ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

DIRETTI DA

F. Brioschi e L. Cremona,

in continuazione di quelli già pubblicati dal prof. Tortolini.

SERIE II. - TOMO VI.

(dicembre 1873 al gennajo 1875).

MILANO.

G. BERNARDONI EDITORE-TIPOGRAFO.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO VI.° (SERIE II.ª)

Indice.

Sull'uso delle linee lungo le quali il valore assoluto di una funzione è costante.

(*del prof.* L. Schlaefli, *a Berna.*)

Abbiansi due piani rappresentativi, i quali, occorrendo, siano dotati di punti di diramazione, epperò consistano di più strati; il primo sia il piano della indipendente z, il secondo quello della funzione $w=f(z)$. Questo sia coperto in tutti i suoi strati dalla stessa rete formata da raggi uscenti dal centro $w=0$, e da cerchi intorno ad esso. A siffatta rete corrisponderà nel primo piano un'altra rete diversa ne' diversi strati e formata da due serie di curve generalmente intersecantisi ad angolo retto, finchè nell'intorno del punto z abbia luogo il solito sviluppo $f(z+h)=A+Bh+Ch^2+\cdots$, dove nè A nè B svaniscano. Per altro è ovvio, che la funzione $\frac{1}{f(z)}$ darà origine, nel primo piano, alle stesse curve di prima, non alterando che la loro successione. Le curve nel primo piano, corrispondenti al fascio di rette nel secondo, furono già da me chiamate isofasi, in questi Annali (tomo I, pag. 109); quelle corrispondenti alla serie dei cerchi concentrici nel secondo piano, le chiamerò per ora isotime, cioè ad ugual valore assoluto.

Lasciando da parte i casi che impongono alla funzione stessa una o più condizioni, vogliamo contemplare i soli tre casi:

1.° $f(z)=0$, ovvero $\frac{1}{f(z)}=0$: zeri ed infiniti della funzione;

2.° $f(z+h)=A+Bh^{\frac{1}{2}}+Ch+\cdots$, dove nè A nè B svaniscono: punti di diramazione nel primo piano.

3.° $f(z+h)=A+Bh^2+Ch^3+\cdots$, dove nè A nè B svaniscono: punti di diramazione nel secondo piano.

Consideriamo in prima le figure formate dalle due serie di curve negli intorni piccolissimi dei detti punti singolari.

1.° Le isofasi sono raggi, le isotime cerchi concentrici. Una isofasi presa ad arbitrio esce da uno zero e, senza mai formare un nodo, termina in un infinito.

2.° La isofasi e la isotima, contenenti il punto z, hanno ivi un punto di regresso comune, con tangenti di opposta direzione. I due rami di una stessa curva stanno in strati diversi del piano. Le curve infinitamente vicine a queste due formano press'a poco un sistema di parabole aventi il punto di regresso per foco e la sua tangente per asse comune. Tal punto non impedisce nè la dispersione delle isofasi nè l'allargamento delle isotime, ma si comporta in questo rispetto come un punto ordinario.

3.° Così la isofasi come la isotima, passanti pel punto z, hanno ivi un punto doppio, dove le tangenti dell'una curva dimezzano gli angoli retti formati dalle tangenti dell'altra. Nell'intorno piccolissimo le curve sembrano costituire una serie d'iperboli aventi per assintoti le due tangenti della isofasi nel punto doppio, ed un'altra serie differente dalla prima soltanto per una rotazione di mezzo angolo retto.

Questa terza specie di punti singolari è definita da $f'(z)=0$; e fuor di essa non vi sono altri punti doppi ordinari. Un fascio d'isofasi arrivato a siffatto punto è obbligato a scindersi, di modo che la continuità della dispersione laterale vien bruscamente interrotta. In un modo un po'diverso anche il fascio di pezzi rientranti d'isotime, i quali vanno dapprima (a partire da uno zero) allargandosi in ogni senso, perde la continuità nella prossimità di un nodo; la curva aprendovisi per chiudersi coll'aggiunta di un pezzo situato fuori della regione già occupata; e poi il fascio va (almeno sulla fine) restringendosi attorno ad un infinito. Egli è appunto per l'interruzione della continuità, che le isotime dotate di un nodo riescono di qualche importanza, rispetto all'uso che stiamo ora per farne in tre esempi.

