelle à sa tension, & comme il faut ménager autant qu'il est possible l'épaisseur du cordeau, il me semble qu'il suffira de multiplier la tension par $\frac{1}{2}$, & de rendre la force du cordeau égale au produit. Je supposerai ici que les forces des cordeaux sont en raison quarrée de leurs diamétres, quoique cette régle ne réponde pas avec une précision entiere aux expériences. Si donc un cordeau d'un quart de ligne de diamétre, peut soutenir 20 livres (§. 24.); on aura la

force d'un cordeau, dont le diamétre est δ, $=320\delta\delta$, en exprimant δ par lignes; & si nous faisons les deux tiers de cette force égaux à la tension du cordeau, nous aurons pour la boule $\delta = 0,0120 d \sqrt{\frac{\gamma - g}{g} d}$, & pour le cylindre $\delta = 0,0147 d \sqrt{\frac{\gamma - g}{g} a}$.

Dans ces deux équations, on se souviendra d'exprimer les quantités a & d par pouces, & qu'alors le diamétre δ, sera exprimé par lignes. S'il s'agissoit de rapporter toutes ces grandeurs à une même mesure, il n'y auroit qu'à diviser lesdites quantités par 12, pour avoir la valeur de δ, exprimées par parties de pouces. Les deux équations que nous venons de donner, marquent généralement le plus petit diamétre qu'il soit permis de donner au cordeau. On ne sçauroit donc diminuer l'action du courant contre le cordeau au-delà de ce terme.

5. En supposant au cordeau le plus petit diamétre, tel que nous venons de le déterminer, il est facile de déterminer généralement la proportion qu'il y a entre l'action du courant contre la boule, ou le cylindre, & celle du même courant & uniforme contre le cordeau, comme nous avons fait dans un cas particulier, au §. 25, où nous avons vu que l'action contre la boule, est à l'action contre le cordeau, supposé vertical, comme 1 à $\frac{56}{33} \cdot \frac{l\delta}{dd}$. Cette proportion deviendra donc, en donnant au cordeau le plus petit diamétre possible, comme 1 à $\frac{56}{33} \times \frac{l}{d} \times 0,0120 \sqrt{\frac{\gamma - g}{g} d}$, ou comme 1 à $\frac{l}{d} \times 0,0017 \sqrt{\frac{\gamma - g}{g} d}$;

& on remarquera toujours que dans le facteur $\sqrt{\frac{\gamma - g}{g} d}$, on doit exprimer la quantité d par pouces. Si le corps plongé eſt cylindrique, l'action du courant contre le cylindre eſt à l'action contre le cordeau vertical, comme $a\ d$, eſt à $l\ \delta$, ou comme 1 eſt à $\frac{a}{l} \times \frac{\delta}{d}$, & ſubſtituant pour δ ſa plus petite valeur en pouces, cette raiſon ſera comme 1 à $\frac{a}{l} \times 0,0012 \sqrt{\frac{\gamma - g}{g} a}$, & il faudra encore ici ſe ſervir de pouces dans le facteur

$$\sqrt{\frac{\gamma - g}{g} a}.$$

Si l'on conſidére à préſent, l'inclinaiſon du cordeau, l'action contre le cordeau ſera diminuée dans l'un & l'autre corps, en raiſon de 1 à $1 - m\,m$, tant à cauſe de l'obliquité, que parce que la profondeur du courant n'eſt plus que $l \times \sqrt{1 - m\,m}$, & faiſant $m\,m = \frac{1}{2}$, les efforts du courant contre la boule & ſon cordeau, feront en raiſon de 1 à $\frac{l}{d} \times 0,00085 \sqrt{\frac{\gamma - g}{g} d}$, & les mêmes efforts contre le cylindre & ſon cordeau, feront en raiſon de 1 à $\frac{l}{a} \times 0006 \sqrt{\frac{\gamma - g}{g} a}$.

XXVII.

Scholie 4. Examinons à préſent ce qu'il convient d'obſerver à l'égard des peſanteurs ſpécifiques, & des dimenſions des corps à plonger. Dans cet examen, il faut reprendre les équations du §. 23, qui marquent une relation entre les vîteſſes des courans, les peſanteurs ſpécifiques & les dimenſions des corps; en ſorte que la vîteſſe du courant étant donnée, il faut ſatisfaire, avant toute choſe, à ces équations, en ſuppoſant $m = \sqrt{1 - mm}$, puiſque nous voulons que le cordeau meſure le courant ſous un angle d'environ 45 dégrés. Nous avons donc pour la boule $N = 4\sqrt{\frac{181}{3} \cdot \frac{\gamma - g}{g} \cdot d}$, & pour le cylindre

$$N = \sqrt{\frac{5973}{7} \cdot \frac{\gamma - g}{g} \cdot d}$$

ce qui donne pour la boule $\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}} = \frac{N}{4}\sqrt{\frac{3}{181d}}$, & pour le cylindre $\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}} = N\sqrt{\frac{7}{5973d}}$

Ces équations déterminent les pesanteurs spécifiques des corps à plonger pour des courans considerés comme déterminés ; elles nous apprennent qu'il faut pour les mêmes dimensions des corps à plonger, faire la différence des pesanteurs spécifiques proportionelle au quarré de la vîtesse du courant.

Il ne nous reste plus à déterminer, que les dimensions des corps à plonger ; or nous avons trouvé dans la 5e. note du paragraphe 26. que les actions du courant contre la boule, & contre le cordeau sont comme 1 à $\frac{l}{d} \times 0,00085 \sqrt{\frac{\gamma - g}{g} d}$: Si nous mettons donc à la place de $\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}}$ sa valeur $\frac{N}{4}\sqrt{\frac{3}{181d}}$, ce rapport sera comme 1 à $\frac{l}{d} \times 0,00085 \times \frac{N}{4}\sqrt{\frac{3}{181}}$, ou comme 1 à 0, 0000273 $N \cdot \frac{l}{d}$. Un calcul pareil nous donne ce rapport pour le cylindre comme 1 à 0, 0000 205 $N \cdot \frac{l}{\sqrt{ad}}$. On se souviendra que N marque le nombre de pouces que le courant fait dans une seconde de temps, que l marque la longueur du cordeau mouillé, & incliné sous un angle de 45 degrés, de sorte qu'il faut supposer la profondeur verticale de la boule ou du cylindre $= l\sqrt{\frac{1}{2}}$. Nous avons au reste supposé que les eaux heurtent avec la même vîtesse contre le corps plongé, & contre le cordeau mouillé, tout comme si le vaisseau ne faisoit que siller dans des eaux calmes. Nous ne pouvions nous dispenser de faire une pareille hypothèse, parce que les inégalités des vîtesses relatives, sont inconnues dans les courans ; & quand même on les connoîtroit, les régles pour le choix le plus avantageux des choses arbitraires deviendroient trop compliquées, si on vouloit les perfectionner d'avantage, en considérant encore les inégalités du mouvement des eaux contre les parties du systême. Il ne s'agit pas non plus d'observer exactement ces régles, mais seulement de s'y conformer à peu près.

Les expressions que nous avons données pour le rapport des actions du fluide, contre le corps plongé, & contre le cordeau, nous apprennent qu'il faut généralement prendre une boule aussi grande que les autres circonstances pourront le permettre, puisque la première action est à la seconde, tout le reste étant égal, comme d à une constante : Il faut par la même raison se servir d'un cylindre aussi large & aussi haut qu'on pourra, sans tomber dans d'autres inconvéniens considérables, & il est à remarquer qu'on profite autant à augmenter la hauteur a qu'à augmenter en même raison le diamètre d, quoique la solidité augmente en raison quarrée de d & en raison simple de a. On voit aussi qu'un corps cylindrique répond mieux à nos vues, qu'une boule ; car faisant ces corps d'une résistance égale, les efforts du courant contre la boule & contre le cylindre seront comme 547 à 411, & par conséquent cet effort sera plus petit pour le cylindre, que pour la boule : Mais si on vouloit se servir d'un corps cylindrique, il seroit bon de le charger de plomb par sa base, afin qu'il conserve mieux sa position verticale sous les eaux ; on pourroit même l'attacher au cordeau par le milieu de sa hauteur au lieu de l'attacher par le centre de l'une des surfaces planes.

XXVIII.

Conclusion. Tout ce que nous avons dit depuis le §. 20. concerne

concerne la configuration des corps à plonger, leur grandeur & leur pesanteur spécifique les plus avantageuses pour diminuer l'action du courant contre les cordeaux, auxquels ils sont attachés, & nous apprend quelle épaisseur il faudra donner aux cordeaux. Nous avons vû qu'un corps cylindrique est préférable en quelque façon à un corps sphérique, & qu'il faut donner généralement aux corps à plonger le plus de volume qu'on peut, sans tomber dans des inconvéniens qui ne regardent pas notre sujet en lui-même. On commencera l'observation par la boule, ou par le cylindre le plus pesant, garni d'un cordeau suffisamment gros pour résister au poids du corps & à l'effort du courant ; ces premières observations serviront à reconnoître à peu près la vîtesse relative du vaisseau ou de la chaloupe, par rapport au fond du courant, & la profondeur du courant, & par-là on sçaura à peu près la valeur des lettres N & l : après cela les équations du §. 27. donneront à connoître quelle pésanteur spécifique il faut donner au corps à plonger, & enfin les équations de la note 4 du §. 26. marquent le diamètre des cordeaux correspondans. La régle générale est de faire la différence des pesanteurs spécifiques exprimée $\frac{\gamma - g}{g}$ proportionelle aux quarrés de la vîtesse N & le diamètre du cordeau proportionel à la simple vîtesse pour les corps d'un même volume : connoissant toutes lesdites valeurs, le §. 27. nous apprendra aussi le rapport entre la résistance du corps plongé, & celle du cordeau, & cette dernière connoissance nous mettra enfin en état de calculer assez justement la correction qu'il faudra employer pour chaque observation. J'éclaircirai ces régles par l'exemple suivant.

Exemple. Supposons que les eaux puissent être censées n'avoir plus de mouvement à la profondeur de 100 pieds, c'est-à dire, donnons au courant sensible une profondeur de 100 pieds ; si le cordeau doit incliner de

45 degrés, il faut ſuppoſer $l = 141$ pieds : donnons à la boule deux pieds de diamètre de même qu'au cylindre, auquel nous donnerons auſſi deux pieds de hauteur, & nous aurons $d = a = 2$ pieds ou $= 24$ pouces : Suppoſons enfin que la vîteſſe abſolue du vaiſſeau, ou de la chaloupe, ſoit de 3 pieds ou de 36 pouces par ſeconde, cela donnera $N = 36$. Nous aurons en ce cas pour la boule (§. 27.) $\sqrt{\frac{\gamma - g}{g}} = \frac{36}{4}\sqrt{\frac{3}{181 \cdot 24}}$ ou $\frac{\gamma - g}{g} = \frac{81 \cdot 3}{181 \cdot 2}$, ce qui fait à peu près $\frac{1}{18}$: c'eſt-à-dire, qu'il faudroit faire les peſanteurs ſpécifiques de la boule & des eaux de la mer, en raiſon de 19 à 18 ; après cela la note 4 du §. 26. nous dit de faire $\delta = 0,0120\, d \sqrt{\frac{\gamma - g}{g}}\, d$, ce qui fait pour notre cas 0, 34 parties d'une ligne qu'il faudroit donner au diamètre du cordeau. Un tel cordeau peut ſoutenir un effort de 37 livres avant que de rompre ; le poids de la boule ſous l'eau, ſera d'environ 17 livres, mais hors de l'eau elle aura environ 319 livres de poids. Je remarquerai donc ici en paſſant, qu'on ne doit point roidir le cordeau avant que la boule ſoit entièrement plongée. Enfin l'effort du courant contre la boule ſera à celui que le cordeau incliné de 45 degrés, ſouffre perpendiculairement par le même mouvement relatif des eaux en vertu du §. 27. comme 1 à 0, 069. Nous voyons donc que nous ſommes parvenus à rendre l'action contre la boule $14\frac{1}{2}$ fois plus grande que celle qui ſe fait contre le cordeau, quoique nous aions ſuppoſé que les eaux heurtent contre toute la longueur du cordeau avec la même vîteſſe que contre la boule : cependant cette ſuppoſition augmente de beaucoup l'action des eaux contre le cordeau, lorſqu'on ne prétend pas d'obſerver le courant au milieu du ſillage, & qu'on veut bien laiſſer ſimplement flotter le vaiſſeau ou la chaloupe pendant toutes les obſervations, ſuivant la méthode que j'ai indiquée au §. 14,

car en ce cas les eaux n'ont point de mouvement relatif avec le cordeau près de la surface de la mer ; & si ces vîtesses relatives vont en progression arithmétique depuis la surface de la mer jusqu'à la boule, il faudra retrancher les deux tiers de l'action des eaux contre le cordeau, de sorte que leur action sera environ 43 ou 44 fois plus grande contre la boule, que contre le cordeau: cette dernière action pourroit donc déjà être négligée sans peine ; mais si le mouvement relatif des eaux étoit plus rapide, si la profondeur du courant étoit plus grande, s'il étoit impossible de rendre les cordeaux aussi forts que nous l'avons supposé, & enfin s'il falloit mettre une plus grande proportion entre la force du cordeau & sa tension, que celle de 3 à 2, pour prévenir avec d'autant plus de sureté tous les accidens, l'action des eaux contre le cordeau en deviendroit plus grande ; c'est pourquoi je ne laisserai pas de montrer ci-dessous la correction qu'il faudra employer pour déterminer les courans, par l'inclinaison du cordeau. Voilà ce qui concerne la boule, & on suivra la même route pour trouver les résultats du cylindre : on trouvera donc $\frac{\gamma - g}{g} = \frac{10}{158}$ ou à peu près $=$ $\frac{1}{16}$, c'est-à-dire, qu'il faudra faire sa pesanteur spécifique par rapport à celle des eaux de la mer en raison de 17 à 16 : après cela on aura $\delta = 0, 433$ parties de ligne : un cordeau d'un tel diamètre peut soutenir un poids de 60 livres : le poids du cylindre sera d'environ 481 livres, mais sous l'eau il n'aura qu'un poids d'environ 28 livres. Enfin si le cordeau & le cylindre attaché sont considérés comme entraînés avec la même vîtesse contre les eaux, l'action des eaux sera environ 19 fois plus grande contre le cylindre que contre le cordeau ; mais si on fait les observations sans aucun sillage, l'action des eaux contre le cordeau en deviendra beaucoup plus petite, & ne sera plus qu'environ la $\frac{1}{57}$ partie de celle qui se fait contre le cylindre. Voici encore quelques remarques.

1. Comme nous avons suffisamment diminué le rapport de l'action des eaux contre le cordeau à celle qui se fait contre le corps plongé, il ne sera pas nécessaire de suivre nos régles pour les courans, qui feroient moins que trois pieds par seconde, car les pesanteurs spécifiques du corps à plonger & des eaux de la mer deviendroient trop égales, & on tomberoit par là dans de nouveaux inconveniens : mais on sera attentif à suivre ces règles quand les courans ou plutôt quand le vaisseau a un mouvement absolu de plus de trois pieds ou 36 pouces par seconde. Si cependant ces courans étoient en même temps extrêmement profonds, on ne fera pas mal de donner plus d'étendue à nos règles.

2. On fera les différences entre les pesanteurs spécifiques, proportionnelles aux quarrés des vîtesses absolues du vaisseau : ainsi les poids des corps d'un même volume sous l'eau, seront pareillement proportionels aux quarrés de ces vîtesses. Si nous supposons donc la plus grande vîtesse absolue du vaisseau de cinq pieds par seconde, la plus grande quantité $\frac{\gamma - g}{g}$ deviendroit $= \frac{25}{9} \times \frac{1}{18} =$ à peu près $\frac{2}{13}$ pour la boule de deux pieds de diamètre, & la même quantité deviendra $= \frac{25}{9} \times \frac{1}{16}$ $=$ à peu près $\frac{4}{23}$ pour un cylindre de deux pieds de diamètre & d'autant de hauteur : ainsi les pesanteurs spécifiques de la boule & des eaux de la mer seront comme 15 à 13, & celles du cylindre & des eaux de la mer seront comme 27 à 23.

3. Les diamètres des cordeaux suivent la proportion des vîtesses absolues du vaisseau ; nous aurons donc pour la boule le plus grand diamètre du cordeau $= \frac{5}{3} \times 0,34 = 0,57$ & pour le cylindre $= 0,72$. ces déterminations ne dépendent point de la profondeur des courans.

4. Le rapport entre les actions des eaux contre les corps plongés & contre leurs cordeaux, suit encore la proportion des vîtesses absolues du vaisseau, indiquées par N, pourvu que les courans aient la même profondeur ; il suit delà, qu'en observant les courans, suivant la méthode du §. 14, l'action des eaux contre la boule sera au moins 26 fois plus grande que contre son cordeau, & au moins 34 fois plus grande contre le cylindre que contre son cordeau.

5. Le même rapport suit la raison réciproque des profondeurs des courans ; ainsi, si nous voulions prendre toutes les choses au pis & donner 600 pieds de profondeur au courant, l'action des eaux contre la boule ne seroit plus que 4 $\frac{1}{3}$ fois plus grande que celle qui se feroit contre son cordeau, & 5 $\frac{2}{3}$ fois pour le cylindre. Ce ne sera donc que pour les courans énormément profonds, qu'on doit se mettre en peine des corrections que nous donnerons ci-dessous.

6. L'action des eaux contre le cordeau du cylindre est par elle-même plus grande que celui de la boule ; mais cette action, relative à celle qui se fait contre le corps attaché, est plus petite pour le cylindre que pour la boule ; le cylindre a encore cet autre avantage, que sa pesanteur spécifique n'approche pas si fort de celle des eaux comme dans la boule. Un troisième avantage est qu'on peut augmenter la hauteur du cylindre, sans en diminuer davantage la pesanteur spécifique, & augmenter par-là le rapport entre les actions des eaux contre le cylindre & son cordeau ; au lieu qu'en augmentant d'avantage le volume de la boule, il faut toujours approcher d'avantage la pesanteur spécifique de la boule à celle des eaux (§. 27.). On doit donc préférer à tous ces égards les corps cylindriques aux sphériques. Si on ne croioit pas la relation communément adoptée entre la vîtesse des eaux & leur effort contre la surface cylindrique assez juste, on pourroit déterminer cette

relation par des expériences préalables, faites ſur les cylindres qu'on deſtine à cet uſage.

7. L'inconvénient d'une trop grande égalité entre les peſanteurs ſpécifiques des corps à plonger & des eaux de la mer, n'eſt pas ſi conſidérable, qu'on ne puiſſe ſuivre nos règles lors même que le vaiſſeau fait moins de trois pieds par ſeconde : mais comme la peſanteur ſpécifique des eaux de la mer eſt un peu variable, il ſera bon en ce cas d'examiner chaque fois la vraie peſanteur ſpécifique des eaux, de la manière que le père Feuillée l'a fait.

8. La remarque précédente regarde les courans extrèmement profonds, les ſeuls qui nous embarraſſent encore : mais il eſt très-naturel que ces ſortes de courans ne ſçauroient qu'avoir très-peu de mouvement; de même que les eaux d'une même rivière également large perdent de leur vîteſſe dans les endroits où la rivière devient plus profonde. La quantité $N\,l$ ſera à peu près toujours la même dans toute l'étendue d'un même courant; &, ſi cela eſt, les courans profonds pourront être obſervés auſſi exactement que les autres, pourvu qu'on ſoit ſur ſes gardes, par rapport à la vraie valeur de la quantité $\frac{\gamma - g}{g}$. Mais quand je ſuppoſe la vîteſſe N d'autant plus petite que le courant eſt plus profond, je conſidere le vaiſſeau ou la chaloupe n'avoir d'autre vîteſſe abſolue, que celle des eaux près de la ſurface de la mer : ce qui eſt toujours en notre pouvoir de faire. Ce ſera toujours une choſe extrêmement difficile, que d'obſerver les courans avec une préciſion entière, ſans vouloir arrêter le ſillage, lors même que tous les obſtacles accidentels concourent à rendre ces obſervations plus difficiles & moins ſures.

9. Si j'ai dit qu'on peut diminuer l'action des eaux contre le cordeau, par rapport à celle qui ſe fait contre le corps plongé, en augmentant le volume des

corps plongés, il eſt à remarquer à cet égard, qu'on pourroit tellement augmenter le volume & la réſiſtance de ces corps, qu'elle devînt ſenſible par rapport à celle de la chaloupe, & peut-être même à celle du vaiſſeau. M. Bouguer réduit la ſurface de la proue d'un vaiſſeau du premier rang à 150 pieds quarrés ; & la ſurface d'un cylindre de deux pieds de diamètre & d'autant de hauteur ſe réduit à 2 ^{2} pieds quarrés pour la réſiſtance : ainſi la réſiſtance d'un tel vaiſſeau par ſa proue eſt environ 56 fois plus grande que celle d'un cylindre, tel que nous ayons choiſi pour exemple. Mais un vaiſſeau qui ſeroit 8 fois plus petit, ſeroit ſa réſiſtance par la proue quatre fois plus petite, & ſa ſurface ſe réduiroit à 37 $\frac{1}{2}$ pieds quarrés, qui ne ſeroit plus que 18 fois plus grande que celle dudit cylindre. En général ſi on nomme n le nombre des tonneaux que le vaiſſeau péſe, la quantité $\left(\frac{n}{3300}\right)^{\frac{2}{3}} \times 150$, marquera en pieds quarrés la ſurface plane équivalente à la proue pour la réſiſtance ; car M. Bouguer donne 3300 tonneaux au vaiſſeau dont il parle, & on peut ſuppoſer ici les vaiſſeaux être des corps ſemblables. La ſurface plane, dont la réſiſtance ſeroit égale à celle de la proue d'une chaloupe, ne ſçauroit manquer d'être aſſez petite. Comme j'ignore les dimenſions des chaloupes, je me ſuis aviſé d'une autre manière pour trouver à peu près cette ſurface. J'eſtime que deux rameurs, en ramant aſſez vigoureuſement, peuvent donner à la chaloupe une vîteſſe de 4 $\frac{1}{2}$ pieds par ſeconde ; & je ſçai, par des expériences très ingénieuſes & d'une grande utilité pour pluſieurs points qui concernent la navigation, qu'un de mes amis, & grand Géomètre, a bien voulu faire ſur ma priere, qu'un rameur, ramant ſur un bâteau qui fait 4 $\frac{1}{2}$ pieds par ſeconde, fait autant qu'un poids de 7 livres qui tirent continuellement le bâteau. La force d'un rameur, réduite en poids, devient enſuite d'autant plus petite, que le bâteau va plus vîte : on peut donc ſuppoſer que les deux rameurs de la chaloupe font autant qu'un poids de 14 livres ; ainſi la réſiſtance des eaux contre la proue de la chaloupe, qui fait $4\frac{1}{2}$ pieds par ſeconde, doit être égale à 14 livres, ce qui donne la ſurface plane, dont la réſiſtance ſoit égale à celle de la proue de la chaloupe, égale à environ $\frac{7}{12}$ d'un pied quarré, & par conſéquent quatre à cinq fois plus petite que celle de notre cylindre équivalente à $2\frac{2}{3}$ pieds quarrés : cela ſuffit pour voir que l'action du corps, plongé contre la chaloupe, doit être très-grande & qu'elle peut en quelque façon être ſenſible contre un vaiſſeau. J'examinerai dans l'article ſuivant quelle influence cette action pourroit avoir ſur nos obſervations, & comment il faudra ſe précautionner contre les erreurs qui pourroient en réſulter.

10. Comme les corps à plonger ſont très-peſants hors de l'eau, & que les cordeaux ſeroient de beaucoup trop foibles pour les ſoutenir, j'ai déjà dit qu'il ne faut pas roidir les cordeaux avant que les corps ſoient entièrement ſous l'eau ; il faudra donc s'aviſer d'une manière de deſcendre les corps dans les eaux de la mer ; & de les en tirer ſans employer le cordeau : & cela peut ſe faire très-facilement : je dirai ſeulement qu'il n'y auroit pas grand mal d'attacher le corps par un bout de corde aſſez forte pour le ſuſpendre en l'air, & qui n'auroit pas plus de longueur qu'il en faut pour deſcendre le corps dans la mer : mais ſi on craignoit la petite erreur qui en réſulteroit ſur nos obſervations, on pourra s'y prendre de la façon qu'on jugera la plus commode. Voilà les remarques que j'ai crû néceſſaires pour mieux éclaircir nos méthodes, & pour mieux en perfectionner l'uſage.

XXIX.

Avant que de venir à l'analyſe de l'action des eaux contre

contre les cordeaux, de la courbure de ces cordeaux qu'elle cause, & de la correction de leurs inclinaisons qu'elle demande, je dirai encore quelques mots sur la 9e. remarque du précédent article. Nous avons dit dans cette remarque, que l'action des corps plongés est très grande contre les chaloupes, & qu'elle peut être sensible contre un vaisseau. Il paroît d'abord que cette action doit jetter de grandes erreurs sur nos manières d'observer les courans: mais, si on y reflêchit bien, on voit qu'elle ne peut rien déroger ni à leur bonté, ni à leur justesse. Il n'y aura qu'à plonger deux corps en même-temps, l'un jusques dans la région des eaux calmes, & l'autre à telle profondeur qu'on voudra: l'inclinaison du cordeau du premier montrera exactement la vîtesse absolue du systême, & celle de l'autre cordeau indiquera le mouvement relatif des eaux de la même profondeur par rapport au mouvement du systême; lequel étant déjà connu, on en déduira le mouvement absolu des eaux, c'est-à-dire, le courant pour telle profondeur qu'on voudra, tout comme nous avons dit au §. 15. Effectivement le mouvement de la chaloupe ou du navire changé par l'action, ou plutôt par la réaction des corps plongés est compris dans le cas du sillage, que nous avons démontré audit article pouvoir être déterminé en même temps que le courant: on remarquera seulement que ce n'est pas un sillage entièrement uniforme tant que les corps plongés changent de position; ainsi il faudra toujours avant que d'examiner l'inclinaison des cordeaux laisser écouler environ une demi-minute de temps pour mettre le systême dans le cas de l'uniformité. Il est donc vrai, que l'action des corps plongés contre la chaloupe ou contre le vaisseau, n'apporte jamais aucun obstacle à notre manière de déterminer les courans depuis leur surface jusqu'au fond: je trouve cependant que notre article 18e. en souffre quelque petit changement. J'ai démontré dans cet article une manière facile de déterminer la vraie route & le mouvement réel du vaiſſeau, ſans ſe mettre aucunement en peine des dérives, de quelques cauſes qu'elles proviennent : mais, comme cette manière demande qu'on plonge un corps juſques dans la région des eaux calmes ou cenſées telles, il eſt clair que le vaiſſeau en ſera un peu retardé, de ſorte que le vrai ſillage durant les obſervations ſera un peu plus lent, que lorſque le corps n'eſt pas plongé dans les eaux : cette conſidération demande donc une petite correction. Pour trouver cette correction déjà fort petite en elle même, nous pourrons ſuppoſer que le vaiſſeau ſille ſimplement, & oppoſe directement la proue aux eaux par ſon mouvement réel & abſolu tout comme s'il n'y avoit ni courant ni aucune dérive, & il faudra faire attention, que la force du vent demeure la même pendant ce petit intervalle : ſoit à préſent Q le nombre des pieds quarrés, auquel ſe réduit la proue, & q celui pour le corps plongé ; qu'on nomme c la vîteſſe abſolue du vaiſſeau du temps de l'obſervation, je dis que la vîteſſe abſolue du même vaiſſeau après avoir retiré le corps deviendra preſqu'auſſitôt $= c \sqrt{\frac{Q \times q}{Q}}$, ou à peu près $= c \times \frac{q}{2Q} c$, de ſorte que la petite quantité $\frac{q}{2Q} c$ marque la correction à faire pour avoir la vraie vîteſſe abſolue du vaiſſeau, hors le temps des obſervations. Si donc n marque encore le nombre des tonneaux que le vaiſſeau pèſe, nous aurons, en vertu de la remarque 9e. du §. 28,

$Q = \left(\frac{n}{3300}\right)^{\frac{2}{3}} \times 150$; & ſi le corps plongé eſt un cylindre de deux pieds de hauteur & de diamétre, il faudra faire $q = \frac{8}{3}$, & la quantité $\frac{q}{2Q}$ deviendra $= \frac{4}{3} \cdot \frac{c}{150}$.

$\left(\frac{3300}{n}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1,971}{\sqrt[3]{nn}}c$. Ainſi, ſi le vaiſſeau eſt de 1000 tonneaux, on trouve la différence des deux vîteſſes = 0, 0197 c, ou environ $\frac{1}{50}$ c, & les deux vîteſſes ſeront comme 50 à 51. La différence eſt donc très-petite; mais, comme elle ſubſiſte toujours pendant tout le cours d'une longue navigation dans un même ſens, il ne faut pas la négliger.

La correction que nous venons de donner pour connoître le vrai mouvement abſolu du vaiſſeau, par le corps plongé juſques dans les eaux calmes, ſuppoſe que le vaiſſeau donne contre les eaux avec toute ſa vîteſſe abſolue, tout comme le corps plongé; mais ſi le courant, près de la ſurface de la mer eſt ſenſible par rapport au ſillage, on voit que ladite ſuppoſition n'a plus lieu, parce que le vaiſſeau & le corps plongé donnent contre les eaux avec des vîteſſes inégales. On peut encore trouver en ce cas, combien le mouvement du vaiſſeau eſt changé par l'immerſion du corps; mais il faut préalablement déterminer le ſillage ou le mouvement relatif du vaiſſeau par rapport aux eaux près de la ſurface de la mer, ce qui ſe fait en ne plongeant le corps qu'à la profondeur de 7 à 8 pieds.

Je ne m'arrêterai pas à donner toutes ces corrections, on les trouvera ſans peine par la ſimple conſidération que la force du vent, qui fait ſiller le vaiſſeau, eſt ſuppoſée la même; d'où l'on déduit facilement combien ce ſillage & le mouvement abſolu ſont changés en retirant les corps des eaux. Dans ces recherches, il faut examiner ſi le courant eſt contraire ou favorable, ou s'il ſe fait de côté; & lorſqu'il eſt contraire, il faut encore diſtinguer les deux cas, s'il eſt plus ou moins rapide que le ſillage, parce qu'il dépend de-là de ſçavoir ſi l'action des eaux, contre le corps plongé, doit être ſuppoſée affirmative ou négative. Il y a des cas où ces corrections ne laiſſent pas d'être aſſez douteuſes; ce ſont ceux où la

M ij

force du vent eſt très-petite, car alors il peut arriver que le corps plongé tire le vaiſſeau contre les eaux par la poupe ; mais une telle action ſera toujours très-petite. Au reſte, toutes ces recherches ne regardent pas les courans, que j'ai déjà dit pouvoir être également déterminés, quelque grande qu'on ſuppoſe l'action des eaux contre les corps plongés ; elles ne tendent qu'à rectifier l'eſtime du ſillage abſolu, en tant que celui-ci eſt tant ſoit peu dérangé par l'immerſion des corps, lorſque ces corps ſont grands & que les navires ſont petits.

XXX.

Je viens enfin à notre dernier point, qui eſt celui de trouver par le calcul, l'action des eaux contre les cordeaux, la courbure de ces cordeaux qui en réſulte, & le changement de leur inclinaiſon. J'ai indiqué, fort au long, toutes les meſures qu'il eſt poſſible de prendre pour diminuer cette action, par rapport à celle qui ſe fait contre les corps plongés ; je ſuis sûr que ces meſures ſuffiront pour pouvoir négliger l'effort des eaux contre les cordeaux, lorſqu'on ne plonge pas les corps au-delà d'environ vingt braſſes de profondeur ; mais on auroit tort de le négliger entierement, quand on les plonge beaucoup plus profondément. C'eſt ici le ſeul inconvénient qui me fait encore de la peine dans tout mon ſyſtème, puiſque ſans cet inconvénient il n'y auroit plus aucun empêchement de deſcendre les corps auſſi profondément qu'on voudroit, & juſques à ce que le cordeau ne montrât plus abſolument aucun changement. Si je prens cet inconvénient à cœur, ce n'eſt pas qu'on ne puiſſe déterminer, avec toute la préciſion néceſſaire, la correction qu'il demande ; c'eſt plutôt parce que je crains que cette ſorte de correction ne devienne trop incommode, & trop peu intelligible pour les pilotes, ou de ceux qui pourroient entreprendre d'obſerver les courans. Ce que j'ai dit juſqu'ici, eſt facile à être réduit en régles ; mais ce qui me reste à dire demandera quelque connoissance de géométrie dans ceux qui voudront l'appliquer à l'observation des courans.

X X X I.

Soit donc $A B$ (*fig.* 6.) la figure du cordeau sous l'eau, chargé à l'extrémité B d'un cylindre dont le diamétre est $= d$, & la hauteur $= a$; qu'on tire la verticale $A C$, & l'horisontale $B C$, de même que les deux tengentes $B O$ & $A N$, prolongées du côté opposé jusqu'en H & F avec les verticales $B G$, $F E$, & les horisontales $H G$, $A E$; soit encore Z la hauteur verticale génératrice de la vîtesse relative du point B contre les eaux, ainsi l'action des eaux contre le cylindre sera comme $\frac{2}{3}$ à $d Z$, laquelle multipliée par le rapport $\frac{HB}{HG}$, donnera la force appliquée au point B dans la direction de la tengente, & cette force exprimera la tension du cordeau qui est partout la même, si on fait abstraction du poids du cordeau sous l'eau; ainsi si on fait le sinus total $= 1$, & le sinus de l'angle $H B G = \mu$, on aura la tension du cordeau $= \frac{2 a d Z}{3 \mu}$; prenons à présent deux points intermédiaires infiniment proches quelconques a & b; qu'on tire les horisontales $a d$ & $b e$, avec la petite verticale $a c$; soit $A d = x$, $d a = y$, $A a = s$, $a c = d x$, $b c = d y$, $a b = d s$, & la hauteur verticale génératrice de la vîtesse relative de l'élément $a b$ contre les eaux $= \xi$; on sçait, par les régles de la méchanique, que l'action perpendiculaire des eaux contre l'élément du cordeau $a b$, sera comme $\frac{2}{3} d s \times \delta \times \xi \times \frac{d x^2}{d s^2}$, comme $\frac{2}{3} \frac{\delta \xi d x^2}{d . s}$, en indiquant le diamétre du cordeau par δ: or, on démontre dans la méchanique, que l'élément ds est au rayon osculateur R, comme la force perpendiculaire appliquée à l'élément du cordeau $\frac{2}{3} \times \frac{\delta \xi d x^2}{ds}$ est à la tension du cordeau $\frac{2}{3} \times \frac{a d Z}{\mu}$; cette analogie nous donnera donc pour l'équation générale de la courbe $\frac{ds}{R} = \frac{\mu \delta \xi d x^2}{a d Z d s}$.

On peut réduire cette équation différentielle du second ordre à une autre du premier ordre; car prenant l'élément $d\ s$ pour constant, & mettant pour le rayon osculateur sa valeur $\frac{d x d s}{-ddy}$, on aura $\frac{-ddy}{dx} = \frac{\mu \delta \xi d x^2}{a d Z d s}$, ou

$$\text{bien } -\xi d x = \frac{a d Z d s d d y}{\mu \delta d x^2}, \text{ ou}$$

$$-\xi d x = \frac{a d Z d s d d y}{\mu \delta (ds^2 - dy^2)};$$

L'integrale de cette derniere équation est, l'élément $d s$ étant constant, $\int \xi d x = \frac{a d Z}{2 \mu \delta} \log. \frac{ds - dy}{ds + dy} + const.$

La constante se détermine par l'angle $A\ F\ E$, qui fait l'angle de l'inclinaison du cordeau qu'on observe: Si le sinus de cet angle est $= m$, la constante en question deviendra $\frac{a d Z}{2 \mu \delta} \log. \frac{1 + m}{1 - m}$ & notre équation sera

$$\int \xi d x = \frac{a d Z}{2 \mu \delta} \log. \frac{(1 + m).(ds - dy)}{(1 - m).(ds + dy)}.$$

Ces sortes d'équations peuvent être intégrées par les méthodes des approximations, avec autant d'exactitude qu'on juge nécessaire; après quoi on mettra pour x toute la profondeur $A\ C$, & on trouvera une relation entre μ & m, & par conséquent, entre l'angle $H\ B\ G$ & l'angle $A\ F\ E$. Cet angle $H\ B\ G$, fait l'angle corrigé; lequel, s'il pouvoit être remarqué immédiatement, donneroit la quantité Z : tout comme nous avons fait voir ci-dessus, en faisant abstraction de l'action des eaux contre le cordeau. Je ne dirai rien ici de la meilleure méthode d'approcher à cette équation, parce qu'il y a une autre méthode infiniment plus aisée, & qui sera d'une précision suffisante que je vais exposer.

XXXII.

Comme il s'agit de trouver le vrai angle HBG, par le moyen de l'angle AFE, ou NAC, qu'on aura observé, on remarquera que la différence entre les angles AFE & HBG, est égale à l'angle ANO, exprimé par $\int \frac{ds}{R}$: ainsi cette quantité $\int \frac{ds}{R}$ est précisément la correction que nous cherchons, & qu'il faudra retrancher de l'angle observé NAC. Pour trouver la quantité $\int \frac{ds}{R}$ très-commodément, il n'y a qu'à supposer que la courbe AB, s'éloigne peu d'une lig. droite. Car, reprenant notre équation primitive, exposée dans le précédent article, $\frac{ds}{R} = \frac{\mu \delta \xi dx^2}{a dZ ds}$, on pourra l'envisager sous cette forme $\frac{ds}{R} = \frac{\mu \delta \xi}{a dZ} dx \times \frac{dx}{ds}$ & puis supposer le facteur $\frac{dx}{ds}$ constant & égal à $\sqrt{1-mm}$ ou à $\sqrt{1-\mu\mu}$ ou plus exactement égal au cosinus de l'angle $\frac{1}{2} AFE + \frac{1}{2} ABG$; quelle qu'on choisisse de ces quantités, je supposerai ledit facteur $\frac{dx}{ds} = M$; & nous aurons $\frac{ds}{R} = \frac{\mu M \delta \xi}{a dZ} dx$ & par conséquent la corection cherchée ou

$$\int \frac{ds}{R} = \mu M \times \frac{\delta}{d} \times \frac{\int \xi dx}{aZ}.$$

Dans l'application on pourra supposer d'abord $\mu = m$,

& $M = \sqrt{1 - mm}$, & puis chercher, pour ces ſuppoſitions, la valeur de $\int \frac{ds}{R}$. Si on demande enſuite une plus grande juſteſſe, il n'y a qu'à retrancher l'angle $\int \frac{ds}{R}$, dejà trouvé de l'angle obſervé AFE, ſubſtituer pour μ, le ſinus de la différence de ces deux angles, & pour M, le coſinus de l'angle $\frac{1}{2} AFE \times \frac{1}{2} HBG$, & chercher une ſeconde fois le petit angle $\int \frac{ds}{R}$, qu'on pourra prendre pour la vraie correction, car une troiſieme ſeroit tout-à-fait ſuperflue.

Il n'y a donc plus d'autre difficulté, que d'exprimer en nombre la quantité $\frac{\int \xi dx}{aZ}$; & cela ſuppoſe qu'on connoiſſe, pour chaque point d, la quantité variable ξ, par rapport à la quantité conſtante Z, puiſque la courbure du cordeau dépend des variations intermédiaires du courant. Comme il ne s'agit ici que d'une petite correction, il ſuffira, à la vérité, de connoître à peu près la relation entre ξ & x; mais toujours faudra-t-il la connoître, en quelque façon, ſans quoi il vaudroit preſque mieux de ne point employer de correction : plus on connoîtra exactement ladite relation, plus la correction deſirée ſera juſte. Avant que de nous engager dans les diſcuſſions néceſſaires ſur cet article, j'indiquerai la maniere de s'y prendre du côté de l'analyſe.

XXXIII.

Soit la hauteur verticale $AC = A$, & qu'on exprime la relation entre ξ & x par autant de termes qu'on voudra de l'équation indéfinie, que voici :

$$\xi = Z \left(x + \frac{\beta x}{A} + \frac{\gamma xx}{A^2} + \frac{\delta x^3}{A^3} + \frac{\varepsilon x^4}{A^4} + \&c.\right)$$

Plus

Plus on prendra de termes, plus on obtiendra d'exactitude; mais aussi plus on aura de peine à surmonter. Je ferai voir ensuite de quelle façon on pourra déterminer les coëfficiens inconnus α, β, γ, &c. Cependant je crois que pour l'usage que nous prétendons de faire de cette équation, les quatre premiers termes pourront suffire.

Si nous substituons à présent pour ξ, ladite valeur, nous trouverons, après avoir intégré tous les termes, & puis substitué A à la place de x, l'angle

$$ANO = \mu M \times \frac{\delta}{d} \times \frac{A}{a} \times \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{3}\gamma + \tfrac{1}{4}\delta + \tfrac{1}{5}\varepsilon + \&c.\right)$$

Voici à présent quelques réflexions sur les coëfficiens inconnus α, β, γ, &c.

(1) Si on fait les observations pendant que le vaisseau sille à pleines voiles, & qu'en même temps le courant soit peu sensible, il faut que ξ soit dans chaque point presque égale à Z, parce que chaque point du cordeau est entraîné avec une même vîtesse, & que le mouvement du courant, qui fait varier la vîtesse relative, est supposé peu sensible; & comme il ne s'agit pas pour la correction en question, de connoître exactement la valeur de ξ, on pourra simplement supposer $\alpha = 1$, & tous les autres coëfficiens β, γ, δ, &c, $= 0$: on aura donc, en ce cas, l'angle ANO, à peu près $= \mu M \times \frac{\delta}{d} \times \frac{A}{a}$.

Exemple. Soit le diamétre du cordeau δ, d'une demi ligne, le diamétre du cylindre d, de deux pieds, c'est-à-dire, $\frac{\delta}{d} = \frac{1}{576}$; qu'on suppose le corps plongé jusqu'à la profondeur verticale A, de 100 pieds, & que le cylyndre attaché au cordeau, ait sa hauteur a, de deux pieds, on aura $\frac{A}{a} = 50$: ainsi l'angle ANO sera $= \frac{50}{576} \mu M$. Supposons ensuite qu'on ait remarqué l'angle NAd, précisément de 45 dégrés, il faudra d'abord supposer, en

N

vertu du précédent article, $\mu = \sqrt{\frac{1}{2}}$, & $M = \sqrt{\frac{1}{2}}$; cela donnera l'angle cherché $ANO = \frac{25}{576} = 0, 04330$, c'est-à-dire, de 2 dégrés 29′, & par conséquent, le vrai angle HBG, de 42 dégrés 31′. Si on veut employer ensuite une seconde correction, il faudra faire $\mu =$ au sinus de 42 dégrés 31′, & $M =$ au cosinus de $\frac{42^d\ 31' + 45^d}{2}$ ou = au cosinus de 43 dégrés 45 $\frac{1}{2}$′, c'est-à-dire, $\mu = 0, 67580$, & $M = 0, 69161$; ce qui donne pour la seconde correction l'angle $ANO = 0, 04057$, ou de 2 dégrés 19′, & par conséquent, le vrai angle HBG, de 42 dégrés 41′. Une troisieme correction importeroit à peine la valeur d'une minute, trop petite pour s'y arrêter. Nous voyons, par cet exemple, que l'erreur qui résulte de la coubure du cordeau, n'est pas fort considérable; & la maniere dont nous l'avons corrigée, nous laisse à peine douter d'une ou de deux minutes. Nous avons cependant commencé par le cas le plus fâcheux. Mais s'il falloit descendre les corps à des profondeurs verticales beaucoup plus grandes, la correction augmenteroit à proportion, & elle iroit jusqu'à près de 7 dégrés, s'il falloit plonger le corps jusqu'à la profondeur de 300 pieds; de maniere que si le cordeau montroit une inclinaison de 45 dégrés, il ne faudroit plus l'estimer que de 38 dégrés, laquelle différence est très-considérable, pour l'usage qu'on veut faire de l'observation de ces inclinaisons. Nos corrections deviennent en même temps un peu plus douteuses, parce que le cordeau s'écarte d'avantage de la ligne droite; mais elles seront toujours suffisamment sûres pour notre dessein, puisque nous ne sommes pas dans le cas de nous mettre en peine d'un petit nombre de minutes.

(2) Si on veut observer le courant sur une chaloupe, ou sur un vaisseau qui flotte avec une liberté entiere avec

le courant, tel qu'il eſt à la ſurface de la mer, & ſi on ſuppoſe, en même temps, que c'eſt un courant ſimple, qui diminue ſes vîteſſes en même raiſon que les diſtances, depuis le fond du courant; les vîteſſes relatives des eaux contre le cordeau, ſeront proportionelles aux profondeurs x, & on aura $z = \frac{xx}{AA} Z$, & l'angle ANO, ſera exprimé par $\frac{1}{3} \mu M \times \frac{\delta}{d} \times \frac{A}{a}$.

Si nous ſuppoſons donc, par exemple, les mêmes circonſtances que dans l'exemple précédent, nous aurons pour premiere correction, l'angle ANO, de $46'$, & on pourra ſe paſſer entierement de la ſeconde correction.

(3) Si le vaiſſeau ſilloit dans un courant ſimple, dont le mouvement fût conſidérable par rapport au mouvement du ſillage, on pourroit ſe contenter de ſuppoſer $z = Z\left(\alpha + \frac{\beta x}{A} + \frac{\gamma xx}{AA}\right)$. Dans les courans compoſés, dont on ne connoîtroit aucune loi ni variation, on pourra mettre un ou deux termes de plus, en ſuppoſant $z = Z\left(\alpha + \frac{\beta x}{A} + \frac{\gamma xx}{AA} + \frac{\delta x^3}{A^3} + \frac{\varepsilon x^4}{A^4}\right)$: dans ces derniers cas il faut tâcher de connoître les coëfficiens α, β, &c. C'eſt ce qui nous reſte à montrer.

XXXIV.

Pour trouver la valeur deſdits coëfficiens, il n'y a qu'à plonger ſucceſſivement le corps à pluſieurs differentes profondeurs, & noter à chaque fois l'inclinaiſon du cordeau avec la profondeur correſpondante du corps, & il faudra faire autant d'obſervations, qu'il y a d'inconnues à déterminer dans l'équation ſuppoſée. Ainſi on commencera par plonger le corps tout près de la ſurface de la mer, & on remarquera l'inclinaiſon du cordeau; cette premiere obſervation donnera à connoître la vîteſſe du vaisseau, relativement aux eaux de la surface de la mer, & puis la hauteur verticale génératrice de cette vîtesse : on comparera cette hauteur verticale avec Z, ou avec la pareille hauteur verticale répondante à la derniere observation ; & si elle en faisoit, par exemple, la cinquiéme partie, on feroit d'abord $x = \frac{1}{5}$. On descendra ensuite le corps à la profondeur, par exemple, de 20 pieds, & puis de 40 pieds, &c. ; on comparera ces profondeurs avec celle de la derniere observation, indiquée par A, & on remarquera à chaque fois l'inclinaison du cordeau, par le moyen de laquelle on pourra connoître la valeur de z pour telle profondeur de x qu'on voudra : ainsi on aura autant de cas connus qu'on voudra, qui devant tous être compris dans l'équation supposée, on sera enfin en état de déterminer tous les coëfficiens inconnus α, β, γ, &c. On voit donc qu'on peut se servir des observations intermédiaires, pour déterminer la valeur de z, pour telle hauteur verticale x qu'on veut ; mais il est à remarquer que si on veut suivre cette méthode, avec toute l'exactitude qu'elle permet, il faudra d'abord corriger la seconde observation par la premiere, & puis la troisieme par la premiere & la seconde, & ainsi de suite. Ce sont là cependans des corrections du second ordre, dont on pourra se passer.

Cette application suffira, sans doute, pour ceux qui ont quelque connoissance de géométrie, & ce n'est qu'en faveur de ceux-ci que je me suis engagé dans ces dernieres discussions, pour faire voir qu'il n'y a absolument aucun inconvénient dans nos méthodes, auquel on ne puisse remédier avec une précision suffisante.

XXXV.

S'il arrivoit enfin, qu'à mesure qu'on descend les corps on vît le plan vertical du cordeau changer de direction ; il sera bon de rapporter tous les plans des observations précédentes, au plan de la derniere observation, & de réduire le mouvement relatif des différens lits d'eau au mouvement pris dans la direction du dernier plan ; cette précaution n'a pas, à la vérité, toute la force de la précision de géométrie, mais elle peut suffire dans cette occasion, où il ne s'agit que d'une certaine petite correction.

XXXVI.

Il nous reste une remarque à faire, si nous voulons employer la même exactitude pour tous les points essentiels de notre méthode. Nous avons vu comment on peut déterminer les vîtesses & les directions relatives de tous les lits d'eau ; ces mouvemens relatifs deviennent des mouvemens absolus, en les rapportant aux eaux calmes, qui sont au dessous du fond du courant ; & nous avons supposé qu'on peut plonger les corps assez profondément pour atteindre la région des eaux calmes, ou du moins celle des eaux qu'on puisse censer telles sans aucune erreur sensible. Nous avons tellement appuyé cette supposition, dans notre premiere partie, qu'on n'aura, comme j'espére, aucune peine à l'admettre. J'ai dit enfin, qu'on reconnoîtra d'avoir atteint cette région, lorsqu'on remarquera que l'inclinaison du cordeau ne varie plus ; mais c'étoit en supposant encore, que l'action des eaux contre le cordeau est nulle. On remarquera donc maintenant, que nous avons évalué cette action, que ce n'est pas l'angle *A F E* qui doit demeurer invariable, mais l'angle corrigé *H B G ;* le premier montrera des variations, quoiqu'à la vérité extrêmement petites, quand même le corps qu'on continue de descendre auroit atteint des eaux parfaitement calmes. Il faudra donc toujours corriger l'angle observé *A F E*, conformément au §. 33. ; & ce n'est qu'après cette correction, qu'on pourra juger si l'on aura atteint la région des eaux calmes, ou s'il faudra descendre davantage le corps pour y parvenir, en examinant si cet angle corrigé ne varie plus sensiblement, ou s'il varie encore, puisque c'est l'angle *H B G* qui ne varie pas dans les eaux calmes.

XXXVII.

On fera peut-être furpris de me voir examiner fi fcrupuleufement l'action des eaux contre le cordeau, fans que j'aie encore fait mention du dérangement caufé par fon propre poids. Je n'ai pas manqué d'examiner ce fecond point; mais le calcul m'ayant appris qu'il n'eft prefque d'aucune importance, j'ai cru pouvoir me difpenfer d'en parler plutôt. Voici, à préfent, ce qui en eft. Si le cordeau $A\,B$ eft d'une pefanteur fpécifique, plus grande que celle des eaux de la mer, l'inclinaifon du cordeau en fera diminuée au point A, & augmentée au point B: nous confidérerons ce changement à part, en faifant abftraction de l'impulfion des eaux contre le cordeau; il faudra après cela, fuppofer deux forces au point A, l'horifontale $A\,E$, & la verticale $A\,L$, de même qu'au point B la force horifontale $B\,D$, & la verticale $B\,G$, dont la premiere eft égale à l'action des eaux contre le corps plongé, & la feconde, égale au poids que le corps a fous l'eau. Soit, à préfent, le finus de l'angle $H\,B\,G = \mu$, celui de l'angle $A\,F\,E = m$, le poids que le corps a fous l'eau $= P$; on aura $B\,G = P$; $B\,D = \frac{\mu P}{\sqrt{1 - \mu\mu}}$. Or on démontre, dans la méchanique, que la force $A\,E$ eft égale à la force $B\,D$; nous avons donc $A\,E = \frac{\mu P}{\sqrt{1 - \mu\mu}}$: Soit enfin, le poids que le cordeau a fous l'eau $= \pi$; on démontre encore, dans la méchanique, que la force $A\,L$ eft $= P + \pi$; fi nous faifons donc cette analogie $A\,E : A\,L :: m : \sqrt{1 - mm}$; nous aurons par-là, cette équation

$\frac{\mu}{\sqrt{1 - \mu\mu}} = \frac{m}{\sqrt{1 - mm}} \times \frac{P + \pi}{P}$ qui détermine l'angle corrigé $H\,B\,G$, quelque grande que foit la courbure caufée par le poids du cordeau. Cette équation devient beaucoup plus ſimple en ſuppoſant le cordeau ſous l'eau preſque droit, & la différence entre les angles HBG & AFE, très-petites ; ſuppoſition qu'on peut faire ſans la moindre erreur ſenſible, comme nous verrons par un exemple : on trouve en ce cas l'angle HBG, moins l'angle AFE, indiqué par $-\int\frac{ds}{R} = m\sqrt{1-mm} \times \frac{\pi}{p}$. Voici à préſent un exemple conforme à notre théorie, qui nous confirmera dans la ſuppoſition, que nous avons faite, que cette correction ſera ordinairement fort petite.

Exemple. Faiſons les mêmes poſitions que nous avons faites dans l'exemple de la premiere note du §. 33, & ſuppoſons, outre cela, que la peſanteur ſpécifique du corps plongé, ſoit à celle de l'eau, comme 17 à 16 ; & celle du cordeau à celle de l'eau, comme 7 à 5 ; c'eſt la proportion que j'ai trouvée, à peu près, aux cordes de chanvre. Si donc le corps eſt plongé juſqu'à la profondeur de 100 pieds, & que l'angle d'inclinaiſon ſoit de 45 dégrés, la longueur du cordeau ſera d'environ 142 pieds, & nous aurons

$$\frac{\pi}{p} = \frac{142}{2} \times \frac{1}{(4.12.12)^2} \times \frac{2}{5} \times \frac{16}{1} = 0,00137 \text{ \& } m\sqrt{1-mm}$$

$\times \frac{\pi}{p} = 0,00068$, ce qui ne fait qu'un angle d'environ 2 min. & un tiers. Cette correction eſt donc très-petite, quoiqu'elle ne ſoit jamais plus grande que pour un angle de 45 dég. On pourroit plonger le corps juſqu'à la profondeur de 600 pieds, & l'angle de correction ne ſeroit encore que de 14′. Mais ſi l'expérience faiſoit voir qu'on fût obligé de ſe ſervir de cordeaux beaucoup plus épais & plus forts que nous n'avons ſuppoſé, il ne faudroit pas négliger la correction que nous venons de marquer. Ayant égard à cette correction de deux minutes & un tiers, il faudra la retrancher de la premiere du §. 33, que nous avons trouvée pour les mêmes ſuppoſitions de 2 dégrés 19′, & nous aurons pour correction entiere 2 dégrés 16′ $\frac{2}{3}$, & l'angle corrigé HBG, de 42 dégrés 43′ 20″

XXXVIII.

Je ferai encore une petite réflexion sur la maniere de connoître les hauteurs verticales, depuis la surface de la mer, jusqu'au corps attaché au cordeau. Si on nomme l la longueur du cordeau mouillé, qu'il faut toujours observer, on voit d'abord que la profondeur verticale du corps plongé sera à peu près égale à $l\sqrt{1-mm}$, puisque le cordeau fait presque une ligne droite, sous un angle d'inclinaison dont le cosinus est exprimé par $\sqrt{1-mm}$. Il faut cependant remarquer que la vraie profondeur verticale sera le plus souvent un peu plus grande que $l\sqrt{1-mm}$. J'ai trouvé par le moyen de notre équation générale du §. 31., dont j'ai fait l'analyse suivant toutes les régles d'approximation, en supposant d'abord $dy = mds - d\zeta$, & en traitant $d\zeta$ de fort petite, par rapport à dy, j'ai trouvé, dis-je, $d\zeta = \frac{m\sqrt{1-mm}.\delta.dx\int\xi dx}{adZ}$ ou bien $\zeta = \frac{m\sqrt{1-mm}.\delta.\int dx\int\xi dx}{adZ}$ & puis $x = s\sqrt{1-mm} \mp \frac{mm\delta\int dx\int\xi dx}{adZ}$, & par conséquent, toute la profondeur verticale $AC = l\sqrt{1-mm} + \frac{mm\delta\int dx\int\xi dx}{adZ}$

Dans cette correction, j'ai négligé la courbure qui résulte par le poids que le cordeau retient sous l'eau, comme étant beaucoup plus petite que celle qui provient de l'action des eaux contre le cordeau. Je n'étalerai pas ici tous les détours que j'ai pris pour arriver à cette correction, parce que je crois qu'on peut s'en passer dans l'exécution de nos méthodes, qui ne demandent pas une exacte détermination des profondeurs verticales du corps plongé.

plongé. J'éclaircirai pourtant l'application de notre formule par un exemple, afin qu'on voie jusqu'où peut aller la correction dont nous parlons.

Exemple. Soit l'inclinaison du cordeau de 45 dégrés; la longueur du cordeau mouillé AB ou $l = 141\frac{1}{2}$ pieds; nous aurions sans la correction la profondeur verticale $AC =$ 100 pieds : pour trouver la correction indiquée par $\frac{mm\delta\int dx\int \xi dx}{adZ}$, il faut connoître les variations ξ que j'ai fait voir ci-dessus pouvoir se déterminer à l'aide des observations précédentes. Soit $\xi = Z$; nous aurons $\int \xi dx = Zx$ & $\int dx \int \xi dx = \frac{1}{2} Zxx$ pour un point quelconque d & $= \frac{1}{2} ZAC^2$ pour le point C; supposons après cela $\delta = \frac{1}{2}$ ligne, $d = a = 2$ *pieds* & nous aurons la correction $\frac{mm\delta\int dx\int \xi dx}{adZ} = \frac{1}{46} AC$, c'est-à-dire que la hauteur verticale AC devient après la correction égale à 102 pieds 2 pouces, au lieu de 100 pieds qu'on trouve sans la correction : cette correction servira pour les foibles courans qu'on voudra observer pendant que le vaisseau sille à pleines voiles. Si le vaisseau est simplement emporté par le courant, on pourra supposer $\xi = \frac{xx}{AC^2} \times Z$ & on aura $\int dx \int \xi dx = \frac{1}{12} \cdot \frac{x^4 Z}{AC^2}$ & en particulier, pour le point $C = \frac{1}{12} Z \times AC^2$, desorte que la correction devient six fois plus petite que dans l'hypothèse précédente & qu'elle ne sera plus que de $4\frac{1}{3}$ pouces.

XXXIX.

Nous voyons, après toutes ces discussions & corrections, que la géométrie nous fournit de suffisans remèdes contre toutes les difficultés qui pourront se rencontrer; ceux qui auront bien voulu approfondir nos méthodes, seront certainement en état de déterminer, assez exactement, les courans, non seulement près de la surface de la mer, mais dans toute leur profondeur, quand même on voudroit supposer aux eaux un mouvement sensible jusqu'à la profondeur de 600 pieds. Mais quant à ceux qui ne trouveront pas toutes ces ressources en eux-mêmes, je leur conseillerois d'observer simplement les courans de dix en dix pieds de profondeur verticale, jusqu'à la profondeur de cent pieds, sans employer aucune correction, pour peu qu'ils hésitent sur la maniere de la faire. Mais s'il arrivoit après cela, que l'inclinaison du cordeau eût encore des variations sensibles, depuis la profondeur de 90 pieds jusqu'à celle de cent pieds, je présume qu'une bonne induction, fondée sur toutes les observations réunies sous un même point de vue, suffira le plus souvent, pour juger de l'inclinaison que prendroit le cordeau s'il étoit plongé jusques dans les les eaux parfaitement calmes. Au reste je prévois sans peine, que le dernier dégré de perfection dépendra, pour la plus grande partie, d'une longue expérience & habitude, qu'on aura prises dans l'observation des courans, suivant les régles que nous en avons données. Si on avoit fait actuellement un certain nombre de ces sortes d'observations, quelqu'en eût été le résultat, j'en aurois pu tirer un très-grand fruit, & je me serois trouvé en état de parler avec assurance sur plusieurs points que je n'ai osé traiter qu'hypothétiquement & par des conjectures, quoique toujours appuyées par des connoissances physiques bien avérées.

X L.

Je finirai enfin ce long Mémoire par un essai de machine, par le moyen de laquelle on puisse observer les courans à telle profondeur qu'on voudra, sans tomber dansles inconvéniens que nous avons pris tant de soin à éviter & à corriger. Onpourroit faire une lentille *P Q R S* (*fig.* 7) telle qu'on emploie pour les pendules, d'un pied ou de deux pieds de diamétre. Je suppose cette figure, afin que le corps offre toujours le tranchant au mouvement relatif des eaux ; on chargera cette lentille, entre les deux plaques, avec du plomb fondu, par exemple, jusqu'à la hauteur du demi rayon *B S*, de maniere qu'étant suspendue par les deux extrémités de l'axe qui passe par le centre *B*, & plongée sous l'eau, la ligne *B S* garde de toujours sa situation verticale : il est clair que la lentille conservera cette position malgré le mouvement relatif des eaux, parce que les eaux agissent également sur la partie supérieure de la lentille, & sur sa partie inférieue. On fera en sorte que la lentille tourne librement sur son axe, entre deux piéces de métal, par lesquelles elle est suspendue & qui les réunissent ; la tête de cette double piéce de métal sera enfin attachée à un très-long cordeau; le même axe de la lentille soutiendra, de la-meme façon, une boule *G*, d'un diamétre d'environ 3 pouces, & d'une pesanteur spécifique plus grande que l'eau ; cette boule *G*, sera mise dans la situation *H*, par l'action des eaux, sans que la position de la lentille en soit dérangée, & l'angle *H B G* montrera la vîtesse relative des eaux & de la boule. On pourroit donc construire, au dedans de la lentille, quelques piéces d'horlogerie, qui au bout d'un certain temps, comme par exemple 4′, arrêtassent la boule dans sa position ; l'usage d'un tel instrument consisteroit à le plonger assez profondément pour être entierement sûr qu'il ait atteint la région des eaux calmes ; mais il faudroit que cela se fît en moins de 4′, & à le retirer après les 4′ écoulées, pour pouvoir observer l'angle *H B G* : par cette observation on sçaura la vraie vîtesse absolue du vaisseau. Quant à la direction du mouvement absolu du vaisseau, on peut supposer qu'elle est la même que celle du plan vertical qui passe par le cordeau. Si cependant cette supposition faisoit de la peine, il faudroit recourir à une éguille aimantée, ajoutée à l'instrument dont je viens de faire une légére ébauche, & qui fût affermie, dans sa position, au même instant que la boule est arrêtée.

Si j'ai fait mention d'une telle machine, ce n'est pas que je la croie assez parfaite pour en faire usage ; toute mon intention n'a été que d'indiquer les principes qu'il faudroit observer dans la construction d'un semblable machine.

FIN.

RECHERCHES
SUR
LES IRRÉGULARITÉS
DU MOUVEMENT
DE JUPITER ET DE SATURNE.

Piéce qui a remporté le Prix proposé par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, pour l'année 1752.

Par M. LEONARD EULER, *Associé Etranger de l'Académie Royale des Sciences, & Membre de celles de Petersbourg, de Berlin, de Londres, &c.*

RECHERCHES
SUR LES IRRÉGULARITÉS
DU MOUVEMENT
DE JUPITER ET DE SATURNE.

Nihil eſt enim, quod aut natura extremum invenerit, aut doctrina primum. *Ad* HERENN. *Lib. III.*

§. I.

Sur la cauſe des irrégularités du mouvement de Jupiter & de Saturne.

LES obſervations aſtronomiques nous ont fait connoître que les Planètes de Jupiter & de Saturne ne ſuivent pas exactement, dans leur mouvement, les règles établies par Kepler, & que le dernier principalement s'en écarte très-ſenſiblement, ſurtout lorſque ces deux Planètes ſe trouvent près de leur conjonction. C'eſt donc aux obſervations que nous devons cette connoiſſance, mais c'eſt auſſi tout ce que nous en pouvons attendre ; car il y a bien de l'apparence que quelque ſoin que les Aſtronomes apportent à bien obſerver ces dérangemens, ils ne parviendront jamais à une connoiſſance ſuffiſante de l'ordre qui règne ſans doute dans ces irrégularités, pour pouvoir prédire en tout tems combien ces Planètes s'écarteront, dans leur mouvement, des règles de Kepler. Il n'y a donc que la Théorie qui puiſſe nous ſervir de guide dans cette recherche ; & c'eſt de-là uniquement qu'il faut tâcher de tirer les règles que ces deux Planètes obſervent dans leur mouvement, puelque irrégulier qu'il puiſſe paroître. Il faut donc commencer par bien déterminer la cauſe dont ces dérangemens ſont l'effet ; ou, ce qui revient au même, il faut connoître les forces qui produiſent dans le mouvement de ces Planètes les inégalités dont il eſt queſtion.

Or la Théorie de Newton, en tant qu'elle établit l'attraction univerſelle des corps céleſtes, nous découvre d'abord les forces qui doivent troubler le mouvement de Jupiter & de Saturne ; puiſque ces deux Planètes, qui ſurpaſſent les autres pluſieurs fois en groſſeur, ne ſauroient manquer d'agir aſſez ſenſiblement l'une ſur l'autre, ſur tout lorſqu'elles ne ſont pas fort éloignées de leur conjonction. Il n'y a donc pas le moindre doute que l'attraction mutuelle de ces deux Planètes ne ſoit la véritable cauſe des irrégularités qu'on obſerve dans leur mouvement : il s'agit ſeulement de ſavoir ſi cette force attractive ſuit exactement la proportion renverſée des quarrés des diſtances, comme Newton avoit ſuppoſé, ou non.

En effet, ſi cette proportion répondoit ſi mal au mouvement de l'apogée de la Lune, comme on a eu lieu de croire juſqu'ici, on ſeroit bien autoriſé à douter que la même proportion ſubſiſte dans les forces, dont les autres Planètes agiſſent les unes ſur les autres. Mais depuis que M. Clairaut a fait cette importante

importante découverte, que le mouvement de l'apogée de la Lune eſt parfaitement d'accord avec l'hypothèſe Newtonienne ſur la loi d'attraction, il ne reſte plus le moindre doute ſur la généralité de cette proportion; & puiſque cette même proportion convient ſi exactement au mouvement de la Lune, malgré toutes les objections qu'on a cru être bien fondé à faire, on pourra maintenant ſoutenir hardiment que les deux Planètes de Jupiter & de Saturne s'attirent mutuellement en raiſon réciproque des quarrés de leur diſtance; & que toutes les irrégularités qui ſe peuvent découvrir dans leur mouvement ſont infailliblement cauſées par cette action mutuelle. Voilà donc déja la véritable cauſe de tous ces dérangemens de quelque nature qu'ils puiſſent être; & ſi les calculs qu'on prétend avoir tirés de cette Théorie ne ſe trouvent pas aſſez bien d'accord avec les obſervations, on ſera toujours en droit de douter plutôt de la juſteſſe des calculs, que de la vérité de la Théorie. Car quoique la Théorie nous conduiſe aiſement à des équations qui renferment le mouvement des Planètes, de quelques forces qu'elles ſoient ſollicitées, pour peu qu'on ait manié ces équations, on tombera aiſément d'accord que leur réſolution eſt aſſujettie à de très grandes difficultés; & quelques précautions qu'on ait priſes dans ce travail, on ne ſauroit parvenir qu'à des approximations, par le moyen deſquelles on ne pourra pas aſſeurer ſi le réſultat ne s'ècarte pas beaucoup plus de la vérité qu'on ne penſe.

Dans ces circonſtances embarraſſantes, il n'eſt pas ſurprenant que l'Académie Royale des Sciences n'ait pas été entièrement contente de la pièce qu'elle avoit couronnée du prix ſur cette même matiere, il y a quatre ans; car quoique les calculs qu'elle renferme ſoient tirés de cettte Théorie avec bien de la peine, & que la plupart des irrégularités que ces calculs ont fournies, ſe trouvent confirmées par les obſervations, il s'en faut cependant beaucoup que l'auteur ait épuiſé cette importante matière. Car la méthode dont il s'eſt ſervi pour arriver à ſes approximations, outre qu'elle conduit à des calculs extrêmement ennuyans, demeure toujours fort aſſujettie à des doutes ſur la ſuffiſance de ſes réſultats; vu que le nombre de toutes les inégalités étant actuellement infini, celles que l'Auteur a developpées dépendent auſſi, ſuivant la méthode qu'il a emploiée, des autres qu'il a négligées; ce qui en rend les valeurs incomplettes. Je tâcherai donc de remédier à cet inconvénient, en me ſervant d'une méthode qui me paroît tout-à-fait nouvelle, & qui ne mêle pas ſi fort enſemble les diverſes inégalités qu'elle fait découvrir. Cependant je crois que je me pourrai diſpenſer de la recherche des inégalités qui ſe rencontrent dans la ligne des nœuds, & dans l'inclinaiſon mutuelle des orbites de ces deux Planètes, puiſqu'il me ſemble que la pièce mentionnée a parfaitement bien developpé cette partie de la queſtion.

§. II.

Réduction de la Queſtion à l'Analyſe pure.

QUE les deux Planètes en Queſtion ſe meuvent donc avec le Soleil dans le même plan; & ſoit le centre du Soleil en O, de Jupiter en M, & de Saturne en N. Nommons la maſſe du Soleil $= \odot$, celle de Jupiter $=$ ♃, & le Saturne $=$ ♄, & ayant tiré les droites OM, ON & MN; les forces, dont ces trois corps agiſſent entr'eux, ſeront telles:

I. Le Soleil O eſt ſollicité par les forces $\begin{cases} \text{ſelon } OM = \dfrac{♃}{OM^2}. \\ \text{ſelon } ON = \dfrac{♄}{ON^2}. \end{cases}$

II. Jupiter M eſt ſollicité par les forces $\begin{cases} \text{ſelon } MO = \dfrac{☉}{OM^2}. \\ \text{ſelon } MN = \dfrac{♄}{MN^2}. \end{cases}$

III. Saturne N eſt ſollicité par les forces $\begin{cases} \text{ſelon } NO = \dfrac{☉}{ON^2}. \\ \text{ſelon } MN = \dfrac{♃}{MN^2}. \end{cases}$

Or puiſqu'il faut déterminer le mouvement des deux Planètes, comme il paroîtroit à un ſpectateur placé au centre du Soleil, on doit tranſporter les forces, qui agiſſent ſur le Soleil, en ſens contraire ſur les Planètes mêmes. Donc pour pouvoir regarder le Soleil comme demeurant en repos, ſi nous menons les droits MP, NQ, paralleles à NO, MO, il eſt clair, que

Jupiter en M ſera ſollicité par les forces $\begin{cases} \text{ſelon } MO = \dfrac{☉ + ♃}{OM^2}. \\ \text{ſelon } MN = \dfrac{♄}{MN^2}. \\ \text{ſelon } MP = \dfrac{♄}{ON^2}. \end{cases}$

Saturne en N ſera ſollicité par les forces $\begin{cases} \text{ſelon } NO = \dfrac{☉ + ♄}{ON^2}. \\ \text{ſelon } NM = \dfrac{♃}{MN^2}. \\ \text{ſelon } NQ = \dfrac{♃}{OM^2}. \end{cases}$

Maintenant il faut décompoſer ces forces ſuivant deux directions, dont les unes ſoient dirigées vers le Soleil,

& les autres y soient perpendiculaires. Pour cet effet ayant tiré les droites, RMr & SNs, perpendiculaires à MO & NO, & prolongé OM en o.

Pour Jupiter.

La force $\frac{\text{♄}}{MN^2}$ selon MN donnera $\begin{cases} \text{pour la direction } Mo = \frac{\text{♄}}{MN^2}\,\text{cos. } NMo. \\ \text{pour la direction } MR = \frac{\text{♄}}{MN^2}\,\text{sin. } NMo. \end{cases}$

La force $\frac{\text{♄}}{ON^2}$ selon MP donnera $\begin{cases} \text{pour la direction } MO = \frac{\text{♄}}{ON^2}\,\text{cos. } MON. \\ \text{pour la direction } Mr = \frac{\text{♄}}{ON^2}\,\text{sin. } MON. \end{cases}$

Pour Saturne.

La force $\frac{\text{♃}}{MN^2}$ selon NM donnera $\begin{cases} \text{pour la direction } NO = \frac{\text{♃}}{MN^2}\,\text{cos. } MNO. \\ \text{pour la direction } Ns = \frac{\text{♃}}{MN^2}\,\text{sin. } MNO. \end{cases}$

La force $\frac{\text{♃}}{OM^2}$ selon NQ donnera $\begin{cases} \text{pour la direction } NO = \frac{\text{♃}}{OM^2}\,\text{cos. } MON. \\ \text{pour la direction } NS = \frac{\text{♃}}{OM^2}\,\text{sin. } MON. \end{cases}$

De-là nous obtiendrons les forces suivantes, dont l'une & l'autre Planète sera sollicitée.

Premièrement Jupiter sera sollicité.

Suivant MO par la force $= \frac{\odot + \text{♃}}{OM^2} + \frac{\text{♄}}{ON^2}\,\text{cos. } MON - \frac{\text{♄}}{MN^2}\,\text{cos. } NMo.$

Suivant MR par la force $= -\frac{\text{♄}}{ON^2}\,\text{sin. } MON + \frac{\text{♄}}{MN^2}\,\text{sin. } NMo.$

Ensuite Saturne sera sollicité

Suivant NO par la force $= \frac{\odot + \text{♄}}{ON^2} + \frac{\text{♃}}{OM^2}\,\text{cos. } MON + \frac{\text{♃}}{MN^2}\,\text{cos. } MNO.$

Suivant NS par la force $= +\frac{\text{♃}}{OM^2}\,\text{sin. } MON - \frac{\text{♃}}{MN^2}\,\text{sin. } MNO.$

Cela

Cela posé, nommons les distances $OM = x$, $ON = y$, & l'angle $MON = \omega$, & on aura $MN = \surd(xx + yy - 2xy\ cos.\ \omega) = z$. De plus pour les autres angles on aura :

$$sin.\ NMo = \frac{y\ sin.\ \omega}{z} \qquad cos.\ MNo = \frac{y\ cos.\ \omega - x}{z}$$

$$sin\ MNO = \frac{x\ sin\ \omega}{z} \qquad cos.\ MNO = \frac{y - x\ cos.\ \omega}{z}$$

Donc en introduisant ces valeurs, les forces qui agissent sur Jupiter seront :

celle qui agit selon $MO = \frac{\odot + ♃}{xx} + \frac{♄\ cos.\ \omega}{yy} - \frac{♄\ (y\ cos.\ \omega - x)}{z^3}$

celle qui agit selon $MR = -\frac{♄\ sin.\ \omega}{yy} + \frac{♄\ y\ sin\ \omega}{z^3}$

Or les forces qui agissent sur Saturne seront

celle qui agit selon $NO = \frac{\odot + ♄}{yy} + \frac{♃\ cos.\ \omega}{xx} + \frac{♃\ (y - x\ cos.\ \omega)}{z^3}$

celle qui agit selon $NS = +\frac{♃\ sin.\ \omega}{xx} - \frac{♃\ x\ sin.\ \omega}{z^3}$

Qu'on choisisse à présent à volonté une direction fixe OA, pour en conter la longitude des Planètes & qu'on nomme,

La longitude de Jupiter $AOM = \eta$, celle de Saturne $AON = \theta$, de sorte qu'on ait $\eta - \theta = \omega$: & posant dt, pour marquer l'élément du tems qui soit pris constant, les principes de Méchanique nous fourniront les équations suivantes.

Pour Jupiter.

$$2\,dx\,d\eta + x\,dd\eta = -\tfrac{1}{2}\,dt^2\left(\frac{-♄\ sin.\ \omega}{yy} + \frac{♄\ y\ sin.\ \omega}{z^3}\right)$$

$$ddx - x\,d\eta^2 = -\tfrac{1}{2}\,dt^2\left(\frac{\odot + ♃}{xx} + \frac{♄\ cos.\ \omega}{yy} - \frac{♄\ (y\ cos.\ \omega - x)}{z^3}\right)$$

Pour Saturne.

$$2\,dy\,d\theta + y\,dd\theta = -\tfrac{1}{2}\,dt^2\left(+\frac{♃\,\text{ſin.}\,\omega}{xx} - \frac{♃\,x\,\text{ſin.}\,\omega}{z^3}\right)$$

$$ddy - y\,d\theta^2 = -\tfrac{1}{2}\,dt^2\left(\frac{☉+♄}{yy} + \frac{♃\,\text{coſ.}\,\omega}{xx} + \frac{♃\,(y - x\,\text{coſ.}\,\omega)}{z^3}\right)$$

Pour chaſſer du calcul l'élément du tems dt, on n'a qu'à introduire à ſa place le mouvement moyen des Planètes qu'elles ſuivroient ſi elles décrivoient des cercles autour du Soleil en même tems périodique. Soit donc la diſtance moyenne de Jupiter au Soleil $= a$ & ſa longitude moyenne $= p$, la diſtance moyenne de Saturne au Soleil $= b$ & ſa longitude moyenne $= q$. Suppoſons que ce mouvement moyen ſoit produit par la ſeule force du Soleil, ou bien concevons deux corps qui décrivent autour du Soleil des cercles dont les tems périodiques ſoient égaux à ceux de Jupiter & de Saturne, de ſorte que les longitudes de ces corps marquent à chaque tems les longitudes moyennes de Jupiter & de Saturne : & il eſt clair que nos formules donneront le mouvement de ces deux corps, en ſuppoſant $♃ = o$, $♄ = o$, $x = o$, $y = b$ $\eta = p$ & $\theta = q$, d'où nous obtiendrons $a\,dp^2 = \tfrac{1}{2}\,dt^2.\frac{☉}{aa}$ & $b\,dq^2 = \tfrac{1}{2}\,dt^2.\frac{☉}{bb}$, ou bien $\tfrac{1}{2}☉\,dt^2 = a^3\,dp^2 = b^3\,dq^2$. Introduiſons donc au lieu de dt, les élémens dp & dq, qui feront également conſtans ; & poſons, pour abréger $\frac{♃}{☉} = \mu$ & $\frac{♄}{☉} = \nu$, dont les valeurs ſont connues par les révolutions des Satellites, d'où l'on conclut $\mu = \frac{1}{1067}$ & $\nu = \frac{1}{3021}$; & nous aurons

Pour Jupiter ces deux équations,

$$2\,dx\,d\eta + x\,dd\eta = -\nu a^3\,dp^2 \sin.\omega \left(-\frac{1}{yy} + \frac{y}{z^3}\right)$$

$$ddx - x\,dy^2 = -a^3\,dp^2 \left(\frac{1+\mu}{xx} + \frac{\nu \cos.\omega}{yy} + \frac{\nu(x - y\cos.\omega)}{z^3}\right)$$

& pour Saturne celle-ci:

$$2\,dy\,d\theta + y\,dd\theta = -\mu b^3\,dq^2 \sin.\omega \left(\frac{1}{xx} - \frac{x}{z^3}\right)$$

$$ddy - y\,d\theta^2 = -b^3\,dq^2 \left(\frac{1+\nu}{yy} + \frac{\mu \cos.\omega}{xx} + \frac{\mu(y - x\cos.\omega)}{z^3}\right)$$

Or, puiſque le mouvement moyen des deux Planètes eſt connu, le rapport entre dp & dq le ſera également; car puiſque à l'égard des étoiles fixes ſelon le mouvement moyen:

Jupiter avance en 5 ans de 5^s, 1^o, $43'$, $40''$.
& Saturne — — — de 2, 1, 4, 51.

nous en aurons $\frac{dp}{dq} = \frac{546120}{219891} = 2,48405$ ou $\frac{dq}{dp} = 0,4025686$

& puiſque $a^3 dp^2 = b^3 dq^2$, il s'enſuit $\frac{b}{a} = 1,834172$ ou $\frac{a}{b} = 0,545205$

En voici donc les valeurs abſolues, ſur leſquelles on doit fonder le calcul ſuivant. Or pour déterminer auſſi les conſtantes, que ces quatre équations *differentio*-différentielles renferment, leſquelles ſont au nombre de huit, il faut avoir égard aux conditions ſuivantes.

Premiérement, puiſque p & q marquent les longitudes moyennes, ſi nous poſons $\eta = p + P$ & $\theta = q + Q$, il faut que les quantités P & Q ne renferment ni des quantités conſtantes, ni des termes de la forme αp & bq, parceque alors p & q ne ſeroient plus les longitudes moyennes. Donc P & Q ne contiendront que des ſinus ou coſinus de certains angles, qui contribueront autant à augmenter qu'à diminuer les longitudes moyennes. Cette condition déterminera déja quatre conſtantes.

Enſuite la quantité de l'une & de l'autre excentricité, qui doit être conclue par les obſervations, ſervira auſſi à déterminer deux conſtantes renfermées dans nos équations.

Enfin comme l'excentricité entraîne avec elle l'anomalie qui ſe pourroit compter depuis un point quelconque de l'orbite excentrique, l'uſage & la commodité du calcul exigent qu'on la compte depuis l'aphélie; deſorte que l'anomalie s'évanouiſſe lorſque la Planète ſe trouve dans ſon aphélie. Cette conſidération déterminera les deux dernieres conſtantes.

Tout le travail ſe réduit donc à réſoudre les quatre équations différentielles que les principes mécaniques ont fournies.

§. III.

Méthode de réſoudre les équations trouvées.

JE dois d'abord remarquer qu'on ne gagneroit rien quelque peine qu'on voulût ſe donner, pour intégrer ces équations. Car d'un côté je doute fort qu'on trouve jamais de moyen d'y parvenir; & d'un autre côté, quand même on ſeroit ſi heureux d'en tirer des équations intégrales, comme-elles ſeroient extrêmement compliquées, elles ne pourroient apporter preſque aucun avantage pour l'uſage de l'aſtronomie; & on ſeroit néanmoins

néanmoins obligé d'en déduire des approximations propres à ce dessein. Or quand il s'agit des approximations, il sera aussi aisé de les tirer immédiatement des équations *differentio*-différentielles.

Il est toujours convenable de commencer par les premieres équations

$$2\,dx\,d\eta + x\,dd\eta = -\nu a^3\,dp^2 \sin.\omega \left(\frac{-1}{yy} + \frac{y}{z^3}\right)$$

$$2\,dy\,d\theta + y\,dd\theta = -\mu b^3\,dq^2 \sin.\omega \left(\frac{1}{xx} - \frac{x}{z^3}\right)$$

dont les premiers membres deviennent intégrables étant multipliés par x & y, d'où l'on tire à cause de $b^3\,dq^2 = a^3\,dp^2$;

$$xx\,d\eta = C\,dp + \nu a^3\,dp \int \frac{x\,dp \sin.\omega}{yy} - \nu a^3\,dp \int \frac{xy\,dp \sin.\omega}{z^3}$$

$$yy\,d\theta = D\,dp - \mu a^3\,dp \int \frac{y\,dp \sin\omega}{xx} + \mu a^3\,dp \int \frac{xy\,dp \sin.\omega}{z^3}$$

Donc, si nous posons pour abréger

$$X = \int \frac{x\,dp \sin.\omega}{yy};\quad Y = \int \frac{y\,dp \sin.\omega}{xx};\quad Z = \int \frac{xy\,dp \sin.\omega}{z^3}$$

nous aurons:

$$d\eta = \frac{dp}{xx}\left(C + \nu a^3 (X - Z)\right) \;\&\; d\theta = \frac{dp}{yy}\left(D - \mu a^3 (Y - Z)\right)$$

Or, rien n'empêche que nous ne mettions, pour abréger, l'unité à la place de a, de sorte que l'unité exprime le rayon du cercle, ou le demi-grand axe de l'orbite d'une Planète, qui étant uniquement attirée par le Soleil, acheveroit ses révolutions en même tems que Jupiter; ensuite pour les constantes C & D, mettons les lettres f & g, pour avoir

$$d\eta = \frac{dp}{xx}\left(f + \nu\,(X - Z)\right) \,\&\, d\theta = \frac{dp}{yy}\left(g - \mu\,(Y - X)\right)$$

& partant à cauſe de $\eta - \theta = \omega$ on aura

$$\frac{d\omega}{dp} = \frac{f}{xx} - \frac{g}{yy} + \frac{\nu}{xx}(X - Z) + \frac{\mu}{yy}(Y - Z)$$

Or, les deux autres équations, en ſubſtituant pour $d\eta$ & $d\theta$ les valeurs trouvées, & en les délivrant de la conſidération que l'élément dp eſt ſuppoſé conſtant, prendront les formes ſuivantes:

$$\frac{1}{dp}d\frac{dx}{dp} = \frac{1}{x^3}\left(f + \nu\,(X - Z)\right)^2 - \frac{(1 + \mu)}{xx} - \frac{\nu\, cof.\, \omega}{yy} - \frac{\nu\,(x - y\, cof.\, \omega)}{z^3}$$

$$\frac{1}{dp}d\frac{dy}{dp} = \frac{1}{y^3}\left(g - \mu\,(Y - Z)\right)^2 - \frac{(1 + \nu)}{yy} - \frac{\mu\, cof.\, \omega}{xx} - \frac{\mu\,(y - x\, cof.\, \omega)}{z^3}$$

Maintenant tout le ſuccès qu'on peut ſe promettre des opérations ſuivantes, dépend preſque uniquement de la nature des variables qu'on introduit à la place de x & y. Car puiſqu'on doit tâcher de ramener toutes les expreſſions à des angles qui en expriment le plus commodément la variabilité, on voit d'abord que la variabilité des diſtances x & y dependra non-ſeulement de l'angle ω, mais auſſi des anomalies de l'une & de l'autre Planète, lorſque leurs orbites ſont excentriques. Or l'anomalie d'une Planète étant un angle, qui dépend de ſa diſtance à ſon aphélie, on a trois ſortes d'anomalies qu'on pourroit introduire dans le calcul; l'anomalie moyenne, l'excentrique & la vraie. En introduiſant l'anomalie moyenne, on auroit la commodité que ſa différentielle eût une raiſon conſtante à dp, mais le rapport de ſa différentielle à $d\omega$ qu'on aura par tout dans la pourſuite du calcul, deviendroit trop compliqué, ce qui rendroit le calcul presque impraticable. Et si l'on vouloit introduire ou l'anomalie excentrique ou la vraie, quoique les expressions pour les distances devinssent plus simples dans le cas de Kepler, cependant le défaut d'aucun rapport réglé entre leurs différentielles & $d\omega$ rendroit encore le calcul presque impraticable, & chaque différentiation ou intégration exigeroit des opérations extrêmement embarrassantes.

Ayant bien pesé ces difficultés, il m'est venu dans l'esprit, si l'on ne pourroit pas imaginer une nouvelle espece d'anomalie, dont la différentielle eût un rapport constant à la différentielle $d\omega$; puisqu'il est évident qu'alors toutes les différentiations & intégrations se pourroient exécuter sans aucune difficulté. Cette idée me parut d'abord de la derniere importance, & je ne trouve rien qui puisse s'opposer à l'introduction d'une telle anomalie; car bien qu'une telle anomalie ne soit plus si facile à trouver, puisqu'elle dépend de l'angle ω, qui n'est pas encore connu, lorsqu'on veut déterminer, pour quelque tems proposé, les lieux de Jupiter & de Saturne, cette difficulté n'est pourtant d'aucune conséquence dans le calcul analytique dont il s'agit ici; & pour le calcul astronomique, on ne manquera point de trouver moyen de le dresser sur cette nouvelle espece d'anomalie. J'introduirai donc dans la suite les lettres r & s pour marquer cette anomalie de Jupiter & de Saturne, que je déterminerai, ensorte que posant leurs différentielles $dr = \varkappa\, d\omega$ & $ds = \lambda\, d\omega$, les quantités $\varkappa$ & λ deviennent constantes. Pour cet effet il faut éliminer du calcul l'élément dp, qui n'a point un rapport constant à $d\omega$.

Je pose donc $dp = t\, d\omega$, & $dq = n t\, d\omega$, où t sera une quantité variable, & n un nombre constant, dont la valeur sera $\frac{dq}{ap} = n = 0,4025686$, de sorte que $n = \frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt{b}} = \frac{1}{b\sqrt{b}}$ à cause de $a = 1$, d'où l'on tire. $b = 1,83417$. Cela posé on aura:

$$X = \int \frac{t\,x\,d\omega\,\sin.\omega}{yy};\ Y = \int \frac{t\,y\,d\omega\,\sin.\omega}{xx};\ Z = \int \frac{t\,x\,y\,d\omega\,\sin.\omega}{z^3}$$

$$d\eta = \frac{t\,d\omega}{xx}\left(f + \nu(X - Z)\right),\ d\theta = \frac{t\,d\omega}{yy}\left(g - \mu(Y - Z)\right)$$

$$\frac{1}{t} = \frac{f}{xx} - \frac{g}{yy} + \frac{\nu}{xx}(X - Z) + \frac{\mu}{yy}(Y - Z)\ \&$$

$$\frac{1}{t\,d\omega}d\frac{dx}{t\,d\omega} = \frac{1}{x^3}\left(f + \nu(X - Z)\right)^2 - \frac{(1+\mu)}{xv} - \frac{\nu\,cos.\omega}{yy} - \frac{\nu(x - y\,cos.\omega)}{z^3}$$

$$\frac{1}{t\,d\omega}d\frac{dv}{t\,d\omega} = \frac{1}{y^3}\left(g + \mu(Y - Z)\right)^2 - \frac{(1+\nu)}{yy} - \frac{\mu\,cos.\omega}{xx} - \frac{\mu(y - x\,cos.\omega)}{z^3}$$

où l'on peut maintenant supposer à volonté l'élément $d\omega$ constant.

Il faudra donc commencer à substituer pour x & y des formules indéterminées qui renferment les angles ω, r & s; & de-là on sera en état d'assigner les valeurs des lettres X, Y, Z & t, pour les introduire ensuite dans les deux équations *differentio*-différentielles.

Mais puisque l'invention de t suppose qu'on sache déja les valeurs de X, Y & Z, & que ces lettres renferment réciproquement la valeur de t, on remédiera à cet inconvénient en posant

$x = t\,u$, $\eta = t\,v$, & $z = t\,w$, ou bien $w = \sqrt{(uu + vv - 2\,u\,v\,cos.\omega)}$; de-là ayant pris pour u & v des expressions indéterminées convenables, on aura, sans qu'on ait besoin de savoir la valeur de t,

$$X = \int \frac{u\,d\omega\,\sin.\omega}{vv};\ Y = \int \frac{v\,d\omega\,\sin.\omega}{uu};\ Z = \int \frac{u\,v\,d\omega\,\sin.\omega}{w^3}$$

&

& ayant trouvé ces expreſſions, on aura tout de ſuite

$$t = \frac{f}{uu} - \frac{g}{vv} + \frac{\nu(X-Z)}{uu} + \frac{\mu(Y-Z)}{vv}$$

Pour le mouvement moyen de l'une & de l'autre Planète on aura

$$dp = t\,d\omega \qquad \& \; dq = nt\,d\omega$$

& pour le mouvement vrai,

$$d\eta = \frac{d\omega}{tuu}\left(f + \nu(X-Z)\right); \; d\theta = \frac{d\omega}{tvv}\left(g - \mu(Y-Z)\right)$$

Enfin, ayant formé les expreſſions $x = tu$ & $y = tv$, les équations *differentio* - différentielles à reſoudre ſeront,

$$\frac{x}{d\omega} d\frac{dz}{td\omega} + \frac{1+\mu}{\nu} - \frac{1}{tuu}\left(f + \nu\,(X-Z)\right)^2 + \frac{\nu u \operatorname{cof.}\omega}{vv}$$
$$+ \frac{\nu(uu - uv \operatorname{cof.}\omega)}{w^3} = 0$$

$$\frac{y}{d\omega} d\frac{dy}{td\omega} + \frac{1+\nu}{\nu} - \frac{1}{tvv}\left(g - \mu(Y-Z)\right)^2 + \frac{\mu v \operatorname{cof.}\omega}{uu}$$
$$+ \frac{\mu(vv - uv \operatorname{cof.}\omega)}{w^3} = 0$$

d'où l'on déterminera tous les coëfficiens indéterminés, qui ſe trouveront dans les formules ſuppoſées pour u & v.

Voilà donc le plan de l'analyſe, que je me propoſe d'exécuter, & qui me procurera, à ce que j'eſpere, tous les avantages que l'Académie Royale des Sciences peut avoir en vue en propoſant cette queſtion pour la ſeconde fois. On voit d'abord que cette méthode eſt préférable à quantité d'autres qui ſe pourroient préſenter, parce qu'elle fournit à la fois & conjointement

Prix de 1752. E

les inégalites tant de Jupiter que de Saturne; car on verra que ces inégalités sont tellement liées ensemble, qu'il est impossible de les bien déterminer séparément. Cette méthode nous découvrira aussi d'abord toute les inégalités qui peuvent être de quelque conséquence; car quoique le nombre de toutes les inégalités soit effectivement infini, il est pourtant certain, que le nombre de celles, dont l'effet est encore sensible, ne sauroit être trop grand. Il y a une grande ressemblance entre cette question & la recherche des inégalités de la Lune; & quelque difficile que soit celle-ci, il est certain qu'à quelques égards la question présente est assujettie encore à de plus grandes difficultés, qui proviennent du terme irrationnel z ou w. Donc si la méthode que je viens d'indiquer, est capable de vaincre tous ces obstacles, on la pourra aussi employer avec tout le succès possible dans la recherche des inégalités de la Lune. De plus, si Jupiter & Saturne agissent l'un sur l'autre, il est incontestable que la terre doit aussi sentir leur action; & cette recherche seroit sans doute de la derniere importance.

§. IV.

Recherche des inégalités de Jupiter & Saturne, qui dépendent uniquement de leur distance.

TOUTES les inégalités de ces deux Planètes, de quelque nature qu'elles soient, dépendent nécessairement de ces trois élémens:

I. De leur diſtance apparente vue du Soleil ou de l'angle ω.

II. De l'excentricité de l'orbite de Jupiter.

III. De l'excentricité de l'orbite de Saturne.

Donc, pour ne pas trop embrouiller le calcul, je ne chercherai d'abord que les inégalités qui dépendent uniquement du premier élément ou de l'angle ω. Cette recherche feroit donc ſuffiſante pour réſoudre parfaitement la queſtion propoſée, ſi les deux orbites étoient deſtituées de toute excentricité ; puiſqu'il eſt certain que dans ce cas le mouvement de ces deux Planètes ne ſauroit être troublé par d'autres inégalités, ſuppoſé que leurs orbites ſoient ſituées dans le même plan.

Or, quand je conçois que les deux orbites n'aient point d'excentricité, il ne faut pas s'imaginer qu'elles ſeroient circulaires, ſi l'action mutuelle des Planètes s'évanouiſſoit ; cette idée ſeroit contraire à l'hypothèſe que j'ai en vue. Car ſi les deux Planètes n'agiſſoient pas l'une ſur l'autre, & qu'elles euſſent reçu d'abord un tel mouvement, qu'elles décriroient des cercles autour du Soleil, il eſt certain que ſi elles commençoient ſubitement à s'attirer mutuellement, l'une & l'autre orbite en deviendroit excentrique, outre les autres inégalités dont leur mouvement ſeroit dérangé. Ainſi, quand je dis que les deux orbites ne ſont pas excentriques, il le faut entendre de l'état actuel où les Planètes ſe trouvent effectivement en s'attirant l'une l'autre ; & non pas de l'état où elles ſe trouveroient, ſi cette action mutuelle s'évanouiſſoit.

Or quoique les orbites ne fuſſent pas excentriques, dans le ſens que je viens d'établir, les diſtances x & y ne ſeroient pas pourtant conſtantes, elles renfermeroient des parties qui dépendent de l'angle ω; & puiſque ces parties variables s'évanouiroient tout-à-fait, ſi l'on avoit $\mu = o$ & $\nu = o$, il eſt clair que ces parties ſeront fort petites à cauſe de la petiteſſe de ces lettres μ & ν dont elles ſeront affectées. Donc, puiſque ces termes ſeront ſi petits, il ſera permis de négliger leurs produits par quelqu'une de ces lettres. Poſant donc $u = c + U$ & $v = e + V$, les lettres U & V contiendront les petites parties variables dont je viens de parler, & je négligerai dans le calcul les termes où ſe trouveroient ces lettres multipliées par μ ou ν.

Donc, puiſque les valeurs des quantités X, Y & Z, ne ſe rencontrent dans le calcul qu'avec des coëfficiens μ ou ν, je pourrai me diſpenſer de faire entrer les lettres U & V dans la détermination des quantites X, Y & Z. Poſant donc $u = c$ & $v = e$, j'aurai

$$w = \sqrt{(cc + ee - 2ce\,coſ.\,\omega)}; \; X = \int \frac{c\,d\omega\,ſin.\,\omega}{ee}; \; Y = \int \frac{e\,d\omega\,ſin.\,\omega}{cc}$$

$$\& \; Z = \int \frac{ce\,d\omega\,ſin.\,\omega}{(cc + ee - 2ce\,coſ.\,\omega)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{ce\,d\omega\,ſin.\,\omega}{(cc+ee)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{2ce}{cc+ee} coſ.\,\omega\right)^{\frac{3}{2}}}$$

De-là on aura d'abord: $X = -\frac{c}{ee} coſ.\,\omega$ & $Y = -\frac{e}{cc} coſ.\,\omega$.

La valeur de Z demande plus d'adreſſe; car quoiqu'elle ſoit abſolument intégrable, puiſqu'on auroit $Z = \frac{-1}{\sqrt{(cc + ee - 2ce\,coſ.\,\omega)}}$ cette quantité irrationnelle troubleroit tellement le calcul, qu'à peine pourroit-on en tirer quelque concluſion propre à l'uſage de l'Aſtronomie. Il vaudra donc mieux qu'on convertiſſe d'abord la quantité irrationnelle $\frac{1}{w^3}$ dans une ſérie infinie, qui procéde par les coſinus des angles multiplies de ω, &

& dans cette vue la résolution, qui se trouve dans la pièce qui a déja remporté un prix sur cette question, paroît la plus propre, Posant donc :

$$\left(1-\frac{2ce}{cc+ee}\cos.\omega\right)^{-\frac{3}{2}}=\alpha+\beta\cos.\omega+\gamma\cos.2\omega+\delta\cos.3\omega+\varepsilon\cos.4\omega+\zeta\cos.5\omega+\&c.$$

Puisque la valeur de $\frac{2ce}{cc+ee}$ est précisément la même $=0,8405$, comme elle y est supposée, les valeurs de ces coëfficiens seront:

$\alpha=3,21789$; $\beta=4,70357$; $\gamma=3,07731$; $\delta=1,92413$; $\varepsilon=1,18601$ & $\zeta=0,75144$.

Et si nous posons, pour abréger, $\sqrt{(cc+ee)}=h$, nous aurons :

$$Z=\frac{ce}{h^3}\int d\omega\,\sin.\omega\,(\alpha+\beta\cos.\omega+\gamma\cos.2\omega+\delta\cos.3\omega+\varepsilon\cos.4\omega+\zeta\cos.5\omega+\&c.)$$ ou bien en multipliant par $\sin.\omega$, à cause de $\sin.\omega\times\cos.n\omega=\frac{1}{2}\sin.(n+1)\omega-\frac{1}{2}\sin.(n+1)\omega$ on aura:

$$Z=\frac{ce}{h^3}\int d\omega\left\{\left.\begin{matrix}\alpha\\-\frac{1}{2}\gamma\end{matrix}\right\}\cos.\omega\left.\begin{matrix}+\frac{1}{2}\beta\\-\frac{1}{2}\delta\end{matrix}\right\}\cos.2\omega\left.\begin{matrix}+\frac{1}{2}\gamma\\-\frac{1}{2}\varepsilon\end{matrix}\right\}\cos.3\omega\left.\begin{matrix}+\frac{1}{2}\delta\\-\frac{1}{2}\zeta\end{matrix}\right\}\cos.4\omega\ \&c.\right\}$$

& partant l'intégration donnera :

$$Z=\frac{-ce}{h^3}\left((\alpha-\tfrac{1}{2}\gamma)\sin.\omega+\tfrac{1}{4}(\beta-\delta)\sin.2\omega+\tfrac{1}{6}(\gamma-\varepsilon)\sin.3\omega+\tfrac{1}{8}(\delta-\zeta)\sin.4\omega\ \&c.\right)$$

Quoique cette série ne soit pas fort convergente, on

Prix de 1752. F

verra avec bien de la satisfaction que les séries, qui en résultent pour les valeurs x, y, η & θ, deviennent extrêmement convergentes, de sorte que cette résolution ne sera sujette à aucun scrupule.

Ayant maintenant trouvé les valeurs de X, Y & Z, puisqu'on peut négliger les quarrés & les plus hautes puissances de U & V, de même que leurs produits par μ ou ν, on aura:

$$t = \frac{f}{cc} - \frac{g}{ee} - \frac{2fU}{c^3} + \frac{2gV}{e^3} + \frac{\nu}{cc}(X-Z) + \frac{\mu}{ee}(Y-Z)$$

$$tuu = f - \frac{ccg}{ee} - \frac{2cgU}{ee} + \frac{2ccgV}{e^3} + \nu(X-Z) + \frac{\mu cc}{ee}(Y-Z)$$

$$tvv = \frac{fee}{cc} - g - \frac{2feeU}{c^3} + \frac{2efV}{cc} + \frac{\nu ee}{cc}(X-Z) + \mu(Y-Z)$$

$$\frac{1}{tuu} = \frac{ec}{eef-ccg} + \frac{2ceegU - 2ccegV - \nu e^4(X-Z)}{(eef-ccg)^2} \frac{-\mu ccee(Y-Z)}{(eef-ccg)^2}$$

$$\frac{1}{tvv} = \frac{cc}{eef-ccg} + \frac{2ceefU - 2ccefV - \nu ccee(X-Z)}{(eef-ccg)^2} \frac{-\mu c^4(Y-Z)}{(eef-ccg)^2}$$

& de-là on tirera

$$\frac{d\eta}{d\omega} = \frac{eef}{eef-ecg} + \frac{2cecfgU - 2ccefgV - \nu c^2e^2g(X-Z)}{(eef-ccg)^2} \frac{-\mu cceef(Y-Z)}{(eef-ccg)^2}$$

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{ccg}{eef - ccg} + \frac{2ceefgU - 2ccefgV - \nu cceeg(X-Z)}{(eef-ccg)} - \frac{-\mu cceef(Y-Z)}{(eef-ccg)^2}$$

Or ayant pour les mouvemens moyens $\frac{dp}{d\omega} = t$ & $\frac{dq}{d\omega} = nt$, il faut qu'en négligeant les termes variables, U, V, X, Y & Z ; on ait $\frac{dp}{d\omega} = \frac{d\pi}{d\omega}$ & $\frac{dq}{d\omega} = \frac{d\theta}{d\omega}$; d'où nous tirons les déterminations suivanses ;

$$\frac{eef-ccg}{ccee} = \frac{eef}{eef-ccg} \ \& \ \frac{n(eef-ccg)}{ccee} = \frac{ccg}{eef-ccg}$$

Dont celle-ci divisée par celle-là donne $n = \frac{ccg}{eef}$ ou $ccg = neef$, & partant $f = \frac{cc}{(1-n)^2}$ & $g = \frac{nee}{(1-n)^2}$.

Posons pour abréger $1 - n = m$ pour avoir $f = \frac{cc}{mm}$ & $g = \frac{nee}{mm}$ & nous obtiendrons :

$$t = \frac{1}{m} - \frac{2U}{mmc} + \frac{2nV}{mme} + \frac{\nu}{cc}(X-Z) + \frac{\mu}{ee}(Y-Z)$$

& de plus :

$$\frac{1}{tuu} = \frac{m}{cc} + \frac{2nU}{c^3} - \frac{2nV}{cce} - \frac{\nu mm(X-Z)}{c^4} - \frac{\mu mm(Y-Z)}{ccee}$$

$$\frac{1}{vv} = \frac{m}{ee} + \frac{2U}{cee} - \frac{2V}{e^3} - \frac{\nu mm(X-Z)}{ccee} - \frac{\mu mm(Y-Z)}{e^4}$$

$$\frac{d\pi}{d\omega} = \frac{1}{m} + \frac{2nU}{mmc} - \frac{2nV}{mme} - \frac{\nu n(X-Z)}{cc} - \frac{\mu(Y-Z)}{ee}$$

$$\frac{d\theta}{d\omega} = \frac{n}{m} + \frac{2nU}{mmc} - \frac{2nV}{mme} - \frac{\nu n(X-Z)}{cc} - \frac{\mu(Y-Z)}{ee}$$

Ensuite on aura

$$x = \frac{c}{m} - \frac{(2-m)\,U}{mm} + \frac{2ncV}{mme} + \frac{\nu}{c}\,(X-Z)$$
$$+ \frac{\mu c}{ee}\,(Y-Z)$$

$$y = \frac{e}{m} - \frac{2eU}{mme} + \frac{(2-m)\,V}{mm} + \frac{\nu e}{cc}\,(X-Z)$$
$$+ \frac{\mu}{e}\,(Y-Z)$$

& substituant ces valeurs dans les équations *differentio*-différentielles il proviendra.

$$o = \frac{-(2-m)\,c\,ddU}{mm\,d\omega^2} + \frac{2ncc\,ddV}{mme\,d\omega^2} + \frac{\nu\,dd(X-Z)}{d\omega^2}$$
$$+ \frac{\mu cc\,dd(Y-Z)}{ee\,d\omega^2} + \frac{1+\mu}{c} - \frac{cc}{m^3} - \frac{(2-m)\,cU}{m^4}$$
$$+ \frac{2nccV}{m^4 e} + \frac{\nu c\,cos.\,\omega}{ee} + \frac{\nu c(c-e\,cos.\,\omega)}{h^3}(\alpha + \beta\,cos.\,\omega + \gamma\,cos.\,2\,\omega + \&c.)$$
$$+ \frac{\nu(n-m)}{mm}\,(X-Z) + \frac{\mu cc}{mmee}\,(Y-Z)$$

$$o = \frac{-2ee\,ddU}{mmc\,d\omega^2} + \frac{(2-m)\,e\,ddV}{mm\,d\omega^2} + \frac{\nu ee\,dd(X-Z)}{cc\,d\omega^2}$$
$$+ \frac{\mu\,dd(Y-Z)}{d\omega^2} + \frac{1+\nu}{e} - \frac{nnee}{m^3} + \frac{(2-m)\,nneV}{m^4}$$
$$- \frac{2nneeU}{m^4 c} + \frac{\mu e\,cos.\,\omega}{cc} + \frac{\mu(e-c\,cos.\,\omega)}{h^3}(\alpha + \beta\,cos.\,\omega + \gamma\,cos.\,2\,\omega + \&c.)$$
$$+ \frac{\nu nnee}{mmcc}\,(X-Z) + \frac{\mu n(n+2m)}{mm}\,(Y-Z)$$

Et réintroduisant les distances x & y on aura:

$$o = c\,ddx + \frac{1+\mu}{c} - \frac{2cc}{m^3} + \frac{cx}{mm} - \frac{2\nu}{m}\,(X-Z) + \frac{\nu c\,cos.\,\omega}{ee}$$
$$+ \frac{\nu c\,(c-e\,cos.\,\omega)}{h^3}\,(\alpha + \beta\,cos.\,\omega + \gamma\,cos.\,2\,\omega + \&c.)$$

$o =$

$$b = eddy + \frac{1+\nu}{e} - \frac{2nnee}{m^3} + \frac{nney}{mm} + \frac{2\mu n}{m}(Y-Z) + \frac{\mu e \cos\omega}{cc}$$
$$+ \frac{\mu e(e-\cos\omega)}{n^3}(\alpha + \beta\cos\omega + \gamma\cos 2\omega + \&c.$$

Ensuite on aura :

$$\frac{d\nu - dp}{d\omega} = \frac{2(2-m)U}{mmc} - \frac{4nV}{mme} - \frac{\nu(2-m)}{cc}(X-Z)$$
$$-\frac{2\mu}{ee}(Y-Z)$$

$$\frac{d\theta - dq}{d\omega} = \frac{4nU}{mmc} - \frac{2n(2-m)V}{mme} - \frac{2\nu n}{cc}(X-Z)$$
$$-\frac{\mu(2-m)}{ee}(Y-Z)$$

ou bien

$$\frac{d\nu - dp}{d\omega} = \frac{2}{m} - \frac{2x}{c} + \frac{\nu m}{cc}(X-Z) \ \&$$

$$\frac{d\theta - dq}{d\omega} = \frac{2n}{m} - \frac{2ny}{e} - \frac{\mu m}{ee}(Y-Z)$$

Maintenant il n'eſt plus difficile de parvenir à la ſolution. Car ayant les valeurs $n = 0,4025686$ & $m = 0,5974314$, on trouvera d'abord $c^3 = n^3$ & $e^3 = \frac{m^3}{nn}$, $h = 2,089088\,m$, ou $\frac{c}{m} = 1$ & $\frac{e}{m} = 1,834170$.

Maintenant qu'on ſuppoſe

$$x = \frac{c}{m} + A\cos\omega + B\cos 2\omega + C\cos 3\omega + D\cos 4\omega \ \&c.$$

$$y = \frac{e}{m} + A'\cos\omega + B'\cos 2\omega + C'\cos 3\omega + D'\cos 4\omega \ \&c.$$

& ſubſtituant ces valeurs dans les équations *differentio-*
différentielles, ou trouvera les déterminations ſui-
vantes:

$$A = +0,4347\nu \qquad A' = +1,7814\mu$$
$$B = -1,8637\nu \qquad B' = +0,2831\mu$$
$$C = -0,1944\nu \qquad C' = +0,0655\mu$$
$$D = -0,0505\nu \qquad D' = +0,0205\mu$$

Enſuite on trouvera plus exactement:

$$\frac{c}{m} = 1,000000 + 0,33333\mu - 0,04006\nu$$
$$\frac{e}{m} = 1,834170 + 0,61140\nu + 0,16513\mu$$

Par conſequent les vraies diſtances des Planètes au Soleil ſeront:

$$x = 1,000000 + 0,3333\mu + 0,4347\nu\cos.\omega - 0,1944\nu\cos.3\omega - 0,0401\nu - 1,8637\nu\cos.2\omega - 0,0505\nu\cos.4\omega$$

$$y = 1,834170 + 0,6114\nu + 1,7814\mu\cos.\omega + 0,0655\mu\cos.3\omega + 0,1651\mu + 0,2831\mu\cos.2\omega + 0,0205\mu\cos.4\omega$$

& les longitudes vraies des Planètes ſe trouveront:

$$\eta = p - 1,3416\nu\sin.\omega + 3,3154\nu\sin.2\omega + 0,2761\nu\sin.3\omega + 0,0494\nu\sin.4\omega$$

$$\theta = q - 0,0627\mu\sin.\omega - 0,1623\mu\sin.2\omega - 0,0336\mu\sin.3\omega - 0,0099\mu\sin.4\omega$$

où p & q marquent les longitudes moyennes.

