UEBER DIE NACH

KREIS-, KUGEL- UND CYLINDER-FUNCTIONEN

FORTSCHREITENDEN ENTWICKELUNGEN,

UNTER DURCHGÄNGIGER ANWENDUNG DES

DU BOIS-REYMOND'SCHEN MITTELWERTHSATZES.

Dr. C. NEUMANN,

PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1881.

Vorwort.

Die *Fourier*'sche Reihe steht, man kann sagen, zur *Kreisperipherie* in genau derselben Beziehung, wie die *Laplace*'sche (nach Kugelfunctionen fortschreitende) Reihe zur *Kugelfläche.* Dabei mag, was die Bestimmung der Coefficienten dieser Reihen betrifft, erinnert sein an die bekannten Formeln

$$(\alpha.)\qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(n\varphi)\sin(s\varphi)\,d\varphi = 0, \quad \text{resp.} = \pi,$$

und

$$(\beta.)\qquad \int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\,P_s(\mu)\,d\mu = 0, \quad \text{resp.} = \frac{2}{2n+1};$$

wobei zu (α.) noch hinzuzufügen sein würden die analogen Formeln für *Sinus Cosinus,* und *Cosinus Cosinus*, und zu (β.) die analogen Formeln für die sogenannten *adjungirten* Kugelfunctionen d. i. für die $P_{nj}(\mu)$.

Lässt man den Radius der Kreisperipherie resp. der Kugelfläche ins Unendliche wachsen, so verwandelt sich, wie ich im vorliegenden Werk zeigen werde, die *Fourier'sche Reihenentwicklung* in die sogenannte *Fourier'sche Integraldarstellung,* andrerseits aber die *Laplace'sche Reihenentwicklung* in eine gewisse *nach Cylinderfunctionen* (d. i. nach Bessel'schen Functionen) *fortschreitende Integraldarstellung**).

*) Diese nach den *Bessel*'schen Functionen fortschreitende Integraldarstellung wurde von mir entdeckt und publicirt in meiner Schrift: *Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nicht concentrischen Kugelflächen begrenzt ist.* Halle, Verlag von Schmidt. 1862. Daselbst Seite 149. Ich bin dort zu der in Rede stehenden Integraldarstellung durch einen Grenzübergang von zwei Kugelflächen zu zwei *einander berührenden* Kugelflächen gelangt. — Die Methode, deren ich mich im vorliegenden Werk bediene, ist eine *viel einfachere;* denn sie beschränkt sich auf die Anwendung nur *einer* Kugelfläche, und besteht in einem Grenzübergange von dieser Kugelfläche zur *unendlich grossen* Kugelfläche.

In der genannten Schrift vom Jahre 1862 habe ich ausdrücklich hervorgehoben, dass die dort gegebene Ableitung der in Rede stehenden Integraldarstellung keinen Anspruch auf wirkliche Strenge machen könne. Gleiches gilt von der durch Kürze und Einfachheit ausgezeichneten von *Ermakoff* gegebenen Ableitung (Math. Ann. Bd. 5, S. 639).

Strengere Ableitungen der in Rede stehenden Formel sind jedoch inzwischen gegeben worden von *Du Bois-Reymond* (Math. Ann. Bd. 4, S. 362) und von *Mehler* (Math. Ann. Bd. 5, S. 135).

Gleichzeitig verwandeln sich bei diesem Process die Formeln ($\alpha.$), wie ich zeigen werde, in gewisse *neue Integraleigenschaften der Kreisfunctionen*, andrerseits die Formeln ($\beta.$) in gewisse *neue Integraleigenschaften der Cylinderfunctionen* *).

Diese einfachen Betrachtungen, welche den Anfang des vorliegenden Werkes bilden, machen keinen Anspruch auf wirkliche Strenge, dürften aber dazu dienen, um von vornherein über die in Rede stehenden *Reihenentwicklungen, Integraldarstellungen* und *Integraleigenschaften* namentlich über ihre gegenseitige Stellung und innere Verwandtschaft einen deutlichen Ueberblick zu eröffnen.

Nach Absolvirung dieser einleitenden Betrachtungen, werde ich sodann übergehen zur *strengeren* Begründung der genannten Reihenentwicklungen, Integraldarstellungen und Integraleigenschaften; und hierbei werde ich meinen Auseinandersetzungen durch Anwendung des wichtigen *Du Bois-Reymond*'schen Mittelwerthsatzes sowie auch durch Benutzung der *Ulisse Dini*'schen Arbeiten, eine möglichst einfache Gestaltung zu verleihen suchen.

Was die in eine Reihe resp. in ein Integral zu entwickelnde *willkürliche Function* betrifft, so werde ich mich absichtlich beschränken auf die *gewöhnlich vorkommenden* Functionen, d. i. auf diejenigen Functionen, welche *Jacobi* gesprächsweise die *„vernünftigen"* zu nennen pflegte. Demgemäss werde ich z. B., was Functionen *einer* Variablen betrifft, nur solche in Betracht ziehen, bei denen die Anzahl der Unstetigkeiten, und ebenso auch die Anzahl der Maxima und Minima für jeden endlichen Spielraum der Variablen eine endliche ist.

Der *Du Bois-Reymond'sche Mittelwerthsatz* bildet, wie schon angedeutet, das Hauptinstrument meiner nachfolgenden Untersuchungen.

Spezielle Fälle dieses Satzes sind bereits von *Abel***), *Bonnet****) und *Weierstrass* entdeckt worden, wobei zu bemerken ist, dass letzterer das von ihm Gefundene nicht durch Druck, sondern nur gelegentlich seiner Vorlesungen mitgetheilt hat. Völlig unabhängig von den genannten Autoren ist der Satz

---

*) Diese *neuen* Integraleigenschaften der *Kreis*- und *Cylinder*-Functionen sind von wesentlicher Bedeutung für gewisse Probleme der *Elektrostatik*, wie ich solches, wenigstens theilweise, schon gezeigt habe in meinem Aufsatz über die *Mehler'schen Kegelfunctionen* (Math. Ann. Bd. 18, S. 218 ff.). Dass die *neuen* Integraleigenschaften der *Kreis*functionen ausserdem auch von Nutzen sind für gewisse Probleme der *conformen Abbildung*, gedenke ich in Zukunft zu expliciren.

**) *Abel*: Untersuchungen über die binomische Reihe, daselbst Satz III; Crelle's Journal, Bd. 1; Seite 314.

***) *Bonnet: Remarques sur quelques intégrales définies;* 1849. Liouv. Journ. T. 14. p. 249.

von Neuem, und zwar in seiner allgemeinsten Gestalt, gefunden worden von *Du Bois-Reymond* im Jahre 1868*).

Im Ganzen genommen ist der genannte Satz von ziemlich elementarem Charakter. Jedenfalls beruht seine Wichtigkeit weniger auf seinem unmittelbaren Inhalt, als vielmehr auf den vortrefflichen Diensten, welche er *als Instrument* leistet, theils um den Zugang zu schon bekannten Sätzen zu erleichtern, theils zur Auffindung neuer Sätze. *Diese sich weit erstreckende Brauchbarkeit und Nützlichkeit des Satzes aber dürfte zum ersten Mal in deutliches Licht getreten sein durch den schon genannten Du Bois'schen Aufsatz vom Jahre 1868.* Und schon aus diesem Grunde scheint es angemessen, den Satz als den *Du Bois-Reymond'schen Satz* zu benennen.

*) *P. du Bois-Reymond:* Ueber die allgemeinen Eigenschaften der Classe von Doppelintegralen, zu welcher das *Fourier*'sche Doppelintegral gehört; 1868. Borchardt's Journal, Bd. 69, Seite 65; namentlich § 3, Seite 78. — Hinsichtlich der oben mitgetheilten historischen Notizen vergleiche man übrigens die kürzlich von *Du Bois-Reymond* veröffentlichte Schrift: *Zur Geschichte der trigonometrischen Reihen.* Tübingen, bei Laupp. Seite 56—62.

Leipzig, August 1881. **Dr. C. Neumann.**

Inhalts-Uebersicht.

Erstes Capitel.

Zweites Capitel.

Drittes Capitel.

---

*) Die diesem Paragraphen zu Grunde liegende Originalschrift lautet:
Sir William Rowan Hamilton: *On fluctuating functions.* Bei dem vom Verf. meinem Vater zugesendeten und jetzt in meinen Händen befindlichen Separatabzug dieses Aufsatzes ist vom Verf. mit Tinte hinzugefügt: *Read, June 22, 1840,* — ein Zeichen dafür, dass der Verf. dieser wohl wenig bekannten Arbeit ein grosses Gewicht beilegte. — Man findet den Aufsatz in den *Transactions of the Royal Irish Academy*, *Vol. 19*, *Part 2. 1842.*

Viertes Capitel.

Fünftes Capitel.

---

*) Ich habe noch besonders hervorzuheben, dass die in § 2 und § 3 angestellten Untersuchungen sich stützen auf die Arbeiten von *Dini* und *Heine.*

Dini: Sopra le serie die funzioni sferiche. Annali da Brioschi e Cremona. Serie 2, Tomo 6, p. 112—140 e p. 208—215.

Heine: Handbuch der Kugelfunctionen, zweite Auflage, 1878. Erster Theil, Seite 432 ff. — Vgl. auch die zugehörigen Aufsätze von *Bruns* und *Heine* im Borchardt'schen Journal Bd. 90.

Dennoch aber weichen meine Untersuchungen von denen der genannten Autoren wesentlich ab, So z. B. beruht die *Heine*'sche Darstellung auf dem Satz, dass P_n (cos ω) sich mit wachsendem n, bis an die Ordnung $\frac{3}{2}$, dem Werthe

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n\pi}\sin\omega}\cos\left(\frac{(2n+1)\,\omega}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

nähert, so lange ω eine nicht mit n zu Null convergirende Grösse bezeichnet; und ferner auf dem Satz, dass P_n (cos ω) mit wachsendem n sogar dann noch der Null sich nähert, wenn ω selbst unendlich klein wird, allerdings nur so, dass $n^\alpha\,\omega$ schon mit n ins Unendliche wächst, wo $\alpha < \frac{1}{2}$. — Diese etwas beschwerlichen Sätze habe ich in den betreffenden § 2 und § 3 zu *vermeiden*, und hierdurch meiner Untersuchung eine *grössere Einfachheit* zu verleihen gesucht.

Nachträgliche Verbesserungen und Bemerkungen.

Auf S. 18, in Formel (30.) muss $J(q\varsigma)$ statt $J(q\xi)$ gesetzt werden.

Auf Seite 86 ist in der eilften Zeile v. u. *hinabdrücken* statt *hinabdrückt* zu lesen. — Auch würde sich auf dieser Seite, sowie in der letzten Zeile der vorhergehenden Seite eine leicht ersichtliche Aenderung empfehlen, welche darin besteht, dass man daselbst statt $\Pi_n^{\alpha\beta}$ überall: Max $\Pi_n^{\alpha\beta}$ substituirt, indem man dabei unter diesem Symbol: Max $\Pi_n^{\alpha\beta}$ die *grösste* der Zahlen

$$\Pi_n^{\alpha\beta},\quad \Pi_{n+1}^{\alpha\beta},\quad \Pi_{n+2}^{\alpha\beta},\quad \Pi_{n+3}^{\alpha\beta},\ \ldots\ \text{in inf.}$$

versteht. Dieser Definition entsprechend ist alsdann *selbstverständlich*:

$$\text{Max}\ \Pi_n^{\alpha\beta} \geqq \text{Max}\ \Pi_{n+1}^{\alpha\beta} \geqq \text{Max}\ \Pi_{n+2}^{\alpha\beta} > \text{etc. etc.}$$

Dieselbe Umänderung hinsichtlich des $\Pi_n^{\alpha\beta}$ empfiehlt sich noch an einigen andern Stellen dieses Werkes, ohne dass es nöthig wäre, hier näher darauf einzugehen.

Es mag mir schliesslich noch gestattet sein, auf einige meiner Schriften und Aufsätze hinzuweisen, welche ihrem Inhalt nach dem hier behandelten Gegenstande verwandt sind.

1. Ueber die Entwicklung einer Function mit imaginärem Argument nach den *Kugelfunctionen erster und zweiter Art.* Halle, bei Schmidt, 1862.
2. Theorie der *Bessel'*schen Functionen, ein Analogon zur Theorie der Kugelfunctionen. Leipzig, bei Teubner, 1867.
3. Ueber die Entwicklung einer Function nach Quadraten und Producten der *Bessel'*schen Functionen. Math. Ann. Bd. 3, Seite 581. Vom Jahre 1869.
4. Ueber die *Mehler'schen Kegelfunctionen.* Math. Ann. Bd. 18. Vom Jahre 1881.
5. Ueber zwei von *Cantor* und *Du Bois-Reymond* über die *trigonometrischen Reihen* aufgestellte Sätze, und deren Uebertragung auf solche Reihen, die nach *Kugelfunctionen* fortschreiten. In den Berichten der Kgl. Sächsischen Ges. d. Wiss. vom Jahre 1881.

Erstes Capitel.

Einleitende Betrachtungen.

Eine Function von *einem* Argument ist im Allgemeinen sowohl entwickelbar in eine *nach Kreisfunctionen fortschreitende Reihe* (die Fourier'sche Reihe), als auch in ein *nach Kreisfunctionen fortschreitendes Integral* (das Fourier'sche Integral).*)

Hiermit analog ist eine Function von *zwei* Argumenten im Allgemeinen einerseits entwickelbar in eine *nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihe* (die Laplace'sche Reihe), und andererseits darstellbar durch ein *nach Cylinderfunctionen fortschreitendes Integral* (ein zuerst vom Verfasser dieses Werkes angegebenes Integral).

Im gegenwärtigen *ersten Capitel* dieses Werkes soll nun gezeigt werden, dass man zu all' diesen vier Entwicklungen in einfacher und natürlicher Weise geführt wird mittelst gewisser, theils den Kreis, theils die Kugel betreffenden Potentialaufgaben. Und wenn auch der in solcher Weise in diese Regionen sich eröffnende Weg keinen Anspruch auf wirkliche Strenge machen kann, so dürfte er doch dazu dienen, um von vornherein über die in Rede stehenden Entwicklungen, und namentlich über ihre gegenseitige Stellung und innere Verwandtschaft einen Ueberblick zu gewinnen.

Um näher auf die Sache einzugehen, mag es mir gestattet sein, das Wort: *Potentialfunction* anzuwenden, und zwar in demselben Sinne, in welchem dasselbe theils von Lipschitz, theils von mir selber bereits mehrfach gebraucht ist.

---

*) Der Kürze und Symmetrie willen mag dem Verfasser diese Ausdrucksweise gestattet sein. Ebenso wie z. B. die Formel

$$f(x) = \sum_0^{\infty}{}' A_n \cos(nx)$$

bezeichnet zu werden pflegt, als eine nach den Cosinus fortschreitende *Reihenentwicklung;* ebenso mag eine Formel von der Gestalt:

$$f(x) = \int_0^{\infty} A_q \cos(qx)\, dq$$

bezeichnet werden als eine nach den Cosinus fortschreitende *Integralentwicklung* oder *Integraldarstellung;* was einigermassen in Einklang ist mit der Ausdrucksweise von Du Bois-Reymond.

Bezeichnet nämlich $\mathfrak{T}$ irgend ein bestimmtes Gebiet der *Ebene*, so soll unter einer *Potentialfunction dieses Gebietes* $\mathfrak{T}$ jedwede Function

$$V = V(x, y)$$

verstanden werden, die innerhalb $\mathfrak{T}$ der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Genüge leistet, und die ausserdem sammt ihren ersten (nach x, y genommenen) Ableitungen innerhalb $\mathfrak{T}$ stetig ist.

Bezeichnet andererseits $\mathfrak{T}$ irgend ein bestimmtes Gebiet des *Raumes*, so soll unter einer *Potentialfunction dieses Gebietes* $\mathfrak{T}$ jedwede Function

$$V = V(x, y, z)$$

verstanden werden, die innerhalb $\mathfrak{T}$ der Gleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Genüge leistet, und die ausserdem sammt ihren ersten (nach x, y, z genommenen) Ableitungen innerhalb $\mathfrak{T}$ stetig ist.

Dies vorangeschickt, sind wir die zu jenen vier Entwicklungen hinleitenden Potentialaufgaben sofort näher anzugeben im Stande.

Ist nämlich $\mathfrak{T}$ die Innenfläche eines Kreises, und stellt man sich die Aufgabe, diejenige Potentialfunction von $\mathfrak{T}$ zu finden, welche am Rande von $\mathfrak{T}$ *vorgeschriebene Werthe* hat, so gelangt man zu der nach *Kreisfunctionen* fortschreitenden Reihenentwicklung (d. i. zur Fourier'schen Reihe).

Ist andererseits $\mathfrak{T}$ der Innenraum einer Kugelfläche, und stellt man sich die Aufgabe, diejenige Potentialfunction von $\mathfrak{T}$ zu finden, welche auf der Oberfläche von $\mathfrak{T}$ *vorgeschriebene Werthe* hat, so gelangt man zu der nach *Kugelfunctionen* fortschreitenden Reihe (d. i. zur Laplace'schen Reihe).

Und verfolgt man endlich ebendieselben beiden Aufgaben zum zweiten Mal, jedoch unter der Voraussetzung,

dass der Radius des betrachteten Kreises unendlich gross ist, so gelangt man zu der nach *Kreisfunctionen* fortschreitenden Integraldarstellung (d. i. zum Fourier'schen Integral).

dass der Radius der betrachteten Kugel unendlich gross ist, so gelangt man zu der nach *Cylinderfunctionen* fortschreitenden Integraldarstellung (d. i. zu derjenigen Darstellung, die vom Verfasser des vorliegenden Werkes herrührt).

Aus diesen vorläufigen Bemerkungen ist ersichtlich, dass beim Uebergange vom endlichen zum unendlich grossen Radius

die *Kreisfunctionen Kreisfunctionen* bleiben,

hingegen die *Kugelfunctionen* in *Cylinderfunctionen* übergehen; dass mithin diese letzteren nur ein *Specialfall* der ersteren sind. In der That lässt sich zeigen, dass die meisten Eigenschaften der Kugelfunctionen in mehr oder weniger deutlicher Weise sich auch vorfinden bei den Cylinderfunctionen.

Was hier in flüchtigen Umrissen angedeutet, soll *im gegenwärtigen Capitel* genauer explicirt werden. Und namentlich soll dabei auch untersucht werden, in welcher Weise bei einem solchen Uebergange vom endlichen zum unendlich grossen Radius

die Integraleigenschaften der *Kreisfunctionen*:

$$\int_{-\pi}^{+\pi} \cos(n\varphi) \,.\, \cos(s\varphi) \,.\, d\varphi = 0, \text{ resp.} = \pi,$$

sich umgestalten. — Wir werden sehen, dass man dabei zu gewissen *neuen* Integraleigenschaften der *Kreisfunctionen* gelangt.

die Integraleigenschaften der *Kugelfunctionen*:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\, P_s(\mu)\, d\mu = 0, \text{ resp.} = \frac{2}{2n+1},$$

sich umgestalten. — Wir werden sehen, dass man dabei zu gewissen *neuen* Integraleigenschaften der *Cylinderfunctionen* gelangt.

Uebrigens wird der Weg, den wir in diesem *ersten Capitel* verfolgen, der Hauptsache nach nur als ein *heuristischer* zu betrachten sein. Die sich auf diesem Wege ergebenden Sätze und Eigenschaften sollen alsdann, soweit sie die *Kreisfunctionen* betreffen, im *zweiten* und *dritten,* und, soweit sie die *Kugel-* oder *Cylinderfunctionen* angehen, im *vierten* und *fünften Capitel* einer genauern Untersuchung anheimfallen.

§ 1.

Ueber eine den Kreis betreffende Potentialaufgabe.

Erinnerung an bekannte Sätze aus der Theorie des Logarithmischen Potentials in der Ebene. — Ist *innerhalb* einer Kreisperipherie ein Punkt i gegeben, so existirt bekanntlich stets eine Massenbelegung dieser Peripherie von solcher Art, dass sie für alle *äusseren* Puncte äquipotential ist mit einer in i concentrirt gedachten Masse Eins. Diese Belegung heisst kurzweg *die dem Puncte i entsprechende Green'sche Belegung.* Bezeichnet man die Dichtigkeit derselben in irgend einem Puncte σ der Peripherie mit η_σ^i, so ist bekanntlich:

$$\eta_\sigma^i = \frac{r^2 - r_1^2}{2\pi r}\left(\frac{1}{E}\right)^2, \tag{1.}$$

oder, was dasselbe:

$$\eta_\sigma^i = -\frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{r} + 2\frac{\partial}{\partial N}\left(\log\frac{1}{E}\right)\right). \tag{2.}$$

Dabei repräsentirt r den Radius der Peripherie, r_1 den Centralabstand des Punktes i, ferner E den gegenseitigen Abstand der beiden Puncte i, σ, endlich N die in σ errichtete äussere Normale, d. i. die Richtung des nach σ laufenden Kreisradius.

Bezeichnet man nun die von der gegebenen Peripherie umschlossene *Fläche* mit $\mathfrak{T}$, und soll für diese Fläche $\mathfrak{T}$ diejenige Pontentialfunction V ermittelt werden, welche am Rande von $\mathfrak{T}$ *vorgeschriebene Werthe* besitzt, so kann man diese Aufgabe sofort lösen mittelst der soeben besprochenen Green'schen Belegung, d. i. mittelst der Function η_σ^i. Denn nach bekanntem Satze wird der

Werth jener Function V z. B. im Puncte i dargestellt sein durch folgendes über die Kreisperipherie sich erstreckende Integral:

$$V_i = \int F_\sigma \eta_\sigma^i \, d\sigma. \tag{3.}$$

Dabei bezeichnet F_σ den im Puncte σ *vorgeschriebenen Werth*, und $d\sigma$ das bei diesem Puncte gelegene Element der Peripherie. — Wir wollen nun die Formeln (1.), (2.), (3.) in diejenige Gestalt versetzen, welche sie annehmen bei

Einführung der Polarcoordinaten. — Sind (r, φ) und (r_1, φ_1) die Polarcoordinaten zweier beliebiger Puncte, so gilt für ihren gegenseitigen Abstand E die Formel:

$$E^2 = r^2 + r_1{}^2 - 2rr_1 \cos(\varphi - \varphi_1). \tag{4.}$$

Und auf Grund dieser Formel kann man, falls $r_1 < r$ ist, den $\log\left(\frac{1}{E}\right)$ entwickeln nach Potenzen von $\left(\frac{r_1}{r}\right)$:

$$\log\frac{1}{E} = \log\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{r_1}{r}\right)^n \cos n(\varphi - \varphi_1); \quad \text{für } r_1 < r. \tag{5.}$$

Identificiren wir nun die Puncte (r, φ) und (r_1, φ_1) respective mit den in (1.), (2.), (3.) erwähnten Puncten σ und i, so ergiebt sich aus (2.) durch Substitution des Werthes (5.):

$$\eta_\sigma^i = \frac{1}{2\pi r}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{r_1}{r}\right)^n \cos n(\varphi - \varphi_1)\right). \tag{6.}$$

Substituiren wir aber dies in (3.), und setzen wir zugleich:

$$\begin{aligned} V_i &= V(r_1, \varphi_1), \\ F_\sigma &= F(r, \varphi) = F(\varphi), \text{ und } d\sigma = r\,d\varphi, \text{ *)} \end{aligned} \tag{7.}$$

so erhalten wir:

$$V(r_1, \varphi_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\varphi)\left(1 + 2\sum_1^\infty \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \cos n(\varphi - \varphi_1)\right) d\varphi, \tag{8.}$$

oder, ein wenig anders geschrieben**):

$$V(r_1, \varphi_1) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\varphi)\left(1 + 2\sum_1^n \left(\frac{r_1}{r}\right)^n \cos n(\varphi - \varphi_1)\right) d\varphi. \tag{9.}$$

Diese Formel repräsentirt die Lösung der gestellten Aufgabe. Denn sie liefert die Werthe von V für alle innerhalb $\mathfrak{T}$ gelegenen Puncte (r_1, φ_1), falls nur die Randwerthe $F(\varphi)$ gegeben sind.

---

*) r ist eine *gegebene Constante*, nämlich der Radius der gegebenen Peripherie. Mit Unterdrückung dieses *constanten Parameters* kann man daher statt $F(r, \varphi)$ kurzweg $F(\varphi)$ schreiben.

**) Die obere Summationsgrenze ist in (8.) durch ∞, hingegen in (9.) durch n dargestellt.

Nach der Definition von V muss der Werth $V(r_1, \varphi_1)$ in $F(\varphi_1)$ übergehen, sobald man r_1 zu r anwachsen lässt. Somit folgt aus (9.):

$$F(\varphi_1) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\varphi) \left(1 + 2 \sum_{1}^{n} \cos n(\varphi - \varphi_1)\right) d\varphi. \tag{10.}$$

Und diese Formel repräsentirt die Fourier'sche Reihenentwicklung.

§ 2.

Uebergang zum unendlich grossen Kreise.

Machen wir den Radius r der Fläche $\mathfrak{T}$ *äusserst gross* (noch nicht unendlich gross), so wird ihr Rand oder, besser ausgedrückt, ein Stück ihres Randes dargestellt sein durch einen Bogen PQ, der nur noch wenig von einer geraden Linie sich unterscheidet; und gleichzeitig wird alsdann der Mittelpunct M der Fläche $\mathfrak{T}$ äusserst weit von PQ entfernt sein.

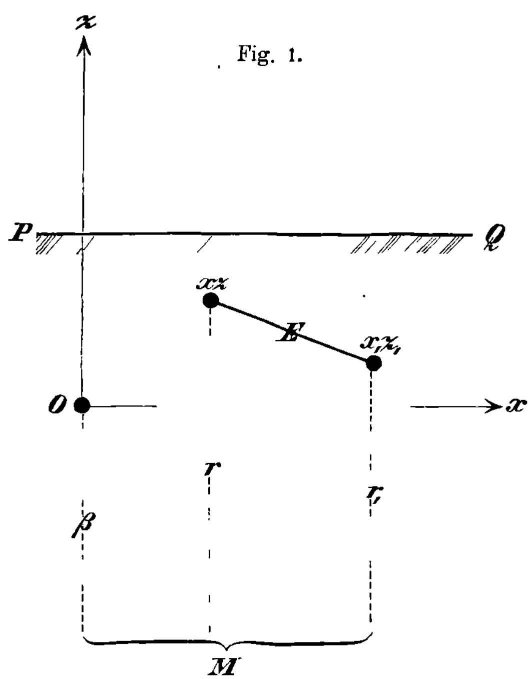


Fig. 1.

Der Bequemlichkeit willen denken wir uns PQ *horizontal*, und den Mittelpunct M *unterhalb* PQ. Gleichzeitig führen wir ein rechtwinkliges Coordinatensystem mit dem Anfangspuncte O ein, dessen x-Axe *horizontal* und *unterhalb* PQ liegen soll, während seine z-Axe *vertikal nach Oben* laufen mag. Ueberdies sei

$$(OM) = \beta, \tag{11.}$$

so dass also β die *sehr grosse* Entfernung des Mittelpunctes M vom Anfangspuncte O vorstellt.

Bezeichnet man nun die Polarcoordinaten eines beliebigen Punctes (x, z) mit (r, φ), indem man unter r seinen Abstand von M, ferner unter φ die Neigung dieses Abstandes r gegen die Linie MO d. i. gegen die z-Axe versteht, so ergiebt sich sofort:

$$r = \beta + z,$$

und ferner, weil β *äusserst gross* sein soll:

$$\varphi = \frac{x}{\beta + z} = \frac{x}{\beta}.$$

Sind also irgend *zwei* Puncte gegeben (x, z) und (x_1, z_1), so erhält man bei analoger Bezeichnungsweise die Formeln:

$$(12.)\qquad \begin{cases} r = \beta + z, \\ \varphi = \frac{x}{\beta}, \end{cases} \qquad \begin{cases} r_1 = \beta + z_1, \\ \varphi_1 = \frac{x_1}{\beta}. \end{cases}$$

Führt man nun mittelst dieser Substitutionen in (4.), (5.) an Stelle der Polarcoordinaten die *rechtwinkligen Coordinaten* ein, so erhält man:

$$(13.)\qquad E^2 = (\beta + z)^2 + (\beta + z_1)^2 - 2(\beta + z)(\beta + z_1)\cos\frac{x - x_1}{\beta},$$

$$(14.)\qquad \log\frac{1}{E} = \log\frac{1}{\beta + z} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\beta + z_1}{\beta + z}\right)^n \cos\frac{n(x - x_1)}{\beta}, \quad \text{für } z_1 < z.$$

Sollen nun diese Formeln wirklich dem Fall des *unendlich grossen* Kreises entsprechen, so hat man in ihnen $\beta = \infty$ zu machen. Durch Ausführung dieser Procedur geht, wie leicht zu übersehen, (13.) über in die bekannte Formel:

$$(15.)\qquad E^2 = (x - x_1)^2 + (z - z_1)^2.$$

Etwas mühsamer ist hingegen die Ausführung jener Procedur bei der Formel (14.). Und es wird dabei angemessen sein, zunächst an Stelle des Summationsargumentes n ein *anderes* Argument q einzuführen, mittelst der Substitution:

$$(A.)\qquad q = \frac{n}{\beta}.$$

Da n die Werthe

$$(B.)\qquad n = 1, 2, 3, 4, \ldots \infty$$

zu durchwandern hat, so wird das neue Argument q die Werthe

$$(C.)\qquad q = \frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, \frac{3}{\beta}, \frac{4}{\beta}, \ldots \infty$$

durchlaufen. Bezeichnet man also die Differenz je zweier aufeinanderfolgender q-Werthe mit dq, so ist:

$$(D.)\qquad dq = \frac{1}{\beta}.$$

Endlich ergiebt sich aus (A.) und (D.) durch Division:

$$(E.)\qquad \frac{dq}{q} = \frac{1}{n}.$$

Substituiren wir nun in (14.) für n und $\frac{1}{n}$ die aus (A.) und (E.) entspringenden Werthe, so erhalten wir:

$$(16.)\qquad \log\frac{1}{E} = \log\frac{1}{\beta + z} + \sum \frac{dq}{q}\left(\frac{\beta + z_1}{\beta + z}\right)^{\beta q} \cos q(x - x_1), \quad \text{für } z_1 < z;$$

die Summation erstreckt über $q = \frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, \frac{3}{\beta}, \ldots \infty$. — Lassen wir jetzt schliesslich die Constante β *ins Unendliche* wachsen, mithin das dq (D.) *un-*

endlich klein werden, so verwandelt sich die vorstehende Summe in ein von $q = 0$ bis $q = \infty$ laufendes *Integral;* während gleichzeitig der unter diesem Integral enthaltene Factor

$$\left(\frac{\beta + z_1}{\beta + z}\right)^{\beta q} \text{ übergeht in } e^{q(z_1 - z)};\ ^{*)}$$

so dass wir also erhalten:

$$\log \frac{1}{E} = -\log(\beta + z) + \int_0^\infty \frac{dq}{q}\, e^{q(z_1 - z)} \cos q(x_1 - x); \quad \text{für } z_1 < z. \tag{17.}$$

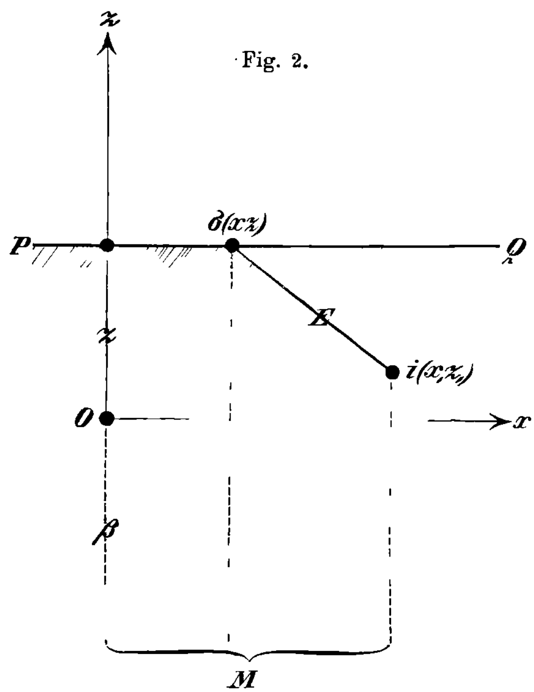


Fig. 2.

Dies vorangeschickt, kehren wir zurück zu den Formeln (1.), (2.), (3.), die für *jeden* Kreis, also auch für den *unendlich grossen* Kreis gelten. Die Formel (2.) nimmt, weil r gegenwärtig $= \infty$ ist, die Gestalt an:

$$\eta^i_\sigma = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial N}\left(\log \frac{1}{E}\right). \tag{18.}$$

Sind nun (x, z) und (x_1, z_1) die Coordinaten der Puncte σ und i, so wird offenbar die Differentiation nach N nichts Anderes sein als eine Differentiation nach z; so dass man also mittelst der Entwicklung (17.) den Werth erhält:

$$\eta^i_\sigma = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\beta + z} + \int_0^\infty dq\, e^{q(z_1 - z)} \cos q\ x_1 - x\right), \tag{19.}$$

oder, weil $\beta = \infty$ sein soll:

$$\eta^i_\sigma = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty dq\, e^{q(z_1 - z)} \cos q(x_1 - x). \tag{20.}$$

Substituiren wir dies in die Formel (3.), und setzen wir zugleich:

---

*) Jener Factor kann nämlich auch so geschrieben werden:

$$\left(\frac{1 + \frac{z_1}{\beta}}{1 + \frac{z}{\beta}}\right)^{\beta q}.$$

Nun wird aber, falls man $\frac{z}{\beta} = \varepsilon$ setzt:

$$\lim_{\beta = \infty} \left(1 + \frac{z}{\beta}\right)^{\beta q} = \lim_{\varepsilon = 0} (1 + \varepsilon)^{\frac{qz}{\varepsilon}} = e^{qz}; \text{ u. s. w.}$$

$$
(21.)\qquad \begin{aligned} V_i &= V(x_1,\, z_1)\,, \\ F_\sigma &= F(x,\, z) = F(x), \quad \text{und} \quad d\sigma = dx\,;\, ^{*)} \end{aligned}
$$

so erhalten wir:

$$
(22.)\qquad V(x_1,\, z_1) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\left(\int\limits_0^{\infty} dq\, e^{q(z_1 - z)}\cos q\,(x_1 - x)\right)dx\,,
$$

oder, ein wenig anders geschrieben**):

$$
(23.)\qquad V(x_1,\, z_1) = \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\left(\int\limits_0^{q} dq\, e^{q(z_1 - z)}\cos q(x_1 - x)\right)dx\,.
$$

Diese Formel repräsentirt die Lösung der gestellten Aufgabe. Denn die Fläche $\mathfrak{T}$ ist gegenwärtig eine von der Linie PQ begrenzte und nach Unten sich ins Unendliche ausdehnende *Halbebene* (vgl. die Figur Seite 7); und die vorstehende Formel liefert die Werthe von V für alle innerhalb dieser Fläche $\mathfrak{T}$ gelegenen Puncte $(x_1,\, z_1)$, falls nur die Randwerthe $F(x)$ gegeben sind.

Nach der Definition von V muss der Werth $V(x_1,\, z_1)$ in $F(x_1)$ übergehen, sobald man z_1 auf z anwachsen lässt. Somit folgt aus (23.):

$$
(24.)\quad F(x_1) = \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\left(\int\limits_0^{q} dq\cos q(x_1 - x)\right)dx\,, \text{ d. i. } = \lim_{q=\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,\frac{\sin q\,(x_1 - x)}{x_1 - x}\,dx\,;
$$

und dies ist die Fourier'sche Integraldarstellung.

§ 3.

Neue Integraleigenschaften der Kreisfunctionen.

Diese Eigenschaften sind bekanntlich, soweit sie die *Sinus* betreffen, dargestellt durch die Formel:

$$
(1.)\qquad \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \sin\,(n\varphi)\cdot\sin\,(s\varphi)\cdot d\varphi = \begin{cases} 0\,, & \text{falls } n \lessgtr s\,, \\ \pi\,, & \text{falls } n = s\,; \end{cases}
$$

wobei n und s irgend welche Zahlen aus der Reihe $1,\ 2,\ 3,\ \ldots$ vorstellen sollen.

Unsere Aufgabe soll nun darin bestehen, diese Formel (1.) zu übertragen

---

*) Die Fläche $\mathfrak{T}$ ist gegenwärtig dargestellt durch eine unendliche *Halbebene* und begrenzt von der horizontalen Linie PQ (vgl. die Figur Seite 7). Irgend ein Element dieser Linie PQ ist mit $d\sigma$ bezeichnet; und die Coordinaten dieses Elementes sind $(x,\, z)$ genannt. Demgemäss repräsentirt also z eine *gegebene Constante*, nämlich den Abstand der Linie PQ von der x-Axe des Coordinatensystems. Mit Unterdrückung dieses *constanten Parameters* z kann daher das $F(x,\, z)$ kurzweg mit $F(x)$ bezeichnet werden.

**) Die obere Grenze des innern Integrals ist in (22.) durch ∞, hingegen in (23.) durch q dargestellt.

auf den Fall eines *unendlich grossen* Kreises. Und zu diesem Zweck bemerken wir zunächst, dass die Formel (1.) völlig äquivalent ist mit folgender:

$$(2.)\qquad \int_{-\pi}^{+\pi}\left\{\left(\sum_1^n C_n \sin n\varphi\right)\left(\sum_1^n D_n \sin n\varphi\right)\right\} d\varphi = \pi \sum_1^n C_n D_n\,,$$

falls wir nämlich unter den C, D willkürliche Constanten verstehen. — In der That übersieht man sofort, dass (2.) eine Folge ist von (1.), und dass auch umgekehrt (1.) als Folge von (2.) angesehen werden darf*).

Es handelt sich also darum, die Formel (1.) oder (2.) zu übertragen auf den Fall eines *unendlich grossen* Kreises. Oder mit anderen Worten: es handelt sich darum, in jenen Formeln statt der Variablen φ eine neue Variable x einzuführen mittelst der schon früher [Seite 6, (12.)] besprochenen Substitution $\varphi = \frac{x}{\beta}$, wo β eine *sehr grosse* Constante vorstellt, die später *ins Unendliche anwachsen* soll.

Setzt man nun in (2.)

$$\varphi = \frac{x}{\beta}, \quad \text{mithin} \quad d\varphi = \frac{dx}{\beta},$$

und setzt man gleichzeitig die obere Summationsgrenze $n = \alpha\beta$, so ergiebt sich:

$$(3.)\qquad \int_{-\pi\beta}^{+\pi\beta}\left\{\left(\sum C_n \sin\frac{nx}{\beta}\right)\left(\sum D_n \sin\frac{nx}{\beta}\right)\right\}\frac{dx}{\beta} = \pi \sum C_n D_n\,,$$

die Summationen erstreckt über $n = 1, 2, 3, \ldots (\alpha\beta - 1), \alpha\beta$.

Es mag hier α, ebenso wie β, eine *positive* Grösse sein. *Und zwar mag α einen von Hause aus beliebig gegebenen Werth haben, und während der ganzen Untersuchung constant erhalten werden.* β hingegen soll (wie schon gesagt) ungemein gross sein, später ins Unendliche anwachsen, und zu dem gegebenen α dabei beständig in solcher Beziehung bleiben, dass das Product $\alpha\beta$ in jedem Augenblick eine *ganze Zahl* ist.

Multiplicirt man nun die Formel (3.) mit $\frac{1}{\beta}$, und führt man zugleich**) statt des Summationsargumentes n ein anderes Argument q ein mittelst der Relation:

$$q = \frac{n}{\beta},$$

so folgt:

---

*) Man erhält nämlich (1.) aus (2.), sobald man sämmtliche C bis auf *eines* gleich Null macht, und ebenso auch mit den D verfährt.

**) Aehnlich wie früher auf Seite 6.

$$(4.)\qquad \int_{-\pi\beta}^{+\pi\beta}\left\{\left(\sum C_{\beta q}\sin qx\right)\frac{1}{\beta}\cdot\left(\sum D_{\beta q}\sin qx\right)\frac{1}{\beta}\right\}dx=\pi\left(\sum C_{\beta q}\,D_{\beta q}\right)\frac{1}{\beta},$$

die Summationen erstreckt über $q=\frac{1}{\beta},\ \frac{2}{\beta},\ \frac{3}{\beta},\ \ldots\ \left(\alpha-\frac{1}{\beta}\right),\ \alpha$.

Bezeichnet man hier die Differenz zwischen je zwei aufeinanderfolgenden q-Werthen mit dq, so ist

$$dq=\frac{1}{\beta};$$

so dass man also das in (4.) vorkommende $\frac{1}{\beta}$ überall durch dq ersetzen kann. Hierdurch ergiebt sich:

$$(5.)\qquad \int_{-\pi\beta}^{+\pi\beta}\left\{\left(\sum C_{\beta q}\sin qx\right)dq\cdot\left(\sum D_{\beta q}\sin qx\right)dq\right\}=\pi\left(\sum C_{\beta q}\,D_{\beta q}\right)dq,$$

die Summationen erstreckt über $q=\frac{1}{\beta},\ \frac{2}{\beta},\ \frac{3}{\beta},\ \ldots\ \left(\alpha-\frac{1}{\beta}\right),\ \alpha$.

Denken wir uns nun, während α constant bleibt, die Grösse β ins Unendliche anwachsend, so verwandeln sich die in (5.) enthaltenen Summen in *bestimmte Integrale.* Und wir gelangen also, falls wir die Werthe von $C_{\beta q}$, $D_{\beta q}$ für $\beta=\infty$ mit L_q, M_q bezeichnen, zu folgender Formel:

$$(6.)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left(\int_0^\alpha L_q\sin qx\cdot dq\right)\left(\int_0^\alpha M_q\sin qx\cdot dq\right)\right\}dx=\pi\int_0^\alpha L_q M_q\,dq$$

Es liegt auf der Hand, dass man an Stelle von (1.) auch *andere* Ausgangsformeln wählen kann. Hauptsächlich bieten sich folgende dar:

$$(a.)\qquad \int_{-\pi}^{+\pi}\sin n\varphi\cdot\sin s\varphi\cdot d\varphi=0 \text{ oder } \pi,$$

$$(b.)\qquad \int_{-\pi}^{+\pi}\cos n\varphi\cdot\cos s\varphi\cdot d\varphi=0 \text{ oder } \pi,$$

$$(c.)\qquad \int_{-\pi}^{+\pi}\cos n\varphi=0,$$

immer vorausgesetzt, dass n und s Zahlen aus der Reihe 1, 2, 3, 4, ... sind. — Nimmt man nun diese Formeln (a.), (b.), (c.) nacheinander zum Ausgangspunct, so gelangt man mittelst der vorhin exponirten Methode der Reihe nach zu folgenden Endresultaten*):

$$(A.)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty}\left\{\left(\int_0^\alpha L_q\sin qx\cdot dq\right)\left(\int_0^\alpha M_q\sin qx\cdot dq\right)\right\}dx=\pi\int_0^\alpha L_q M_q\,dq,$$

*) Von diesen drei Formeln (A.), (B.), (C.) repräsentirt die *erste* nur eine Wiederholung der soeben gefundenen Formel (6.).

$$\text{(B.)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \left(\int_0^\alpha L_q \cos qx \cdot dq \right) \left(\int_0^\alpha M_q \cos qx \cdot dq \right) \right\} dx = \pi \int_0^\alpha L_q M_q \, dq,$$

$$\text{(C.)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_0^\alpha L_q \cos qx \cdot dq \right) dx = 0 \text{ oder } = 2\pi L_0 ,$$

wo α eine beliebige gegebene positive Constante vorstellt, während L_q und M_q beliebige Functionen von q sein können. Diese merkwürdigen und (wie meine Erfahrung gezeigt hat) für manche Zwecke sehr nützlichen Formeln (A.), (B.), (C.) bezeichne ich kurzweg als *neue Integraleigenschaften der Kreisfunctionen.*

Bemerkung. — Die Formel (C.), und namentlich der zweifelhafte Werth auf ihrer rechten Seite bedürfen einer gewissen Erläuterung. Die hier als Ausgangspunct dienende Formel (c.) ist offenbar äquivalent mit folgender:

$$(c_1.) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\sum_1^n C_n \cos n\varphi \right) d\varphi = 0,$$

oder auch mit folgender:

$$(c_2.) \qquad \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\sum_0^n C_n \cos n\varphi \right) d\varphi = 2\pi C_0 ; \text{*)}$$

wo die C willkührliche Constanten sind. Und je nachdem man nun die vorhin exponirte Behandlungsweise auf die Formel (c_1.) oder (c_2.) anwendet, findet man für das in (C.) angegebene Integral im einen Fall den Werth 0, im andern den Werth $2\pi L_0$. Dies ist sicher *ein sprechender Beweis für die Unsicherheit der angewandten Methode.*

Uebrigens wird eine genauere Untersuchung im dritten Capitel uns zeigen, dass die neuen Formeln (A.) und (B.) im Allgemeinen *richtig* sind, und dass Gleiches auch von der Formel (C.) gilt, falls man nur die beiden auf ihrer rechten Seite stehenden Werthe (0 und $2\pi L_0$) durch das arithmetische Mittel dieser Werthe (d. i. durch πL_0) ersetzt.

§ 4.

Ueber eine die Kugel betreffende Potentialaufgabe.

Erinnerung an einige Sätze aus der Theorie des Newton'schen Potentials im Raume. — Ist *innerhalb* einer Kugelfläche ein Punct i gegeben, so existirt bekanntlich stets eine Massenbelegung dieser Fläche, welche für alle *äusseren* Puncte äquipotential ist mit einer in i concentrirten Masse Eins. Diese

*) Die *linken* Seiten von (c_1.) und (c_2.) unterscheiden sich dadurch von einander, dass die untere Summationsgrenze in der einen $= 1$, in der andern $= 0$ ist.

Belegung wird kurzweg die dem Puncte i entsprechende *Green'sche Belegung* genannt. Bezeichnet man die Dichtigkeit derselben in irgend einem Puncte σ der Kugelfläche mit η_σ^i, so ist bekanntlich:

$$\eta_\sigma^i = \frac{r^2 - r_1^2}{4\pi r}\left(\frac{1}{E}\right)^3, \tag{1.}$$

oder (was dasselbe):

$$\eta_\sigma^i = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{rE} + 2\frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{E}\right)\right); \tag{2.}$$

dabei bezeichnet r den Radius der Kugel, r_1 den Centralabstand des Punctes i, ferner E die Entfernung zwischen den beiden Puncten i und σ, endlich N die in σ errichtete äussere Normale (also die Richtung des nach σ laufenden Kugelradius).

Bezeichnet man nun den von der gegebenen Kugelfläche umschlossenen *Raum* mit $\mathfrak{T}$, und soll für diesen Raum $\mathfrak{T}$ diejenige Potentialfunction V ermittelt werden, welche an der Oberfläche von $\mathfrak{T}$ *vorgeschriebene Werthe* besitzt, — so kann man diese Aufgabe sofort lösen mittelst jener Green'schen Belegung, d. i. mittelst der Function η_σ^i. Denn nach bekanntem Satze wird z. B. der Werth dieser Function V im Puncte i dargestellt sein durch folgendes über die Kugelfläche ausgedehnte Integral:

$$V_i = \iint F_\sigma\, \eta_\sigma^i\, d\sigma. \tag{3.}$$

Dabei bezeichnet F_σ den im Punkte σ *vorgeschriebenen Werth* und $d\sigma$ das daselbst befindliche Element der Kugelfläche. — Wir wollen nun die Formeln (1.), (2.), (3.) in diejenige Gestalt versetzen, die sie annehmen bei

Einführung der Polarcoordinaten. — Sind (r, ω, φ) und $(r_1, \omega_1, \varphi_1)$ die Polarcoordinaten zweier beliebiger Puncte, so erhält man für ihren gegenseitigen Abstand E, und für den von r und r_1 gebildeten Winkel γ die Formeln

$$E^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\gamma, \tag{4.}$$

$$\cos\gamma = \cos\omega\cos\omega_1 + \sin\omega\sin\omega_1\cos(\varphi - \varphi_1). \tag{5.}$$

Ist $r_1 < r$, so kann man auf Grund der Formel (4.) den Quotienten $\left(\frac{1}{E}\right)$ entwickeln nach Potenzen von $\left(\frac{r_1}{r}\right)$, und gelangt hierdurch zu der bekannten Reihe:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{n=\infty}\left(\frac{r_1}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma), \quad \text{für } r_1 < r; \tag{6.}$$

wo das P_n, die sogenannte *Kugelfunction*, definirt werden kann nach Belieben — entweder durch das bekannte Polynom:

$$P_n(x) = \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot4(2n-1)(2n-3)}x^{n-4} - + \cdots\right], \tag{7a.}$$

oder durch das Dirichlet'sche Polynom:

$$P_n(\cos\gamma) = 1 - \frac{n(n+1)}{1^2}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2 + \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{(1\cdot2)^2}\left(\sin\frac{\gamma}{2}\right)^4 - + \cdots \tag{7b.}$$

oder durch das Laplace'sche Integral:

(7c.) $$P_n(\cos\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\cos\gamma + i\sin\gamma\cos w)^n\,dw\,,\quad \text{wo } i = \sqrt{-1}\,.$$

Das $P_n(\cos\gamma)$ ist, ebenso wie γ selber [vergl. (5.)], eine Function der drei Argumente ω, ω_1, $(\varphi - \varphi_1)$, und entwickelbar nach den Cosinus der Vielfachen des *letzten* Argumentes. Durch wirkliche Ausführung dieser Entwicklung gelangt man bekanntlich zu folgender Formel:

(8.) $$P_n(\cos\gamma) = \sum_{j=0}^{j=n} \varepsilon_j\,\Delta_{nj}\,P_{nj}(\cos\omega)\,P_{nj}(\cos\omega_1)\,\cos j(\varphi - \varphi_1)\,,$$

wo die P_{nj}, die sogenannnten *abgeleiteten Kugelfunctionen*, definirt sind durch die Formel:

(9.) $$P_{nj}(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}j}\,\frac{\partial^j P_n(x)}{\partial x^j}\,;$$

während die ε, Δ gewisse Zahlen vorstellen, und definirt sind durch die Formeln:

(10.) $$\begin{aligned}&\varepsilon_0 = 1\,,\\ &\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \cdots = 2\,.\end{aligned}\qquad\qquad \Delta_{nj} = \frac{\Pi(n-j)}{\Pi(n+j)}\,.\ \text{*)}$$

Dies vorangeschickt, kehren wir zurück zu unsern anfänglichen Formeln (1.), (2.), (3.), und bezeichnen die Coordinaten der dortigen Puncte σ und i respective mit $(r,\ \omega,\ \varphi)$ und $(r_1,\ \omega_1,\ \varphi_1)$. Alsdann ergiebt sich aus (2.) durch Substitution des Werthes (6.):

(11.) $$\eta_\sigma^i = \frac{1}{4\pi r^2}\sum_{n=0}^{n=\infty}(2n+1)\left(\frac{r_1}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma)\,.$$

Substituiren wir dies in die Formel (3.), und setzen wir zugleich

(12.) $$\begin{aligned}&V_i = V(r_1,\ \mu_1,\ \varphi_1)\,,\\ &F_\sigma = F(r,\ \mu,\ \varphi) = F(\mu,\ \varphi)\,,\ \text{und } d\sigma = r^2 d\mu\, d\varphi\,,\ \text{**)}\end{aligned}$$

wo $\mu = \cos\omega$ und $\mu_1 = \cos\omega_1$ sein soll, so ergiebt sich:

(13.) $$V(r_1,\ \mu_1,\ \varphi_1) = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} F(\mu,\ \varphi)\left(\sum_0^\infty (2n+1)\left(\frac{r_1}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma)\right)d\mu\, d\varphi\,,$$

oder, was dasselbe ist***):

---

*) Hier bezeichnet Π die Gauss'sche Function. Es ist also

$$\begin{aligned}\Pi(0) = \Pi(1) &= 1\,,\\ \Pi(2) &= 1\cdot 2\,,\\ \Pi(3) &= 1\cdot 2\cdot 3\,,\ \text{u. s. w.}\end{aligned}$$

**) In $F(r,\ \mu,\ \varphi)$ kann nämlich das r unterdrückt werden, weil dieses r eine *gegebene Constante* (der Kugelradius) ist.

***) Die obere Summationsgrenze in (13.) ist durch ∞, in (14. hingegen durch n dargestellt.

(14.) $$V(r_1, \mu_1, \varphi_1) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-1}^{+1} \int\limits_0^{2\pi} F(\mu, \varphi) \left(\sum_0^n (2n+1) \left(\frac{r_1}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma) \right) d\mu\, d\varphi\,.$$

Diese Formel repräsentirt die Lösung der gestellten Aufgabe. Denn sie liefert die Werthe von V für alle innerhalb $\mathfrak{T}$ gelegenen Puncte (r_1, μ_1, φ_1), falls nur die Oberflächenwerthe $F(\mu, \varphi)$ gegeben sind.

Nach der Definition von V muss der Werth $V(r_1, \mu_1, \varphi_1)$ in $F(\mu_1, \varphi_1)$ übergehen, sobald man r_1 bis r wachsen lässt. Somit folgt aus (14.):

(15.) $$F(\mu_1, \varphi_1) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{4\pi} \int\limits_{-1}^{+1} \int\limits_0^{2\pi} F(\mu, \varphi) \left(\sum_0^n (2n+1) P_n(\cos\gamma) \right) d\mu\, d\varphi\,.$$

Und diese Formel repräsentirt die Laplace'sche Entwicklung.

§ 5.

Uebergang zur unendlich grossen Kugel.

Machen wir den Radius r des Kugelraumes $\mathfrak{T}$ *äusserst gross* (noch nicht unendlich gross), so wird seine Oberfläche, oder besser ausgedrückt, ein Stück seiner Oberfläche, dargestellt sein durch eine Fläche PQ, die nur noch wenig von einer Ebene abweicht; und gleichzeitig wird alsdann der Mittelpunct M dieses Raumes $\mathfrak{T}$ sehr weit von PQ entfernt sein.

Es sei *PQ horizontal,* und *M unterhalb PQ* gelegen. Gleichzeitig sei O der Anfangspunct eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen xy-Ebene *horizontal* und *unterhalb PQ* liegt, und dessen z-Axe *vertikal nach Oben* laufen mag. Ueberdies sei

(16.) $$(OM) = \beta\,;$$

so dass also β den *sehr grossen* Abstand des Punctes M von der xy-Ebene vorstellt (Vgl. die Figur auf S. 5.)

Bezeichnet man nun die Polarcoordinaten eines beliebigen Punctes (x, y, z) mit (r, ω, φ), indem man unter r seinen Abstand von M, ferner unter ω die Neigung dieses Abstandes r gegen die Linie MO, d. i. gegen die z-Axe, endlich unter φ das Azimuth der Ebene des Winkels ω gegen irgend eine feste Meridianebene, z. B. gegen die xz-Ebene versteht, so ergiebt sich sofort:

(17a.) $$r = \beta + z\,,$$

und ferner, weil β ungemein gross sein soll:

$$\omega = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\beta + z} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\beta} = \frac{\varrho}{\beta}\,,$$

wo alsdann $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$ *den Abstand des Punctes von der z-Axe* vorstellt.

Sind also im Raume irgend *zwei* Puncte gegeben (x, y, z) und (x_1, y_1, z_1), so erhalten wir bei analoger Bezeichnungsweise die Formeln:

$$(18.)\qquad \begin{cases} r = \beta + z, \\ \omega = \dfrac{\varrho}{\beta}, \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} r_1 = \beta + z_1, \\ \omega_1 = \dfrac{\varrho_1}{\beta}. \end{cases}$$

Und diese Grössen z, ϱ und z_1, ϱ_1 sind es, welche wir als *neue Coordinaten* an Stelle von r, ω und r_1, ω_1 einführen werden; *wobei erwähnt sein mag, dass man r, ω, φ die Polarcoordinaten, andererseits aber z, ϱ, φ die Cylindercoordinaten zu nennen pflegt.*

Repräsentirt nun E den gegenseitigen Abstand der beiden Puncte (r, ω, φ) und $(r_1, \omega_1, \varphi_1)$, und bezeichnet γ den Winkel, unter welchem r gegen r_1 geneigt ist, so wird nach (4.), (5.):

$$(\alpha.)\qquad \cos\gamma = \cos\omega\cos\omega_1 + \sin\omega\sin\omega_1\cos(\varphi - \varphi_1),$$

$$(\beta.)\qquad E^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos\gamma.$$

Diese Formeln aber nehmen im vorliegenden Falle, wo γ, ω, ω_1 *ausserordentlich klein* sind, offenbar folgende Gestalt an:

$$(\alpha'.)\qquad 1 - \tfrac{1}{2}\gamma^2 = (1 - \tfrac{1}{2}\omega^2)(1 - \tfrac{1}{2}\omega_1^2) + \omega\omega_1\cos(\varphi - \varphi_1),$$

$$(\beta'.)\qquad E^2 = r^2 + r_1^2 - 2rr_1(1 - \tfrac{1}{2}\gamma^2);$$

oder (was dasselbe) folgende Gestalt:

$$(\alpha''.)\qquad \gamma^2 = \omega^2 + \omega_1^2 - 2\omega\omega_1\cos(\varphi - \varphi_1),$$

$$(\beta''.)\qquad E^2 = (r - r_1)^2 + rr_1\gamma^2.$$

Substituirt man nun in $(\alpha''.)$ für ω, ω_1 die Werthe (18.), so folgt:

$$(19.)\qquad \gamma = \frac{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1\cos(\varphi - \varphi_1)}}{\beta} = \frac{\varsigma}{\beta},$$

wo das ς als Abbreviatur dienen soll für die im Zähler stehende Wurzelgrösse. Und substituirt man ferner in $(\beta''.)$ für r, r_1 und γ die Werthe aus (18.) und (19.), so folgt:

$$(20.)\qquad E^2 = (z - z_1)^2 + \left(\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1\cos(\varphi - \varphi_1)\right) = (z - z_1)^2 + \varsigma^2.$$

Gleichzeitig gewinnt die in (6.) angegebene Entwicklung durch Substitution der Werthe (18.), (19.) die Gestalt:

$$(21.)\qquad \frac{1}{E} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{1}{\beta + z}\left(\frac{\beta + z_1}{\beta + z}\right)^n P_n\left(\cos\frac{\varsigma}{\beta}\right),\quad \text{für } z_1 < z.$$

Doch soll die betrachtete Kugelfläche nicht (wie bisher vorausgesetzt wurde) *ungemein* gross, sondern *unendlich* gross sein. Es ist also z. B. in Formel (21.) *das dort vorhandene $\beta = \infty$ zu machen.* Um diese etwas mühsame Procedur wirklich vornehmen zu können, ist es zweckmässig, zunächst an Stelle des Summations-Argumentes n ein anderes Argument q einzuführen, mittelst der Substitution:

$$\frac{n}{\beta} = q.$$

Alsdann ergiebt sich:

$$\frac{1}{E} = \sum \frac{1}{\beta + z} \left(\frac{\beta + z_1}{\beta + z}\right)^{\beta q} P_{\beta q}\left(\cos \frac{\varsigma}{\beta}\right); \quad \text{(vorausg. } z_1 < z)$$

die Summation erstreckt über $q = 0, \frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, \frac{3}{\beta}, \ldots \infty$.