I.

Essendo $\rho^2=1-2\alpha x\ \alpha^2$, sia pro posto di sviluppare $\frac{1}{\rho}$ secondo le potenze ascendenti di α. Ponendo $x=\cos\theta$, si ha $\rho^2=(\alpha-e^{i\theta})(\alpha-e^{-i\theta})$, e, dietro teoremi noti, il problema richiede che il valore assoluto di α sia minore di entrambi quelli di $e^{i\theta}$ e di $e^{-i\theta}$; quindi, se θ è reale, basta che il valore assoluto di α sia minore di 1. Ponendo

$$w^2 = t^2 - 2xt + 1,$$

si ha da un teorema di Cauchy la formola integrale

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{1}{w}\frac{dt}{t-\alpha} \quad (\text{cammino circondante } \alpha, \text{ escludente } e^{i\theta},\ e^{-i\theta}).$$

Ma poichè la w è funzione irrazionale della t, converrà sciogliere la diramazione nei punti $t = e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$. Prendendo $\frac{1-w}{t} = u$ per nuova indipendente, l'equazione

$$(ut-1)^2 = t^2 - 2xt + 1$$

ci darà

$$t = 2\frac{u-x}{u^2-1}, \quad \frac{dt}{w} = 2\frac{du}{u^2-1}, \quad w = \frac{u^2-2xu+1}{1-u^2};$$

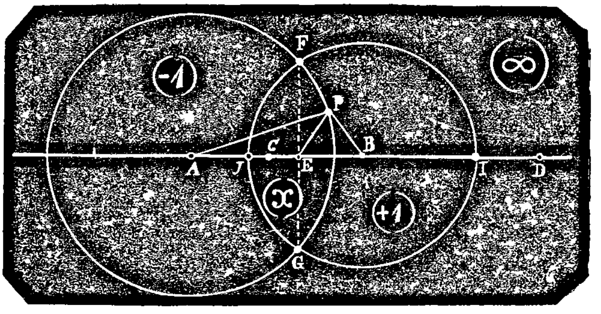
epperò

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2i\pi}\int \frac{du}{u-x-\frac{1}{2}(u^2-1)\alpha} \quad \left(\text{per un giro stretto intorno a } \frac{1-\rho}{\alpha}\right). \qquad (1)$$

Messa sotto la forma

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{2i\pi}\cdot\frac{1}{\rho}\int\left(\frac{du}{u-\frac{1-\rho}{\alpha}} - \frac{du}{u-\frac{1+\rho}{\alpha}}\right),$$

essa equazione si verifica soltanto quando il cammino intorno a $\frac{1-\rho}{\alpha}$ esclude il punto $\frac{1+\rho}{\alpha}$; ed acciocchè lo sviluppo secondo le potenze ascendenti di α divenga possibile, è d'uopo che lungo tutto il cammino il valore assoluto della funzione $t = 2\frac{u-x}{u^2-1}$ sorpassi quello di α. La condizione $\frac{\partial t}{\partial u} = 0$ per un nodo di una isotima della funzione, nel piano rappresentativo della indipendente u, si cambia in $u^2 - 2xu + 1 = 0$ ed indica i soli nodi $u = e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$, nei quali la t ha ordinatamente i valori $e^{-i\theta}$, $e^{i\theta}$. Supposto che θ sia reale, tutti e due i nodi appartengono alla isotima del parametro 1. Ora i punti A, B, C, D, E, F, G, I, J, P (vedi la figura) dinotino ordinatamente -1, 1, $\frac{1-\rho}{\alpha}$, $\frac{1+\rho}{\alpha}$, x, $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$, $1+2\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$, $1-2\,\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}$, u. Allora il punto mobile della isotima (param. 1) è legato dalla equazione $\overline{AB}\times\overline{EP}=\overline{AP}\times\overline{BP}$. Poichè il prendere $\overline{AP}$ costante trae seco la costanza del rapporto $\frac{\overline{EP}}{\overline{BP}}$ e poichè $\overline{AF}$ è medio geometrico tra $\overline{AE}$ e $\overline{AB}$, si conchiude che la isotima (param. 1) consta di due cerchi intorno ad A e B e passanti ciascuno per F e G, e che dunque divide il piano rappresentativo in quattro regioni, che dinoteremo con (x), (∞), (-1), (1), secondo gli zeri della funzione,