Donc ſi nous donnons aux lettres μ & ν les valeurs, qu'on conclut des revolutions des ſatellites; ſavoir

$\mu = \frac{1}{1067}$ & $\nu = \frac{1}{3021}$; & que la diſtance d'un corps au Soleil, qui fait ſes revolutions au tour du Soleil en même tems que Jupiter, ſoit poſée = 1000000 dans l'hypothéſe de Kepler, les diſtances des deux Planètes au Soleil ſeront, lorſqu'elles ſe trouvent éloignées l'une de l'autre de l'angle $\omega = \eta - \theta$.

$$x = 1000317 + 145\, cos.\, \omega - 621\, cos.\, 2\,\omega - 64\, cos.\, 3\,\omega - 17\, cos.\, 4\,\omega$$

$$y = 1834027 + 1781\, cos.\, \omega + 283\, cos.\, 2\,\omega + 65\, cos.\, 3\,\omega + 20\, cos.\, 4\,\omega$$

Or, pour leurs longitudes, ſi nous convertiſſons les coëfficiens trouvés en ſecondes, ſuppoſant le ſinus total = 1, elles proviendront :

$$\eta = p - 92''\, ſin.\, \omega + 226''\, ſin.\, 2\,\omega + 19''\, ſin.\, 3\,\omega + 3''\, ſin.\, 4\,\omega$$

$$\theta = q - 12''\, ſin.\, \omega - 32''\, ſin.\, 2\,\omega - 6''\, ſin.\, 3\,\omega - 2''\, ſin.\, 4\,\omega$$

Ainſi il ne ſeroit pas difficile de marquer en tout tems les lieux vrais de ces deux Planètes, ſi leurs orbites n'étoient pas excentriques, dans le ſens que j'ai établi ci-deſſus : & ſi ce cas avoit lieu dans le ciel, la queſtion propoſée ſeroit déja parfaitement réſolue.

De ces formules je tire les réflexions ſuivantes, qui ſerviront non ſeulement à nous éclaircir aſſez conſidérablement ſur cette matiere, mais auſſi à conduire plus ſûrement les opérations que je dois encore entreprendre pour les autres inégalités.

I. Je remarque donc premiérement, que la réſolution de la formule irrationnelle $\left(1 - \frac{2ce}{cc+ee}\, cos.\, \omega\right)^{-\frac{2}{3}}$ dans une ſérie eſt tout-à-fait propre à notre deſſein;

car quoique cette série soit peu convergente en elle-même, on voit pourtant que les changemens qu'elle subit dans le calcul, la rendent tellement convergente, qu'il suffit d'en prendre les cinq premiers termes; les suivans devenant si petits tant pour les distances x & y que pour les longitudes η & θ, qu'on s'en peut passer sans aucune erreur sensible. Il est donc certain que dans le calcul que j'aurai encore à faire, il suffira de considérer les mêmes premiers termes de cette série sans qu'on puisse avoir lieu de craindre que les suivans soient de quelque conséquence.

II. On voit aussi que les inégalités, qui dependent des angles ω, $2\,\omega$, $3\,\omega$ & $4\,\omega$, sont déja si petites d'elles-mêmes, qu'elle deviendroient tout-à-fait insensibles si on les multiplioit encore par les fractions μ & ν: ce qui justifie mes opérations, quand j'ai négligé dans le calcul tous les termes qui renferment les coëfficiens A, B, C, D, &c. A', B', C', D', &c. multipliés par μ ou ν. Et partant dans la poursuite du calcul je serai également autorisé à négliger quantité de termes qui ne seront pas plus considérables que ceux dont je viens de parler.

III. Il est aussi fort remarquable que si les deux orbites de Jupiter & Saturne n'étoient point excentriques, les inégalités qui se trouveroient dans la longitude de Saturne seroient si petites qu'à peine sauroit on s'en appercevoir par les observations; puisqu'on voit qu'elles ne surpasseroient que fort rarement la moitié d'une minute. Or en recompense la distance de Saturne au Soleil en sera plus altérée; car dans ses conjonctions avec Jupiter, lorsque $\omega = o$ sa distance sera $= 1834027 + 2049$, & dans les oppositions $= 1834027 - 1543$; donc sa distance moyenne au Soleil sera augmentée dans le le premier cas de sa $\frac{1}{900}$ partie, & diminuée dans l'autre de sa $\frac{1}{1200}$ partie.

IV. Mais il est encore plus surprenant que les inégalités dans le mouvement de Jupiter, qui dépendent de l'angle ω, soient beaucoup plus grandes que celles de Saturne, quoique la force attractive de Jupiter soit supposée trois fois plus grande que celle de Saturne. Car nous voyons que ces inégalités de Jupiter peuvent monter au de-là de 4 minutes lorsque l'angle ω est de $4^s\ 11^o$ ou de $7^s\ 19^o$. Dans le premier cas la longitude vraie de Jupiter sera moins avancée que la moyenne de $4'\ 45''$, & dans l'autre elle sera plus avancée environ de la même quantité.

Ces mêmes inégalités se trouveront donc aussi actuellement dans le mouvement de ces deux Planètes, quand même leurs orbites seroient excentriques; mais l'excentricité y causera encore de nouvelles inégalités sans changer celles-ci, que je m'en vais chercher dans les articles suivans.

§. V.

Recherches des inégalités de Jupiter & de Saturne qui dépendent de l'excentricité de l'orbite de Jupiter.

L'Analyse de l'article précédent nous fait voir qu'il est plus convenable de garder dans le calcul les distances x & y mêmes, que d'y introduire les substitutions

$x = tu$ & $y = tv$; puisque nous avons vu que les équations finales à résoudre deviennent plus simples en y remettant les lettres x & y.

Pour cet effet il sera nécessaire d'arranger nos formules d'une autre façon, pour les rendre plus propres aux recherches suivantes. Dans cette vûe je poserai d'abord :

$$x = c\,(1 + u) \; \& \; y = e\,(1 + v)$$

desorte que c & e marquront à l'avenir, ce qui a été exprimé par $\frac{c}{m}$ & $\frac{e}{m}$; & partant les valeurs de c & e, entant qu'elles ne sont pas changées par les excentricités seront :

$$c = 1,000317,\; e = 1,834027 \;\&\; h = \sqrt{(cc + ee)} = 2,089088.$$

De plus, il est clair que les lettres u & v, exprimant les inégalités causées tant par les excentricités que par l'action mutuelle, seront si petites qu'on pourra négliger sans scrupule les termes qui en contiendront trois ou plusieurs dimensions; & lorsque les termes sont déja multipliés par μ ou ν, on pourra même négliger les termes qui contiendront deux dimensions de u & v. Or puisque les termes qui dépendent uniquement de l'une ou l'autre excentricité peuvent exiger qu'on monte jusqu'aux trois dimensions, la recherche se pourra faire à part; car ici je me contenterai de conduire le calcul de même que si les excentricités étoient pour ainsi dire infiniment petites.

Donc puisque la quantité z n'entre dans le culcul qu'avec un multiplicateur μ ou ν, on aura assez exactement :

$$z = h\sqrt{\left(1 - \frac{2ce}{hh}\cos.\omega + \frac{2ccu + 2eev}{hh} - \frac{2ce}{hh}(u+v)\cos.\omega\right)}$$

& partant:

$$\frac{1}{z^3} = \frac{1}{h^3}\left[\left(1 - \frac{2ce}{hh}\cos.\omega\right)^{-\frac{3}{2}} - \frac{3}{hh}(ccu + eev - ce(u+v)\cos.\omega)\right.$$
$$\left.\left(1 - \frac{2ce}{hh}\cos.\omega\right)^{-\frac{5}{2}}\right]$$

Or posant:

$$\left(1 - \frac{2ce}{hh}\cos.\omega\right)^{-\frac{3}{2}} = \alpha + \beta\cos.\omega + \gamma\cos.2\omega + \delta\cos.3\omega + \varepsilon\cos.4\omega + \zeta\cos.5\omega + \&c.$$

$$\left(1 - \frac{2ce}{hh}\cos.\omega\right)^{-\frac{5}{2}} = \alpha' + \beta'\cos.\omega + \gamma'\cos.2\omega + \delta'\cos.3\omega + \varepsilon'\cos.4\omega' + \&c.$$

les valeurs de ces coëfficiens seront: (*)

$\alpha = 3,21789$	$\alpha' = 13,21601$
$\beta = 4,70357$	$\beta' = 23,79051$
$\gamma = 3,07731$	$\gamma' = 18,94939$
$\delta = 1,92413$	$\delta' = 13,82941$
$\varepsilon = 1,18601$	$\varepsilon' = 9,96700$
$\zeta = 0,75144$	

Pour trouver ensuite les valeurs des formules X, Y & Z, comme elles sont par tout multipliées par μ ou ν, & qu'il est permis de négliger les termes, qui seroient multipliés par $\mu\mu$, $\mu\nu$ ou $\nu\nu$, il suffira d'y mettre $\frac{1}{t} = \frac{f}{xx} - \frac{g}{yy}$ & puisque nous avons trouvé $f = cc$ & $g = nee$, nous avons pour ces termes:

(*) Voyez la piece de 1748, sur ce sujet. *pag.* 52.

$t = \frac{1}{m} + \frac{2u}{mm} - \frac{2nv}{mm}$ à cauſe de $m = 1 - n$.

& partant :

$$X = \frac{c}{ee}\int d\omega\, \text{ſin.}\,\omega \left(\frac{1}{m} + \frac{(m+2)u}{mm} - \frac{2(1+n)v}{mm}\right)$$

$$Y = \frac{e}{cc}\int d\omega\, \text{ſin.}\,\omega \left(\frac{1}{m} + \frac{2nu}{mm} - \frac{(2n-m)v}{mm}\right)$$

$$Z = \frac{ce}{h^3}\int d\omega\, \text{ſin.}\,\omega \left(\frac{1}{m} + \frac{(2+m)u}{mm} - \frac{(2n-m)v}{mm}\right)$$

$$(\alpha + \beta\, \text{coſ.}\,\omega + \gamma\, \text{coſ.}\, 2\omega + \delta\, \text{coſ.}\, 3\omega + \&c.)$$

$$-\frac{3ce}{mh^5}\int d\omega\, \text{ſin.}\,\omega \left(ccu + eev - ce(u+v)\,\text{coſ.}\,\omega\right)$$

$$(\alpha' + \beta'\, \text{coſ.}\,\omega + \gamma'\, \text{coſ.}\, 2\omega + \delta'\, \text{coſ.}\, 3\omega + \&c.)$$

ou bien

$$Z = \frac{ce}{mh^3}\int d\omega\, \text{ſin.}\,\omega\, (\alpha + \beta\, \text{coſ.}\,\omega + \gamma\, \text{coſ.}\, 2\omega + \&c.)$$

$$+\frac{(2+m)ce}{mmh^3}\int u\, d\omega\, \text{ſin.}\,\omega\, (\alpha + \beta\, \text{coſ.}\,\omega + \&c.)$$

$$-\frac{(2n-m)ce}{mmh^3}\int v\, d\omega\, \text{ſin.}\,\omega\, (\alpha + \beta\, \text{coſ.}\,\omega + \&c.)$$

$$-\frac{3c^3e}{mh^5}\int u\, d\omega\, \text{ſin.}\,\omega\, (\alpha' + \beta'\, \text{coſ.}\,\omega + \&c.)$$

$$-\frac{3ce^3}{mh^5}\int v\, d\omega\, \text{ſin.}\,\omega\, (\alpha' + \beta'\, \text{coſ.}\,\omega + \&c.)$$

$$+\frac{3ccee}{2mh^5}\int u\, d\omega\, \text{ſin.}\, 2\omega\, (\alpha' + \beta'\, \text{coſ.}\,\omega + \&c.)$$

$$+\frac{3ccee}{2mh^5}\int v\, d\omega\, \text{ſin.}\, 2\omega\, (\alpha' + \beta'\, \text{coſ.}\,\omega + \&c.)$$

où il faut remarquer qu'on ne doit pas prendre pour u & v leurs valeurs entieres, mais ſeulement leurs par-

ties

ties, qui ne sont pas affectées par μ ou ν.

Ensuite on aura pour les autres expressions:

$$\frac{xx}{t} = cc(m - 2nu + 2nv) + \nu(X - Z) + \mu(Y - Z)\frac{cc}{ee}$$

$$\frac{yy}{t} = ee(m - 2u + 2v) + \frac{\nu ee}{cc}(X - Z) + \mu(Y - Z)$$

donc en renversant,

$$\frac{t}{xx} = \frac{1}{mcc} + \frac{2nu}{mmcc} - \frac{2nv}{mmcc} - \frac{\nu(X - Z)}{mmc^4} - \frac{\mu(Y - Z)}{mmccee}$$

$$\frac{t}{yy} = \frac{1}{mee} + \frac{2u}{mmee} - \frac{2v}{mmee} - \frac{\nu(X - Z)}{mmccee} - \frac{\mu(Y - Z)}{mme^4}$$

& partant on aura pour les longitudes:

$$\frac{d\pi - dp}{d\omega} = -\frac{2u}{m} - \frac{(m+4n)uu}{mm} + \frac{4nuv}{mm} + \frac{\nu(X - Z)}{mcc}$$
$$+ \frac{2\nu(1+n)u(X - Z)}{mmcc} - \frac{2\nu nv(X - Z)}{mmcc} + \frac{2\mu u(Y - Z)}{mmee}$$

$$\frac{d\theta - dq}{d\omega} = -\frac{2nv}{m} + \frac{4nuv}{mm} + \frac{(4 - m)nvv}{mm} - \frac{\mu(Y - Z)}{mee}$$
$$+ \frac{2\mu(1+n)v(Y - Z)}{mmec} - \frac{2\mu u(Y - Z)}{mmee} + \frac{2\nu nv(X - Z)}{mmcc}$$

& enfin pour les équations *differentio*-différentielles en posant 1 pour $d\omega$, on aura:

$$\frac{xx}{td\omega}\, d\frac{dx}{td\omega} = mmc^3ddu - 2m(1+n)c^3uddu$$
$$- 2mc^3du^2 + 4mnc^3vddu + 2mnc^3dudv$$
$$+ 2\nu mcddu(X - Z) + \nu mcdu(dX - dZ)$$
$$+ \frac{2\mu me^3ddu(Y - Z)}{ee} + \frac{\mu mc^3du(dY - dZ)}{ee}$$

$$\frac{yy}{td\omega}\, d\frac{dy}{td\omega} = mme^3ddv - 4me^3uddv - 2me^3dudv$$
$$+ 2m(1+n)e^3vddv + 2mne^3dv^2$$
$$+ \frac{2\nu me^3ddv(X - Z)}{cc} + \frac{\nu me^3dv(dX - dZ)}{cc}$$
$$+ 2\mu meddv(Y - Z) + \mu medv(Yd - dZ)$$

Or, il conviendra de donner à nos équations *differentio*-différentielles les formes suivantes, pour en rendre le calcul plus aisé.

$$\frac{x^3}{c^4 t d\omega} d\frac{dx}{t d\omega} = 1 + \frac{2\nu}{cc}(X - Z) - \frac{(1+\mu)x}{c^4} - \frac{\nu x^3 \cos.\omega}{c^4 yy} - \frac{\nu(x^4 - x^3 y \cos.\omega)}{c^4 z^3}$$

$$\frac{y^3}{c^4 t d\omega} d\frac{dy}{t d\omega} = nn - \frac{2\mu n}{cc}(Y - Z) - \frac{(1+\nu)y}{c^4} - \frac{\mu y^3 \cos.\omega}{c^4 xx} - \frac{\mu(y^4 - xy^3 \cos.\omega)}{c^4 z^3}$$

& pour ces formes on aura :

$$\begin{aligned}\frac{x^3}{c^4 t d\omega} d\frac{dx}{t d\omega} = {} & mm\,ddu - m(4-3m)\,u\,ddu - 2m\,du^2 \\ & + 4mn\nu\,ddu + 2mn\,du\,d\nu \\ & + \frac{2\nu m\,ddu}{cc}(X - Z) + \frac{\nu m\,du}{cc}(dX - dZ) \\ & + \frac{2\mu m\,ddu}{cc}(Y - Z) + \frac{\mu m\,du}{cc}(dY - dZ)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{y^3}{c^4 t d\omega} d\frac{dy}{t d\omega} = {} & mm\,dd\nu + m(4-m)\,\nu\,dd\nu + 2mn\,d\nu^2 \\ & - 4mu\,dd\nu - 2m\,du\,d\nu \\ & + \frac{2\nu m\,dd\nu}{cc}(X - Z) + \frac{\nu m\,d\nu}{cc}(dX - dZ) \\ & + \frac{2\mu m\,dd\nu}{cc}(Y - Z) + \frac{\mu m\,d\nu}{cc}(dY - dZ).\end{aligned}$$

Donc nos deux équations *differentio*-différentielle feront :

$$
\text{I. } o = \left\{
\begin{aligned}
& - mmddu + m(4 - 3m)uddu + 2mdu^2 \\
& - 4mnvddu - 2mndudv \\
& - \frac{2\nu mddu}{cc}(X - Z) - \frac{\nu mdu}{cc}(dX - dZ) \\
& - \frac{2\mu mddu}{ee}(Y - Z) - \frac{\mu mdu}{ee}(dY - dZ) \\
& + 1 + \frac{2\nu}{cc}(X - Z) - \frac{(1+\mu)}{e^3} - \frac{(1+\mu)u}{c^3} \\
& \qquad - \frac{\nu}{cee} cof.\,\omega - \frac{3\nu u\, cof.\,\omega}{cee} + \frac{2\nu v\, cof.\,\omega}{cee} \\
& - \frac{\nu}{h^3}\left(1 - \frac{e}{c} cof.\,\omega\right)(\alpha + \beta\, cof.\,\omega + \gamma\, cof.\,2\omega + \&c.) \\
& - \frac{\nu u}{h^3}\left(4 - \frac{3e}{c} cof.\,\omega\right)(\alpha + \beta\, cof.\,\omega + \gamma\, cof.\,2\omega + \&c.) \\
& + \frac{\nu ev}{ch^3} cof.\,\omega(\alpha + \beta\, cof.\,\omega + \gamma\, cof.\,2\omega + \&c.) \\
& + \frac{\nu u}{h^5}\,(3cc - 6ce\, cof.\,\omega + 3ee\, cof.\,\omega^2) \\
& (\alpha' + \beta'\, cof.\,\omega + \gamma'\, cof.\,2\omega + \&c.) \\
& + \frac{\nu v}{h^5}\left(3ee - 3ce\, cof.\,\omega - \frac{3e^3}{c} cof.\,\omega + 3ee\, cof.\,\omega^2\right) \\
& (\alpha' + \beta'\, cof.\,\omega + \gamma'\, cof.\,2\omega + \&c.)
\end{aligned}
\right.
$$

$$\text{II. } o = \left\{ \begin{array}{l} -mmddv - m(4-m)vddv - 2mndv^2 \\ + 4muddv + 2mdudv \\ - \frac{2\nu mddv}{cc}(X-Z) - \frac{\nu mdv}{cc}(dX-dZ) \\ - \frac{2\mu mddv}{ee}(Y-Z) - \frac{\mu mdv}{ee}(dY-dZ) \\ + nn - \frac{2\mu n}{ee}(Y-Z) - \frac{(1+\nu)}{e^3} - \frac{(1+\nu)v}{e^3} \\ \qquad - \frac{\mu \cos.\omega}{cce} + \frac{2\mu u \cos.\omega}{cce} - \frac{3\mu v \cos.\omega}{cce} \\ - \frac{\mu}{h^3}\left(1 - \frac{c}{e}\cos.\omega\right)(\alpha + \beta\cos.\omega + \gamma\cos.2\omega + \&c.) \\ - \frac{\mu v}{h^3}\left(4 - \frac{3c}{e}\cos.\omega\right)(\alpha + \beta\cos.\omega + \gamma\cos.2\omega + \&c.) \\ + \frac{\mu c u}{eh^3}\cos.\omega(\alpha + \beta\cos.\omega + \gamma\cos.2\omega + \&c.) \\ + \frac{\mu v}{h^5}(3ee - 6ce\cos.\omega + 3cc\cos.\omega^2) \\ (\alpha' + \beta'\cos.\omega + \gamma'\cos.2\omega + \&c.) \\ + \frac{\mu u}{h^5}\left(3cc - 3ce\cos.\omega - \frac{3c^3}{e}\cos.\omega + 3cc\cos.\omega^2\right) \\ (\alpha' + \beta'\cos.\omega + \gamma'\cos.2\omega + \&c.) \end{array} \right.$$

Maintenant puisque les quantités constantes, qui entrent dans ces formules, sont connues, si nous remettons à leur place leurs valeurs, nos formules se changeront dans les formes suivantes, qui seront les plus commodes pour achever le calcul. Or on trouvera:

$$X = -0,49755\cos.\omega + 2,16316\int u\,d\omega.\sin.\omega$$
$$- 2,33614\int v\,d\omega\,\sin.\omega$$

$Y =$

$$Y = -3,07010 \text{ cos. } \omega + 4,13746 \int u\, d\omega \text{ sin. } \omega$$
$$- 1,06737 \int v\, d\omega \text{ sin. } \omega.$$

$$Z = -0,56546 \text{ cos. } \omega - 0,23399 \text{ cos. } 2\omega$$
$$- 0,10614 \text{ cos. } 3\omega - 0,04936 \text{ cos. } 4\omega$$
$$+ \int u\, d\omega\, (2,69960 \text{ sin. } \omega + 2,71178 \text{ sin. } 2\omega)$$
$$+ 2,15293 \text{ sin. } 3\omega)$$
$$- \int v\, d\omega\, (2,14022 \text{ sin. } \omega + 2,39381 \text{ sin. } 2\omega$$
$$+ 1,96490 \text{ sin. } 3\omega)$$

Donc

$$X - Z = + 0,06791 \text{ cos. } \omega + 0,23399 \text{ cos. } 2\omega$$
$$+ 0,10614 \text{ cos. } 3\omega + 0,04936 \text{ cos. } 4\omega$$
$$- \int u\, d\omega\, (0,53644 \text{ sin. } \omega + 2,71178 \text{ sin. } 2\omega$$
$$+ 2,15293 \text{ sin. } 3\omega)$$
$$- \int v\, d\omega\, (0,19592 \text{ sin. } \omega - 2,39381 \text{ sin. } 2\omega$$
$$- 1,96490 \text{ sin. } 3\omega)$$

$$Y - Z = - 2,50464 \text{ cos. } \omega + 0,23399 \text{ cos. } 2\omega$$
$$+ 0,10614 \text{ cos. } 3\omega + 0,04936 \text{ cos. } 4\omega$$
$$+ \int u\, d\omega\, (1,43786 \text{ sin. } \omega - 2,71178 \text{ sin. } 2\omega$$
$$- 2,15293 \text{ sin. } 3\omega)$$
$$+ \int v\, d\omega\, (1,07285 \text{ sin. } \omega + 2,39381 \text{ sin. } 2\omega$$
$$+ 1,96490 \text{ sin. } 3\omega)$$

Avant que de paſſer outre il faut remarquer que les valeurs cc & nee, trouvées ci-deſſus pour les lettres f & g, ne ſont vraies qu'à-peu-près, lorſque les orbites ſont excentriques. Dans ce cas elles demandent une petite correction, que nous trouverons en posant $f = ee(1+f)$ & $g = nee(1+g)$, où f & g seront des quantités extrêmement petites. Donc on aura:

$$\frac{du - dp}{d\omega} = \frac{f}{m} - \frac{2u}{m} - \frac{(m+n)uu}{mm} + \frac{4nuv}{mm} + \frac{\nu(X-Z)}{mcc}$$
$$+ \frac{2\nu(1+n)u(X-Z)}{mmcc} - \frac{2\nu n v(X-Z)}{mmcc} + \frac{2\mu u(Y-Z)}{mmee}$$

$$\frac{d\theta - dq}{d\omega} = \frac{ng}{m} - \frac{2nv}{m} + \frac{(4-m)nvv}{mm} - \frac{4nuv}{mm} - \frac{\mu(Y-Z)}{mee}$$
$$+ \frac{2\mu(1+n)v(Y-Z)}{mmee} - \frac{2\mu u(Y-Z)}{mmee} + \frac{2\nu n v(X-Z)}{mmee}$$

& les équations *differentio*-différentielles obtiendront les formes suivantes, en les divisant par $m\,m$.

$$0 = \left\{\begin{array}{l}
- ddu + \frac{(4-3m)uddu}{m} + \frac{2du^2}{m} - \frac{4nvddu}{m} \\
- \frac{2ndudv}{m} + \frac{1}{mm} + \frac{2f}{mm} + \frac{2\nu}{mmcc}(X-Z) \\
- \frac{(1+\mu)}{mmc^3} - \frac{2\nu ddu}{mcc}(X-Z) - \frac{\nu du}{mcc}(dX - dZ) \\
- \frac{2\mu ddu}{mee}(Y-Z) - \frac{\mu du}{mee}(dY - dZ) - \frac{(1+\mu)u}{mmc^3} \\
+ 0,33672\,\nu + 0,40276\,\nu\,cos.\,\omega \\
+ 0,94218\,\nu\,cos.\,2\omega + 0,61021\,\nu\,cos.\,3\omega \\
+ 0,38959\,\nu\,cos.\,4\omega. \\
+ \nu u\,(1,65822 + 2,34202\,cos.\,\omega \\
\quad + 4,44811\,cos.\,2\omega + 3,43398\,cos.\,3\omega) \\
- \nu v\,(1,33820 + 1,97818\,cos.\,\omega \\
\quad + 3,27124\,cos.\,2\omega + 2,94118\,cos.\,3\omega)
\end{array}\right.$$

$$
0 = \begin{cases}
- ddv - \frac{(4-m)vddv}{m} - \frac{2ndv^2}{m} + \frac{4uddv}{m} \\
+ \frac{2dudv}{m} + \frac{nn}{mm} + \frac{2nng}{mm} - \frac{2\mu n}{mmee}(Y-Z) \\
- \frac{(1+v)}{mme^3} - \frac{2vddv}{mcc}(X-Z) - \frac{vdv}{mcc}(dX-dZ) \\
- \frac{2\mu ddv}{mee}(Y-Z) - \frac{\mu dv^2}{mee}(dY-dZ) - \frac{(1+v)v}{mme^3} \\
- 0,59483\,\mu - 2,17601\,\mu\, cof.\,\omega \\
- 0,39044\,\mu\, cof.\,2\,\omega - 0,23413\,\mu\, cof.\,3\,\omega \\
- 0,14032\,\mu\, cof.\,4\,\omega. \\
- \mu u\,(0,39631 - 1,97192\, cof.\,\omega \\
\quad + 0,97240\, cof.\,2\,\omega + 0,87427\, cof.\,3\,\omega) \\
- \mu v\,(0,20219 + 4,15067\, cof.\,\omega \\
\quad - 0,69750\, cof.\,2\,\omega - 0,44479\, cof.\,3\,\omega)
\end{cases}
$$

Après avoir ainſi préparé nos formules, il ſera d'aûtant plus aiſé de déterminer les inégalités qui dépendent de l'excentricité de l'une ou de l'autre planète, puiſque ni les différentiations ni les intégrations ne cauſent aucun embarras.

Soit donc k l'excentricité de l'orbite de Jupiter, & r ſon anomalie de l'eſpece dont j'ai parlé ci-deſſus, deſorte que ſa différentielle dr garde une raiſon conſtante avec l'élément $d\omega$: & partant je poſerai $dr = \varkappa d\omega$, où il eſt clair que la valeur de $\varkappa$ nous découvrira le vrai mouvement de l'aphélie de Jupiter. La valeur de u contiendra donc ce terme $k\, cof.\, r$, qui ſera le plus conſidérable par rapport aux autres, puiſque l'excentricité k eſt aſſez conſidérable ; enſuite il eſt évident que des termes de cette forme $k^2\, cof.\, 2\, r\; k^3\, cof.\, 3\, r$, &c. entreront auſſi dans la valeur de u, mais nos formules ne ſont propres qu'à trouver le terme k^2 *coſ.* $2r$; or les ſuivans ſe trouveront aiſément par le moyen d'une méthode particuliere, que j'expoſerai enſuite; car ces termes ſeront ſi petits, que je les pourrai négliger dans la recherche préſente.

Pour la valeur de v, elle ſubira auſſi des changemes conſidérables à cauſe de l'excentricité de l'orbite de Jupiter, & contiendra les mêmes termes que celle de u, quoique leurs coëfficiens ſoient tous multipliés par μ ou ν. Or nonobſtant cela j'ai remarqué que le coëfficient du terme *coſ.* $(\omega - r)$, qui ſe trouvera dans v, devient ſi grand, qu'il n'eſt pas permis de le confondre avec les autres termes de la même quantité v, qui ſeront pour la plupart fort petits.

Or l'angle $\omega - r$ exprime à-peu-près la diſtance de Saturne à l'aphélie de Jupiter, deſorte que Saturne ſoit ſouffrir des dérangemens très-conſidérables, qui dépendent de ſa diſtance à l'aphélie de Jupiter. Donc quand même Saturne n'auroit point d'excentricité propre, ſon mouvement ſeroit tellement déreglé par rapport à l'aphélie de Jupiter, qu'on croiroit que ſon orbite eſt très ſenſiblement excentrique, & que ſon aphélie tombe dans celui de Jupiter, comme on verra quand le calcul ſera achevé. Et c'eſt ici que ſe trouve la plus grande difficulté de la queſtion propoſée, difficulté telle, que ſi l'on n'y fait pas toute la réflexion poſſible, il eſt abſolument impoſſible de réuſſir dans cette recherche.

Poſons donc, puiſqu'il eſt aiſé de prévoir la forme des quantités u & v:

$u =$

$$u = +k\ cos.\ r + A\ cos.\ \omega + B\ cos.\ 2\omega + Fk\ cos.\ (\omega - r)$$
$$+ Akk\ cos.\ 2r + ak^2 cos.\ \omega + C\ cos.\ 3\omega + Gk\ cos.\ (\omega + r)$$
$$+ D\ cos.\ 4\omega + Hk\ cos.\ (2\omega - r)$$
$$+ Ik\ cos.\ (2\omega + r)$$
$$+ Kkk\ cos.\ (\omega - 2r)$$

$$v = \alpha k\ cos.\ (\omega - r) + A'\ cos.\ \omega + B'\ cos.\ 2\omega + G'k\ cos.\ (\omega + r)$$
$$+ f'kk\ cos.\ (2\omega - 2r) + a'k^2 cos.\ \omega + C'\ cos.\ 3\omega + H'k\ cos.\ (2\omega - r)$$
$$+ E'k\ cos.\ r \qquad + D'\ cos.\ 4\omega + I'k\ cos.\ (2\omega + r)$$
$$+ K'kk\ cos.\ (\omega - 2r)$$

& faiſant les ſubſtitutions dans nos équations, on aura d'abord :

$$f = \frac{(m+4n)}{2m} kk \ \& \ g = -\frac{(4-m)}{2m} \alpha\alpha kk.$$

& enſuite les valeurs des lettres A, B, C, D, & A', B', C', D' deviendront :

$A = 0,43472\,\nu$; $B = -1,88047\,\nu$; $C = -0,19440\,\nu$; $D = -0,05047\,\nu$.

$A' = 0,90959\,\mu$; $B' = +0,15435\,\mu$; $C' = +0,03572\,\mu$; $D' = +0,01116\,\mu$.

Pour les autres valeurs, ayant rangé tous les termes dont les deux équations *differentio*-différentielles ſeront compoſées, ſelon les coſinus des angles, qui forment les quantités u & v; les premiers rangs, qui ne renferment que des quantités conſtantes, donneront

$$\frac{1+\mu}{mmc^3} = \frac{1}{mm} + \frac{(m+4n)}{m^3} kk - \frac{3n}{m} xxkk + 0,33672\,\nu$$

$$\frac{1+\nu}{mme^3} = \frac{nn}{mm} - \frac{nn(4-m)}{m^3} \alpha\alpha kk + \frac{3}{m}(1-x)^2 \alpha\alpha kk - 0,59483\,\mu$$

d'où l'on pourra déterminer les vraies diſtances moyennes c & e après quon aura trouvé les quantités x, α &

l'excentricité k, dont celle-ci ſe doit conclure par les obſervations. Or le terme k *coſ.* r de la premiere équation donnera.

$$xx + \frac{n}{m}(1+x)A\alpha + \frac{0,19592}{mmccx}\nu\alpha$$
$$- \frac{(1+\mu)}{mmc^3} + 1,65822\nu - 0,98909\nu\alpha = 0$$

qui ſe réduit à celle-ci, puiſque $x = \frac{1}{m}$ à-peu-près

$$xxmm = 1 - 0,47168\nu - 0,0432\nu\alpha$$

d'où nous tirons

$$x = \frac{1}{m} - 0,39475\nu - 0,0362\nu\alpha$$

& partant

$$1 - x = -\frac{n}{m} + 0,39475\nu + 0,0362\nu\alpha$$

Enſuite le terme k *coſ.* $(\omega - r)$ de l'autre équation fournit cette égalité :

$$(1-x)^2\alpha - \frac{1}{m}(2-x)A' + \frac{\mu n, 1,43786}{mmee(1-x)}$$
$$- \frac{\alpha(1+\nu)}{mme^3} + 0,98596\mu - 0,20219\mu\alpha = 0$$

ſi l'on y ſubſtitue la valeur trouvée de x, les termes finis, ou ceux qui ne contiennent point μ ou ν ſe détruiront d'eux-mêmes, & l'on aura :

$$\alpha(0,39264\mu - 0,53199\nu) - 0,0487\alpha\alpha\nu$$
$$= 0,22604\mu$$

d'où l'on voit, que ſi l'on ne connoît pas très-exactement les valeurs de μ & ν, il eſt impoſſible de bien déterminer celle de α ; de ſorte que cette détermination eſt extrêmement délicate. Cependant ſi nous ſuppoſons

$$\mu = \frac{1}{1067} \ \& \ \nu = \frac{1}{3021}$$

nous aurons :

$$192\,\alpha - 16\,\alpha\alpha = 212$$

d'où nous tirons :

$$\alpha = 1,2303.$$

Donc puisque α est > 1. Saturne ressent une plus grande inégalité de Jupiter, que Jupiter même. Or cela n'est vrai que dans la supposition faite pour les lettres μ & ν; & puisqu'elle n'est pas trop sûre, il peut arriver que la véritable valeur de α differe très-considérablement de celle que nous venons de trouver.

Pour cette raison, il vaudra mieux considérer la valeur de α comme inconnue, & de tâcher ensuite de la déterminer exactement par les observations. Cependant voyant qu'elle est très-considérable, & qu'elle surpasse peut-être l'unité, on reconnoîtra la néceffité de traiter dans le calcul ce terme $\alpha\, k\, cos. (\omega - r)$ sur le même pied quele terme $k\, cos. r$, qui est le plus considérable dans la valeur de u, & on verra que cette lettre α influe si-considérablement sur toutes les autres inégalités, quelles peuvent même changer de signe.

Mais quoique je ne puisse considérer la valeur de α comme entiérement connue, la valeur de x n'en dépend point sensiblement, & partant nous sommes en état de déterminer le mouvement de l'aphélie de Jupiter très-exactement. Car posant $\alpha = 1\frac{1}{4}$, nous aurons :

$$xx\,mm = 1 - 0,52568\,\nu \;\&\; x\,m = 1 - 0,26284\,\nu.$$

Or ayant posé $d\,r = x\,d\,\omega$, nous aurons $r =$ const. $+ x\,\omega =$ const. $+ x\,(n - \theta)$, & selon le mouvement moyen, $r = C + x\,(p - q) = C + m\,x\,p$. Donc s'il l'on avoit exactement $x\,m = 1$, le mouvement de l'anomalie moyenne seroit égal au mouvement moyen, & l'aphélie feroit en repos. Or puifque $\varkappa\, m = 1 - 0,26284\,\nu$; il s'enfuit que le mouvement moyen eft ou mouvement de l'anomalie comme 1 à $1 - 0,26284\,\nu$; & partant l'aphélie aura un mouvement en avant; deforte que le mouvement de l'aphélie fera au mouvement moyen comme $0,26284\,\nu$ à 1, ou pofant $\nu = ,\frac{1}{0,21}$ comme $0,000087$ à 1. Donc puifque le mouvement moyen de Jupiter eft pendant un an de $1^{s}, 0^{g}, 20', 38'' = 109238''$, l'aphélie de Jupiter avancera chaque année de $9\frac{1}{2}''$, par rapport aux étoiles fixes; donc par rapport aux équinoxes le mouvement annuel de l'aphélie de Jupiter fera affez exactement de $60''$.

M. Caffini ayant très-foigneufement examiné toutes les obfervations anciennes, & les ayant comparées avec les modernes, ne trouve que $57''$ pour le mouvement annuel de cet aphélie, au lieu que d'autres tables aftronomiques le marquent au delà de $70''$, d'où je conclus que ce bel accord de mon calcul avec les obfervations anciennes en confirme affez la jufteffe.

Pour les autres valeurs on les trouve pour la valeur de u;

$A = 1,78973$ $\quad F = -0,61925\,\nu - 0,01701\,\mu - 0,57001\,\alpha\nu$.

$a = 1,67383\,\alpha$ $\quad G = +0,76236\,\nu + 0,01689\,\mu + 3,64624\,\alpha\nu$.

$K = -1,67385\,\alpha$ $\quad H = +10,58430\,\nu + 0,13210\,\mu + 0,40168\,\alpha\nu$.

$I = -4,74525\,\nu - 0,13576\,\mu + 0,52283\,\alpha\nu$.

& pour les valeurs de l'expreffion ν.

$f =$

$f' = -2,12306\,\alpha\alpha$ $\quad E' = +0,16881\mu + 0,45202\alpha\nu - 0,74378\alpha\mu$

$a' = -0,67224\alpha$ $\quad G' = +0,65758\mu - 0,85288\alpha\nu - 0,44740\alpha\mu$

$K' = +0,67366\alpha$ $\quad H' = -12,87303\mu - 0,45204\alpha\nu + 5,23988\alpha\mu$

$I' = +0,26728\mu - 0,09304\alpha\nu - 0,11413\alpha\mu$

D'ou l'on voit qu'on ſeroit bien trompé dans la valeur de ces coëfficiens, ſi l'on avoit négligé celle de la lettre α, qui eſt, à ce que nous avons vu, très-conſidérable.

De-là les véritables diſtances moyennes c & e ſeront:

$$c = 1,00000 + 0,33333\mu - 0,04006\nu - 0,55794kk$$
$$e = 1,83417 + 0,61139\nu + 0,16513\mu + 0,41197\alpha\alpha kk$$

où l'unité marque le rayon d'un cercle, dans lequel un corps uniquement attiré vers le Soleil, acheveroit ſes révolutions en même tems que Jupiter.

Donc ayant trouvé les valeurs des coëfficiens ſuppoſés ci-deſſus, on aura à chaque tems les valeurs des diſtances x & y, par le moyen des formules $x = c(1+u)$ & $y = e(1+\nu)$

Il ne reſte donc qu'à trouver les longitudes η & θ de nos Planètes, ce qui ce fera aiſement par les formules données pour $\frac{d\eta - dp}{d\omega}$ & $\frac{d\theta - dq}{d\omega}$. Je n'en raporterai que les termes principaux, qui auroient lieu quand même l'excentricité ſeroit infiniment petite, d'où l'on aura:

$$\begin{aligned}\eta = p &- 1,34665\,\nu\,\text{ſin.}\,\omega + 3,34343\,\nu\,\text{ſin.}\,2\,\omega\\ &+ 0,27615\,\nu\,\text{ſin.}\,3\,\omega + 0,06193\,\nu\,\text{ſin.}\,4\,\omega\\ &- 2\,k\,\text{ſin.}\,r - 2,71356\,k\,k\,\text{ſin.}\,2\,r\\ &- 3,34766\,\alpha kk\,\text{ſin.}\,\omega - 3,34835\,\alpha kk\,\text{ſin.}(\omega - 2r)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta = q &+ 0,02035\,\mu\,\text{ſin.}\,\omega - 0,16222\,\mu\,\text{ſin.}\,2\,\omega\\ &- 0,03365\,\mu\,\text{ſin.}\,3\,\omega - 0,00990\,\mu\,\text{ſin.}\,4\,\omega\\ &+ 2\,\alpha k\,\text{ſin.}(\omega - r) - 3,54689\,\alpha\alpha kk\,\text{ſin.}\,2\,(\omega - r)\\ &- 1,34979\,\alpha kk\,\text{ſin.}\,\omega + 1,34816\,\alpha k^2\,\text{ſin.}(\omega - 2\,r)\end{aligned}$$

Pour les autres inégalités, je crois qu'il ſuffit d'avoir donné la méthode d'où elles peuvent être déduites; car avant qu'on ait déterminé exactement les valeurs de μ, ν & $\varkappa$, leur évolution en nombre deviendroit trop embarraſſante, & ne ſeroit outre cela d'aucun uſage.

Cependant ces expreſſions ſeroient ſuffiſantes, ſi l'excentricité de l'orbite de Jupiter étoit ſi petite, que les termes affectés par k & μ ou ν enſemble ne fuſſent d'aucune conſéquence.

Or les autres termes, dont les expreſſions de η & θ ſent compoſées, ſont compris dans les formules ſuivantes :

$$\eta = \text{Prec.} + \frac{k\,\text{ſin.}\,r}{\varkappa}\left(\frac{2\,n}{mm}A\,\alpha + \frac{0,09796\,\alpha\,\nu}{mcc\varkappa} - \frac{0,06791\,\alpha\,\nu}{mmcc}\right)$$

$$+ \frac{k\,\text{ſin.}\,(\omega - r)}{1 - \varkappa}\left\{\begin{aligned}&-\frac{2}{m}F - \frac{(4-3m)\,A}{mm} + \frac{2\,n\,A'}{mm} + \frac{0,26822\,\nu}{mcc(1-\varkappa)}\\ &+ \frac{0,06791\,(1+n)\,\nu}{mmcc} - \frac{2,50464\,\mu}{mmee}\end{aligned}\right\}$$

$$+\frac{k\sin(\omega+r)}{1+\varkappa}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2}{m}G-\frac{(4-3m)A}{mm}+\frac{2nA'}{mm}+\frac{2nB\alpha}{mm}\\ +\frac{0,26822\,\nu}{mcc(1+\varkappa)}-\frac{1,19690\,\alpha\nu}{mcc(1+\varkappa)}+\frac{0,06791(1+n)\nu}{mmcc}\\ -\frac{2,50464\,\mu}{mmee}-\frac{0,23399\,n\alpha\nu}{mmcc}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{k\sin.(2\omega-r)}{2-\varkappa}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2}{m}H-\frac{(4-3m)B}{mm}+\frac{2nB'}{mm}+\frac{2nA\alpha}{mm}\\ +\frac{1,33589\,\nu}{mcc(2-\varkappa)}+\frac{0,09796\,\alpha\nu}{mcc(2-\varkappa)}+\frac{0,23399(1+n)\nu}{mmcc}\\ +\frac{0\ 23399\,\mu}{mmee}-\frac{0,06791\,n\alpha\nu}{mmcc}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{k\sin.(2\omega+r)}{2+\varkappa}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2}{m}I-\frac{(4-3m)B}{mm}+\frac{2nB'}{mm}+\frac{2nC\alpha}{mm}\\ +\frac{1,35589\,\nu}{mcc(2+\varkappa)}-\frac{0,98245\,\alpha\nu}{mcc(2+\varkappa)}+\frac{0,23399(1+n)\nu}{mmcc}\\ +\frac{0,23399\,\mu}{mmee}-\frac{0,10614\,n\alpha\nu}{mmcc}\end{array}\right\}$$

$$\theta=\text{Prec.}+\frac{k\sin r}{\varkappa}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}E'+\frac{n(4-)A'\alpha}{mm}-\frac{2nA\alpha}{mm}\\ +\frac{1,07285\,\alpha\mu}{2mee\varkappa}-\frac{2,50464(1+n)\alpha\mu}{mmee}+\frac{0,06791\,n\alpha\nu}{mmcc}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{k\sin.(\omega-r)}{1-\varkappa}\left(-\frac{2nA'}{mm}+\frac{1,43786\,\mu}{2mee(1-\varkappa)}+\frac{2,50464\,\mu}{mmee}\right)$$

$$+\frac{k\sin(\omega+r)}{1+\varkappa}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}G'+\frac{n(4-m)B'\alpha}{mm}-\frac{2nA'}{mm}-\frac{2nB\alpha}{mm}\\ +\frac{1,43786\,\mu}{2mee(1+\varkappa)}+\frac{2,39381\,\alpha\mu}{2mee(1+\varkappa)}+\frac{0,23399(1+n)\alpha\mu}{mmee}\\ +\frac{2,50464\,\mu}{mmee}+\frac{0,23399\,n\alpha\nu}{mmcc}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{k\sin.(2\omega-r)}{2-\kappa}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}H'+\frac{n(4-m)A'\alpha}{mm}-\frac{2nB'}{mm}-\frac{2nA\alpha}{mm}\\ -\frac{2,71178\mu}{2mee(2-\kappa)}+\frac{1,07285\alpha\mu}{2mee(2-\kappa)}+\frac{2,50464(1+n)\alpha\mu}{mmee}\\ -\frac{0,23399\mu}{mmee}+\frac{0,06791n\alpha\nu}{mmcc}\end{array}\right\}$$

$$+\frac{k\sin.(2\omega+r)}{2+\kappa}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}I'+\frac{n(4-m)C'\alpha}{mm}-\frac{2nB'}{mm}+\frac{2nC\alpha}{mm}\\ -\frac{2,71178\mu}{2mee(2+\kappa)}+\frac{1,96490\alpha\mu}{2mee(2+\kappa)}+\frac{0,10614(1+n)\alpha\mu}{mmee}\\ -\frac{0,23399\mu}{mmee}+\frac{0,10614n\alpha\nu}{mmcc}\end{array}\right\}$$

§ VI.

Recherches des Inégalités de Jupiter & de Saturne, qui dependent de l'excentricité de l'orbite de Saturne.

De la même maniere que je viens de déterminer les inégalités, qui dependent de l'excentricité de l'orbite de Jupiter, on déterminera celles, qui dependent de l'excentricité de l'orbite de Saturne; soit donc l, l'excentricité de l'orbite de Saturne, & s son anomalie de l'espece que j'ai exposé ci-dessus, de sorte que ds, garde avec $d\omega$, un rapport constant qui soit $ds = \lambda d\omega$; or le mouvement de Jupiter se ressentira tellement de cette excentricité, que sa distance au Soleil dependra très-sensiblement de son élongation depuis l'aphélie de Saturne

Saturne. Cette élongation étant donc $= \omega + s$, la quantité u contiendra un terme de la forme $cos. (\omega + s)$, qui ſera très-conſidérable par rapport aux autres. Comme je ne regarderai pas ici l'excentricité de l'orbite de Jupiter, les inégalités qui en dependent étant deja trouvées dans l'article précédent; je poſerai

$$\begin{aligned} u = b\,l\,cos.(\omega+s) + A\,cos.\,\omega + C\,cos.\,3\,\omega + E\,l\,cos.\,s \\ + B\,cos.\,2\omega + D\,cos.\,4\,\omega + L\,l\,cos.(\omega - s) \\ + N\,l\,cos.\,(2\,\omega - s) \\ + O\,l\,cos.(\,2\,\omega + s\,) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v = l\,cos.\,s + A'\,cos.\,\omega + C'\,cos.\,3\,\omega + L'\,l\,cos.(\,\omega - s\,) \\ + B'\,cos.\,2\omega + D'\,cos.\,4\,\omega + M'\,l\,cos.\,(\omega + s) \\ + N'\,l\,cos.\,(\,2\,\omega - s\,) \\ + O\,l\,cos.\,(\,2\,\omega + s\,) \end{aligned}$$

où je néglige les termes $l\,l\,cos.\,\omega$, $l\,l\,cos.\,2\,(\omega + s)$ & $l\,l\,cos.\,(\omega + 2\,s)$, puiſque je ferai voir dans l'article ſuivant, comment on peut fort aiſement aſſigner les inégalités, qui ſeroient compriſes dans ces termes.

Maintenant on n'a qu'à ſubſtituer ces expreſſions dans nos deux équations *differentio*-différentielles rapportées pag. 34. & cette ſubſtitution n'aura aucune difficulté, puiſque nous négligerons tous les termes, qui ſeroient multipliés, ou par $\mu\,\mu$, $\mu\,\nu$ ou $\nu\,\nu$.

Or la premiere équation ſera changée par cette ſubſtitution dans la forme ſuivante;

Constante.	$l\,cos.\,s$	$l\,cos.\,(\omega - s)$
$\frac{1}{mm} + \frac{2f}{mm}$	$+E$	$+(1-\lambda)^2 L$
$-\frac{(1+\mu)}{mmc^3}$	$-\frac{(4-3m)}{2m} bA$	$-\frac{(4-3m)}{2m} 4bB$
$+0,33672\,\nu$	$-\frac{(4-3m)}{2m}(1+\lambda)^2 bA$	$-\frac{(4-3m)}{2m}(1+\lambda)^2 bB$
$-\frac{(4-2m)}{2m} b^2(1+\lambda)^2 ll$	$+\frac{2}{m}(1+\lambda)\,bA$	$+\frac{2}{m}(1+\lambda)\,2bB$
$+\frac{1}{m} b^2(1+\lambda)^2 ll$	$+\frac{2n}{m}(1+\lambda)^2 bA'$	$+\frac{2n}{m}(1+\lambda)^2 bB'$
	$-\frac{n}{m}(1+\lambda)\,bA'$	$+\frac{2n}{m} A$
	$-\frac{\nu b}{mmcc}\,\frac{0,53644}{\lambda}$	$-\frac{n}{m}(1+\lambda)\,2bB'$
	$+\frac{\nu b(1+\lambda)^2}{mcc}\,0,06791$	$-\frac{n}{m}\lambda A$
	$-\frac{\nu b(1+\lambda)}{2mcc}\,0,06791$	$+\frac{\nu b}{mmcc}\,\frac{2,71178}{1-\lambda}$
	$-\frac{\mu b(1+\lambda)^2}{mee}\,2,50464$	$+\frac{\nu}{mmcc}\,\frac{0,19592}{1-\lambda}$
	$+\frac{\mu b(1+\lambda)}{\nu nee}\,e,50464$	$+\frac{\nu b(1+\lambda)^2}{mcc}\,0,23399$
	$-\frac{(1+\mu)E}{mmc^3}$	$-\frac{\nu b(1+\lambda)}{mcc}\,0,23399$
	$+\nu b\,1,17101$	$+\frac{\mu b(1+\lambda)^2}{mee}\,0,23399$
	$-\nu\,1,33820$	$-\frac{\mu b(1+\lambda)}{mee}\,0,23399$
		$-\frac{(1+\mu)L}{mme^3}$
		$+\nu b\,2,22405$
		$-\nu\,0,98909$

$l.\ cos.(\omega + s)$	$l\ cos.(2\omega - s)$	$l\ cos.(2\omega + s)$
$+ b(1+\lambda)^2$	$+(2-\lambda)^2 N$	$+(2+\lambda)^2 O$
$+ \frac{2n}{m} A$	$- \frac{(4-3m)}{2m} 9bC$	$- \frac{(4-3m)}{2m} bA$
$+ \frac{n}{m} \lambda A$	$- \frac{(4-3m)}{2m}(1+\lambda)^2 bC$	$- \frac{(4-3m)}{2m}(1+\lambda)^2 bA$
$+ \frac{\nu}{mmcc} \frac{0{,}19592}{1+\lambda}$	$+ \frac{2}{m}(1+\lambda)\, 3bC$	$- \frac{2}{m}(1+\lambda)\, bA$
$- \frac{(1+\mu)b}{mmc^3}$	$+ \frac{2n}{m}(1+\lambda)^2 bC'$	$+ \frac{2n}{m}(1+\lambda)^2 bA'$
$+ \nu b\, 1{,}65822$	$+ \frac{2n}{m} 4B$	$+ \frac{2n}{m} 4B$
$- \nu\, 0{,}98909$	$- \frac{n}{m}(1+\lambda)\, 3bC'$	$+ \frac{n}{m}(1+\lambda)\, bA'$
	$- \frac{n}{m} 2\lambda B$	$+ \frac{n}{m} 2\lambda B$
	$+ \frac{\nu b}{mmcc} \frac{2{,}15293}{2-\lambda}$	$+ \frac{\nu b}{mmcc} \frac{0{,}53644}{2+\lambda}$
	$- \frac{\nu}{mmcc} \frac{2{,}39381}{2-\lambda}$	$- \frac{\nu}{mmcc} \frac{2{,}39381}{2+\lambda}$
	$+ \frac{\nu b(1+\lambda)^2}{mcc} 0{,}10614$	$+ \frac{\nu b(1+\lambda)^2}{mcc} 0{,}06791$
	$- \frac{3\nu b(1+\lambda)}{2mcc} 0{,}10614$	$+ \frac{\nu b(1+\lambda)}{2mcc} 0{,}06791$
	$+ \frac{\mu b(1+\lambda)^2}{mee} 0{,}10614$	$- \frac{\mu b(1+\lambda)^2}{mee} 2{,}50464$
	$- \frac{3\mu b(1+\lambda)}{2mee} 0{,}10614$	$- \frac{\mu b(1+\lambda)}{2mee} 2{,}50464$
	$- \frac{(1+\mu) N}{mmc^3}$	$- \frac{(1+\mu) O}{mmc^3}$
	$+ \nu b\, 1{,}71699$	$+ \nu b\, 1{,}17101$
	$- \nu\, 1{,}63562$	$- \nu\, 1{,}63562$

L'autre équation prendra cette forme :

Constante	$l\ cos.\ s$	$l\ cos.\ (\omega - s)$
$+\frac{(4-m)}{2m}\lambda\lambda ll$	$+\lambda\lambda$	$+(1-\lambda)^2 L'$
$-\frac{n}{m}\lambda\lambda ll$	$-\frac{2}{m}bA'$	$+\frac{(4-m)}{2m}(1+\lambda\lambda)A'$
$+\frac{nn}{mm}+\frac{2nng}{mm}$	$+\frac{1}{m}(1+\lambda)bA'$	$-\frac{2n}{m}\lambda A'$
$-\frac{(1+\nu)}{mme^3}$	$-\frac{\mu nb}{mmee}\frac{1,43786}{\lambda}$	$-\frac{2}{m}4bB'$
$-0,59483\mu$	$-\frac{(1+\nu)}{mme^3}$	$-\frac{2}{m}\lambda\lambda A$
	$+\mu b\,0,98596$	$+\frac{1}{m}\lambda A$
	$-\mu\,0,20219$	$+\frac{1}{m}(1+\lambda)2bB'$
		$-\frac{\mu nb}{mmee}\frac{2,71178}{1-\lambda}$
		$+\frac{\mu n}{mmee}\frac{1,07285}{1-\lambda}$
		$+\frac{\nu\lambda\lambda}{mcc}0,06791$
		$-\frac{\nu\lambda}{2mcc}0,06791$
		$-\frac{\mu\lambda\lambda}{mee}2,50464$
		$+\frac{\mu\lambda}{2mee}2,50464$
		$-\frac{(1+\nu)L'}{mme^3}$
		$-\mu\,2,07533$
		$-\mu b\,0,48620$

$l\ cos.$

$l. \cos.(\omega + s)$	$l \cos.(2\omega - s)$	$l \cos.(2\omega + s)$
$+(1+\lambda)^2 M'$	$+(2-\lambda)^2 N'$	$+(2+\lambda)^2 O'$
$+\frac{(4-m)}{2m}(1+\lambda\lambda)A'$	$+\frac{(4-m)}{2m}(4+\lambda\lambda)B'$	$+\frac{(4-m)}{2m}(4+\lambda\lambda)B'$
$+\frac{2n}{m}\lambda A'$	$-\frac{2n}{m}4\lambda B'$	$+\frac{2n}{m}4\lambda B'$
$-\frac{2}{m}\lambda\lambda A$	$-\frac{2}{m}9bC'$	$-\frac{2}{m}bA'$
$-\frac{1}{m}\lambda A$	$-\frac{2}{m}\lambda\lambda B$	$-\frac{2}{m}\lambda\lambda B$
$+\frac{\mu n}{mmee}\frac{1,07285}{1+\lambda}$	$+\frac{1}{m}2\lambda B$	$-\frac{1}{m}2\lambda B$
$+\frac{\nu\lambda\lambda}{mcc}0,06791$	$+\frac{1}{m}(1+\lambda)3bC'$	$-\frac{1}{m}(1+\lambda)bA'$
$+\frac{\nu\lambda}{2mcc}0,06791$	$-\frac{\mu nb}{mmee}\frac{2,15293}{2-\lambda}$	$+\frac{\mu nb}{mmee}\frac{1,43786}{2+\lambda}$
$-\frac{\mu\lambda\lambda}{mee}2,50464$	$+\frac{\mu n}{mmee}\frac{2,39381}{2-\lambda}$	$+\frac{\mu n}{mmee}\frac{2,39381}{2+\lambda}$
$-\frac{\mu\lambda}{2mee}2,50464$	$+\frac{\nu\lambda\lambda}{mcc}0,23399$	$+\frac{\nu\lambda\lambda}{mcc}0,23399$
$-\frac{(1+\nu)M'}{mme^3}$	$-\frac{\nu\lambda}{mcc}0,23399$	$+\frac{\nu\lambda}{mcc}0,23399$
$-\mu b\,0,39631$	$+\frac{\mu\lambda\lambda}{mee}0,23399$	$+\frac{\mu\lambda\lambda}{mee}0,23399$
$-\mu\,2,07533$	$-\frac{\mu\lambda}{mee}0,23399$	$+\frac{\mu\lambda}{mee}0,23399$
	$-\frac{(1+\nu)N'}{mme^3}$	$-\frac{(1+\nu)O'}{mme^3}$
	$-\mu b\,0,43714$	$+\mu b\,0,98596$
	$+\mu\,0,34875$	$+\mu\,0,34875$

Les formules pour les longitudes nous donnent d'abord à connoître, qu'il y a $f = \frac{m+4n}{2m} bbll$, & $g = -\frac{(4-m)}{2m} ll$. Ensuite les termes constans donnent :

$$\frac{1+\mu}{mmc^3} = \frac{1}{mm} + 0,33672\,\nu - \frac{(2-3m)}{2m} bb(1+\lambda)^2 ll$$
$$+ \frac{(m+4n)}{m^3} bbll$$

$$\frac{1+\nu}{mme^3} = \frac{nn}{mm} - 0,59483\,\mu + \frac{(2-3m)}{2m} \lambda\lambda ll$$
$$- \frac{(4-m)nn}{m^3} ll$$

Le terme $l\,cof.\,s$ de la seconde équation fournit

$$\lambda\lambda - \frac{1}{m}(1-\lambda) bA' - \frac{\mu n b}{mmee} \frac{1,43786}{\lambda} + \mu b\, 0,98596$$
$$- \mu\, 0,20219 = \frac{nn}{mm} - 0,59483\,\mu$$

car nous savons que la valeur de λ, ne dépend point de l'excentricité λ ; ce qu'on verroit évidemment, si l'on n'avoit pas omis dans le coëfficient du terme $l\,cof.\,s$ les parties affectées, par ll.

Or le terme $l\,cof.\,(\omega + s)$ de la premiere équation donne :

$$b(1+\lambda)^2 + \frac{n}{m}(2+\lambda)A + \frac{\nu}{mmcc} \frac{0,19592}{1+\lambda} + \nu b\, 1,65822$$
$$- \nu\, 0,98909 = \frac{b}{mm} + 0,33672\, b\nu$$

D'où il est évident, qu'il y a fort à-peu-près $\lambda = \frac{n}{m}$ & partant nous aurons en posant $\lambda = \frac{n}{m} + \frac{\xi}{m}$

$$\frac{2n\xi}{mm} - \frac{(m-n)}{mm}bA' - \frac{\mu b}{mee}1,43786 + \mu b\,0,98596 + \mu\,0,39264 = 0$$

$$\frac{2b\xi}{mm} + \frac{n(2m+n)}{mm}A + \frac{\nu}{mcc}0,19592 + \nu b\,1,32150 - \nu\,0,98909 = 0$$

& ſubſtituant les valeurs déja trouvées

$$\frac{2n\xi}{mm} - 0,22603\,b\mu + 0,39264\,\mu = 0$$

$$\frac{2b\xi}{mm} + 1,32150\,b\nu + 0,55683\,\nu = 0$$

d'où l'on tire en éliminant ξ,

$$0,22603\,bb\mu = 0,39264\,b\mu - 0,53199\,b\nu - 0,22416\,\nu$$

& de-là la valeur de b réſulteroit imaginaire en poſant $\mu = \frac{1}{1067}$, & $\nu = \frac{1}{3021}$.

Mais ſi l'on change un peu les valeurs de μ & ν, pour rendre les deux racines égales, on trouvera à-peu-près $b = \frac{1}{2}$; d'où il ſemble qu'on ne ſe trompera pas beaucoup en poſant $b = \frac{1}{2}$.

Cependant il eſt très-remarquable, qu'il pourroit arriver, que la valeur de b, devint imaginaire, & dans ce cas on ſeroit bien embarraſſé de déterminer le mouvement, car ce ſeroit une marque qu'au lieu des coſinus des angles, il faudroit introduire dans le calcul des quantités exponentielles, auxquelles ſe réduiſent comme on ſait les coſinus imaginaires.

Or de-là on obtient $\xi = -0,17406\,\mu + 0,10002\,b\mu$, & la valeur de $\lambda = \frac{n+\xi}{m}$, donnant pour l'anomalie de Saturne $s = C + \frac{n+\xi}{m}\omega =$ Conſt. $+ \frac{n+\xi}{m}(\eta - \theta)$, &

ſelon le mouvement moyen $s = C + \frac{n - \xi}{m}(p - q)$ $= C + \left(1 + \frac{\xi}{n}\right) q$. Donc le mouvement moyen de Saturne q eſt au mouvement de ſon anomalie s, comme 1 à $1 + \frac{\xi}{n}$, & au mouvement de ſon aphélie, ſuppoſé progreſſif, comme 1 à $-\frac{\xi}{n}$, c'eſt-à-dire comme, 1 à $0,43237\,\mu - 0,24891\,b\mu$, ou comme 3466 à 1. Donc le mouvement moyen de Saturne étant pendant un an $0^s, 12^\circ, 13', 30'' = 44010''$, l'aphélie de Saturne avancera chaque année de $13''$ par rapport aux étoiles fixes, & de $1' 4''$ par rapport aux équinoxes. M. Caſini ſuppoſe ce mouvement annuel de $1', 18''$; mais il eſt bien clair, qu'il eſt impoſſible de bien déterminer le mouvement de l'aphélie par les obſervations, tandis que les inégalités du mouvement ne ſont pas connues.

Ayant trouvé les valeurs des lettres b & λ, on déterminera enſuite les autres coëfficiens $L, M, N, O, L', M', N', O'$, d'où l'on connoîtra les inégalités des diſtances x & y, en tant qu'elles dependent de l'excentricité de l'orbite de Saturne. Enſuite on trouvera aiſement les inégalités dans la longitude des Planètes, qui dependent de ce même élément.

$$\pi = \text{Prec.} + \frac{l \sin s}{\lambda}\left\{\begin{array}{l} -\frac{2}{m}E - \frac{(m+4n)}{mm}bA + \frac{2n}{mm}bA' \\ -\frac{\nu b}{2mcc}\,\frac{0,53644\,\mu}{\lambda} + \frac{\nu(1+n)b}{mmcc}\,0,06791 \\ -\frac{\mu b}{mmcc}\,2,50464 \end{array}\right\}$$

$+ l \sin$

$$+\frac{l\,\sin.(\omega-s)}{1-\lambda}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2}{m}L-\frac{(m+4n)}{mm}bB+\frac{2n}{mm}bB'+\frac{2n}{mm}A\\ +\frac{\nu b}{2mcc}\,\frac{2,71178}{1-\lambda}+\frac{\nu}{2mcc}\,\frac{0,19592}{1-\lambda}\\ +\frac{r(1+n)b}{mmcc}\,0,23399-\frac{\nu n}{mmcc}\,0,06791\\ +\frac{\mu b}{mmee}\,0,23399\end{array}\right\}$$

$$+\frac{l\,\sin.(\omega+s)}{1+\lambda}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2}{m}b+\frac{2n}{mm}A+\frac{\nu}{2mcc}\,\frac{0,19592}{1+\lambda}\\ -\frac{\nu n}{mmcc}\,0,06791\end{array}\right\}$$

$$+\frac{l\,\sin.(2\omega-s)}{2-\lambda}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2}{m}N-\frac{(m+4n)}{mm}bC+\frac{2n}{mm}bC'\\ +\frac{2n}{mm}B+\frac{\nu b}{2mcc}\,\frac{2,15293}{2-\lambda}-\frac{\nu}{2mcc}\,\frac{2,39381}{2-\lambda}\\ +\frac{\nu(1+n)b}{mmcc}\,0,10614-\frac{\nu n}{mmcc}\,0,23399\\ +\frac{\mu b}{mmee}\,0,10614\end{array}\right\}$$

$$+\frac{l\,\sin.(2\omega+s)}{2-\lambda}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2}{m}O-\frac{(m+4n)}{mm}bA+\frac{2n}{mm}bA'\\ +\frac{2n}{mm}B+\frac{\nu b}{2mcc}\,\frac{0,53644}{2+\lambda}-\frac{\nu}{2mcc}\,\frac{2,39381}{2+\lambda}\\ +\frac{\nu(1+n)b}{mmcc}\,0,06791-\frac{\nu n}{mmcc}\,0,23399\\ -\frac{\mu b}{mmee}\,2,50464\end{array}\right\}$$

$$I=\text{Prec.}+\frac{l\,\sin.s}{\lambda}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}-\frac{2n}{mm}bA'-\frac{\mu b}{2mee}\,\frac{1,43786}{\lambda}\\ +\frac{\mu b}{mmee}\,2,50464\end{array}\right\}$$

$$+\frac{l\,\mathit{sin}\,(\omega+s)}{1-\lambda}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}L'+\frac{(4-m)n}{mm}A'-\frac{2n}{mm}bB'\\ -\frac{2n}{mm}A-\frac{\mu b}{2mee}\,\frac{2,71178}{1-\lambda}+\frac{\mu}{2mee}\,\frac{1,07285}{1-\lambda}\\ -\frac{\mu(1+n)}{mmee}\,2,50464-\frac{\mu b}{mmee}\,0,23399\\ +\frac{\nu n}{mmcc}\,0,06791\end{array}\right\}$$

$$+\frac{l\,\mathit{sin}.(\omega+s)}{1+\lambda}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}M'+\frac{(4-m)n}{mm}A'-\frac{2n}{mm}A\\ +\frac{\mu}{2mee}\,\frac{1,07285}{1+\lambda}-\frac{\mu(1+n)}{mmee}\,2,50464\\ +\frac{\nu n}{mmcc}\,0,06791\end{array}\right\}$$

$$+\frac{l\,\mathit{sin}.(2\omega-s)}{2-\lambda}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}N'+\frac{(4-m)n}{mm}B'-\frac{2n}{mm}bC'\\ -\frac{2n}{mm}B-\frac{\mu b}{2mee}\,\frac{2,15293}{2-\lambda}+\frac{\mu}{2mee}\,\frac{2,39381}{2-\lambda}\\ +\frac{\mu(1+n)}{mmee}\,0,23399-\frac{\mu b}{mmee}\,0,10614\\ +\frac{\nu n}{mmcc}\,0,23399\end{array}\right\}$$

$$+\frac{\mathit{sin}.(2\omega+s)}{2+\lambda}\left\{\begin{array}{l}-\frac{2n}{m}O'+\frac{(4-m)n}{mm}B'-\frac{2n}{mm}bA'\\ -\frac{2n}{mm}B+\frac{\mu b}{2mee}\,\frac{1,43786}{2+\lambda}+\frac{\mu}{2mee}\,\frac{2,39381}{2+\lambda}\\ +\frac{\mu(1+n)}{mmee}\,0,23399+\frac{\mu b}{mmee}\,2,50464\\ +\frac{\nu n}{mmcc}\,0,23399\end{array}\right\}$$

§. VII.

Recherche des inégalités de Jupiter & de Saturne, qui dépendent de l'une & de l'autre excentricité à la fois.

QUOIQUE le nombre des inégalités qui dépendent des quantités k & l à la fois soit infini, il est pourtant aisé de voir, qu'il n'y a que l'angle $\omega - r + s$, qui fournisse des inégalités de quelque conséquence, toutes les autres devenant pour ainsi dire infiniment petites; à l'égard de cet angle puisque le rapport de sa différentielle, ou $1 - x + \lambda$, devient presque égal à zero, les coëfficiens des termes qui en résultent pour les longitudes η & θ, seront extrêmement grands. Car ayant $x = \frac{1}{m} - 0,39475\,\nu - 0,0362\,\nu\alpha$, & $\lambda = \frac{n}{m} - 0,29135\,\mu + 0,16742\,\mu b$, on aura

$$x - \lambda = 1 - 0,39475\,\nu - 0,03620\,\nu\alpha$$
$$+ 0,29135\,\mu - 0,16742\,\mu b$$

& partant

$$1 - x + \lambda = 0,39475\,\nu - 0,29135\,\mu$$
$$+ 0,03620\,\nu\alpha + 0,16742\,\mu b$$

ou bien l'angle $\omega - r + s = \eta - r - \theta + s$, se trouve en soustrayant la longitude de l'aphélie de Saturne de celle de l'aphélie de Jupiter.

On voit aussi que les inégalités de cet angle ne seront d'aucune considération pour les distances mêmes,

& qu'il sera permis par conséquent de négliger dans leur recherche les termes qui sont affectés par μ ou ν. Je pose donc pour trouver ces inégalités

$$u = \text{prec.} + k\,cos.\,r + b\,l\,cos.(\omega + s) + P\,k\,l\,cos.(\omega - r + s)$$
$$v = \text{prec.} + l\,cos.\,s + \alpha\,k\,cos.(\omega - r) + P'\,k\,l\,cos.(\omega - r + s)$$

& les équations *differentio*-différentielles donneront

$$P = -\frac{m(4-3m)}{2}\,b\,(\varkappa\varkappa + (1+\lambda)^2) + 2\,m\,b\,\varkappa\,(1+\lambda)$$
$$= -\frac{2+3m}{m}\,b$$

$$P' = \frac{m(4-m)}{2nn}\,\alpha(\lambda\lambda + (1-\varkappa)^2) + \frac{2m}{n}\,\alpha\,\lambda\,(1-\varkappa)$$
$$= \frac{2+m}{m}\,\alpha$$

Ces valeurs étant substituées dans les formules pour les longitudes produiront :

$$\eta = \text{Prec.} - \frac{3\,b\,k\,l\,sin.(\omega - r + s)}{m(1 - \varkappa + \lambda)}$$

$$\theta = \text{Prec.} - \frac{3\,n\,\alpha\,k\,l\,sin.(\alpha - r + s)}{m(1 - \varkappa + \lambda)}$$

Donc si nous posons $\mu = \frac{1}{1067}$, $\nu = \frac{1}{3021}$, $\alpha = \frac{5}{4}$ & $b = \frac{1}{2}$ à cause de $1 - \varkappa + \lambda = -0{,}0000488$, ces deux inégalités deviendront à-peu-près égales, savoir :

$$\eta = \text{Prec.} + 51450\,k\,l\,sin.(\omega - r + s)$$
$$\theta = \text{Prec.} + 51780\,k\,l\,sin.(\omega - r + s)$$

Quoique ces expressions soient très-considérables, leur effet n'est presque point sensible dans le mouvement des Planètes ; car puisque l'angle $\omega - r + s$, & partant aussi son sinus, est à peu-près constant, quelque

que grandes que ſoient ces valeurs, elles ſe confondront avec la longitude moyenne, & ne troubleront le mouvement, qu'en tant que l'angle $\omega - r + s$ deviendra ſenſiblement variable. Or je parlerai plus amplement de ces changemens dans la ſuite.

§. VIII.

Réflexions ſur les Anomalies de Jupiter & de Saturne.

Les inégalités, que j'ai trouvées en premier lieu, & qu'on pourroit nommer la variation de ces Planètes, puiſqu'elles dependent uniquement de leur diſtance, ou de l'angle ω, ne ſont aſſujetties à aucun doute, & il eſt bien ſûr qu'elles ſe trouvent actuellement tant dans Saturne que dans Jupiter. Mais pour les inégalités, qui dependent de l'excentricité de l'une ou de l'autre orbite, on ſera bien ſurpris, que je vienne de trouver des inégalités auſſi conſidérables, que l'équation du centre-même de ces deux Planètes; & on ſera peut-être porté à rejetter entiérement mes recherches, puiſqu'elles conduiſent à des inégalités qui pourroient monter à pluſieurs degrés.

Mais j'eſpére, que les réflexions ſuivantes ne leveront pas non-ſeulement ce doute, mais qu'elles nous découvriront la vraie nature des inégalités qui troublent le mouvement de ces deux planètes du côté de leur excentricité; de ſorte que nous ſerons parfaitement éclaircis ſur cet article, qui doit paroître fort bizarre à tous ceux qui travaillent ſur cette matiere

Je dis donc d'abord que les grandes inégalités qui paroiſſent troubler le mouvement d'une Planète à cauſe de l'excentricité de l'autre, ne produiſent même aucune altération dans le mouvement régulier, ſelon les regles de Kepler, & que s'il n'y avoit point d'autres inégalités hormis celles-ci, le mouvement des deux Planètes ſeroit parfaitement conforme aux regles de Kepler.

Car en effet ayant vu, que mettant l'excentricité de l'orbite de Jupiter $= k$, & partant ſa diſtance $x = c(1 + k\, cof. r)$ en tant qu'elle dépend uniquement de k, la diſtance de Saturne au Soleil devient $y = e(1 + \alpha k\, cof. (\omega - r))$, il eſt évident que l'orbite de Saturne devient déja fort excentrique quoique je n'aie pas encore introduit dans le calcul ſa propre excentricité. De plus, il eſt remarquable que cette excentricité demeureroit la même, quand même l'action mutuelle des deux Planètes évanouiroit tout à fait, pourvu que les lettres μ & ν conſervent entr'elles en évanouiſſant le même rapport. Or, dans ce cas, il eſt clair que Saturne ſuivroit exactement les regles de Kepler, il décriroit donc une ellipſe, dont l'excentricité ſeroit $= \alpha k$, & l'anomalie $= \omega - r$. ou bien ſon aphélie conviendroit avec celui de l'orbite de Jupiter. Ainſi, auſſi-tôt que nous ſuppoſons excentrique l'orbite de Jupiter, le calcul nous marque celle de Saturne auſſi excentrique, dont l'excentricité tient un rapport conſtant à celle de Jupiter, ſavoir comme α à 1; & qui ſe rapporte au même aphélie, & l'une & l'autre Planète ſuivroit les regles de Kepler, à moins que leur mouvement ne ſoit dérangé par les autres inégalités.

Or nonobſtant cela Saturne peut avoir une excentricité propre, & un aphélie particulier; & alors ces deux excentricités ſe réuniſſent dans une ſeule, ſelon laquelle il décrira une ellipſe conformement aux regles de Kepler, comme je ferai voir bien-tôt. Et partant l'aphélie & l'excentricité que les tables marquent pour l'orbite de Saturne ne ſont pas ſon propre aphélie & ſon excentricité, mais plutôt le reſultat des deux excentricités de celle qui lui eſt propre, & de celle qui lui convient à cauſe de l'excentricité de l'orbite de Jupiter.

Le mouvement de Saturne ſe regle donc ſur deux aphélies à la fois ſavoir ſur celui de Jupiter, & ſur le ſien ; en conſéquence il y aura auſſi deux anomalies, l'une qui regarde l'aphélie de Jupiter, & l'autre qui regarde l'aphélie de Saturne. Donc ſi nous nommons la longitude de l'aphélie de Jupiter $= \rho$, & la longitude de l'aphélie de Saturne $= \sigma$, le mouvemeut de Saturne en tant qu'il depend de cette double anomalie ſa longitude étant $= \theta$, ſera déterminé par cette diſtance :

$$y = e\,(1 + l\,cof.\,(\theta - \sigma) + \alpha k\,cof.\,(\theta - \rho))$$

Pareillement le mouvement de Jupiter dependra d'une double anomalie, lequel ſera déterminé par cette expreſſion de ſa diſtance au Soleil.

$$x = c\,(1 + k\,cof.\,(\eta - \rho) + b\,l\,cof.\,(\eta - \sigma))$$

Or je dis que cette double anomalie produira le même effet, que ſi chaque Planète, ſelon les regles de Kepler, n'étoit aſſujettie qu'à une ſeule anomalie, qui ſera celle qu'on découvre par les obſervations, & que je nommerai ſon anomalie apparente.

Soit donc R la longitude de l'aphélie apparent de Jupiter, & K ſon excentricité apparente, ſoit de plus S la longitude de l'aphélie apparent de Saturne, & L ſon excentricité, ce ſont les élémens, que les obſervations nous donnent immédiatement à connoître : &

je dis qu'on peut toujours déterminer ces élémens apparens R, K, S & L, de maniere qu'on ait :

$$k\,cos.\,(\eta - \rho) + b\,l\,cos.\,(\eta - \sigma) = K\,cos.\,(\eta - R)$$
$$l\,cos.\,(\theta - \sigma) + \alpha\,k\,cos.\,(\theta - \rho) = L\,cos.\,(\theta - S)$$

& qu'on ait autre cela:

$$k\,fin.\,(\eta - \rho) + b\,l\,fin.\,(\eta - \sigma) = K\,fin.\,(\eta - R)$$
$$l\,fin.\,(\theta - \sigma) + \alpha\,k\,fin.\,(\theta - \rho) = L\,fin.\,(\theta - S)$$

Car quand j'aurai prouvé cela, il ſera évident qu'on peut ſubſtituer cette anomalie apparente au lieu des deux anomalies auxquelles j'ai été conduit par la théorie, & partant on conviendra que les inégalités de cette eſpece, que la théorie a fournies, ne troublent rien dans le mouvement régulier des Planètes, ſelon les regles de Kepler.

Or pour ſatisfaire aux égalités propoſées, en éliminant les longitudes η & θ, on obtiendra,

$$k\,cos.\,\rho + b\,l\,cos.\,\sigma = K\,cos.\,R$$
$$l\,cos.\,\sigma + \alpha\,k\,cos.\,\rho = L\,cos.\,S$$
$$k\,fin.\,\rho + b\,l\,fin.\,\sigma = K\,fin.\,R$$
$$l\,fin.\,\sigma + \alpha\,k\,fin.\,\rho = L\,fin.\,S$$

d'où l'on tire;

$$K\,K = k\,k + b\,b\,l\,l + 2\,b\,k\,l\,cos.\,(\rho - \sigma)$$
$$L\,L = l\,l + \alpha\,\alpha\,k\,k + 2\,\alpha\,k\,l\,cos.\,(\rho - \sigma)$$

& tang. $R = \frac{k\,fin.\,\rho + b\,l\,fin.\,\sigma}{k\,cof.\,\rho + b\,l\,cof.\,\sigma}$; tang. $S = \frac{l\,fin.\,\sigma + \alpha\,k\,fin.\,\rho}{l\,cof.\,\sigma + \alpha\,k\,cof.\,\rho}$.

Donc ſi les deux anomalies réelles de chaque Planète étoient connues, on trouveroit par le moyen de ces formules l'anomalie apparente de chacune, de même que le lieu apparent de l'une & de l'autre aphélie.

Mais

Mais puiſque nous connoiſſons par les obſervations les élémens apparens K, L, R & S, nous devons plutôt chercher les élémens vrays k, l, ρ & σ, pour nous mettre en état d'en déterminer enſuite les inégalités, dont le mouvement de deux Planètes ſe trouve dérangé. Pour cet effet je tire de nos formules les égalités ſuivantes.

$$(\alpha b - 1)\, k \,cof.\rho = b L\, cof.\, S - K\, cof.\, R$$
$$(\alpha b - 1)\, l \,cof.\sigma = \alpha K\, cof.\, R - L\, cof.\, S$$
$$(\alpha b - 1)\, k \,fin.\rho = b L\, fin.\, S - K\, fin.\, R$$
$$(\alpha b - 1)\, l \,fin.\sigma = \alpha K\, fin.\, R - L\, fin.\, S.$$

d'où l'on déduit aiſément.

$$(\alpha b - 1)^2 kk = bbLL + KK - 2bKL\, cof.(R - S)$$
$$(\alpha b - 1)^2 ll = \alpha\alpha KK + LL - 2\alpha KL\, cof.(R - S)$$

$$tang.\,\rho = \frac{b L\, fin.\, S - K\, fin.\, R}{b L\, cof.\, S - K\, cof.\, R}\quad tang.\,\sigma = \frac{\alpha K\, fin.\, R - L\, fin.\, S}{\alpha K\, cof.\, R - L\, cof.\, S}$$

Or les Tables Aſtronomiques de M. Caſſini marquent pour l'époque de 1700, le lieu de l'aphélie.

$$\begin{cases} \text{de Jupiter } R = 6^s\ 9^\circ\ 26'\ 42'' \\ \text{de Saturne } S = 8\ \ 28\ \ 8\ \ 39. \end{cases}$$

& de-là on tire;

$tang.\,K = 8,6832165$, $tang.\,L = 8,7559031.$

Poſant donc comme j'ai trouvé $\alpha = \frac{5}{4}$, & $b = \frac{1}{2}$; on obtiendra:

$$\rho = 5^s\ 6^\circ\ 12' \qquad \&\ \sigma = 10^s\ 20^\circ\ 45'$$

& pour les excentricités vrayes on aura:

$$k = 0,13595 \qquad \&\ l = 0,19840.$$

qui ſont par conſéquent beaucoup plus grandes que les excentricités apparentes.

Je ne doute pas, qu'on ne regarde cette double anomalie, comme un grand défaut de ma méthode, & puiſque ces deux anomalies ſe peuvent réduire à une ſeule, on penſera qu'une méthode, qui n'eut donné que cette ſeule anomalie auroit été préférable; mais outre qu'il eſt abſolument néceſſaire, qu'on parvienne à une double anomalie, ſi l'on veut ſuivre exactement les principes de la mécanique, on verra d'abord que cette double anomalie nous fournit des éclairciſſemens, qui ne ſeroient pas compatibles avec une ſeule anomalie. Car premierement, puiſque les deux aphélies n'avancent pas également, l'angle $\rho - \sigma$ ſera variable, & partant les excentricités apparentes K & L changeront continuellement, d'où il reſulte une variation perpétuelle dans l'équation elliptique des deux Planètes.

Le mouvement annuel de l'aphélie de Jupiter ayant été trouvé de $60''$, & celui de Saturne de $64''$ par rapport aux équinoxes, l'angle $\rho - \sigma$ décroît tout les ans de $4''$. Or en, 1700 il étoit $\rho - \sigma = 6^s, 15^\circ, 27'$ donc puiſque cet angle décroît chaque année de $4''$, ſon coſinus, qui eſt négatif croîtra, ou le terme $cof. (\rho - \sigma)$ à ſoutraire dans les formules trouvées pour KK & LL deviendra plus grand. Par conſéquent les excentricités apparentes tant de Jupiter que de Saturne vont en décroiſſant, & partant auſſi leurs équations du centre.

Cette diminution de l'excentricité ayant été miſe hors de doute dans la piece, qui à remporté le prix ſur cette queſtion, à l'égard de Saturne, je crois, que je me puis diſpenſer de démontrer plus amplement ce merveilleux accord de la Théorie de Newton avec l'expérience.

Mais la diminuation de l'excentricité, qui découle de ma Théorie est aussi fort bien d'accord avec celle, que M. Euler a conclue uniquement des observations, car la méthode qu'il a suivie n'étoit pas capable de lui découvrir les changemens de l'excentricité. Pour faire voir ce bel accord, que $d\rho$ & $d\sigma$ marquent les accroissemens annuels de la longitude des aphélies, & dK & dL les accroissemens des excentricités apparentes K & L; & nous aurons en différentiant :

$$dK = -\frac{bkl(d\rho - d\sigma)\,\text{fin.}(\rho - \sigma)}{K}$$

$$dL = -\frac{\alpha kl(d\rho - d\sigma)\,\text{fin.}(\rho - \sigma)}{L}$$

d'où posant $d\rho - d\sigma = -4''$, il s'ensuit

$dK = -0{,}14886.\,4b''$ & $dL = -0{,}12592.\,4\alpha''$

Or, la plus grande équation elliptique de l'une & de l'autre orbite étant à-peu-près $2K$ & $2L$, on aura la diminution annuelle de la plus grande équation elliptique. Posant $\alpha = \frac{5}{4}$, & $b = \frac{1}{2}$.

de Jupiter	de Saturne
$= 0{,}592''$	$= 1{,}258''$

Donc la plus grande équation de Jupiter décroit tous les ans de $35'''$, & celle de Saturne de $1''$, $15'''$, or au lieu de celle-ci, M. Euler a trouve $1''$ $5'''$, ou $11''$ en 10 ans. Or on conviendra aisément, qu'il est absolument impossible d'éviter une erreur de $10'''$ tant dans la théorie, que dans la pratique.

On remarquera de plus, que cette diminution n'eſt pas conſtante, puiſqu'elle eſt proportionelle au ſinus de l'angle $\rho - \sigma$, & parçe que cet angle devient inſenſiblement plus petit, la diminution mentionnée va en décroiſſant. Mais puiſque le changement de l'angle $\rho - \sigma$ ne monte à un degré, que dans l'eſpace de 900 ans, on peut, ſans aucune erreur ſenſible, regarder cette diminution comme uniforme.

Par la même méthode on pourra auſſi déterminer le mouvement annuel de l'aphélie apparent tant de Jupiter que de Saturne; car marquant ce mouvement annuel par les différentielles dR & dS, on aura par la différentiation.

$$dR = \frac{kkd\rho + bblld\sigma + bkl(d\rho + d\sigma)\,cof.(\rho - \sigma)}{KK}$$

$$dS = \frac{lld\sigma + \alpha\alpha kkd\rho + \alpha kl(d\rho + d\sigma)\,cof.(\rho - \sigma)}{LL}$$

& ces formules ſe changent dans celles-ci:

$$dR = \tfrac{1}{2}(d\rho + d\sigma) - \tfrac{1}{2}(d\sigma - d\rho)\,\frac{kk - bbll}{KK}$$
$$= 62'' - 7,4736''$$

$$dS = \tfrac{1}{2}(d\rho + d\sigma) + \tfrac{1}{2}(d\sigma - d\rho)\,\frac{ll - \alpha\alpha kk}{LL}$$
$$= 62 + 6,4522''$$

Donc l'aphélie de Jupiter avancera chaque année de 55″ & celui de Saturne avancera chaque année de 68″ ce qui approche déja d'avantage du mouvement marqué dans les Tables Aſtronomiques de M. Caſſini.

§. IX.

§. IX.

Du tems périodique des Planètes de Jupiter & de Saturne, & de leurs distances moyennes au Soleil.

Les grands termes, que j'ai trouvés dans l'article VII, qui dépendent de l'angle $\omega - r + s$, se réduisent à l'angle $\rho - \sigma$, posant ρ pour la longitude de l'aphélie de Jupiter, & σ pour celle de l'aphélie de Saturne, où il faut entendre les aphélies vrais, & non pas les apparens. Donc les longitudes vraies de Jupiter & de Saturne η & θ renfermeront ces termes dépendans de l'angle $\rho - \sigma$.

$$\eta = \text{Prec.} + 51450\, kl\, \textit{fin.}\, (\rho - \sigma)$$
$$\theta = \text{Prec.} + 51780\, kl\, \textit{fin.}\, (\rho - \sigma)$$

où l'on voit d'abord que la valeur de ces termes, réduite en degré, deviendroit horriblement grande.

Mais quelque grande que soit cette valeur, il est certain que si l'angle $\rho - \sigma$ demeuroit constant, il n'en résulteroit aucun dérangement dans le mouvement des Planètes, puisque la valeur de ces termes seroit détruite par l'addition des quantités constantes, que l'intégration des formules $d\eta - dp$, & $d\theta - dq$ exige.

Ces termes n'entrent donc en considération, qu'entant que l'angle $\rho - \sigma$ est variable. Or nous venons de voir que cet angle décroît chaque année de $4''$; donc si la valeur de ces termes à été détruite en 1700 par l'addition des conſtantes, on aura pour l'année ſuivante 1701, à cauſe de $\rho - \sigma = 6^s, 15'', 27'$.

$$\left.\begin{array}{l} \eta = \text{Prec.} - 4''.51450\, k\, l\, cos.(\rho - \sigma) \\ \theta = \text{Prec.} - 4''.51780\, k\, l\, cos.(\rho - \sigma) \end{array}\right\} = \text{Prec.} + 5355''.$$

Et partant ſi la même quantité accroiſſoit après chaque année, après un eſpace de n années depuis l'époque 1700, la longitude des Planètes devroit être avancée de 5355 n ſecondes. Or cette quantité ne troubleroit pas non plus le mouvement régulier des Planètes, puiſqu'elle ne fait que diminuer d'une quantité conſtante leurs tems périodiques, qui étant une fois bien établis par les obſervations, ce terme n'y apporteroit plus de changement.

Mais puiſque cet accroiſſement annuel de $5355''$ ne demeure pas toujours le même, vu qu'il depend de l'angle $\rho - \sigma$, on voit qu'après un grand nombre d'années, il doit ſouffrir un changement conſidérable. En effet on trouvera qu'àprès neuf ſiécles où l'angle $\rho - \sigma$ ſera diminué d'un degré, cet accroiſſement annuel devient $= 5355'' + 25''$; ou l'accroiſſement depuis l'année 2600 juſqu'à l'année 2601 ſera de $5380''$. Donc après un intervalle de n ans depuis l'époque 1700 l'accroiſſement de la longitude ne ſera plus $= 5355\, n''$, mais on le trouvera $= 5355\, n'' + \frac{1}{70}\, n\, n''$, & encore plus exactement $= 5355\, n'' + \frac{1000\, n\, n''}{96803} - \frac{n^3\,''}{2989900}$.

Or comme le premier terme ne fait que diminuer les tems périodiques d'une quantité conſtante, ſi nous ſuppoſons que le mouvement moyen des deux Planètes ait été bien réglé pour l'année 1700, les longitudes moyennes qu'on en tire pour tout autre tems ne feront plus justes, mais à l'année $1700 + n$, il faudra ajouter à la longitude moyenne $\frac{1000\,nn}{69803} - \frac{n^3}{2989900}$ secondes, & cette correction sera la même pour Jupiter & Saturne.

Correction des longitudes moyennes de Jupiter & de Saturne, calculée sur le mouvement moyen de l'année 1700.

							Avant l'Ere Chr.			
L'an	ajoutez.		L'an	ajoutez.			L'an	ajoutez.		
1700	0′	0	1700	0°	0′	0′	0	11°	57′	16″
1710	0	1	1600	0	2	24	100	13	25	56
1720	0	6	1500	0	9	36	200	14	59	58
1730	0	13	1400	0	21	38	300	16	39	25
1740	0	23	1300	0	38	33	400	18	24	19
1750	0	36	1200	1	0	23	500	20	14	41
1760	0	52	1100	1	27	9	600	22	10	33
1770	1	10	1000	1	58	53	700	24	11	58
1780	1	32	900	2	35	38	800	26	18	58
1790	1	56	800	3	17	26	900	28	31	34
1800	2	23	700	4	6	18	1000	30	49	48
1810	2	53	600	4	56	36	1100	33	13	43
1820	3	26	500	5	53	23	1200	35	43	21
1830	4	2	400	6	55	41	1300	38	18	43
1840	4	41	300	8	3	11	1400	40	59	51
1850	5	23	200	9	15	55	1500	43	46	48
1860	6	8	100	10	33	56	1600	46	39	35
1870	6	56	0	11	57	16	1700	49	38	15

Nous voyons donc que le mouvement moyen de deux Planètes devient continuellement plus rapide, ou que leurs tems périodiques diminuent; & que cela est l'effet de l'action mutuelle de ces deux Planètes.

Mais puisque cet effet dépend de l'angle $\rho - \sigma$, on comprend qu'il pourroit être tout contraire, & qu'il le sera effectivement après environ 150 siécles. Par conséquent il faut bien distinguer cette diminution des tems périodiques, de celle qui pourroit être causée par la résistance de l'ether, s'il y en a une.

On remarquera aussi, que pour bien connoître le mouvement moyen de ces deux planètes par les observations, la méthode ordinaire, où l'on compare les observations de notre tems avec les plus anciennes, n'est pas sûre, puisqu'elle ne nous découvre ni le mouvement moyen, qui subsiste à présent, ni celui qui a subsisté au tems des anciennes observations, mais plutôt un certain milieu.

Mais par le moyen de la table que je viens de donner, on peut profiter de toutes les observations pour en conclure le vrai mouvement moyen pour un tems proposé. Car si l'on veut comparer une observation faite l'an 100 avec une de l'an 1700, il faut retrancher $10^\circ\ 33'\ 56''$ de la longitude observée en 100, & alors la comparaison de ce lieu corrigé avec le lieu observé en 1700, nous donnera le mouvement moyen pour l'année 1700.

C'est sans doute la raison pourquoi les Astronomes sont si peu d'accord sur le mouvement moyen de ces deux Planètes. Car si l'on compare le mouvement moyen séculaire des Tables de M. Cassini avec celui des Tables angloises publiées par Leadbetter, on aura

	de Jupiter	de Saturne
Cassini	$5^s, 6^\circ, 21', 30''$	$4^s, 23^\circ, 29', 28''$
Leadbetter	5, 6, 28, 11.	4, 23, 6, 0.

Il

Il en eſt de même de l'excentricité apparente de ces deux Planètes; car puiſqu'elle eſt variable, comme j'ai fait voir, il n'eſt pas ſurprenant, que les tables aſtronomiques ne ſoient pas d'accord ſur cet article.

Or puiſque le tems périodique de nos deux Planètes eſt variable, leurs diſtances moyennes au Soleil le ſeront auſſi, ce qui vaudra la peine examiné plus ſoigneuſement. Or conſidérant l'angle $\omega - r + s$, ou $\rho - \sigma$ comme conſtant, nous aurons

$$f = \frac{4 - 3m}{2m}(kk + bbll) + 3\,bkl\,cof.\,(\rho - \sigma)$$

$$g = -\frac{(4 - m)}{2m}(ll + aakk) + 3\,akl\,cof.\,(\rho - \sigma)$$

& ces valeurs étant ſubſtituées dans les termes conſtans que fourniſſent les équations *differentio*-différentielles, donneront

$$\frac{1 + \mu}{c^3} = 1 + 0{,}12018\,\nu + \frac{3(2 - m)}{2m}kk + bbll)$$
$$+ 6\,bkl\,cof.\,(\rho - \sigma)$$

$$\frac{1 + \nu}{nne^3} = 1 - 1{,}31005\,\mu - \frac{3(2 - m)}{2m}(ll + aakk)$$
$$+ 6\,akl\,cof.\,(\rho - \sigma)$$

Le terme $cof.\,(\rho - \sigma)$ étant négatif & devenant après chaque révolution plus grand, il ſemble que les valeurs de $\frac{1 + \mu}{c^3}$ & $\frac{1 + \nu}{nne^3}$ vont en diminuant, & partant les diſtances moyennes mêmes c & e en augmentant, pendant que les tems périodiques décroiſſent, ce qui ſeroit une abſurdité manifeſte. Or il faut ſe ſouvenir, que j'ai pris l'unité pour marquer la diſtance moyenne d'une orbite planetaire, dont le tems périodique dans la ſimple hypothèſe de Kepler ſeroit égal au vrai tems périodique de Jupiter. Donc puisque ce tems est variable, il est évident que la variabilité du terme $cos.\,(\rho - \sigma)$ marque plutôt la variabilité de notre unité, que celle des distances c & e. Car posant a au lieu de cette unité, pour marquer la distance moyenne dans l'hipothèse simple de Kepler, qui convient au tems périodique de Jupiter, il faudra écrire au lieu de $\frac{1+\mu}{c^3}$ & $\frac{1+\nu}{nne^3}$ ces formes $\frac{(1+\mu)a^3}{c^3}$ & $\frac{(1+\nu)a^3}{nne^3}$ de sorte que la diminution successive causée par le terme $cos.\,(\rho - \sigma)$, nous marquera la diminution de la quantité a; ce qui est très-conforme à la théorie.

Mais il est à remarquer qu'il n'est pas permis d'introduire dans la valeur des quantités constantes f & g le terme $cos.\,(\rho - \sigma)$, en tant qu'il est variable, puisque sa variabilité doit être plutôt rangée aux termes variables de nos formules. Et la valeur de $cos.\,(\rho - \sigma)$, pouvant changer de $+1$ à -1, sa valeur moyenne sera $= o$, d'où l'on voit que la lettre a, ou l'unité que j'ai mise à sa place, doit marquer la distance moyenne qui convient dans l'hypothèse de Kepler, au terme périodique de Jupiter lorsque l'angle $\rho - \sigma$ est aux $90°$, ou de $270°$. Mais les lettres c & e marqueront des quantités constantes, comme la nature du calcul l'exige, or les vraies distances x & y, en tant qu'elles dépendent de la variabilité de $\rho - \sigma$, seront

$$x = c\left(1 - \frac{(2-3m)b}{m} k\,l\,cos.\,(\rho - \sigma)\right)$$

$$y = e\left(1 + \frac{(2+m)}{m} \alpha\,k\,l\,cos.\,(\rho - \sigma)\right)$$

Maintenant nous sommes en état de déterminer le changement, que les distances des Planètes au Soleil subissent, en tant qu'elles dépendent uniquement de l'angle $\rho - \sigma$ ou du tems périodique, ou plutôt du mouvement moyen, qui convient, aux Planètes à chaque tems proposé. Or quisque $2 > 3\,m$, nous voyons que la distance de Jupiter au Soleil va en augmentant, & celle de Saturne en diminuant, quoique le mouvement moyen de l'un & de l'autre s'accélere, ou que leurs tems périodiques deviennent plus petits.

Or, pour ce qui regarde la valeur de notre unité, qui repond au mouvement moyen que Jupiter aura lorsque l'angle $\rho - \sigma$ deviendra $= 90^\circ$, ou $= 270^\circ$, il sera aisé de la trouver par ce que j'ai rapporté au commencement de cet article. Car soit Q le mouvement moyen annuel de Jupiter lorsque $\cos. (\rho - \sigma) = o$, & son mouvement annuel moyen sera pour l'année $1700 = Q + 5355''$, qui est, suivant les observations $= 109238''$; d'où il s'ensuit $Q + 103883'' = 28^\circ\ 51'\ 23''$. Donc dans le tems où $\cos. (\rho - \sigma) = o$, le mouvement moyen annuel de Jupiter est $28^\circ\ 51'\ 23''$, & c'est conformement au tems périodique qui répond à ce mouvement moyen, qu'il faut déterminer la valeur de notre unité a. Posant donc la distance moyenne de la terre au soleil $= 100000$, puisque la distance moyenne de Jupiter au Soleil est conclue conformément au mouvement moyen qu'il tient à présent $= 520098$, la valeur de notre unité sera $= 520098 \left(\frac{109238}{103883}\right)^{\frac{2}{3}} = 537821$. Ensuite l'excentricité ne changeant rien dans la distance moyenne, ou la moitié du grand axe de l'orbite, si nous prénons c & e pour marquer les demi-grands axes des orbites de Jupiter & de Saturne en tant qu'ils sont altérés par l'action mutuelle des Planètes, nous aurons:

$$c = 537821 \sqrt[3]{\frac{1 + \mu}{1 + 0,120181}}$$

$$e = \frac{537821}{\sqrt[3]{nn}} \sqrt[3]{\frac{1 + \nu}{1 - 1,31005\,\mu}}$$

Puiſque l'angle $\rho - \sigma$ eſt à préſent $6^s\ 15^\circ\ 27'$, & qu'il diminue tous les ans de $4''$, il aura été de 9^s, avant 67100 ans, & alors le mouvement moyen annuel de Jupiter à été $28^\circ\ 51'\ 23''$, & celui de Saturne $10^\circ\ 43'\ 15''$. A préſent le mouvement moyen annuel de Jupiter eſt $30^\circ\ 20'\ 38''$, & celui de Saturne $12^\circ\ 13'\ 30''$. Or après 13900 ans le mouvement moyen annuel de Jupiter ſera $30^\circ\ 23'\ 58''$, & de Saturne $12^\circ\ 16'\ 0''$, mais après 94900 ans celui de Jupiter redevient $28^\circ 51' 23''$, & de Saturne $10^\circ\ 43'\ 15''$; or après 175900 ans le mouvement moyen annuel de Jupiter ſera $27^\circ\ 18'\ 48''$, & de Saturne $9^\circ\ 10'\ 50''$; & alors leur mouvement ſera le plus lent; après il ſera derechef accéléré, & après l'eſpace de 324000 années il redeviendra le même qu'il eſt aujourd'hui.

Comme la révolution de ces variations ne s'acheve que dans l'eſpece de 324000 ans, on comprendra aiſément qu'il ſeroit poſſible, que ce tems devint infini, ou que les variations allaſſent toujours ou en croiſſant, ou en décroiſſant: & que cette circonſtance dépend de la valeur des quantités μ & ν. Dans ce cas il eſt évident, que les inégalités ne ſauroient plus être exprimées par des ſinus, ou coſinus des angles, & c'eſt préciſement le cas qu'on rencontre lorſque la valeur de b devient imaginaire, comme j'ai remarqué ci-deſſus.

Puiſque la valeur de b eſt devenue effectivement imaginaire, ayant poſé $\mu = \frac{1}{1067}$ & $\nu = \frac{1}{3021}$, & que pour éviter les angles imaginaires, qui ſe reduiroient à des quantités exponentielles réelles, j'ai changé tant ſoit

ſoit peu les valeurs de μ & ν, il s'enſuit que ſi ces valeurs de μ & ν étoient juſtes, les variations, que je viens de développer, ne rétourneroient jamais au même état, mais qu'elles iroient à l'infini. Et ſi ce cas avoit actuellement lieu dans la nature, je dois avouer, que je ſerois bien éloigné de la réſolution de la queſtion propoſée, & que je ne vois pas même encore de quelle méthode on devroit ſe ſervir pour déterminer toutes les variations, que ces deux Planètes ſouffriroient dans tous les ſiécles à venir.

Mais comme il ne s'agit que de leur mouvement qu'elles ſuivent pendant le cours d'un petit nombre de ſiécles, je me flatte que ma méthode eſt parfaitement bonne; car puiſque je n'ai changé que fort peu la valeur des lettres μ & ν dans la détermination de b, cette différence ne ſauroit produire une erreur ſenſible dans un eſpace de quelques ſiécles, quoique l'erreur, qui en reſulteroit pour un tems infini, pût devenir infinie.

Par cette raiſon je n'ai pas héſité de préſenter ma méthode à l'examen de l'illuſtre Académie Royale, d'autant plus qu'elle m'a conduit à la découverte de cette importante circonſtance, par laquelle nous voyons, que ce probleme eſt beaucoup plus difficile, qu'il n'auroit pû paroître au commencement, & qu'il pourroit même devenir impoſſible à réſoudre par aucun eſprit humain, ſi les orbites de ces deux Planètes étoient plus proches entr'elles, ou que leurs maſſes fuſſent plus grandes. Mais dans l'état où ces deux Planètes ſe trouvent, il me ſemble que la recherche de leur mouvement eſt encore en quelque ſorte proportionnée aux bornes de nos lumieres, pourvu qu'on ne veuille pas ſe hazarder d'étendre ces recherches ſur un trop grand nombre de ſiécles.

Il eſt à-peu-près de même de cette queſtion, que de celle ſur les inégalités de la Lune, car quoiqu'on ſoit aſſez heureuſement venu à bout de cette recherche, tous ceux qui ont travaillé ſur cette matiere ſeront obligés d'avouer, qu'il ſeroit poſſible que nous ne fuſſions en état de découvrir preſque rien à l'égard de ſon mouvement. Car ſi la Lune étoit quelque fois plus éloignée de la terre, qu'elle n'eſt actuellement, ou ſi l'excentricité de ſon orbite étoit plus grande qu'elle n'eſt, ou enfin ſi l'inclinaiſon de ſon orbite ſur l'écliptique étoit plus grande, je doute fort, qu'aucun homme eût aſſez de pénétration pour découvrir les inégalités de ſon mouvement. Or on conviendra qu'une telle diſpoſition de la Lune auroit été auſſi bien poſſible, que celle où elle ſe trouve actuellement. Il ſemble donc que le Créateur a voulu tellement arranger ces objets de nos recherches, qu'ils ne ſurpaſſent pas entiérement nos forces, de ſorte que nous en puiſſions approcher de plus en plus, à meſure que nous avançons dans les ſciences, ſans pourtant que nous fuſſions jamais en état de les atteindre parfaitement. C'eſt, à mon avis, par cette raiſon, que les Planètes ne ſe meuvent pas ſelon les regles de Kepler, car alors nous ſerions depuis long tems au bout de nos recherches à l'égard du mouvement des corps céleſtes.

§ X.

Des autres inégalités, qui ſe trouvent dans le mouvement des Planètes de Jupiter & de Saturne.

DE ce que je viens d'expoſer on eſt en état de déterminer le mouvement moyen de ces deux Planètes pour chaque année, pourvu que ce tems ne ſoit pas trop éloigné de notre ſiécle, ou que l'intervalle du tems ne monte pas à pluſieurs milliers d'années, puiſque alors mes formules ſe pourroient trop écarter de la vérité. En ſecond lieu nous ſommes en état de marquer pour chaque année propoſée le lieu de l'aphélie apparent de l'une & de l'autre Planète, ſachant de combien l'un & l'autre aphélie avance par an, ſavoir celui de Jupiter de 55″, & celui de Saturne de 68″. En troiſieme lieu nous pouvons déterminer pour chaque année propoſée l'excentricité apparente des deux orbites, ayant trouvé que la plus grande équation elliptique de Jupiter décroît par an de 35‴, & celle de Saturne de 1″, 15‴. Donc quand on aura déterminé par les obſervations pour une époque fixe tant les longitudes moyennes de ces deux Planètes que leur mouvement moyen pour ce tems, le lieu de leurs aphélies apparens & leur excentricité, on connoîtra ces mêmes élémens pour tout autre tems, & partant on ſera en état de dreſſer des tables, qui marqueront l'équation elliptique de ces deux Planètes, en ſe ſervant de la ſolution du probleme de Kepler dans ce calcul. Or ces tables calculées tant pour les diſtances des Planètes au Soleil, que pour leurs longitudes, renfermeront déja tous les termes de nos formules trouvées ci-deſſus, qui ne contiennent pas ouvertement les lettres μ & ν, & outre cela encore les termes, qui dépendent des multiples de leurs anomalies, que je n'ai pas même développé dans le calcul pour l'excentricité de Saturne, ayant déja prévu dans le calcul de l'excentricité de Jupiter, que les termes $A\,k\,k\,cof.\,2\,r$, $akk\,cof.\,\omega$, $K\,kk\,(\omega - r)$, $f'\,kk\,(2\omega - 2r)$, $a'\,kk\,cof.\,\omega$. $K'\,k\,k\,cof.\,(\omega - 2\,r)$, & ceux qui renfermeroient de plus hautes puiſſances de k ſe réduiſent tous à l'équation elliptique calculée ſur l'excentricité apparente,

& sur le lieu apparent de l'aphélie, de sorte qu'il seroit superflu de chercher soigneusement ces termes.

Donc après l'équation elliptique, nous n'aurons à considérer que les termes qui dépendent ouvertement de l'une au l'autre des petites quantités μ & ν, qui sont de deux especes, l'une qui est indépendante des excentricités, & qui donne la variation des deux Planètes, & l'autre qui depend outre cela de l'une de ces excentricités. J'ai d'abord au commencement développé les inégalités de la premiere espece, mais je le répéterai ici, puisque le calcul suivant y a apporté quelque petite correction. Donc nous aurons pour les distances, ayant bien fixé, suivant l'article précédent, les distances moyennes c & e

$$\frac{x}{c} = 1 + \text{l'éq. ellipt.} + 0{,}43472\,\nu\, cos.\omega - 0{,}19440\,\nu\, cos.3\omega - 1{,}88047\,\nu\, cos.2\omega - 0{,}05047\,\nu\, cos.4\omega$$

$$\frac{y}{e} = 1 + \text{l'éq. ellipt.} + 0{,}90959\,\mu\, cos.\omega + 0{,}03571\,\mu\, cos.3\omega + 0{,}15435\,\mu\, cos.2\omega + 0{,}01116\,\mu\, cos.3\omega$$

où il y aura:

$$c = 537821\left(1 - \frac{(2-3m)b}{m} k\, l\, cos.(\rho - \sigma)\right)\sqrt[3]{\frac{1+\mu}{1+0{,}12018\,\nu}}$$

$$e = \frac{537821}{\sqrt[3]{nn}}\left(1 + \frac{(2+m)}{m}\alpha\, k\, l\, cos.(\rho - \sigma)\right)\sqrt[3]{\frac{1+\nu}{1-1{,}31005\,\mu}}$$

Or les longitudes seront:

$$\eta = p + \text{l'éq. ellipt.} - 1{,}34665\,\nu\, sin.\omega + 0{,}27615\,\nu\, sin.3\omega + 3{,}34343\,\nu\, sin.2\omega + 0{,}06193\,\nu\, sin.4\omega$$

$$\theta = q + \text{l'éq. ellipt.} + 0{,}02035\,\mu\, sin.\omega - 0{,}03365\,\mu\, sin.3\omega - 0{,}16222\,\mu\, sin.2\omega - 0{,}09990\,\mu\, sin.4\omega$$

Par-là

Par-là on aura déja les lieux des Planètes corrigés tant par leur vraye équation elliptique, que par la variation. Mais pour les autres inégalités qui restent encore, on aura pour les distances:

$$\begin{aligned}
\frac{x}{c} = \text{Prec.} &+ F\,k\,\cos.(\omega - r) + G\,k\,\cos.(\omega + r) \\
&+ E\,l\,\cos.s \qquad\quad + H\,k\,\cos.(2\omega - r) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + I\,k\,\cos.(2\omega + r) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + L\,l\,\cos.(\omega - s) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + N\,l\,\cos.(2\omega - s) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + O\,l\,\cos.(2\omega + s)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{y}{c} = \text{Prec.} &+ E'k\cos.r \qquad\quad + G'k\,\cos.(\omega + r) \\
&+ L'l\,\cos.(\omega - s) + H'k\,\cos.(2\omega - r) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + I'k\,\cos.(2\omega + r) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + M'l\,\cos.(\omega + s) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + N'l\,\cos.(2\omega - s) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + O'l\,\cos.(2\omega + s)
\end{aligned}$$

& les valeurs de ces coëfficiens se tirent des égalités, que les équations différentielles nous ont fournies précédemment, desorte que de ce côté il n'y a aucune difficulté.

Or pour les longitudes η & θ, il faut ajouter aux valeurs déja données, premierement les termes trouvés dans l'article V, & ensuite les termes rapportés dans l'article VI, à l'exception des deux membres marqués d'une étoile * pour ces derniers, puisque ceux-ci sont déja compris dans l'équation elliptique, desorte qu'on aura alors toutes les inégalités qui paroissent de quelque conséquence; car il est clair que le nombre de toutes les inégalités monte actuellement à l'infini.