Lässt man nun gegenwärtig β ins Unendliche wachsen, so geht der Factor

$$\frac{1}{\beta + z} \quad \text{über in} \quad \frac{1}{\beta} \quad \text{d. i. in } dq, \quad \text{*)}$$

ferner der Factor

$$\left(\frac{\beta + z_1}{\beta + z}\right)^{\beta q} \quad \text{über in} \quad e^{q(z_1 - z)}; \quad \text{**)}$$

so dass man also erhält:

$$\frac{1}{E} = \int_0^\infty dq\, e^{q(z_1 - z)} \left(P_{\beta q}\left(\cos \frac{\varsigma}{\beta}\right)\right)_{\beta = \infty}, \quad \text{für } z_1 < z,$$

oder was dasselbe ist:

$$\frac{1}{E} = \int_0^\infty dq\, e^{q(z_1 - z)} \left(P_n\left(\cos \frac{q\varsigma}{n}\right)\right)_{n = \infty}, \quad \text{für } z_1 < z. \tag{22.}$$

Nun ist nach (7b.) die Function P_n definirbar durch die Formel:

$$P_n(\cos\eta) = 1 - \frac{n(n+1)}{1^2}\left(\sin\frac{\eta}{2}\right)^2 + \frac{(n-1)\,n(n+1)\,(n+2)}{(1\cdot 2^2}\left(\sin\frac{\eta}{2}\right)^4 - + \cdots$$

Hieraus folgt, falls man $\eta = \frac{x}{n}$ setzt:

$$P_n\left(\cos\frac{x}{n}\right) = 1 - \frac{n(n+1)}{1^2}\left(\sin\frac{x}{2n}\right)^2 + \frac{(n-1)\,n(n+1)\,(n+2)}{(1\cdot 2)^2}\left(\sin\frac{x}{2n}\right)^4 - + \cdots,$$

oder, falls man n ins Unendliche wachsen lässt:

$$\left(P_n\left(\cos\frac{x}{n}\right)\right)_{n=\infty} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2\cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2\cdot 4\cdot 6)^2} + - \cdots. \tag{23a.}$$

Die hier auf der rechten Seite stehende unendliche Reihe ist aber bekanntlich identisch mit derjenigen, *durch welche die Cylinderfunction (oder Bessel'sche Function) $J(x)$ definirt wird;* und man erhält also:

$$\left(P_n\left(\cos\frac{x}{n}\right)\right)_{n=\infty} = J(x). \tag{23b.}$$

Hierdurch gewinnt unsere Formel (22.) schliesslich folgende Gestalt:

---

*) Vgl. Seite 6, Formel (D.)

**) Vgl. die Note auf Seite 7.

(24.) $$\frac{1}{E} = \int_0^\infty dq\, e^{q(z_1 - z)}\, J(q\varsigma), \quad \text{für } z_1 < z;$$

wo ς die in (19.) angegebene Wurzelgrösse vorstellt.

Dies vorangeschickt, kehren wir zurück zu den Formeln (1.), (2.), (3.), die für *jede* Kugel, also auch für die gegenwärtig betrachtete *unendlich grosse* Kugel gelten. Die Formel (2.) nimmt, weil der Kugelradius r gegenwärtig $= \infty$ ist, die einfachere Gestalt an:

(25.) $$\eta_\sigma^i = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial N}\left(\frac{1}{E}\right).$$

Bezeichnet man nun die Coordinaten der Puncte σ und i mit (z, ϱ, φ) und $(z_1, \varrho_1, \varphi_1)$, so wird $z_1 < z$ (vgl. die Figur Seite 7); so dass man also in (25.) direct den Werth (24.) substituiren darf. Gleichzeitig wird alsdann die auszuführende Differentiation nach der äussern Normale N offenbar identisch mit einer Differentiation nach z; so dass man also mittelst der genannten Substitution erhält:

(26.) $$\eta_\sigma^i = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty q\, dq\, e^{q(z_1 - z)}\, J(q\varsigma).$$

Substituirt man dies in die Formel (3.), und setzt man zugleich:

(27.) $$\begin{aligned} V_i &= V(z_1, \varrho_1, \varphi_1), \\ F_\sigma &= F(z, \varrho, \varphi) = F(\varrho, \varphi), \text{ und } d\sigma = \varrho\, d\varrho\, d\varphi, \text{*)} \end{aligned}$$

so erhält man:

(28.) $$V(z_1, \varrho_1, \varphi_1) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} F(\varrho, \varphi) \left(\int_0^\infty q\, dq\, e^{q(z_1 - z)}\, J(q\varsigma) \right) \varrho\, d\varrho\, d\varphi,$$

oder, ein wenig anders geschrieben**):

(29.) $$V(z_1, \varrho_1, \varphi_1) = \lim_{q=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} F(\varrho, \varphi) \left(\int_0^q q\, dq\, e^{q(z_1 - z)}\, J(q\varsigma) \right) \varrho\, d\varrho\, d\varphi.$$

Diese Formel repräsentirt die Lösung der gestellten Aufgabe. Denn der Raum $\mathfrak{T}$ ist gegenwärtig ein von der Horizontalebene PQ begrenzter, und nach Unten sich ins Unendliche ausdehnender *Halbraum* (vgl. die Figur Seite 7).

---

*) Der Raum $\mathfrak{T}$ ist gegenwärtig ein *Halbraum*, nämlich dargestellt durch denjenigen unendlichen Raum, der unter der Horizontalebene PQ liegt (vgl. die Figur Seite 7). Irgend ein Element dieser Horizontalebene PQ ist von uns mit $d\sigma$ bezeichnet, und die Coordinaten dieses Elementes $d\sigma$ sind (z, ϱ, φ) genannt worden. Demgemäss repräsentirt z eine *gegebene Constante*, nämlich den Abstand der Ebene PQ von der xy-Ebene. Mit Unterdrückung dieses *constanten Parameters* z kann daher an Stelle von $F(z, \varrho, \varphi)$ kurzweg $F(\varrho, \varphi)$ geschrieben werden.

**) Die obere Grenze des innern Integrals ist in (28.) durch ∞, in (29.) hingegen durch q dargestellt.

Nach der Definition von V muss der Werth $V(z_1, \varrho_1, \varphi_1)$ in $F(\varrho_1, \varphi_1)$ übergehen, sobald man z_1 bis z (d. i. bis zum Parameter der Ebene PQ) anwachsen lässt. Somit folgt aus (29.):

$$(30.)\qquad F(\varrho_1, \varphi_1) = \lim_{q=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} F(\varrho, \varphi) \left(\int_0^q q\, dq\, J(q\varsigma) \right) \varrho\, d\varrho\, d\varphi,$$

wo das ς die in (19.) angegebene Bedeutung besitzt. *Und dies ist die von mir schon vor langer Zeit gegebene Darstellung**), die ich damals allerdings auf einem etwas andern und weniger directen Wege gefunden hatte.

§ 5a.

Einige sich anschliessende Bemerkungen.

Nach (23a, b.) ist:

$$(1.)\qquad J(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2\cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2\cdot 4\cdot 6)^2} + - \cdots,$$

und gleichzeitig auch:

$$(2.)\qquad J(x) = \left(P_n \left(\cos \frac{x}{n} \right) \right)_{n=\infty}.$$

Von diesen Formeln ausgehend, wollen wir einige Eigenschaften der Cylinderfunction $J(x)$ zu entwickeln suchen.

Darstellung von $J(x)$ durch ein bestimmtes Integral. — Bekanntlich ist [vgl. Seite 13, (7c.)]:

$$P_n \left(\cos \eta \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\cos \eta + i \sin \eta \cos w \right)^n dw.$$

Hieraus folgt, falls man $\eta = \frac{x}{n}$ setzt:

$$P_n \left(\cos \frac{x}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\cos \frac{x}{n} + i \sin \frac{x}{n} \cos w \right)^n dw,$$

also, falls man n *ungemein gross* macht:

$$P_n \left(\cos \frac{x}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(1 + \frac{ix \cos w}{n} \right)^n dw,$$

also, falls man an Stelle von n mittelst der Substitution: $\frac{ix \cos w}{n} = \varepsilon$ ein anderes Argument ε einführt,

$$P_n \left(\cos \frac{x}{n} \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\left(1 + \varepsilon \right)^{\frac{1}{\varepsilon}} \right)^{ix \cos w} dw.$$

*) C. Neumann: *Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von zwei nichtconcentrischen Kugelflächen begrenzt wird;* Halle im Verlag von Schmidt, 1862, daselbst Seite 149.

Lässt man jetzt aber n *unendlich gross*, mithin ε *unendlich klein* werden, so folgt mit Rücksicht auf (2.):

$$J(x = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos w}\,dw\,, \tag{3.}$$

oder (was dasselbe ist):

$$J(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \Big(\cos(x\cos w) + i\sin(x\cos w)\Big)\,dw\,,$$

oder, weil die Werthe von $\sin(x\cos w)$ für die Intervalle $w = 0\ldots\frac{1}{2}\pi$ und $w = \frac{1}{2}\pi\ldots\pi$ *einander entgegengesetzt* sind:

$$J(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(x\cos w)\,dw\,. \tag{4.}$$

Hieraus folgt beiläufig, *dass* $J(x)$ *für reelle Werthe von* x *stets zwischen* -1 *und* $+1$ *bleibt.*

Die für $J(x)$ geltende Differentialgleichung. — Wir gehen aus von der bekannten Differentialgleichung der Kugelfunctionen. Dieselbe lautet:

$$n(n+1)f + \frac{\partial}{\partial\mu}\left((1-\mu^2)\frac{\partial f}{\partial\mu}\right) = 0\,,\quad \text{für } f = P_n(\mu)\,.$$

Hieraus folgt, falls man $\mu = \cos\omega$ setzt:

$$n(n+1)f + \frac{1}{\sin\omega}\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\sin\omega\cdot\frac{\partial f}{\partial\omega}\right) = 0\,,\quad \text{für } f = P_n(\cos\omega)\,;$$

und hieraus ergiebt sich weiter, falls man $\omega = \frac{x}{n}$ setzt:

$$n(n+1)f + \frac{1}{\sin\frac{x}{n}}\frac{n\cdot\partial}{\partial x}\left(\sin\frac{x}{n}\cdot\frac{n\,\partial f}{\partial x}\right),\quad \text{für } f = P_n\left(\cos\frac{x}{n}\right).$$

Hieraus aber folgt, falls man durch n^2 dividirt, sodann das n ins Unendliche wachsen lässt, und Rücksicht nimmt auf (2.):

$$f + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 0\,,\quad \text{für } f = J(x)\,.$$

Somit sind wir also für die Cylinderfunction $J(x)$ zu folgender Differentialgleichung gelangt:

$$J\,x) + \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial J(x}{\partial x}\right) = 0\,, \tag{5a.}$$

welche auch so geschrieben werden kann:

$$J\,x) + \frac{1}{x}\frac{\partial J(x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 J(x)}{\partial x^2} = 0\,, \tag{5b.}$$

oder auch so:

$$\left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)\sqrt{x}\cdot J(x) + \frac{\partial^2(\sqrt{x}\cdot J(x))}{\partial x^2} = 0\,. \tag{5c.}$$

Und die Formel (29.) liefert die Werthe von V für alle innerhalb dieses Raumes $\mathfrak{T}$ gelegenen Puncte $(z_1, \varrho_1, \varphi_1)$, falls nur die Oberflächenwerthe $F(\varrho, \varphi)$ gegeben sind.

Bemerkung. — Für *ungemein grosse* Werthe von x geht die Gleichung (5c.) über in:

(6.) $$\sqrt{x} \cdot J(x) + \frac{\partial^2 (\sqrt{x} \cdot J'x))}{\partial x^2} = 0.$$

Und hieraus folgt durch Integration, dass die Function $J(x)$ für ein *sehr grosses* x nahezu den Werth hat:

$$J(x) = \frac{A \sin x + B \cos x}{\sqrt{x}},$$

wo A und B Constanten sind. Demgemäss wird $J(x)$ *unendlich klein* für ein *unendlich grosses* x.

Zweite Bemerkung. — Nach (5a.) ist:

$$J(x) \cdot x\, \partial x = -\partial (x J'(x)), \quad \text{wo } J'(x) = \frac{\partial J'x)}{\partial x},$$

oder, falls α und β beliebige Constanten sind:

(7.) $$\int_0^{\alpha\beta} J(x) \cdot x\, \partial x = -\alpha\beta\, J'(\alpha\beta),$$

oder, falls man linker Hand $x = \alpha y$, mithin $\partial x = \alpha \partial y$ setzt:

(8.) $$\int_0^{\beta} J(\alpha y) \cdot y\, \partial y = -\frac{\beta}{\alpha} J'(\alpha\beta).$$

Von der hieraus für $\beta = y$ entspringenden Formel:

(9) $$\int_0^{y} J(\alpha y) \cdot y\, \partial y = -\frac{y}{\alpha} J'(\alpha y)$$

soll später Gebrauch gemacht werden:

Ueber die Cylinderfunction j^{ter} Ordnung $J^j(x)$. — Die Cylinderfunction 0^{ter} Ordnung $J^0(x)$ oder $J(x)$ ist definirt durch die Reihe (1.), welche offenbar auch so geschrieben werden kann:

$$J(x) = 1 - \frac{x^2}{(2)\,(2)} + \frac{(x^2)^2}{(2 \cdot 4)\,(2 \cdot 4)} - \frac{(x^2)^3}{(2 \cdot 4 \cdot 6)\,(2 \cdot 4 \cdot 6)} + - \cdots.$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach (x^2):

$$\frac{\partial J(x)}{\partial x^2} = \frac{(-1)^1}{1} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left\{1 - \frac{x^2}{(2)\,(4)} + \frac{(x^2)^2}{(2 \cdot 4)\,(4 \cdot 6)} - \frac{(x^2)^3}{(2 \cdot 4 \cdot 6)\,(4 \cdot 6 \cdot 8)} + - \cdots\right\},$$

und hieraus durch nochmalige Differentiation nach (x^2):

$$\frac{\partial^2 J(x)}{(\partial x^2)^2} = \frac{(-1)^2}{1 \cdot 2} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left\{1 - \frac{x^2}{(2)\,(6)} + \frac{(x^2)^2}{(2 \cdot 4)\,(6 \cdot 8)} - \frac{(x^2)^3}{(2 \cdot 4 \cdot 6)\,(6 \cdot 8 \cdot 10)} + - \cdots\right\}.$$

U. s. w. Differenzirt man im Ganzen j Male [jedesmal nach (x^2)], und multiplicirt sodann mit $(-2x)^j$, so ergiebt sich:

$$(10.)\qquad (-2x)^j \frac{\partial^j J(x)}{(\partial x^2)^j} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots j}\left(\frac{x}{2}\right)^j \left\{1 - \frac{x^2}{(2)(2j+2)} + \frac{x^4}{(2\cdot 4)(2j+2\cdot 2j+4)} - \right.$$
$$\left. - \frac{x^6}{(2\cdot 4\cdot 6)(2j+2\cdot 2j+4\cdot 2j+6)} + - \cdots \right\}.$$

Der hier auf der rechten Seite stehende Ausdruck ist aber derjenige, *durch welchen die Function $J^j(x)$ definirt zu werden pflegt.* Somit findet also zwischen $J(x)$ und $J^j(x)$ die Beziehung statt:

$$(11.)\qquad (-2x)^j \frac{\partial^j J(x)}{(\partial x^2)^j} = J^j(x).$$

Entwicklung von $J(\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos \Phi})$ nach den Cosinus der Vielfachen von Φ. — Setzt man:

$$(12.)\qquad \cos\gamma = \cos\omega \cos\omega_1 + \sin\omega \sin\omega_1 \cos(\varphi - \varphi_1),$$

so ist bekanntlich [vgl. Seite 13, (8.)]:

$$(13.)\qquad P_n(\cos\gamma) = \sum_{j=0}^{j=n} \varepsilon_j \Delta_{nj} P_{nj}(\cos\omega) P_{nj}(\cos\omega_1) \cos j(\varphi - \varphi_1),$$

wo die Constanten ε, Δ die Werthe haben:

$$(14.)\qquad \begin{cases} \varepsilon_0 = 1, \\ \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \cdots = 2, \end{cases} \qquad \Delta_{nj} = \frac{\Pi(n-j)}{\Pi(n+j)}.$$

In dieser Formel (13.) können wir (ω, φ) und (ω_1, φ_1) als die Polarcoordinaten zweier Puncte ansehen, die beide gelegen sind auf *ein und derselben Kugelfläche.* Dann ist γ der Winkel, den die nach diesen Puncten laufenden Radien mit einander machen. Denken wir uns nun jene Kugelfläche *ungemein gross,* so wird, wie früher [Seite 15, (18.), (19.)] gezeigt wurde:

$$(15.)\qquad \omega = \frac{\varrho}{\beta}, \qquad \omega_1 = \frac{\varrho_1}{\beta},$$
$$\gamma = \frac{\sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos(\varphi - \varphi_1)}}{\beta} = \frac{\varsigma}{\beta},$$

wo ς als Abbreviatur für die Wurzelgrösse dient, während β den *ungemein grossen* Werth des Kugelradius vorstellt. Durch Substitution dieser Ausdrücke (15.) gewinnt die Formel (13.) folgende Gestalt:

$$(16.)\qquad P_n\left(\cos\frac{\varsigma}{\beta}\right) = \sum_{j=0}^{j=n} \varepsilon_j \Delta_{nj} P_{nj}\left(\cos\frac{\varrho}{\beta}\right) P_{nj}\left(\cos\frac{\varrho_1}{\beta}\right) \cos j(\varphi - \varphi_1).$$

Hier soll β *äusserst gross* und n eine beliebige *ganze Zahl* sein. Wir können offenbar beide Eigenschaften vereinigen, mithin $\beta = n$ setzen, indem wir alsdann unter $\beta = n$ eine *ganze* und zugleich *äusserst grosse* Zahl verstehen. Thun wir dies, und multipliciren wir überdies den Ausdruck unter dem Summenzeichen mit

$$n^{2j}\left(\frac{1}{n}\right)^j\left(\frac{1}{n}\right)^j = 1\,,$$

so erhalten wir:

$$(17.)\qquad \underbrace{P_n\left(\cos\frac{\varsigma}{n}\right)}_{\Psi} = \sum_{j=0}^{j=n} \varepsilon_j\cdot\underbrace{\left(n^{2j}\,\Delta_{nj}\right)}_{\eta}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)^j P_{nj}\left(\cos\frac{\varrho}{n}\right)}_{\psi}\cdot\underbrace{\left(\frac{1}{n}\right)^j P_{nj}\left(\cos\frac{\varrho_1}{n}\right)}_{\psi_1}\cdot\cos j(\varphi-\varphi_1)\,.$$

Lassen wir jetzt das n *ins Unendliche* wachsen, so convergiren, wie sich leicht zeigen lässt, sowohl Ψ, wie η, ψ, ψ_1 gegen *bestimmte endliche* Werthe. Zunächst wird nämlich [vgl. Seite 18, (2.)]

$$(\alpha.)\qquad \text{für } n=\infty:\qquad \Psi = J(\varsigma) = J\left(\sqrt{\varrho^2+\varrho_1^2-2\varrho\varrho_1\cos(\varphi-\varphi_1)}\right).$$

Ferner wird mit Rücksicht auf (14.)

$$(\beta.)\qquad \text{für } n=\infty:\qquad \eta = \left(\frac{n^{2j}}{(n-j+1)(n-j+2)\cdots(n+j)}\right) = 1\,.$$

Was ferner ψ betrifft, so ist [nach Seite 13, (9.)]:

$$P_{nj}(\cos\omega) = (\sin\omega)^j\,\frac{\partial^j P_n(\cos\omega)}{(\partial\cos\omega)^j}\,;$$

demnach wird:

$$(\gamma.)\qquad \psi = \left(\frac{1}{n}\sin\frac{\varrho}{n}\right)^j\frac{\partial^j P_n\left(\cos\frac{\varrho}{n}\right)}{\left(\partial\cos\frac{\varrho}{n}\right)^j}\,,$$

und hieraus folgt*):

$$(\delta.)\qquad \text{für } n=\infty:\qquad \psi = (-2\varrho)^j\,\frac{\partial^j J(\varrho)}{(\partial\varrho^2)^j}\,,$$

also, mit Rücksicht auf (11.):

$$(\varepsilon.)\qquad \text{für } n=\infty:\qquad \psi = J^j(\varrho)\,.$$

Und ebenso wird offenbar:

$$(\zeta.)\qquad \text{für } n=\infty:\qquad \psi_1 = J^j(\varrho_1)\,.$$

Lässt man also in der Formel (17.) das n ins Unendliche wachsen, so gelangt man mittelst der Notizen (α.), (β.) und (ε.), (ζ.) zu folgendem Resultat:

$$(18.)\qquad J\left(\sqrt{\varrho^2+\varrho_1^2-2\varrho\varrho_1\cos(\varphi-\varphi_1)}\right) = \sum_{j=0}^{j=\infty}\varepsilon_j\,J^j(\varrho)\,J^j(\varrho_1)\cos j(\varphi-\varphi_1)\,.$$

Setzt man endlich $q\varrho$ für ϱ, und $q\varrho_1$ für ϱ_1, wo q einen *beliebigen* Factor bezeichnet, so ergiebt sich die später von uns anzuwendende Formel:

---

*) Für ein *sehr grosses* n geht nämlich die rechte Seite der Formel (γ.) über in

$$\left(\frac{\varrho}{nn}\right)^j\frac{\partial^j P_n\left(\cos\frac{\varrho}{n}\right)}{\left(\partial\left(1-\frac{\varrho^2}{2n^2}\right)\right)^j}\,,\qquad \text{d. i. in}\qquad (-2\varrho)^j\,\frac{\partial^j P_n\left(\cos\frac{\varrho}{n}\right)}{(\partial\varrho^2)^j}\,.$$

Hieraus aber ergiebt sich [vgl. Seite 18, (2.)] für ein *unendlich grosses* n der in (δ.) angegebene Ausdruck.

$$(19.)\qquad J\left(q\sqrt{\varrho^2+\varrho_1^2-2\varrho\varrho_1\cos(\varphi-\varphi_1)}\right)=\sum_{j=0}^{j=\infty}\varepsilon_j\, J^j(q\varrho)\, J^j(q\varrho_1)\cos j(\varphi-\varphi_1),$$

wo nach wie vor $\varepsilon_0 = 1$, und $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots\ldots = 2$ ist*).

§ 6.

Neue Integraleigenschaften der Cylinderfunctionen.

Die Integraleigenschaften der Kugelfunctionen sind bekanntlich ausgedrückt durch die Formel:

$$(1.)\qquad \int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\, P_s(\mu)\, d\mu = \begin{cases} 0, \text{ falls } n \lessgtr s, \\ \dfrac{2}{2n+1}, \text{ falls } n = s, \end{cases}$$

wo n, s irgend welche Zahlen aus der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots.$ vorstellen.

Unsere Aufgabe soll nun darin bestehen, diese Formel (1.) zu übertragen auf den Fall einer *unendlich grossen* Kugelfläche. Zu diesem Zweck bemerken wir zuvörderst, dass die Formel (1.) äquivalent ist mit folgender:

$$(2.)\qquad \int_{-1}^{+1}\left\{\left(\sum_0^n C_n P_n(\mu)\right)\left(\sum_0^n D_n P_n(\mu)\right)\right\} d\mu = \sum_0^n \frac{2}{2n+1} C_n D_n,$$

falls wir nämlich unter den C, D willkürliche Constanten verstehen.

Es handelt sich also darum, die Formel (1.) oder (2.) zu übertragen auf den Fall einer *unendlich grossen* Kugelfläche. Mit anderen Worten: es handelt sich darum, in jenen Formeln statt μ eine neue Variable ϱ einzuführen mittelst der früher [Seite 15, (18.)] angegebenen Relation: $\mu = \cos\omega = \cos\frac{\varrho}{\beta}$, wo β eine *sehr grosse* positive Constante vorstellt, die schliesslich $= \infty$ zu machen ist.

Setzt man nun in (2.):

$$\mu = \cos\frac{\varrho}{\beta}, \text{ mithin } d\mu = -\left(\sin\frac{\varrho}{\beta}\right)\frac{d\varrho}{\beta},$$

und setzt man gleichzeitig die obere Summationsgrenze $n = \alpha\beta$, so ergiebt sich:

$$(3.)\qquad \int_0^{\beta\pi}\left\{\left(\sum C_n P_n\left(\cos\frac{\varrho}{\beta}\right)\right)\left(\sum D_n P_n\left(\cos\frac{\varrho}{\beta}\right)\right)\right\}\left(\sin\frac{\varrho}{\beta}\right)\frac{d\varrho}{\beta} = \sum\frac{2}{2n+1} C_n D_n,$$

die Summationen erstreckt über $n = 0, 1, 2, \ldots (\alpha\beta - 1), \alpha\beta$.

Es soll hier α, ebenso wie β, positiv sein; *und zwar mag α von Hause aus einen beliebig gegebenen Werth haben, und während der ganzen Untersuchung constant erhalten werden.* β hingegen soll (wie schon bemerkt)

*) Diese Formel (18.), (19.) rührt her vom Verfasser des vorliegenden Werkes. In der That wurde sie von ihm auf einem andern Wege als hier und zugleich in völlig strenger Weise entwickelt in seiner *Theorie der Bessel'schen Functionen*, im Verlag von Teubner, 1867, daselbst Seite 65.

äusserst gross sein, später ins Unendliche wachsen, aber zu α stets in solcher Beziehung bleiben, dass das Product $\alpha\beta$ in jedem Augenblick eine *ganze Zahl* ist.

Infolge der ausserordentlichen Grösse von β kann man in (3.) statt $\sin\frac{\varrho}{\beta}$ setzen $\frac{\varrho}{\beta}$. Thut man dies, und führt man gleichzeitig statt des Summations-Argumentes n ein anderes Argument q ein mittelst der Relation:

$$q = \frac{n}{\beta},$$

so erhält man:

$$(4.)\qquad \int_0^{\beta\pi} \left\{ \left(\sum C_{\beta q}\, P_{\beta q}\left(\cos\frac{\varrho}{\beta}\right)\right) \frac{1}{\beta} \left(\sum D_{\beta q}\, P_{\beta q}\left(\cos\frac{\varrho}{\beta}\right)\right) \frac{1}{\beta} \right\} \varrho\, d\varrho = \sum \frac{2}{2\beta q + 1} C_{\beta q} D_{\beta q},$$

die Summationen erstreckt über $q = 0, \frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, \frac{3}{\beta}, \ldots \left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right), \alpha$.

Bezeichnet man hier die Differenz je zweier aufeinander folgender q-Werthe mit dq, so ist:

$$dq = \frac{1}{\beta}.$$

Substituirt man demgemäss in (4.) das dq an Stelle des dortigen $\frac{1}{\beta}$, und beachtet man, dass (zufolge der ausserordentlichen Grösse von β)

$$\frac{2}{2\beta q + 1} = \frac{1}{\beta q} = \frac{dq}{q}$$

wird, so erhält man:

$$(5.)\qquad \int_0^{\beta\pi} \left\{ \left(\sum C_{\beta q}\, P_{\beta q}\left(\cos\frac{\varrho}{\beta}\right)\right) dq \left(\sum D_{\beta q}\, P_{\beta q}\left(\cos\frac{\varrho}{\beta}\right)\right) dq \right\} \varrho\, d\varrho = \sum C_{\beta q} D_{\beta q} \frac{dq}{q},$$

die Summationen erstreckt über $q = 0, \frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta}, \frac{3}{\beta}, \ldots \left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right), \alpha$.

Lässt man jetzt schliesslich (während α constant bleibt) das β ins Unendliche wachsen, so verwandeln sich die in (5.) enthaltenen Summen in *bestimmte Integrale*; während gleichzeitig $P_{\beta q}\left(\cos\frac{\varrho}{\beta}\right)$ in die Cylinderfunction $J(q\varrho)$ übergeht*). Man gelangt daher, falls man die Werthe von $C_{\beta q}$, $D_{\beta q}$ für $\beta = \infty$ mit L_q, M_q bezeichnet, zu folgender Formel:

$$(6.)\qquad \int_0^{\infty} \left\{ \left(\int_0^{\alpha} L_q\, J(q\varrho)\, dq \right) \left(\int_0^{\alpha} M_q\, J(q\varrho)\, dq \right) \right\} \varrho\, d\varrho = \int_0^{\alpha} L_q\, M_q \frac{dq}{q}.$$

---

*) Es ist nämlich, falls man $\beta q = n$ setzt:

$$\lim_{\beta=\infty} P_{\beta q}\left(\cos\frac{\varrho}{\beta}\right) = \lim_{n=\infty} P_n\left(\cos\frac{q\varrho}{n}\right) = J(q\varrho);$$

vgl. Seite 18, (2.).

Kaum bedarf es der Erwähnung, dass man an Stelle von (1.) auch andere Ausgangsformeln wählen kann. Hauptsächlich bieten sich folgende dar*):

$$\text{(a.)}\qquad \int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\, P_s(\mu)\, d\mu = 0 \quad \text{oder} = \frac{2}{2n+1},$$

$$\text{(b.)}\qquad \int_{-1}^{+1} P_n(\mu)\, d\mu = 0 \quad \text{oder} = 2,$$

$$\text{(c.)}\qquad \int_{-1}^{+1} P_{nj}(\mu)\, P_{sj}(\mu)\, d\mu = 0 \quad \text{oder} = \frac{2}{2n+1}\,\frac{\Pi(n+j)}{\Pi(n-j)}.$$

Nimmt man nun diese Formeln (a.), (b.), (c.) nach einander zum Ausgangspuncte, so gelangt man mittelst der vorhin exponirten Methode der Reihe nach zu folgenden Resultaten:

$$\text{(A.)}\qquad \int_0^\infty \left\{\left(\int_0^\alpha L_q\, J(q\varrho)\, dq\right)\left(\int_0^\alpha M_q\, J(q\varrho)\, dq\right)\right\} \varrho\, d\varrho = \int_0^\alpha L_q\, M_q\, \frac{dq}{q},$$

$$\text{(B.)}\qquad \int_0^\infty \left(\int_0^\alpha L_q\, J(q\varrho)\, q\, dq\right) \varrho\, d\varrho = 0 \quad \text{oder} = 2L_0,$$

$$\text{(C.)}\qquad \int_0^\infty \left\{\left(\int_0^\alpha L_q\, J^j(q\varrho)\, dq\right)\left(\int_0^\alpha M_q\, J^j(q\varrho)\, dq\right)\right\} \varrho\, d\varrho = \int_0^\alpha L_q\, M_q\, \frac{dq}{q},$$

wo α eine beliebig gegebene positive Constante vorstellt, während L_q und M_q beliebige Functionen von q sein können.

Bemerkung. — Was den zweifelhaften Werth auf der rechten Seite in Formel (B.) betrifft, so sei bemerkt, dass die hier als Ausgangspunct benutzte Formel (b.) äquivalent ist mit folgender:

$$\text{(b}_1.)\qquad \int_{-1}^{+1} \left(\sum_1^n C_n\, P_n(\mu)\right) d\mu = 0,$$

ebenso gut aber auch mit folgender:

$$\text{(b}_2.)\qquad \int_{-1}^{+1} \left(\sum_0^n C_n\, P_n(\mu)\right) d\mu = 2\, C_0, \quad **)$$

wo die C willkührliche Constanten sind. Je nachdem man nun von (b_1.) oder von (b_2.) ausgeht, findet man für das in (B.) angegebene Integral im einen Falle den Werth 0, im andern den Werth $2L_0$. D. h. man findet für ein

*) In Formel (c.) hat Π die in der Note Seite 13 angegebene Bedeutung.

**) Die untere Summationsgrenze ist in (b_1.) durch 1, hingegen in (b_2.) durch 0 dargestellt.

und denselben Ausdruck *zwei* Werthe. Hieraus folgt, dass die hier angewandten Methoden *sehr unzuverlässig* sind.

Uebrigens wird eine genauere Untersuchung im fünften Capitel uns zeigen, dass trotzdem die Formeln (A.) und (C.) im Allgemeinen richtig sind, und dass Gleiches auch von der Formel (B.) gilt, falls man nur die beiden auf ihrer rechten Seite stehenden Werthe (0 und $2L_0$) durch das arithmetische Mittel dieser Werthe (d. i. durch L_0) ersetzt.

Zweites Capitel.

Die Fourier'sche Reihenentwicklung.

Statt von einer Function $f(x)$ zu sagen, sie sei in einem gegebenen Intervall $\alpha \ldots \beta$ beim Uebergange von α zu β entweder *niemals wachsend*, oder aber *niemals abnehmend*, — statt dieser heut zu Tage üblichen sehr schleppenden Ausdrucksweise, werde ich kurzweg sagen, sie sei in jenem Intervall *monoton*.

Diese und einige sich anschliessende *Definitionen* werde ich dem gegenwärtigen Capitel voranschicken. Sodann werde ich einen einfachen und übersichtlichen Beweis des wichtigen *Du Bois-Reymond'schen Mittelwerthsatzes* mittheilen*), und endlich, gestützt auf diesen Satz, die *Theorie der Fourier-schen Reihen* zu entwickeln suchen.

§ 1.

Einige Definitionen.

Monoton und abtheilungsweise monoton. Sind $\alpha < \beta$ gegebene Constanten, so mag eine Function $f(x)$ im Intervall $\alpha \ldots \beta$ *monoton wachsend* heissen, wenn sie beim Uebergange von α zu β theils im *Wachsen***), theils im *Sich-*

---

*) Ich bin zu diesem neuen Beweise gelangt theils durch ein genaueres Studium des von *G. F. Meyer* gegebenen Beweises (Math. Annal. Bd. 6. S. 313), theils namentlich auch durch die von *Du Bois-Reymond* zu diesem Meyer'schen Beweise gegebene Ergänzung (Borchardt's Journal, Bd. 79, Seite 42, Note).

**) Ob dieses Wachsen *ins Unendliche* geht, ob es *stetig* oder *sprungweise* geschieht, — bleibt dabei gleichgültig. Demgemäss sind also z. B. $\sin x$ und $\operatorname{tg} x$ *monoton wachsend* zu nennen im Intervall $0 \ldots . \frac{1}{2}\pi$. Denkt man sich ferner eine Function $f(x)$, welche $= 0$ bleibt, während $\operatorname{tg} x$ von 0 auf 1 wächst, welche ferner $= 1$ bleibt, während $\operatorname{tg} x$ von 1 auf 2 wächst, sodann $= 2$ bleibt, während $\operatorname{tg} x$ von 2 auf 3 wächst, u. s. w., so wird diese Function $f(x)$ für das Intervall $0 \ldots . \frac{1}{2}\pi$ ebenfalls als *monoton wachsend* zu bezeichnen sein. Denn sie ist an jeder Unstetigkeitsstelle in sprungweisem *Wachsen*, und sonst im *Sichgleichbleiben* begriffen.

gleichbleiben (aber niemals im Abnehmen) begriffen ist. Und umgekehrt mag die Function in jenem Intervall *monoton abnehmend* genannt werden, wenn sie beim Uebergange von α zu β theils im *Abnehmen**), theils im *Sichgleichbleiben* (aber niemals im Wachsen) begriffen ist.

Hat endlich die Function *eine* von diesen beiden Eigenschaften (gleich viel welche), so soll sie kurzweg *monoton* heissen, selbstverständlich mit Bezug auf das gegebene Intervall $\alpha \ldots \beta$.

Und in unmittelbarem Anschluss an diese Ausdrucksweise mag eine Function $f(x)$ im Intervall $\alpha \ldots \beta$ *abtheilungsweise monoton* genannt werden, wenn dieses Intervall in eine *endliche* Anzahl von Strecken zerlegbar ist, der Art, dass $f(x)$ längs jeder einzelnen Strecke monoton ist**). Demgemäss wird z. B. $\sin x$ im Intervall $0 \ldots . 8\pi$ *abtheilungsweise monoton* zu nennen sein; desgleichen auch $\mathrm{tg} x$***). Hingegen hat z. B. die Function $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *keinen Anspruch* auf eine solche Benennung. Denn wollte man jenes gegebene Intervall $0 \ldots . 8\pi$ in einzelne Strecken zu zerlegen suchen, der Art, dass $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ längs jeder einzelnen Strecke monoton ist, so würden diese Strecken in der Nähe des Punctes 0 unendlich klein, mithin ihre Anzahl *unendlich gross* werden.

Stetig und abtheilungsweise stetig. Eine Function $f(x)$ heisst in einem gegebenen Puncte x_1 *stetig*, sobald ihre grösste Schwankung†) im Intervall $(x_1 - p) \ldots . (x_1 + p)$ durch Verkleinerung von p beliebig klein gemacht werden kann. Ist hingegen solches nur möglich für die eine *Hälfte* des genannten Intervalls [also entweder für die Hälfte $(x_1 - p) \ldots . x_1$, oder für die Hälfte $x_1 \ldots . (x_1 + p)$], so wird die Function im Puncte x_1 als *einseitig stetig* zu bezeichnen sein.

Sind ferner $\alpha < \beta$ zwei gegebene Constanten, so wird die Function $f(x)$ *im Intervall* $\alpha \ldots . \beta$ *stetig* genannt, sobald sie in jedem *innern* (d. i. der Bedingung $\alpha < x_1 < \beta$ entsprechenden) Puncte x_1 *stetig*, und in jedem der beiden *End*punkte α, β *einseitig stetig* ist (nämlich in α nach der Seite $\alpha\beta$, und in β nach der Seite $\beta\alpha$). Aus dieser Definition folgt von selber, dass eine im Intervall $\alpha \ldots . \beta$ *stetige* Function daselbst auch überall *endlich* ist.

Ferner mag eine Function $f(x)$ *im Intervall* $\alpha \ldots . \beta$ *abtheilungs-*

---

*) Hier ist Analoges zu bemerken, wie in der vorhergehenden Note.

**) Diese Strecken selber wird man kurzweg die *monotonen Strecken* oder die *monotonen Abtheilungen* der Function $f(x)$ nennen können.

***) Vergl. die zweite Note auf S. 26 und die erste Note dieser Seite.

†) Ist unter den Werthen, welche $f(x)$ in einem gegebenen Intervall besitzt, A der *kleinste* und B der *grösste*, so heisst bekanntlich $B - A$ die *grösste Schwankung von* $f(x)$ *für jenes Intervall.*

4*

weise stetig heissen, sobald dieses Intervall in eine *endliche* Anzahl von Strecken zerlegbar ist, der Art, dass die Function längs jeder *einzelnen* Strecke stetig ist*); woraus wiederum folgt, dass eine derartige Function im Intervall $\alpha \ldots . \beta$ überall *endlich* ist. — Denkt man sich also etwa eine Function $f(x)$ in der Weise definirt, dass sie in denjenigen Puncten, in welchen $\sin x$ *positiv oder Null* ist, $= x^2$, hingegen in denjenigen Puncten, in denen $\sin x$ *negativ* wird, $= x^3$ sein soll, so wird dieselbe z. B. im Intervall $0 \ldots . 8\pi$ *abtheilungsweise stetig* zu nennen sein. Definirt man aber die Function $f(x)$ in *der* Weise, dass sie für diejenigen Puncte, in denen $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *positiv oder Null* ist, $= x^2$, und in denjenigen Puncten, in denen $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *negativ* ist, $= x^3$ sein soll, so wird diese Function im Intervall $0 \ldots . 8\pi$ *nicht mehr* als abtheilungsweise stetig zu bezeichnen sein, weil in diesem Falle die Anzahl der erforderlichen Abtheilungen *unendlich gross* sein würde.

Constant und abtheilungsweise constant. Eine Function $f(x)$ heisst im Intervall $\alpha \ldots . \beta$ *constant,* sobald sie daselbst überall *denselben* Werth hat. Andererseits mag sie in jenem Intervall als *abtheilungsweise constant* bezeichnet werden, sobald dasselbe in eine *endliche* Anzahl von Strecken zerlegbar ist, der Art, dass die Function längs jeder *einzelnen* Strecke constant bleibt.

§ 2.

Der von Du Bois-Reymond aufgestellte Mittelwerthsatz.

Erinnerung an den gewöhnlichen Mittelwerthsatz. Sind irgend zwei Reihen (reeller) Grössen gegeben: $V_1, V_2, \ldots V_n$ und $E_1, E_2, \ldots E_n$, und sind insbesondere die E alle von *einerlei Vorzeichen***), so ist bekanntlich

$$V_1 E_1 + V_2 E_2 + \cdots + V_n E_n = W(E_1 + E_2 + \cdots + E_n), \tag{I a.}$$

wo unter W ein gewisser *Mittelwerth* der V zu verstehen ist, d. i. ein Werth der nicht kleiner sein darf als das kleinste, und nicht grösser als das grösste V.

Diesem Satze schliesst sich unmittelbar an ein anderer ebenfalls bekannter Satz. Sind nämlich $V(x)$ und $E(x)$ irgend zwei (reelle) Functionen, und ist $E(x)$ im Intervalle $x = \alpha \ldots \beta$ *von constanten Vorzeichen*, so gilt die Formel:

$$\int_\alpha^\beta V(x)\, E(x)\, dx = W \cdot \int_\alpha^\beta E(x)\, dx, \tag{I b.}$$

---

*) Diese Strecken wird man alsdann kurzweg die *stetigen Strecken* oder die *stetigen Abtheilungen* der Function $f(x)$ nennen können.

**) Es sind hier absichtlich die Buchstaben V und E gewählt worden. Denn die V können *verschiedene* Vorzeichen haben, während die E alle von *einerlei* Vorzeichen sein sollen.

wo W einen gewissen *Mittelwerth* unter all' denjenigen Werthen vorstellt, welche $V(x)$ im Intervalle $x = \alpha \dots \beta$ besitzt. Dieses W wird also der Relation entsprechen:

$$V(x_0) \leqq W \leqq V(x_1),$$

falls man nämlich diejenigen beiden Puncte, in denen $V(x)$ im Intervall $\alpha \dots \beta$ am *Kleinsten* und am *Grössten* ist, respective mit x_0 und x_1 bezeichnet.

Nehmen wir insbesondere an, dass $V(x)$ beim Uebergange von α nach β, mithin auch beim Uebergange von x_0 nach x_1 sich in *stetiger* Weise ändert, so muss unter diesen stetig zusammenhängenden Werthen, welche dem Intervall $x_0 \dots x_1$ entsprechen, mindestens *einer* sich vorfinden, welcher mit W identisch ist; so dass wir also schreiben können:

$$W = V(\xi),$$

wo ξ einen unbekannten Punkt vorstellt, der zwischen x_0 und x_1, mithin auch zwischen α und β gelegen ist.

Sind also $V(x)$ und $E(x)$ irgend zwei Functionen, ist ferner $E(x)$ im Intervall $\alpha \dots \beta$ *von constanten Vorzeichen*, und ist ausserdem $V(x)$ in diesem Intervall *stetig*, so gilt die Formel:

$$\text{(Ic.)} \qquad \int_\alpha^\beta V(x)\, E(x)\, dx = V(\xi) \cdot \int_\alpha^\beta E(x)\, dx, \quad \text{wo} \quad \alpha < \xi < \beta \text{ ist.}$$

Nachdem wir durch die vorstehenden Formeln (Ia., b., c.) an den *gewöhnlichen* oder *ersten* Mittelwerthsatz kurz erinnert haben, gehen wir über zum *zweiten* oder *Du Bois'schen* Mittelwerthsatz.

Ableitung des Du Bois'schen Mittelwerthsatzes. Dieser bezieht sich auf ein Integral von der Form:

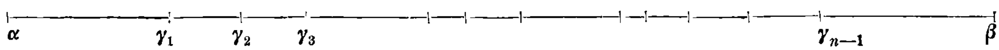
$$\text{(1.)} \qquad \int_\alpha^\beta F(x)\, \Phi(x)\, dx.$$

Um sicher zu sein, dass dieses Integral einen bestimmten endlichen Werth hat, wollen wir gleich von vornherein voraussetzen, dass $F(x)$ und $\Phi(x)$ im Intervall $\alpha \dots \beta$ *abtheilungsweise stetig* sind. Ausserdem aber sei vorausgesetzt, dass $F(x)$ in diesem Intervall *monoton wächst* und *überall positiv* ist.

Aus der Voraussetzung der abtheilungsweisen Stetigkeit folgt sofort, dass das Intervall $\alpha \dots \beta$ in eine *endliche* Anzahl von Strecken zerlegbar ist, der Art, dass $F(x)$ längs jeder einzelnen Strecke stetig bleibt. Diese von Hause aus gegebenen [nämlich durch die Natur von $F(x)$ bestimmten] *stetigen Strecken* mögen nun durch irgend welche Puncte in noch kleinere Strecken zerlegt werden, und zwar in der Weise, dass die grösste Schwankung der Function $F(x)$ für jede solche kleinere Strecke weniger als ε beträgt, wo

ε einen *ad libitum* gegebenen Kleinheitsgrad vorstellen soll. Und diese (unter Rücksicht auf jenes gegebene ε erhaltenen) kleineren Strecken mögen kurzweg die *Elementarstrecken* genannt, und mit $(\alpha\gamma_1)$, $(\gamma_1\gamma_2)$, $(\gamma_2\gamma_3)$, ... $(\gamma_{n-2}\gamma_{n-1})$, $(\gamma_{n-1}\beta)$ bezeichnet werden*). Ferner sei C_1 irgend ein Mittelwerth unter

(2.)



denjenigen Werthen, welche $F(x)$ längs der *ersten* Elementarstrecke $(\alpha\gamma_1)$ besitzt, oder (um die Vorstellung besser zu fixiren) das arithmetische Mittel dieser Werthe**). Ebenso sei C_2 das arithmetische Mittel der längs der *zweiten* Elementarstrecke $(\gamma_1\gamma_2)$ vorhandenen Werthe von $F(x)$; u. s. w., endlich C_n das der *letzten* Elementarstrecke $(\gamma_{n-1}\beta)$ entsprechende arithmetische Mittel. Alsdann wird also der absolute Betrag von $[F(x) - C_1]$ längs der *ersten* Elementarstrecke überall $< \varepsilon$ sein, ebenso der absolute von $[F(x) - C_2]$ längs der *zweiten*, u. s. f.

Dies vorausgeschickt, führen wir eine auxiliare Function $f(x)$ ein, welche abtheilungsweise constant, nämlich längs der *ersten* Elementarstrecke $= C_1$, längs der *zweiten* $= C_2$ sein soll, u. s. w.; und setzen:

$$F(x) = f(x) + g(x)\,. \tag{3.}$$

Das so definirte $g(x)$ ist alsdann, seinem absoluten Betrage nach, im ganzen Intervall $\alpha \ldots\ldots \beta$ überall $< \varepsilon$. Beachtet man ferner, dass $F(x)$, wie zu Anfang vorausgesetzt wurde, im Intervall $\alpha \ldots\ldots \beta$ *monoton wächst* und durchweg *positiv* ist, so ergiebt sich aus der für $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$ gegebenen Definition sofort die Formel:

$$0 < F(\alpha) \leqq C_1 \leqq C_2 \leqq C_3 \ldots\ldots < C_n \leqq F(\beta)\,. \tag{4.}$$

Substituirt man nun den Werth (3.) in das zu untersuchende Integral (1.), so zerfällt dasselbe in zwei Theile:

$$\int_\alpha^\beta F\Phi\,dx = \underbrace{\int_\alpha^\beta f\Phi\,dx}_{U} + \underbrace{\int_\alpha^\beta g\Phi\,dx}_{V}\,, \tag{5.}$$

welche mit U und V bezeichnet werden mögen. Der Werth von U kann offenbar auch so geschrieben werden:

---

*) Die $(n-1)$ Puncte $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots\ldots \gamma_{n-1}$ werden also bestehen theils aus den von Hause aus gegebenen *Unstetigkeitspuncten* der betrachteten Function $F(x)$, theils aus gewissen anderen zwischen diesen Unstetigkeitspuncten noch *eingeschalteten Puncten*.

**) Es soll also C_1 definirt sein durch die Formel: $C_1 = \dfrac{1}{\gamma_1 - \alpha}\displaystyle\int_\alpha^{\gamma_1} F(x)\,dx\,.$

$$U = \int^{\gamma_1} f\Phi\, dx + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f\Phi\, dx + \cdots + \int_{\gamma_{n-1}}^{\beta} f\Phi\, dx,$$

oder, falls man die Definition von f beachtet, auch so:

$$U = C_1 \int_\alpha^{\gamma_1} \Phi\, dx + C_2 \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \Phi\, dx + \cdots + C_n \int_{\gamma_{n-1}}^{\beta} \Phi\, dx.$$

Diese Formel aber nimmt unter Anwendung der Bezeichnungen

$$(6.)\quad J_0 = \int_\alpha^\beta \Phi\, dx, \qquad J_1 = \int_{\gamma_1}^\beta \Phi\, dx, \qquad J_2 = \int_{\gamma_2}^\beta \Phi\, dx, \quad \cdots\cdots \quad J_{n-1} = \int_{\gamma_{n-1}}^\beta \Phi\, dx, \qquad J_n = \int_\beta^\beta \Phi\, dx,$$

folgende Gestalt an:

$$U = C_1 (J_0 - J_1) + C_2 (J_1 - J_2) + C_3 (J_2 - J_3) \cdots\cdots + C_{n-1} (J_{n-2} - J_{n-1}) + C_n (J_{n-1} - J_n).$$

Das *letzte* J, nämlich das J_n ist [vgl. (6.)] identisch Null, gleiches gilt daher von dem Product: $J_n\, F(\beta)$. Fügt man aber dieses verschwindende Product zur rechten Seite der letzten Formel hinzu, und ordnet sodann nach den J's, so ergiebt sich:

$$U = C_1 J_0 + (C_2 - C_1) J_1 + (C_3 - C_2) J_2 \cdots\cdots + (C_n - C_{n-1}) J_{n-1} + (F(\beta) - C_n) J_n.$$

Hieraus folgt, weil die Grössen C_1, $(C_2 - C_1)$, $(C_3 - C_2)$, ... $(C_n - C_{n-1})$, $(F(\beta) - C_n)$, zufolge (4.), *sämmtlich positiv* sind, durch Anwendung des gewöhnlichen Mittelwerthsatzes (Ia.) Seite 28 sofort:

$$U = [C_1 + (C_2 - C_1) + (C_3 - C_2) \cdots + (C_n - C_{n-1}) + (F(\beta) - C_n)]\, K,$$

wo K einen unbekannten Mittelwerth der Grössen J_0, J_1, J_2, ... J_{n-1}, J_n vorstellt.

Jene Grössen J sind [vgl. (6.)] sämmtlich von der Form:

$$(6\text{a.})\qquad \int_\xi^\beta \Phi\, dx.$$

In der That wird dieses Integral, falls wir seine untere Grenze ξ von α nach β wandern lassen, gewisse stetig zusammenhängende Werthe durchlaufen, zu denen unter andern auch die Werthe jener J's gehören; wie solches aus dem Anblick der Formeln (6.) unmittelbar sich ergiebt. Die stetig zusammenhängenden Werthe, welche das Integral (6a.) durchläuft, während ξ von α nach β geht, bilden daher zwischen den einzelnen J's eine *stetige Verbindung,* und enthalten folglich in sich *sämmtliche Mittelwerthe* der J's. Mit andern Worten: Das vorstehende Integral (6a.) muss durch eine geeignete Verschiebung des der Bedingung $\alpha \leq \xi \leq \beta$ unterworfenen Punctes ξ zur Coincidenz gebracht werden können mit *jedwedem* Mittelwerthe der J's, also z. B.

auch mit demjenigen, der vorhin mit K bezeichnet worden ist. Man kann daher schreiben:

$$K = \int_{\xi}^{\beta} \Phi \, dx , \qquad \text{wo } \alpha \leqq \xi \leqq \beta . \tag{6b.}$$

Substituirt man diesen Werth (6b.) in die letzte für U erhaltene Formel, und beachtet man, dass die Summe der daselbst in der eckigen Klammer enthaltenen Grössen sich auf $F(\beta)$ reducirt, so erhält man:

$$U = F(\beta) \int_{\xi}^{\beta} \Phi \, dx , \qquad \text{wo } \alpha \leqq \xi \leqq \beta . \tag{7.}$$

Was andererseits das Integral V in (5.) betrifft, so ergiebt sich sofort:

$$\text{abs } V < \int_{\alpha}^{\beta} (\text{abs } g)(\text{abs } \Phi) \, dx ,$$

also, falls man den absolut grössten Werth von Φ im Intervall $\alpha \ldots . \beta$ mit M bezeichnet, und beachtet, dass der absolut grösste Werth von g in diesem Intervall kleiner als ε ist:

$$\text{abs } V < \varepsilon \mathsf{M} \int_{\alpha}^{\beta} dx , \quad \text{d. i. } < (\beta - \alpha) \mathsf{M} \varepsilon ,$$

oder, was dasselbe ist:

$$V = \vartheta (\beta - \alpha) \mathsf{M} \varepsilon , \tag{8.}$$

wo ϑ einen unbekannten (positiven oder negativen) ächten Bruch bezeichnet. Schliesslich folgt nun aus (5.) durch Substitution der beiden Werthe (7.) und (8.):

$$\int_{\alpha}^{\beta} F \Phi \, dx = F(\beta) \int_{\xi}^{\beta} \Phi \, d\, x + \vartheta (\beta - \alpha) \mathsf{M} \varepsilon , \qquad \text{wo } \alpha < \xi \leqq \beta \text{ ist,} \tag{9.}$$

ϑ einen ächten Bruch vorstellt, ferner α, β, M von Hause aus gegebene Constanten sind, und endlich ε den zu Anfang unserer Untersuchung *ad libitum* gewählten Kleinheitsgrad vorstellt.

Da nun das ε *ad libitum* gewählt werden konnte, so bleibt die vorstehende Formel in Kraft, wie klein wir uns dieses ε auch denken mögen. Mit andern Worten: Sie bleibt gültig, wie klein wir uns das *zweite Glied* ihrer rechten Seite auch vorstellen mögen. Demgemäss wird sie gültig bleiben, auch wenn wir jenes *zweite Glied* ganz fortlassen. Wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

Der Du Bois'sche Mittelwerthsatz. *Sind $F(x)$ und $\Phi(x)$ im Intervall $\alpha \ldots \beta$ abtheilungsweise stetig, und setzt man überdies voraus, dass $F(x)$ in jenem Intervall monoton wachse und überall positiv sei, so gilt die Formel:*

$$\text{(IIa.)}\qquad \int_\alpha^\beta F(x)\,\Phi(x)\,dx = F(\beta)\int_\xi^\beta \Phi(x)\,dx\,, \qquad \textit{wo } \alpha \leqq \xi \leqq \beta \textit{ ist}.$$

Abgesehen von dieser Relation $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$ ist das ξ unbekannt.

Von den hier gemachten Voraussetzungen lassen sich einige leicht beseitigen. Setzt man z. B. von einer gegebenen Function $f(x)$ *nur* voraus, dass sie im Intervall $\alpha \ldots\ldots \beta$ *monoton* und *abtheilungsweise stetig* sei, so wird die soeben gefundene Formel sofort anwendbar sein auf *eine* der beiden Functionen

$$F(x) = f(x) - f(\alpha)\,,$$

$$F(x) = f(\alpha) - f(x)\,,$$

nämlich auf die *erstere*, falls $f(x)$ monoton *wächst*, auf die *letztere*, falls $f(x)$ monoton *abnimmt*. Somit ergiebt sich z. B. im *ersteren* Fall:

$$\int_\alpha^\beta \big(f(x) - f(\alpha)\big)\,\Phi\,dx = \big(f(\beta) - f(\alpha)\big)\int_\xi^\beta \Phi\,dx\,, \qquad \text{wo } \alpha < \xi < \beta,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\Phi\,dx = f(\alpha)\int_\alpha^\xi \Phi\,dx + f(\beta)\int_\xi^\beta \Phi\,dx\,, \qquad \text{wo } \alpha < \xi < \beta.$$

Und dass man andererseits im *letzteren* Fall zu genau derselben Formel gelangt, übersieht man sofort. Demgemäss ergiebt sich folgendes Resultat:

Allgemeinere Form des Du Bois'schen Satzes. — *Sind $f(x)$ und $\Phi(x)$ im Intervall $\alpha \ldots\ldots \beta$ abtheilungsweise stetig, und setzt man überdies voraus, dass $f(x)$ in jenem Intervall monoton sei, so gilt die Formel:*

$$\text{(IIb.)}\qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,\Phi(x)\,dx = f(\alpha)\int_\alpha^\xi \Phi(x)\,dx + f(\beta)\int_\xi^\beta \Phi(x)\,dx\,; \qquad \textit{wo } \alpha < \xi \leqq \beta \textit{ ist.}$$

Uebrigens kann man dieser Formel auch folgende Gestalt geben:

$$\text{(IIc.)}\qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,\Phi(x)\,dx = f(\alpha)\int_\alpha^\beta \Phi(x)\,dx + \mathfrak{M}\big(f(\beta) - f(\alpha)\big)\,, \qquad \textit{wo } \mathfrak{M} = \int_\xi^\beta \Phi(x)\,dx\,,$$

und nach wie vor $\alpha \leqq \xi \leqq \beta$ ist).*

---

*) Der mit $\mathfrak{M}$ bezeichnete Integralwerth ist also ein unbekannter *Mittelwerth* unter denjenigen Werthen, welche jenes Integral durchlaufen würde, falls man seine untere Grenze ξ fortwandern lassen wollte von α bis β. Daher der Name: *Mittelwerthsatz*. Vgl. *Du Bois'* Aufsatz im Borch. Journal, Bd. 69, Seite 81, (8.) und Seite 82, (9.).

§ 2a.

Rückblick auf den Du Bois-Reymond'schen Satz.

Bei der fundamentalen Bedeutung, welche dieser Satz für die ganze Entwicklungs-Theorie besitzt, wird es angenehm sein, eine deutliche Anschauung von seinem inneren Kern zu haben. Zu einer solchen kann man durch einfache geometrische Betrachtungen gelangen.

Handelt es sich zunächst um die Berechnung des durch das Integral

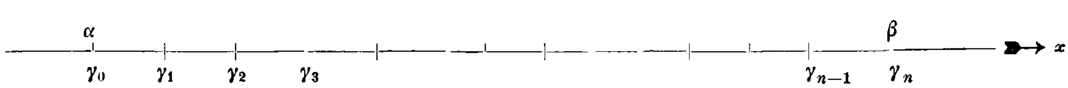
$$\mathfrak{J} = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \tag{1.}$$

bestimmten Flächeninhaltes $\mathfrak{J}$, so kann man in doppelter Weise verfahren, indem man diese von drei geraden Linien und der Curve $y = f(x)$ begrenzte Fläche $\mathfrak{J}$ entweder *parallel mit der x-Axe*, oder aber *parallel mit der y-Axe* in lauter unendlich schmale Streifen zerlegt. Während man im *letztern* Fall geradezu zum Ausdruck (1.) gelangt, wird man im *ersten* Fall zu einem ganz anderen Ausdruck gelangen. Setzt man aber diesen neuen dem früheren gleich, so ergiebt sich ein *Specialfall des Du Bois'schen Satzes*, vorausgesetzt, dass $f(x)$ monoton.