E ed orizzonte, e gli infiniti della medesima, A e B, situati entro le regioni rispettive. Allora una isotima di un parametro inferiore ad 1 consterà di un pezzo situato nella regione (x) e racchiudente il punto E, e di un pezzo racchiudente entrambi i cerchi; mentre ad un parametro più grande di 1 apparterrà una isotima formata pure da due pezzi separati, ma situati l'uno nella regione (-1), l'altro nella (1), e circondanti rispettivamente i punti A e B.

Ora proseguiamo i moti dei punti C, D, mentre la α cresca a cominciare da zero (dove $\rho=1$). Le due funzioni $\frac{1-\rho}{\alpha}$, $\frac{1+\rho}{\alpha}$ vanno decrescendo di continuo ed assumono per $\alpha=0$, 1, ∞ i valori rispettivi x, $1-2\sin\frac{\theta}{2}$, -1; ∞, $1+2\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$, 1; vale a dire, C percorre l'asse reale da E fino ad A, e D dal levante fino a B; e quando $\alpha=1$, i punti C e D stanno rispettivamente in J e I. Quindi, se α fosse più grande di 1, C starebbe nella regione (-1), D nella (1), ed allora ciascuno dei due pezzi di una isotima di un parametro superiore ad α escluderebbe tanto C quanto D; epperò non vi sarebbe alcuna via d'integrazione, che soddisferebbe le condizioni. Al contrario, se $\alpha<1$, C sta nella regione (x), D nella (∞), la isotima (param. α) ha un pezzo interno passante per C, ed un pezzo esterno passante per D; e la corona compresa fra di essi permetterà di circondare il pezzo interno con una via d'integrazione; ed allora essa via racchiuderà necessariamente anche lo zero x della funzione t; il secondo membro della equazione (1) ammette ora lo sviluppo secondo le potenze ascendenti della α, cosicchè ponendo

$$\frac{1}{\rho}=\sum_{n=0}^{\infty} X_n \alpha^n,$$

si avrà

$$X_n=\frac{1}{2i\pi}\int\left(\frac{u^2-1}{2}\right)^n (u-x)^{-n-1}\,du \quad (\text{cammino circondante } x),$$

o ciò che torna lo stesso, X_n è il coefficiente di h^n nello sviluppo di

$$\{\tfrac{1}{2}[(x+h)^2-1]\}^n.$$

Lo stesso procedimento conduce anche allo sviluppo della espressione

$$A=\frac{1}{2i}\left\{(1-\alpha e^{i\theta})^{-\frac{1}{2}}-(1-\alpha e^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}}\right\}$$

secondo le potenze ascendenti della α. Sostituendo alla α una variabile t, dinotando la espressione corrispondente con T e supponendo che i due radicali comincino in $t=0$ col valore 1, si avrà

$$A=\frac{1}{2i\pi}\int T\frac{dt}{t-\alpha} \quad (\text{camm. circon. } \alpha, \text{ esclud. } F,\ G).$$

La sostituzione $t=2\dfrac{x-u}{1-u^2}$ dà

$$(1-te^{i\theta})^{-\frac{1}{2}}=-i\frac{\sqrt{1-u^2}}{u-e^{i\theta}}, \quad (1-te^{-i\theta})^{-\frac{1}{2}}=i\frac{\sqrt{1-u^2}}{u-e^{-i\theta}},$$

$$T=\frac{x-u}{1-2xu+u^2}\sqrt{1-u^2}, \quad \frac{dt}{t}=-\frac{1-2xu+u^2}{x-u}\frac{du}{1-u^2};$$

e perciò

$$A=-\frac{1}{2i\pi}\int\frac{1}{1-\frac{1-u^2}{2(x-u)}\alpha}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad \left(\text{camm. circ. } \frac{1-\rho}{\alpha}, \text{ escl. } \frac{1+\rho}{\alpha},\ 1,\ -1\right).$$

Nello sviluppo della espressione primitiva di A il coefficiente di α^n è

$$\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\operatorname{sen} n\theta;$$

e nell'ultima esso è

$$\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\cdot\frac{1}{2i\pi}\int(1-u^2)^{n-\frac{1}{2}}\frac{du}{(u-x)^n}\ \text{(camm. circ. } x)$$

$$=\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}\frac{1}{(n-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Laonde si ha un teorema di Jacobi:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{n-1}\operatorname{sen}^{2n-1}\theta=\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-1)\operatorname{sen} n\theta.$$

II.