Mais pour le calcul de ces coëfficiens, outre que les valeurs des lettres m, n, c, e, $\varkappa$, λ, α & b sont connues, il faut principalement remarquer que les lettres k & l ne marquent pas les excentricités apparentes, ou celles qu'on conclut immédiatement des observations, mais plutôt les excentricités vraies, que j'ai conclues des apparentes, ensorte qu'il soit:

$$k = 0,13595, \qquad \& \; l = 0,19840.$$

Ensuite pour les anomalies r & s il ne faut pas prendre non plus celles qui se rapportent aux aphélies apparens, mais celles auxqu'elles conduissent les lieux des aphélies vrais, que j'ai fixés pour l'epoque 1700, celui de Jupiter à $5^s\ 6^o\ 12'$, & de Saturne à $10^s\ 20^o\ 45'$. Donc puisque la longitude de l'aphélie apparent de Jupiter pour la même époque est $6^s\ 9^o\ 27'$, & de Saturne $8^s\ 28^o\ 9'$, il sera aisé de déduire les anomalies véritables r & s, dont il faut se servir dans ces dernieres inégalités, des anomalies apparentes, qu'on tire des lieux des aphélies apparens, en soutraiant la longitude de l'aphélie de celle de la Planète. Car pour Jupiter on aura:

son anomalie veritable $r =$ à l'anomalie apparente

$$+ 43^o\ 15'$$

& pour Saturne on aura:

son anomalie veritable $s =$ à l'anomalie apparente

$$- 52^o\ 36'$$

D'où l'on voit que les valeurs de ces dernieres inégalités deviendront tout autres, que si l'on y employoit les anomalies apparentes. Il n'y a donc aucun doute, que de cette maniere on approchera beaucoup plus de la vérité; puisqu'on voit par la Piece de M. Euler sur cette matiere, qu'en se servant des anomalies apparentes, de quelques maniere qu'on détermine les coëfficiens des termes pour le calcul de Saturne $\sin. r$, $\sin. (\omega - s)$, $\sin. (\omega + s)$, $\sin. (2\omega - s)$, $\sin. (2\omega - r)$, $\sin. (2\omega + s)$, on ne sauroit jamais tellement satisfaire aux observations, que le calcul ne s'en écarte quelquefois de plusieurs minutes.

Enfin quoique les lettres r & s ne marquent ni les anomalies moyennes, ni les excentriques, ni les vraies, mais une nouvelle espece d'anomalies telles, que leurs différentielles dr & ds soient à la différentielle $d\omega$ dans un rapport constant, on peut pourtant sans aucune erreur, prendre à volonté pour r & s les anomalies moyennes, ou excentriques, ou vraies, qui résultent des aphélies vrais. Car quoique ces anomalies puissent différer entr'elles de quelques degrés, il n'en resultera pas dans les inégalités, qui en découlent, une différence sensible. Car, quelque soit l'anomalie, qu'on voudroit introduire dans le calcul on trouveroit toujours pour ces termes les mêmes coëfficiens; & la différence ne paroîtroit que dans les termes suivans, qui contiendroient les doubles ou triples des anomalies r & s. Or puisque nous avons négligé ces termes à cause de leur petitesse, il est clair, qu'il est indifférent, de quelle espece d'anomalie on voudra se servir.

Je crois que j'ennuyerois mes Juges, si je voulois calculer en nombres tous ces coëfficiens, vû que le calcul en déviendroit exrrêmement long & pénible. Car puisqu'on est à présent tout à fait convaincu que toutes les inégalités qui se peuvent trouver dans le mouvement des corps celestes, sont parfaitement d'accord avec le principe de l'attraction universelle établi par le grand Newton, en vertu dnquel tous les corps célestes s'attirent mutuellement en raison directe de leurs masses, reciproque du quarré de leurs distances; il ne s'agit pas tant à mon avis, de produire des formules, qui ſatisfaſſent aux obſervations, que de découvrir plutôt les inégalités, qui ſont conformes à la théorie; & dès qu'on eſt aſſuré, qui ces inégalités ſuivent néceſſairement de la théorie, on ne ſauroit plus douter de leur accord avec l'expérience. Pour preuve de cela la Lune nousſert d'exemple; l'on ſait maintenant, que plus le calcul, qu'on fait ſur cette Planète, eſt conforme à la théorie, plus auſſi il ſatisfait aux phénomenes. Or je me flatte, que la méthode dont je me ſuis ſervi dans cette recherche, eſt tellement naturelle & conforme à la théorie, qu'on ne ſauroit douter de la vérité des conſéquences, qu'elle m'a fournies, d'autant plus que le mouvement de l'aphélie, & la diminution de l'excentricité apparente, qu'aucune autre méthode ne ſauroit même à peine decouvrir, eſt parfaitement d'accord avec les obſervations. Cependant je ſouhaiterois bien comparer mon calcul avec des obſervations, ſi j'en pouvois trouver d'aſſez exactes, & même faites dans un aſſez long intervalle de tems; mais comme c'eſt une choſe qui m'eſt impoſſible, je me vois obligé de borner mes recherches à ce que mes lumieres m'ont permis de conclure de la théorie ſur la Queſtion propoſée.

Fin du N°. 2. 1752.

RECHERCHES

Sur la maniere la plus avantageuſe de ſuppléer à l'action du Vent ſur les grands Vaiſſeaux, ſoit en y appliquant les Rames, ſoit en y employant quelqu'autre moyen que ce puiſſe être.

FONDÉES

Sur une nouvelle Théorie de l'économie des forces & des effets.

Piéce qui a remporté le Prix propoſé par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, pour l'année 1753.

Par M. DANIEL BERNOULLI, *Profeſſeur de Phyſique à Bâle, & Aſſocié Etranger de l'Académie Royale des Sciences.*

RECHERCHES

Sur la maniere la plus avantageuſe de ſuppléer à la
ction du Vent ſur les grands Vaiſſeaux, ſoit en y appliquant les Rames, ſoit en y employant quelqu'autre moyen que ce puiſſe être.

FONDÉES

Sur une nouvelle Théorie de l'économie des forces & de leurs effets.

Quærendi initium ratio attulit; cum eſſet ipſa ratio confirmata quærendo.

Cic. Acad. Quæſt. IV. 26.

PREMIERE PARTIE.

I.

LA mécanique des rames eſt d'une nature ſi ſinguliere que perſonne n'a encore démontré la proportion qu'il y a entre les forces mouvantes qu'on y emploie & l'effet qui en réſulte; c'eſt cependant un article qui eſt aſſez facile dans preſque toutes les machines, & c'eſt en même tems l'article le plus eſſentiel pour notre ſujet. Il s'agit ſans doute de connoître, avant toute autre choſe, ſi dans l'uſage des rames, les forces mouvantes ſont toutes utilement employées pour mettre un navire en mouvement, ou ſi une partie conſidérable de ces forces ſe perd en produiſant des effets inutiles & différents de celui qu'on ſe propoſe. Dans le premier cas, l'uſage des rames eſt le plus avantageux, & on ne doit pas eſpérer d'imaginer jamais rien de préférable; mais dans le ſecond cas, il ne faut pas renoncer à l'eſpérance de pouvoir ou perfectionner l'uſage des rames, ou leur ſubſtituer d'autres moyens plus avantageux. Mais un tel examen demande premierement une théorie ſur les forces de l'homme, & en ſecond lieu une connoiſſance exacte des forces abſolument & indiſpenſablement réquiſes pour faire ſingler un navire avec une certaine vîteſſe uniforme.

II.

Quand je parle des forces de l'homme je n'entens point ici, comme dans le langage ordinaire, ces forces par leſquelles on tient en équilibre de certaines réſiſtances telles que ſeroit de tenir ſurpendu un certain poids, ou d'excercer une certaine preſſion; ce ſont-là des forces mortes; il eſt queſtion ici des forces vives, que l'homme produit pendant ſon travail; on doit toujours eſtimer le travail abſolu d'un homme par la preſſion qu'il exerce, par la vîteſſe de ſon point d'appui & par le tems. La ſeule conſidération du levier, auquel ſe réduiſént toutes les machines, ſuffit pour voir cette vérité; il faut cependant avouer que la fatigue de l'homme, qui eſt la ſeule choſe qu'il faille conſidérer, n'eſt pas toujours exactement proportionnelle à ſon travail pris dans le ſens que nous venons de lui donner. Un homme pourra, par exemple, enlever une réſiſtance de vingt livres avec une vîteſſe de trois pieds par ſeconde, & continuer ce travail pendant pluſieurs heures de ſuite; mais il ne s'enſuit pas qu'il puiſſe enlever quatre livres avec une vîteſſe de quinze pieds par ſeconde, cela ſeroit tout-à-fait impoſſible a l'homme; peut-être pourroit-il bien enlever une réſiſtance de dix livres avec une vîteſſe de ſix pieds; mais il eſt ſûr qu'il s'en trouveroit beaucoup plus fatigué au bout d'une heure, que s'il n'avoit employé que la moitié de cette vîteſſe avec un effet double. Cette remarque doit apprendre aux Mécaniciens qui s'appliquent à imaginer des machines qui doivent être miſes en mouvement par le travail des hommes, à mettre une telle proportion entre leurs parties, que les travaux de ces hommes ſe faſſent avec des vîteſſes & des efforts qui leur ſoient le plus naturels.

III.

La remarque que je viens de faire ne doit pas nous empêcher de ſuppoſer les fatigues proportionnelles aux travaux tels que nous les avons déterminés, puiſque moyennant une juſte proportion entre les parties de la machine, on peut faire que la vîteſſe & la preſſion de chaque homme ſoient conſtamment les mêmes, & que toute la différence conſiſte à employer plus ou moins de tems au même travail, & qu'on ne ſçauroit douter que dans ces circonſtances les fatigues doivent être cenſées proportionnelles aux tems. Mais je dis bien plus, un grand nombre d'expériences m'ont appris que nonobſtant une grande inégalité entre les vîteſſes, les fatigues ne laiſſent pas de ſuivre la raiſon compoſée de la preſſion, de la vîteſſe & du tems, pourvu qu'on ne donne pas à ce principe une trop grande étendue, & qu'on ne ſorte pas hors de certaines limites. Si un homme peut enlever une réſiſtance de vingt livres avec trois pieds de vîteſſe, il pourra auſſi y enlever une réſiſtance de ſoixante livres avec un pied de vîteſſe, ou trente livres avec une vîteſſe de deux pieds; ou quinze livres avec une vîteſſe de quatre pieds, & même douze livres avec une vîteſſe de cinq pieds, & tout cela ſans ſe fatiguer ni plus ni moins. Il ſemble que la nature ait preſcrit aux animaux une certaine conſervation de forces naturelles pareille à celle qu'on connoit aux forces vives produites par la peſanteur naturelle, tant que les animaux ne paſſent pas les limites de leur économie naturelle. C'eſt ici une vérité de fait admirable. En voici une autre, que nous devons admirer bien davantage.

IV.

Nous n'avons encore conſidéré que l'effet d'une même eſpece de travail exercé avec plus ou moins de vîteſſe; mais les hommes peuvent ſubir une infinité d'eſpeces de travail. Dans chaque différente eſpece il y aura une combinaiſon différente des muſcles que les hommes feront agir: les efforts qu'ils feront ſeront toujours d'une nature différente; cependant j'ai remarqué qu'avec des fatigues égales, les hommes font conſtamment des effets à-peu-près égaux; je m'en rapporte aux Mécaniciens qui ſçauront faire un juſte calcul des effets produits moyennant le travail des hommes employé d'une façon quelconque. Je ſuis ſi perſuadé de cette vérité, que je n'ai pas héſité d'en rechercher l'explication tirée de l'économie animale, & il m'a paru la trouver, en ſuppoſant que la fatigue eſt cauſée par la perte qu'on fait d'eſprits animaux qui produiſent le mouvement des muſcles ; & que de quelque façon que les eſprits animaux agiſſent ſur les muſcles, ils doivent être conſidérés comme de petits reſſorts bandés, qui ſe débandent au moment de leur activité ; or, c'eſt la nature des reſſorts de produire conſtamment la même force vive de quelle maniere qu'on leur permette d'employer leur efficace ; & comme on meſure l'effet d'un certain travail par la quantité des forces vives qu'on a produites, ſoit réelles, ſoit potentielles, il s'enſuit qu'une fatigue égale, comme cauſée par la même dépenſe d'eſprits animaux, produit un effet égal dans toutes les eſpeces de travail. L'économie animale ne fournit qu'une certaine quantité d'eſprits animaux pendant chaque jour, & c'eſt cette quantité d'eſprits animaux qui ſera la meſure de tout ſon travail journalier poſſible, tant en fonctions animales qu'en fonctions vitales. J'eſtime tout le travail journalier poſſible d'un homme d'une force & d'une taille moyennes à pouvoir élever 1728000 livres à la hauteur d'un pied chaque jour, ſans apporter du préjudice à ſa ſanté ; & je fonde cette eſtime ſur un grand nombre d'obſervations. Quant aux fonctions vitales, il ſeroit bien difficile de l'évaluer avec autant de juſteſſe ; il n'y a que le travail du cœur, qu'on peut déterminer aſſez exactement, puis qu'on ſçait qu'il fait environ 115200 battemens dans un jour, qu'il pouſſe environ deux onces de ſang dans chaque ſyſtole, & que les obſervations & expériences de Mr. Hales ſemblent prouver que le ſang ſoit jetté hors du cœur avec une viteſſe à pouvoir s'élever à la hauteur d'environ huit pieds ; ce n'eſt-là que l'effet du ventricule gauche, celui du ventricule droit en fera environ le quart, & on pourra eſtimer le travail journalier du cœur égal à celui d'élever 144000 livres à la hauteur d'un pied, ce qui fait la douziéme partie de ce que l'on peut appeller le travail journalier d'un homme. J'eſtime le travail des muſcles qui ſervent à la reſpiration plus grand ; & quand on conſidére qu'il ne ſe fait, ſelon toutes les apparences, aucune fonction animale ſans le concours & la coopération des nerfs & des eſprits animaux, il eſt à préſumer que la nature a deſtiné les eſprits animaux dans une proportion à-peu-près égale aux mouvemens vitaux néceſſaires & aux mouvemens volontaires.

V.

Nous pourrons donc ſuppoſer, que tous les hommes d'une conſtitution égale ſeront également fatigués après avoir fait des effets égaux, de quelle maniére que ces différens hommes ayant été employés ; mais il ſemble encore que la conſtitution des hommes puiſſe être extrêmement différente, ſans que leurs travaux journaliers, dont ils ſont capables pendant un grand nombre de jours de ſuite, ſoient conſidérablement différens. Tel homme charnu & vigoureux pourra peut-être faire trois ou quatre fois plus de travail pendant quelques heures de tems, qu'un autre décharné & d'une conſtitution beaucoup plus foible ne pourra faire dans un tems égal ; mais ſi chacun de ces deux hommes ſi différens en vigueur, étoit appliqué pendant un grand nombre de jours de ſuite à une même ſorte de travail juſqu'à ſe fatiguer également, je doute ſi leurs effets ſeroient fort inégaux. Cette vérité ſe manifeſte aſſez clairement dans les bêtes. C'eſt ſans doute parce que l'économie animale ne ſçauroit permettre de faire une plus grande dépenſe journaliere en eſprits animaux, que ce qu'elle lui fournit de nouveau chaque jour, & qui vraiſemblablement n'eſt pas fort différente dans les hommes ou dans les animaux d'une même eſpece.

VI.

VI.

Ces remarques paroîtront peut-être bien étrangeres pour notre sujet, mais la suite fera voir qu'elles sont très-essentielles, & telles qu'elles nous feront voir quel est le plus grand effet possible qu'on puisse tirer du travail des hommes pour la navigation, & jusqu'où l'usage des rames s'en approche. Mais il faudra auparavant nous engager dans une autre discussion; c'est sur les effets que les hommes peuvent produire par leurs travaux.

VII.

L'effet de travail peut & doit toujours être réduit à une certaine quantité de forces vives, quoique ces forces vives puissent avoir des apparences tout-à-fait différentes : elles peuvent pourtant toutes être réduites à une certaine masse élevée à une certaine hauteur verticale. Ces deux articles multipliés ensemble feront constamment la mesure de la force vive provenue d'un certain travail; si ce travail étoit employé à donner continuellement à de nouveaux corps un certain degré de mouvement horizontal, il n'y auroit qu'à voir quelle est la hauteur verticale à la quelle ces corps pourroient s'élever avec leur vîtesse imprimée, & on aura aussi-tôt leur force vive sous la forme desirée : si le travail consistoit à bander des ressorts, il faudroit examiner à quelle hauteur ces ressorts pourroient jetter une certaine masse en se debandant. Quand on ne fait que tirer horizontalement un corps qui souffre un certain frottement, ce frottement fait le même effet que s'il s'agissoit de bander continuellement de nouveaux petits ressorts; enfin l'effet du travail sera toujours équivalent à celui de lever une certaine maſſe à une certaine hauteur, & cet effet ſe montrera preſque toujours ſous les quatre formes que je viens d'indiquer.

VIII.

Examinons à préſent quelle eſt la plus grande quantité de force vive que l'homme puiſſe produire dans un certain tems ſans s'épuiſer. Il n'y a que l'expérience qui puiſſe décider cet article ; mais il faut bien diſtinguer pluſieurs différens cas. Un homme appliqué tous les jours à un certain travail, & chaque jour pendant huit heures de tems, pourra, à mon avis, élever vingt livres à la hauteur de trois pieds à chaque ſeconde, ou bien ſoixante livres à la hauteur d'un pied ; cela ſera 1728000 livres à la hauteur d'un pied pendant huit heures de tems. J'ai adopté ce réſultat ſur un grand nombre d'obſervations, & avec toute la circonſpection requiſe ; j'ai vu des cas, où l'homme faiſoit trois fois plus d'effet pendant chaque ſeconde, mais il n'auroit pû ſoutenir ce travail que pendant quelques minutes de ſuite. Si on ne vouloit impoſer aux hommes que quatre heures de travail par jour, je crois qu'on pourroit leur donner la tâche d'élever chacun 120 livres à un pied de hauteur à chaque ſeconde de travail. Cependant le partage le plus conforme à la conſtitution de l'homme eſt, à mon avis, celui de huit heures de travail par jour, & je ſuppoſerai que les rameurs ſoient deſtinés à cette fatigue,

IX.

On remarquera donc que tout homme appliqué à un tel travail qu'il puiſſe ſoutenir pendant huit heures chaque jour, ſera un effet équivalent à celui d'élever ſoixant livres à la hauteur d'un pied par ſeconde ; du moins ce ſera là l'effet moyen quand ce travail ſera fait par pluſieurs hommes. Mais le plus ſouvent le travail eſt employé en grande partie à des effets inutiles, & c'eſt-là le ſeul article eſſentiel à éviter ; on n'a qu'à ſatisfaire à cette ſeule condition pour être aſſuré d'avoir employé le meilleur moyen qu'il étoit poſſible pour exécuter l'ouvrage qu'on ſe propoſoit ; & dès-lors il ne faut plus entreprendre d'y ajoûter le moindre degré de perfection. Cette réflexion nous conduit d'abord à cette grande & principale maxime : *Que dans tout ouvrage qu'on ſe propoſe il faut commencer par examiner quel eſt l'effet eſſentiellement & néceſſairement attaché à cet ouvrage, effet qui ſoit inévitable par la nature même de l'ouvrage, & éviter enſuite autant qu'il eſt poſſible tout autre effet.*

X.

Pour nous conformer à cette regle, nous rechercherons quel eſt l'effet eſſentiellement & néceſſairement requis, quand on ſe propoſe d'entretenir un navire dans un cinglage uniforme ; or un navire ne ſauroit faire chemin ſans donner aux eaux un mouvement qu'elles n'avoient point ; nous conſidérerons ce ſeul effet comme eſſentiel & inévitable, en faiſant abſtraction de la réſiſtance de l'air, & en ſuppoſant les eaux comme n'ayant aucune ténacité ſenſible, ce que les expériences phyſiques confirment aſſez bien ; encore cet effet n'eſt-il eſſentiel que dans un certain ſens, puiſqu'il n'eſt pas ſûr qu'il ſoit impoſſible de mettre à profit le mouvement qu'on avoit imprimé aux eaux : ainſi, par exemple, ſi on avoit un tuyau d'une largeur uniforme réplié en cercle & rentrant en ſoi-même, tout rempli d'eau, on voit qu'un globe du même diametre, que celui du tuyau, pourroit ſe mouvoir dans le tuyau, ſans imprimer jamais le moindre mouvement nouveau aux eaux; je nomme donc ledit effet eſſentiel, que parce que je n'entreprendrai pas de l'éviter ni en tout ni en partie; & je ne crois pas que perſonne s'aviſe de l'entreprendre. C'eſt donc le mouvement qu'on eſt obligé d'imprimer continuellement aux eaux, qui cauſe ce qu'on appelle la réſiſtance des fluides & c'eſt uniquement dans la production de ce mouvement, que doit être employé le travail des hommes, tout autre effet étant en pure perte.

XI.

Pour bien traiter notre ſujet, il nous faudroit ici une théorie parfaite ſur la réſiſtance des fluides, théorie que je n'eſpere pas qu'on parvienne jamais à découvrir, parce qu'il ſera toujours impoſſible de déterminer exactement le nouveau mouvement qu'on produit à chaque inſtant dans chaque goutte d'eau, & d'en tirer la nouvelle petite force vive; c'eſt cette nouvelle force vive dans les eaux produites à chaque moment par le mouvement du vaiſſeau, qui donne la preſſion du vaiſſeau contre les eaux, ou la réſiſtance des eaux contre le vaiſſeau, & elle eſt en même tems l'effet eſſentiel du travail des rameurs. Ne pouvant donc partir de cette ſource, nous nous contenterons de la théorie connue ſur la réſiſtance des fluides, d'autant plus qu'elle eſt aſſez conforme à une infinité d'expériences qu'on à faites ſur ce ſujet. Nous ſuppoſerons en particulier que la réſiſtance directe des eaux contre une ſurface plane eſt égale au poids d'un priſme d'eau, dont la baſe ſeroit ladite ſurface plane, & la hauteur celle qui répond à la vîteſſe du plan; c'eſt à-dire, de laquelle un corps tombant librement acquiere ladite vîteſſe.

XII.

Sur ces hypothèses, qui me sont communes avec tous les Physiciens & Géometres, jexaminerai ce qui arrive à un certain navire cinglant avec une certaine vîtesse. Après avoir substitué à la surface de la proue une surface plane d'une égale résistance, je supposerai que cette surface plane contienne autant de pieds quarrés qu'il y a d'unités en n, & je nommerai a la hauteur verticale génératrice de la vîtesse du navire ; je supposerai qu'un pied cube d'eau pese 70 livres, & j'exprimerai ladite hauteur a en pieds. Ces dénominations & suppositions donnent le poids du prisme d'eau qui marque la résistance contre le navire $= 70\, n\, a$ livres ; Il suit de-là qu'on peut substituer au travail requis pour ce cinglage un autre qui sera tout-à-fait le même, & dont on connoît immédiatement l'effet ; c'est celui qu'on auroit si un poids de $70\, n\, a$ livres étoit attaché à un cordeau qui passât sur une poulie beaucoup plus haute que le poids, & qu'on tirât horizontalement l'autre bout du cordeau avec la même vîtesse que celle du navire ; or l'effet d'une telle action est d'élever un poids de $70\, n\, a$ livres avec une vîtesse qu'un corps acquiert en tombant de la hauteur a. Il n'est donc plus question que de sçavoir combien de pieds un mobile peut parcourir dans une seconde de tems avec ladite vîtesse ; on sçait par les élemens de la mécanique que ce nombre de pieds est $= 2\sqrt{15\,a}$, en supposant qu'un corps tombant librement fait 15 pieds dans la premiere seconde, quoique cette hauteur soit plus grande d'environ un pouce. Ainsi tout l'effet du cinglage en question est $= 140\, n\, a\sqrt{15\,a}$; c'est-là aussi le travail essentiellement requis. Si on veut exprimer cet effet immédiatement par la vîtesse du vaisseau, on pourra suppoſer que le vaiſſeau fait dans une ſeconde de tems autant de pieds qu'il y a d'unités en c & puis faire $2\sqrt{15a} = c$ ou bien $a = \frac{cc}{60}$, après quoi le travail eſſentiel requis pour le cinglage en queſtion, ſera $= \frac{7}{6} n c^3$, ce qui veut dire qu'il y faut autant de travail qu'il y en auroit à élever à chaque ſeconde à la hauteur d'un pied autant de livres qu'il y a d'unités en $\frac{7}{6} n c^3$.

XIII.

Cette derniere formulue nous apprend que les travaux eſſentiels pour faire aller un navire plus ou moins vîte, ſont en raiſon cubique des vîteſſes. Ainſi donc quand on feroit parvenu à employer utilement toutes les forces, il foudroit un travail 8 ou 27 fois plus grand pour donner au navire une vîteſſe double ou triple, & réciproquement les vîteſſes obſervent la raiſon des racines cubiques des travaux utilement employés. Cela fait qu'on gagne beaucoup ſur le travail en perdant peu ſur la vîteſſe. Il n'étoit pas difficile de prévoir ce théoreme, puis qu'une vîteſſe double donne une réſiſtance quadruple qu'il faut enlever avec une vîteſſe double; ce qui donne l'idée d'un travail 8 fois plus grand.

XIV.

La formule $\frac{7}{6} n c^3$, qui marque le travail eſſentiel & indiſpenſablement requis, nous donne d'abord à connoître une choſe qu'il eût été bien difficile de déterminer en partant d'autres principes; c'eſt de ſçavoir, en conſéquence des loix que la nature a preſcrites aux forces de l'homme & de leurs limites, quel eſt le plus petit nombre d'hommes poſſible pour fournir audit travail pendant 8 heures par jour; ou bien quel feroit le nombre d'hommes réquis pour un tel travail, en ſuppoſant qu'ils ne fiſſent aucune perte dans la maniere d'employer leurs forces; c'eſt-à-dire, que tout leur travail fût utilement employé ſans faire aucun autre effet que celui qu'il n'eſt pas poſſible d'éviter, & qui conſiſte à donner continuellement une nouvelle force vive aux eaux que le navire parcourt. Pour répondre à cette queſtion, on n'a qu'a diviſer la formule $\frac{7}{6} n c^3$, par 60 (§. 8.). Si nous dénotons donc ledit nombre d'hommes par N nous aurons cette équation.

$$N = \frac{7}{360} n c^3.$$

En convertiſſant cette équation, on obtient

$$c = \sqrt[3]{\frac{360 N}{7n}}$$

Laquelle derniere équation marque quelle eſt la plus grande vîteſſe poſſible qu'un certain nombre d'hommes puiſſent donner à un certain navire, & qu'ils lui donneroient réellement, s'ils étoient employés d'une maniere à ne faire aucune perte de leurs forces, ou à excercer leurs forces toutes utilement; c'eſt-à-dire, s'ils ne faiſoient aucun autre effet que celui qui eſt inſéparable d'avec le cinglage.

XV.

Nous voici donc en état de décider ſi dans l'uſage des rames on employe utilement toutes les forces que les rameurs exercent, ou bien ſi une partie conſidérable en eſt détournée par des effets, que le cinglage ne renferme pas eſſentiellement, & qui par conſéquent doivent être cenſés inutilement produits. Dans le premier cas l'uſage ordinaire des rames n'admet aucune correction, tout changement feroit dangereux, il ne pourroit qu'être nuiſſible, ſans pouvoir jamais être profitable; mais dans le ſecond cas il reſte quelque eſpérance ſoit de perfectionner l'uſage des rames, ſoit d'imaginer quelqu'autre moyen plus profitable ou moins défectueux. Pour décider cette queſtion, il faut connoître trois choſes; 1° le nombre des rameurs, que nous avons nommé N; 2° le nombre des pieds que le bâtiment fait dans une ſeconde de tems indiqué par c, & facile à déterminer par expérience; & 3° le nombre des pieds quarrés compoſant la ſurface plane d'une réſiſtance égale à celle de la proue du bâtiment, nombre que nous avons déſigné par n; c'eſt ce dernier nobre qui me fait encore quelque peine, faute d'obſervations ou d'expériences ſuffiſamment détaillées; je crois cependant pouvoir le déterminer en quelque façon pour les galeres, auxquelles je me propoſe d'appliquer cette théorie.

XVI.

M. Chazelles, dans les Mémoires de l'Académie pour l'année 1702, nous en fournit une deſcription & des remarques qui nous mettent aſſez en état de nous ſatisfaire là-deſſus: voici les circonſtances qui nous intéreſſent. La Chiourme étoit de 260 hommes, qui ramoient tous à la fois; M. Chazelles a remarqué que la galere voguant de la plus grande force à pouvoir durer longtems en calme (ce qui fait précisément le cas que nous conſidérons), a fait 72 toiſes par minute, ou $7\frac{1}{5}$ pieds par ſeconde; ces circonſtances rendent $N = 260$ & $c = 7\frac{1}{5}$. Voici à préſent les circonſtances rapportées par M. Chazelles, que je conſidére pour en tirer en quelque façon la valeur n. La ſurface réunie de toutes les pales étoit de 130 pieds quarrés. La Chiourme

Chiourme faiſoit 24 palades dans une minute de tems, & ainſi chaque palade duroit $2\frac{1}{2}$ ſeconde; mais une palade étant compoſée de trois mouvemens, deſquels il n'y a qu'un ſeul qui pouſſe les pales contre les eaux, il n'y a que ce ſeul mouvement à conſidérer; & j'ai remarqué que ſi on connoiſſoit exactement le petit tems de ce mouvement, on en pourroit conclure aſſez au juſte la réſiſtance de la galere, & par conſéquent la valeur n; mais j'ai remarqué auſſi qu'une très-petite faute dans l'eſtime de ce petit tems devient très-conſidérable pour le réſultat que nous cherchons. Nous embraſſerons d'abord notre queſtion dans toute ſon étendue, c'eſt pourquoi je nommerai T, le tems entier de chaque palade, que nous avons vu être de $2\frac{1}{2}$ ſecondes, & t tout le tems qu'on employe pendant l'action de pouſſer les pales contre les eaux; en ce cas il eſt évident qu'on peut ſubſtituer à l'action interrompue des rameurs qui pouſſent une ſurface de 130 pieds quarrés, celle de pouſſer continuellement & ſans aucune interruption un plan de $\frac{t}{T} \times 130$ pieds quarrés, mais avec la même vîteſſe. Je crois cependant que la ſurface de 130 pieds quarrés demande quelque diminution; car outre que les rameurs ne ployent peut-être pas entiérement les pales, ils pouſſent les pales dans une direction qui n'eſt ni parfaitement parallele à la quille, puiſqu'ils font un arc de cercle, ni parfaitement horizontale; ce qui paroît aſſez par leur manœuvre, ni parfaitement perpendiculaire au plan des pales. Toutes ces raiſons, & quelques autres, m'engagent à ſubſtituer 100 pieds quarrés aux 130. M. Chazelles dit enſuite que la partie intérieure de la rame avoit douze pieds, la partie extérieure 24 pieds, la pale 5 pieds de longeur, & que le vogue-avant faiſoit un mouvement de 6 pieds dans le tems t qu'on doit exprimer en ſeconde ; ainſi la vîteſſe de ce mouvement répondoit à $\frac{6}{t}$ pieds par ſeconde.

Il s'agit a préſent de ſçavoir dans quel endroit il faut placer le centre deffort des pales contre les eaux ; on pourroit ſe contenter de le placer au milieu des pales, c'eſt-à-dire à $21\frac{1}{2}$ pieds de diſtance depuis l'apoſtis : mais comme c'eſt ici une queſtion purement géométrique & facile à réſoudre, en prenant la ſomme des efforts de chaque élément de la pale, il vaudra ſans doute mieux de déterminer géométriquement ce centre d'effort pour des pales d'une largeur uniforme telles qu'on à coutume de les faire ; voici le réſultat de cette ſolution.

Soit la vîteſſe de l'extrêmité intérieure de la rame $= c$ la vîteſſe de la galere $= v$, la longueur de la partie intérieure de la rame $= a$; la diſtance entre l'apoſtis, & le commencement de la pale $= b$; la longeur de la pale $= d$, la diſtance cherchée du centre des efforts depuis l'apoſtis $= \lambda$, je dis qu'on aura

$$\lambda = \frac{v}{c}\,a + a\sqrt{\frac{a}{c}} \times \left[\left(\frac{b+d}{a} - \frac{v}{c}\right)^3 - \left(\frac{b}{a} - \frac{v}{c}\right)^3\right].$$

Dans cette équation il faudra faire $v = 7\frac{1}{5}$, $a = 12$, $b = 19$, $d = 5$.

$$\lambda = \frac{432}{5c} + 12\sqrt{\frac{4}{5}}\left[\left(2 - \frac{36}{5c}\right)^3 - \left(\frac{19}{12} - \frac{36}{5c}\right)^3\right]$$

Sur cette équation je me propoſe d'examiner deux cas ; le premier ſera celui de ſuppoſer chaque palade compoſée de trois tems égaux, ce qui fera $t = \frac{1}{3}T = \frac{5}{6}$ ſecondes, pendant lequel petit tems le vogue-avant appliqué, l'extrêmité intérieure de la rame fait ſix pieds ; de maniere qu'il faudra faire $c = 7\frac{1}{5}$, d'où l'on tire pour ce cas

$$\lambda = 12 + 12\sqrt{\frac{1108}{1728}} = 21,608.$$

Le fecond cas confiftera à fuppofer $t = \frac{2}{5} T$ car comme le mouvement de pouffer les pales contre les eaux eft le feul qui fouffre une grande réfiftance, il eft à préfumer qu'il fe fait un peu plus lentement que les deux autres employés fimplement à foulever & puis à porter les pales en avant, dans cet exemple nous aurons $t = 1$ fec. & par conféquent $c = 6$ pieds, ce qui fait

$$\lambda = 21,537.$$

Ce n'eft donc pas la valeur de λ, quoique la formule en foit fort compliquée, qui puiffe jetter quelque doute confidérable fur notre queftion. Reprenons à préfent notre queftion dans toute fa généralité, nous aurons la vîteffe du centre des efforts relative à la galere pendant que les rameurs pouffent les pales contre les eaux $= \frac{\lambda}{a} c$ & cette vîteffe relative aux eaux devient $= \frac{\lambda}{a} c - v$; Or le quarré de cette vîteffe multiplié par la furface de toutes les pales diminué autant que l'interruption du plongement des pales, & quelques autres raifons expofées le demandent, eft égal au quarré de la vîteffe de la galere, multipliée par le plan que nous cherchons, & que nous nommerons s; cette confidération nous donne $s = \left(\frac{\frac{\lambda}{a} c - v}{v}\right)^2 \times \frac{t}{T} \times 100$, dans laquelle équation la quantité $\frac{t}{T} \times 100$ marque la furface de toutes les pales reduites au cas d'agir fans interruption & diminuées en raifon 130, à 100, à caufe de plufieurs petites obliquités dans le mouvement des pales & de quelques autres raifons. Cette équation un peu mieux rangée donne

$$s = \left(\frac{\lambda c}{a v} - s\right)^2 \times \frac{t}{T} \times 100.$$

Sur cette équation nous chercherons la valeur de s pour les deux cas mentionnés ci-dessus. Dans le *premier* cas nous avons supposé $\frac{t}{T} = \frac{1}{3}$, ce qui fait $c = 7\frac{1}{5}$ & $\lambda = 21,608$; dans le *second* cas nous avons supposé $\frac{t}{T} = \frac{2}{5}$, ce qui fait $c = 6$ & $\lambda = 21,537$; pendant que dans l'un & l'autre cas il faut faire $a = 12$ & $v = 7\frac{1}{5}$: toutes ces substitutions nous donnent pour le cas $s = 21,37$ & pour le second $s = 9,82$. Cette grande diversité entre les valeurs de s est uniquement provenue de ce que dans le *premier* cas nous avons supposé $\frac{t}{T} = \frac{1}{3}$ & dans le *second* $\frac{t}{T} = \frac{2}{5}$.

M. Bernoulli, dans son Hydrodynamica a pareillement examiné cette même question, & il trouve à la fin pag. 301 que la résistance de la galere étoit égale au poids de $13\frac{1}{3}$ pieds cubiques d'eau, ce qui donneroit $s = 15,74$. Mais quoique ce nombre ait assez de vraisemblance, & que j'approuve sa méthode, il me paroît qu'il n'a pas assez pesé toutes les circonstances, on voit même que sa mémoire l'a trompé à l'égard de la longeur des rames, qu'il ne fait que de 18 pieds. Erreur cependant qui influe très-peu sur sa méthode. M. Euler, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1747 pag. 204, a encore considéré le même exemple, mais il n'a fait dans cet endroit que suivre le sentiment de son compatriote, prenant sans doute la question pour trop-peu déterminée, & ne voulant pas l'examiner par lui-même.

Enfin, M. Bouguer, dans son Traité du Navire, pag. 116, suppose pour les galeres pareilles à celles de M. Chazelle $s = 10$ pieds quarrés; mais il faut avouer que ce n'étoit que sur une simple estime qu'il s'est déterminé sur ce nombre, ne faisant attention qu'au peu de profondeur, & à la grande ſaillie de la carene; & nous voyons aſſez par ce que cet illuſtre auteur nous dit lui-même, pag. 419, combien ces ſortes d'eſtimes peuvent être trompeuſes, puiſqu'il dit qu'il penſoit que pour un grand vaiſſeau de guerre du premier rang, ce plan pouvoit être reduit à 77 pieds quarrés, & que l'ayant examiné par ſa méthode de réſoudre la ſurface de la partie antérieure de la caréne en pluſieurs triangles, il avoit trouvé ce plan le double de ce qu'il avoit penſé. Si M. Bouguer, s'étoit ſervi de la même méthode pour les galeres, je nécouterois plus abſolument que le ſuffrage d'un auſſi grand poids.

Après tout je ſuppoſerai $s = 16$ pieds quarrés en attandant qu'on détermine ce plan avec plus de préciſion par des expériences.

XVII.

Si nous ſuppoſons donc $c = 7\frac{1}{2}$ (je reprends ici les dénominations que j'ai faites avant le 16me §) & $n = 16$ (on remarquera que dans la digreſſion du § 16, j'ai ſubſtitué aux lettres c & n, les lettres v & s, qui ont dans cette digreſſion la même ſignification que c & n dans les articles précédens) nous aurons $N = \frac{7}{360} nc^3 = 116$, d'où il ſuit que 116 hommes ſuffiroient pour entretenir une telle galere dans un ſinglage à faire $7\frac{1}{2}$ pieds par ſeconde, ſi ces hommes pouvoient être employés pour cet effet d'une maniere à ne faire aucune perte de leur forces; or il y a eu 260 rameurs, nous devons donc conclure, que ces rameurs n'ont employé que $\frac{116}{260}$ parties de leur travail utilement, & que les $\frac{144}{260}$ parties du travail ont été employées inutilement en produiſant des effets qui ne ſont pas eſſentiellement renfermés dans le cinglage, c'eſt environ $\frac{5}{9}$ de perte, & ce résultat nous laisse espérer de pouvoir tirer un plus grand parti du travail des hommes pour le cinglage des navires.

XVIII.

Examinons aussi quelle est la plus grande vîtesse possible que 260 hommes puissent donner à la galere en question, en supposant qu'ils ne fassent aucune perte de leurs forces; c'est la seconde équation du § 14 savoir $c = \sqrt[3]{\frac{360N}{7n}}$ qui nous apprend cette plus grande vîtesse possible, & qui nous la donne de 9, 42. Il n'est donc pas possible que 260 hommes donnent à la galere une plus grande vîtesse que celle de faire $9\frac{2}{5}$ pieds par seconde, de quelle maniere qu'ils emploient leur travail, il est cependant possible d'y atteindre; ainsi la derniere vîtesse possible ne surpasse la vîtesse actuelle observée par M. Chazelles, que d'environ $2\frac{1}{5}$ pieds par seconde, & la vîtesse actuelle faisoit plus que les trois quarts de toute la vîtesse possible, d'où nous voyons qu'une grande perte de forces n'entraine qu'une perte très-médiocre du côté de la vîtesse; c'est que les forces augmentent en raison cubique des vîtesses.

XIX.

Si au lieu de $n = 16$ pieds quarrés, on vouloit suivre l'hypothese de M. Bouguer, en supposant $n = 10$, la quantité du travail utilement employée en deviendroit plus petite en raison de 16 à 10; on trouvera $N = 72\frac{1}{2}$ & on en conclurra une perte de $\frac{187\frac{1}{2}}{269}$ du travail de la chiourme; une telle perte me paroît moins vraisemblable, & c'eſt une raiſon qui m'a fait préférer la ſuppoſition de $n = 16$. Je ſuis ſurpris qu'on ne ſe ſoit pas appliqué avec plus de ſoin à connoître ces plans pour toutes ſortes de bâtimens, qui influent ſi fort ſur un grand nombre de queſtions très utiles pour la navigation. Voici la maniere que je crois la plus commode, & la plus ſûre de connoître ce plan pour tel bâtiment que l'on veut. On amarrera ce bâtiment à un autre, qui allant à voiles, tirera le premier après ſoi avec la même vîteſſe; la corde par laquelle on attache les deux bâtimens ſera longue, afin que le bâtiment entraîné ne ſouffre rien du ſillage de l'autre, ou du mouvement des eaux cauſé par le bâtiment antérieur: un bout de la corde paſſera ſur une poulie verticale & parallele à la quille, & on attachera à ce bout de la corde un baſſin pour y mettre des poids, pendant que l'autre bout eſt attaché fixement à l'autre bâtiment; on mettra d'abord aſſez de poids ſur le baſſin pour l'empecher de s'élever, juſqu'à ce que le tout ſoit réduit à un état de permanence; après quoi on diminuera peu-à-peu le poids, juſqu'à ce que le baſſin commence à s'élever un peu, pendant qu'un autre obſerve exactement la vîteſſe des bâtimens. Si le frottement de la poulie étoit aſſez grand pour mériter quelque attention, il ſera facile de corriger le poids qu'on aura obſervé. De cette maniere on connoîtra exactement la force qui tire le bâtiment avec une certaine vîteſſe. Si ledit poids augmenté de celui du baſſin, eſt exprimé en livres, dont le nombre ſoit P, on aura $n = \frac{6P}{7cc}$ ainſi ſuppoſant la vîteſſe c de 4 pieds par ſeconde, & P de 250 livres, le plan cherché ſera de $13\frac{1}{28}$ pieds quarrés. De cette façon on apprendra en même tems, s'il eſt vrai que les réſiſtances ſoient parfaitement en raiſon quarrée des vîteſſes, ou ſi cette regle a beſoin de quelque correction, principalement pour les corps d'une aussi grande surface, tels que sont les grands vaisseaux.

XX.

Il me paroît tellement nécessaire de partir de nos principes, pour bien traiter la question proposée par l'Académie, que n'étant pas entiérement sûr des résultats que nous à fourni l'exemple des galéres, j'ai voulu m'en éclaircir par l'examen de quelques nouvelles experiences & observations faites sur des petits bateaux auxquels deux rameurs donnent ordinairement une vîtesse à faire $4\frac{1}{2}$ pieds par seconde.

Nous avons choisi deux de ces bateaux assez égaux, & nous les avons attachés ensemble de la façon décrite dans le précédent article; nous avons placé à la poupe du second bateau entraîné par le premier, un quart de cercle, pour observer continuellement l'inclinaison d'un fil, auquel il y avoit attaché une boule plongée dans l'eau, & nous nous étions bien assurés que cette inclinaison nous donnoit assez au juste les différentes
Fig. I. vîtesses. La figure premiere fera assez voir tout le procédé de nos expériences; on remarquera d'abord ici que les rameurs placés dans le premier bateau étoient obligés de surmonter la résistance des deux bateaux que nous supposons égaux, & que le poids mis dans le bassin du second bateau, joint a celui du bassin, marque la résistance du seul second bateau; ensorte que le double de ce poids total exprime la résistance des deux bateaux considérés comme un seul. Quand on poussoit les pales contre les eaux, le bassin chargé montoit un peu & redescendoit dans les intervalles, il n'étoit pas difficile d'augmenter ou de diminuer les poids, de maniere que les élévations du bassin devinssent égales aux descentes

centes, & dans cette disposition nous avons pris le poids du bassin chargé, que nous nommerons poids total, pour la mesure de la résistance d'un seul bateau. Il est vrai que pendant toutes ces expériences & observations, nous remarquâmes presque continuellement plusieurs petites inégalités, qui provenoient de l'inégalité dans l'action des rameurs, & il étoit facile de commettre quelque petite faute dans le poids total du bassin, mais surtout dans l'observation de l'inclinaison du fil qui devoit marquer les vîtesses des bateaux. C'est ce qui m'a engagé à considérer attentivement toutes les circonstances, & à corriger un peu, suivant les circonstances, les résultats des vîtesses, quand j'ai vu clairement qu'il faloit le faire; mais ces changemens n'ont jamais été que très-légers. Je dois me louer ici des offices d'un ami pour l'exécution de ces expériences, mais j'espére qu'on me dispensera de le nommer dans une occasion comme celle-ci.

XXI.

Voici à présent de toutes les expériences celles qui pourront nous servir pour notre sujet.

I. Deux rameurs mis dans le premier bateau ont donné aux deux bateaux, en employant leur forces ordinaires, une vîtesse de 3, 50 pieds par seconde, & le poids total du bassin chargé étoit alors de 90 onces ou de $5\frac{10}{16}$ livres.

Je prendrai, pour plusieurs raisons, cette premiere expérience, pour celle qui ait été faite avec le plus d'attention & de justesse, & je corrigerai dans les suivantes les vîtesses observées, suivant la regle que les résistances sont en raison quarrée des vîtesses.

II. Les deux mêmes rameurs avertis d'employer un peu plus de force, ont donné au bateau la vîtesse de 3, 80, & le poids total étoit de 100 onces; la vîtesse corrigée suivant ladite regle devient = 3, 69.

III. Les deux rameurs exhortés à ramer plus vigoureusement jusqu'à donner au bateau la vîtesse 4, 00, ont soutenu un poids de 122 onces, la vîtesse corrigée devient = 4, 07.

IV. Les deux rameurs faisant force de rames jusqu'à convenir qu'ils ne pourroient pas continuer une telle fatigue pendant une demie-heure, ont donné au bateau la vîtesse 4, 30, soutenant un poids total de 138 onces, la vîtesse corrigée devient 4, 33.

La correction étant ici insensible, & y ayant ainsi un parfait accord entre les deux expériences extrêmes, cela justifie les 2 petites corrections que nous avons employées pour les deux expériences moyennes.

V. Mettant enfin quatre rameurs dans le premier bateaux, & ceux-ci avertis encore d'employer leur forces ordinaires, ont donné aux bateaux la vîtesse 4, 50, c'est précisement la vîtesse que deux rameurs donnent ordinairement à un seul bateau en ramant plusieurs heures de suite.

XXII.

Avant que de tirer de ces expériences, la conclusion principale sur la quantité des forces utiles dans l'action de ramer, je ferai quelques autres rémarques essentielles sur ce sujet.

(*a*) Pour trouver le plan d'une résistance égale à celle de la proue du second bateau, on se servira de l'équation $n = \frac{6P}{7cc}$ (§. 19.) & cette équation donnera la même valeur dans chacune des 4 premieres expé riences, sçavoir $n = o, 393$, ou à-peu-près $\frac{2}{5}$ d'un pied quarré; mais on se souviendra d'exprimer le poids P par livres, ou bien de diviser le nombre d'onces par 16, & de mettre pour c les vîtesses corrigées: sans ces corrections les valeurs de n deviendroient un peu inégales; cependant la valeur moyenne, pour les quatre premieres expériences non corrigées, se trouve encore telle que nous venons de le dire; ce qui confirme nos petits corrections.

(*b*) L'effet des rameurs devant être censé proportionnel à la quantité P, c, ou à c^3, il s'ensuit que ces effets, pour la premiere & la quatrieme experience ont été entr'eux comme 92 à 175, & les travaux ont eu la même proportion; mais il est vraisemblable, qu'un homme ne pourroit soutenir que pendant quatre heures par jour un travail tel que celui de la quatrieme expérience, pendant qu'il pourroit soutenir durant huit heures par jour celui de la premiere expérience; & si cela est, les travaux journaliers reviendroient au même, conformement à notre idée, sur le travail & la fatigue des hommes.

(*c*) Comme dans la premiere & la cinquieme experience, les rameurs faisoient des efforts égaux, & tels que les hommes peuvent faire pendant huit heures par jour, ces deux expériences confirment admirablement bien le Théoréme du §. 13, sçavoir, que les travaux essentiels requis pour faire aller un certain bâtiment plus ou moins vîte, sont en raison cubique des vîtesses. Dans ces deux expériences les travaux étoient, sans doute, comme 2 à 4, puisqu'il y avoit d'un côté deux rameurs, & de l'autre quatre rameurs, qui s'efforçoient également, & les vîtesses étoient comme 3, 50 à 4, 50; $1 : \sqrt[3]{2} = 3, 50$;

441. Ainsi la vîtesse que les quatre rameurs donnoient aux bateaux étoit à fort peu près celle que notre Théorême donne ; elle étoit plus grande d'environ un pouce par seconde, & je donnerai même ci-dessous la raison de ce petit excès.

(*d*) En supposant les deux bateaux parfaitement égaux, on a, pour le premier bateau, pareillement $n = 0$, 393 ; de sorte que les deux bateaux ensemble souffriroient une résistance égale à celle de 0, 786 pieds quarrés : mais nous reconnûmes bientôt que le premier bateau étoit un peu-plus pesant que le second ; cela nous engagea à changer l'ordre des bateaux pour déterminer pareillement la résistance de l'autre bateau. Je ne rapporterai que la seule expérience qui suit.

VI. *Expérience.* Après avoir changé l'ordre des bateaux & leur vîtesse, comme étant 4, 22 pieds par seconde, le poids total fut remarqué de 160 onces.

XXIII.

Il suit de cette sixieme expérience que si la vîtesse avoit été de 3, 50, comme dans la premiere expérience, le poids total eût été de 110 onces, les résistances des deux bateaux étoient donc comme 90 à 100, & la résistance entiere des deux bateaux ensemble étoit de 200 onces ou de $12\frac{1}{2}$ livres, cette résistance étoit surmontée par deux hommes avec une vîtesse de $3\frac{1}{2}$ pieds ; l'effet utile de leur travail étoit donc égal à celui d'élever $12\frac{1}{2}$ livres à la hauteur de $3\frac{1}{2}$ pieds par seconde, multipliant ces 2 nombres & divisant le produit par 120 qui marque l'effet entier du travail ordinaire de deux hommes, nous obtenons $\frac{43\frac{1}{2}}{120}$ ou $\frac{175}{480}$ ou $\frac{35}{96}$ ou 0, 365. De là nous concluons, qu'exprimant le travail en tier par 1000, les rameurs en ont employé 356 utilement, & qu'ils ont fait une perte de 635, en produisant des effets inutiles, qui n'étoient pas renfermés essentiellement dans le cinglage des deux bateaux.

XXIV.

Comparons ces résultats avec ceux que nous avons trouvés au §. 17 pour les galeres; en leur supposant n= 16 pieds quarrés, nous y avons vu que le travail utile de la chiourme faisoit $\frac{116}{260}$ du travail entier, c'est en fractions décimales 0, 446. Ces résultats sont donc à-peu-près comme 9 à 11, & par consequent presque les mêmes pour les bateaux & pour les galeres: & si on n'avoit donné aux galeres qu'une résistance égale à celle d'un plan de 13 pieds quarrés, ces pertes des forces seroient devenues entiérement égales de part & d'autre. En tous cas je m'assure que cette conformité, soit entiére, soit approchante, paroîtra merveilleuse à ceux qui considéreront la diversité infinie qu'il y avoit des deux côtés. Les rames étoient très-petites sur le bateau, & très-grandes sur la galere; la vîtesse de la galere étoit plus que double de celle du bateau, ce qui rendoit la maniere de voguer tout-à-fait différente: sur la galere on donnoit 24 palades par minute, & sur le bâteau, on en faisoit ordinairement plus que 30. Les palades si faisoient à-peu-près en trois tems égaux sur la galere, & en deux sur le bateau; il y avoit 260 rameurs sur la galere, & deux rameurs pour les deux bateaux; enfin il n'y avoit sur le bateau qu'un rameur à chaque rame, & il y en avoit cinq sur la galere, & ces cinq rameurs travailloient d'une maniere extrêmement différente, celui qui est le plus près de l'apostis ne faisant presque point de mouvement & le vogu'avant faisant un mouvement énorme qui en peu de tems le met tout en sueur &c. Cependant, il se trouve à la fin que les rameurs ont fait à-peu-près chacun le même effet sur les bateaux & sur la galere. Celà marque une conservation merveilleuse des forces humaines pareille à la conservation des forces vives, qui a fait tant de bruit; & nous en devons conclure que les hommes, avec des fatigues égales, font toujours des effets à-peu-près égaux; de sorte que dans toutes les questions méchaniques, dans lesquelles il s'agit d'obtenir un certain effet par le travail des hommes, il n'y a qu'à éviter autant qu'il est possible tout autre effet pour être assuré qu'on aura embrassé le meilleur moyen qui étoit possible.

XXV.

Je me crois donc suffisamment fondé à dire, que dans l'action de voguer sur les bâtimens de bas-bord, les rameurs employent o, 446 de leur travail utilement, c'est-à-dire, uniquement à surmonter la résistance des eaux, qui seule fait tout l'effet qu'on se propose, & que o, 554 de leur travail se perdent, étant employés à des effets, qui ne sont pas essentiellement renfermés dans le cinglage. Mais comme tout travail à son effet, qu'on peut toujours réduire à une certaine quantité de forces vives, il est nécessaire de rechercher, en quoi peuvent consister les effets des o, 554 parties du travail inutilement employées; ce n'est qu'après ces recherches, qu'on sera en état d'examiner, si ces effets sont d'une nature à pouvoir être évités en conservant l'usage des rames, ou non. Dans le premier cas il sera possible de perfectioner la méchanique des rames, & dans le second cas il faudra tâcher de substituer aux rames quelqu'autre moyen qui entraîne une moindre perte dans les forces que l'on veut employer.

XXVI.

Voici d'abord une ſource de pertes, qui eſt bien certaine & qu'on peut déterminer aſſez au juſte; rémarquons que la ſurface réunie de toutes les pales, aura toujours une certaine grandeur déterminée qu'on doit pouſſer avec une certaine vîteſſe contre les eaux, que par cette action on donne à une certaine quantité d'eau un certain mouvement, & que par-là on produit continuellement une certaine quantité de forces vives, qu'on doit cenſer n'être pas eſſentiellement renfermées dans l'effet qu'on ſe propoſe, puiſque ſi on étoit à même de ſe ſervir de perches, qu'on pût chaque fois appuyer directement contre un point fixe, ou qu'on pût préſenter à chaque palade un point fixe pour y appuyer l'extrêmité de la pale, on éviteroit entiérement de produire une ſemblable force vive inutile. Tâchons donc d'évaluer cette perte des forces pour la galere que nous avons conſidérée.

XXVII.

Pour cet effet il faut commencer par réduire la ſurface réunie de toutes les pales, qui étoit de 130 pieds quarrés, mais qui n'eſt pouſſée contre les eaux que par intervalles à un autre plan beaucoup plus petit, qui étant pouſſé conſtamment & uniformement contre les eaux, donne à la galere la vîteſſe de $7\frac{1}{5}$ pieds par ſeconde; ſoit donc ce plan $= s$, la vîteſſe uniforme avec laquelle ce plan eſt conſtamment pouſſé contre les eaux $= v$, la ſurface plane qu'on peut ſubſtituer à la proue $= n$, & la vîteſſe de la galere $= c$; là deſſus nous aurons d'abord $svv = ncc$, parce que la force motrice doit être égale à la réſiſtance, & par conſequent

$v = c\sqrt{\frac{n}{s}}$. Mais dans cette manœuvre l'effet n'eſt plus ſimple. Celui qui réſulte du mouvement qu'on donne aux eaux par la ſurface n, & que nous avons démontré au §. 12 devoir être exprimé par $\frac{7}{6} n c^3$, il ſurvient un autre effet qui conſiſte dans le mouvement qu'on donne aux eaux par la ſurface s, & qui eſt pareillement $= \frac{7}{6} s v^3$. Ce ſecond effet n'eſt pas eſſentiellement compris dans le cinglage ; mais il devient eſſentiel auſſitôt qu'on ſe propoſe de produire ce cinglage moyennant une ſurface plane s, qu'on pouſſe directement & ſans interruption uniformement contre les eaux avec une vîteſſe rélative v : ſi on nomme donc le premier effet E, le ſecond effet acceſſoire ſera $= \frac{sv^3}{nc^3} E$, ou $= \frac{v}{c} E$, ou bien $= E\sqrt{\frac{n}{s}}$. Si donc par exemple, on ſuppoſoit $s = n$, cet effet acceſſoire ſeroit égal à l'autre effet eſſentiel ; on voit en effet que ce ſeroit comme faire aller deux galeres égales avec des vîteſſes égales, l'une vers l'orient, l'autre vers l'occident.

XXVIII.

Ce que nous venons de démontrer ſur le rapport entre les deux dits effets, nous pouvons auſſi le déduire du rapport qu'il y a manifeſtement entre les travaux ; imaginons-nous encore qu'on trouve en tous lieux des points fixes d'appui, contre leſquels on puiſſe appuyer directement des perches, & donner par-là à la galere la vîteſſe c ; un tel travail ſeroit entiérement utile, puiſque ce ſeroit enlever immédiatement & directement une certaine réſiſtance ſans qu'on perde la moindre partie de ſon travail. J'appellerai ce travail T, qui eſt eſſentiellement réquis ; qu'on conçoive après cela d'autres points d'appui mobiles, (au lieu de points fixes) dont la vîteſſe ſoit v en ſens contraire, ou des points d'appui qui

qui cedent avec la vîteſſe v, on voit manifeſtement que c'eſt la vraie maniere d'enviſager notre queſtion. Or il faudroit tant pour les points d'appui fixes que pour les mobiles, pouſſer les perches avec la même force pour donner à la galere la même vîteſſe, mais dans le premier cas, on les pouſſeroit avec la vîteſſe c, & dans le ſecond cas avec la vîteſſe $c + v$; & les travaux étant en ce cas proportionels aux vîteſſes (§. 2.), il s'enſuit que le travail dans le ſecond cas, ſera $= \frac{c+v}{c} T$; ainſi le travail acceſſoire eſt $= \frac{v}{c} T$, ou bien $= \frac{v}{c} E$, puiſque T, exprime un travail, qui produit ſon effet E tout entier. C'eſt préciſement la même valeur que nous avons trouvée dans le précédent article; nos principes ſont trop fondés dans ſa nature pour ſe dementir.

XXIX.

Pour appliquer notre Théorême à la queſtion dont il s'agit d'évaluer l'effet acceſſoire que la chiourme produit ſur la galere, il faut tâcher de ſubſtituer aux lettres E, n & s leur juſte valeur; conſidérons pour cet effet que la ſurface reunie de toutes les pales eſt 130 pieds quarrés ſur 52 rames; mais comme les rames ne ſont plongées dans les eaux que pendant environ le $\frac{1}{3}$ du tems, il faudra enviſager la choſe comme s'il n'y avoit que 17 à 18 rames pouſſées ſans interruption contre les eaux; donc la ſurface des pales ne ſera plus que d'environ 43 pieds quarrés; on voit enſuite qu'il y a naturellement encore pluſieurs petites diminutions à ſuppoſer pour ces 43 pieds, toutes m'engagent à ſuppoſer finalement $s = 36$ pieds quarrés. Je ſuis perſuadé que c'eſt la plus grande valeur qu'on doive admettre, mais une ſi petite correction n'eſt pas aſſez importante pour nous engager là-deſſus dans de grandes diſcuſſions; nous ferons donc $s = 36$ pieds quarrés, $n = 16$ pieds qurrés, & $E = 0,446$ (§. 25.) & nous aurons $E\sqrt{\frac{n}{s}} = \frac{2}{3}E = 0,297$, c'eſt-là l'effet acceſſoire produit par le travail des rameurs, qu'on exprime par l'unité, lequel effet acceſſoire prend ſa ſource dans le mouvement qu'on donne aux eaux par le corps de pale; & pour être perſuadé, que ce n'eſt-là qu'un effet acceſſoire, on n'a qu'à ſuppoſer la ſurface de toutes les pales, comme infinie, ou extrêmement grande, ce qui n'implique aucune contradiction, & cet effet s'évanouira entiérement ou ſe réduira à très-peu de choſe.

XXX.

Si nous ajoutons enſemble les deux effets provenans du travail de la chiourme, & déja indiqués, la ſomme ſera $= 0,743$ de l'effet entier que 260 hommes peuvent produire lorſqu'ils employent toutes leurs forces utilement, & ces 0,743 parties conſiſtent uniquement dans le mouvement qu'on imprime, & communique continuellement aux eaux, tant par la proue de la galere que par la ſurface des pales.

XXXI.

Il nous reſte à découvrir en quoi peut conſiſter le reſte de l'effet entier qui ſe réduit à 0,257; car je le repete, tout travail doit avoir ſon effet, & nous n'avons encore indiqué que les trois quarts de l'effet entier. Je trouve que le quart reſtant doit être attribué pour la plus grande partie à l'agitation irréguliére des corps des rames; je dis: qu'il faut un travail conſidérable pour remuer les rames de la maniere que les rameurs le font ſur une galere, & cela independamment de la réſiſtance des eaux, conſidérant ici la ſimple inertie des rames ; ce travail réquis pour remuer les corps des rames eſt ſans doute encore acceſſoire puiſqu'il s'évanouiroit, ſi on pouvoit faire des rames ſuffiſamment roides & fortes avec très-peu de matiere. C'eſt-ici une nouvelle matiere, que je tâcherai déclaircir aſſez pour pouvoir évaluer en quelque façon cette perte, que les rameurs ſur une galere font de leur force, & de leur travail.

XXXII.

Les rames ſur les galeres ayant 36 pieds de longueur, & étant en même tems aſſez fortes pour ſoutenir des efforts de plus de ſoixante livres, à la diſtance de $21\frac{1}{2}$ pieds (§. 16.) depuis l'apoſtis, ne ſauroient manquer d'être des corps fort lourds & peſants, ce ſont cependant ces corps qu'il s'agit de remuer fortement par des mouvemens réciproques & répétés vingt-quatre fois dans une minute de tems ; ſi ces agitations des rames ſe faiſoient d'une maniere que les forces vives une fois imprimées aux rames ſe conſervaſſent d'elles-mêmes, comme cela arrive à tous les corps qu'on abandonne à eux-mêmes, nous trouverions très-peu de perte dans l'agitation des rames, & il n'y auroit guere à conſidérer, que le petit frottement de chaque rame contre l'apoſtis. Mais qu'on faſſe bien attention aux mouvemens que les rameurs donnent aux rames, & on verra auſſitôt qu'il s'agit alternativement de leur imprimer une certaine vîteſſe, & enſuite de les arrêter ; chacun de ces changemens réciproques demande un certain travail, que nous devons conſidérer comme acceſſoire, & qui eſt en pure perte. Il eſt difficile d'évaluer au juſte cette perte, parce que nous ne connoiſſons pas exactement les changemens en direction & en vîteſſe des rames, en tant que ces changemens ſont produits par les efforts des rameurs. C'eſt pourquoi je me contenterai d'enviſager le mouvement des rames ſous la forme la plus ſimple & la plus ſuſceptible de calcul, mais qui ne laiſſe pas d'imiter aſſez bien le vrai mouvement tel qu'il eſt.

XXXIII.

Je conſidérerai dans les palades deux mouvemens, celui qui ſe fait hors de l'eau, & celui qui ſe fait ſous l'eau ; dans le premier mouvement il faudra faire attention à la force vive imprimée à la rame, lorſque cette force vive eſt la plus grande, & je ferai conſiſter dans cette ſeule force vive tout l'effet inutilement produit par les rameurs ; enſuite le mouvement de la rame ſera retardé, & enfin entierement arrêté ; je n'attribue aucun travail à cela, parce-que les rameurs n'ont qu'à laiſſer entraîner leur corps pour retarder, & pour arrêter les rames vers la fin de ce premier mouvement ; quant au ſecond mouvement, il eſt vrai que les rameurs impriment d'abord un nouveau mouvement aux rames ; mais ce mouvement eſt enſuite employé utilement à pouſſer les eaux vers la pouppe ; & pourvu qu'on ſuppoſe que les rames n'ayent plus aucun mouvement ſenſible dans le moment qu'on retire les pales hors de l'eau, on n'aura fait aucune perte de ce côté-là : on voit bien qu'en enviſageant de cette maniere notre ſujet, je ſuis bien éloigné de ſurcharger la perte des forces cauſée par l'inertie des rames. Voici à préſent un Théorême, qui nous ſervira à évaluer cette perte.

Fig. II. Soit $A\ C$, ou $a\ c$ la longeur de la rame agitée réciproquement de $A\ C$ en $a\ c$, & $a\ c$ en $A\ C$, autour du point B, qui eſt la place de l'apoſtis ; qu'on marque par M, le poids, ou la maſſe de toute la rame, qu'on pourra ſuppoſer inégalement chargée de matiere d'une façon quelconque ; soit ensuite le centre de gravité de la rame entiere en D ; il faut aussi s'imaginer la rame être suspendue par le point B, en forme d'un pendule simple, & en chercher le centre d'oscillation, que nous supposerons en E ; qu'on fasse enfin $B\ G$ égale à la moyenne proportionelle entre $B\ D$ & $B\ E$: après cette construction, je dis qu'on pourra considérer toute la matiere de la rame, comme concentrée au point G, qu'on peut appeller le centre des forces vives ; connoissant le point G, il faudra examiner quelle est la vîtesse de ce point G, pendant que la rame est poussée de $A\ C$ en $a\ c$, soit la hauteur verticale génératrice de cette vîtesse $= h$, & on a démontré que la force vive de la rame est égale à $M\ h$.

XXXIV.

On voit donc que pour chaque rame les rameurs produisent sur chaque palade inutilement une force vive exprimée par $M\ h$, & par conséquent 24 $M\ h$ pendant chaque minute, ou $\frac{2}{5}\ M\ h$ pendant chaque seconde ; & comme on applique cinq rameurs à chaque rame, on aura $\frac{2}{25}\ M\ h$ pour chaque homme par seconde. Si on veut exprimer le poids de la rame M, par livres, & la hauteur verticale h, par pieds, il faudra comparer la quantité trouvée $\frac{2}{25}\ M\ h$ avec 60, qui est la mesure du travail entier d'un homme pour chaque seconde de tems. Ainsi si le travail absolu de la chiourme est exprimé par l'unité, nous dirons que le travail inutilement employé causé par l'inertie des rames est $\frac{1}{750}\ M\ h$.

XXXV.

Je suis bien sûr, que ladite perte est pour le moins $\frac{1}{750}\ M\ h$; mais je ne suis pas sûr, qu'elle ne soit pas plus grande. Or après avoir fait attention a toutes les circonſtances décrites par M. Chazelles, de même qu'à celles qui déterminent le point G, conformement au Théorême du §. 33, j'eſtime h de $\frac{5}{4}$ de pieds, & ſur cette eſtime la perte en queſtion ſera $= \frac{1}{600} M$; mais j'avoue que je n'ai aucune idée ſur le poids d'une rame de galere; ſi ce poids eſt ſuppoſé de 100 livres, la perte en queſtion ſera 0, 167; en tous cas nous voyons qu'elle eſt conſidérable. Suppoſons-là en attendant d'en être inſtruit = 0, 167, & ajoutons cette valeur à celle de 0, 743, que nous avons adoptée à la fin du §. 30, & nous aurons 0, 910. De cette maniere nous aurons déja trouvé les 0, 910 parties de l'effort total du travail de la chiourme.

XXXVI.

Nous ne nous mettrons pas beaucoup en peine pour découvrir à quoi peuvent avoir été employés les 0, 090 dernieres parties, il eſt facile de voir qu'il y aura encore pluſieurs autres petites pertes; la principale, à mon avis, de toutes ces petites pertes conſiſte en ce que ſans doute la partie extérieure de la rame ſera un peu plus peſante que la partie intérieure, ce qui fera qu'à chaque palade, on eſt obligé d'élever un certain poids, & ce travail doit encore être conſidéré comme entierement inutile. Nous connoiſſons donc à préſent à-peu-près tout l'emploi que les rameurs font de leur force. Le principal & eſſentiel conſiſte à déplacer les eaux qui s'oppoſent à la proue, c'eſt ici le ſeul utile, & il doit être égal à 0, 446. Le ſecond conſiſte à deplacer les eaux, que rencontrent les ſurfaces des pales; je traite celui-ci d'acceſſoire, & inutile, & je le fais = 0, 297. Le troiſieme ſert à remuer le corps des rames, & à ſurmonter leur inertie; il eſt de même acceſſoire & inutile, & je l'eſtime $= 0,167$. Enfin le dernier emploi des efforts des rameurs pareillement inutile conſiſtera à lever quelques autres obſtacles accidentels & ſur tout celui qui provient du défaut d'équilibre dans les deux bras de la rame. Je ſuis auſſi bien perſuadé, que ſi on pouvoit éviter tous ces effets inutiles ſans tomber dans d'autres pertes, on atteindroit par-là à la meilleure maniere qu'il ſoit poſſible de naviger par les efforts des hommes, car nul travail ne reſte ſans effets, & ſi tout l'effet eſt utile, on tire le meilleur parti qui ſoit poſſible du travail des hommes. Mettons ces principes à profit dans notre ſeconde Partie.

XXXVII.

Avant que de finir cette Premiere partie, nous ferons encore quelques réflexions ſur le moyen fondamental, qui eſt le ſeul dont les hommes puiſſent profiter pour faire cingler un navire par leur travail en pleine mer. Ce moyen unique eſt l'inertie des eaux, quand on ſe trouve en pleine mer, mais on peut mettre à profit cette inertie de pluſieurs manieres, qui ſont fort différentes entre elles Dans l'uſage ordinaire des rames on pouſſe les pales contre les eaux, & ce mouvement ſe fait avec une vîteſſe finie & comme uniforme, dans cette action, on donne pendant chaque inſtant une vîteſſe *finie* à une nouvelle maſſe d'eau *infiniment petite*, mais on peut changer la choſe de maniere que pendant chaque inſtant on donne un incrément de vîteſſe infiniment petit à une maſſe *finie*; cette conſidération pourroit bien nous induire à faire quelque changement à la ſtructure des rames, ou même à leur ſubſtituer quelqu'autre moyen, en tout cas ce nouveau ſujet appartient de trop près à notre queſtion principale pour le paſſer ſous ſilence.

XXXVIII.

Imaginons-nous d'abord toute la ſurface de la mer parſemée de corps flottans, mais qui n'empêchent pas le ſillage, de maniere qu'au lieu d'enfoncer les pales dans l'eau, on puiſſe ſimplement appuyer l'extrêmité de la rame contre un de ces corps, & le pouſſer vers la pouppe, & ſuppoſons que ces corps flottans ne réſiſtent à la rame que par leur inertie; ſur ces ſuppoſitions, nous nous trouverons dans le cas, duquel j'ai fait mention dans le précédent article, qui eſt de donner à chaque inſtant une accélération vers la pouppe infiniment petite au corps flottant qui fait une maſſe finie. Si chacun de ces corps flottans avoit une maſſe comme infinie, il ne céderoit pas ſenſiblement à l'effort de la rame, & le rameur ne perdroit rien à cet égard de ſa force; mais ſi ces corps ſont conſidérés, comme ayant une certaine maſſe, ils céderont par un mouvement accéléré, & la perte du travail des rameurs eſt la force vive qu'auront acquis ces corps dans le moment qu'on les quitte pour appuyer la rame contre un nouveau corps flottant. Nous ſubſtituerons enſuite à ces corps flottans des maſſes d'eau aſſujetties à ne pouvoir être déplacées que toutes entieres à la fois.

XXXIX.

Maintenant je me propoſe de chercher la proportion qu'il y auroit entre le travail, ſi le poids p de chaque corps flottant étoit infini, & qui feroit eſſentiel, à celui qu'on eſt obligé d'employer lorſque le poids p eſt d'une certaine valeur déterminée, ce calcul ſe fera à-peu-près comme au §. 28. Il n'y a que cette différence, qu'ici la vîteſſe avec laquelle le corps flottant eſt

eſt pouſſé vers la pouppe eſt uniformément accéléré, pendant que cette vîteſſe étoit conſidérée, comme uniforme dans le §. 28. Soit la vîteſſe du corps flottant relative aux eaux calmes, dans un inſtant quelconque $= v$, que ce corps ſoit preſſé avec une force quelconque π pendant un tems infiniment petit dt, & il faudra toujours eſtimer le travail proportionel à $\int \pi v dt$. Cette conſidération nous conduit d'abord à cette propriété, que le travail eſſentiel eſt au travail acceſſoire provenant du mouvement qu'on donne aux corps flottans, comme Pct à $\int Pvdt$; mais pour avoir une idée plus nette de cette proportion, conſidérons les eſpaces parcourus; ſuppoſons que depuis le moment qu'on à commencé à toucher le corps flottant, ce corps ait parcouru l'eſpace s, pendant que le navire parcourt l'eſpace S, & alors on pourra mettre ds à la place de vdt, & S à la place de ct; après quoi ladite proportion ſera comme PS à $\int Pds$, ou P étant conſtante comme S à s. Nous voyons donc qu'à préſent le travail eſſentiel & entiérement utile eſt au travail acceſſoire duquel il eſt ici queſtion, comme le chemin que fait le navire pendant tout le temps qu'on employe à pouſſer en arriere chaque corps flottant, eſt au chemin parcouru par le corps flottant pendant le même tems. Ce Théorême ſeroit le même que celui du §. 28, ſi nous avions pu ſuppoſer ici la vîteſſe v conſtante, parce que en ce cas les eſpaces s & S, ſeroient comme les vîteſſes v & e.

X L.

Connoiſſant la perte qu'on ſouffriroit par une telle ſorte de travail, je crois que cette connoiſſance pourroit bien nous fournir quelques nouveaux moyens d'épargner les forces des rameurs, & d'en tirer plus de fruit. C'eſt dans cette vue que j'ajouterai quelques réflexions ſur notre Théorême.

I Soit la force, avec laquelle chaque corps flottant eſt pouſſé en arriere $= \pi$, le poids de ce corps $= p$, le petit tems, pendant lequel ces corps ſont preſſés à chaque fois $= t$ exprimé par ſecondes, & alors on aura $s = \frac{\pi}{p} \times t\,t \times 15$ pieds, pendant qu'on a $S = t\,c$ pieds, en entendant par c le nombre de pieds que le navire fait dans une ſeconde de tems ; donc le rapport de s à S devient égal au rapport de $15\,\pi\,t$ à $p\,c$.

II. Comme il y a ſur une galere 52 rames, qui agiſſent par intervalles en 3 tems, nous pourrons leur ſubſtituer $\frac{52}{3}$ rames qui agiſſent ſans interruption, & la preſſion continuelle que chaque rame exerce contre les eaux, doit être cenſée d'environ cinquante-ſix livres, qui font $\frac{3}{52}$ de la réſiſtance d'un plan de 16 pieds quarrés mus contre les eaux, avec une vîteſſe de $7\frac{1}{5}$ pieds par ſeconde. Outre cela le tems employé à pouſſer les pales contre les eaux ſur les galeres eſt le tiers d'une palade ou $\frac{5}{6}$ de ſeconde ; ſuppoſons donc qu'on pouſſe pareillement chaque corps flottant avec une force de cinquante-ſix livres, en y employant chaque fois un tems de $\frac{5}{6}$ de ſecondes, & on trouvera $s = \frac{\pi}{p} \times t\,t \times 15 = 5,\ 83\frac{1}{3}$ pieds, pendant qu'on auroit S ou $t\,c =$ 6 pieds : ſi on veut donc faire enſorte que le travail inutile ne faſſe que les deux tiers du travail utile, qui eſt la proportion que nous avons trouvée au §. 29 pour la maniere ordinaire de ramer ſur la galere, il faudra faire $\frac{s}{S} = \frac{2}{3}$, & par conſéquent $p = 145\frac{5}{6}$ livres, ce qui fait environ le poids de chaque corps flottant de deux pieds cubes d'eau. Cette ſuppoſition rendroit le travail entiérement égal pour la maniere ordinaire de ramer, & pour celle d'appuyer l'extrêmité des rames contre des corps flottans.

Qu'on faſſe à préſent attention à la maniere dont nous avons trouvé tous les réſultats de cet article, & des deux précédentes rémarques, ſi différentes en apparence de nos méthodes antérieures, & on ſera ſurpris de l'admirable accord qu'il y a de part & d'autre pour les réſultats abſolus. J'ai dit que le travail inutile eſt toujours la force vive inutile qu'on en tire; dans notre cas c'eſt la force vive que l'on donne à chaque corps flottant, cette force vive eſt pour chaque corps flottant $= \pi s = \pi\left(\frac{\pi}{p} \times tt \times 15\right)$, faiſons $\pi = 56$, $p = 145\frac{5}{6}$, $t = \frac{5}{6}$, leſquelles poſitions ſont le travail de pouſſer en arriere les corps flottans, le même que celui de ramer ſur la galere, & nous trouverons $\pi s = \pi\left(\frac{\pi}{p} \times tt \times 15\right) = 224$. Ainſi la force vive de chaque corps flottant devient $= 224$, mais comme il y a cinq hommes à chaque rame, nous aurons pour chaque homme $\frac{224}{5} = 44\frac{4}{5}$, qui ſont la force vive que chaque homme produit inutilement à chaque palade qui dure $2\frac{1}{2}$ ſeconde, ce qui fait par ſeconde pour chaque homme $17\frac{23}{25}$ de perte; cette perte étant comparée avec le travail entier que nous eſtimons toujours 60 par ſeconde, on trouvera la perte $= \frac{448}{1500}$ parties du travail entier, ou en fraction décimale 0, 298, & nous avons trouvé à la fin du §. 29. Cette perte en tant quelle eſt produite par l'action ordinaire des rameurs $= 0, 297$. Un auſſi parfait accord prouve inconteſtablement la vérité de tous les principes, dont nous nous ſommes ſervis.

IV. Rémarquons enfin que l'effet inutile conſiſtant dans la force vive imprimée aux corps flottans, étant à l'effet essentiel & inevitable comme s à S, ou comme $\frac{\pi}{p} \times tt \times 15$ à tc, ou enfin comme $15\,\pi t$ à pc, on peut diminuer ce rapport de deux manieres sans rien changer à la valeur π nécessaire pour entretenir la vîtesse uniforme du navire ni à cette vîtesse même exprimée par c, la *premiere* maniere consiste à augmenter le poids des corps flottans exprimé par p, & la *seconde* maniere est de diminuer le tems t; cette seconde maniere a besoin de quelque explication.

Supposons, comme dans la seconde remarque $\pi = 56$, $p = 145\frac{5}{61}$, $t = \frac{5}{6}$, & on aura $s = 4$ pieds, pendant que S sera $= 6$ pieds; mais si on faisoit $t = \frac{5}{12}$, on trouveroit $s = 1$ & $S = 3$, & l'effet inutile ne feroit plus que le tiers de l'effet utile & essentiel. Mais on dira que de cette façon, les palades se succédéroient avec trop de rapidité, & qu'au lieu de 24 il en faudroit 48 dans une minute; à cette objection je réponds, que cela n'est point nécessaire; car, comme nous entendons par t le petit tems, pendant lequel l'extrêmité de la rame reste appuyée contre chaque corps flottant, il n'y a qu'à supposer les corps flottans plus serrés, de maniere à pouvoir appuyer à chaque palade successivement contre deux corps flottans. Ainsi notre seconde maniere de diminuer l'effet inutile consiste proprement à changer dans un même coup de rame le plus souvent qu'il est possible de corps flottans. Si par un seul coup de rame on poussoit successivement dix corps flottans, l'effet inutile deviendroit par-là dix fois plus petit, que si on employe tout le coup de rame à pousser un seul corps, parce que chacun des dix corps ne recevra que la centieme partie de force vive.

XLI.

M. Bernoulli expoſe à la fin de ſon Hydrodynamique une idée ſinguliere de voguer ſans rames ; elle conſiſte à pomper des eaux pour les laiſſer écouler enſuite vers la pouppe, ſi M. Bernouilli avoit examiné la choſe ſuivant nos principes, il auroit jugé comme moi, qu'il faut attendre moins d'effet du travail des hommes qui pompent, que de ceux qui rament ; car en adoptant toutes les proportions qu'il trouve les plus avantageuſes, je remarque que tous les effets inutiles ſont au moins trois fois auſſi grands que l'effet utile, de ſorte que l'effet utile n'eſt que le $\frac{1}{4}$ de l'effet entier, il y auroit donc $\frac{3}{4}$ de perte, pendant que nous n'avons trouvé que $\frac{144}{260}$ de perte ſur la galere (§. 17.), en ſuppoſant $n = 16$, & $\frac{187\frac{1}{2}}{260}$ (19), en ſuppoſant avec M. Bouguer $n = 10$. Il faut cependant avouer, qu'on donneroit à la galere preſque autant de vîteſſe en pompant, qu'en ramant ; & je ſuis ſurpris que M. Bernouilli, après pluſieurs poſitions, qu'il ne pouvoit faire qu'avec une certaine eſtime, ait pu ſi bien former la même concluſion finale. Je ne ferai donc aucun uſage dans ma ſeconde partie de cette nouvelle idée.

XLII.

On ſera peut-être ſurpris de voir, que dans tout le corps de cette premiere partie, je n'aie rien dit ſur la longueur & les proportions les plus avantageuſes des rames ; c'eſt que ſuivant nos principes, la longueur abſolue, & la proportion de la partie extérieure à l'intérieure ſont par elles-mêmes indifférentes, puiſque faiſant abſtraction de l'inertie des rames, & de la trop grande obliquité dans le mouvement des rames trop courtes, il y a toujours la même proportion entre l'effet utile & inutile, quelles que soyent les longueurs des parties extérieures & intérieures des rames. Il n'y a dans ce choix aucune économie essentielle à observer, & toutes les considérations qu'on doit faire sur cette question ne sauroit tendre qu'à éviter quelques inconveniens accidentels qui surviennent, les uns aux rames trop courtes, & les autres aux rames trop longues; je ne m'étonne donc pas, que ceux qui ont traité cette question l'ayent décidée tout différemment les uns des autres. J'aurai occasion, dans la seconde Partie, de faire sur ce sujet quelques réflexions passageres.

SECONDE PARTIE.

I.

L'ACADÉMIE propose de trouver la maniere la plus avantageuse de suppléer à l'action du vent sur les grands vaisseaux, soit en y appliquant des rames, soit en y employant quelqu'autre moyen que ce puisse être. J'espere bien qu'un bon usage de nos principes nous apprendra ce que cette illustre Compagnie demande; mais je crois devoir prévenir le lecteur, que le plus grand effet possible qu'on puisse se promettre du travail des hommes étant fort borné, la maniere la plus avantageuse de suppléer à l'action du vent sur les grands vaisseaux par le travail des hommes pourroit facilement paroître assez defectueuse à en juger autrement que par nos principes. Je me propose donc avant toutes choſes d'examiner, quelle eſt la plus grande vîteſſe poſſible qu'un certain nombre d'hommes puiſſent donner à un grand vaiſſeau donné.

II.

Pour me conformer davantage à l'intention de l'Académie, je m'attacherai aux vaiſſeaux du premier rang, & je ſuppoſerai, qu'un tel vaiſſeau a une réſiſtance égale à celle d'un plan de 150 pieds quarrés. C'eſt ainſi que M. Bouguer détermine ce plan dans ſon Traité du Navire, pag. 419; non ſur une ſimple eſtime, comme il a fait par rapport aux galeres, mais par une méthode qui ne pouvoit guere tromper ce grand homme auſſi parfaitement inſtruit de tout ce qui pouvoit contribuer à rendre cette détermination plus exacte. Il n'y a donc qu'à ſuppoſer $n = 150$ dans l'équation générale que nous avons donnée au §. 14. de la premiere partie ſçavoir :

$$c = \sqrt[3]{\frac{360\,N}{7n}}$$

& nous aurons $c = \sqrt[3]{\frac{12}{35}N}$, qui nous marque quel eſt le nombre de pieds c, que le vaiſſeau peut faire dans une ſeconde de tems par le travail ordinaire d'autant d'hommes qu'il y a d'unités en N, en ſuppoſant tout leur travail utilement employé. Cette vîteſſe n'eſt donc poſſible que dans la théorie pure, & plus on s'en approchera, plus la maniere de voguer ſera parfaite.

III.

Si les hommes, au lieu d'un travail ordinaire, ſoutenable pendant huit heures par jour, vouloient faire un travail forcé, tel qu'ils puiſſent ſoutenir tout au plus une demi-heure de ſuite, ils pourroient alors faire un effet double à-peu-près, & ils augmenteroient la vîteſſe du vaiſſeau preſque en raiſon de 1 à $\sqrt[3]{2}$, ou plus exactement en raiſon de 1 à $\sqrt[3]{\frac{175}{92}}$; voyez la premiere & la quatrieme expérience du §. 21. de la premiere partie, & la note (*b*) du §. 22; on aura donc en ce cas $c = \sqrt[3]{\frac{105}{161}}\, N$. Sur ce deux équations, qui expriment les plus grandes vîteſſes poſſibles, tant pour le travail ordinaire, que pour le travail forcé, j'ai conſtruit la Table ſuivante,

Table

Table fondamentale des vîtesses possibles d'un vaisseau du premier rang.

Nombre d'hommes employés à la navigation.	Vîtesses possibles entieres pour un travail ordinaire & durable.	Vîtesses possibles entieres pour un travail extrêmement forcé.
10	1, 50 pieds par seconde	1, 86 pieds par seconde
20	1, 90	2, 35
30	2, 17	2, 69
40	2, 39	2, 96
50	2, 58	3, 19
60	2, 74	3, 39
70	2, 88	3, 57
80	3, 01	3, 72
90	3, 13	3, 87
100	3, 25	4, 03
120	3, 45	4, 27
140	3, 63	4, 49
160	3, 80	4, 70
180	3, 95	4, 89
200	4, 09	5, 06
220	4, 22	5, 22
240	4, 34	5, 37
260	4, 46	5, 51
280	4, 57	5, 65
300	4, 68	5, 79
350	4, 93	6, 10
400	5, 16	6, 38
450	5, 36	6, 63
500	5, 55	6, 86
550	5, 73	7, 09
600	5, 90	7, 31
650	6, 06	7, 50
700	6, 21	7, 69
800	6, 50	8, 04
900	6, 76	8, 37
1000	7, 00	8, 68

Cette Table nous apprend quelle vîtesse un certain nombre d'hommes pourroient donner à un vaisseau du premier rang, soit par un travail ordinaire & durable, soit par un travail forcé, en supposant qu'il fût possible de mettre à profit tous leurs travaux sans la moindre perte. Je m'assure qu'on trouvera sans difficulté, dans ces vîtesses de l'une & de l'autre espece, tout cet air de vérité qu'on peut attendre sur ces sortes de matieres, quand on ne considere la Table, que depuis environ 200 hommes jusqu'à 1000; mais cette apparence de vérité se perd peu-à-peu, à mesure qu'on diminue le nombre d'hommes, elle s'évanouit enfin entiérement, & prend tout l'air d'une fausseté manifeste. En effet, il sera bien difficile à ceux qui n'auront pas compris toute la force de nos principes, de se persuader qu'il soit possible, suivant notre Théorie, à dix hommes de donner à un vaisseau du premier rang une vîtesse à faire un pied & demi par seconde par un travail ordinaire, & une vîtesse à faire $1\frac{6}{7}$ pieds par un travail forcé; ils se récrieront contre ces énormes vîtesses pour un si petit nombre d'hommes, & laisseront-là toute cette théorie; j'aurois peut-être été tenté de donner une autre tournure à mes pensées, si j'avois pû quitter pour un moment cette haute opinion que j'ai de mes Juges. Rassuré par leurs lumieres, je ne crains point d'avouer, que ce sont précisement ces réflexions qui me paroissent les plus favorables à nos idées. J'espére qu'on en portera la même opinion après qu'on aura vu les changemens que l'action de ramer demande par la Table des vîtesses que nous venons de donner.

V.

L'objet de cette Table n'est qu'un être de raison, auquel on n'atteindra jamais, mais qui doit nous guider dans nos recherches, & duquel on approchera d'autant plus, qu'on employera plus utilement le travail des hommes. La table suppose un travail entiérement utile, mais elle prendra une toute autre face aussitôt que nous considérerons la chose autrement qu'*in abstracto*, & que nous appliquerons notre théorie à un travail déterminé, duquel nous connoissons déja les effets pour de certains cas. Choisissons ici l'action de ramer ordinaire, envisageons donc notre grand vaisseau de premier rang comme une grande galere, sur laquelle les hommes puissent ramer aussi commodement qu'ils le font sur les galeres ordinaires, on conviendra que c'est ici une supposition bien libérale & avantageuse, & on seroit sans doute assez content, si quelqu'un indiquoit une maniere de faire aller les grands vaisseau sur mer si peu défectueuse. Voyons donc quelles vîtesses réelles on donneroit par ce travail au grand vaisseau en question.

VI.

J'imiterai sur ce grand vaisseau toutes les circonstances que nous avons remarquées sur la galere. La surface réunie de toutes les pales sur la galere étoit de 130 pieds quarrés, ce qui fait la moitié d'un pied quarré pour chaque homme; c'est pourquoi nous donnerons pareillement la moitié d'un pied quarré pour pale à chaque homme sur le vaisseau. Nous avons ensuite réduit sur la galere les 130 pieds quarrés à 36 pieds quarrés (Part. 1. §. 29.), qui seroient poussés contre les eaux, sans aucune interruption, & tout à fait directement. Ce n'est donc plus que $\frac{36}{260}$ pieds quarrés de pale pour chaque homme, mais considérée cemme agissant sans interruption, & nous supposerons la même chose pour les vaisseaux du premier rang. Si le nombre des rameurs eſt $= N$, on aura $\frac{16}{260} N$, pieds quarrés, qui pouſſent continuellement les eaux en arriere pour avancer le vaiſſeau. C'eſt ce plan que nous avons nommé S, au §. 27 de la premier Partie : il eſt d'autant plus petit qu'il y a moins de rameurs, & nous avons démontré aux §§. 26 & 27, que plus ledit plan eſt petit, plus la perte du travail des rameurs eſt grande. Voilà pourquoi les vîteſſes de la table du §. 3, excédent de beaucoup les vîteſſes réelles qu'un petit nombre de rameurs peuvent donner au grand vaiſſeau; cependant on comprendra aſſez, qu'il n'eſt pas abſurde de dire que dix hommes puiſſent donner à un vaiſſeau du premier rang une vîteſſe à faire un pied & demi par ſeconde; on n'a qu'à s'imaginer ce vaiſſeau attaché à un poteau par une longue corde, que dix hommes tireroient à ſoi; le vaiſſeau mu avec ladite vîteſſe ſouffriroit une réſiſtance d'environ 400 livres ſuivant la théorie commune ſur la réſiſtance des fluides, ainſi le travail de chaque homme ne conſiſteroit qu'à ſurmonter une réſiſtance de quarante livres, avec la vîteſſe d'un pied & demi par ſeconde, ce qui fait préciſément le travail naturel d'un homme. Si par une telle manœuvre les dix hommes ne pouvoient donner au vaiſſeau ladite vîteſſe, ce ſeroit une marque infaillible, que la théorie ſur la réſiſtance des fluides, s'écarte ſenſiblement de la vérité pour les grands corps mus avec peu de vîteſſe, cela changeroit bien les calculs à faire, mais non pas nos principes, ni les maximes que nous en tirerons pour employer le travail des hommes à la navigation avec plus de profit. Il eſt donc viſible, que ſi les vîteſſes que la Table marque pour un petit nombre d'hommes paroiſſent d'abord exceſſives & même abſurdes, ce n'eſt que parce qu'on conſidére ces hommes ſur le pied d'autant de rameurs, & nous allons voir qu'il s'en faut de beaucoup qu'un pareil nombre de rameurs puiſſe donner au vaiſſeau toute la vîteſſe poſſible.

VII.

Pour connoître à préſent la vîteſſe réelle de notre grand vaiſſeau produite par un nombre de rameurs quelconque N, nous nommerons E, l'effet utile de ces rameurs, & nous aurons, en vertu des § §. 27 & 28, Partie premiere, $E\sqrt{\frac{n}{s}}$ pour cet effet inutile, qui conſiſte dans le mouvement qu'on donne aux eaux par les coups de rame; dans cette expreſſion $E\sqrt{\frac{n}{s}}$ il faut pour un vaiſſeau du premir rang faire $n = 150$ pieds quarrés, & $S = \frac{36}{260} N$ (§. 6. Part. 2.), & de cette maniere ledit effet inutile devient $= \sqrt{\frac{150.\ 260}{36\ N}}$, ou à-peu-près $= \frac{33}{\sqrt{N}} E$; ainſi la ſomme des deux effets eſt $= E + \frac{33}{\sqrt{N}} E$. Outre cette perte exprimée par $\frac{33}{\sqrt{N}} E$, nous avons remarque au §. 31. Part. prem. que l'action de remuer les corps des rames, & de vaincre leur inertie fait encore une perte, laquelle jointe à quelques autres petits défauts peut faire environ le quart de l'effet total, ce qui fait un tiers des deuxdits effets, ou un tiers de $E + \frac{33}{\sqrt{N}} E$; donc la ſomme entiere de tous les effets eſt $= \frac{4}{3} E + \frac{44}{\sqrt{N}} E$. Ainſi l'effet utile eſt à la ſomme de tous les effets comme E eſt à $\frac{4}{3} E + \frac{44}{\sqrt{N}} E$, ou comme 1 eſt à $\frac{4}{3} + \frac{44}{\sqrt{N}}$. Il faut donc diminuer chaque vîteſſe de la Table en raiſon de $\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3} + \frac{44}{\sqrt{N}}\right)}$ à 1, parce que les vîteſſes ſont en raiſon des racines cubiques de travaux utilement employés (§. 13. Part. prem.) ou eſſentiellement requis, & que la Table ſuppoſe le travail entier utilement employé, ce qui donne cette analogie ; comme la racine cubique de l'effet total, ou $\sqrt[3]{(\frac{4}{3} E + \frac{44}{\sqrt{N}} E)}$ eſt à la racine cubique de l'effet utile, ou $\sqrt[3]{E}$, ainſi chaque vîteſſe de la Table fondamentale a la vîteſſe réelle, que les rameurs donneront au vaiſſeau ; ainſi on déterminera les vîteſſes réelles, en diviſant chaque vîteſſe de la Table fondamentale, par le nombre $\sqrt[3]{(\frac{4}{3} + \frac{44}{\sqrt{N}})}$. Comme je ne doute pas que ces nouvelles vîteſſes ne repondent aſſez bien aux expériences qu'on pourra faire, je ne me ſuis point fait de peine de conſtruire ſur cette regle la Table ci-jointe ; mais on ſe ſouviendra que cette Table n'eſt faite que pour les vaiſſeaux du premier rang, dont les réſiſtances répondent à un plan de 150 pieds quarrés, qu'on ſuppoſe pour chaque rameur la moitié d'un pied quarré de pale, & que ces rameurs travaillent de la même maniere, que ſur les galeres, quoique cette derniere ſuppoſition ne ſoit pas fort eſſentielle ; voici cette nouvelle Table.

Table des vîtesses réelles qu'on peut donner à un vaisseau du premier rang, par le moyen des rames.

Nombre de rameurs.	Vîtesses pour un travail ordinaire & durable.	Vîtesses pour un travail extrêmement forcé.
10	0, 60 pieds par seconde.	0, 75 pieds par seconde.
20	0, 85	1, 05
30	1, 03	1, 27
40	1, 18	1, 46
50	1, 31	1, 62
60	1, 43	1, 77
70	1, 54	1, 91
80	1, 64	2, 03
90	1, 73	2, 14
100	1, 81	2, 24
120	1, 96	2, 43
140	2, 10	2, 60
160	2, 23	2, 76
180	2, 36	2, 92
200	2, 48	3, 07
220	2, 59	3, 21
240	2, 69	3, 34
260	2, 79	3, 46
280	2, 89	3, 58
300	2, 98	3, 69
350	3, 19	3, 95
400	3, 39	4, 20
450	3, 57	4, 43
500	3, 73	4, 63
550	3, 88	4, 82
600	4, 03	5, 00
650	4, 17	5, 17
700	4, 30	5, 34
800	4, 55	5, 65
900	4, 79	5, 94
1000	5, 01	6, 21

VIII.

Cette Table corrigée sur la précédente, conformément à nos principes, & à nos calculs sur la perte, que les rameurs font de leur travail en ramant sur les galeres, ne me paroît plus rien renfermer qui puisse blesser l'estime naturelle qu'on peut se former là-dessus. On voit à présent par cette Table, que dix rameurs ne pourront plus donner au vaisseau qu'une vîtesse à faire $\frac{3}{5}$ de pieds par seconde, ou environ sept pouces par un travail naturel, & neuf pouces par un travail forcé. Ces deux vîtesses sont $\frac{2}{5}$ des vîtesses totales correspondantes, mais les effets utiles ne sont, que la quinzieme partie des effets totaux, d'où l'on voit la grande perte que les dix rameurs font de leurs travaux. Mais lorsqu'il y a mille rameurs sur le vaisseau, ils lui donnent les $\frac{5}{7}$ de la vîtesse totale, & ils employent plus que le $\frac{1}{3}$ de leurs travaux utilement; ces grandes différences proviennent uniqument de ce qu'en augmentant le nombre des rameurs, on augmente en même tems la surface réunie de toutes les pales, c'est aussi-là la raison pourquoi les quatre rameurs dans la cinquieme expérience du §. 21. Part. prem. ont donné aux bateaux rélativement aux deux rameurs dans la premiere expérience du même §, une vîtesse un peu plus grande, que ne demande le Théorême du §. 13. Part. prem. Voyez la note (*c*) du §. 22. Part. prem.

On voit enfin par chacune des deux Tables, combien peu de profit on fait en augmentant de beaucoup le nombre des rameurs, puisqu'une différence de neuf-cent à mille rameurs ne fait qu'environ trois pouces de différence dans les vîtesses.

IX.

IX.

Je m'en rapporte à présent à ceux qui pourront juger de nos résultats par leur propre expérience : ils n'auront pas manqué surtout de remarquer à-peu-près les vîtesses des grands vaisseaux qu'on remarque sur une chaloupe, ou sur une galere, si nous faisons abstraction de la petite résistance, qui survient en attachant la chaloupe au vaisseau, & même de celle qui survient en y attachant la galere ; notre Table nous enseigne que dix hommes sur une chaloupe pourroient remarquer le vaisseau par un travail naturel, avec une vîtesse de sept pouces par seconde, & vingt hommes avec une vîtesse de dix pouces. J'aurois souhaité sur tout, de trouver là-dessus quelques expériences ou observation dans quelque auteur ; je présume, que ces vîtesses sont encore un peu trop grandes à cause d'une autre résistance, à la quelle nous navons par fait attention, & qui ne sauroit presque se manifester que dans les très-petites vîtesses ; c'est l'adhésion des eaux contre la carene du vaisseau, qui vraisemblablement ne croît qu'en raison simple des vîtesses, pendant que la résistance essentielle des fluides croît en raison du quarrée des vîtesses ; mais comme je ne fais ces remarques, que pour faire voir tout l'usage de nos principes, & que dans l'application il ne s'agit pas des petites vîtesses qu'un petit nombre de rameurs peuvent donner aux grands vaisseaux, nos conclusions ne seront pas beaucoup changées par l'adhérence des fluides, quand même l'expériencs démontreroit, qu'elle est assez considérable dans les mouvemens très-lents. La derniére Table nous apprend encore que 260 hommes, sur une galere pourroient remorquer un vaisseau du premier rang avec une vîteſſe d'environ deux pieds neuf pouces par ſeconde, ou même avecune vîteſſe de preſque trois pieds $\frac{1}{2}$ avec un travail extrêmement forcé; ces deux vîteſſes doivent pourtant être diminuées en raiſon de $\sqrt[3]{11}$ a $\sqrt[3]{10}$, parce que la galere attachée au vaiſſeau augmente la réſiſtance à-peu-près en raiſon de 11 a 10, après leſquelles diminutions le vaiſſeau ne feroit plus remorqué, qu'avec une vîteſſe d'environ deux pieds huit pouces, ou en faiſant force de rames, avec une vîteſſe d'environ trois pieds quatre pouces. Je ne doute pas que ces vîteſſes ne ſe confirment aſſez bien par l'expérience, ce qu'on trouvera peut-être de moins doit encore être attribué a l'adhérence des eaux, laquelle cependant, je préſume ne pouvoir plus être guerre conſidérable en ce cas.

X.

Je fais avec plaiſir toute les remarques, qui pourront ſervir de pierre de touche à notre théorie, & comme il eſt faute d'eſſayer les vîteſſes d'une galere ſemblable à celle dont parle M. Chazelles pouſſée ſucceſſivement par 10, 20, 30, juſqu'à 260 rameurs, en obſervant ſimplement les tems employés à parcourir un même eſpace, je mettrai ici encore la formule, qui marque généralement combien de pieds la galere parcourra dans une ſeconde de tems. Pour trouver cette formule, on n'a qu'à faire tout ce que nous avons fait dans cette ſeconde partie avec cette ſeule différence qu'au lieu d'avoir ſuppoſé $n = 150$ pieds quarrés, il faut ici faire $n = 16$ pieds quarrés, là-deſſus on trouvera pour le travail ordinaire,

$$\sqrt[3]{\frac{405\,N}{168 + 112\sqrt{\frac{260}{N}}}}$$

& pour le travail forcé il faudra multiplier cette formule par 1, 24. Si l'Académie, aux heureux auspices de laquelle la République des Lettres est redevable de toutes les grandes découvertes de notre siécle, trouvoit mes réflexions assez dignes de son attention pour engager quelque Capitaine de galere entendu à faire ces expériences, j'oserois me flatter, qu'elles s'accorderoient assez, avec ladite formule, pour constater entiérement toute notre théorie; je trouve, par exemple, que dix rameurs en travaillant avec la même fatigue, qu'ils le font lorsque toute la chiourme fait parcourir à la galere $7\frac{1}{5}$ pieds par seconde, pourront lui donner la vîtesse 1, 76; il n'y a que la force de l'adhérence des eaux qui pourra un peu diminuer cette vîtesse. Mais il est tems que nous nous approchions de notre sujet principal.

XI.

Supposons un certain équipage destiné au travail, comme par exemple 500 hommes. La Table fondamentale nous fait voir, que toute la vîtesse possible du vaisseau du premier rang sera alors de 5, 55 pieds, pour un travail ordinaire & durable, ou de 6, 86, pour un travail extrêmement forcé. C'est donc-là une vîtesse de laquelle on peut bien tâcher d'approcher, mais qu'il ne faut pas esperer d'atteindre entiérement. On conviendra même que ce sera bien assez, que d'obtenir le même effet sur les grands vaisseaux, qu'on obtient par l'usage des rames sur les vaisseaux de bas-bord. Cependant les 500 hommes ne pourront donner alors même au vaisseau qu'une vîtesse de 3, 73, 4, 63; & nous avons vu, que les deux sources principales de ce défaut consistent dans l'insuffisante grandeur des pales, & dans l'inertie des rames: ainsi toute la perfection qu'on peut donner à l'usage commun des rames consiste uniquement à augmenter la surface des pales autant qu'il est possible sans tomber dans de nouveaux inconveniens, & à diminuer l'inertie des rames ; on donne aux pales des grandes rames cinq pieds de longueur, ce seroit peut-être outrer la chose que de les faire plus longues, mais j'avoue que je ne vois pas assez, pourquoi on ne leur donne qu'un demi-pied de largeur, il me semble plutôt, qu'il n'y auroit aucun inconvenient considérable à leur donner un pied de largeur; cela supposé, car j'avoue que c'est avec peu d'assurance que je touche aux choses qu'un si long & universel usage à établies ; voici les avantages qu'on en rétireroit. Sans rien changer aux pressions que les rameurs exercent contre les rames, ni aux tems qu'ils employent, tant aux palades entieres qu'aux coups des pales contre les eaux, ou aux saccades, les agitations des rames en deviendroient plus petites, & en même tems l'inertie des rames en auroit moins d'effet, on ménageroit doublement le travail, & la perte en deviendroit plus petite : quand a l'inertie des rames, on en diminuera les effets en choisissant le bois le plus fort, & le plus leger, & en ne la chargeant dans aucun endroit inutilement de matiere, il ne faut pas lui donner près de l'apostis plus d'épaisseur qu'il en faut pour pouvoir soutenir sans se casser un poids d'environ 100 livres appliqué au milieu de la pale; depuis l'apostis il faut diminuer les épaisseurs, de maniere que les cubes des diametres soient proportionels aux distances depuis le milieu de la pale, car les forces des cylindres d'une même matiere sont à-peu-près en raison triplée des diamétres. C'est aussi suivant cette regle, qu'il faudroit diminuer les épaisseurs depuis l'apostis vers l'autre bout de la rame; mais comme de cette façon le défaut de l'équilibre ſeroit trop grand je voudrois qu'on remédiât à ce défaut en chargeant de plomb la partie interieure de la rame, ou ſon manche tout près de l'apoſtis.

XII.

C'eſt peut-être la ſeule raiſon de ne point ſurcharger les rames de matiere, ſur tout aux pales, le mouvement deſquels eſt le plus rapide qui a empêché les mariniers de donner plus de largueur aux pales; ſi c'étoit-là la raiſon, je voudrois qu'on tentât tout avant que de renoncer à un avantage ſi eſſentiel, peut-être vaudroit-il mieux de ſubſtituer aux pales de bois des quadres, ou bordures de fer avec de la groſſe toile étendue deſſus, on diminueroit par-là en même tems un autre inconvenient, qui eſt que l'équilibre dans les deux parties de la rame eſt trop dérangé par les immerſions & émerſions alternatives des pales, ce qui emporte certainement une force vive, qu'on perd entiérement, je voudrois même que la toile fût aſſez amplé pour former un eſpece de ſac, pendant la ſaccade, qui pût contenir trois ou quatre pieds cubes d'eau. Ces trois ou quatre pieds cubes d'eau tiendroient lieu de ces corps flottans, dont j'ai parle dans notre premiere Partie aux § § 38, 39 & 40. L'inertie de cette maſſe d'eau qu'il faut mettre en mouvement augmente conſidérablement la réſiſtance contre les pales, ce qui doit toujours faire l'objet principal de ces recherches. En ce cas il faudroit faire enſorte que ces ſacs ſe vuidaſſent parfaitement ſur la fin de la ſaccade, & il ſeroit bon dimaginer quelqu'obſtacle pour chaque rame, qui l'arretât bruſquement à la fin de la ſaccade, & jettât en même tems la pale hors de l'eau; un tel choc jetteroit encore les eaux vers la pouppe,

& ces eaux par leur réaction donneroient, en ce moment un coup vigoureux au navire.

XIII.

J'ai n'ai fait ces remarques passageres, que pour suivre le fil de nos principes. Je n'ignore pas qu'on ne doit pas esperer de pouvoir appliquer avec succès les rames ordinaires sur les grands vaisseaux. Voici comme en parle M. Bouguer dans son excellent Traité du Navire, pag. 118. » Jusques à présent (dit-il) on n'a » appliqué les rames avec succès qu'aux seuls navires » de bas-bord, quoiqu'on ait senti combien, il seroit » important de pouvoir les appliquer aussi dans certains; » cas aux vaisseaux proprement dits, la hauteur de ces » derniers a rendu inutiles les différentes tentatives » qu'on a faites de tems en tems pour tâcher de leur » procurer ce secours. On a principalement insisté sur » ce que les rames fussent tournantes, comme les rames » des moulins à eau, mais comme on n'a pas pu leur » donner assez de vîtesse, elle n'ont point eu d'effet, » ou n'en ont eu que très-peu.

L'idée des rames tournantes, comme les aîles des moulins à eau, est trop naturelle, pour ne pas se présenter d'elle-même. M. Chazelles en parle aussi dans les Mémoires de l'Académie de l'année 1702. Cela m'engage à examiner tout le succès qu'on peut s'en promettre; ce sera ensuite aux mariniers de voir s'ils voudront se contenter d'un tel succès.

XIV.

Il faut d'abord examiner qu'elle est la surface entiére de toutes les ailes qui poussent sans interruption les eaux directement en arriére, si les parties de chaque aile ont une obliquité, & une inégalité de vîtesse sensible, on pourra toujours par un juste calcul substituer aux ailes une surface plane équivalente poussée perpendiculairement contre les eaux. Je nommerai cette surface s, comme nous avons fait ci-dessus, & la lettre n, exprimera de même le plan, dont la résistance soit égale à celle de la proue du vaisseau. Là-dessus, je dis que sans faire attention à la maniere de mettre en mouvement les rames tournantes, qu'on pourra varier à l'infini, on aura toujours par cette manœuvre deux effets, l'un utile & essentiellement requis, l'autre inutile & simplement accessoire par la nature de la manœuvre, & cela entiérement dans le même sens que nous l'avons démontré au sujet des rames ordinaires Ainsi l'effet utile étant encore E, l'autre sera nécessairement E, $\sqrt{\frac{n}{s}}$ (§ § 27 & 28. Part. prem.). C'est-là un principe constant & infaillible ; Il faudroit donc donner aux ailes une surface infinie, si on vouloit éviter entiérement cette perte.

La plupart de ceux qui ont écrit sur cette matiere, n'ont pas assez approfondi ce quelle renferme en quelque façon de Méthaphysique. Ils ont bien vu que la pression totale des ailes contre les eaux, doit être égale à la résistance du vaisseau, & qu'on peut produire telle pression que l'on se propose, moyenant une surface quelconque ; que plus cette surface est petite, plus il faut lui donner de vîtesse ; ils ont donc voulu reparer par la vîtesse, ce qu'ils ne pouvoient obtenir commodement par la grandeur de la surface ; mais il semble qu'ils n'ont pas fait assez attention, qu'il coûte plus de travail pour obtenir une même pression moyennant une petite surface que moyennant une grande. Il est même à remarquer que ce surplus de travail devient essentiel & inévitable aussitôt qu'on s'est déterminé à une certaine surface indiquée par s, & que ce seroit tenter l'impossible d'y vouloir rémédier autrement qu'en augmentant cette surface.

XV.

Nous avons vu au § 29. Part. prem., que cette perte faisoit les $\frac{2}{3}$ du travail utile pour la galere en y supposant $\frac{n}{s} = \frac{16}{36}$. Outre cette perte on en fait quelques autres sur la galere par l'usage ordinaire des rames, leur somme peut aller à un quart du travail total; Il est vrai qu'à examiner les sources que nous en avons indiquées, nous ne voyons rien de semblable dans les rames tournantes. Leur inertie n'est plus d'aucun empêchement aussitôt que ces rames, ont acquis leur plein mouvement il n'y a ici non plus aucun défaut d'équilibre qui puisse causer quelque travail inutile, mais il y aura en échange des frottemens qui ne se trouvent pas dans une machine aussi simple que celle d'une rame ordinaire, outre cela les impulsions des ailes contre les eaux se feront naturellement avec plus d'obliquité vers le commencement & la fin de leurs immersions, que celles des pales. Nous supposerons donc ces dernieres petites pertes de part & d'autre égales, ou plutôt nous en ferons abstraction en ne considérant que la perte essentiellement attachée à une surface déterminée s,

XVI.