Ohne uns hierbei weiter aufzuhalten, wollen wir sogleich angeben, wie man in ähnlicher Weise auch zur *allgemeinen Formel des Du Bois'schen* Satzes gelangen kann. Zu diesem Zwecke denken wir uns die Fläche $\mathfrak{J}$, oder (was dasselbe ist) die xy-Ebene horizontal, und errichten auf dieser Horizontalebene Perpendikel in sämmtlichen Randpuncten der Fläche $\mathfrak{J}$. Diese Perpendikel bilden alsdann in ihrer Gesammtheit eine die Fläche $\mathfrak{J}$ rings umziehende vertikale Wandung. Das von der Fläche $\mathfrak{J}$ und dieser vertikalen Wandung begrenzte Volumen mag nach Oben geschlossen gedacht werden durch die Fläche $z = \Phi(x)$, die z-Axe vertikal nach Oben laufend gedacht. Wir erhalten auf diese Weise ein Volumen $\mathfrak{V}$, welches im Ganzen von vier Ebenen, ausserdem aber von den beiden Cylinderflächen $y = f(x)$ und $z = \Phi(x)$ begrenzt ist. Dieses Volumen $\mathfrak{V}$ können wir nun wieder in doppelter Weise berechnen, indem wir dasselbe entweder *parallel der xz-Ebene*, oder aber *parallel der yz-Ebene* in lauter unendlich dünne Scheiben zerlegen. Im *letztern* Fall ergiebt sich sofort die Formel:

$$\mathfrak{V} = \int_\alpha^\beta f(x)\,\Phi(x)\,dx. \tag{2.}$$

Im *erstern* Fall hingegen gelangen wir, falls wir das Intervall $x = \alpha \ldots . \beta$ in unendlich kleine Elemente zerlegen:



durch die unmittelbare geometrische Anschauung zu folgendem Ausdruck:

$$(3)\qquad \mathfrak{B} = \left\{ \begin{array}{l} f(\alpha)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Phi\,dx + \big(f(\gamma_1) - f(\alpha)\big)\int\limits_{\gamma_1}^{\beta}\Phi\,dx + \big(f(\gamma_2) - f(\gamma_1)\big)\int\limits_{\gamma_2}^{\beta}\Phi\,dx + \cdots \\ \cdots\cdots + \big(f(\gamma_{n-1}) - f(\gamma_{n-2})\big)\int\limits_{\gamma_{n-1}}^{\beta}\Phi\,dx + \big(f(\gamma_n) - f(\gamma_{n-1})\big)\int\limits_{\gamma_n}^{\beta}\Phi\,dx \end{array} \right\}.$$

Nehmen wir nun an, $f(x)$ sei *monoton*, so sind die Differenzen:

$$f(\gamma_1) - f(\alpha), \quad f(\gamma_2) - f(\gamma_1), \quad \ldots . \quad f(\gamma_{n-1}) - f(\gamma_{n-2}), \quad f(\gamma_n) - f(\gamma_{n-1})$$

sämmtlich von *einerlei* Vorzeichen, und ihre Summe $= f(\gamma_n) - f(\alpha)$, d. i. $= f(\beta) - f(\alpha)$; so dass sich also mittelst des gewöhnlichen Mittelwerthsatzes (Ia.) Seite 28 ergiebt:

$$(4.)\qquad \mathfrak{B} = f(\alpha)\int\limits_{\alpha}^{\beta}\Phi\,dx + \big(f(\beta) - f(\alpha)\big)\,\mathfrak{M},$$

wo das $\mathfrak{M}$ einen unbekannten Mittelwerth der Grössen

$$\int\limits_{\gamma_1}^{\beta}\Phi\,dx, \quad \int\limits_{\gamma_2}^{\beta}\Phi\,dx, \quad \int\limits_{\gamma_3}^{\beta}\Phi\,dx, \quad \ldots\ldots\ldots \int\limits_{\gamma_n}^{\beta}\Phi\,dx$$

vorstellt. Demgemäss lässt sich dieses $\mathfrak{M}$ darstellen in der Form:

$$(5.)\qquad \mathfrak{M} = \int\limits_{\xi}^{\beta}\Phi\,dx, \qquad \text{wo } \alpha \leqq \xi \leqq \beta.$$

Substituirt man aber diesen Werth (5.) in den Ausdruck (4.), und setzt man sodann die beiden Ausdrücke (2.) und (4.) einander gleich, so erhält man den *Du Bois'schen Satz.*

§ 3.

Einige Bemerkungen über die Kreisfunctionen.

Wir wollen hier einige ganz elementare Bemerkungen voranschicken, die schliesslich zu einem für unsere weiteren Untersuchungen erforderlichen Hülfssatz führen werden.

Erste Bemerkung. — Unterwirft man die Variable x der Bedingung $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$, so ist bekanntlich:

$$\sin x \cos x \leqq x < \operatorname{tg} x, \text{ *)}$$

also, falls man durch $\sin x$ dividirt:

---

*) Beschreibt man nämlich um die Spitze O eines *gleichschenkligen* Dreiecks OAB einen die *Grundlinie* AB berührenden Kreis, welcher die Schenkel OA und OB resp. in A_0 und B_0 schneiden mag, und zieht man endlich die Sehne A_0B_0, so ergiebt sich unmittelbar aus der geometrischen Anschauung folgende Relation:

$$\big(\text{Dreieck } OA_0B_0\big) < \big(\text{Kreissector } OA_0B_0\big) \leqq \big(\text{Dreieck } OAB\big).$$

Diese Relation aber nimmt, falls man den Radius des Kreises mit r, und den Winkel AOB mit $2x$ bezeichnet, die Gestalt an:

$$r^2 \sin x \cos x \quad \leqq \quad r^2 x \quad \leqq \quad r^2 \operatorname{tg} x. \qquad \text{W. z. z. w.}$$

(1.) $$\cos x \leqq \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \tfrac{1}{2}\pi,$$

(2.) mithin $$\frac{1}{\cos x} \geqq \frac{\sin x}{x} \geqq \cos x, \quad \text{ebenfalls für} \quad 0 \leqq x \leqq \tfrac{1}{2}\pi.$$

Setzt man nun $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, so wird $f'(x) = \frac{1}{x}\left(\cos x - \frac{\sin x}{x}\right)$. Dieser Ausdruck hat aber für $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$ einen *negativen* Werth [zufolge (2.)], und andererseits für $\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \pi$ ebenfalls einen *negativen* Werth [wie solches aus dem Ausdruck selber unmittelbar hervorgeht]. Somit sehen wir, *dass die Function*

(3.) $$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

im Intervall $x = 0 \ldots \pi$ stetig und monoton abnehmend ist. Hieraus folgt sofort: $f(0) \geqq f(x) \geqq f(\pi)$, d. i.

(4.) $$1 \geqq \frac{\sin x}{x} \geqq 0, \quad \text{für} \quad 0 < x \leqq \pi;$$

und insbesondere auch: $f(0) \geqq f(x) \geqq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, d. i.

(5.) $$1 \geqq \frac{\sin x}{x} \geqq \frac{2}{\pi}, \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2};$$

oder, ein wenig anders geschrieben:

(5a.) $$1 \leqq \frac{x}{\sin x} \leqq \frac{\pi}{2}, \quad \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Zweite Bemerkung. — Bezeichnet A eine beliebig grosse positive Constante, und $n\pi$ das grösste in A enthaltene Vielfache von π, so kann man setzen:

$$\int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx = \int_0^\pi + \int_\pi^{2\pi} + \int_{2\pi}^{3\pi} + \cdots + \int_{n\pi}^A.$$

Durch diese Formel aber wird [weil $\sin x$ für die aufeinander folgenden Intervalle $0 \ldots \pi \ldots 2\pi \ldots 3\pi \ldots$ alternirendes Vorzeichen hat, und überdies $\frac{1}{x}$ bei wachsendem x fortwährend abnimmt] das Integral linker Hand in $(n+1)$ Glieder zerlegt, *die alternirendes Vorzeichen haben, und von denen jedes seinem absoluten Betrage nach kleiner als das vorhergehende ist.* Beachtet man nun überdies, dass das *erste* Glied positiv ist, so ergiebt sich sofort, dass die *Summe der $(n+1)$ Glieder* ebenfalls positiv und kleiner als jenes *erste* Glied sein muss. Somit folgt:

$$0 \leqq \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx \leqq \int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

also mit Rücksicht auf (4.):

$$0 \leq \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx < \pi,$$

immer vorausgesetzt, dass A einen *positiven* Werth habe.

In analoger Weise wird man offenbar für ein *negatives* A erhalten:

$$-\pi < \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx \leq 0,$$

und hieraus folgt, *dass für jedes beliebige A, mag nun dasselbe positiv oder negativ sein, die Formel stattfindet:*

$$\text{(6.)} \qquad \operatorname{abs} \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx < \pi.$$

Hieraus folgt weiter, *dass für zwei ganz beliebig gegebene Constanten A und B, mögen nun dieselben gleiches oder verschiedenes Vorzeichen haben, stets die Formel gilt:*

$$\text{(7.)} \qquad \operatorname{abs} \int_A^B \frac{\sin x}{x}\, dx < 2\pi.$$

Dritte Bemerkung. — In der identischen Gleichung

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin qx}{\sin x}\, dx = \int_\alpha^\beta \left(\frac{x}{\sin x}\right)\left(\frac{\sin qx}{x}\right) dx$$

sei q eine *beliebige* Constante, während α und β der Relation $0 \leq \alpha \leq \beta \leq \frac{1}{2}\pi$ unterworfen sein sollen. Alsdann wird die Function $\frac{x}{\sin x}$ [vgl. den Satz (3.)] im Intervalle $x = \alpha \ldots \beta$ *stetig* und *monoton* sein. Man erhält daher durch Anwendung des Du Bois'schen Satzes (Seite 33):

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin qx}{\sin x}\, dx = \frac{\alpha}{\sin \alpha} \int_\alpha^\xi \frac{\sin qx}{x}\, dx + \frac{\beta}{\sin \beta} \int_\xi^\beta \frac{\sin qx}{x}\, dx, \quad \text{wo } 0 < \alpha < \xi \leq \beta < \frac{\pi}{2};$$

oder, falls man in den Integralen rechter Hand statt x eine neue Variable y einführt mittelst der Substitution $qx = y$:

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin qx}{\sin x}\, dx = \frac{\alpha}{\sin \alpha} \int_{q\alpha}^{q\xi} \frac{\sin y}{y}\, dy + \frac{\beta}{\sin \beta} \int_{q\xi}^{q\beta} \frac{\sin y}{y}\, dy, \quad \text{wo } 0 < \alpha < \xi < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Hieraus aber folgt mit Rücksicht auf (5a.) und (7.) *die merkwürdige Formel:*

$$\text{(8.)} \qquad \operatorname{abs} \int_\alpha^\beta \frac{\sin qx}{\sin x}\, dx < 2\pi^2, \quad \textit{in welcher } 0 \leq \alpha \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

sein soll, während q eine ganz beliebige Constante vorstellen kann.

Einer etwas anderen und noch einfacheren Behandlung ist das vorliegende Integral fähig, falls man voraussetzt, dass 0 nicht $\leqq \alpha$, *sondern geradezu* $< \alpha$ *sein solle.* Nimmt man nämlich an, es sei $0 < \alpha \leqq \beta < \frac{1}{2}\pi$, so wird die Function $\frac{1}{\sin x}$ im Intervall $x = \alpha \ldots \beta$ *stetig* und *monoton* sein. Man erhält daher mittelst des Du Bois'schen Satzes:

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin qx}{\sin x}\, dx = \frac{1}{\sin \alpha} \int_\alpha^\xi \sin qx \cdot dx + \frac{1}{\sin \beta} \int_\xi^\beta \sin qx \cdot dx;$$

oder, was dasselbe ist:

$$\int_\alpha^\beta \frac{\sin qx}{\sin x}\, dx = \frac{\cos q\alpha - \cos q\xi}{q \sin \alpha} + \frac{\cos q\xi - \cos q\beta}{q \sin \beta}, \quad \text{wo } 0 < \alpha \leqq \xi \leqq \beta \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Hieraus aber folgt sofort:

$$\operatorname{abs} \int_\alpha^\beta \frac{\sin qx}{\sin x}\, dx < \frac{1}{\operatorname{abs} q} \left(\frac{2}{\sin \alpha} + \frac{2}{\sin \beta} \right),$$

also *a fortiori:*

$$\operatorname{abs} \int_\alpha^\beta \frac{\sin qx}{\sin x}\, dx < \frac{4}{(\operatorname{abs} q)(\sin \alpha)}, \quad \textit{wo } 0 < \alpha \leqq \beta < \frac{\pi}{2} \tag{9.}$$

ist, während q eine ganz beliebige Constante vorstellt.

Vierte Bemerkung. — Setzt man in den Formeln (8.) und (9.) die Integrationsvariable $x = \frac{1}{2}\varphi$, ferner $2\alpha = \gamma$ und $2\beta = \delta$, und setzt man endlich $q = (2n + 1)$, wo n eine positive ganze Zahl sein soll, so nehmen jene Formeln folgende Gestalt an:

$$\operatorname{abs} \int_\gamma^\delta \frac{\sin (n + \frac{1}{2})\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi}\, d\varphi < 4\pi^2, \quad \text{falls } 0 \leqq \gamma \leqq \delta \leqq \pi; \tag{10.}$$

$$\operatorname{abs} \int_\gamma^\delta \frac{\sin (n + \frac{1}{2})\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi}\, d\varphi < \frac{4}{(n + \frac{1}{2}) \sin \frac{1}{2}\gamma} < \frac{4}{n \sin \frac{1}{2}\gamma}, \quad \text{falls } 0 < \gamma \leqq \delta \leqq \pi. \tag{11.}$$

Diese Formeln (10.), (11.), *in denen also n eine beliebige Zahl aus der Reihe* 0, 1, 2, 3, 4, ... *vorstellen kann, werden uns weiterhin von Nutzen sein.* Die für ihre Gültigkeit erforderlichen Bedingungen unterscheiden sich dadurch von einander, dass bei (10.) $0 \leqq \gamma$, bei (11.) hingegen $0 < \gamma$ notirt ist.

§ 4.

Ueber die Fourier'sche Reihe.

Auf einer Kreisperipherie vom Radius 1 mag der Centriwinkel φ, von einem festen Radius aus, nach der einen Seite von 0 bis π, nach der andern von 0 bis $-\pi$ gerechnet werden; so dass also die Puncte $\varphi = \pi$ und $\varphi = -\pi$ untereinander identisch sind. Denkt man sich auf dieser Kreisperipherie irgend eine Function $F(\varphi)$ ausgebreitet, und nimmt man an, dieselbe wäre in irgend einem Puncte φ_1 *unstetig*, jedoch *endlich*, so werden daselbst *zwei* Werthe zu unterscheiden sein, nämlich die Werthe $F(\varphi_1 - 0)$ und $F(\varphi_1 + 0)$. Desgleichen werden im Allgemeinen auch im Puncte $\varphi = \pm \pi$ *zwei* Werthe vorhanden sein, nämlich die Werthe $F(\pi - 0)$ und $F(-\pi + 0)$. — Dies vorangeschickt gehen wir über zu unserer eigentlichen

Aufgabe. — Nach unseren früheren, aber *sehr unsicheren* Betrachtungen (Seite 5) ist jede Function $F(\varphi)$ im Puncte φ darstellbar durch folgende Formel:

$$F(\varphi_1) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\varphi) \left\{ 1 + 2 \sum_1^n \cos n(\varphi - \varphi_1) \right\} d\varphi. \tag{1.}$$

Es fragt sich nun, ob und in welchen Fällen diese Formel (1.) *wirklich correct ist.* Zu diesem Zweck müssen wir das in der Formel auftretende Integral

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\varphi) \left\{ 1 + 2 \sum_1^n \cos n(\varphi - \varphi_1) \right\} d\varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} F(\varphi)\, \Lambda_n(\varphi - \varphi_1)\, d\varphi, \tag{2.}$$

welches für den Specialfall $\varphi_1 = 0$ die einfachere Gestalt annimmt:

$$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\varphi) \left\{ 1 + 2 \sum_1^n \cos n\varphi \right\} d\varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} F(\varphi)\, \Lambda_n(\varphi)\, d\varphi, \tag{3.}$$

einer genaueren Untersuchung unterwerfen. Dabei sind zur Abkürzung die in den geschweiften Klammern enthaltenen Ausdrücke mit $\Lambda_n(\varphi - \varphi_1)$, respective mit $\Lambda_n(\varphi)$ bezeichnet. Wir beginnen mit einigen einfachen Bemerkungen über die in (3.) enthaltene Function:

$$\Lambda_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \left\{ 1 + 2\cos(\varphi) + 2\cos(2\varphi) + 2\cos(3\varphi) + \cdots\cdots + 2\cos(n\varphi) \right\}. \tag{4.}$$

Multiplicirt man diese Function mit $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, so ergiebt sich unter Anwendung der bekannten Relation: $2 \sin x \cos y = \sin(x - y) + \sin(x + y)$ sofort:

$$\Lambda_n(\varphi) \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \left[\sin\left(\frac{-\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\varphi}{2}\right)\right] + \left[\sin\left(\frac{-3\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{5\varphi}{2}\right)\right] + \cdots\right.$$
$$\left. \cdots + \left[\sin\left(\frac{-\overline{2n-1}\,\varphi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\overline{2n+1}\,\varphi}{2}\right)\right] \right\},$$

oder, weil die Glieder rechter Hand, abgesehen vom allerletzten, sich paarweise zerstören: $\Lambda_n(\varphi) \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2\pi} \sin \frac{(2n+1)\varphi}{2}$, d. i.

$$\Lambda_n(\varphi) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})\varphi}{2\pi \sin \frac{1}{2}\varphi}. \tag{5.}$$

An die Formeln (4.), (5.) schliessen sich einige Bemerkungen über das *Integral* der Function $\Lambda_n(\varphi)$. Einerseits folgt nämlich aus (4.):

$$(6.)\qquad \int_0^\pi \Lambda_n(\varphi)\,d\varphi = \tfrac{1}{2}; \qquad \text{mithin auch:}\quad \lim_{n=\infty} \int_0^\pi \Lambda_n(\varphi)\,d\varphi = \tfrac{1}{2};$$

und andererseits folgt aus (5.) mittelst der auf Seite 38 gefundenen Formeln (10.), (11.) nicht nur:

$$(7.)\qquad \operatorname{abs} \int_\gamma^\delta \Lambda_n(\varphi)\,d\varphi < 2\pi, \quad \text{falls } 0 \leqq \gamma \leqq \delta \leqq \pi,$$

sondern auch:

$$(8.)\qquad \operatorname{abs} \int_\gamma^\delta \Lambda_n(\varphi)\,d\varphi < \frac{2}{n\pi \sin\frac{1}{2}\gamma}, \quad \text{falls*)}\ 0 < \gamma \leqq \delta \leqq \pi.$$

Dies vorangeschickt, gehen wir nur über zur

Untersuchung des speciellen Integrals S_n (3.) — Offenbar können wir dasselbe in zwei Theile zerlegen:

$$(9.)\qquad S_n = \underbrace{\int_{-\pi}^0 F(\varphi)\,\Lambda_n(\varphi)\,d\varphi}_{U_n} + \underbrace{\int_0^\pi F(\varphi)\,\Lambda_n(\varphi)\,d\varphi}_{V_n};$$

und bei der Untersuchung dieser beiden Theile wollen wir gleich von vornherein voraussetzen, *dass die gegebene Function*

$$(10.)\qquad F(\varphi)$$

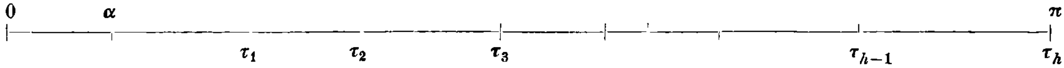
im Intervalle $\varphi = -\pi \ldots +\pi$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton sein solle. Gleiches wird alsdann offenbar auch gelten von der Function $F(\varphi)$ — Const., *also z. B. von der Function*

$$(11.)\qquad f(\varphi) = F(\varphi) - F(0),$$

wobei sogleich bemerkt sein mag, dass diese *neue* Function $f(\varphi)$ für $\varphi = 0$ verschwindet. In der That wird:

$$(12.)\qquad f(0) = 0, \quad \text{und} \quad f(\alpha) = F(\alpha) - F(0).$$

Zufolge der Voraussetzung (10.) kann z. B. das Intervall $\varphi = 0 \ldots . \pi$ in eine *endliche* Anzahl von Strecken zerlegt werden, der Art, dass $F(\varphi)$, mithin auch $f(\varphi)$ längs jeder solchen Strecke *monoton* ist. Die Anzahl dieser *monotonen Strecken* mag h heissen; so dass also diese Strecken selber angedeutet werden können durch das Schema:



*) Es heisst hier: $0 < \gamma$, während in der vorhergehenden Formel (7.) steht: $0 \leqq \gamma$.

wo sämmtliche τ der gegebenen Function eigenthümliche *feste* Puncte sind. Zu diesen festen Puncten τ fügen wir zwischen 0 und τ_1 noch einen auxiliaren Punct α hinzu, der *beweglich* bleiben und auf unsere späteren Dispositionen harren mag. Alsdann ergiebt sich mittelst des Du Bois'schen Mittelwerthsatzes (Seite 33) für die Strecke $(0, \alpha)$ die Formel:

$$\int_0^\alpha f(\varphi)\,\Lambda_n(\varphi)\,d\varphi = f(0)\int_0^\xi \Lambda_n(\varphi)\,d\varphi + f(\alpha)\int_\xi^\alpha \Lambda_n(\varphi)\,d\varphi\,, \quad \text{wo} \quad 0 \leq \xi \leq \alpha.$$

Die hier auf der rechten Seite stehenden Integrale)* sind aber beide, zufolge (7.), ihrem absoluten Betrage nach $< 2\pi$; und ausserdem ist nach (12): $f(0) = 0$, und $f(\alpha) = F(\alpha) - F(0)$. Somit ergiebt sich:

$$\text{abs}\int_0^\alpha f(\varphi)\,\Lambda_n(\varphi)\,d\varphi < 2\pi \cdot \text{abs}\big(F(\alpha) - F(0)\big)\,. \tag{13.}$$

Ferner ergiebt sich mittelst des Du Bois'schen Satzes für die nächstfolgende Strecke (α, τ_1) die Formel:

$$\int_\alpha^{\tau_1} f(\varphi)\,\Lambda_n(\varphi)\,d\varphi = f(\alpha)\int_\alpha^\xi \Lambda_n(\varphi)\,d\varphi + f(\tau_1)\int_\xi^{\tau_1} \Lambda_n(\varphi)\,d\varphi\,, \quad \text{wo} \quad \alpha < \xi \leq \tau_1\,;$$

also mit Rücksicht auf (8.):

$$\text{abs}\int_\alpha^{\tau_1} f(\varphi)\,\Lambda_n(\varphi)\,d\varphi < \frac{2\,\text{abs}\,f(\alpha)}{n\pi\sin\frac{1}{2}\alpha} + \frac{2\,\text{abs}\,f(\tau_1)}{n\pi\sin\frac{1}{2}\xi}\,, \quad \text{wo} \quad \alpha < \xi < \tau_1\,:$$

also, falls man den absolut grössten Werth von $f(\varphi)$ im Intervall $\varphi = 0 \ldots\ldots \pi$ mit M bezeichnet:

$$\text{abs}\int_\alpha^{\tau_1} f(\varphi)\,\Lambda_n(\varphi)\,d\varphi < \frac{4M}{n\pi\sin\frac{1}{2}\alpha}\,. \quad {}^{**)} \tag{14₁.}$$

Analoge Formeln ergeben sich nun für alle folgenden Strecken $(\tau_1, \tau_2), (\tau_2, \tau_3)$, etc.; nämlich:

---

*) Ziemlich lange Zeit habe ich mich bemüht, diese beiden Integrale nicht nach der Formel (7.), sondern *blos mittelst der Formel* (8.) zu beurtheilen, habe aber schliesslich mich davon überzeugt, dass ein solches Verfahren zur Erreichung des hier vorliegenden Zieles nicht zu verhelfen vermag, weil die in den Integralen enthaltene Grösse ξ, abgesehen von der Relation $0 < \xi < \alpha$, uns völlig unbekannt ist. Nachdem ich solches erkannt hatte, gelang es mir dann endlich dem Uebelstande abzuhelfen durch Hinzuziehung einer *neuen Formel*, nämlich der Formel (7.). — Ich erwähne dies absichtlich, weil sonst vielleicht der oberflächliche Beurtheiler in dieser Formel (7.), die ein *besonders wichtiges und einfaches Instrument* der vorliegenden Untersuchung repräsentirt, eine unnütze Weitläufigkeit erblicken möchte.

**) Denn es ist in der vorhergehenden Formel: $\alpha < \xi < \tau_1$, mithin $\dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}\xi} < \dfrac{1}{\sin\frac{1}{2}\alpha}$.

$$(14_2.)\qquad \operatorname{abs}\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\varphi)\,\Lambda_n(\varphi)\,d\varphi < \frac{4M}{n\pi\sin\frac{1}{2}\alpha},$$

$$(14_3.)\qquad \operatorname{abs}\int_{\tau_2}^{\tau_3} f(\varphi)\,\Lambda_n(\varphi)\,d\varphi < \frac{4M}{n\pi\sin\frac{1}{2}\alpha},$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$(14_h.)\qquad \operatorname{abs}\int_{\tau_{h-1}}^{\tau_h} f(\varphi)\,\Lambda_n(\varphi)\,d\varphi < \frac{4M}{n\pi\sin\frac{1}{2}\alpha}.$$

Nunmehr folgt aus den Formeln (13.) und $(14_1.)$, $(14_2.)$, . . . $(14_h.)$ durch Addition:

$$(15.)\qquad \operatorname{abs}\int_0^\pi f(\varphi)\,\Lambda_n(\varphi)\,d\varphi < \frac{4Mh}{n\pi\sin\frac{1}{2}\alpha} + 2\pi\cdot\operatorname{abs}\big(F(\alpha)-F(0)\big).$$

Diese Formel entspricht unseren Zwecken. In der That kann die *rechte* Seite derselben unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad ε hinabgedrückt werden, — in der Weise, dass man zunächst das *zweite* Glied durch Verkleinerung*) von α unter $\frac{1}{2}\varepsilon$, sodann aber das *erste* Glied durch Vergrösserung von n ebenfalls unter $\frac{1}{2}\varepsilon$ hinabdrückt. Lässt man alsdann nachträglich das n noch weiter wachsen, so wird das *erste* Glied noch weiter sich verkleinern, und das *zweite* ungeändert bleiben. Somit folgt aus der vorstehenden Formel:

$$(16.)\qquad \lim_{n=\infty}\int_0^\pi f(\varphi)\,\Lambda_n(\varphi)\,d\varphi = 0,$$

oder, falls man für $f(\varphi)$ seine eigentliche Bedeutung (11.) substituirt:

$$(17.)\qquad \lim_{n=\infty}\int_0^\pi \big(F(\varphi)-F(0)\big)\,\Lambda_n(\varphi)\,d\varphi = 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(18.)\qquad \lim_{n=\infty}\int_0^\pi F(\varphi)\,\Lambda_n(\varphi)\,d\varphi = F(0)\cdot\lim_{n=\infty}\int_0^\pi \Lambda_n(\varphi)\,d\varphi.$$

Die gegebene Function $F(\varphi)$ kann möglicherweise im Puncte $\varphi = 0$ *zwei* Werthe haben: $F(-0)$ und $F(+0)$. In solchem Fall wird offenbar in der vorstehenden Formel unter $F(0)$ der Werth $F(+0)$ zu verstehen sein.

---

*) Nach unserer Voraussetzung (10.) ist $F(\varphi)$ im Intervall $\varphi = 0 \ldots . \pi$ *abtheilungsweise stetig*. Demgemäss muss sich in diesem Intervall von 0 aus eine kleine Strecke auftragen lassen, auf welcher $F(\varphi)$ geradezu *stetig* ist. Verkleinert man also das in den Schema Seite 40 angegebene α, oder mit anderen Worten, lässt man den variablen Punct α näher und näher an den Punct 0 heranrücken, so muss durch eine solche Procedur die Grösse abs $\big(F(\alpha) - F(0)\big)$ unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabgedrückt werden können.

Beachtet man dies, und beachtet man überdies die frühere Formel (6.), so erhält man schliesslich:

(19.) $$\lim_{n=\infty} \int_0^\pi F(\varphi)\, \Lambda_n(\varphi)\, d\varphi = \tfrac{1}{2} F(+0),$$

oder, mit Rücksicht auf die in (9.) eingeführte Bezeichnung:

(20.) $$\lim_{n=\infty} V_n = \tfrac{1}{2} F(+0).$$

Und bei analoger Behandlung des Integrales U_n wird man offenbar finden:

(21.) $$\lim_{n=\infty} U_n = \tfrac{1}{2} F(-0).$$

Somit folgt aus (9.):

(22.) $$\lim_{n=\infty} S_n = \tfrac{1}{2}\big(F(-0) + F(+0)\big);$$

und wir gelangen also zu folgendem Resultat.

Theorem. — *Rechnet man auf einem Kreise vom Radius Eins die Bogenlänge φ von einem festen Anfangspuncte aus, nach der einen Seite hin von 0 bis π, nach der anderen Seite von 0 bis $-\pi$, und denkt man sich längs dieser Kreislinie irgend eine Function $F(\varphi)$ ausgebreitet, welche auf dem ganzen Kreise* (d. i. für $\varphi = -\pi \ldots + \pi$) *abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist, so wird das Integral*

(A.) $$S_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\varphi) \left\{ 1 + 2 \sum_1^n \cos n\varphi \right\} d\varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} F(\varphi)\, \Lambda_n(\varphi)\, d\varphi$$

bei unendlich wachsendem n gegen eine bestimmte feste Grenze convergiren. Und zwar ist diese Grenze $= \frac{F(-0) + F(+0)}{2}$, d. i. gleich dem arithmetischen Mittel derjenigen beiden Werthe, welche die Function $F(\varphi)$ im Puncte $\varphi = 0$ besitzt.

Untersuchung des allgemeinen Integrals S_n (2.). — Die beiden Integrale S_n in (3.) und (2.), nämlich

(23.)
$$\text{das specielle} \qquad S_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \Lambda_n(\varphi) \cdot F(\varphi)\, d\varphi,$$
$$\text{und das allgemeine} \qquad S_n = \int_{-\pi}^{+\pi} \Lambda_n(\varphi - \varphi_1) \cdot F(\varphi)\, d\varphi$$

sind, schon äusserlich betrachtet, nur wenig von einander verschieden.

Um die Sache noch deutlicher hervortreten zu lassen, wollen wir für den Augenblick uns vorstellen, die Function $F(\varphi)$ repräsentire die Dichtigkeit einer auf der Kreislinie ausgebreiteten Massenbelegung. Alsdann repräsentirt offenbar $F(\varphi)\, d\varphi$ ein *Massenelement* dieser Belegung (nämlich diejenige Masse, welche auf dem Bogenelement $d\varphi$ vorhanden ist). Jene Integrale S_n (23.) repräsentiren also die Summe all' dieser Massenelemente, jedes noch multiplicirt mit dem zugehörigen Werth von $\Lambda_n(\varphi)$, resp. von $\Lambda_n(\varphi - \varphi_1)$. Es unterscheiden sich also die beiden S_n nur dadurch von einander, dass in dem *einen* jedes Massenelement multiplicirt ist mit der Function Λ_n, dieselbe bezogen gedacht auf den peripherischen Abstand φ des Elementes *vom Anfangspunct* ($\varphi = 0$); während im *anderen* jedes Massenelement mit demjenigen Werth der Function Λ_n sich multiplicirt findet, den dieselbe besitzt für den peripherischen Abstand $\varphi - \varphi_1$ des Elementes *vom festen Puncte* φ_1*).

Mit anderen Worten: Jedes der beiden Integrale S_n (23.) ist abhängig von einem gewissen festen Puncte; und der einzige Unterschied zwischen ihnen besteht darin, dass dieser feste Punct bei dem einen S_n die *Lage des Anfangspunctes* $\varphi = 0$, bei dem *anderen* hingegen die *Lage* φ_1 besitzt. Blicken wir also zurück auf den für das *erste* S_n erhaltenen Satz (A.), so erkennen wir sofort, dass für das *letztere* S_n folgender analoge Satz gelten muss:

Theorem. *Rechnet man die Bogenlänge auf einer Kreisperipherie vom Radius Eins zwischen den Grenzen* $-\pi$ *und* $+\pi$, *denkt man sich ferner längs dieser Peripherie eine Function* $F(\varphi)$ *ausgebreitet, welche daselbst abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist, und markirt man endlich auf der Peripherie irgend einen festen Punct* φ_1, *so wird das Integral*

$$\text{(B.)} \qquad S_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} F(\varphi)\left\{1 + 2\sum_1^n \cos n(\varphi - \varphi_1)\right\} d\varphi = \int_{-\pi}^{+\pi} F(\varphi)\,\Lambda_n(\varphi - \varphi_1)\, d\varphi$$

bei unendlich wachsendem n gegen eine bestimmte feste Grenze convergiren. Und zwar wird diese Grenze durch das arithmetische Mittel derjenigen Werthe dargestellt sein, welche die gegebene Function $F(\varphi)$ *in jenem festen Puncte* φ_1 *besitzt. Es wird also z. B.*

$$\lim_{n=\infty} S_n = \frac{F(\varphi_1 - 0) + F(\varphi_1 + 0)}{2} \quad \textit{sein, falls} \quad -\pi < \varphi_1 < \pi,$$

und

$$\lim_{n=\infty} S_n = \frac{F(\pi - 0) + F(-\pi + 0)}{2} \quad \textit{sein, falls} \quad \varphi_1 = \pi \ \textit{oder} = -\pi \ \textit{ist.}$$

Ist übrigens $F(\varphi)$ auf der Kreisperipherie überall *stetig*, so reduciren sich die beiden letzten Formeln auf die *eine* Formel

---

*) Denkt man sich auf der gegebenen Kreisperipherie (vom Radius Eins) irgend zwei Puncte α und β markirt, so kann man unter dem *peripherischen Abstand* dieser beiden Puncte nach Belieben entweder ihren *kürzesten* peripherischen Abstand Ω, oder auch den auf der *andern* Seite liegenden peripherischen Abstand: $(2\pi - \Omega)$, oder noch allgemeiner jede Grösse von der Form $(2N\pi \pm \Omega)$ verstehen, wo N eine willkürliche ganze Zahl vorstellt. In der That kann bei unseren obigen Betrachtungen das Wort: *peripherischer Abstand* in diesem *allgemeinsten Sinne* genommen werden. Denn die Function

$$\Lambda_n(\Omega) = \frac{1}{2\pi}\left[1 + 2\cos\Omega + 2\cos 2\Omega \cdots + 2\cos n\Omega\right], \text{ vergl. (4.)},$$

bleibt ungeändert, falls man in ihr Ω mit $(2N\pi \pm \Omega)$ vertauscht.

$$\lim_{n=\infty} S_n = F(\varphi_1), \quad \text{für } -\pi \leqq \varphi_1 \leqq \pi;$$

was übereinstimmt mit der zu prüfenden Formel (1.), Seite 39, d. i. mit derjenigen Formel, durch welche die Entwicklung von $F(\varphi_1)$ nach Kreisfunctionen dargestellt wird.

§ 5.

Fortsetzung.

Nachträglich können wir das Theorem (B.) bedeutend vereinfachen durch Ablösung von der Kreisperipherie, und demselben folgende Gestalt geben.

Einfachere Form des vorhergehenden Theorems. — *Ist die Function $F(\varphi)$ im Intervall $\varphi = -\pi \ldots\ldots + \pi$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton, und versteht man unter φ_1 eine gegebene Constante, so wird der Ausdruck*

$$\text{(C.)} \qquad \lim_{n=\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\varphi)\, \Lambda_n(\varphi - \varphi_1)\, d\varphi$$

$$= \frac{F(\pi - 0) + F(-\pi + 0)}{2}, \quad \textit{oder} \quad = \frac{F(\varphi_1 - 0) + F(\varphi_1 + 0)}{2}, \quad \textit{oder} \quad = \frac{F(\pi - 0) + F(-\pi + 0)}{2}$$

sein, je nachdem

$$\varphi_1 = -\pi, \qquad \textit{oder} \qquad -\pi < \varphi_1 < \pi, \qquad \textit{oder endlich} \quad \varphi_1 = \pi$$

ist. Man sieht also, dass der Ausdruck in jedem der beiden Endpuncte des Intervalls $-\pi \ldots\ldots + \pi$ dargestellt ist durch das arithmetische Mittel derjenigen Werthe, welche die gegebene Function $F(\varphi)$ in diesen beiden Endpuncten besitzt. — Dabei repräsentirt $\Lambda_n(\varphi - \varphi_1)$ die [in (4.), (5.) Seite 39 angegebene] *Function:*

$$\text{(D.)} \qquad \Lambda_n(\varphi - \varphi_1) = \frac{1}{2\pi}\left[1 + 2\sum_1^n \cos n(\varphi - \varphi_1)\right] = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(\varphi - \varphi_1)}{2\pi \cdot \sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1)};$$

also eine Function, die periodisch ist sowohl in Bezug auf φ, wie auch in Bezug auf φ_1. Und zwar ist in beiden Beziehungen die Periodenlänge $= 2\pi$.

Um diesen Satz weiter zu verallgemeinern, denken wir uns die (abgesehen von den Bedingungen der abtheilungsweisen Stetigkeit und abtheilungsweisen Monotonie) im Intervall $-\pi \ldots\ldots + \pi$ *willkürlich* gegebene Function $F(\varphi)$ nach beiden Seiten *periodisch fortgesetzt*, der Art, dass in jedem der unendlich vielen Intervalle:

(1.)


sich immer dieselben Werthe von Neuem wiederholen. Markirt man also z. B. zu beiden Seiten des Punctes $(-\pi)$ zwei Nachbarpuncte g, h, ferner zu beiden Seiten des Punctes $(+\pi)$ zwei Nachbarpuncte G, H, und zwar in solcher Weise, dass die Abstände der beiden ersteren von $(-\pi)$ und die Abstände der beiden letzteren von $(+\pi)$ alle *ein und denselben* unendlich kleinen Werth haben, so wird die Function F in g denselben Werth wie in G, ebenso in h denselben Werth wie in H besitzen; was angedeutet sein mag durch die Formeln: $F_g = F_G$ und $F_h = F_H$.

Zufolge des vorhergehenden Satzes ist nun der Werth des Ausdruckes (C.) in jedem der beiden Puncte $(-\pi)$ und $(+\pi)$ gleich $\frac{1}{2}(F_G + F_h)$, also, zufolge der soeben gemachten Bemerkungen, auch darstellbar durch $\frac{1}{2}(F_g + F_h)$, oder durch $\frac{1}{2}(F_G + F_H)$; was in vollem Einklang steht mit demjenigen Werthe $\frac{1}{2}\big(F(\varphi_1 - 0) + F(\varphi_1 + 0)\big)$, den jener Ausdruck (C.) besitzt für jedweden *zwischen* $(-\pi)$ und $(+\pi)$ gelegenen Punct φ_1. Wir sehen somit, dass bei der gegenwärtigen Sachlage (wo die Function F nach beiden Seiten periodisch fortgesetzt gedacht wird), der vorhergehende Satz sich reducirt auf die *eine* Formel:

$$(2.)\qquad \lim_{n=\infty} \int_{-\pi}^{+\pi} F(\varphi)\, \Lambda_n(\varphi - \varphi_1)\, d\varphi = \frac{F(\varphi_1 - 0) + F(\varphi_1 + 0)}{2}, \quad \text{für} \quad -\pi < \varphi_1 \leq +\pi.$$

Diese Formel, welche also gilt für alle Punkte des Intervalles $-\pi \ldots\ldots + \pi$ (einerlei ob sie innere oder End-Puncte desselben sind), können wir noch ein klein wenig anders schreiben.

Da nämlich die gegenwärtige Function $F(\varphi)$ periodisch, und die Länge ihrer Periode $= 2\pi$ ist, mithin Gleiches auch von dem Product $F(\varphi)\,\Lambda_n(\varphi - \varphi_1)$ gilt*), so wird offenbar das in (2.) stehende Integral ein und denselben Werth haben, einerlei ob man dasselbe von $-\pi$ bis $+\pi$, oder ob man es von irgend welcher *willkürlichen Grösse* a aus bis $(a + 2\pi)$ erstreckt. Somit kann also jene Formel (2.) auch so geschrieben werden:

$$(3.)\qquad \lim_{n=\infty} \int_{a}^{a+2\pi} F(\varphi)\, \Lambda_n(\varphi - \varphi_1)\, d\varphi = \frac{F(\varphi_1 - 0) + F(\varphi_1 + 0)}{2}, \quad \text{für} \quad -\pi < \varphi_1 < +\pi.$$

Endlich bemerkt man, dass diese Formel nicht nur gilt für die der Bedingung $-\pi \leq \varphi_1 \leq +\pi$ entsprechenden Puncte φ_1, sondern auch für *jeden beliebigen anderen* Punct φ_2. Wo nämlich φ_2 auch liegen mag, stets wird sich ein der Bedingung $-\pi \leq \varphi_1 \leq +\pi$ entsprechendes φ_1 angeben lassen, welches von φ_2 nur durch ein ganzes Vielfaches von 2π sich unterscheidet. Und die Formel (3.) muss daher, weil sie für dieses φ_1 gilt, auch gelten für jenes φ_2; denn die Functionen $\Lambda_n(\varphi - \varphi_1)$ und $F(\varphi_1)$ sind in Bezug auf φ_1

*) Vergl. die Formel (D.)

periodisch, bleiben also bei der Vertauschung von φ_1 mit φ_2 umgeändert. Somit ergiebt sich folgendes

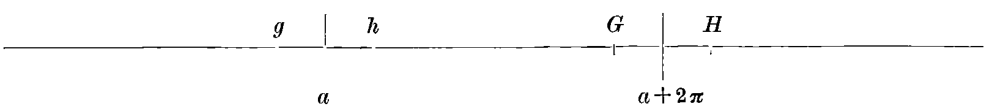
Theorem. — *Bezeichnet $F(\varphi)$ eine periodische Function von der Periode 2π, und nimmt man an, dass diese Function abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton sei, so wird die Formel:*

$$\text{(E.)} \qquad \lim_{n=\infty} \int_a^{a+2\pi} F(\varphi)\, \Lambda_n(\varphi - \varphi_1)\, d\varphi = \frac{F(\varphi_1 - 0) + F(\varphi_1 + 0)}{2}$$

ganz allgemein gelten, welche Werthe man den Constanten a und φ_1 auch zuertheilen mag. — Dabei hat $\Lambda_n(\varphi - \varphi_1)$ die in (D.) *genannte Bedeutung.*

Markiren wir also z. B. zu beiden Seiten des Punctes a zwei Nachbarpuncte g, h, ebenso zu beiden Seiten des Punctes $(a + 2\pi)$ zwei Nachbarpuncte G, H; so werden die Werthe des Ausdruckes (E.) in den beiden

(4.)



Puncten a und $(a + 2\pi)$ respective durch $\frac{1}{2}(F_g + F_h)$ und $\frac{1}{2}(F_G + F_H)$ dargestellt sein, und werden daher, weil $F_g = F_G$ und $F_h = F_H$ ist, identisch sein mit $\frac{1}{2}(F_G + F_h)$*). Beschränken wir uns also auf diejenigen Puncte φ_1, *welche dem Intervall $a \ldots . (a + 2\pi)$ angehören*, so können wir den vorhergehenden Satz auch so aussprechen:

Theorem. — *Bezeichnet a eine beliebig gegebene Constante, und $F(\varphi)$ irgend eine Function, die im Intervall $a \ldots . (a + 2\pi)$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist**), so wird der Ausdruck*

$$\text{(F.)} \qquad \lim_{n=\infty} \int_a^{a+2\pi} F(\varphi)\, \Lambda_n(\varphi - \varphi_1)\, d\varphi$$

$$= \frac{F(a + 2\pi - 0) + F(a + 0)}{2}, \text{ oder } = \frac{F(\varphi_1 - 0) + F(\varphi_1 + 0)}{2}, \text{ oder } = \frac{F(a + 2\pi - 0) + F(a + 0)}{2}$$

sein, je nachdem

$$\varphi_1 = a, \qquad \text{oder} \quad a < \varphi_1 < (a + 2\pi), \qquad \text{oder endlich } \varphi_1 = (a + 2\pi)$$

ist. Man sieht also, dass der Ausdruck in jedem der beiden Endpuncte des betrachteten Intervalls $a \ldots .. (a + 2\pi)$ gleich den arithmetischen Mittel der-

*) Dabei ist stillschweigend vorausgesetzt worden, dass die Abstände der beiden Puncte g, h von a, und die Abstände der beiden Puncte G, H von $(a + 2\pi)$ alle *ein und denselben* unendlich kleinen Werth besitzen sollen.

**) Die in dem vorhergehenden Satz vorausgesetzte Periodicität der Function $F(\varphi)$ kommt offenbar hier, wo wir uns auf das Intervall $a \ldots . (a + 2\pi)$ beschränken, nicht weiter in Betracht.

jenigen Werthe ist, welche die gegebene Function $F(\varphi)$ in diesen beiden Endpuncten besitzt. — Dabei hat $\Lambda_n(\varphi - \varphi_1)$ die in (D.) *angegebene Bedeutung.*

Man kann dieses Theorem (F.) in etwas anderer Form darstellen. Die *linke Seite* der Formel (F.) lässt sich nämlich, falls man für $\Lambda_n(\varphi - \varphi_1)$ seinen Werth (D.) Seite 45 substituirt, auch so schreiben:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} F(\varphi) \left\{1 + 2\sum_1^n (\cos n\varphi \cdot \cos n\varphi_1 + \sin n\varphi \cdot \sin n\varphi_1)\right\} d\varphi,$$

also, falls man die hier in den einzelnen Gliedern auftretenden Integrale mit A, B bezeichnet:

$$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} F(\varphi)\cos n\varphi \cdot d\varphi, \qquad B_n = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} F(\varphi)\sin n\varphi \cdot d\varphi,$$

auch so schreiben:

$$\lim_{n=\infty}\left[A_0 + 2\sum_1^n (A_n \cos n\varphi_1 + B_n \sin n\varphi_1)\right],$$

oder auch so:

$$A_0 + 2\sum_1^\infty (A_n \cos n\varphi_1 + B_n \sin n\varphi_1).$$

Wir gelangen daher zu folgendem Resultat:

Theorem. — *Bezeichnet a eine beliebig gegebene Constante, und $F(\varphi)$ irgend eine Function, die im Intervall $a \ldots (a + 2\pi)$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist, so wird die mit den constanten Coefficienten*

(G.) $$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} F(\varphi)\cos n\varphi \cdot d\varphi, \qquad B_n = \frac{1}{2\pi}\int_a^{a+2\pi} F(\varphi)\sin n\varphi \cdot d\varphi$$

behaftete unendliche Reihe

(H.) $$A_0 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} (A_n \cos n\varphi_1 + B_n \sin n\varphi_1)$$

$$= \frac{F(a+2\pi-0)+F(a+0)}{2}, \quad \text{oder} = \frac{F(\varphi_1-0)+F(\varphi_1+0)}{2}, \quad \text{oder} = \frac{F(a+2\pi-0)+F(a+0)}{2}$$

sein, je nachdem

$$\varphi_1 = a, \qquad \text{oder} \qquad a < \varphi_1 < (a+2\pi), \qquad \text{oder} \qquad \varphi_1 = (a+2\pi)$$

ist. Es hat also die Reihe in den beiden Endpuncten des Intervalls ein und denselben Werth; und zwar ist sie daselbst gleich dem arithmetischen Mittel derjenigen Werthe, welche die gegebene Function $F(\varphi)$ in den beiden Endpuncten besitzt.

Ist die Function $F(\varphi)$ in dem betrachteten Intervall nicht nur abtheilungsweise stetig, sondern geradezu stetig, so nimmt die Formel (H.) *die Gestalt an:*

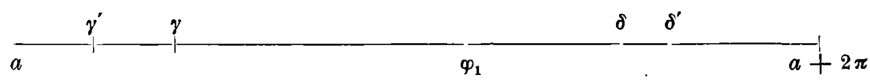
(J.) $$F(\varphi_1) = A_0 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n \cos n\varphi_1 + B_n \sin n\varphi_1), \quad \text{falls} \quad a < \varphi_1 < (a + 2\pi).$$

Man sieht also, dass eine im Intervall $a \ldots (a + 2\pi)$ *stetige und abtheilungsweis' monotone Function* $F(\varphi_1)$ *für alle der Bedingung* $a < \varphi_1 < (a + 2\pi)$ *entsprechende Argumente* φ_1 *darstellbar ist durch eine nach den Cosinus und Sinus der Vielfachen des Argumentes fortschreitende Reihe.*

Beschränkt man sich auf ein Intervall, welches nicht $= 2\pi$, sondern $< 2\pi$, so kann eine solche Entwicklung bei ein und derselben Function in *sehr verschiedener* Art, jedesmal mit *andern* Coefficienten bewerkstelligt werden.

Um dies näher darzulegen bringen wir die Formel (H.) auf eine Function $F(\varphi)$ in Anwendung, welche auf irgend einer Strecke $\gamma\delta$ des gegebenen Intervall $a \ldots (a + 2\pi)$ identisch mit φ^3, sonst aber überall *Null* sein soll.

(1.)



Alsdann ergiebt sich offenbar aus (J.):

(2.) $$\varphi_1^3 = A_0 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n \cos n\varphi_1 + B_n \sin n\varphi_1), \quad \text{falls} \quad \gamma < \varphi_1 < \delta;$$

und gleichzeitig ergeben sich alsdann aus (G.) für A, B die Werthe:

(3.) $$A_n = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma^\delta \varphi^3 \cos n\varphi \cdot d\varphi, \qquad B_n = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma^\delta \varphi^3 \sin n\varphi \cdot d\varphi,$$

also Werthe, die wesentlich abhängen von der Lage der beiden Puncte γ und δ. Erweitern wir nun das Intervall $\gamma\delta$ nach beiden Seiten hin, und bezeichnen wir dies erweiterte Intervall mit $\gamma'\delta'$, so erhalten wir an Stelle von (2.) eine *neue* für das $\gamma' < \varphi_1 < \delta'$, *um so mehr also auch für* $\gamma < \varphi_1 < \delta$ *gültige* Entwicklung, deren Coefficienten von den in (3.) angegebenen sich dadurch unterscheiden, dass die Integrationsgrenzen nicht durch γ, δ, sondern durch γ', δ' dargestellt sind. Wir sehen somit, dass wir für *ein und dieselbe* Function (z. B. die Function φ^3) und für *ein und dasselbe* Intervall $\gamma \ldots \delta$ unendlich viele von einander verschiedene Entwicklungen erhalten können, falls nur die Länge dieses Intervalles $< 2\pi$ ist.

Beiläufige Bemerkung. — Es sei $a < \gamma < (a + 2\pi)$, und es werde das Theorem (H.) angewendet auf eine Function $F(\varphi)$, welche längs $a \ldots \gamma$ gleich *Eins*, und längs $\gamma \ldots (a + 2\pi)$ gleich *Null* ist. Alsdann ergiebt sich:

(1.) $$A_0 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n \cos n\varphi_1 + B_n \sin n\varphi_1) = 1, \quad \text{oder} \quad = \tfrac{1}{2}, \quad \text{oder} \quad = 0,$$
$$\text{je nachdem} \quad a < \varphi_1 < \gamma, \quad \text{oder} \quad \varphi_1 = \gamma, \quad \text{oder} \quad \gamma < \varphi_1 < (a + 2\pi).$$

Für den *mittleren* Fall, d. i. für $\varphi_1 = \gamma$ erhält man also die Formel:

$$(2.)\qquad A_0+2\sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n\cos n\gamma+B_n\sin n\gamma)=\tfrac{1}{2},\quad \text{wobei}\quad a<\gamma<(a+2\pi)\,.$$

Gleichzeitig ergeben sich für die Coefficienten A, B aus (G.) die Werthe:

$$(3.)\quad A_n=\frac{1}{2\pi}\int_a^\gamma \cos n\varphi\cdot d\varphi=\frac{\sin n\gamma-\sin na}{2\pi\cdot n},\qquad B_n=\frac{1}{2\pi}\int_a^\gamma \sin n\varphi\, d\varphi=(-1)\,\frac{\cos n\gamma-\cos na}{2\pi\cdot n},$$

also z. B. $A_0=\frac{\gamma-a}{2\pi}\cdot$ Durch Substitution dieser Werthe (3.) in (2.) folgt:

$$(4.)\qquad (\gamma-a)+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin n(\gamma-a)}{n}=\pi,\quad \text{wo}\quad a<\gamma<(a+2\pi),$$

also, falls man $(\gamma-a-\pi)=\omega$ setzt:

$$(5.)\qquad \omega=(-2)\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin n(\pi+\omega)}{n},\quad \text{wo jetzt}\quad -\pi<\omega<\pi,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(6.)\qquad \frac{\omega}{2}=\frac{\sin\omega}{1}-\frac{\sin 2\omega}{2}+\frac{\sin 3\omega}{3}-\frac{\sin 4\omega}{4}+-\cdots,\quad \text{wo}\quad -\pi<\omega<\pi;$$

und dies ist eine bekannte Formel.

Für den Specialfall $a=-\pi$ nimmt das vorhergehende allgemeine Theorem (H.) folgende Gestalt an:

Theorem. — *Ist eine Function $F(\varphi)$ im Intervall $-\pi\ldots\ldots\pi$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton, so wird die mit den constanten Coefficienten*

$$(\mathrm{K.})\qquad A_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(\varphi)\cos n\varphi\cdot d\varphi,\qquad B_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}F(\varphi)\sin n\varphi\cdot d\varphi$$

behaftete unendliche Reihe

$$(\mathrm{L.})\qquad A_0+2\sum_{n=1}^{n=\infty}(A_n\cos n\varphi_1+B_n\sin n\varphi_1)$$

$$=\frac{F(\pi-0)+F(-\pi+0)}{2},\ \textit{oder}\ =\frac{F(\varphi_1-0)+F(\varphi_1+0)}{2},\ \textit{oder}\ =\frac{F(\pi-0)+F(-\pi+0)}{2}$$

sein, je nachdem

$$\varphi_1=-\pi,\qquad \textit{oder}\qquad -\pi<\varphi_1<\pi,\qquad \textit{oder}\qquad \varphi_1=\pi\ \textit{ist.}$$

Dies ist die eigentliche *Dirichlet'sche Form* des Theorems. Es erscheint angemessen, dieses Theorem noch auf einige speciellere Fälle anzuwenden. — Ist zunächst $F(\varphi)$ eine *gerade* Function, so gehen die Formeln (K.) über in:

$$A_n=\frac{2}{2\pi}\int_0^\pi F(\varphi)\cos n\varphi\cdot d\varphi,\qquad B_n=0.$$

Und gleichzeitig bemerkt man, dass die Reihe (L.) bei Zugrundelegung einer solchen *geraden* Function $F(\varphi)$, (um nur einige Fälle aufzuführen),

$$= F(+0)\ ^{*)}, \quad \text{oder} \quad = \frac{F(\varphi_1 - 0) + F(\varphi_1 + 0)}{2}, \quad \text{oder} \quad = F(\pi - 0)\ ^{**)},$$

wird, je nachdem

$$\varphi_1 = 0, \quad \text{oder} \quad 0 < \varphi_1 < \pi, \quad \text{oder} \quad \varphi_1 = \pi \quad \text{ist.}$$

Beschränkt man sich nun schliesslich auf die *eine* Hälfte der Function $F(\varphi)$, nämlich auf den dem Intervall $\varphi = 0 \ldots \pi$ entsprechenden Theil derselben, so gelangt man zu folgenden

Theorem. — *Ist eine gegebene Function $F(\varphi)$ im Intervall $\varphi = 0 \ldots \pi$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton, so wird die mit den constanten Coefficienten*

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi F(\varphi)\cos n\varphi \cdot d\varphi \tag{M.}$$

behaftete unendliche Reihe:

$$A_0 + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos n\varphi_1 \tag{N.}$$

$$= F(+0), \quad \textit{oder} \quad = \frac{F(\varphi_1 - 0) + F(\varphi_1 + 0)}{2}, \quad \textit{oder} \quad = F(\pi - 0)$$

sein, je nachdem

$$\varphi_1 = 0, \quad \textit{oder} \quad 0 < \varphi_1 < \pi, \quad \textit{oder} \quad \varphi_1 = \pi$$

ist. Die Reihe ist also in den beiden Endpuncten des hier betrachteten Intervalls $0 \ldots\ldots \pi$ durch diejenigen Werthe dargestellt, mit welchem die Function $F(\varphi)$ in jenen Endpuncten eintreffen wird, sobald man, von der Mitte des Intervalls aus, dem einen resp. dem anderen Endpuncte sich nähert.

Bringt man andererseits den Satz (L.) in Anwendung auf eine *ungerade* Function $F(\varphi)$, so gehen die Formeln (K.) über in:

$$A_n = 0, \qquad B_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi F(\varphi)\sin n\varphi \cdot d\varphi.$$

Und gleichzeitig sieht man, dass die Reihe (L.), bei Zugrundelegung einer solchen *ungeraden* Function $F(\varphi)$,

$$= 0, \quad \text{oder} \quad = \frac{F(\varphi_1 - 0) + F(\varphi_1 + 0)}{2}, \quad \text{oder} \quad = 0$$

wird, je nachdem

$$\varphi_1 = 0, \quad \text{oder} \quad 0 < \varphi_1 < \pi, \quad \text{oder} \quad \varphi_1 = \pi \quad \text{ist.}$$

Wir gelangen somit, indem wir uns wieder auf die dem Intervall $\varphi = 0 \ldots \pi$ entsprechende *Hälfte* der Function beschränken, zu folgendem

---

*) Denn der aus (L.) für $\varphi_1 = 0$ zunächst sich ergebende Werth $\frac{F(-0) + F(+0)}{2}$ reducirt sich offenbar im gegenwärtigen Fall, wo $F(\varphi)$ eine *gerade* Function ist, auf $F(+0)$.

**) Denn der aus (L.) für $\varphi_1 = \pi$ zunächst sich ergebende Werth $\frac{F(\pi - 0) + F(-\pi + 0)}{2}$ reducirt sich, weil $F(\varphi)$ *gerade* ist, *auf* $F(\pi - 0)$.

Theorem. — *Ist eine gegebene Function* $F(\varphi)$ *im Intervall* $\varphi = 0 \ldots\ldots \pi$ *abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton, so wird die mit den constanten Coefficienten*

$$\text{(O.)} \qquad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(\varphi) \sin n\varphi \cdot d\varphi$$

$$\text{(P.)} \qquad \textit{behaftete unendliche Reihe} \qquad 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \sin n\varphi_1$$

$$= 0\,, \qquad \textit{oder} \qquad = \frac{F(\varphi_1 - 0) + F(\varphi_1 + 0)}{2}\,, \qquad \textit{oder} \qquad = 0$$

sein, je nachdem

$$\varphi_1 = 0\,, \qquad \textit{oder} \qquad 0 < \varphi_1 < \pi\,, \qquad \textit{oder} \qquad \varphi_1 = \pi$$

ist. Die Reihe hat also in jedem der beiden Endpuncte des hier betrachteten Intervalls $0 \ldots\ldots \pi$ *den Werth Null.*

§ 6.

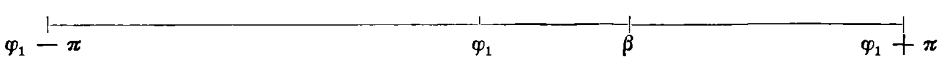
Anhang.