Sia proposto di sviluppare $e^{a\theta}$ secondo le potenze discendenti di $\cosh\cdot\theta$. Ponendo

$$\frac{1}{2\cosh\cdot\theta}=z,\quad \frac{e^\theta}{2\cosh\cdot\theta}=p,\quad \frac{e^{-\theta}}{2\cosh\cdot\theta}=q,$$

si ha

$$p^a=\frac{1}{2i\pi}\int t^a\left(\frac{dt}{t-p}-\frac{dt}{t-q}\right)=\frac{p-q}{2i\pi}\int\frac{t^a dt}{t^2-t+z^2}\ \text{(camm. circ. } p, \text{ escl. } 0,\ q).$$

Affinchè lo sviluppo secondo le potenze ascendenti della z sia possibile, il valore assoluto della funzione t^2-t deve superare quello della z^2 lungo tutto la via della t. Evvi un solo nodo, $t=\frac{1}{2}$, nella serie d'isotime di t^2-t; esso appartiene alla isotima (param. $\frac{1}{4}$), la quale è una lemniscata avente $\frac{1}{2}$ per centro, e 0, 1 per fochi, e divide il piano in tre regioni (0), (1), (∞), contenenti ordinatamente i due zeri 0, 1 della funzione e l'orizzonte quale infinito doppio. Mentre la z percorre i valori positivi da 0 fino ad $\frac{1}{2}$, p va da 1 ad $\frac{1}{2}$, e q da 0 ad $\frac{1}{2}$; dunque i due pezzi separati della isotima (param. z^2), passanti l'uno per p, l'altro per q, vanno allargandosi da cerchi piccolissimi intorno a 1, 0 fino ai due cappii della lemniscata, ed, insino a quando z non abbia raggiunto il valore $\frac{1}{2}$, lasciano tutto il piano fuori di essi disponibile pel cammino della t, giusta la su espressa condizione dello sviluppo. Imaginando dunque scelto questo cammino in modo che circondi il pezzo d'isotima (param. z^2) passante per p e racchiudente 1, e non traversi, nè tocchi l'altro pezzo; si potrà sviluppare e si avrà

$$\frac{p^a}{p-q}=\frac{1}{2i\pi}\sum_{n=0}^{n=\infty}(-1)^n z^{2n}\int\frac{t^{a\ n-1}}{(t-1)^{n+1}}dt \text{ (camm. circ. 1, escl. 0)}$$

$$=\sum(-1)^n\binom{a-n-1}{n}z^{2n}=\sum\binom{2n-a}{n}z^{2n}.$$

Benchè questo non sia lo sviluppo domandato, pure ne segue

$$p^a=\frac{p^{a+1}}{p-q}-\frac{p^a q}{p-q}=\frac{p^{a+1}}{p-q}-z^2\frac{p^{a-1}}{p-q}$$

$$=\sum\binom{2n-a-1}{n}z^{2n}-\sum\binom{2n-a-1}{n-1}z^{2n}=\sum\frac{-a}{2n-a}\binom{2n-a}{n}z^{2n}.$$

Dunque, supposto che il limite di $(e^{-\theta}\cdot 2\cosh\cdot\theta)^a$ per $\theta=+\infty$ sia 1, si hanno i due sviluppi

$$e^{a\theta}=\sum\binom{2n-a}{n}(2\cosh\cdot\theta)^{a-2n-1}\cdot 2\operatorname{senh}\cdot\theta=\sum\frac{-a}{2n-a}\binom{2n-a}{n}(2\cosh\cdot\theta)^{a-2n}$$