Après ces remarques nous verrons aussitôt quel effet on peut se promettre tout au plus sur les suppositions que fait M. Chazelles pag. 100, des Mémoires de l'Academie 1702. » On ne doit pas douter (dit-il)
» que

» que la force de cent hommes par exemple, pouſſant » continuellement un volume d'eau de 18 pieds quar» rés de chaque côté, ne mette bientôt en mouve» ment le plus gros vaiſſeau, puiſqu'une ſimple cha» louppe ſe fait ſentir &c. « Si nous faiſons donc, conformément aux ſuppoſitions de M. Chazelles $S = 36$ & $n = 150$, comme il convient pour les plus gros vaiſſeaux, dont il parle, il eſt impoſſible que le travail inutile ſoit moindre que $E\sqrt{\frac{150}{36}}$, ou que $2,04\ E$. Ainſi ſur 304 hommes il n'y auroit que 100, d'utilement employés, & le travail de 204 hommes ſeroit entiérement perdu, pendant que ſur une galere pouſſée par 260 hommes l'effet inutile n'étant que $E\sqrt{\frac{16}{36}}$, ou $\frac{2}{3}E$, on peut dire dans le même ſens, que du travail de cinq hommes, on ne perd que celui de deux. Cette grande diſproportion fait voir combien cette navigation propoſée par M. Chazelles ſeroit déſavantageuſe & déffectueuſe. Je trouve effectivement, que moyennant les deux roues, qui portent les rames tournantes, cent hommes ne pourroient donner au grand vaiſſeaux dont il eſt queſtion que la vîteſſe marquée dans la Table fondamentale du § 3, qui repond ou nombre de cent hommes multipliée par $\sqrt[3]{\frac{100}{304}}$, c'eſt-à-dire, pour le travail ordinaire $3,25 \times \sqrt[3]{\frac{100}{304}}$, ou $2,24$ pieds par ſeconde, & pour le travail extrêmement forcé $4,03 \times \sqrt[3]{\frac{100}{304}}$, ou $2,77$. Voilà pour les deux cas toute la vîteſſe qu'il eſt poſſible de donner au vaiſſeau ſur les hypothèſes de M. Chazelles. Il eſt vrai que ces vîteſſes ſont ſenſibles, qu'elles vont même juſqu'aux $\frac{2}{3}$ des vîteſſes totales, ou des vîteſſes que cent hommes pourroient donner au vaiſſeau, s'ils ne faiſoient aucune perte de leur travail, mais il eſt vrai auſſi que dans cette hypothèſe, 100 hommes pourroient fournir le même effet, que 304 hommes fourniſſent dans le cas propoſé par M. Chazelles. C'eſt que les pertes des travaux ſont beaucoup plus grandes, que les pertes des vîteſſes, puiſque les travaux utiles ſont en raiſon triplée des vîteſſes réelles. Encore doit-on remarquer, que dans les évaluations que nous venons de faire, nous avons fait abſtraction de pluſieurs autres petites pertes qu'on fera néceſſairement, outre celle que nous avons indiquée qui eſt la principale, & qui eſt ſi eſſentiellement attachée aux hypothèſes, qu'une plus petite perte impliqueroit une contradiction contre les loix de la nature. Je repete ſouvent ces ſortes d'expreſſions de peur qu'on ne confonde les défauts eſſentiellement attachés aux différentes manœuvres, avec ceux qui ne ſont qu'acceſſoires, on ne doit pas eſpérer de diminuer les premiers défauts ſans changer les hypothèſes, mais on peut bien l'eſperer par rapport aux défauts acceſſoires ou accidentels. Je ne crois pas, après ces réflexions & ces évaluations, qu'on s'aviſe d'employer les rames tournantes avec les proportions que M. Chazelles leur donne.

XVII.

Après l'examen que nous venons de faire des ſuppoſitions de M. Chazelles, je vais examiner ce qui ſeroit eſſentiellement requis pour tirer des rames tournantes ſur un vaiſſeau du premier rang autant de profit qu'on obtient par le ſecours ordinaire des rames ſur une galere. Or dans une galere, allant de toutes rames nous avons eu $\frac{S}{n} = \frac{36}{16}$. Il faut donc, pour faire travailler l'équipage du grand vaiſſeau avec un avantage égal, rendre la valeur de $\frac{S}{n}$ auſſi $= \frac{36}{16}$, comme nous ſuppoſons pour un vaiſſeau du premier rang $n = 150$, nous aurons $S = 337\frac{1}{2}$ pieds quarrés. Il faudroit donc de néceſſité abſolue faire enſorte, que les rames tournantes présentassent continuellement aux eaux une surface de $337\frac{1}{2}$ pieds quarrés. Une telle surface seroit requise sans aucune interruption, quand même elle seroit poussée contre les eaux dans une direction parfaitement parallele à la quille, ce qui cependant n'est pas, & la nature du mouvement circulaire dans un plan vertical demanderoit cette surface encore plus grande. De-là nous voyons qu'il faudroit sur notre grand vaisseau dix-neuf ou vingt moulins, que M. Chazelles demande. Si on faisoit ces moulins deux fois plus grands, il en faudroit encore dix, & quel seroit enfin le succèes de ces énormes tentatives; ce seroit de se procurer autant d'avantage, qu'en ont les rameurs sur une galere, qui va à toutes rames; supposons encore qu'on se soit procuré tout cet avantage, & voyons qu'elle seroit alors la vîtesse que 500 hommes pourroient donner au vaisseau. Je dis que pour trouver cette vîtesse, il faut dans la Table fondamentale du § 3. multiplier les deux vîtesses qui répondent au travail de 500 hommes par $\sqrt[3]{\frac{3}{5}}$, parce que sur cinq parties de travail il y en auroit trois d'utilement & deux d'inutilement employées § 29. Part. prem., & cette regle donne la vîtesse du vaisseau par le travail ordinaire des 500 hommes $= 4, 68$ pieds par seconde, & pour le travail forcé $= 5, 78$ pieds. Nous avons cependant supposé dans ces résultats, qu'il ne se fait aucune autre perte, que celle qui provient de l'insuffisante étendue de la surface totale S; ainsi ces vîtesses seront encore trop grandes, & on ne pourra jamais y atteindre entiérement, si les frottemens & quelques autres empêchemens emportoient encore le quart de travail entier; il faudroit multiplier lesdites vîtesses par $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$, après quoi on auroit pour le travail ordinaire la vîtesse 4, 25, & pour le travail forcé 5, 25; voilà les vîtesses finales qu'on est fondé à attendre de tout cet appareil ; il eſt vrai que ces vîteſſes ſont conſidérables, & qu'elles ſont plus que les $\frac{1}{4}$ des vîteſſes poſſibles totales, je laiſſe juger les gens de marine, ſi on doit ſe donner ſur un grand vaiſſeau tout l'embarras que ces moulins cauſeroient, & ces embarras pourroient bien être beaucoup plus grands, qu'il ne paroiſſent d'abord. Si cependant on ne vouloit pas rénoncer à ces rames tournantes, je ſerois d'avis qu'on ſe relâchât un peu ſur la grandeur de la ſurface S, quand même la perte du travail en deviendroit plus grande, & qu'on ſe procureroit l'avantage que nous fournit l'idée éxpoſée au § 38. Part. prem., en faiſant que les moulins, au lieu de pouſſer ſimplement les eaux par les ailes, puiſent en même tems de grandes maſſes d'eau qu'ils emportent à la fois. Il y auroit enſuite un grand nombre de regles à obſerver pour occuper les hommes par un eſpece de travail qui leur ſoit naturel, tel qu'eſt celui d'exercer une force d'environ vingt livres avec une vîteſſe d'environ trois pieds par ſeconde, mais j'avoue que je ne fais pas aſſez grand cas des rames tournantes pour entrer dans toutes ces diſcuſſions.

XVIII.

Tâchons plutôt de trouver quelques nouveaux expédiens moins embarraſſants & plus profitables, mais ſans perdre jamais de vue les principes que nous avons ſi bien établis. S'il ne faut pas eſpérer de pouvoir ſe ſervir des rames ordinaires ſur les vaiſſeaux de haut-bord, il ne faut pas pour cela renoncer entiérement à ce principe de mouvement ; il n'eſt pas difficile d'imaginer pluſieurs manieres de ſe ſervir commodement de rames ſur les grands vaiſſeaux, en leur donnant une autre façon. En voici une qui me paroît aſſez commode & utile, je n'en ferai qu'une ébauche fort

légere, *A B C* eſt une piece de bois perpendiculaire Fig. III.
à la quille, & d'abord horizontale, qui repoſe au point *B* ſur l'apoſtis: *C D* repréſente une barre de fer mobile autour du point *C*, moyennant une charniere dans un plan vertical; à cette barre on affermiroit la pale *m n p q*; au point *E* on attacheroit un ou pluſieurs bouts de corde, par leſquels pluſieurs hommes tireroient la barre de fer vers la pouppe, & pouſſeroient la pale *m n p q* contre les eaux. Voici à préſent comme il faudroit manier cette eſpece de rames; au moment qu'on auroit fini de tirer la pale avec force contre les eaux, & même un peu plutôt, un homme peſeroit au point *A C*, & rétireroit la pale entiérement hors de l'au, ſur quoi la barre & la pale par leur propre poids ſe remettroient dans la poſition verticale, & la paſſeroient même: au moment que ce balancement ſe finiroit, l'homme en *A*, ceſſeroit de peſer ſur *A*, & laiſſeroit par-là replonger la pale dans les eaux, & au même inſtant les hommes recommenceroient à tirer fortement la pale contre les eaux.

XIX.

Il s'en faut ſans doute de beaucoup que cette deſcription ſoit ſuffiſante pour voir en detail tout ce qu'il faudroit faire pour l'exécution de ces nouvelles rames, auſſi n'ai-je prétendu, qu'expoſer ſimplement leur façon d'agir; il y auroit bien de la matiere, ſi l'on vouloit entrer dans tout le détail que cette idée demande; mais je ſuis fermement perſuadé, que ſi on obſerve tout ce que je vois qu'il faut, & que l'on peut faire pour tirer le meilleur parti de l'uſage de ces nouvelles rames, le travail des hommes pourra être plus utilement employé, que n'eſt celui de la chiourme ſur une galere. On pourra placer facilement ſur un grand vaiſſeau cinquante de ces rames, appliquer dix hommes à chacune, & donner vingt pieds quarrés à chaque pale, ce qui feroit en tout 1000 pieds quarrés; & ſi toute la manœuvre ſe faiſoit en deux tems égaux, nous aurions 500 pieds quarrés qui agiroient ſans interruption, pendant qu'il n'en faudroit que 337½ pour ſe procurer autant d'avantage qu'on a en ſe ſervant de toutes les rames ſur une galere. Il eſt vrai qu'ici le travail qu'il faut employer au point *A*, pour retirer chaque fois la pale hors de l'eau eſt en pure perte; mais quand il faudroit employer deux hommes pour cet effet, cette perte ne feroit que la cinquime partie du travail entier; & nous avons vu par raport aux galeres qu'on y perd juſqu'au $\frac{1}{4}$ du travail entier. La plus grande difficulté ſera de placer les hommes, & de les mettre à même de tirer le point *E*, dans une direction horizontale, & perpendiculaire au plan du ſyſtême; il me ſemble qu'on pourra remédier à cet inconvenient, s'il eſt néceſſaire, moyenant des poulies, qu'on trouvera toujours où placer, & qui ſerviront à conduire les cordes là où l'on voudra placer les hommes deſtinés au travail. Cet expédient me paroîtroit aſſez convenable, s'il ne falloit pas craindre les frottemens; ceux qui penſeront là-deſſus comme moi, préféreront peut-être cet autre moyen: au lieu d'attacher au point *E* une corde, par le moyen de laquelle on tire fortement la pale contre les eaux, on pourroit ſe ſervir d'un autre levier *E*, *M*, *N*, dont le point d'appui ſeroit en *M*, & qui entreroit dans l'entre-deux des ponts. Les hommes agiroient ſur le manche *M N*, à-peu-près de la même maniere que les rameurs le font ſur les rames, & ſeroient mis par-là en état de pouſſer fortement les pales contre les eaux par le moyen d'un plat *M E*. Dans cette maniere de ramer, le mouvement du levier *A C* ſe feroit conſtamment dans un plan vertical, & celui du levier $E\ N$, dans un plan horizontal, & ces mouvemens feroient beaucoup plus commodes, que ne font ceux d'une rame fimple fur une galere. Il y auroit fur tout cela un grand nombre d'explications à donner, fi d'abord les lumieres de mes juges, & puis celle des articles, au cas que mes idées euffent merité quelqu'attention favorable, ne m'en difpenfoient.

X X.

Voilà ce qui peut fuffrire fur la perfection de l'ufage des rames, & fur la meilleure maniere de les appliquer aux grands vaiffeaux; mais remarquons que nous n'avons encore confidéré que l'action des rames en tant que les pales font pouffées directement contre les eaux, c'eft-à-dire, dans une direction perpendiculaire à leur plan. Il y a cependant une infinité d'autres mouvemens, qu'on peut donner aux pales pour pouffer les navires, & je fuis furpris que perfonne ne fe foit encore avifé d'en examiner le mécanifme; le mécanifme infiniment diverfifié des différentes fortes de poiffons dans leur action de nager, & même l'exemple des oifeaux, dans leur façon de battre des ailes pour voler, étoient bien propres pour exciter cette Idée. J'ai donc cru, pour fatisfaire entiérement à la queftion de l'Académie, devoir entrer dans cette nouvelle difcuffion. Elle nous fournira une maniere toute nouvelle de voguer, préférable, à mon avis, à tout autre, les rames pourront être appliquées très-commodement aux plus grands vaiffeaux en auffi grand nombre qu'on voudra, fans que les rames s'embarraffent les unes les autres, comme cela arrive même fur les galeres, à moins que la mer ne foit calme.

Mais comme c'eſt ici un ſujet tout nouveau, il nous faut néceſſairement remonter à nos principes, ſans leſquels il me paroît abſolument impoſſible de traiter ces matieres avec aucune préciſion. Rien n'eſt communement plus vague que l'examen des machines qu'on propoſe pour de certains effets, on les réduit à rien quand on a formé l'intention de les réjetter, & on en groſſit les effets à l'infini quand on veut faire valoir ſes nouvelles idées. Mais ſuivant nos méthodes, on n'eſt plus maître de rien, on conſulte la nature, & on eſt obligé de s'en tenir ſimplement & purement à ſa déciſion. Je ne me propoſe point de forcer la nature à nous donner ce qui n'eſt pas en ſon pouvoir; voyons donc ce que nous pouvons nous promettre de l'action oblique des rames

XXI.

Fig. IV. Soit $A\ B$ la quille d'un vaiſſeau, mu avec une vîteſſe C de A vers B dans des eaux calmes; qu'on ſuppoſe en ſuite une pale verticalement plongée dans les eaux, mais obliquement à la quille, cette pale eſt répréſentée par la ligne $C\ D$; ſoit enfin cette pale pouſſée avec une vîteſſe v, de $C\ D$ en $c\ d$, ſous une direction $C\ c$, ou $D\ d$, perpendiculaire au plan vertical de la quille, de maniere que la pale conſerve conſtamment le parallelifme, il eſt clair que de cette façon la pale aura un double mouvement, l'un parallele à $A\ B$ avec une vîteſſe C, qui reſulte du mouvement du vaiſſeau, & l'autre perpendiculaire au premier avec une vîteſſe v; & il faut, avant toutes choſes, examiner quels efforts la pale ſouffrira par la réſiſtance des eaux en conſidérant ce double mouvement. De ces efforts connus, il faudra tirer l'effort utilement employé, pour entretenir le vaiſſeau

vaiſſeau dans ſon mouvement, & enfin le travail requis pour cette nouvelle maniere de voguer. Dans l'application de cette nouvelle théorie il faudra des deux côtés du navire un nombre égal de ces pales obliques, & je ferai voir que toutes ces pales obliques pourront agir ſans aucune interruption ; je répréſenterai la ſomme des pales tout d'un coup par la ſurface dont $c\,D$ fait une ſection horizontale, & j'appellerai cette ſurface S, pendant que le plan qui meſure la réſiſtance du vaiſſeau eſt exprimé par n.

XXII.

Soit à préſent la vîteſſe v, avec laquelle on pouſſe la pale oblique perpendiculairement vers le plan vertical de la quille exprimée par $C\,c$, & la vîteſſe c, avec laquelle tout le ſiſtême avance dans la direction parallele à $A\,B$, exprimée par $C\,m$, ſoit le ſinus total $= r$, le ſinus de l'angle $n\,C\,c = s$, ſon coſinus $= \sqrt{rr - ss} = \varsigma$, là-deſſus il faut réſoudre le mouvement $C\,c$ en $C\,n$, qui eſt inutile, & $n\,c = \frac{\varsigma}{r}\,v$, de même le mouvement $C\,m$ doit être réſolu en $C\,o$, qui eſt inutile, & $o, m = \frac{s}{r}\,c$, par là on voit que la pale eſt pouſſée perpendiculairement contre les eaux en deux ſens directement oppoſés, ſcavoir de n vers c, & de o vers m ; ici il faut voir lequel des deux mouvemens perpendiculaires au plan de la pale prenant ſur l'autre, ſi $n\,c$ eſt plus grand que $o\,m$, la configuration de la ſurface de la pale du côté du point m ſeroit tout à fait indifférente, quand même cette ſurface ne ſeroit pas plane, & ſi le mouvement $n\,c$ étoit plus petit que le mouvement $o\,m$, alors la ſurface qui regarde le point c ſeroit indifférente ; pour notre maniere de naviguer le mouvement $n\,c$ doit toujours être plus grand que ſon mouvement contraire, & enfin $n\,c - o\,m$ exprimera le mouvement perpendiculaire abſolu de la pale contre les eaux; ce mouvement perpendiculaire abſolu eſt donc $= \frac{s}{r}\,v - \frac{s}{r}\,c$: enſuite le quarré de cette vîteſſe, multiplié par la ſurface S, marquera l'effort perpendiculaire des eaux contre la pale, lequel par conſéquent ſera $= \left(\frac{s}{r}\,v - \frac{s}{r}\,c\right)^2 S$. Enfin cet effort perpendiculaire doit pour notre deſſein être encore réſolu en deux preſſions latérales, l'une perpendiculaire au plan vertical de la quille, qui ſera $= \frac{s}{r} \times \left(\frac{s}{r}\,v - \frac{s}{r}\,c\right)^2 S$, & l'autre parallele à la quille qui ſera $= \frac{s}{r} \times \left(\frac{s}{r}\,v - \frac{s}{r}\,c\right)^2 S$. La premiere marque la force avec laquelle il faut pouſſer la pale de $C\,D$ en $c\,d$, & ſi nous la nommons π, nous aurons $\pi = \frac{s}{r} \times \left(\frac{s}{r}\,v - \frac{s}{r}\,c\right)^2 S$. La ſeconde marque la force avec laquelle tout le ſiſtême eſt pouſſé de A vers B, & celle-ci doit être égale à la réſiſtance des eaux contre la proue du vaiſſeau; ſi donc cette réſiſtance eſt nommée P, on aura $P = \frac{s}{r} \times \left(\frac{s}{r}\,v - \frac{s}{r}\,c\right)^2 S$. Comme la réſiſtance du vaiſſeau P, eſt égale au quarré de la vîteſſe c multipliée par la ſurface n, nous aurons $n\,c\,c = P = \frac{s}{r} \times \left(\frac{s}{r}\,v - \frac{s}{r}\,c\right)^2 S$. De cette équation nous pourrons tirer la relation entre v & c puiſqu'elle nous donne $v = \left(\frac{s}{s} \times \frac{r}{s}\sqrt{\frac{n}{S} \times \frac{r}{s}}\right) c$. Enfin remarquons auſſi que $\pi : P = s : s$, ou $\pi = \frac{s}{s}\,P$, on pourra employer chacune de ces équations ſuivant les différentes queſtions qu'on ſe formera.

XXIII.

Voici à présent les résultats, qui nous sont nécessaires.

I. Le travail essentiellement requis doit être exprimé par $P \times c$, puisqu'il s'agit d'enlever une résistance P avec la vîtesse c.

II. Le travail actuel par la même raison est $= \pi \times v$, puisqu'on exerce continuellement une pression π contre la pale, & que la pale est poussée avec la vîtesse v.

III. Ainsi le travail actuel est au travail essentiellement requis comme $\pi \times v$ est à $P c$, ou comme $\frac{s}{\varsigma} P v$ à $P c$, ou comme $s\ v$ à $\varsigma\ c$, ou enfin, (si on substitue pour v sa valeur déterminée au précédent §) comme $\int + \frac{r}{\varsigma}\sqrt{\frac{n}{S} \times \frac{r}{\varsigma}}$ est à $\int$.

C'est cette derniere Anologie, qui faisoit l'objet principal de ces recherches.

XXIV.

J'admire ici laconservation perpetuelle des travaux & de leurs effets, puisque le travail actuel devient parfaitement égal au travail essentiellement requis aussitôt qu'il n'y a point d'effet inutile. L'effet inutile est ici la force vive qui résulte du mouvement qu'on donne aux eaux par le coups de pale; mais si l'on suppose la surface S infinie, on rétranche entiérement cet effet inutile parce qu'alors on ne fait que presser la pale contre les eaux, sans donner à ces eaux aucun mouvement, & la vîtesse v devient simplement $= \frac{\varsigma}{s} \times c$. Ceci est confirmé par notre derniere analogie, puisque faisant $\frac{n}{S} = o$, elle nous donne le travail actuel au travail essentiellement requis comme 1 à 1 ; ce qui marque une parfaite égalité entre ces deux travaux. Cette égalité entre le travail actuel, & le travail essentiellement requis subsistera en ce cas toujours, quelque valeur qu'on donne à $\frac{r}{s}$, c'est-à-dire, quelqu'inclinaison qu'on donne aux pales avec la quille du vaisseau. Mais aussitot qu'on donne à la surface S une grandeur déterminée par celle de n, le travail actuel sera composé de deux parties, l'une utile & égale au travail essentiellement requis, l'autre inutile, & qui est en pure perte. Ces deux parties seront en raison de 1 à $\frac{r}{s}\sqrt{\frac{n}{S} \times \frac{r}{s}}$; & comme tout travail a son effet, avec cette simple différence, qu'il y a des effets inutiles par rapport à celui qu'on se propose, on n'a qu'à diminuer autant qu'il est possible le travail inutile pour obtenir le plus grand effet possible.

Cette considération nous conduit à cette regle pour la surface S non infinie, qu'il faut rendre le cosinus de l'angle $n\ C\ c$, presqu'égal au sinus total r, c'est-à-dire, que la pale $C\ D$ doit être dirigée presque perpendiculairement à la quille & n'être inclinée que très-peu ; alors le travail utile sera au travail inutile presque comme 1 à $\sqrt{\frac{n}{s}}$. Ce qui fait entiérement le même rapport que celui que nous avons trouvé au § 7. Part. prem. pour l'usage ordinaire des rames.

XXV.

Nous voyons donc qu'en se servant de cette espece de rames, le travail inutile est par rapport au travail total sensiblement le même que dans l'usage des rames ordinaires, si on fait la surface S de part & d'autre la même, pourvu que le plan de la pale soit presque perpendiculaire à la quille du vaisseau; mais d'un autre côté nous verrons de plus en plus, que les rames obliques ont un avantage infini sur les rames ordinaires & directes, lorsque les rames doivent être appliquées à un grand vaisseau. Cependant comme il arrive souvent que les préceptes de la théorie, pour se mettre dans le plus grand avantage, sont sujets dans l'exécution à de certains inconveniens accidentels, j'examinerai les différentes circonstances que la diversité de l'angle formé par le plan de la pale avec la quille entraîne, je commencerai cet examen en supposant d'abord la surface S infinie.

(*a*) Plus cet angle est grand, plus il faudra donner de vîtesse à la pale, puisque $v = {}^{\prime}_{s}\, c$; cette vîtesse devroit être infinie si ledit angle étoit droit; pour un angle de 80d, on auroit $v = 5,67\ c$; pour un angle de 70d, on aura $v = 2,74\,c$, ou $= 1,73\ c$. Si on suppose la vîtesse du vaisseau par exemple de quatre pieds par seconde, on aura pour les angles de 80, 70 & 60 degrés les vîtesses v de 22, 68; de 10, 96; & 6, 92. pieds par seconde.

(*b*) Si on destine une seconde de tems à chaque excursion, les pales doivent parcourir un espace de 22, 68. de 10, 96. ou de 6, 92. pieds, suivant que l'angle $m\ C\ o$ est de 80, de 70, ou de 60 degrés; & si au lieu d'une seconde, on en prenoit une & demie, lesdites espaces deviendroient encore plus grandes en raison de 2 à 3.

(*c*) En supposant la vîtesse du vaisseau du premier rang de quatre pieds par seconde, on obtient $P =$

2800 livres, & comme (§ [illegible]) $\pi = \frac{s}{r}P$; nous aurons pour les angles de 80, 70 & 60 degrés, pour π les valeurs de 494, de 1022, & de 1618 livres. Ces poids marquent pour chacun des différents cas la pression totale, ou la somme de toutes les pressions que l'équipage doit exercer contre les pales; ainsi pour avoir la pression contre chaque pale, il faut diviser cesdits poids par le nombre des pales, en supposant que celles-ci agissent sans interruption, ce que nous verrons pouvoir se faire.

(d) Si la surface S n'est pas assez grande pour pouvoir être censée infinie, la vîtesse v, devient plus grande que $\frac{s}{s}c$, le surcroit de vîtesse sera exprimé par $\frac{r}{s}\sqrt{\frac{n}{s} \times \frac{r}{s} \times c}$. C'est ce surcroit de vîtesse, qui n'augmente aucunement la vîtesse du vaisseau, tant que les hommes agissent avec la même force sur les pales, & qui rend une partie du travail inutile; & comme les travaux, quand les pressions sont égales, sont en raison des vîtesses, il s'ensuit que le travail utile est au travail inutile comme $-\frac{s}{s}c$ est à $\frac{r}{s}\sqrt{\frac{n}{s} \times \frac{r}{s} \times c}$, c'est-à-dire, en raison composée réciproque de la raison sesquipliquée des cosinus de l'angle nCc, & de la raison sousdoublée de la surface S, comme nous avons déja dit dans le précédent article: supposons, par exemple, $S = 600$ pieds quarrés, ou $\frac{n}{s} = \frac{1}{4}$, en retenant $c = 4$ pieds par seconde, nous aurons en faisant successivement l'angle mCn de 80, 70 & 60 degrés, la vîtesse nécessaire v égale à 22, 68 + 11, 60. ou 10, 96 + 6, 01. ou 6, 92 + 4, 29. ou bien $v = 34, 28$. ou 16, 97. ou 11, 21 pieds par seconde; si on employe une seconde de tems pour chaque saccade, chaque excurſion des pales aura le même nombre de pieds ; & comme il ne convient pas de faire ces excurſions exceſſivement grandes, il faudra encore ſe relâcher un peu ſur l'avantage qu'on obtient de la grandeur de l'angle de l'inclination des pales.

(*e*) Nous verrons, dans l'application de cette théorie, qu'il n'eſt pas difficile de donner à S la valeur de 600 pieds quarrés, & ſi mon deſſeïn étoit de ne faire voir que le beau côté de ma nouvelle maniere de naviger, j'aurois pu la ſuppoſer plus grande ſans tomber dans des inconveniens conſidérables, mais j'aime mieux prendre les choſes au pis ; la même maxime m'engage à ne donner à l'angle $m\ C\ n$, que la valeur de 60^{d}, quoique j'euſſe peut-être pu le ſuppoſer de 10^{d}, car l'étendue des excurſions n'eſt pas un inconvenient fort eſſentiel, d'autant moins qu'on peut y employer auſſi peu de tems qu'on le trouve à propos : le travail que je propoſerai ſera fort ſemblable à celui de ſcier du bois, dans lequel on fait facilement deux mouvemens dans une ſeconde de tems, & chaque mouvement de deux pieds. Or en ſuppoſant $S = 600$ pieds quarrés, & l'angle $m\ C\ n$ de 60^{d}, nous avons vu dans la note (*d*), que le travail utile eſt au travail inutile comme 10 96 eſt à 6, 01. & par conſéquent le travail utile au travail total comme 10, 96 à 16, 97. Donc dans ces ſuppoſitions le travail utile fait $\frac{1096}{1697}$, ou 0, 645. du travail total, & il y a à remarquer, que c'eſt-là dans notre maniere de voguer preſque l'unique perte qu'on fait, comme je le ferai voir dans la ſuite.

Après avoir bien peſé toutes les circonſtances, je ſuis bien perſuadé que le travail utile ſera au moins 0, 550 du travail entier, pendant que nous n'avons trouvé dans notre premiere Partie § 25 que 0, 446 pour les galeres voguant à toutes rames.

Il ſuit donc de là que notre nouvelle navigation eſt plus profitable, quoique appliquée aux grands vaiſſeaux, que n'eſt l'uſage ordinaire des rames ſur les galeres, & on a certainement tout lieu d'être content d'un tel réſultat. Encore eſt il certain que le travail utile ſur les galeres exprimé par 0, 446, eſt pris tout au plus haut, car il eſt fondé ſur la grandeur du plan de réſiſtance de 16 pieds, pendant que M. Bouguer ne donne à ce plan que 10 pieds, & ſi nous avions ſuivi l'eſtime de M. Bouguer, nous n'aurions trouvé pour le travail utile ſur les galeres, que 0, 279, ce qui ne feroit qu'environ la moitié du travail utile qui provient de l'emploi de nos rames obliques.

(*f*) Si le travail utile eſt 0, 550 du travail entier, le vaiſſeau prendra par le travail ordinaire de 500 hommes la vîteſſe $5, 55 \times \sqrt[3]{0, 550}$. ou 4, 54. & par un travail forcé 5, 63. Ces vîteſſes ſont ſans doute conſidérables puiſqu'elles font plus, que les $\frac{4}{5}$ des vîteſſes poſſibles entiéres ; & comment pourroit-on ne pas s'en contenter, quand on fait réflexion que 500 hommes ſur notre grand vaiſſeau ne font pas plus, que 53 hommes ſur les galeres, qui tout au plus ſouffrent pour des vîteſſes égales $\frac{16}{150}$ de la réſiſtance du grand vaiſſeau, ce ſeroit donc n'être pas content, que 53 hommes donnaſſent par un travail ordinaire aux galeres une vîteſſe à faire plus de quatre pieds & demi par ſeconde.

XXVI.

J'ai prevenu dans la note (*e*), du précédent article, que j'ai imaginé une maniere de rendre l'action des pales contre les eaux continuelles, cela demande une explication préalable. Nous avons vu, que pendant que la pale

CD

C D eſt pouſſée en *c d*, le vaiſſeau ſera pouſſé ſuivant la direction *A B*; pour obtenir le même effet en repouſſant la pale, & en l'éloignant des bords du vaiſſeau, il n'y a qu'à imaginer un mecaniſme, qui faſſe tout d'un coup un peu tourner la pale, & lui faire prendre la poſition *c d*, à la place de ſa poſition précédente *c d*; je propoſerai un moyen aſſez facile pour obtenir ce renverſement préciſement aux momens qu'on commence à pouſſer ou à repouſſer la pale. Dans ce mecaniſme l'angle *c r c* doit être double de l'angle *n C c*, & par conſéquent de 60d, pour l'hypothèſe de la note (*e*).

XXVII.

Les rames, qui ſoutiennent les pales ſeront ſuſpendues verticalement, la pale enfoncée dans l'eau, & le reſte dans l'air, chaque rame aura au bout deux tourillons qui entreront dans des viroles, ces tourillons ſerviront à ſoutenir la rame, ils ſeront parfaitement horizonteaux, & paralleles à la quille, & ne permettront à la rame d'autre mouvement que celui de balancer dans un plan vertical perpendiculaire à la quille; les viroles deſtinées à recevoir les tourillons ſeront menagées dans des ſolives ou pieces de bois, qui ſortent hors du vaiſſeau aſſez pour permettre aux rames leur jeu; le maniement conſiſtera à approcher & éloigner alternativement les rames des bords du vaiſſeau moyennant une longe manivelle. Le hommes deſtinés à ce travail pourront être également placés ſur le tillac, ou dans les entreponts, il y en aura pluſieurs appliqués à la même manivelle, qu'ils tiendront horizontalement, & avec laquelle ils tireront & pouſſeront alternativement la rame; la diſtance depuis les tourillons juſqu'à la manivelle ne ſera que le tiers, ou le quart de toute la longueur de la rame ; de cette façon chaque allée & venue sera d'environ trois pieds, qui se feront dans une seconde de tems avec un effort d'environ vingt livres pour chaque homme, ce qui fait, à mon avis, le travail le plus naturel des hommes.

XXVIII.

Il ne nous reste plus qu'à donner quelqu'idée de la façon de renverser à propos les pales, de façon que la surface qui pousse les eaux soit toujours tournée du côté de la pouppe. On pourra pour cet effet composer la rame de deux pieces, une partie de la piece inférieure entrera dans la supérieure, de maniere que celle d'enbas tourne librement sur son axe. Soit *A B*
Fig. V. *C D* le bout de la piece supérieure creusée pour recevoir le bout de la piece inférieure *E F G H*, qu'on fasse dans la piece supérieure une rainure *m n p q*, & que l'amplitude de l'arc *m q* ou *n p* soit d'un peu plus de 60^d, qu'on ajoute à la piece inférieure *E F G H* une espece d'arrêt formé en bosse représenté par *r s*, dont la hauteur *r s*, soit tant soit peu plus petite, que la hauteur de la rainure. Cet arrêt est destiné à toucher & heurter alternativement contre les bords *m n* & *p q* de la rainure, & il avancera un peu hors de la rainure, la manivelle qui doit servir à pousser & repousser la rame pourra être appliquée en *o* au millieu de l'arrêt *r s*, de maniere que la direction de la manivelle ne passe pas par l'axe de la rame, mais qu'elle la rase ; soit la manivelle *o x*, & que les hommes la tirent vers eux, alors l'arrête *r s* viendra aussitôt à heurter le bord *m n*, & y restera comme collée pendant tout le tems qu'on tire la rame ; mais aussitôt qu'on commence à la repousser, l'arrêt *r s* se mettra contre l'autre bord *q p*, & y restera pen-

dant tout le tems qu'on employe à repouſſer la rame, & ce mouvement de l'arrêt rs, ſervira à renverſer alternativemeet la pale. On voit que ce mecaniſme demande que la verticale $t\ u$, qui partage également l'amplitude de m, ou np prolongée reponde préciſement à l'axe des tourillons, par leſquels la rame eſt ſuſpendue. Je n'ay expoſé ce mecaniſme que pour faire voir que je ne ſuppoſe rien, qui ne ſoit facile dans l'exécution ; les artiſtes ſçauront peut-être ſubſtituer à cet artifice un autre beaucoup plus convenable & je demande à ceux-ci de l'indulgence ſur la maniere de m'être énoncé ſur cet article. J'ai ajouté la planche ſeconde pour expliquer mieux mes penſées. *Pl. 2. Fig. 6. 7. 8.*

XXIX.

J'ai dit préalablement dans la note (f) du § 25, que 500 hommes pourront donner au vaiſſeau par cette manœuvre une vîteſſe à faire $4\frac{1}{4}$ pieds par ſeconde ; c'eſt-là ſans doute un réſultat, dont ont a tout lieu d'être content, mais que nous n'avons trouvé que par la méthode analytique ; procédons à préſent ſynthétiquement ; quand notre grand vaiſſeau fait $4\frac{1}{2}$ pieds par ſeconde, il ſouffre une réſiſtance continuelle de 3500 livres ; s'il y a 50 rames, 25 de chaque côté, chaque pale doit ſurmonter une réſiſtance de 70 livres ; ſi la pale eſt inclinée de 60ᵈ, il faut pour avoir la force avec laquelle on attire ou repouſſe la pale, multiplier 70 livres par le rapport du ſinus de 30ᵈ à ſon coſinus, c'eſt-à-dire par $\frac{50000}{86602}$, ce qui fait à-peu-près 44 livres, ſi on fait $\frac{n}{S} = \frac{1}{4}$, c'eſt-à-dire ſi on fait la ſomme de toutes les pales $=$ 600 pieds quarrés ou chaque pale de 12 pieds quarrés, l'équation $v = \left(\frac{r}{s} + \frac{r}{s}\sqrt{S \times \frac{r}{s}}\right)c$ du § 22, fait $v = 12,33$; ainſi en employant une ſeconde pour chaque agitation, la pale fera chaque fois une excurſion de 12, 33 pieds. Si on fait la diſtance depuis l'axe des tourillons juſqu'à l'endroit, où la manivelle eſt appliquée à la rame égale à $\frac{400}{411}$ parties de la diſtance du même axe des tourillons juſqu'au milieu des pales, la manivelle parcourra à chaque ſeconde une eſpace de trois pieds, & l'effort requis ſera $= \frac{411}{100} \times 44$ livres $= 180$ livres ; & comme il y aura dix hommes à chaque manivelle, le travail de chaque homme conſiſtera à élever à chaque ſeconde un poids de 18 livres à la hauteur de trois pieds, & un tel travail ne fait encore que les $\frac{9}{10}$ du travail ordinaire d'un homme, j'ai reſervé cette dixieme partie pour reparer quelques pertes de très-peu d'importance qu'on pourroit encore faire de ſes forces, car pour les pertes eſſentielles, nous y avons déja eu égard en donnant à chaque pale des excurſions de 12, 33 pieds, pendant qu'elles feraient plus petites, ſi on donnoit plus d'étendue aux pales, ce qui diminueroit le travail requis.

XXX.

Finiſſons cette matiere par un petit parallele entre la maniere ordinaire d'employer les rames ſur les galeres, & ma nouvelle maniere de voguer, & par quelques autres réflexions. Le principal avantage de nos rames, & de la façon de les mettre en œuvre eſt ſans contredit celui de pouvoir être appliquées fort commodement à toutes ſortes de navires, depuis les plus petits juſqu'au plus grands. Il me ſemble que c'eſt-là tout ce que l'Académie demandoit ; le ſecond avantage eſt de pouvoir facilement employer à cette manœuvre autant d'hommes qu'on voudra, ſans qu'ils s'embarraſſent le moins du monde, puiſqu'on pourra multiplier le nombre des manivelles tant qu'on voudra. Le troiſieme avantage eſt que chaque homme peut-être mis dans une ſorte de travail qui lui eſt le plus naturel, & qui demande que les hommes faſſent des mouvemens d'environ trois pieds à chaque ſeconde; le vogue-avant ſur les galeres fait un mouvement beaucoup trop grand, & le rameur le plus proche de l'apoſtis fait un mouvement beaucoup trop petit. Le quatrieme avantage eſt, qu'il n'y a ici aucune interruption dans le travail, pendant que ſur une galere de trois mouvemens il n'y a qu'un ſeul d'utile; les hommes menagent donc l'inertie de leur propres corps. Le cinquieme avantage eſt que l'inertie des rames ne cauſe ici aucune perte ou très-peu, car les balancemens ſont d'une nature à ſe conſerver d'eux-mêmes. Cet article demanderoit cependant une grande diſcuſſion, ſi on vouloit le traiter avec autant d'exactitude qu'il peut l'être. Le ſixieme avantage, qui eſt encore très grand, eſt qu'on peut-ici remédier beaucoup mieux que par l'uſage des rames ordinaires à cet inconvient, ſi eſſentiel & ſi opiniâtre, qui conſiſte dans l'inſuffiſante étendue des pales; par la ſeule continuité de l'action, on triple tout d'un coup la ſurface des pales, & rien n'empêche, dans notre nouvelle navigation, d'aggrandir conſidérablement chaque pale. Tout ces avantages manifeſtes m'encouragent à propoſer avec beaucoup de confiance l'uſage des nouvelles rames dont je viens de donner la deſcription, & ne me laiſſent abſolument point douter de leur ſuccès. Il ne ſera pas difficile d'en faire des expériences préalables ſur des bateaux, & pour peu que celles-ci ſoient favorables, le ſuccès ſera certain ſur les grands vaiſſeaux. Mais tant d'avantages ne peuvent guere s'obtenir ſans tomber en même tems dans quelques petits déſavantages, que je ſuis bien éloigné de vouloir pallier. J'avoue donc qu'on fait une petite perte du travail par l'obliquité des pales qu'on est obligé de leur donner pour éviter les trop grandes vîtesses avec lesquelles il faudroit remuer les pales en les faisant trop perpendiculaires à la quille. J'avoue encore qu'on employe inutilement le petit travail qu'il faudra employer pour renverser les pales, en les faisant incliner tantôt d'un côté, tantôt de l'autre. On pourroit remédier à ce petit défaut, en donnant assez de mouvement aux pales pour sortir des eaux, & pour pouvoir les renverser dans l'air, mais une telle manœuvre rendroit déja le travail un peu interrompu, & feroit en même tems, que les pales ne seroient pas toujours entiérement plongées dans les eaux, ce qui diminueroit la vraie surface S. On se contentera de la précaution d'augmenter la surface des pales plutôt en hauteur qu'en largeur. Voilà tout ce que j'ai pu trouver de désavantage, & je suis bien persuadé, que ces deux petites pertes ne valent pas à beaucoup près celles qu'on fait par l'usage ordinaire des rames, lors-même qu'on est à portée de les employer avec toute la commodité qu'on peut désirer. Je vois même qu'on peut sans grand inconvenient rendre les pales plus perpendiculaires à la quille que nous ne les avons supposées dans notre évaluation, si on ne sçauroit donner assez de mouvement aux pales en les tirant vers les bords, rien n'empêche de les en éloigner tant qu'on voudra; j'aurois pu donc supposer les pales inclinées de 70^d, ou lieu de 60^d, & par-là j'aurois diminué d'environ la moitié, la petite perte qu'on fait à cet égard; mais j'ai mieux aimé m'en tenir au plus sûr que de pousser trop loin les hypothèses du plus avantageux. Je dirai encore deux mots sur la nature de la manœuvre; le jeu de nos rames n'est pas si arbitraire que celui des rames ordinaires, mais on n'en pourra pas moins gouverner le vaiſſeau ſelon que les circonſtances l'exigent par les différentes combinaiſons que les rameurs peuvent faire de pluſieurs façons, les uns en arrêtant les rames, les autres en tenant les pales hors de l'eau, & d'autres encore en redoublant de force. Au reſte on voit bien que lorſqu'il s'agit ſimplement de faire du chemin, on doit être fort attentif, que les rames ne ſoient pas un ſeul moment en repos, tant que les pales ſont ſous l'eau; Le vaiſſeau en ſeroit auſſitôt rétardé; c'eſt à quoi il faut ſur tout faire attention dans ces inſtans, ou il s'agit de faire rebrouſſer les rames, ce ſont des momens, ou les hommes appliqués à la même manivelle doivent agir avec un grand concert. Je dirai à cet égard au hazard d'être traité de vetilleur, qu'il ne ſera peut-être pas inutile de menager des obſtacles des deux côtés, qui non ſeulement arrêtent tout d'un coup les rames, mais qui les rejettent même vers l'endroit d'où elles étoient venues; par un tel ou ſemblable artifice, on obtient en même tems un autre avantage, c'eſt celui de ne rien perdre abſolument du travail qu'on fait par l'inertie des rames, pourvu que leſdits obſtacles ſoient propres à faire rebondir les rames; c'eſt-là une réflexion qu'on ne doit pas négliger.

XXXI.

Voilà ſans doute la meilleure maniere de ſuppléer à l'action du vent ſur les grands vaiſſeaux par le travail des hommes, & je me flatte que tous ceux qui feront entrés dans nos principes en conviendront avec moi. Nous avons indiqué une maniere d'obtenir les $\frac{4}{5}$ parties de toute la vîteſſe poſſible, & cela d'une maniere qui n'a aucun inconvenient par rapport aux autres avantages qu'on doit tâcher de conſerver. Les cinquante nouvelles rames avec tout leur appareil n'occuperont, pas plus d'eſpace que les rames ſur une ſimple galere, elles ſeront ôtées & remiſes avec beaucoup de facilité & de promptitude.

L'application & la manœuvre de ces nouvelles rames ne demandent pas le moindre changement à la conſtruction ordinaire des grands vaiſſeaux, pendant que la commodité des rameurs fait un des principaux points de vue pour la conſtruction des galeres; ſi quelqu'un s'étoit attendu a une plus grande vîteſſe, il auroit eu certainement grand tort, & il quittera bientôt ce préjugé en conſidérant ſeulement que le grand vaiſſeau que nous avons pris pour exemple ſouffre une réſiſtance preſque dix fois plus grande, que n'en a une galere, & même quinze fois plus grande, ſuivant l'eſtime de M. Bouguer: ſi l'on vouloit donc prétendre, qu'un équipage de 500 hommes donnât à notre grand vaiſſeau une plus grande vîteſſe que celle que nous avons démontrée lui pouvoir être donnée, ce ſeroit prétendre que cinquante-trois rameurs, ſuivant notre eſtime, ou trente-trois, ſuivant l'eſtime de M. Bouguer, fiſſent parcourrir à une grande galere plus de $4\frac{1}{2}$ pieds par ſeconde, en n'employant qu'un travail ordinaire & ſoutenable pendant huit heures par jour, ou plus de $5\frac{1}{2}$ pieds avec un travail extrêmement forcé, car cette vîteſſe peut auſſi être imprimée au grand vaiſſeau avec un tel travail.

On ne peut donc plus s'empêcher de réconnoître notre nouvelle navigation pour la meilleure qu'on poiſſe raiſonnablement eſperer, à moins qu'on ne trouve à rédire à ce quinzieme de vîteſſe qu'on y perdra encore ſur la vîteſſe totale poſſible; mais voici une réflexion, qui nous fera bientôt perdre toute eſpérance d'obtenir jamais un plus grand ſuccès de quelque maniere qu'on s'y prenne; c'eſt qu'on aura toujours

jours indiſpenſablement beſoin de quelque choſe, qui tienne lieu de pale, puiſqu'on n'a pas hors du vaiſſeau un point fixe qui puiſſe ſervir d'appui, & on ne pourra jamais donner une étendue infinie à ce qui eſt ſubſtitué aux pales; d'où il réſultera conſtamment une perte de forces inévitable par ſa nature. Outre cette perte on en fera néceſſairement quelques autres, il y aura toujours quelque frottement, & quelques mouvemens inutiles, qu'il faille continuellement réproduire dans la matiere, qui ſera ſubſtituée aux rames, ſans parler des pertes qu'on fait lorſqu'on applique les hommes à un genre de travail peu conforme à leur conſtitution, par lequel ils ſont ſouvent bien éloignés de produire tout cet effet, que nous leur avons ſuppoſé, & duquel ils ſont très-capables, s'ils ſont duement employés. Je ne crains donc plus de propoſer notre derniere maniere de naviger par le travail des hommes, comme fort approchante de la meilleure qu'il ſoit poſſible d'imaginer, ce que j'ajouterai pourra faire voir avec combien d'attention j'ai examiné tout ce qui appartient à notre queſtion, & peut-être en même tems utile pour pluſieurs circonſtances particulieres dans leſquelles on peut ſe trouver.

XXXII.

Imaginons-nous d'abord un grand plan vertical flottant dans les eaux à une certaine diſtance depuis la proue perpendiculaire à la quille, & qu'on tire ce plan moyennant une corde d'une longueur ſuffiſante vers la proue du vaiſſeau, il arrivera que le vaiſſeau, & ce plan s'approcheront l'un de l'autre; & faiſant abſtraction de l'inertie du vaiſſeau, la vîteſſe de celui-ci ſera à la vîteſſe du plan, comme la racine du plan ſuppoſé eſt à la racine du plan, qui meſure la réſiſtance du vaiſſeau. Ainſi la vîteſſe du plan ſuppoſé ſera encore; $= c \sqrt{\frac{n}{s}}$, ſi nous entendons, par c la vîteſſe du vaiſſeau par S le plan ſuppoſé, & par n le plan qui meſure la réſiſtance du vaiſſeau. Si on conſidéroit le plan S comme infini, ſa vîteſſe feroit comme o, & les hommes ne perdroient abſolument rien de leur travail, que j'exprimerai par l'unité, mais ſi le plan S n'eſt pas conſidére comme infini, on aura pour le travail utile $\frac{c}{c+v}$, & pour le travail inutile $\frac{v}{c+v}$, ou bien $\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S}+\sqrt{n}}$ pour le petmier, & $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S}+\sqrt{n}}$ pour le ſecond. Comme rien n'empêche ici de donner une très-grande étendue au plan S, & même de multiplier le nombre de ces plans à ſon plaiſir, il ſera facile d'anéantir preſque éntiérement la qualité $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{S}+\sqrt{n}}$, qui marque la perte du travail, ce n'eſt pas-là la plus grande difficulté; mais ce travail preſque entiérement utile ne durera que juſqu'au moment que le vaiſſeau aura atteint ce plan contre lequ'el on l'aura tiré. Il faudra donc de nouveau éloigner le plan du vaiſſeau; cela pourroit ſe faire moyennant une chaloupe, & il ſera très-facile de faire que pendant ce tranſport le plan préſente ſon tranchant aux eaux de maniere que la chaloupe puiſſe entraîner le plan preſque avec autant de vîteſſe que les rameurs peuvent donner à la chaloupe, en la ſuppoſant entiérement libre. On pourroit auſſi compoſer ces plans de doubles battans, qui ſe replient l'un contre l'autre par la force des eaux pendant tout le tems qu'on employe à ce tranſport; dans cet intervalle il faudroit lâcher la corde qui va du vaiſſeau au plan juſqu'à ce que celui-ci ſoit ſuffiſamment éloigné du vaiſſeau; après quoi on lâcheroit la corde qui va de la chaloupe au même plan, l'équipage du vaiſſeau tireroit l'autre corde, les deux battans ſe rouvriroient pour ne faire qu'un seul, & même plan, & le vaisseau s'avanceroit vers le plan. Par une telle ou autre semblable manœuvre, on feroit assez peu de perte du travail; il y auroit pourtant toujours celle qui résulte du défaut de la surface du plan, perte qu'on ne peut jamais éviter entiérement; outre cette perte on feroit encore celle du travail des hommes qui rameroient sur la chaloupe, comme ne faisant qu'un travail accessoire. Quant à la premiere perte, on a ici au moins autant de commodité pour la diminuer que par toute autre méthode, & la seconde perte peut être facilement negligée, à cause du peu de proportion qu'il y a entre les rameurs sur la chaloupe, & les hommes qui travaillent sur le vaisseau; mais le plus grand inconvenient consisteroit dans la perte du tems que chaque allée de la chaloupe demanderoit; cependant comme cet intervalle seroit en même tems un repos parfait pour l'équipage du vaisseau, cet équipage pourra redoubler ses efforts par un travail forcé pendant tout le tems de leur travail actuel; cette alternative de repos, & de travail forcé remettroit l'équipage dans le cas d'un travail ordinaire, & soutenable pendant plusieurs heures de suite, & l'effet d'un tel travail alternativement interrompu seroit le même aussi à-peu près que celui d'un travail ordinaire non interrompu, mais on pourra aussi prévenir cette interruption en employant deux chaloupes; dont chacune fasse alternativement avec l'autre la fonction que nous avons exposée.

XXXIII.

Je me contenterai d'avoir indiqué cette nouvelle maniere de naviguer; je serois trop long, si je voulois examier en détail tout ce qu'une telle idée demande pour l'exécution, & pour sa perfection, &

après tout je ne pourrois dire que des choses qu'il sera très-facile de voir, surtout à ceux qui auroit bien voulu lire avec quelque attention tout ce que nous avons déja dit dans ce Mémoire; pour moi, après avoir pesé toutes les circonstances, je suis entiérement persuadé, quon pourra de cette maniere donner au vaisseau au moins les $\frac{3}{4}$ de la vîtesse possible totale, & on pourroit même esperer un plus grande succès, si au lieu des plans que nous avons supposés, on vouloit employer des corps creux conoïdiques de la moindre résistance, & fort longs dont la base seroit tournée du côté du vaisseau, & la pointe vers la chaloupe, on pourroit de cette maniere faire les intervalles du travail fort petits, les rameurs sur la chaloupe ne donneroient que quatre ou cinq coups des rames pour avancer ces corps, & puis l'équipage les retireroit avec beaucoup de vigueur vers le vaisseau; il seroit même facile de faire ensorte que ces corps coniques creux se fermassent toutes les fois qu'ils seroient tirés par la chaloupe, & s'ouvrissent lorsqu'ils seroient tirés par le vaisseau; rien n'empêcheroit d'attacher par une même corde une file de ces sortes de corps, lesquels offriroient une résistance extrêmement grande quand ils seroient tirés vers le vaisseau, & cette résistance seroit fort augmentée par l'inertie des eaux renfermées dans le creux de ces corps coniques pendant que la résistance seroit extrêmement petite durant le retour de ces corps. Enfin une longue expérience ne manqueroit pas de mettre cette maniere de naviguer dans une grande perfection, quand on auroit une fois commencé à s'en servir; j'y vois quelques inconveniens, mais je n'en vois point d'essentiels qu'on ne pouisse espérer d'éviter après quelques essais quon auroit faits. Il est sûr du moins que dans les occasions, où l'on ne prétend que de simplement remorquer un vaisseau, on le fera avec beaucoup de facilité, & avec un ſuccès incomparablement plus grand que par la maniere ordinaire de le faire. Je vois auſſi qu'une ſemblable manœuvre fournira à l'equipage un moyen d'exercer une plus grande force quand il s'agiroit, par exemple, de remettre un navire à flot qui ſeroit échoué ſur un banc de ſable ; il y a des cas où l'on ne ſe propoſe pas de donner au vaiſſeau une grande vîteſſe, mais ſimplement de le remettre en mouvement, & dans ces cas on doit s'appliquer à pouvoir exercer une grande preſſion ; quand on a des points fixes, on peut obtenir une preſſion auſſi grande qu'on ſe propoſe avec une preſſion auſſi petite qu'on veuille employer, mais en manquant de points fixes, comme ſur les vaiſſeaux, c'eſt une queſtion toute différente de notre ſujet principal, quelle eſt la maniere de pouſſer le plus vigoureuſement qu'il eſt poſſible un navire ; l'action de pouſſer un corps en repos n'eſt qu'une force morte ; mais ſur un vaiſſeau on ne ſauroit venir à bout d'exercer une tellelle action qu'avec une force vive, ou avec un certain travail qui demande une preſſion, & une vîteſſe à la fois ; parce qu'à la place de points fixes, on n'a que des points, qui cedent avec de certaines réſiſtances : je trouve, par exemple, pour la galere, dont M. Chazelles à fait l'eſpérience, que la chiourme, par un travail ordinaire, ne peut enlever au de-là d'un poids de 1800, ou 2000 livres, c'eſt-à-dire, que ſi la galere étoit attachée par une corde, qui paſſât ſur une poulie, & qu'à l'autre bout il y eût un poids de 1800 à 2000 livres ſuſpendu, un tel poids arrêteroit la galere, & feroit équilibre avec les forces de la chiourme ; l'effet de ce travail ne conſiſteroit donc qu'à tenir ſuſpendu un poids de 1800 à 2000 livres, qui ſeroit produit par 260 hommes, de maniere que chaque homme n'exerceroit qu'une preſſion continuelle d'environ ſept livres contre le vaiſſeau quoiqu'en repos, pendant que le même homme pourroit faire une pression continuelle infinie, si la pale & la longueur du manche pouvoient être censées infinies.

XXXIV.

S'il est sûr que nous avons indiqué toutes les mesures qu'on peut prendre pour tirer le plus grand succès qui soit possible du travail des hommes destinés à suppléer à l'action du vent sur les grands vaisseaux, & s'il est vrai que le plus grand succès possible ne surpasse pas sensiblement le succès réel qu'on obtient par les manieres de voguer les grands vaisseaux, que nous avons exposées, j'ose me flatter d'avoir satisfait entiérement à la question proposée par l'Académie. On ne doit pas être moins persuadé dans la mécanique du plus grand avantage possible, que nous avons démontré, qu'on l'est dans la géometrie de renfermer le plus grand espace possible dans une péripherie circulaire; mais la généralité de nos principes est telle que nos réflexions sont encore vraies, quand on se serviroit, sur les vaisseaux de tout autre principe de mouvement; car de même que les hommes sont une source de forces vives, toutes les choses dont on pourroit se servir pour suppléer à l'action du vent renferment sous des apparences différentes une certaine quantité de forces vives; telle est l'action du feu, d'un air condensé, d'un air échauffé, celle des vapeurs, de la poudre à canon &c. Le vent lui-même est compris dans cette classe; pour tirer le parti le plus avantageux de tous ces principes, il n'y a qu'à éviter tous les effets inutiles autant qu'il est possible; alors toute la quantité de forces vives renfermées dans les choses naturelles dont on veut se servir pour suppléer à l'action du vent sera transmise dans les eaux poussées, & déplacées par la proue du vaisseau, ce qui fait seul tout l'effet utile, comme étant inséparable d'avec la navigation. Je finirai ce Mémoire par quelques remarques sur ce sujet.

XXXV.

Supposons qu'on ait sur le vaisseau en sa puissance une certaine quantité de forces vives, qu'on veuille employer à faire aller un vaisseau sur mer, & examinons, quel sera le plus grand effet qu'on en pourra tirer. Soit cette quantité de forces vives exprimée par MA, c'est-à-dire, telle qu'une masse M acquiert en tombant librement de la hauteur verticale A: soit encore le plan d'une résistance directe égale à celle de la proue $= n$, la vîtesse du vaisseau $= c$, la hauteur verticale génératrice de cette vîtesse sera $= \frac{cc}{60}$; là-dessus on aura la résistance du vaisseau égale au poids d'un prisme d'eau, dont la base est n, & la hauteur $\frac{cc}{60}$, & le poids contiendra autant de livres, qu'il y a d'unités en $\frac{70 n cc}{60}$; je le fais donc $= \frac{7}{6} n cc$; supposons enfin que la force vive MA; se consume uniformement dans un tems t exprimé en secondes, cela fera l'espace parcouru uniformement par le vaisseau pendant ce tems ou $s = ct$, & la force vive, que le vaisseau aura communiquée aux eaux $= \frac{7}{6} n cc \times s$, ou $= \frac{7}{6} n c^3 t$. Cette formule exprime l'effet que j'appelle utile, qui résulte de la somme des forces motrices contenues dans la force vive MA; & si toute cette force vive est utilement employée, je dis qu'on aura $\frac{7}{6} n c^3 t = MA$; ce sera là le cas du plus grand avantage possible, & on ne pourra jamais obtenir un plus grand effet.

Voici à présent quelques proprietés que cette équation nous enseigne.

α Les vîtesses c sont en raison réciproque des racines cubiques des tems, pendant lesquels la force vive MA se consume: on obtiendra, par exemple, une vîtesse double en consumant ladite force vive dans la huitieme partie du tems.

β Puisque $S = ct$, on aura aussi $\frac{6}{6} nccS = MA$; ce qui marque que les vîtesses du vaisseau c sont en raison réciproque des racines des espaces que le vaisseau parcourt pendant que la force vive se consume. On pourra donc, par exemple, moyennant une certaine quantité de forces vives, conserver au vaisseau une vîtesse double, si on ne veut lui faire parcourir que le $\frac{1}{4}$ de l'espace.

γ Comme on peut aussi faire $\frac{7}{6} n \times \frac{S^3}{tt} = MA$, on voit que les espaces parcourus par le vaisseau, pendant que la force vive se consume, sont comme les racines cubiques des quarrés des tems. Il est donc possible de faire parcourir à un vaisseau d'une grandeur quelconque un aussi grand espace qu'on voudra, moyennant une force vive aussi petite qu'on voudra employer; mais ce sera en ne consumant la force vive que dans un tems suffisant pour cela; cela suppose que les eaux n'ayent absolument aucune autre résistance que celle qui est proportionelle aux quarrés des vîtesses, & on remarqera aussi qu'il ne s'agit pas ici de donner au vaisseau un certain mouvement, mais de l'entretenir dans un mouvement déja acquis.

δ Enfin, comme la force motrice du vaisseau que je nomme P, est égale à la résistance exprimée par $\frac{7}{6} ncc$, on aura encore $Ps = MA$, & par conséquent P réciproquement

proquement proportionel à s; on pourra donc, moyennant une même force vive, obtenir une force motrice auſſi grande qu'on voudra; mais le vaiſſeau ne parcourra qu'un petit eſpace pendant tout le tems que cette force motrice dure.

XXXVI.

Pour voir la vérité de tout ce que je viens de dire, on n'a qu'à s'imaginer que le force vive MA conſiſte dans un long reſſort bandé dont un bout ſoit appuyé contre la pouppe du vaiſſeau, pendant que l'autre bout s'appuye contre un poteau, ou un autre point fixe. Il eſt évident que par une telle maniere d'employer la force vive renfermée dans le reſſort bandé, on en tire tout l'uſage poſſible. Eclairciſſons les regles par un exemple: ſuppoſons un pied cubique rempli de poudre à canon: il y a pluſieurs expériences qui prouvent que la force vive renfermée dans une telle quantité de poudre eſt pour le moins $= 200000000$ livres élevées à la hauteur d'un pied. Cet exemple fait donc $MA = 200000000$. Si on pouvoit employer cette force vive potentielle toute utilement pour faire aller un vaiſſeau du premier rang qui donne $n = 150$, qu'on voulut employer une telle quantité de poudre à chaque heure ou à chaque 3600 ſecondes, il faudroit ſubſtituer dans notre équation $\frac{7}{6} n c^3 t = MA$, pour t, 3600 ſecondes pour n, 150 pieds quarrés, & pour MA, le nombre 200000000, après quoi on trouveroit $c = \sqrt[3]{\frac{6,200000000}{7,150,3600}} = \sqrt[3]{317} = 6,8$, c'eſt-à-dire, qu'on pourroit, par une telle dépenſe en poudre à canon, entretenir un vaiſſeau du premier rang dans un mouvement à faire 6, 8 pieds dans une ſeconde, & cet effet repond dans la table fondamentale à celui de 900 hommes ſuppoſés pareillement d'employer utilement toutes leurs forces avec un travail naturel. Voici un autre exemple qui servira à montrer ce que l'on pourroit attendre des vapeurs & du feu. J'ai lu dans une description de la grande machine hydraulique de Londres, qu'elle élevoit à chaque minute 80 pieds cubes d'eau à la hauteur de 124 pieds, comme c'est ici mesure d'Angleterre, je donnerai 58 livres à un pied cube d'eau, & je reduirai la hauteur de 124 pieds à celle de 116 pieds de Paris, ainsi nous aurons $MA = 80 \times 58 \times 116 = 538240$, $t = 60$, & par conséquent $c^3 = 51\,261$, ou $c = 3,71$; c'est une vîtesse à faire environ 3 pieds $8\frac{1}{2}$ pouces par seconde. Je crois à la vérité qu'il seroit facile d'imaginer une machine pour obtenir réellement cet effet, car je trouve que dans la machine de Londres, on perd encore une très-grande partie de l'effet qu'on pourroit, tirer de l'action des vapeurs, mais je n'en suis pas moins persuadé que ces deux exemples calculés sur des principes infaillibles suffiront pour nous faire perdre toute espérance de pouvoir substituer sur les grands vaisseaux avec quelque succès considérable les forces motrices renfermées dans les choses naturelles aux travaux des hommes, à moins que ce ne soit dans des cas particuliers, qui ne demandent de semblables forces que pour peu de tems. Il y a après cela une autre réflexion à faire, c'est qu'il est difficile de faire un tel usage de ces forces motrices, qu'une très grande partie de leurs effets ne se perde inutilement. Le principe de l'effet utile consistera toujours dans la réaction d'une matiere poussée, & jettée en direction contraire à celle du vaisseau; cette matiere ne sçauroit être que de l'eau, & la force vive qu'on imprimera à ces eaux sera toujours un effet perdu; cette force vive perdue sera cependant d'autant plus petite, qu'on poussera, ou qu'on jettera une plus grande masse d'eau en tems égaux, & si cette masse étoit infinie, on ne perdroit rien à cet égard. Le recul d'un canon toujours chargé de la même quantité de poudre deviendroit deux fois plus grand, ſi on le chargeoit de quatre boulets au lieu d'un, & ſi on pouvoit faire un boulet d'un poids infini, toute la force de la poudre ſeroit *à cet égard*, employée utilement pour faire reculer le canon; je dis *à cet égard*, parce qu'on ne laiſſeroit pas de faire encore une autre perte très-conſidérable, c'eſt qu'auſſitôt que le boulet ſeroit ſorti du canon, il n'y auroit plus de réaction, & le reſte de la force de la poudre enflammée ſe perdroit encore inutilement, & ce reſte ſeroit toujours très-grand.

XXXVII.

Les réflexions que je viens de faire ſuffiſent pour voir en quoi conſiſtent les pertes qu'on fait des forces motrices en queſtion, elles ſont toutes compriſes (car je ne parlerai pas de quelques pertes entiérement accidentelles, telles que celles qui proviennent du frottement) dans le mouvement qu'on donne aux corps mobiles, qui ſervent en quelque façon d'appui, & dans la grande quantité des ferces motrices qu'on laiſſe inutilement échapper, & cette derniere perte fait le plus grand défaut de toutes les machines à feu qu'on a encore imaginées. La nature de ces deux pertes nous enſeigne d'abord tout ce qu'on peut faire pour nous approcher du plus grande effet qu'on peut tirer de ſemblables forces motrices; mais je vois aſſez que cet effet ne ſauroit jamais être aſſez grand pour mériter beaucoup d'attention. Je conclus donc que ſi nous avons donné la meilleure maniere d'employer le travail des hommes pour ſuppléer à l'action du vent, nous aurons en même tems montré de toutes les manieres praticables, qui ſoient poſſibles, celle dont on tirera le plus de profit.

Fin du N° 3. 1753.

MÉMOIRE

COMPOSÉ A L'OCCASION

DU PRIX PROPOSÉ

PAR L'ACADEMIE ROYALE

DES SCIENCES.

Dont le ſujet eſt : *L'examen des efforts qu'ont à ſoutenir toutes les parties du Vaiſſeau dans le roulis & dans le tangage, & la meilleure manière de procurer à leur aſſemblage la ſolidité néceſſaire pour réſiſter à ces efforts, ſans préjudicier aux autres bonnes qualités du Vaiſſeau.*

Par M. GROIGNARD, Conſtructeur des Vaiſſeaux du Roi, à l'Orient.

MÉMOIRE

Composé à l'occasion du prix proposé par l'Académie Royale des Sciences, dont le sujet est : *L'examen des efforts qu'ont à soutenir toutes les parties du Vaisseau dans le roulis & dans le tangage, & la meilleure manière de procurer à leur assemblage la solidité nécessaire pour résister à ces efforts, sans préjudicier aux autres bonnes qualités du Vaisseau.*

Vis unita major.

L'on entend par *tangage*, les balancemens que le vaisseau fait dans le sens de sa longueur, ou de l'avant à l'arrière; & par *roulis*, ceux qu'il fait dans le sens de sa largeur, ou d'un côté à l'autre.

Ces mouvemens peuvent être plus ou moins vifs, suivant la variation des impulsions du vent sur les voiles, & des lames sur les extrémités, ou sur les côtés du vaisseau.

Plusieurs géomètres, & sur-tout M. *Bouguer*, ont traité fort au long des causes du tangage & du roulis, & de la figure la plus avantageuse qu'il faudroit donner aux vaisseaux pour diminuer leurs effets. Il seroit à souhaiter que leurs écrits, aussi utiles que sçavans, fussent plus à la portée des personnes qui pourroient les appliquer à la pratique, & qui n'ont guères le temps d'étudier les calculs qui en démontrent les vérités.

Mon but, dans cet ouvrage, est d'examiner en détail les efforts que chaque partie du vaisseau doit ressentir des mouvemens du tangage & du roulis, & de procurer à chacune de ses parties le plus de force & de résistance possible contre les efforts qu'elle doit soutenir.

Pour me conformer à l'intention de l'Académie, qui me paroît avoir en vue de perfectionner la pratique de la construction, je ferai tous mes efforts pour ne rien établir qui ne soit démontré par l'expérience, applicable à la pratique, & à la portée de toutes les personnes qui devront le pratiquer.

Le sujet que j'ai a traiter ayant pour objet deux mouvemens différens, j'ai cru qu'il étoit à propos de le diviser en deux chapitres.

Le premier traitera des efforts du tangage, le second des efforts du roulis. Après avoir détaillé les moyens de fortifier chaque partie du vaisseau contre ces efforts, je terminerai chaque chapitre par quelques réflexions applicables à la pratique, sur la figure du vaisseau, & la distribution de la charge la plus avantageuse pour diminuer les effets du tangage & du roulis.

CHAPITRE PREMIER.

CHAPITRE PREMIER.

Des mouvemens du tangage.

Les mouvemens de tangage que reçoit le vaiſſeau dans le ſens de ſa longueur, peuvent être produits de deux façons : 1°. lorſqu'une lame, en frappant une de ſes extrémités, l'oblige de s'élever, tandis que l'autre s'enfonce : 2°. lorſque, la mer s'abaiſſant tout-à-coup ſous la proue ou ſous la pouppe, cette partie, qui n'eſt plus ſoutenue, retombe & entraîne avec elle le reſte du vaiſſeau, avec une vîteſſe & des ſecouſſes d'autant plus fortes, que ſes extrémités ſont plus taillées & chargées d'un plus grand poids.

Ces efforts répétés, qui ſe font toujours ſentir ſur les extrémités du vaiſſeau, tandis que la partie du milieu ſe trouve plus ſoutenue par la pouſſée verticale de l'eau, peuvent être comparés à ceux que recevroit une taſſe en gondole que l'on voudroit recourber en deſſous, en peſant ſur ſes extrémités. Elle devroit 1°. s'allonger par en haut, 2°. ſe recourber & ſe racourcir par en bas, 3°. enfin ſe retroicir. Ainſi, pour procurer aux vaiſſeaux le plus de ſolidité contre les mouvemens du tangage, on doit s'attacher à empêcher ces trois effets autant qu'il eſt poſſible.

ARTICLE PREMIER.

Des moyens d'empêcher que le vaiſſeau s'allonge par en haut.

Le vaiſſeau ne peut s'allonger par en haut, ſans que toutes ſes parties cédent en raiſon des efforts qu'elles ont à ſoutenir : d'où on peut conclure que moins il aura de parties fufceptibles d'allongement, plus il aura de difficulté à s'allonger. Examinons en détail quelles font les parties du vaiffeau qui peuvent s'allonger dans le fens de fa longueur ; & voyons s'il ne feroit pas poffible de leur donner une nouvelle forme plus avantageufe, & de les lier plus étroitement, en diminuant le nombre de leurs écarts ou de leurs joints dans le fens de la longueur du navire, fans qu'il foit néceffaire d'augmenter la pefanteur ni la force des pièces qui font déjà proportionnées à chaque rang de vaiffeau, & que l'on ne fçauroit admettre aux petits navires, fans les rendre plus lourds & fans faire tort à la conftruction des gros vaiffeaux.

De la partie de l'avant du vaiffeau, qu'on nomme la proue.

En jettant les yeux fur la *figure 1ere.*, qui repréfente le plan d'élévation de la proue du vaiffeau, on voit que cette partie de l'avant eft compofée d'une infinité de pièces A, qu'on nomme *allonges d'écubier.* Ces pièces ne font liées les unes aux autres que par des chevilles à pointes perdues, & peuvent fe défunir toutes dès que ces chevilles ont le moindre jeu, qu'elles acquerent très-facilement par le poids & le frottement des allonges d'écubier qui fe trouvent, pour ainfi dire, en l'air, & portent à faux, à caufe de l'élancement de l'*étrave P.*

Pour procurer à ces pièces plus de liaifon entr'elles, on met en dedans des *guirlandes* ou fortes pièces horizontales & obliques B, qui les recroifent vis-à-vis des ponts dans la calle, &c. Mais ces pièces ne font de liaifon avec les allonges d'écubier, que par les chevilles qui les traverfent, qui ont de la peine à foutenir leur pefanteur ; & ces guirlandes ne font jamais affez longues pour dépaffer les allonges d'écubier,

& les lier avec les membres : de sorte que cette partie de l'avant n'a de liaison avec le reste du vaisseau, que par les bordages extérieurs & intérieurs, & se délie d'autant plus aisément dans les mouvemens du tangage, qu'elle est extrêmement lourde & massive, sans que ses parties soient liées entr'elles ni avec le reste du vaisseau.

Au lieu de terminer la partie de l'avant du vaisseau, comme on l'a pratiqué jusqu'aujourd'hui, j'ai imaginé une nouvelle façon de former cette partie, où l'on trouvera non seulement plus de légèreté & une meilleure liaison pour diminuer & résister aux efforts du tangage, mais encore les autres avantages que j'ai cru devoir détailler à la fin de cet ouvrage, en démontrant les inconvénients de la méthode ordinaire.

De la partie de l'arrière qu'on nomme l'arcasse.

La partie de l'arrière du vaisseau, telle que l'exécutent les plus habiles constructeurs, ne laisse rien à desirer : aussi voit-on que cette partie qu'on nomme l'*arcasse* ne se ressent presque plus des efforts du tangage, quand elle est telle que la représentent les figures 7 & 8, formée par des pièces *A* en forme de varangues acculées & fourcats parallèles à la quille, entaillées & chevillées à l'*étambot B* & prolongées jusqu'à l'*estain C*, qui est dévoyé & porté le plus en avant qu'il est possible, pour être recroisé en dehors par une plus grande quantité de bordages, & en dedans par les vegres, marsoins & courbes d'écusson obliques, qui sont prolongées fort en avant pour lier cette partie de l'arrière avec le reste du vaisseau.

C'est la solidité de l'arcasse ainsi formée, & d'autant plus grande qu'on diminue la saillie de la voûte & de l'*étambot*, qui autorise la nouvelle forme que je propose de donner à l'avant ou à la proue du vaisseau.

Des membres, ou couples.

Après avoir rendu les parties de l'avant & de l'arrière, qui sont celles qui fatiguent le plus, aussi solides qu'elles peuvent l'être contre les efforts du tangage, examinons si la partie du vaisseau comprise entre ces deux extrêmes ne seroit pas aussi susceptible d'une meilleure forme, pour résister aux mêmes efforts.

Cette partie intermédiaire est composée, comme on le voit dans les figures 9, 10, 11, d'une quantité d'éléments *A*, qu'on appelle couples ou membres; & ces membres non seulement n'ont aucune liaison les uns avec les autres, avant que le vaisseau soit bordé & végré, mais même ils sont faits de façon, que les parties qui les composent, peuvent se désunir sans peine & faciliter l'allongement du vaisseau, bien loin de s'y opposer.

Effectivement, chaque membre composé de deux rangs de pièces *B C*, mises bout à bout & à côté les unes des autres pour recroiser les écarts, & qui se joignent, dans le sens de la longueur du vaisseau, par des chevilles qui ne peuvent être rivées ni goupillées, doit se désunir au moindre effort que le vaisseau fait pour s'allonger. De la désunion des membres vient celle des bordages, préceintes, végres, beauquières, sur lesquels ces pièces sont clouées & chevillées: de sorte que les membres doivent être regardés comme la partie essentielle à la liaison du navire, & que de leur solidité & de leur union dépend, en partie, celle de tout le vaisseau dans les mouvemens du tangage. On ne sçauroit donc trop s'attacher à les former de la façon la plus solide & la moins susceptible de désunion ou d'allongement; & j'ai imaginé, en conséquence, une nouvelle méthode de former les couples ou les membres des vaisseaux, (*fig.* 12^e. 13^e.

14e.) qui ne sçauroient s'allonger dans le sens de sa longueur, en même temps qu'ils soutiendront les écarts des bordages, préceintes, beauquières, qui ne pourront se désunir sans que les chevilles cassent ou les fibres du bois s'allongent & se compriment.

Comme ces nouveaux membres *A*, *fig.* 12e, 13e, 14e. seroient également avantageux contre les efforts du tangage & du roulis, j'ai cru devoir détailler à part, & un peu au long, à la fin de ce mémoire, la façon de les former, qui réunit beaucoup d'autres avantages également utiles à la pratique de la construction.

La proue, l'arcasse & les membres des vaisseaux faits comme je le propose, de façon que chacune de ces parties bien & solidement liée ne puisse céder aux mouvemens du tangage, je pourrois, sans le secours du bordage & du végrage, joindre toutes ces parties les unes avec les autres, pour former un tout depuis l'étrave jusqu'à l'étambot qui peut déjà résister aux efforts que le vaisseau voudroit faire pour s'allonger, & même le mettre en état d'être mis à flot & de pouvoir naviguer.

Il suffiroit, pour cela, de placer, *fig.* 15e, entre chaque intervalle ou maille des membres, à toutes les empatures ou écarts des pièces, des remplissages ou clefs *C*, de quatre à six pieds de longueur entaillées à queue dans les deux membres *A*, qu'elles joindroient: & aux endroits où sont percés les sabords *I*, on placeroit des feuillets *S*, entaillés aussi à queue, pour joindre les membres de cette partie.

Toutes ces pièces & feuillets ainsi entaillés, serreroient les membres les uns contre les autres, avec les parties de l'avant & de l'arrière, & l'on conçoit que la coque d'un vaisseau ainsi formée feroit très-difficile à désunir, & même que si ces calles, ou remplissages *C* se joignoient bout à bout, depuis la quille jusqu'au plat-bord, & si on calfatoit les joints, un pareil vaiſſeau pourroit être mis à flot & naviguer peut-être avec ſureté ; au lieu que ceux faits ſuivant l'uſage ordinaire ſont toujours prêts à ſe déſunir, & ne ſçauroient ſoutenir aucun effort dans le ſens de leur longueur avant d'avoir été bordés & végrés.

Des ponts.

Les ponts ou planchers des vaiſſeaux (*fig.* 16e.), peuvent être regardé comme les cordes d'un arc, qui eſt d'autant plus difficile à détendre, que ces cordes ſont plus fortes & moins ſuceptibles d'allongement.

La première attention que l'on doit avoir, c'eſt de diminuer, le plus qu'il eſt poſſible, la courbure des ponts dans le ſens de la longueur du vaiſſeau, parce que cette courbure leur permet de ſe redreſſer & de s'allonger ſans difficulté, & alors ils ne ſont pas plus d'effet ſur les extrémités du vaiſſeau, qu'une corde lâche ſur l'arc qui voudroit ſe détendre.

Les ponts ſont compoſés de pluſieurs pièces qui doivent toutes contribuer à leur plus grande ſolidité, & dont je vais parler en détail, en eſſayant de les faire & de les ajuſter d'une façon plus propre à réſiſter aux efforts qu'ils ont à ſoutenir.

Des baux.

Les *baux* ou poutres *A* (*fig.* 16e). ſont les pièces principales dont les ponts ſont formés. Ces beaux ſont ordinairement faits de deux pièces *B*. *C*. (*fig.* 17e). jointes de côté & chevillées de même.

On conçoit que les écarts de ces beaux peuvent ſe déſunir dans le ſens de la longueur du vaiſſeau ; ce qui facilite la déſunion des écarts des pièces qui recouvrent les ponts, & l'allongement dudit pont. Il eſt vrai que les illoires renverſées que l'on met ſous les beaux des premiers ponts, empêchent que leurs écarts s'ouvrent avec facilité ; mais il n'y a point d'illoires renversées sous les beaux des seconds ponts, qui sont les plus élevés, &, par conséquent, les plus avantageusement placés contre l'allongement du vaisseau ; & les illoires, qui sont sous les beaux des premiers ponts, ne sont jamais entaillées avec assez de justesse, elles sèchent dans les calles ; & l'expérience nous apprend que tous les écarts des beaux des vieux vaisseaux, quand on vient à radouber & déborder leurs ponts, sont ouverts & désunis, souvent à passer les doigts dans les joints, ce qu'on ne sçauroit empêcher en faisant les beaux suivant l'usage ordinaire.

Je ne vois rien de si simple que d'assembler les deux pièces, qui forment le beau de dessus en dessous, dans le sens de leur épaisseur, au lieu de le faire dans le sens de leur largeur (*fig.* 17ᵉ.). Le seul inconvénient qu'on pourroit y trouver, c'est de diminuer la hauteur des calles & entre-ponts des navires, de l'épaisseur du renfort qu'on a coutume de laisser aux bouts des pièces qui forment les écarts : mais je ne vois pas que cette objection convienne aux vaisseaux de guerre, dont les calles ne sont jamais remplies & les entre-ponts fort élevés : & je pense qu'on pourroit se dispenser de laisser des renforts aux bouts des écarts *B*, *C*, de ceux-ci (*fig.* 18ᵉ.), parce que les pièces qui les forment résistent de toute leur épaisseur ; au lieu qu'aux autres (*fig.* 17ᵉ.), ce n'est que les chevilles & les étances qui s'opposent aux efforts qu'ils ont à soutenir de haut en bas, & au poids de l'artillerie.

Des arcboutans.

Les arcboutans *B* (*fig.* 16ᵉ.) sont de pièces de bois de trois à quatre pouces d'épaisseur au quarré, qui sont placées d'un beau à l'autre de l'avant à l'arrière. On met ordinairement à chaque pont trois rangs d'arcboutans, un rang au milieu de la largeur du pont, & un autre de chaque côté entre le bord & le milieu.

Ces arcboutans ne font d'autre effet que d'empêcher les baux de ſe rapprocher & de ſoutenir les barrotins *C*. On les entaille ſeulement d'un pouce dans chaque bau ; de ſorte qu'au moindre jeu tous ces arcboutans deviennent inutiles, & ne font aucun effet pour s'oppoſer à l'allongement des ponts.

Je voudrois, à la place du rang d'arcboutans du milieu (*fig. 16e.*), qui eſt interrompu par chaque écoutille, & étambraie & carlingue des mâts, placés, depuis l'avant juſqu'à l'arrière, entre les coutilles une illoire *B*, qui entailleroit dans chaque beau de l'épaiſſeur des barrotins, & déborderoit, au-deſſus du beau, de l'épaiſſeur du bordage du pont, dont elle feroit partie. Cette illoire *B* (*fig. 19e.*) auroit de chaque côté une rablure ou feilleure de trois pouces, pour recevoir les bouts des barrotins qui feroient entaillés à queue dans ladite feilleure, & lieroit enſemble tous les baux qui ſe trouvent entre les mâts & écoutilles. On pourroit même mettre entre chaque bau du premier pont une fourrure bien ajuſtée, pour remplir le vuide qui ſe trouveroit entre l'illoire renverſée & celle-ci, & paſſer des chevilles de deſſus en deſſous ; ce qui feroit une liaiſon bien ſolide.

A la place des deux rangs d'arcboutans, que l'on place entre ceux du milieu & du bord (*fig. 16e.*), je voudrois mettre (*fig. 19e.*) des entremiſes *D* de ſix à à huit pouces de largeur, & quatre pouces d'épaiſſeur entaillées, à queue ſur chaque bau, & clouées de deux cloux à chaque bout, pour empêcher le jeu & l'écartement des baux.

Des barrotins.

Les barrotins *C* (*fig. 16e.*) ſont de pièces de bois de de chêne ou de ſapin, de huit à onze pouces de largeur, & ſix à huit pieds de longueur, que l'on place entre chaque bau, à la hauteur du deſſus deſdits baux, ſur une feilleure de deux à trois pouces, pratiquée dans l'entaille des illoires & gouttières qui ſupportent leſdits barrotins.

Ces barrotins ne ſervent qu'à remplir une partie du vuide qui ſe trouve entre les baux, pour ſoutenir les bordages du pont, l'étoupe des coutures, & faire un meilleur calfatage.

Au lieu de placer ces barrotins d'une illoire à l'autre (*fig.* 16ᵉ.), je voudrois les faire venir (*fig.* 19ᵉ.) depuis le bord où ils feroient entaillés à queue & cloués ſur les entremiſes que l'on met à l'extrémité des bouts des baux, juſqu'à l'illoire du milieu *B*, où ils feroient auſſi entaillés à queue & cloués, en même temps qu'ils feroient entaillés & cloués ſur l'entremiſe *D*, que j'ai placée, au lieu d'arcboutans, entre l'illoire du milieu & le bord.

Ces barrotins ainſi placés, formeroient preſque un ſecond rang de beaux, & feroient aſſez ſolides pour y entailler les illoires & clouer les bordages; mais ils feroient encore plus avantageux pour s'oppoſer aux efforts du roulis, & j'en démontrerai l'utilité.

Des guirlandes, barres de ponts & courbes d'écuſſon.

On place, ſur l'extrémité des ponts horiſontalement, en arrière, entaillée ſur l'étambot, une forte pièce de bois *P* (*fig.* 16ᵉ. & 19ᵉ.), qu'on nomme barre de pont, & en avant, ſur l'étrave & allonges d'écubier, de fortes pièces à peu près ſemblables, qu'on nomme guirlandes. Ces deux pièces peuvent être regardées comme les deux derniers baux. C'eſt ſur elles que ſont clouées tous les bouts des bordages & illoires; &, comme elles ſont en même temps chevillées contre les extrémités du vaiſſeau, elles ſoutiennent les efforts que font les extrémités du navire pour tomber, & les efforts que font les ponts pour s'allonger.

Ainſi, les guirlandes font, dans la partie de l'avant du vaiſſeau, une forte liaiſon; on en met une à chaque pont, ſous le beaupré, ſous les écubiers, & pluſieurs dans la calle. Mais, comme elles ſont fort difficiles à trouver, & qu'elles ſont ordinairement fort courtes, je voudrois augmenter leur longueur, dont dépend la meilleure liaiſon, par des allonges bien ajuſtées, & les entailler dans le végrage que l'on pourroit laiſſer plus épais dans cette partie, pour lui pratiquer des addents qui ſupporteroient en partie les poids des guirlandes, & réſiſteroient avec les chevilles aux efforts qu'elles ont à ſoutenir.

Je voudrois auſſi entailler & bien cheviller, ſur ces guirlandes & ſur la barre de pont, tous les bouts des illoires & bordages des ponts pour les empêcher de larguer. Mais rien ne me paroit plus ſolide, pour lier les ponts avec les extrémités du vaiſſeau, que de placer, en avant & en arrière (*fig. 19^e^.*), deux fortes courbes verticales *K*, dont une branche ſeroit chevillée, en avant, contre l'étrave & contre-trave; &, en arrière, contre l'étambot; & l'autre branche ſeroit prolongée ſur le pont, portant ſur l'illoire du milieu, à laquelle on laiſſeroit, ſur ces extrémités, plus d'épaiſſeur & des addents, & ſeroit chevillée avec ladite illoire, guirlandes, barres de ponts. Ces deux courbes joindroient les extrémités des ponts avec celles du vaiſſeau; ce qui, répété à chaque pont, s'oppoſeroit fortement aux effets du tangage.

Pour pouvoir prolonger l'illoire du milieu (*fig. 19^e^.*) juſqu'à l'étambot *L*, & placer ſur cette illoire la courbe verticale *K*, il faudroit percer l'écoutille de rechange *G* (*fig. 16^e^.*) du maître canonier à côté de ladite illoire, ſur babord ou ſur tribord (*fig. 19^e^.*), ce qui ne souffriroit aucune difficulté : on pourroit même prolonger ladite illoire, & lui faire former la carlingue du mât d'artimon, en perçant aussi de côté l'écoutille aux poudres *H* (*fig.* 16^e^. & 19^e^.).

Les courbes d'écusson sont de fortes pièces de bois qu'on place en écharpe, dans la partie de l'arrière, sur les barres d'arcasse & d'écusson, au-dessous du premier pont, pour recroiser l'arcasse & la lier avec les couples de l'arrière. La liaison de ces pièces sera d'autant plus forte qu'on augmentera leur longueur, & qu'elles seront bien ajustées & entaillées sur le végrage, & bien chevillées & entaillées contre les barres d'écusson & les couples de l'arrière.

Des courbes de pont.

Les courbes de pont sont des pièces de bois ou de fer en équerre, dont l'angle est plus ou moins ouvert suivant la figure du vaisseau. Une branche de ces courbes est chevillée & entaillée contre le bau ; & l'autre contre le côté du vaisseau. Leur effet est de diminuer la portée des baux, de les empêcher de s'écarter du côté du vaisseau, & de fortifier en même temps le membre sur lequel elles portent ; ces courbes sont ordinairement placées perpendiculairement, & chevillées sur un seul membre.

Je voudrois donner aux courbes de pont une direction oblique, de façon que la branche d'une même courbe embrassât plusieurs membres, & que la tête de l'une répondît à la queue de l'autre ; ce qui formeroit, de l'avant à l'arrière, une espèce de chaîne & forte ceinture, qui lieroit le vaisseau dans le sens de sa longueur, & s'opposeroit aux efforts du tangage en même temps quelle empêcheroit les baux de s'écarter du bord, & diminueroit leur portée.

Des fourrures de gouttières, gouttières, illoires, & bordages des ponts.

Les fourrures de gouttières *L* (*fig.* 16e & 19e) sont des pièces qui s'ajustent sur les bouts des baux & contre le côté du vaisseau. Elles sont taillées en grain d'orge, ont ordinairement dix à douze pouces en quarré, le plus de longueur qu'il est possible; & entaillent à queue dans tous les bouts des baux, depuis l'avant jusqu'à l'arrière, ainsi que les gouttières *M*, avec lesquels elles sont chevillées par de longues chevilles que l'on frappe par dehors & qui sont goupillées en dedans sur les gouttières, précisément au-dessous des bordages du pont. On place ordinairement deux chevilles entre chaque bau; ce qui fait un tout depuis l'avant jusqu'à l'arrière des gouttières, fourrures de gouttières & du côté du vaisseau. Les illoires *N*. (*fig.* 16e & 19e.) entaillent aussi à queue & à tenon dans tous les baux & barrottins, & font partie des bordages des ponts.

On met ordinairement, sur chaque pont, deux rangs de fourrures de gouttière, quatre rangs de gouttières, & huit rangs d'illoires, disposés comme il est marqué sur les *fig.* 16e. & 19e.

Si on joint à la liaison que forment toutes ces pièces entaillées, celle qui doit résulter de la nouvelle façon d'ajuster les beaux, arcboutants, barrottins, courbes verticales, &c. que je viens de détailler; on conçoit que ce nouveau pont doit être bien plus solide & avoir plus de difficulté à s'allonger, surtout si on a attention de rendre toutes les pièces & bordages, qui recouvrent les ponts, les plus longues & les plus droites en tout sens, en ne donnant aux ponts que l'arc ou la courbure absolument nécessaire pour faciliter l'écoulement des eaux vers le milieu,

& empêcher qu'elles ne séjournent sur les extrémités du navire ; ce qui seroit très-incommode & occasionneroit bientôt la pourriture.

Des bordages intérieurs & extérieurs.

Rien ne s'oppose plus aux efforts que fait le vaisseau dans les mouvemens du tangage, que les bordages extérieurs & intérieurs qu'on nomme végrage.

On végroit autrefois obliquement la partie du vaisseau comprise entre les végres d'empature & la serre beauquière, & l'on prétendoit que ces végres, ou serres obliques, étoient autant d'arcboutants qui soutenoient le vaisseau contre les efforts qu'il fait pour arquer. Mais on ne faisoit pas attention que, pour placer ces végres ou arcboutants, il faut leur donner une courbure qui facilite l'allongement qu'ils doivent prendre, lorsque les végres d'empature & les beauquières, qui leur servent de point d'appui, cédent aux efforts du tangage. D'ailleurs ces arcboutants ou végres obliques, qui ne peuvent avoir, tout au plus, que quatre pouces d'épaisseur dans les gros vaisseaux, & qui n'embrassent ordinairement que trois ou quatre membres, ne peuvent pas faire un grand effet ni une liaison continue ; parce qu'on est obligé de laisser, dans la calle, des jours ou intervalles entre les végres, pour pouvoir découvrir les voyes d'eau ; ce qui forme comme une espèce de treillis dans la calle, & toute interruption dans les ouvrages de charpente diminue la solidité.

J'approuverois beaucoup cette méthode, si on pouvoit la pratiquer de façon que toutes les végres, parfaitement droites, eussent la même obliquité, sans aucune interruption, depuis l'avant jusqu'à l'arrière ; mais comme la chose n'est pas praticable, on a eu raison d'abandonner cette façon de végrer obliquement ; quoiqu'elle soit plus économe en employant des bordages plus courts. L'on donne à présent, aux bordages intérieurs, à peu près la même direction qu'aux bordages extérieurs, afin que les deux forces de ces bordages réunies s'opposent en même temps aux mêmes efforts.

On entaille ordinairement d'un pouce & demi ou de deux pouces, dans les membres, les deux rangs de végres qui répondent aux empatures des varangues & des genoux, & que l'on nomme pour cela végres d'empature, pour empêcher le jeu & fortifier le vaisseau dans cette partie où il porte quand il vient à échouer.

Il y a des constructeurs qui entaillent aussi dans les membres, les beauquières, les préceintes, lisses & serres de platbord, &c. Toutes ces entailles ne peuvent que contribuer à une meilleure liaison, mais il en résulte plusieurs inconvéniens.

1°. Il faut des bordages d'autant plus épais que l'entaille est plus forte. Ces bordages sont plus rares coûtent plus cher, consomment plus de bois de plus fort échantillon, qui, étant presque sur le retour, sont moins vigoureux & plutôt pourris.

2°. Il faut employer plus de temps & plus de journées d'ouvriers pour les travailler & les mettre en place.

3°. Ces entailles qui recouvrent les membres & empêchent l'air de les rafraichir, occasionnent plutôt leur pourriture.

4°. Enfin la rondeur & la figure irrégulière du vaisseau ne permettent pas, quelque attention que l'on aie, que l'on puisse faire ces entailles avec assez de justesse pour qu'il n'y ait pas du jour d'un côté ou de l'autre, quand les pièces sont mises en place.

Toutes ces raisons, confirmées par l'expérience, ont fait prendre le parti de ne plus entailler dans les membres le bordage & le végrage. On pourroit cependant entailler avec ſuccès les liſſes & ſerres de platbord, parce que, le vaiſſeau n'ayant preſque point de courbure dans cet endroit, les entailles ſeroient plus juſtes, & formeroient une forte liaiſon dans cette extrémité qui tend le plus à s'allonger.

L'attention ſingulière que l'on doit avoir dans le bordage & végrage, c'eſt de donner à toutes les pièces le plus de longueur & la direction la plus horiſontale, afin qu'elles puiſſent moins s'allonger. Il faut auſſi s'attacher à bien recroiſer les écarts, & à les arrêter par deux forts clous & une cheville frappée par dehors & rivée par dedans, à chaque bout de bordage. On peut auſſi pratiquer, aux écarts des beauquières & autres pièces de liaiſon, des addents d'un pouce ſur le quant, en forme de cramaillères, pour que les pièces qui les recroiſent en deſſus & en deſſous les empêchent de larguer.

ARTICLE SECOND.

Des moyens d'empêcher le vaiſſeau de ſe racourcir & ſe recourber par en bas.

LE vaiſſeau ne ſçauroit ſe raccourcir & ſe recourber par en bas, ſans que ſa quille, contrequille, carlingue, &c. de droites deviennent courbes; ce qui ne peut ſe faire ſans que leurs écarts larguent ou ſe compriment. On a donné, en conſéquence, à toutes ces pièces, le plus de longueur & de force poſſible, ſurtout en hauteur, proportionnellement à la grandeur des vaiſſeaux: mais je voudrois qu'au lieu de faire les écarts de la quille, contrequille & carlingue, dans le ſens de la hauteur (*fig. 5e. & 6e.*) ou de deſſus en deſſous, comme on le pratique ordinairement, on les fit dans le ſens de la largeur (*fig. 15e.*), pour les cheviller de côté au lieu de bas en haut ; parce qu'alors ses écarts s'opposeroient directement, & avec plus de force aux efforts qu'ils ont à soutenir.

Il faut aussi, pour que le vaisseau se racourcisse par en bas, que toutes ses parties voisines de la quille, carlingue, &c. se rapprochent & se compriment. C'est pourquoi on a imaginé de placer entre les membres, au-dessus de la quille, & aux bouts des varangues, des clefs ou remplissages (*fig.* 15[e].), en forme de coins de dix-huit à vingt pouces de longueur, que l'on frappe à force, par dedans, pour remplir le vuide qui se trouve entre les membres, seulement au-dessus de la quille & aux empatures des varangues & des genoux.

Je voudrois remplir en entier tout le fond du vaisseau, depuis la quille jusqu'au bout des genoux, en laissant d'abord porter aux varangues & genoux toute la largeur que fournissent ces pièces avant de les travailler, & en plaçant ensuite, dans le plus petit intervalle qui resteroit entre les membres, des bordages de la longueur & épaisseur qu'elles exigeroient ; ou bien, pour plus d'économie, de bouts de bois de trois ou quatre pieds, bout à bout, pour remplir exactement tout le vuide qui se trouveroit depuis l'avant jusqu'à l'arrière, entre la quille & les empatures des varangues. Mais, au lieu de frapper ces pièces ou clefs par dedans, comme on le pratique ordinairement, je voudrois les frapper par dehors, en leur donnant de l'entrée en forme de coin, afin qu'elles fussent forcées principalement sur le quant extérieur des membres, où doit se faire le plus grand effort.

Le vaisseau se trouvant ainsi plein dans cette partie, depuis l'étrave jusqu'à l'étambot, pourroit être regardé comme d'une seule pièce, & ne sçauroit se raccourcir qu'autant que toutes ses parties pourroient se comprimer ; ce qui seroit d'autant plus difficile qu'elles auroient déjà été placées avec plus de force, & qu'on auroit

auroit eu attention de choisir les bois les plus secs & les plus compactes.

Il ne pourroit résulter, de cette façon de remplir le fond du navire, aucun inconvénient pour la pratique de la construction, ni pour les qualités du vaisseau. La pesanteur en bois que l'on ajouteroit à celle de la coque, seroit déduite de celle du lest, qui ne sçauroit être placé plus avantageusement.

En pratiquant en dehors & en dedans, le long des clefs ou remplissages, un petit canal de deux à trois pouces de largeur & autant de profondeur, en forme de goutière, les eaux viendroient se rendre aux lumières & à la pompe ; & comme elles ne pourroient ni séjourner ni croupir entre les mailles des membres, qui se trouveroient remplies, les calles des navires & les entreponts n'en seroient point infectés, & ne communiqueroient point leur mauvais air aux équipages, &c. On n'auroit point à craindre des voyes d'eau dans les échouages qu'un vaisseau ainsi construit seroit bien plus en état de soutenir.

Des iloires renversées, & étances de la calle.

Les illoires renversées sont de longues & fortes pièces de bois, de onze à douze pouces en quarré, que l'on met au-dessous des baux du premier pont, au milieu de la largeur du vaisseau, depuis l'avant jusqu'à l'arrière, entre les écoutilles & les mâts. Ces pièces sont entaillées & chevillées à chaque bau ; & c'est sous elles qu'arcboutent toutes les étances ou épontilles de la calle, que l'on place perpendiculairement sur la carlingue aux baux qui forment les écoutilles, & de distance en distance entre les écoutilles, pour soutenir les premiers ponts.

Rien ne peut s'opposer plus directement à l'arc du vaisseau, ou à la courbure qu'il voudroit prendre par en bas, que ces étançes & illoires renversées. Au moyen de l'illoire renversée, l'effet des étances se communique également à tous les baux du pont qu'elle embrasse ; & comme les étances portent sur la carlingue qui est chevillée avec la quille, contrequille, varangues, &c. il faut que le premier pont se ressente des efforts que fait la quille pour arquer, & qu'il prenne le même arc ou la même courbure que la quille, ou que les étances se raccourcissent en se recourbant, ou en prenant une direction oblique.

Il est donc bien nécessaire de donner aux étances toute la force & la solidité pour se roidir contre ces efforts, de les multiplier, autant qu'il est possible, sans gêner l'arrimage des vaisseaux ; enfin, de les ajuster & entailler, de façon qu'elle ne puissent prendre aucune obliquité. On pratique ordinairement à ces étances un tenon à la tête, qui entre dans l'illoire renversée, & des taquets, sur la carlingue, qui retiennent le pied.

Je voudrois y joindre des équerres, ou étrieux de fer, & des arcboutans en forme de potence aux endroits où elles sont trop éloignées ; enfin, porter toute l'attention possible, pour qu'au moyen de ces étances & illoires renversées, la quille, contrequille, varangues, carlingue & les ponts, ne forment, pour ainsi dire, qu'un tout, & résistent ensemble & avec plus de force aux efforts que fait le vaisseau pour se recourber en dessous.

ARTICLE TROISIÉME.

Des moyens d'empêcher le vaisseau de se rétrecir.

ON ne sçauroit concevoir qu'un corps homogène, fait d'une seule pièce, puisse s'allonger par en haut, & se raccourcir en se recourbant par en bas, sans se rétrecir en même temps ; & l'on feroit porté à croire qu'un vieux vaiſſeau arqué devroit être plus étroit que dans le principe de ſa conſtruction. Mais, ſi on fait attention que le vaiſſeau eſt compoſé d'une infinité de parties qui peuvent céder, comme je viens de le démontrer, aux efforts qu'il fait pour s'allonger, & d'une infinité d'autres qui s'oppoſent à ceux qu'il fait pour ſe rétrecir, comme je le prouverai en parlant du roulis, il eſt clair que, ſi les premieres réſiſtent moins que les dernières, il pourra s'allonger ſans ſe rétrecir. L'expérience le confirme, & nous fait voir que tous les vieux vaiſſeaux, ont ordinairement quatre à ſix pouces plus de largeur que lorſqu'ils ont été conſtruits.

Ainſi, bien loin d'imaginer des moyens pour empêcher les vaiſſeaux de ſe rétrecir, je m'appliquerai à en chercher des contraires en traitant des mouvemens du roulis, & je terminerai mes recherches, ſur les mouvemens du tangage, par quelques réflexions ſur la figure de la caréne & la diſtribution de la charge la plus avantageuſe pour diminuer leurs efforts.

Quelqu'attention que l'on apporte à lier les vaiſſeaux, ſi la figure de leur caréne, & la diſtribution de leur charge n'eſt pas telle, que le poids de chacune de ſes parties ſoit égal à ſon déplacement d'eau, ce qui eſt preſque impoſſible, le vaiſſeau, dans le port ou à l'ancre dans la rade, ſans aucun mouvement, tendra à ſe délier.

Il arrive preſque toujours que le déplacement, &, par conſéquent, la pouſſée verticale de l'eau, comparée aux poids des différentes parties du vaiſſeau, eſt plus forte au milieu, à l'endroit de ſa plus grande largeur, qu'aux extrémités qui ſont plus taillées, & plus chargées du poids des œuvres mortes quand le vaiſſeau eſt vuide, & du poids des ancres, cables, &c., quand il eſt chargé.

Il ſuit de-là, que de deux vaiſſeaux qui auroient même capacité ou même déplacement avec les mêmes proportions & le même tirant d'eau, celui qui auroit un maître gabari fort ouvert & les extrémités fort taillées, arqueroit avec plus de facilité que celui qui auroit le maître gabari plus taillé & les extrémités plus ſoutenues.

On pourroit corriger en partie le défaut du premier dans ſon chargement, en ayant attention de raſſembler dans le milieu où ſeroit ſa plus grande capacité, la plus grande quantité de leſt de fer & de parties lourdes, & de ne laiſſer, dans ſes extrémités, que les choſes les plus légères, & qui doivent néceſſairement y reſter.

Enfin, le principe dont on doit toujours faire uſage, dans la conſtruction & dans le chargement ou arrimage des vaiſſeaux, pour diminuer les efforts & les effets du tangage, c'eſt de rendre le poids de chaque partie le plus proportionnel au volume d'eau qui lui répond, ce qui dépend, comme on vient de le voir, & de la figure de la caréne & de la diſtribution de la charge.

L'œuvre morte du vaiſſeau, ou la partie qui eſt hors de l'eau, peut auſſi contribuer à le faire arquer. Nous venons de voir qu'il n'eſt guères poſſible que les extrémités du vaiſſeau ne ſoient pas plus peſantes que le volume d'eau qu'elles déplacent. Si on joint à la peſanteur, de ce qu'elles doivent porter néceſſairement, celle qu'une trop grande hauteur d'œuvres mortes occaſionneroit, on conviendra que c'eſt avec raiſon que les habiles conſtructeurs s'attachent à les rendre moins hautes & plus légères, ſur-tout vers les extrémités.

Ce poids d'œuvres mortes eſt plus nuiſible aux vaiſſeaux vuides, dans le port, qu'à ceux qui ſont chargés, parce qu'alors ils tirent très-peu d'eau, & leurs extrémités, qui ſe trouvent preſque en l'air à cauſe des façons de l'avant & de l'arrière, tendent plus à ſe délier. Il eſt donc alors plus néceſſaire de charger de leſt la partie du milieu, & de ſubmerger, par ce moyen, le vaiſſeau autant que la profondeur du port peut le permettre.

Il ſeroit auſſi à ſouhaiter que l'on put avoir aſſez de pontons pour y amarrer tous les vaiſſeaux qui ſe trouvent dans les ports, afin de pouvoir ſoulager leurs extrémités des chaînes & cables qui les retiennent ordinairement, & dont le poids & les efforts, dans les hautes marées, tendent beaucoup à les délier.

Au défaut de pontons, on pourroit ſe ſervir, avec ſuccès, de coffres ou corps vuides ajuſtés aux extrémités des vaiſſeaux, dont le déplacement fut à peu près égal aux poids des chaînes, cables & œuvres mortes. Par ces moyens, on conſerveroit les vaiſſeaux dans le port où ils acquièrent ſouvent plus d'arc que dans de longues campagnes.

CHAPITRE SECOND.

Des mouvemens du roulis.

LES mouvemens du roulis ſont ceux qui s'exercent dans le ſens de la largeur du vaiſſeau. Ces mouvemens peuvent être plus ou moins vifs, ſuivant la variation des impulſions du vent ſur les voiles & des lames ſur le côté du navire. La figure du vaiſſeau, la poſition de ſon centre de gravité & la diſtribution de ſa charge, peuvent auſſi beaucoup contribuer à augmenter ou à diminuer la vivacité des mouvemens du roulis. Ils produiſent, dans le ſens de la largeur du vaiſſeau, à peu près les mêmes effets que les mouvemens du tangage dans le ſens de ſa longueur, c'eſt-à-dire, que les roulis tendent à délier & à recourber les côtés du vaiſſeau, & à augmenter ſa largeur.

On ne peut guères concevoir un navire incliné sur un côté qui porte tout son poids, & qui est repoussé avec la même force sans que ce côté s'applatisse, en même temps que le côté opposé, qui est hors de l'eau, tend à s'allonger par les efforts que font les aubans, & chaînes d'aubans qu'il soutient, & qui portent seuls du côté opposé à l'inclinaison, tout le poids des mâts, vergues, voiles, &c.

Nous avons de ceci une preuve bien sensible : quand on met un vaisseau en caréne, ou les efforts que l'on fait pour l'incliner tout vuide, sont bien moins grands que ceux qu'il reçoit tout chargé. Quelque attention qu'on ait eu à le bien calfater sur les chantiers, & quoique le bois & l'étoupe s'enflent lorsqu'il est mis à l'eau, on fait néanmoins entrer sans peine de nouvelles étoupes quand il est viré en caréne, du côté opposé à l'inclinaison, tandis qu'on auroit de la peine à introduire la pointe d'un couteau dans les joints du côté incliné : ce qui ne peut se faire, sans qu'un côté s'allonge, & l'autre se comprime en prenant une courbure contraire.

Il n'en est pas de même d'un vaisseau que l'on caréne dans un bassin ; les deux côtés sont également difficiles à calfater étant également resserrés par la pesanteur égale du navire : d'où on peut conclure que la caréne d'un vaisseau, dans un bassin, tend moins à le délier ; mais elle n'est pas aussi sûre ni aussi solide, que celle qu'il reçoit à flot, sur-tout s'il a fait plusieurs campagnes.

Des différentes courbures que prennent les côtés du vaisseau, dans les mouvemens du roulis, suit nécessairement la désunion des pièces qui forment lesdits côtés, dont les bordages & vaigres s'ouvrent quelquefois à passer les doigts dans les joints, dans les endroits voisins des porte-aubans ; & des efforts que font les aubans & chaînes d'aubans pour attirer successivement les côtés du vaisseau, ce qui produit la désunion des côtés avec les ponts & la plus grande ouverture, ou largeur du navire. Je vais essayer de fournir les moyens pour obvier, autant qu'il est possible, à ces deux inconvéniens.

ARTICLE PREMIER.

Des moyens d'empêcher la désunion des côtés du vaisseau.

LES principales pièces qui forment les côtés du vaisseau, sont les membres, les bordages, le vaigrage, & les porques *P*, (*fig.* 9^e, 10^e, & 11^e.).

Les bordages & le vaigrage ne peuvent résister aux mouvemens du roulis, qu'autant que les membres qui les portent, & sur lesquels ils sont cloués & chevillés, sont solides & n'ont point de jeu. Ainsi la principale force du côté du vaisseau contre les roulis, vient de celle des membres; & c'est sur la meilleure façon de lier les membres que nous devons sur-tout insister.

En examinant la façon dont les membres sont faits, on ne peut s'empêcher de convenir que leur assemblage est encore moins avantageux pour résister aux roulis qu'au tangage (*fig.* 9^e, 10^e, & 11^e.) : c'est ce que je démontre dans la nouvelle façon de former les membres des vaisseaux, qui réunit les deux avantages d'être infiniment plus solides contre les mouvemens du tangage & du roulis.

Les porques, que l'on met sur le vaigrage, forment d'abord une bonne liaison (*fig.* 10.) ; mais, comme ce ne sont que des membres faits comme à l'ordinaire, & qu'ils sont chevillés sur les autres, ils sont sujets aux mêmes inconvéniens d'être bientôt déliés. Ils sont d'ailleurs fort éloignés les uns des autres, & causent tant de difficulté dans les arrimages & dans les radoubs, que l'on desire depuis longtemps leur suppression.

La meilleure façon de fortifier le côté du vaiſſeau, en faiſant les membres comme à l'ordinaire, ſeroit d'entailler d'un pouce dans leur épaiſſeur au-deſſus des écarts des pièces qui les forment, un ou deux rangs de vaigrès ou bordages, & de faire auſſi entailler d'un pouce ou deux les porques dans les jours que l'on laiſſe entrer les vaigres de la calle. Toutes ces entailles formeroient des arrêts qui réſiſteroient d'autant aux efforts, que font les membres pour ſe déſunir; mais elles ſeroient ſujettes aux inconvéniens que j'ai détaillés en parlant du tangage.

Je ne vois donc rien de plus avantageux, pour rendre le côté du vaiſſeau auſſi ſolide qu'il eſt poſſible contre les mouvemens du roulis, que de former les membres, qui en font la principale force, ſuivant la nouvelle méthode que je détaille à la fin de cet ouvrage, (*fig.* 12e. 13e. & 14e.) & dont l'application, auſſi ſimple qu'économe dans la pratique, convient également pour réſiſter aux mouvemens du roulis & du tangage.

ARTICLE SECOND.

Des moyens d'empêcher le vaiſſeau de s'ouvrir & s'élargir.

RIEN ne peut s'oppoſer avec plus de force à la plus grande ouverture du vaiſſeau que les ponts & gaillards placés à différentes hauteurs.