Ist φ_1 eine gegebene Constante, und $F(\varphi)$ eine Function, die im Intervall $\varphi = (\varphi_1 - \pi) \ldots\ldots (\varphi_1 + \pi)$ *abtheilungsweise monoton* und *abtheilungsweise stetig* ist, so kann man auf diese Function und auf dieses Intervall das Theorem (F.) Seite 47 anwenden und erhält alsdann:

$$\text{(1.)} \qquad \lim_{n=\infty} \int_{\varphi_1 - \pi}^{\varphi_1 + \pi} F(\varphi)\, \Lambda_n(\varphi - \varphi_1)\, d\varphi = \frac{F(\varphi_1 - 0) + F(\varphi_1 + 0)}{2}\,.$$

Um die Function $F(\varphi)$, unbeschadet der ihr auferlegten Bedingungen, zu *specialisiren,* bezeichnen wir irgend einen zwischen φ_1 und $(\varphi_1 + \pi)$ gelegenen

(2.)



Punct mit β, und nehmen an, die Function $F(\varphi)$ sei im Intervall $\varphi_1 \ldots\ldots \beta$ *monoton abnehmend* und *abtheilungsweise stetig,* sonst aber überall gleich *Null.* Alsdann geht die Formel (1.) über in:

$$\text{(3.)} \qquad \lim_{n=\infty} 2 \int_{\varphi_1}^{\beta} F(\varphi)\, \Lambda_n(\varphi - \varphi_1)\, d\varphi = F(\varphi_1 + 0)\,.$$

Und diese Formel wird also gelten für irgend zwei der Bedingung $\varphi_1 < \beta < (\varphi_1 + \pi)$ entsprechende Constanten φ_1, β, und für jedwede Function $F(\varphi)$, die im Intervall $\varphi_1 \ldots\ldots \beta$ *monoton abnehmend* und *abtheilungsweise stetig* ist. Entspricht aber $F(\varphi)$ diesen Anforderungen, so werden offenbar die Producte

$$f(\varphi) = [M + F(\varphi)]\, \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1)}{\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1)} \qquad \text{und} \qquad g(\varphi) = M\, \frac{\sin \frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1)}{\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_1)}\,,$$

in denen M den absolut grössten Werth von $F(\varphi)$ vorstellen soll, denselben ebenfalls entsprechen*). Wendet man aber jene Formel (3.) auf diese Producte $f(\varphi)$ und $g(\varphi)$ an, und subtrahirt die so entstehenden beiden Gleichungen, so ergiebt sich:

$$\text{(4.)} \qquad \lim_{n=\infty} 2\int_{\varphi_1}^{\beta} F(\varphi)\,\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)}{\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)}\,\Lambda_n(\varphi-\varphi_1)\,d\varphi = F(\varphi_1+0)\cdot W,$$

wo W den Werth des Factors $\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)}{\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)}$ für $\varphi=\varphi_1+0$ vorstellt, mithin $=1$ ist. Beachtet man dies, und substituirt man zugleich für $\Lambda_n(\varphi-\varphi_1)$ seine eigentliche Bedeutung (D.) Seite 45, so erhält man:

$$\text{(6.)} \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi}\int_{\varphi_1}^{\beta} F(\varphi)\,\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(\varphi-\varphi_1)}{\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)}\,d\varphi = F(\varphi_1+0);$$

und gelangt daher, falls man $n+\frac{1}{2}=q$ setzt, zu folgendem Resultat.

Ist $\varphi_1<\beta<(\varphi_1+\pi)$, so wird für jede Function $F(\varphi)$, die im Intervall $\varphi_1\ldots\beta$ *monoton abnimmt*, und *abtheilungsweise stetig* ist, die Formel gelten:

$$\text{(7.)} \qquad \lim_{q=\infty} \frac{2}{\pi}\int_{\varphi_1}^{\beta} F(\varphi)\,\frac{\sin q(\varphi-\varphi_1)}{\varphi-\varphi_1}\,d\varphi = F(\varphi_1+0).$$

Man braucht diese Formel aber nur mit (-1) zu multipliciren, um zu erkennen, dass sie nicht nur für $F(\varphi)$, sondern auch für die Function $(-1)\,F(\varphi)$ gültig ist, oder, mit anderen Worten, um zu erkennen, dass sie nicht nur gültig ist für eine *monoton abnehmende*, sondern auch für eine *monoton wachsende* Function. Somit können wir also folgenden (für unsere späteren Untersuchungen wichtigen) Satz notiren:

Satz. — *Bezeichnet $F(\varphi)$ eine Function, die im Intervall $\varphi=\varphi_1\ldots\beta$ monoton und abtheilungsweise stetig ist, so gilt die Formel:*

$$\text{(8.)} \qquad \lim_{q=\infty} \frac{2}{\pi}\int_{\varphi_1}^{\beta} F(\varphi)\,\frac{\sin q(\varphi-\varphi_1)}{\varphi-\varphi_1}\,d\varphi = F(\varphi_1+0), \quad \text{für} \quad \varphi_1<\beta<(\varphi_1+\pi).$$

In ganz analoger Weise wird man offenbar zu folgendem Parallelsatz gelangen:

Satz. — *Bezeichnet $F(\varphi)$ eine Function, die im Intervall $\varphi=\alpha\ldots\varphi_1$ monoton und abtheilungsweise stetig ist, so wird:*

$$\text{(9.)} \qquad \lim_{q=\infty} \frac{2}{\pi}\int_{\alpha}^{\varphi_1} F(\varphi)\,\frac{\sin q(\varphi-\varphi_1)}{\varphi-\varphi_1}\,d\varphi = F(\varphi_1-0), \quad \text{für} \quad (\varphi_1-\pi)<\alpha<\varphi_1.$$

---

*) Nach Seite 36 (3.) ist nämlich die Function $\frac{\sin x}{x}$ *monoton abnehmend* und *positiv* für das Intervall $x=0\ldots\frac{\pi}{2}$. Folglich gilt Gleiches von $\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)}{\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)}$ für das Intervall $\varphi=\varphi_1\ldots(\varphi_1+\pi)$, und um so mehr für das Intervall $\varphi=\varphi_1\ldots\beta$. Demgemäss sind also die Functionen $[M+F(\varphi)]$ und $\frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)}{\frac{1}{2}(\varphi-\varphi_1)}$ im Intervall $\varphi=\varphi_1\ldots\beta$ *monoton abnehmend*, und *positiv*. Hieraus aber folgt, dass ihr Product $f(\varphi)$ in jenem Intervall ebenfalls *monoton abnimmt*. Vgl. den Satz in der Note Seite 56.

Drittes Capitel.

Die Fourier'sche und Hamilton'sche Integraldarstellung.

Ob eine Function wie z. B. e^x, welche für $x = \infty$ unendlich gross wird, im Intervall $x = 0 \ldots \infty$ *stetig* zu nennen sei, darüber dürften die Ansichten getheilt sein. Um derartige Unsicherheiten zu beseitigen, werde ich zunächst eine (wie mir scheint) sehr einfache und zweckmässige Definition voranschicken. Sodann werde ich übergehen zu dem eigentlichen Gegenstande dieses Capitels, und zwar nicht nur zu den *Fourier*'schen, sondern auch zu den allgemeinern *Hamilton*'schen Integralen.

§ 1.

Definition für ein unendliches Intervall.

Von einer Function $f(x)$ soll gesagt werden, dass sie für das unendliche Intervall $\gamma \ldots \infty$ (wo γ eine gegebene endliche Constante vorstellt) *eine bestimmte Eigenschaft A besitze, sobald ihr diese Eigenschaft A anhaftet für jedweden endlichen Theil jenes Intervalls. Und dieselbe Ausdrucksweise soll selbstverständlich auch dann angewendet werden, wenn das gegebene unendliche Intervall nicht die Form $\gamma \ldots + \infty$, sondern etwa die Form $-\infty \ldots \gamma$, oder auch die Form $-\infty \ldots + \infty$ besitzt.*

Demgemäss wird z. B. die Function e^x für das Intervall $\gamma \ldots \infty$ nicht nur *monoton*, sondern auch *stetig* zu nennen sein; trotzdem, dass sie für $x = \infty$ ins Unendliche ansteigt*).

Soll ferner eine Function $f(x)$ im Intervall $\gamma \ldots \infty$ *abtheilungsweise monoton* sein, so muss sie, wie aus der gegebenen Definition folgt, diese Eigenschaft besitzen für jedweden *endlichen* Theil jenes Intervalls. Demgemäss wird also z. B. die Function $\sin x$ für das Intervall $\gamma \ldots \infty$ *abtheilungsweise monoton* zu nennen sein; trotzdem, dass die Anzahl ihrer monotonen Strecken für dieses Intervall *nicht mehr* eine endliche ist.

Und in analoger Weise folgt aus unserer Definition, dass eine Function im Intervall $\gamma \ldots \infty$ *abtheilungsweise stetig* sein kann, ohne dass deswegen

*) Wird also von einer Function $f(x)$ gesagt, sie sei im Intervall $\gamma \ldots \infty$ *stetig*, so bedarf es noch eines besonderen Zusatzes, um zu wissen, ob sie *endlich* bleibt für $x = \infty$.

die Anzahl ihrer stetigen Strecken für dieses Intervall eine endliche zu sein brauchte. In der That wird z. B. jene schon früher erwähnte Function $f(x)$, welche in denjenigen Punkten, in denen $\sin x$ positiv oder Null ist, $= x^2$, andererseits in denjenigen Puncten, in denen $\sin x$ negativ ist, $= x^3$ sein sollte, im Intervall $\gamma \ldots . \infty$ *abtheilungsweise stetig* zu nennen sein; trotzdem, dass die Anzahl ihrer stetigen Strecken für dieses Intervall nicht mehr eine endliche ist*).

Analoges würde zu bemerken sein bei *abtheilungsweise constanten* Functionen, ferner bei *abtheilungsweise periodischen* Functionen, u. s. f.

§ 2.

Einige Beispiele und Bemerkungen zum Du Bois-Reymond'schen Satz.

Beispiel. — Ist die Function $F(x)$ im Intervall $\gamma \ldots . \delta$ *monoton* und *abtheilungsweise stetig*, und bezeichnet q eine gegebene *Constante*, so ist nach dem Du Bois'schen Satz (Seite 33):

$$(1.) \qquad \int_\gamma^\delta F(x) \sin qx \cdot dx = F(\gamma) \int_\gamma^\xi \sin qx \cdot dx + F(\delta) \int_\xi^\delta \sin qx \cdot dx, \quad \text{wo} \quad \gamma \leqq \xi \leqq \delta;$$

oder, was dasselbe:

$$(2.) \qquad \int_\gamma^\delta F(x) \sin qx \cdot dx = F(\gamma) \frac{\cos q\gamma - \cos q\xi}{q} + F(\delta) \frac{\cos q\xi - \cos q\delta}{q}.$$

Hieraus folgt, falls man den absolut grössten Werth von $F(x)$ im Intervall $\gamma \ldots . \delta$ mit M bezeichnet:

$$(\text{II}\,\alpha.) \qquad \text{abs} \int_\gamma^\delta F(x) \sin qx \cdot dx \leqq \text{abs} \frac{4M}{q}. \quad {}^{**})$$

In analoger Weise wird man offenbar, falls x_1 eine beliebig gegebene *Constante* vorstellt, zu folgender etwas allgemeinern Formel gelangen:

$$(\text{II}\,\beta.) \qquad \text{abs} \int_\gamma^\delta F(x) \sin q(x - x_1)\, dx \leqq \text{abs} \frac{4M}{q}.$$

Diese Formeln (II α., β.) *werden also gelten, falls nur die Function* $F(x)$ *im Intervall* $\gamma \ldots . \delta$ *monoton und abtheilungsweise stetig ist, vorausgesetzt, dass man unter* M *ihren absolut grössten Werth in jenem Intervall versteht.*

---

*) Wird also von einer Function $f(x)$ gesagt, sie sei im Intervall $\gamma \ldots . \infty$ *abtheilungsweise stetig* oder *abtheilungsweise monoton*, so bedarf es noch eines besonderen Zusatzes, um zu erfahren, ob die Anzahl ihrer stetigen resp. ihrer monotonen Strecken für jenes Intervall eine *endliche* sei.

**) Das Zeichen abs ist *rechter Hand* zuzufügen, weil (wenn auch M seiner Definition nach positiv ist), doch die Constante q keiner Beschränkung unterworfen wurde, also bald positiv bald negativ sein kann.

Hieraus folgt beiläufig, dass jene in (IIα., β.) angegebenen Integrale bei unendlich wachsendem q gegen Null convergiren.

Bemerkung. — Die Constanten x_1, γ, δ mögen der Bedingung entsprechen: $x_1 < \gamma < \delta$, und die Variable x mag in ihrer Bewegung auf das Intervall $\gamma \ldots . \delta$ beschränkt sein; also:

(3.) $$x_1 < \gamma \leqq x \leqq \delta .$$

Nimmt man nun an, dass die Function $F(x)$ im Intervall $\gamma \ldots . \delta$ *monoton abnehme* und *abtheilungsweise stetig* sei, so gilt Gleiches offenbar auch von den Functionen:

(4.) $$\frac{M}{x - x_1} \quad \text{und} \quad \frac{M + F(x)}{x - x_1}, \text{ *)}$$

vorausgesetzt, dass man unter M wiederum den absolut grössten Werth von $F(x)$ im Intervalle $\gamma \ldots . \delta$ versteht. Bringt man aber die Formel (IIβ.) auf diese *neuen* Functionen (4.) in Anwendung, und beachtet man dabei, dass deren absolut grösste Werthe im Intervall $\gamma \ldots . \delta$ dargestellt sind durch

(5.) $$\frac{M}{\gamma - x_1} \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta (M + M)}{\gamma - x_1}, \text{ [vgl. (3.)]},$$

wo ϑ ein positiver ächter Bruch ist, so erhält man sofort:

(6.) $$\text{abs} \int_\gamma^\delta \frac{M}{x - x_1} \sin q(x - x_1) \cdot dx \leqq \text{abs} \frac{4M}{q(\gamma - x_1)},$$

(7.) $$\text{abs} \int_\gamma^\delta \frac{M + F(x)}{x - x_1} \sin q(x - x_1) \cdot dx \leqq \text{abs} \frac{8M}{q(\gamma - x_1)}.$$

Hieraus aber ergiebt sich weiter, weil abs $(U - V) \leqq$ abs $U +$ abs V ist, die Formel:

(8.) $$\text{abs} \int_\gamma^\delta \frac{F(x)}{x - x_1} \sin q(x - x_1) \cdot dx \leqq \text{abs} \frac{12M}{q(\gamma - x_1)}.$$

Setzt man $(-1)\,F(x) = \Phi(x)$, so kann man diese Formel (8.) auch so schreiben:

(9.) $$\text{abs} \int_\gamma^\delta \frac{\Phi(x)}{x - x_1} \sin q(x - x_1) \cdot dx \leqq \text{abs} \frac{12M}{q(\gamma - x_1)}.$$

---

*) Von der Function $\dfrac{F(x)}{x - x_1}$ würde solches im Allgemeinen *nicht* gelten, sondern nur dann, wenn man zu den schon gemachten Voraussetzungen noch die hinzufügen wollte, dass $F(x)$ im Intervall $\gamma \ldots . \delta$ *überall positiv* sei. Denn es gilt, wie leicht zu übersehen, folgender Satz: *Sind zwei Functionen $f(x)$ und $\varphi(x)$ in dem Intervall $\gamma \ldots . \delta$ monoton abnehmend, und sind ausserdem diese Functionen daselbst überall positiv, so wird das Product $f(x)\,\varphi(x)$ in jenem Intervall ebenfalls monoton abnehmen.* Für die Gültigkeit dieses Satzes ist aber die Bedingung, dass die beiden Functionen *positiv* seien, durchaus nothwendig. Denn es sind z. B. die Functionen $(-x^3)$ und $(-x^7)$ monoton abnehmend für das ganze Intervall $x = -\infty \cdots\cdot +\infty$; und trotzdem ist ihr Product x^{10} nur auf der Strecke $-\infty \cdots\cdot 0$ im Abnehmen, hingegen längs der Strecke $0 \cdots\cdot +\infty$ im Zunehmen begriffen.

Die ursprüngliche Function $F(x)$ war eine von γ bis δ *monoton abnehmende*; folglich ist die neue Function $\Phi(x)$ eine von γ bis δ *monoton wachsende*; während andererseits M nach Belieben als der absolut grösste Werth von $F(x)$, oder als derjenige von $\Phi(x)$ bezeichnet werden kann. Wir sehen somit aus (8.) und (9.), dass *ein und dieselbe* Formel stattfindet, einerlei ob die betrachtete Function *monoton wächst* oder *monoton abnimmt*. Und wir können daher, weil wir Functionen, die eine dieser beiden Eigenschaften haben, kurzweg *monoton* genannt haben, folgenden Satz aussprechen: *Sind x_1, γ, δ, q gegebene Constanten, und bezeichnet $F(x)$ eine Function, die im Intervall $\gamma \ldots\ldots \delta$ monoton und abtheilungsweise stetig ist, so gilt die Formel:*

$$(\mathrm{II}\gamma.)\qquad \operatorname{abs}\int_\gamma^\delta F(x)\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx \leqq \operatorname{abs}\frac{12M}{q(\gamma-x_1)},\quad \textit{falls } x_1<\gamma<\delta \textit{ ist},$$

und falls M den absolut grössten Werth von $F(x)$ im Intervall $\gamma \ldots\ldots \delta$ bezeichnet. Beiläufig sehen wir, dass das vorstehende Integral bei wachsendem q gegen 0 convergirt. Also: *Ist irgend eine Function $F(x)$ im Intervall $\gamma \ldots\ldots \delta$ monoton und abtheilungsweise stetig, so wird*

$$(\mathrm{II}\delta.)\qquad \lim_{q=\infty}\int_\gamma^\delta F(x)\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx = 0 \ \textit{sein, falls } x_1<\gamma<\delta \textit{ ist.}$$

Zweite Bemerkung. — Die Function $F(x)$ sei in dem unendlich grossen Intervall $\gamma \ldots\ldots \infty$ *monoton*, überall *endlich**), und *abtheilungsweise stetig;* ferner sei ihr absolut grösster Werth in diesem Intervall bezeichnet mit M'. Alsdann findet nach (IIγ.) für *jedwedes* δ die Formel statt:

$$\operatorname{abs}\int_\gamma^\delta F(x)\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx \leqq \operatorname{abs}\frac{12M'}{q(\gamma-x_1)},\quad \text{falls nur } x_1<\gamma<\delta \text{ ist.}$$

Diese Formel wird also fortbestehen, wenn man das δ weiter und weiter, ins Unendliche wachsen lässt. Somit folgt:

$$\operatorname{abs}\int_\gamma^\infty F(x)\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx \leqq \operatorname{abs}\frac{12M'}{q(\gamma-x_1)},\quad \text{falls } x_1<\gamma.$$

Und hieraus ergiebt sich sofort, dass das links stehende Integral gegen 0 convergirt, sobald man entweder q oder γ ins Unendliche wachsen lässt. Wir gelangen also zu folgendem Satz: *Ist die Function $F(x)$ in dem unendlich grossen Intervall $\gamma \ldots\ldots \infty$ monoton, überall endlich, und abtheilungsweise stetig, so wird erstens*

*) Vgl. die Note Seite 54.

(II ε.)
$$\lim_{q=\infty}\int_{\gamma}^{\infty} F(x)\,\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx = 0 \textit{ sein, falls } x_1 < \gamma \textit{ ist};$$

und zweitens

(II ζ.)
$$\lim_{\gamma=\infty}\int_{\gamma}^{\infty} F(x)\,\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx \qquad \textit{stets} = 0 \textit{ sein.}$$

Dritte Bemerkung. — An die letzte Formel (II ζ.) schliesst sich unmittelbar folgender Satz: *Ist eine Function $F(x)$ im Intervall $a \ldots . \infty$ überall endlich und abtheilungsweise stetig, und ist ausserdem dieses Intervall mit Bezug auf $F(x)$ in eine endliche Anzahl monotoner Strecken zerlegbar**), *so wird das Integral*

(II η.)
$$J = \int_{a}^{\infty} F(x)\,\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx$$

einen bestimmten endlichen Werth haben, wie beschaffen die Constanten a, q, x_1 auch immer sein mögen.

Bezeichnet man nämlich die *letzte* jener monotonen Strecken mit $A \ldots . \infty$, denkt man sich ferner einen auxiliaren, auf dieser letzten Strecke beliebig beweglichen Punct γ (also $a < A < \gamma < \infty$), und zerlegt man endlich das Integral J (II η.) in die beiden Theile:

$$J = \int_{a}^{\gamma} F(x)\,\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx + \int_{\gamma}^{\infty} F(x)\,\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx,$$

so subordinirt sich der *zweite Theil*, weil $F(x)$ auf der Strecke $A \ldots . \gamma \ldots .. \infty$ monoton ist, dem vorhergehenden Satze (II ζ.). Somit erkennen wir, dass dieser *zweite Theil* (gewissermassen das Restglied des Integrales J) bei unendlich wachsendem γ gegen 0 convergirt. W. z. z. w.

§ 3.

Das Fourier'sche einfache Integral mit endlichen Grenzen.

Um auf die schon früher (Seite 8) besprochene Fourier'sche Integraldarstellung näher einzugehen, wollen wir zunächst die Grenze untersuchen, gegen welche das Integral

(1.)
$$\frac{1}{\pi}\int_{a}^{b} F(x)\,\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx$$

bei unendlich wachsendem q convergirt.

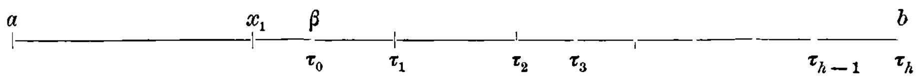
---

*) Selbstverständlich soll eine Strecke mit Bezug auf $F(x)$ monoton genannt werden, sobald $F(x)$ längs dieser Strecke monoton ist. Vgl. die zweite Note Seite 27.

Dabei wollen wir annehmen, dass $a < x_1 < b$, und dass $F(x)$ im Intervalle $a \ldots . b$ *abtheilungsweise stetig* und *abtheilungsweise monoton* sei. Alsdann wird z. B. das *rechts* von x_1 liegende Intervall $x_1 \ldots . b$ in eine *endliche* Anzahl von Strecken (x_1, τ_1), (τ_1, τ_2), $(\tau_2, \tau_3) \ldots . (\tau_{h-1}, \tau_h)$ zerlegbar sein, der Art, dass $F(x)$ längs jeder solchen Strecke *monoton* ist*). Zu den so erhaltenen *festen* Puncten $\tau_1, \tau_2, \tau_3 \ldots \tau_{h-1}$ mag noch hinzugefügt werden ein zwischen x_1 und τ_1 liegender *auxiliarer* Punct β, und zwar in solcher Weise, dass

$$x_1 < \beta < (x_1 + \pi) \tag{2.}$$

ist. Ausserdem mögen (der Bequemlichkeit willen) die Puncte β und b ebenfalls mit dem Buchstaben τ, nämlich respective mit τ_0 und τ_h benannt werden. Wir haben alsdann folgendes Schema:

(3.) 

und zugleich die Gewissheit, dass $F(x)$ sowohl auf der Strecke (x_1, β), wie auch auf jedweder Strecke (τ_j, τ_{j+1}) *monoton* und *abtheilungsweise stetig* ist. Somit ergiebt sich einerseits [mittelst des Satzes Seite 53 (8.)]:

$$\lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{\beta} F(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx = \frac{F(x_1 + 0)}{2}, \quad **) \tag{4.}$$

und andererseits [mittelst des Satzes Seite 57 (II δ.)]:

$$\lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} F(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx = 0. \tag{5.}$$

Bilden wir nun die Formel (5.) der Reihe nach für sämmtliche Strecken (τ_0, τ_1), (τ_1, τ_2), $\ldots . (\tau_{h-1}, \tau_h)$, und addiren wir all' diese h-Formeln zu Formel (4.) hinzu, so ergiebt sich:

$$\lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_{x_1}^{b} F(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx = \frac{F(x_1 + 0)}{2}. \tag{6.}$$

In analoger Weise wird man offenbar für das *links* von x_1 liegende Intervall $a \ldots . x_1$ [unter Anwendung des Satzes Seite 53 (9.)] die Formel finden:

$$\lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_{a}^{x_1} F(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1} dx = \frac{F(x_1 - 0)}{2}. \tag{7.}$$

---

*) Die *endliche* Anzahl dieser *monotonen Strecken* ist hierbei also mit h bezeichnet.

**) Denn der auxiliare Punct β (oder τ_0) soll eine beliebige Lage zwischen den festen Puncten x_1 und τ_1 haben, *dabei aber der in* (2.) *genannten Bedingung*: $x_1 < \beta < (x_1 + \pi)$ *unterworfen sein.*

8*

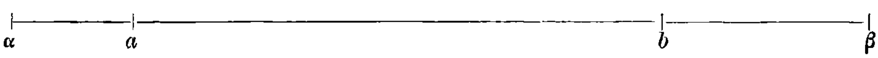
Schliesslich gelangt man durch Addition von (6.) und (7.) zu folgendem Resultat:

Theorem. — *Sind a, b, x_1 gegebene Constanten, und bezeichnet $F(x)$ eine Function, die im Intervall $a \dots b$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist, so gilt die Formel:*

$$\text{(A.)} \qquad \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_a^b F(x) \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\, dx = \frac{F(x_1-0)+F(x_1+0)}{2}, \text{ falls } a < x_1 < b$$

ist. — Die rechte Seite dieser Formel geht offenbar in $F(x_1)$ über, sobald die Function im Puncte x_1 stetig ist.

Erweitern wir nun das Intervall $a \dots b$, indem wir links einen Punct α, rechts einen Punct β hinzufügen, und denken wir uns eine Function $\Phi(x)$,



welche auf der Strecke $a \dots b$ mit der früheren Function $F(x)$ identisch, sonst aber überall *Null* sein soll, so wird offenbar $\Phi(x)$ mit Bezug auf das *ganze* Intervall $\alpha \dots \beta$ *abtheilungsweise stetig* und *abtheilungsweise monoton* sein; so dass wir also folgende mit (A.) analoge Formel erhalten:

$$\text{(1.)} \qquad \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_\alpha^\beta \Phi(x) \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\, dx = \frac{\Phi(x_1-0)+\Phi(x_1+0)}{2}, \quad \text{für} \quad \alpha < x_1 < \beta.$$

Diese Formel aber kann, weil $\Phi(x)$ auf der Strecke $a \dots b$ identisch mit $F(x)$, und sonst überall gleich *Null* sein soll, offenbar auch so geschrieben werden:

$$\text{(2.)} \qquad \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_a^b F(x) \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\, dx = \frac{\Phi(x_1-0)+\Phi(x_1+0)}{2}, \quad \text{für} \quad \alpha < x_1 < \beta.$$

Zugleich bemerkt man (immer mit Rücksicht auf die für Φ gegebene Definition), dass die *rechte* Seite dieser Formel z. B. $= \frac{F(x_1-0)+F(x_1+0)}{2}$ wird für $a < x_1 < b$; ferner, dass sie $= \frac{F(b-0)}{2}$ wird für $x_1 = b$; ferner, dass sie $= 0$ wird für $x_1 > b$; u. s. w. Somit ergiebt sich folgendes *allgemeinere*

Theorem. — *Sind $a < b$ und x_1 gegebene Constanten, und bezeichnet $F(x)$ eine Function, die im Intervall $a \dots b$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist, so wird der Ausdruck*

$$\text{(B.)} \qquad \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_a^b F(x) \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\, dx,$$

verschiedenartige Werthe haben, je nach der Grösse der Constanten x_1, nämlich

$= 0$, *oder* $= \frac{F(a+0)}{2}$, *oder* $= \frac{F(x_1-0)+F(x_1+0)}{2}$, *oder* $= \frac{F(b-0)}{2}$, *oder* $= 0$

sein, je nachdem

$x_1 < a$, *oder* $x_1 = a$, *oder* $a < x_1 < b$, *oder* $x_1 = b$, *oder* $x_1 > b$ *ist.*

Beispiel. — Nehmen wir an, die Function $F(x)$ sei im Intervall $a \dots b$

(1.) $a = x_1 = 0$ ———————— b

überall gleich *Eins*, und es sei überdies $a = x_1 = 0$, so erhalten wir aus dem vorstehenden Theorem die Formel:

$$(2.)\qquad \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^b \frac{\sin qx}{x}\,dx = \tfrac{1}{2}, \quad \text{wo} \quad 0 < b;$$

oder, falls wir an Stelle von x eine neue Integrationsvariable y einführen mittelst der Substitution $y = qx$:

$$(3.)\qquad \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^{qb} \frac{\sin y}{y}\,dy = \tfrac{1}{2}, \quad \text{wo} \quad 0 < b;$$

oder, was dasselbe ist:

$$(4.)\qquad \int_0^\infty \frac{\sin y}{y}\,dy = \frac{\pi}{2},$$

was z. B. in Einklang ist mit einem früher auf Seite 37, (6.) erhaltenen Resultat.

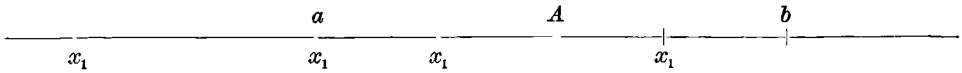
§ 4.

Das Fourier'sche einfache Integral mit unendlichen Grenzen.

Die Function $F(x)$ sei im Intervall $a \dots \infty$ überall *endlich* und *abtheilungsweise stetig;* auch möge dieses Intervall in eine *endliche* Anzahl *monotoner Strecken* zerlegbar sein, und die *letzte* derselben mit $A \dots \infty$ bezeichnet werden. Stellen wir uns nun die Aufgabe, den Werth des Ausdruckes

$$(1.)\qquad U = \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi}\int_a^\infty F(x)\,\frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\,dx$$

zu ermitteln, so sind dabei *vier* Lagen des Punctes x_1 zu unterscheiden, indem derselbe entweder links von a, oder in a, oder zwischen a und A, oder endlich rechts von A liegen kann. Der bessern Anschauung willen mögen daher *vier* Puncte x_1 gegeben gedacht werden, resp. in der ersten, zweiten, dritten und vierten Lage. Unsere Aufgabe besteht alsdann darin, den Werth des Ausdruckes U (1.) für *jeden* dieser vier Puncte x_1 zu finden.

(2.) 

Zu diesem Zweck markiren wir einen *auxiliaren* Punct b, der rechts von allen vier Puncten x_1, mithin auch rechts vom A liegen soll; so dass also $F(x)$ auf der Strecke $b \ldots \infty$ geradezu *monoton* ist. Zerlegen wir alsdann den Ausdruck U (1.) in die beiden Theile:

$$(3.)\qquad U = \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_a^b F(x) \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\, dx + \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_b^\infty F(x) \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\, dx,$$

so wird der *zweite* Theil [zufolge des Satzes Seite 58 (II ε.)] *Null* sein, während der *erste* dem vorhergehenden Satze (B.) sich subordinirt. Folglich wird U (ebenso wie dieser *erste* Theil) $= 0$ sein für den *ersten* Punct x_1; ferner $= \frac{1}{2} F(a+0)$ sein für den *zweiten* Punct x_1; endlich $= \frac{1}{2}\big(F(x_1-0) + F(x_1+0)\big)$ sein für den *dritten* und *vierten* Punct x_1. Und wir gelangen also zu folgendem

Theorem. — *Nimmt man an, die Function $F(x)$ sei im Intervall $a \ldots\ldots \infty$ endlich und abtheilungsweise stetig, und es sei ausserdem dieses Intervall mit Bezug auf $F(x)$ in eine endliche Anzahl monotoner Strecken zerlegbar, so wird der Ausdruck*

$$(\text{C.})\qquad \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_a^\infty F(x) \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\, dx$$

$$= 0, \quad \textit{oder} \quad = \frac{F(a+0)}{2}, \quad \textit{oder} \quad = \frac{F(x_1-0) + F(x_1+0)}{2}$$

sein, je nachdem

$$x_1 < a, \quad \textit{oder} \quad x_1 = a, \quad \textit{oder} \quad x_1 > a \quad \textit{ist.}$$

Ohne Weiteres erkennt man, dass ein analoger Satz sich wird ableiten lassen für ein von a nach der *linken* Seite hin ins Unendliche laufende Intervall, und dass dieser Satz folgendermassen lauten muss:

Theorem. — *Nimmt man an, die Function $F(x)$ sei im Intervall $-\infty \ldots\ldots a$ endlich und abtheilungsweise stetig, und es sei ausserdem dieses Intervall in eine endliche Anzahl monotoner Strecken zerlegbar, so wird der Ausdruck*

$$(\text{D.})\qquad \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^a F(x) \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\, dx$$

$$= \frac{F(x_1-0) + F(x_1+0)}{2}, \quad \textit{oder} \quad = \frac{F(a-0)}{2}, \quad \textit{oder} \quad = 0$$

sein, je nachdem

$$x_1 < a, \quad \textit{oder} \quad x_1 = a, \quad \textit{oder} \quad x_1 > a \quad \textit{ist.}$$

Schliesslich gelangt man durch Addition der beiden Formeln (C.) und (D.) zu folgendem

Theorem. — *Nimmt man an, die Function $F(x)$ sei im ganzen Intervall $-\infty \ldots\ldots +\infty$ endlich und abtheilungsweise stetig, und es sei ausserdem dieses Intervall in eine endliche Anzahl monotoner Strecken zerlegbar, so wird der Ausdruck:*

$$(E.)\qquad \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\, dx$$

unter allen Umständen

$$= \frac{F(x_1-0)+F(x_1+0)}{2}$$

sein. D. h. er wird diesen Werth besitzen, welchen Werth die gegebene Constante x_1 auch immer haben mag.

§ 5.

Das Fourier'sche Doppel-Integral.

Die in den vorhergehenden Paragraphen betrachteten *einfachen* Integrale sollen hier in *Doppel*-Integrale umgewandelt werden. — Offenbar ist:

$$(1)\qquad \int_0^q \cos q(x-x_1)\, dq = \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1};$$

hieraus folgt durch Multiplication mit $F(x)dx$ und Integration:

$$(2.)\qquad \int_a^b \left(\int_0^q F(x) \cos q(x-x_1)\, dq \right) dx = \int_a^b F(x) \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\, dx.$$

Sind, *wie wir voraussetzen wollen, a, b, q bestimmte endliche Constanten, und ist $F(x)$ im Intervall $a \ldots\ldots b$ abtheilungsweise stetig,* so wird die rechte Seite der Gleichung (2.) einen *bestimmten endlichen* Werth haben; Gleiches gilt daher auch von der linken Seite. Auch bemerkt man, dass (in Folge der soeben gemachten Voraussetzungen) auf der linken Seite die Integrationsfolge geändert werden darf. Somit ergiebt sich, falls man noch mit $\frac{1}{\pi}$ multiplicirt:

$$(3.)\qquad \frac{1}{\pi} \int_0^q \left(\int_a^b F(x) \cos q(x-x_1)\, dx \right) dq = \frac{1}{\pi} \int_a^b F(x) \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\, dx.$$

Da wir zu dieser Formel gelangt sind, ohne über den Werth der Constanten q irgend welche Voraussetzung zu machen, so gilt dieselbe für *jedweden* Werth von q, wie *gross* derselbe auch sein mag. Convergirt also die rechte Seite mit wachsendem q gegen eine bestimmte *feste Grenze,* so wird die linke Seite gegen *ebendieselbe* Grenze convergiren. Mit anderen Worten: Die Formel (3.) wird sofort die neue Formel:

$$\text{(4.)} \qquad \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^q \left(\int_a^b F(x) \cos q(x - x_1)\, dx \right) dq = \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_a^b F(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1}\, dx$$

nach sich ziehen, sobald sich nur nachweisen lässt, dass die rechte Seite dieser neuen Formel einen *bestimmten endlichen* Werth hat. Dies ist aber zufolge des Satzes (B.) Seite 60 in der That der Fall, sobald wir nur zu unseren über a, b und $F(x)$ schon gemachten Voraussetzungen noch *die* hinzufügen, *dass $F(x)$ im Intervall $a \dots b$ abtheilungsweise monoton sein soll.* Somit gelangen wir mittelst des genannten Satzes zu folgendem Resultat:

Theorem. — *Sind $a < b$ gegebene endliche Constanten, und bezeichnet $F(x)$ eine Function, die im Intervall $a \dots b$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist, so wird der Ausdruck:*

$$\text{(B.)} \qquad \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^q \left(\int_a^b F(x) \cos q(x - x_1)\, dx \right) dq$$

$$= 0, \;\textit{oder}\; = \frac{F(a+0)}{2}, \;\textit{oder}\; = \frac{F(x_1-0)+F(x_1+0)}{2}, \;\textit{oder}\; = \frac{F(b-0)}{2}, \;\textit{oder}\; = 0$$

sein, je nachdem

$x_1 < a$, *oder* $x_1 = a$, *oder* $a < x_1 < b$, *oder* $x_1 = b$, *oder* $x_1 > b$ *ist.*

Wir kehren zurück zu (3.). Diese Formel (3.), welche ohne Zweifel gültig ist, sobald die Constanten a, b, q, x_1 *beliebige endliche* Werthe haben, und $F(x)$ im Intervall $a \dots b$ *abtheilungsweise stetig* ist, wird z. B. in Gültigkeit bleiben, falls die Constante b sich mehr und mehr vergrössert. Und es wird also diese Formel (3.) die *neue* Formel:

$$\text{(5.)} \qquad \lim_{b=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^q \left(\int_a^b F(x) \cos q(x - x_1)\, dx \right) dq = \lim_{b=\infty} \frac{1}{\pi} \int_a^b F(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1}\, dx,$$

$$\text{d. i.} = \frac{1}{\pi} \int_a^\infty F(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1}\, dx$$

nach sich ziehen, sobald sich nur nachweisen lässt, dass die rechte Seite dieser neuen Formel einen *bestimmten endlichen* Werth hat. Dies ist aber zufolge des Satzes (IIη.) Seite 58 in der That der Fall, sobald wir zu der über $F(x)$ schon gemachten Voraussetzung der *abtheilungsweisen Stetigkeit* noch die hinzufügen, dass $F(x)$ im Intervall $a \dots \infty$ überall *endlich* bleibe, und dass dieses Intervall mit Bezug auf $F(x)$ in eine *endliche* Anzahl *monotoner Strecken* zerlegbar sei.

Dies festgesetzt, gilt sodann die Formel (5.) für *beliebige* endliche Werthe der Constanten a, q, x_1; und bleibt also gültig, falls man z. B. q mehr und mehr wachsen lässt. Demgemäss wird jene Formel (5.) die *neue* Formel:

$$\text{(6.)} \qquad \lim_{q=\infty} \lim_{b=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^q \left(\int_a^b F(x) \cos q(x-x_1)\, dx \right) dq = \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_a^\infty F(x) \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\, dx$$

nach sich ziehen, sobald sich zeigen lässt, dass die rechte Seite dieser neuen Formel einen *bestimmten endlichen* Werth hat. Dies aber ist nach Satz (C.) Seite 62 in der That der Fall, und zwar auf Grund der bereits gemachten Voraussetzungen. Somit gelangen wir mittelst des eben genannten Satzes zu folgendem Resultat:

Theorem. — *Ist $F(x)$ im Intervall $a \ldots \infty$ endlich und abtheilungsweise stetig, und ist ferner dieses Intervall mit Bezug auf $F(x)$ in eine endliche Anzahl monotoner Strecken*) zerlegbar, so wird der Ausdruck*

$$\text{(B'.)} \qquad \lim_{q=\infty} \lim_{b=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^q \left(\int_a^b F(x) \cos q(x-x_1)\, dx \right) dq$$

$$= 0, \quad \textit{oder} \quad = \frac{F(a+0)}{2} \quad \textit{oder} \quad = \frac{F(x_1-0)+F(x_1+0)}{2}$$

sein, je nachdem

$$x_1 < a, \quad \textit{oder} \quad x_1 = a \quad \textit{oder} \quad x_1 > a \quad \textit{ist.}$$

Dabei ist, was den Ausdruck (B'.) betrifft, die Aufeinanderfolge der denselben erzeugenden Operationen wohl zu beachten. *Zuerst* ist das Doppel-Integral zu berechnen (wobei es, wie früher Seite 63 schon bemerkt wurde, einerlei ist ob man zuerst nach x und sodann nach q, oder umgekehrt integrirt); sodann ist *zweitens* $b = \infty$, und schliesslich *drittens* $q = \infty$ zu machen. Wollte man von dieser vorgeschriebenen und in der Schreibweise des Ausdruckes (B'.) deutlich ausgeprägten Aufeinanderfolge abweichen, so würde man in einen schweren Fehler verfallen, und in der That in vielen Fällen zu ganz unrichtigen Resultaten gelangen**).

---

*) Diesen Voraussetzungen entspricht z. B. die Function $F(x) = \text{Const.}$ Und der Satz muss also gültig sein, wenn man statt $F(x)$ eine Constante nimmt.

**) Wollte man z. B. *zuerst* $b = \infty$ machen, dann *zweitens* das Doppel-Integral berechnen, und sodann *drittens* $q = \infty$ machen, so würde man statt der Formel (B'.) folgende erhalten:

$$\lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^q \left(\int_a^\infty F(x) \cos q(x-x_1)\, dx \right) dq = 0, \quad \text{oder} \quad = \frac{F(a+0)}{2}, \quad \text{oder} \quad = \frac{F(x_1-0)+F(x_1+0)}{2},$$

$$\text{je nachdem} \quad x_1 < a, \quad \text{oder} \quad x_1 = a, \quad \text{oder} \quad x_1 > a \quad \text{ist.}$$

Dass diese Formel aber total *falsch* ist, erkennt man sofort durch Anwendung auf den speciellen Fall $F(x) = 1$. Denn nimmt man an [was mit den in unserm Theorem an $F(x)$ gestellten Anforderungen in vollem Einklang steht], dass $F(x)$ im Intervalle $a \ldots \infty$ überall $= 1$ sei, so geht die vorstehende Formel über in:

$$\lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^q \left(\int_a^\infty \cos q(x-x_1)\, dx \right) dq = 0, \quad \text{oder} \quad = \tfrac{1}{2}, \quad \text{oder} \quad = 1,$$

$$\text{je nachdem} \quad x_1 < a, \quad \text{oder} \quad x_1 = a, \quad \text{oder} \quad x_1 > a \quad \text{ist. (Verte.)}$$

Doch werden wir aus den weiteren Untersuchungen, und namentlich aus dem nächstfolgenden Theorem (Γ.) erkennen, dass allerdings *unter gewissen Voraussetzungen* eine Aenderung in der Aufeinanderfolge jener Operationen zulässig ist*). Gleichzeitig werden uns diese weiteren Betrachtungen zu dem *eigentlichen Fourier'schen Doppel-Integral* hinleiten.

Bei diesen weiteren Betrachtungen erscheint es zweckmässig, die Voraussetzungen, die wir sonst nach und nach müssten einfliessen lassen, gleich auf einmal anzugeben. Wir lassen einerseits die Voraussetzungen des vorhergehenden Theorems (B'.) fortbestehen, *nehmen also an, dass*

(1.) $$F(x)$$

im Intervall $a \ldots . \infty$ überall endlich und abtheilungsweise stetig sei,

(2.) 

und dass ferner dieses Intervall mit Bezug auf $F(x)$ in eine endliche Anzahl monotoner Strecken zerlegbar sei, deren letzte bezeichnet werden mag mit $A \ldots . \infty$. Sodann aber wollen wir *zweitens annehmen, dass das Integral*

(3.) $$\int_a^\infty F(x)\, dx$$

einen bestimmten endlichen Werth habe; was sich z. B. unmittelbar übertragen wird auf das Integral:

(4.) $$\int_A^\infty F(x)\, dx.$$

Da nun die Function $F(x)$ im Intervall $A \ldots . \infty$ *monoton* ist, so wird die ihr entsprechende Curve von A aus *entweder* unaufhörlich steigen, *oder* unaufhörlich sinken, *oder* irgend welcher horizontalen (d. i. mit der Abscissenaxe parallelen) Linie sich asymptotisch nähern. Der *erste* von diesen drei Fällen ist unmöglich, weil sonst der durch das Integral (4.) ausgedrückte

---

Und in der That ist diese letztere Formel völlig *unrichtig*. Denn ihre *linke* Seite hat, ebenso wie das innere Integral

$$\int_a^\infty \cos q(x - x_1)\, dx = \left[\frac{\sin q(x - x_1)}{q}\right]_{x=a}^{x=\infty}$$

einen ganz *unbestimmten* Werth; während doch der Werth der *rechten* Seite ein völlig *bestimmter* ist.

*) Während nämlich der Ausdruck (B'.) Seite 65 in der Weise entsteht, dass *zuerst* das Doppel-Integral berechnet, dann *zweitens* $b = \infty$, und hierauf *drittens* $q = \infty$ gemacht wird, entsteht der Ausdruck (Γ.) Seite 66 in ganz ähnlicher Weise, jedoch mit dem Unterschiede, dass die beiden ersten Operationen in ihrer Aufeinanderfolge vertauscht sind.

Flächeninhalt unendlich gross sein müsste, was der Voraussetzung (3.) widerspricht. Der *zweite* Fall ist ebenfalls unmöglich, aus demselben Grunde. Und der *dritte* Fall ist, weil der Flächeninhalt (4.) einen bestimmten endlichen Werth haben soll, offenbar nur dann möglich, wenn jene horizontale Linie mit der Abscissenaxe zusammenfällt. Somit sehen wir also, *dass die der Function $F(x)$ entsprechende Curve sich im Intervall $A \ldots\ldots \infty$ der Abscissenaxe asymptotisch nähern muss.* Hieraus folgt erstens, *dass*

(5.) $\quad$ *$F(x)$ auf der Strecke $A \ldots \infty$ constantes Vorzeichen*

hat, und zweitens, dass

$$\lim_{x=\infty} F(x) = 0 \tag{6.}$$

ist. Ausserdem folgt direct aus der in (3.) gemachten Voraussetzung, dass

$$\lim_{b=\infty} \int_b^\infty F(x)\,dx = 0 \tag{7.}$$

ist, wo der Buchstabe b zur Bezeichnung eines beliebigen variablen Punctes dient [vgl. (2.)]. Dies vorausgeschickt gehen wir über zur eigentlichen Untersuchung.

Sind a, b, q, x_1 *beliebige* endliche Constanten, so gilt, zufolge der Voraussetzungen (1.), die bereits früher [Seite 63 (3.)] entwickelte Formel:

$$\underbrace{\int_0^q \left(\int_a^b F(x) \cos q(x - x_1)\,dx \right) dq}_{U} = \underbrace{\int_a^b F(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1}\,dx}_{V}, \tag{8.}$$

deren beide Seiten mit U und V bezeichnet werden mögen. Wir ersetzen nun in diesen Integralen die obere Grenze b durch ∞, bezeichnen die so entstehenden neuen Integrale mit U' und V':

$$U' = \int_0^q \left(\int_a^\infty F(x) \cos q(x - x_1)\,dx \right) dq, \qquad V' = \int_a^\infty F(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1}\,dx, \tag{9.}$$

und legen uns die Frage vor, ob U' und V' ebenfalls einander gleich sind. Dabei ist wohl zu beachten, dass die Formel (8.) gültig bleibt für jedes *beliebige* b, dass also U und V stets *ein und denselben* Werth behalten, wie weit jenes b auch anwachsen mag.

Zunächst ergiebt sich aus den Voraussetzungen (1.) mittelst des Satzes (IIη.) Seite 58, dass V' einen *bestimmten endlichen* Werth hat. Um nun zu ermitteln, ob das U' *ebendenselben* Werth besitzt, haben wir die Differenz $(U' - V')$ zu betrachten. Diese aber kann, weil für jedwedes endliche b die Gleichung $U = V$ (8.) stattfindet, auch so geschrieben werden:

(10.) $$U' - V' = (U' - U) - (V' - V),$$

woraus folgt:

(11.) $$\text{abs}\,(U' - V') \leqq \text{abs}\,(U' - U) + \text{abs}\,(V' - V).$$

Nach (8.) und (9.) ist aber:

(12.) $$U' - U = \int_0^q \left(\int_b^\infty F(x) \cos q(x - x_1)\, dx \right) dq, \qquad V' - V = \int_b^\infty F(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1}\, dx.$$

Lassen wir nun [vgl. (2.)] das willkürliche $b > A$ und zugleich auch $> x_1$ werden, so wird $F(x)$ im Intervalle $b \ldots . \infty$ *constantes Vorzeichen* haben [vgl. (5.)]; so dass die Formeln (12.) durch Anwendung des gewöhnlichen Mittelwerthsatzes [(Ib.), Seite 28] folgende Gestalt erhalten:

(13.) $$U' - U = \int_0^q \left(\vartheta_q \int_b^\infty F(x)\, dx \right) dq, \qquad V' - V = \frac{\Theta}{b - x_1} \int_b^\infty F(x)\, dx,$$

wo ϑ_q einen von q abhängenden ächten Bruch, und Θ ebenfalls einen ächten Bruch vorstellt. Hieraus folgt weiter:

(14.) $$U' - U = \left(\int_0^q \vartheta_q\, dq \right) \left(\int_b^\infty F(x)\, dx \right),$$

also schliesslich*):

(15.) $$\text{abs}\,(U' - U) \leqq \text{abs} \left(q \int_b^\infty F(x)\, dx \right), \qquad \text{abs}\,(V' - V) \leqq \frac{1}{b - x_1}\, \text{abs} \left(\int_b^\infty F(x)\, dx \right).$$

Somit folgt aus (11.)

(16.) $$\text{abs}\,(U' - V') \leqq \left(\frac{1}{b - x_1} + (\text{abs}\, q) \right) \cdot \text{abs} \int_b^\infty F(x)\, dx.$$

Und hieraus folgt mit Rücksicht auf (7.), dass der Ausdruck abs $(U' - V')$ durch Vergrösserung von b unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabgedrückt werden kann, dass also zwischen U' und V' kein auch noch so kleiner Unterschied stattfinden kann.

Nachdem wir in solcher Weise die Gleichung $U' = V'$, d. i. die Gleichung

(17.) $$\frac{1}{\pi} \int_0^q \left(\int_a^\infty F(x) \cos q(x - x_1)\, dx \right) dq = \frac{1}{\pi} \int_a^\infty F(x) \frac{\sin q(x - x_1)}{x - x_1}\, dx$$

constatirt haben, können wir nun in dieser Gleichung, welche gültig ist für jedes *beliebige* q, das q weiter und weiter anwachsen lassen. Demgemäss wird diese Gleichung (17.) die *neue* Formel

---

*) Da nämlich ϑ_q ein (positiver oder negativer) ächter Bruch ist, so wird offenbar das *erste* der beiden Integrale in (14.) seinem absoluten Betrage nach $\leqq q$ sein.

$$(18.)\qquad \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^q \left(\int_a^\infty F(x) \cos q(x-x_1)\, dx \right) dq = \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_a^\infty F(x) \frac{\sin q(x-x_1)}{x-x_1}\, dx$$

nach sich ziehen, sobald sich nur zeigen lässt, dass die rechte Seite dieser neuen Formel einen bestimmten endlichen Werth hat. Dies aber ist nach Satz (C.) Seite 62 in der That der Fall, und zwar auf Grund der schon in (1.) gemachten Voraussetzungen. Wir gelangen daher, mit Rücksicht auf jenen Satz (C.) zu folgendem

Theorem. — *Ist $F(x)$ im Intervall $a \ldots\ldots \infty$ endlich und abtheilungsweise stetig, ist ferner dieses Intervall mit Bezug auf $f(x)$ in eine endliche Anzahl monotoner Strecken zerlegbar, und besitzt ausserdem das Integral $\int_a^\infty F(x)\, dx$ einen bestimmten endlichen Werth*), so wird der Ausdruck*

$$(\Gamma.)\qquad \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^q \left(\int_a^\infty F(x) \cos q(x-x_1)\, dx \right) dq$$

$$= 0, \qquad \textit{oder} \qquad = \frac{F(a+0)}{2}, \qquad \textit{oder} \qquad = \frac{F(x_1-0)+F(x_1+0)}{2}$$

sein, je nachdem

$$x_1 < a, \qquad \textit{oder} \qquad x_1 = a, \qquad \textit{oder} \qquad x_1 > a \quad \textit{ist.}$$

Ebenso wie dieses Theorem (Γ.) dem Satze (C.) Seite 62 sich anlehnt, ebenso wird offenbar dem dortigen Satze (D.) folgendes Theorem (Δ.) sich anschliessen:

Theorem. — *Ist $F(x)$ im Intervall $-\infty \ldots\ldots a$ endlich und abtheilungsweise stetig, ist ferner dieses Intervall mit Bezug auf $F(x)$ in eine endliche Anzahl monotoner Strecken zerlegbar, und besitzt ausserdem das Integral $\int_{-\infty}^a F(x)\, dx$ einen bestimmten endlichen Werth**)*, so wird der Ausdruck:

$$(\Delta.)\qquad \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^q \left(\int_{-\infty}^a F(x) \cos q(x-x_1)\, dx \right) dq$$

$$= \frac{F(x_1-0)+F(x_1+0)}{2}, \qquad \textit{oder} \qquad = \frac{F(a-0)}{2}, \qquad \textit{oder} \qquad = 0$$

sein, je nachdem

$$x_1 < a, \qquad \textit{oder} \qquad x_1 = a, \qquad \textit{oder} \qquad x_1 > a \quad \textit{ist.}$$

Endlich ergiebt sich parallel dem früheren Satze (E.) Seite 63, oder auch direct durch Addition der Formeln (Γ.) und (Δ.), noch folgendes Theorem.

---

*) Dieses Theorem ist daher *nicht* mehr anwendbar auf den Fall $F(x) = \text{Const.}$

**) Hier ist dasselbe zu bemerken wie in der vorhergehenden Note.

Theorem. — *Ist $F(x)$ im Intervall $-\infty \ldots\ldots +\infty$ endlich und abtheilungsweise stetig, ist ferner dieses Intervall mit Bezug auf $F(x)$ in eine endliche Anzahl monotoner Strecken zerlegbar, und besitzt ausserdem das Integral $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\,dx$ einen bestimmten endlichen Werth*), so wird der Ausdruck*

$$\text{(E.)}\qquad \lim_{q=\infty} \frac{1}{\pi}\int\limits_0^q \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cos q(x-x_1)\,dx\right) dq$$

unter allen Umständen

$$= \frac{F(x_1-0)+F(x_1+0)}{2}$$

sein, welcher Werth der Constanten x_1 auch immer zuertheilt werden mag.

Uebrigens kann man die Formel (E.) auch so schreiben:

$$\text{(Z.)}\qquad \lim_{q=\infty}\int\limits_0^q (A_q\cos qx_1 + B_q \sin qx_1)\,dq = \frac{F(x_1-0)+F(x_1+0)}{2},$$

wo alsdann A_q, B_q die Bedeutungen haben:

$$A_q = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\cos qx\cdot dx, \qquad B_q = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(x)\sin qx\cdot dx.$$

Ist insbesondere $F(x)$ eine *gerade* Function, so reduciren sich diese Werthe der A, B auf

$$A_q = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} F(x)\cos qx\cdot dx, \qquad B_q = 0.$$

Und ist andererseits $F(x)$ *ungerade*, so erhält man:

$$A_q = 0 \qquad B_q = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\infty} F(x)\sin qx\cdot dx.$$

§ 6.

Die Hamilton'sche Integraldarstellung.

Wir wollen uns eine Function $\psi(x)$ denken, welche folgende drei Eigenschaften besitzt: *Erstens* soll dieselbe stets endlich bleiben, und ihr absolut grösster Werth mag C heissen:

$$\text{(1.)}\qquad \text{Max abs}\,\psi(x) = C, \quad \text{für}\quad x = -\infty\cdots\cdots+\infty.$$

Zweitens soll $\psi(x)$ verschwinden für $x=0$; jedoch in solcher Weise, dass der Quotient $\frac{\psi(x)}{x}$, sobald man x von einem negativen Werthe aus gegen 0

*) Vgl. die vorhergehende Note.

wachsen, oder von einem positiven Werthe aus zu 0 abnehmen lässt, jedesmal gegen eine bestimmte endliche Grenze convergirt; wobei dahingestellt bleiben mag, ob diese beiden Grenzen einander gleich sind oder nicht. Hieraus folgt [mit Rücksicht auf (1.)] sofort, dass der Quotient $\frac{\psi(x)}{x}$ stets endlich bleibt*); sein absolut grösster Werth mag C' heissen:

$$\text{Max abs}\,\frac{\psi(x)}{x} = C', \quad \text{für} \quad x = -\infty \cdots\cdots + \infty. \tag{2.}$$

Die *dritte* Eigenschaft endlich bezieht sich auf das Integral

$$\Psi(x) = \int_0^x \psi(x)\,dx. \tag{3.}$$

Wir wollen nämlich annehmen, die Gleichung $\Psi(x) = K$ besitze, bei geeigneter Wahl der Constanten K, unendlich viele Wurzeln:

$$\cdots\cdots\cdots x_{-2},\ x_{-1},\ x_0,\quad x_1,\quad x_2,\quad x_3,\ \cdots\cdots\cdots \tag{3'.}$$

die über das Intervall $x = -\infty \ldots . + \infty$ der Art ausgebreitet sind, dass auf *jedwede Strecke von der Länge c mindestens zwei Wurzeln* fallen. Dabei soll c eine bestimmte endliche Constante sein.

Diese drei Eigenschaften besitzt z. B. die Function $\psi(x) = \sin x$ [hier ist $c = 2\pi$**)]: ebenso die Function $\psi(x) = \sin \operatorname{am}(x, \varkappa)$, [hier ist $c = 4K$]. Ueberhaupt wird im Allgemeinen den an $\psi(x)$ gestellten Anforderungen genügt werden durch jede beliebige für $x = 0$ verschwindende *periodische* Function. Nur muss, falls die Länge ihrer Periode mit c bezeichnet wird, das Integral $\int_0^c \psi(x)\,dx = 0$ werden, und ausserdem der Werth von $\frac{\psi(x)}{x}$ für $x = \pm 0$ endlich sein. Aber auch *nichtperiodische* Functionen giebt es, welche den gestellten Anforderungen entsprechen. So kann man z. B. für $\Psi(x)$ die Cylinderfunction $J(x)$, mithin für $\psi(x)$ den Differentialquotienten derselben nehmen.

Ich werde nun zeigen, dass die früher betrachtete mit der Function sinus *behaftete Fourier'sche Integralformel* [Seite (63)] *der Hauptsache nach in Gültigkeit bleibt, wenn man daselbst den* sinus *durch die Function* ψ *ersetzt.* Zu diesem Zweck sind zunächst einige einfache Bemerkungen voranzuschicken.

---

*) In der That ergiebt sich die *Endlichkeit* des Quotienten $\frac{\psi(x)}{x}$ für $x \lesseqgtr 0$ aus der Voraussetzung (1.), und für $x = 0$ aus der zuletzt gemachten Voraussetzung, dass $\frac{\psi(x)}{x}$, sobald man x von einem negativen Werthe aus zu 0 wachsen, oder von einem positiven Werthe aus zu 0 abnehmen lässt, jedesmal gegen eine bestimmte endliche Grenze convergirt.

**) Denn setzt man $\psi(x) = \sin x$, so wird $\Psi(x) = 1 - \cos x$. Macht man also das $K = 1$, so verwandelt sich die Gleichung $\Psi(x) = K$ in $\cos x = 0$. Und diese besitzt zwei Wurzeln auf jedweder Strecke von der Länge 2π.

Erste Bemerkung. — Sind α und β beliebig gegebene Constanten, und bezeichnet man diejenigen der Wurzeln (3'.), welche *zwischen* α und β gelegen sind, mit $x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\ldots x_s$:

(4.) $$\alpha \leqq x_n < x_{n+1} < x_{n+2} < \cdots < x_s \leqq \beta,$$

so werden [nach der bei (3'.) gemachten Voraussetzung] die Differenzen

(5.) $$(x_n - \alpha),\ (x_{n+1} - x_n),\ (x_{n+2} - x_{n+1}),\ \cdots\ (\beta - x_s) \text{ sämmtlich } \leqq c$$

sein. Gleichzeitig ergiebt sich:

$$\int_\alpha^\beta \psi(x)\,dx = \int_\alpha^{x_n} \psi(x)\,dx + \int_{x_n}^{x_s} \psi(x)\,dx + \int_{x_s}^\beta \psi(x)\,dx,$$

wo [vgl. (3.)] das mittlere Integral $= \Psi(x_s) - \Psi(x_n)$, also $= K - K = 0$ ist*). Somit folgt:

$$\int_\alpha^\beta \psi(x)\,dx = \int_\alpha^{x_n} \psi(x)\,dx + \int_{x_s}^\beta \psi(x)\,dx,$$

also, mit Rücksicht auf (1.) und (5.):

(6.) $$\text{abs} \int_\alpha^\beta \psi(x)\,dx \leqq 2cC, \quad \text{wo } \alpha \text{ und } \beta \text{ ganz beliebig sind.}$$

Zweite Bemerkung. — Ist $0 < \alpha \leqq \beta$, so ergiebt sich mittelst des Du Bois'schen Mittelwerthsatzes (Seite 33):

$$\int_\alpha^\beta \frac{\psi(x)\,dx}{x} = \frac{1}{\alpha} \int_\alpha^\xi \psi(x)\,dx + \frac{1}{\beta} \int_\xi^\beta \psi(x)\,dx, \quad \text{wo } 0 < \alpha \leqq \xi \leqq \beta;$$

also mittelst der soeben gefundenen Formel (6.):

(7.) $$\text{abs} \int_\alpha^\beta \frac{\psi(x)\,dx}{x} < \frac{4cC}{\alpha}, \quad \text{für } 0 < \alpha \leqq \beta.$$

Diese Relation wird in Kraft bleiben, falls man das β weiter und weiter anwachsen lässt; und es wird daher auch folgende Formel stattfinden:

(8.) $$\text{abs} \int_\alpha^\infty \frac{\psi(x)\,dx}{x} < \frac{4cC}{\alpha}, \quad \text{falls } 0 < \alpha.$$

Setzt man nun:

(9.) $$\int_{-\infty}^0 \frac{\psi(x)\,dx}{x} = D, \qquad \text{und} \qquad \int_0^\infty \frac{\psi(x)\,dx}{x} = E,$$

und beachtet man, dass die Function $\frac{\psi(x)}{x}$ [zufolge (2.)] durchweg *endlich*

*) Denn es sollen ja die Grössen (3'.), mithin z. B. auch x_n und x_s Wurzeln der Gleichung $\Psi(x) = K$ sein.

bleibt, so ergiebt sich aus (8.) sofort, dass das Integral E einen *bestimmten endlichen* Werth hat. Und Gleiches wird, in analoger Weise, sich zeigen lassen beim Integrale D. — Beiläufig folgt aus (9.):

$$\int_0^\alpha \frac{\psi(x)\,dx}{x} = E - \int_\alpha^\infty \frac{\psi(x)\,dx}{x}, \quad \text{wo} \quad 0 < \alpha,$$

also mit Rücksicht auf (8.):

$$\int_0^\alpha \frac{\psi(x)\,dx}{x} = E + \frac{\vartheta \cdot 4cC}{\alpha}, \quad \text{wo} \quad 0 < \alpha \text{ sein soll}, \tag{10.}$$

und wo ϑ einen unbekannten (positiven oder negativen) ächten Bruch vorstellt.

Dritte Bemerkung. — Die Function $\frac{\psi(x)}{x}$ ist nach (2.) durchweg endlich; und es unterliegt daher keinem Zweifel, dass das in (7.) betrachtete Integral auch dann noch *endlich* bleibt, wenn man seine untere Grenze α zu 0 herabsinken lässt. Um näher hierauf einzugehen, betrachten wir das von 0 bis β erstreckte Integral:

$$\int_0^\beta \frac{\psi(x)\,dx}{x},$$

indem wir seine obere Grenze β zuerst von 0 bis c, dann weiter von c bis ∞ laufen lassen. Während β von 0 bis c geht, bleibt der Werth dieses Integrals stets zwischen $\pm\, cC'$, wie aus (2.) ersichtlich. Lassen wir nun ferner β über c hinaus wachsen, so wird der in solcher Weise *hinzutretende* Integraltheil:

$$\int_c^\beta \frac{\psi(x)\,dx}{x}$$

stets zwischen $\pm \frac{4cC}{c}$, d. i. zwischen $\pm\, 4C$ bleiben, wie aus (7.) ersichtlich. Das ganze Integral wird also, falls β von 0 bis c, und weiter von c bis ∞ geht, stets zwischen den Grenzen $\pm\,(cC' + 4C)$ liegen. Mit anderen Worten: Es wird die Formel stattfinden:

$$\text{abs} \int_0^\beta \frac{\psi(x)\,dx}{x} < (cC' + 4C), \quad \text{für} \quad 0 < \beta.$$

Und hieraus folgt sofort:

$$\text{abs} \int_\alpha^\beta \frac{\psi(x)\,dx}{x} \leqq (2cC' + 8C), \quad \text{für} \quad 0 \leqq \alpha \leqq \beta. \tag{11.}$$

Die hauptsächlichsten Formeln, zu denen wir hier gelangt, sind die in (9.), (10.), ferner in (7.) und (11.). Dieselben lauten, falls wir die Constanten $(4cC)$ und $(2cC' + 8C)$ kurzweg mit C_1 und C_2 bezeichnen, ausserdem aber den Buchstaben x mit y vertauschen, folgendermassen:

(I.) $$\int_{-\infty}^{0} \frac{\psi(y)\,dy}{y} = D, \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{\psi(y)\,dy}{y} = E;$$

(II.) $$\int_{0}^{\alpha} \frac{\psi(y)\,dy}{y} = E + \frac{\vartheta C_1}{\alpha}, \text{ wo } 0 < \alpha, \text{ und } \vartheta \text{ ein ächter Bruch;}$$

(III.) $$\text{abs}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\psi(y)\,dy}{y} \leqq \frac{C_1}{\alpha}, \text{ wo } 0 < \alpha \leq \beta;$$

(IV.) $$\text{abs}\int_{\alpha}^{\beta} \frac{\psi(y)\,dy}{y} \leqq C_2, \text{ wo } 0 \leq \alpha \leq \beta.$$

Und diese Formeln endlich nehmen, falls man $y = qx$ setzt, wo q eine beliebige *positive* Constante sein soll, ausserdem aber $\alpha = q\gamma$, und $\beta = q\delta$ setzt, folgende Gestalt an:

(Ia.) $$\int_{-\infty}^{0} \frac{\psi(qx)\,dx}{x} = D, \qquad \int_{0}^{\infty} \frac{\psi(qx)\,dx}{x} = E;$$

(IIa.) $$\int_{0}^{\gamma} \frac{\psi(qx)\,dx}{x} = E + \frac{\vartheta C_1}{q\gamma}, \text{ wo } 0 < \gamma, \text{ und } \vartheta \text{ ein ächter Bruch;}$$

(IIIa.) $$\text{abs}\int_{\gamma}^{\delta} \frac{\psi(qx)\,dx}{x} < \frac{C_1}{q\gamma}, \text{ wo } \alpha < \gamma \leq \delta;$$

(IVa.) $$\text{abs}\int_{\gamma}^{\delta} \frac{\psi(qx)\,dx}{x} \leqq C_2, \text{ wo } 0 < \gamma \leqq \delta.$$

Hier repräsentiren D, E und C_1, C_2 gewisse der Function ψ eigenthümliche Constanten; und zwar sind C_1, C_2 (ebenso wie die früheren Constanten c, C, C') ihrer Definition nach *positiv*.

Unsere eigentliche Aufgabe besteht nun in der Untersuchung des Integrals $\int \frac{F(x)\,\psi(qx)\,dx}{x}$. Nehmen wir zunächst an, *es sei* $0 < \gamma \leq \delta$, *und die Function* $F(x)$ *sei im Intervall* $\gamma \ldots \delta$ *monoton und abtheilungsweise stetig,* so ergiebt sich durch Anwendung des Du Bois'schen Satzes (Seite 33):

$$\int_{\gamma}^{\delta} \frac{F(x)\,\psi(qx)\,dx}{x} = F(\gamma)\int_{\gamma}^{\xi} \frac{\psi(qx)\,dx}{x} + F(\delta)\int_{\xi}^{\delta} \frac{\psi(qx)\,dx}{x}, \text{ wo } 0 < \gamma \leq \xi \leq \delta;$$

also mittelst der Formel (IIIa.):

$$\text{abs}\int_{\gamma}^{\delta}\frac{F(x)\,\psi(qx)\,dx}{x} \leqq \frac{2MC_1}{q\gamma}, \quad \text{wo} \quad 0 < \gamma \leqq \delta;$$

falls nämlich M den absolut grössten Werth der Function $F(x)$ im Intervall $\gamma \ldots . \delta$ bezeichnet. Hieraus folgt sofort:

$$\text{(T.)} \qquad \lim_{q=\infty}\int_{\gamma}^{\delta}\frac{F(x)\,\psi(qx)\,dx}{x} = 0, \quad \text{wo} \quad 0 < \gamma \leqq \delta.$$

Betrachten wir andererseits das Integral *zwischen den Grenzen* 0 *und* b ($0 < b$), *und nehmen wir wieder an, die Function* $F(x)$ *sei in diesem Intervall* $0 \ldots b$ *monoton und abtheilungsweise stetig*, so gilt offenbar Gleiches auch von der Function $f(x) = F(x) - F(0)$. Bezeichnet also γ einen beliebigen auxiliaren Punct zwischen 0 und b, so ergeben sich durch Anwendung des Du Bois'schen Satzes die Formeln:

$$\int_0^{\gamma}\frac{f(x)\,\psi(qx)\,dx}{x} = \qquad 0 \qquad + f(\gamma)\int_{\xi}^{\gamma}\frac{\psi(qx)\,dx}{x}, \quad \text{wo} \quad 0 < \xi < \gamma;$$

$$\int_{\gamma}^{b}\frac{f(x)\,\psi(qx)\,dx}{x} = f(\gamma)\int_{\gamma}^{\eta}\frac{\psi(qx)\,dx}{x} + f(b)\int_{\eta}^{b}\frac{\psi(qx)\,dx}{x}, \quad \text{wo} \quad \gamma \leqq \eta \leqq b.$$

Aus diesen Gleichungen aber folgt, falls man den absolut grössten Werth von $f(x)$ im Intervall $0 \ldots . b$ mit m bezeichnet, und die Formeln (IIIa.), (IVa.) berücksichtigt, sofort:

$$\text{abs}\int_0^{\gamma}\frac{f(x)\,\psi(qx)\,dx}{x} \leqq C_2 \cdot \text{abs}\, f(\gamma),$$

$$\text{abs}\int_{\gamma}^{b}\frac{f(x)\,\psi(qx)\,dx}{x} \leqq \frac{mC_1}{q\gamma} + \frac{mC_1}{q\eta} < \frac{2mC_1}{q\gamma}.$$

Addirt man endlich diese beiden Formeln, und substituirt man zugleich für $f(x)$ seine eigentliche Bedeutung: $F(x) - F(0)$, so erhält man:

$$(12.) \quad \text{abs}\int_0^{b}\frac{[F(x) - F(0)]\,\psi(qx)\,dx}{x} \leqq \frac{2mC_1}{q\gamma} + C_2 \cdot \text{abs}\,[F(\gamma) - F(0)], \quad \text{wo} \quad 0 \leqq \gamma < b.$$

Die *rechte Seite* dieser Formel kann man aber durch Vergrösserung von q unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad ε hinabdrücken, in der Weise, dass man zunächst ihr *zweites* Glied, durch Verkleinerung der auxiliaren Grösse γ, unter $\frac{1}{2}\varepsilon$, sodann aber ihr *erstes* Glied, durch Vergrösserung von q, ebenfalls unter $\frac{1}{2}\varepsilon$ hinabdrückt. Auch bemerkt man, dass jene *rechte Seite* noch weiter sich verkleinern wird, falls man nach Ausführung der eben genannten

Proceduren das γ festhält, hingegen das q noch weiter wachsen lässt. Somit folgt also aus der vorstehenden Formel:

$$\lim_{q=\infty} \int_0^b \frac{[F(x) - F(0)]\, \psi(qx)\, dx}{x} = 0, \quad \text{wo} \quad 0 < b;$$

oder, falls man das mit $F(0)$ behaftete Glied auf die rechte Seite wirft:

$$\lim_{q=\infty} \int_0^b \frac{F(x)\, \psi(qx)\, dx}{x} = F(0) \cdot \lim_{q=\infty} \int_0^b \frac{\psi(qx)\, dx}{x}, \quad \text{wo} \quad 0 < b;$$

oder, falls man die Formel (IIa.) berücksichtigt:

$$(13.) \qquad \lim_{q=\infty} \int_0^b \frac{F(x)\, \psi(qx)\, dx}{x} = E \cdot F(0), \quad \text{d. i.} \quad = E \cdot F(+0), \quad \text{wobei} \quad 0 < b.$$

Denn es bedarf wohl keiner Erläuterung, dass unser bisheriges $F(0)$ genauer mit $F(+0)$ zu bezeichnen ist.

Ebenso wie diese Formel (13.) sich bezieht auf ein *rechts* vom Anfangspunct gelegenes Intervall $0 \ldots . b$, ebenso wird man offenbar in analoger Weise und unter analogen Bedingungen für ein *links* vom Anfangspunct gelegenes Intervall $a \ldots . 0$ folgende Formel erhalten:

$$(14.) \qquad \lim_{q=\infty} \int_a^0 \frac{F(x)\, \psi(qx)\, dx}{x} = DF(-0), \quad \text{wo} \quad a < 0.$$

Schliesslich gelangt man durch Addition der beiden Formeln (13.), (14.) zu folgendem Satz:

Hat $\psi(x)$ die auf Seite 70, etc. *festgesetzten Eigenschaften, sind ferner a, b gegebene Constanten, und zwar $a < 0 < b$, und bezeichnet endlich $F(x)$ eine Function, die im Intervall $a \ldots . b$ monoton und abtheilungsweise stetig ist, so wird:*

$$(\text{U.}) \qquad \lim_{q=\infty} \int_a^b \frac{F(x)\, \psi(qx)\, dx}{x} = DF(-0) + EF(+0),$$

wo D und E die in (I.) *definirten* (der Function ψ eigenthümlichen) *Constanten vorstellen*).*

Diese einfachen Beispiele zeigen bereits deutlich, dass man bei den mit der Function ψ behafteten Integralen zu ganz analogen Resultaten ge-

---

*) Will man von der Formel (U.) zurückgelangen zur früheren Formel (T.), so braucht man nur zwischen a und b zwei neue Puncte γ, δ einzuschalten:

$$a < 0 < \gamma < \delta < b,$$

und die Function $F(x)$ der Art festzusetzen, dass sie abgesehen von der Strecke $(\gamma\delta)$ überall verschwindet.

langt, wie bei den *Fourier'schen* Integralen. In der That wird man z. B. [parallel dem früheren Satz (B.) Seite 60] folgendes Theorem aussprechen können:

Theorem. — *Hat* $\psi(x)$ *die auf* Seite 70 etc. *festgesetzten Eigenschaften, sind ferner* $a < b$ *und* x_1 *gegebene Constanten, und bezeichnet* $F(x)$ *eine Function, die im Intervall* $a \ldots b$ *abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist, so wird der Ausdruck:*

$$\text{(V.)} \qquad \lim_{q=\infty} \int_a^b F(x) \frac{\psi(q(x-x_1))}{x-x_1} dx$$

$= 0$, *oder* $= DF(a+0)$, *oder* $= DF(x_1-0)+EF(x_1+0)$, *oder* $= EF(b-0)$, *oder* $= 0$

sein, je nachdem

$x_1 < a$, *oder* $x_1 = a$, *oder* $a < x_1 < b$, *oder* $x_1 = b$, *oder* $x_1 > b$ *ist.*

Dabei repräsentiren D *und* E *die in* (I.) Seite 74 *definirten der Function* ψ *eigenthümlichen Constanten.*

Endlich übersieht man leicht, dass auch folgendes [dem Satze Seite 63 parallel stehendes] Theorem gelten wird:

Theorem. — *Hat* $\psi(x)$ *die auf* Seite 70 etc. *festgesetzten Eigenschaften, ist ferner die Function* $F(x)$ *im ganzen Intervall* $-\infty \ldots\ldots + \infty$ *endlich und abtheilungsweise stetig, und setzt man ausserdem voraus, dass dieses Intervall mit Bezug auf* $F(x)$ *in eine endliche Anzahl monotoner Strecken zerlegbar sei, so wird der Ausdruck*

$$\text{(W.)} \qquad \lim_{q=\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \frac{\psi(q(x-x_1))}{x-x_1} dx$$

unter allen Umständen (d. i. für beliebige Werthe der Constanten x_1)

$$= DF(x_1 - 0) + EF(x_1 + 0)$$

sein, wo D *und* E *die in* (I.) Seite 74 *definirten Constanten vorstellen.*

Diese Theoreme (V.) und (W.) repräsentiren wohl die Haupttresultate der *Hamilton'schen Theorie.* Allerdings ist die Art und Weise, in welcher wir hier zu diesen Resultaten gelangt sind — Dank dem Du Bois'schen Mittelwerthsatz — eine unvergleichlich viel einfachere, als der von Hamilton selber benutzte Weg.

§ 7.

Die neuen Integraleigenschaften der Kreisfunctionen.

Um diese bereits in (A.), (B.), (C.) Seite 10, 11 dargelegten Eigenschaften in strengerer Weise zu begründen, gehen wir aus von dem Theorem (B.) Seite 60. Dieses wird, falls man statt der Grenzen a, b die Grenzen 0, γ

nimmt, und gleichzeitig die Buchstaben x und q mit einander vertauscht, dargestellt sein durch die Formel:

$$(1.)\qquad \lim_{x=\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^\gamma F(q)\,\frac{\sin(q-q_1)x}{q-q_1}\,dq$$

$$= 0\,,\ \text{oder}\ = \frac{F(+0)}{2}\,,\ \text{oder}\ = \frac{F(q_1-0)+F(q_1+0)}{2}\,,\ \text{oder}\ = \frac{F(\gamma-0)}{2}\,,\ \text{oder}\ = 0\,,$$

je nachdem

$q_1 < 0$, oder $q_1 = 0$, oder $0 < q_1 < \gamma$, oder $q_1 = \gamma$, oder $q_1 > 0$.

Dabei ist vorausgesetzt, dass die Function $F(q)$ im Intervall $q = 0 \ldots . \gamma$ *abtheilungsweise stetig* und *abtheilungsweise monoton* sei.

Wir ersehen hieraus, dass der Ausdruck (1.), abgesehen von einzelnen Puncten, $= F(q_1)$ ist, so lange q_1 im Intervall $0 \ldots . \gamma$ liegt, und dass derselbe andererseits $= 0$ ist, sobald q_1 ausserhalb dieses Intervalls sich befindet. Demgemäss können wir also sagen, der Ausdruck (1.) sei $= F(q_1) + O(q_1)$, oder $= O(q_1)$, je nachdem q_1 innerhalb oder ausserhalb des Intervalls $0 \ldots . \gamma$ liegt; falls wir nämlich unter $O(q_1)$ eine Function verstehen, die mit Ausnahme einzelner Puncte*) überall 0 ist.

Bringen wir nun diesen Satz in Anwendung auf zwei Puncte $(+ q_1)$ und $(- q_1)$, von denen der erstere zwischen $0 \ldots . \gamma$, mithin der letztere ausserhalb $0 \ldots . \gamma$ liegen soll, so ergeben sich die Formeln:

$$(2.)\qquad \lim_{x=\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^\gamma F(q)\,\frac{\sin(q-q_1)x}{q-q_1}\,dq = F(q_1) + O(q_1)\,,\quad \text{wo } 0 < q_1 \leqq \gamma\,;$$

$$(3.)\qquad \lim_{x=\infty} \frac{1}{\pi}\int_0^\gamma F(q)\,\frac{\sin(q+q_1)x}{q+q_1}\,dq = O(-q_1)\,,\quad \text{wo ebenfalls } 0 \leqq q_1 \leqq \gamma\,.$$

Addiren wir diese beiden Formeln, nachdem wir zuvor die in ihnen enthaltenen Sinusfunctionen durch die Integrale

$$\frac{\sin(q-q_1)x}{q-q_1} = \int_0^x \cos(q-q_1)x\cdot dx\,,$$

$$\frac{\sin(q+q_1)x}{q+q_1} = \int_0^x \cos(q+q_1)x\cdot dx$$

ersetzt haben, so ergiebt sich:

$$(4.)\qquad \lim_{x=\infty} \frac{2}{\pi}\int_0^x\!\!\int_0^\gamma F(q)\cdot(\cos qx)(\cos q_1 x)\cdot dx\,dq = F(q_1) + O(q_1) + O(-q_1)\,,\ \text{wo } 0 \leqq q_1 < \gamma\,.$$

Und ebenso ergiebt sich aus jenen Formeln (2.), (3.) durch *Subtraction:*

*) Diese einzelnen Puncte sind theils durch die im Intervall $0 \ldots . \gamma$ vorhandenen *Unstetigkeitspuncte* der Function $F(q)$, theils durch die beiden *Endpuncte* jenes Intervalls dargestellt.

$$(5.)\qquad \lim_{x=\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^x \int_0^\gamma F(q) \cdot (\sin qx)(\sin q_1 x) \cdot dx\, dq = F(q_1) + O(q_1) - O(-q_1), \quad \text{wo } 0 \leq q_1 < \gamma.$$

Bezeichnet nun $\Phi(q)$ irgend welche neue Function, die, ebenso wie $F(q)$, im Intervall $q = 0 \ldots . \gamma$ *abtheilungsweise stetig* und *abtheilungsweise monoton* ist, und multiplicirt man die Formel (4.) auf beiden Seiten mit $\Phi(q_1)\, dq_1$, und integrirt sodann nach q_1 zwischen den Grenzen $0 \ldots . \gamma$, so ergiebt sich [mit Rücksicht auf die eigenthümliche Beschaffenheit der Function O] sofort:

$$\lim_{x=\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^x \int_0^\gamma \int_0^\gamma F(q)\, \Phi(q_1) \cdot (\cos qx)(\cos q_1 x) \cdot dx\, dq\, dq_1 = \int_0^\gamma F(q_1)\, \Phi(q_1)\, dq_1;$$

oder, was dasselbe ist:

$$\lim_{x=\infty} \int_0^x \left\{ \left(\int_0^\gamma F(q) \cdot (\cos qx)\, dq \right) \left(\int_0^\gamma \Phi(q_1) \cdot (\cos q_1 x)\, dq_1 \right) \right\} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\gamma F(q_1)\, \Phi(q_1)\, dq_1,$$

wo nachträglich der Buchstabe q_1 durch q ersetzt werden kann. Zu einem ganz analogen Resultat gelangt man offenbar auf Grund der Formel (5.); und erhält also folgendes

Theorem. — *Ist γ eine positive Constante, und sind $F(q)$ und $\Phi(q)$ im Intervall $q = 0 \ldots . \gamma$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton, so gelten die beiden Formeln:*

$$(A.)\qquad \int_0^\infty \left\{ \left(\int_0^\gamma F(q) \cdot (\cos qx)\, dq \right) \left(\int_0^\gamma \Phi(q) \cdot (\cos qx)\, dq \right) \right\} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\gamma F(q)\, \Phi(q)\, dq,$$

$$(B.)\qquad \int_0^\infty \left\{ \left(\int_0^\gamma F(q) \cdot (\sin qx)\, dq \right) \left(\int_0^\gamma \Phi(q) \cdot (\sin qx)\, dq \right) \right\} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\gamma F(q)\, \Phi(q)\, dq.$$

Dies sind im Wesentlichen die früheren Formeln (A.), (B.), Seite 10, 11.

Andererseits ergiebt sich aus dem Satze (1.) für den speciellen Fall: $q_1 = 0$, sofort:

$$\lim_{x=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^\gamma F(q) \frac{\sin qx}{q}\, dq = \frac{F(+0)}{2},$$

oder, falls man den Quotienten $\frac{\sin qx}{q} = \int_0^x (\cos qx)\, dx$ setzt:

$$\lim_{x=\infty} \int_0^x \int_0^\gamma F(q) \cdot (\cos qx) \cdot dx\, dq = \frac{\pi}{2} F(+0).$$

Somit gelangt man zu folgendem

Theorem. — *Bezeichnet γ eine positive Constante, und $F(q)$ irgend eine*

Function, die im Intervall $q = 0 \ldots . \gamma$ *abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist, so gilt die Formel:*

$$\text{(C.)} \qquad \int_0^\infty \left(\int_0^\gamma F(q) \cdot (\cos qx)\, dq \right) dx = \frac{\pi}{2} F(+0)\,.$$

Und diese Formel also ist es, durch welche die früher gefundene (unsichere und zweifelhafte) Formel (C.) Seite 11 *ersetzt werden muss.*

Bemerkung. — Welche Wichtigkeit die Formeln (A.), (B.), (C.) besitzen, habe ich gezeigt in einem kleinen Aufsatz über die *Mehler'schen Kegelfunctionen*, der augenblicklich im Druck begriffen ist in den Mathemat. Ann. Bd. 18. Auch sind jene Formeln von grossem Nutzen für gewisse Untersuchungen über *conforme Abbildung* erkannt, worauf ich bei einer späteren Gelegenheit näher einzugehen gedenke.

Uebrigens gestatten jene Formeln (A.), (B.), (C) allerhand kleine Abänderungen. Ist z. B. $0 < \beta < \gamma$, und nimmt man an, die Function $F(q)$ sei im Intervall $\beta \ldots . \gamma$ überall $= 0$, so geht die Formel (A.) über in folgende:

$$\int_0^\infty \left\{ \left(\int_0^\beta F(q) \cdot (\cos qx)\, dq \right) \left(\int_0^\gamma \Phi(q) \cdot (\cos qx)\, dq \right) \right\} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\beta F(q)\, \Phi(q)\, dq\,.$$

Viertes Capitel.

Die Laplace'sche, nach Kugelfunctionen fortschreitende Reihenentwicklung.

Ich werde in diesem Capitel der Reihe nach zuerst Functionen von *zwei*, und sodann solche von nur *einem* Argument in Betracht ziehen; und dabei neben den berühmten Untersuchungen von *Dirichlet* namentlich auch einige neuere Untersuchungen von *Du Bois-Reymond* und *Dini* benutzen.

§ 1.

Einige Eigenschaften der Kugelfunctionen.

Es sei n eine positive ganze Zahl, und $y = \text{abs}\,(\cos\omega)^n$. Denkt man sich diese Gleichung geometrisch dargestellt *durch eine Curve über der horizontalen ω-Axe* (indem man die ω's als Abscissen, die y's als die zugehörigen Ordinaten betrachtet), so wird offenbar diese Curve in den Puncten $\omega = 0$ und $\omega = \pi$ die Höhe 1 erreichen, *dazwischen* aber überall von *geringerer* Höhe sein. Lässt man nun die Zahl n weiter und weiter wachsen, so bleiben die Ordinaten der Curve in den genannten beiden Puncten *ungeändert* (nämlich nach wie vor $= 1$), während die dazwischen befindlichen Ordinaten sich mehr und mehr verkleinern. Sind z. B. a, b irgend zwei der Relation $0 < a < b < \pi$ entsprechende Constanten, so wird man jene Curve $y = \text{abs}(\cos\omega)^n$ im Intervall $a \dots b$ durch gehörige Vergrösserung von n beliebig nahe an die Abscissenaxe heranzudrücken im Stande sein. Mit anderen Worten: Zieht man oberhalb der Abscissenaxe L eine derselben sehr nahe liegende Parallele L', so wird man, wie klein der Abstand zwischen L und L' auch immer sein mag, durch gehörige Vergrösserung der Zahl n dafür sorgen können, dass die Curve $y = \text{abs}(\cos\omega)^n$ auf der Strecke $a \dots . b$ *zwischen* L *und* L' *bleibt.*

Ganz Analoges gilt, wie wir zeigen werden, auch von der Curve: $y = \text{abs}\, P_n(\cos\omega)$. So z. B. ergiebt sich aus den bekannten Formeln:

$$P_n(\cos 0) = P_n(1) = 1 \quad \text{und} \quad P_n(\cos\pi) = P_n(-1) = (-1)^n, \tag{1.}$$

dass diese Curve, bei variirendem n, *zwei feste* Durchgangspuncte besitzt, dass nämlich ihre Ordinaten für $\omega = 0$ und $\omega = \pi$ stets $= 1$ sind. Um näher auf die Sache einzugehen, benutzen wir die *Laplace*'sche Integraldarstellung [Seite 13 (7 c.)]:

$$P_n(\cos\omega) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f^n\, d\eta, \quad \text{wo} \quad f = \cos\omega + i \sin\omega \cos\eta\,, \tag{2.}$$

und die aus dieser für *reelle* ω sich ergebende Formel:

$$\text{abs}\, P_n(\cos\omega) = \text{mod}\, P_n(\cos\omega) \leqq \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\text{mod} f)^n\, d\eta\,. \tag{3.}$$

Hier ist [vgl. (2.)]: mod. $f = \sqrt{(\cos\omega)^2 + (\sin\omega\cos\eta)^2}$, oder, ein wenig anders geschrieben:

$$\text{mod}\, f = \sqrt{1 - (\sin\omega \sin\eta)^2}, \tag{4.}$$

$$\text{mithin:} \qquad \text{mod}\, f \leqq 1. \tag{5.}$$

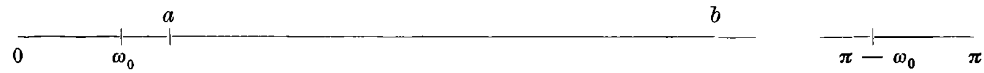
Durch Substitution dieses Werthes (5.) in die Formel (3.) ergiebt sich sofort: $\text{abs}\, P_n(\cos\omega) \leqq 1$. Also:

Erster Satz. — *Für reelle Werthe von* ω *ist stets:*

$$\text{abs}\, P_n(\cos\omega) \leqq 1\,. \tag{6.}$$

Demgemäss bleibt die Curve $y = \text{abs}\, P_n(\cos\omega)$ *ihrem ganzen Verlaufe nach zwischen den beiden Parallellinien* $y = 0$ *und* $y = 1$. *Auch sind die Ordinaten dieser Curve in den Puncten* $\omega = 0$ *und* $\omega = \pi$ *stets* $= 1$, *wie solches schon früher bei Gelegenheit der Formeln* (1.) *bemerkt wurde.*

Unsere weitere Aufgabe besteht nun darin, diese Curve für die Strecke $a \ldots . b$ [wo a und b zwei Puncte vorstellen, die innerhalb des Intervalls

(7.) 

$0 \ldots . \pi$ beliebig gegeben sind], einer genaueren Untersuchung zu unterwerfen. Zu diesem Zweck fügen wir [vgl. (7.)] zwei auxiliare Puncte hinzu: ω_0 und $(\pi - \omega_0)$, von solcher Lage, dass ω_0 zwischen 0 und a, andererseits $(\pi - \omega_0)$ zwischen b und π sich befindet; und beschränken sodann die Variable ω auf das Intervall $\omega_0 \ldots . (\pi - \omega_0)$, was angedeutet werden mag durch die Formel:

$$(8.)\qquad 0 < \omega_0 \leqq \omega \leqq (\pi - \omega_0) < \pi .$$

Neben der auxiliaren Constanten ω_0 führen wir gleichzeitig noch eine zweite auxiliare Constante η_0 ein, welche der Bedingung entsprechen soll:

$$(9.)\qquad 0 < \eta_0 \quad < \quad (\pi - \eta_0) < \pi ,$$

im Uebrigen aber *beliebig gewählt*, und in Zukunft *beliebig geändert* werden mag.

Zerlegt man nun das Integral (3.) in die drei Integrale:

$$(10.)\qquad \operatorname{abs} P_n(\cos\omega) < \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_0^{\eta_0} (\operatorname{mod} f)^n \, d\eta}_{U} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{\eta_0}^{\pi-\eta_0} (\operatorname{mod} f)^n \, d\eta}_{V} + \underbrace{\frac{1}{\pi}\int_{\pi-\eta_0}^{\pi} (\operatorname{mod} f)^n \, d\eta}_{W} ,$$

so ergeben sich für das *erste* und *dritte* Integral, nämlich für U und W, mittelst der Relation (5.), die Formeln:

$$(11.)\qquad U \leqq \frac{1}{\pi}\eta_0 , \qquad \text{und} \qquad W \leqq \frac{1}{\pi}\eta_0 ;$$

während andererseits das *zweite* Integral V, mittelst der Relation (4.), die Gestalt annimmt:

$$(12.)\qquad V = \frac{1}{\pi}\int_{\eta_0}^{\pi-\eta_0} \left(\sqrt{1 - (\sin\omega \, \sin\eta)^2}\right)^n d\eta .$$

Da in diesem Integral die Integrationsvariable η den Spielraum besitzt: $\eta_0 \leqq \eta \leqq (\pi - \eta_0)$, mithin der Formel entspricht: $(\sin\eta)^2 \geqq (\sin\eta_0)^2$, und da andererseits die Variable ω [nach (8.)] den Spielraum $\omega_0 \leqq \omega \leqq (\pi - \omega_0)$ hat, mithin der Formel $(\sin\omega)^2 \geqq (\sin\omega_0)^2$ unterliegt, so ergiebt sich sofort:

$$1 - (\sin\omega \, \sin\eta)^2 \leqq 1 - (\sin\omega_0 \, \sin\eta_0)^2 ;$$

demgemäss ergiebt sich aus (12.):

$$V < \left(\sqrt{1 - (\sin\omega_0 \, \sin\eta_0)^2}\right)^n \cdot \left\{ \frac{1}{\pi}\int_{\eta_0}^{\pi-\eta_0} d\eta \right\} ,$$

oder, weil der hier in den geschweiften Klammern enthaltene Factor $= \frac{\pi - 2\eta_0}{\pi}$, mithin < 1 ist:

$$V < \left(\sqrt{1 - (\sin\omega_0 \sin\eta_0)^2}\right)^n. \tag{13.}$$

Durch Substitution der Werthe (11.), (13.) in die Formel (10.) erhält man also:

$$\text{abs}\, P_n(\cos\omega) < \frac{2}{\pi}\eta_0 + \left(\sqrt{1 - (\sin\omega_0 \sin\eta_0)^2}\right)^n, \quad \text{für} \quad \omega_0 \leqq \omega \leqq (\pi - \omega_0); \tag{14.}$$

wo die auxiliare Constante η_0 der Bedingung (9.) unterworfen ist, sonst aber *ad libitum* gewählt werden, also z. B. *beliebig klein* gemacht werden darf.

Wir können nun durch Vergrösserung der Zahl n die *rechte Seite* der Formel (14.) unter einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad ε hinabdrücken; in der Weise, dass wir zunächst ihr *erstes Glied* durch Verkleinerung der auxiliaren Constanten η_0 unter $\frac{1}{2}\varepsilon$, sodann aber ihr *zweites Glied* durch Vergrösserung von n ebenfalls unter $\frac{1}{2}\varepsilon$ hinabdrücken. Für dieses vergrösserte n nimmt alsdann jene Formel (14.) die Gestalt an:

$$\text{abs}\, P_n(\cos\omega) < \varepsilon, \quad \text{für} \quad \omega_0 < \omega \leqq (\pi - \omega_0). \tag{α.}$$

Dieses Resultat lässt sich leicht noch weiter vervollständigen. Lassen wir nämlich das η_0 ungeändert, sowie es zuletzt bestimmt war, hingegen das n noch weiter anwachsen, so wird offenbar das *erste Glied* der rechten Seite von (14.) constant bleiben, hingegen das *zweite* noch weiter sich verkleinern. Demgemäss können wir zur Formel (α.) noch folgende Formeln hinzufügen:

$$\text{abs}\, P_{n+1}(\cos\omega) < \varepsilon, \quad \text{für} \quad \omega_0 \leqq \omega \leqq (\pi - \omega_0), \tag{β.}$$

$$\text{abs}\, P_{n+2}(\cos\omega) < \varepsilon, \quad \text{für} \quad \omega_0 \leqq \omega \leqq (\pi - \omega_0), \tag{γ.}$$

etc. etc. etc. etc.

Versteht man also unter ε einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad, so können wir, wie aus den Formeln (α), (β.), (γ.), etc. hervorgeht, *durch gehörige Vergrösserung der Zahl n dafür sorgen, dass sämmtliche Curven*

$$y = \text{abs}\, P_n(\cos\omega), \quad y = \text{abs}\, P_{n+1}(\cos\omega), \quad y = \text{abs}\, P_{n+2}(\cos\omega), \quad \text{etc. etc.} \tag{15.}$$

im Intervall $\omega_0 \ldots . (\pi - \omega_0)$, um so mehr also auch im Intervall $a \ldots . b$ [vgl. (7.)], *zwischen den beiden Parallellinien $y = 0$ und $y = \varepsilon$ verbleiben.* Für die späteren Anwendungen wird es zweckmässig sein, diesem Satz folgende Form zu geben:

Zweiter Satz. — *Sind a, b zwei gegebene, der Bedingung*

$$0 < a < b < \pi \tag{16.}$$

entsprechende Constanten, und bezeichnet man den grössten Werth, den der absolute Werth von $P_n(\cos\omega)$ im Intervalle $\omega = a \ldots . b$ annimmt, mit P_n^{ab}, so können durch gehörige Vergrösserung von n simultan sämmtliche Grössen

$$\mathsf{P}_n^{ab}, \quad \mathsf{P}_{n+1}^{ab}, \quad \mathsf{P}_{n+2}^{ab}, \quad \mathsf{P}_{n+3}^{ab}, \ldots\ldots \tag{17.}$$

unter einen beliebigen Kleinheitsgrad hinabgedrückt werden. — Setzt man endlich zur Abkürzung $\cos\omega = \mu$, so nimmt dieser Satz folgende Gestalt an:

Andere Form des zweiten Satzes. — *Sind α, β zwei gegebene der Bedingung*

$$-1 < \alpha < \beta < +1 \tag{18.}$$

entsprechende Constanten, und bezeichnet man den grössten Werth, den der absolute Betrag von $P_n(\mu)$ im Intervalle $\mu = \alpha \ldots \beta$ annimmt, mit $\Pi_n^{\alpha\beta}$, so können durch Vergrösserung von n simultan sämmtliche Grössen

$$\Pi_n^{\alpha\beta}, \quad \Pi_{n+1}^{\alpha\beta}, \quad \Pi_{n+2}^{\alpha\beta}, \ldots\ldots \tag{19.}$$

unter einen beliebigen Kleinheitsgrad hinabgedrückt werden.

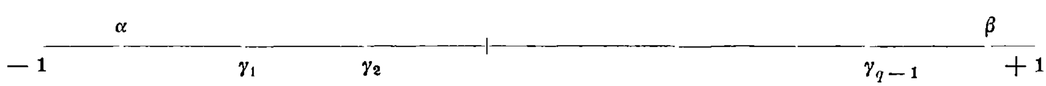
Aufgabe. Dies vorangeschickt, stellen wir uns nun die Aufgabe, das Integral

$$J_n = \int_{-1}^{+1} F(\mu)\, P_n'(\mu)\, d\mu \tag{20.}$$

näher zu untersuchen, — unter der Voraussetzung, dass die Function

$$F(\mu) \tag{21.}$$

im Intervall $\mu = -1 \ldots . + 1$ *abtheilungsweise stetig* und *abtheilungsweise monoton* ist. — Jenes Intervall $-1 \ldots . + 1$ wird alsdann in einzelne Strecken $(-1, \gamma_1)$, (γ_1, γ_2), (γ_2, γ_3), $\ldots$ $(\gamma_{q-2}, \gamma_{q-1})$, $(\gamma_{q-1}, 1)$ zerlegbar sein, der Art, dass $F(\mu)$ längs jeder solchen Strecke geradezu *stetig* und *monoton* ist. Diese Theilpuncte $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_{q-1}$ sind *feste* der gegebenen Function eigenthümliche Puncte; auch wird ihre Anzahl $(q - 1)$ eine *endliche* sein*). Zu diesen festen Puncten mögen noch zwei *variable* Puncte α und β hinzugefügt werden, und zwar α zwischen -1 und γ_1, andererseits β zwischen γ_{q-1} und $+1$:



Gleichzeitig mag der absolut grösste Werth von $P_n(\mu)$ für das Intervall $\mu = \alpha \ldots \beta$ [ebenso wie in (19.)] mit $\Pi_n^{\alpha\beta}$, und der absolut grösste Werth von $F(\mu)$ für das *ganze gegebene* Intervall $\mu = -1 \ldots + 1$ mit M bezeichnet werden; was angedeutet werden kann durch die Formeln:

$$\begin{aligned} &\text{für } \mu = -1 \cdots +1 \quad \text{soll sein: } \operatorname{Max}\left(\operatorname{abs} F(\mu)\right) = M; \\ &\text{für } \mu = \quad \alpha \cdots \beta \quad\;\; \text{soll sein: } \operatorname{Max}\left(\operatorname{abs} P_n(\mu)\right) = \Pi_n^{\alpha\beta}. \end{aligned} \tag{22.}$$

Wir wollen nun das gegebene Integral (20.) in folgende $(q + 2)$ Integrale zerlegen:

---

*) Vergl. die Definitionen Seite 27, 28.

$$(23.)\qquad J_n = \int_{-1}^{+1} F(\mu)\, P_n'(\mu)\, d\mu = \int_{-1}^{\alpha} + \int_{\alpha}^{\gamma_1} + \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \cdots\cdots + \int_{\gamma_{q-1}}^{\beta} + \int_{\beta}^{+1},$$

jedes dieser $(q+2)$ Integrale nach dem *Du Bois'schen Satz* behandeln, und in solcher Weise schliesslich darthun, dass J_n mit wachsendem n gegen eine bestimmte feste Grenze convergirt.

Bringt man den Du Bois'schen Satz (Seite 33) zunächst in Anwendung auf das erste und letzte jener $(q+2)$ Integrale, so erhält man:

$$\int_{-1}^{\alpha} = F(-1)\,[P_n(\xi) - P_n(-1)] + F(\alpha)\,[P_n(\alpha) - P_n(\xi)], \quad \text{wo} \quad (-1) < \xi \leqq \alpha;$$

$$\int_{\beta}^{+1} = F(\beta)\,[P_n(\eta) - P_n(\beta)] + F(1)\,[P_n(1) - P_n(\eta)], \quad \text{wo} \quad \beta \leqq \eta < 1;$$

oder, weil $P_n(-1) = (-1)^n$ und $P_n(1) = 1$ ist:

$$\int_{-1}^{\alpha} = (-1)^{n+1} F(-1) + F(\alpha)\, P_n(\alpha) + P_n(\xi)\,[F(-1) - F(\alpha)], \quad \text{wo} \quad (-1) < \xi < \alpha;$$

$$\int_{\beta}^{+1} = F(1) - F(\beta)\, P_n(\beta) + P_n(\eta)\,[F(\beta) - F(1)], \quad \text{wo} \quad \beta < \eta < 1.$$

Beachtet man nun, was $F(\alpha)$, $F(\beta)$ und $P_n(\alpha)$, $P_n(\beta)$ betrifft, die Bezeichnungen (22.), und beachtet man ferner, dass [nach dem Satze Seite 81] die absoluten Werthe von $P_n(\xi)$ und $P_n(\eta)$ nothwendig $\leqq 1$ sind, so ergiebt sich aus den letzten beiden Formeln sofort:

$$(24.)\qquad \begin{aligned} \int_{-1}^{\alpha} &= (-1)^{n+1} F(-1) + \vartheta' M \Pi_n^{\alpha\beta} + \Theta' \,[F(-1) - F(\alpha)], \\ \int_{\beta}^{+1} &= F(1) + \vartheta'' M \Pi_n^{\alpha\beta} + \Theta''[F(\beta) - F(1)], \end{aligned}$$

wo ϑ', ϑ'', Θ', Θ'' unbekannte (positive oder negative) ächte Brüche vorstellen.

Was die übrigen jener $(q+2)$ Integrale (23.) betrifft, so wird z. B. nach dem Du Bois'schen Satz:

$$\int_{\alpha}^{\gamma_1} = F(\alpha)\,[P_n(\xi) - P_n(\alpha)] + F(\gamma_1)\,[P_n(\gamma_1) - P_n(\xi)], \quad \text{wo} \quad \alpha \leqq \xi < \gamma_1 \quad \text{ist};$$

und wo die absoluten Werthe der Functionen F und P_n [vgl. die in (22.) eingeführte Bezeichnung] durchweg $\leqq M$ resp. $\leqq \Pi_n^{\alpha\beta}$ sind. Somit erhält man:

$$\int_{\alpha}^{\gamma_1} = \vartheta_1 \cdot 4 M \Pi_n^{\alpha\beta}; \quad \text{und in ähnlicher Weise:}$$

$$\int_{\gamma_1}^{\gamma_2} = \vartheta_2 \cdot 4 M \Pi_n^{\alpha\beta}, \tag{25.}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\int_{\gamma_{q-1}}^{\beta} = \vartheta_q \cdot 4 M \Pi_n^{\alpha\beta},$$

wo ϑ_1, ϑ_2, ... ϑ_q unbekannte ächte Brüche vorstellen. Addirt man sämmtliche Formeln (24.), (25.), so ergiebt sich mit Rücksicht auf (23.) sofort:

$$J_n = [F(1) + (-1)^{n+1} F(-1)] + \Theta' [F(-1) - F(\alpha)] + \Theta'' [F\beta) - F(1)] \\ + [(\vartheta' + \vartheta'') + 4(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots + \vartheta_q)] M \Pi_n^{\alpha\beta}; \tag{25'.}$$

oder, was dasselbe ist:

$$\text{abs}[J_n - F(1) + (-1)^n F(-1)] \leqq \underbrace{\text{abs}[F(-1) - F(\alpha)] + \text{abs}[F(\beta) - F(1)]}_{U} + \underbrace{\text{abs}[4q + 2) M \Pi_n^{\alpha\beta}]}_{V}; \tag{26.}$$

wo übrigens im Gliede V das Zeichen abs gestrichen werden könnte, weil q, M und $\Pi_n^{\alpha\beta}$ ihrer Bedeutung nach stets positiv sind.

Diese Formel (26.) entspricht in sehr bequemer Weise unseren eigentlichen Zwecken, falls man nur beachtet, dass die auxiliaren Puncte α und β, abgesehen von den Bedingungen

$$(-1) < \alpha < \gamma_1 \quad \text{und} \quad \gamma_{q-1} < \beta < (+1),$$

willkürlich geblieben sind, und ferner beachtet, dass die gegebene Function $F(\mu)$ in jedem der beiden Intervalle

$$(-1) \cdots\cdots \gamma_1 \quad \text{und} \quad \gamma_{q-1} \cdots\cdots (+1)$$

stetig ist. In der That kann man mittelst der Formel (26.) die Grösse: abs $[J_n - F(1) + (-1)^n F(-1)]$ unter einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad ε hinabdrücken; in der Weise, dass man zunächst das Glied U, durch eine geeignete Verschiebung der auxiliaren Puncte α und β*), unter $\frac{1}{2}\varepsilon$, sodann aber das Glied V, durch Vergrösserung der Zahl n, ebenfalls unter $\frac{1}{2}\varepsilon$ hinabdrückt**). Auch bemerkt man, dass jene Glieder U und V unter $\frac{1}{2}\varepsilon$ *bleiben* werden, falls man nach Ausführung der eben genannten Operationen das n noch weiter anwachsen lässt***). Kurz, die Formel (26.) zeigt in deutlicher Weise, dass

*) Diese geeignete Verschiebung besteht offenbar darin, dass man α [vgl. das Schema Seite 84] hinreichend nahe an den Punct (-1), andererseits β hinreichend nahe an den Punct $(+1)$ hinanschiebt.

**) Dass solches immer möglich ist, ergiebt sich aus dem Satze über $\Pi_n^{\alpha\beta}$, Seite 84.

***) Dies folgt ebenfalls aus dem Satze über $\Pi_n^{\alpha\beta}$, Seite 84.

$$(27.) \qquad \lim_{n=\infty} \left[J_n - F(1) + (-1)^n F(-1) \right] = 0$$

ist, und führt also, mit Rücksicht auf (20.), (21.), zu folgendem Resultat:

Dritter Satz.— *Bezeichnet $F(\mu)$ eine Function, die im Intervall $\mu = -1 \ldots +1$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist, so gilt die Formel:*

$$(28.) \qquad \lim_{n=\infty} \int_{-1}^{+1} F(\mu)\, P_n'(\mu)\, d\mu = \quad F(1) + (-1)^{n+1} F(-1)\,.$$

Das vorstehende Integral wird also bei unendlich wachsendem n, je nachdem man dieses n als gerade oder ungerade betrachtet, im ersteren Fall gegen $F(1) - F(-1)$, im letzteren gegen $F(1) + F(-1)$ convergiren.

Aus (28.) folgt z. B. für $F(\mu) = 1$ die Formel:

$$\lim_{n=\infty} \int_{-1}^{+1} P_n'(\mu)\, d\mu = 1 + (-1)^{n+1}\,,$$

d. i.
$$\lim_{n=\infty} \left[P_n(1) - P_n(-1) \right] = 1 + (-1)^{n+1}\,,$$

eine Formel, deren Richtigkeit ohne Weiteres aus Seite 81 (1.) ersichtlich ist.

Wichtiger sind andere Beispiele. Bezeichnet nämlich a irgend eine der Bedingung

$$-1 < a < +1$$

entsprechende Constante, und denkt man sich die Function $F(\mu)$ der Art gegeben, dass sie längs der Strecke $\mu = (-1) \ldots a$ überall $= 0$ ist, so erhält man:

$$(29.) \qquad \lim_{n=\infty} \int_{a}^{+1} F(\mu)\, P_n'(\mu)\, d\mu = F(1)\,.$$

Sind ferner a und b zwei der Bedingung

$$-1 < a < b < +1$$

entsprechende Constante, und denkt man sich die Function $F(\mu)$ in solcher Weise gegeben, dass sie nicht nur längs der Strecke $\mu = (-1) \ldots a$, sondern auch längs der Strecke $\mu = b \ldots (+1)$ überall $= 0$ ist, so erhält man:

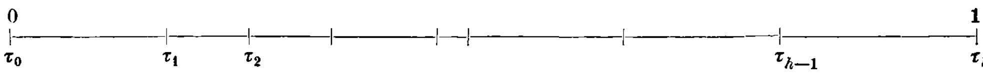
$$(30.) \qquad \lim_{n=\infty} \int_{a}^{b} F(\mu)\, P_n'(\mu)\, d\mu = 0\,.$$

U. s. w. Wir können also mittelst des Satzes (28.) den $\lim_{n=\infty}$ auch für solche Integrale bestimmen, deren Integrationsgrenzen a und b beliebig gegeben sind; nur dürfen a und b *nicht ausserhalb* des Intervalles $\mu = -1 \ldots + 1$ gelegen sein.

Weitere Betrachtungen über denselben Gegenstand. — Die im Vorhergehenden aufgestellten Sätze sind für unsere Zwecke *im Allgemeinen ausreichend.* Dagegen wird es für gewisse feinere Untersuchungen (zu denen wir im Folgenden unwillkürlich uns hingedrängt sehen werden) nöthig sein, das so eben behandelte Integral (28.), welches in zwei von — 1 bis 0 und von 0 bis 1 gehende Theile zerlegt werden kann, einer etwas *anderen* Behandlungsweise zu unterwerfen. Indem wir zunächst den von 0 bis 1 gehenden Integraltheil:

$$Y_n = \int_0^1 F(\mu)\, P_n'(\mu)\, d\mu \tag{31.}$$

ins Auge fassen, wollen wir wiederum annehmen, die Function $F(\mu)$ sei im Intervall $\mu = 0 \ldots . 1$ *abtheilungsweise stetig* und *abtheilungsweise monoton.* Und zwar mögen ihre monotonen Abtheilungen oder Strecken dargestellt sein durch folgendes Schema:

(32.)


so dass also h die *Anzahl* dieser Strecken bezeichnet.

Bei Integralen von der Form:

$$\int F(\mu)\, P_n'(\mu)\, d\mu \qquad \text{oder} \qquad \int [F(\mu) - \text{Const.}]\, P_n'(\mu)\, d\mu$$

wird alsdann der Du Bois'sche Satz (Seite 33) anwendbar sein mit Bezug auf jede solche *monotone Strecke*, und ebenso auch mit Bezug auf jeden *Theil* einer solchen Strecke. Sind z. B. $\varkappa$, λ irgend zwei der Bedingung

$$\tau_j \leq \varkappa < \lambda \leqq \tau_{j+1} \tag{33.}$$

entsprechende Constanten, so wird nach jenem Satze:

$$\int_\varkappa^\lambda [F(\mu) - \text{Const}]\, P_n'(\mu)\, d\mu = [F(\varkappa) - \text{Const}] \int_\varkappa^\xi P_n'(\mu)\, d\mu + [F(\lambda) - \text{Const}] \int_\xi^\lambda P_n'(\mu)\, d\mu\,,$$

$$= [F(\varkappa) - \text{Const}]\, [P_n(\xi) - P_n(\varkappa)] + [F(\lambda) - \text{Const}]\, [P_n(\lambda) - P_n(\xi)]\,,$$

wo $\varkappa \leqq \xi < \lambda$ ist. Bezeichnet man also die grössten Werthe, welche die Ausdrücke

$$\text{abs}\, [F(\mu) - \text{Const}] \qquad \text{und} \qquad \text{abs}\, P_n(\mu)$$

auf der Strecke $\mu = \varkappa \ldots \lambda$ anzunehmen im Stande sind, respective mit

$$\text{Max}_{\varkappa\lambda}\, \text{abs}\, [F(\mu) - \text{Const}] \qquad \text{und} \qquad \text{Max}_{\varkappa\lambda}\, \text{abs}\, P_n(\mu)\,,$$

so ergiebt sich sofort:

$$\text{abs} \int_\varkappa^\lambda [F(\mu) - \text{Const}]\, P_n'(\mu)\, d\mu \leqq 4 \Big(\text{Max}_{\varkappa\lambda}\, \text{abs}\, [F(\mu) - \text{Const}]\Big) \Big(\text{Max}_{\varkappa\lambda}\, \text{abs}\, P_n(\mu)\Big)\,; \tag{34.}$$

immer vorausgesetzt, dass die Strecke $\varkappa \ldots . \lambda$ eine *monotone Strecke*, oder einen *Theil* einer solchen vorstellt.

Diese Formel (34.) kann leicht verallgemeinert werden. Sind nämlich γ und δ irgend zwei der Bedingung

(35.) $$0 \leqq \gamma < \delta \leqq 1$$

entsprechende Constanten, und bezeichnet man die Anzahl derjenigen monotonen Strecken*), welche *ganz* oder *theilweise* im Intervall $\gamma \ldots \delta$ enthalten sind, mit g, so kann man das Integral

$$\int_\gamma^\delta [F(\mu) - \text{Const}]\, P_n'(\mu)\, d\mu$$

in g Theile zerlegen, und auf jeden solchen Theil die Formel (34.) anwenden. In solcher Weise ergiebt sich, wie leicht zu übersehen:

(36.) $$\text{abs}\int_\gamma^\delta [F(\mu) - \text{Const}]\, P_n'(\mu)\, d\mu \leqq 4g\left(\text{Max}_{\gamma\delta}\, \text{abs}\,[F(\mu) - \text{Const}]\right)\left(\text{Max}_{\gamma\delta}\, \text{abs}\, P_n(\mu)\right),$$

oder auch, weil offenbar $g \leqq h$ ist [vgl. (32.)]:

(37.) $$\text{abs}\int_\gamma^\delta [F(\mu) - \text{Const}]\, P_n'(\mu)\, d\mu \leqq 4h\left(\text{Max}_{\gamma\delta}\, \text{abs}\,[F(\mu) - \text{Const}]\right)\left(\text{Max}_{\gamma\delta}\, \text{abs}\, P_n(\mu)\right).$$

Dies vorangeschickt, wenden wir uns zum Integrale Y_n (31.). Zerlegt man das gegebene Integrationsintervall $0 \ldots . 1$ durch irgend welchen Punct β in zwei Theile:

(38.) $$0 < \beta < 1,$$

so ergiebt sich zunächst:

(39.) $$Y_n = \underbrace{\int_0^\beta F(\mu)\, P_n'(\mu)\, d\mu}_{U} + \underbrace{\int_\beta^1 F(\mu)\, P_n'(\mu)\, d\mu}_{V};$$

wo z. B. U, wie ein Blick auf (37.) zeigt, folgender Formel entsprechen wird:

$$\text{abs}\, U \leqq 4h\left(\text{Max}_{0,\beta}\, \text{abs}\, F(\mu)\right)\left(\text{Max}_{0,\beta}\, \text{abs}\, P_n(\mu)\right).$$

Von den beiden hier auf der rechten Seite stehenden Maximis ist offenbar das erste $\leq M$, und das zweite $= \Pi_n^{0,\beta}$, falls man nämlich unter M den absolut grössten Werth der Function $F(\mu)$ für das ganze Intervall $\mu = 0 \ldots 1$ versteht, andererseits aber $\Pi_n^{\alpha,\beta}$ in der früher (Seite 84) festgesetzten Bedeutung benutzt. Also:

(40.) $$\text{abs}\, U \leqq 4h\, M \Pi_n^{0,\beta}.$$

Andererseits ist das Integral V (39.) folgendermassen darstellbar:

(41.) $$V = F(1)\int_\beta^1 P_n'(\mu)\, d\mu + W, \qquad \text{wo} \quad W = \int_\beta^1 [F(\mu) - F(1)]\, P_n'(\mu)\, d\mu \quad \text{ist};$$

und wo also W der aus (37.) entspringenden Formel unterliegt:

$$\text{abs}\, W \leqq 4h\left(\text{Max}_{\beta,1}\, \text{abs}\,[F(\mu) - F(1)]\right)\left(\text{Max}_{\beta,1}\, \text{abs}\, P_n(\mu)\right).$$

*) Unter den *monotonen Strecken* sind hier überall die in (32.) angegebenen Strecken (τ_0, τ_1), (τ_1, τ_2), etc. etc. zu verstehen.