Les baux ou poutres de ces ponts ſervent de cordes aux membres qui les portent, & à tout le côté du vaiſſeau, par le moyen des ſerre-bauquières, fourrures de goutières, &c. Ces membres ne ſçauroient s'ouvrir ſans s'écarter des extrémités des baux qui leur ſont fortement attachés, ſi on pouvoit rendre les baux parfaitement droits, & ajuſter leurs écarts de façon qu'ils ne puſſent pas larguer, quand ils ſont faits de deux pièces,

pièces, ce qui eſt ordinaire aux vaiſſeaux de guerre.

On eſt néceſſairement obligé de donner aux baux une certaine courbure dans le ſens de leur longueur, afin que les eaux, qui tombent ſur les ponts, prennent leurs cours vers les côtés du vaiſſeau où on pratique des ouvertures ou dalots pour leurs écoulemens.

Cette rondeur des baux eſt encore néceſſaire pour s'oppoſer au recul du canon, & diminuer l'effort qu'il feroit ſur le côté du vaiſſeau, ſi le pont horiſontal lui permettoit de reculer avec plus de facilité.

Enfin, on ne peut ſe diſpenſer de donner de la rondeur aux baux, & alors ils facilitent plus qu'ils ne s'oppoſent à la plus grande ouverture du vaiſſeau.

Effectivement, une pièce courbe tend à ſe redreſſer quand on charge ſa partie convexe : elle ne peut ſe redreſſer ſans s'allonger; & elle ne peut s'allonger ſans écarter les points d'appui qu'elle auroit à ſes bouts.

La même choſe arrive aux baux des vaiſſeaux. Les ponts ſont chargés du poids immenſe de l'artillerie, des cabeſtans, mâts d'hune de rechange, chaloupe & canon, parc à moutons, boulets, cables, coffres & équipages ; ces poids tendent à redreſſer les baux qui, en s'allongeant, font ouvrir les côtés du vaiſſeau, ſans qu'ils ſoient obligés des s'en écarter.

Cet effet eſt moins ſenſible au premier pont qu'au ſecond pont, parce que les fortes étances ou épontilles de la calle, les iloires renverſées, & même les efforts que fait le vaiſſeau pour arquer, ſoutiennent les baux dans le milieu de leur longueur, & les empêchent de ſe redreſſer ; les côtés du vaiſſeau, qui ſont auſſi plus épais dans cet endroit, cédent avec plus de difficultés, & l'effort des porte-aubans en eſt plus éloigné.

On a également ſoin de mettre, ſous les baux des ſeconds ponts, des épontilles à double rang; mais ces épontilles, qui portent ſur le premier pont, ſuivent ſon affaiſſement & le communiquent au ſecond pont qu'elles ſoutiennent. On ne peut pas les mettre bien fortes, pour ne pas trop embarraſſer l'entrepont & gêner le ſervice de l'artillerie & de la manœuvre. On eſt ſouvent obligé de les déplacer pour faire jouer le cabeſtan, dont les barres ſont fort longues ; &, en les plaçant & déplaçant, elles ſe recourbent & ſe raccourciſſent ; les charnières, qui les ſoutiennent, s'uſent : ce qui permet aux baux des ſeconds ponts de ſe redreſſer avec plus de facilité que ceux des premiers ponts.

L'expérience nous apprend que tous les baux des vieux vaiſſeaux, & ſurtout ceux des ſeconds ponts & gaillards, ſe redreſſent au point qu'on eſt ſouvent obligé de les changer avant que les vaiſſeaux ſoient uſés, & c'eſt ce qui eſt cauſe que l'on donne plus de courbure aux baux des ſeconds ponts & gaillards ; ce qui facilite la plus grande ouverture & déſunion des côtés du vaiſſeau, dans cet endroit où ils ont moins de force & ſont plus voiſins des porte-aubans.

La première idée qui ſe préſente d'abord pour empêcher l'allongement des baux, en admettant que leur courbure ſoit néceſſaire, eſt de faire les baux parfaitement droits en deſſous, & de ne leur donner de rondeur qu'en deſſus aux dépens du bois ; & ſi on ne trouve pas des pièces aſſez fortes, rapporter en deſſus une fourrure en chêne ou en ſapin, pour rendre le bau moins peſant. Par ce moyen, le bau ne ſçauroit s'allonger ni forcer le reſte du navire.

Cet expédient feroit fort bon pour les vaiſſeaux qui n'auroient qu'un pont, & dont la hauteur de la calle feroit indifférente ; mais il n'eſt pas applicable aux vaiſſeaux qui ont pluſieurs ponts & gaillards, parce que la hauteur des entreponts ſe trouveroit diminuée au milieu, où elle eſt le plus néceſſaire, de l'épaiſſeur de la fourrure ou de la rondeur qu'on donneroit aux baux. Ainſi, en leur donnant un pied de rondeur, il faudroit augmenter de cette quantité la hauteur ordinaire de chaque pont; ce qui augmenteroit considérablement la hauteur des œuvres-mortes, celles des batteries, & de tous les poids qui sont sur les ponts, & empêcheroit le vaisseau de porter la voile.

Puisqu'il ne paroît pas possible de supprimer entièrement la rondeur des *baux* dont on voit les inconvéniens, le constructeur ne sçauroit avoir trop d'attention à la diminuer le plus qu'il est possible, & à multiplier & augmenter la force des épontilles qui les soutiennent. Il faut aussi que les capitaines, ou officiers qui commandent les vaisseaux, ne fassent ôter ces épontilles que lorsqu'il est indispensablement nécessaire, & les fassent remettre tout de suite en place.

On ne sçauroit rien ajouter à la liaison que forment les entremises que l'on entaille à queue sur les bouts des *baux*, les fourrures des gouttières, gouttières, courbes des ponts, & courbes verticales, que l'on place sur le premier pont, entre chaque sabord, à la place des éguillettes de porque. Toutes ces pièces entaillées à queue, à tenon & à crocs, & chevillées sur les ponts & sur les côtés du vaisseau, les unissent si étroitement ensemble qu'il est bien difficile de les séparer. Mais toutes ces liaisons ne sçauroient empêcher les *baux* de se redresser, ni le vaisseau de s'élargir. Il suffit pour cela que chaque joint ou couture des bordages du pont s'ouvrent un peu, & que les écarts des *baux* larguent; sans qu'il soit nécessaire que les *baux*, entremises, fourrures de gouttières, courbes, &c. s'écartent du côté du vaisseau : ce qui n'arrive que très-rarement & vers la fin de leur durée, qui est plutôt terminée par la pourriture de ces pièces que par leur désunion.

Je ne vois donc rien de plus avantageux pour empêcher les *baux* de s'allonger & retenir les côtés du vaisseau, que les barrottins tels que je les ai disposés en parlant du tangage. E ij

Ces barrottins, qui sont placés entre chaque bau, (*fig.* 19e.) & dont l'épaisseur est moins forte que celle desdits baux, pourroient être droits par dessous & avoir en dessus la courbure des baux, sans rien diminuer de la hauteur des entreponts; & ces pièces, bien retenues contre le côté du vaisseau, entaillées dans l'entremise placée entre le bord & l'iloire du milieu, & entaillées aussi à queue & clouées sur ladite illoire du milieu, que j'ai mises à la place des arcboutans, enfin ces mêmes barrottins, entaillés & cloués dans les fourrures de goutières, goutières & iloires, formeroient autant de tirants qui ne sçauroient s'allonger, & s'opposeroient directement aux efforts que font les baux pour se redresser & le vaisseau pour s'ouvrir; & feroient d'autant plus d'effet qu'on leur donneroit plus d'épaisseur & qu'on s'attacheroit à les bien retenir contre l'iloire du milieu & contre le bord, avec des équerres de fer ou pattes d'oie.

Tous ces barrottins seroient faits avec des pièces de bois droites, sans conséquence, dont on ne fait presque aucun usage dans les ports, & qui ne font qu'embarrasser les chantiers & parcs aux bois: ceux des plus grands vaisseaux n'auroient, aux endroits les plus larges des ponts, que 18 à 20 pieds de longueur sur 8 à 9 pouces d'équarrissage.

Cette nouvelle disposition des barrottins, répétée à chaque pont & gaillard, & jointe à la nouvelle méthode de former la partie de l'avant, les membres des vaisseaux, & aux autres liaisons que je viens de détailler, & que l'on pratique ordinairement pour unir les ponts le plus étroitement qu'il est possible avec le côté du vaisseau, le mettroit en état de résister bien plus longtemps aux efforts du roulis, surtout si on diminue la rondeur qu'on est obligé de donner aux baux, en augmentant le nombre & la force des épontilles des calles & entreponts.

On peut auſſi placer ſur le ſecond pont, à l'endroit des porte-aubans & entre les gaillards, quelques courbes de fer verticales, dont une branche chevillée ſur le ſecond pont, & l'autre contre le bord, réſiſteroit aux efforts que font les aubans pour attirer le côté du vaiſſeau que l'on pourroit fortifier encore, en bordant ces parties de l'œuvre morte, en dehors & en dedans, avec des bordages de chêne au lieu de ſapin.

ARTICLE TROISIÉME

Des moyens d'augmenter ou diminuer la vivacité des mouvemens du roulis.

APRÉS avoir donné les moyens qui m'ont paru les plus applicables à la pratique de la conſtruction, pour fortifier les vaiſſeaux contre les efforts du roulis, il me reſte à examiner quels effets peuvent produire ſur ces mouvemens la figure du vaiſſeau & la peſanteur & la diſtribution de la charge.

Sans entrer, à ce ſujet, dans des détails qui ont été traités fort au long par M. *Bouguer*, je me contenterai d'établir pour principe ce qu'il a évidemment démontré; que les mouvemens du roulis ſe font autour du centre de gravité du vaiſſeau, & que ces mouvemens doivent être plus ou moins vifs, ſuivant que ce centre de gravité ſera plus ou moins bas. Or, comme la poſition du centre de gravité du vaiſſeau dépend & de la figure & de la peſanteur & diſtribution de ſa charge; examinons d'abord quelle eſt la figure du vaiſſeau dont le centre de gravité doit être le plus bas, & de quelle façon il faudroit le charger pour augmenter ou diminuer la vivacité des mouvemens du roulis.

De tous les vaiſſeaux que l'on pourroit comparer, celui qui, avec mêmes proportions & mêmes capacités, auroit à même hauteur sa première ligne d'eau & sa ligne de flottaison plus ouvertes, seroit celui qui devroit avoir son centre de gravité plus bas par rapport à son métacentre, où se réunit la poussée verticale de l'eau, quand le navire s'incline; &, par conséquent, celui qui auroit les mouvemens de roulis plus vifs. Si on lui donnoit la même quantité de lest, & si on distribuoit son chargement de la même façon qu'au vaisseau qui auroit sa première ligne d'eau & sa ligne de flottaison moins ouvertes, le premier fatigueroit davantage sa mâture & ses côtés; ce qu'il faut soigneusement éviter.

Pour rendre les mouvemens du roulis de ce vaisseau moins vifs, il faudroit élever son centre de gravité en diminuant la quantité de son lest, ou en élevant & plaçant sur les ponts des parties lourdes qui se trouveroient dans la calle; ce qui produiroit un effet tout contraire à ce qu'on éprouve fort souvent, lorsque, dans un gros temps ou autres occasions, on est obligé de faire descendre dans la calle l'artillerie ou autres poids qui se trouvent sur les ponts. On s'apperçoit sur le champ que les roulis deviennent plus vifs, & l'on est obligé de remettre bientôt les choses dans leur premier état.

Si cependant il n'étoit pas possible, le navire chargé, de diminuer la quantité de lest ni de déplacer les autres poids de la calle, ou si ce dérangement, en élevant le centre de gravité, empêchoit le vaisseau de porter la voile, on pourroit se servir d'un autre expédient qui n'auroit pas moins de succès, sans élever le centre de gravité.

Il suffiroit d'éloigner de ce centre, ou du milieu du vaisseau, toutes les choses lourdes qui se trouvent sur les faux ponts, sur les ponts & gaillards, & d'en rapprocher les plus légères; parce que ces parties plus pesantes, ayant plus d'inertie, auroient d'autant plus de force pour résister à la vivacité des mouvemens du roulis, qu'elles seroient appliquées à un bras de lévier plus long.

On produiroit un effet tout contraire, si on rapprochoit du centre les parties lourdes en éloignant les plus légères. Ainsi, pour diminuer ou augmenter la vivacité des mouvemens du roulis, on peut élever ou baisser le centre de gravité du vaisseau, en élevant ou en baissant les poids de la calle & des entreponts; ou bien, sans baisser ni élever le centre de gravité, il suffit d'éloigner ou de rapprocher de ce centre, ou du milieu du vaisseau, les parties lourdes ou légères qui se trouvent dans la calle ou sur les ponts.

D'où on peut conclure, 1°. qu'un vaisseau qui a les mouvemens de roulis trop vifs, après avoir écarté les poids lourds & rapproché les plus légers du centre, doit avoir trop de poids dans la calle & que l'on peut, sans inconvénient, diminuer la quantité de son lest, ou bien lui donner du lest de pierre au lieu de lest de fer; parce que le lest de pierre, étant d'une pesanteur spécifique moins forte, tient plus de volume dans la calle : ce qui élève son poids, &, par conséquent, le centre de gravité du vaisseau.

2°. Si un vaisseau, après avoir rapproché de son centre les poids lourds & écarté les plus légers, avoit des mouvemens de roulis trop lents & restoit trop long-temps incliné, ou, ce qui revient au même, s'il ne portoit pas assez bien la voile; ce vaisseau n'auroit pas assez de parties lourdes dans sa calle, & il faudroit augmenter la quantité de son lest, ou bien lui donner du lest de fer à la place du lest de pierre; ce qui baisseroit son centre de gravité.

3°. Un vaisseau qui, toutes choses placées également, a les mouvemens de roulis plus vifs, doit mieux porter la voile; & comme la rentrée des vaisseaux, en rapprochant toutes les parties du centre, doit occasionner des mouvemens de roulis plus vifs, on peut conclure qu'un vaisseau qui a plus de rentrée qu'un autre, toutes choses égales d'ailleurs, doit mieux porter la voile ; & que, du plus ou moins de vivacité des roulis d'un vaisseau, on pourroit déduire la moindre quantité de lest & la plus grande hauteur de mâture qu'on pourroit lui donner sans risques : mais il faudroit que cette opération fût dirigée par une personne qui joignît une longue pratique à une saine théorie.

CONCLUSION.

On peut conclure de tout ce que je viens de dire au sujet du tangage & du roulis.

1°. Pour mettre le vaisseau en état de résister plus longtemps aux efforts du tangage, il faut diminuer, autant qu'il est possible, le nombre des parties qui peuvent s'allonger dans le sens de sa longueur, en suivant les nouvelles méthodes de former la partie de l'avant, les membres & les ponts ; rendre les ponts, serre-beauquières, goutières, iloires, vaigres, préceintes, &c. les plus droites, en tout sens, pour augmenter leur résistance & leur difficulté à céder à l'allongement du navire ; ajuster, comme je l'ai dit, les écarts des quilles, contrequilles, carlingues, clefs ou remplissages, entre les membres, iloires renversées & étances de la calle, de façon que toutes ces pièces s'opposent avec plus de force aux efforts que le vaisseau fait pour se recourber & se raccourcir par en bas, en s'allongeant par en haut ; avoir une attention singulière, dans la construction & dans l'arrimage, de rendre le poids de chaque partie du vaisseau le plus proportionnel au volume d'eau qu'elle déplace.

2°. Pour mettre le vaisseau en état de résister plus longtemps

longtemps aux efforts du roulis, il faut augmenter la force de ses côtés, en faisant la partie de l'avant, les membres & les ponts comme pour le tangage; rendre les baux les plus droits dans le sens de la largeur du vaisseau, ainsi que toutes les autres pièces qui peuvent s'allonger dans ce sens; fortifier les côtés de l'œuvre morte au-dessus du second pont, vis-à-vis des porte-aubans, par des courbes verticales & bordages de chêne; enfin, avoir attention, dans l'arrimage, d'éloigner du centre de gravité, ou du milieu du vaisseau, le lest de fer ou autres parties lourdes qui se trouvent dans les calles ou sur les ponts.

En résumant les moyens que je viens de détailler, on voit 1°. que les nouvelles méthodes pour former les différentes parties du vaisseau, qui s'opposent le plus directement aux efforts du tangage, conviennent également pour résister aux efforts du roulis.

2°. Que la différente forme que je donne à ces parties, ne sçauroit préjudicier aux autres qualités du vaisseau, puisqu'elle ne change point la figure de sa carène, & qu'elle n'augmente pas la pesanteur de sa coque.

3°. Au contraire, cette nouvelle forme doit contribuer à conserver au vaisseau ses bonnes qualités, en lui faisant garder plus longtemps sa première figure. L'expérience nous apprend que les vaisseaux se comportent toujours mieux dans leurs premières campagnes que dans les dernières, où l'arc & la plus grande largeur qu'ils ont acquis ont changé la figure de leur ligne d'eau & augmenté la résistance de la proue.

4°. Enfin cette nouvelle méthode de former l'avant, les membres & les ponts des vaisseaux, est beaucoup plus économique dans la pratique de la construction, & réunit les autres avantages que j'ai détaillés.

Ainsi les moyens que je propose pour procurer aux différentes parties du vaisseau la solidité nécessaire pour résister aux efforts du roulis & du tangage, conviennent à la pratique de la construction, & ne sçauroient préjudicier aux autres bonnes qualités du vaisseau.

NOUVELLE FAÇON DE TERMINER L'AVANT des vaisseaux, plus solide contre les mouvemens de tangage, moins sujette à pourrir, plus susceptible de radoub, & plus géométrique que celle dont ont se sert.

LA partie du vaisseau comprise entre le mât de misaine & l'étrave est, sans contredit, celle qui fatigue le plus dans les mouvemens du tangage, tant par les efforts qu'elle reçoit de la part du fluide, que par les poids qu'elle porte.

Cette partie a toujours été terminée depuis le couple du *coltis C* jusqu'à l'étrave, par des allonges d'écubier *A* (*fig.* 1ere, 3e & 5e), ou des pièces de bois de bout, presque parallèles à l'étrave, mises à côté l'une de l'autre. Elles n'ont ni varangues ni genoux, & ne sont liées les unes aux autres que par des chevilles de fer rondes ou quarrées.

Tout le massif qui porte à faux sur l'étrave ne peut faire corps & être lié avec le reste du vaisseau, que par les bordages extérieurs & intérieurs, qui, à cause de la rondeur de l'avant & des écarts qu'il faut croiser, sont fort difficiles à trouver un peu longs.

Les guirlandes *B* (*fig.* 3e.), que l'on met en dedans, n'ont pas les branches assez longues pour dépasser le couple du coltis & croiser les autres couples : aussi voit-on que cette partie se détache sans peine du reste du vaisseau, qui a toujours plus d'arc depuis le mât de misaine jusqu'à l'étrave, que dans tout le reste de sa longueur.

On est toujours obligé, pour donner aux allonges d'écubier la longueur, la tournure, l'équerrage & l'échantillon néceſſaire, d'employer des pièces de fortes dimenſions, qui ſont ordinairement ſur le retour, & de découvrir le cœur du bois, cauſes prochaines de pourriture.

Ces pièces ſont poſées de façon que l'eau, qui ſubmerge preſque toujours l'avant, les pénètre de haut en bas. Enfin le peu d'air qui eſt entr'elles, & le frottement continuel cauſé par le tangage & leur peu de liaiſon, font qu'elles ſe trouvent ordinairement pourries, tandis que le reſte du vaiſſeau eſt encore en bon état.

L'on ne ſçauroit changer, à flot & ſans beaucoup de difficulté, une allonge d'écubier qui ſe trouve pourrie, puiſque ces pièces vont du haut en bas. On ne peut les ôter & les remplacer, ſans dévaigrer ou déborder entièrement l'avant, ôter les ſerre-bauquières & les guirlandes, dont les chevilles vont du dehors au dedans : ce qui ne peut ſe faire ſans beaucoup de frais & ſans délier le vaiſſeau.

La figure du vaiſſeau, terminée par des allonges d'écubier, ne peut être exactement la même que le conſtructeur ſe le propoſe. On eſt obligé de finir cette partie ſur les liſſes en place, qui ont, dans cet endroit, beaucoup de rondeur. Elles ſont ſujettes à ſe déjetter ; elles cédent au poids des pièces qu'elles portent. Un acore plus forcé d'un côté que de l'autre donne une différence. L'intervalle entre les liſſes eſt indéterminé & dépend du charpentier : de ſorte qu'on ne peut pas même aſſurer que les deux côtés ſoient parfaitement égaux.

On faiſoit autrefois l'arrière du vaiſſeau comme l'avant ; c'eſt-à-dire que l'on mettoit à l'arrière des pièces de bois de bout, preſque parallèles à l'étambot, qui deſcendoient depuis la liſſe d'ourdy juſqu'à la liſſe des façons, & venoient juſqu'à l'eſtain qui étoit parallèle aux autres couples.

L'arrière, ainſi terminé, étoit preſque auſſitôt pourri & ſujet aux mêmes inconvéniens que l'avant. Il y a même eu des arrières, faits de cette façon, qui ont été enfoncés par un coup de mer.

On eſt parvenu peu à peu à rectifier cette partie. On a ſubſtitué, aux pièces parallèles à l'étambot, des pièces parallèles à la quille (*fig.* 7ᵉ & 8ᵉ), en forme de varangues acculées & fourcats, dont les extrémités ſont entaillées & chevillées avec l'eſtain & le milieu avec l'étambot.

On a dévoyé l'eſtain, pour lui donner plus de force & diminuer ſon équerrage. On a porté ſon pied en avant, pour faire en ſorte que les bordages extérieurs & intérieurs priſſent plus de parties de l'arcaſſe qui ſe trouve ainſi prolongée, & dont toutes les pièces ſont un tout que l'on lie aiſément & ſolidement avec le reſte du vaiſſeau par la courbe d'étambot, le marſouin de l'arrière, les courbes d'arcaſſe & d'écuſſon qui croiſent les barres, l'eſtain & une partie des couples qui ſont en avant.

Tout le monde convient que cette nouvelle façon de faire l'arrière des vaiſſeaux eſt beaucoup plus ſolide, moins ſujette à pourrir, & plus ſuſceptible de radoub que l'ancienne.

Je propoſe donc de faire l'avant comme on fait actuellement l'arrière. L'étrave repréſenteroit l'étambot; le couple du coltis dévoyé ſeroit l'eſtain; la partie compriſe entre ce couple & l'étrave ſeroit garnie de barres *B* (*fig.* 2ᵉ, 4ᵉ & 6ᵉ), depuis le deſſous du beaupré juſqu'à la liſſe des façons.

Comme les bordages de l'avant ne relèvent pas autant que ceux de l'arrière, les barres ne ſeroient pas parallèles à la quille; mais elles feroient un angle preſque droit avec les liſſes *L* (*fig.* 6ᵉ) qui ont la même pente que les bordages, pour que ces mêmes bordages priſſent plus de parties & plus de barres à la fois.

Afin qu'aucun bout des bordages qui viennent sur la rablure ne portât en maille, on mettroit seulement, *babord* & *tribord*, une allonge d'écubier *A*, qui entailleroit dans toutes les barres & seroit chevillée contre l'étrave, (*fig.* 2^e^).

Tous les bouts des barres entailleroient & seroient chevillés au couple du coltis, & le milieu à la contr'étrave, que l'on feroit un peu plus forte pour qu'elle ne fût pas affoiblie par ces entailles.

Les écubiers seroient entre deux barres, où l'on mettroit une fourrure dans laquelle on les perceroit. On auroit, si on vouloit, la facilité d'y ajuster un virolet ou rouet pour diminuer le frottement des cables.

Les barres seroient en partie faites de deux ou de trois pièces (*fig.* 2^e^, 4^e^ & 6^e^), suivant que le bois le permettroit, ayant attention de croiser les écarts. Quand même on voudroit les faire toutes d'une seule pièce, elles ne seroient pas plus difficiles à trouver, & leur nombre n'excéderoit pas celui des guirlandes qu'on est obligé de mettre sous le beaupré, sous les écubiers, aux premiers & seconds ponts, entre le premier & le faux pont, au faux pont, & depuis le faux pont jusqu'à la carlingue du mât de mizaine.

On épargneroit, à chaque vaisseau, dix-huit ou vingt pièces propres pour étraves ou demi-baux, que l'on employe en allonges d'écubier, & l'avant seroit d'autant plus léger.

Cette nouvelle façon de faire l'avant ne seroit sujette à aucun des inconvéniens de l'ancienne. L'étrave, la contr'étrave, les barres, le couple du coltis, chevillés & entaillés ensemble, formeroient un tout qu'il seroit plus aisé de lier avec le reste du vaisseau que l'arrière, par le marsouin de l'avant, & les serre-bauquières, auxquelles on donneroit, dans cette partie, un peu plus d'épaisseur.

On mettroit au-dessous du premier pont & du faux pont des pièces *E* (*fig. 4e*) en écharpe, qui, partant de la contr'étrave, croiseroient les barres, le couple du coltis & partie des couples qui sont en arrière. Ces pièces seroient presque droites & de peu de conséquence.

Les barres seroient faites d'un bois d'échantillon ordinaire, qui seroit encore dans sa vigueur : l'équerrage étant moins fort n'en découvriroit pas le cœur.

L'eau qui tombe sur le coltis ne les pénétreroit pas dans toute leur longueur, & ne feroit que glisser sur leur surface supérieure que l'on pourroit enduire de quelque mastic.

En pratiquant de haut en bas, bâbord & tribord, le long de l'étrave, un canal ou anguillière entre les barres & le bordage, on feroit rendre l'eau à la pompe.

Les mailles, ou vuide que l'on laisseroit entre les barres, leur donneroient de l'air & empêcheroient le frottement.

On pourroit toujours aisément changer à flot, sans beaucoup de frais & sans délier le vaisseau, une barre qui se trouveroit pourrie ; puisqu'elle ne seroit recouverte que par trois ou quatre virures de vaigres, que l'on ôteroit & remplaceroit très-facilement.

La figure du vaisseau dans cette partie, qui est la plus essentielle, seroit exactement la même que le constructeur se le proposeroit, puisque la figure des barres & leur coupe seroit déterminée sur son plan, & exécutée sur ses gabaris ; & la pratique de la construction seroit poussée à un point de perfection qui ne laisseroit plus rien à desirer.

NOUVELLE FAÇON DE FORMER LES MEMBRES ou couples des vaiſſeaux pour les mettre en état de réſiſter plus longtemps aux efforts du tangage & du roulis, diminuer les progrès de la pourriture, & la dépenſe de leur conſtruction par l'économie dans l'emploi des bois, ſupprimer les porques, & mettre les vaiſſeaux à l'abri du canon ſans augmenter leur peſanteur.

LA nouvelle façon de former la partie de l'avant & l'arrière du vaiſſeau ne laiſſant plus rien à deſirer, j'ai travaillé ſur les parties intermédiaires ou le corps du vaiſſeau.

Ce corps ou ſquelette eſt compoſé de membres ou côtes (*fig.* 9e, 10e & 11e) qui s'élèvent en forme de croiſſants ſur la quille, que l'on peut comparer à l'épine du dos.

Ces membres ſont formés de deux rangs de pièces de bois, au nombre de onze à quinze, miſes bout à bout & accouplées de façon que le milieu des unes répond aux extrémités des autres, pour faire un tout & croiſer les écarts. On les appelle *couples*, parce qu'ils ſont doubles de l'avant à l'arrière; ou *coupes*, parce que chacun d'eux repréſente la figure qu'auroit le vaiſſeau coupé dans ſon endroit. Tout cet aſſemblage n'eſt lié que par des chevilles de fer quarré, qui ne ſont rivées d'aucun côté.

Le couple ainſi formé ne l'eſt pas de la façon la plus avantageuſe contre les efforts qu'il doit ſoutenir. Les plus violens ſont de l'avant à l'arrière, ou dans le ſens de ſa largeur, quand le vaiſſeau tangue ou échoue; & de bâbord à tribord, ou dans le ſens de ſon épaiſſeur, quand le vaiſſeau roule, que les canons ſont à la ſerre, ou dans le temps du combat.

A tous ces efforts, les pièces qui croiſent les écarts ne résistent que très-foiblement, & ne font aucun effet, dès que les chevilles qui les lient ont le moindre jeu; ce qui arrive même avant que l'on arme le vaisseau, en montant ses couples, lorsque le bois vient à sécher, ou en le lançant à l'eau.

Les chevilles ou goujons, d'où dépend la seule liaison des couples, &, par conséquent, de tout le vaisseau, une fois larguées, les pièces & les écarts se désunissent, le vaisseau arque, & l'on voit souvent, dans les mouvemens du roulis, le vaigrage ou bordage intérieur s'ouvrir à passer les doigts dans les joints.

Les vaisseaux dans cet état, on imagina, dans l'ancienne marine, de les relier par des *porques* ou des couples plus forts, mis au-dessus du vaigrage de façon qu'ils croisent les écarts des couples sur lesquels ils sont appliqués & chevillés.

Les porques font sur le côté du vaisseau le même effet que les contreforts sur les murs; mais leur force seroit bien plus considérable, si elle étoit appliquée sur tous les couples. On a si fort senti la nécessité des porques, qu'on en met, depuis quelque temps, à tous les vaisseaux neufs dès leur construction: mais on ne peut en mettre qu'une certaine quantité, &, tout au plus, une entre chaque sabord. Il reste ordinairement dix pieds d'intervalle d'une porque à l'autre, & c'est dans cet endroit, qui se trouve le plus foible, que se fait tout l'effort du canon.

On ne sçauroit multiplier les porques, sans rencontrer les sabords de la première batterie qui les couperoient, sans rendre les vaisseaux extrêmement lourds, & sans couper les membres par une infinité de chevilles qui traversent le vaisseau de part en part, & causent des voyes d'eau que l'on ne peut étancher & qui deviennent considérables dans les vieux vaisseaux. Les porques consomment des pièces de bois d'un fort échantillon, très-difficiles à trouver, & causent tant de de difficulté dans les radoubs & dans l'arrimage, qu'on a plusieurs fois, mais inutilement, essayé de les supprimer.

La difficulté de changer le vaigrage, sur lequel les porques sont appliquées, fait qu'on ne peut employer, pour vaigrer les vaisseaux, que les bois les plus vigoureux, les plus sains & les moins sujets à pourrir. Cette précaution deviendroit inutile en supprimant les porques. On pourroit se servir avec succès des bois de chêne du nord, que l'on changeroit aisément lorsqu'ils viendroient à pourrir, & dont la longueur & la largeur seroient bien avantageuses contre les efforts du tangage & l'arc du vaisseau.

La corruption des bois est un autre inconvénient qui naît de l'assemblage des couples faits comme à l'ordinaire (*fig.* 9e, 10e & 11e).

On travaille avec soin les deux surfaces des pièces qui doivent, pour ainsi dire, se coller ensemble. L'air n'y passe jamais, surtout lorsque le joint est recouvert par les bordages extérieurs & intérieurs. La séve du bois, que l'on employe presque toujours verd, ne trouvant aucune issue, y fermente, & le frottement continuel, causé par la désunion des pièces, accélère la pourriture que l'on est toujours sûr de trouver en cet endroit, quoique la partie du couple, qui est rafraîchie par le peu d'air qui est dans les mailles, paroisse encore en bon état.

Les différens radoubs, que l'on fait aux vaisseaux, m'ont toujours convaincu que toutes les parties qui sont entaillées, ou collées de façon que l'air ne peut pas les rafraîchir, sont toujours les premières pourries. Cette vérité est si fort connue de tous les constructeurs, qu'on a fait des vaisseaux, en Angleterre & en France, dont les deux rangs de pièces qui forment les couples étoient séparées par des fourrures ou taquets de quatre à six pouces d'épaisseur, que l'on plaçoit à l'endroit des chevilles ; mais, ces taquets ou fourrures venant à ſécher ou à fendre, les chevilles ſe trouvent dégarnies, les liaiſons interrompues, & le vaiſſeau en peu de temps hors d'état de ſervir.

Mon projet eſt plus ſimple & plus facile à exécuter. Ce n'eſt pas la largeur qui fait la force du couple, mais l'épaiſſeur & la façon dont il eſt lié. Le mien, (*fig.* 12^{e}, 13^{e} & 14^{e}) au lieu d'être double de l'avant à l'arrière, le ſeroit du dehors au dedans ou de bâbord à tribord, & auroit la moitié plus d'épaiſſeur que l'autre. En diminuant l'épaiſſeur du bout des pièces qui forment les écarts, on pourroit augmenter d'autant la courbure de ces pièces. Celles qui les croiſeroient fourniroient au défaut d'épaiſſeur, & auroient, au moins aux endroits les plus foibles, autant d'épaiſſeur que les anciens couples. Les différens angles, que les pièces feroient entr'elles, formeroient des arrêtes qui augmenteroient la liaiſon & diminueroient le frottement ; & on pourroit ſe ſervir de pièces preſque droites & d'un échantillon ordinaire, pour former celles qui ont le plus de courbure.

Ce couple ainſi formé s'oppoſeroit directement aux efforts qu'il doit ſoutenir. Il ne ſçauroit ſe déſunir ni s'allonger dans les mouvemens du tangage, & ſes écarts ne ſçauroient larguer dans les mouvemens du roulis, ſans que les pièces qui les croiſeroient ne caſſaſſent. Le couple intérieur, ou le rang de pièces du dedans, feroit le même effet qu'une porque, & chaque couple auroit la ſienne ; ainſi il ſeroit inutile d'en mettre ſur le vaigrage : ce qui rendroit les radoubs moins difficiles & moins coûteux, l'arrimage beaucoup plus aiſé, la calle plus ſpacieuſe & plus commode.

Le nombre des couples augmenteroit d'un tiers ; ainſi que celui des mailles ; & le vaiſſeau ſeroit néanmoins plus léger, par la diminution de l'échantillon & la ſuppreſſion des porques. Il coûteroit beaucoup moins cher ; ſon côté ſeroit bien plus fort, & il n'y auroit pas de vaiſſeau de cinquante canons qui ne ſe trouvât à l'abri du boulet, puiſque ſes membres auroient à la flottaiſon treize à quatorze pouces d'épaiſſeur, tandis que ceux du *Tonnant*, qui n'ont qu'un pied, n'ont pas pu être percés.

Tous les couples ainſi liés, & chacun iſolé, ſeroient rafraîchis, de chaque côté, par l'air qui ſeroit entre les mailles. La plus grande diſtance qu'il y auroit entre le bordage & le vaigrage, en augmenteroit la quantité. L'aſſemblage du couple ſe trouveroit au milieu de la maille, & ne ſeroit recouvert d'aucun côté ; ce qui permettroit un libre cours à la deſſudation de la ſéve, qui, n'étant plus renfermée, n'occaſionneroit pas la pourriture.

On pourroit pratiquer à chaque couple, de diſtance en diſtance, aux endroits où il n'y auroit point de chevilles, des entailles à jour, pour laiſſer paſſer & renouveller l'air de maille en maille, de l'avant à l'arrière ; ce qui ſeroit très-avantageux pour empêcher le progrès des champignons.

Les bordages s'ajuſteroient mieux contre les membres, qui, étant moins larges, prendroient mieux la rondeur du vaiſſeau, & n'auroient pas beſoin de ſi forts équerrages, ſurtout en avant & en arrière. On eſt obligé d'employer, dans ces endroits, des pièces de fortes dimenſions, que l'on coupe en ſifflet en ne laiſſant que le cœur du bois, qui eſt la partie la plus ſuſceptible de pourriture.

L'ouvrage du perceur ſeroit plus ſolide & plus aiſé. Tous les clous & chevilles qui ſe trouvent dans le joint des couples ordinaires, tendent à les déſunir & ne font aucun effet. Celles qui les lient ne ſont point rivées, & ne ſçauroient l'être dans les couples de rempliſſage, par le peu de diſtance qu'il y a entre les mailles. On eſt même obligé, pour pouvoir placer ces chevilles, de percer le couple diagonalement; ce qui fait une très-mauvaise liaison, en coupant le fil du bois. Les chevilles que l'on met à tous les bouts des bordages, préceintes, courbes de pont, &c. percent & affoiblissent les couples sans les lier. La même pièce est percée en dehors par les clous du bordage, & en dedans par ceux du vaigrage; de sorte qu'il ne lui reste plus de force, & qu'elle casse au moindre effort.

Aucun de ces inconvéniens ne se rencontreroit dans les nouveaux couples. Les clous & chevilles ne sçauroient se trouver dans les joints. Celles qui les lient, étant percées du dehors au dedans, seroient rivées sans difficulté sur les membres & sur les remplissages, & pourroient se repousser de même. Leur direction ne couperoit pas le fil du bois, & s'opposeroit aux efforts qu'il doit soutenir. Les chevilles que l'on met à chaque bout de bordages, courbes, &c. lieroient les membres qu'elles perceroient. Une même cheville, par exemple, pourroit lier, en même temps, le bordage, les deux pièces du membre, le vaigrage & une des branches d'une courbe de pont. Le membre intérieur ne seroit percé que par les clous du vaigrage, & celui du dehors par ceux du bordage; ce qui donneroit la facilité de multiplier ces clous, & d'augmenter la liaison.

On auroit attention que les écarts des bordages & des préceintes vinssent, comme à l'ordinaire, précisément au milieu des membres, pour y être cloués & chevillés avec la même facilité qu'on l'a pratiqué aux vaisseaux dont les couples sont séparés par des taquets ou fourrures.

Les avantages que les nouvelles méthodes de former l'avant & les membres des vaisseaux, joignent à ceux de la plus grande solidité pour résister aux mouvemens du tangage & du roulis, m'ont engagé à détacher ces deux méthodes du corps de l'ouvrage, pour pouvoir les détailler plus au long, & faire mieux ſentir la néceſſité & l'utilité de leur application à la pratique de la conſtruction des vaiſſeaux.

EXPLICATION DES FIGURES.

La figure première repréſente le plan d'élévation de la partie de l'avant d'un vaiſſeau, vue de face par dehors & faite ſuivant l'uſage ordinaire.

La figure ſeconde repréſente le même plan, fait ſuivant la nouvelle méthode.

La figure troiſième repréſente le même plan d'élévation coupé dans le ſens de la longueur du vaiſſeau, & vu de côté pour découvrir l'intérieur de la partie de l'avant, faite ſuivant l'uſage ordinaire.

La figure quatrième repréſente le même plan, fait ſuivant la nouvelle méthode.

La figure cinquième repréſente le plan d'élévation de l'avant du vaiſſeau, vu de côté par dehors, & fait ſuivant l'uſage ordinaire avec les liſſes *L*.

La figure ſixième repréſente le même plan, ſuivant la nouvelle méthode.

La figure ſeptième repréſente le plan d'élévation de la partie de l'arrière ou de l'arcaſſe du vaiſſeau, vue de côté ou de profil.

La figure huitième repréſente le même plan, vu de face ou par derrière.

La figure neuvième repréſente le plan d'élévation d'une partie du vaiſſeau, garnie de membres *A*, vu de côté ou de profil pour montrer la façon dont les deux rangs de pièces *B*, *C*. ſont ajuſtées dans le ſens de la longueur du vaiſſeau, avec les jours ou mailles qui reſtent ordinairement entre les membres.

La figure dixième repréſente le plan d'élévation d'un membre *A*. vu de face avec ſa porque *P*, bordages &

& vaigrages, pour faire voir les épaiſſeurs de toutes les pièces, & de quelle façon elles ſont ajuſtées dans le ſens de la largeur du vaiſſeau. La pièce *B* a été détachée pour découvrir l'écart *C* du rang de pièces qui ſont en deſſous.

La figure onzième repréſente le même couple, vu de profil avec la même pièce *B* détachée.

Ces trois figures, neuvième, dixième & *onzième*, repréſentent les différens plans des membres ou couples, fait ſuivant l'uſage ordinaire.

Les figures douzième, treizième & *quatorzième*, repréſentent les mêmes plans des membres ou couples, faits ſuivant la nouvelle méthode.

La figure quinzième repréſente le plan d'élévation d'une partie du côté du vaiſſeau vue par dehors, garnie de membres *A*, faits ſuivant la nouvelle méthode avec des pièces ou fourrures *C*, en rempliſſages dans les mailles, entaillées à queue dans les membres, pour les reſſerrer & les empêcher de s'écarter les uns des autres. Les feuillets *S*, des ſabords *L* ſont auſſi entaillés à queue. On voit auſſi, dans la même figure, la quille *Q*, la contre-quille *R*, la carlingue *K* avec leurs écarts *E*, faits ſuivant la nouvelle méthode.

La figure ſeizième repréſente le plan d'une partie du premier pont d'un vaiſſeau, depuis l'étambot juſqu'au mât d'artimon, où l'on voit la diſpoſition des baux *A*, arcboutans *B*, barrottins *C*, fourrures de goutières *L*, goutières *M*, illoires *N*, barre de pont *P*, membres *Q*, mailles ou jours entre les membres *O*. Ce pont eſt fait ſuivant l'uſage ordinaire.

La figure dix-ſeptième repréſente le plan horiſontal du deſſus d'un bau *A*, tels qu'on les voit ſur le plan du pont, *figure ſeizième*. Ce bau eſt fait de deux pièces *B*, *C*, ajuſtées ſuivant l'uſage ordinaire.

Les figures dix-huitième & *dix neuvième*, représentent les mêmes plans d'un pont & d'un bau, fait de deux piéces, suivant la nouvelle méthode.

MÉMOIRE

QUI A REMPORTÉ LE PRIX

EXTRAORDINAIREMENT PROPOSÉ

PAR

L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

POUR L'ANNÉE 1760.

Quels sont les moyens les plus propres à porter la perfection & l'économie dans les Verreries de France?

Par M. BOSC D'ANTIC, docteur en Médecine & correspondant de l'Académie Royale des Sciences.

A PARIS,

Chez DURAND, Libraire, rue du Foin, la première porte cochère à droite, en entrant par la rue S. Jacques.

M. DCC. LXI.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

ERRATA.

PAGE 8,	*ligne* 11,	forcés baiſſer,	*liſez*	forcés de baiſſer.
14,	31,	un feu,		un froid.
19,	36,	patelle,		palette.
20,	29,	l'attempage,		l'atrempage.
ibid.	31,	groſſe,		graſſe.
40,	35,	de ſmalte,		du ſmalte.
48.	34,	& leur	*ôtez*	&.

MÉMOIRE

SUR LE PRIX PROPOSÉ

PAR L'ACADEMIE ROYALE

DES SCIENCES.

Quels sont les moyens les plus propres à porter l'économie & la perfection dans les Verreries de France ?

MÉMOIRE

SUR le prix proposé par l'Académie Royale des Sciences : *Quels sont les moyens les plus propres à porter l'économie & la perfection dans les Verreries de France?*

Non fingendum, aut excogitandum, sed inveniendum, quid natura faciat aut ferat. BACON.

L'ART de la verrerie est un des plus importans dont la chymie ait enrichi les hommes. Il nous fournit les vases les plus commodes & les plus agréables. Sans nous priver des charmes de la lumière, il nous donne les moyens de nous mettre à couvert des injures de l'air. La conservation d'une infinité de liqueurs précieuses lui est uniquement due. C'est par son secours que nous remédions aux défauts de notre vue, ou que nous réparons les ravages que les années manquent rarement d'y produire. D'où nos appartemens tirent-ils leurs plus belles, leurs plus nobles décorations ? c'est de l'art de la verrerie. Peu de sciences, peu d'arts peuvent se passer de son concours. Que ne lui doivent pas l'histoire naturelle, l'astronomie, la physique expérimentale, & sur-tout la chymie !

Un art, dont l'utilité est si étendue & les phénomènes ſi propres à piquer la curioſité, devroit avoir déjà fait les plus grands progrès. Cette conſéquence paroît naturelle ; mais il eſt certain que l'art de la verrerie eſt très-imparfait. Dès ſon berceau, les chymiſtes l'ont abandonné, pour ainſi dire, à des gens incapables d'en pénétrer la nature, d'en développer les principes, d'en connoître toutes les reſſources. Il a dégénéré en routine aveugle. Un petit nombre de ſçavans ont fait quelques efforts pour l'en tirer. Perſuadés que la nature ſe montre imparfaitement dans les laboratoires ordinaires, ils ſe ſont donné la peine d'aller en étudier les moyens dans les verreries.

Agricola (1) eſt, je penſe, le premier qui ait écrit avec quelque détail ſur cet art : mais ce qu'il dit ſur la matière dont ſe fait le verre, ſur les fourneaux où il ſe fait, & ſur la manière dont on le fait, n'eſt qu'une ſimple deſcription de ce qu'il avoit vu pratiquer dans les verreries de ſon temps. On ne trouve, dans le douzième livre de ſon traité de *métallique*, preſque aucun principe certain, aucune obſervation judicieuſe, aucune vue utile. Il y a même des erreurs groſſières que nous aurons occaſion de relever ; entre autres que le *ſel gemme*, combiné avec le ſable, produit du verre.

Néri eſt regardé comme l'oracle de l'art de la verrerie. Il ne dit cependant pas un mot des fourneaux, ni des creuſets, qui en ſont la véritable baſe. La compoſition que *Kunckel* rapporte en quatre lignes, vaut aſſurément mieux que tout ce que *Néri* a dit ſur les différentes manières de préparer les matières & de faire le cryſtal (2). Ses commentateurs ne nous offrent pas de plus grandes reſſources. *Merret* n'a ajouté à ce qu'avoit écrit *Agricola* ſur les fourneaux, & ſur la manière de travailler le verre, que quelques pratiques Angloiſes de peu de conſéquence. Ses notes ſur *Néri* prouvent

(1) Georg. Ag. de Re metal. lib. 12. & de Nat. foſſil. lib. 5, p. 274, 275.
(2) V. la p. 101 de l'Art de la Verr. trad. fr. in-4°.

qu'il avoit plus lu qu'opéré. *Kunckel*, avec moins de travail, auroit été infiniment plus loin, s'il avoit eu des principes. Tout se réduit dans ses remarques à quelques méthodes particulières, la plupart pratiquées dans les verreries de son temps, & à quelques observations utiles. *Néri* & *Merret* n'avoient eu en vue que le beau verre, sans s'embarrasser de la dépense. *Kunckel* a senti que la perfection de l'art consistoit à produire la plus belle qualité avec le moins de frais possible, ce qui est un mérite. Je ne crois pas qu'on puisse tirer de plus grandes lumières du précis que le célèbre *Henckel* a donné de *Néri*, *Merret* & *Kunckel*, ni de ce qu'il a ajouté sur ses trois espèces de verre, minéral, végétal & mixte (1). L'art auroit été sans doute enrichi d'utiles découvertes, si ce sçavant minéralogiste avoit été à portée, comme il le dit lui-même, d'opérer dans des fourneaux de verrerie.

L'art de la verrerie d'*Haudiquer de Blancourt* est, à quelques changemens & additions près, une traduction de ce qu'*Agricola* avoit écrit sur cette matière, des sept livres de *Néri*, & des notes de *Merret*. Cet ouvrage se feroit lire avec plaisir, si l'auteur ne donnoit trop fréquemment dans les idées extraordinaires de l'alchymie. *Haudiquer* s'attribue tout, & ne cite pas même *Neri*. Sa traduction ne me paroît pas plus propre à perfectionner l'art de la verrerie que les originaux (2).

Ce que le célèbre *Boerhawe* a écrit sur cette matière dans ses *Elémens de chymie*, ne répond pas, j'ose le dire, à sa réputation ; il n'y a peut-être pas dans tous ses ouvrages de morceau plus foible que l'article de la vitrification. Voyez ses *Elém. de chymie*, tom. VI, pag. 157 & suiv. tom. V, p. 276, 277, 316 & suiv. trad. françoise.

Ne nous flattons point de trouver de plus grands

(1) V. Henckel, Flor. saturn. cap. 11.

(2) 2 vol. in-12°. imprim. en 1696 chez J. Jombert ; réimprimés & augm. d'un traité des pierr. préci. & des glaces à miroir, en 1718, chez C. Jombert.

ſecours dans les ouvrages que *Merret* cite vers la fin de ſa préface (1). On ne voit, dans les auteurs dont nous venons de parler, preſque aucun principe ſolidement établi, aucun phénomène clairement expliqué : tout ſe réduit, à peu de choſe près, à des méthodes particulières, à des préceptes relatifs aux matières qu'ils ont eues ſous leur main, ou aux fourneaux dont ils ſe ſont ſervis ; tout cela eſt donc peu utile à ceux qui ont à opérer dans des circonſtances différentes. Ils n'ont rien dit de ſatisfaiſant ſur la matière, la préparation, & la conſtruction des fourneaux ; ſur la compoſition & la forme des creuſets ; ſur la proportion qu'il doit y avoir entre les creuſets & le fourneau ; ſur le dégré de feu le plus avantageux ; ſur la nature des matières à convertir en verre ; ſur les cauſes de la dépuration, de la plus ou moins grande tranſparence des couleurs, du plus ou moins de ſolidité, des *bulles*, des *nuages*, des *graiſſes*, de la *rouille* ou *plombé*, des *filandres*, des *veines* du verre ; ſur la nature & les effets de la bonne *recuiſſon*, &c. Eſt-il un art dont la théorie ſoit ſi imparfaite ? Il eſt à préſumer que les lumières qu'on acquiert tous les jours en chymie nous mettront dans peu de temps en état de l'approfondir & de l'étendre. Perſonne ne me paroît nous avoir fourni autant & d'auſſi bons matériaux, que le ſçavant M. *Pott* (2) ; mais il faut être plus que ſimple artiſte pour les mettre en œuvre.

Jettons un coup-d'œil rapide ſur la pratique de l'art de la verrerie. Arrêtons-nous un inſtant ſur les productions de la routine. Voyons quelle eſt la qualité & le prix des ouvrages de verre. Nous aurons occaſion, dans la ſuite de ce mémoire, d'examiner les fourneaux,

(1) V. liber com. alch. part. 1, cap. 20. Ferrant. imper. lib. 14 & 15 : & Port. lib 6, cap. 3, &c.

(2) V. dans les Mém. de l'Ac. de Berlin, les Mém. de ce grand chym. ſur la magnéſie des verriers, ſur les creuſets, ſur le ſel de verre ; & ſur-tout ſa lithog. pyrothec. & continuation.

les creuſets, les compoſitions & les méthodes actuellement en uſage.

Il n'y a point d'endroit où la verrerie ait été ſur un pied plus brillant qu'à *Murano*. Les Vénitiens faiſoient un commerce conſidérable en miroirs, en cryſtal, & en toute eſpèce de verre. Ils ont, pour ainſi dire, entièrement perdu cette branche importante. Il ne reſte à Veniſe qu'un homme qui faſſe du cryſtal eſtimé, & il le vend à un prix exceſſif. Les glaces de *Murano* ſont les plus mauvaiſes de l'Europe; &, quoique moins chères que les nôtres, pour les bas volumes, elles ne ſont pas recherchées.

Les verreries Angloiſes ont une grande réputation. Elles ne ſont pas fort anciennes. Leurs progrès rapides ſont dûs à l'attention ſingulière du gouvernement à ne pas leur donner des entraves, à ne pas confondre l'intérêt du public avec celui du particulier. Les glaces, le cryſtal, le verre blanc & commun, forment aujourd'hui une branche conſidérable du commerce de la Grande-Bretagne. L'étranger conſomme les quatre cinquièmes des glaces Angloiſes. Il n'eſt point de pays où les Anglois ne trouvent moyen d'introduire leurs ouvrages de cryſtal & de verre. Autrefois ils tiroient de France preſque tout le verre dont ils avoient beſoin: aujourd'hui ils nous fourniſſent des luſtres, des lanternes, des verres à boire, des verres d'optique de toute grandeur, &c. La manufacture de Londres ne cède qu'à celle de *Neuſtadt* pour la beauté des glaces. On peut en voir des morceaux chez le ſieur *Sayde*, opticien de la Reine, à Paris, quai des Morfondus. Les grands volumes ſont très-chers. Des glaces de cent quarante-quatre pouces de hauteur ſur quarante pouces de largeur, ſe ſont vendues juſqu'à mille guinées (1). Quelques floriſſantes que ſoient leurs verreries, les An-

(1) V. le prem. vol. chap. 9 de l'eſſai ſur l'état du comm. de la Grande-Bretagne.

glois ne doivent point se flatter, avec *John Cary*, qu'elles soient *portées à la plus haute perfection*. Leur cryſtal n'eſt pas d'une belle couleur : il tire ſur le jaune ou ſur le brun, pour peu que la couleur rouge de la *maganèſe* domine. Il eſt ſi mal cuit, qu'il reſſue le ſel, ſe craſſit, ſe rouille promptement, eſt rempli de *points* & nébuleux. Un coup-d'œil jetté ſur les gâteaux de cryſtal que les Anglois font pour l'optique, en convaincra. Il a encore un autre défaut capital, c'eſt d'être extrémement tendre. Ils vendent cher leurs ouvrages : peut-être ſeroient-ils forcés baiſſer les prix, s'ils avoient des concurrens pour les lanternes & pour les verres d'optique.

Il ſe fait un grand commerce d'ouvrages de cryſtal & de verre blanc dans pluſieurs parties de l'Allemagne, en Saxe, en Bohême, dans la Franconie, le Palatinat, &c. Il nous vient, de ces différens endroits, pour des ſommes conſidérables, de luſtres, de bras de cheminée, de flaccons, caraffons, verres & gobelets, de cryſtaux de table, de verres à vîtres, à cadran, à eſtampes, ſouflés ſans *boudine*, & coulés en table ſans *boudine*, &c. (1). Le plus beau cryſtal d'Allemagne a deux avantages ſur celui d'Angleterre, d'être plus blanc & moins cher, quoiqu'il ſe vende à Paris depuis trois livres dix ſols juſqu'à cent ſols la livre tout taillé. Il joint aux autres défauts de celui d'Angleterre ceux d'être *filandreux*, & rarement exempt de petites pierres ou grains de ciment. Les verres plats de Bohême & du Palatinat ſont bien éloignés de la perfection dont je les crois ſuſceptibles. Ils ont un grand nombre de défauts ; mais le plus déſagréable, c'eſt d'être d'une épaiſſeur inégale, *ondulés*. Les verres coulés en table de Nuremberg, ſont d'un verre commun bien *affiné*, très-bien polis, & ſe vendent au moins vingt-cinq pour

(1) V. les arrêts de conſeil en fait de verrerie.

cent

cent meilleur marché que nos glaces. On en trouve chez plusieurs Miroitiers de Paris, & chez le plus grand nombre de ceux de province.

Le verre de nos verreries peut être divisé en quatre espèces : verre à bouteilles ; verre commun verd, dit *chambourin* ; verre fin, blanc ; crystallin & crystal. Je ne connois que trois verreries en France où l'on fasse de bonnes bouteilles, *Folembrey* dans la forêt de Coucy, *Anor* dans le Hainault François, & *Séves* près de Paris. Celles qu'on fait dans le pays de *Bareush* & à *Dellu* dans le Brandebourg, leur sont supérieures pour la qualité & se vendent moins cher. A peine notre verre fin passeroit-il pour le verre commun d'Allemagne, & notre crystal pour le verre blanc étranger. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à comparer le verre plat, fin, ou de *deux feux* de Normandie, avec le verre commun à vîtres du Palatinat ; & le crystal de la verrerie de *la Pierre* avec le verre blanc de Bohême, ou avec les morceaux de verre blanc d'Angleterre qu'on trouve chez le sieur *Sayde*. Il n'y a pas, je crois, de verre à vîtres plus imparfait que celui de nos grosses verreries : il est rempli de défauts, de *bouillasses*, de *filandres*, de *larmes*, de *pierre*, mal *recuit*, se *plombe* très-promptement, & il est coloré au point d'être peu transparent, quoique fort mince. Dans quelques verreries, on a cherché à imiter les lanternes d'Angleterre ; mais on est très-éloigné d'y avoir réussi parfaitement.

Sur la fin du dernier siècle, Abraham *Thevart* fit une très-belle découverte en fait de verrerie : il trouva le moyen de couler le verre pour les glaces à miroir. Qu'en est-il résulté ? des glaces d'un plus grand volume, & rien de plus. Les ouvrages de nos verreries sont d'une mauvaise qualité & fort chers (1). S'écarte-

(1) Nos grandes glaces se vendent quinze ou seize francs la livre pesant : le calcul en est aisé. Ces glaces ont trois à quatre lignes d'épaisseur, & le pied cube de verre pèse environ 175 liv.

roit-on de la vérité, si l'on avançoit que nos verreries sont plus utiles à l'Espagne qu'à la France ? Elles emploient annuellement pour près de deux millions de soudes d'Alicante & de Carthagène : Mais c'est trop s'arrêter sur une chose qui fait notre honte. Personne n'ignore que nos verreries sont dans un état déplorable. Le prix extraordinaire que l'Académie Royale des sciences a proposé, pour seconder les vues d'un zélé citoyen, ne nous permet pas d'en douter. Cette compagnie respectable ne promet la palme qu'à celui qui aura donné les moyens les plus propres à porter la perfection & l'économie dans les verreries du royaume. Elle n'exige pas uniquement qu'on fasse du beau verre ; elle veut aussi qu'on puisse le faire à peu de frais : &, ces deux conditions remplies, nos verreries seront certainement en état de soutenir la concurrence avec les verreries étrangères.

Je ne doute pas qu'un grand nombre de personnes, en rendant justice aux vues & au zèle de l'Académie, ne mettent ce prix au rang de ceux de la quadrature du cercle, de la pierre philosophale, &c. On est assez généralement persuadé qu'il est impossible de faire en France d'aussi beau verre & au même prix qu'en Allemagne. En Saxe, en Bohême, dans la Franconie, dans le Palatinat, dit-on, les beaux cailloux sont très-communs, & nous en manquons : le *salin*, ou le sel alkali fixe, extrait des cendres des bois, y est abondant & à bas prix ; & nous n'avons que des matières inférieures & fort chères : le bois y est pour rien ; & nous l'achetons à un prix excessif. N'y a-t-il point là d'exagération ? notre vanité ne chercheroit-elle pas à excuser notre négligence ? Supposé que cela fût aussi exact qu'il me le paroît peu, a-t-on examiné la chose d'assez près, a-t-on fait assez de recherches & d'expériences, pour décider que nos verreries ne sçauroient trouver, dans le royaume, au moins l'équivalent des avantages des verreries d'Allemagne ? Je me félicite, pour le bien de ma patrie, de pouvoir en douter. Les circonſtances favorables où je me trouve depuis long-temps, m'ont permis d'envifager la matière fous un aſſez grand nombre de faces, pour me croire même en état de prouver que la France peut faire ceſſer les importations, fabriquer elle-même du verre auſſi beau & à plus bas prix que celui de l'étranger. Ce ne feront point des ſpéculations creufes, ni des raiſonnemens vagues qui me fourniront les preuves : je ne les tirerai que des expériences fouvent répétées & dans le très-grand. Si j'avance quelque choſe que je n'aie pas fou-mis à cette pierre de touche, j'aurai ſoin d'en avertir.

DES FOURNEAUX ET DES CREUSETS.

L'INTELLIGENCE du fondeur, l'adreſſe des ouvriers, le choix & la pureté des matières, font de foibles reſſources pour le maître de verrerie, s'il n'a un bon fourneau de fuſion,& des creufets convenables.Quelque peu diſpoſées à la vitrification que ſoient les matières dont il a conſtruit l'un & fabriqué les autres, ſes ouvrages feront infectés de *larmes* & de *filandres :* La négligence ou l'impéritie, dans la préparation de ces matières, produira des dégradations ruineufes, ou des couleurs étrangères dans le verre. Le défaut de proportion dans la forme nuira néceſſairement à la bonté des *affinages*, & augmentera la conſommation du bois ou du charbon. Les fourneaux & les creufets ſont la partie la plus importante de l'art de la verrerie, &, j'oſe le dire, la moins connue. Je n'ai lu aucun ouvrage où l'on puiſſe trouver des fecours ſuffiſans fur la matière à employer, fur la manière dont on doit la préparer, ni fur les proportions les plus avantageuſes de la forme des fourneaux & des creufets.

Dans la plupart des verreries Angloises & dans plusieurs verreries d'Allemagne, on fait les fourneaux d'une pierre *sabuleuse* dure (1). C'est une espèce de grais, appellé, dans quelques provinces de France, *mouillasse*, & dans d'autres, *pierre à ouvrage*. Les fourneaux faits avec cette matière laissent perdre, par les joints, beaucoup de feu, consument une grande quantité de bois, & sont de peu de durée. Le maçon le plus habile ne sçauroit éviter les joints, faire l'intérieur aussi uni qu'il devroit l'être, ni lui donner la forme la plus convenable, sans renoncer à la solidité. Ces grais chargés, pour le plus grand nombre, d'une base ferrugineuse, se vitrifient, se fendent ou s'égrainent : à peine supportent-ils le travail de trois ou quatre mois.

L'argille est la vraie matière des fourneaux & des creusets. Il y a en un grand nombre d'espèces : mais on ne peut employer avec sureté que celles qui sont désignées, dans la minéralogie de *Wallérius*, sous les noms d'*argille blanche*, d'*argille grise*, d'*argille réfractaire pâle*, d'*argille réfractaire brune*, d'*argille réfractaire noirâtre*, de *terre à porcelaine*, de *terre à pipes*. Toutes ces espèces d'argille, exposées à un feu violent, blanchissent. Je ne puis regarder, avec *Wallérius*, les deux dernières espèces comme une marne. Ce sçavant minéralogiste me paroît avoir confondu deux terres très-différentes, puisque l'une se durcit au feu, & l'autre s'y change en chaux (2). Un étranger, comme *Wallérius*, peut dire qu'on ne trouve en France qu'une espèce d'argille à pyre : mais un François, *Haudiquer de Blancourt*, est-il excusable de soutenir que *la terre grasse de la Bélière près de Forges en Normandie, est la seule, dans ce royaume, qui ait la propriété de ne se pas fondre à un feu de verrerie* (3) ? Dans la même

(1) V. la pag. 43 de la préf. de *Merret*, Art de la verr. in-4°.

(2) V. la lithog. de M. Pott; & le second chap. du prem. vol. de la chym. métall. de M. Geller.

(3) V. pag. 35 du prem. vol. de l'Art de la verr. de Blancourt.

province, on en trouve de plusieurs espèces très-bonnes, de la blanche, de la grise, de la noirâtre. A Montdeber, non loin de Nantes en Bretagne, il y en a de la blanche; à Villentrode, en Champagne, de la grise; près de Bar-sur-Aube, de la grise; à Epinac, en Bourgonne, de la brune; à Suzi, dans le Laonnois, de la grise; dans le Forêts, de la brune; à Méteviels, près de Montpellier, de la blanche. L'argille pure est assurément très-commune en France: Il n'y a point de maître de verrerie qui ne puisse s'en procurer à peu de frais. Quelques recherches avec la sonde, & un peu d'intelligence, suffiront pour lui en faire découvrir à sa portée. Les étrangers, sur-tout dans certaines parties de l'Allemagne, ont peut-être à nous envier cet avantage.

On ne trouve point d'argille qui ne soit mêlée avec quelque corps étranger plus ou moins dangereux. Dans les unes, il y a des petits cailloux; dans d'autres, des pyrites, des charbons fossiles & un peu d'acide vitriolique (1); dans toutes, du sable, quelques racines & une terre martiale, dont la présence est ordinairement annoncée par des taches rouges ou jaunes. Les pailles, les brins d'herbe, les parties de bois & les terres communes, doivent être attribuées à la négligence de ceux qui tirent l'argille. Ces matières hétérogènes sont toujours préjudiciables, quelquefois funestes, parce qu'elles laissent un vuide lorsqu'elles ont été consumées ou dissipées par le feu; ou parce qu'elles disposent l'argille à la fusion, telles que la terre ferrugineuse, les pyrites, l'acide vitriolique, les cailloux & le sable touchés par le verre ou le sel alkali fixe. Mais l'ennemi le plus redoutable pour le maître de verrerie, c'est la substance martiale renfermée dans l'argille: elle est la principale cause de sa fusibilité; dès lors, des *larmes*, des *filandres*, des couleurs grof-

(1) V. pag. 14, tom. 2, urb. hierne, Tentam. chem.

ſières dans le verre, & la courte durée des fourneaux & des creuſets (1).

Il n'y a point de verrerie où l'on ne craigne les mauvais effets de ces corps étrangers. C'eſt dans la vue de les prévenir qu'on épluche l'argille avec la plus grande attention. On la caſſe en petits morceaux, & on en ſépare tout ce qu'on y voit de coloré & d'hétérogène. Mais il eſt aiſé de ſentir que, quelque ſoin qu'on y apporte, l'opération eſt inſuffiſante. La triſte expérience que j'en ai faite aſſez longtemps m'a donné l'idée d'un autre moyen beaucoup plus ſûr & moins coûteux. On caſſe groſſièrement l'argille bien *reſſuiée*: on rejette les morceaux les plus tachés de rouge ou de jaune : on met les autres morceaux dans une grande caiſſe de bois, qui ait au moins dix pouces de profondeur, & on l'en remplit juſqu'aux deux tiers; enſuite on met dans cette caiſſe de l'eau chaude en hiver, &, ſi l'on veut, de l'eau froide en été, juſqu'à ce que l'argille en ſoit couverte d'environ deux pouces. Il importe de ne pas remuer la terre, ſi l'on deſire d'extraire la ſubſtance martiale. Le lendemain, on la verra ſur l'eau, comme une matière huileuſe rouge ou jaune. On tirera l'eau par un robinet juſqu'à ce qu'elle commence à ſe troubler. Après y en avoir mis de la nouvelle, on tirera le *coulis* par le robinet, & on le verſera à travers un tamis de crin dans d'autres caiſſes moins profondes, & ainſi de ſuite, juſqu'à ce que la bonne argille de la première caiſſe ſoit épuiſée. Lorſque la terre du *coulis* eſt précipitée, on tire l'eau claire, & on deſsèche l'argille, ſoit en l'expoſant à une chaleur modérée ou à un feu violent, ſoit en y mêlant de l'argille ſèche déjà purifiée, ou du *ciment*, dans les proportions que nous indiquerons plus bas. Cette opération, quelque ſimple qu'elle ſoit, attaque également toutes les matières hétérogènes qu'il peut y

(1) V. la pag. 123 de la lithog. de M. Pott.

avoir dans l'argille : les corps légers reftent fur le tamis : les cailloux, les pyrites & le fable, en grande partie, reftent dans le fond de la première caiffe : la fubftance martiale, & l'acide vitriolique, s'il y en a, font emportés avec l'eau.

COMPOSITION DES TERRES.

Il ne fuffit pas d'avoir ainfi purifié l'argille pour l'employer avec fûreté. Elle devient trop compacte, & diminue trop de volume par le defsèchement. L'eau raréfiée par l'action du feu, ne trouvant pas des pores affez grands pour s'échapper, détruiroit la liaifon des parties, ruineroit les fourneaux & les creufets. La trop grande retraite leur porteroit un coup prefque auffi funefte.

Il eft néceffaire de donner à l'argille fraîche un intermède d'une nature & dans une proportion à prévenir l'un & l'autre inconvéniens. Où le trouverons-nous ? La terre calcaire, combinée avec la terre argilleufe, fe change en verre à l'action d'un feu violent. Il en eft à peu près de même de la terre gypfeufe. Le fable ne peut fervir que pour les parties qui ne font pas expofées au contact de la compofition du verre ; & encore doit-il être très-pur, ni trop gros, ni trop fin. Le verre pilé & le mâche-fer, quoique confeillés par des fçavans du premier ordre, feroient plus nuifibles qu'utiles. Nous ne pouvons trouver cet intermède, j'ofe l'affurer, que dans l'argille même purifiée & brûlée au point de n'être plus fuceptible de retraite : l'argille ainfi brûlée s'appelle *ciment*. Les creufets qui ont déjà fervi, & l'intérieur des vieux fourneaux, fourniffent le meilleur.

S'il s'agit d'un nouvel établiffement, on mettra en galettes, d'un pied en quarré fur huit ou dix lignes d'épaiffeur, l'argille purifiée ; &, lorfque ces galettes feront sèches, on leur fera subir, pendant sept ou huit jours, un feu violent de reverbère : ensuite on les réduira en poudre avec beaucoup de propreté sous la meule, ou encore mieux sous les pilons d'un boccard.

Les auteurs & les maîtres de verrerie varient beaucoup sur le dégré de finesse qu'il convient de donner au ciment. M. Pott a observé que les creusets, dans la composition desquels on avoit fait entrer du ciment fin, étoient très-sujets aux gersures ; & en conséquence il conseilla de n'employer que du gros ciment, dont on a extrait avec soin le plus fin (1). D'autres, ayant remarqué que le gros ciment étoit la source des trous, des dégradations & des *gravois* dans le verre, n'ont employé que le plus fin. D'autres (& c'est le plus grand nombre), dans la vue d'obvier à ces inconvéniens, se servent d'un ciment mêlé de gros & de fin, d'un ciment simplement passé par un tamis de crin très-clair; & ils manquent leur double but. On y parviendra sûrement pour les creusets, si l'on ne fait entrer dans leur composition qu'un ciment moyen, c'est-à-dire, passé d'abord par un tamis de crin, ni trop clair, ni trop serré, & ensuite par un tamis de soie ; ce qui restera sur ce dernier sera la partie de ciment dont on doit se servir.

Chaque partie du fourneau de fusion demande un ciment particulier. Cette observation est de la plus grande importance. L'*embassure*, les parois au-dessous des *ouvreaux*, est la partie la moins délicate. Les *larmes*, les dégradations & les gersures n'y sont point de conséquence. Il suffit d'y employer l'argille grossièrement épluchée, & le ciment passé par un tamis de crin très-clair.

La *couronne*, ou tout ce qui est au-dessus de l'embassure, mérite la plus grande attention. Les gersures y sont peu dangereuses ; mais les dégradations y sont funestes ; soit parce que les cavités favorisent les *lar-*

(1) V. ce qu'il dit sur les creusets, dans les mém. de l'Acad. de Berlin.

mes ;

mes; la matière vitrifiée s'y raſſemble, & de-là ſe précipite dans les creuſets ; ſoit parce que les parties argilleuſes, les grains de ciment qui ſe détachent, tombent dans le verre, y produiſent des *gravois*, des *pierres* non moins funeſtes que les *larmes*. Il eſt très-avantageux de n'employer que du ciment fin, à la *couronne* des fourneaux.

Les dégradations ſont peu nuiſibles aux *ſièges* ou ſupports des creuſets : mais les moindres gerſures en précipitent la ruine ; ſoit parce que la partie qui porte ſur l'âtre eſt toujours dans un bain de verre ; ſoit parce que la compoſition du verre qui coule des creuſets ſur les ſièges pendant les fontes, & le verre pendant le travail, s'inſinuent dans les gerſures, & les aggrandiſſent avec une rapidité difficile à concevoir. Il eſt d'autant plus mal-aiſé d'éviter les gerſures, que les ſièges forment des maſſes très-conſidérables. On ne doit ſe flatter de les prévenir, qu'en rendant la compoſition très-poreuſe, qu'en n'y faiſant entrer que du ciment très-gros, & dont on aura exactement ſéparé le fin.

Perſonne, que je ſçache, n'a encore déterminé convenablement la quantité de ciment qu'on doit mêler avec une quantité déterminée d'argille fraîche. Les doſes que preſcrit M. Pott, dans ſon mémoire déjà cité, ne me paroiſſent applicables qu'aux très-petits creuſets, qui faiſoient l'objet de ſes recherches. Les verreries flottent, à cet égard, dans une incertitude funeſte. Elles n'ont d'autre règle, pour fixer ces proportions, que le coup-d'œil incertain ou la routine aveugle des principaux ouvriers. Rien cependant de plus important. Si l'on épargne le ciment, on s'expoſe aux inconvéniens d'une trop grande retraite & aux gerſures : ſi, au contraire, on le prodigue, on s'expoſe aux inconvéniens qui réſultent du défaut de liaiſon & de ſolidité.

On penſe communément que chaque eſpèce d'argille pure demande une dose différente de ciment. Cela ne peut être vrai, qu'à raison des matières hétérogènes dont les argilles son chargées. Purifiez-les, dépouillez-les sur-tout du sablon qui peut y être mêlé, & j'ose croire que vous trouverez que quatre parties de ciment sur cinq parties d'argille fraîche, sont la meilleure proportion qu'on puisse employer.

Souhaitez-vous une pierre de touche, un signe, auquel vous puissiez reconnoître la quantité de ciment que demande chaque espèce d'argille pure, sans être obligé d'en séparer le sablon ? Faites plusieurs petits gâteaux de quatre pouces en quarré & d'un pouce d'épaisseur, où vous aurez fait entrer le ciment à différentes proportions, dont la pâte ne sera ni trop molle, ni trop ferme, que vous dessécherez convenablement, & que vous aurez *battues* une fois : Celui de ces gâteaux qui n'aura perdu, dans un feu violent, que la dix-huitième partie de son volume, vous indiquera la meilleure composition pour les fourneaux & les creusets.

L'usage où sont la plupart des verreries de brûler légèrement l'argille, avant de la mêler avec le ciment, est pernicieux : Il en résulte constamment une inégalité de liaison ou de solidité dans les ouvrages, & la plus grande incertitude sur les proportions. L'argille peut être plus ou moins brûlée, & toutes ses parties ne le sont jamais au même dégré.

Lorsque l'argille fraîche, chargée d'une dose convenable de ciment, a été suffisamment *marchée, paîtrie*, la plupart des maîtres de verrerie la moulent en briques pour en construire leurs fourneaux. Les uns recuissent ces briques, avant de les employer; les autres les font simplement bien sécher. Ces deux méthodes me paroissent également mauvaises. Il n'est pas possible de faire, avec des briques cuites ou séches, l'intérieur du fourneau parfaitement uni, ni de lui donner la forme la plus avantageuse : les inégalités sont une ſource abondante de *larmes* & de *gravois*, & rendent la réflection très-irrégulière. A un feu violent & continué, les briques ſe rappetiſſent inégalement; le mortier, qui en faiſoit la liaiſon, coule; le verre en eſt infecté; les joints s'aggrandiſſent; le feu s'échappe par mille endroits; la conſommation du bois ou du charbon de terre eſt immenſe; la qualité du verre moins parfaite, & le fourneau d'une courte durée. Combien de maîtres de verrerie font la triſte expérience des mauvais effets de ces méthodes?

Il y a un moyen, connu dans les *groſſes verreries* de Normandie & dans quelques-unes du Palatinat, pour obvier à tous ces inconvéniens; & il eſt très-aiſé de le mettre en uſage, quoique *de Blancourt* aſſure que c'eſt un ſecret renfermé dans la famille d'un maître maçon.

On moule l'argille préparée & compoſée en quatre eſpèces de thuiles: En thuiles d'un pied en quarré & de deux pouces d'épaiſſeur, pour l'*embaſſure* & pour une partie de la *couronne*: en thuiles de vingt pouces de longueur ſur ſix de largeur & deux d'épaiſſeur, pour les *tonelles*: en thuiles d'un pied de longueur ſur dix pouces de largeur par un bout, & ſept par l'autre, & deux pouces d'épaiſſeur, pour la *couronne*: & en thuiles des *ſièges* de deux pouces d'épaiſſeur & d'une grandeur ſuffiſante, pour que, miſes de *champ*, les ſièges ne ſoient dans le bas qu'à ſix pouces de diſtance l'un de l'autre, & dans le haut à la diſtance des deux cinquièmes de la largeur du fourneau, & n'ayant que vingt à vingt-quatre pouces de hauteur, ſuivant la grandeur du fourneau. Si l'on donne à ces thuiles une moindre épaiſſeur, comme on le fait communément, on multiplie les joints ſans néceſſité: ſi on leur en donne une plus grande, elles s'appliquent imparfaitement l'une ſur l'autre.

Lorſque ces thuiles ſont un peu fermes, on les broſſe légèrement, & on les bat avec une *patelle* de bois. C'eſt dans cet état qu'on les emploie à la construction du fourneau.

Il importe que le massif du fourneau, ou la voûte ouverte entre les sièges, & où répondent à angles droits quatre galeries ouvertes par l'autre extrémité (si l'on veut faire usage du charbon de terre), soit très-solide ; que l'âtre soit propre à résister à la plus grande violence du feu (le grais dur en fournit d'excellens); & que les quatre arches soient faites avec la plus grande attention. Voyez la 1ere. & la 2e. *fig.*

Le quarré du fourneau étant tracé & fait en briques blanches ou d'argille de rebut & de sable, & les arches étant formées en bonnes briques ordinaires, il convient de commencer la construction par les sièges. On a plus de facilité à appliquer les thuiles l'une contre l'autre à grands coups de *batte*, que lorsque l'*embassure* & la *couronne* sont faites, & on ne court pas le risque de causer des ébranlemens dangereux : tout en est plus solide. Ensuite on fait une assise de thuiles d'*embassure:* on humecte cette assise avec un balai fin chargé d'un coulis très-clair, fait avec la composition des thuiles. On la recouvre d'une seconde qu'on a soin de bien battre, & ainsi de suite, jusqu'à ce que le fourneau soit entièrement monté. On forme les *tonelles*, les *ouvreaux*, & les *lunettes*, avec des pièces de bois, qui ont la figure qu'on veut donner à ces ouvertures. Le dehors & le dedans étant *recoupés* & unis, on a soin de dessécher lentement le fourneau, & de le rebattre plusieurs fois par jour. Si pendant l'*attempage* ou desséchement complet du fourneau, il s'y fait des gersures, soit qu'on ait tenu la composition des thuiles un peu trop *grosse*, soit qu'on ait poussé le feu avec trop de rapidité, soit enfin qu'on n'ait pas rempli exactement l'entre-deux des fourneaux & des arches, il ne faut pas s'allarmer ; le remède est bien aussi sûr que simple : On supprime avec prudence le feu; lorsque le fourneau est assez refroidi pour pouvoir y entrer, on remplit les fentes avec du chanvre bien chargé de *la composition* des thuiles ; & l'on passe ce chanvre le mieux qu'il est possible avec une lame de fer, d'un pouce ou environ de largeur, sur quinze ou dix-huit pouces de longueur : on met par degré le feu au fourneau. Il est aisé de sentir que, suivant cette méthode, il n'y a point, 1°. d'inégalité à craindre, ni de réflection irrégulière ; 2°. qu'on peut donner à l'intérieur du fourneau la figure la plus avantageuse, sans nuire à la solidité ; 3°. qu'un fourneau ainsi construit, n'ayant point de joints, du moins sensibles, ne laisse point perdre de feu, & peut durer dix ou douze ans, si l'on a soin de réparer, lorsqu'il est nécessaire, l'âtre, les sièges & les ouvreaux, & de lui faire faire plusieurs excellentes *réveillées*. Ces réparations ne souffrent aucune difficulté. La seule attention qu'on doive avoir, c'est de ne pas laisser refroidir trop promptement le fourneau. Il ne manqueroit pas de s'écailler.

Il y a pour le moins autant de façons de construire le fourneau, que l'art de la verrerie a de branches. Dans les verreries à bouteilles, à verre plat *à boudine* & sans *boudine*, le fourneau a six arches, une à chaque coin, & une sur chaque *glaie* : dans la plupart de celles où l'on fait des gobelets, des verres à boire, des caraffes, du crystal, &c., il n'y a qu'une arche au-dessus du fourneau : dans d'autres, & particulièrement dans celles à verre plat façon de Bohême, il y en a quatre, une à chaque coin du fourneau. On n'a rien de déterminé sur la forme ni sur la capacité des arches, sur la place, la forme & le diamètre de l'ouverture par laquelle elles reçoivent le feu du fourneau. Nous ne sommes pas plus avancés sur la figure de l'intérieur du fourneau. Le cordeau seul du maître maçon, ou du fondeur, règle ce qu'il n'appartient qu'à la plus profonde pyrothecnie de fixer. Chacun a ses mesures. Les uns préfèrent la figure ronde & la voûte à plein ceintre, & placent dans leur fourneau trois, cinq, ſept ou huit & juſqu'à neuf creuſets : d'autres veulent que leur fourneau ſoit quarré, juſqu'à la hauteur du milieu des *ouvreaux*, & que la *couronne*, ou la voûte, ſoit plus ou moins ſurbaiſſée : il y en a qui font une eſpèce de pyramide quadrangulaire tronquée : j'en connois qui, dans la vue d'éviter les *larmes*, ſurbaiſſent extrémement la voûte du côté des *tonelles*, & le moins qu'il eſt poſſible du côté des *mormues*, des *ouvreaux*. Preſque tous ſont obligés de détruire une partie du fourneau, pour y mettre les creuſets ; & de le reconſtruire, lorſque les creuſets ſont placés. Tous ces fourneaux chauffent foiblement & conſument une très-grande quantité de matière combuſtible. Il ſeroit de beaucoup trop long, & peut-être très-peu utile à l'art de la verrerie, de relever les défauts particuliers à chaque eſpèce.

Il eſt auſſi difficile qu'important de trouver un fourneau commode pour toutes les opérations de l'art de la verrerie, lequel ayant ſix ou dix *ouvreaux*, quatre *lunettes*, deux *tonelles*, produiſe le plus grand feu poſſible, avec le moins de matière combuſtible. C'eſt à l'Académie à juger ſi j'ai approché de la ſolution de ce problême. Je puis aſſurer avec confiance, que le fourneau dont je donne le plan & la coupe, * *fig.* 1^ere^., 2^de^. & 3^e^., affine mieux & plus promptement le verre, avec un tiers moins de bois, que ceux qui étoient les moins imparfaits. Depuis cinq juſqu'à huit pieds, ce ſont les dimenſions les plus avantageuſes. Au-deſſus & au-deſſous, le verre s'affine moins bien, & proportionnément il faut plus de matière combuſtible. Six ouvriers peuvent travailler en même temps à ce fourneau, & recuire très-bien leurs ouvrages dans les arches, au moyen de pots de terre ou de tole, garnis de terre, d'un pied de diamètre, deux de profondeur, & fermés par un bout, à la manière de la Bohème. Si l'on veut souffler des lanternes à la façon d'Angleterre, ou des verres plats à vître, &c., il convient de diminuer, des deux tiers en dedans du fourneau, l'épaiffeur des *ouvreaux*. Ceux qui defirent faire leur *fritte* avec le feu du fourneau de fufion, peuvent le faire très-commodément. Ils n'ont qu'à pratiquer une arche fous chacune de celles à recuire, & la *lunette* fera à la hauteur des *fièges*.

On pourroit y couler les grands *platéaux* pour les miroirs, en faifant quatre *ouvreaux* de dix-neuf pouces de hauteur fur dix-fept de largeur, un à chaque bout des deux *fièges*.

DES CREUSETS.

Il y a deux façons de faire des creufets, fçavoir à *la main*, & dans des *formes*. Celle-ci eft confacrée aux petits creufets, celle-là aux grands. Je puis affurer, d'après une affez longue expérience, qu'il eft aifé de faire dans des formes les plus grands creufets, & avec avantage. 1°. Il faut un temps affez long pour former un bon potier à la main : à peine eft-il néceffaire de guider deux fois un manouvrier pour lui faire faire un bon creufet dans des formes. 2°. Il eft très-rare qu'un creufet, fait à la main, foit monté droit : il l'eft toujours dans des formes. 3°. On ne peut *rebattre* que foiblement un creufet fait à la main : on *rebat* tant qu'on veut ceux qui font faits dans des formes. 4°. Les plus habiles potiers à la main ne font, par femaine, que quatre creufets d'environ trente pouces chacun : un ouvrier en fait aifément trois par jour dans des formes.

Il n'y a point de forme qu'on n'ait donnée aux creufets. On en voit de quarrés, de triangulaires, à plufieurs pans, d'auffi grands dans le bas que dans le haut, de *ventreux*, ou dont le diamètre du milieu eft plus grand que l'inférieur & le fupérieur, & de plus ou moins évafés. Les trois premières efpèces fouffrant des dilatations inégales, à caufe de leur épaiffeur inégale, périffent promptement par les angles; & ils font auffi peu propres à la *dépuration* du verre, que les deux efpèces fuivantes. Le verre fe fond & s'affine d'autant mieux & d'autant plus promptement, toutes chofes égales d'ailleurs, qu'il offre plus de furface au feu réfléchi. D'après ce principe très-vrai, il me femble que les creufets devroient être des cônes renverfés. Mais, ne portant que fur un point, ils n'auroient pas affez de folidité, & on perdroit trop fur la quantité de matière. Il y a un jufte milieu à prendre : c'eft de donner au diamètre inférieur un feptième de moins qu'au diamètre fupérieur. Cet évafement, loin de nuire à la folidité, y contribue; il eft très-propre à la dépuration du verre, & laiffe aux creufets une capacité proportionnée à la capacité du fourneau, ou ne lui donne à faire ni trop ni trop peu.

Les meilleurs creufets font ceux qui font faits avec l'argille pure, préparée & compofée comme il a été dit ci-deffus. Ils doivent être traités avec la plus grande propreté; d'une épaiffeur moyenne, d'un pouce & demi dans la *fleiche*, & de deux pouces dans le *jable* & le *cul;* montés droit, d'une égale épaiffeur dans toutes les parties de la *fleiche;* d'une forme convenable; *rebattus* avec foin, defféchés très-lentement, & recuits à un feu violent & longtemps continué.

DES MATIERES A CONVERTIR EN VERRE.

Des quatre efpèces de terre ou pierres, *calcaire, gypfeufe, argilleufe*, & du genre des cailloux, que nous connoiffons, il n'y en a aucune de vitrifiable par elle-même au feu le plus violent. Les expériences de M. Pott

Pott ne nous permettent pas d'en douter (1). Chacune, demande, pour être changée en verre, une addition des autres, ou de bases métalliques, ou de sels alkalis fixes. Il n'y en a point qui forme, avec une dose déterminée des dernières, un verre aussi clair, aussi transparent, que celle du genre des cailloux. C'est aussi la combinaison la plus connue dans les verreries, & la seule peut-être qu'on croie nécessaire de connoître.

L'espèce de terre ou de pierre connue sous le nom de crystal, de quartz, de cailloux, de sable, de grais, &c. fait la principale base du verre. Ces pierres, excepté le crystal & le quartz, sont très-communes en France. On trouve de très-beaux cailloux blancs & demi transparens sur les bords de la mer, dans plusieurs rivières, &c. Les cailloux noirs, bruns, blanchâtres, opaques & grossiers, ne sont assurément pas rares, & il suffit de les faire rougir & de les éteindre dans l'eau, pour les rendre parfaitement blancs. Nous avons un très-grand nombre de mines de beau sable, & ce qui est peut-être plus précieux, du grais en abondance. Il y a très-peu de verreries qui employent ce dernier dans la composition du verre (2). *Merret* assure même qu'*il ne peut servir à cet usage*, sans doute par la crainte qu'il n'en coûtât trop pour l'écraser ; mais on n'a qu'à le faire rougir dans les arches pendant les fontes, l'éteindre dans l'eau & le battre légèrement. L'opération ne sera assurément pas couteuse, à moins que ce ne fût une espèce de grais aussi dur que rare. Le verre fait avec le grais à paver, ou autre de couleur blanchâtre ou jaunâtre, n'est point différent en dureté, quoique *Wallérius* l'assure (3), de celui qu'on a fait avec le sable.

Le sable le plus coloré & le plus argilleux est le meilleur pour le verre à bouteilles, parce qu'il de-

(1) V. le chap. IV. de son examen chymique des pierres.
(2) V. les notes sur le 1er. liv. de Neri.
(3) V. la p. 141 du 1er. vol. de la miner.

mande peu de ſel alkali fixe, & qu'il fait un verre très-ſolide. Il ſuffit d'employer du ſable blanc ou du grais pour le verre vert, & même pour le verre blanc. Les veines rouges ou jaunes, qu'on y voit, diſparoiſſent ordinairement au feu. Mais, ſi l'on n'a pas de beaux cailloux, des pierres à fuſil, comment purifier le ſable blanc ou le grais au point d'en faire le cryſtal le plus beau & le plus fin? ſouvent les calcinations & les extinctions répétées ſont inſuffiſantes. La baſe martiale dont ils ſont rarement exempts, & qui toujours colore plus ou moins le verre, leur réſiſte. Le célèbre *Sthal* (1) conſeille de les laver avec ſoin dans une eau de rivière chargée d'un peu d'eau forte; mais ce moyen ne ſeroit-il pas coûteux, & peut-on ſe flatter qu'il rempliroit le but propoſé, à moins que le ſable & le grais n'euſſent été réduits en pouſſière très-fine? L'eau régale & la proſerpine de Glauber (le beurre d'antimoine), par le ſecours de laquelle on opéreroit ſûrement l'extraction deſirée, ſont trop difficiles à préparer, & trop chères pour qu'un maître de verrerie doive ſe déterminer à les employer. Je vais indiquer un moyen auſſi efficace, beaucoup plus ſimple & moins diſpendieux. On n'a qu'à mêler, par la diſſolution, pour cent livres peſant de ſable ou de grais écraſé, quatre livres de ſel de verre, mettre ce mêlange dans un vieux creuſet, ou dans tous à la fin d'un fourneau, & lui faire ſubir, pendant ſept ou huit heures, le feu de verrerie le plus violent: le ſel de verre diſparoîtra, diſſipera juſqu'au plus léger atôme de matière colorante, & le ſable reſtera blanc comme la neige, très-pur, propre à faire le plus beau cryſtal, & même à imiter les pierres précieuſes. Pluſieurs auteurs ont avancé, qu'il y avoit des eſpèces de ſable & de caillou plus diſpoſées à la fuſion que d'autres. Cela n'eſt vrai qu'à raiſon des matières

(1) STHAL. fundam. chym. pact. 2. ſect. III. cap. III. *de modo conficiendi varias gemmas artif.*

hétérogènes (la ſubſtance martiale ſur-tout) dont elles ſont chargées. C'eſt une erreur de croire avec *Merret*, que le *cryſtal exige un ſable tendre*, & *le verre commun un ſable dur* (1).

La ſeconde matière principale qui entre dans la compoſition du verre, ce ſont les fondans, les ſels alkalis fixes, minéral & artificiel, ou un mêlange de ſels alkalis fixes & de leur partie *cendreuſe*, d'une terre *alkaline*, de *nature ſaline* (2). Il n'y a peut-être point de partie dans l'art de la verrerie, ſur laquelle les auteurs & les maîtres de verrerie ſoient moins d'accord. Chacun a ſon fondant favori (3). *Agricola* dit que, de ſon temps, on donnoit *la préférence au nitre*. *Merret* aſſure que *le temps & l'expérience ont fait abandonner l'uſage du nitre*, comme *ſel trop tendre & trop foible qui ſe réſout en ſel alkali* (ſel de verre), & *que la roquette, ou poudre de Syrie, a obtenu le premier rang* (4). *Kunckel* & *Henckel* aſſurent, d'après *Merret*, *que le verre fait avec la ſoude n'eſt pas eſtimé ; qu'il caſſe très-facilement en ſe réfroidiſſant ; qu'il conſerve toujours une couleur bleuâtre ; qu'en un mot, la ſoude, quand même on y mêleroit de la magnéſie, ne produit point un beau verre ;* & on voit aſſez que ces auteurs penchent en faveur de la *potaſſe*. Le premier dit même, que le cryſtal qu'il en a fait, *eſt ſupérieur à ceux que Néri avoit faits avec tant de peine*, & où il avoit fait entrer le ſel alkali fixe de la ſoude, de la roquette, le borax, le ſel alkali du tartre, le nitre (5), &c. M. *Gellert* penſe *que la ſoude eſt plus propre que tout autre ſel tiré des cendres, à faire du beau verre durable ; que celui qui eſt fait avec de la potaſſe eſt plus ſujet à être attaqué par les acides que les autres, & même qu'il ſe*

(1) V. la p. 17 de l'Art de la Verr. trad. franc. in-4°.
(2) V. les p. 175 de la lithog. & 94 de la cont. de M. Pott.
(3) V. lib. 12 *de re metall.*
(4) V. p. 29 de l'Art de la Verr. trad. in-4°.
(5) V. les p. 11, 103 & 561 de l'ouvrage ci-deſſus.

décomposé à l'air (1). Dans les verreries actuelles d'Allemagne, on ne sçait employer que la *potasse*. Dans celles d'Italie, & dans celles de France, on ne connoît presque que l'usage de la soude & du salpêtre. Auquel de ces fondans rejettés par les uns, adoptés par les austre, devons-nous donner la préférence ? A celui qui sera le plus à notre portée, que nous pourrons nous procurer à moins de frais. Je puis assurer, d'après des expériences très-variées & très-souvent répétées, que tous sont également bons, pourvu que la préparation en soit convenable, les proportions de la composition justes, & la fusion & dépuration suffisantes.

Les fondans peuvent se trouver en France, pour le moins en aussi grande abondance, que dans les pays étrangers. Quelque hasardée que paroisse cette assertion, elle n'en est pas moins bien fondée. Nous pouvons faire annuellement une quantité très-considérable de *potasse* rouge & blanche (2). Il y a plusieurs pro-

(1) V. les p. 25 & 26 de la trad. franc. du 1er. vol. de son excellente chym. métall.

(2) La potasse rouge, est le sel alkali fixe extrait par lixivation & évaporation des cendres de tous les végétaux ; excepté la plûpart des plantes maritimes. La potasse blanche n'est autre chose que la rouge calcinée à un feu de Réverbère.

Il se fait une grande quantité de potasse en Alsace, en Loraine, & dans les Ardaines. Dans les chefs-lieux, il y a ordinairement quelqu'un qui l'achette livre à livre des paysans & des Bucherons. La cupidité a introduit un grand nombre de fraudes dans cette branche de commerce. Il est important de faire connoître les principales. Une des plus dangereuses pour les verreries enfin, est de mêler du sel marin avec le sel alkali fixe, ou de vendre pour potasse le sel extrait des cendres faites sous les chaudières, des salines de sources. Il y a trois moyens également sûrs pour découvrir cette fraude. Cette potasse fond aisément au feu de calcination ; ne prend qu'une couleur bleue très-pâle, & ne fait du verre qu'à proportion du sel alkali fixe, dont elle est chargée. J'en ai reçu où il y avoit plus de moitié de sel marin tiré, je pense, de la saline de Dieuze. Cet objet me paroît mériter l'attention du ministère. En corrigeant cet abus, il rendroit un service important à l'art. On s'est apperçu que les cendres vieilles fournissoient une plus grande quantité de sel, que les nouvelles. En conséquence, on les laisse longtemps exposées au grand air, ou on les garde dans des endroits où l'air extérieur a un libre accès. Ces cendres donnent plus de sel, par la raison, qu'une partie souvent considérable du sel alkali fixe se convinces où il se perd immensément de petit bois, ne fussent que les *régalis*, & où les coupeurs de bois négligent les cendres qu'ils font pendant l'exploitation d'une vente. La *fougère* est très-commune dans le royaume : les cendres de cette plante, coupée vers la fin de juillet, & brûlée comme on brûle la soude, donnent environ un neuvième de sel alkali fixe. On ne fait aucun cas du marc des raisins : ses cendres bien faites produisent au moins autant que celles de la *fougère*. Des cendres de ce qui reste dans l'alembic des distillateurs d'eau de vie de marc, m'ont donné jusqu'à un cinquième de très-beau sel alkali fixe : il est rare que ces distillateurs ne mêlent au marc, de la lie liquide. Pour peu qu'on connoisse notre produit en vin, on concevra que nous pourrions tirer annuellement du marc plusieurs millions pesant de très-bonne *potasse*. Il est surprenant qu'on ait négligé jusqu'aujourd'hui un objet aussi utile que facile à saisir. Les cendres des côtes de tabac nous offrent une nouvelle ressource. Elles produisent, lorsqu'elles sont faites avec soin, plus du tiers de leur poids de sel alkali fixe. Il est certain que nous pouvons nous procurer très-aisément, & sans le secours de l'étranger, la potasse que nos verreries, nos blancheries & nos savonneries de savon noir sont dans le cas de consommer. Cette branche d'industrie mérite sans doute d'être encouragée. Les maîtres de verreries sont les premiers intéressés à l'animer, & cela leur est facile : ils n'ont qu'à exciter à des essais les paysans, à leur donner la certitude de la vente, & à les diriger. Nous leur en fournirons ci-après les moyens.

vertit en tartre vitriolé, sel funeste aux verreries, lorsqu'il se trouve en grande proportion dans la potasse.

Les uns mêlent de la suie dans la potasse rouge, ce qui donne au verre une couleur jaune très-opiniâtre. D'autres (& c'est le plus grand nombre), ne laissent point clarifier leur lessive. Il en résulte, que la potasse est plus foible & très-difficile à purifier par la calcination, du principe colorant grossier, sur-tout lorsque la lessive est faite, en tout ou en partie, avec les cendres de bois de sapin.

Sans parler des cendres de l'*algue marine*, connue ſous les noms de *varec* & de *goëmon*, très-communes ſur nos côtes, nous avons encore une reſſource bien plus précieuſe ; c'eſt *la ſoude*. On en fait en Provence & en Languedoc, qui, ſimplement frittée avec le ſable, eſt propre à faire de bon verre. Les eſſais qu'on a faits en Poitou, donnent les meilleures eſpérances. Un grand nombre de bonnes eſpèces de kali, particulièrement le *kali majus cochleato ſemine*, croiſſent naturellement ſur les côtes de Provence, du Languedoc & du Rouſſillon (1). J'ai de très-bonnes raiſons de croire, qu'on pourroit y cultiver avec ſuccès le *kali de Sicile*, & les plus eſtimés d'Eſpagne, *le kali à feuille capillaire velue*, *le kali à feuille de geneſte*, & *le kali à feuille de tamariſque*. Il eſt plus que probable, que, par une culture & par une incinération convenables de ces plantes, nous nous procurerions très-abondamment, & dans des terres incapables de produire autre choſe d'utile, des ſoudes équivalentes aux meilleures d'Eſpagne. Celles qu'on fait du côté de Narbonne, & dans les iſles, appellées les *Saintes*, uniquement avec *le kali majus cochleato ſemine*, ne leur cédent pas de beaucoup en qualité. Elles rendent autant de ſel alkali fixe, environ moitié de leur poids, & il n'y a d'autre différence, qu'une très-petite quantité de plus de ſel marin & de ſel admirable de Glauber. La ſoude ou *ſalicor*, qu'on fait à *Pérols*, Ville-neuve près de Montpellier, eſt de beaucoup inférieure à celle des *iſles les Saintes*. Elle ne donne guère plus du tiers de ſel alkali fixe, & chargé d'une plus grande quantité de ſels neutres, par la raiſon, ſans doute, qu'on brûle avec le *kali majus cochleato ſemine*, le *kali majus geniculatum*, l'*abſynthe* & le *fénouil* maritimes, & bien d'autres plantes maritimes. Ne cultivât-on, dans nos provinces méridionales, que

(1) V. la p. 536 de l'hiſt. des plantes de l'Europe.

le *kali majus cochleato ſemine* ; la cendre donnât-elle moins de ſel alkali fixe, nous pourrions rendre nos ſoudes équivalentes aux meilleures d'Alicante, même ſupérieures. Le moyen eſt ſimple. Nous n'aurions qu'à arroſer les cendres du *kali majus cochleato ſemine*, encore rouges dans la foſſe, avec une forte leſſive des mêmes cendres.

Quoique les états du Languedoc, toujours attentifs au bien de la province, ayent déterminé d'encourager la culture des ſoudes ; quoique cette cultute & le moyen d'amélioration que je viens de propoſer ſoient auſſi aiſés que lucratifs, peut-être aurons-nous long-temps à attendre des ſoudes d'une meilleure qualité. Il ſeroit très-avantageux de pouvoir, en attendant, ſubſtituer nos ſoudes, telles qu'elles ſont, aux ſoudes étrangères : une ſeule opération nous mettra en état de le faire. Il ne s'agit que d'en extraire le ſel alkali fixe, & d'employer ce ſel au lieu de la ſoude en nature. Ce ſel, ſuivant le dégré de purification qu'il a reçu, eſt propre (je puis l'aſſurer avec confiance) à faire depuis le verre commun blanc, juſqu'au plus beau cryſtal. La partie terreuſe de toutes les ſoudes, comme des cendres de tous les végétaux, eſt exactement de la même nature *alkaline* ; la matière colorante qui s'y trouve mêlée eſt préciſément la même dans toutes, *le phlogiſtique*. Le ſel alkali fixe, extrait des cendres de tous les végétaux, ſans en excepter auçun, eſt le même relativement à la verrerie, ou il eſt également propre à faire du verre d'une bonne & belle qualité. Il eſt facile de s'aſſurer de la vérité de ces trois propoſitions : elles me paroiſſent inconteſtables. D'où provient donc la différence qu'il y a entre nos ſoudes & celles d'Alicante ? Ce ne peut être que, ou de ce que leur partie terreuſe eſt en plus grande quantité, ou de ce que leur ſel alkali fixe eſt chargé d'une plus grande quantité de ſels neutres : or, il n'y a pas un douzième de ces ſels neutres dans le ſel des plus mauvaiſes ſoudes du Languedoc. On en trouve autant dans la plupart des potaſſes. Cette quantité, lorſque la compoſition eſt bien faite, ne nuit aſſurément point à la qualité du verre. Il eſt poſſible d'en faire du très-bon & du très-beau avec le ſel alkali fixe du *varec*, qui eſt chargé de plus de la moitié de ſon poids, de ſel marin & de ſel admirable de Glauber. C'eſt donc uniquement dans la plus grande proportion de terre, qu'il faut chercher la cauſe de la différence eſſentielle de nos ſoudes à celle d'Alicante. La compoſition de parties égales de beau ſable, & des meilleures ſoudes d'Eſpagne, où le ſel alkali fixe eſt à peu près en même quantité que la terre, ſe *fritte* bien, blanchit facilement à un feu de réverbère, ſe fond ſans peine, & produit un verre paſſablement tranſparent. Parties égales de beau ſable & des ſoudes ordinaires du Languedoc, ſe *frittent* très-mal, reſtent toujours d'un jaune brun, ne peuvent fondre au feu le plus violent, &, ſi l'on diminue la doſe du ſable, elle font un verre peu tranſparent, & d'une couleur vert-jaune très-déſagréable. La magnéſie ne ſert, dans ce cas, qu'à rendre le verre moins tranſparent, & la couleur plus inſupportable.

D'où vient que les dernières donnent un produit ſi différent des premières? Ce ne peut être certainement que parce qu'elles ont environ deux parties de terre contre une de ſel alkali fixe. Dans l'emploi du ſel alkali fixe, dégagé de la terre, des cendres, les différences diſparoiſſent, toutes les difficultés ſont levées.

Mais, comment extraire le ſel des ſoudes, diront peut-être quelques maîtres de verreries, ſans augmenter nos dépenſes? Cela ſeroit difficile, ſi je leur propoſois la méthode de *Néri*, même celle de *Kunckel* (1).

(1) V. les p. 2, 11, & 307 de l'art de la verr. trad. franç. in-4°.

Je

Je vais leur en communiquer une beaucoup plus ſimple, & moins diſpendieuſe (Voyez la 4e. *fig.*). On met la ſoude pulvériſée, une partie ſur huit parties d'eau, dans la chaudière B 1, aux trois quarts pleine d'eau. L'eau eſt aſſez chaude pour diſſoudre le ſel avec facilité, & s'en charger : mais ne pouvant bouillir, elle ne ſçauroit empêcher une prompte précipitation de la terre. Lorſqu'elle eſt bien clarifiée, on la fait couler, par un robinet, dans la chaudière du milieu B 2, ſous laquelle eſt le grand feu, & de-là, pour ne pas rallentir l'évaporation par un trop grand épaiſſiſſement de la leſſive, dans la troiſième chaudière, où le ſel ſe précipite à une douce chaleur, & d'où on le prend avec une eſpèce d'écumoire de fer, pour le mettre à égoûter dans un canal de tole incliné ſur la même chaudière. Les deux murs de ſéparation des fourneaux ne doivent avoir que huit pouces d'épaiſſeur, & chacun deux trous de deux pouces en quarré ſur la longueur. On ne fait le feu que dans le fourneau du milieu : les deux autres ne ſont chauffés que par la chaleur qu'il leur communique, & par les braiſes qu'il fournit. On porte la terre de la ſoude dans les caſes F, F : on l'arroſe pluſieurs fois avec de l'eau, afin d'extraire tout le ſel alkali fixe qui pourroit y être reſté, & on fait rentrer l'eau des petits baſſins dans la chaudière B 1. L'extraction du ſel ne coûtera pas trois deniers par livre. Quatre hommes, avec l'équivalent d'une corde de charbonete, peuvent en extraire mille livres dans vingt-quatre heures.

Il n'y a rien de plus expéditif, pour pulvériſer la ſoude, qu'un *boccard*, ſoit à eau, ſoit à vent. Cette machine eſt trop connue, pour ne pas me croire diſpenſé d'en faire la deſcription (1).

Le cryſtal eſt d'autant plus beau, que le ſel alkali

(1) Les ſoudes ordinaires du Languedoc ſe vendent cette année de cinquante ſols à trois livres le cent peſant.

fixe a été mieux purifié. Mais en quoi doit consister cette purification ? Suivant les auteurs de l'art de la verrerie, & un grand nombre de chymistes, elle consiste à dissoudre & à dessécher plusieurs fois, par l'évaporation, le sel alkali fixe. Il y en a qui prescrivent de le dissoudre, de filtrer la dissolution, & d'en faire l'évaporation jusqu'à cinq fois (1). Cette méthode est ennuyeuse, très-dispendieuse, & insuffisante. Elle est coûteuse, non seulement par le temps, les instrumens, & le bois qu'elle exige ; mais principalement par la déperdition du sel alkali fixe qu'elle occasionne : il n'en reste pas les deux tiers, & encore sont-ils chargés d'une plus grande quantité de sels neutres. Une seule dissolution suffit pour séparer assez parfaitement la partie saline de la partie terreuse. La terre qu'on obtient dans les différentes dissolutions, est moins la preuve de l'insuffisance de la première dissolution, que de la décomposition du sel alkali fixe. Quand même le sel alkali fixe retiendroit une petite quantité de la partie terreuse, cela n'est d'aucune conséquence, comme nous le verrons plus bas.

Il importe d'extirper radicalement le principe colorant grossier, la matière grasse ; & les dissolutions, filtrations & évaporation répétées, ne sçauroient le faire. On y réussit infiniment mieux, en moins de temps & sans perte, par la calcination, en exposant toutes les parties du sel alkali fixe à une flamme vive & claire, jusqu'à ce qu'il ait, étant refroidi, une couleur bleuâtre. Le fourneau à calciner le sel alkali fixe, dont *Kunckel* a donné le plan dans ses remarques sur les notes de *Merret*, peut être employé (2) ; mais il est très-difficile, pour ne pas dire impossible, d'éviter que les cendres & charbons du bois, ne se mêlent, par le *tisar*, avec le sel alkali fixe, & qu'il ne s'en perde une cer-

(1) V: la p. 101 de l'art de la verr. trad. franç. in-4°.
(2) V. *Id.* p. 319.

taine quantité. Celui dont je joins ici le plan (*fig. 5e.*) n'a point cet inconvénient ; & je puis assurer qu'il produit le même effet avec moitié moins de bois. Une fois échauffé, on pourra y calciner, par vingt-quatre heures, environ cinq milliers de sel alkali fixe ; quatre ou cinq cent livres dans deux heures, avec une corde de charbonette, ou des fagots. La seule attention qu'on doive avoir au commencement de la calcination, c'est de bien remuer le sel avec un *rable* de fer, pour prévenir la fusion aqueuse, qui retarderoit l'opération. Le sel alkali fixe de la soude a un avantage sur la potasse ; il attire avec moins de rapidité, l'humidité de l'air : les maîtres de verrerie peuvent le conserver longtemps dans des vaisseaux de bois propres, sans craindre aucune altération, & sans être dans la nécessité de le calciner de nouveau ; pour que la potasse se conserve sèche dans des vaisseaux, il seroit indispensable de les goudronner en dehors.

Peu de personnes soupçonnent qu'il soit nécessaire d'ajouter au sable & au sel alkali fixe, une terre alkaline, pour avoir du bon & beau verre. C'est elle cependant qui procure le parfait mêlange, donne du *corps* au verre, le rend solide, & en facilite la dépuration. Le sable & le sel alkali fixe, à moins qu'on ne mette trop de ce dernier, donnent dans la fonte une composition trop pâteuse, pour que les matières puissent se mêler intimément, & que le sel de verre puisse se dissiper & emporter avec lui le principe colorant grossier. Une des meilleures terres alkalines qu'on puisse employer, est la chaux éteinte à l'eau & bien blanche. Au rapport de *Kunckel*, la craie est depuis longtemps en usage dans les verreries de l'Allemagne (1). La chaux produit dans le verre le même effet que la terre alkaline des cendres des végétaux, qu'on a rendu parfaitement

(1) V. la p. 101. de l'art de la verr. trad. franç. in-4°.

blanche. L'une & l'autre donnent au verre plus de fluidité dans la fusion, plus de solidité & la couleur jaune, si elles sont en grande quantité. La chaux & la terre des végétaux portent, dans le verre, d'autant moins de couleur, qu'elles ont été calcinées plus longtemps à une flamme bien claire.

Je ne connois point d'auteur qui ait parlé du *grosil* ou *casson*; & les maîtres de verrerie les ont condamnés à n'entrer que dans la composition du verre commun. Les pièces cassées du plus beau cryftal, ou du verre blanc cryftallin, ne servent qu'à la composition de la *pivette*, ou du verre blanc commun. Ce préjugé est très-nuisible à l'art de la verrerie : il augmente nécessairement d'un quart le prix du cryftal, & du verre blanc cryftallin. Les *cassons*, loin d'altérer les compositions de la même espèce, les bonifient, en facilitent la dépuration, & rendent le cryftal, ou le verre cryftallin qui en résulte, plus net, plus solide & plus brillant. Il est surprenant qu'on n'ait pas plutôt entrevu cette vérité : elle me paroit une suite nécessaire du principe assez généralement reçu, que le cryftal est d'autant meilleur & d'autant plus beau, qu'il a éprouvé plus longtemps l'action du feu, ou qu'il a été un plus grand nombre de fois éteint dans l'eau. Les seules attentions que demande l'emploi du *casson*, sont 1°. de les purger de toute matière hétérogène, *mors de canne*, terre, larmes, pierres, &c.: 2°. de l'écraser bien menu: 3°. que les *cassons* soient le produit d'une composition de la même nature que celle où on les fait entrer: 4°. qu'ils ne fassent jamais plus du tiers de la composition : 5°. de les mêler exactement avec les autres matières.

Dans les compositions des trois premières matières ci-dessus, la couleur bleue, que donne constamment le sel alkali fixe, se marie avec la couleur jaune que donne la chaux ou la terre alkaline des végétaux, & il en résulte un verd plus ou moins foncé, à raison de la proportion des matières, & du dégré de ténuité du principe colorant. On est assez généralement persuadé que la *manganèse* purifie le verre, en est le *savon*, & anéantit la couleur verte ; mais je doute que ce soit d'après un examen bien réfléchi. La couleur verte reparoît aussitôt que la couleur rouge de la *manganèse* a été dissipée, & je n'ai jamais vu que le verre eût rien gagné. Il me paroîtroit plus naturel de penser que la combinaison des trois couleurs simples, bleue, rouge & jaune, produit le blanc dans le verre. Si la chaux domine, ou que les matières de la composition n'aient pas été bien purifiées, le verre est jaune ou verd-jaune : si les matières ont été purifiées avec soin, & si le sel alkali fixe domine par rapport à la chaux, le verre sera bleu. Il en est de même de la *manganèse* : la plus foible nuance de son rouge, toutes choses égales d'ailleurs, donne au verre la blancheur la plus agréable. Je me suis assuré, par des expériences répétées, que l'extinction tant vantée de la *manganèse* dans le vinaigre, n'ajoute rien à sa bonté (1). *La manganèse solide* de Piémont est la meilleure qu'on connoisse. Si *Césalpin*, *Henckel*, *Linnæus* & *Wallérius*, &c., avoient eu occasion de l'examiner convenablement, ils n'auroient pas mis ce minéral au nombre des mines de fer (2). On trouve, dans les *Miscellanea Berolinensia* 1740, un excellent mémoire de M. Pott sur cette matière.

Les matières qu'on ajoute ordinairement, dans les compositions, à celles dont nous venons de parler, n'y sont d'aucune nécessité. Il n'y a que le beau *saffre* qui soit utile pour prévenir la couleur jaune dans le verre, où on auroit fait entrer des matières mal purifiées, ou une trop grande quantité de chaux.

Il n'y a rien de moins uniforme, dans les auteurs

(1) V. la p. 53 de l'art de la verr. trad. franç. in-4°.

(2) V. la p. 48 du prem. vol. de la minér. de *Wallérius*.

& dans les verreries, que la composition du verre (1). Chaque maître fondeur a ses doses & sa *recepte*. Dans les verreries de *Bayel* en Champagne & du *Novion* en *Thiérache*, on met parties égales de sable & de *potasse*; dans celles de *l'Etembac*, dans les *Vosges*, parties égales de sable, de chaux & de *potasse*. D'où peut venir une si grande différence? Vraisemblablement de ce que M. *Drulanvaux*, auquel nous devons en France l'établissement des verres blancs façon de Bohême, a un fourneau de fusion qui chauffe assez bien, & que M. ** & les *** en ont qui chauffent très-foiblement. N'ayant rien de déterminé sur la construction & sur la forme des fourneaux, sur la nature & la préparation des matières, sur la vraie dépuration du verre, il étoit impossible d'avoir quelque chose de fixe & de satisfaisant sur les proportions de la composition. L'expérience même ne servoit qu'à nous jetter dans de nouvelles obscurités, ou qu'à nous affermir dans nos erreurs. M. ** soutenoit que sa composition étoit bonne, parce que, pour peu qu'il diminuât la proportion de la *potasse* ou *salin*, elle fondoit mal, ou le verre ne pouvoit se travailler. La composition de M. ** étoit bonne relativement à son fourneau, mais elle étoit très-mauvaise en elle-même; puisque le verre qui en résultoit étoit peu clair, peu brillant, peu solide, très-susceptible d'humidité, ressuoit le sel, se décomposoit à la longue, & le pied creux des verres à boire se remplissoit dans le magasin, & sans communication sensible avec l'air extérieur, d'une liqueur saline ou dissolution de sel, partie alkali fixe, partie neutre. On n'observe rien de semblable dans le verre de M. *Drulanvaux*, par la raison sans doute que son fourneau donne une chaleur suffisante, propre à pro-

(1) V. l'art de la verr. de *Néri*, *Merret* & *Kunckel*, celui de *Blancourt*, la p. 177 de la lithog. de M. *Pott*, & la p. 136 du tom. V. des élém. de chym. de *Boerhaave*.

duire, avec une moindre doſe de fondant, une pénétration réciproque, un mêlange intime des matières eſſentielles, & une aſſez grande fluidité, pour que le ſel de verre puiſſe s'élever, ſe diſſiper, & emporter avec lui la majeure partie du principe colorant groſſier. Les défauts des compoſitions trop *tendres*, trop chargées de ſel alkali fixe, ne feroient pas, à beaucoup près, ſi ſenſibles, dans les verreries où l'on auroit un bon fourneau. L'action, longtemps continuée, d'un feu très-violent en feroit même diſparoître le plus grand nombre. Il ne manqueroit au cryſtal & au verre cryſtallin, que la dureté & un peu de ſolidité. Les meilleurs fourneaux ne ſçauroient corriger les défauts d'une compoſition trop maigre. On a beau continuer le feu le plus violent, le mêlange des matières eſt toujours imparfait, le verre inégalement ſolide, plein de bulles, très-ſuſceptible de *rouille*, & ſe laiſſe difficilement travailler. Il n'y a jamais aſſez de fluidité pour que les matières eſſentielles ſe diſſolvent intimement, & que le ſel de verre puiſſe ſe diſſiper.

Parties égales de la meilleure ſoude, de ſable blanc ou de grais, de caſſons de la même eſpèce, & cinq onces pour cent de manganèſe; parties égales de beau ſable, de chaux bien calcinée, de *potaſſe* blanche, de caſſons de la même eſpèce, & quatre onces pour cent de manganèſe; trois parties de ſable très-blanc & très-pur, deux parties de ſel alkali fixe, de la *ſoude* ou de *potaſſe* très-purifiée, une partie de caſſons de la même eſpèce, une demi partie de chaux calcinée avec la dernière exactitude, & quatre onces pour cent de manganèſe, forment ordinairement, au moyen d'un bon fourneau, les meilleures compoſitions pour le verre blanc commun, pour le verre blanc fin, cryſtallin, & pour le cryſtal. Je dis *ordinairement*, parce que la *ſoude* & les ſels alkalis fixes peuvent être plus ou moins chargés de ſels neutres, qui ne font jamais un tout homogène avec le ſable & la chaux ; au moins ceux dans la compoſition deſquels entre l'acide vitriolique ou celui de ſel marin.

Il ſeroit ſans doute à ſouhaiter que nous euſſions une règle ſure pour nous diriger ſur un point auſſi délicat & auſſi important. Je vais communiquer un moyen de trouver les proportions les plus avantageuſes des fondants, qui m'a toujours parfaitement réuſſi. Je fais deux ou trois livres de compoſition dans les proportions ci-deſſus, pour le ſable, la terre végétale ou la chaux, les caſſons, la manganèſe, & je diminue la doſe du fondant. Lorſque j'ai trouvé le point où cette compoſition, miſe dans un petit creuſet ſur l'ouvreau, fond ſimplement pendant le temps d'un *affinage*, j'ajoute un dixième de fondant, & le verre qui en réſulte a les qualités que je deſire. Il eſt ſolide, très-net, très-brillant, & conſerve très-bien le poli.

La *fritte* n'eſt autre choſe que la calcination de la compoſition, & cette calcination ne ſert uniquement qu'à mêler les matières & à leur enlever le principe colorant groſſier. Il eſt indiſpenſable de *fritter* les compoſitions où l'on a fait entrer la *ſoude* en nature; mais les autres compoſitions n'en ont aucun beſoin, ſi les matières ont été bien calcinées ſéparément. Le mêlange peut s'en faire auſſi exactement hors du fourneau que dans le fourneau. L'uſage de mettre la *manganèſe* dans le verre, après la fonte, ne me paroît pas mériter d'être ſuivi. Il eſt rare qu'il ne produiſe pas des veines rouges, & que les *pilons*, la *bale*, les *fers*, dont on ſe ſert pour faire le mêlange, n'altèrent pas la couleur du verre. Si l'on trouve que la manganèſe, ſimplement mêlée avec les autres matières, ne ſoit pas aſſez fixe, on n'a qu'à l'incorporer, par la fuſion, avec le ſable & le ſel alkali fixe, à la manière de *ſmalte* ou du *bleu d'émail*. Au lieu de *manganèſe*, on mettra, dans la compoſition, du verre

pilé

pilé très-rouge. La fritte, ou la composition, ne gagne à être gardée, qu'autant qu'on la fait passer par une seconde calcination.

Avant de mettre la *fritte* ou la composition dans les creusets, il importe que le fourneau soit très-chaud. Le feu la pénétrant inégalement, elle fondroit avec moins de facilité. La méthode d'enlever *le fiel de verre* à *la première fonte*, me paroît mauvaise. Ce sel facilite la fusion & la dépuration de la *seconde fonte*. J'ai toujours trouvé utile de ne faire la seconde & la troisième *fonte*, que lorsqu'il ne paroît plus de bulles dans les *larmes d'essai*. Le verre se dépure beaucoup mieux & plus promptement. Si le sel de verre se trouve abondamment sur la dernière fonte, il est avantageux de l'enlever avec une *poche de fer*, parce qu'il corrode les creusets. *Le fiel de verre* est le plus cruel ennemi que le maître de verrerie ait à redouter. Il est la cause des *bulles*, du *point*, de *l'empetit*, du *vésignage*, de *l'engélé*, du *vergetage*, des *nuages*, des *graisses*, du *laiteux*, du *feuilletage*, de l'*humide*, du *ressuage*, du défaut de solidité, de la *rouille* ou *plombé* du verre, de la dégradation inégale, quelquefois de la *fracture des creusets*. Ce seroit un très-grand bien qu'il n'en restât point dans le verre ; mais il seroit, je pense, très-fâcheux qu'il n'y en eût pas une petite quantité dans le sel alkali fixe. Il dispose les matières à la fusion, en facilite le parfait mêlange, contribue infiniment à la dépuration du verre, entraîne avec lui les matières hétérogènes, surtout le principe colorant grossier. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à faire fondre avec du *suin* le verre qui, par son séjour dans le fond des fourneaux de fusion, est devenu noir & opaque. Par ce moyen, on lui rendra sa transparence & sa couleur naturelle, & on lui enlevera même la vertu électrique qu'il avoit au plus haut dégré. On voit par là que l'usage où sont quelques verreries d'ajouter du ſel marin aux compoſitions de verre groſſier, n'eſt point à mépriſer. Le ſel admirable de *Glauber* & le tartre vitriolé produiroient les mêmes effets; & même le dernier mérite la préférence, à raiſon de ſa plus grande fluidité. Voyez *p.* 175 & 176 de l'Examen des pierres de M. *Pott.*

Les ſçavans & les maîtres de verrerie, regardant le *ſuin* ou *fiel de verre*, avant l'excellent mémoire de M. *Pott* déjà cité, comme un *ſel alkali ſuperflu*, & ne ſoupçonnant même pas le plus grand nombre de ſes mauvais effets, ne pouvoient conſeiller & employer que deux moyens pour le détruire, *l'extinction du verre dans l'eau* & *les longs affinages.* Ces moyens ſont bons, mais l'expérience prouve qu'ils ſont inſuffiſants. L'eau ne peut ſe charger de tout le ſel, qu'autant que le verre ſeroit réduit, par l'extinction, en pouſſière très-fine. L'action du feu, ſi longtemps continuée qu'elle ſoit, ne forcera jamais tout le *ſuin* à ſe diſſiper, ſi le verre n'a pas une fluidité convenable. Dans ce cas, le verre retient le *fiel de verre*, comme les *ſcories trop pâteuſes* retiennent le métal. La ſeule différence qu'il y a, c'eſt que l'un empêche l'évaporation, & les autres la précipitation. Diverſes pratiques de verreries, inventées dans d'autres vues, contribuent à la diſſipation du *fiel de verre.* On met de l'*arſénic*, de l'*antimoine*, des *écorces vertes d'arbres* dans le verre en fuſion. On le remue avec des bâtons verds de *frêne*, de *coudrier*, de *tilleul*, &c. dans l'idée de le *blanchir*, de détruire ſes couleurs trop fortes. Ces différentes manœuvres n'ont d'effet qu'autant qu'il y a du *ſuin* dans le verre. Elles en facilitent le dégagement par le paſſage que s'ouvrent, à travers le verre, l'*arſénic*, le papier dont il eſt enveloppé, l'*antimoine*, les *écorces*, les parties aqueuſes & l'écorce des bâtons. Le ſel de verre ſuit ces matières, & emporte avec lui le principe colorant groſſier. Le *pilonage* qu'on fait pour mêler la *man-*

ganèſe avec le verre, produit le même effet. Après ces opérations, le verre du haut des creuſets eſt très-bouillonneux, & ſe trouve chargé de moitié plus de *ſuin* que celui du milieu ou du fonds des creuſets. On peut s'en aſſurer par l'expérience. Ces moyens ne ſçauroient jamais remplir parfaitement leur objet. On ne doit ſe flatter de détruire entièrement le ſel de verre, qu'autant que la compoſition aura été faite dans des proportions convenables, & qu'on emploira un feu très-violent & aſſez longtemps continué; qu'il y aura, dans la compoſition, le ſel alkali fixe néceſſaire pour *ſaturer* complettement, s'il eſt permis de ſe ſervir de ce terme, à un feu très-violent, le ſable & la chaux. La parfaite dépuration ſe fera alors, ſans qu'on ſoit obligé d'avoir recours à aucun autre moyen. Je crois avoir indiqué ci-deſſus ces proportions, ou la vraie méthode pour les trouver dans tous les cas.

D'après ce que nous venons de dire, on voit ce qu'on doit penſer de ce qu'ont écrit les auteurs de l'Art de la verrerie ſur les *couleurs* du verre; que *le feu les conſume;* qu'il faut les prendre, pour ainſi dire, à la volée; que les minéraux ſeuls peuvent les fournir, &c (1). Les couleurs ne diſparoiſſent que parce que la matière colorante, ayant plus d'affinité avec le *ſuin* qu'avec le verre, ſe combine & ſe diſſipe avec lui. Lorſque le verre eſt exactement purgé des ſels neutres, *tartre vitriolé*, *ſel marin* & *ſel admirable de Glauber*, les couleurs ſont fixes au feu le plus violent & le plus longtemps continué. La couleur jaune que donnent la ſuye, les charbons des végétaux & des animaux eſt auſſi fixe que le bleu du *ſaffre* & le rouge de la *manganèſe*. Le ſel de verre me paroît le plus ſûr moyen qu'on puiſſe employer pour amener les couleurs au ton & à la nuance deſirée.

(1) V. les p. 254, 255, 262; &c. de l'art de la verr. trad. in-4°., & la p. 275 du tom. V. des élém. de chym. de *Boerhaawe*.

Toute eſpèce de bois eſt bonne pour fondre & cuire le verre, pourvu qu'il ſoit bien ſec & d'une groſſeur moyenne, de trois à quatre pouces de tour. Les bois ſans écorce de *hêtre*, de *charme*, de *bouleau*, de *cériſier*, de *frêne*, donnent la flamme la plus claire: ils ſont à préférer ſurtout pendant le travail du verre. Les cendres du *peuplier*, du *tremble*, du *ſaule*, du *tilleul*, ſont ſi légères qu'elles voltigent dans le fourneau, & s'attachent à la ſurface des pièces qu'on chauffe ; ce qui en altère l'uni & le brillant. Le bois de chêne, à moins qu'il ne ſoit extraordinairement ſec, pétille ; & ces petites exploſions jettent des charbons dans les creuſets. Il n'eſt point de matière combuſtible d'un effet auſſi ſûr ni auſſi prompt que le bon charbon de pierre ou de terre. Les cryſtalleries Angloiſes, & les manufactures de glaces de Londres & de *Tourlaville* en Normandie, l'employent avec le plus grand ſuccès. J'ai toujours trouvé que quatorze livres peſant de bon charbon de terre produiſoient autant d'effet que vingt-cinq livres peſant de bois ſec. Il n'y a certainement pas à craindre que, dans un fourneau bien proportionné, les fumées & les cendres du charbon puiſſent altérer la couleur du verre. Nous avons en abondance d'excellent charbon de terre. Le bois devient de jour en jour plus rare & plus précieux. Je penſe qu'on ne ſçauroit trop encourager les établiſſemens de verrerie où l'on ne brûleroit que du charbon de terre.

Quelque matière combuſtible qu'on employe, il eſt eſſentiel de *ſervir* le fourneau avec beaucoup d'égalité. La moindre négligence de la part du *tiſeur* retarde conſidérablement les affinages. Quand, depuis environ une heure, il ne paroît plus de bulles dans les *larmes* d'eſſai, & que le verre blanc ou le cryſtal eſt au point de couleur qu'on ſouhaite, on peut arrêter le feu. Il eſt de conſéquence de *marger* (boucher les ouvertures) exactement le fourneau, & de le tenir *margé* pendant trois ou quatre heures. On néglige mal à propos cette attention. Elle contribue beaucoup à la perfection de *l'affinage ;* non en donnant au verre la facilité de chasser l'air de ses interstices par son affaissement, & par-là, d'être exempt de bulles, comme on le croit communément ; mais pour donner matières étrangères, & principalement au *sel de verre :* dont le verre pourroit encore être chargé, le temps de monter au haut des creusets.

Il seroit assez inutile de s'étendre ici en observations sur la manière de travailler le verre, & cela nous meneroit beaucoup trop loin. Je me contenterai de recommander aux ouvriers beaucoup de propreté.

De quelque importance que soit la *recuisson* du verre, je ne connois point d'auteur qui en ait parlé. Dans les verreries, on en a des idées fort obscures : il y en a même où l'on croit qu'elle s'opère par une espèce de vertu occulte. Il est aisé de s'assurer qu'elle n'est autre chose qu'un refroidissement amené par dégrés insensibles ; mais il est très-difficile de procurer au verre cette espèce de refroidissement, surtout aux pièces d'épaisseur inégale & aux *plateaux*. C'est sans doute cette difficulté qui fait que les plats des verres à vitres des cinq grosses verreries de Normandie sont mal recuits. Quelques minces qu'ils soient, on n'en trouve presque pas un qui soutienne convenablement l'impression du diamant, qui ne soit plus fragile qu'il n'est de la nature du verre de l'être. La manière dont on recuit ordinairement les grosses pièces, lanternes, grands verres d'optique, plateaux, &c. doit produire une mauvaise *recuisson*.

Lorsqu'on a mis dans un fourneau très-chaud toutes les pièces qu'on veut y mettre, on le *marge* avec soin. Il est certain que les verres reçoivent, & presque subitement, un plus haut dégré de chaleur, après qu'on a *margé*. Il suffit de regarder dans le fourneau, pour s'en convaincre. Outre la *casse* & le *plati*, qui résulte ordinairement de cette augmentation de chaleur, on a très-longtemps à attendre le parfait refroidissement du fourneau ; à moins, comme c'est l'usage généralement reçu, qu'on ne commence à *démarger*, à donner de l'air, au bout de deux ou trois jours. L'air extérieur se précipite avec d'autant plus de rapidité, dans le fourneau, qu'il est plus chaud. Il est aisé de sentir que ce *démargement* fait éprouver aux verres un changement trop subite, pour qu'ils n'en souffrent pas. Aussi trouve-t-on toujours un grand nombre de pièces cassées, & toutes mal recuites. Il y a un moyen très-simple d'obvier à tous ces inconvénients ruineux pour le maître de verrerie, & très-préjudiciables à l'intérêt du public, de bien recuire, & en moins de jours, dans le même fourneau. Tout le changement consiste à faire percer, au milieu de la voûte, une ou plusieurs ouvertures de cinq pouces de diamètre, suivant la grandeur du fourneau. Par exemple, une ouverture suffit, pour le fourneau, à étendre & à recuire les verres plats soufflés sans *boudine* ou en façon de Bohême. Elle doit être percée au milieu de la voûte A, (*fig.* 6e). Aussitôt qu'on a *margé* les ouvertures F, G & l'entonnoir C, on *démarge* l'ouverture de la voûte, & ensuite on marge les deux extrémités du *tisar*. Par ce moyen, ni le *plati* ni la *casse* ne sont à craindre ; les verres sont recuits aussi parfaitement qu'il est possible, & dans l'espace de quatre ou cinq jours, au lieu de huit au moins qu'il en falloit pour les recuire mal. On sent aisément que le dégré de chaleur ne peut augmenter, & qu'il diminue insensiblement ; que la chaleur se dissipe par l'ouverture de la voûte, sans que l'air extérieur puisse s'introduire dans le fourneau, d'une manière marquée.

Dans les verreries en plats, en tables coulées ou ſoufflées avec ou ſans *boudine*, en lanternes, en cryſtal, &c. les ouvriers ont de trop longs intervalles de repos. Le plus grand nombre eſt au moins trente heures de ſuite, & trois fois par ſemaine, ſans travailler. Cette oiſiveté eſt funeſte au bon travail. Il eſt rare qu'elle ne produiſe le relâchement, qu'elle ne conduiſe à la diſſipation & même à la débauche. Le public eſt auſſi intéreſſé que les maîtres de verrerie à voir ce vice déraciné. Nous en fournirons des moyens également utiles & honnêtes.

Il ſe perd beaucoup de feu dans les mêmes verreries. Les ouvreaux ſont preſque toujours libres ; les *arches* ni les fourneaux à recuire ne ſont jamais pleins ; les premières ſont aſſez ſouvent vuides. Il ſeroit à ſouhaiter de pouvoir profiter de ce feu perdu. L'art y gagneroit. Nous avons des hommes d'un talent exquis pour mettre l'émail en œuvre ; mais il faut que ces grands artiſtes préparent & faſſent eux-mêmes, à grands frais, leurs couleurs & leurs émaux, ou qu'ils les achetent de l'étranger. Que de facilités ne trouveroit-on pas, à cet égard, dans nos verreries ! Les hommes, les fourneaux & le feu néceſſaires pour calciner l'étaim & le plomb, ou pour faire le *crocus des métaux*, ſi on le préfère à la chaux d'étain & de plomb dans la confection de l'émail blanc, n'y coûteroient rien. On y trouve des moyens admirables de préparer toutes les couleurs, & de bien dépurer & cuire l'émail. Nous aurions ſûrement des émaux à bas prix, &, à très-peu de choſe près, d'un même dégré de fuſibilité ; puiſqu'on employeroit toujours le même feu & la même compoſition. Les peintres gagneroient encore, vraiſemblablement, des couleurs plus belles & un plus grand nombre de nuances.

L'art de peindre à la moſaïque eſt le ſeul qui puiſſe tranſmettre, ſans altération, à la poſtérité la plus reculée la mémoire des grands événemens & des hommes illustres. Ses productions se jouent également des injures de l'air, de l'action de l'humidité & des ressources de la malice ou de la jalousie. Il n'est point de voyageur qui ne soit enchanté des chefs-d'œuvre, en ce genre, qu'on voit à Rome. Cet art n'est presque connu en France que de nom. Pourquoi ne l'a-t-on pas forcé à sortir de l'Italie ? Nous avons certainement un grand nombre d'artistes en état de s'y distinguer : ce ne sont point les talens qui manquent, c'est la matière qui manque aux talens. Donnez-leur les différents verres colorés nécessaires, vous verrez des prodiges. Il est certain que ces verres colorés pourroient être fabriqués très-commodément, & à très-bas prix, dans nos verreries.

Nous ne pouvons nous flatter de voir nos porcelaines au dégré de perfection dont elles sont susceptibles, que lorsqu'un grand nombre de personnes s'occuperont de cette branche de l'art de la verrerie. Je ne pense pas que nos verreries doivent entreprendre ces grandes pièces dont le mérite consiste dans l'élégance de la forme, dans la correction du dessein, la richesse de la composition, la hardiesse du pinceau, l'harmonie des couleurs. Ces prodiges de l'art & du goût sont réservés à la manufacture de *Séves ;* mais je crois que les verreries pourroient fabriquer une porcelaine moyenne, assez belle & d'un prix assez modique, pour faire cesser les importations ruineuses de la porcelaine commune de la Chine. L'argille pure, bien préparée & combinée convenablement avec la poussière très-blanche de caillou ou de sable, pourroit leur fournir une assez bonne composition de porcelaine & un *verre de craye* très-bien épuré, & leur donner une *belle couverte* (1). Cette porcelaine ne différeroit pas, autant qu'on pourroit peut-être se l'imaginer,

(1) V. les p. 103, 605, &c. de l'art de la verr. trad. franç. in-4°.

giner, de celle de la Chine. Du moins conviendra-t-on qu'elle lui ressembleroit en ce qu'il n'entreroit point de sels dans la pâte, ni de métaux dans la couverte. Les maîtres de verrerie n'auroient besoin que d'un peintre & d'un petit nombre de modèles. Ils trouveroient, sans qu'il leur en coûtât rien, ou presque rien, tout le reste chez eux; ouvriers, bâtimens, fourneaux, & tous les dégrés de feu nécessaires.

La conversion du fer en acier, par la *cémentation*, pourroit encore fournir aux verreries un moyen très-utile de profiter de leur feu perdu, & d'occuper leurs ouvriers sans les fatiguer. On sçait que tout l'art consiste à rendre le fer plus dur, & à le charger d'une plus grande quantité de *phlogistique* atténué par le moyen des sels (1). Cette industrie auroit un double avantage pour le royaume : le verre seroit à plus bas prix, & nous ne serions pas obligés de tirer annuellement, pour des sommes très-considérables, d'acier des pays étrangers.

Ces moyens de mettre à profit le trop long repos des ouvriers & le feu perdu des verreries, mériteroient d'être traités avec plus d'étendue; mais je ne pourrois m'y arrêter plus longtemps, sans passer les bornes prescrites à ce mémoire. Je dois avertir que je n'ai pas prétendu confondre avec les ouvriers les gentilshommes qui travaillent le verre. Il ne paroîtroit pas juste qu'ils ne fussent pas mieux payés & qu'ils travaillassent autant que de simples roturiers. Le desir naturel qu'ils ont de se distinguer assure à l'art & aux maîtres de verrerie un ample dédommagement.

Ce ne sont pas les seuls avantages que puisse nous procurer l'art de la verrerie perfectionné. Nous devons en attendre une connoissance plus intime & plus étendue des sels, du phlogistique, des couleurs, des ter-

(1) V. l'art de convertir le fer en acier, par le célèbre M. de *Réaumur*.

res, des minéraux, de la métallurgie, de la pyrothecnie, &c. Il ne feroit pas difficile de prouver que cette assurance n'est pas destituée de fondement.

De nouvelles lumières peuvent sans doute beaucoup contribuer à la perfection de l'art de la verrerie; mais elles ne le conduiront jamais, sans le secours du gouvernement, au plus haut dégré dont il est susceptible. Cet art est trop précieux, & le ministère trop éclairé, pour que nous ne soyons pas persuadés qu'il lui accordera toutes les facilités dont il a besoin; qu'en sa faveur il honorera de sa protection les nouvelles recherches; qu'il encouragera l'industrie; qu'il animera le talent. Il ne me conviendroit assurément point de me permettre à cet égard aucun détail. Je dois me renfermer dans les vœux *du bon citoyen* qui a donné lieu à ce mémoire (1). Je me flatte qu'on me pardonnera d'avoir passé rapidement sur plusieurs points de la matière que j'ai osé entreprendre de traiter. Elle est d'une trop grande étendue pour être épuisée dans un mémoire. Je puis me rendre le témoignage de n'avoir rien négligé de ce que j'ai sçu ou cru de plus important à dire. Si je ne craignois d'ennuyer, il me feroit aisé d'établir, par des états de dépense & de produit, qu'au moyen de ce que j'ai dit sur les fourneaux & les creusets, sur les matières à convertir en verre & sur la manière de le faire, on peut faire du beau verre durable, à *moitié* meilleur marché, que le verre de nos verreries les plus estimées. J'aurois peut-être pu éviter l'ennui par l'application circonstanciée de mes principes à quelque branche particulière de l'art de la verrerie, par exemple, à la *glacerie*; mais cela m'auroit mené beaucoup trop loin. Si je pouvois soupçonner que ce fût une perte

(1) Un bon citoyen, qui n'a point voulu qu'on le nommât, remit, en 1759, une somme de cinq cent livres à l'Académie Royale des Sciences, pour récompenser celui qui, au jugement de cette compagnie, auroit le mieux répondu à la question qui fait le titre de ce mémoire.

pour le public, je ne tarderois pas à le dédommager. Rien ne sçauroit plus me flatter que d'y être encouragé par l'Académie, & de mériter son suffrage sur ce que j'ai l'honneur de lui présenter.

RECHERCHES

SUR

L'ARRIMAGE DES VAISSEAUX;

ET quelles bonnes qualités on en peut procurer, à un Vaiſſeau

POUR concourir au Prix propoſé par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, pour l'année 1761.

Par M. JEAN-ALBERT EULER.

Cette pièce eſt l'une des deux entre leſquelles le Prix a été partagé.

RECHERCHES
SUR
L'ARRIMAGE DES VAISSEAUX,

Et quelles bonnes qualités on en peut procurer à un Vaiſſeau.

> . . . *Ipſi numerumque locumque* carinis
> *Præcipiunt* onerum. . . . . .
>
> VIRG.

1. LA conſtruction d'un vaiſſeau renferme d'abord la détermination de la partie qui eſt deſtinée à entrer dans l'eau lorſque le vaiſſeau eſt en équilibre. Dès que le plan ou devis d'un vaiſſeau eſt formé, on y diſtingue la partie qui doit être enfoncée dans l'eau de celle qui doit ſe trouver au-deſſus de l'eau. Donc il faut que le plan, qui ſépare ces deux parties de chaque vaiſſeau, devienne horiſontal étant à fleur d'eau; delà eſt déterminé le centre de gravité de la partie ſubmergée, en n'en conſidérant que le volume, dont la connoiſſance eſt de la dernière importance. On ſçait que le poids du vaiſſeau entier doit être égal au poids d'un volume d'eau égal à la partie ſubmergée, & que le centre de gravité du vaiſſeau entier doit tomber dans la ligne verticale, qui paſſe par le centre de la partie ſubmergée: ces deux

conditions déterminent tant la quantité de la cargaison, qu'une certaine manière de l'arranger, afin que les deux centres, dont je viens de parler, se trouvent dans la même ligne verticale.

2. Soit $ABCD$ la section verticale d'un vaisseau, tirée par le milieu de la proue à la poupe, & qui partage le vaisseau dans ses deux moitiés égales & semblables, & tirant la droite MN à fleur d'eau pour avoir la partie submergée $MNDC$, son centre O tombera sans doute dans cette section verticale; & la droite verticale QP, tirée par ce point O, sera celle où le centre de gravité du vaisseau tout entier doit tomber, qui soit en G. La position donc de ces deux lignesdroites MN & PQ avec le point O, étant donnée par la construction même du vaisseau, on en connoit d'abord la quantité de la cargaison; & ensuite il la faut distribuer dans le vaisseau ensorte que le centre de gravité du vaisseau entier tombe précisément dans la ligne verticale PQ, ce qui est la première règle indispensablement nécessaire pour l'arrimage.

3. Or, il est évident que cette règle peut être observée d'une infinité de manières différentes; d'abord le point G n'étant point prescrit, puisqu'il suffit qu'il se trouve dans la verticale PQ, est susceptible d'une infinité de variations; & ensuite, en quelque lieu qu'on l'ait fixé, il est encore possible de varier à l'infini l'arrangement des fardeaux. Pour s'en convaincre, on n'a qu'à considérer deux fardeaux quelconques α & β, dont le commun centre de gravité soit en γ; & il est clair qu'en changeant la position de ces deux fardeaux, en sorte que leur centre de gravité demeure en γ, ce qui peut se faire d'une infinité de manières, le centre de gravité du vaisseau entier n'en souffrira aucune altération. Cette variabilité ayant lieu à l'égard de deux fardeaux quelconques, à plus forte raison tous les fardeaux ensemble admettront une variation infinie,

nonobſtant que le centre de gravité du vaiſſeau entier ſoit fixé dans un point donné *G*.

4. Cependant cette variation dans l'arrangement des fardeaux eſt limitée par pluſieurs circonſtances : d'abord on ne ſçauroit placer un fardeau dans un lieu qui eſt déjà rempli par d'autres ; & ſi toute la cavité du vaiſſeau étoit remplie de fardeaux, aucun changement n'y auroit plus lieu, à moins qu'on ne veuille échanger la poſition de deux fardeaux d'un même volume, en tranſportant l'un dans la place de l'autre, ce qui ne cauſeroit en effet aucun changement, qu'entant que ces deux fardeaux différeroient en poids. Enſuite, il y a des fardeaux dont la deſtination leur aſſigne la place, comme les canons, qui ne ſouffrent aucun changement dans leurs lieux. Mais quelque limitée que ſoit cette variabilité, il reſte ordinairement aſſez de quoi faire des changemens dans l'arrimage des vaiſſeaux, & d'en tirer quelque profit pour la navigation.

5. En tant que le lieu du centre de gravité du vaiſſeau entier eſt ſuſceptible de quelque variation, toutes les bonnes qualités d'un vaiſſeau exigent unanimement qu'on faſſe deſcendre ce point auſſi bas qu'il eſt poſſible. Enſuite ce point *G* étant fixé ainſi, il eſt certain que les changemens dont l'arrimage ſera encore ſuſceptible, peuvent contribuer à augmenter ou à diminuer les bonnes qualités d'un vaiſſeau. Pour juger bien de cet important article, il faut avoir égard aux trois momens d'inertie du vaiſſeau entier rapportés à trois axes perpendiculaires entr'eux, tirés par le centre de gravité *G*, dont l'un eſt vertical *QP*, & les deux autres horiſontaux, tirés ſelon la longueur & la largeur du vaiſſeau. Tout changement fait dans l'arrimage n'influe ſur les qualités d'un vaiſſeau qu'en tant que les momens d'inertie, par rapport à ces trois axes du vaiſſeau, en ſont altérés.

6. Je nomme ici le moment d'inertie d'un vaiſſeau

par rapport à un axe, tiré par ſon centre de gravité; l'expreſſion analytique qui réſulte lorſqu'on multiplie toutes les maſſes élémentaires dont le vaiſſeau eſt compoſé, chacune par le quarré de ſa diſtance audit axe, & qu'on raſſemble tous ces produits dans une même ſomme. Cette ſomme pourra donc toujours être exprimée par le produit d'une maſſe ou d'un poids multiplié par le quarré d'une ligne. Ainſi, poſant la maſſe ou le poids d'un vaiſſeau $= M$, je nommerai dans la ſuite le moment d'inertie par rapport à l'axe tiré, ſelon la longueur du vaiſſeau $= Maa$, celui par rapport à l'axe tiré ſelon la largeur $= Mbb$, & celui par rapport à l'axe vertical $QP = Mcc$. Il s'agit donc de déterminer quel effet doit produire dans les qualités du vaiſſeau un changement cauſé dans quelqu'un de ces trois momens d'inertie. Or, je ſuppoſe encore que tous les fardeaux ſoient tellement fixés, chacun dans le lieu qui lui a été aſſigné, qu'ils y demeurent conſtamment malgré les agitations & les ſecouſſes du vaiſſeau.

7. Voilà donc le plan que je me propoſe de ſuivre dans mes recherches ſur la queſtion propoſée. Premièrement, j'examinerai en détail quels avantages on retire en baiſſant davantage le centre de gravité G, ou en diminuant ſa hauteur au-deſſus du centre O du volume ſubmergé. Enſuite, je chercherai quelle influence doit avoir ſur les qualités du vaiſſeau un changement cauſé dans quelqu'un des trois momens d'inertie Maa, Mbb, Mcc, afin qu'on puiſſe juger en quel cas leur augmentation ou diminution eſt plus avantageuſe. Tout cela eſt fondé ſur les principes de méchanique, par lequels on ſçait que la détermination de tous les mouvemens & de toutes les agitations dont un vaiſſeau eſt ſuſceptible, dépend de ces trois momens d'inertie.

I.

Des changemens causés dans la hauteur du centre de gravité du vaisseau.

8. La hauteur du centre de gravité du vaisseau entre principalement dans la détermination de la stabilité du vaisseau, qui est la force dont le vaisseau s'oppose à toute inclination. Pour établir une mesure juste de cette stabilité, on considère le vaisseau tant soit peu incliné de sa situation naturelle ; & alors le vaisseau, en vertu de sa stabilité, fera des efforts pour se rétablir ; & tant que l'inclinaison est extrêmément petite, on comprend aisément que cet effort est proportionel à l'angle de l'inclinaison. Soit ω l'angle de l'inclinaison ; & l'effort du vaisseau pour se retablir, sera exprimé par un moment de force, ou le produit d'une force par une ligne. Soit donc P ce moment de force dont le vaisseau tâche de se rétablir, ou, ce qui revient au même, lequel étant justement appliqué au vaisseau en sens contraire, est capable de maintenir le vaisseau dans son état incliné ; &, puisque P est proportionel à l'angle ω, prennons la quantité $\frac{P}{\omega}$ pour la mesure de la stabilité.

9. Pour rendre cette expression tout-à-fait déterminée, on exprime l'angle de l'inclinaison ω par l'arc de cercle qui est sa mesure, en supposant le rayon du cercle $= q$. Ainsi, la valeur de la lettre ω devenant un nombre absolu, la fraction $\frac{P}{\omega}$, qui représente la stabilité, sera encore homogène avec le produit d'une force par une ligne, dont les momens de force sont exprimés dans la méchanique. Donc réciproquement quand on dit que la stabilité d'un vaisseau $= Q$, on entend que ce vaisseau étant incliné à un petit angle ω ;

le moment de force dont il tend à ſe rétablir eſt $= Q\omega$; ou bien pour incliner le vaiſſeau à cet angle ω, il faut employer un moment de force $= Q\,\omega$. D'où l'on voit que plus la ſtabilité Q eſt grande, plus auſſi le vaiſſeau réſiſtera à l'inclinaiſon; & il ſemble que cette manière eſt la plus propre à exprimer l'idée qu'on peut ſe former de la ſtabilité.

10. Mais le vaiſſeau pouvant être incliné d'une infinité de manières différentes, ſelon tous les ſens auxquels l'inclinaiſon peut arriver, chaque manière a ſa propre ſtabilité. Toute inclinaiſon ſe fait au tour d'un axe horiſontal qui paſſe par le centre de gravité du vaiſſeau. Lorſque le vaiſſeau s'incline en avant ou en arrière, l'inclinaiſon ſe fait autour de l'axe horiſontal tiré ſelon la largeur du vaiſſeau; & lorſque l'inclinaiſon ſe fait vers l'un ou l'autre côté, c'eſt l'axe horiſontal tiré ſelon la longueur du vaiſſeau autour duquel le vaiſſeau s'incline. Et comme on peut concevoir une infinité d'axes moyens, le vaiſſeau eſt ſuſceptible d'une inclinaiſon autour de chacun d'eux, ſelon la direction & l'application des forces qui produiſent l'inclinaiſon. Or, l'on ſçait que les vaiſſeaux réſiſtent moins à l'inclinaiſon vers les côtés qu'à celle en avant ou en arrière, d'où l'on voit que chaque axe autour duquel l'inclinaiſon arrive, eſt doué d'une ſtabilité particulière.

11. Pour déterminer la ſtabilité par rapport à tous les axes autour deſquels l'inclinaiſon ſe peut faire, je me rapporte aux règles & démonſtrations que feu M. Bouguer & M. Euler ont données dans leurs traités
Fig. 2. ſur cette matière. On conſidère la ſection horiſontale du vaiſſeau faite à fleur d'eau, qui ſoit la figure géométrique $MK\Lambda L$, dont on cherche le centre de gravité J, par lequel on tire une droite RS parallèle à l'axe autour duquel on veut que l'inclinaiſon ſe faſſe. On conçoit enſuite cette ſurface diviſée en des élémens infiniment petits, comme Z, dont on multiplie

plie chacun Z par le quarré de sa distance ZV à l'axe RS; ce qui donne une formule différentielle, dont il faut chercher l'intégrale, qui sera exprimée par une grandeur géométrique de quatre dimentions qui soit $=U$. Suivant l'analogie avec les idées méchaniques, on peut nommer cette quantité le moment de la surface $MKNL$ par rapport à l'axe RS; puisque si on la regardoit comme une lame infiniment mince, ce seroit, en effet, son moment d'inertie.

12. Maintenant, ayant trouvé ce moment U de la section faite à fleur d'eau par rapport à l'axe RS, autour duquel le vaisseau s'incline, il faut sçavoir 1°. le poids du vaisseau tout entier, qui soit $=M$. 2°. le volume de la partie submergée, qui soit $=V$; & 3°. l'élévation du centre de gravité du vaisseau G au-dessus du centre du volume enfoncé O, laquelle distance GO (*fig.* 1.) soit $=h$. Cela posé, on a trouvé que la stabilité du vaisseau par rapport à l'axe RS est $=M\left(\frac{U}{V}-h\right)$, d'où il est clair que le vaisseau n'a de la stabilité qu'en tant que la valeur de la fraction $\frac{U}{V}$, qui est une ligne, puisque U est une grandeur de quatre dimentions & V de trois, surpasse la ligne h ou l'intervalle GO. Et s'il arrivoit que par rapport à quelque axe RS, l'expression $\frac{U}{V}$ fût moindre que h, ou $U < Vh$, le vaisseau n'auroit aucune stabilité; & la plus petite force seroit capable de le renverser autour de cet axe. Il est donc de la dernière importance d'empêcher que la quantité $\frac{U}{V}-h$ ne devienne trop petite, ou même négative.

13. On tâche de remédier à cet inconvénient, en élargissant la section faite à fleur d'eau, autant que les

circonſtances le permettent; mais ici, il faut conſidérer le vaiſſeau comme déjà conſtruit; & la valeur de la fraction $\frac{U}{V}$, comme donnée, il ne s'agit donc que de diminuer l'intervalle $GO = h$ autant qu'il eſt poſſible. En ſuppoſant que le vaiſſeau ait déjà de la ſtabilité, de quelque manière que la cargaiſon ſoit arrangée, on voit que c'eſt toujours un très-grand avantage lorſqu'on peut changer l'arrimage, enſorte que le centre de gravité G en ſoit porté plus bas. Si, par un changement fait dans l'arrimage, on peut réuſſir de déprimer le centre de gravité en g par l'intervalle $Gg = \gamma$, la ſtabilité en ſera augmentée de la quantité $M\gamma$; & cela, pour toutes les inclinaiſons poſſibles, puiſque ce n'eſt que la grandeur U qui dépend de l'axe, autour duquel le vaiſſeau s'incline: les autres quantités M, γ & h demeurant toujours les mêmes.

14. Or, le profit qu'on retire de l'abaiſſement du centre de gravité G eſt d'autant plus conſidérable, que l'excès de la quantité $\frac{U}{V}$ ſur l'intervalle $GO = h$ eſt plus petit. Si cet excès s'évanouiſſoit, ou que le vaiſſeau n'eût point du tout de ſtabilité, le moindre abbaiſſement apporteroit preſque un gain infini, la ſtabilité devenant infiniment plus grande qu'elle n'a été auparavant. C'eſt donc à l'égard de cet axe par rapport auquel la ſtabilité eſt la plus petite, que le profit tiré de l'abbaiſſement de ce centre eſt le plus conſidérable; cela arrive toujours à l'égard de l'axe tiré ſelon la longueur du vaiſſeau, par rapport auquel la ſtabilité eſt ordinairement trop petite; de ſorte qu'on eſt ſouvent obligé de ſouffler le vaiſſeau pour procurer une plus grande valeur au moment U. Dans ce cas donc, quelque peu qu'on puiſſe abbaiſſer le centre de gravité G, l'avantage eſt toujours très-conſidérable, quoiqu'il ne ſoit preſque d'aucune conſéquence à l'égard de la ſtabi-

bilité par rapport à l'axe tiré selon la largeur du vaisseau, laquelle est la plus grande en elle-même. Mais il faut aussi observer que le vaisseau éprouve dans ce sens les plus grands efforts auxquels il doit résister.

15. Il est bon de remarquer ici, que si la section faite à fleur d'eau étoit un parallelogramme rectangle, dont la longueur $= MN$, & la largeur $= KL$; & qu'on posât son aire $= 2\,D$, le moment par rapport à l'axe de la longueur MN seroit $= \frac{1}{6}\,D.\,KL^2$. Or si la figure de cette section étoit un rhombe de la longueur MN & de la largeur KL, le moment par raport à l'axe MN seroit $= \frac{1}{12}\,D.\,KL^2$, en posant l'aire de la section $= 2\,D$. Donc puisque la section tient ordinairement un milieu entre ces deux figures, son moment par rapport à l'axe de la longueur MN, ou la grandeur U sera contenu entre les limites $\frac{1}{6}\,D.\,KL^2$ & $\frac{1}{12}\,D.\,KL^2$. En effet, si la figure de la section est une ellipse décrite par les points M, N, K, L, son moment par rapport à l'axe MN sera $= \frac{1}{3}D.\,KL^2$.

16. Posons la hauteur de la partie submergée, ou le tirant d'eau $= k$; & si la figure de cette partie étoit cylindrique, ou que toutes les sections horisontales fussent égales entr'elles, le volume V de cette partie seroit $= 2\,Dk$; or, si la figure étoit pyramidale, terminée en bas par une pointe, on auroit $V = \frac{2}{3}Dk$; mais supposant le volume enfoncé, terminé en bas par une ligne droite horisontale qui représente la quille; en sorte que les sections verticales & perpendiculaires à la quille soient des triangles, le volume V deviendroit $= Dk$. Quoique ce volume soit ordinairement vers le milieu plus enflé que dans cette derniere figure, on en rabbat par le devant & le der-

nière ; de forte qu'on ne fe trompera pas beaucoup en fuppofant la folidité de ce volume $V = Dk$. Par conféquent, fuppofant $U = \frac{1}{9} D. KL^2$, la ftabilité par rapport à l'axe de la longueur MN fera $= M\left(\frac{KL^2}{9k} - h\right)$.

17. Il eft donc toujours de la dernière importance de déprimer le centre de gravité G auffi bas qu'il eft poffible, auffi bas que les autres circonftances liées avec la deftination du vaiffeau le permettent; puifque nous venons de voir, que fi, par quelque changement fait dans l'arrimage, on peut déprimer le centre de gravité G de la quantité $Gg = \gamma$, la ftabilité du vaiffeau, par rapport à tous les axes, prend un accroiffement $= M\gamma$, qui eft d'autant plus confidérable, que la ftabilité, par rapport à quelque axe, fera plus petite par elle-même. Si, par ce moyen, la ftabilité, par rapport à l'axe tiré felon la longueur du vaiffeau, laquelle eft la plus petite, pouvoit être rendue deux fois plus grande, les inclinaifons autour de cet axe feroient réduites à la moitié, les forces inclinantes demeurant les mêmes. Or, on fçait qu'un tel avantage eft d'une très-grande importance, puifqu'il met le vaiffeau en état d'y employer des manœuvres plus efficaces pour la navigation. Et, comme il n'y a nulle confidération qui s'oppofe à la dépreffion du centre de gravité, on tire cette règle générale pour l'arrimage, qu'il faut toujours déprimer le centre de gravité autant qu'il eft poffible.

18. Or, cela s'exécute, premièrement, en plaçant chaque fardeau auffi bas qu'il eft poffible. Pour connoître tout l'avantage qu'on en retire, envifageons un fardeau dont le poids foit $= A$, qui, étant en α, puiffe être porté plus bas par l'efpace $= \alpha$; l'on fçait que le centre de gravité du vaiffeau defcendra par l'efpace $= \frac{A\alpha}{M}$, la lettre M marquant le poids du vaiffeau

tout entier, dont l'augmentation de la ſtabilité du vaiſſeau qui en réſulte ſera $= A\alpha$. Or, puiſque le centre de gravité G ne doit pas être écarté de la ligne verticale QP, le poids A ne ſçauroit être tranſporté plus bas que dans la ligne verticale, qui paſſe par ſon lieu α. Mais ſi le même fardeau ne peut pas être déprimé verticalement, on n'a qu'à prendre deux ou pluſieurs fardeaux, & les mettre plus bas, en ſorte que leur commun centre de gravité deſcende par une ligne verticale ; & alors, la ſomme de ces fardeaux multipliée par la deſcente de leur commun centre de gravité, donnera l'accroiſſement de la ſtabilité.

19. Mais, ſi toutes les places inférieures ſont déjà occupées par d'autres corps, il y a encore un autre moyen de porter plus bas le centre de gravité G, qui a lieu lorſqu'on trouve dans des places ſupérieures des fardeaux ſpécifiquement plus peſans que dans les inférieures : alors, on n'a qu'à changer la ſituation de deux tels fardeaux du même volume, & de tranſporter le fardeau plus peſant à la place du plus léger, & réciproquement. L'accroiſſement de la ſtabilité ſera donc égal au produit de la différence des poids de ces deux fardeaux multipliés par la différence des hauteurs. D'où l'on tire cette règle pour l'arrimage, qu'il faut non ſeulement diſpoſer tous les fardeaux auſſi bas qu'il eſt poſſible ; mais qu'il faut aſſigner les places les plus profondes aux fardeaux les plus peſans ſpécifiquement, en obſervant cependant toujours la règle principale, que le centre de gravité G demeure dans la ligne preſcrite QP.

I I.

Des avantages qu'on peut retirer en changeant le moment d'inertie du vaiſſeau par rapport à l'axe vertical.

20. Le moment d'inertie du vaiſſeau par rapport à

l'axe vertical n'entre en considération, que lorsqu'il s'agit du mouvement avec lequel le vaisseau tourne autour de cet axe. Car, en général, tant qu'on ne considère que le mouvement progressif d'un corps quelconque, produit par des forces quelconques, il n'y a que la masse du corps, & son centre de gravité qui entre dans le calcul. Mais quand le corps a, outre cela, un mouvement de rotation, qu'on peut toujours envisager comme se faisant autour d'un certain axe, qui passe par son centre de gravité, ce mouvement de rotation tire sa détermination du moment d'inertie qui convient au corps par rapport à cet axe. Or, en tant que le corps nage sur l'eau, tant sa situation, que les inclinaisons qu'il éprouve, dépendent uniquement de la position du centre de gravité, du centre de volume de la partie enfoncée, & de la figure de la section faite à fleur d'eau ; les momens d'inertie, par rapport à quelque axe que ce soit, n'y sont d'aucune conséquence.

21. Donc, dès que par l'arrimage le centre de gravité du vaisseau est fixé dans le point G, le mouvement progressif & les inclinaisons causées par les forces, auxquelles il est exposé, en peuvent être déterminés ; & il est indifférent à cet égard de quelle manière tous les fardeaux soient disposés dans la cavité du vaisseau. Or, il est clair qu'un si grand nombre de fardeaux, dont on charge ordinairement les vaisseaux, peut être arrangé d'une infinité de manières différentes, sans que le centre de gravité du vaisseau en souffre le moindre changement ; & toutes ces manières sont absolument indifférentes à l'égard du mouvement progressif du vaisseau, & de toutes les inclinaisons dont il est susceptible. Mais ces divers arrangemens des fardeaux peuvent changer très-considérablement les momens d'inertie qui résultent, lorsqu'on multiplie tous les poids élémentaires dont le vaisseau est composé, chacun par le quarré de sa distance à l'axe par rapport auquel on demande le moment d'inertie. Donc, en tant qu'un ou

plusieurs fardeaux changent de distance à l'égard de cet axe, le moment d'inertie deviendra ou plus grand ou plus petit.

22. Ce n'est donc que le mouvement de rotation autour de l'axe vertical, sur lequel influe le moment d'inertie par rapport à cet axe; & partant, nous examinerons combien l'action du gouvernail dépend de ce moment; le mouvement de rotation étant toujours ou l'effet du gouvernail, ou devant être détruit par son moyen. La force, ou plutôt le moment de force, dont le gouvernail agit sur le vaisseau pour le faire tourner, dépend uniquement de la force, & de son application par rapport à l'axe vertical tiré par le centre de gravité du vaisseau; & le moment d'inertie n'y a aucune influence. Mais, pour déterminer le mouvement même qui est produit par un tel moment de force, il faut tenir compte du moment d'inertie qui convient au vaisseau par rapport à l'axe vertical. On sçait, par les principes de méchanique, que l'accélération de ce mouvement de rotation est proportionnel au moment de force qui produit ce mouvement, divisé par le moment d'inertie du vaisseau par rapport à l'axe vertical; où il faut remarquer que, sous le moment de force, on comprend aussi la résistance que le vaisseau éprouve dans ce mouvement, dont il faut soustraire le moment du moment des forces actuelles.

23. Plus donc le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical sera grand, plus deviendra petite l'accélération du mouvement de rotation, & plus on pourra diminuer ce moment d'inertie, plus l'accélération du mouvement de rotation sera augmentée dans la même raison. Donc, pour rendre l'effet du gouvernail plus prompt, il faut diminuer le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical du vaisseau; & partant, si nous concevons deux vaisseaux, d'ailleurs

parfaitement égaux, & semblables, tant par rapport à la construction qu'à la situation du centre de gravité, mais tellement différens par rapport à l'arrimage que dans l'un, le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical soit plus grand que dans l'autre, celui où ce moment d'inertie est plus petit, tournera plus promtement, étant sollicité par les mêmes forces, & obéïra plus vîte à l'action du gouvernail.

24. On compte parmi les bonnes qualités d'un vaisseau, lorsqu'il obéït promptement à l'action du gouvernail, & l'on tâche de lui procurer cette bonne qualité par une avantageuse construction & une figure propre à ce dessein. Mais, le vaisseau étant déjà construit, l'arrimage nous fournit encore un excellent moyen de porter cette bonne qualité à un plus haut degré. Il s'agit d'arranger les fardeaux, en sorte que le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical en soit diminué autant qu'il est possible, sans pourtant que le centre de gravité du vaisseau entier en soit altéré. Il est clair qu'on remplit cette condition, lorsqu'on approche, autant que les autres circonstances le permettent, tous les fardeaux vers l'axe vertical, qui passe par le centre de gravité du vaisseau. Et, puisque le moment d'inertie dépend du quarré des distances, l'avantage en pourra devenir assez considérable.

25. Concevons un fardeau, dont le poids $= A$, qui soit éloigné de l'axe vertical de la distance $= a$, & qu'on l'y approche de l'intervalle $= b$, de sorte que sa distance à présent $= a - b$. Puisque, auparavant, le produit Aaa entroit dans l'expression du moment d'inertie, & qu'à présent, ce produit est $= A\,(a - b^2)$, on voit que, par ce changement, le moment d'inertie sera diminué de la quantité $= A\,(2ab - bb) = Ab.(2a - b)$. Or, par le transport de ce fardeau, le centre de gravité du vaisseau G souffrira quelque déplacement; mais on n'aura qu'à transporter aussi de l'autre côté

côté, un fardeau d'une manière semblable, pour rétablir le centre de gravité dans son juste lieu; & par ce moyen, on obtiendra une double diminution du mouvement d'inertie.

26. Il faut donc changer à la fois la place de deux ou plusieurs fardeaux, en sorte que leur commun centre de gravité demeure au même lieu, afin que le centre de gravité du vaisseau tout entier n'en soit point altéré. Soient A, B, C, D, &c. les poids de ces fardeaux; qu'avant le changement, leurs distances à l'axe vertical soient a, b, c, d, &c; & après le changement α, β, γ, δ, &c. Cela posé, le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical sera diminué de la quantité $A(a^2-\alpha^2)+B(b^2-\beta^2)+C(c^2-\gamma^2)+D(d^2-\delta^2)+$ &c. Or, en faisant le calcul selon les règles connues pour la détermination du centre de gravité, on trouve que cette diminution du moment d'inertie devient la plus grande, lorsqu'on approche ces corps autant entre eux qu'il est possible; & s'il étoit possible de les réduire dans un seul point, c'est-à-dire dans leur commun centre de gravité, on obtiendroit le plus petit moment d'inertie, qui s'évanouïroit même, si toute la masse du vaisseau étoit réunie dans son centre de gravité.

27. La raison de cela est fondée sur la règle assez connue que les auteurs cités ci-dessus ont donnée, pour trouver le moment d'inertie de plusieurs corps par rapport à un axe quelconque. Cette règle porte qu'ayant tiré par le commun centre de gravité de ces corps une ligne parallèle à l'axe proposé, on cherche leur moment d'inertie à l'égard de cette ligne, en multipliant chaque corps par le quarré de sa distance à cette ligne; & qu'à ce produit, il faut encore ajouter le produit de la somme de tous les corps multipliée par le quarré de la distance entre le commun centre de gravité des corps & l'axe proposé. Donc,

C

ſi ces corps changent de place, en ſorte que leur commun centre de gravité demeure au même point, leur moment d'inertie par rapport à l'axe vertical du vaiſſeau en ſouffrira préciſément le même changement que leur moment d'inertie, pris à l'égard de la ligne verticale tirée par leur commun centre de gravité.

28. Donc, conſidérant deux fardeaux quelconques dans le vaiſſeau, dont il eſt permis de changer la ſituation, le moment d'inertie du vaiſſeau par rapport à ſon axe vertical en ſouffrira la même augmentation ou diminution que le moment d'inertie de ces deux corps, ſeulement par rapport à la ligne verticale tirée par leur commun centre de gravité. La diminution donc que nous avons ici en vue, dépend non ſeulement de ce qu'on approche ces deux corps de leur commun centre de gravité, mais auſſi de leur poſition à l'égard de la ligne verticale. Si ces deux corps ſe trouvoient dans la même ligne verticale, leur moment d'inertie par rapport à cette ligne ſeroit nul, & partant, incapable de recevoir aucune diminution, quoiqu'on approchât ces deux corps tout-à-fait enſemble. Ainſi, deux fardeaux ſitués dans une ligne verticale, ne ſçauroient ſervir à diminuer le moment d'inertie du vaiſſeau, par rapport à ſon axe vertical.

29. De-là, il s'enſuit que le moyen le plus propre pour diminuer le moment d'inertie d'un vaiſſeau, à l'égard de ſon axe vertical, c'eſt de choiſir des fardeaux ſitués dans un même plan horiſontal, & de les rapprocher entr'eux dans ce même plan, autant que les autres circonſtances le permettent, en ſorte pourtant que leur commun centre de gravité ne ſouffre aucune altération. Et il eſt clair que, plus ces fardeaux ſont peſants & plus on les pourra rapprocher, plus auſſi ſera grande la diminution du moment d'inertie du vaiſſeau par rapport à ſon axe vertical. Par

ce moyen, lorſqu'on l'exécute dans tous les plans horiſontaux, & qu'on y rapproche enſemble tous les fardeaux, autant qu'il eſt poſſible, on procurera aux vaiſſeaux la qualité d'obéir à l'action du gouvernail, dans le plus haut degré dont ils ſont ſuſceptibles par rapport à l'arrimage. Cependant, il faut bien que la conſtruction même du vaiſſeau concoure principalement à ce but; car ſi le vaiſſeau a déjà par ſa conſtruction le défaut qu'il ne ſe laiſſe pas diriger par le gouvernail, on ne ſçauroit prétendre de le corriger par l'arrimage, quoiqu'on puiſſe diminuer ce défaut par ce moyen.

III.

Des avantages qu'on peut retirer, en changeant le moment d'inertie du vaiſſeau par rapport aux axes horiſontaux.

30 La queſtion aboutit au même, à l'égard de tous les axes horiſontaux; & partant, pour fixer mes recherches, j'aurai en vue l'axe horiſontal tiré ſelon la longueur du vaiſſeau. Or le moment d'inertie, par rapport à cet axe, n'entre en conſidération qu'entant que le vaiſſeau ſe meut, en tournant autour de cet axe : ce mouvement eſt connu ſous le nom de *roulis*; de ſorte que le mouvement du roulis dépend du mouvement d'inertie du vaiſſeau par rapport à l'axe tiré ſelon la longueur. Je ne parle pas ici ni des forces, qui inclinent le vaiſſeau autour de cet axe, ni de la force qui tend à le rétablir dans ſa ſituation naturelle, & qui ſe trouve dans la ſtabilité du vaiſſeau qu'il eſt bon d'augmenter autant qu'il eſt poſſible, comme j'ai remarqué ci-deſſus. Mais ici, quelles que ſoient ces forces, il ne s'agit que du mouvement & de ſa modification, en tant qu'il dépend du moment d'inertie à l'égard de l'axe horiſontal tiré ſelon la longueur du vaiſſeau.

31. L'accélération du mouvement de roulis étant en raison composée de l'inclinaison du vaisseau, de la stabilité, & réciproquement du moment d'inertie, qui entre ici en considération, on voit que le roulis doit être d'autant plus rapide, que ce moment d'inertie sera plus petit, la stabilité du vaisseau demeurant la même. Donc, si l'on veut calmer la rapidité de ce mouvement, il faut tâcher de grossir ledit moment d'inertie, autant qu'il est possible. Or, on compte parmi les bonnes qualités d'un vaisseau, que son mouvement de roulis, de même que celui de tangage, ne soit pas impétueux ou trop violent; & partant, il sera toujours fort avantageux d'augmenter autant qu'il est possible les momens d'inertie du vaisseau par rapport à tous les axes horisontaux. Donc, puisqu'on sçait que tous ces momens sont déterminés par les deux, qui se rapportent à l'axe de longueur & à celui de largeur, cette augmentation se réduit aux deux momens d'inertie par rapport aux axes tirés selon la longueur & la largeur du vaisseau.

32. Voyons donc quels changemens faits dans l'arrimage du vaisseau sont les plus efficaces pour ce dessein. Or, par ce que je viens de démontrer par rapport au mouvement autour de l'axe vertical, il est clair que, pour augmenter le plus efficacement le moment d'inertie par rapport à un axe horisontal quelconque, il faut choisir des fardeaux situés dans un plan vertical perpendiculaire à cet axe, & les éloigner dans le même plan chacun des autres, ou bien chacun de leur commun centre de gravité, autant qu'il est possible, sans pourtant changer le lieu de leur commun centre de gravité. De cette manière, le moment d'inertie en question sera augmenté d'une quantité qu'on trouvera de cette sorte. Soient $A, B, C,$ les poids des fardeaux qu'on aura éloignés de leur commun centre de gravité; & $a, b, c,$ leurs distances de ce centre au

commencement. Or, après les changemens, leurs diſtances ſoient $a + \alpha$, $b + \beta$, $c + \gamma$; & l'augmentation du moment d'inertie ſera $A\alpha(2a + \alpha) + B\beta(2b + \beta) + C\gamma(2c + \gamma)$. D'où l'on voit que cette agmentation pourroit bien devenir aſſez conſidérable.

33. Un tel changement peut être exécuté à l'égard de tous les axes horiſontaux du vaiſſeau; mais ordinairement, il n'y en a qu'un ſeul, autour duquel on voudroit que les agitations devinſſent moins impétueuſes. C'eſt communément le tangage, qui, par ſa violence, eſt le plus funeſte à la navigation, & qu'il eſt bon d'adoucir autant qu'il eſt poſſible; car, puiſque la ſtabilité du vaiſſeau eſt la plus grande par rapport à ſon axe de largeur, les forces qui rétabliſſent le vaiſſeau lorſqu'il eſt incliné autour de cet axe, ſont les plus grandes, & produiſent par conſéquent une grande rapidité dans le mouvement, à moins que le moment d'inertie par rapport à cet axe ne ſoit très-grand. Par cette raiſon, puiſqu'il n'eſt pas à propos de diminuer la ſtabilité du vaiſſeau à l'égard de cet axe, il ne reſte que l'arrimage, qui puiſſe ſervir à adoucir le tangage. Pour cet effet, il faut tâcher d'éloigner tous les fardeaux autant qu'il eſt poſſible, de l'axe horiſontal tiré ſelon la largeur du vaiſſeau, ou bien d'appliquer en particulier à cet axe la règle que je viens de preſcrire pour tous les axes horiſontaux en général.

34. Donc, en tant que l'arrimage d'un vaiſſeau, après avoir réduit le centre de gravité dans la ligne droite preſcrite, & l'avoir abbaiſſé autant qu'il eſt poſſible, eſt enorce ſuſceptible de quelque changement, on aura à obſerver les deux règles ſuivantes.

La première exige qu'on rapproche, autant qu'il eſt poſſible, tous les fardeaux vers l'axe vertical du vaiſſeau tiré par ſon centre de gravité.

La ſeconde, exige qu'on éloigne, autant qu'il eſt poſſible, tous les fardeaux de l'axe horiſontal tiré par le centre de gravité, ſelon la largeur du vaiſſeau.

La première règle ſert à procurer au vaiſſeau la qualité d'obeïr plus aiſément à l'action du gouvernail, & l'autre à tranquilliſer les agitations cauſées par le tangage; & ce ſont les ſeuls objets, ſur leſquels l'arrimage a quelque influence.

35. Or, ces deux règles peuvent quelquefois devenir contraires; de ſorte qu'en ſatisfaiſant à l'une, on s'écarte de l'autre. Donc, pour faire voir comment on peut ſatisfaire à toutes les deux à la fois, autant qu'il eſt poſſible, ſoit G le centre de gravité

Fig. 3. du vaiſſeau, AB ſon axe horiſontal tiré ſelon la longueur, CD l'autre axe horiſontal tiré ſelon la largeur, & EF l'axe vertical. Que Z ſoit un fardeau quelconque, dont le lieu ſoit déterminé par les trois coordonnées $GX = x$; $XY = y$ & $YZ = z$ parallèles aux axes indiqués. Maintenant, pour le moment d'inertie par rapport à l'axe vertical EF, le fardeau Z fournit la partie $Z(xx + yy)$; & pour le moment d'inertie par rapport à l'axe horiſontal de largeur CD, ce même fardeau fournit la partie $Z(xx + zz)$. Il s'agit donc de diſpoſer les fardeaux, en ſorte que la ſomme de toutes les formules $Z(xx + yy)$ devienne la plus petite, & la ſomme des formules $Z(xx + zz)$ la plus grande.

36. De-là, il eſt évident qu'il eſt poſſible de remplir ces deux conditions à la fois, en diminuant pour chaque fardeau Z la diſtance $XY = y$, autant qu'on peut, & en augmentant en même temps la diſtance $YZ = z$ autant qu'on peut, ſans changer la diſtance $GX = x$. Or y marque la diſtance du fardeau au plan vertical, qui paſſe ſelon la longueur du vaiſſeau par ſon centre de gravité; & puiſqu'il partage le vaiſſeau en deux parties égales & ſemblables, on le peut

nommer la ſection diamétrale. Pour la quantité z, elle exprime la diſtance du fardeau au plan horiſontal du vaiſſeau tiré par ſon centre de gravité, d'où nous tirons pour l'arrimage les deux règles ſuivantes.

1°. *Il faut approcher autant qu'il eſt poſſible tous les fardeaux vers la ſection verticale & diamétrale du vaiſſeau.*

2°. *Il faut éloigner, autant qu'il eſt poſſible, tous les fardeaux de la ſection horiſontale du vaiſſeau tirée par ſon centre de gravité.*

Or, ces changemens doivent toujours être faits en deux ou pluſieurs fardeaux à la fois, en obſervant la règle générale que leur commun centre de gravité n'en ſouffre aucune altération. Auſſi, faut-il prendre garde de ne pas tranſporter les fardeaux, ni plus en avant, ni plus en arrière du vaiſſeau, afin que la quantité x demeure la même.

CONCLUSION.

37. Voilà donc à quoi ſe réduiſent les avantages qu'on peut retirer de l'arrimage des vaiſſeaux, dont la détermination, après les découvertes qu'on a faites dans cette ſcience, ne demandoit plus des recherches fort profondes. Mais, ſi l'on vouloit pouſſer la queſtion plus loin, & déterminer exactement toutes les agitations dont les vaiſſeaux ſont ſuſceptibles, cette recherche ſeroit non ſeulement très-profonde, mais les principes connus de méchanique y ſuffiroient à peine, quoiqu'il ſoit permis de regarder les vaiſſeaux comme des corps ſolides qui, pendant le mouvement, ne ſouffrent aucun changement, ni dans leur figure, ni dans l'arrangement de leurs parties. Or, de ces corps, la théorie même de leur mouvement n'eſt pas encore aſſez développée, à l'égard de tous les mouvemens de rotation dont ils ſont ſuſceptibles. Comme cette matière eſt étroitement liée avec la queſtion.

proposée; je me crois obligé d'ajouter sur ce sujet quelques réflexions, qui pourroient devenir, avec le temps, assez intéressantes.

38. Pour qu'un corps solide puisse tourner librement autour d'un axe, sans qu'il ait besoin d'être soutenu, il ne suffit pas que cet axe passe par le centre de gravité du corps, il faut, outre cela, que toutes les forces centrifuges, qui résultent du mouvement de tous les élémens du corps se détruisent parfaitement. Je nommerai un tel axe, autour duquel un corps peut librement tourner, sans qu'il ait besoin d'être soutenu, je le nommerai, à cause de sa grande préférence méchanique, à l'égard de tous les autres, *l'axe principal* du corps. Je ferai voir d'abord que tous les corps sont non seulement doués d'un tel axe, mais qu'ils en ont toujours au moins trois, qui sont perpendiculaires entre eux, dont je détermine la position de la manière suivante.

FIG. 3. 39. Soit G le centre de gravité du corps proposé, sa masse $= M$. Qu'on considère en Z un élément infiniment petit du corps dont la masse soit $= dM$, & qu'on détermine son lieu, à l'égard de trois axes GA, GC, GE, pris à volonté, mais perpendiculaires entr'eux, & tirés par le centre de gravité G du corps. Qu'on pose ensuite les trois coordonnées parallèles aux trois axes $ZY = z$; $YX = y$ & $XG = x$ & soit enfin la distance de l'élément au centre de gravité $GZ = \sqrt{(xx + yy + zz)} = v$; or G étant le centre de gravité, les trois quantités intégrales $\int x\,dM$, $\int y\,dM$, $\int z\,dM$ étant étendues par tout le corps, doivent s'évanouir. Soit maintenant GJ un axe quelconque, autour duquel le corps tourne actuellement, & qui passe aussi par le centre de gravité G: qu'on détermine sa position par les angles de son inclinaison aux trois axes fixes GA, GC, GE, qui soient $JGA = \alpha$, $JGC = \beta$, $JGE = \gamma$ & qu'enfin la

la vîteſſe angulaire du corps autour de cet axe GJ ſoit ϵ ; ou bien que cette lettre ϵ exprime l'angle parcouru par le mouvement de rotation dans un temps donné, par exemple dans une ſeconde.

40. Maintenant, pour que la droite GJ ſoit un axe principal du corps, il faut que les forces centrifuges à l'égard d'elle, ſe détruiſent, la vîteſſe angulaire ϵ avec la ſituation de l'axe GJ ou les angles α, β, γ demeurant invariables : c'eſt-à-dire, il faut que le mouvement de rotation ſe conſerve ſoi-même, ſans que ſon axe ait beſoin d'être ſoutenu. Pour cet effet, on n'a qu'à chercher en général les forces requiſes pour la conſervation du mouvement, leſquelles étant enſuite égalées à zéro, donneront la poſition de l'axe principal.

41. Qu'on conſidère donc le mouvement de la particule élémentaire dM en Z, & qu'on le décompoſe ſelon les trois directions Za, Zc, Ze parallèles aux trois axes fixes GA, GC, GE, les principes de méchanique donneront d'abord pour chacun d'eux, en tant qu'il n'eſt pas uniforme, les forces requiſes pour leur accélération. Pour faciliter cette décompoſition, & pour la mettre dans ſon plus grand jour, qu'on réduiſe toute la recherche à la trigonométrie ſphérique. Qu'on ſe repréſente donc une ſphère décrite autour du centre de gravité G, avec le rayon $GZ = v$, & ſoient A, C, E, les veſtiges des trois axes fixes ſur la ſurface de la ſphère, les arcs AC, CE, EA, ſeront donc des quarts de grands cercles ; enſuite que l'axe de rotation GJ paſſe par le point J, & que la maſſe élémentaire dM ſe trouve en Z. Cela poſé, qu'on tire les arcs de grands cercles JA, JC, JE & ZA, ZC, ZE; on auroit, ſi le rayon de la ſphère étoit $= 1$; $JA = \alpha$; $JC = \beta$; $JE = \gamma$: enſuite $\operatorname{coſ}.ZA = \frac{x}{v}$; $\operatorname{coſ}.ZC = \frac{y}{v}$; $\operatorname{coſ}.ZE = \frac{z}{v}$ FIG. 4.

D

& partant, $cos. ZA^2 + cos. ZC^2 + cos. ZE^2 = 1$ à cause de $xx + yy + zz = vv$; on aura aussi par la même raison $cos. JA^2 + cos. JC^2 + cos. JE^2 = 1$; & puisque le rayon de la sphère est $= v$, on n'aura qu'à multiplier ensuite tous les arcs par v.

42. Or, l'élément Z se mouvant autour de l'axe GJ avec une vîtesse angulaire $= \varepsilon$, en tirant l'arc JZ à cause de la distance du point Z à l'axe de rotation $= v\, sin.\, JZ$ la même vîtesse sera $= \varepsilon v\, sin.\, JZ$, & sa direction Zz perpendiculaire à JZ sera dans la surface de la sphère. Maintenant, pour décomposer cette vîtesse selon des directions parallèles aux trois axes fixes, on n'a qu'à rechercher sous quel angle cette direction Zz est inclinée à chacun de ces trois axes; qu'on prolonge pour cet effet Zz en arc de grand cercle, jusqu'à ce que l'arc Z devienne un quart de cercle, & la droite tirée alors du centre de la sphère G au terme V, étant parallèle à la direction Zz, son inclination aux trois axes sera mesurée par les arcs de grands cercles VA, VC, VE; & partant, cette décomposition nous fournira les vîtesses selon $Za = \varepsilon v\, sin.\, JZ\, cos.\, VA$, selon $Zc = \varepsilon v\, sin.\, JZ\, cos.\, VC$, selon $Ze = \varepsilon v\, sin.\, JZ\, cos.\, VE$.

FIG. 3. & 4.

43. L'arc VZ étant un quart de cercle perpendiculaire à ZJ, l'arc VJ sera de même un quart de cercle & perpendiculaire à JZ, d'où le triangle sphérique AJV donnera $cos.\, AV = cos.\, AJV\, sin.\, JA = sin.\, AJZ\, sin.\, JA$, & comme de la même manière les triangles CJV, EJV fournissent $cos.\, CV = - sin.\, CJZ\, sin.\, JC$; $cos.\, EV = sin.\, EJZ\, sin.\, JE$, la considération du point V s'en allant du calcul, on trouvera les vîtesses (*fig. 3*). . . . .

selon $Za = + \varepsilon v\, sin.\, JZ\, sin.\, JA\, sin.\, AJZ$;
selon $Zc = - \varepsilon v\, sin.\, JZ\, sin.\, JC\, sin.\, CJZ$;
selon $Ze = + \varepsilon v\, sin.\, JZ\, sin.\, JE\, sin.\, EJZ$;

mais la considération du triangle sphérique AJZ donne $\sin. JZ \sin. AJZ = \sin. AZ \sin. ZAJ$; & comme il en est de même des autres CJZ, EJZ, nous aurons les vîtesses . . . .
selon $Za = + \varkappa v \sin. JA \sin. ZA \sin. ZAJ$;
selon $Zc = - \varkappa v \sin. JC \sin. ZC \sin. ZCJ$;
selon $Ze = + \varkappa v \sin. JE \sin. ZE \sin. ZEJ$.

44. Les arcs AC, AE, CE étant des quarts de cercle, & les angles A, C, E droits, on aura $\cos. EAJ = \sin. CAJ = \frac{\cos. EJ}{\sin. AJ}$; $\cos. CAJ = \sin. EAJ = \frac{\cos. CJ}{\sin. AJ}$; $\cos. EAZ = \sin. CAZ = \frac{\cos. EZ}{\sin. AZ}$; $\cos. CAZ = \sin. EAZ = \frac{\cos. CZ}{\sin. AZ}$: de-là $\sin. ZAJ = \sin. (EAJ - EAZ) = \frac{\cos. CJ \cos. EZ - \cos. EJ \cos. CZ}{\sin. AJ \sin. AZ}$ & par la même raison $\sin. ZCJ = \sin. (ECJ - ECZ) = \frac{\cos. AJ \cos. EZ - \cos. EJ \cos. AZ}{\sin. CJ \sin. CZ}$: $\sin. ZEJ = \sin. (CEJ - CEZ) = \frac{\cos. AJ \cos. CZ - \cos. CJ \cos. AZ}{\sin. EJ \sin. EZ}$.

45 Lorsqu'on substitue ces valeurs dans les formules trouvées pour les vîtesses (43), il arrive très à propos que les dénominateurs s'en vont, & les *cosinus* qui restent encore, pouvant être exprimés par les lettres x, y, z, α, β, γ, on obtiendra la vîtesse $Za = \varkappa (z \cos. \beta - y \cos. \gamma)$; la vîtesse $Zc = \varkappa (x \cos. \gamma - z \cos. \alpha)$ & la vîtesse $Ze = \varkappa (y \cos. \alpha - x \cos. \beta)$. De-là, on pourroit aussi assigner la valeur de l'arc JZ, dont j'aurai besoin dans la suite : car le triangle JAZ donnant $\cos. JZ = \cos. JAZ \sin. AJ \sin. AZ + \cos. AJ \cos. AZ$, à cause de $\cos. JAZ = \cos. (EAJ - EAZ) = \frac{\cos. EJ \cos. EZ + \cos. CJ \cos. CZ}{\sin. AJ \sin. AZ}$ (44), on obtiendra $\cos. JZ = \cos. AJ \cos. AZ + \cos. CJ \cos. CZ + \cos. EJ \cos. EZ$; & partant $\cos. JZ = \frac{x \cos. \alpha + y \cos. \beta + z \cos. \gamma}{v}$

46. Ayant trouvé les vîtesses selon les directions fixes GA, GC, GE (*fig.* 3), on en peut assigner les espaces dx, dy, dz, par lesquels l'élément dM qui, à présent, est en Z, sera emporté dans le temps infiniment petit dt, sçavoir $dx = u\,dt\,(z \cos.\,\beta - y \cos.\,\gamma)$; $dy = u\,dt\,(x \cos.\,\gamma - z \cos.\,\alpha)$; $dz = u\,dt\,(y \cos.\,\alpha - x \cos.\,b)$ (45), lesquelles formules nous mettent en état de trouver les accroissemens de chacune de ces trois vîtesses; car en prenant les quantités u, α, β, γ, pour constantes, & écrivant pour dx, dy, dz, les valeurs que nous venons de marquer, nous obtiendrons :

$$d.\,vit.\,Za = u\,(dz \cos.\,\beta - dy \cos.\,\gamma) = uu\,dt\,(y \cos.\,\alpha \cos.\,\beta + z \cos.\,\alpha \cos.\,\gamma - x \cos.\,\beta^2 - x \cos.\,\gamma^2)$$
$$d.\,vit.\,Zc = u\,(dx \cos.\,\gamma - dz \cos.\,\alpha) = uu\,dt\,(z \cos.\,\beta \cos.\,\gamma + x \cos.\,\alpha \cos.\,\beta - y \cos.\,\gamma^2 - y \cos.\,\alpha^2)$$
$$d.\,vit.\,Ze = u\,(dy \cos.\,\alpha - dx \cos.\,\beta) = uu\,dt\,(x \cos.\,\alpha \cos.\,\gamma + y \cos.\,\beta \cos.\,\gamma - z \cos.\,\alpha^2 - z \cos.\,\beta^2$$

47. Les accélérations demandent de certaines forces pour leur production qu'il n'est pas difficile de déterminer par les premiers principes de méchanique, en vertu desquels, on trouve que l'élément dM en Z doit être sollicité par les trois forces suivantes : 1°., selon $Za = \frac{uu\,dM}{2g}(y \cos.\,\alpha \cos.\,\beta + z \cos.\,\alpha \cos.\,\gamma - x \cos.\,\beta^2 - x \cos.\,\gamma^2)$; 2°., selon $Zc = \frac{uu\,dM}{2g}(z \cos.\,\beta \cos.\,\gamma + x \cos.\,\alpha \cos.\,\beta - y \cos.\,\gamma^2 - y \cos.\,\alpha^2)$; 3°., selon $Ze = \frac{uu\,dM}{2g}(x \cos.\,\alpha \cos.\,\gamma + y \cos.\,\beta \cos.\,\gamma - z \cos.\,\alpha^2 - z \cos.\,\beta^2)$, où j'ai introduit la lettre g, pour marquer la hauteur de la chûte d'un corps grave dans une seconde : or, je suppose qu'on exprime les masses & les forces par des poids, & les vîtesses par des espaces parcourus dans une seconde, pour ramener d'autant plus facilement toutes les déterminations à des mesures absolues.

48. Ici, il ne s'agit pas tant de ces forces absolues que de leurs momens à l'égard de nos trois axes fixes GA, GC, GE : or, le moment de ces trois forces élémentaires à l'égard de l'axe GA, est *force* $Zc.\,YZ$

$-$ *force* $Ze.ZY = \frac{uu\,dM}{2g}((zz-yy)\cos.\beta\cos.\gamma + xz\cos.\alpha\cos.\beta - yz(\cos.\gamma^2 - \cos.\beta^2) - xy\cos.\alpha\cos.\gamma)$: de la même manière, le moment de ces forces à l'égard de l'axe GC est *force* $Ze.GX -$ *force* $Za.YZ = \frac{uu\,dM}{2g}((xx-zz)\cos.\alpha\cos.\gamma + xy\cos.\beta\cos.\gamma - xz(\cos.\alpha^2 - \cos.\gamma^2) - yz\cos.\alpha\cos.\beta)$; & enfin, le moment des forces par rapport à l'axe GE est *force* $Za.XY -$ *force* $Zc.GX = \frac{uu\,dM}{2g}((yy-xx)\cos.\alpha\cos.\beta + yz\cos.\alpha\cos.\gamma - xy(\cos.\beta^2 - \cos.\alpha^2) - xz\cos.\beta\cos.\gamma)$.

49. Tout revient donc à trouver les intégrales de ces expressions ; & puisque u, α, β, γ, sont constantes, les intégrales de ces trois expressions impliquent les six formules intégrales suivantes $\int xx\,dM$. $\int yy\,dM$. $\int zz\,dM$. $\int xy\,dM$; $\int xz\,dM$. $\int yz\,dM$, qui s'étendent sur toute la masse du corps proposé ; & comme elles ne dépendent que de la seule qualité du corps, on les pourra regarder comme connues. Nommons donc $\int xxdM = A$; $\int yydM = B$; $\int zzdM = C$; $\int yzdM = D$; $\int xzdM = E$; $\int xydM = F$; & nous aurons les momens suivans, qui sont requis pour le maintien du mouvement de rotation autour de l'axe GJ.

1°. A l'égard de l'axe $GA = \frac{uu}{2g}((C-B)\cos.\beta\cos.\gamma + E\cos.\alpha\cos.\beta -$
$F\cos.\alpha\cos.\gamma - D\cos.\gamma^2 + D\cos.\beta^2)$.

2°. A l'égard de l'axe $GC = \frac{uu}{2g}((A-C)\cos.\alpha\cos.\gamma + F\cos.\beta\cos.\gamma -$
$D\cos.\alpha\cos.\beta - E\cos.\alpha^2 + E\cos.\gamma^2)$

3°. A l'égard de l'axe $GE = \frac{uu}{2g}((B-A)\cos.\alpha\cos.\beta + D\cos.\alpha\cos.\gamma -$
$E\cos.\beta\cos.\gamma - F\cos.\beta^2 + F\cos.\alpha^2)$

50. Maintenant, nous n'avons qu'à faire évanouir ces trois expressions pour avoir les conditions d'un axe principal, dont la position sera par conséquent

déterminée par les trois équations suivantes

$$(C-B)\cos.\beta\cos.\gamma + E\cos.\alpha\cos.\beta - F\cos.\alpha\cos.\gamma - D\cos.\gamma^2 + D\cos.\beta^2 = 0$$
$$(A-C)\cos.\alpha\cos.\gamma + F\cos.\beta\cos.\gamma - D\cos.\alpha\cos.\beta - E\cos.\alpha^2 + E\cos.\gamma^2 = 0$$
$$(B-A)\cos.\alpha\cos.\beta + D\cos.\alpha\cos.\gamma - E\cos.\beta\cos.\gamma - F\cos.\beta^2 + F\cos.\alpha^2 = 0$$

où il faut remarquer que deux de ces équations contiennent déjà la troisième, puisque la somme de la première multipliée par $\cos.\alpha$, celle de la seconde par $\cos.\beta$ & celle de la troisième par $\cos.\gamma$, s'évanouissent; il suffira donc de n'en prendre que deux, & d'y ajouter celle-ci $\cos.\alpha^2 + \cos.\beta^2 + \cos.\gamma^2 = 1$.

51. Il ne nous reste donc pour la détermination des axes principaux qu'à déterminer les valeurs des trois angles α, β, γ, par le moyen de ces trois équations trouvées. Pour en faciliter le calcul, soient les angles $AGF = \zeta$, $FGJ = \eta$; & posant $GJ = 1$, nous aurons $JF = \sin.\eta$; $GF = \cos.\eta$; $AF = \sin.\zeta\cos.\eta$; $GA = \cos.\zeta\cos.\eta$; & partant, $\cos.\alpha = \cos.\zeta\cos.\eta$; $\cos.\beta = \sin.\zeta\cos.\eta$; $\cos.\gamma = \sin.\eta$. Ces valeurs, qui renferment déjà l'égalité $\cos.\alpha^2 + \cos.\beta^2 + \cos.\gamma^2 = 1$, réduiront les équations trouvées dans les formes suivantes.

$$(C-B)\sin.\zeta\sin.\eta\cos.\eta + E\sin.\zeta\cos.\zeta\cos.\eta^2 - F\cos.\zeta\sin.\eta\cos.\eta - D\sin.\eta^2 + D\sin.\zeta^2\cos.\eta^2 = 0$$
$$(A-C)\cos.\zeta\sin.\eta\cos.\eta + F\sin.\zeta\sin.\eta\cos.\eta - D\sin.\zeta\cos.\zeta\cos.\eta^2 - E\cos.\zeta^2\cos.\eta^2 + E\sin.\eta^2 = 0$$
$$(B-A)\sin.\zeta\cos.\zeta\cos.\eta^2 + D\cos.\zeta\sin.\eta\cos.\eta - E\sin.\zeta\sin.\eta\cos.\eta - F\sin.\zeta^2\cos.\eta^2 + F\cos.\zeta^2\cos.\eta^2 = 0$$

dont la troisième, divisée par $\cos.\eta^2$ donne $\frac{\sin.\eta}{\cos.\eta} = \tang.\eta = \frac{(B-A)\sin.\zeta\cos.\zeta - F(\sin.\zeta^2 + F\cos.\zeta^2}{E\sin.\zeta - D\cos.\zeta}$. Or, la première multipliée par $\sin.\zeta$, moins la seconde multipliée par $\cos.\zeta$, à cause de $\sin.\eta\cos.\eta = \frac{1}{2}\sin.2\eta$ $\cos.\eta^2 - \sin.\eta^2 = \cos.2\eta$ donne, après avoir divisé par $\cos.2\eta$, cette égalité :

$$\frac{\sin.2\eta}{\cos.2\eta} = \tang.2\eta = \frac{2(E\cos.\zeta + D\sin.\zeta)}{2F\sin.\zeta\cos.\zeta + A\cos.\zeta^2 + B\sin.\zeta^2 - C};$$

deſorte que, ſi l'angle ζ étoit connu, l'angle η en pourroit être tiré d'une double manière.

52. Or, puiſque $tang.\, 2\eta = \frac{2\, tang.\, \eta}{1 - tang.\, \eta^2}$, ou bien $2\, cof.\, 2\eta = \frac{1}{tang.\, \eta} - tang.\, \eta$, on aura en ſubſtituant

$$\frac{2F\,fin.\zeta\, cof.\zeta + A\, cof.\zeta^2 + B\, fin.\zeta^2 - C}{E\, cof.\zeta + D\, fin.\zeta} = \frac{E\, fin.\zeta - D\, cof.\zeta}{(B-A)\, fin.\zeta\, cof.\zeta + F(cof.\zeta^2 - fin.\zeta^2)}$$

$$- \frac{(B-A)\, fin.\zeta\, cof.\zeta - F(cof.\zeta^2 - fin.\zeta^2)}{E\, fin.\zeta - D\, cof.\zeta},$$ & en combinant le dernier membre avec le premier :

$$\frac{E\, fin.\zeta - D\, cof.\zeta}{(B-A)\, fin.\zeta\, cof.\zeta + F(cof.\zeta^2 - fin.\zeta^2)} = \frac{(EF+CD-AD)\, cof.\zeta - (DE+CE-BE)\, fin.\zeta}{(EE-DD)\, fin.\zeta\, cof.\zeta - DE\,(cof.\zeta^2 - fin.\zeta^2)};$$

enfin, en poſant $tang.\, \zeta = \theta$, nous aurons l'équation ſuivante :

$$\left.\begin{matrix} +D(FF-EE) \\ +EF(C-B) \end{matrix}\right\}\theta^3 \left.\begin{matrix} +E(2DD-EE-FF) \\ +DF(2A-B-C) \\ +E(A-B)(C-B) \end{matrix}\right\}\theta^2 \left.\begin{matrix} +D(2EE-DD-FF) \\ +EF(2B-A-C) \\ +D(B-A)(C-A) \end{matrix}\right\}\theta \left.\begin{matrix} +E(FF-DD) \\ +DF(C-A) \end{matrix}\right\} = 0$$

53. Cette équation étant cubique, aura infailliblement une racine réelle, & partant, de quelque figure & de quelque qualité que ſoit le corps propoſé, on y pourra toujours aſſigner un axe GJ, qui paſſe par le centre de gravité, & autour-duquel le corps puiſſe tourner librement, ou bien on pourra toujours aſſigner au moins un axe principal, autour duquel toutes les forces centrifuges ſe détruiſent, & qui, pendant que le centre G reſte en repos, conſerve toujours la même ſituation, ſans qu'on ait beſoin de le ſoutenir : or auſſi, quand le corps a un mouvement progreſſif, l'axe GJ recevra le même mouvement, en demeurant toujours parallèle à ſoi-même, & le corps pourſuivra le même mouvement de rotation, à moins que des forces étrangères ne l'en détournent. On voit encore par la même équation cubique que nous venons de trouver, qu'en général un corps quelconque ne ſçauroit avoir plus de trois axes principaux.

54. Or, pour nous assurer tant du nombre que de la position des axes principaux dans chaque corps, parce que nous sçavons qu'il y en a surement un, supposons que l'axe GA même soit déjà un axe principal, & cherchons les autres, en cas qu'il y en ait des réels. L'axe GJ étant donc supposé tomber en GA, on aura $\zeta = o$, $\eta = o$, & les formules du §. 51 donneront $E = o$, $F = o$, de sorte que l'axe GA, en tant qu'il est principal, demande les propriétés suivantes : $E = \int xz\,dM = o$; $F = \int xy\,dM = o$; & partant, supposant que GJ soit un autre axe principal déterminé par les angles ζ & η comme auparavant, nous aurons pour sa position 1°. $(C - B)\,fin.\,\zeta\,fin.\,\eta\,cof.\,\eta - D\,fin.\,\eta^2 + D\,fin.\,\zeta^2\,cof.\,\eta^2 = o$. 2°. $(A - C)\,cof.\,\zeta\,fin.\,\eta\,cof.\,\eta - D\,fin.\,\zeta\,cof.\,\zeta\,cof.\,\eta^2 = o$. 3°. $(B - A)\,fin.\,\zeta\,cof.\,\zeta\,cof.\,\eta^2 + D\,cof.\,\zeta\,fin.\,\eta\,cof.\,\eta = o$.

55. Les deux dernières équations exigent ou $cof.\,\zeta = o$, ou $cof.\,\eta = o$: or la valeur $cof.\,\eta = o$ ne satisfaisant pas à la première équation, à moins que D ne s'évanouisse, il faut s'en tenir à la première $cof.\,\zeta = o$, ou $\zeta = 90°$. & la première équation donnera $(C - B)\,fin.\,\eta\,cof.\,\eta + D\,(cof.\,\eta^2 - fin.\,\eta^2) = o$, ou bien $(C - B)\,fin.\,2\eta + 2D\,cof.\,2\eta = o$; delà $tang.\,2\eta = \frac{2D}{B - C}$ & partant on trouvera pour cet angle η une double valeur : car, en posant $tang.\,\eta = \tau$ on obtiendra $D\tau\tau = (C - B)\tau + D$ & enfin, $\tau = \frac{C - B \pm \sqrt{((C - B)^2 + 4DD)}}{2D}$; ces deux valeurs sont toujours réelles, & leur produit est $= -1$: donc, si on appelle ces deux angles η & η', à cause de $tang.\,\eta' = -\,cof.\,\eta = tang.\,(\eta + 90°.)$, on aura $\eta' - \eta = 90°.$, c'est-à-dire que les deux autres axes principaux font tant entre eux qu'avec le premier GA un angle droit.

56. C'est ainsi que nous venons de découvrir cette remarquable propriété, dont tous les corps, de quelque

que figure & de quelque nature qu'ils soient, sont doués. Chaque corps, sans exception, a toujours trois axes principaux, c'est-à-dire trois axes qui passent par le centre de gravité du corps, autour desquels le corps peut librement tourner, sans qu'on ait besoin de les soutenir; & ces trois axes, comme nous venons de le trouver, sont toujours perpendiculaires entre eux. Nous venons en même temps de donner la méthode comment ces axes principaux peuvent être trouvés, la figure & la nature du corps proposé étant connue. En supposant donc que les trois axes fixes GA, GC, GE, pris à volonté, soient eux-mêmes les axes principaux du corps proposé, à cause de η = ou à zéro, ou à 90°, & $D = o$, la propriété analytique de ces trois axes principaux demandera que les trois formules intégrales suivantes étendues par tout le corps s'évanouissent, sçavoir que

$$\int yz\,dM = D = o\,;\ \int xz\,DM = E = o\,;\ \int xy\,dM = F = o;$$

& réciproquement, toutes les fois que ces formules s'évanouissent, les axes orthogonaux GA, GC, GE, sont en même temps principaux.

57. Cependant, quoique nous n'ayons trouvé en général que trois axes principaux en chaque corps, il y a des cas où leur nombre devient même infini : il en est à peu près comme de l'ellipse en général qui, n'ayant que deux axes, en acquiert pourtant une infinité, dans le cas où elle devient un cercle, chaque diamètre pouvant être regardé comme son axe. De même, dans le cas présent, la droite GA étant un axe principal, lorsqu'il arrive dans un corps que $D = o$ & $B = C$, l'angle η reste indéterminé, d'où l'on conclut que tous les axes perpendiculaires à GA sont principaux; & lorsqu'il arrive, outre cela, que $A = B = C$, les deux angles ζ & η restant indéterminés, chaque droite pas-

ſant par le centre de gravité G, ſera un axe principal. Ce dernier cas a lieu dans les corps ſphériques, composés d'une matière homogène, où tous les diamètres ſont, ſans contredit, des axes principaux; & dans les corps ſphéroïdiques, ſans compter l'axe de la figure, tous les diamètres ſeront encore des axes principaux : d'où il eſt clair que tous les corps ont toujours, pour le moins, trois axes principaux, mais qu'il y a pourtant des cas, où le nombre des axes devient infini.

58. Lors donc qu'un corps quelconque aura, au commencement, reçu un mouvement de rotation autour d'un axe principal, ce mouvement ſe conſervera toujours avec la même rapidité, & l'axe de rotation même, ou demeurera en repos, ou en ſe mouvant reſtera toujours parallèle à ſoi-même, à moins que des forces étrangères ne l'en détournent. Or, ſi le mouvement de rotation ne ſe faiſoit pas autour d'un axe principal, il ne ſçauroit ſubſiſter par lui-même, & il en réſulteroit des forces qui, en agiſſant ſur le corps, en troubleroient le mouvement, & changeroient l'axe autour duquel la rotation avoit commencé; & s'il ſurvenoit encore des forces externes, le mouvement entier du corps pourroit devenir très-irrégulier : cependant, tous les changemens dont il eſt ſuſceptible, peuvent être exprimés par des formules analytiques. D'abord, on peut toujours ſuppoſer le centre de gravité en repos, & alors tous les changemens ſe réduiſent à deux choſes, l'une regarde la vîteſſe angulaire avec laquelle le corps tourne à chaque inſtant, & l'autre eſt la variation de l'axe même de rotation.

Fig. 3. 59. Pour réſoudre ce problême, établiſſons les trois directions fixes GA, GC, GE, deſorte qu'elles conviennent avec les axes principaux du corps. On pourroit objecter que, puiſque les axes principaux ne ſont pas fixes, & qu'ils s'écartent de leurs pre-

mières directions dès le premier inftant, la variation de l'axe de rotation n'y fçauroit être rapportée, & qu'on la devroit plutôt rapporter à des directions fixes : mais, à la méthode dont je me fervirai dans cette recherche, on s'appercevra aifément que cette hypothèfe n'empêche point que les axes principaux ne foient mobiles en-eux-mêmes. Au refte, l'analyfe qui fuit, diffipera tous les doutes auxquels cette hypothèfe paroît affujettie.

60. Qu'on confidère, comme ci-deffus, un élément du corps dM au point Z; & en gardant les mêmes dénominations (39), $GX = x$, $XY = y$, $YZ = z$, $GZ = v$, la nature du centre de gravité G nous fournira ces intégrales $\int x\,dM = o$; $\int y\,dM = o$; $\int z\,dM = o$; enfuite la propriété des axes principaux donnera (52), $\int yz\,dM = D = o$; $\int xz\,dM = E = o$; $\int xy\,dM = F = o$. Outre cela, fi nous introduifons les momens d'inertie principaux, c'eft-à-dire par rapport aux axes principaux du corps, & que nous fuppofions le moment d'inertie par rapport à l'axe $GA = Maa$, par rapott à l'axe $GC = Mbb$, & par rapport à l'axe $GE = Mcc$, à caufe de $Maa = \int (yy + zz)\ dM$, $Mbb = (xx + zz)\ dM$, $Mcc = \int (xx + yy)\ dM$, nous aurons encore les intégrales indiquées ci-deffus (49), par les lettres A, B, C; $\int xx\,dM = A = \frac{1}{2} M\,(bb + cc - aa)$; $\int yy\,dM = B = \frac{1}{2} M\,(aa + cc - bb)$; $\int zz\,dM = C = \frac{1}{2} M\,(aa + bb - cc)$.

61. Que le corps tourne à préfent autour de l'axe GJ dans le fens ACE avec la vîteffe angulaire $= \varepsilon$, & que la pofition de cet axe foit déterminée comme ci-deffus par les angles que l'axe de rotation fait avec les axes principaux $AGJ = \alpha$: $CGJ = \beta$: $EGJ = \gamma$.

de forte que $cos. \alpha^2 + cos. \beta^2 + cos. \gamma^2 = 1$. Or, le mouvement de l'élément du corps dM en Z étant décomposé selon des directions parallèles aux axes principaux, les trois vîtesses selon ces directions Za, Zc, Ze, seront exprimées ainsi (45) : la vîtesse suivant $Za = \varepsilon\,(z\,cos. \beta - y\,cos. \gamma) = u$; suivant $Zc = \varepsilon\,(x\,cos. \gamma - z\,cos. \alpha) = v$; suivant $Ze = \varepsilon\,(y\,cos. \alpha - x\,cos. \beta) = w$, vîtesses que j'indiquerai pour abréger par les lettres u, v, w : or, je supposerai maintenant cet axe de rotation GJ variable d'une manière quelconque, de même que la vîtesse angulaire ε.

62. Pour trouver les accroissemens qu'elles prendront dans l'élément du temps dt, il faut remarquer que non seulement nous devons avoir égard à la variabilité des coordonnées x, y, z, dont on trouve les différentielles au §. 46 exprimées ainsi, $dx = \varepsilon\,dt\,(z\,cos. \beta - y\,cos. \gamma) = u\,dt$; $dy = \varepsilon\,dt\,(x\,cos. \gamma - z\,cos. \alpha) = v\,dt$; $dz = (y\,cos. \alpha - x\,cos. \beta) = w\,dt$; mais que les quantités $\varepsilon, \alpha, \beta, \gamma$ croissent aussi de leurs différentielles, de sorte que nous obtiendrons les différentielles suivantes de nos trois vîtesses u, v, w, après avoir substitué pour u, v, w leurs valeurs indiquées au §. précédent.

$$du = z\,d.\,\varepsilon cos. \beta - y\,d.\,\varepsilon cos. \gamma + \varepsilon\varepsilon dt\,(y cos. \alpha cos. \beta + z cos. \alpha cos. \gamma - x\,sin. \alpha^2)$$

à cause de $cos. \beta^2 + cos. \gamma^2 = sin. \alpha^2$

$$dv = x\,d.\,\varepsilon cos. \gamma - z\,d.\,\varepsilon cos. \alpha + \varepsilon\varepsilon dt\,(z cos. \beta cos. \gamma + x cos. \beta cos. \alpha - y\,sin. \beta^2)$$

à cause de $cos. \alpha^2 + cos. \gamma^2 = sin. \beta^2$

$$dw = y\,d\,\varepsilon cos. \alpha - x\,d.\,\varepsilon cos. \beta + \varepsilon\varepsilon dt\,(x cos. \gamma cos. \alpha + y cos. \gamma cos. \beta - z\,sin. \gamma^2)$$

à cause de $cos. \alpha + cos\,\beta^2 = sin. \gamma^2$

63. Cherchons à présent les forces requises pour ce mouvement supposé. Pour imprimer à l'élément du corps dM en Z les trois accélérations trouvées selon les directions Za, Zc, Ze, il faut, de même que nous venons de le voir au §. 47, que cet élément dM soit sollicité selon les mêmes directions par ces forces élé-

mentaires, sçavoir, suivant Za, par la force $= \frac{dM}{2gdt}.du$; suivant Zc, par la force $= \frac{dM}{2gdt}.dv$; suivant Ze, par la force $= \frac{dM}{2gdt}.dw$. Il s'agit à présent d'assembler toutes ces forces élémentaires par toute l'étendue du corps, où il est clair qu'il faut uniquement avoir égard à la variabilité du point Z avec l'élément de matière dM qui s'y trouve, parce que nous ne nous embarrassons que des forces qui doivent agir dans l'instant présent, sans avoir égard à leur variabilité dans la suite. Nous n'aurons donc d'autres variables que les trois coordonnées x, y, z, & les lettres α, β, γ, δ, avec leurs différentielles, seront traitées comme constantes.

64. Or, puisque les formules trouvées pour les différentielles du, dv, dw, ne contiennent que les premières dimmensions de x, y, z, qui sont les seules variables que nous ayons à considérer, à cause de $\int x\,dM = o$; $\int y\,dM = o$; $\int z\,dM = o$; il est évident que les intégrales des forces élémentaires s'évanouissent, de sorte que $\int \frac{du\,dM}{2gdt} = o$: $\int \frac{dv\,dM}{2gdt} = o$: $\int \frac{dw\,dM}{2gdt} = o$; tout comme la condition que le centre de gravité est en repos, l'exige; car s'il y avoit des forces finies qui agissent sur le corps, elles lui imprimeroient un mouvement progressif, dont je fais ici abstraction. Mais, puisqu'il s'agit ici uniquement du mouvement de rotation, il faut moins avoir égard aux forces sollicitantes elles-mêmes, qui s'évanouissent, comme nous venons de voir, qu'à leurs momens. Il faut donc d'abord chercher les momens des forces élémentaires que nous venons de trouver par rapport aux trois axes principaux, pour en conclure ensuite leurs intégrales, qui nous fourniront les momens nécessaires de force pour engendrer le mouvement supposé, tant par rapport à l'accélération du mouvement de rotation qu'à la variation même de l'axe de rotation.

65. Or, les forces élémentaires trouvées (63); donnent, à l'égard des axes principaux, les momens ſuivans :

1. Le moment de forces par rapport à l'axe GA dans le ſens $CE = \frac{dM}{2gdt}(y\,dw - z\,dv)$.
2. Le moment de forces par rapport à l'axe GC dans le ſens $EA = \frac{dM}{2gdt}(z\,du - x\,dw)$.
3. Le moment de forces par rapport à l'axe GE dans le ſens $AC = \frac{dM}{2gdt}(x\,dv - y\,du)$.

Il faut à préſent ſubſtituer au lieu des différentielles du, dv, dw, leurs valeurs trouvées (62), & enſuite chercher les intégrales de ces formules, pour avoir les momens entiers de forces par rapport aux trois axes principaux du corps.

66. Faiſons ces opérations pour le premier moment élémentaire par rapport à l'axe principal GA, puiſqu'il ſera aiſé d'en conclure les deux autres par la ſeule analogie. Or, l'expreſſion $y\,dw - z\,dv$ ſe changera par la ſubſtitution en celle-ci $(yy+zz)\,d.\text{ȣ}\cos.\alpha - yz\,d.\text{ȣ}\cos.\beta - xz\,d.\text{ȣ}\cos.\gamma + \text{ȣȣ}dt.(xy\cos.\alpha\cos.\gamma - xz\cos.\alpha\cos.\beta + (yy-zz)\cos.\beta\cos.\gamma + yz(\sin.\beta^2 - \sin.\gamma^2))$, laquelle étant multipliée par $\frac{dM}{2gdt}$ & intégrée par la ſeule variabilité des trois coordonnées x, y, z, donnera, à cauſe de

$$\int xy\,dM = 0,\ \int xz\,dM = 0,\ \int yz\,dM = 0;$$

$$\int (yy+zz)\,dM = Maa,\ \int (yy-zz)\,dM = M(cc-bb)$$

(60), l'expreſſion ſuivante pour le moment de forces à l'égard de GA:

$$\frac{Maa\,d.\text{ȣ}\cos.\alpha}{2g\,dt} + \frac{M(cc-bb)\,\text{ȣȣ}\cos.\beta\cos.\gamma}{2g}.$$

67. Donc, pour produire dans le mouvement du corps les changemens élémentaires ſuppoſés, tant à l'égard de la vîteſſe angulaire que de la poſition de l'a-

xe de rotation, si nous supposons les momens de forces,

Par rapport à l'axe principal $GA = P$, dans le sens CE, nous aurons $P = Ma^2 \frac{d.u \cos.\alpha}{2gdt} + M(cc - bb)\frac{uu \cos.\beta \cos.\gamma}{2g}$;

Par rapport à l'axe principal $GC = Q$, dans le sens EA, nous aurons $Q = Mbb.\frac{d.u \cos.\beta}{2gdt} + M(aa - cc)\frac{uu \cos.\gamma \cos.\alpha}{2g}$;

Par rapport à l'axe principal $GE = R$, dans le sens AC, nous aurons $R = Mcc.\frac{d.u \cos.\gamma}{2gdt} + M(bb - aa)\frac{uu \cos.\alpha \cos.\beta}{2g}$;

& partant réciproquement, ces trois momens de forces produiront précisément les changemens supposés.

68. Il faut donc des forces pour produire ces changemens, à moins que les trois valeurs trouvées pour P, Q & R, ne s'évanouissent; ce qui pourroit bien arriver, quoique, ni la vîtesse angulaire u, ni les angles α, β, γ, ne demeurassent les mêmes. Mais, supposons que tant la vîtesse angulaire u que la position de l'axe de rotation doivent demeurer les mêmes; pour cet effet, il faudroit que le corps fût sollicité par les trois momens de forces suivans: $P = M(cc - bb)\frac{uu \cos.\beta \cos.\gamma}{2g}$; $Q = M(aa - cc)\frac{uu \cos.\gamma \cos.\alpha}{2g}$; $R = M(bb - aa)\frac{uu \cos.\alpha \cos.\beta}{2g}$, lesquels ne s'évanouissent pas tous à la fois, à moins que des trois cosinus, $\cos.\alpha$, $\cos.\beta$, $\cos.\gamma$, deux ne deviennent $= o$: or cela n'arrive pas, à moins qu'un des trois angles α, β, γ, ne s'évanouisse, c'est-à-dire à moins que l'axe de rotation ne soit un des principaux: ce qui est parfaitement d'accord avec ce que j'ai d'abord remarqué, qu'un corps solide ne sçauroit tourner librement autour d'un axe, à moins que ce ne fût un axe principal du corps; & cette même propriété m'a conduit à la connoissance des axes principaux.

69. Maintenant, nous sommes en état de résoudre le problême général, auquel cette recherche aboutit, & qu'on peut concevoir en ces termes :

Un corps solide étant sollicité par des forces quelconques, pendant qu'il tourne autour d'un axe de rotation donné avec une vîtesse angulaire donnée, déterminer les changemens élémentaires qui seront produits tant dans la vîtesse angulaire que dans la position de l'axe de rotation.

Il ne s'agit ici que d'un instant de temps, auquel je regarde la position des axes principaux comme connue, soient ces axes GA, GC, GE, par rapport auxquels les momens d'inertie du corps soient Maa, Mbb, Mcc, M marquant la masse du corps. Que le corps tourne à présent autour de l'axe GJ dans le sens ACE, avec une vîtesse angulaire $= \varepsilon$, & que la position de cet axe soit déterminée par les angles qu'il fait avec les axes principaux $AGJ = \alpha$; $CGJ = \beta$; $EGJ = \gamma$.

70. Pour les forces sollicitantes données, qu'on cherche leurs momens par rapport aux axes principaux du corps, qui soient pour l'axe $GA = P$ dans le sens CE ; pour l'axe $GC = Q$ dans le sens EA ; pour l'axe $GE = R$ dans le sens AC ; alors pendant l'élément du temps dt, la vîtesse angulaire ε prendra un accroissement $= d\varepsilon$, & l'axe de rotation changera de situation par rapport aux axes principaux du corps, en sorte que les angles α, β, γ, seront augmentés de leurs différentielles $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$; & ces changemens élémentaires seront déterminés par les trois équations suivantes :

$$d.\varepsilon\, cos.\,\alpha + \frac{cc - bb}{aa}\varepsilon\varepsilon\, dt\, cos.\,\beta\, cos.\,\gamma = \frac{2gPdt}{Maa} ; \quad d.\varepsilon\, cos.\,\beta + \frac{aa - cc}{bb}\varepsilon\varepsilon\, dt\, cos.\,\alpha\, cos.\,\gamma = \frac{2gQdt}{Mbb} ; \quad d.\varepsilon\, cos.\,\gamma + \frac{bb - aa}{cc}\varepsilon\varepsilon\, dt\, cos.\,\alpha\, cos.\,\beta = \frac{2gRdt}{Mcc} ;$$

& c'est là la solution du problême proposé.

71. Mais si l'on veut déterminer le mouvement de rotation tout entier d'un corps sollicité par des forces quelconques, il faut avoir égard aux changemens continuels des axes principaux du corps, & y rapporter à chaque instant l'axe de rotation & les momens des forces sollicitantes. Donc la position des axes principaux étant variable, il les faut rapporter à des directions fixes; &, puisque nous avons suivi jusqu'ici en partie la méthode reçue parmi les astronomes pour représenter la position mutuelle des axes, gardons encore cette méthode astronomique, pour chercher les changemens des axes principaux par rapport à des directions fixes. Considérons pour cet effet une sphère fixe décrite autour du centre de gravité du corps G: soit $PQSR$ un grand cercle fixe tel que le méridien & P un point fixe comme le pole; qu'après le temps $= t$ secondes, les axes principaux du corps répondent aux points A, C, E, d'où ayant tiré au point P les arcs de grands cercles AP, CP, EP, soient ces arcs $AP = l$; $CP = m$; $EP = n$; & les angles $QPA = \lambda$; $QPC = \mu$; $QPE = \nu$; de-là, on a d'abord $cos. l^2 + cos. m^2 + cos. n^2 = 1$: ensuite Fig. 5.

$$cos. (\mu - \lambda) = - \frac{cos. l \, cos. m}{sin. l \, sin. m}; \; cos. (\nu - \lambda) = - \frac{cos. l \, cos. n}{sin. l \, sin. n};$$

$$cos. (\mu - \nu) = - \frac{cos. m \, cos. n}{sin. m \, sin. n}.$$

72. Que le corps tourne à présent autour de l'axe GJ avec une vîtesse angulaire $= u$ dans le sens ACE; & pour la position du point J, soient les arcs de grands cercles $AJ = \alpha$; $CJ = \beta$; $EJ = \gamma$, & supposons, pour abréger nos formules, $u \, cos. \alpha = x$; $u \, cos. \beta = y$; $u \, cos. \gamma = z$; & nous aurons $uu = xx + yy + zz$. Cherchons ensuite les momens des forces sollicitantes par rapport aux axes principaux GA, GC, GE du corps, qui soient P, Q, R, dans le sens CE, EA, AC.