Bezeichnet man von den hier auftretenden beiden Maximis das *erste* mit $D^{\beta,1}$, und beachtet, dass das *letztere* $= 1$ ist (Satz Seite 81), so ergiebt sich:

$$\text{abs } W \leqq 4hD^{\beta,1}.$$

Mit Rücksicht hierauf gewinnt die Formel (41.) die Gestalt:

$$V = F(1)\,[P_n(1) - P_n(\beta)] + \vartheta \cdot 4hD^{\beta,1}, \tag{42.}$$

wo ϑ ein unbekannter ächter Bruch, und wo das Product $F(1)\,P_n(\beta)$ seinem absoluten Betrage nach $\leqq M\Pi_n^{0,\beta}$ ist; wie solches aus der Definition von M und $\Pi_n^{\alpha\beta}$ unmittelbar ersichtlich. Somit folgt:

$$V = F(1)\,P_n(1) + \vartheta \cdot 4hD^{\beta,1} + \vartheta' \cdot M\Pi_n^{0,\beta}, \tag{43.}$$

wo ϑ' ebenfalls ein ächter Bruch ist. Endlich gelangt man durch Substitution der Werthe (40.), (43.) in die Formel (39.) zu folgendem Resultat:

Vierter Satz. — *Ist die Function $F(\mu)$ im Intervall $\mu = 0 \ldots . 1$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton, bezeichnet man ferner die Anzahl ihrer monotonen Abtheilungen mit h, und ihren absolut grössten Werth für $\mu = 0 \ldots . 1$ mit M, so gilt die Formel:*

$$\int_0^1 F(\mu)\,P_n'(\mu)\,d\mu = F(1)\,P_n(1) + \vartheta \cdot 4hD^{\beta,1} + \Theta \cdot (4h+1)\,M\Pi_n^{0,\beta}. \tag{44.}$$

Hier bezeichnet β eine der Bedingung $0 < \beta < 1$ entsprechende, sonst aber willkürlich zu wählende Constante; und von dieser Constanten abhängig sind die Grössen $D^{\beta,1}$ und $\Pi_n^{0,\beta}$. Erstere bezeichnet nämlich den absolut grössten Werth der Differenz $[F(\mu) - F(1)]$ für das Intervall $\mu = \beta \ldots . 1$; und letztere bezeichnet [in vollem Einklang mit unseren früheren Festsetzungen, Seite 84] *den absolut grössten Werth von $P_n(\mu)$ im Intervall $\mu = 0 \ldots . \beta$. Endlich sind ϑ und Θ unbekannte ächte Brüche.*

In analoger Weise wird sich offenbar das betrachtete Integral auch dann behandeln lassen, wenn es nicht von 0 bis $(+1)$, sondern von 0 bis (-1) hinerstreckt ist. In der That gelangt man hierbei, wie leicht zu übersehen ist, zu folgendem Satz:

Fünfter Satz. — *Ist die Function $F(\mu)$ im Intervall $\mu = -1 \ldots . 0$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton, bezeichnet man ferner die Anzahl ihrer monotonen Abtheilungen mit h, und ihren absolut grössten Werth im ganzen Intervall $\mu = -1 \ldots . 0$ mit M, so gilt die Formel*):*

$$\int_0^{-1} F(\mu)\,P_n'(\mu)\,d\mu = F(-1)\,P_n(-1) + \vartheta \cdot 4hD^{-1,\alpha} + \Theta \cdot (4h+1)\,M\Pi_n^{\alpha,0}. \tag{45.}$$

Hier bezeichnet α eine der Bedingung $-1 < \alpha < 0$ entsprechende, sonst aber willkürlich zu wählende Constante. Ferner repräsentirt $D^{-1,\alpha}$ den absolut grössten Werth der Differenz $[F(\mu) - F(-1)]$ für das Intervall $\mu = -1 \ldots . \alpha$; während $\Pi_n^{\alpha,0}$ die früher (Seite 84) *ein für allemal festgesetzte Bedeutung hat. Endlich sind ϑ und Θ unbekannte ächte Brüche.*

---

*) Hier ist offenbar $P_n(-1) = (-1)^n$, ebenso wie in (44.) das $P_n(1) = 1$ ist.

Dass man, durch geeignete Benutzung der beiden letzten Sätze (44.) und (45.), mit Leichtigkeit zum früheren Satze (28.) Seite 87 zurückgelangen kann, liegt auf der Hand. — Ohne hierauf weiter einzugehen, wollen wir sogleich zu einem *letzten* Satze uns hinwenden, der ebenfalls für die nachfolgenden Untersuchungen von Gewicht ist. Derselbe lautet:

Sechster Satz. — *Bezeichnet n irgend eine der Zahlen* 0, 1, 2, 3, ..., *so gilt stets die Formel:*

$$P_0(\mu) + 3P_1(\mu) + 5P_2(\mu) \cdots + (2n+1)P_n(\mu) = P_n'(\mu) + P_{n+1}'(\mu), \tag{46.}$$

wo die Accente rechts die Differentialquotienten nach μ *andeuten sollen.*

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich leicht mittelst der bekannten Formel:

$$(2n+1)P_n(\mu) = P_{n+1}'(\mu) - P_{n-1}'(\mu). \text{ *)} \tag{f.}$$

Beachtet man nämlich, dass $P_0(\mu) = 1$, mithin $P_0'(\mu) = 0$ ist, so ergeben sich aus dieser Formel (f.) für $n = 1, 2, 3, \ldots.$ die im nachfolgenden System in (b.), (c.), (d.), ... aufgeführten Gleichungen:

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a.)} & P_0(\mu) = P_1'(\mu), \\
\text{(b.)} & 3P_1(\mu) = P_2'(\mu), \\
\text{(c.)} & 5P_2(\mu) = P_3'(\mu) - P_1'(\mu), \\
\text{(d.)} & 7P_3(\mu) = P_4'(\mu) - P_2'(\mu), \\
 & \text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{array}
$$

Die in (a.) aufgeführte *erste* Gleichung dieses Systems bedarf offenbar keines weiteren Beweises; denn es ist ja $P_0(\mu) = 1$, und $P_1(\mu) = \mu$. — Aus diesen Gleichungen (a.), (b.), (c.), (d.), ... folgt nun aber durch successive Additionen:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(a.)} & P_0(\mu) = & P_0'(\mu) + P_1'(\mu), \\
\text{(a.)} + \text{(b.)} & P_0(\mu) + 3P_1(\mu) = & P_1'(\mu) + P_2'(\mu), \\
\text{(a.)} + \text{(b.)} + \text{(c.)} & P_0(\mu) + 3P_1(\mu) + 5P_2(\mu) = & P_2'(\mu) + P_3'(\mu), \\
\text{(a.)} + \text{(b.)} + \text{(c.)} + \text{(d.)} & P_0(\mu) + 3P_1(\mu) + 5P_2(\mu) + 7P_3(\mu) = & P_3'(\mu) + P_4'(\mu), \\
 & \text{etc.} \qquad \text{etc.} &
\end{array}
$$

und diese Formeln repräsentiren den zu beweisenden Satz.

§ 2.

Ueber die Entwicklung nach Kugelfunctionen.

Auf einer Kugelfläche vom *Radius Eins* mögen zwei Pole, der Nord- und Südpol, festgesetzt, und die Coordinaten eines beliebigen *variablen* Punctes mit ω, φ bezeichnet werden. Und zwar sei ω die sphärische Entfernung des Punctes vom Nordpol, andererseits φ das Azimuth der Meridianebene des

*) Vgl. *F. Neumann*: *Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen* (Teubner, 1878) Seite 61, (II.).

Punctes gegen irgend eine feste Meridianebene*). Ferner sei $\cos\omega = \mu$. Denkt man sich also auf dieser Kugelfläche irgend eine Function

$$f(\mu, \varphi) \quad \text{oder} \quad f(\cos\omega, \varphi) \tag{1.}$$

ausgebreitet, so wird der Werth dieser Function im Nordpol $= f(1, \varphi)$, und ihr Werth im Südpol $= f(-1, \varphi)$ sein. Ist die Function im Nordpol stetig, so wird offenbar $f(1, \varphi)$ eine völlig bestimmte, also von φ unabhängige Grösse sein. Analoges gilt für den Südpol.

Beschreibt man ferner um den Nordpol einen Kreis mit dem *sphärischen Radius* ω, also einen sogenannten Parallelkreis, so wird das arithmetische Mittel F derjenigen Werthe, welche die gegebene Function (1.) längs dieses Parallelkreises besitzt, nur von jenem *sphärischen Radius* ω abhängen können, und demgemäss etwa mit $F(\cos\omega)$ oder $F(\mu)$ zu bezeichnen sein. Repräsentirt $d\sigma$ das beim Puncte (ω, φ) gelegene Bogenelement des Parallelkreises, so ist offenbar

$$F(\cos\omega) = \frac{\int f(\cos\omega, \varphi)\, d\sigma}{\int d\sigma},$$

beide Integrationen hinerstreckt gedacht über den ganzen Parallelkreis. Nun ist der *eigentliche Radius* dieses Kreises $= \sin\omega$, mithin $d\sigma = (\sin\omega)\, d\varphi$. Substituirt man aber diesen Werth für $d\sigma$, hebt sodann durch $\sin\omega$, und führt endlich die Integration im Nenner wirklich aus, so erhält man:

$$F(\cos\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos\omega, \varphi)\, d\varphi\,, \tag{2a.}$$

oder, was dasselbe ist:

$$F(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi)\, d\varphi\,, \tag{2b.}$$

Beiläufig sei noch bemerkt, dass der Ausdruck

$$\lim_{\omega=0} F(\cos\omega) = \lim_{\mu=1} F(\mu) \tag{3.}$$

zu bezeichnen sein wird als das arithmetische Mittel derjenigen Werthe, welche die gegebene Function f besitzt längs eines um den Nordpol beschriebenen unendlich kleinen Kreises. — — Dies vorangeschickt, gehen wir über zu unserer eigentlichen

Aufgabe. — Nach unseren früheren, aber *sehr unsicheren* Betrachtungen (Seite 14) ist jede Function $f(\mu, \varphi)$ entwickelbar nach Kugelfunctionen, nämlich in einem beliebigen Puncte (μ_1, φ_1) darstellbar durch folgende Formel:

$$f(\mu_1, \varphi_1) = \lim_{n=\infty} \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi)\left(\sum_0^n (2n+1)\, P_n(\cos\gamma)\right) d\mu\, d\varphi, \tag{4.}$$

---

*) Selbstverständlich ist jede solche Meridianebene als eine *Halbebene* anzusehen.

wo γ den sphärischen Abstand zwischen den Puncten (μ, φ) und (μ_1, φ_1), d. i. zwischen den Puncten (ω, φ) und (ω_1, φ_1) vorstellt; so dass also

$$\text{(5.)} \qquad \begin{aligned} \cos\gamma &= \cos\omega \cos\omega_1 + \sin\omega \sin\omega_1 \cos(\varphi - \varphi_1) \\ &= \mu\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_1^2}\cos(\varphi - \varphi_1) \end{aligned}$$

ist. — *Es fragt sich nun, ob und in welchen Fällen jene Formel* (4.) *wirklich correct ist.* Und zu diesem Zwecke ist das in jener Formel auftretende Integral

$$\text{(6.)} \qquad S_n = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi)\left(\sum_0^n (2n+1)\,P_n(\cos\gamma)\right) d\mu\, d\varphi$$

einer genaueren Untersuchung zu unterwerfen. Um dabei sicher zu sein, dass dieses Integral sich wirklich ausführen lässt, *wollen wir von vornherein annehmen, die Kugelfläche könne durch irgend welche Curven, resp. durch irgend welches Netz von Curven in eine* endliche *Anzahl von Theilen zerlegt werden, der Art, dass die Function*

$$(\mathfrak{B}.) \qquad f(\mu, \varphi)$$

auf jedem solchen Theil stetig *ist*); und ausserdem annehmen, die Biegung jener Curven sei* abtheilungsweise stetig *und* abtheilungsweise monoton**). Dies vorausgeschickt, beginnen wir nun zunächst mit dem

Specialfall, dass der gegebene Punct (μ_1, φ_1) oder (ω_1, φ_1) gerade im Nordpol liegt, dass also $\omega_1 = 0$, mithin $\mu_1 = 1$ ist. Alsdann wird nach (5.) offenbar: $\cos\gamma = \mu$; so dass also das zu untersuchende Integral (6.) die Gestalt annimmt:

$$\text{(7.)} \qquad S_n = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi)\left(\sum_0^n (2n+1)\,P_n(\mu)\right) d\mu\, d\varphi\,.$$

Hieraus folgt mittelst des Satzes, Seite 91:

$$\text{8.)} \qquad S_n = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi)\left[P_n'(\mu) + P_{n+1}'(\mu)\right] d\mu\, d\varphi\,,$$

*) Um diesen Begriff der *Stetigkeit* festzustellen, sei folgendes bemerkt: Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}, \ldots$ diejenigen Theile, in welche die Kugelfläche durch jene Curven resp. durch jenes Curvennetz zerlegt ist, so kann man füglich sprechen von den $\mathfrak{A}$-Werthen der Function $f(\mu, \varphi)$, ebenso von ihren $\mathfrak{B}$-Werthen u. s w., indem man z. B. unter den $\mathfrak{A}$-Werthen diejenigen versteht, welche auf dem Theile $\mathfrak{A}$ sich vorfinden. Markirt man nun *auf* $\mathfrak{A}$ (einerlei ob *im Innern* oder *am Rande* von $\mathfrak{A}$) irgend welchen Punct α, so nenne ich die $\mathfrak{A}$-Werthe im Puncte α *stetig*, sobald ihre Schwankung innerhalb eines um α beschriebenen Kreises, durch Verkleinerung dieses Kreises, unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabgedrückt werden kann. Sind ferner die $\mathfrak{A}$-Werthe stetig in *jedwedem* Punct α des Gebietes $\mathfrak{A}$, so sage ich kurzweg, *jene Werthe seien auf* $\mathfrak{A}$ *überall stetig*, oder noch einfacher, *die gegebene Function* $f(\mu, \varphi)$ *sei auf* $\mathfrak{A}$ *überall stetig.*

**) Durch diese Bestimmungen wird festgesetzt, dass eine solche Curve weder unendlich viele Ecken, noch auch unendlich viele Oscillationen besitzen solle.

also durch Einführung der auxiliaren Function $F(\mu)$, [vgl. 2b.)]:

$$(9.)\qquad S_n = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} F(\mu)\left[P_n'(\mu) + P_{n+1}'(\mu)\right] d\mu\,.$$

Hieraus aber folgt weiter, falls jene auxiliare Function $F(\mu)$ im Intervall $\mu = -1 \ldots . + 1$ *abtheilungsweise stetig* und *abtheilungsweise monoton* ist, mittelst des Satzes Seite 87:

$$(10.)\qquad \lim_{n=\infty} S_n = \tfrac{1}{2}\left[F(1) + (-1)^{n+1} F(-1)\right] + \tfrac{1}{2}\left[F(1) + (-1)^{n+2} F(-1)\right],$$

oder, was dasselbe:

$$(11.)\qquad \lim_{n=\infty} S_n = F(1)\,,$$

oder, noch ein wenig anders geschrieben:

$$(12.)\qquad \lim_{n=\infty} S_n = \lim_{\mu=1} F(\mu)\,;$$

wo gegenwärtig der Ausdruck rechts [vgl. (3.)] zu bezeichnen sein wird als *das arithmetische Mittel derjenigen Werthe, welche die gegebene Function $f(\mu, \varphi)$ besitzt längs eines unendlich kleinen um den Nordpol beschriebenen Kreises.* Somit gelangen wir zu folgendem Resultat:

Theorem. — *Ist auf einer Kugelfläche vom Radius Eins irgend welche den Voraussetzungen* ($\mathfrak{V}$.) Seite 93 *entsprechende Function $f(\mu, \varphi)$ ausgebreitet, und setzt man:*

$$(\mathrm{A}\,\alpha.)\qquad S_n = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi)\left(\sum_0^n (2n+1)\, P_n(\mu)\right) d\mu\, d\varphi\,,$$

so wird dieses S_n bei wachsendem n gegen eine bestimmte feste Grenze convergiren. Und zwar ist diese Grenze dargestellt durch das arithmetische Mittel derjenigen Werthe, welche $f(\mu, \varphi)$ besitzt längs eines um den Nordpol ($\mu = 1$) beschriebenen unendlich kleinen Kreises. Will man dieses Theorem mittelst einer Formel ausdrücken, so hat man [ebenso wie in (2b.)] *die Function*

$$(\beta.)\qquad F(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi)\, d\varphi$$

einzuführen, und sodann [ebenso wie in (12.)] *zu schreiben:*

$$(\gamma.)\qquad \lim_{n=\infty} S_n = \lim_{\mu=1} F(\mu)\,.$$

NB. *Doch ist dieses Theorem mit voller Sicherheit nur dann anwendbar, wenn die auxiliare Function*

$$(\delta.)\qquad F(\mu)$$

im Intervall $\mu = -1 \ldots + 1$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist).*

*) Man vgl. die beim Uebergange von (9.) zu (10.) gemachte Voraussetzung.

Allgemeiner Fall. — Statt des *speciellen* S_n (7.) soll jetzt das *allgemeine* S_n (6.) betrachtet werden. Setzt man wie früher $\mu = \cos\omega$, und setzt man überdies zur augenblicklichen Abkürzung:

$$(13.)\quad \begin{aligned} &\frac{1}{4\pi}\sum_0^n (2n+1)\,P_n(\cos\omega) = \Lambda_n(\omega), \\ \text{mithin:}\quad &\frac{1}{4\pi}\sum_0^n (2n+1)\,P_n(\cos\gamma) = \Lambda_n(\gamma), \end{aligned}$$

so wird offenbar:

$$(14.)\quad \begin{aligned} &\text{das specielle } S_n = \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \Lambda_n(\omega)\cdot f(\mu,\varphi)\,d\mu\,d\varphi, \\ &\text{und das allgemeine } S_n = \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} \Lambda_n(\gamma)\cdot f(\mu,\varphi)\,d\mu\,d\varphi. \end{aligned}$$

Wir sehen, dass diese beiden S_n schon äusserlich nur wenig von einander unterschieden sind. Um die Sache noch deutlicher hervortreten zu lassen, wollen wir für den Augenblick uns vorstellen, die Function $f(\mu, \varphi)$ repräsentire die Dichtigkeit einer auf der Kugelfläche ausgebreiteten Massenbelegung. Alsdann repräsentirt offenbar $f(\mu, \varphi)\,d\mu\,d\varphi$ ein *Massenelement* (nämlich diejenige Masse, welche auf dem *Flächenelement* $d\mu\,d\varphi$ vorhanden ist). Die Integrale S_n (14.) repräsentiren also die Summe all' dieser Massenelemente $f(\mu, \varphi)\,d\mu\,d\varphi$, jedes noch multiplicirt mit dem zugehörigen Werth von $\Lambda_n(\omega)$ oder $\Lambda_n(\gamma)$. Es unterscheiden sich also die beiden Integrale nur dadurch von einander, dass im *ersten* jedes Massenelement multiplicirt ist mit der Function Λ_n, dieselbe bezogen gedacht auf den sphärischen Abstand ω des Elementes *vom Nordpol*; während im *letztern* jedes Massenelement mit demjenigen Werthe der Function Λ_n multiplicirt sich findet, welchen dieselbe besitzt für den sphärischen Abstand γ des Elementes *vom festen Puncte* (μ_1, φ_1).

Mit anderen Worten: Jedes der beiden Integrale S_n (14.) ist abhängig von einem gewissen festen Puncte; und der einzige Unterschied zwischen ihnen besteht darin, dass dieser feste Punct im *einen* S_n die *Lage des Nordpols*, im *andern* hingegen die *Lage* (μ_1, φ_1) besitzt. Blicken wir also zurück auf den für das *erstere* S_n erhaltenen Satz (Aα., β., γ.), so erkennen wir sofort, dass für das *letztere* S_n folgender analoge Satz gelten muss:

Theorem. — *Bezeichnet $f(\mu, \varphi)$ eine auf der Kugelfläche vom Radius Eins ausgebreitete und den Voraussetzungen* (𝔙.) Seite 93 *entsprechende Function, bezeichnet ferner γ den sphärischen Abstand des Punctes (μ, φ) von einem gegebenem* f e s t e n P u n c t *(μ_1, φ_1), und setzt man:*

$$(B\alpha.)\quad S_n = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} f(\mu,\varphi)\left(\sum_0^n (2n+1)\,P_n(\cos\gamma)\right)d\mu\,d\varphi,$$

so wird dieses S_n *bei wachsendem* n *gegen eine bestimmte feste Grenze convergiren. Und zwar wird diese Grenze dargestellt sein durch das arithmetische Mittel derjenigen Werthe, welche* $f(\mu, \varphi)$ *besitzt längs eines um den festen Punct* (μ_1, φ_1) *beschriebenen unendlich kleinen Kreises. — Denkt man sich also um jenen Punct* (μ_1, φ_1) *zunächst einen endlichen Kreis beschrieben vom sphärischen Radius* ϱ*, setzt man ferner* $\cos\varrho = \zeta$*, und bezeichnet man endlich das arithmetische Mittel derjenigen Werthe, welche* $f(\mu, \varphi)$ *längs dieses Kreises besitzt, mit*

$$(\beta.)\qquad F(\cos\varrho) \quad \textit{oder} \quad F(\zeta),$$

so gilt die Formel:

$$(\gamma.)\qquad \lim_{n=\infty} S_n = \lim_{\zeta=1} F(\zeta).$$

NB. *Doch ist dieses Theorem mit voller Sicherheit nur dann anwendbar, wenn die Function*

$$(\delta.)\qquad F(\zeta)$$

im Intervall $\zeta = -1 \ldots\ldots + 1$ *abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist.*

Ist die gegebene Function $f(\mu, \varphi)$ auf der Kugelfläche überall *stetig,* so wird offenbar das arithmetische Mittel derjenigen Werthe, welche sie längs eines um den Punct (μ_1, φ_1) beschriebenen unendlich kleinen Kreises besitzt, nichts Anderes sein als ihr Werth *in jenem Puncte,* also identisch sein mit $f(\mu_1, \varphi_1)$; so dass also das vorstehende Theorem in diesem Fall die Gestalt annimmt:

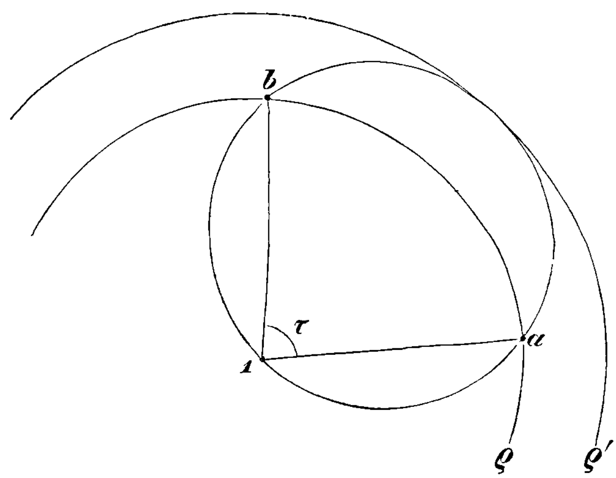
$$(\varepsilon.)\qquad \lim_{n=\infty} S_n = f(\mu_1, \varphi_1).$$

Dies aber ist die zu prüfende Formel Seite 92 (4.), oder mit anderen Worten diejenige Formel, durch welche die Entwicklung von $f(\mu_1, \varphi_1)$ nach Kugelfunctionen dargestellt wird. *Demgemäss wird man also sagen können, dass jene Entwicklung einer gegebenen Function nach Kugelfunctionen im Allgemeinen convergent und gültig sei, falls nur die Function den Bedingungen* (𝔅.) Seite 93 *entspricht.* Will man allerdings die hierfür nothwendigen Bedingungen nicht *im Allgemeinen,* sondern mit *wirklicher Genauigkeit* haben, so wird noch hinzuzufügen sein die oben in (δ.) aufgeführte Bedingung.

Diese Bedingung (δ.) ist offenbar eine sehr ungeschickte und unbequeme. Denn will man z. B. wissen, ob das Theorem (Bα., β., γ.) auf eine gegebene Function $f(\mu, \varphi)$ und einen gegebenen Punct (μ_1, φ_1) anwendbar sei, so hat man zunächst die diesem Punct entsprechenden Parallelkreise zu construiren, für diese Parallelkreise die Function $F(\zeta)$ zu bilden, und endlich zu untersuchen, ob diese letztere der Bedingung (δ.) entspricht. Doch giebt es einzelne Fälle, in denen man diese Untersuchung leicht durch geometrische Anschauung absolviren kann.

Erstes Beispiel. — Auf der Kugelfläche sei irgend eine *Kreisperipherie**) gegeben, und die Function $f(\mu, \varphi)$ sei innerhalb dieser Peripherie constant, etwa $= C$, und ausserhalb derselben $= 0$. Ferner liege der gegebene Punct (μ_1, φ_1) *auf* dieser Peripherie, etwa im Puncte 1 der untenstehenden Figur. Alsdann sind die arithmetischen Mittel von $f(\mu, \varphi)$ zu untersuchen für die mit irgend welchen sphärischen Radien $\varrho, \varrho', \varrho'', \ldots$ um jenen Punct 1 oder (μ_1, φ_1) beschriebenen Parallelkreise; dabei sei insbesondere ϱ' der Radius desjenigen Parallelkreises, welcher die gegebene Peripherie *gerade berührt.*

Was den in unserer Figur gezeichneten Kreis (ϱ) betrifft, welcher die gegebene Peripherie in den Puncten a und b schneidet, — so sind offenbar die Werthe von $f(\mu, \varphi)$ längs dieses Kreises (ϱ) zwischen a und b gleich C, und sonst gleich 0. Demgemäss ist das arithmetische Mittel dieser Werthe $= C\frac{\tau}{2\pi}$, wo τ den Winkel $(a\,1\,b)$ vorstellt. Nach unserer in (β.) eingeführten Bezeichnungsweise ist also



$$F = F(\cos\varrho) = C\frac{\tau}{2\pi}. \tag{15.}$$

Durchmustern wir nun die in Rede stehenden Parallelkreise der Reihe nach, indem wir zunächst ϱ von 0 bis ϱ' wachsen lassen, so wird offenbar τ [vgl. die Figur] in *beständigem Abnehmen* begriffen sein von π bis 0; und Gleiches also auch gelten von dem arithmetischen Mittel F (15.). Lassen wir sodann ϱ weiter wachsen von ϱ' bis π, so wird offenbar F beständig 0 sein. Die Function $F(\cos\varrho)$ ist also für $\varrho = 0 \ldots\ldots \varrho'$ im *beständigen Abnehmen*, und für $\varrho = \varrho' \ldots\ldots \pi$ in *beständigem Nullsein* begriffen. Oder anders ausgedrückt: Die Function $F(\zeta)$ ist in *beständigem Abnehmen* für $\zeta = 1 \ldots\ldots \zeta'$, und in *beständigem Nullsein* für $\zeta = \zeta' \ldots\ldots (-1)$. Wir sehen somit, dass diese Function $F(\zeta)$ im Intervall $\zeta = -1 \ldots\ldots +1$ nicht nur *stetig*, sondern auch *monoton* ist.

In ähnlicher Weise erkennt man leicht, dass die Function $F(\zeta)$ für $\zeta = -1 \ldots\ldots +1$ *stetig* und *abtheilungsweise monoton* ist, wenn der Punct (μ_1, φ_1) nicht *auf*, sondern *innerhalb* oder *ausserhalb* der gegebenen Peripherie

*) Diese Kreisperipherie wird im Allgemeinen ein sogenannter *kleiner Kreis* sein; und ihr Mittelpunct mag eine *beliebig gegebene* Lage, etwa die Coordinaten (μ_0, φ_0) besitzen.

liegt. Demgemäss ist also das allgemeine Theorem (B.) Seite 95 auf den vorliegenden Fall *anwendbar,* und zwar für *beliebige Lagen* des Punctes (μ_1, φ_1). Und man gelangt daher, falls man die Constante $C = 1$ macht, zu folgendem Resultat.

Bezeichnet $\mathfrak{J}$ denjenigen Theil der Kugelfläche, welcher umschlossen wird von einer gegebenen Kreisperipherie, bezeichnet ferner (μ, φ) einen variablen Punct der Fläche $\mathfrak{J}$, und γ den sphärischen Abstand dieses Punctes von einem gegebenen festen Punct (μ_1, φ_1), so wird das über $\mathfrak{J}$ ausgedehnte Integral:

$$S_n = \frac{1}{4\pi} \int\int_{\mathfrak{J}} \left(\sum_0^n (2n+1)\, P_n(\cos\gamma) \right) d\mu\, d\varphi \tag{16.}$$

mit wachsendem n gegen 0, $\frac{1}{2}$, oder 1 convergiren, je nachdem der Punct (μ_1, φ_1) ausserhalb $\mathfrak{J}$, auf der Grenze von $\mathfrak{J}$, oder innerhalb $\mathfrak{J}$ liegt.

Zweites Beispiel. — Auf der Kugelfläche mag *innerhalb* der eben betrachteten Kreisfläche $\mathfrak{J}$ eine zweite Kreisfläche $\mathfrak{K}$ construirt werden (deren sphärischer Mittelpunct im Allgemeinen von dem der Fläche $\mathfrak{J}$ verschieden sein soll); ferner mag die ringförmige Fläche $(\mathfrak{J}-\mathfrak{K})$ mit $\mathfrak{R}$ bezeichnet, und das über $\mathfrak{R}$ ausgedehnte Integral

$$S_n = \frac{1}{4\pi} \int\int_{\mathfrak{R}} \left(\sum_0^n (2n+1)\, P_n(\cos\gamma) \right) d\mu\, d\varphi$$

betrachtet werden; wo γ den sphärischen Abstand des Punctes (μ, φ) von irgend einem *festen* Punct (μ_1, φ_1) vorstellen soll.

Offenbar kann man dieses Integral S_n als die Differenz zweier Integrale auffassen, von denen das eine über $\mathfrak{J}$, das andere über $\mathfrak{K}$ sich ausdehnt; und gelangt somit durch Anwendung des Satzes (16.) zu folgendem Resultat:

Bezeichnet $\mathfrak{R}$ denjenigen ringförmigen Theil der Kugelfläche, welcher begrenzt ist von irgend zwei einander nicht schneidenden Kreisen, ferner (μ, φ) einen variablen Punct dieser Fläche $\mathfrak{R}$, und γ den sphärischen Abstand des Punctes (μ, φ) von einem gegebenem festen Punct (μ_1, φ_1), so wird das über $\mathfrak{R}$ ausgedehnte Integral

$$S_n = \frac{1}{4\pi} \int\int_{\mathfrak{R}} \left(\sum_0^n (2n+1)\, P_n(\cos\gamma) \right) d\mu\, d\varphi \tag{17.}$$

mit unendlich wachsendem n gegen 0, $\frac{1}{2}$, oder 1 convergiren, je nachdem der Punct (μ_1, φ_1) ausserhalb $\mathfrak{R}$, auf der Grenze von $\mathfrak{R}$, oder innerhalb $\mathfrak{R}$ liegt.

Drittes Beispiel. — Auf der Kugelfläche sei ein von drei Kreisbogen*) begrenztes *Dreieck* gegeben; und die Function $f(\mu, \varphi)$ sei innerhalb dieses

*) Dabei soll dahingestellt bleiben, ob diese Bogen Theile von *grossen* oder *kleinen* Kreisen sind.

Dreiecks constant, $= C$, und ausserhalb desselben $= 0$. Liegt zunächst der Punct (μ_1, φ_1) auf der Peripherie des Dreiecks (auf einer Seite oder in einer Ecke), und beschreibt man um (μ_1, φ_1) als Mittelpunct irgend welche Kreise, so kann man leicht, mittelst einfacher geometrischer Betrachtungen, zeigen, dass die diesen Parallelkreisen entsprechende Function $F(\zeta)$ *stetig* und *abtheilungsweise monoton*, und dass also das allgemeine Theorem (B.) Seite 95 *auf diesen Fall anwendbar ist.* — Solches aber erkannt, ergiebt sich alsdann, mittelst der Methode der Superposition*), sofort, dass dieses Theorem auch dann anwendbar ist, wenn der Punct (μ_1, φ_1) *innerhalb* des gegebenen Dreiecks, oder *ausserhalb* desselben liegt.

Vom Dreieck kann man sodann, wiederum mittelst der Methode der Superposition, übergehen zu einem von irgend welchen Kreisbogen begrenzten Polygon. U. s. w.

Bemerkung. — Diese Beispiele dürften hinreichend darthun, wie *umständlich* eine strenge Handhabung unseres allgemeinen Theorems (B.) selbst in einfachen Fällen ist. Es wird daher nicht überflüssig sein, diesem Theorem im folgenden § ein anderes zur Seite zu stellen, welches in seiner Anwendung bequemer ist.

Zweite Bemerkung. — Das Integral (17.) gewinnt, falls man die beiden Begrenzungskreise der Fläche $\mathfrak{R}$ mit zwei (dem Nord- und Südpol entsprechenden) Parallelkreisen zusammenfallen lässt, die Gestalt:

$$(18.)\qquad S_n = \frac{1}{4\pi}\int_\gamma^\delta\int_0^{2\pi}\left(\sum_0^n (2n+1)\,P_n(\cos\gamma)\right) d\mu\, d\varphi\,, \quad \text{wo} \quad -1 < \gamma < \delta < 1 \text{ **)}$$

wo $P_n(\cos\gamma)$ den Werth hat [vgl. (8.) Seite 13]:

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\mu)\,P_n(\mu_1) + \sum_{j=1}^{j=\infty} \varepsilon_j \Delta_{nj} P_{nj}(\mu)\,P_{nj}(\mu_1)\cos j(\varphi-\varphi_1)\,.$$

Durch Substitution dieses Werthes in (18.), und Ausführung der Integration nach φ ergiebt sich sofort:

$$(19.)\qquad S_n = \tfrac{1}{2}\int_\gamma^\delta\left(\sum_0^n (2n+1)\,P_n(\mu)\,P_n(\mu_1)\right) d\mu\,, \quad \text{wo} \quad -1 < \gamma < \delta < 1\,.$$

---

*) D. i. mittelst der in vorhergehendem Beispiel benutzten Methode.

**) Man möge entschuldigen, dass hier ganz vorübergehend der Buchstabe γ in zwei verschiedenen Bedeutungen gebraucht ist. Während nämlich das *unter dem Cosinuszeichen stehende* γ seine gewöhnliche Bedeutung hat:

$$\cos\gamma = \mu\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_1^2}\cos(\varphi-\varphi_1)\,,$$

nämlich den sphärischen Abstand des Punctes (μ, φ) vom Puncte (μ_1, φ_1) vorstellt; — soll andererseits *das als untere Integrationsgrenze auftretende* γ eine beliebig gegebene Constante repräsentiren, deren Werth übrigens zwischen -1 und $+1$ liegend zu denken ist.

Und dieses Integral wird also [nach dem Satze (17.)] mit wachsendem n gegen 0, oder $\frac{1}{2}$, oder 1 convergiren, je nachdem der Punct (μ_1, φ_1) *ausserhalb* der von den beiden Parallelkreisen $\mu = \gamma$ und $\mu = \delta$ begrenzten Zone $\mathfrak{R}$, oder *an der Grenze* von $\mathfrak{R}$, oder endlich *innerhalb* $\mathfrak{R}$ liegt.

Sind also γ, δ zwei der Bedingung $-1 < \gamma < \delta < 1$ entsprechende Constanten, so wird der Ausdruck

$$\text{(20.)} \qquad \lim_{n=\infty} \int_\gamma^\delta \left(\sum_0^n \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) P_n(\mu_1) \right) d\mu = \lim_{n=\infty} \int_\gamma^\delta \Lambda_n(\mu, \mu_1)\, d\mu$$

$$= 0, \quad \textit{oder} \quad = \tfrac{1}{2}, \quad \textit{oder} \quad = 1, \quad \textit{oder} \quad = \tfrac{1}{2}, \quad \textit{oder} \quad = 0$$

sein, je nachdem

$$-1 \leqq \mu_1 < \gamma, \quad \textit{oder} \quad \mu_1 = \gamma, \quad \textit{oder} \quad \gamma < \mu_1 < \delta, \quad \textit{oder} \quad \mu_1 = \delta, \quad \textit{oder} \quad \delta < \mu_1 \leqq 1$$

ist. Dabei soll das in (20.) angewendete Λ_n nur zur Abkürzung bei weiteren Betrachtungen dienen.

Dieser Satz (20.) ist *wesentlich gebunden* an die in ihm erwähnte Bedingung: $-1 < \gamma < \delta < 1$; z. B. nicht mehr richtig für $\gamma = -1$, oder für $\delta = +1$. In der That lehrt ein Blick auf die in (16.) angestellte Betrachtung, dass der vorstehende Satz für den Fall $\gamma = -1$ durch folgenden zu ersetzen ist.

Bezeichnet δ eine der Bedingung $-1 < \delta < 1$ entsprechende Constante, so wird

$$\text{(21.)} \qquad \lim_{n=\infty} \int_{-1}^\delta \Lambda_n(\mu, \mu_1)\, d\mu = \quad 1, \quad \textit{oder} \quad = \tfrac{1}{2}, \quad \textit{oder} \quad = 0 \quad \textit{sein},$$

$$\textit{je nachdem} \qquad -1 \leqq \mu_1 < \delta, \quad \textit{oder} \quad \mu_1 = \delta, \quad \textit{oder} \quad \delta < \mu_1 \leqq 1 \quad \textit{ist}.$$

Die (allerdings nur geringe) Discrepanz zwischen diesen beiden Sätzen betrifft den Fall, dass die Constante μ_1 gerade gleich der unteren Integrationsgrenze ist. Denn für diesen Fall liefert der Satz (21.) den Grenzwerth 1, während derselbe nach Satz (20.) gleich $\frac{1}{2}$ sein würde. — Analog mit (21.) ergiebt sich [wiederum mit Rücksicht auf (16.)] auch folgender Satz:

Bezeichnet δ eine der Bedingung $-1 < \delta < 1$ entsprechende Constante, so wird

$$\text{(22.)} \qquad \lim_{n=\infty} \int_\delta^1 \Lambda_n(\mu, \mu_1)\, d\mu = \quad 0, \quad \textit{oder} \quad = \tfrac{1}{2}, \quad \textit{oder} \quad = 1 \quad \textit{sein},$$

$$\textit{je nachdem} \qquad -1 \leqq \mu_1 < \delta, \quad \textit{oder} \quad \mu_1 = \delta, \quad \textit{oder} \quad \delta < \mu_1 < 1 \quad \textit{ist}.$$

Schliesslich ergiebt sich durch Addition von (21.), (22.) noch folgende Formel:

$$\text{(23.)} \qquad \lim_{n=\infty} \int_{-1}^{+1} \Lambda_n(\mu, \mu_1)\, d\mu = 1, \qquad \text{für } -1 \leqq \mu_1 \leqq 1;$$

die man übrigens bei Weitem einfacher abzuleiten im Stande ist, indem man Rücksicht nimmt auf die für $\Lambda_n(\mu, \mu_1)$ gegebene Definition [vgl. (20.)]:

$$\Lambda_n(\mu, \mu_1) = \frac{1 \cdot P_0(\mu) P_0(\mu_1) + 3 P_1(\mu) P_1(\mu_1) \cdots + (2n+1) P_n(\mu) P_n(\mu_1)}{2}. \tag{24.}$$

Denn aus dieser Formel folgt durch Integration nach μ sofort:

$$\int_{-1}^{+1} \Lambda_n(\mu, \mu_1)\, d\mu = P_0(\mu_1), \text{ d. i.} = 1. \qquad \text{W. z. z. w.} \tag{25.}$$

Versucht man die verschiedenen Formeln (20.), (21.), (22.), (23.) einigermassen *einheitlich* mit einander zu verbinden, so gelangt man zu folgendem Satz.

Theorem. — *Sind γ, δ zwei der Bedingung $-1 \leq \gamma < \delta \leq 1$ entsprechende Constanten, so ist der Ausdruck*

$$\lim_{n=\infty} \int_\gamma^\delta \left(\sum_0^n \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) P_n(\mu_1) \right) d\mu \tag{26.}$$

$= 0$, *oder* $= \frac{1}{2}$ [resp. $= 1$], *oder* $= 1$, *oder* $= \frac{1}{2}$ [resp. $= 1$], *oder* $= 0$,

je nachdem

$-1 \leq \mu_1 < \gamma$, *oder* $\mu_1 = \gamma$, *oder* $\gamma < \mu_1 < \delta$, *oder* $\mu_1 = \delta$, *oder* $\delta < \mu_1 < 1$.

Dabei ist alsdann hinsichtlich der in den eckigen Klammern beigefügten Ausnahmswerthe zu bemerken, dass der Ausnahmswerth 1 *für $\mu_1 = \gamma$ nur dann eintritt, wenn $\gamma = -1$, und dass andererseits der für $\mu_1 = \delta$ angegebene Ausnahmswerth* 1 *nur dann in Kraft tritt, wenn $\delta = 1$ ist.*

Beiläufige Bemerkung. — Man kann die Formel (25.) auch beweisen auf Grund des bekannten *Christoffel*'schen Satzes*). Nach diesem ist nämlich die Reihe (24.) summirbar durch den Ausdruck:

$$\Lambda_n(\mu, \mu_1) = \frac{n+1}{2} \, \frac{P_{n+1}(\mu) P_n(\mu_1) - P_n(\mu) P_{n+1}(\mu_1)}{\mu - \mu_1}. \tag{27.}$$

Hieraus folgt durch Integration nach μ:

$$\int_{-1}^{+1} \Lambda_n(\mu, \mu_1)\, d\mu = \frac{n+1}{2} \left[- Q_{n+1}(\mu_1) P_n(\mu_1) + Q_n(\mu_1) P_{n+1}(\mu_1) \right], \tag{28.}$$

also mit Rücksicht auf eine von *F. Neumann***) gegebene Formel:

$$\int_{-1}^{+1} \Lambda_n(\mu, \mu_1)\, d\mu = 1. \qquad \text{W. z. z. w.} \tag{29.}$$

---

*) *Christoffel*: Borchardt's Journal, Bd. 55, Seite 73.

**) *F. Neumann*: *Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen* (Leipzig, bei Teubner, 1878), Seite 71, Formel (a.).

§ 3.

Fortsetzung.

Wir wollen hier unsere frühere Aufgabe (Seite 92) zum zweiten Mal behandeln, nur mit dem Unterschiede, dass wir bei Behandlung des Doppel-Integrales S_n *zuerst* die Integration nach μ, und *hierauf erst* die nach φ ausführen; während vorhin die Aufeinanderfolge die umgekehrte war.

Das *specielle* S_n hat nach Seite 93 den Werth:

$$(1.)\qquad S_n = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi)\left(\sum_0^n (2n+1)\, P_n(\mu)\right) d\mu\, d\varphi,$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi)\left[P_n'(\mu) + P_{n+1}'(\mu)\right] d\mu\, d\varphi,$$

oder (was dasselbe) den Werth:

$$(2.)\qquad S_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_{-1}^{+1} f(\mu, \varphi)\, P_n'(\mu)\, d\mu + \int_{-1}^{+1} f(\mu, \varphi)\, P_{n+1}'(\mu)\, d\mu\right\} d\varphi;$$

und hieraus folgt, falls man die beiden in der geschweiften Klammer enthaltenen Integrale mit T_n und T_{n+1} bezeichnet:

$$(3.)\qquad S_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\left\{T_n + T_{n+1}\right\} d\varphi,$$

wo also z. B.:

$$(4.)\qquad T_n = \int_{-1}^{+1} f(\mu, \varphi)\, P_n'(\mu)\, d\mu.$$

Nimmt man nun an, dass $f(\mu, \varphi)$ bei festgehaltenem φ *abtheilungsweise stetig* und *abtheilungsweise monoton* sei für das ganze Intervall $\mu = -1 \ldots +1$, so ergiebt sich mittelst eines früheren Satzes (Seite 87):

$$(5.)\qquad \lim_{n=\infty} T_n = f(1, \varphi) + (-1)^{n+1} f(-1, \varphi).$$

Hieraus folgt durch Multiplication mit $d\varphi$ und Integration:

$$(6.)\qquad \int_0^{2\pi}\left(\lim_{n=\infty} T_n\right) d\varphi = \int_0^{2\pi} f(1, \varphi)\, d\varphi + (-1)^{n+1}\int_0^{2\pi} f(-1, \varphi)\, d\varphi,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(7.)\qquad \lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi} T_n\, d\varphi = \int_0^{2\pi} f(1, \varphi)\, d\varphi + (-1)^{n+1}\int_0^{2\pi} f(-1, \varphi)\, d\varphi.$$

In analoger Weise wird offenbar:

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} T_{n+1}\, d\varphi = \int_0^{2\pi} f(1,\ \varphi)\, d\varphi + (-1)^{n+2} \int_0^{2\pi} f(-1,\ \varphi)\, d\varphi. \tag{8.}$$

Nunmehr folgt aus (7.), (8.) durch Addition und mit Rücksicht auf (3.):

$$\lim_{n=\infty} S_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(1,\ \varphi)\, d\varphi, \tag{9.}$$

oder, was dasselbe ist:

$$\lim_{n=\infty} S_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Big(\lim_{\mu=1} f(\mu,\ \varphi) \Big)\, d\varphi, \tag{10.}$$

oder, noch ein wenig anders geschrieben:

$$\lim_{n=\infty} S_n = \lim_{\mu=1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\mu,\ \varphi)\, d\varphi. \tag{11.}$$

Substituirt man hier für S_n seine eigentliche Bedeutung (1.), so gelangt man zu folgendem Satz:

Theorem. — *Bezeichnet* $f(\mu,\ \varphi)$ *eine den Voraussetzungen* (𝔙.) Seite 93 *entsprechende Function, so wird der Ausdruck*

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} f(\mu,\ \varphi) \left(\sum_0^n (2n+1)\, P_n(\mu) \right) d\mu\, d\varphi \tag{A.}$$

gleich sein dem arithmetischen Mittel derjenigen Werthe, welche $f(\mu,\ \varphi)$ *besitzt längs eines um den Nordpol* ($\mu = 1$) *beschriebenen unendlich kleinen Kreises.*

NB. *Dabei wird jedoch vorausgesetzt, dass die Function* $f(\mu,\ \varphi)$ *abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton sei längs eines jeden der vom Nordpol zum Südpol hinlaufenden Meridiane*).*

Dieses Theorem (A.) steht parallel mit unserem früheren Theorem (A.) Seite 94, und unterscheidet sich von jenem nur dadurch, dass hier die Voraussetzungen *einfacher* sind als damals. Denn sie betreffen hier direct die gegebene Function $f(\mu,\ \varphi)$; während sie damals eine gewisse *andere*, erst aus $f(\mu,\ \varphi)$ abzuleitende Function $F(\mu)$ betrafen.

In ähnlicher Weise, wie wir damals vom Theorem (A.) zum Theorem (B.) gelangten, in ganz derselben Weise werden wir offenbar vom Theorem (A.) hingelangen können zu folgendem Theorem (B.):

Theorem. — *Bezeichnet* $f(\mu,\ \varphi)$ *eine den Voraussetzungen* (𝔙.) Seite 93 *entsprechende Function, und bezeichnet ausserdem* γ *den sphärischen Abstand des variablen Punctes* $(\mu,\ \varphi)$ *von irgend einem festen Punct* $(\mu_1,\ \varphi_1)$, *so wird der Ausdruck*

---

*) In der That haben wir diese Voraussetzung eintreten lassen beim Uebergange von (4.) zu (5.).

(B.) $$\lim_{n=\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \int_{0}^{2\pi} f(\mu, \varphi) \left(\sum_{0}^{n} (2n+1)\, P_n(\cos\gamma) \right) d\mu\, d\varphi$$

gleich sein dem arithmetischen Mittel derjenigen Werthe, welche $f(\mu, \varphi)$ besitzt längs eines um den festen Punct (μ_1, φ_1) beschriebenen unendlich kleinen Kreises.

NB. *Dabei wird, falls man den zu (μ_1, φ_1) diametral gegenüberliegenden Punct mit (μ_2, φ_2) bezeichnet, vorausgesetzt, dass die Function $f(\mu, \varphi)$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton sei längs eines jeden der von (μ_1, φ_1) nach (μ_2, φ_2) laufenden Meridiane.*

Mangelnde Strenge. — Beim Uebergange von (10.) zu (11.) haben wir ohne Weiteres behauptet, dass

(x.) $$\lim_{\mu=1} \int_{0}^{2\pi} f(\mu, \varphi)\, d\varphi = \int_{0}^{2\pi} \left(\lim_{\mu=1} f(\mu, \varphi) \right) d\varphi$$

sein müsse, — was offenbar doch noch eines Beweises bedarf. — Ebenso haben wir beim Uebergange von (6.) zu (7.) ohne Weiteres behauptet, dass

$$\lim_{n=\infty} \int_{0}^{2\pi} T_n\, d\varphi = \int_{0}^{2\pi} \left(\lim_{n=\infty} T_n \right) d\varphi$$

sei, was offenbar ebenfalls zweifelhaft erscheint. Demgemäss kann die mittelst dieses Ueberganges erhaltene Formel (7.):

(y.) $$\lim_{n=\infty} \int_{0}^{2\pi} T_n d\varphi = \int_{0}^{2\pi} f(1, \varphi)\, d\varphi + (-1)^{n+1} \int_{0}^{2\pi} f(-1, \varphi\; d\varphi, \quad \text{wo} \quad T_n = \int_{-1}^{+1} f\, \mu, \varphi)\, P_n'(\mu)\, d\mu,$$

keinen Anspruch auf Zuverlässigkeit erheben.

Wir werden daher im folgenden § diese *zweifelhaften Formeln* (x.) *und* (y.) von Neuem in Untersuchung zu ziehen haben.

§ 4.

Prüfung zweier im vorhergehenden § gemachten Schlussfolgerungen.

Um zu zeigen, dass das Theorem (A.), trotz der soeben erhobenen Bedenken, *gültig ist*, werden wir zunächst die jenem Theorem zu Grunde liegenden Voraussetzungen zu recapituliren, und deren Consequenzen zu entwickeln haben.

Die Voraussetzungen des Theorems (A.) zerfallen in die *allgemeinen* Voraussetzungen ($\mathfrak{V}$.), und in gewisse andere *speciell* den Nordpol der Kugelfläche betreffende Annahmen. *Es soll nämlich erstens die Kugelfläche durch irgend welche Curven resp. durch irgend welches Netz von Curven in eine endliche Anzahl von Theilen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, . . . zerlegbar sein, der Art, dass die gegebene Function*

(1.) $$f(\mu, \varphi)$$

auf jedem solchen Theil stetig ist; auch soll die Biegung jener Curven abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton sein. Hieraus folgt, im Vorbeigehen bemerkt, dass der absolut grösste Werth der Function auf der Kugelfläche ein *endlicher* sein wird; derselbe mag M heissen, was angedeutet werden mag durch die Formel

(1 a.) $$M = \text{Max abs} f(\mu, \varphi).$$

Zweitens soll, was speciell den Nordpol betrifft, die gegebene Function

(2.) $$f(\mu, \varphi)$$

abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton sein längs eines jeden der vom Nordpol zum Südpol laufenden Meridiane. Lässt man also den Punct (μ, φ) längs eines *gegebenen* Meridians φ zum Nordpol $(\mu = 1)$ wandern, so wird die Function $f(\mu, \varphi)$ daselbst mit einem *bestimmten endlichen* Werth eintreffen, der zu bezeichnen sein wird mit

(2 a.) $$f(1, \varphi) = \lim_{\mu = 1} f(\mu, \varphi).$$

Doch kann dieses $f(1, \varphi)$ *verschieden* sein für verschiedene φ, d. i. für verschiedene Meridiane; wie solches z. B. der Fall sein wird, wenn der Nordpol $(\mu = 1)$ auf einer der bei (1.) erwähnten Unstetigkeitscurven liegt, oder gar in einem Knotenpunct des von jenen Curven gebildeten Netzes sich befindet. Offenbar wird nämlich das $f(1, \varphi)$ ebenso viel verschiedene Werthe haben, als Theile $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ . . . im Nordpol zusammenstossen, [vgl. die bei (1.) eingeführte Bezeichnung].

Ferner wird man, wie aus der Voraussetzung (2.) folgt, vom Nordpol aus auf jedem Meridiane ein *kleines Stück* abzuschneiden im Stande sein, der Art, dass $f(\mu, \varphi)$ längs dieses Stückes *stetig* ist. Ob aber diese im Nordpol den einzelnen Meridianen entsprechende Stetigkeit für alle Meridiane einen *gleichmässigen* Charakter hat, erscheint fraglich. Um näher hierauf einzugehen, betrachten wir diejenige Strecke eines gegebenen Meridians φ, welche zwischen dem Nordpol $\mu = 1$ und irgend einem Parallelkreise $\mu = \beta$ liegt, und bezeichnen die *Schwankung* der Function $f(\mu, \varphi)$ für diese Meridianstrecke mit $D_\varphi^{\beta, 1}$. Oder genauer ausgedrückt: Wir bezeichnen, falls φ und β gegeben sind, mit $D_\varphi^{\beta, 1}$ den grössten Werth, welchen der Ausdruck

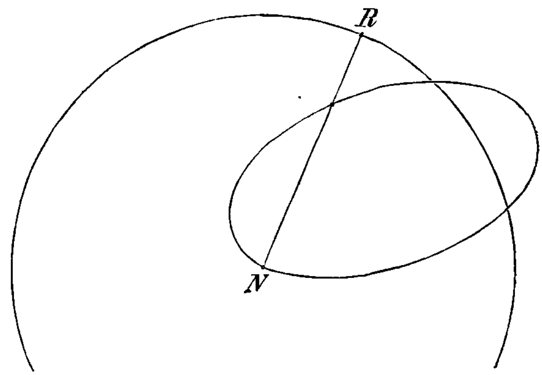
(3.) $$\text{abs}\,[f(\mu, \varphi) - f(1, \varphi)]$$

für das gegebene φ und für $\beta \leq \mu \leq 1$ anzunehmen im Stande ist; was angedeutet sein mag durch die Formel:

(4.) $$D_\varphi^{\beta, 1} = \text{Max}_{\mu = \beta, 1}\, \text{abs}\,[f(\mu, \varphi) - f(1, \varphi)].$$

Durch Verkleinerung des Parallelkreises $\mu = \beta$, d. i. durch ein Anwachsenlassen seines Parameters β gegen 1, wird alsdann die Schwankung $D_\varphi^{\beta, 1}$ für *einen gegebenen Meridian* φ unter einen beliebigen Kleinheitsgrad hinabgedrückt werden können; wie solches unmittelbar folgt aus der Voraussetzung (2.). Ob man aber durch eine solche Procedur (nämlich durch ein Anwachsenlassen von β gegen 1), jene Schwankung $D_\varphi^{\beta, 1}$ *simultan* für *alle Meridiane* unter einen gegebenen Kleinheitsgrad hinabzudrücken im Stande ist, — erscheint fraglich. Ja wir können sogar mittelst eines einfachen Beispieles zeigen, dass diese Frage im Allgemeinen *verneinend* zu beantworten ist.

Es sei z. B. auf der Kugelfläche eine *sphärische Ellipse* gezeichnet, deren Peripherie den Nordpol berührt; und die Function $f(\mu, \varphi)$ der Art gegeben, dass sie *innerhalb* der Ellipse überall constant, etwa $= 100$, und *ausserhalb* derselben überall $= 0$ ist. Lässt man nun die um den Nordpol $N(\mu = 1)$ beschriebene Kreisperipherie $(\mu = \beta)$ kleiner und kleiner werden, mithin ihren Parameter β mehr und mehr wachsen, so werden, wie weit man mit dieser Procedur auch fortschreiten mag, immer noch gewisse Radien NR der Kreisperipherie construirbar sein, welche *auf ihrem Wege vom Nordpol zur Kreisperipherie die Ellipse schneiden*, und für welche also die Schwankung $D_\varphi^{\beta,1}$ gleich 100 ist. — Es dürfte dieses Beispiel besonders instructiv sein: Einerseits nämlich sehen wir deutlich, dass die in Rede stehende Schwankung $D_\varphi^{\beta,1}$ für jedes *einzelne* φ durch Vergrösserung von β beliebig klein gemacht werden kann. Andererseits aber sehen wir, dass diese Schwankung durch eine solche Procedur *simultan* für *alle* φ niemals unter 100 hinabgedrückt werden kann. — — Um nun weiterhin einigermassen planmässig zu verfahren, ist die **Unterscheidung mehrerer Fälle** erforderlich, je nachdem der Nordpol *innerhalb* eines der Theile $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, . . . , oder *auf der Grenze* von zwei solchen Theilen, oder endlich *im Zusammenstosspunct* mehrerer solcher Theile gelegen ist.



I. Fall: Der Nordpol liegt innerhalb $\mathfrak{A}$; ist also ringsum vom Rande des Theiles $\mathfrak{A}$ durch irgend welche (wenn auch noch so kleine) Zwischenräume getrennt. Alsdann wird die Function $f(\mu, \varphi)$, weil sie auf $\mathfrak{A}$ *stetig* ist [Voraussetzung (1.)], diese Eigenschaft besitzen für jedweden *innern* Punct dieses Gebietes $\mathfrak{A}$, also z. B. auch für den Nordpol. Und es wird also die mit $D_\varphi^{\beta,1}$ bezeichnete Schwankung, durch gehörige Vergrösserung von β, *simultan* für *alle* Azimuthe φ unter einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad hinabgedrückt werden können*).

II. Fall: Der Nordpol N liegt auf der Grenzcurve zweier Flächentheile $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$; und zwar mag er (der grösseren Allgemeinheit willen) in einem *Eckpunct* dieser Grenzcurve gelegen, und die Curve selber mit cNc' bezeichnet sein (vgl. die Figur).

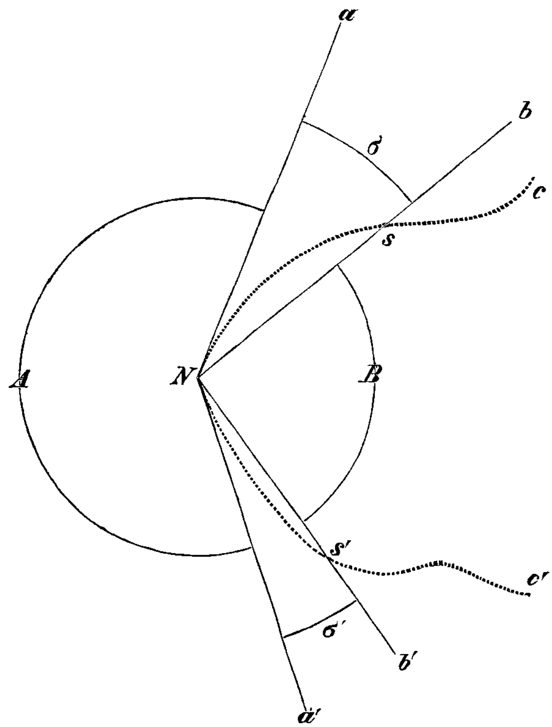
Es seien Na und Na' die *Tangenten* der Curve im Puncte N; ferner seien Nsb und $Ns'b'$ zwei *Secanten*, welche gegen jene Tangenten unter *beliebig kleinen* Winkeln σ und σ' geneigt sind. Durch diese von N ausgehenden Linien Na, Na', Nsb, $Ns'b'$ (welche sämmtlich als grösste Kreise d. i. als Meridiane zu denken sind) wird alsdann der den Nordpol N umgebende Raum zerlegt in vier Sectoren: A, B und σ, σ'. Die beiden letztern sollen diejenigen sein, welche den schon genannten *sehr kleinen* Winkeln σ und σ' entsprechen. Und von den beiden alsdann noch übrig bleibenden Sectoren soll der zu $\mathfrak{A}$ gehörige mit A, der zu $\mathfrak{B}$ gehörige mit B bezeichnet sein.

Beschreibt man nun um den Nordpol $N(\mu = 1)$ eine beliebige (in der Figur *nicht* gezeichnete) Kreisperipherie $(\mu = \beta)$, so kann offenbar die Schwankung $D_\varphi^{\beta,1}$ durch Vergrösserung von β *simultan* für alle Meridiane φ *des Sectors A* unter einen beliebigen Kleinheitsgrad hinabgedrückt werden; — denn die Function $f(\mu, \varphi)$ ist ja auf $\mathfrak{A}$, mithin

*) Vgl. die erste Note Seite 93.

auch auf *A stetig* [Voraussetzung (1.)]. Analoges gilt für die Meridiane *des Sectors B*; und folglich auch für die *Gesammtheit aller theils zu A theils zu B gehörigen Meridiane.*

Um die Hauptsache hervorzuheben: Sind zwei positive Grössen σ und σ' von *beliebiger Kleinheit* gegeben, so lassen sich von der Umgebung des Nordpoles N stets zwei Sectoren mit den Winkeln σ und σ' absondern, der Art, dass die Schwankung $D_\varphi^{\beta,\,1}$, durch Vergrösserung von β, *simultan* für *alle nach Absonderung jener Sectoren noch übrig bleibenden Meridiane* unter einen beliebigen Kleinheitsgrad hinabgedrückt werden kann.



III. Fall: Der Nordpol ist ein Zusammenstosspunct von 3 Theilen 𝔄, 𝔅, ℭ, *oder von 4 Theilen* 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔇, *u. s. w.* In diesem Fall wird offenbar ganz Analoges zu bemerken sein, wie im vorhergehenden Fall, nur mit dem Unterschiede, dass die Anzahl der abzuscheidenden kleinen Sectoren eine *grössere* ist, nämlich eben so gross sein wird, wie die Anzahl jener im Nordpol zusammenstossenden Flächentheile. — Jetzt endlich können wir übergehen zu unseren eigentlichen Aufgaben.

Erstens: Strengere Ableitung der Formel (x.) Seite 104. Beschreibt man um den Nordpol ($\mu = 1$) eine kleine Kreisperipherie ($\mu = \beta$), und bedient man sich der Bezeichnung (4.):

$$\text{(5.)}\qquad \operatorname{Max}_{\mu=\beta,\,1} \operatorname{abs}\left[f(\mu,\ \varphi) - f(1,\ \varphi)\right] = D_\varphi^{\beta,\,1},$$

so gilt für alle dem Intervall $\beta \ldots . 1$ angehörigen Werthe von μ die Formel

$$\text{(6.)}\qquad \operatorname{abs}\left[f(\mu,\ \varphi) - f(1,\ \varphi)\right] \leqq D_\varphi^{\beta,\,1}, \quad \text{für} \quad \beta \leqq \mu \leqq 1.$$

Und hieraus folgt durch Integration*):

$$\text{(7.)}\qquad \operatorname{abs}\int_0^{2\pi}\left[f(\mu,\ \varphi) - f(1,\ \varphi)\right] d\varphi \leqq \int_0^{2\pi} D_\varphi^{\beta,\,1}\, d\varphi, \quad \text{für} \quad \beta \leqq \mu \leqq 1.$$

Entspricht nun die Function $f(\mu,\ \varphi)$ im Nordpol dem *I. Fall* (Seite 106), so kann die Schwankung $D_\varphi^{\beta,\,1}$ durch Vergrösserung von β *simultan* für sämmtliche Meridiane φ unter einen beliebigen Kleinheitsgrad ε hinabgedrückt, mithin die *rechte* Seite der Formel (7.), und folglich auch ihre *linke* Seite $< 2\pi\varepsilon$ gemacht werden.

Wir sehen also: Die *linke* Seite der Formel (7.) ist eine Function von μ; und diese Function kann dadurch, dass man μ in das Intervall $\beta \leqq \mu \leqq 1$ einschliesst, und

*) Und mit Rücksicht darauf, dass abs $(u + v + \cdots)$ stets $\leqq$ (abs u) + (abs v) + $\cdots$ ist.

sodann β gegen 1 anwachsen lässt, unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabgedrückt werden. Somit folgt:

$$\text{(8.)} \qquad \lim_{\mu=1} \operatorname{abs} \int_0^{2\pi} \Big[f(\mu, \varphi) - f(1, \varphi) \Big] \, d\varphi = 0 \,,$$

oder, was dasselbe:

$$\text{(9.)} \qquad \lim_{\mu=1} \int_0^{2\pi} \Big[f(\mu, \varphi) - f(1, \varphi) \Big] \, d\varphi = 0 \,,$$

oder, noch ein wenig anders geschrieben:

$$\text{(10.)} \qquad \lim_{\mu=1} \int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi) \, d\varphi = \int_0^{2\pi} f(1, \varphi) \, d\varphi \,.$$

Dies aber ist [weil wir unter $f(1, \varphi)$ den $\lim_{\mu=1} f(\mu, \varphi)$ verstanden haben; vgl. (2a.)] die zu beweisende Formel (x.).

Wir nehmen jetzt andererseits an, die Function $f(\mu, \varphi)$ entspreche im Nordpol ($\mu = 1$) dem *II. Fall* (Seite 106). Gleichzeitig bezeichnen wir die Gesammtheit der beiden abzuscheidenden Sectoren (σ und σ') mit S, und die Gesammtheit der alsdann noch übrig bleibenden Sectoren (A und B) mit R; so dass also S die Winkelsumme ($\sigma + \sigma'$), und R die Winkelsumme ($2\pi - \sigma - \sigma'$) besitzt. Dies festgesetzt, ergiebt sich aus (6.) durch Multiplication mit $d\varphi$ und Integration über R die Formel:

$$\text{(11.)} \qquad \operatorname{abs} \int_R \Big[f(\mu, \varphi) - f(1, \varphi) \Big] \, d\varphi \;\leqq\; \int_R D_\varphi^{\beta, 1} \, d\varphi, \quad \text{für} \quad \beta \;\leqq\; \mu \;\leqq\; 1 \,.$$

Um ferner eine brauchbare Formel für S zu erhalten, bemerken wir, dass [nach (1a.)] ganz allgemein

$$\text{(12.)} \qquad \operatorname{abs} \big[f(\mu, \varphi) - f(1, \varphi) \big] \;\leqq\; 2M$$

ist. Hieraus folgt durch Multiplication mit $d\varphi$ und Integration über S sofort:

$$\text{(13.)} \qquad \operatorname{abs} \int_S \Big[f(\mu, \varphi) - f(1, \varphi) \Big] \, d\varphi \;\leqq\; 2M \int_S d\varphi = 2M(\sigma + \sigma') \,.$$

Und die nunmehr durch Addition von (11.) und (13.) sich ergebende Formel:

$$\text{(14.)} \quad \operatorname{abs} \int_0^{2\pi} \Big[f(\mu, \varphi) - f(1, \varphi) \Big] \, d\varphi \;\leqq\; \Big(\int_R D_\varphi^{\beta, 1} \, d\varphi \Big) + \Big(2M(\sigma + \sigma') \Big), \quad \text{für} \quad \beta \;\leqq\; \mu \;\leqq\; 1 \,,$$

entspricht unseren Zwecken.

In der That kann die *rechte* Seite der Formel (14.) unter einen beliebigen Kleinheitsgrad ε hinabgedrückt werden; in der Weise, dass man zunächst das *zweite* Glied dieser rechten Seite durch Verkleinerung der Winkel σ und σ' unter $\frac{1}{2}\varepsilon$, sodann aber das *erste* Glied derselben durch Vergrösserung von β ebenfalls unter $\frac{1}{2}\varepsilon$ hinabdrückt. Da nun die *rechte* Seite kleiner als ε gemacht werden kann, so gilt solches um so mehr auch von der *linken* Seite. Wir sehen also: Die linke Seite ist eine Function von μ; und diese Function kann dadurch, dass man μ in das Intervall $\beta \leqq \mu \leqq 1$ einschliesst, und sodann das β gegen 1 wachsen lässt, unter einen beliebigen Kleinheitsgrad hinabgedrückt werden. Somit folgt:

(15.) $$\lim_{\mu=1} \operatorname{abs} \int_0^{2\pi} \Big[f(\mu, \varphi) - f(1, \varphi) \Big] \, d\varphi = 0,$$

oder, was dasselbe ist [vgl. den Uebergang von (8.) zu (10.)]:

(16.) $$\lim_{\mu=1} \int_0^{2\pi} f(\mu, \varphi) \, d\varphi = \int_0^{2\pi} f(1, \varphi) \, d\varphi.$$

Dies aber ist die zu beweisende Formel (x.).

Dass man zu demselben Resultat auch im *III. Fall* (Seite 107) gelangen wird, bedarf keiner weiteren Ausführung. *Die in Rede stehende*

(17.) *Formel* (x.) Seite 104

ist also gültig, sobald nur die Function $f(\mu, \varphi)$ *den Voraussetzungen des Theorems* (A.), [d. i. den Voraussetzungen (1.), (2.) Seite 104] *entspricht.*

Zweitens: Strengere Ableitung der Formel (y.) Seite 104. Wir zerlegen das dortige T_n in zwei Theile:

(18.) $$T_n = \underbrace{\int_{-1}^{0} f(\mu, \varphi) \, P_n'(\mu) \, d\mu}_{U_n} + \underbrace{\int_0^1 f(\mu, \varphi) \, P_n'(\mu) \, d\mu}_{V_n},$$

und untersuchen zunächst das Integral V_n. — Bei festgehaltenem φ repräsentirt $f(\mu, \varphi)$ eine Function von μ, welche im Intervall $\mu = -1 \cdots\cdot +1$ *abtheilungsweise stetig* und *abtheilungsweise monoton* ist [Voraussetzung (2.)]. Bezeichnet also h_φ die Anzahl derjenigen monotonen Strecken, in welche das genannte Intervall $\mu = -1 \cdots\cdot +1$ mit Bezug auf diese Function zerlegbar ist, ferner M_φ ihren absolut grössten Werth in jenem Intervall, so ergiebt sich mittelst des Satzes Seite 90 die Formel:

(19.) $$\operatorname{abs} \big[V_n - f(1, \varphi) \big] \leqq 4h_\varphi D_\varphi^{\beta, 1} + (4h_\varphi + 1) \, M_\varphi \, \Pi_n^{0, \beta}.$$

Dabei bezeichnet β eine der Bedingung $0 < \beta < 1$ entsprechende, sonst aber *willkürlich* zu wählende Constante; so dass also, geometrisch betrachtet, unter $(\mu = \beta)$ ein *beliebiger* Parallelkreis der nördlichen Halbkugel zu verstehen ist. Die Formel (19.) kann, falls man die Maximalwerthe der den einzelnen Meridianen φ entsprechenden Grössen h_φ und M_φ respective mit h und M bezeichnet, auch so geschrieben werden:

(20.) $$\operatorname{abs} \big[V_n - f(1, \varphi) \big] < 4h D_\varphi^{\beta, 1} + (4h + 1) \, M \Pi_n^{0, \beta},$$

wo offenbar M nichts Anderes ist als der absolut grösste Werth von $f(\mu, \varphi)$ auf der ganzen Kugelfläche [ebenso wie früher in (1a.)].

Da die Grösse $D_\varphi^{\beta, 1}$ [definirt in (4.) Seite 105] nothwendig $< 2M$, und da andererseits die Grösse $\Pi_n^{0, \beta}$ [definirt auf Seite 84] nothwendig $\leqq 1$ ist, so folgt aus (20.) sofort:

(21.) $$\operatorname{abs} \big[V_n - f(1, \varphi) \big] \leqq 8hM + (4h + 1) \, M = (12h + 1) \, M.$$

Um nun in unserer Untersuchung weiter zu gehen, haben wir, was die Beschaffenheit der Function $f(\mu, \varphi)$ im Nordpol $(\mu = 1)$ betrifft, wiederum der Reihe nach die Fälle *I.*, *II.*, *III.* Seite 106, 107 in Betracht zu ziehen. Doch wollen wir, weil der Fall *I.* zu einfach ist, sogleich mit dem *II. Fall* beginnen. — Bezeichnet man die abzuscheidenden Sectoren [von der Winkelsumme $(\sigma + \sigma')$] mit S, und die alsdann noch übrig bleibenden Sectoren [von der Winkelsumme $(2\pi - \sigma - \sigma')$] mit R, und integrirt man nun die Formeln (20.) und (21.), nachdem sie zuvor mit $d\varphi$ multiplicirt worden sind, respective über R und S, so erhält man:

$$(22.)\qquad \text{abs}\int_R \Big[V_n - f(1,\varphi)\Big]\,d\varphi \;\leqq\; 4h\int_R D_\varphi^{\beta,\,1}\,d\varphi + (4h+1)\,M\Pi_n^{0,\,\beta}\int_R d\varphi\,,$$

$$(23.)\qquad \text{abs}\int_S \Big[V_n - f(1,\varphi)\Big]\,d\varphi \;\leqq\; (12h+1)\,M\int_S d\varphi\,;$$

und hieraus durch Addition*):

$$(24.)\quad \text{abs}\int_0^{2\pi} \Big[V_n - f(1,\varphi)\Big]\,d\varphi \;\leqq\; \Big((8h+2)\,\pi M\Pi_n^{0,\,\beta}\Big) + \Big(4h\int_R D_\varphi^{\beta,\,1}\,d\varphi\Big) + \Big((12h+1)\,M(\sigma+\sigma')\Big).$$

Diese Formel entspricht unseren Zwecken. In der That kann die *rechte* Seite derselben unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad ε hinabgedrückt werden; in der Weise, dass man zunächst das *dritte* Glied dieser rechten Seite durch Verkleinerung der Winkel σ und σ' unter $\frac{1}{3}\varepsilon$, sodann das *zweite* Glied durch Vergrösserung von β ebenfalls unter $\frac{1}{3}\varepsilon$, und schliesslich das *erste* Glied durch Vergrösserung von n gleichfalls unter $\frac{1}{3}\varepsilon$ hinabdrückt. Lässt man alsdann nachträglich das n noch weiter wachsen, so bleiben das *zweite* und *dritte* Glied ungeändert, während das *erste* noch weiter sich verkleinert. — Somit folgt also aus unserer Formel (24.), dass die *linke* Seite derselben nicht nur durch Vergrösserung von n unter einen beliebig gegebenen Kleinheitsgrad hinabgedrückt werden kann, sondern auch, dass sie, falls man alsdann das n noch weiter wachsen lässt, noch weiter sich verkleinern wird. Also ist:

$$(25.)\qquad \lim_{n=\infty}\ \text{abs}\int_0^{2\pi}\Big[V_n - f(1,\varphi)\Big]\,d\varphi = 0$$

oder, was dasselbe:

$$(26.)\qquad \lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi}\Big[V_n - f(1,\varphi)\Big]\,d\varphi = 0\,.$$

In ganz analoger Weise kann das Integral U_n (18.), mittelst des fünften Satzes Seite 90, behandelt werden. Man findet alsdann:

$$(27.)\qquad \lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi}\Big[U_n - (-1)^{n+1}f(-1,\varphi)\Big]\,d\varphi = 0\,.$$

Und nunmehr folgt, weil $U_n + V_n = T_n$ war, durch Addition von (26.), (27.) sofort:

$$(28.)\qquad \lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi}\Big[T_n - f(1,\varphi) - (-1)^{n+1}f(-1,\varphi)\Big]\,d\varphi = 0\,.$$

Dies aber ist die zu beweisende Formel (y.) Seite 104.

Dass man zu demselben Resultat auch im *I.* und *III. Fall* gelangt sein würde, bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung. *Die in Rede stehende*

---

*) Dabei ist zu beachten, dass

$$\int_R d\varphi = (2\pi - \sigma - \sigma') < 2\pi\,,\quad \text{und}\quad \int_S d\varphi = (\sigma + \sigma')\ \text{ist}.$$

(29.) *Formel* (y.) *Seite* 104

ist also gültig, falls nur $f(\mu, \varphi)$ *den Voraussetzungen des Theorems* (A.), [d. i. den Voraussetzungen (1.), (2.) Seite 104] *Genüge leistet.*

Schliessliches Resultat. — Durch (17.) und (29.) sind die zu Ende des vorhergehenden § gegen die Ableitung des Theorems (A.) erhobenen Einwendungen beseitigt. Wir sehen somit, *dass dieses Theorem* (A.) *und folglich auch das demselben sich anschliessende Theorem* (B.) *keinem Bedenken unterliegen.*

§ 5.

Die nach Kugelfunctionen fortschreitenden Entwicklungen für den Fall, dass die zu entwickelnde Function nur von einem Argument abhängt.

Ist die Function $f(\mu, \varphi)$ auf der Kugelfläche *abtheilungsweise stetig,* so werden die Bedingungen des Satzes Seite 95 wenn auch nicht immer, so doch *im Allgemeinen* erfüllt sein. Demgemäss können wir jenen Satz, allerdings auf Kosten der bisherigen Strenge, folgendermassen aussprechen:

Satz. — *Bezeichnet* $f(\mu, \varphi)$ *eine Function, die auf der Kugelfläche abtheilungsweise stetig ist, und bezeichnet ausserdem* γ *den kürzesten sphärischen Abstand des variablen Punctes* (μ, φ) *von irgend einem festen Puncte* (μ_1, φ_1), *so gilt die Formel:*

$$(\alpha.)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} f(\mu, \varphi) \left(\sum_{0}^{n} (2n+1)\, P_n(\cos\gamma) \right) d\mu\, d\varphi = A,$$

wo A *das arithmetische Mittel derjenigen Werthe vorstellt, welche* $f(\mu, \varphi)$ *besitzt längs eines um den Punct* (μ_1, φ_1) *beschriebenen unendlich kleinen Kreises.*

Auf der Kugelfläche mag nun an Stelle von $f(\mu, \varphi)$ eine *nur von* μ *abhängende* Function $f(\mu)$ ausgebreitet sein, d. i. eine Function, die längs eines jeden Parallelkreises constant bleibt, und nur variirt beim Uebergange von einem solchen Kreise zum andern. Setzen wir nun voraus, diese Function $f(\mu)$ sei im Intervall $\mu = -1 \ldots +1$ *abtheilungsweise stetig,* so wird sie dieselbe Eigenschaft auch besitzen bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche*), mithin dem Satze (α.) sich subordiniren. Demgemäss ergiebt sich:

$$(1.)\qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} f(\mu) \left(\sum_{0}^{n} (2n+1)\, P_n(\cos\gamma) \right) d\mu\, d\varphi = A,$$

wo A das arithmetische Mittel derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function

*) Es wird nämlich die Kugelfläche in eine endliche Anzahl von Zonen (resp. Calotten) zerlegbar sein, der Art, dass die Function $f(\mu)$ auf jeder *einzelnen* Zone (resp. Calotte) *stetig* ist. Und zwar werden die zu dieser Zerlegung erforderlichen Parallelkreise durch $\mu = \beta_1$, $\mu = \beta_2$, $\ldots$ $\mu = \beta_p$ dargestellt sein, falls man unter $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_p$ diejenigen Werthe des Argumentes μ versteht, für welche $f(\mu)$ *unstetig* ist.

$f(\mu)$ besitzt längs eines unendlich kleinen um (μ_1, φ_1) beschriebenen Kreises. Zufolge dieser Definition aber wird

$$(2.)\qquad A = f(-1), \quad \text{oder} \quad = \frac{f(\mu_1 - 0) + f(\mu_1 + 0)}{2}, \quad \text{oder} \quad = f(1) \ \text{sein},$$

$$\text{je nachdem} \quad \mu_1 = -1, \quad \text{oder} \quad -1 < \mu_1 < 1, \quad \text{oder} \quad \mu_1 = 1 \ \text{ist};$$

wie sich solches unmittelbar durch die geometrische Anschauung ergiebt*). Bemerkt man schliesslich, dass die Formel (1.) durch Substitution des bekannten Werthes (Seite 99):

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\mu)\,P_n(\mu_1) + U_n\cos(\varphi - \varphi_1) + V_n\cos 2(\varphi - \varphi_1) + \cdots\cdots$$

die Gestalt annimmt:

$$(3.)\qquad \lim_{n=\infty} \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(\mu)\left(\sum_0^n (2n+1)\,P_n(\mu)\,P_n(\mu_1)\right) d\mu = A,$$

so gelangt man durch Zusammenfassung von (2.) und (3.) zu folgendem Satz.

Satz. — *Bezeichnet μ_1 eine gegebene Constante, und $f(\mu)$ eine Function, die im Intervall $\mu = -1 \ldots\ldots + 1$ abtheilungsweise stetig ist, so wird der Ausdruck:*

$$(\beta.)\qquad \lim_{n=\infty} \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(\mu)\left(\sum_0^n (2n+1)\,P_n(\mu)\,P_n(\mu_1)\right) d\mu$$

$$= f(-1), \quad \textit{oder} \quad = \frac{f(\mu_1 - 0) + f(\mu_1 + 0)}{2}, \quad \textit{oder} \quad = f(1)$$

sein, je nachdem

$$\mu_1 = -1, \quad \textit{oder} \quad -1 < \mu_1 < 1, \quad \textit{oder} \quad \mu_1 = 1 \quad \textit{ist}.$$

Der Ausdruck (β.) geht, falls man $\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{+1} f(\mu)\ P_n(\mu)\ d\mu = C_n$ setzt, über in:

$$\lim_{n=\infty}\left[C_0 P_0(\mu_1) + C_1 P_1(\mu_1) + \cdots\cdots + C_n P_n(\mu_1)\right];$$

andererseits werden die verschiedenen Gestalten, welche der *Werth* dieses Ausdrucks zufolge der Formel (β.) besitzt, sämmtlich $= f(\mu_1)$, sobald man voraussetzt, dass $f(\mu)$ geradezu *stetig* ist. Demgemäss ergiebt sich folgendes Resultat:

Satz. — *Ist $f(\mu)$ im Intervall $\mu = -1 \ldots\ldots + 1$ stetig, so lässt sich der Werth dieser Function für jedwedes der Bedingung $-1 < \mu_1 < 1$ entsprechende Argument μ_1 durch die Reihe darstellen:*

$$(\gamma.)\qquad f(\mu_1) = C_0 P_0(\mu_1) + C_1 P_1(\mu_1) + C_2 P_2(\mu_1) + \cdots\cdots \ \text{in inf.};$$

und zwar bestimmen sich die hier auftretenden constanten Coefficienten C mittelst der Formel:

---

*) Vgl. die vorhergehende Note.

$$C_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(\mu)\, P_n(\mu)\, d\mu .$$

Verallgemeinerung. — Wir können diese nach P_0, P_1, P_2, ... fortschreitende Entwicklung leicht ein wenig verallgemeinern, indem wir an Stelle jener Functionen die *adjungirten* Functionen P_{0h}, P_{1h}, P_{2h}, ... eintreten lassen. Um näher hierauf einzugehen, sei $f(\mu)$ irgend eine Function, die im Intervall $\mu = -1 \ldots\ldots + 1$ *abtheilungsweise stetig* ist, und h eine *gegebene Zahl aus der Reihe* 1, 2, 3, 4, 5, ... Alsdann wird offenbar die von μ, φ abhängende Function $f(\mu) \,.\, \cos(h\varphi)$ bei ihrer Ausbreitung auf der Kugelfläche *abtheilungsweise stetig* sein*) mithin dem Satze (α.) sich subordiniren; so dass man also erhält:

$$(4.) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} f(\mu) \cos(h\varphi) \left(\sum_0^n (2n+1)\, P_n(\cos\gamma) \right) d\mu\, d\varphi = A,$$

wo A das arithmetische Mittel derjenigen Werthe vorstellt, welche die Function $f(\mu) \cos(h\varphi)$ längs eines um den festen Punct (μ_1, φ_1) beschriebenen unendlich kleinen Kreises besitzt. Beachtet man aber diese Definition von A, und beachtet man gleichzeitig, dass h eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, ... vorstellen, also verschieden von 0 sein soll, so ergiebt sich:

$$(5.) \qquad A = 0, \qquad \text{oder} \quad = \frac{f(\mu_1 - 0) + f(\mu_1 + 0)}{2} \cos(h\varphi_1), \qquad \text{oder} \quad = 0,$$

$$\text{je nachdem} \quad \mu_1 = -1, \qquad \text{oder} \qquad -1 < \mu_1 < 1, \qquad \text{oder} \quad \mu_1 = 1 \quad \text{ist.}$$

Bevor wir diesen Werth von A in die Formel (4.) substituiren, bemerken wir, dass der dort vorhandene Ausdruck $P_n(\cos\gamma)$, vgl. (8.) Seite 13, durch folgende von $j = 0$ bis $j =$ *unendlich* gehende Reihe darstellbar ist:

$$P_n(\cos\gamma) = \sum_{j=0}^{j=\infty} \varepsilon_j\, \Delta_{nj}\, P_{nj}(\mu)\, P_{nj}(\mu_1) \cos j(\varphi - \varphi_1),$$

falls man nur festsetzt, dass die Δ_{nj} für $j > n$ *verschwinden* sollen. Und gleichzeitig bemerken wir, dass die Formel (4.) durch Substitution dieser Reihe die Gestalt erhält:

$$(6.) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\cos(h\varphi_1)}{4} \int_{-1}^{+1} f(\mu) \left(\sum_0^n (2n+1)\, \varepsilon_h\, \Delta_{nh}\, P_{nh}(\mu)\, P_{nh}(\mu_1) \right) d\mu = A.$$

Die hier in den einzelnen Gliedern der Summe enthaltenen Δ zerfallen in zwei Classen, nämlich erstens in die

*) Aehnlich wie früher, wird nämlich auch in diesem Fall die Kugelfläche in eine endliche Anzahl von Zonen (resp. Calotten) zerlegbar sein, der Art, dass die Function $f(\mu) \cos(h\varphi)$ auf jeder *einzelnen* Zone (resp. Calotte) *stetig* ist.

(I.) $$\Delta_{0,h}, \quad \Delta_{1,h}, \quad \Delta_{2,h}, \ldots\ldots \quad \Delta_{h-1,h},$$
und zweitens in die
(II.) $$\Delta_{h,h}, \quad \Delta_{h+1,h}, \quad \Delta_{h+2,h}, \ldots\ldots \text{ in inf.}$$
Da Δ_{nh} für $h > n$ verschwinden soll, so sind die Δ der Classe (I.) sämmtlich $= 0$; *so dass also in* (6.) *die untere Summationsgrenze* 0 *durch* h *ersetzt werden darf.* Andererseits subordiniren sich die Δ der Classe (II.) der in (10.) Seite 13 angegebenen Formel:
(IIa.) $$\Delta_{nh} = \frac{\Pi(n-h)}{\Pi(n+h)}.$$
Ausserdem wird, ebenfalls nach (10.) Seite 13, das
(III.) $$\varepsilon_h \text{ stets } = 2$$
sein, weil h eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, . . . vorstellt. — Mit Rücksicht auf diese Bemerkungen gelangt man durch Zusammenfassung der Formeln (5.), (6.) zu folgendem Satz:

Satz. — *Bezeichnet h eine gegebene Zahl aus der Reihe* 1, 2, 3, 4, ..., *ferner μ_1 eine gegebene Constante, endlich $f(\mu)$ eine Function, die im Intervall $\mu = -1 \ldots\ldots +1$ a b t h e i l u n g s w e i s e s t e t i g ist, so wird der Ausdruck*
(δ.) $$\lim_{n=\infty} \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(\mu)\left(\sum_{n=h}^{n=n} \frac{(2n+1)\,\Pi(n-h)}{\Pi(n+h)}\, P_{nh}(\mu)\, P_{nh}(\mu_1)\right) d\mu$$
$$= 0, \qquad \textit{oder} \qquad = \frac{f(\mu_1-0)+f(\mu_1+0)}{2}, \qquad \textit{oder} \qquad = 0$$
sein, je nachdem
$$\mu_1 = -1, \qquad \textit{oder} \qquad -1 < \mu_1 < 1, \qquad \textit{oder} \qquad \mu_1 = 1 \quad \textit{ist.}$$
Dabei bezeichnet Π die Gauss'sche Function (Note Seite 13).

In analoger Weise, wie früher der Satz (β.) zum Satz (γ.) führte, in analoger Weise leitet der gegenwärtige Satz (δ.) zu dem folgenden Satze (ε.) hin:

Satz. — *Bezeichnet h eine gegebene Zahl aus der Reihe* 1, 2, 3, 4, . . ., *und ist ferner $f(\mu)$ s t e t i g im Intervall $\mu = -1 \ldots\ldots +1$, so wird der Werth dieser Function für jedwedes der Bedingung $-1 < \mu_1 < 1$ entsprechende Argument μ_1 entwickelbar sein in folgende Reihe:*
(ε.) $$f(\mu_1) = C_h P_{h,h}(\mu_1) + C_{h+1} P_{h+1,h}(\mu_1) + C_{h+2} P_{h+2,h}(\mu_1) + \cdots \text{ in inf.},$$
deren Coefficienten C_n sich bestimmen mittelst der Formel:
$$C_n = \frac{2n+1}{2}\,\frac{\Pi(n-h)}{\Pi(n+h)} \int_{-1}^{+1} f(\mu)\, P_{n,h}(\mu)\, d\mu;$$
wobei Π die Gauss'sche Function bezeichnet (Note Seite 13). *An den G r e n z e n des betrachteten Intervalls, d. h. für $\mu_1 = \pm 1$, ist der Werth der vorstehenden Reihe $= 0$, also o h n e irgend welchen Zusammenhang mit den dort vorhandenen Werthen der Function f.*

Bemerkung. — Bezeichnet γ eine der Bedingung

(1.) $$-1 \leqq \gamma \leqq +1$$

entsprechende Constante, und $f(\mu)$ eine Function, die im Intervall $-1 \dots \gamma$ den Werth 0, hingegen im Intervall $\gamma \dots 1$ den Werth 1 hat, so ergiebt sich [aus dem Satz (β.) Seite 112] z. B. folgende Formel:

(2.) $$\lim_{n=\infty} \tfrac{1}{2} \int_\gamma^1 \left(\sum_0^n (2n+1) P_n(\mu) P_n(\mu_1) \right) d\mu = 1, \quad \text{für} \quad -1 \leqq \gamma < \mu_1 < 1.$$

Und hieraus folgt für den Specialfall $\mu_1 = 1$:

(3.) $$\lim_{n=\infty} \int_\gamma^1 \left(\sum_0^n (2n+1) P_n(\mu) \right) d\mu = 2, \quad \text{für} \quad -1 \leqq \gamma < 1;$$

oder, was dasselbe ist:

(4.) $$\sum_0^\infty \left((2n+1) \int_\gamma^1 P_n(\mu)\, d\mu \right) = 2, \quad \text{ebenfalls für} \quad -1 \leqq \gamma < 1;$$

oder, falls man die hier auftretenden Integrale wirklich berechnet*):

(5.) $$(1-\gamma) + \sum_1^\infty \frac{(2n+1)(1-\gamma^2)}{n(n+1)} P_n'(\gamma) = 2, \quad \text{für} \quad -1 \leqq \gamma < 1;$$

oder, falls man das erste Glied $(1 - \gamma)$ auf die rechte Seite wirft, und sodann durch $(1 - \gamma^2)$ dividirt:

(6.) $$\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n'(\gamma) = \frac{1}{1-\gamma}, \quad \text{für} \quad -1 \leqq \gamma < 1.$$

Hieraus endlich folgt durch Integration:

(7.) $$\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n(\gamma) = C - \log(1-\gamma), \quad \text{für} \quad -1 \leqq \gamma < 1,$$

---

*) Bekanntlich ist $P_0(\mu) = 1$. Somit folgt:

(a.) $$\int_\gamma^1 P_0(\mu)\, d\mu = 1 - \gamma.$$

Was die *übrigen* Integrale betrifft, so sei zunächst erinnert an die für $P_n(\mu)$ geltende Differentialgleichung:

$$n(n+1) P_n(\mu) + \frac{d}{d\mu} \Big((1-\mu^2) P_n'(\mu) \Big) = 0.$$

Aus dieser folgt sofort:

$$\int P_n(\mu)\, d\mu = -\frac{1-\mu^2}{n(n+1)} P_n'(\mu) + \text{Const.},$$

und daher:

b .) $$\int_\gamma^1 P_n(\mu)\, d\mu = \frac{1-\gamma^2}{n(n+1)} P_n'(\gamma).$$

Diese Formeln (a.) und (b.) sind es, von denen oben Gebrauch gemacht wird.

wo C eine Constante (d. i. von γ unabhängige Grösse) vorstellt. Um dieses C zu finden, setzen wir $\gamma = -1$, und erhalten alsdann:

$$\sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)}(-1)^n = C - \log 2,$$

d. i.

$$C = (\log 2) - \frac{3}{1 \cdot 2} + \frac{5}{2 \cdot 3} - \frac{7}{3 \cdot 4} + \frac{9}{4 \cdot 5} - + \cdots,$$

oder, falls wir jeden dieser Brüche in zwei Partialbrüche zerlegen:

$$C = (\log 2) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + - \cdots,$$

oder, was dasselbe ist:

$$C = (\log 2) - 1.$$

Somit ergiebt sich schliesslich aus (7.):

$$(8.)\qquad 1 + \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n(\gamma) = \log\left(\frac{2}{1-\gamma}\right), \quad \text{für} \quad -1 \leqq \gamma < 1;$$

eine Formel, die in F. Neumann's Beiträgen zur Theorie der Kugelfunctionen (Leipzig 1878) Seite 133 (γ.) *auf ganz anderem Wege abgeleitet ist.*

Zweite Bemerkung. — Ersetzt man den Buchstaben μ_1 durch δ, so ist nach (2.):

$$(9.)\qquad \lim_{n=\infty} \int_\gamma^1 \left(\sum_0^n (2n+1) P_n(\mu) P_n(\delta)\right) d\mu = 2, \quad \text{für} \quad -1 < \gamma < \delta \leqq 1;$$

oder, was dasselbe ist:

$$(10.)\qquad \sum_0^\infty \left((2n+1) P_n(\delta) \int_\gamma^1 P_n(\mu)\, d\mu\right) = 2, \quad \text{für} \quad -1 \leqq \gamma < \delta \leqq 1;$$

oder, falls man die Integrationen ausführt*):

$$(11.)\qquad (1-\gamma) + \sum_1^\infty \frac{(2n+1)(1-\gamma^2)}{n(n+1)} P_n'(\gamma) P_n(\delta) = 2, \quad \text{für} \quad -1 \leqq \gamma < \delta \leqq 1;$$

oder, falls man das erste Glied $(1-\gamma)$ auf die rechte Seite bringt, und sodann durch $(1-\gamma^2)$ dividirt:

$$(12.)\qquad \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n'(\gamma) P_n(\delta) = \frac{1}{1-\gamma}, \quad \text{für} \quad -1 \leqq \gamma < \delta \leqq 1.$$

Diese Gleichung zeigt, dass der Ausdruck links nur scheinbar von δ abhängt, in Wirklichkeit aber von δ unabhängig ist. Aus dieser Gleichung folgt nun weiter durch Integration nach γ:

$$(13.)\qquad \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n(\gamma) P_n(\delta) = F(\delta) - \log(1-\gamma), \quad \text{für} \quad -1 \leqq \gamma < \delta \leqq 1;$$

wo $F(\delta)$ von γ unabhängig ist. Um diese unbekannte Function $F(\delta)$ zu bestimmen, setzen wir in (13.) das $\gamma = -1$, und erhalten alsdann:

*) Vgl. die Note Seite 115.

$$\text{(A.)} \qquad \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n(-\delta) = F(\delta) - \log 2, \quad \text{für} \quad (-1) < \delta \leqq 1.$$

Subtrahirt man aber diese Formel von der aus (8.) [durch Vertauschung von γ mit $(-\delta)$] sich ergebenden Formel:

$$\text{(B.)} \qquad \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n(-\delta) = -1 + \log\left(\frac{2}{1+\delta}\right), \quad \text{für} \quad (-1) \leqq (-\delta) < 1;$$

so ergiebt sich*):

$$\text{(C.)} \qquad 0 = F(\delta) + 1 - \log\left(\frac{4}{1+\delta}\right), \quad \text{für} \quad -1 < \delta \leqq 1.$$

Und substituirt man endlich den hieraus für $F(\delta)$ sich ergebenden Werth in (13.), so erhält man:

$$\text{(14.)} \qquad 1 + \sum_1^\infty \frac{2n+1}{n(n+1)} P_n(\gamma) P_n(\delta) = \log\left(\frac{4}{(1-\gamma)(1+\delta)}\right), \quad \text{für} \quad -1 \leqq \gamma < \delta < 1;$$

eine Formel, welche die frühere Formel (8.) *als speciellen Fall in sich enthält.*

§ 6.

Andere Methode zur Begründung der im vorhergehenden Paragraph aufgestellten Sätze.

Dass der im vorhergehenden § an die Spitze gestellte Satz (α.) Seite 111 nur *im Allgemeinen* richtig ist, wurde ausdrücklich betont; dass also Gleiches auch gilt von den übrigen Sätzen jenes §, bedarf kaum noch der Bemerkung. — Indem wir nun gegenwärtig diesen Sätzen, oder wenigstens einigen derselben *eine strengere Fassung* zu geben versuchen, benutzen wir als Grundlage die in (22.), (25.) Seite 100 gefundenen, die Function

$$\text{(1.)} \qquad \Lambda_n(\mu, \mu_1) = \sum_0^n \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) P_n(\mu_1)$$

betreffenden Formeln**). Dieselben lassen sich zusammenfassen in folgenden Satz:

Sind μ_1 *und* δ *zwei gegebene Constanten, und ist* $-1 < \delta < 1$, *so wird*

$$\text{(2.)} \qquad \lim_{n=\infty} \int_\delta^1 \Lambda_n(\mu, \mu_1)\, d\mu = 0, \qquad \textit{oder} \qquad = \tfrac{1}{2}, \qquad \textit{oder} \qquad = 1 \quad \textit{sein},$$

$$\textit{je nachdem} \qquad -1 \leqq \mu_1 < \delta, \qquad \textit{oder} \qquad \mu_1 = \delta, \qquad \textit{oder} \qquad \delta < \mu_1 < 1 \quad \textit{ist}.$$

Ferner wird das vorstehende Integral stets $= 1$ *sein, falls* $\delta = -1$, *und stets* $= 0$ *sein, falls* $\delta = 1$ *ist.*

---

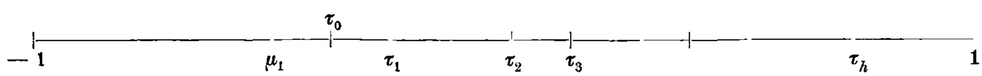
*) Diese Subtraction der Formeln (A.) und (B.) ist gestattet, weil die neben (A.) und (B.) notirten Bedingungen nur der äusseren Form nach verschieden, in Wirklichkeit aber *identisch* sind.

**) Uebrigens kann man (wie leicht zu übersehen) zu einer strengeren Fassung jener Sätze auch dadurch gelangen, dass man im Ganzen ebenso wie im vorhergehenden Paragraph operirt, dabei aber als Grundlage nicht den nur *im Allgemeinen gültigen* Satz (α.) Seite 111, sondern den *strengen* Satz Seite 95 benutzt.

Auf Grund dieses Satzes (2.) kann man, mit Hülfe bereits mehrfach angewandter Methoden, den Werth des Ausdrucks

$$(3.)\qquad \lim_{n=\infty}\int_{-1}^{+1} f(\mu)\, \Lambda_n(\mu,\, \mu_1)\, d\mu \qquad (\text{für } -1 \leqq \mu_1 \leqq 1)$$

berechnen, falls nur die Function $f(\mu)$ im Intervall $\mu = -1 \ldots . + 1$ *abtheilungsweise stetig* und *abtheilungsweise monoton* ist. Zu diesem Zweck setze man $f(\mu) - f(\mu_1) = F(\mu)$, zerlege sodann das Intervall $\mu_1 \ldots . 1$ in die für $f(\mu)$, mithin auch für $F(\mu)$ *monotonen Strecken:* (μ_1, τ_1), (τ_1, τ_2), (τ_2, τ_3), ... $(\tau_h, 1)$, schalte endlich zwischen μ_1 und τ_1 noch einen *willkürlichen* Punct τ_0 ein, und behandle sodann das Integral $\int F(\mu)\, \Lambda_n(\mu,\, \mu_1)\, d\mu$ für diese einzelnen Strecken nach dem Du Bois'schen Satz (Seite 33).

(4.)


In solcher Weise erhält man z. B. für die Strecke (μ_1, τ_0), falls man zur Abkürzung Λ_n für $\Lambda_n(\mu,\, \mu_1)$ schreibt, die Formel:

$$\int_{\mu_1}^{\tau_0} F(\mu)\, \Lambda_n\, d\mu = F(\mu_1)\int_{\mu_1}^{\xi} \Lambda_n\, d\mu + F(\tau_0)\int_{\xi}^{\tau_0} \Lambda_n\, d\mu\,, \quad \text{wo} \quad \mu_1 \leqq \xi \leqq \tau_0\,.$$

Hieraus aber folgt, weil [nach der Definition von $F(\mu)$] das $F(\mu_1) = 0$, und das $F(\tau_0) = f(\tau_0) - f(\mu_1)$ ist, sofort:

$$(5.)\qquad \int_{\mu_1}^{\tau_0} F(\mu)\, \Lambda_n\, d\mu = [f(\tau_0) - f(\mu_1)]\int_{\xi}^{\tau_0} \Lambda_n\, d\mu\,, \quad \text{wo} \quad \mu_1 \leqq \xi \leqq \tau_0\,.$$

In analoger Weise erhält man durch Anwendung des Du Bois'schen Satzes auf die Strecken (τ_0, τ_1), (τ_1, τ_2), (τ_2, τ_3), etc. etc. der Reihe nach die Formeln:

$$(5'.)\qquad \int_{\tau_0}^{\tau_1} F(\mu)\, \Lambda_n\, d\mu = F(\tau_0)\int_{\tau_0}^{\eta} \Lambda_n\, d\mu + F(\tau_1)\int_{\eta}^{\tau_1} \Lambda_n\, d\mu\,, \quad \text{wo} \quad \tau_0 \leqq \eta \leqq \tau_1\,;$$

$$(5''.)\qquad \int_{\tau_1}^{\tau_2} F(\mu)\, \Lambda_n\, d\mu = F(\tau_1)\int_{\tau_1}^{\zeta} \Lambda_n\, d\mu + F(\tau_2)\int_{\zeta}^{\tau_2} \Lambda_n\, d\mu\,, \quad \text{wo} \quad \tau_1 < \zeta \leqq \tau_2\,;$$

etc. etc. etc.

Das Integral (5.) kann man beliebig klein machen durch ein näheres Heranschieben des willkürlichen Punctes τ_0 an den festen Punct μ_1 [vgl. (4.)]. Sodann aber kann man die Integrale (5'.), (5''.), etc. ebenfalls beliebig klein machen, nämlich durch Vergrösserung der Zahl n; wie solches aus dem Satze (2.) unmittelbar folgt, falls man nur beachtet, dass der Punct μ_1 *links* von sämmtlichen Puncten τ_0, η, τ_1, ζ, τ_2, . . . liegt [vgl. (4.)]. Folglich wird man mittelst der genannten Operationen auch die *Summen* all' dieser Integrale (5.), (5'.), (5''.), etc. beliebig klein zu machen im Stande sein; und gelangt also zu der Formel:

$$(6.)\qquad \lim_{n=\infty} \int_{\mu_1}^{1} F(\mu)\, \Lambda_n(\mu, \mu_1)\, d\mu = 0\,.$$

Hieraus aber folgt, falls man für $F(\mu)$ seine eigentliche Bedeutung: $[f(\mu) - f(\mu_1)]$ substituirt:

$$(7.)\qquad \lim_{n=\infty} \int_{\mu_1}^{1} f(\mu)\, \Lambda_n(\mu, \mu_1)\, d\mu = f(\mu_1) \cdot \lim_{n=\infty} \int_{\mu_1}^{1} \Lambda_n(\mu, \mu_1)\, d\mu\,,$$

wo das rechts stehende $f(\mu_1)$ genauer mit $f(\mu_1 + 0)$ zu bezeichnen ist, und wo ferner der rechter Hand stehende limes sich leicht bestimmen lässt mittelst des Satzes (2.). In solcher Weise erhält man:

$$(8.)\qquad \lim_{n=\infty} \int_{\mu_1}^{1} f(\mu)\, \Lambda_n(\mu, \mu_1)\, d\mu = f(\mu_1 + 0), \quad \text{oder} \quad = \frac{f(\mu_1 + 0)}{2}, \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem $\mu_1 = -1$, oder $-1 < \mu_1 < 1$, oder $\mu_1 = 1$ ist.

Ebenso wie diese Formel das Intervall $\mu_1 \ldots . 1$ betrifft, ebenso wird offenbar eine zweite Formel existiren, die in analoger Weise auf das Intervall $-1 \ldots . \mu_1$ sich bezieht. Auch übersieht man sofort, dass diese letztere folgendermassen lauten wird:

$$(9.)\qquad \lim_{n=\infty} \int_{-1}^{\mu_1} f(\mu)\, \Lambda_n(\mu, \mu_1)\, d\mu = 0, \quad \text{oder} \quad = \frac{f(\mu_1 - 0)}{2}, \quad \text{oder} \quad = f(\mu_1 - 0),$$

je nachdem $\mu_1 = -1$, oder $-1 < \mu_1 < 1$, oder $\mu_1 = 1$ ist.

Schliesslich gelangt man durch Addition der beiden Formeln (8.), (9.), und indem man gleichzeitig für $\Lambda_n(\mu, \mu_1)$ seine eigentliche Bedeutung (1.) substituirt, zu folgendem Resultat:

Theorem. — *Bezeichnet μ_1 eine gegebene Constante, und $f(\mu)$ eine Function, die im Intervall $\mu = -1 \ldots . +1$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist, so wird der Ausdruck*

$$(10.)\qquad \lim_{n=\infty} \int_{-1}^{+1} f(\mu) \left(\sum_{0}^{n} \frac{2n+1}{2} P_n(\mu)\, P_n(\mu_1) \right) d\mu$$

$$= f(-1+0), \quad \textit{oder} \quad = \frac{f(\mu_1 - 0) + f(\mu_1 + 0)}{2}, \quad \textit{oder} \quad = f\,1 - 0)$$

sein, je nachdem

$\mu_1 = -1$, *oder* $-1 < \mu_1 < 1$, *oder* $\mu_1 = 1$ *ist.*

Dieses Theorem sagt aus, dass der schon früher gefundene Satz (β.) Seite 112 *in aller Strenge* gilt, sobald man nur zu den dort gemachten Voraussetzungen noch die hinzufügt, dass die gegebene Function $f(\mu)$ im Intervall $\mu = -1 \ldots\ldots + 1$ *abtheilungsweise monoton* sei. Analoges gilt mithin auch vom Satze (γ.) Seite 112.

Bemerkung. — Der hier für das Theorem (10.) gegebene Beweis (an dem allerdings wohl nur Wenige etwas auszusetzen finden würden), ist nach meiner Ansicht immer noch nicht ein *absolut strenger.* Denn der dabei als Fundament benutzte Satz (2.) bezieht sich nur auf den Fall, dass die (in ihm vorkommende) untere Integrationsgrenze δ eine *gegebene Constante* ist, und kann also auf die Integrale (5'.), (5''.), etc., in denen die Grenzen η, ζ, etc. *mit n variiren*, nicht ohne Weiteres angewendet werden. So z. B. finden wir in (5''.) das Integral

$$(\alpha.) \qquad J_n = \int_{\tau_1}^{\zeta} \Lambda_n(\mu, \mu_1)\, d\mu ,$$

welches zerlegbar ist in die beiden Integrale:

$$(\beta.) \qquad J_n = \int_{\tau_1}^{1} \Lambda_n(\mu, \mu_1)\, d\mu - \int_{\zeta}^{1} \Lambda_n(\mu, \mu_1)\, d\mu .$$

Dabei entsprechen μ_1, τ_1 und ζ der Relation:

$$(\gamma.) \qquad \mu_1 < \tau_1 < \zeta \leqq \tau_2 ;$$

und zwar sind μ_1, τ_1, τ_2 drei gegebene *feste* Puncte, während ζ einen *mit n variirenden* Punct vorstellt, von dem lediglich bekannt ist, dass er [vgl. (γ.)] stets zwischen den beiden festen Puncten τ_1 und τ_2 bleibt. Bringt man nun den Fundamentalsatz (2.) in Anwendung, so ergiebt sich sofort, dass das *erste* der beiden Integrale (β.) durch Vergrösserung von n unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabgedrückt werden kann [denn in jenem Integral sind *feste* Grenzen vorhanden]. Wollte man aber Analoges auch für das *zweite* der Integrale (β.) nachzuweisen suchen, so müsste man zeigen, dass dieses Integral durch gehörige Vergrösserung von n s i m u l t a n für *alle* der Bedingung $\tau_1 \leqq \zeta \leqq \tau_2$ entsprechenden Puncte ζ unter einen gegebenen Kleinheitsgrad hinabgedrückt werden kann. Hierzu aber bietet der Fundamentalsatz (2.) nicht die nöthigen Mittel dar.

Wie man diese Unvollkommenheit des Fundamentalsatzes (2.) beseitigen kann, werde ich im folgenden Paragraphen darlegen. Uebrigens werde ich dabei denselben nicht nur vervollkommnen, sondern gewissermassen *ab ovo* herleiten, und zwar unter Anwendung sehr einfacher Hülfsmittel. Die einzigen Stützen, deren ich mich bedienen werde, bestehen in bekannten Eigenschaften der Kugelfunctionen, nämlich in der Laplace'schen Entwicklung Seite 13 (8.), und in dem Satze Seite 83, (16.), (17.).

§ 7.

Weitere Betrachtungen über denselben Gegenstand*).

Auf der Kugelfläche (vom Radius Eins) sei die beliebig gegebene, nur von dem *einen* Argument μ abhängende Function $F(\mu)$ ausgebreitet, welche daselbst überall stetig ist. Der absolut grösste Werth dieser Function auf der ganzen Kugelfläche mag M heissen. Denkt man sich ferner um jeden der beiden Pole eine kleine Calotte vom sphärischen Radius ϱ beschrieben, so mag der absolut grösste Werth, den die Function $F(\mu)$ ausserhalb dieser beiden Calotten (resp. auf den Rändern derselben) anzunehmen im Stande ist, mit M^ϱ bezeichnet werden.

Es sei nun $\mathfrak{A}$ irgend ein (von beliebig vielen Curven begrenzter) Theil der Kugelfläche, und A die grösste Anzahl von Puncten, in denen der *Rand* dieses Flächentheiles $\mathfrak{A}$ von irgend einem grössten Kreise geschnitten werden kann. Wir stellen uns die Aufgabe, das über alle Elemente $d\mu\, d\varphi$ der Fläche $\mathfrak{A}$ ausgedehnte Integral

$$(1.)\qquad J = \int\!\!\int_{\mathfrak{A}} F'(\mu)\, d\mu\, d\varphi\,, \qquad \left(\text{wo } F'(\mu) = \frac{dF(\mu)}{d\mu}\right)$$

näher zu untersuchen. Die hierbei erforderlichen, im Grunde ganz elementaren Betrachtungen werden nur dadurch etwas mühsam, dass sie die Unterscheidung mehrerer Fälle erheischen, je nach der jedesmaligen relativen Lage der Fläche $\mathfrak{A}$ zu den beiden Polen. So z. B. kann der Nordpol ($\mu = 1$) *ausserhalb* $\mathfrak{A}$, oder *innerhalb* $\mathfrak{A}$, oder *am Rande* von $\mathfrak{A}$ liegen; Analoges gilt vom Südpol ($\mu = -1$); u. s. w. Im Ganzen ergeben sich also *neun* verschiedene Fälle.

Um unsere Betrachtungen durch diese grosse Anzahl einzelner Fälle in einigermassen übersichtlicher Weise hindurch zu dirigiren, wollen wir vorläufig den Südpol stets *ausserhalb* $\mathfrak{A}$ lassen; so dass alsdann nur noch *drei* Fälle zu unterscheiden sind, je nach der Lage des Nordpols.

Zieht man auf der Kugelfläche vom Nordpol zum Südpol irgend einen Meridian φ, und bezeichnet man diejenigen Strecken dieses Meridians, welche *auf* die gegebene Fläche $\mathfrak{A}$ fallen, der Reihe nach mit (μ_1, μ_2), (μ_2, μ_3), ... (μ_{p-1}, μ_p), was einigermassen angedeutet werden kann durch folgendes Schema [in welchem der Nordpol N zur Linken, und der Südpol S zur Rechten liegt]:

$$(2.)\qquad \begin{array}{ccccccccccc} N & & \mathfrak{A} & & & \mathfrak{A} & & & \mathfrak{A} & & S \\ 1 & \mu_1 & & \mu_2 & \mu_3 & & \mu_4 & \mu_{p-1} & & \mu_p & -1 \end{array}$$

so ergiebt sich aus (1.):

$$(3.)\qquad J = \int \Big([F(\mu_1) - F(\mu_2)] + [F(\mu_3) - F(\mu_4)] + \cdots\cdots + [F(\mu_{p-1}) - F(\mu_p)] \Big)\, d\varphi\,.$$

*) Die Tendenz dieser Betrachtungen ist dargelegt in der Schlussbemerkung des vorhergehenden Paragraphen.

Hier sind die Werthe $F(\mu_1)$, $F(\mu_2)$, ... $F(\mu_p)$ ihrem absoluten Betrage nach sämmtlich $\leqq M$; auch ist die Zahl $p \leqq A$; [wie aus den für M und A gegebenen Definitionen unmittelbar folgt]. Somit ergiebt sich sofort:

(4.) $$\text{abs}\, J \leqq 2\pi A M.$$

Daneben kann noch eine etwas allgemeinere Formel hinzugefügt werden. Bezeichnet man nämlich den zwischen irgend zwei Meridianen $\varphi = \varphi_0$ und $\varphi = \varphi_0 + \psi$ gelegenen Theil der Fläche $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}_\psi$, und den diesem Theile $\mathfrak{A}_\psi$ entsprechenden Theil des Integrales J(1.) mit J_ψ, so ergiebt sich, wie leicht zu übersehen, aus (3.) nicht nur die Formel (4.), sondern gleichzeitig auch folgende Formel:

(4a.) $$\text{abs}\, J_\psi \leqq \psi A M.$$

Dies vorausgeschickt, gehen wir über zur genaueren Betrachtung der vorhin genannten drei Fälle.

Erster Fall: Beide Pole liegen ausserhalb $\mathfrak{A}$. Alsdann kann man um diese Pole zwei einander gleiche Calotten beschreiben von solcher Kleinheit, dass *sämmtliche Randpuncte* der Fläche $\mathfrak{A}$ *ausserhalb* dieser beiden Calotten liegen, und Gleiches also z. B. auch gilt von den in (2.) auftretenden Puncten μ_1, μ_2, ... μ_p. Bezeichnet man also den sphärischen Radius dieser beiden (gleich grossen) Calotten mit ϱ, so werden $F(\mu_1)$, $F(\mu_2)$, ... $F(\mu_p)$ ihrem absoluten Betrage nach sämmtlich $\leqq M^\varrho$ sein, [wie aus der Definition von M^ϱ unmittelbar folgt]. Und demgemäss ergiebt sich aus (3.): abs $J \leqq 2\pi A M^\varrho$, oder, was dasselbe ist:

(5a.) $$J = \Theta \cdot 2\pi A M^\varrho,$$

wo Θ einen unbekannten (positiven oder negativen) ächten Bruch vorstellt.

Zweiter Fall: Der Nordpol liegt innerhalb $\mathfrak{A}$, *hingegen der Südpol nach wie vor ausserhalb* $\mathfrak{A}$. Alsdann ist der in (2.) auftretende *erste* Punct μ_1 für sämmtliche Meridiane identisch mit dem Nordpol, mithin μ_1 für alle Meridiane $= 1$. Doch wird man um die beiden Pole zwei gleich grosse Calotten beschreiben können von solcher Kleinheit, dass die *übrigen* Puncte μ_2, μ_3, ... μ_p, und zwar bei sämmtlichen Meridianen, *ausserhalb* der beiden Calotten liegen. Bezeichnet man also den sphärischen Radius dieser Calotten mit ϱ, so werden $F(\mu_2)$, $F(\mu_3)$, ... $F(\mu_p)$ ihrem absoluten Betrage nach durchweg $\leqq M\varrho$ sein. Und demgemäss ergiebt sich [weil $\mu_1 = 1$ ist] aus (3.):

(5b.) $$J = 2\pi F(1) + \Theta \cdot 2\pi A M^\varrho,$$

wo Θ wieder ein ächter Bruch ist.

Dritter Fall: Der Nordpol liegt am Rande von $\mathfrak{A}$, *hingegen der Südpol nach wie vor ausserhalb* $\mathfrak{A}$. Alsdann sind die den einzelnen Meridianen entsprechenden Puncte μ_1 theils im Nordpol gelegen, theils von demselben entfernt, also der Werth μ_1 theils $= 1$, theils < 1. Bezeichnet man insbesondere die beiden die Fläche $\mathfrak{A}$ im Nordpol *tangirenden* Meridiane mit φ' und φ'', und zwar in solcher Weise, dass $\alpha = \varphi'' - \varphi'$ denjenigen Winkel repräsentirt, welcher von der Fläche $\mathfrak{A}$ *erfüllt* ist, und setzt man den zugehörigen Aussenwinkel $(2\pi - \alpha) = \alpha_0$, so wird jenes $\mu_1 = 1$ sein für alle Meridiane des Winkels α, hingegen < 1 für die Meridiane des Winkels α_0. — Um unter diesen Umständen die Formel (3.) weiter behandeln zu können, construiren wir zu jedem der Meridiane φ' und φ'' zwei Nachbar-Meridiane, deren Azimuthe respective mit $\varphi' \pm \frac{1}{2}\eta$ und $\varphi'' \pm \frac{1}{2}\eta$ bezeichnet sein mögen, wo η eine positive Grösse von *willkürlicher Kleinheit* vorstellt. Gleichzeitig bezeichnen wir mit S' den zwischen den beiden Meridianen $\varphi' \pm \frac{1}{2}\eta$ gelegenen schmalen Streifen der Kugelfläche, ebenso mit S'' den zwischen den beiden Meridianen $\varphi'' \pm \frac{1}{2}\eta$ gelegenen Streifen, endlich mit $S_{\alpha-\eta}$ und $S_{\alpha_0-\eta}$ diejenigen Theile der Kugelfläche, welche nach Absonderung dieser schmalen Streifen S' und S'' noch übrig bleiben. Die Winkel, welche diese vier Theile S', S'', $S_{\alpha-\eta}$, $S_{\alpha_0-\eta}$ an einem der beiden Pole besitzen, sind alsdann resp. gleich η, η, $(\alpha - \eta)$, $(\alpha_0 - \eta)$.