Cela posé, nos équations, pour déterminer les variables $x, y, z,$ seront :

$$dx + \frac{cc - bb}{aa} yzdt = \frac{2gPdt}{Maa};\ dy + \frac{aa - cc}{bb} xzdt = \frac{2gQdt}{Mbb};\ dz + \frac{bb - aa}{cc} xydt = \frac{2gRdt}{Mcc}$$

& ayant trouvé ces quantités $x, y, z,$ on aura les angles $\alpha, \beta, \gamma,$ par les formules $cos. \alpha = \frac{x}{u}$; $cos. \beta = \frac{y}{u}$; $cos. \gamma = \frac{z}{u}$.

73. Mais il faut aussi considérer qu'à cause du mouvement de rotation, les points $A, C, E,$ & partant les arcs l, m, n & les angles λ, μ, ν sont variables. Le point A tournera autour du point J avec la vîtesse u $sin. JA = u$ $sin. \alpha$ dans le sens CE, & partant, dans le temps dt, le point A décrira le petit arc $Aa = u\,dt\,sin.\alpha$ perpendiculaire à l'arc JA. Donc, tirant $a\alpha$ perpendiculaire à l'arc PA, nous aurons $dl = -A\alpha$ & $d\lambda = \frac{-a\alpha}{sin.\,l}$; mais à cause de l'angle JAa droit, on trouve $A\alpha = u\,dt\,sin.\alpha\,sin.\,JAP$ & $a\alpha = u\,dt\,sin.\alpha\,cos.JAP$; or le triangle CAP fournit $cos. CAP = \frac{cos.m}{sin.\,l}$, & le triangle EAP donne $cos.\ EAP = -\,sin.\,CAP = \frac{cos.n}{sin.\,l}$ ou $sin.\,CAP = \frac{-cos.n}{sin.\,l}$. De la même manière, les triangles CAJ & EAJ donnent $cos.\ CAJ = \frac{cos.\beta}{sin.\alpha}$; $cos.\ EAJ = sin.\,CAJ = \frac{cos.\gamma}{sin.\alpha}$: d'où, puisque l'angle $JAP = CAP + CAJ$, il s'ensuit que

$$sin.\,JAP = \frac{cos.\gamma\,cos.m - cos.\beta\,cos.n}{sin.\alpha\,sin.\,l} \text{ \& } cos.\,JAP = \frac{cos.\beta\,cos.m + cos.\gamma\,cos.n}{sin.\alpha\,sin.\,l}$$

74. Substituons ces valeurs, & nous aurons $dl =$

$$\frac{-u\,dt\,(cos.\gamma\,cos.m - cos.\beta\,cos.n)}{sin.\,l} \text{ \& } d\lambda = \frac{-u\,dt\,(cos.\beta\,cos.m + cos.\gamma\,cos.n)}{sin.\,l^2}$$

ou si nous mettons, au lieu de $u\,cos.\beta$, $u\,cos.\gamma$ leurs valeurs y, z, nous trouverons les ſix équations qu'il faut ajouter aux trois précédentes que nous avons données ci-deſſus (72), de ſorte que nous aurons en tout les neuf équations ſuivantes :

1°. $dx + \frac{cc - bb}{aa} yz\,dt = \frac{2gP\,dt}{Maa}$

2°. $dy + \frac{aa - cc}{bb} xz\,dt = \frac{2gQ\,dt}{Mbb}$

3°. $dz + \frac{bb - aa}{cc} xy\,dt = \frac{2gR\,dt}{Mcc}$

4°. $dl\,\text{ſin.}\,l = dt\,(y\,\text{coſ.}\,n - z\,\text{coſ.}\,m)$

5°. $dm\,\text{ſin.}\,m = dt\,(z\,\text{coſ.}\,l - x\,\text{coſ.}\,n)$

6°. $dn\,\text{ſin.}\,n = dt\,(x\,\text{coſ.}\,m - y\,\text{coſ.}\,l)$

7°. $d\lambda\,\text{ſin.}\,l^2 = -dt\,(y\,\text{coſ.}\,m + z\,\text{coſ.}\,n)$

8°. $d\mu\,\text{ſin.}\,m^2 = -dt\,(z\,\text{coſ.}\,n + x\,\text{coſ.}\,l)$

9°. $d\nu\,\text{ſin.}\,n^2 = -dt\,(x\,\text{coſ.}\,l + y\,\text{coſ.}\,n)$

Voilà donc les équations, dans leſquelles eſt renfermée la ſolution de tous les problêmes, où il s'agit du mouvement de rotation de quelque corps ſolide. Or, il faut remarquer qu'à cauſe de la relation indiquée entre les quantités l, m, n, & λ, μ, ν, il ſuffira de prendre trois des ſix dernières.

75. Il peut bien arriver que l'application de ces formules à un cas propoſé, devienne extrêmement difficile, & qu'elle ſurpaſſe même les forces de l'analyſe : mais c'eſt alors du côté analytique où eſt la difficulté, le méchanique étant heureuſement développé. Cependant, pour donner une idée de l'uſage de ces formules, je m'en vais réſoudre le cas où les trois momens de force P, Q, R, s'évanouiſſent : ce cas eſt fort remarquable en ſoi-même, puiſqu'il s'agit du problême ſuivant, dont perſonne n'a encore donné une ſolution ſuffiſante.

Un corps ſolide n'étant ſollicité par aucune force, s'il a reçu un mouvement de rotation quelconque autour d'un axe différent de ſes axes principaux, déterminer la continuation de ſon mouvement.

76. Ayant donc $P = o$; $Q = o$ $R = o$, nous au-

rons à résoudre les neuf équations suivantes :

$1^\circ.\ dx + \frac{cc - bb}{aa} yz\,dt = o;$

$2^\circ.\ dy + \frac{aa - cc}{bb} xz\,dt = o;$

$3^\circ.\ dz + \frac{bb - aa}{cc} xy\,dt = o;$

$4^\circ.\ dl\,\sin. l = dt\,(y\cos. n - z\cos. m);$

$5^\circ.\ dm\,\sin. m = dt\,(z\cos. l - x\cos. n);$

$6^\circ.\ dn\,\sin. n = dt\,(x\cos. m - y\cos. l);$

$7^\circ.\ d\lambda\,\sin. l^2 = -dt(y\cos. m + z\cos. n);$

$8^\circ.\ d\mu\,\sin. m^2 = -dt(z\cos. n + x\cos. l);$

$9^\circ.\ d\nu\,\sin. n^2 = -dt(x\cos. l + y\cos. m).$

Des trois premières, nous tirons d'abord $\frac{aax\,dx}{bb - cc} = \frac{bby\,dy}{cc - aa} = \frac{ccz\,dz}{aa - bb} = xyz\,dt$; donc supposant $xyz\,dt = du$, & pour abréger, $\frac{bb - cc}{aa} = A$; $\frac{cc - aa}{bb} = B$; $\frac{aa - bb}{cc} = C$, nous trouverons, en intégrant $xx = 2Au + \Gamma$; $yy = 2Bu + \Delta$; $zz = 2Cu + \Theta$; & de-là $dt = \frac{du}{\sqrt{(2Au + \Gamma)(2Bu + \Delta)(2Cu + \Theta)}}$.

77. Par rapport aux lettres A, B, C, il faut remarquer que $Aaa + Bbb + Ccc = o$ & $Aa^4 + Bb^4 + Cc^4 = o$: de-là, il est évident que $aaxx + bbyy + cczz$ sera égal à une quantité constante $\Gamma\,aa + \Delta\,bb + \Theta\,cc$. Or, cette expression se réduit à celle-ci $\varepsilon\varepsilon\,(aa\cos.\alpha^2 + bb\cos.\,\mathfrak{e}^2 + cc\cos.\gamma^2)$, où la formule $aa\cos.\alpha^2 + bb\cos.\,\mathfrak{e}^2 + cc\cos.\gamma^2$ étant multipliée par la masse du corps M, exprime le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe de rotation GJ autour duquel le corps tourne à présent : donc, supposant ce moment d'inertie $= Mrr$, la quantité $Mrr\varepsilon\varepsilon$, qui exprime ce qu'on nomme la force vive du corps, demeurera invariable, ou bien le corps conservera toujours la même force vive. Puisque dans le mouvement progressif, s'il n'y a point de force sollicitante, le corps conserve toujours la même vîtesse, il s'en suit, quelque mouve-

ment qu'on imprime à un corps, qu'il conſervera toujours la même force vive.

78. La dernière équation différentielle trouvée (76), ſert à déterminer pour tout temps t la variable u; & de-là, on définira les quantités $x = \sqrt{(2Au + \Gamma)}$; $y = \sqrt{(2Bu + \Delta)}$; $z = \sqrt{(2Cu + \Theta)}$: d'où la vîteſſe angulaire dont le corps tourne à préſent, ſera $\vartheta = \sqrt{(2\ (A + B + C) u + \Gamma + \Delta + \Theta)}$. Or, pour la poſition de l'axe de rotation GJ à l'égard des axes principaux du corps, laquelle eſt déterminée par les angles α, β, γ, on aura $\mathit{cof}.\ \alpha = \frac{x}{\vartheta}$; $\mathit{cof}.\ \beta = \frac{y}{\vartheta}$; $\mathit{cof}.\ \gamma = \frac{z}{\vartheta}$: mais nous ne ſçavons pas encore la poſition des axes principaux du corps, pour l'inſtant préſent qu'il faut chercher par la réſolution des ſix autres équations, les trois premières étant déjà parfaitement réſolues.

79. Pour faciliter cette recherche, il eſt bon d'obſerver que les trois premières équations y peuvent beaucoup contribuer; car ſi nous multiplions la première par $aa\ \mathit{cof}.\ l$; la ſeconde par $bb\ \mathit{cof}.\ m$ & la troiſième par $cc\ \mathit{cof}.\ n$, nous obtiendrons cette ſomme: $aa\,dx\,\mathit{cof}.\ l + bb\,dy\,\mathit{cof}.\ m + cc\,dz\,\mathit{cof}.\ n + cc\,yz\,dt\,\mathit{cof}.\ l - cc\,xz\,dt\,\mathit{cof}.\ m - bb\,yz\,dt\,\mathit{cof}.\ l + bb\,xy\,dt\,\mathit{cof}.\ n + aa\,xz\,dt\,\mathit{cof}.\ m - aa\,xy\,dt\,\mathit{cof}.\ n = o$, laquelle, par les équations 4, 5 & 6, ſe change en cette forme: $o = aa\,dx\,\mathit{cof}.\ l + bb\,dy\,\mathit{cof}.\ m + cc\,dz\,\mathit{cof}.\ n - aa\,x\,dl\,\mathit{ſin}.\ l - bb\,y\,dm\,\mathit{ſin}.\ m - cc\,z\,dn\,\mathit{ſin}.\ n$, qui étant intégrable, donne $a\,dx\,\mathit{cof}.\ l + bb\,y\,\mathit{cof}.\ m + cc\,z\,\mathit{cof}.\ n = \mathit{conſt} = \Lambda$; & nous avions déjà $\mathit{cof}.\ l^2 + \mathit{cof}.\ m^2 + \mathit{cof}.\ n^2 = 1$: donc, ſi nous avions encore une ſeule équation intégrale entre les arcs l, m & n, nous les pourrions déterminer chacun à part. Les équations 4, 5, 6, fourniſſent cette équation différentielle aſſez ſimple:

$$x\,dl\,\mathit{ſin}.\ l + y\,dm\,\mathit{ſin}.\ m + z\,dn\,\mathit{ſin}.\ n = o.$$

80. Au lieu des arcs l, m, n, introduiſons une

nouvelle variable v, en supposant $x \cos. l + y \cos. m + z \cos. n = v$; & à cause de la propriété remarquée; nous aurons $dv = dx \cos. l + dy \cos. m + dz \cos. n$ ou $\frac{dv}{du} = \frac{A \cos. l}{x} + \frac{B \cos. m}{y} + \frac{C \cos. n}{z}$; & maintenant tout revient à déterminer v par u. Pour cet effet, il faut chercher les valeurs de $\cos. l$, $\cos. m$, $\cos. n$ de ces trois équations : $\cos. l^2 + \cos. m^2 + \cos. n^2 = 1$; $aax \cos. l + bby \cos. m + ccz \cos. n = \Lambda$; $x \cos. l + y \cos. m + z \cos. n = v$, dont la résolution mène enfin à cette formule irrationelle;

$$\sqrt{\left(AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy - \Lambda\Lambda(xx + yy + zz) + 2\Lambda v\,(aaxx + bbyy + cczz) - vv\,(a^4xx + b^4yy + c^4zz)\right)};$$

81. Mettons, pour abréger, le signe $\sqrt{}\ (\cdot\cdot)$ pour cette formule, & l'on trouvera les valeurs suivantes:

$$\cos. l = \frac{\Lambda x\,(Cccyy - Bbbzz) + bbccxv\,(Bzz - Cyy) + Aaayz\sqrt{(\cdot\cdot)}}{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy};$$

$$\cos. m = \frac{\Lambda y\,(Aaazz - Cccxx) + aaccyv\,(Cxx - Azz) + Bbbxz\sqrt{(\cdot\cdot)}}{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy}$$

$$\cos. n = \frac{\Lambda z\,(Bbbxx - Aaayy) + aabbzv\,(Ayy - Bxx) + Cccxy\sqrt{(\cdot\cdot)}}{AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy}$$

& si nous substituons ces valeurs dans l'équation différentielle $\frac{dv}{du} = \frac{A \cos. l}{x} + \frac{B \cos. m}{y} + \frac{C \cos. n}{z}$, nous parviendrons cette équation à intégrer $\frac{dv}{du}\,(AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy)$

$$= ABC\Lambda\,(aaxx + bbyy + cczz) - ABCv\,(a^4xx + b^4yy + c^4zz) + \frac{AAaayyzz + BBbbxxzz + CCccxxyy}{xyz}\sqrt{}\ (\cdot\cdot).$$

82. Maintenant, nous n'avons qu'à substituer au lieu de x, y, z, leurs valeurs assignées ci-dessus, qui donnent

$$AAa^4yyzz + BBb^4xxzz + CCc^4xxyy = AAa^4\Delta\Theta + BBb^4\Gamma\Theta + CCc^4\Gamma\Delta - 2ABCu\,(\Gamma a^4 + \Delta b^4 + \Theta c^4),$$

$$AAaayyzz + BBbbxxzz + CCccxxyy = AAaa\Delta\Theta + BBbb\Gamma\Delta + CCcc\Gamma\Theta - 2ABCu\,(\Gamma aa + \Delta bb + \Theta cc).$$

$$xx + yy + zz = 2(A + B + C)u + \Gamma + \Delta + \Theta;$$
$$aaxx + bbyy + cczz = \Gamma aa + \Delta bb + \Theta cc;$$
$$a^4xx + b^4yy + c^4zz = \Gamma a^4 + \Delta b^4 + \Theta c^4.$$

Posons ensuite pour abréger $\Gamma + \Delta + \Theta = E$; $\Gamma aa + \Theta bb + \Theta cc = F$; $\Gamma a^4 + \Delta b^4 + \Theta c^4 = G$; $AAaa\Delta\Theta + BBbb\Gamma\Theta + CCcc\Gamma\Delta = H$; $AAa^4\Delta\Theta + BBb^4\Gamma\Theta + CCc^4\Gamma\Delta = K$; d'où il s'en suit $K = EG - FF$.

83. En introduisant ces valeurs, à cause de $A + B + C = - ABC$, notre formule irrationelle sera $\surd(\cdot\cdot) = \surd(K - 2ABCGu + 2\Lambda\Lambda ABCu - \Lambda\Lambda E + 2\Lambda Fv - Gvv)$; & notre équation différentielle deviendra $\frac{dv}{du}(K - 2ABCGu) = ABC\Lambda F - ABCGv + \frac{H - 2ABCFu}{xyz}\surd(\cdot\cdot)$ qui se réduit à cette forme

$$\frac{Kdv - ABCF\Lambda du - 2ABCGudv + ABCGvdu}{K - \Lambda\Lambda E + 2ABC(\Lambda\Lambda - G)u + 2\Lambda Fv - Gvv)} = \frac{Hdu - 2ABCFudu}{\surd(2Au + \Gamma)(2Bu + \Delta)(2Cu + \Theta)}$$

dont il s'agit de trouver l'intégrale.

84. Comme le dernier membre de cette équation ne renferme que la seule variable u, il est évident que, si l'on pouvoit trouver une fonction de u, par laquelle le premier membre étant multiplié devînt intégrable, on auroit la résolution complette de cette équation. M. Euler a exposé une méthode pour trouver de tels facteurs; & si l'on en fait l'application à cette équation proposée, on découvre ce facteur cherché $= \frac{1}{K - 2ABCGu}$; ou bien, si nous divisons notre équation par $K - 2ABCGu$, l'un & l'autre membre deviendra intégrable ou constructible par des quadratures. Multiplions donc par $\frac{\surd G}{K - 2ABCGu}$ & mettons le dernier membre $\frac{(H - 2ABCFu\ du\surd G}{(K - 2ABCGu)\surd(2Au + \Gamma)(2Bu + \Delta)(2Cu + \Theta)} = dU$, de sorte que U puisse être regardé comme une fonction connue de la variable u, dont nous avons déjà le rapport au temps t.

85. Pour le premier membre, en le multipliant par $\frac{G}{(K-2ABCGu)\sqrt{G}}$, la formule radicale pourra être représentée ainsi $\sqrt{((G-\Lambda\Lambda)(K-2ABCGu)-(Gv-\Lambda F)^2)}$ à cause de $K=EG-FF$; & partant, le premier membre sera $\frac{(K-2ABCGu)Gdv+ABCG(Gv-\Lambda F)du}{(K-2ABCGu)\sqrt{((G-\Lambda\Lambda)(K-2ABCGu)-(Gv-\Lambda F)^2)}}$ qui supposant $K-2ABCGu=pp$; $Gv-\Lambda F=q$ & $G-\Lambda\Lambda=ff$ prendra cette forme $\frac{pdq-qdp}{p\sqrt{(ffpp-qq)}}$, qui, supposant $q=ps$, se change en celle-ci $\frac{ds}{\sqrt{(ff-ss)}}$, dont l'intégrale est $Arc.\,fin.\,\frac{s}{f}=Arc.\,fin\,\frac{q}{fp}$; & partant, l'intégrale du premier membre sera $Arc.\,fin.\,\frac{Gv-\Lambda F}{f\sqrt{(K-2ABCGu)}}=$ $Arc.\,fin.\,\frac{Gv-\Lambda F}{\sqrt{(G-\Lambda\Lambda)(K-2ABCGu)}}$.

86. Cette quantité est donc égale à la formule intégrale $U=\int\frac{(H-2ABCFu)du\sqrt{G}}{(K-2ABCGu)\sqrt{(2Au+\Gamma)(2Bu+\Delta)(2Cu+\Theta)}}$ & considérant U comme un angle, notre équation intégrale sera $\frac{Gv-\Lambda F}{\sqrt{(G-\Lambda\Lambda)(K-2ABCGu)}}=fin.\,U$: d'où nous tirons $\frac{\sqrt{((G-\Lambda\Lambda)(K-2ABCGu)-(Gv-\Lambda F)^2)}}{\sqrt{(G-\Lambda\Lambda)(K-2ABCGu)}}=cof.\,U$: de sorte que notre formule irrationelle sera

$$V(\cdot\cdot)=\frac{\sqrt{(G-\Lambda\Lambda)(K-2ABCGu)}}{\sqrt{G}}\,cof.\,U.$$

87. Substituons ces valeurs pour v, & la formule irrationelle, dans les expressions assignées ci-dessus pour

pour les cosinus des arcs l, m & n (81); & après avoir fait les réductions nécessaires, nous trouverons

$$cos. l = \frac{Aaax}{G} + \frac{bbccx(B\Theta - C\Delta)\sqrt{(G-AA)}}{G\sqrt{(K-2ABCGu)}} sin. U$$
$$+ \frac{Aaayz\sqrt{(G-AA)}}{\sqrt{G(K-2ABCGu)}} cos. U$$

$$cos. m = \frac{Abby}{G} + \frac{aaccy(C\Gamma - A\Theta)\sqrt{(G-AA)}}{G\sqrt{(K-2ABCGu)}} sin. U$$
$$+ \frac{Bbbxz\sqrt{(G-AA)}}{\sqrt{G(K-2ABCGu)}} cos. U$$

$$cos. n = \frac{Accz}{G} + \frac{aabbz(A\Delta - B\Gamma)\sqrt{(G-AA)}}{\sqrt{G(K-2ABCGu)}} sin. U$$
$$+ \frac{Cccxy\sqrt{(G-AA)}}{\sqrt{G(K-2ABCGu)}} cos. U$$

Donc, puisqu'on peut déterminer pour un temps écoulé quelconque t la quantité u, & tirer de celle-ci les variables x, y, z avec la formule intégrale U, on connoîtra aussi pour le même temps les arcs l, m, n, de sorte que le problême est résolu jusqu'à la détermination des angles λ, μ, ν, dont il suffit de chercher un seul.

88. Mais, puisque nous avons trouvé tant les quantités x, y, z que les arcs l, m, n, exprimés par la seule quantité u, & que nous avons $dt = \frac{du}{xyz}$, la détermination de l'angle $QPA = \lambda$ n'aura aucune difficulté par le moyen de l'équation différentielle $d\lambda = -\frac{dt(y\,cos. m + z\,cos. n)}{sin. l^2}$. Cependant, puisqu'il n'y a point de raison de chercher plutôt cet angle λ que les deux autres μ & ν, il semble qu'on fera mieux de chercher l'angle QPJ que fait l'arc PJ avec le cercle fixe PQS. Supposons donc l'angle $QPJ = \varphi$; & puisque nous avons déjà trouvé $sin. JAP = \frac{cos. \gamma\, cos. m - cos. \mathfrak{G}\, cos. n}{sin. \alpha\, sin. l}$ FIG. 5.

& $\cos. JAP = \frac{\cos.\beta \cos.m + \cos.\gamma \cos.n}{\sin.\alpha \sin.l}$ (73), nous aurons

$\cos. JP = \cos.\alpha \cos.l + \cos.\beta \cos.m + \cos.\gamma \cos.n$ $= \frac{\nu}{u}$, à cause de $\nu = x\cos.l + y\cos.m + z\cos.n$. Mais nous venons de trouver $\nu = \frac{AF}{G} + \frac{\surd (G - AA)(K - 2ABCGu)}{G} \sin.U$ & pour u nous avons $uu = E - 2ABCu$.

89. Que dans le temps infiniment petit dt le pole de rotation J soit transporté en i, & tirant l'arc Ai avec la perpendiculaire Jp, nous aurons $ip = d\alpha$; & puisque le pole J change également par rapport aux axes principaux, soit que nous les regardions comme fixes, ou que nous tenions compte de leur mouvement, considérons l'angle CAJ pour lequel nous avons $\cos. CAJ = \frac{\cos.\beta}{\sin.\alpha}$ & $\sin. CAJ = \frac{\cos.\gamma}{\sin.\alpha}$; de-là nous tirerons $d. CAJ = JAi = \frac{-d\alpha \cos.\alpha \cos.\gamma - d\gamma \sin.\alpha \sin.\gamma}{\sin.\alpha \cos.\beta}$; & partant $Jp = \frac{-d\alpha \cos.\alpha \cos.\gamma - d\gamma \sin.\alpha \sin.\gamma}{\cos.\beta}$. Prolongeons l'arc iJ en V, & nous aurons $tang. AiJ = tang. AJV = \frac{-\cos.\alpha \cos.\gamma}{\cos.\beta} - \frac{d\mu \sin.\alpha \sin.\gamma}{d\alpha \cos.\beta}$ & $Ji. = \frac{d\alpha}{\cos. AJV}$ $= \surd(d\alpha^2 \sin.\alpha^2 + d\beta^2 \sin.\beta^2 + d\gamma^2 \sin.\gamma^2)$, qui se réduit à cette forme $Ji = \frac{1}{u}\surd(dx^2 + dy^2 + dz^2 - du^2)$. Maintenant, pour trouver l'angle PJV, nous avons pour l'angle AJP, $\sin. AJP = \frac{\sin. JAP . \sin. l}{\sin. PJ} = \frac{\cos.\gamma \cos.m - \cos.\beta \cos.n}{\sin.\alpha \sin. PJ}$ & $\cos. AJP = \frac{\cos.l - \cos.\alpha \cos.JP}{\sin.\alpha \sin.PJ} = \frac{\sin.\alpha^2 \cos.l - \cos.\alpha \cos.\beta \cos.m - \cos.\alpha \cos.\gamma \cos.n}{\sin.\alpha \sin.PJ}$ & par conséquent, $\sin. PJV =$

$$\frac{(\cos.\gamma \cos.m - \cos.\beta \cos.n)\cos.AJV - (\sin.\alpha^2 \cos.l - \cos.\alpha \cos.\beta \cos.m - \cos.\alpha \cos.\gamma \cos.n)\sin AJV}{\sin.\alpha \sin.PJ}$$

90. Or $Ji.\ \textit{sin}.\ PJV$ donne le petit arc Jq perpendiculaire à l'arc Pi, lequel étant aussi $= d\phi\ \textit{sin}.\ PJ$; nous aurons $d\phi\ \textit{sin}.\ PJ = Ji\ \textit{sin}.\ PJV = \frac{d\alpha\ \textit{sin}.\ PJV}{\textit{cos}.\ AJV}$ & partant, $d\phi = \frac{d\alpha}{\textit{sin}.\ \alpha\ \textit{sin}.\ PJ^2}$ ($\textit{cos}.\ \gamma\ \textit{cos}.\ m - \textit{cos}.\ \beta\ \textit{cos}.\ n -$ $(\textit{sin}.\ \alpha^2\ \textit{cos}.\ l - \textit{cos}.\ \alpha\ \textit{cos}.\ \beta\ \textit{cos}.\ m - \textit{cos}.\ \alpha\ \textit{cos}.\ \gamma\ \textit{cos}.\ n)\ \textit{tang}.\ AJV$). Substituons ici la valeur de $\textit{tang}.\ AJV = -\frac{d\alpha\ \textit{cos}.\ \alpha\ \textit{cos}.\ \gamma - d\gamma\ \textit{sin}.\ \alpha\ \textit{sin}.\ \gamma}{d\alpha\ \textit{cos}.\ \beta}$ & parce que $d\alpha\ \textit{sin}.\ \alpha\ \textit{cos}.\ \beta + d\beta\ \textit{sin}.\ \beta\ \textit{cos}.\ \beta + d\gamma\ \textit{sin}.\ \gamma\ \textit{cos}.\ \gamma = 0$, nous trouverons $d\phi\ \textit{sin}.\ PJ^2 = (d\gamma\ \textit{cos}.\ \beta\ \textit{sin}.\ \gamma - d\beta\ \textit{sin}.\ \beta\ \textit{cos}.\ \gamma)$ $\textit{cos}.\ l + (d\alpha\ \textit{sin}.\ \alpha\ \textit{cos}.\ \gamma - d\gamma\ \textit{cos}.\ \alpha\ \textit{sin}.\ \gamma)\ \textit{cos}.\ m + (d\beta\ \textit{cos}.\ \alpha\ \textit{sin}.\ \beta$ $- d\alpha\ \textit{sin}.\ \alpha\ \textit{cos}.\ \beta)\ \textit{cos}.\ n$. Or, puisque $\textit{cos}.\ \alpha = \frac{x}{u}$; $\textit{cos}.\ \beta = \frac{y}{u}$; $\textit{cos}.\ \gamma = \frac{z}{u}$ on aura $d\beta\ \textit{sin}.\ \beta = \frac{y\,du}{uu} - \frac{dy}{u}$ & $d\gamma\ \textit{sin}.\ \gamma = \frac{z\,du}{uu}$ $- \frac{dz}{u}$; donc $d\gamma\ \textit{cos}.\ \beta\ \textit{sin}.\ \gamma - d\beta\ \textit{sin}.\ \beta\ \textit{cos}.\ \gamma = \frac{z\,dy - y\,dz}{uu} =$ $\frac{du\ (Bzz - Cyy)}{uuyz} = \frac{x\,dt\,(Bzz - Cyy)}{uu}$; & partant, à cause de $Bzz - Cyy = B\Theta - C\Delta$ (76), nous aurons $d\phi$ $= \frac{dt\,(x\,(B\Theta - C\Delta)\,\textit{cos}.\ l + y\,(C\Gamma - A\Theta)\,\textit{cos}.\ m + z\,(A\Delta - B\Gamma)\,\textit{cos}.\ n)}{E - 2ABCu - vv}$.

91. Substituons enfin pour $\textit{cos}.\ l$, $\textit{cos}.\ m$ & $\textit{cos}.\ n$, leurs valeurs trouvées; & puisque

$$aaxx\,(B\Theta - C\Delta) + bbyy\,(C\Gamma - A\Theta) + cczz\,(A\Delta - B\Gamma) = -H + 2ABCFu;$$

$$bbccxx\,(B\Theta - C\Delta)^2 + aaccyy\,(C\Gamma - A\Theta)^2 + aabbzz\,(A\Delta - B\Gamma)^2 =$$

$$(aaxx + bbyy + cczz)\,(A^2a^2y^2z^2 + B^2b^2x^2z^2 + C^2c^2x^2y^2) -$$

$$xxyyzz\,(Aaa + Bbb + Ccc)^2 = F\,(H - 2ABCGFu);$$

$$Aaa\,(B\Theta - C\Delta) + Bbb\,(C\Gamma - A\Theta) + Ccc\,(A\Delta - B\Gamma) = ABCF;$$

de-là nous concluons $\frac{d\phi\,(E - 2ABCu - vv)}{dt} = \frac{A\,(H - 2ABCFu)}{G}$

$$+ \frac{F(H - 2ABCFu)\sqrt{(G - AA)}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}}\ \textit{sin}.\ U + \frac{ABCFxyz\sqrt{(G - AA)}}{\sqrt{G\,(K - 2ABCGu)}}\ \textit{cos}.\ U.$$

où il faut remarquer qu'il y a $GG(E - 2ABCu - vv) = (G - AA)FF + G(K - 2ABCGu) - (G - AA)(K - 2ABCGu)\,\sin. U^2 - 2AF\sqrt{(G - AA)(K - 2ABCGu)}.\sin. U.$

92. Puisque $dU = \frac{dt\,(H - 2ABCFu)\sqrt{G}}{K - 2ABCGu}$ (76, 84)

& $du = xyz\,dt$, notre différentielle $d\phi$ sera égale à une fraction, dont le numérateur est

$$-AdU(K - 2ABCGu)\sqrt{G} + FdU\sqrt{G}\sqrt{(G - AA)(K - 2ABCGu)}.\sin. U$$
$$+ \frac{ABCFGdu\sqrt{G(G - AA)}}{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}.\cos. U$$

& le dénominateur

$$(G - AA)FF - G(K - 2ABCGu) - 2AF\sqrt{(G - AA)(K - 2ABCGu)}.\sin. U$$
$$- (G - AA)(K - 2ABCGu).\sin. U^2.$$

Pour abréger cette formule, supposons $\sqrt{(K - 2ABCGu)} = s$ & $\sqrt{(G - AA)} = h$, desorte que $ABCGdu = -sds$, & le numérateur sera

$$- AssdU\sqrt{G} + FhsdU\sqrt{G}.\sin. U - Fhds\sqrt{G}.\cos. U$$

& le dénominateur

$$hhFF + Gss - 2AFhs\sin. U - hhss\sin. U^2$$

93. Ayant introduit ces valeurs abrégées, nous aurons à intégrer cette formule

$d\phi = \frac{- AssdU + FhsdU\sin. U - Fhds\cos. U}{FFhh + Gss - 2AFhs\sin. U - hhss\sin. U^2}\sqrt{G}$, laquelle, à cause de $hh = G - AA$, se réduit à

$d\phi = \frac{- AssdU + FhsdU\sin. U - Fhds\cos. U}{(Fh - As\sin. U)^2 + Gss\cos. U^2}\sqrt{G}$, dont l'intégrale est évidemment

$\phi = Arc.\,tang.\,\frac{Fh - As\sin. U}{s\cos. U.\sqrt{G}}$ ou bien $tang.\,\phi = \frac{Fh - As\sin. U}{s\cos. U.\sqrt{G}}$.

Cette formule, en restituant pour s & h les valeurs supposées, se réduit à celle-ci

$$tang.\,\phi = \frac{F\sqrt{(G - AA)} - A\sin. U\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\cos. U\sqrt{G(K - 2ABCGu)}}.$$

94. On peut donc trouver cet angle $QPJ = \phi$ indépendamment de la quantité v, où je n'ai pas introduit une nouvelle conſtante, puiſque le cercle fixe PQS peut être établi à volonté. Donc, ſuppoſant cet angle ϕ connu, puiſque nous venons de trouver $u\,ſin.\,PJ = \sqrt{(E - 2ABCu - vv)}$, cette quantité eſt égale à $\frac{\sqrt{((Fh - \Lambda s\,ſin.\,U)^2 + Gss\,coſ.\,U^2)}}{G}$, & partant à $\frac{s\,coſ.\,U}{coſ.\,\phi\sqrt{G}}$;

deſorte que $u\,ſin.\,PJ = \frac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G}} \cdot \frac{coſ.\,U}{coſ.\,\phi}$; $ſin.\,PJ = \frac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G(E - 2ABCu)}} \cdot \frac{coſ.\,U}{coſ.\,\phi}$ & $coſ.\,PJ = \frac{\Lambda F + \sqrt{(G - \Lambda\Lambda)}\,(K - 2ADCGu).\,ſin.\,U}{G\sqrt{(E - ABCu)}}$.

Or, ayant trouvé l'angle $QPJ = \phi$, il en faut retrancher l'angle APJ pour avoir $QPA = \lambda$; pour cet effet, nous avons $ſin.\,APJ = \frac{z\,coſ.\,m - y\,coſ.\,n}{u\,ſin.\,PJ.\,ſin.\,l}$ & $coſ.\,APJ = \frac{x\,ſin.\,l^2 - y\,coſ.\,l\,coſ.\,m - z\,coſ.\,l\,coſ.\,n}{u\,ſin.\,PJ.\,ſin.\,l}$.

Voici donc la ſolution de ce problême :

Un corps ſolide, d'une figure quelconque, n'étant ſollicité par aucune force, ſi on lui imprime un mouvement quelconque, déterminer la continuation de ce mouvement.

95. Si le corps a un mouvement progreſſif, qui demeure perpétuellement le même, qu'on l'en dépouille, enſorte que ſon centre de gravité demeure en repos ; & la queſtion revient à déterminer le mouvement de rotation, ou déterminer pour chaque temps écoulé, tant l'axe de rotation que la vîteſſe angulaire. Pour cet effet, il faut conſidérer les trois axes principaux du corps, qui ſoient (*fig.* 3) GA, GC, GE, & par rapport à eux les momens d'inertie Maa, Mbb, Mcc. Rapportons le corps à une ſphère fixe décrite autour du centre de gravité du corps G (*fig.* 5), & qu'après le

temps $= t$ secondes, les axes principaux du corps répondent aux points A, C, E, dans la surface de la sphère & l'axe de rotation au point J, autour duquel le corps tourne dans le sens ACE, avec la vîtesse angulaire $= u$ où u marque l'angle décrit dans une seconde, le sinus total ou le rayon de la sphère étant $= 1$.

96. Posons pour ce temps de t secondes, écoulé depuis le commencement, $u\,cos.\,AJ = x$; $u\,cos.\,CJ = y$; $u\,cos.\,EJ = z$; & soit pour abréger, $\frac{bb-cc}{aa} = A$; $\frac{cc-bb}{bb} = B$; $\frac{aa-bb}{cc} = C$.

Cela posé, s'il fut au commencement $x = \sqrt{\Gamma}$, $y = \sqrt{\Delta}$; $z = \sqrt{\Theta}$, & partant, la vîtesse angulaire $\sqrt{(\Gamma + \Delta + \Theta)}$, il faut intégrer cette équation $dt = \frac{du}{\sqrt{(\Gamma + 2Au)(\Delta + 2Bu)(\Theta + 2Cu)}}$, ensorte que faisant $t = o$, il devienne $u = o$: de-là on aura pour le temps indéfini t la valeur de u; & ensuite $x = \sqrt{(\Gamma + 2Au)}$; $y = \sqrt{(\Delta + 2Bu)}$; $z = \sqrt{(\Theta + 2Cu)}$; d'où l'on tirera la vîtesse angulaire $u = \sqrt{(\Gamma + \Delta + \Theta - 2ABCu)}$; puisque $A + B + C = -ABC$. Après cela, on connoîtra aisément les arcs JA, JC, JE des formules $cos.\,JA = \frac{x}{u}$; $cos.\,JC = \frac{y}{u}$; $cos.\,JE = \frac{z}{u}$, qui déterminent la situation de l'axe de rotation GJ par rapport aux axes principaux du corps.

97. Ensuite, pour trouver la position des axes principaux à l'égard de la sphère fixe, où je prends à plaisir un point fixe P avec un cercle fixe PQS, posons les arcs $PA = l$; $PC = m$; $PE = n$; & soit pour abréger

$$\Gamma + \Delta + \Theta = E;\ \Gamma aa + \Delta bb + \Theta cc = F;\ \Gamma a^4 + \Delta b^4 + \Theta c^4 = G;$$

$$AAaa\Delta\Theta + BBbb\Gamma\Theta + CCcc\Gamma\Delta = H;\ AAa^4\Delta\Theta + BBb^4\Gamma\Theta + CCc^4\Gamma\Delta = K,$$

Qu'on cherche maintenant un arc ou angle U, desorte que U soit $= \int \frac{(H - 2ABCFu)\,du\sqrt{G}}{(K - 2ABCGu)\sqrt{(\Gamma + 2Au)(\Delta + 2Bu)(\Theta + 2Cu)}}$.

qui renferme une constante arbitraire, outre laquelle on en introduira encore une autre A, & on aura

$$cos.\, l = \frac{Aaax}{G} + \frac{bbccx\,(B\Theta - C\Delta)\,\sqrt{(G - AA)}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}} .\, sin.\, U + \frac{Aayz\,\sqrt{(G - AA)}}{\sqrt{G(K - 2ABCGu)}} .\, cos.\, U$$

$$cos.\, m = \frac{Abby}{G} + \frac{aaccy\,(C\Gamma - A\Theta)\,\sqrt{(G - AA)}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}} .\, sin.\, U + \frac{Bbbxz\,\sqrt{(G - AA)}}{\sqrt{G(K - 2ABCGu)}} .\, cos.\, U$$

$$cos.\, n = \frac{Accz}{G} + \frac{aabbz\,(A\Delta - B\Gamma)\,\sqrt{(G - AA)}}{G\sqrt{(K - 2ABCGu)}} .\, sin.\, U + \frac{Cccxy\,\sqrt{(G - AA)}}{\sqrt{G(K - 2ABCGu)}} .\, cos.\, U.$$

98. Pour ces deux constantes, dont l'une est A & l'autre renfermée dans l'arc U, il les faut prendre ensorte que pour le commencement, où $t = o$ & $u = o$, les arcs l, m, n deviennent aussi grands qu'ils ont été précisément alors; car quoiqu'il y en ait trois, il suffit d'en avoir déterminé deux, à cause de leur relation $cos.\, l^2 + cos.\, m^2 + cos.\, n^2 = 1$. Enfin, pour la position à l'égard du cercle PQS, si nous posons l'angle $JPQ = \phi$, nous aurons, en introduisant une nouvelle constante pour l'ajuster à l'état initial

$$tang.\, (\phi + P) = \frac{F\sqrt{(G - AA)} - A\, sin.\, U.\, \sqrt{(K - 2ABCGu)}}{cos.\, U.\, \sqrt{G\,(K - 2ABCGu)}}\,; \text{ or,}$$

$$sin.\, APJ = \frac{z\, cos.\, m - y\, cos.\, n}{x\; sin.\, PJ.\, sin.\, l} \;\&\; x\; sin.\, PJ = \frac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G}} . \int \frac{cos.\, U}{cos.\, (\phi + P)}$$

Par ces formules, le problême proposé est parfaitement résolu.

Autre solution du même problême.

99. La solution précédente n'est si compliquée que parce qu'elle se rapporte en général à un point fixe quelconque P & à un cercle fixe quelconque PQS, d'où il doit y entrer un grand nombre de constantes. Mais, puisque ces lieux fixes sont arbitraires, on les peut établir ensorte que nos formules deviennent beaucoup plus simples. La constante A dépendant principalement du point P, rien n'empêche qu'on ne le prenne au

commencement, enforte que l'on ait $G - AA = 0$ ou $A = \sqrt{G} = \sqrt{(\Gamma a^4 + \Delta b^4 + \Theta c^4)}$. Alors, ayant trouvé l'angle U comme ci-dessus, on aura, par des formules fort simples, $cos.\ l = \frac{aax}{\sqrt{G}}$; $cos.\ m = \frac{bby}{\sqrt{G}}$; $cos.\ n = \frac{ccz}{\sqrt{G}}$; & partant, pour déterminer ces arcs l, m, n, on n'a pas même besoin de chercher l'angle U. Or, pour l'angle $JPQ = \phi$, on aura, en négligeant la constante P, cettte équation $tang.\ \phi = -\frac{sin.\ u}{cos.\ U}$, ou bien $\phi = -U$, desorte que

$$\phi = -\int \frac{(H - 2ABCFu)\,du\sqrt{G}}{(K - 2ABCGu)\sqrt{(\Gamma + 2Au)(\Delta + 2Bu)(\Theta + 2Cu)}}.$$

100. Mais ayant exprimé si commodément les arcs l, m & n, on peut immédiatement déterminer les angles $QPA = \lambda$; $QPC = \mu$; $QPE = \nu$ par les premières formules n°. VII, VIII & IX; car puisque $sin.\ l^2 = cos.\ m^2 + cos.\ n^2 = \frac{b^4yy + c^4zz}{G} = \frac{G - a^4xx}{G}$ & $y\,cos.\ m + z\,cos.\ n = \frac{bbyy + cczz}{\sqrt{G}} = \frac{F - aaxx}{\sqrt{G}}$, nous aurons $d\lambda = \frac{-dt\,(F - aaxx)}{G - a^4xx}\sqrt{G}$

ou bien $d\lambda = \frac{-du\,(\Delta bb + \Theta cc - 2Aaau)\sqrt{G}}{(\Delta b^4 + \Theta c^4 - 2Aa^4u)\sqrt{(\Gamma + 2Au)(\Delta + 2Bu)(\Theta + 2Cu)}}$.

Outre cela, puisque $K = G(\Gamma + \Delta + \Theta) - FF$ nous trouvons,

$$cos.\ PJ = \frac{aa + bbyy + cczz}{a\sqrt{G}} = \frac{F}{\sqrt{G}\sqrt{(\Gamma + \Delta + \Theta - 2ABCu)}} \ \&$$

$$sin.\ PJ = \frac{\sqrt{(K - 2ABCGu)}}{\sqrt{G(\Gamma + \Delta + \Theta - 2ABCu)}} \ \& \text{ de-là}$$

$$sin.\ APJ = \frac{Aaayz\sqrt{G}}{\sqrt{(K - 2ABCGu)}\,(G - a^4xx)} \ \&\ cos.\ APJ = \frac{Gx\sqrt{(\Gamma + \Delta + \Theta - 2ABCu)} - Fax}{\sqrt{(K - 2ABCGu)}\,(G - a^4xx)}$$

or, pour avoir le point P, on n'a qu'à prendre au commencement

$$cos.\ AP = aa\sqrt{\frac{\Gamma}{G}};\ cos.\ CP = bb\sqrt{\frac{\Delta}{G}};\ cos.\ EP = cc\sqrt{\frac{\Theta}{G}}.$$

F I N.

MÉMOIRE

SUR

L'ARRIMAGE DES NAVIRES.

POUR concourir au Prix proposé par l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, pour l'année 1761.

Par M. l'Abbé BOSSUT, *Professeur Royal de Mathématiques aux Ecoles du Génie de Mezieres, Correspondant de l'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES de Paris.*

Cette pièce est l'une des deux entre lesquelles le Prix a été partagé.

MÉMOIRE

SUR

L'ARRIMAGE DES NAVIRES.

Sur ſon centre fixé, le navire orgueilleux
Oſe braver des mers l'effort impétueux.

EXPOSITION DU SUJET.

LE ſujet du Prix propoſé par l'Académie-Royale des Sciences pour l'année 1761, conſiſte à déterminer *la meilleure manière de leſter & d'arrimer un vaiſſeau; & les changemens qu'on peut faire en mer à l'arrimage, ſoit pour faire mieux porter la voile au navire, ſoit pour lui procurer plus de vîteſſe, ſoit pour le rendre plus ou moins ſenſible au gouvernail.* Cette queſtion eſt aſſurément une des plus importantes & des plus curieuſes qu'on pût offrir aux recherches des géomètres. Je ne doute pas qu'elle ne faſſe naître pluſieurs vues utiles au progrès de la navigation. Je me ſuis efforcé de la traiter par une méthode nouvelle & toujours ſubordonnée aux beſoins de la pratique. Mon travail aura le ſuccès le plus flatteur que je deſire, s'il peut fixer quelques momens l'attention du tribunal éclairé à qui j'en fais hommage.

Je diviſerai ce mémoire en cinq chapitres. Dans le premier, je remettrai ſous les yeux du lecteur les principales propoſitions d'hydroſtatique, d'hydraulique & de dynamique, qui me feront néceſſaires pour la ſolution du problême. Dans le ſecond, je déterminerai la meilleure manière de leſter & d'arrimer un vaiſſeau. Les trois autres feront reſpectivement deſtinés à l'examen des changemens qu'on peut faire en mer à l'arrimage, ou pour faire mieux porter la voile au navire, ou pour lui procurer plus de vîteſſe, ou pour le rendre plus ou moins ſenſible au gouvernail. Cet ordre m'eſt indiqué par l'énoncé même du programme.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

I.

LORSQU'UN navire, ou en général un corps quelconque, flotte ſur un fluide, à chaque inſtant il eſt ſoulevé par le fluide de bas en haut, ſuivant la verticale, avec une force égale au poids du volume de fluide qu'il déplace.

Cela eſt également vrai, ſoit que le corps ſoit en repos, ſoit qu'il ſoit agité par des forces quelconques, pourvu néanmoins que dans ce dernier cas, la ſurface du fluide reſte toujours à même hauteur. J'ajoute cette reſtriction, parce que ſi le corps, en s'enfonçant plus ou moins, forçoit le fluide à monter ou à deſcendre, il y auroit une partie de l'effort du fluide déplacé, qui feroit employée à produire le mouvement d'aſcenſion ou de deſcenſion dont il s'agit. L'exactitude demandoit que nous fiſſions cette remarque; mais il eſt évident que ces mouvemens doivent être ici regardés comme nuls; car le navire n'eſt qu'un point ſur la vaſte étendue des mers.

I I.

Suppoſons le corps dans une immobilité abſolue ſur le fluide : il eſt clair que le poids du corps & la pouſſée verticale de l'eau ſe font équilibre, & que par conſéquent ces deux forces ſont égales & directement oppoſées. Or le poids du corps ſe réunit à ſon centre de gravité, & la pouſſée verticale de l'eau ſe réunit au centre de gravité de la partie ſubmergée, conſidérée comme homogène : par conſéquent ces deux centres de gravité ſeront néceſſairement placés ſur une même ligne verticale; en ſorte que ſi, par quelque cauſe que ce puiſſe être, l'un d'eux vient à s'écarter de cette ligne, le corps fera des oſcillations, à la manière des pendules.

I I I.

Mais ſi le corps étoit mu ſur le fluide par quelque force étrangère, comme, par exemple, un navire l'eſt par le vent, alors il réſulteroit, & de cette force, & de la réſiſtance de l'eau, une force verticale, qui ſoutiendroit une partie de ſon poids. Ainſi, en général, ce poids eſt égal à la réſultante de la pouſſée verticale de l'eau, & de toutes les autres puiſſances qui tendent à le ſoulever ſuivant la verticale.

I V.

Lorſqu'un fluide frappe perpendiculairement un plan en repos, la force du choc eſt en raiſon compoſée du plan, de la denſité du fluide, & du quarré de ſa vîteſſe. Le choc feroit le même, ſi le plan alloit frapper le fluide en repos. Mais ſi le fluide &

le plan viennent à la rencontre l'un de l'autre, ou si l'un fuit devant l'autre, le choc sera en raison composée du plan, de la densité du fluide, & du quarré de la somme ou de la différence des vîtesses du fluide & du plan (*a*).

V.

Si un fluide frappe obliquement un plan, ou le plan le fluide, la force du choc qui en résulte perpendiculairement contre le plan, est, en général, en raison composée du plan, de la densité du fluide, du quarré de la somme ou de la différence des vîtesses du fluide & du plan, & du quarré du sinus de l'angle d'incidence du fluide sur le plan.

V I.

Il résulte des deux articles précédens que, lorsqu'on connoîtra par l'expérience l'impulsion directe d'un fluide, sous une certaine vîtesse, contre un plan donné, on connoîtra aussi l'impulsion d'un fluide quelconque, sous une vîtesse différente, contre un plan différent, soit que le choc se fasse directement ou obliquement.

Dans la pratique, on peut, suivant M. Bouguer (*Man. des vaiss. pag. 185*), supposer que l'impulsion de l'eau de mer, sous une vîtesse d'un pied par seconde, contre un plan d'un pied quarré en surface, est équivalente à un poids d'une livre trois onces; & que celle du vent, sous les mêmes conditions, équivaut à un poids d'un quarantième d'once.

V I I.

Si un corps est poussé par une force qui passe par

(*a*) Cette règle, & la suivante qui en dépend, ne sont pas vraies en rigueur; mais elles suffisent pour la pratique, & je m'en servirai avec tous les géomètres qui ont écrit sur ces matières.

ſon centre de gravité, toutes ſes parties marcheront d'un mouvement parallèle à la direction de la force imprimée, avec une vîteſſe égale à cette force diviſée par la maſſe du corps.

VIII.

Mais ſi la force imprimée ne paſſe pas le centre de gravité du corps, ce centre ſera mu de la même manière que s'il ſe trouvoit ſur la direction de la force; & de plus le corps *pirouettera* ſur ce même point.

IX.

Sur ce principe, lorſqu'il s'agira de déterminer le mouvement d'un corps ſollicité par des forces quelconques & de directions quelconques,

1°. On trouvera le chemin du centre de gravité, en imaginant que toutes les puiſſances paſſent par ce centre avec des directions parallèles à celles qu'elles ont, & déterminant leur réſultante par les principes ordinaires de la méchanique. Cette réſultante ſera la force avec laquelle le centre de gravité ſera mu.

2°. Pour déterminer le pirouettement du corps autour de ſon centre de gravité, on pourra imaginer par ce centre un axe à volonté, ſur lequel tourne le corps, tandis que cet axe a lui-même un mouvement de nutation. Enſuite les règles de la méchanique fourniront le moyen de décompoſer & d'aſſigner les forces qui doivent produire chacun de ces mouvemens. C'eſt ainſi que M. d'Alembert a enviſagé la queſtion dans ſes *Recherches ſur la préceſſion des équinoxes :* ouvrage où ce grand problême a été réſolu pour la première fois.

X.

Si pluſieurs corpuſcules *A, B, D*, &c., liés en-

FIGURE I. semble d'une manière quelconque, tendent à tourner autour d'un point ou d'un axe C, la résistance qu'ils opposeront au mouvement angulaire, sera la même que si, en un seul & même point G, on substituoit, à la place du corps A, un corps exprimé par $\frac{A\times\overline{CA}^2}{\overline{CG}^2}$; à la place du corps B, un corps exprimé par $\frac{B\times\overline{CB}^2}{\overline{CG}^2}$; à la place du corps D, un corps exprimé par $\frac{D\times\overline{CD}^2}{\overline{CG}^2}$ &c.

D'où l'on voit que si on appelle dn une particule quelconque d'un corps sensible, z la distance de cette particule à un axe sur lequel tourne le corps, a la distance d'un point donné à l'axe, on pourra, à la place du corps proposé, substituer à la distance donnée a, un autre corps représenté par $\int\frac{zz\,dn}{a^2}$. Ainsi nommant de plus, F la force qui tend à faire tourner le corps, b son bras de levier, u la vîtesse de rotation pour le rayon a, on aura, par le principe ordinaire du levier, $F\times b = u\times a\times\int\frac{zz\,dn}{a^2} = u\int\frac{zz\,dn}{a}$.

XI.

La somme des produits des particules d'un corps par les quarrés de leurs distances à un axe qui ne passe pas par son centre de gravité, est toujours égale à la somme des produits des mêmes particules, par les quarrés de leurs distances à un axe passant par le centre de gravité & parallèle au premier, plus au produit de la masse du corps multipliée par le quarré de la distance des deux axes.

CHAPITRE

CHAPITRE SECOND

De la meilleure manière de lester & d'arrimer un navire.

XII.

Les marins comprennent quelquefois sous la dénomination générale de *lest* tout ce qui compose la charge du navire; mais ils affectent plus particulièrement ce nom à ces corps étrangers & pesants qu'on place au fond du navire, soit pour le mettre en équilibre, soit pour faciliter ses mouvements.

L'art de distribuer la charge de la manière convenable, est ce qu'ils appellent l'*arrimage*.

XIII.

Il n'est pas ici question de discuter la figure du navire & de ses parties, relativement aux bonnes qualités qui en dépendent. Cet examen préliminaire doit être fait par le constructeur instruit, qui trouvera tout ce qu'on peut desirer sur ce sujet dans la *Science navale* de M. Euler, dans le *Traité du navire* de M. Bouguer, & dans l'*Architecture navale* de M. Duhamel. Il s'agit uniquement de lester & d'arrimer un navire *donné*, de la manière la plus avantageuse.

XIV.

Supposant donc que le navire ait la figure requise, & qu'on ait tracé en conséquence sur son plan des belles *lignes d'eau*, c'est-à-dire, des lignes propres à diviser facilement le fluide, & à favoriser son impulsion sur le gouvernail; le problême consistera à distribuer tellement la charge, que le navire prenne en effet dans l'eau les lignes projettées. J'attribue ici à ces lignes toute la perfection desirable; mais si elles étoient défectueuses, on verra dans la suite les changemens qu'il faut faire à l'arrimage pour leur en substituer d'autres.

X V.

Lorsqu'on aura fixé, d'après les considérations que je viens d'exposer, la *carène* du navire, & qu'on aura déterminé de plus le centre de gravité de cette même carène, regardée comme homogène, il faudra faire en sorte, en chargeant le navire (*art* I *&* II),

1°. Que le poids absolu du navire, tout armé, soit égal au poids du volume d'eau déplacé par la carêne. Le premier poids se connoîtra par le second, qui est très-aisé à calculer.

2°. Que le centre de gravité du poids total du navire, & celui de la carêne, se trouvent dans une même ligne verticale.

Je ne considère ici que la simple flottaison primitive du navire, & je fais abstraction de toutes les autres forces qui pourroient contribuer à soutenir une petite partie de son poids, dans le sens de l'*art.* III.

X V I.

Il est visible que le poids du navire est constant; mais qu'on peut distribuer diversement ce poids, de manière cependant que son centre de gravité, & celui de la carêne, toujours supposée homogène, soient dans une même ligne verticale. Or de toutes ces différentes distributions, il est clair qu'il faut choisir celle qui maintiendra fixément le navire dans sa première assiette, ou qui, du moins, le ramènera par les voies les plus douces, à cette première assiette, supposé qu'il vienne à la perdre. Par cet arrangement, le navire portera parfaitement la voile: avantage capital auquel sont attachées tout-à-la-fois la sureté & la facilité de la navigation.

XVII.

Or on ne peut pas parvenir à déterminer l'arrimage qui procure au navire la ſtabilité la plus avantageuſe, ſans connoître d'abord les mouvements qu'il prend, lorſque, venant à s'incliner, ſon centre de gravité & celui de la carêne ne ſe trouvent plus dans la même verticale. Ainſi le premier objet que nous devions nous propoſer eſt la détermination des mouvements dont il s'agit.

XVIII.

Les *bouffées* de vent & les chocs des lames ſont les cauſes qui font incliner le navire, & qui par-là occaſionnent les oſcillations que nous avons ici en vue. Toutes ces oſcillations ſe réduiſent à deux claſſes principales ; les unes ſe font d'un bord à l'autre, & ſe nomment mouvements de *roulis ;* les autres ſe font ſuivant la longueur du navire, & s'appellent mouvements de *tangage*. De ces deux eſpèces d'oſcillations ſimples il réſulte très-ſouvent des oſcillations compoſées de roulis & de tangage, & même de rotation horiſontale. Je donnerai ci-deſſous la méthode générale pour déterminer tous ces mouvements. Lorſqu'ils ne ſe font ſentir que d'un bord à l'autre, ou que ſuivant la longueur, le problême ſe ſimplifie conſidérablement.

XIX.

Les géomètres qui ont écrit ſur ces matières n'ont pas manqué d'examiner les mouvements de roulis & de tangage. L'Académie elle-même a propoſé pour ſujets des prix des dernières années, de diminuer le plus qu'il eſt poſſible les mauvais effets qui en réſultent. Aujourd'hui il s'agit encore, du moins enpartie, de remplir le même objet, mais en ſe bornant uniquement aux reſſources que peut fournir l'arrimage; au lieu qu'on pouvoit auparavant tirer parti de quelques changements faits à la figure même du navire. Je vais tâcher de résoudre la question de manière que la pratique en retire tout l'avantage possible.

X X.

Pour aller du plus simple au plus composé, je ne considérerai d'abord qu'un simple profil du navire, fait ou suivant sa longueur, ou perpendiculairement à sa longueur; & je supposerai que cette figure se balance autour d'un axe qui la traverse perpendiculairement par son centre de gravité. Ce premier problême aura son application immédiate aux mouvements de roulis & de tangage de certains bâtiments usités dans les pays du Nord & à la Chine, lesquels ont à-peu-près la figure de parallélepipèdes rectangles, ou de demi cylindres; & avec de légères additions, le même problême s'appliquera aux mouvements de roulis & de tangage de toutes sortes de navires, comme on le verra bientôt.

Je prie le lecteur de ne pas perdre de vue que les oscillations seront toujours censées fort petites, pour ne pas donner à ces problêmes une généralité superflue & embarrassante.

X X I.

PROBLEME I.

FIG. 2. *Supposons que ADHTEB soit la coupe longitudinale ou latitudinale d'un navire, laquelle ait son centre de gravité G sur la verticale GC; que cette figure s'étant inclinée d'une quantité connue, elle enfonce dans l'eau la partie DHTE dont le centre de gravité F soit à une distance donnée de la verticale GC; qu'en ce moment elle soit abandonnée uniquement à l'action de sa pesanteur & de la poussée verticale de l'eau; on demande les oscillations qu'elle fera.*

SOLUTION.

Suivant l'article VIII, le centre de gravité de la figure montera verticalement, & en même temps la figure tournera sur ce centre. Tels sont les deux mouvements qu'il s'agit de déterminer.

Supposons que la figure partant de l'état fixé par l'énoncé du problême s'incline de maniere qu'au bout d'un certain temps sa droite zx soit sa section commune avec la surface de la mer. Comme les oscillations sont fort petites par hypothèse, il est clair que les droites DE, zx peuvent être censées se couper au point C. Soit S le centre de gravité de DE. Du point F soient menées parallèlement à DE & à zx, les droites Ff, Fo; & du centre de gravité G de la figure soient abbaissées sur DE & sur zx les perpendiculaires GC, GL. Soient Gg l'espace parcouru verticalement par le centre de gravité, Qq l'espace parcouru circulairement par un point donné à une distance donnée du point G. Cela posé,

Soient

CE	$= a$
CD	$= b$
DE	$= a + b = c$
CS	$= k$
Ff	$= f$
Gf	$= h$
GQ	$= m$
Gg ou Cc	$= x$
Qq	$= y$
L'élément du temps	$= dt$
L'aire de la figure $ADHTEB$	$= N$
L'élément de cette aire	$= dN$
La distance indéterminée d'un élément dN au point G	$= z$
L'aire de la partie $DHTE$	$= M$
La gravité	$= g$
La densité de la figure $ADHTEB$	$= p$
La densité de l'eau	$= \pi$

La masse de la figure proposée sera $= pN$; son poids $= gpN$. La maſſe d'eau déplacée par la partie $DHTE$ ſera $= \pi M$; ſon poids $= g\pi M$.

Maintenant, il eſt viſible que la nouvelle partie plongée $zhtx$ eſt égale à la première $DHTE$, moins l'eſpace $DEed$, plus le triangle ECx, moins le triangle Dcz. Or

1°. L'aire $DEed$, qu'on peut prendre pour un rectangle, $= cx$;

2°. Les deux triangles rectangles GQq, CEx, qui ſont évidemment ſemblables, puiſque les côtés qui forment les angles aigus G & C ſont perpendiculaires chacun à chacun, donneront $\frac{aay}{2m}$ pour l'aire du triangle ECx;

3°. De même l'aire du triangle $DCz = \frac{bby}{2m}$:

Par conſéquent le volume de la nouvelle partie enfoncée $= M - cx + \frac{aay}{2m} - \frac{bby}{2m}$ & le poids du pareil volume d'eau $= g\pi . \left(M - cx + \frac{aay}{2m} - \frac{bby}{2m}\right)$. Retranchant de ce poids, le poids gpN de la figure, on aura $g\pi\left(M - cx + \frac{(aa - bb)y}{2m}\right) - gpN$ pour la force abſolue qui ſoulève la figure ſuivant la verticale : c'eſt pourquoi le principe ordinaire des forces accélératrices donnera cette première équation $\left(g\pi\left(M - cx + \frac{(aa - bb)y}{2m}\right) - gpN\right) dt^2 = pNddx$.

Pour en trouver une ſeconde, on obſervera que comme $zhtx = DHTE - DEed + ECx - DCz$, le moment de $zhtx$ par rapport à l'axe de rotation, eſt égal à la ſomme des moments de toutes les parties qui compoſent le ſecond membre, en prenant ces moments avec des ſignes convenables. Or faiſant d'abord abſtraction de la denſité de l'eau & de la peſanteur.

1°. Le moment de $DHTE = DHTE \times Fo = DHTE \times (Ff - fk) = M\left(f - \frac{hy}{m}\right)$;

2°. Le moment de $DEed = ckx$, & ce moment doit être pris négativement;

3°. Le moment du triangle $ECx = \frac{a^3 y}{3m}$, & ce moment doit être pris négativement;

4°. Le moment du triangle $DCz = \frac{b^3 y}{3m}$, & ce moment doit être pris positivement.

Par conséquent, tous les signes bien combinés; le moment de $zhtx = M\left(f - \frac{hy}{m}\right) + ckx - \frac{a^3 y}{3m} - \frac{b^3 y}{3m}$; & faisant entrer dans cette expression la densité de l'eau & la pesanteur, on aura $g\pi \cdot \left(M\left(f - \frac{hy}{m}\right) + ckx - \frac{(a^3 + b^3)y}{3m}\right)$ pour le moment de la force absolue qui tend à faire tourner la figure sur son centre de gravité. Or à la place de la masse de cette figure, on peut (*art.* x) substituer en Q une masse représentée par $p\int \frac{zzdN}{m^2}$: multipliant cette masse par son bras de levier m, on aura $p\int \frac{zzdN}{m}$ pour le moment de la résistance qu'elle fait à parcourir l'espace Qq: donc par le principe des forces accélératrices, on aura cette nouvelle équation, $g\pi\left(M\left(f - \frac{hy}{m}\right) + ckx - \frac{(a^3 + b^3)y}{3m}\right)dt^2 = pddy\int \frac{zzdN}{m}$. Je n'intègre pas les deux équations que j'ai trouvées, parce que j'en intègrerai de toutes pareilles que fournira le problême suivant.

XXII.

PROBLEME II.

Déterminer les mouvements de roulis ou de tangage de toutes ſortes de navires.

Je ſuppoſe, conſéquemment à cet énoncé, que le centre de gravité de la carêne demeure toujours, du moins ſenſiblement, ou dans le plan longitudinal mené de la proue à la poupe, lorſqu'il s'agit des mouvements de tangage; ou dans le plan latitudinal paſſant par le centre de gravité du navire, lorſqu'il s'agit des mouvements de roulis; en ſorte que le navire puiſſe être cenſé ſe balancer ſuivant l'un ou l'autre plan. Ce cas eſt celui des oſcillations ſimples.

SOLUTION.

Pour fixer l'imagination, ſuppoſons qu'il s'agiſſe des mouvements de tangage; on verra bien les changements qu'il faudra faire au diſcours, pour l'adapter aux mouvements de roulis.

FIG. 2, 3, 4. Soient $ADHTEB$ (*fig.* 2) la coupe longitudinale du navire, coupe dans laquelle ſe trouvent les centres de gravité du navire & de la carêne: $DOEo$ (*fig.* 3) la coupe horiſontale faite à fleur d'eau: C le point ou la verticale GC élevée par le centre de gravité du navire rencontre l'axe DE. Par le point C ſoit mené perpendiculairement à DE l'axe $\varepsilon\delta$, & ſoit faite ſuivant cet axe la coupe latitudinale $\varepsilon V\delta$ (*fig.* 4) dans laquelle la droite $\mu G\zeta$ repréſente un axe perpendiculaire à $ADHTEB$, & paſſant par le centre de gravité G. Suppoſons, comme dans l'article précédent, que le navire s'incline du côté de E. Soient (*fig.* 2) Gg l'eſpace parcouru verticalement par le centre de gravité, Qq l'eſpace parcouru circulairement à une diſtance donnée du centre G.

Cela

Cela posé, il est visible que tout sera le même que ci-dessus, à cela près qu'au lieu du rectangle $DEed$ (*fig.* 2), il faudra considérer un prisme ayant pour base la figure $DOEo$ (*fig.* 3), & pour hauteur Gg; qu'au lieu des triangles ECx, DCz (*fig.* 2), il faudra considérer les onglets formés par la rotation des espaces $E\varepsilon\delta$, $D\varepsilon\delta$ (*fig.* 3) autour de l'axe $\varepsilon\delta$; qu'enfin, au lieu de la somme des produits des particules de la simple surface $ADHTEB$, par les quarrés de leurs distances au point G, il faudra prendre la somme des produits des particules du solide même du navire par les quarrés de leurs distances à l'axe $\mu G\beta$. Ainsi

Supposant

L'aire $E\varepsilon\delta$.	$= aa$
L'aire $D\varepsilon\delta$.	$= bb$
L'aire entière $D\varepsilon E\delta$. . . . . $= aa + bb$	$= cc$
La distance SC du centre de gravité S de la coupe de flottaison à la verticale GC.	$= k$
La distance initiale Ff du centre de gravité F de la carène à la verticale GC.	$= f$
Gf.	$= h$
GQ.	$= m$
Gg.	$= x$
Qq.	$= y$
L'élément du temps.	$= dt$
Le volume du navire.	$= N$
La somme des produits des particules de ce volume par les quarrés de leurs distances à l'axe $\mu G\beta$. . . .	$= R$
L'onglet formé par la rotation de l'aire $E\varepsilon\delta$ autour de l'axe $\varepsilon\delta$.	$= \beta a^2 y$ *
Le moment du même onglet par rapport à l'axe de rotation $\mu G\beta$.	$= \theta a^3 y$
L'onglet formé par la rotation de l'aire $D\varepsilon\delta$ autour de l'axe $\varepsilon\delta$.	$= \beta' b^2 y$
Le moment du même onglet par rapport à l'axe $\mu G\beta$.	$= \theta' b^3 y$
Le volume de la carène au premier instant.	$= M$
La gravité.	$= g$
La densité de la charge.	$= p$
La densité de l'eau.	$= \pi$

* *Les lettres β, β', θ, θ' sont des coëfficients constants, qui se déterminent par les principes ordinaires de la géométrie.*

on aura évidemment les deux équations suivantes

(*A*) $\left(g\pi\left(M - ccx + (\epsilon a^2 - \epsilon' b^2)y\right) - gpN\right)dt^2 = pN\,ddx;$

(*B*) $g\pi\left(M\left(f - \frac{hy}{m}\right) + cckx - (\theta a^3 + \theta' b^3)y\right)dt^2 = \frac{pR\,ddy}{m}.$

Il ne reste plus qu'à intégrer ces deux équations : c'est ce que nous ferons dans la suite.

XXIII.

Remarque premiere. Si, tout étant d'ailleurs le même, le centre de gravité *F* de la carêne au premier instant du mouvement, au lieu d'être placé en avant de la verticale *GC*, comme on l'a supposé, étoit placé en arrière de la même ligne, à la place de l'équation (*A*), on auroit l'équation

(*C*) $\left(g\pi\left(M - ccx - (\epsilon a^2 - \epsilon' b^2)y\right) - gpN\right)dt^2 = pN\,ddx;$

& à la place de l'équation (*B*), on auroit l'équation

(*D*) $g\pi\left(M\left(f - \frac{hy}{m}\right) - cckx - (\theta a^3 + \theta' b^3)y\right)dt^2 = \frac{pR\,ddy}{m}.$

D'où l'on voit que supposant toujours la verticale *GC* placée en avant du centre de gravité *S* de la coupe de flottaison, les équations (*A*) & (*B*) & les équations (*C*) & (*D*) auront deux à deux le même signe au troisième terme de leur premier membre, pourvu que l'on ait $\epsilon a^2 > \epsilon' b^2$. Il n'est pas moins visible que si la verticale *GC* passoit en arrière du point *S*, les équations auroient encore deux à deux le même signe au troisième terme de leur premier membre, pourvu que l'on eût $\epsilon' b^2 > \epsilon a^2$. Or dans le premier cas on a en effet $\epsilon a^2 > \epsilon' b^2$, & dans le second on a $\epsilon' b^2 > \epsilon a^2$. Ainsi on peut établir que les équations des deux balancements auront toujours le même signe au troisième terme de leur premier membre. C'est ce qu'il faut bien observer pour la suite.

XXIV.

Remarque deuxiéme. Je ferai encore ici une remarque qui n'auroit pas sans doute échappé au lecteur, mais qui entre dans le plan que je me suis proposé de rendre ce mémoire clair & facile.

La partie du navire enfoncée dans l'eau au premier instant du mouvement, n'est pas la carêne primitive qui, avant l'inclinaison, occupoit la place d'un volume d'eau de même poids que le navire. Si on appelle μ cette carêne primitive, on verra aisément par ce qui précède que $M = \mu \pm (\varsigma a^2 - \varsigma' b^2)\frac{mf}{h} + cc\psi$; ψ étant la hauteur verticale parcourue par le centre de gravité du navire, hauteur qui dépend de l'inégalité des poussées des deux onglets $\frac{\varsigma a^2 mf}{h}$, $\frac{\varsigma' b^2 mf}{h}$ & du coup qui a produit l'inclinaison primitive. Cette quantité ψ sera toujours facile à déterminer ou par le calcul ou par estime. On peut encore observer que le point F ne sera jamais fort éloigné du point qu'occupe actuellement le centre de gravité de la carêne primitive.

Examen particulier du cas où la verticale élevée par le centre de gravité du navire, passe par le centre de gravité du plan de flottaison.

XXV.

Quoique le cas dont il s'agit puisse se tirer sans peine du problême général, j'ai cru devoir le traiter ici à part, parce qu'il a effectivement lieu dans plusieurs navires, & que d'ailleurs il fournit des résultats très-simples & très-propres à jetter du jour sur toute cette matière. La nature observe dans la production des effets du même genre une gradation qui met à portée de juger de l'un par l'autre avec une exactitude suffisante, lorsque les circonstances essentielles ne diffèrent pas trop sensiblement. Ainsi pourvu que la verticale élevée par le centre de gravité du navire ne passe qu'à peu de distance du centre de gravité du plan de flottaison, on pourra se servir sans crainte des règles que nous allons établir, en attendant que nous donnions la méthode générale pour tous les cas.

XXVI.

Il est évident que dans l'hypothèse proposée, les deux onglets $\mathcal{E}a^2$, $\mathcal{E}'b^2$ sont égaux : ainsi, supposant qu'on n'ait fait qu'écarter horisontalement le centre de la carêne de sa première position, le centre de gravité du navire ne doit ni monter ni descendre. Par conséquent l'équation (A) est nulle, & l'équation (B) devient

$$(E)\quad ddy = \frac{g\pi}{pR}\Big(Mfm - (Mh + 2m\theta a^3)y\Big)dt^2 :$$

multipliant tout par dy, on aura

$$dyddy = \frac{g\pi}{pR}.\Big(Mfmdy - (Mh + 2m\theta a^3)ydy\Big)dt^2,$$

dont l'intégrale est

$$\frac{dy^2}{2} = \frac{g\pi}{pR}.\Big(Mfmy - (Mh + 2m\theta a^3)\frac{yy}{2}\Big)dt^2.$$

Je n'ajoute point de constante, parce que $dt = o$ rend $dy = o$, comme cela doit être. Cette équation donne

$$\frac{dy}{\sqrt{\frac{2Mfm.y}{Mh+2m\theta a^3} - yy}} = dt\sqrt{\frac{g\pi}{pR}.(Mh + 2m\theta a^3)}:$$

soit $\frac{Mfm}{Mh+2m\theta a^3} - y = u$; on aura la transformée

$$\frac{-du}{\sqrt{\frac{M^2f^2m^2}{(Mh+2m\theta a^3)^2} - uu}} = dt\sqrt{\frac{g\pi}{pR}.(Mh + 2m\theta a^3)}:$$

d'où l'on tire $u = \frac{Mfm}{Mh+2m\theta a^3} \times cos. t\sqrt{\frac{g\pi}{pR}.(Mh+2m\theta a^3)}.$

Par conféquent

$$y = \frac{Mfm}{Mh + 2m\theta a^3} \times \left(1 - cof.\, t\sqrt{\frac{g\pi}{pK}.\,(Mh + 2m\theta a^3)} \right)$$

Il ne faut encore point de conftante, parce que $t = o$ rend le cofinus qui entre dans le fecond membre $= 1$, & par conféquent $y = o$. Cette formule fera pour nous la fource de plufieurs réflexions.

XXVII.

Si la quantité radicale qui multiplie t eft réelle, & qu'on fe rappelle que le cofinus d'un angle qui augmente à l'infini, de pofitif devient négatif, & réciproquement, on verra que la valeur de y fera toujours infiniment petite. Or la quantité dont il s'agit fera toujours réelle, lorfque h fera pofitive; & h fera toujours pofitive, lorfque le centre de gravité du navire tombera au deffous de celui de la carêne. Ainfi le navire ne fera que des ofcillations infiniment petites, & fera par conféquent *ftable* dans fa pofition, lorfque l'arrimage fera tel que le centre de gravité de la carêne foit placé au deffus de celui du navire.

XXVIII.

Si h étoit négative, ou que le centre de gravité du navire fût au deffus de celui de la carêne, & qu'on eût cependant $2m\theta a^3 > Mh$, le navire tendroit encore à fe rétablir dans fon premier état, mais non pas avec la même force que dans le premier cas.

XXIX.

Mais fi h étant négative, on avoit $Mh > 2m\theta a^3$, alors en reprenant l'équation fondamentale (E), on trouveroit qu'il entreroit des logarithmes dans la valeur de y : d'où il fuit que t augmentant, y augmenteroit auffi : par conféquent le navire ne feroit plus des ofcillations infiniment petites, comme on l'a fuppofé, & il n'auroit par conféquent pas de ftabilité.

XXX.

Enfin fi h étoit négative & qu'on eût $Mh = 2m\theta a^3$, l'équation fondamentale (E) donneroit $y = \frac{g\pi M fm . t^2}{2pR}$; d'où l'on voit que le navire manqueroit encore de ftabilité. Veut-on un exemple bien fimple de ce dernier cas? Suppofons que tout le corps flottant fe réduife à un cercle $ADHEB$ pofé verticalement fur un fluide : foient le fegment DHE la partie

FIGURE 5. enfoncée dans l'eau, GH la verticale paffant par le centre G de gravité & de figure du cercle, F le centre de gravité du fegment DHE : on aura, par la propriété du cercle, $DHE \times GF = \frac{2}{3}\overline{CE}^3$ ou, pour me fervir de nos expreffions, $Mh = m\theta a^3$. Par conféquent le cercle mis une fois en mouvement continueroit à tourner : ce qui eft conforme à l'expérience.

De-là réfulte une règle pour l'arrimage des navires de figure cylindrique; c'eft de placer le centre de gravité de ces fortes de navires au deffous de l'axe du cylindre, fans quoi ils verferoient infailliblement à la première occafion.

XXXI.

La même équation

$$y = \frac{Mfm}{Mh + 2m\theta a^3} \times \left(1 - cof. t\sqrt{\frac{g\pi}{pR}.(Mh + 2m\theta a^3)}\right)$$

fournit le moyen de règler l'amplitude des balancements du navire.

Car quelle que puiffe être la valeur (toujours réelle) de la quantité $\sqrt{\frac{g\pi}{pR}.(Mh + 2m\theta a^3)}$, il eft évident que le facteur $1 - cos. t \sqrt{\frac{g\pi}{ph} \cdot (Mh + 2m\theta a^3)}$ augmentera depuis o jusqu'à ce qu'il soit égal au diamètre, après quoi il diminuera par les mêmes degrés : d'où il suit qu'il ne peut contribuer en rien à augmenter ou à diminuer un balancement dont la grandeur absolue pour le rayon m est toujours exprimée par $\frac{2Mfm}{Mh + 2m\theta a^3}$. Mais plus on diminuera le premier facteur $\frac{Mfm}{Mh + 2m\theta a^3}$, qui est déjà fort petit à cause de f qu'on suppose fort petit, plus on diminuera la grandeur absolue d'un balancement. Or pour diminuer ce facteur, nous n'avons qu'à augmenter h, c'est-à-dire qu'à faire descendre de plus en plus le centre de gravité du navire.

On voit donc que pour diminuer l'amplitude des balancements, l'opération se réduit à enfoncer de plus en plus le centre de gravité du navire. Toutes les distributions imaginables de la charge qui peuvent conduire à ce but, sont d'ailleurs absolument indifférentes : proposition assez singulière, qui n'avoit été qu'entrevue à l'aide d'une physique vague & incertaine.

XXXII.

Mais pour ne pas tomber dans l'inconvénient d'augmenter trop la vivacité des balancements en diminuant leur amplitude, il faut encore trouver le moyen de modérer cette vivacité : c'est à quoi on parviendra par la détermination du pendule *synchrone*.

Supposons un pendule de la longueur m : soient n la distance initiale du poids de ce pendule à la verticale, t' le temps qu'il emploie à parcourir l'espace y : on aura $ddy = g.\left(\frac{n-y}{m}\right) dt'^2$ pour l'équation de ce pendule. Soit l la longueur du pendule synchrone cherché, on aura, par les propriétés des

pendules; $l : m :: dt^2 : dt'^2 = \frac{m\,dt^2}{l}$ & l'équation précédente deviendra $ddy = \frac{g}{l}\left(n - y\right) dt^2$: comparons cette équation avec l'équation (E) qu'on mettra d'abord ſous cette forme
$$ddy = \frac{g\pi}{pR} \cdot (Mh + 2m\theta a^3)\left(\frac{Mfm}{Mh + 2m\theta a^3} - y\right) dt^2,$$
nous aurons $\frac{g}{l} = \frac{g\pi}{pR} \cdot (Mh + 2m\theta a^3)$; d'où l'on tire $l = \frac{pR}{\pi \cdot (Mh + 2m\theta a^3)}$.

La diſtance initiale du poids de ce pendule à la verticale eſt $\frac{Mfm}{Mh + 2m\theta a^3}$.

Nous pouvons, à l'aide de cette formule, indiquer divers moyens d'arrimage, qui tendront à rallentir la vîteſſe des balancements du navire.

XXXIII.

On voit d'abord que ſi on diminue h dans le cas où le centre de gravité du navire eſt au deſſous de celui de la carêne, ou qu'on augmente h dans le cas où le centre de gravité du navire eſt au deſſus de celui de la carêne ; on voit, dis-je, qu'on augmentera la longueur du pendule, ou qu'on diminuera la vîteſſe des balancements, parce que le numérateur de la valeur de l eſt moins augmenté par le changement de h, que le dénominateur n'eſt diminué. Cet expédient eſt ſouvent utile, & les marins s'en ſervent lorſque le vaiſſeau doit porter des effets très-peſants, tels que du fer, des canons, du plomb, &c. Si on mettoit ces gros poids ſur la *carlingue*, le vaiſſeau viendroit à ſa flottaiſon avant que d'avoir ſa cale toute remplie, & il auroit des mouvements fort rudes, qui tourmenteroient conſidérablement l'équipage & la mâture. Pour prévenir

ces

ces incovénients, on élève le centre de gravité par le moyen d'un *fardage* ſur lequel on poſe les poids dont il s'agit. Il faut prendre garde cependant de ne pas trop élever le centre de gravité, parce qu'on perd en même temps ſur la ſtabilité du navire (*art. XXVII* & *XXVIII*), & qu'on augmente l'amplitude de ſes oſcillations (*art XXXI*).

XXXIV.

Le moyen que nous venons de propoſer ne peut pas toujours être mis en uſage : car, ſi on avoit à embarquer avec ces corps très-peſants des marchandiſes très-légères, telles que des balles de cotton, il ne ſeroit pas poſſible d'occuper une partie de la cale par le fardage dont nous avons parlé ; mais on peut alors ſe ſervir de cet autre expédient qui eſt très-avantageux. Pour diminuer les mouvements de roulis, on diſtribuera les effets les plus peſants *bas-bord* & *ſtribord* dans les flancs du vaiſſeau ; &, pour diminuer les mouvements de tangage, on tranſportera vers la proue & vers la poupe quelques poids fort peſants, autant que la ſolidité de l'aſſemblage des pièces pourra le permettre. Par tous ces arrangements, le centre de gravité du navire ne changera pas ſenſiblement de place : ainſi la ſtabilité du navire demeurera ſenſiblement la même, & le navire fera les mêmes excurſions en amplitude ; mais la longueur du pendule ſynchrone augmentera conſidérablement.

XXXV.

Il ſe préſente un nouveau moyen qui participe des avantages des deux autres : ce moyen conſiſteroit à diſtribuer tellement la charge, que le centre de gravité & celui de la carêne fuſſent au même point. Alors la carêne ſeroit chargée proportionnellement à ſes capacités ; la ſtabilité demeureroit ſuffiſante ;

les excursions ne feroient pas trop amples, & la longueur du pendule synchrone augmenteroit considérablement : mais il ne faut pas se flatter d'atteindre à ce but dans la pratique. Les emplacements fixes qu'on est obligé de donner à la plupart des effets qui composent la charge, y mettent un obstacle peut-être insurmontable. Par exemple, dans les vaisseaux de guerre, le canon est toujours au-dessus de la ligne de flottaison. Plusieurs autres agrêts, tels que les poudres, les provisions de bouche, les tonneaux de vin ou d'eau, &c., ont aussi leurs places marquées. Tout ce que peut faire le navigateur est de tirer le meilleur parti du lest proprement dit, & de quelques effets qu'on peut transposer sans inconvénient.

XXXVI.

Scholie. Les maximes d'arrimage que je viens d'établir n'ont pas à tous égards le dégré d'exactitude & de précision que je me propose de leur donner dans la suite : mais elles ne peuvent pas manquer de répandre déjà la plus grande lumière sur les manœuvres des marins : je dis les manœuvres des marins, car ici la pratique a devancé la théorie. Cela ne doit pas surprendre. Dans tous les arts qui peuvent intéresser la fortune ou le salut des hommes, l'industrie observe attentivement les résultats des expériences, & en tire à la longue des moyens de perfection; mais on ne peut pas porter un jugement certain sur l'avantage exclusif de ces moyens, avant qu'ils aient passé par le creuset de la géométrie.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS (*A*) & (*B*) de *l'art.* XXII.

XXXVII.

Revenons maintenant à l'intégration des deux équations générales (A) & (B) de l'*article* XXII. Pour abréger le calcul, nous supposerons $\frac{g\pi cc}{pN} = A$; $\frac{g\pi(\mathfrak{C}a^2 - \mathfrak{C}'b^2)}{pN} = B$; $\frac{g\pi M - gpN}{pN} = C$; $\frac{g\pi(hM + m\theta a^3 + m\theta' b^3)}{pR} = D$; $\frac{g\pi mccK}{pR} = E$; $\frac{g\pi Mfm}{pR} = F$. En faisant ces substitutions, on aura les deux transformées

$$(F)\quad ddx + Axdt^2 - Bydt^2 - Cdt^2 = o$$

$$(G)\quad ddy + Dydt^2 - Exdt^2 - Fdt^2 = o.$$

Cela posé, je multiplie * l'une de ces équations, la seconde par exemple, par un coëfficient indéterminé K, & je l'ajoute à la première ; ce qui me donne

(H) $ddx + Axdt^2 - Bydt^2 - Cdt^2 + Kddy + KDydt^2 - KExdt^2 - KFdt^2 = o$:

je fais en sorte que $Ax - By + KDy - KEx$ soit un multiple de $x + Ky$, c'est-à-dire que je suppose $Ax - By + KDy - KEx = H(x + Ky)$, H étant un coëfficient indéterminé. Comparant les termes semblables de cette équation, j'aurai $H = A - KE$, $H = \frac{KD - B}{K}$. Ces deux équations donneront deux valeurs de K que j'appelle K & K', & deux valeurs de H que j'appelle H & H'. Soit $x + Ky = S$, $x + K'y = S'$: l'équation (H) donnera ces deux autres :

$$dds + HSdt^2 - (C + KF)\,dt^2 = o;$$

$$dds' + H'S'dt^2 - (C + K'F)\,dt^2 = o;$$

ou bien, en supposant $C + KF = G$, $C + K'F = G'$,

$$dds + HSdt^2 = Gdt^2,$$

$$dds' + H'S'dt^2 = G'dt^2;$$

* Voy. les Mém. de l'Acad. de Berlin, an. 1748, pag. 283.

d'où l'on tire aiſément

$$S = \frac{G}{H} \times \left(1 - cof.\ t\sqrt{H}\right).$$

$$S' = \frac{G'}{H'} \times \left(1 - cof.\ t\sqrt{H'}\right):$$

par conſéquent

$$x = \frac{K}{K-K'} \times \frac{G'}{H'}\left(1 - cof.\ t\sqrt{H'}\right) - \frac{K'}{K-K'} \times \frac{G}{H}\left(1 - cof.\ t\sqrt{H}\right),$$

$$y = \frac{G}{H} \times \frac{(1 - cof.\ t\sqrt{H})}{K-K'} - \frac{G'}{H'}\frac{(1 - cof.\ t\sqrt{H'})}{K-K'}:$$

Ces deux valeurs de x & de y ſont complettes, parce qu'on doit avoir $x = o$ & $y = o$, lorſque $t = o$; & que $t = o$ donne $cof.\ t\sqrt{H} = 1$ & $cof.\ t\sqrt{H'} = 1$.

XXXVIII.

Il eſt évident que ſi H & H' ſont des quantités réelles & poſitives, les valeurs de x & de y ſeront infiniment petites, & que par conſéquent le navire ſera ſtable dans ſa poſition

XXXIX.

Mais ſi H & H' étoient des quantités réelles négatives, on trouveroit que les valeurs de x & de y dépendroient des logarithmes, & quainſi x & y augmenteroient ſans ceſſe : donc le navire n'auroit pas de ſtabilité.

XL.

Reſte encore à examiner ſi K & K', & par conſéquent auſſi H & H' ne peuvent pas devenir imaginaires; ou ſi K & K' étant réelles, ces deux valeurs ne peuvent pas être égales entr'elles.

Les équations $H = A - KE$, $H = \frac{KD - B}{K}$ donnent

$$K = \frac{A - D + \sqrt{4BE + (D - A)^2}}{2E},$$

$$K' = \frac{A - D - \sqrt{4BE + (D - A)^2}}{2E};$$

$$H = \frac{A + D - \sqrt{4BE + (D - A)^2}}{2},$$

$$H' = \frac{A + D + \sqrt{4BE + (D - A)^2}}{2}:$$

or par l'article XXIII les deux termes B & E ſont toujours de même ſigne : d'où il ſuit évidemment que les deux valeurs de K ne peuvent jamais être égales ni imaginaires.

X L I.

Par conſéquent, toutes les loix de la ſtabilité ſe réduiſent uniquement à faire en ſorte que H & H', qui ſont toujours réelles, ſoient toujours poſitives : or pour que H & H' ſoient poſitives, il faut

1°. Que $A + D$, c'eſt-à-dire $\frac{g\pi cc}{pN} + \frac{g\pi(Mh + m\theta a^3 + m\theta' b^3)}{pK}$ ſoit une quantité poſitive : condition, qui ſera toujours remplie, lorſque h ſera une quantité poſitive, & qui ne ceſſera d'avoir lieu que lorſque h étant négative, on auroit de plus

$$\frac{g\pi Mh}{pR} > \frac{g\pi cc}{pN} + \frac{g\pi(m\theta a^3 + m\theta' b^3)}{pR}.$$

2°. Qu'on ait $A + D > \sqrt{4BE + (D - A)^2}$, ou ſimplement $AD > BE$, c'eſt-à-dire

$$\frac{g\pi cc}{pN} \times \frac{g\pi(Mh + m\theta a^3 + m\theta' b^3)}{pR} > \frac{g\pi mccK}{pR} \times \frac{g\pi(Ca^2 - C'b^2)}{pN}$$

condition qui ſera évidemment remplie, lorſque h ſera poſitive, & qui ne ceſſera d'avoir lieu que lorſque h étant négative, on auroit de plus le premier membre de cette inégalité plus petit que le ſecond.

X L I I.

Sur toutes ces conſidérations, on voit qu'abſtraction faite des mesures précises qu'on peut lire dans les équations mêmes, la stabilité du navire, dans le cas général comme dans le cas de $\beta a^2 = \beta' b^2$, dépend de la profondeur du centre de gravité : on voit aussi qu'on diminuera l'amplitude des oscillations en augmentant cette profondeur. Il ne nous reste plus qu'à déterminer la longueur du pendule sur lequel doivent se règler ces oscillations.

XLIII.

En comparant à l'équation ordinaire des pendules les équations qui expriment, l'une le mouvement d'ascension du centre de gravité, l'autre le mouvement de rotation du navire autour du même centre, il est clair qu'en général ces deux mouvements ne sont ni synchrones ni isochrones dans chaque espèce; mais ici je les supposerai tels, afin de me borner au cas le plus commun dans la nature : or pour remplir ces deux conditions tout-à-la-fois, il faut qu'on ait la proportion

$$Ax - By - C : Dy - Ex - F :: x : y;$$

c'est-à-dire que le rapport de x à y doit être un rapport constant. Soit donc $y = rx$, r étant un coëfficient constant que nous déterminerons ci-dessous, & mettons cette valeur dans l'équation F, nous aurons

$$ddx = (A - Br)\left(\frac{C}{A-Br} - x\right) dt^2 :$$

d'où il est aisé de conclure, par la méthode de l'article XXXII, que nommant l la longueur du pendule cherché, on aura

$$l = \frac{g}{A - Br} = \frac{pN}{\pi cc - \pi r\,(\beta a^2 - \beta b^2)}.$$

XLIV.

Quant à la valeur de r, elle se trouvera en cherchant une seconde valeur de l : mettons donc pour x

sa valeur $\frac{y}{r}$ dans l'équation (G), & nous aurons

$$ddy = \left(D - \frac{E}{r}\right)\left(\frac{F}{D - \frac{E}{r}} - y\right) dt^2;$$

d'où l'on tire encore $l = \frac{g}{D - \frac{E}{r}}$. Comparant ensemble les deux valeurs de l, on aura $\frac{g}{A - Br} = \frac{g}{D - \frac{E}{r}}$.

ou bien $Brr - Ar + Dr - E = 0$,
équation qui donnera deux valeurs de r, dont chacune résoudra également le problême.

Je ne m'étends pas davantage sur ces recherches & sur les conséquences qui en résultent, parce que ce détail n'a aucune difficulté.

X L V.

Scholie général. Jusqu'ici nous avons considéré séparément les mouvements de tangage & de roulis; mais il peut arriver, comme nous l'avons déjà dit, que le navire tangue & roule tout-à-la-fois, & qu'il soit même agité en toutes sortes de sens. Ainsi il nous reste encore à examiner le systême de ces différents mouvements, pour résoudre le problême dans toute sa généralité. Ce n'est qu'à l'aide d'une pareille recherche qu'on peut donner aux règles de l'arrimage toute la perfection dont elles sont susceptibles.

X L V I.

Probleme III.

Determiner en général les oscillations d'un navire.

lorsque son centre de gravité & celui de sa carêne ne sont pas dans une même ligne verticale.

SOLUTION.

FIG. 2, 3, 4, 6. Soient *ADHTEB* (*fig.* 2), la coupe longitudinale du navire, coupe dans laquelle se trouvent le centre de gravité du navire & la verticale *GC* élevée par ce centre : *DOEo* (*fig.* 3), la coupe horisontal faite à fleur d'eau : $\varepsilon\nu\delta$ (*fig.* 4), la coupe latitudinale passant par le centre de gravité, coupe dans laquelle la droite $\mu G \zeta$ représente l'axe horisontal passant par le centre de gravité; & νy (*fig.* 6), la coupe faite par la verticale *GC* & par le point *F* centre de gravité de la carêne au premier instant : *L* (*fig.* 3), le point où la verticale élevée par le centre de gravité de la carêne rencontre l'axe diagonal $\&y$. De ce point *L* soient abbaissées sur *DE* & sur $\delta\varepsilon$ les perpendiculaires *Lr*, *Lq*.

Maintenant (*art.* VIII), le navire montera verticalement & pirouettera sur son centre de gravité. Or il est évident que, vu la place occupée par le centre de gravité *F* de la carêne au premier instant, les mouvements seront tels qu'il sortira de l'eau

1°. Un prisme ayant pour base la figure *DOEo* (*fig.* 3), & pour hauteur le chemin du centre de gravité du navire;

2°. Un onglet formé par la rotation de la partie *DoE* autour de *DE*;

3°. Un onglet formé par la rotation de $D\varepsilon\delta$ autour de $\varepsilon\delta$;

Qu'au contraire il s'enfoncera dans l'eau

1°. Un onglet formé par la rotation de *DOE* autour de *DE*;

2°. Un onglet formé par la rotation de $E\varepsilon\delta$ autour de $\varepsilon\delta$:

Ainsi

Ainsi

Supposant

L'aire $E\varepsilon\delta$. . . . . $= aa$
L'aire $D\varepsilon\delta$. . . . . $= bb$
L'aire entière $DOEo$. . . . . $= aa + bb = cc$
La distance du centre de gravité S de cette aire au point C. . . . . $= k$
Lq. . . . . $= f$
Lr. . . . . $= f'$
La hauteur Gf (*fig.* 2) du centre de gravité de la carêne au dessus de celui du navire. . . . . $= h$
La distance d'un point donné au centre de gravité du navire. . . . . $= m$
L'espace parcouru verticalement par le centre de gravité. . . . . $= x$
L'espace parcouru circulairement dans le plan $ADH\Gamma EB$ (*fig.* 2), à la distance m du centre de gravité. . . . $= y$
L'espace parcouru circulairement dans le plan $\varepsilon V\delta$ (*fig.* 4) à la même distance. . . . . $= z$
L'onglet formé par la rotation de $E\varepsilon\delta$ (*fig.* 3) autour de $\varepsilon\delta$. . . . . $= \beta a^2 y$
Le moment de cet onglet par rapport à l'axe $\mu G \beta$ (*fig.* 4). $= \theta a^3 y$
L'onglet formé par la rotation de $D\varepsilon\delta$ autour de $\varepsilon\delta$ (*fig.* 3). . . . . $= \beta' b^2 y$
Le moment de cet onglet par rapport à $\mu G\beta$. . . $= \theta' b^3 y$
L'onglet formé par la rotation de $D\varepsilon E$ ou de $D\delta E$ autour de DE. . . . . $= \beta'' c^2 z$
Le moment de cet onglet par rapport à l'axe longitudinal passant par le centre de gravité. . . $= \theta'' c^3 z$
L'élément du temps. . . . . $= dt$
Le volume du navire. . . . . $= N$
Celui de la carêne au premier instant. . . . . $= M$
La gravité. . . . . $= g$
La densité du lest ou de la charge. . . . . $= p$
La densité de l'eau. . . . . $= \pi$

il est visible qu'après le temps t, la carêne du navire sera $= M - ccx + \beta a^2 y - \beta' b^2 y + \beta'' c^2 z - \beta'' c^2 z = M - ccx + \beta a^2 y - \beta' b^2 y$, & que la force absolue qui soulève le centre de gravité, sera $= g\pi(M - ccx + (\beta a^2 - \beta' b^2)y) - gpN$; ainsi on aura cette première équation

(*A*) $[g\pi(M - ccx + (\beta a^2 - \beta b^2)y) - gpN]\,dt^2 = pNddx.$

Il n'eſt pas moins clair par tout ce qui précède que le moment de la pouſſée de l'eau par rapport à l'axe longitudinal eſt $g\pi\left[M\left(f' - \frac{hz}{m}\right) - 2\theta'' c^3 z\right]$. & que le moment de la pouſſée par rapport à l'axe latitudinal eſt $g\pi\left[M\left(f - \frac{hy}{m}\right) + cckx - \theta a^3 y - \theta' b^3 y\right]$. Ces deux moments produiſent le pirouettement du navire ſur ſon centre de gravité, comme je vais l'expliquer.

Imaginons trois plans perpendiculaires entr'eux, qui conſervent la même poſition dans l'eſpace abſolu, de manière que leur ſyſtême ne faſſe que s'élever avec le centre de gravité du navire; le premier horiſontal & paſſant par le centre de gravité du navire; le ſecond vertical, paſſant par le centre de gravité du navire & par l'axe *DE* au premier inſtant; le troiſième vertical paſſant par le centre de gravité & par l'axe $\varepsilon\delta$ au premier inſtant. Ces trois plans ſont reſpectivement repréſentés par *XGV*, *OGV*, *OGX*

FIGURE 7 (*fig.* 7), en ſorte que *GV* eſt la ſection commune des deux premiers, *GX* la ſection commune du premier & du troiſième, *OG* la ſection commune des deux derniers. Suppoſons qu'un élément dN du navire placé en *R*, durant l'inſtant dt, parcoure parallèlement à *GV* l'eſpace *Rr*, parallèlement à *GX* l'eſpace *Rz*, parallèlement à *GO* l'eſpace *Rx*. Du point *R* ſoit abbaiſſée ſur le plan *VGX* la perpendiculaire *RZ*, & ſoit tirée *ZV* perpendiculaire à *GV*. Soient, outre les dénominations précédentes,

GV. . . . . $= q$
VZ. . . . . $= r$
ZR. . . . . $= s$:

l'élément dN aura parallèlement à *GV* une force représentée par $pdN \times \frac{ddq}{dt^2}$; parallèlement à GX une force représentée par $pdN \times \frac{ddr}{dt^2}$, parallèlement à GO une force représentée par $pdN \times \left(\frac{ddx + dds}{dt^2}\right)$. En vertu de la première force, le navire aura autour de l'axe GX un moment de résistance représenté par $\int spdN. \frac{ddq}{dt^2}$, & autour de l'axe GO un moment représenté par $\int rpdN. \frac{ddq}{dt^2}$; en vertu de la seconde force, le navire aura autour de l'axe GV un moment représenté par $\int spdN. \frac{ddr}{dt^2}$, & autour de l'axe GO un moment représenté par $\int qpdN. \frac{ddr}{dt^2}$. Enfin en vertu de la troisième force, le navire aura autour de l'axe GX un moment représenté par $\int qpdN. \left(\frac{ddx + dds}{dt^2}\right)$, & autour de l'axe GV un moment représenté par $\int rpdN. \left(\frac{ddx + dds}{dt^2}\right)$. Or de tous ces moments particuliers, il est visible qu'il résultera autour de l'axe GV un moment unique représenté par $\int rpdN \left(\frac{ddx + dds}{dt^2}\right) - \int spdN. \frac{ddr}{dt^2}$; autour de l'axe GX un moment unique représenté par $\int qpdN. \left(\frac{ddx + dds}{dt^2}\right) - \int spdN. \frac{ddq}{dt^2}$; enfin autour de l'axe GO un moment unique représenté par $\int qpdN. \frac{ddr}{dt^2} - \int rpdN. \frac{ddq}{dt^2}$.

Cela posé, le premier de ces moments doit faire équilibre par sa réaction au moment de la poussée de l'eau par rapport à l'axe longitudinal : ainsi on aura l'équation

$$(B) \quad g\pi\left[M\left(f' - \frac{hz}{m}\right) - 2\theta'' c^3 z\right] = \int rpdN. \left(\frac{ddx+dds}{dt^2}\right) - \int spdN. \frac{ddr}{dt^2};$$

le second moment fait équilibre au moment de la pouſſée de l'eau par rapport à l'axe latitudinal; ce qui donne l'équation

$$(C)\quad g\pi\left[M\left(f-\frac{hy}{m}\right)+cckx-(\theta a^3+\theta' b^3)y\right]=\int lpdN\left(\frac{ddx+dds}{dt^2}\right)-\int spdN.\frac{ddq}{dt^2}:$$

Enfin le troiſième moment ſera égal à zéro; c'eſt-à-dire qu'on aura

$$(D)\quad \int qpdN.\frac{ddr^2}{dt^2}-\int rpdN.\frac{ddq}{dt^2}=o.$$

Ces quatre équations donneront tous les mouvements du navire, ſi l'on peut parvenir à réduire les variables qui y entrent à quatre ſeulement, ſans compter le temps t.

XLVII

Remarque. Les deux équations (B) & (C) peuvent ſe ſimplifier, en obſervant que comme ddx eſt le même pour tous les points du navire, au lieu de $\int rpdN.\frac{ddx}{dt^2}$ & de $\int qpdN.\frac{ddx}{dt^2}$, on peut écrire $\frac{ddx}{dt^2}\int rpdN$ & $\frac{ddx}{dt^2}\int qpdN$: or par la propriété du centre de gravité $\int rpdN=o$, $\int qpdN=o$: par conſéquent, les deux équations (B) & (C) deviendront

$$(E)\quad g\pi\left[M\left(f'-\frac{hz}{m}\right)-2\theta'' c^3 z\right]=\int rpdN.\frac{dds}{dt^2}-\int spdN.\frac{ddr}{dt^2}$$

$$(F)\quad g\pi\left[M\left(f-\frac{hy}{m}\right)+cckx-(\theta a^3+\theta' b^3)y\right]=\int qpdN.\frac{dds}{dt^2}-\int spdN.\frac{ddq}{dt^2}.$$

XLVIII.

Entre les différents moyens qu'on peut employer pour parvenir à la réduction dont nous avons parlé, voici celui qui m'a parû le plus ſimple; il eſt fondé ſur l'article IX, & l'idée en eſt due à M. D'alembert *. La figure 8 étant d'ailleurs la même que la figure 7; en ſorte que les mêmes lignes ſont déſignées par les mêmes lettres dans l'une & l'autre, imaginons de plus par le point G, un axe GP faiſant avec le

*Voy. ſes r cherches ſur la préceſſion des équinoxes. page 27 & ſuiv.

FIGURE 8

16

plan horisontal VGX un très-petit angle PGp, & avec le plan vertical OGV un angle aussi très-petit. Cet axe GP & sa projection Gp sur le plan horisontal VGX peuvent être considérés comme existants dans le plan vertical OGp, qui fait avec le plan OGV, l'angle pGp'. Par le point R, soit mené perpendiculairement à l'axe GP le plan RPQ, ensorte que PQ soit la section commune des deux plans RPQ, OGp; que RQ soit perpendiculaire sur PQ & que RP soit la droite qui joint les points R & P. Du point Q soit abbaissée sur le plan VGX la perpendiculaire QV', qui rencontrera nécessairement la projection Gp. Soient joints les points Z, V' par la droite ZV' qui sera nécessairement égale à RQ, puisque les droites RZ, QV' sont verticales & les droites RQ, ZV' horisontales. Enfin soit tiré Pq perpendiculaire sur QV'.

Maintenant, au lieu de rapporter le mouvement du point R aux trois coordonnées GV, VZ, ZR, concevons que, tandis que l'axe GP s'éloigne du plan VGX & que le plan OGp dans lequel se trouve cet axe tourne autour de la ligne immobile GO, le plan RPQ tourne aussi circulairement autour de l'axe GP, en demeurant toujours perpendiculaire à cet axe. Il est évident que ces différents mouvements donneront le vrai mouvement du point R dans l'espace absolu. Ainsi il ne s'agit plus que d'en exprimer analytiquement les conditions & d'en comparer les résultats avec ceux de l'article XLVI. Pour cela, conservant les dénominations susdites & observant que l'espace z parcouru circulairement dans le plan OGX peut être censé égal à l'espace parcouru circulairement autour de l'axe GP,

Supposons de plus $\begin{cases} GP \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda\,* \\ PR \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \psi \end{cases}$

* *Les quantités λ, ψ, ϖ, sont constantes, tant qu'on considère un même point du navire; mais elles deviennent variables dans le passage de ce point à celui qui lui est immédiatement contigu : ce qu'il faut bien observer pour la suite.*

Supposons de plus $\left\{\begin{array}{l} \text{L'angle } RPQ \text{ au premier instant, lorsque le plan } OGp \\ \text{se confondoit avec le plan } OGV \ldots\ldots\ldots\ldots = \varpi \\ \text{Le même angle après le temps } t \text{ écoulé} \ldots = \varpi + \zeta \\ \text{L'angle } PGp \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \xi \\ \text{L'angle } pGp' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = u \end{array}\right.$

on aura évidemment

$PQ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \psi . \, cos. \, (\varpi + \zeta)$
RQ ou $ZV' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \psi \, sin. \, (\varpi + \zeta)$
$Pp \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \lambda \, sin. \, \xi$
$Pq \ldots = PQ \times sin. \, \xi \ldots\ldots\ldots = \psi \, cos. \, (\varpi + \zeta). \, sin. \, \xi$
$Qq \ldots = PQ. \, cos. \, \xi \ldots\ldots\ldots = \psi \, cos. \, (\varpi + \zeta). \, cos. \, \xi$
$uV' \ldots = ZV'. \, sin. \, u \ldots\ldots\ldots = \psi \, sin. \, (\varpi + \zeta). \, sin. \, u.$

Donc 1°. ZR ou $V'Q = V'q + qQ = Pp + Qq = \lambda \, sin. \, \xi + \psi \, cos. \, (\varpi + \zeta). \, cos. \, \xi = \lambda \xi + \psi \, cos. \, (\varpi + \zeta) = \lambda \xi + \psi \, cos. \, \varpi - \psi \zeta \, sin. \, \varpi$, parce que les angles ζ, ξ sont supposés fort petits; ainsi

$$s = \lambda \xi + \psi \, cos. \, \varpi - \psi \zeta \, sin. \, \varpi.$$

2°. GV ou $Gu = Gp - Pq - uV' = \lambda - \psi . \, cos. \, (\varpi + \zeta) \, sin. \, \xi - \psi \, sin. \, (\varpi + \zeta) \, sin. \, u = \lambda - \psi \xi \, cos. \, \varpi - \psi u \, sin. \, \varpi$, en négligeant les infiniment petits du second ordre; ainsi

$$q = \lambda - \psi \xi \, cos. \, \varpi - \psi u \, sin. \, \varpi.$$

3°. $ZV = ZV' + uV = ZV' + GV \, sin. \, u = \psi \, sin. \, (\varpi + \zeta) + (\lambda - \psi \xi \, cos. \, \varpi - \psi u \, sin. \, \varpi) \, sin. \, u = \psi \, sin. \, \varpi + \psi \zeta \, cos. \, \varpi + \lambda u$, en négligeant toujours les infiniment petits du second ordre; ainsi

$$r = \psi \, sin. \, \varpi + \psi \zeta \, cos. \, \varpi + \lambda u.$$

Par conséquent, on aura

$ds = \lambda d\xi - \psi d\zeta \, sin. \, \varpi$	$dds = \lambda dd\xi - \psi \, sin. \, \varpi. \, dd\zeta$
$dq = - \psi \, cos. \, \varpi. \, d\xi - \psi \, sin. \, \varpi. \, du$	$ddq = - \psi \, cos. \, \varpi. \, dd\xi - \psi \, sin. \, \varpi. \, ddu$
$dr = \psi \, cos. \, \varpi. \, d\zeta + \lambda du$	$ddr = \psi \, cos. \, \varpi. \, dd\zeta + \lambda \, ddu.$

Mettons ces valeurs de s, q, r, dds, ddq, ddr dans les équations (E), (F), (D) en négligeant les infiniment petits du troisième ordre, & observant 1°. que $d\xi = dy$, $dd\xi = ddy$, parce que l'angle ξ

augmenté à chaque inſtant de la même quantité que l'angle y. 2°. Que comme ddz, ddy, ddu ſont les mêmes pour tous les points du navire, on peut les écrire au-devant du ſigne d'intégration. Par ces ſubſtitutions & ces remarques, les trois équations ſuſdites deviendront

$$(G)\quad g\pi\left[M\left(f'-\frac{hz}{m}\right)-2\theta''c^3z\right]=\frac{ddy}{dt^2}\int\lambda\psi\,\text{ſin.}\,\varpi.\,pdN$$
$$-\frac{ddz}{dt^2}\int\psi^2\left(\text{ſin.}\,\varpi^2+\text{coſ.}\,\varpi^2\right).\,pdN-\frac{ddu}{dt^2}\int\lambda\psi\,\text{coſ.}\,\varpi.\,pdN.$$

$$(H)\quad g\pi\left[M\left(f-\frac{hy}{m}\right)+cckx-\left(\theta a^3+\theta' b^3\right)y\right]=\frac{ddy}{dt^2}\int\left(\lambda\lambda+\psi^2\,\text{coſ.}\,\varpi^2\right).\,pdN$$
$$-\frac{ddz}{dt^2}\int\lambda\psi\,\text{ſin.}\,\varpi.\,pdN+\frac{ddu}{dt^2}\int\psi^2.\,\text{ſin.}\,\varpi.\,\text{coſ.}\,\varpi.\,pdN.$$

$$(K)\quad \frac{ddy}{dt^2}\int\psi^2\,\text{ſin.}\,\varpi.\text{coſ.}\,\varpi.\,pdN+\frac{ddu}{dt^2}\int\left(\lambda\lambda+\psi^2\,\text{ſin.}\,\varpi^2\right).\,pdN$$
$$+\frac{ddz}{dt^2}\int\lambda\psi\,\text{coſ.}\,\varpi.\,pdN=0.$$

XLIX.