Betrachtet man nun diejenigen Puncte $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_p$ [vgl. (2.)], welche den Meridianen des Gebietes $S_{\alpha-\eta}$ angehören, so bemerkt man, dass der *erste* μ_1 dieser Puncte für all' jene Meridiane identisch mit dem Nordpol ist. Diesen Punct μ_1 ausser Augen lassend, aber wird man um die beiden Pole zwei gleich grosse Calotten von solcher Kleinheit beschreiben können, dass die *übrigen* Puncte $\mu_2, \mu_3, \ldots \mu_p$ für alle Meridiane des Gebietes $S_{\alpha-\eta}$ *ausserhalb* der beiden Calotten sich befinden. Andererseits sind die den Meridianen des Gebietes $S_{\alpha_0-\eta}$ entsprechenden Puncte $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_p$ *sämmtlich* durch gewisse Zwischenräume vom Nordpol getrennt. Man wird daher die schon construirten Calotten so weit verkleinern können, dass diese Puncte $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_p$ für alle Meridiane des Gebietes $S_{\alpha_0-\eta}$ *ausserhalb* der Calotten liegen. Solches ausgeführt, ergeben sich, falls man den sphärischen Radius jener beiden zuletzt erhaltenen Calotten mit ϱ benennt, andererseits aber die den Gebieten $S_{\alpha-\eta}$, $S_{\alpha_0-\eta}$, S', S'' entsprechenden Theile des Integrals J (1.) resp. mit $J_{\alpha-\eta}$, $J_{\alpha_0-\eta}$, J', J'' bezeichnet, aus (3.) die Formeln:

$$J_{\alpha-\eta} = (\alpha - \eta) F(1) + \vartheta' \, (\alpha - \eta) AM^{\varrho},$$
$$J_{\alpha_0-\eta} = \quad 0 \quad + \vartheta'' (\alpha_0 - \eta) AM^{\varrho};$$

und gleichzeitig ergiebt sich aus (4a.):

$$J' = \vartheta''' \cdot \eta AM,$$
$$J'' = \vartheta'''' \cdot \eta AM.$$

Aus diesen Formeln folgt durch Addition:

$$J = (\alpha - \eta) F(1) + \Theta \left[(\alpha - \eta) + (\alpha_0 - \eta)\right] AM^{\varrho} + \Theta' \cdot 2\eta AM,$$

oder, anders geordnet:

$$J = \alpha F(1) + \left[2\Theta' AM - 2\Theta AM^{\varrho} - F(1)\right] \eta + \Theta \, (\alpha + \alpha_0) AM^{\varrho},$$

oder, weil der in den eckigen Klammern enthaltene Ausdruck seinem absoluten Betrage nach $\leqq (4AM + M)$, andererseits aber $\alpha + \alpha_0 = 2\pi$ ist:

$$J = \alpha F(1) + \vartheta \cdot (1 + 4A) M\eta + \Theta \cdot 2\pi AM^{\varrho},$$

wo ϑ, Θ (ebenso wie ϑ', ϑ'', ϑ''', ϑ'''', Θ') unbekannte ächte Brüche vorstellen.

Zusammenfassung der drei betrachteten Fälle. Die drei Formeln (5a.), (5b.), (5c.) zeigen hinsichtlich des mit Θ behafteten Gliedes volle Uebereinstimmung. Aber auch das mit ϑ behaftete nur in der letzten Formel auftretende Glied kann [weil ϑ ein unbekannter ächter Bruch sein soll, mithin auch $= 0$ sein darf] in den beiden ersten Formeln hinzugefügt werden; und es können daher jene drei Formeln zusammengefasst werden zu folgender *einen Formel:*

$$(6.) \qquad J = \int\!\!\int_{\mathfrak{A}} F(\mu)\, d\mu\, d\varphi = \alpha F(1) + \vartheta \cdot (1 + 4A) M\eta + \Theta \cdot 2\pi AM^{\varrho},$$

wenn man nur festsetzt, dass $\alpha = 0$, oder $= 2\pi$ sein solle, falls der Nordpol *ausserhalb*, resp. *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegt, und dass ferner α gleich dem Winkelmaass der Fläche $\mathfrak{A}$ im Nordpol sein solle, sobald dieser Pol *am Rande* von $\mathfrak{A}$ liegt.

Zusammenfassung sämmtlicher Fälle. Wenn wir die bisher beständig festgehaltene, den Formeln (5a.), (5b.), (5c.) und (6.) zu Grunde liegende Voraussetzung, dass der Südpol *ausserhalb* $\mathfrak{A}$ liegt, gegenwärtig *fallen lassen*, und die relative Lage der Fläche $\mathfrak{A}$ in Bezug auf jenen Südpol variiren lassen, so erhalten wir, wie leicht zu übersehen, an Stelle der Formel (6.) folgende allgemeinere Formel:

$$\text{(7.)} \qquad \iint_{\mathfrak{A}} F'(\mu)\, d\mu\, d\varphi = \alpha\, F(1) - \alpha'\, F(-1) + \vartheta \cdot (1 + 4A)\, M\eta + \Theta \cdot 2\pi A M^{\varrho},$$

wo das α' dieselbe Bedeutung für den Südpol hat, wie α für den Nordpol. Dividiren wir diese Formel durch 2π, und beachten wir, dass die so entstehende Grösse $\frac{(1+4A)M\eta}{2\pi}$, die hinfort mit ζ bezeichnet werden mag, ebenso wie der in ihr enthaltene Factor η eine *positive Grösse von willkürlicher Kleinheit* vorstellt, so gelangen wir zu folgendem Satz.

Bezeichnet $F(\cos\omega)$ oder $F(\mu)$ eine auf der Kugelfläche ausgebreitete, daselbst überall stetige Function, ferner M^{ϱ} den absolut grössten Werth, den diese Function zwischen zwei Parallelkreisen $\omega = \varrho$ und $\omega = \pi - \varrho$ anzunehmen im Stande ist, und bezeichnet endlich $\mathfrak{A}$ eine auf der Kugel gegebene Fläche, deren Rand von einem grössten Kreise niemals in mehr als A Puncten geschnitten wird, so gilt die Formel:

$$\text{(8.)} \qquad \frac{1}{2\pi}\iint_{\mathfrak{A}} F'(\mu)\, d\mu\, d\varphi = \frac{\alpha F(1) - \alpha' F(-1)}{2\pi} + \vartheta\zeta + \Theta A M^{\varrho}.$$

Hier hängt α lediglich ab von der relativen Lage des Nordpols zur Fläche $\mathfrak{A}$; und zwar ist $\alpha = 0$ oder $= 2\pi$, falls dieser Pol ausserhalb, resp. innerhalb $\mathfrak{A}$ liegt, andererseits aber repräsentirt α das Winkelmaass der Fläche $\mathfrak{A}$ im Nordpol, sobald dieser Pol am Rande von $\mathfrak{A}$ liegt. Und die analoge Bedeutung hat α' für den Südpol. Ferner sind ϑ, Θ zwei unbekannte (positive oder negative) *ächte Brüche, und endlich ζ und ϱ zwei positive Grössen von willkürlich zu wählender Kleinheit.*

Allerdings steht ϱ zu ζ oder (was dasselbe) zu η in einer gewissen Abhängigkeit, wie aus den geometrischen Bedeutungen von ϱ und η sofort sich ergiebt. Lässt man nämlich ζ (resp. η) fortwährend sich verkleinern und schliesslich verschwinden, so wird ϱ ebenfalls mehr und mehr abnehmen bis zum schliesslichen Verschwinden. So lange aber ζ (resp. η) von Null verschieden bleibt, wird auch ϱ von Null verschieden bleiben dürfen. *Wir haben also hinsichtlich der beiden kleinen*

(8a.) *positiven Grössen ζ und ϱ*

zum vorhergehenden Satze noch hinzuzufügen, dass ζ und damit zugleich auch das von ζ abhängende ϱ ad libitum verkleinert werden darf, dass aber ϱ stets von Null verschieden bleiben kann, so lange man ζ von Null verschieden erhält.

Anwendung auf die Kugelfunctionen. — Setzt man in (8.) für $F(\mu)$ die Function

$$(\alpha.) \qquad F(\mu) = \frac{P_n(\mu) + P_{n+1}(\mu)}{2},$$

so wird offenbar $F(1) = 1$ und $F(-1) = 0$, ferner $M = 1$, und ferner [zufolge Seite 84 (17.)]:

$$(\beta.) \qquad M^{\varrho} \leqq \operatorname{Max} \mathsf{P}_n^{\varrho,\, \pi-\varrho},$$

falls man nämlich unter Max f_n die *grösste* der Zahlen $f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \dots$ in inf. versteht. Nimmt man also gleichzeitig für die Fläche $\mathfrak{A}$ eine *beliebig gegebene* Calotte [ob der Rand derselben durch einen der Kreise $\mu =$ Const., oder durch irgend welchen *andern* Kreis dargestellt ist, soll gleichgültig bleiben], mithin die Zahl $A = 2$; so gewinnt die Formel (8.) folgende Gestalt:

$$\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{\mathfrak{A}} \frac{P'_n(\mu) + P'_{n+1}(\mu)}{2}\, d\mu\, d\varphi = \frac{\alpha}{2\pi} + \vartheta\zeta + 2\Theta \text{ Max } \mathsf{P}_n^{\varrho,\pi-\varrho}; \tag{9.}$$

und diese Formel kann, weil

$$\frac{P'_n(\mu) + P'_{n+1}(\mu)}{2} = \sum_0^n \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) = \sum_0^n \frac{2n+1}{2} P_n(\cos\omega)$$

ist [vgl. Seite 46 (91.)], auch so geschrieben werden:

$$\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{\mathfrak{A}} \left(\sum_0^n \frac{2n+1}{2} P_n(\cos\omega)\right) d\mu\, d\varphi = \frac{\alpha}{2\pi} + \vartheta\zeta + 2\Theta \text{ Max } \mathsf{P}_n^{\varrho,\pi-\varrho}. \tag{10.}$$

Dabei ist alsdann das α offenbar $= 0$, oder $= \pi$, oder $= 2\pi$, je nachdem der Nordpol ($\mu = 1$) *ausserhalb* der Calotte $\mathfrak{A}$, oder *am Rande* von $\mathfrak{A}$, oder *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegt.

In der vorstehenden Formel (10.) bezeichnet ω den sphärischen Abstand des Elementes $d\mu\, d\varphi$ vom Nordpol. Da nun aber die relative Lage dieses Nordpols zur gegebenen Calotte $\mathfrak{A}$ eine *völlig willkürliche* ist, so wird die Formel nicht nur auf den Nordpol, sondern eben so gut auch auf jeden beliebigen andern Punct (μ_1, φ_1) anwendbar sein; man erhält also die weitere Formel:

$$\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int_{\mathfrak{A}} \left(\sum_0^n \frac{2n+1}{2} P_n(\cos\gamma)\right) d\mu\, d\varphi = \frac{\alpha}{2\pi} + \vartheta\zeta + 2\Theta \text{ Max } \mathsf{P}_n^{\varrho,\pi-\varrho}, \tag{11.}$$

wo γ den sphärischen Abstand des Elementes $d\mu\, d\varphi$ von einem beliebig gegebenen Puncte (μ_1, φ_1) bezeichnet, während $\alpha = 0$, oder $= \pi$, oder $= 2\pi$ ist, je nachdem dieser Punct (μ_1, φ_1) *ausserhalb* $\mathfrak{A}$, oder *am Rande* von $\mathfrak{A}$, oder *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegt.

Wählt man jetzt endlich die Calotte $\mathfrak{A}$ der Art, dass sie von einem der Kreise $\mu =$ Const., z. B. vom Kreise $\mu = \delta$ begrenzt wird, und den Nordpol ($\mu = 1$) in sich enthält, so nimmt das links stehende Integral die Gestalt an:

$$\frac{1}{2\pi}\int_\delta^1\!\!\int_0^{2\pi} \left(\sum_0^n \frac{2n+1}{2} P_n(\cos\gamma)\right) d\mu\, d\varphi,$$

oder, falls man für $P_n(\cos\gamma)$ die bekannte Entwicklung [Seite 13 (8.)]:

$$P_n(\cos\gamma) = P_n(\mu)\, P_n(\mu_1) + U\cos(\varphi - \varphi_1) + V\cos 2(\varphi - \varphi_1) + \cdots$$

substituirt, folgende Gestalt:

$$\int_\delta^1 \left(\sum_0^n \frac{2n+1}{2} P_n(\mu)\, P_n(\mu_1)\right) d\mu.$$

Und man gelangt daher mittelst der Formel (11.), falls man daselbst $\frac{\alpha}{2\pi} = \mathsf{A}$ setzt, zu folgendem Satz*):

*) Absichtlich werden wir bei Aussprache dieses Satzes die Fälle $\delta = 1$ und $\delta = -1$ ausschliessen. Denn für $\delta = 1$ ist das zu besprechende Integral (12.) stets $= 0$. Und andererseits ist dasselbe [wie früher in *sehr einfacher Weise* gezeigt wurde; Seite 101 (25.)] stets $= 1$, falls $\delta = -1$ ist.

Sind μ_1 *und* δ *zwei gegebene Constanten, und ist* $-1 < \delta < 1$, *so gilt für die Function*

$$\Lambda_n(\mu, \mu_1) = \sum_0^n \frac{2n+1}{2} P_n(\mu) P_n(\mu_1)$$

die Formel:

$$(12.) \qquad \int_\delta^1 \Lambda_n(\mu, \mu_1)\, d\mu = \mathsf{A} + \vartheta\zeta + 2\Theta \operatorname{Max} \mathsf{P}_n^{\varrho, \pi-\varrho},$$

in welcher das $\mathsf{A} = 0$, *oder* $= \frac{1}{2}$ *oder* $= 1$ *ist*
je nachdem $-1 \leqq \mu_1 < \delta$, *oder* $\mu_1 = \delta$, *oder* $\delta < \mu_1 \leqq 1$ *ist.*

Dabei sind ϑ, Θ *unbekannte* (positive oder negative) *ächte Brüche, ferner* ζ, ϱ *positive Grössen von willkürlicher Kleinheit, während* Max $\mathsf{P}_n^{\varrho, \pi-\varrho}$ *die früher* [Seite 124 (β.)] *angegebene Bedeutung besitzt. Insbesondere ist zu beachten, dass* ζ, *und damit zugleich auch das von* ζ *abhängende* ϱ *ad libitum verkleinert werden darf, dass aber* ϱ *stets von Null verschieden bleiben darf, so lange man das* ζ *von Null verschieden erhält* [vgl. (8a.)].

Aus diesem Satze folgt sofort, *dass das Integral* (12.) *mit unendlich wachsendem* n *gegen die Constante* A (d. i. gegen 0, $\frac{1}{2}$ oder 1) *convergirt.* Denn ist irgend ein Kleinheitsgrad ε gegeben, so kann man zunächst das Glied $\vartheta\zeta$ durch Verkleinerung der willkürlichen Grösse ζ unter $\frac{1}{2}\varepsilon$, sodann aber das folgende Glied 2Θ Max $\mathsf{P}_n^{\varrho, \pi-\varrho}$ durch Vergrösserung von n ebenfalls unter $\frac{1}{2}\varepsilon$ hinabdrücken [Satz Seite 83 (16.), (17.)]. U. s. w.

Doch unterscheidet sich der gegenwärtige Satz (12.) von dem früheren Satz Seite 117 (2.) durch eine *grössere Vollkommenheit*, indem er genauer eingeht auf die *Art und Weise*, in welcher jene Convergenz stattfindet. In der That übersieht man leicht, dass der gegenwärtige Satz (12.) den von uns verfolgten Zwecken [vgl. die Bemerkung Seite 120] vollkommen entspricht.

Fünftes Capitel.

Die nach Cylinderfunctionen, d. i. nach Bessel'schen Functionen fortschreitende Integraldarstellung.

Die im gegenwärtigen Capitel anzustellenden Betrachtungen sind denen des vorhergehenden im Ganzen *analog*, unterscheiden sich aber von jenen durch eine grössere Einfachheit.

§ 1.

Einige Eigenschaften der Bessel'schen Functionen.

Erster Satz. — *Für reelle Werthe von* x *ist stets:*

$$(1.) \qquad \operatorname{abs} J(x) \leqq 1.$$

Demgemäss bleibt die Curve $y = \operatorname{abs} J(x)$ *ihrem ganzen Verlaufe nach zwischen den beiden Parallellinien* $y = 0$ *und* $y = 1$. *Auch ist die Ordinate dieser*

Curve im Punct $x = 0$ *gerade* $= 1$. Der Beweis dieses Satzes ist schon früher gegeben worden; vgl. Seite 19 (4.) und auch Seite 18 (1.).

Ferner haben wir auf Seite 20 gesehen, dass die Function $J(x)$ für *sehr grosse Werthe* von x darstellbar ist durch die Formel:

$$J(x) = \frac{A \sin x + B \cos x}{\sqrt{x}},$$

wo A, B gewisse Constanten sind. Und hieraus ergiebt sich sofort folgender

Zweiter Satz. — *Ist* α *eine positive Grösse, und bezeichnet man den absolut grössten Werth, welchen die Bessel'sche Function* $J(x)$ *im Intervall* $x = \alpha \ldots . \infty$ *anzunehmen im Stande ist, mit*

$$\Upsilon^{\alpha}, \tag{2.}$$

so wird man dieses Υ^{α} *durch Vergrösserung von* α *unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad hinabzudrücken im Stande sein. Auch bemerkt man, dass, wenn* $0 < \alpha < \alpha_1 < \alpha_2 \ldots .$ *ist, zwischen den zugehörigen Grössen* Υ *stets die Relation stattfinden wird:*

$$\Upsilon^{\alpha} \geqq \Upsilon^{\alpha_1} \geqq \Upsilon^{\alpha_2} \geqq \quad \text{etc. etc.}; \tag{2a.}$$

dass also Υ^{α} *bei wachsendem* α *immer nur a b n e h m e n kann.*

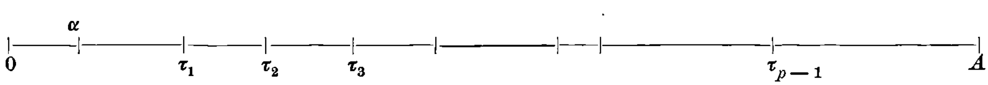
Aufgabe. — Dies vorausgeschickt, stellen wir uns die Aufgabe, das Integral

$$\int_0^A F(x) \frac{dJ(qx)}{dx} dx \tag{3.}$$

näher zu untersuchen, — unter der Voraussetzung, dass die Function

$$F(x) \tag{4.}$$

im Intervall $x = 0 \ldots A$ *abtheilungsweise stetig* und *abtheilungsweise monoton ist;* dabei sollen A und q beliebig gegebene *positive Constanten* sein.

(5.) 

Wir zerlegen das Intervall $0 \ldots . A$ in die für $F(x)$ monotonen Strecken $(0, \tau_1)$, (τ_1, τ_2), (τ_2, τ_3), ... (τ_{p-1}, A), und schalten überdies zwischen 0 und τ_1 noch einen *variablen* Punct α ein. Der absolut grösste Werth, den die Function $J(qx)$ im Intervall $x = \alpha \ldots .. \infty$ anzunehmen im Stande ist, wird alsdann dargestellt sein durch $\Upsilon^{q\alpha}$ [vgl. die bei (2.) eingeführte Bezeichnungsweise]; ferner mag der absolut grösste Werth von $F(x)$ für das ganze Intervall $x = 0 \ldots . A$ mit M bezeichnet werden, und solches angedeutet werden durch die Formeln:

$$(6.)\qquad \begin{cases} \text{für}\quad x = 0\ldots\ldots A \quad \text{soll sein:}\quad \operatorname{Max}\left(\operatorname{abs} F(x)\right) = M, \\ \text{für}\quad x = \alpha\ldots\ldots A\ldots\ldots\infty \;\text{ist:}\quad \operatorname{Max}\left(\operatorname{abs} J(qx)\right) = \Upsilon^{q\alpha}. \end{cases}$$

Bringt man nun den Du Bois'schen Satz (Seite 33) auf die in (5.) angegebenen einzelnen Strecken der Reihe nach in Anwendung, so ergiebt sich zunächst für die Strecke $(0,\ \alpha)$:

$$\int_0^\alpha F(x)\frac{dJ(qx)}{dx}\,dx = F(0)\left[J(q\xi) - J(0)\right] + F(\alpha)\left[J(q\alpha) - J(q\xi)\right],$$

$$\text{d. i.}\quad = -F(0)\,J(0) + \left[F(0) - F(\alpha)\right]J(q\xi) + F(\alpha)\,J(q\alpha),\quad \text{wo}\quad 0 \leqq \xi \leqq \alpha.$$

Beachtet man nun, dass nach (1.) das $J(0) = 1$, und das $\operatorname{abs} J(q\xi) \leqq 1$ ist, und beachtet man ferner die in (6.) notirten Bezeichnungen, so gewinnt diese Formel folgende Gestalt:

$$(7.)\qquad \int_0^\alpha F(x)\frac{dJ(qx)}{dx}\,dx = -F(0) + \Theta\left[F(0) - F(\alpha)\right] + \vartheta M\Upsilon^{q\alpha},$$

wo Θ, ϑ ächte Brüche vorstellen. Ferner ergiebt sich durch Anwendung des Du Bois'schen Satzes (Seite 33) auf die Strecke $(\alpha,\ \tau_1)$ folgende Formel:

$$\int_\alpha^{\tau_1} F(x)\frac{dJ(qx)}{dx}\,dx = F(\alpha)\left[J(q\eta) - J(q\alpha)\right] + F(\tau_1)\left[J(q\tau_1) - J(q\eta)\right],\quad \text{wo}\quad \alpha \leqq \eta \leqq \tau_1;$$

und hieraus folgt mit Rücksicht auf (6.) sofort:

$$(7'.)\qquad \int_\alpha^{\tau_1} F(x)\frac{dJ(qx)}{dx}\,dx = \vartheta_1\cdot 4M\Upsilon^{q\alpha}.$$

Desgleichen gelangt man durch Anwendung des Du Bois'schen Satzes auf die Strecke $(\tau_1,\ \tau_2)$ zu der analogen Formel:

$$(7''.)\qquad \int_{\tau_1}^{\tau_2} F(x)\frac{dJ(qx)}{dx}\,dx = \vartheta_2\cdot 4M\Upsilon^{q\alpha}.$$

u. s. w. u. s. w. Dabei sind ϑ_1, ϑ_2, etc. lauter ächte Brüche. Schliesslich erhält man durch Addition all' dieser Formeln (7.), (7'.), (7''.), etc.:

$$(8.)\qquad \int_0^A F(x)\frac{dJ(qx)}{dx}\,dx = -F(0) + \Theta\left[F(0) - F(\alpha)\right] + \left[\vartheta + 4(\vartheta_1 + \vartheta_2 + \cdots \vartheta_p)\right]M\Upsilon^{q\alpha};$$

oder, was dasselbe ist:

$$9.)\qquad \operatorname{abs}\left\{F(0) + \int_0^A F(x)\frac{dJ(qx)}{dx}\,dx\right\} \leqq \underbrace{\operatorname{abs}\left[F(0) - F(\alpha)\right]}_{U} + \underbrace{\operatorname{abs}\left[(1 + 4p)\,M\Upsilon^{q\alpha}\right]}_{V},$$

wo übrigens im Gliede V das Zeichen abs gestrichen werden könnte, weil die daselbst befindlichen Factoren ihrer Bedeutung nach stets positiv sind.

Mittelst dieser Formel (9.) kann man nun den auf ihrer linken Seite stehenden Ausdruck durch gehörige Vergrösserung von q unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad ε hinabdrücken; in der Weise, dass man zunächst das Glied U durch eine geeignete Verschiebung des variablen Punctes α*) unter $\frac{1}{2}\varepsilon$, sodann aber das zweite Glied V, durch Vergrösserung von q, ebenfalls unter $\frac{1}{2}\varepsilon$ hinabdrückt**). Auch bemerkt man, dass jedes der beiden Glieder U und V unter $\frac{1}{2}\varepsilon$ *bleiben* wird, falls man nach Ausführung der eben genannten Operationen das q noch weiter anwachsen lässt***). Kurz die Formel (9.) zeigt in deutlicher Weise, dass die *linke Seite* dieser Formel bei unendlich wachsendem q gegen 0 convergirt. Und wir gelangen daher zu folgendem Satz:

Dritter Satz. — *Bezeichnet A eine beliebig gegebene positive Constante, und $F(x)$ eine Function, die im Intervall $x = 0 \ldots . A$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist, so gilt die Formel:*

$$(10.) \qquad \lim_{q=\infty} \int_0^A F(x) \frac{d\,J(qx)}{dx}\,dx = -F(0), \quad d\ i. \ = -F(+0).$$

Dass die Grösse $F(0)$ genauer mit $F(+0)$ zu bezeichnen ist, liegt klar zu Tage.

Wir fügen schliesslich noch folgenden Satz hinzu, der aus (9.) Seite 20 sofort sich ergiebt, wenn man das dortige y mit q, und das dortige α mit x vertauscht:

Vierter Satz. — *Für beliebige Werthe von q und x gilt die Formel:*

$$(11.) \qquad \int_0^q J(qx)\,q\,dq = -\frac{qJ'(qx)}{x} = -\frac{1}{x}\frac{d\,J(qx)}{dx}.$$

Dieser Satz ist (beiläufig bemerkt) nicht nur analog mit dem früheren Satz (Seite 91):

$$(12.) \qquad \sum_0^n (2n+1)\,P_n(x) = P'_n(x) + P'_{n+1}(x),$$

sondern kann aus diesem auch geradezu abgeleitet werden durch einen leicht sich ergebenden Grenzübergang.

---

*) Diese geeignete Verschiebung besteht darin, dass man jenen Punct α hinreichend nahe an den festen Punct 0 heranschiebt [vgl. (5.)].

**) Dass solches immer möglich ist, folgt aus dem Satze (2.).

***) Dies folgt aus dem Satze (2a.).

§ 2.

Ueber die nach Bessel'schen Functionen fortschreitende Integraldarstellung.

In der *Horizontalebene* mögen die Polarcoordinaten eines beliebigen *variablen* Punctes mit ϱ, φ bezeichnet werden; und zwar sei ϱ der Abstand des Punctes vom *Anfangspunct*, und φ das Azimuth. Denkt man sich also auf dieser Horizontalebene irgend eine Function

$$f(\varrho,\ \varphi) \tag{1.}$$

ausgebreitet, so wird ihr Werth im Anfangspunct $= f(0,\ \varphi)$ sein. Ist also die Function im Anfangspunct stetig, so wird dieses $f(0,\ \varphi)$ eine völlig bestimmte, d. i. von φ unabhängige Grösse sein.

Beschreibt man ferner um den Anfangspunct einen Kreis vom Radius ϱ, so wird das arithmetische Mittel F derjenigen Werthe, welche die gegebene Function (1.) längs dieser Kreislinie besitzt, nur von ϱ abhängen, und demgemäss mit $F(\varrho)$ zu bezeichnen sein. Repräsentirt $d\sigma = \varrho\, d\varphi$ das beim Puncte $(\varrho,\ \varphi)$ gelegene Bogenelement des Kreises, so ist offenbar:

$$F(\varrho) = \frac{\int f(\varrho,\ \varphi)\ \varrho\, d\varphi}{\int \varrho\, d\varphi},$$

beide Integrationen hinerstreckt über den ganzen Kreis, d. i. von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$. Hieraus folgt:

$$F(\varrho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varrho,\ \varphi)\, d\varphi. \tag{2.}$$

Beiläufig sei noch bemerkt, dass der Ausdruck

$$\lim_{\varrho=0} F(\varrho) \tag{3.}$$

zu bezeichnen sein wird als das arithmetische Mittel derjenigen Werthe, welche die gegebene Function f besitzt längs eines um den Anfangspunct beschriebenen unendlich kleinen Kreises. — Dies vorausgeschickt, wenden wir uns zu unserer eigentlichen

Aufgabe. Nach unsern früheren aber *sehr unsicheren* Ueberlegungen (Seite 18) ist jede Function $f(\varrho,\ \varphi)$ darstellbar durch ein nach den Bessel'schen Functionen fortschreitendes Integral, nämlich in einem beliebigen Puncte $(\varrho_1,\ \varphi_1)$ darstellbar durch folgende Formel:

$$f(\varrho_1,\ \varphi_1) = \lim_{q=\infty} \lim_{R=\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi}\int_0^R \int_0^{2\pi} f(\varrho,\ \varphi) \left(\int_0^q q\, dq\ J(q\varsigma) \right) \varrho\, d\varrho\, d\varphi \right\}, \tag{4.}$$

wo ς die gegenseitige Entfernung der Puncte $(\varrho,\ \varphi)$ und $(\varrho_1,\ \varphi_1)$ vorstellt, mithin den Werth hat:

$$\varsigma = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos(\varphi - \varphi_1)}. \tag{5.}$$

Um die Correctheit resp. Incorrectheit dieser Formel (4.) zu beurtheilen, haben wir das in derselben auftretende Integral

$$(6.)\qquad S_q = \frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} f(\varrho, \varphi)\left(\int_0^q q\,dq\; J(q\varsigma)\right)\varrho\, d\varrho\, d\varphi$$

einer genaueren Untersuchung zu unterwerfen. Um dabei aber sicher zu sein, dass dieses Integral sich wirklich ausführen lässt, *wollen wir von vornherein annehmen, die Horizontalebene könne durch irgend welche Curven, resp. durch irgend welches Netz von Curven in eine Anzahl von Theilen zerlegt werden, der Art, dass die Function*

$$(\mathfrak{B}.)\qquad f(\varrho, \varphi)$$

auf jedem solchen Theile stetig ist.

Dies vorausgeschickt, beginnen wir zunächst mit dem Specialfall, dass der Punct (ϱ_1, φ_1) gerade im *Anfangspunct* liegt, mithin $\varrho_1 = 0$ ist. Alsdann wird nach (5.): $\varsigma = \varrho$; so dass also das zu untersuchende Integral (6.) die Gestalt annimmt:

$$(7.)\qquad S_q = \frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} f(\varrho, \varphi)\left(\int_0^q q\,dq\; J(q\varrho)\right)\varrho\, d\varrho\, d\varphi\,.$$

Hieraus folgt mittelst des vierten Satzes (Seite 129):

$$(8.)\qquad S_q = -\frac{1}{2\pi}\int_0^R\int_0^{2\pi} f(\varrho, \varphi)\,\frac{dJ(q\varrho)}{d\varrho}\, d\varrho\, d\varphi\,,$$

also durch Einführung der auxiliaren Function $F(\varrho)$, [vergl. (2.)]:

$$(9.)\qquad S_q = -\int_0^R F(\varrho)\,\frac{dJ(q\varrho)}{d\varrho}\, d\varrho\,.$$

Hieraus aber folgt weiter, falls jene auxiliare Function $F(\varrho)$ im Intervall $\varrho = 0 \ldots . R$ *abtheilungsweise stetig* und *abtheilungsweise monoton* ist, mittelst des dritten Satzes (Seite 129):

$$(10.)\qquad \lim_{q=\infty} S_q = F(+0)\,,$$

oder, was dasselbe:

$$(11.)\qquad \lim_{q=\infty} S_q = \lim_{\varrho=0} F(\varrho)\,,$$

wo gegenwärtig der Ausdruck rechts [vergl. (3.)] bezeichnet werden kann als *das arithmetische Mittel derjenigen Werthe, welche die gegebene Function $f(\varrho, \varphi)$ besitzt längs eines unendlich kleinen um den Anfangspunct beschriebenen Kreises.* Somit gelangen wir zu folgendem Resultat:

Theorem. — *Ist die Function $f(\varrho, \varphi)$ auf einer um den Anfangspunct mit dem Radius R beschriebenen Kreisfläche abtheilungsweise stetig*), und setzt man:*

$$S_q = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} f(\varrho, \varphi) \left(\int_0^q q\,dq\, J(q\varrho) \right) \varrho\, d\varrho\, d\varphi, \tag{A.}$$

so wird dieses S_q bei unendlich wachsendem q gegen eine bestimmte feste Grenze convergiren. Und zwar ist diese Grenze dargestellt durch das arithmetische Mittel derjenigen Werthe, welche $f(\varrho, \varphi)$ besitzt längs eines um den Anfangspunct beschriebenen unendlich kleinen Kreises.

*NB. Doch ist dieses Theorem mit voller Sicherheit nur dann anwendbar, wenn die auxiliare Function $F(\varrho)$ im Intervall $\varrho = 0 \ldots\ldots R$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist**). Dabei ist diese auxiliare Function $F(\varrho)$* [vergl. (2.)] *definirt zu denken als das arithmetische Mittel der gegebenen Function $f(\varrho, \varphi)$ für eine um den Anfangspunct mit dem Radius ϱ beschriebene Kreisperipherie.*

Verallgemeinerung. — Dieser Satz bezieht sich zunächst nur auf eine um den *Anfangspunct* beschriebene Kreisfläche $\mathfrak{K}$, lässt sich aber leicht übertragen auf eine um einen *beliebigen Punct* (ϱ_1, φ_1) beschriebene Kreisfläche $\mathfrak{K}'$. Bezeichnet man nämlich die diesen Flächen entsprechenden Integrale S_q resp. mit S_q und S_q', und setzt man ausserdem zur augenblicklichen Abkürzung:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^q q\,dq\, J(q\varrho) = \Lambda_q(\varrho),$$

(12.)

$$\text{mithin:} \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^q q\,dq\, J(q\varsigma) = \Lambda_q(\varsigma),$$

so wird:

$$S_q = \iint_{\mathfrak{K}} \Lambda_q(\varrho) \cdot f(\varrho, \varphi)\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi,$$

(13.)

$$S_q' = \iint_{\mathfrak{K}'} \Lambda_q(\varsigma) \cdot f(\varrho, \varphi)\, \varrho\, d\varrho\, d\varphi,$$

wo ς den Abstand des variablen Punctes (ϱ, φ) vom Mittelpunct (ϱ_1, φ_1) der Kreisfläche $\mathfrak{K}'$ vorstellt.

Um die gegenseitige Beziehung zwischen diesen beiden Integralen S_q und S_q' deutlicher hervortreten zu lassen, wollen wir für den Augenblick annehmen, die Function $f(\varrho, \varphi)$ repräsentire die *Dichtigkeit* einer auf der Horizontalebene

*) Es wird also vorausgesetzt, dass die Function *auf dieser Kreisfläche* der in ($\mathfrak{B}$) Seite 131 angegebenen Bedingung entspricht, dass mithin diese Fläche durch irgend ein Curvennetz in einzelne Theile zerlegt werden kann, der Art, dass $f(\varrho, \varphi)$ auf jedem solchen Theile *stetig* ist.

**) Vgl. den Uebergang von (9.) zu (10.).

ausgebreiteten Massenbelegung. Alsdann repräsentirt offenbar $f(\varrho, \varphi)\, \varrho d\varrho\, d\varphi$ ein *Massenelement* dieser Belegung (nämlich diejenige Masse, welche vorhanden ist auf dem *Flächenelement* $\varrho d\varrho\, d\varphi$). Es repräsentirt also S_q die Summe aller auf $\mathfrak{K}$ vorhandenen Massenelemente $f(\varrho, \varphi)\, \varrho d\varrho\, d\varphi$, jedes noch multiplicirt mit $\Lambda_q(\varrho)$, wo ϱ den Abstand des Elementes vom Mittelpunct der Kreisfläche $\mathfrak{K}$ (d. i. vom Anfangspunct des Coordinatensystems) vorstellt. Und ebenso repräsentirt S_q' die Summe aller auf $\mathfrak{K}'$ vorhandenen Massenelemente $f(\varrho, \varphi)\, \varrho d\varrho\, d\varphi$, jedes noch multiplicirt mit $\Lambda_q(\varsigma)$, wo ς den Abstand des Elementes vom Mittelpunct (ϱ_1, φ_1) der Kreisfläche $\mathfrak{K}'$ vorstellt. Kurz, das Integral S_q hat zur Kreisfläche $\mathfrak{K}$ genau dieselbe Beziehung, wie das Integral S_q' zur Kreisfläche $\mathfrak{K}'$. Blicken wir also zurück auf das für S_q erhaltene Theorem (A.) Seite 132, so erkennen wir sofort, dass für S_q' folgendes analoge Theorem gelten muss:

Theorem. — *Es sei $\mathfrak{K}'$ eine in der Horizontalebene beliebig gegebene Kreisfläche, und $f(\varrho, \varphi)$ eine Function, die auf $\mathfrak{K}'$ abtheilungsweise stetig ist. Bezeichnet man alsdann den Abstand des variablen Punctes (ϱ, φ) vom Mittelpuncte (ϱ_1, φ_1) jener Kreisfläche $\mathfrak{K}'$ mit ς, und bildet man das über $\mathfrak{K}'$ sich ausdehnende Integral:*

$$(\text{B.}) \qquad S_q' = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{K}'} f(\varrho, \varphi) \left(\int_0^q q\, dq\, J(q\varsigma) \right) \varrho\, d\varrho\, d\varphi ,$$

so wird dieses S_q' bei unendlich wachsendem q gegen eine bestimmte feste Grenze convergiren. Und zwar wird diese Grenze dargestellt sein durch das arithmetische Mittel derjenigen Werthe, welche $f(\varrho, \varphi)$ besitzt längs eines um den Punct (ϱ_1, φ_1) beschriebenen unendlich kleinen Kreises.

NB. Doch ist dieses Theorem mit voller Sicherheit nur dann anwendbar, wenn die auxiliare Function $F(\varsigma)$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist für das Intervall $\varsigma = 0 \ldots . R'$, wo R' den Radius der Kreisfläche $\mathfrak{K}'$ bezeichnet. Diese auxiliare Function $F(\varsigma)$ ist zu definiren als das arithmetische Mittel der gegebenen Function $f(\varrho, \varphi)$ für eine um den Punct (ϱ_1, φ_1) mit dem Radius ς beschriebene Kreisperipherie.

Weitere Verallgemeinerung. — Es sei $\mathfrak{T}$ ein *beliebiges Stück* der Horizontalebene (also ein von beliebigen Curven begrenzter Theil jener Ebene), und

$$(14.) \qquad T_q = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{T}} f(\varrho, \varphi) \left(\int_0^q q\, dq\, J(q\varsigma) \right) \varrho\, d\varrho\, d\varphi$$

ein über diese Fläche $\mathfrak{T}$ ausgedehntes Integral; dabei bezeichne ς den Abstand des variablen Punctes (ϱ, φ) von einem *beliebig gegebenen festen* Puncte (ϱ_1, φ_1). Ob dieser feste Punct (ϱ_1, φ_1) innerhalb oder ausserhalb $\mathfrak{T}$ liegt, mag dahingestellt bleiben. Es soll der Werth untersucht werden, gegen welchen dieses Integral T_q bei unendlich wachsendem q convergirt.

Zu diesem Zweck beschreiben wir um (ϱ_1, φ_1) als Mittelpunct eine Kreisfläche $\mathfrak{K}'$ von solcher Grösse, dass die gegebene Fläche $\mathfrak{T}$ vollständig innerhalb $\mathfrak{K}'$ liegt; und gleichzeitig wollen wir uns die in (14.) enthaltene und nur auf $\mathfrak{T}$ bezügliche Function $f(\varrho, \varphi)$ über $\mathfrak{T}$ hinaus in solcher Weise fortgesetzt denken, dass sie auf der Fläche $(\mathfrak{K}' - \mathfrak{T})$ überall $= 0$ ist. Alsdann bleibt offenbar der Werth des Integrales T_q (14.) ungeändert, wenn man dasselbe nicht über $\mathfrak{T}$, sondern über $\mathfrak{K}'$ ausdehnt. Nach dieser Umänderung aber subordinirt sich das Integral dem vorhergehenden Theorem (B.); so dass man also vermöge dieses Theorems zu folgendem Resultat gelangt:

Theorem. — *Es sei $\mathfrak{T}$ ein beliebig gegebener Theil der Horizontalebene, und $f(\varrho, \varphi)$ eine Function, die auf dieser Fläche $\mathfrak{T}$ abtheilungsweise stetig ist. Bezeichnet man alsdann den Abstand des variablen Punctes (ϱ, φ) von einem beliebig gegebenen festen Puncte (ϱ_1, φ_1) mit ς, und bildet man das über $\mathfrak{T}$ sich ausdehnende Integral:*

$$T_q = \frac{1}{2\pi} \iint_{\mathfrak{T}} f(\varrho, \varphi) \left(\int_0^q q\, dq\, J(q\varsigma) \right) \varrho\, d\varrho\, d\varphi, \tag{C.}$$

so wird dieses T_q bei unendlich wachsendem q gegen eine bestimmte feste Grenze convergiren. Und zwar wird diese Grenze, falls (ϱ_1, φ_1) innerhalb $\mathfrak{T}$ liegt, dargestellt sein durch das arithmetische Mittel derjenigen Werthe, welche $f(\varrho, \varphi)$ längs eines um (ϱ_1, φ_1) beschriebenen unendlich kleinen Kreises besitzt, hingegen $= 0$ sein, falls der Punct (ϱ_1, φ_1) ausserhalb $\mathfrak{T}$ liegt.

NB. Doch ist dieses Theorem mit voller Sicherheit nur dann anwendbar, wenn die auxiliare Function $F(\varsigma)$ abtheilungsweise stetig und abtheilungsweise monoton ist für das Intervall $\varsigma = 0 \ldots . R'$, wo R' den Radius einer um (ϱ_1, φ_1) beschriebenen und die gegebene Fläche $\mathfrak{T}$ umschliessenden Kreisperipherie vorstellt. Diese auxiliare Function $F(\varsigma)$ ist zu definiren als das arithmetische Mittel der Function $f_0(\varrho, \varphi)$ für eine um den Punct (ϱ_1, φ_1) mit dem Radius ς beschriebene Kreisperipherie; und zwar ist dabei unter $f_0(\varrho, \varphi)$ eine Function zu verstehen, welche auf der Fläche $\mathfrak{T}$ identisch mit $f(\varrho, \varphi)$, ausserhalb $\mathfrak{T}$ aber überall $= 0$ ist.

§ 3.

Die nach Bessel'schen Functionen fortschreitenden Integraldarstellungen für den Fall, dass die darzustellende Function nur von einem Argument abhängt.

Das vorhergehende Theorem (C.) gewinnt, falls man an Stelle der Fläche $\mathfrak{T}$ eine *um den Anfangspunct beschriebene Kreisfläche* substituirt, folgende Gestalt:

Satz. — *Ist die Function $f(\varrho, \varphi)$ auf einer um den Anfangspunct mit dem Radius R beschriebenen Kreisfläche abtheilungsweise stetig, bezeichnet man ferner den Abstand des variablen Punctes (ϱ, φ) von irgend einem festen Puncte (ϱ_1, φ_1) mit ς, und bildet man endlich das über jene Kreisfläche sich ausdehnende Integral:*

$$(\alpha.) \qquad S_q = \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} f(\varrho, \varphi) \left(\int_0^q q\,dq\, J(q\varsigma) \right) \varrho\, d\varrho\, d\varphi,$$

so wird dieses S_q bei unendlich wachsendem q gegen eine bestimmte feste Grenze convergiren. Und zwar wird diese Grenze, falls (ϱ_1, φ_1) innerhalb der Kreisfläche liegt, dargestellt sein durch das arithmetische Mittel derjenigen Werthe, welche $f(\varrho, \varphi)$ längs einer um (ϱ_1, φ_1) beschriebenen unendlich kleinen Kreislinie besitzt, hingegen $= 0$ sein, falls der Punct (ϱ_1, φ_1) ausserhalb der Kreisfläche liegt.

Dabei wollen wir, allerdings auf Kosten der bisherigen Strenge, die dem Theorem (C.) in der *NB.* angehängte Bedingung *unterdrücken.* Und haben also festzuhalten, dass der soeben ausgesprochene Satz (α.) und die aus demselben weiterhin abzuleitenden Consequenzen nicht mehr *strenge,* sondern nur *im Allgemeinen* gültig sind. Zugleich sei erinnert an die Bedeutung des in (α.) enthaltenen Ausdrucks $J(q\varsigma)$. Es ist nämlich

$$(\alpha'.) \qquad \varsigma = \sqrt{\varrho^2 + \varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos(\varphi - \varphi_1)},$$

und ferner nach Seite 23 (19.):

$$(\alpha''.) \qquad J(q\varsigma) = \sum_{j=0}^{j=\infty} \varepsilon_j\, J^j(q\varrho)\, J^j(q\varrho_1) \cos j(\varphi - \varphi_1),$$

wo $\varepsilon_0 = 1$, und $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \ldots = 2$.

Auf der um den Anfangspunct mit dem Radius R beschriebenen Kreisfläche mag nun an Stelle von $f(\varrho, \varphi)$ eine *nur* von ϱ abhängende Function $f(\varrho)$ ausgebreitet sein, also eine Function, die längs einer jeden um den Anfangspunct beschriebenen Kreisperipherie constant bleibt, und nur variirt beim Uebergange von einer solchen Peripherie zur andern. Setzen wir nun voraus, diese Function $f(\varrho)$ sei im Intervall $\varrho = 0 \ldots . R$ *abtheilungsweise stetig,* so wird sie dieselbe Eigenschaft auch besitzen bei ihrer Ausbreitung auf der gegebenen Kreisfläche, mithin dem Satze (α.) sich subordiniren. Somit ergiebt sich:

$$(1.) \qquad \lim_{q=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} f(\varrho) \left(\int_0^q q\,dq\, J(q\varsigma) \right) \varrho\, d\varrho\, d\varphi$$

$$= f(0) \quad \text{oder} \quad = \frac{f(\varrho_1 - 0) + f(\varrho_1 + 0)}{2},$$

je nachdem $\varrho_1 = 0$ oder $0 < \varrho_1 < R$ ist.

Die linke Seite dieser Formel aber nimmt, falls man für $J(q\varsigma)$ den Werth $(\alpha''.)$ substituirt, und die Integration nach φ ausführt, die Gestalt an:

$$\lim_{q=\infty}\int_0^R f(\varrho)\left(\int_0^q q\,dq\,J(q\varrho)\,J(q\varrho_1)\right)\varrho\,d\varrho. \tag{2.}$$

Somit ergiebt sich folgender Satz:

Satz. — *Ist irgend eine Function $f(\varrho)$ im Intervall $\varrho = 0\ldots R$ abtheilungsweise stetig, so wird der Ausdruck*

$$\lim_{q=\infty}\int_0^R f(\varrho)\left(\int_0^q J(q\varrho)\,J(q\varrho_1)\,q\,dq\right)\varrho\,d\varrho \tag{β.}$$

$$= f(0) \quad \textit{oder} \quad = \frac{f(\varrho_1-0)+f(\varrho_1+0)}{2} \quad \textit{sein},$$

je nachdem $\quad \varrho_1 = 0 \quad$ *oder* $\quad 0 < \varrho_1 < R \quad$ *ist.*

Und aus diesem Satze selber ergiebt sich unmittelbar), dass der in Rede stehende Ausdruck*

$$= \frac{f(R)}{2}, \quad \textit{oder} \quad = 0 \quad \textit{sein wird},$$

falls $\quad \varrho_1 = R, \quad$ *respective* $\quad R < \varrho_1 \quad$ *ist.*

Ist die gegebene Function $f(\varrho)$ im Intervall $0\ldots.R$ nicht *abtheilungsweise stetig,* sondern geradezu *stetig,* so ergiebt sich also die Formel:

$$\lim_{q=\infty}\int_0^q\left(\int_0^R f(\varrho)\,J(q\varrho)\,\varrho\,d\varrho\right)J(q\varrho_1)\,q\,dq$$

$$= f(0), \quad \text{oder} \quad = f(\varrho_1), \quad \text{oder} \quad = \frac{f(R)}{2}, \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem $\varrho_1 = 0$, oder $0 < \varrho_1 < R$, oder $\varrho_1 = R$, oder $R < \varrho_1$ ist.

Diese Formel aber führt zu folgendem Satz:

Satz. — *Ist die Function $f(\varrho)$ stetig im Intervall $\varrho = 0\ldots R$,* (wo R eine beliebig gegebene positive Constante vorstellt), *so wird dieselbe für jedes der Bedingung*

$$0 \leq \varrho_1 < R$$

entsprechende Argument ϱ_1 darstellbar sein durch folgendes nach den $J(q\varrho_1)$ fortschreitendes Integral:

*) Ist nämlich R' irgend eine Constante, grösser als R, mithin

$$0 < R < R',$$

und versteht man unter $f'(\varrho)$ eine Function, die im Intervall $0\ldots R$ identisch mit $f(\varrho)$, hingegen im Intervall $R\ldots R'$ überall $=0$ ist, so kann man den schon bewiesenen Satz β.), statt auf R und $f(\varrho)$, auch auf R' und $f'(\varrho)$ in Anwendung bringen. Und hierdurch gelangt man alsdann zu dem angehängten Zusatz.

$$(\gamma.) \qquad f(\varrho_1) = \int_0^\infty C_q \, J(q\varrho_1) \, q\,dq\,,$$

dessen Coefficienten C_q sich bestimmen mittelst der Formel:

$$C_q = \int_0^R f(\varrho) \, J(q\varrho) \, \varrho\,d\varrho\,.$$

Für $\varrho_1 = R$ ist diese Darstellung nicht mehr gültig. Denn das in (γ.) genannte Integral hat für $\varrho_1 = R$ nicht den Werth $f(R)$, sondern den Werth $\frac{f(R)}{2}$.

Verallgemeinerung. — In analoger Weise kann man leicht auch zu Integraldarstellungen gelangen, welche nach den $J^h(q\varrho_1)$ fortschreiten, wo h eine der Zahlen 1, 2, 3, etc. vorstellen soll. Substituirt man nämlich im Satze (α.) an Stelle von $f(\varrho, \varphi)$ das Product $f(\varrho)\cos(h\varphi)$, und setzt man dabei voraus, dass $f(\varrho)$ im Intervall $0 \ldots R$ *abtheilungsweise stetig* ist, so ergiebt sich:

$$(3.) \qquad \lim_{q=\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} f(\varrho)\cos(h\varphi) \left(\int_0^q q\,dq\, J(q\varsigma) \right) \varrho\,d\varrho\,d\varphi$$

$$= 0\ {}^{*)}, \qquad \text{oder} \qquad = \frac{f(\varrho_1 - 0) + f(\varrho_1 + 0)}{2} \cos(h\varphi_1)\,,$$

$$\text{je nachdem} \qquad \varrho_1 = 0\,, \qquad \text{oder} \qquad 0 < \varrho_1 < R \qquad \text{ist.}$$

Die linke Seite dieser Formel nimmt aber, falls man für $J(q\varsigma)$ den Werth (α''.) substituirt, und die Integration nach φ ausführt, folgende Gestalt an:

$$\lim_{q=\infty} \tfrac{1}{2} \int_0^R f(\varrho)\, \varepsilon_h \cos(h\varphi_1) \left(\int_0^q J^h(q\varrho)\, J^h(q\varrho_1)\, q\,dq \right) \varrho\,d\varrho\,,$$

wo das $\varepsilon_h = 2$ ist**). Somit ergiebt sich der Satz:

Satz. — *Ist h eine gegebene Zahl aus der Reihe* 1, 2, 3, 4, ..., *und bezeichnet $f(\varrho)$ eine Function, die im Intervall $\varrho = 0 \ldots R$ abtheilungsweise stetig ist, so wird der Ausdruck*

$$(\delta.) \qquad \lim_{q=\infty} \int_0^R f(\varrho) \left(\int_0^q J^h(q\varrho)\, J^h(q\varrho_1)\, q\,dq \right) \varrho\,d\varrho$$

$$= 0\,, \qquad \textit{oder} \qquad = \frac{f(\varrho_1 - 0) + f(\varrho_1 + 0)}{2} \qquad \textit{sein}\,,$$

$$\textit{je nachdem} \qquad \varrho_1 = 0\,, \qquad \textit{oder} \qquad 0 < \varrho_1 < R \qquad \textit{ist}\,.$$

---

*) Es ist nämlich zu beachten, dass die gegebene Zahl $h = 1, 2, 3, \ldots$ sein soll, also *verschieden* von 0 ist.

**) Vgl. die vorhergehende Note.

Und aus diesem Satze selber ergiebt sich unmittelbar), dass der in Rede stehende Ausdruck*

$$= \frac{f(R)}{2}, \qquad \textit{oder} \qquad = 0 \quad \textit{sein wird},$$

falls $\qquad \varrho_1 = R, \qquad$ *respective* $\qquad R < \varrho_1 \qquad$ *ist.*

Die Formeln dieses Satzes nehmen, falls $f(\varrho)$ im Intervall $0 \ldots R$ geradezu *stetig* ist, folgende Gestalt an:

$$\lim_{q=\infty} \int_0^q \left(\int_0^R f(\varrho)\, J^h(q\varrho)\, \varrho\, d\varrho \right) J^h(q\varrho_1)\, q\, dq$$

$$= 0, \qquad \text{oder} \qquad = f(\varrho_1), \qquad \text{oder} \qquad = \frac{f(R)}{2}, \quad \text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem $\varrho_1 = 0, \qquad$ oder $\qquad 0 < \varrho_1 < R; \qquad$ oder $\qquad \varrho_1 = R, \qquad R < \varrho_1.$

Wir gelangen somit zu folgendem Resultat:

Satz. — *Ist die Function* $f(\varrho)$ *stetig im Intervall* $0 \ldots . R$, (wo R eine beliebig gegebene positive Constante vorstellt), *so wird dieselbe für jedes der Bedingung*

$$0 < \varrho_1 < R$$

entsprechende Argument ϱ_1 *darstellbar sein durch folgendes nach den* $J^h(q\varrho_1)$ *fortschreitende Integral:*

$$f(\varrho_1) = \int_0^\infty C_q\, J^h(q\varrho_1)\, q\, dq, \tag{$\varepsilon.$}$$

dessen Coefficienten C_q *sich bestimmen mittelst der Formel:*

$$C_q = \int_0^R f(\varrho)\, J^h(q\varrho)\, \varrho\, d\varrho.$$

Dabei bezeichnet h *eine beliebig gegebene Zahl aus der Reihe* $1, 2, 3, 4, \ldots$

Auf die Fälle $\varrho_1 = 0$ *und* $\varrho_1 = R$ *ist die Integraldarstellung* (ε.) *nicht mehr anwendbar. Denn für* $\varrho_1 = 0$ *z. B. hat das in* (ε.) *angegebene Integral nicht den Werth* $f(0)$, *sondern den Werth* 0.

§ 4.

Die neuen Integraleigenschaften der Bessel'schen Functionen.

Um diese bereits in (A.), (B.), (C.) Seite 25 angegebenen Eigenschaften in strengerer Weise zu begründen, gehen wir aus von den Sätzen (β.) und (δ.) Seite 136, 137. Diese werden, falls man die Constante R mit α bezeichnet, und gleichzeitig die Buchstaben ϱ, q mit einander vertauscht, dargestellt sein der eine durch die Formel:

---

*) Nämlich mittelst der schon früher (in der Note Seite 136) angegebenen Methode.

(1.) $$\lim_{\varrho=\infty}\int_0^\alpha f(q)\left(\int_0^\varrho J(q\varrho)\,J(q_1\varrho)\,\varrho\,d\varrho\right)q\,dq =$$

$= f(0)$, oder $= \dfrac{f(q_1-0)+f(q_1+0)}{2}$, oder $= \dfrac{f(\alpha)}{2}$, oder $= 0$,
je nachdem
$q_1 = 0$, oder $0 < q_1 < \alpha$, oder $q_1 = \alpha$, oder $\alpha < q_1$ ist;

und der andere durch folgende für $h = 1, 2, 3, 4, \ldots$ geltende Formel:

(2.) $$\lim_{\varrho=\infty}\int_0^\alpha f(q)\left(\int_0^\varrho J^h(q\varrho)\,J^h(q_1\varrho)\,\varrho\,d\varrho\right)q\,dq =$$

$= 0$, oder $= \dfrac{f(q_1-0)+f(q_1+0)}{2}$, oder $= \dfrac{f(\alpha)}{2}$, oder $= 0$,
je nachdem $q_1 = 0$, oder $0 < q_1 < \alpha$, oder $q_1 = \alpha$, oder $\alpha < q_1$ ist.

Dabei ist vorausgesetzt, dass die Function $f(q)$ im Intervall $q = 0 \ldots \alpha$ *abtheilungsweise stetig* sei.

Aus der Formel (1.) ergiebt sich für den Specialfall: $q_1 = 0$ folgender Satz:

Satz. — *Ist α eine positive Constante, und $f(q)$ eine Function, die im Intervall $q = 0 \ldots \alpha$ abtheilungsweise stetig ist, so wird:*

(U.) $$\lim_{\varrho=\infty}\int_0^\varrho\left(\int_0^\alpha f(q)\,J(q\varrho)\,q\,dq\right)\varrho\,d\varrho = f(0);$$

und dies ist also diejenige Formel, durch welche die früher gefundene (unsichere und zweifelhafte) Formel (B.) Seite 25 *ersetzt werden muss.*

Beschränkt man sich auf solche Argumente q_1, welche der Bedingung $0 \leqq q_1 \leqq \alpha$ entsprechen, so kann man die beiden Formeln (1.), (2.) zusammenfassen in folgende *eine* für $h = 0, 1, 2, 3, \ldots$ geltende Formel:

(3.) $$\lim_{\varrho=\infty}\int_0^\alpha f(q)\left(\int_0^\varrho J^h(q\varrho)\,J^h(q_1\varrho)\,\varrho\,d\varrho\right)q\,dq = f(q_1) + O(q_1), \quad \text{für } 0 \leqq q_1 < \alpha;$$

wo alsdann unter $O(q_1)$ eine Function zu verstehen, die mit Ausnahme einzelner Puncte überall $= 0$ ist. Diese Formel (3.) können wir offenbar auch so schreiben:

(4.) $$\lim_{\varrho=\infty}\int_0^\varrho\left(\int_0^\alpha f(q)\,J^h(q\varrho)\,q\,dq\right)J^h(q_1\varrho)\,\varrho\,d\varrho = f(q_1) + O(q_1), \quad \text{für } 0 < q_1 < \alpha.$$

Nehmen wir nun an, es sei $F(q)$ eine Function, die [ebenso wie $f(q)$] im Intervall $q = 0 \ldots \alpha$ *abtheilungsweise stetig* ist, so ergiebt sich aus (4.) durch Multiplication mit $F(q_1)\,q_1 dq_1$, und durch eine nach q_1 von 0 bis α ausgeführte Integration:

$$(5.)\qquad \lim_{\varrho=\infty} \int_0^{\varrho} \left\{ \left(\int_0^{\alpha} f(q)\, J^h(q\varrho)\, q\, dq \right) \left(\int_0^{\alpha} F(q_1)\, J^h(q_1\varrho)\, q_1\, dq_1 \right) \right\} \varrho\, d\varrho = \int_0^{\alpha} f(q_1)\, F(q_1)\, q_1\, dq_1 .$$

Also folgender Satz:

Satz. — *Ist α eine positive Constante, und sind $f(q)$ und $F(q)$ irgend zwei Functionen, die im Intervall $q = 0 \ldots \alpha$ abtheilungsweise stetig sind, so gilt die Formel:*

$$(\text{V.})\qquad \lim_{\varrho=\infty} \int_0^{\varrho} \left\{ \left(\int_0^{\alpha} f(q)\, J^h(q\varrho)\, q\, dq \right) \left(\int_0^{\alpha} F(q)\, J^h(q\varrho)\, q\, dq \right) \right\} \varrho\, d\varrho = \int_0^{\alpha} f(q)\, F(q)\, q\, dq\, ;$$

wo h irgend eine der Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots$ vorstellt. Diese Formel (V.) *ist im Wesentlichen identisch mit den früheren Formeln* (A.), (C.) Seite 25.