Ces équations ſe ſimplifient conſidérablement, en obſervant que, comme le navire eſt diviſé en deux parties égales & ſemblables par le plan longitudinal, on a

$$\int\lambda\psi\,\text{ſin.}\,\varpi.\,pdN=0,\quad\int\psi^2.\,\text{ſin.}\,\varpi.\,\text{coſ.}\,\varpi.\,pdN=0;$$

d'où il ſuit que les trois équations précédentes deviendront

$$(L)\quad g\pi\left[M\left(f'-\frac{hz}{m}\right)-2\theta''c^3z\right]=-\frac{ddz}{dt^2}\int\psi^2\left(\text{ſin.}\,\varpi^2+\text{coſ.}\,\varpi^2\right).\,pdN$$
$$-\frac{ddu}{dt^2}\int\lambda\psi\,\text{coſ.}\,\varpi.\,pdN.$$

$$(M)\quad g\pi\left[M\left(f-\frac{hy}{m}\right)+cckx-\left(\theta a^3+\theta' b^3\right)y\right]=\frac{ddy}{dt^2}\int\left(\lambda\lambda+\psi^2\,\text{coſ.}\,\varpi^2\right).\,pdN.$$

$$(N)\quad \frac{ddu}{dt^2}\int\left(\lambda\lambda+\psi^2\,\text{ſin.}\,\varpi^2\right)pdN+\frac{ddz}{dt^2}\int\lambda\psi\,\text{coſ.}\,\varpi.\,pdN=0;$$

Supposons, pour abréger le calcul, $\int \psi^2 . \left(\sin. \varpi^2 + \cos. \varpi^2\right) pdN$ ou $\int \psi^2 . \, pdN = pP$; $\int \lambda \psi \cos. \varpi . \, pdN = pQ$;

$\int\left(\lambda\lambda + \psi^2 . \cos. \varpi^2\right) pdN = pR$; $\int\left(\lambda\lambda + \psi^2 \sin. \varpi^2\right) pdN = pS$:

ces quantités P, Q, R, S, sont données par la figure du navire : on aura les équations

$$(P) \quad g\pi\left[M\left(f' - \frac{hz}{m}\right) - 2\theta'' c^3 z\right] = - pPddz - pQddu;$$

$$(Q) \quad g\pi\left[M\left(f - \frac{hy}{m}\right) + cckx - \left(\theta a^3 + \theta' b^3\right) y\right] = pRddy;$$

$$(R) \quad Qddz + Sddu = 0:$$

lesquelles, avec l'équation

$$(A) \quad g\pi\left[M - ccx + \left(\epsilon a^2 - \epsilon' b^2\right) y\right) - gpN\right] dt^2 = pNddx$$

donneront d'une manière fort simple tous les mouvements du navire.

L.

En effet l'équation (R) donne $u = - \frac{Qz}{S}$: Mettons pour $Qddu$ sa valeur $- \frac{QQddz}{S}$ dans l'équation (P), & nous aurons

$$g\pi\left(M\left(f' - \frac{hz}{m}\right) - 2\theta'' c^3 z\right) = p . \left(\frac{QQ}{S} - P\right) ddz;$$

d'où l'on tire

$$(S) \quad z = \frac{Mf'm}{Mh + 2\theta'' c^3 m} \times \left(1 - \cos. t \sqrt{\frac{g\pi}{mp} . \left(\frac{MhS + 2\theta c^3 mS}{QQ - PS}\right)}\right);$$

& par conséquent

$$(T) \quad u = - \frac{Q}{S} \times \frac{Mf'm}{Mh + 2'' c^3 m} \times \left(1 - \cos. t \sqrt{\frac{g\pi}{mp} . \left(\frac{MhS + 2\theta c^3 mS}{QQ - PS}\right)}\right).$$

les deux équations (A) & (Q) étant exactement de la même forme que les deux équations (A) & (B) de de l'article XXII, elles s'intègreront de la même manière qu'ont été intègrées ces deux dernières dans l'article XXXVII ; & on trouvera deux équations de cette forme,

$$(V) \qquad x = \frac{K}{K - K'} \times \frac{G'}{H'} \times \left(1 - cos.\, t \sqrt{H'} \right) - \frac{K'}{K - K'} \times \frac{G}{H} \times \left(1 - cos.\, t \sqrt{H} \right),$$

$$(X) \qquad y = \frac{G}{H} \times \frac{(1 - cos.\, t \sqrt{H})}{K - K'} - \frac{G'}{H'} \frac{(1 - cos.\, t \sqrt{H'})}{K - K'}.$$

Ces différentes équations expriment de la manière la plus générale tous les mouvements d'afcenfion, de roulis, de tangage & de rotation horifontale, dont le navire peut être agité tout-à-la-fois. Elles montreront à l'œil quel eft celui de ces mouvements qui domine ; & on en tirera des règles d'arrimage, foit pour augmenter la ftabilité du navire, foit pour diminuer l'amplitude & la vîteffe des ofcillations dont on eft le plus incommodé. Quoique cette difcuffion foit extrêmement facile, après tout ce que nous avons déjà dit, l'importance de la matière demande que nous ne la paffions pas totalement fous filence.

L I.

Mais avant que d'entrer dans ce détail, il eft à propos de prévenir une difficulté qui fe préfente au fujet des deux équations (S) & (T). Comme la quantité $QQ - PS$ peut être négative, les valeurs de z & de u femblent alors dépendantes des logarithmes, & par conféquent fujettes à augmenter fans ceffe. Mais il faut confidérer que, lorfque $PS > QQ$: au lieu de $QQ - PS$, on doit prendre $PS - QQ$: c'eft ce qu'on verra aifément, en remontant à l'équation (B) & aux fuppofitions fur lefquelles le calcul eft établi. La figure du navire eft telle en effet que $PS - QQ$ eft toujours une quantité pofitive. Nous supposerons donc que, dans les équations (T) & (V), au lieu de $QQ - PS$, il y ait $PS - QQ$; & nous ferons, pour abréger, $PS - QQ = A$.

LII.

Cela posé, revenons aux conséquences qui résultent de nos formules. Nous pourrions faire cet examen en général ; mais pour simplifier la question, je crois devoir négliger le mouvement d'ascension du centre de gravité, lequel est effectivement presque insensible.

Sur cette hypothèse, on aura les trois équations

$$y = \frac{Mfm}{Mh + 2m\theta a^3} \times \left(1 - cos.\, t \sqrt{\frac{g\pi}{mpR} \cdot (Mh + 2m\theta a^3)}\right);$$

$$z = \frac{Mf'm}{Mh + 2m\theta'' c^3} \times \left(1 - cos.\, t \sqrt{\frac{g\pi S}{mpA} \cdot (Mh + 2m\theta c^3)}\right);$$

$$u = -\frac{Q}{S} \times \frac{Mf'm}{Mh + 2m\theta'' c^3} \times \left(1 - cos.\, t \sqrt{\frac{g\pi S}{mpA} \cdot (Mh + 2m\theta c^3)}\right).$$

LIII.

On voit par la méthode des articles XXVII, XXVIII, XXIX, XXX que le navire aura de la stabilité en toutes sortes de sens, lorsque son centre de gravité sera placé au-dessous de celui de la carêne; mais qu'il cesseroit d'en avoir, si son centre de gravité étoit au-dessus de celui de la carêne, & qu'on eût de plus, relativement aux mouvements de tangage, $Mh =$ ou $> 2m\theta a^3$, & relativement aux mouvements de roulis & de rotation horisontale, $Mh =$ ou $> 2m\theta'' c^3$. La règle d'arrimage qui suit delà est pareille à celle des articles cités.

L I V.

Il n'eſt pas moins évident (*art. XXX*) qu'on diminuera l'amplitude abſolue des mouvements de tangage & de roulis, en faiſant deſcendre de plus en plus le centre de gravité du navire. Quant à celle des mouvements de rotation horiſontale, elle diminuera par le même expédient, & de plus, elle diminuera encore par la diminution de la fraction $\frac{Q}{S}$. Or ſi l'on obſerve que, conſéquemment aux ſuppoſitions de l'article XLIX, la quantité Q eſt égale à la ſomme des produits des particules du navire par leurs diſtances aux deux plans VGX, OGX, & que la quantité S eſt égale à la ſomme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs diſtances au plan OGX, plus à la ſomme des produits des mêmes particules par les quarrés de leurs diſtances au plan OGV, il eſt viſible qu'on rendra preſque nuls les mouvements de rotation horiſontale.

1°. En diſtribuant la charge à peu près de la même manière, ou de part ou d'autre du plan horiſontal qui paſſe par le centre de gravité du navire, ou de part & d'autre de la coupe latitudinale paſſant par le même centre.

2°. En tranſportant horiſontalement vers la proue & vers la poupe quelques poids fort peſants, & les écartant le plus que l'on pourra de la coupe longitudinale.

Ces conditions étant toujours aſſez bien remplies, les mouvements de rotation horiſontale ſont preſque entièrement inſenſibles.

L V.

Enfin ſoient l, l', l'' les longueurs reſpectives des pendules ſynchrones aux mouvements de tangage, de roulis & de rotation horifontale : on trouvera

$$l = \frac{mpR}{\pi(Mh + 2m\theta a^3)};$$

$$l' = \frac{mp.\frac{A}{S}}{\pi(Mh + 2m\theta'' c^3)};$$

$$l'' = \frac{mp.\frac{A}{S}}{\pi(Mh + 2m\theta'' c^3)}.$$

La première formule fait voir qu'on diminuera la vîteffe des mouvements de tangage, ou en faifant monter le centre de gravité, ou bien en augmentant la quantité R, qui repréfente la fomme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs diftances au plan vertical OGX, plus la fomme des produits des mêmes particules, par les quarrés de leurs diftances au plan horifontal VGX. Or il eft évident qu'on augmentera R, fi l'on tranfporte quelques poids fort pefants vers la proue & vers la poupe, & qu'on écarte de plus, autant qu'il eft poffible, ces mêmes poids du plan horifontal paffant par le centre de gravité du navire. Les vaiffeaux armés en guerre ont, à cet égard, un grand avantage fur les vaiffeaux démâtés & fans artillerie. Cet avantage confifte en ce que la mâture & l'atillerie ajoutent des poids, qui font à une diftance confidérable de la coupe latitudinale & du plan horifontal paffant par le centre de gravité.

Les deux autres formules par lefquelles on voit d'abord que les mouvements de roulis & de rotation horifontale fe font dans le même temps, indiquent que, pour diminuer la vîteffe de ces mouvements, il faut, ou faire monter le centre de gravité du na-

vire, ou bien augmenter $\frac{A}{S}$, c'eſt-à-dire $\frac{PS - QQ}{S}$.
C'eſt à quoi on parviendra en augmentant P & S & diminuant Q.

Or 1°. on augmentera P, qui exprime la ſomme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs diſtances à l'axe longitudinal GV, en écartant des poids fort peſants de cet axe.

2°. On augmentera S en écartant le plus que l'on pourra quelques poids fort peſants, tant de la coupe longitudinale que de la coupe latitudinale, paſſant par le centre de gravité. On voit que P & S augmentent par la même opération en partie.

3°. On diminuera Q, comme on a déjà vu, en diſtribuant la charge de la même manière, ou de part & d'autre du plan horiſontal qui paſſe par le centre de gravité du navire, ou de part & d'autre de la coupe latitudinale paſſant par le même centre. Ici on remarquera, au ſujet des mouvements de rotation horiſontale, que leur vîteſſe & leur amplitude diminuent tout à la fois par la diminution de Q. On voit auſſi que ces ſortes d'oſcillations ont une durée aſſez conſidérable, relativement à leur grandeur : nouvelle raiſon pour qu'elles ſoient preſque inſenſibles.

L V I.

Je ſupprime pluſieurs autres remarques qui dérivent de nos principes; l'objet d'un Mémoire Académique n'étant pas de pourſuivre toutes les vérités juſques dans leurs dernières branches, mais d'en produire des germes féconds & faciles à développer. Je me flatte d'avoir ſuffiſamment approfondi une matière, qui à peine avoit été effleurée. Il ne me reſte plus qu'à rendre raiſon pourquoi j'ai toujours négligé la réſiſtance que le navire éprouve de la part de l'eau en oſcillant. J'en ai agi ainſi, parce que les oſcillations ayant toujours été ſuppoſées fort petites, leur vîteſſe eſt auſſi très-petite : par conſéquent le quarré de cette vîteſſe, qui entre dans l'expreſſion de la réſiſtance (*art.* IV & V) rend cette même réſiſtance infiniment petite du ſecond ordre, ou de nulle conſidération.

LVII.

L'hypothèſe des oſcillations fort petites a facillité le moyen d'établir des règles d'arrimage, qui précautionneront le navire contre les plus grands efforts des vagues. Dans cette recherche, on a été fondé à faire abſtraction de toutes les ſecouſſes violentes qu'a pu éprouver le navire, avant que ſes balancements devinſſent permanents & réguliers. Mais nous ne devons pas finir ce chapitre, ſans obſerver qu'on rallentira conſidérablement ces agitations antérieures, en augmentant la réſiſtance de l'eau que le navire ſouffre en oſcillant & celle que ſouffre *l'acaſtillage* en frappant l'air. L'augmentation dont il s'agit dépend principalement de la figure du navire; mais on y peut auſſi contribuer en quelque choſe, par le moyen de l'arrimage : c'eſt pourquoi je vais encore déterminer en général la réſiſtance qu'éprouve une courbe *donnée* en oſcillant autour de ſon centre de gravité dans un fluide quelconque. Je me contenterai de conſidérer une courbe diviſée en deux parties égales & ſymmétriques par ſon axe; & je regarderai ſon centre de gravité comme immobile.

LVIII.

PROBLEME IV.

FIG 9. *Trouver la réſiſtance qu'éprouve la courbe ſymmétrique*

BAO posée verticalement dans un fluide, en oscillant autour de son centre de gravité G, regardé comme immobile.

SOLUTION.

Ayant pris l'élément *Mm* de la courbe, soient menés les rayons *GM*, *Gm* & soit décrit l'arc *Mr*;

Supposons
- *GM*. . . . . $= z$
- *Mm*. . . . . $= dS$
- Le sinus total. . . . . $= 1$
- La vîtesse initiale de rotation pour le rayon 1. . . $= u$
- Et par conséquent la vîtesse du point *M*. . . . . $= zu$.

Puisque la courbe tourne autour du point *G*, il est évident que l'élément *Mm* se présentera au choc du fluide sous un angle d'incidence égal à l'angle *mMr*: donc l'impulsion perpendiculaire que reçoit *Mm* sera exprimée (*art.* IV.) par $ds \times zzuu \times (\textit{sin. angl. } mMr)^2 = ds \times zzuu \times \frac{dz^2}{ds^2} = \frac{zzuudz^2}{ds}$, en faisant abstraction de la densité du fluide. Qu'on prenne *mn* perpendiculaire à *Mm* pour représenter cette force & qu'on la décompose en deux autres, *mq*, *qn*, dont la première soit dirigée suivant *Gm* & l'autre soit perpendiculaire à *Gm*: il est clair que la force *mq* doit être négligée, puisqu'elle est détruite par la résistance du point *G* que l'on suppose immobile & qu'il ne faut avoir égard qu'à la force *qn*. Or à cause des triangles *Mrm*, *mqn*, qui sont évidemment semblables, puisque les côtés qui forment les angles aigus *M* & *m* sont perpendiculaires chacun à chacun, la force *qn* aura pour valeur $\frac{zzuudz^2}{ds} \times \frac{dz}{ds} = \frac{zzuudz^3}{ds^2}$. Multipliant cette force par son bras de levier z, intégrant de maniere que l'abcisse

AP correſpondante à l'arc *AM* devienne égale à l'axe entier *AD*; & doublant l'intégrale, on aura $2\,uu \int \frac{z^3\,dz^3}{ds^2}$ pour le moment de la réſiſtance que toute la courbe oppoſe au premier inſtant au mouvement d'oſcillation.

L I X.

Ce problême, comme nous l'avons annoncé, fournit le moyen de diminuer la propagation des balancements du navire.

En effet il eſt bien évident que, toutes choſes d'ailleurs égales, les balancements du navire ſe perpétueront d'autant moins que le moment de la réſiſtance qu'éprouve le navire en oſcillant ſera plus grand. Or on voit par la formule précédente que le moment de la réſiſtance augmentera, à meſure que le centre de gravité du navire s'éloignera du point où il auroit été placé, ſi le navire avoit été homogène. Ainſi, à toutes les raiſons qui nous ont déterminé à abbaiſſer le centre de gravité du navire, ſoit pour augmenter la ſtabilité, ſoit pour diminuer l'amplitude de ſes oſcillations, nous pourrons ajouter qu'on parviendra encore par ce moyen à diminuer la propagation de ces balancements dont on eſt tourmenté par une mer groſſe.

CHAPITRE TROISIÉME.

Des changements qu'on peut faire en mer à l'arrimage, pour faire mieux porter la voile au navire.

L X.

LORSQU'UN navire cingle en mer, il eſt pouſſé par le vent qui frappe ſes voiles & il eſt retardé par la la résistance de l'eau qu'il est obligé de fendre. Au commencement du mouvement, l'impulsion du vent est plus forte que la résistance de l'eau : d'où il résulte que la vîtesse du navire s'accélère par degrés : mais cette accélération parvient bientôt à son terme; la resistance de l'eau suspend entièrement l'action du vent, & le navire ne fait plus que conserver, en vertu de son inertie, le mouvement qu'il a acquis précédemment.

L X I.

L'objet qu'on doit se proposer en équippant un vaisseau est, comme nous l'avons dit, article XIV, de lui donner les lignes d'eau projettées par le constructeur, parce qu'il est toujours à croire qu'elles sont meilleures que toutes celles qu'on pourroit prendre au hasard. Or, pour arriver à ce but, la mâture & l'arrimage doivent être tellement combinés que l'impulsion du vent sur les voiles & la résistance de l'eau se fassent mutuellement équilibre, ensorte que le navire puisse conserver l'assiette convenable. Voyons donc qu'elles sont les loix de cet équilibre.

L X I I.

En premier lieu, soit $ADHTEB$ un navire, ou plutôt le profil d'un navire cinglant suivant la route directe Dd. Soit GP une verticale menée par le centre de gravité G du navire & par celui de la carêne. Supposons que XV représente la direction de la résultante de tous les efforts perpendiculaires de l'eau contre la proue, ZK la direction de la résultante de tous les efforts perpendiculaires du vent contre les voiles; ces deux résultantes se détermineront par les articles IV & V, comme on peut le voir dans l'ouvrage de M. Euler, ou dans celui de M. Bouguer. Soient prises SK pour représenter l'effort actuel du FIG. 10.

vent ſur les voiles, effort que je ſuppoſe horiſontal pour abréger; XN pour repréſenter la réſiſtance de l'eau; & ſoit décompoſée cette force XN en deux autres XM, XO, l'une verticale, l'autre horiſontale. Soit prolongée XO juſqu'à ce qu'elle rencontre la verticale GP en quelque point Q. Cela poſé,

1°. Pour que le mouvement de tranſlation horiſontale reſte uniforme, il faut que l'on ait $SK = XO$.

2°. Pour que le navire ne prenne aucun mouvement d'oſcillation ſur ſon centre de gravité, il faut que les moments des forces ſuſdites ſe faſſent équilibre, c'eſt-à-dire qu'on ait $XO \times GQ + XM \times XQ = SK \times GS$. Je n'ai pas beſoin d'avertir que, dans le cas où la droite XQ paſſeroit au-deſſous du centre de gravité du navire, le moment de la force XO ſeroit négatif dans l'équation précédente.

Lorſque ces deux conditions ſeront remplies à-la-fois, le navire ſe mouvra uniformément, en vertu du mouvement déjà acquis; & il n'aura aucun mouvement rotatoire ſur ſon centre de gravité : ſeulement il faut obſerver que ce centre ſera ſoulevé ſuivant la verticale GP par la force XM & que l'effet de cette force ne peut être détruit que par un poids égal placé ſur la verticale SG.

LXIII.

On peut établir les loix de l'équililibre en queſtion d'une autre manière plus ſimple, que je vais expoſer, parce qu'elle eſt fort commode pour le ſillage oblique.

Il eſt évident qu'il y aura équilibre, du moins autant qu'il eſt poſſible, entre l'impulſion du vent & la réſiſtance de l'eau, lorſque ces deux forces ſeront égales & directement oppoſées autant qu'il eſt poſſible. Or il faut pour cela que ces deux forces ſe rencontrent en quelque point S ſur la verticale GP & de-plus que, prenant SV pour repréſenter la réſiſtance de l'eau, & décomposant cette force en deux autres SR, SP, l'une horisontale, l'autre verticale, on ait $SR = SK$.

Quant à la force SP, elle ne peut jamais être détruite que par un poids égal & contraire.

Du reste, si la force du vent n'étoit pas horisontale, comme nous l'avons supposée, il faudroit la décomposer en deux autres forces, l'une horisontale, l'autre verticale, dont on voit bien les effets, sans que je m'arrête plus longtemps là-dessus.

LXIV.

En second lieu, supposons que le navire cingle suivant la route oblique LS (*fig. 11*), ensorte que DLS soit l'angle de la *derive*. Soient $D \varepsilon E \delta$ la coupe horisontale du navire à fleur d'eau; $yYL\&$ la direction horisontale de la résistance horisontale de l'eau, laquelle rencontre l'axe DE au point L; $Y\mu\&$ (*fig. 12*), la coupe verticale du navire faite suivant l'axe diagonal $Y\&$; XSV la direction de la résistance absolue de l'eau; ZK la direction de l'effort du vent que je suppose toujours horisontale. Cela posé, les voiles, qui ne reçoivent le choc du vent que dans le sens perpendiculaire, doivent avoir une disposition ef (*fig. 11*) perpendiculaire à $yYL\&$. Deplus, le centre d'effort des voiles qui se trouve toujours dans la coupe longitudinale $ADHTEB$ (*fig. 10*), doit aussi se trouver dans la coupe transversale $Y\mu\&$ (*fig. 12*). Enfin l'effort horisontal du vent doit être détruit par la résistance horisontale de l'eau. De tout cela, il résulte FIG. 11 & 12.

1°. Que les droites XV, ZK se rencontreront en S sur la verticale LS.

2°. Que, décomposant la résistance SV de l'eau en deux autres forces SP, SR, l'une verticale, l'autre horisontale ; & prenant SK pour repréſenter l'effort du vent, on aura $SK = SR$.

3°. Qu'il faudra mettre dans la direction LP un poids égal à la force SP, ſans quoi cette force tendroit à ſoulever le navire & même à le faire oſciller, dans le cas où elle ne paſſeroit pas par ſon centre de gravité.

L X V.

Les loix de l'équilibre entre l'impulſion du vent & la réſiſtance de l'eau étant ainſi déterminées, lorſqu'on ne s'y ſera pas exactement conformé en chargeant le navire dans le port, on pourra très-aiſément & en très-peu de temps corriger l'arrimage en mer.

Suppoſons, par exemple, que le navire donne du *nez* dans l'eau, on n'aura qu'à tranſporter quelques poids de la proue vers la poupe. On feroit l'opération inverſe, ſi le navire gliſſoit trop ſur la lame. J'en dis autant pour tous les autres cas : *mutatis mutandis*. Ces expédients ſont ſi ſimples & tombent tellement ſous le ſens commun, qu'il ſeroit ſans doute ridicule de les propoſer, ſi nous n'avions pas donné de plus les moyens de les mettre en œuvre par des principes certains. Le navigateur étant ſuppoſé connoître les dimenſions du vaiſſeau, ſa charge, l'angle de la dérive, la figure & la capacité de la carêne, la force & l'impulſion du vent, le centre d'effort des voiles, la réſiſtance de l'eau, il pourra déterminer au juſte, à l'aide des règles précédentes, les poids qu'il faut prendre pour remplir l'objet propoſé & l'effet infaillible qui réſultera de cette tranſpoſition.

L X V I.

Mais pour établir quelque choſe de plus précis ſur ce ſujet, examinons en détail les circonſtances des cauſes, qui enlèvent au navire la qualité de bien porter la voile. Ces causes sont les mouvements de roulis & de tangage.

Tous ceux qui ont fait quelques courses en mer sçavent que le navire a des mouvements plus rudes dans les calmes que lorsqu'il est poussé par un vent *bien fait*; qu'on roule le plus, lorsqu'on a *vent arrière*; qu'on tangue le plus, lorsqu'on court *au plus près*; qu'enfin on roule & on tangue le moins, losqu'on a vent *largue*. La raison de tous ces phénomènes est fort simple; car dans les calmes, il y a toujours une lame sourde, dont l'effet est très-sensible; au lieu que les lames n'ont pas beaucoup de prise sur un navire qui tient bien le vent; elles se prêtent, pour ainsi dire à ses mouvements. Lorsqu'on court, vent en poupe, le navire est soutenu par l'effort du vent & par la résistance de l'eau contre les vagues dirigées suivant la route; mais il est exposé au choc des lames latérales, qui viennent frapper ses flancs bas-bord & stribord : d'où il suit qu'on doit sentir principalement le roulis. Au contraire, un navire, qui court au plus près, n'est que très-peu soutenu vers la proue & vers la poupe par le vent & par la résistance de l'eau : ainsi il doit tanguer. Enfin un navire, qui court vent largue, doit avoir des mouvements doux; car l'effort du vent & de l'eau s'exerce, en partie perpendiculairement à la route, en partie perpendiculairement à la quille.

LXVII.

De ces expériences & de ces raisonnements, naissent les réflexions suivantes.

Lorsqu'après avoir saisi l'état d'équilibre entre l'impulsion du vent & la résistance de l'eau, on aura arrimé le vaisseau, conformément aux principes établis dans le chapitre précédent, on sera assuré que ce même vaisseau se comportera parfaitement en mer par un vent bien fait. Les troubles occasionnés par les lames dans l'équilibre dont nous avons parlé, ne produiront que de très-légers changements dans les oscillations du navire.

Lorsqu'on aura vent arrière & qu'on sera tourmenté par les roulis, on diminuera ces mouvements, en transportant bas-bord & stribord dans les flancs du vaisseau, quelques poids fort pesants (*art.* XXXIV).

Lorsqu'on courra au plus près, il faudra transposer des poids fort pesants vers la proue & vers la poupe, afin de diminuer les mouvements de tangage (*art.* XXXIV).

Enfin lorsqu'on aura vent largue & que le navire sera fatigué par des balancements composés de roulis & de tangage, on mettra en œuvre les expédients proposés dans les articles LIII, LIV, LV.

LXVIII.

Les remarques que je viens de proposer sur les changements qu'il faut faire à l'arrimage pour diminuer les oscillations du navire, peuvent être soumises à un calcul plus précis : nous n'avons, pour cela, qu'à déterminer en général les balancements qui résultent de l'impulsion du vent, de la résistance de l'eau, de la pesanteur & de la poussée verticale de l'eau, lorsque ces quatre forces ne sont pas dans un équilibre parfait.

Pour présenter la méthode d'une manière bien claire, je supposerai que le navire cingle suivant la route directe, ensorte que les quatre forces dont il s'agit seront dans la coupe longitudinale du navire. Outre que les résultats pour la route directe peuvent toujours s'appliquer à la route oblique, avec certaines modifications que le simple bon sens indique à peu près, si l'on combine cette solution avec les articles XLVI, XLVII, XLVIII, il sera très-facile de réſoudre le problême, dans le cas où les quatre forces ne ſont pas dans un même plan. Je regarderai de plus l'avant de la proue comme un ſimple plan incliné. Cette ſuppoſition pourra toujours ſe faire, ſans craindre aucune erreur ſenſible; car les oſcillations du navire étant fort petites, les variations qui peuvent arriver dans la réſiſtance de l'eau, ſuivront toujours à peu près la même loi, quelle que ſoit la figure de la proue.

LXIX.

PROBLEME.

Déterminer les oſcillations du navire, qui réſultent du defaut d'équilibre abſolu entre la peſanteur du navire, la pouſſée verticale de l'eau, l'impulſion du vent ſur les voiles & la réſiſtance de l'eau.

SOLUTION.

Soit $ADHTEB$ la figure du navire, ou plutôt ſa coupe longitudinale. Suppoſons qu'au bout d'un certain temps, le plan de flottaiſon du navire ſoit repréſenté par ed, qui peut être cenſé couper DE au point C ſur la verticale GC élevée par le centre de gravité G. Du point H ſoit élevée ſur DE la perpendiculaire HV; & du point C ſoient décrits les arcs Ex, Du. Soient ZS la direction moyenne de l'impulſion du vent que je ſuppoſe horiſontale pour abréger : XN la direction de la réſiſtance de l'eau contre dH, laquelle peut être cenſée perpendiculaire ſur un point connu de DH. Qu'on prenne XN pour repréſenter cette réſiſtance & qu'on la décompoſe en deux autres forces, XM, XQ, l'une verticale, l'autre horiſontale. Soit prolongée XO juſqu'à ce qu'elle rencontre la verticale GC. Par le centre de FIG. 134

gravité G du navire, ſoit menée GL perpendiculaire à de; & du point F, centre de gravité de la carêne au premier inſtant, ſoient menées Ff, Fo perpendiculaires ſur GC & ſur GL.

On voit par la nature des forces dont le navire eſt agité qu'il aura, indépendamment du mouvement uniforme primitif, deux mouvements accélérés ou retardés, l'un horiſontal, l'autre vertical; & qu'en même temps, il oſcillera ſur ſon centre de gravité : mais il faut obſerver

1°. Que, comme on ſuppoſe l'impulſion du vent à peu près égale à la réſiſtance horiſontale XO, la vîteſſe d'accélération qui naîtra de la différence de ces deux forces, doit être regardée comme infiniment petite par rapport à la vîteſſe primitive & uniforme du navire.

2°. Que la réſiſtance qui naît des différentes oſcillations du navire eſt nulle, en comparaiſon de la réſiſtance qui naît de la vîteſſe uniforme.

3°. Que le fonds HT, dans le cas où il ne feroit pas parallèle au plan de flottaiſon, recevra cependant toujours la même impulſion de l'eau; car, en vertu de l'oſcillation, il ſe préſenteroit au choc de l'eau ſous un angle infiniment petit; &, comme le quarré du ſinus de cet angle entreroit (*art.* V) dans l'expeſſion du choc provenant de l'oſcillation, il s'enſuit que ce même choc doit être reputé nul. Pour abréger, nous ſuppoſerons HT parallèle à DE, auquel cas il ne reçoit aucune ſorte de choc ſenſible.

Soient	La droite CE.	=	a
	La droite CD.	=	b
	Le plan de flottaiſon.	=	cc
	La diſtance du centre de gravité de ce plan au point C.	=	k
	Ff.	=	f
	Gf.	=	h

GQ

Soient	GQ	$= r$
	XQ	$= n$
	GS	$= q$
	DH	$= \lambda$
	HV	$= \mu$
	$DV = \sqrt{\lambda^2 - \mu^2}$	$= \varpi$
	Le fecond côté du rectangle égal à la proue	$= \phi$
	La vîteffe uniforme du navire	$= u$
	L'impulfion du vent	$= F$
	La diftance d'un point donné au point G	$= m$
	L'efpace parcouru verticalement par le centre de gravité	$= x$
	L'efpace parcouru horifontalement par le même point, en vertu de la fimple accélération	$= z$
	L'efpace parcouru circulairement autour de G à la diftance m	$= y$
	L'élément du temps	$= dt$
	Le volume du navire	$= N$
	La fomme des produits des particules du navire, par les quarrés de leurs diftances à un axe paffant par le point G & perpendiculaire au plan $ADHTEB$	$= R$
	L'onglet formé par la rotation de la partie du plan de flottaifon repréfentée par CE au profil, autour d'un axe paffant par le point C & perpendiculaire à DE	$= \beta a^2 y$
	Le moment du même onglet par rapport à l'axe de rotation paffant par le point G	$= \iota a^3 y$
	L'onglet formé par la rotation de la partie du plan de flottaifon repréfentée par CD au profil, autour de l'axe paffant par le point C	$= \beta' b^2 y$
	Le moment du même onglet par rapport à l'axe paffant par le point G	$= \iota' b^3 y$
	Le volume de la carène au premier inftant	$= M$
	La gravité	$= g$
	La denfité de la charge	$= p$
	La denfité de l'eau	$= \pi$

Tout cela pofé, on aura évidemment $Du = \frac{by}{m}$. & les triangles HVD, Dud qu'on peut regarder comme ſemblables, donneront $Dd = \frac{\lambda b y}{\mu m}$; donc $dH = \lambda - \frac{\lambda b y}{\mu m}$: par conſéquent l'impulſion de l'eau contre la proue aura pour expeſſion.* $\epsilon g \pi . \phi \left(\lambda - \frac{\lambda b y}{\mu m}\right) \times u^2 \times \frac{\mu^2}{\lambda^2} = \frac{\epsilon g \pi . \phi (\mu m - b y) u^2 \mu}{m \lambda}$. D'où il ſuit que la force XO ſera repréſentée par $\frac{\epsilon g \pi . \phi . (\mu m - b y) u^2 \mu}{m \lambda} \times \frac{\mu}{\lambda} = \frac{\epsilon g \pi . \phi (\mu m - b y) u^2 \mu^2}{m \lambda^2}$ & que la force XM ſera repréſentée par $\frac{\epsilon g \pi . \phi (\mu m - b y) u^2 \mu \varpi}{m \lambda^2}$.

Si l'on retranche la force XO de l'impulſion F du vent, il nous viendra $F - \frac{\epsilon g \pi . \phi (\mu m - b y) u^2 \mu^2}{m \lambda^2}$ pour la force qui produit l'accélération horiſontale du navire : par conſéquent nous aurons cette première équation:

$$(A) \quad \left(F - \frac{\epsilon g \pi . \phi (\mu m - b y) u^2 \mu^2}{m \lambda^2}\right) dt^2 = p N d d z.$$

Le navire ſera ſoulevé ſuivant la verticale par une force égale à la ſomme faite de la pouſſée verticale de l'eau & de la force XM ſur ſon propre poids, c'eſt-à-dire par une force exprimée par

$$g \pi . \left[M - ccx + \mathit{6} a^2 y - \mathit{6}' b^2 y\right] + \frac{\epsilon g \pi . \phi (\mu m - b y) u^2 \mu \varpi}{m \lambda^2} - gpN;$$

ainſi on aura l'équation;

$$(B) \quad \left[g\pi \left(M - ccx + (\mathit{6} a^2 - \mathit{6}' b^2) y\right) + \frac{\epsilon g \pi . \phi (\mu m - b y) u^2 \mu \varpi}{m \lambda^2} - gpN\right] dt^2 = pNddx.$$

Enfin il eſt évident que le navire ſera ſollicité à tourner ſur ſon centre de gravité par un moment de force repréſenté par

$$g \pi . \left[M \left(f - \frac{h y}{m}\right) + cckx - (\theta a^3 + \theta' b^3) y\right] +$$

* *La lettre ϵ, eſt un coëfficient qu'on déterminera ſuivant l'eſprit de l'article VI.*

$$\frac{\iota g\pi .\, r\phi\,(\mu m - by)\, u^2\mu^2}{m\lambda^2} + \frac{\iota g\pi .\, n\varphi\,(\mu m - by)\, u^2\mu\varpi}{m\lambda^2} - Fq;$$

par conféquent, on aura cette troifième équation,

$$(C)\quad \Big[g\pi \Big(M\Big(f - \frac{hy}{m}\Big) + cckx - (\theta a^3 + \theta' b^3)\, y \Big) +$$

$$\frac{\iota g\pi .\, r\phi\,(\mu m - by)\, u^2\mu^2 + \iota g\pi .\, n\varphi\,(\mu m - by)\, u^2\mu\varpi}{m\lambda^2} - Fq \Big]\, dt^2 = \frac{pRddy}{m}.$$

Ces équations donneront en général tous les mouvements du navire.

L X X.

Lorfque la quantité F fera donnée en fonctions du temps & de l'efpace parcouru, on mettra cette valeur dans les équations précédentes : enfuite on les intègrera foit exactement, foit par approximation. Je crois qu'on ne doit guères fe flatter de pouvoir établir, au fujet de la valeur de F, une hypothèfe qui foit conforme à la nature. C'eft pourquoi, fatiffait d'avoir indiqué la route qu'il faudroit tenir alors, j'abandonnerai ici la méthode générale, & je me bornerai à l'examen d'un cas particulier, dont la pratique retirera beaucoup de lumières.

L X X I.

Suppofons que le navire fe meuve d'un mouvement parfaitement uniforme, & de plus que le centre de gravité ne monte ni ne defcende ; les équations (A) & (B), qui repréfentent les accélérations horifontale & verticale, feront nulles ; & il ne reftera que l'équation (C), qui repréfente les ofcillations circulaires autour du centre de gravité.

Or puifque l'accélération horifontale eft nulle, il eft clair que l'impulfion du vent eft égale à la réfiftance horifontale de l'eau ; c'eft-à-dire que $F = \frac{\iota g\pi .\, \varphi\,(\mu m - by)\, u^2\mu^2}{m\lambda^2}$;

H ij

mettons cette valeur de F dans l'équation (C), & nous aurons, après avoir effacé le terme $cckx$,

$$\left[g\pi\left(M\left(f-\frac{hy}{m}\right)-(\theta a^3+\theta' b^3)\,y\right)+\frac{\varepsilon g\pi.\, r\phi\,(\mu m-by)\,u^2\mu^2}{m\lambda^2}+\frac{\varepsilon g\pi.\, n\phi\,(\mu m-by)\,u^2\mu\varpi}{m\lambda^2}-\frac{\varepsilon g\pi.\, q\phi\,(\mu m-by)\,u^2\mu^2}{m\lambda^2}\right]dt^2=\frac{pRddy}{m}.$$

Cette équation donne

$$y=\left[\frac{Mfm\lambda^2+\varepsilon r\phi mu^2\mu^3+\varepsilon n\phi mu^2\mu^2\varpi-\varepsilon q\phi mu^2\mu^3}{Mh\lambda^2+m\lambda^2\theta a^3+m\lambda^2\theta' b^3+\varepsilon r\phi bu^2\mu^2+\varepsilon n\phi bu^2\mu\varpi-\varepsilon q\phi bu^2\mu^2}\right]\times$$

$$\left(1-cos.t\sqrt{\frac{g\pi}{\lambda^2 pR}\times(Mh\lambda^2+m\lambda^2\theta a^3+m\lambda^2\theta' b^3+\varepsilon r\phi bu^2\mu^2+\varepsilon n\phi bu^2\mu\varpi-\varepsilon q\phi bu^2\mu^2)}\right)$$

formule, par le moyen de laquelle on déterminera l'amplitude des balancements du navire. Elle fait voir que, les lignes d'eau & la hauteur de la mâture restant toujours les mêmes, tout le changement qu'il faudra faire à l'arrimage pour diminuer l'amplitude des oscillations, consistera à faire descendre de plus en plus le centre de gravité du navire. On voit encore que si, tout restant d'ailleurs absolument le même, l'on fait quelque renflement à la carêne par des *bordages* du côté de la poupe, de manière qu'on puisse faire reculer le centre de gravité vers cette même poupe, on diminuera encore l'amplitude des oscillations, &c.

LXXII.

Soit l la longueur du pendule synchrone : on trouvera

$$l=\frac{\frac{p}{\pi}\lambda^2 R}{Mh\lambda^2+m\lambda^2\theta a^3+m\lambda^2\theta' b^3+\varepsilon r\phi bu^2\mu^2+\varepsilon n\phi bu^2\mu\varpi-\varepsilon q\phi bu^2\mu^2}.$$

formule, par le moyen de laquelle on modèrera la vivacité des oscillations du navire. Elle fait voir que, tout restant d'ailleurs le même, la vîtesse des oscillations ne pourra diminuer que par l'augmentation de R, ou que par la diminution de h & de b, &c.

Je passe rapidement sur ces détails, qui ne peuvent avoir aucune difficulté, après tout ce qui a été déjà dit.

CHAPITRE QUATRIÉME.

Des changements qu'on peut faire en mer à l'arrimage, pour procurer plus de vîtesse au navire.

LXXIII.

Nous avons déjà remarqué que, lorsqu'on mettoit un navire à la voile, sa vîtesse s'accéléroit très-rapidement durant les premiers instants, & qu'elle parvenoit bientôt à l'état d'uniformité. L'expérience & la théorie apprennent que cet effet s'opère en moins de temps qu'il n'en faut d'ordinaire pour defreler & orienter les voiles *. Ainsi, lorsqu'on propose d'augmenter la rapidité de la vîtesse par le moyen de l'arrimage, il ne peut être question que de la vîtesse permanente & uniforme.

* Voyez les Mém. de l'Acad., an. 1745, page 309.

LXXIV.

Or, pour déterminer comment l'arrimage peut contribuer à augmenter la vîtesse uniforme, il faut d'abord connoître les éléments qui entrent dans l'expression de cette vîtesse. Ainsi je commencerai par résoudre le problême suivant. Je ne considère que le simple mouvement progressif; & je fais abstraction de tout balancement autour du centre de gravité, parce qu'on est supposé avoir pris toutes les précautions pour faire porter parfaitement la voile au navire.

L X X V.

PROBLEME.

FIG. 11. *Le navire DeEδ cinglant ſuivant la route donnée LS, trouver l'expreſſion de ſa vîteſſe.*

SOLUTION.

Soit *LYy* la direction de la réſiſtance horiſontale de l'eau. Les voiles, qui ne reçoivent l'impulſion du vent que dans le ſens perpendiculaire, doivent avoir une poſition *ef* perpendiculaire à *LYy*. Soit *VL* la direction du vent, laquelle fait avec *ef* un angle donné *VLf* & avec la direction de la route un angle auſſi donné *VLS* ou *VLt*.

Soient	L'étendue des voiles.	=	aa
	La ſurface plane qui, expoſée au choc perpendiculaire de l'eau éprouveroit la même réſiſtance que le navire.	=	bb
	Le ſinus total.	=	1
	Le ſinus de l'angle *VLf*.	=	n
	Le coſinus de l'angle *VLt*.	=	q
	La vîteſſe abſolue du vent.	=	V
	Celle du navire.	=	u
	La denſité du vent.	=	δ
	La denſité de l'eau.	=	π

Il eſt clair que la vîteſſe du navire, ſuivant la direction du vent, ſera exprimée par qu; ainſi l'impulſion perpendiculaire du vent ſur *ef* ſera proportionnelle (*art. V.*) à $\delta aann(V - qu)^2$, tandis que la réſiſtance de l'eau ſera proportionnelle à $\pi b^2 u^2$. Or, puiſque le navire marche uniformément, la réſiſtance de l'eau doit être égale à l'impulſion du vent : par conſéquent, on aura l'équation

$$\pi b^2 u^2 = \delta a^2 n^2 . (V - qu)^2 .$$

d'où l'on tire $u = \dfrac{anV\sqrt{\delta}}{b\sqrt{\pi} + anq\sqrt{\delta}}$.

LXXVI.

On voit par cette formule qu'en ſuppoſant toujours le navire *donné*, on ne peut augmenter la rapidité du ſillage, ou qu'en augmentant l'étendue des voiles pour recevoir plus de vent, ou qu'en diminuant la réſiſtance du fluide, ou qu'enfin, en augmentant l'étendue des voiles & diminuant la réſiſtance du fluide tout-à-la-fois, s'il eſt poſſible.

LXXVII.

Le premier moyen pourra quelquefois être mis en uſage, lorſque les lignes d'eau ſeront bonnes & qu'on voudra par conſéquent les conſerver. Il y a toujours dans le navire des voiles de réſerve pour s'en ſervir dans le beſoin. C'eſt au navigateur prudent & expérimenté à examiner avec ſoin la quantité qu'en peut porter le navire ſans danger. Or ſi l'on augmente en effet l'étendue des voiles, il eſt certain que, comme leur nouveau centre d'impulſion ne pourra guère être le même qu'auparavant, il faudra néceſſairement faire quelques changements à l'arrimage, relativement à cette nouvelle diſpoſition de voiles. Les changements dont il s'agit doivent toujours être ſubordonnés aux loix de l'équilibre entre la peſanteur du navire, la pouſſée verticale de l'eau, l'impulſion du vent ſur les voiles & la réſiſtance de l'eau : ainſi ils ſe feront d'une manière certaine par les principes établis dans tout le cours de ce Mémoire.

LXXVIII.

Mais, ſi les lignes d'eau étoient défectueuſes, en ſorte que le navire éprouvât une trop grande réſiſ—

tance de la part de l'eau, ſans compter les autres inconvénients dont il n'eſt pas ici queſtion, il faudroit tâcher de trouver d'autres lignes, en tranſportant convenablement différents poids. De ce nouvel avantage, il pourroit encore réſulter que le navire fût capable de porter plus de voiles. Souvent on eſt parvenu ainſi à rendre très-bons voiliers des vaiſſeaux qui manquoient de cette qualité.

LXXIX.

SCHOLIE. Du reſte, ſi le vaiſſeau navigeoit abſolument mal, il ne faut pas s'attendre qu'on pût corriger tous ſes défauts par l'arrimage : cette reſſource n'eſt efficace que juſqu'à un certain point. La rapidité du ſillage dépend principalement de la figure de la carêne & de l'angle de la derive. Mais ce n'eſt pas ici le lieu de diſcuter ces articles.

CHAPITRE CINQUIÉME.

Des changements qu'on peut faire en mer à l'arrimage, pour rendre le navire plus ou moins ſenſible au gouvernail.

LXXX.

TOUT le monde connoit la manœuvre du gouvernail. On ſçait que cette pièce eſt attachée à la poupe du vaiſſeau par des gonds ſur leſquels elle tourne par le moyen d'une barre ou *timon*, & que, préſentée au choc de l'eau, elle oblige le navire à tourner.

LXXXI.

Comme le plan horiſontal, qui paſſe par le centre d'impreſſion du gouvernail & dans lequel ſe trouve la direction du choc de l'eau, ne diviſe pas le navire en en parties égales & ſymmétriques, il eſt certain (*art. VIII*) que le gouvernail imprimera au navire différents mouvements autour de ſon centre de gravité. Mais, de tous ces mouvements, il n'y en a que deux qui ſoient ſenſibles; le premier, par lequel la rapidité du ſillage eſt retardée, le ſecond, par lequel le navire tourne perpendiculairement à ſa longueur. Quant aux autres, ils doivent être négligés. Ce n'eſt pas qu'on ne pût les faire entrer auſſi dans le calcul; mais ils le compliqueroient à un point qu'il feroit peut-être impoſſible d'en tirer des réſultats ſatisfaiſans pour la pratique. Il n'arrive que trop ſouvent que de légères circonſtances rendent une formule intraitable, ſoit que la nature emploie dans ſes opérations les plus ſimples un méchaniſme fort compoſé, ſoit que nous ne poſſédions pas aſſez l'art de lire dans les ſymboles de l'analyſe.

LXXXII.

Suppoſons donc que AB repréſente la quille du vaiſſeau, GC la verticale élevée par ſon centre de gravité, BD le gouvernail, H le centre d'impreſſion de ce gouvernail. Soit priſe HN perpendiculaire à BD pour repréſenter le choc de l'eau; & ſoit décompoſée cette force en deux autres HO, HP, l'une perpendiculaire, l'autre parallèle à la quille. Il eſt clair que la force HP retardera dans le ſens de la quille la rapidité du ſillage, & qu'en même temps, elle tendra à faire tourner le navire ſur ſon centre de gravité : mais, comme elle agit à l'extrémité d'un très-petit bras de levier, ce dernier mouvement ne ſera pas ſenſible. A l'égard de la force HO, elle imprimera au centre de gravité un mouvement de tranſlation perpendiculaire à la quille; & de plus elle fera tourner le navire ſur ce même centre. Ainſi, en vertu de cette dernière force ſeulement, le centre de gra- FIG. 14.

vité parcourra, par exemple, Gg perpendiculaire à AB; & la quille prendra une nouvelle poſition $a'b'$, faiſant avec la première AB ou ab l'angle $b'gb$. Je néglige dans tout ceci le mouvement de charnière du gouvernail, parce que les matelots appliqués à ſa barre rendent ce mouvement comme nul par leur réaction contre l'effort de l'eau.

LXXXIII.

Il ne s'agit pas ici d'examiner comment le choc de l'eau ſe tranſmet au navire, ni de trouver l'angle le plus avantageux, ſous lequel le gouvernail doit être frappé, &c. Il ne s'agit pas même de l'action du gouvernail, en tant qu'elle retarde la rapidité du ſillage. En ſe bornant exactement à l'objet preſcrit par l'Académie, il eſt queſtion de déterminer la diſpoſition de la charge qui favoriſe le plus ou le moins le mouvement de rotation que le gouvernail tend à imprimer au navire.

Pour plus de ſimplicité, je regarderai la force qui tend à faire tourner le navire comme appliquée au point B perpendiculairement à la quille. Cette force eſt ſuppoſée connue : elle ne peut pas différer beaucoup de la force HO; car le gouvernail étant fort court en comparaiſon du vaiſſeau, la partie BQ eſt fort petite.

LXXXIV.

PROBLEME I.

Déterminer l'arrimage qui rendra l'angle de rotation $b'gb$ le plus grand ou le plus petit qu'il eſt poſſible en un temps donné.

SOLUTION.

Soient { La force qui tend à faire tourner le navire. . . = F
Son bras de levier GB. . . . . = a

Soient { La diſtance connue d'un point donné Z à l'axe de rotation GC. . . . . = 1
L'angle de rotation zu. . . . . = u
La ſomme des produits des particules du navire par les quarrés de leurs diſtances à l'axe de rotation. . . . . = R

on aura (*art.* x) $F \times a = \frac{R \times u}{1}$; donc $u = \frac{F \times a}{R}$.

D'où l'on voit que ſi, outre la force F, qui eſt toujours conſtante, on ſuppoſe auſſi a conſtante, c'eſt-à-dire que le centre de gravité du navire reſte toujours au même point, ou du moins dans la même verticale; l'angle u ne peut augmenter ou diminuer que par la diminution, ou que par l'augmentation du dénominateur R. Or, l'on diminuera R, en rapprochant le plus qu'il eſt poſſible de l'axe GC les poids les plus peſants de la charge; & au contraire, on augmentera R, en éloignant les poids les plus peſants du même axe.

Tels ſont, en général, les changements qu'on peut faire à l'arrimage, pour favoriſer le plus ou le moins qu'il eſt poſſible le mouvement de rotation du navire, ſans faire changer de place à la verticale qui paſſe par ſon centre de gravité.

LXXXV.

Il eſt clair que, dans deux navires ſemblables & ſemblablement chargés, les quantités R ſont entre elles comme les cinquièmes puiſſances des dimenſions homologues. Il n'eſt pas moins clair que les forces F ſont comme les quarrés, & leurs moments comme les cubes des côtés homologues : d'où il ſuit que les angles de rotation ſont réciproquement proportionnels aux quarrés des côtés homologues.

LXXXVI.

PROBLEME II.

FIG. 15. *Déterminer l'endroit K où l'on doit placer un nouveau poids qu'on veut ajouter à la charge, pour rendre l'angle de rotation le plus grand ou le plus petit qu'il est possible.*

SOLUTION.

Soient GC l'axe vertical passant par le centre de gravité du navire avant l'addition du nouveau poids, kr l'axe vertical passant par le centre de gravité k du navire, après l'addition du nouveau poids, kx l'espace parcouru perpendiculairement à la quille par le centre k. Si, par le point x, on mène ab parallèle AB, & que le gouvernail soit supposé prendre la position $a'b'$, l'angle de rotation sera bxb'; & c'est cet angle qu'il s'agit de rendre un *maximum* ou un *minimum*.

Soient	La force qui tend à faire tourner le navire. . .	=	F
	GB.	=	a
	L'angle de rotation pour le rayon 1.	=	u
	La somme des produits des particules du navire, avant l'addition du nouveau poids, par les quarrés de leurs distances à l'axe GC. . . .	=	R
	La somme des produits des particules du navire, après l'addition du nouveau poids, par les quarrés de leurs distances à l'axe kr.	=	Z
	La charge du navire avant l'addition du nouveau poids.	=	N
	Le nouveau poids.	=	n
	GK.	=	x

on aura, par la propriété du centre de gravité, $Gk = \frac{nx}{N+n}$, & par conséquent $Bk = a + \frac{nx}{N+n}$. De plus on aura (*art.* XI), $R + nxx = Z +$

$(N+n) \times \frac{nnxx}{(N+n^2)}$ *, ou bien $ZR + \frac{Nn}{N+n} . xx.$

Mais on a toujours (*art.* x) $F \times \left(a + \frac{nx}{N+n}\right) = Z \times u$
$= \left(R + \frac{Nn}{N+n} . xx\right) \times u$; donc

$$u = \frac{F.\left(a + \frac{nx}{N+n}\right)}{R + \frac{Nn}{N+n} . xx} = \textit{maximum} \text{ ou } \textit{minimum}.$$

Par conféquent $\frac{ndx}{N+n}\left(R + \frac{Nn}{N+n} . xx\right) -$
$\left(a + \frac{nx}{N+n}\right) \times \frac{2Nn}{N+n} . xdx = o$; d'où l'on tire

$$x = -\frac{a.(N+n)}{n} \pm (N+n)\sqrt{\frac{a^2}{n^2} + \frac{R}{Nn.(N+n)}}.$$

Cette valeur de u répond toujours à un *maximum* : ainfi, dans la fuppofition qu'on ajoute un poids, l'angle de rotation fera augmenté.

Mais fi, au lieu d'ajouter, on retranchoit le poids n, ce qui eft la même chofe que rendre n négatif dans la valeur générale de u, alors cette valeur, qui feroit

$\frac{F\left(a - \frac{nx}{N+n}\right)}{R - \frac{Nn}{N+n} . xx}$ donneroit un *minimum* ; & pour

déterminer l'endroit d'où il faudroit ôter le poids n.

* Le poids n, eft fuppofé affez petit pour qu'on puiffe regarder toute fa maffe comme réunie en un feul & même point. Mais, fi cette fuppofition étoit trop libre, on commenceroit par chercher la fomme des produits des particules de ce corps par les quarrés de leurs diftances à l'axe GC, en regardant la pofition de ce corps comme donnée : enfuite la folution du problême s'achèveroit, comme dans le premier cas.

on auroit l'équation

$$x = \frac{a.(N-n)}{n} \pm (N-n).\sqrt{\frac{a^2}{n^2} - \frac{R}{Nn.(N+n)}}.$$

LXXXVII.

Lorſque le poids n ſera fort petit, on pourra prendre, ſans erreur ſenſible, pour déterminer le *maximum*,

$$x = -\frac{a.(N+n)}{n} \pm \frac{(N+n)}{n} a \pm \frac{R}{2Na},$$

& pour déterminer le *minimum*,

$$x = \frac{a(N-n)}{n} \pm \frac{(N-n)a}{n} \mp \frac{R}{2Na}.$$

Ces formules ſont fort ſimples & d'un uſage très-commode. Il eſt vrai qu'elles renferment la quantité R, dont la détermination exige quelques calculs ; mais ils peuvent s'abréger très-conſidérablement par divers moyens, comme on peut le voir dans le *Traité de la manœuvre des vaiſſeaux* de M. Bouguer, *pages 338, 339, & ſuiv.*

LXXXVIII.

Puiſque nous connoiſſons l'endroit où il faudroit mettre, ou dont il faudroit ôter un certain poids, pour favoriſer ou pour contredire le mouvement de rotation du vaiſſeau, il eſt clair que nous ſommes en état de faire la tranſpoſition de poids qui convient, pour régler à volonté le mouvement de rotation dont il s'agit; car nous ſçavons l'endroit où il faut prendre les poids & l'endroit où il faut les placer.

LXXXIX.

Dans les deux articles précédents, les poids que nous avons tranſportés ont été pris ſur la quille, ou plutôt dans le plan verticale qui paſſe par la quille :

mais, comme on peut être forcé de prendre ces poids dans les flancs du navire, nous allons encore chercher la position de la droite MKM' perpendiculaire à la quille, de manière que, plaçant aux points M, & M' à une même distance donnée de la quille deux poids égaux, l'angle de rotation du navire soit un *max.* ou un *minim.* Ce problême renferme le précédent comme un cas particulier.

Soient G le centre de gravité du navire avant l'addition des deux nouveaux poids, k le centre de gravité, après l'addition.

Supposons	La force qui tend à faire tourner le navire. . .	=	F
	GB.	=	a
	L'angle de rotation pour le rayon 1.	=	u
	La charge du navire avant l'addition des deux nouveaux poids.	=	N
	Chacun de ces deux nouveaux poids.	=	n
	La somme des produits des particules de N par les quarrés de leurs distances à l'axe GC. . .	=	R
	La somme des produits des particules de $N+2n$, par les quarrés de leurs distances à l'axe kr. .	=	Z
	KM ou KM'.	=	b
	GK.	=	x

on aura $Gk = \frac{2nx}{N+2n}$; $Bk = a + \frac{2nx}{N+2n}$; $\overline{GM}^2 = bb + xx$, & suivant l'article XI, $R + 2n.(bb+xx) = Z + (N+2n)\frac{4nnxx}{(N+2n)^2}$ ou bien

$$Z = R + \frac{2Nn.(bb+xx)+4bbnn}{N+2n};$$

$$\text{donc } u = \frac{F.\left(a+\frac{2nx}{N+2n}\right)}{R+\frac{2Nn.(bb+xx)+4bbnn}{N+2n}} = maxi.$$

mum; ce qui donne

$$x = -\frac{a(N+2n)}{2n} \pm (N+2n)\sqrt{\frac{a^2}{4n^2} + \frac{R}{2Nn.(N+2n)} + \frac{bb}{2N.(N+2n)}}.$$

On aura l'équation du *minimum*, en faiſant n négatif dans l'équation précédente.

X C.

Lorſqu'on ne voudra pas augmenter ou diminuer l'angle de rotation du navire, & que, cependant, on aura beſoin de tranſpoſer quelques poids pour remplir quelque objet particulier, comme, par exemple, pour faire mieux porter la voile au navire, cette tranſpoſition pourra ſe faire à l'aide du problême ſuivant, ſans que l'angle de rotation du navire ſouffre aucun changement.

X C I.

PROBLEME III.

FIG. 16. *Trouver une courbe MKM' telle que, plaçant ſur ſa circonférence des poids égaux, l'angle de rotation du navire demeure toujours le même.*

SOLUTION.

Il eſt viſible que la coupe dont il s'agit doit être diviſée en deux parties égales & ſemblables par la quille *AB*; & qu'en la formant, il faudra à chaque opération placer de part & d'autre de la quille deux poids égaux dans les deux points qui ſe correſpondent.

Soit pris le point *K* pour l'origine de la courbe, & ſoient *KP*, *PM* les coordonnées pour le point *M* ou *M'*. Soient *G* le centre de gravité du navire avant l'addition des deux nouveaux poids aux points ſymmétriques *M* & *M'*; *k* le centre de gravité de tout le le fyftème, après l'addition de ces deux nouveaux poids; bxb'. l'angle de rotation.

Suppofons

La force qui tend à faire tourner le navire. . . .	=	F
GB.	=	a
GK.	=	c
La charge du navire avant l'addition des deux nouveaux poids.	=	N
Chacun de ces deux nouveaux poids.	=	n
La fomme des produits des particules de N par les quarrés de leurs diftances à l'axe GC. . .	=	R
La fomme des produits des particules de $N+2n$ par les quarrés de leurs diftances à l'axe kr. . .	=	Z
L'angle de rotation pour le rayon 1.	=	u
KP.	=	x
PM.	=	y

on aura $Gk = \frac{2n.(c-x)}{N+2n}$. $Bk = a + \frac{2n.(c-x)}{N+2n}$; $\overline{GM}^2 = yy + (c-x)^2$; $R + 2n.(yy + (c-x)^2) = Z + (N+2n).\frac{4nn.(c-x)^2}{(N+2n)^2}$ ou bien $Z = R + \frac{2Nn.(yy+(c-x)^2)+4nnyy}{N+2n}$. Donc

$$F\left(a+\frac{2n.(c-x)}{N+2n}\right) = \left(R+\frac{2Nn.(yy+(c-x)^2)+4nnyy}{N+2n}\right)\times u:$$

ou bien

$$u = \frac{F\left(a+\frac{2n.(c-x)}{N+2n}\right)}{R+\frac{2Nn.(yy+(c-x)^2)+4nnyy}{N+2n}};$$

égalant cette valeur de u à une conftante, & obfervant qu'à l'origine de la courbe cette conftante

$$= \frac{F\times\left(a+\frac{2nc}{N+2n}\right)}{R+\frac{2Nncc}{N+2n}},$$ on aura

K

$$\frac{a + \frac{2nc}{N+2n}}{R + \frac{2Nncc}{N+2n}} = \frac{a + \frac{2n.(c-x)}{N+2n}}{R + \frac{2Nn.(c-x)^2 + (2Nn+4nn)y^2}{N+2n}};$$

ou bien

$$\frac{N+2n}{N}.yy = \left(\frac{2aN^2c + 4aNnc + 2Nnc^2 - RN - 2nR}{N.(aN + 2an + 2nc)}\right)x - xx.$$

équation à une ellipse, dont l'axe des x est

$$\frac{2(2aN^2c + 4aNnc + 2Nnc^2 - RN - 2nR)}{N.(aN + 2an + 2nc)}$$ & celui des y

est $\frac{2.(2aN^2c + 4aNnc + 2Nnc^2 - RN - 2nR)}{N(aN + 2an + 2nc)} \times \sqrt{\frac{N}{N+2n}}$.

Cette ellipse ne diffère pas beaucoup d'un cercle, par ce que le poids n est fort petit par rapport à N.

XCII.

Le problême que nous venons de résoudre ne se borne pas à l'usage indiqué dans l'article XC : il est facile d'en conclure aussi que tous les poids qu'on mettra au-dedans de l'ellipse, favoriseront le mouvement de rotation, & que ceux qu'on mettra au dehors lui nuiront. Si, au lieu d'ajouter de nouveaux poids, on en retranchoit, ceux qu'on prendroit au-dedans de l'ellipse, nuiroient au mouvement de rotation ; & ceux qu'on prendroit au dehors, lui seroient favorables.

XCIII.

Scholie I. Les deux problêmes des articles LXXXVI & XCI, ont déjà été résolus par M. Bouguer. Voyez son *Traité de la manœuvre des vaisseaux, pages 351 & 356.* Mais mon sujet les amenoit si naturellement, que j'avois trouvé mes solutions longtemps avant que d'avoir lu l'ouvrage cité.

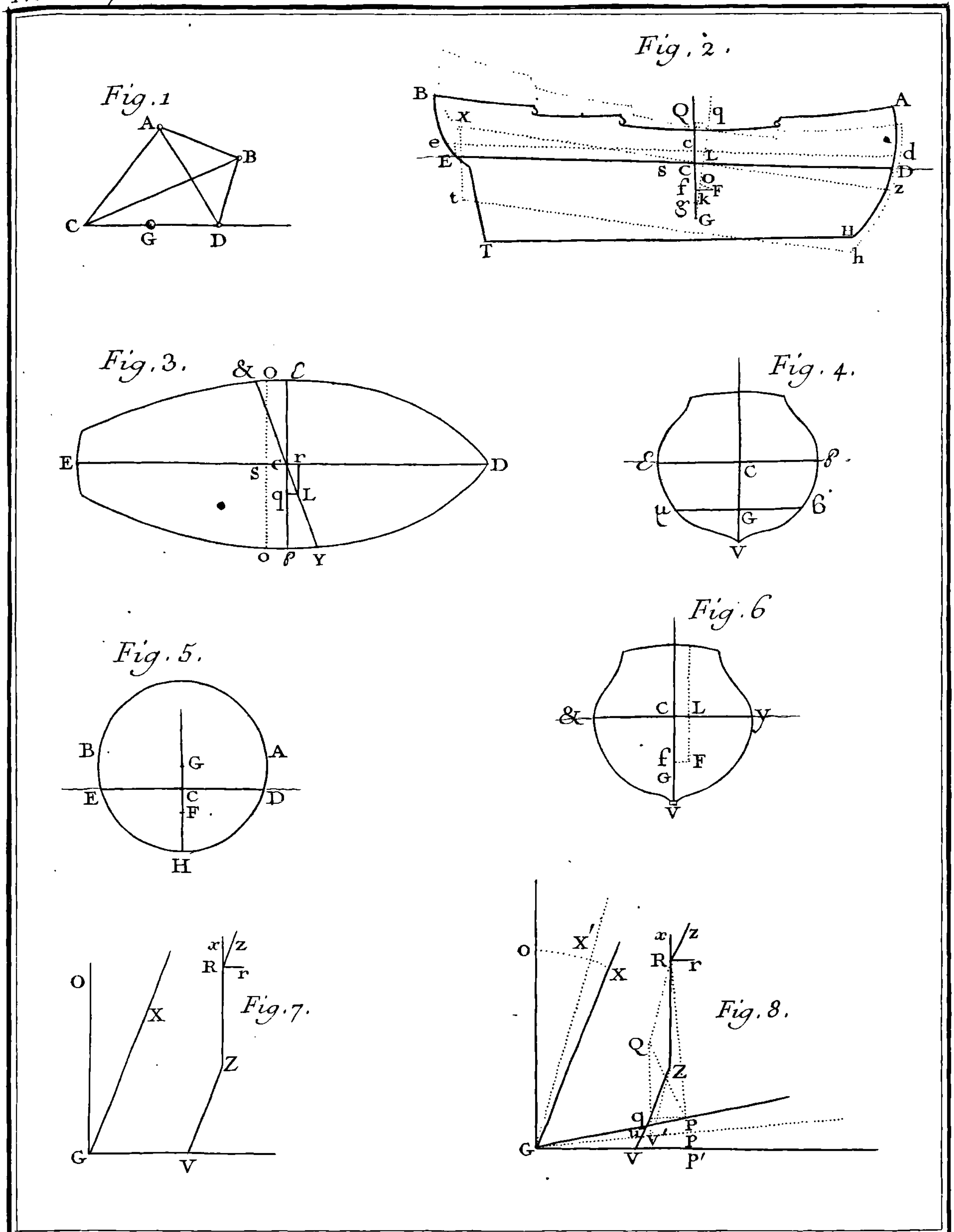
Si on refuse de m'en croire, on pourra du moins se convaincre que je n'ai absolumuent rien emprunté de M. Bouguer. J'ose ajouter que ma méthode est beaucoup plus simple, plus claire & plus directe que la sienne.

X C I V.

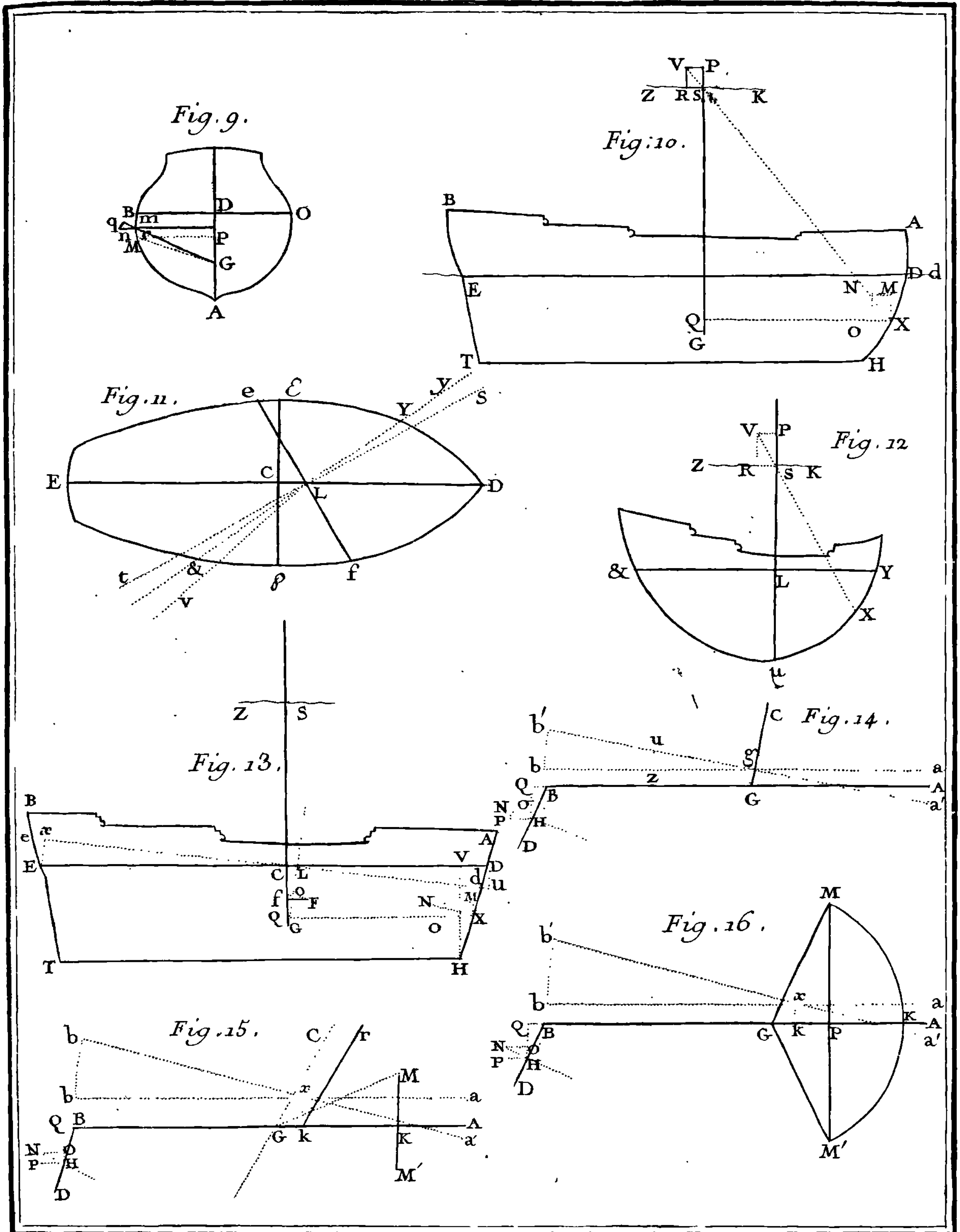
Scholie. II. Je ne dissimulerai pas ici une remarque que fait M. Bouguer dans le même ouvrage. Il prétend que, pour mieux gouverner, il faut rapprocher les poids de la poupe, parce qu'à mesure qu'on charge la poupe, le gouvernail s'enfonce plus avant dans l'eau & reçoit par conséquent un plus grand choc, qui compense abondamment le défaut de cet arrimage, relativement au même objet. Mais, en admettant même toutes les hypothèses sur lesquelles l'auteur établit son calcul, je crois qu'il n'a proposé ce moyen que pour certains cas pressans, où tous les autres avantages de la navigation doivent être sacrifiés à la nécessité de bien gouverner; car il est certain en général que si le navire porte bien la voile, qu'il ait une belle batterie, &c, il faut conserver cette assiette autant qu'il est possible; &, par conséquent, altérer le moins qu'il est possible le premier arrimage. Or, l'altération la moins sensible qu'on puisse faire à l'arrimage, pour augmenter ou pour diminuer la facilité de gouverner, est évidemment celle qui résulte de la théorie que nous venons d'établir. Lorsqu'on surcharge l'arrière, la rapidité du sillage est rallentie par la surface que la quille présente au choc de l'eau, les mouvements de roulis & de tangage sont plus vifs : il peut même se faire que le centre d'impression du gouvernail ne se trouve plus alors assez sensiblement dans le même plan horisontal que le centre de gravité du navire; ce qui occasionnera de nouveaux mouvements qui, en se combinant avec les premiers, ne manqueront pas de tourmenter l'équipage & la mâture. Ces inconvénients, qui résultent du trop grand enfoncement de la poupe, ont tellement frappé plusieurs constructeurs habiles *, qu'ils diminuent considérablement & réduisent presque à rien la différence du tirant d'eau de l'avant & de l'arrière ; différence qu'on portoit autrefois assez loin. Plusieurs vaisseaux, tels que le Northumberland, l'Auguste, l'Alose, la Badine, &c., ont très-bien navigé avec de légères différences de tirant d'eau. Je n'insisterai pas d'avantage sur ce sujet. C'est au navigateur sage & expérimenté à prendre le meilleur parti, suivant l'occasion.

* Voyez l'archi. nav. de M. Duhamel, 2e. ed., p. 104, & suiv.

F I N.



Deſehrt sculp.



Desehrt sculp.

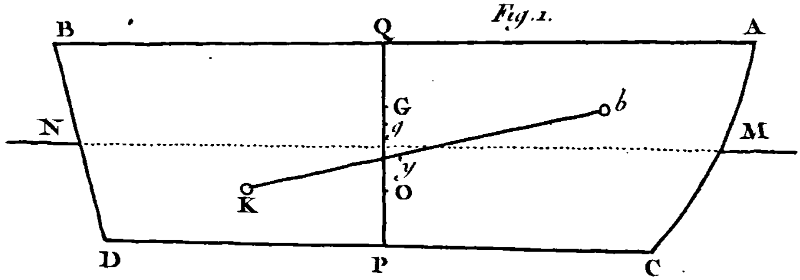


Fig. 1.

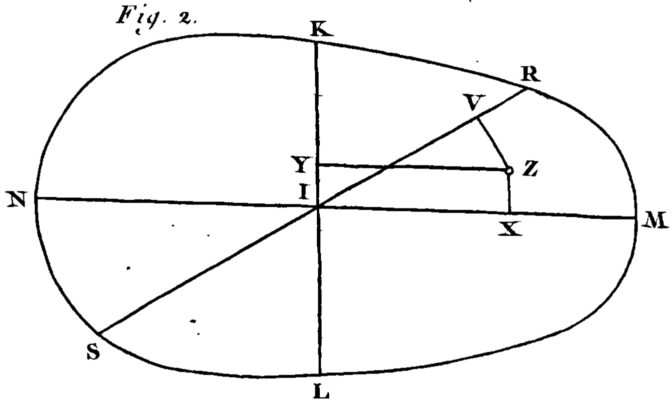


Fig. 2.

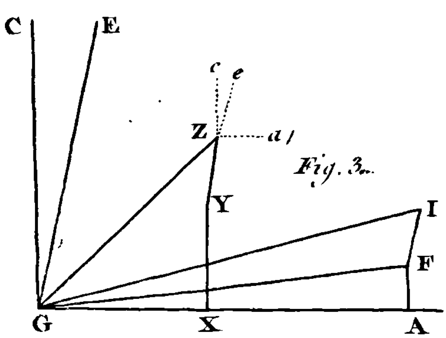


Fig. 3.

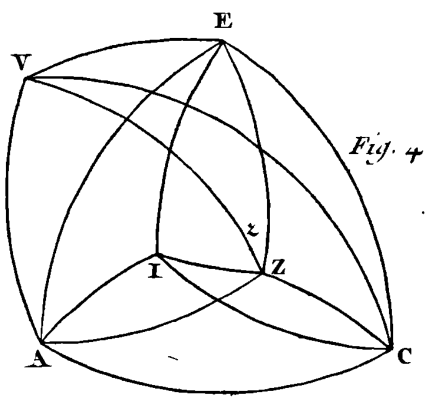
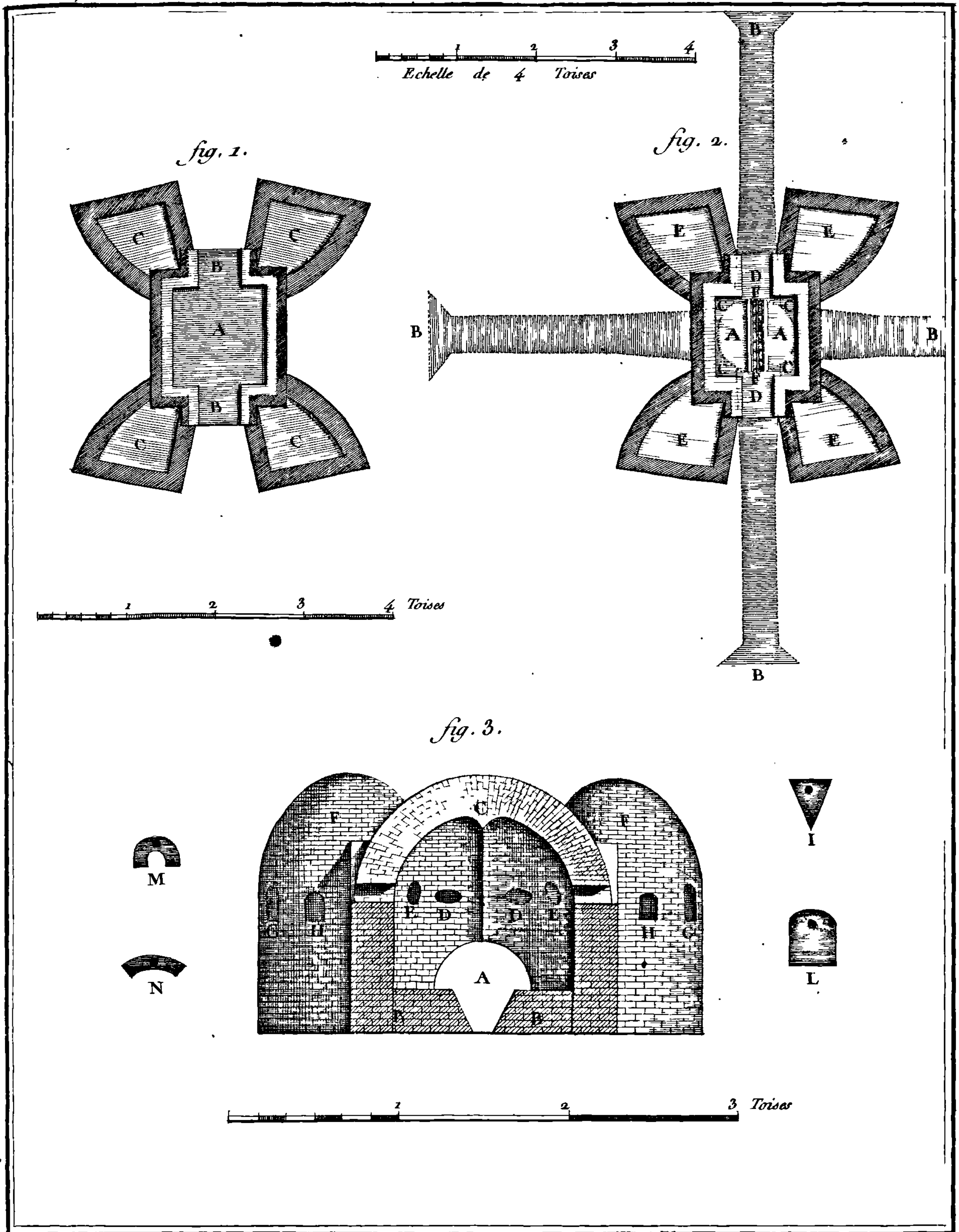
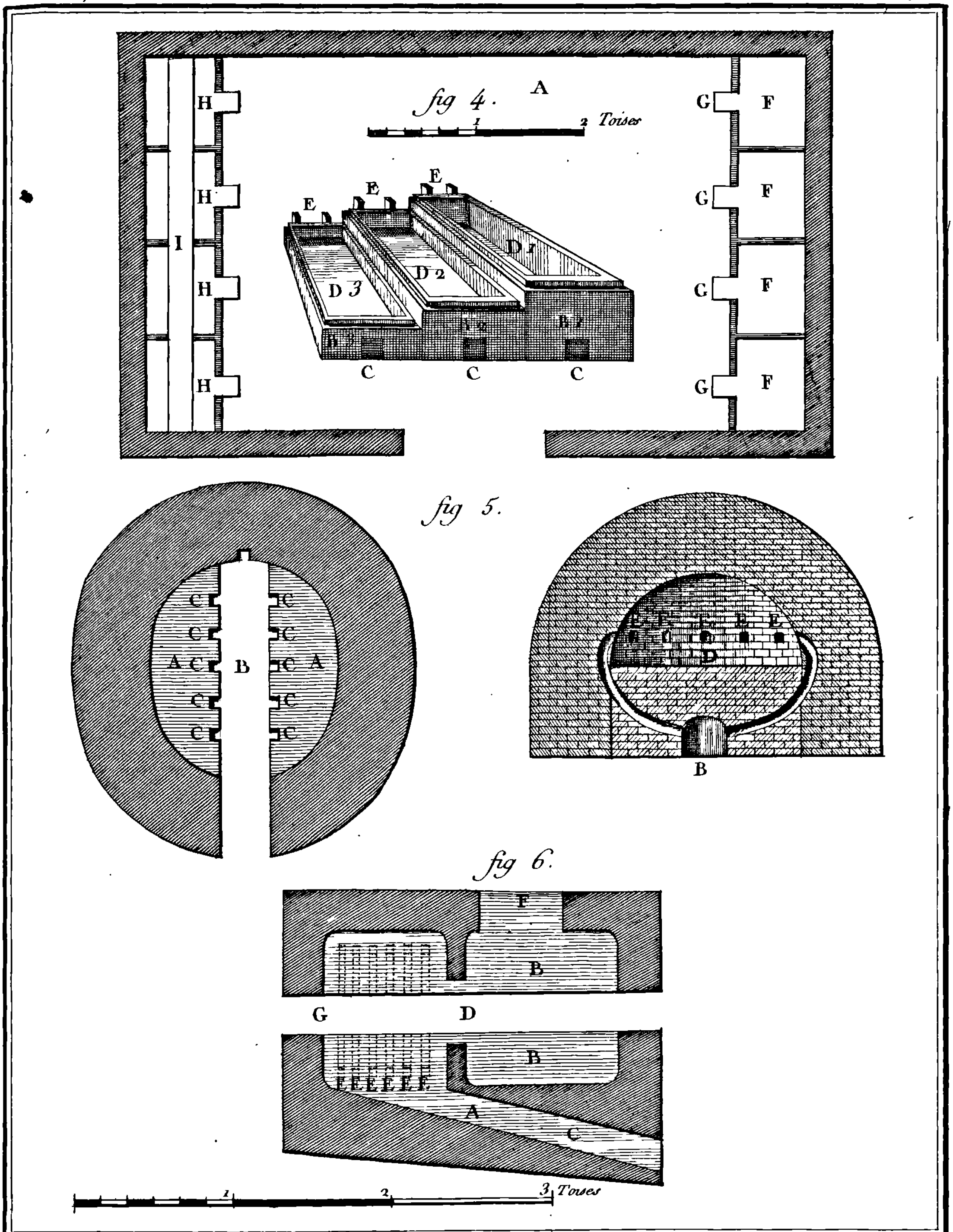


Fig. 4.

Prix de 1761



Dessiné et Gravé par Defehrt.



Dessiné et Gravé par Defehrt

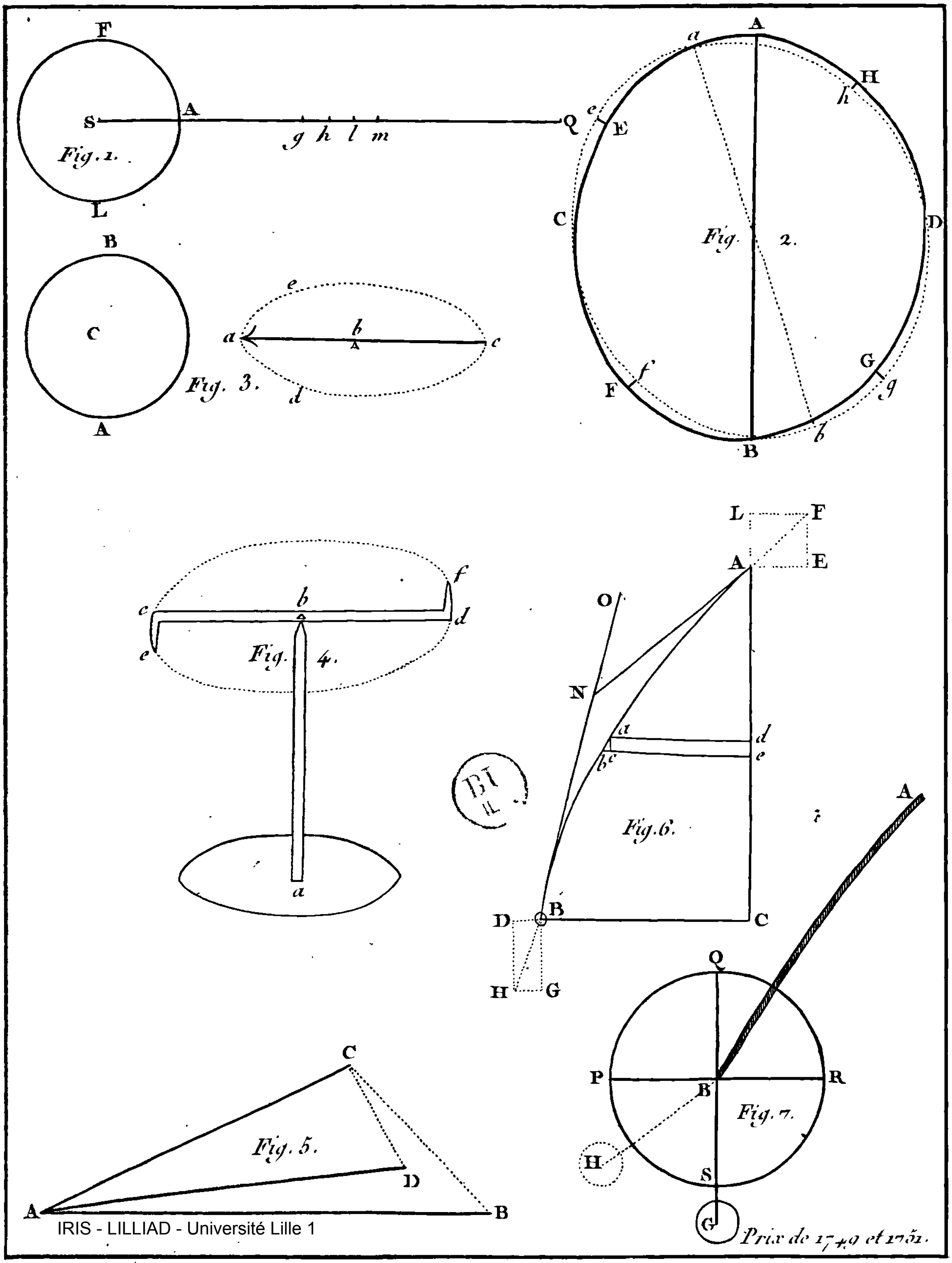


Fig. 1.
F
S
A
g h l m
Q
L
Fig. 2.
a
A
H
h
e
E
C
D
f
F
G
g
b
B
B
C
A
Fig. 3.
e
a
b
c
d
Fig. 4.
f
c
b
d
e
a
L
F
A
E
O
N
a
d
b c
e
Fig. 6.
D
B
C
H
G
A
Q
P
R
B
Fig. 7.
H
S
G
Fig. 5.
C
D
A
B
Prix de 1749 et 1751.

figure. 1.ere

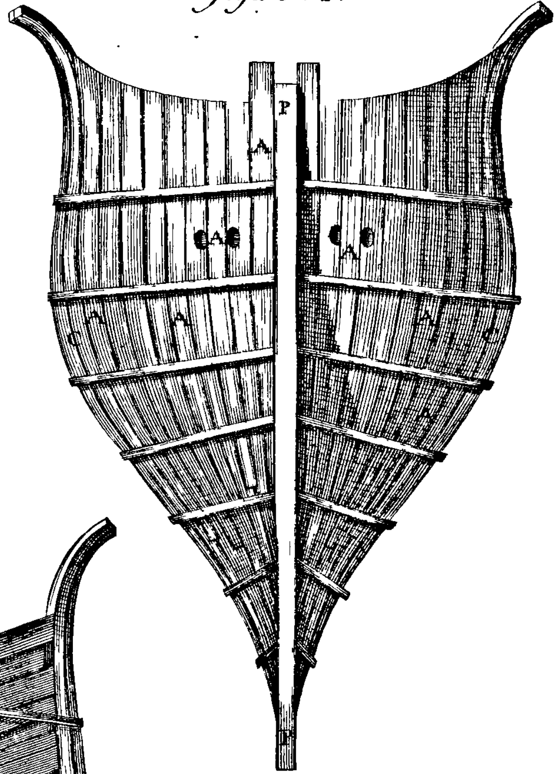
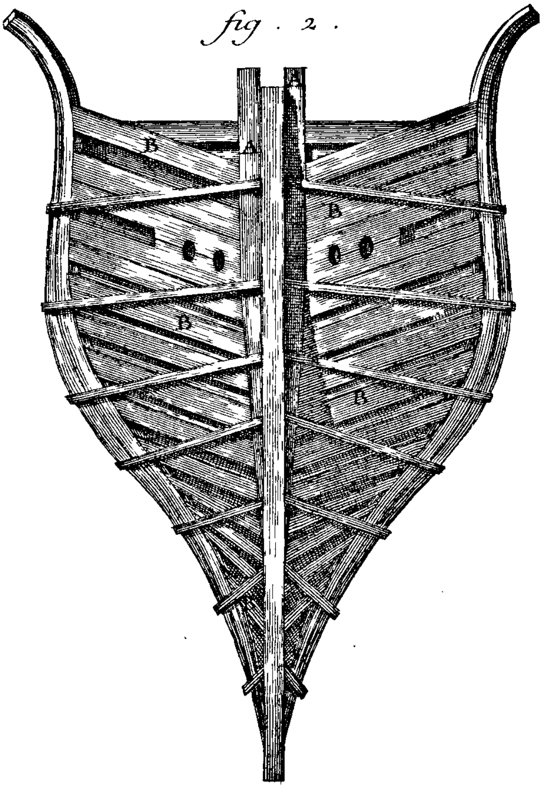
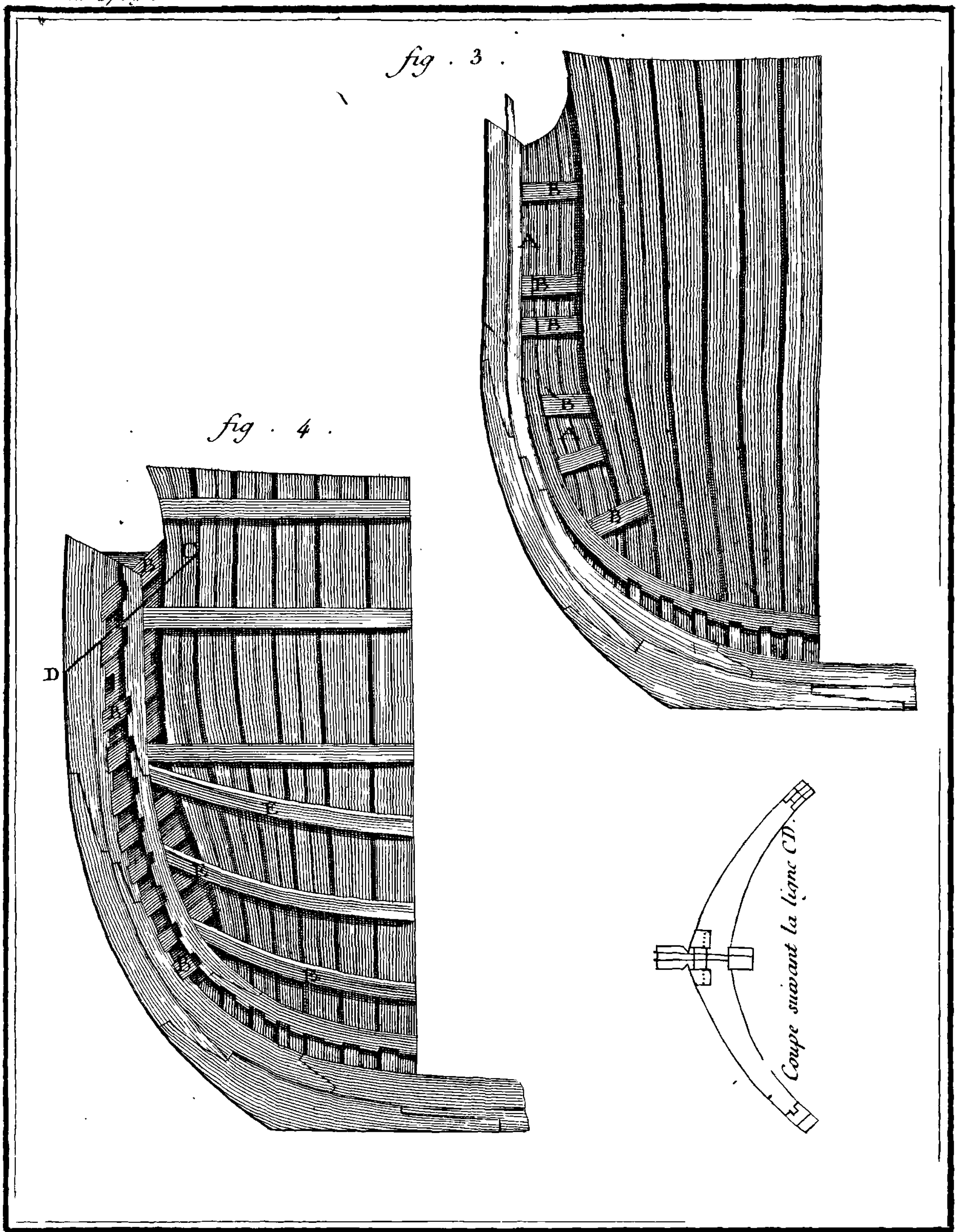


fig. 2.



Desehrt Sculpsit.



Defehrt Sculpsit.

fig. 5.

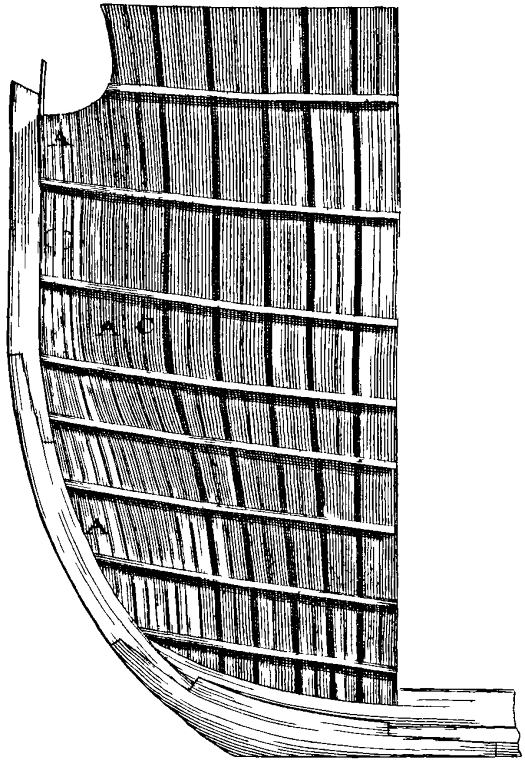
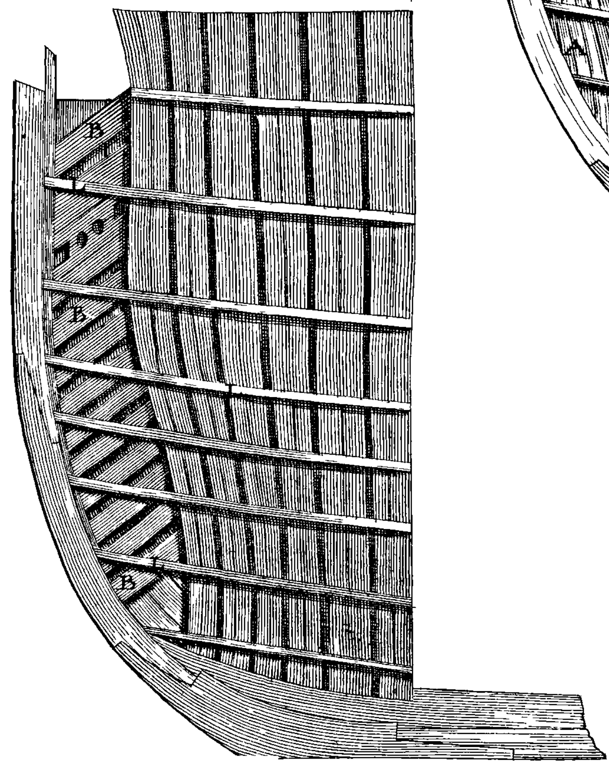


fig. 6.



Dejehrt Sculpsit.

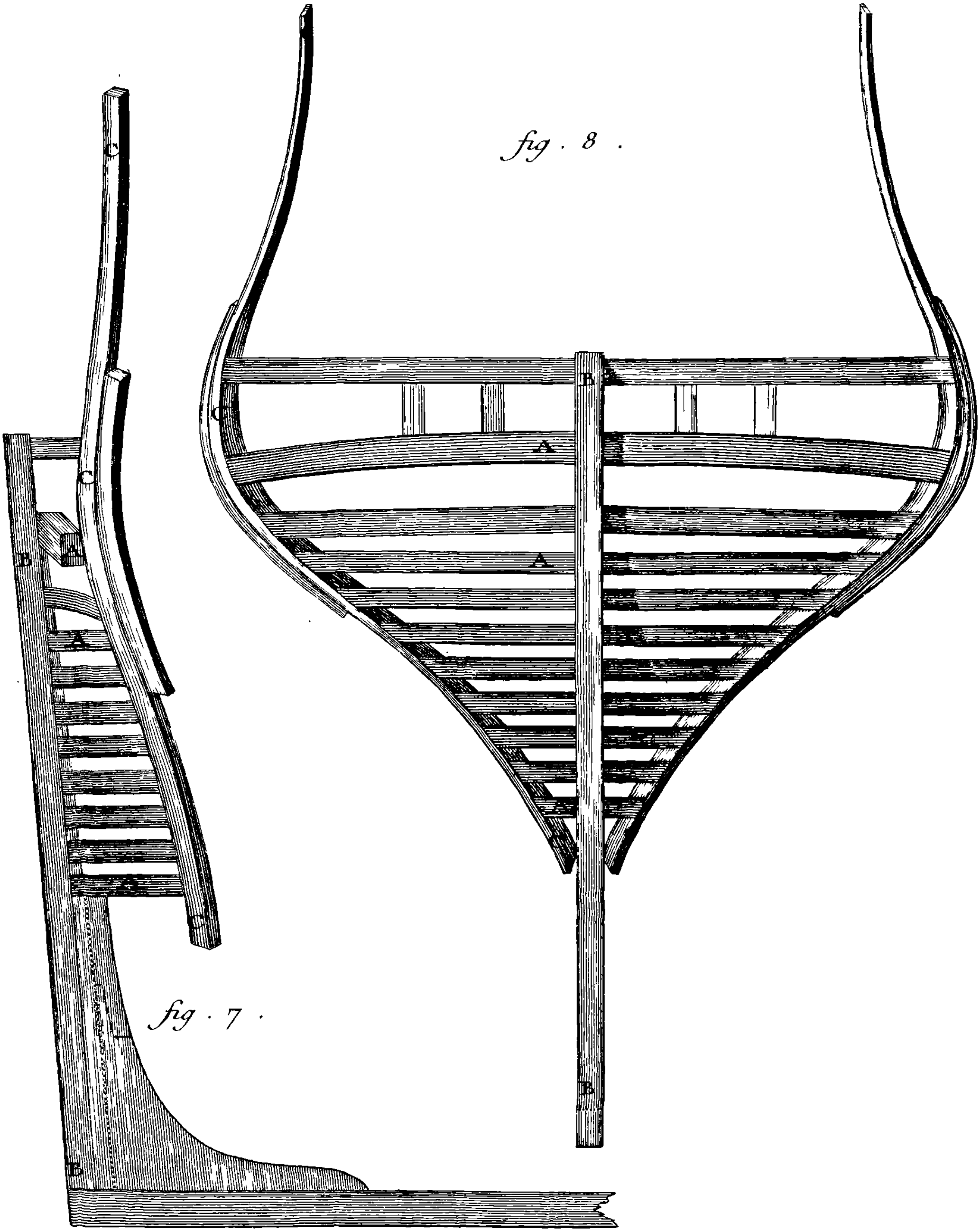
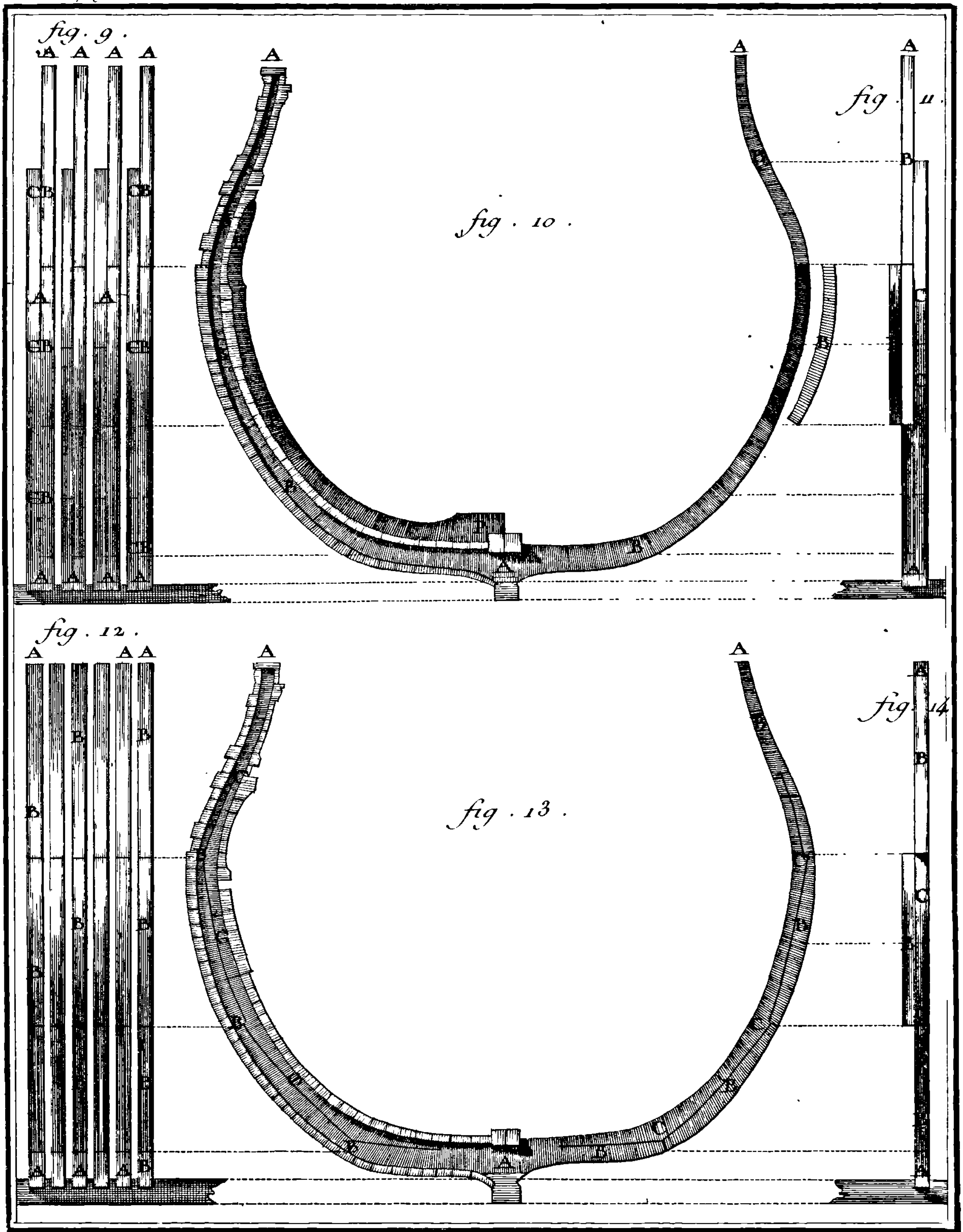


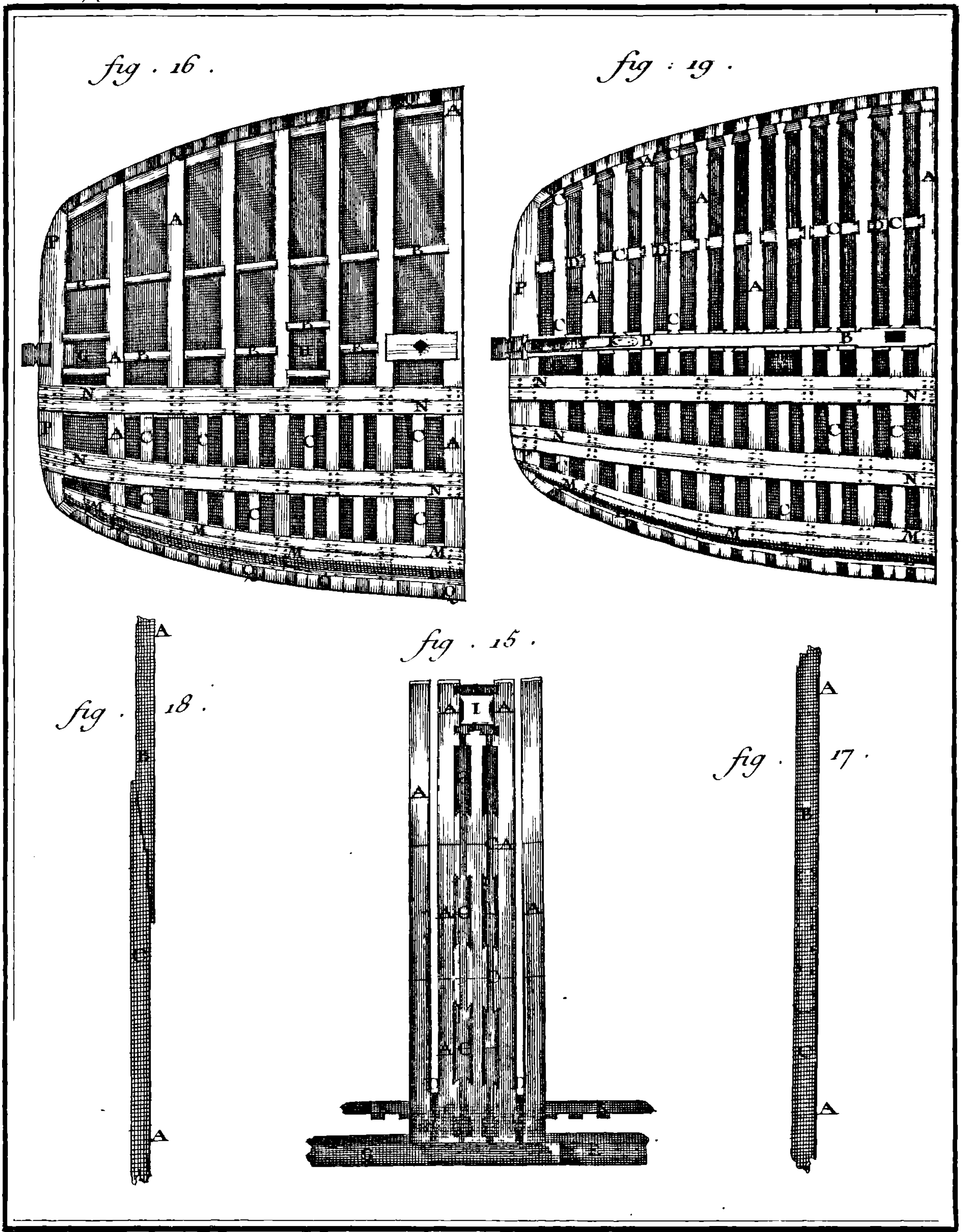
fig. 8.

fig. 7.

Defehrt Sculpsit.

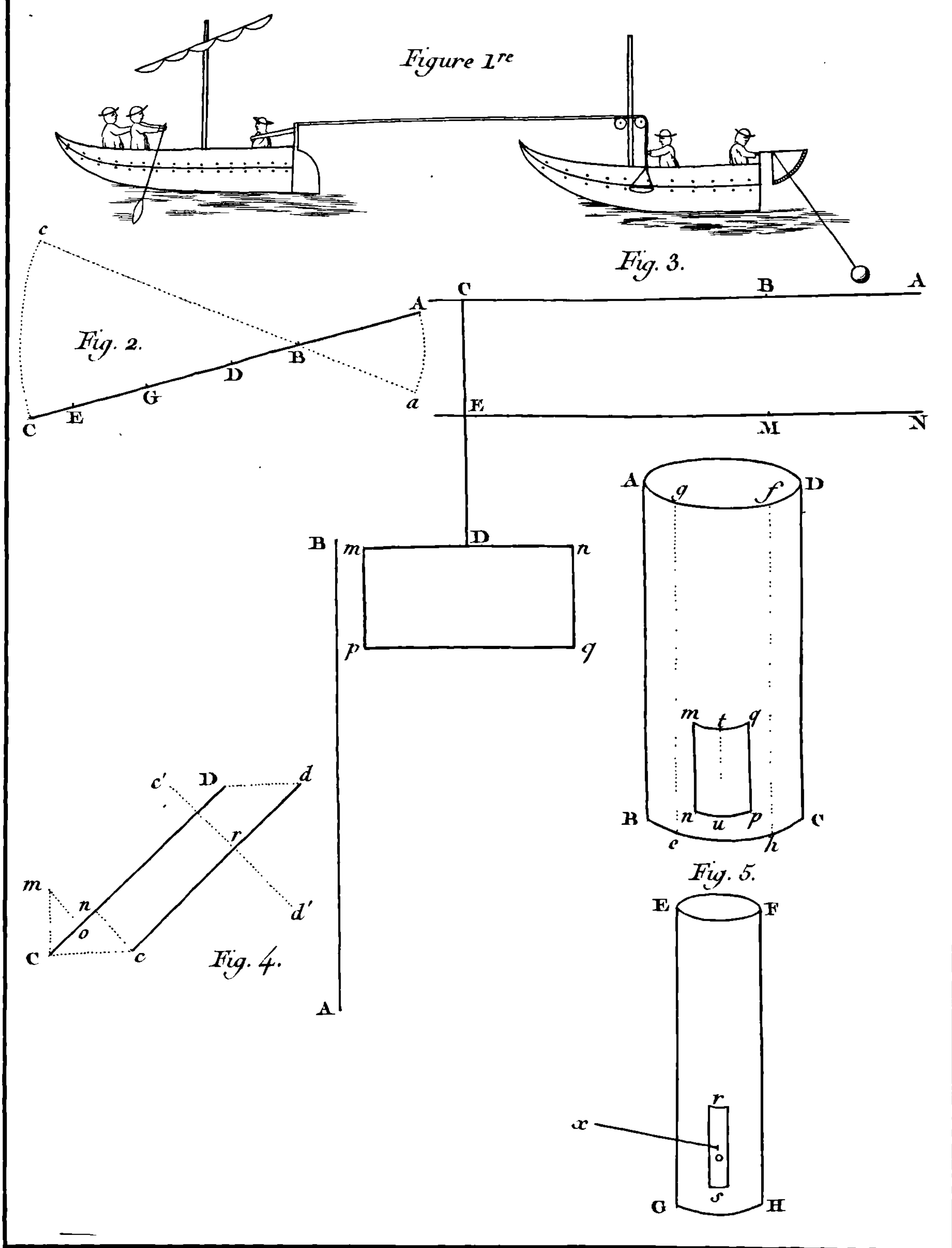


Defehrt Sculpsit.



Desehrt Sculpsit.

Maniere de suppléer à l'action du Vent, par Mr. Bernoulli.



Prix de 1753.