Altrimenti. Posto $e^{-2\theta}=x$, si ha

$$\frac{e^\theta}{2\cosh\cdot\theta}=\frac{1}{1+x},$$

$$\left(\frac{e^\theta}{2\cosh\cdot\theta}\right)^a=\frac{1}{2i\pi}\int(1+t)^{-a}\left(\frac{dt}{t-x}-\frac{dt}{t-\frac{1}{x}}\right)$$

$$=\frac{\cosh\cdot\theta\cdot\operatorname{senh}\cdot\theta}{2i\pi}\int\frac{(1+t)^{-a}dt}{t\cosh^2\theta-\left(\frac{t+1}{2}\right)^2}\left(\text{camm. circ. } x, \text{ escl. } -1, \frac{1}{x}\right).$$

Perchè lo sviluppo secondo le potenze discendenti di $\cosh^2\theta$ riesca possisibile, bisogna che il valore assoluto della funzione

$$\frac{(t+1)^2}{4t}$$

sia minore di quel di $\cos h^2\theta$ lungo tutta la via della indipendente t. La funzione ha -1 per zero doppio e 0 ed ∞ per infiniti; e la sua derivata prima svanisce quando $t^2-1=0$. Ma delle due soluzioni di questa equazione, poichè l'una, $t=-1$, è già uno zero doppio, rimane l'altra sola, $t=1$, come nodo ordinario, ed appartiene alla isotima (param. 1). Per semplificare la equazione di questa linea, giova trasportare l'origine nel nodo, ponendo $t=u+1$ e dinotando con u' la conjugata della u. Allora la detta curva è rappresentata dalla equazione

$$(u+2)^2(u'+2)^2-16(u+1)(u'+1)=0,$$

la quale può mettersi sotto la forma

$$[uu'+2(u+u')]^2=8uu'$$

e, ponendo $u=re^{i\varphi}$, $u'=re^{-i\varphi}$, si cambia in

$$(r+4\cos\phi)^2=8.$$

In conseguenza, la curva consta di due cappii, dei quali l'interiore, rappresentato dalla

$$r=4\left(-\cos\phi-\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right),\quad \left(\frac{3\pi}{4}<\phi<\frac{5\pi}{4}\right),$$

passa pel punto $t=-(\sqrt{2}-1)^2$ e racchiude l'infinito $t=0$; mentre il cappio esteriore, rappresentato dalla

$$r=4\left(-\cos\phi+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right),\quad \left(\frac{\pi}{4}<\phi<\frac{7\pi}{4}\right),$$

passa pel punto $t=-(\sqrt{2}+1)^2$ e racchiude lo zero doppio $t=-1$. Dunque la isotima (param. 1) divide il piano in tre regioni (0), (∞), (-1). Una isotima di parametro maggiore di 1 consta di un pezzo contenuto nella regione (0) e di un altro esteso nella regione (∞) intorno al cappio esteriore. Ma una isotima di parametro minore di 1 consta di un solo pezzo situato nella regione (-1). Dunque, finchè il valore assoluto di $\cosh^2\theta$ sia maggiore di 1, evvi una corona compresa fra il cappio interiore della isotima (param. 1) ed il pezzo passante per x della isotima [param. mod. $(\cosh^2\theta)$], entro la quale la via della t può circondare x, escludendo -1 e $\frac{1}{x}$; per lo chè lo sviluppo ora fornisce la

$$e^{a\theta}=\sum_{n=0}^{n=\infty}(2\cosh\cdot\theta)^{a-2n-1}\cdot 2\operatorname{senh}\cdot\theta\cdot\frac{1}{2i\pi}\int(1+t)^{2n-a}\frac{dt}{t^{n+1}}\ \text{(camm. circ. 0, escl. } -1\text{)},$$

e quindi la

$$e^{a\theta}=\sum\binom{2n-a}{n}(2\cosh\cdot\theta)^{a-2n-1}.2\operatorname{senh}\cdot\theta,$$

come prima.

Se $\theta = y + iz$, dove y, z hanno significato reale, la condizione mod. $(\cosh\cdot\theta) > 1$ si cambia in

$$\operatorname{senh}^2 y > \operatorname{sen}^2 z.$$

In simile guisa si trova l'eguaglianza

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\phi\right)^a = \sum \frac{a}{a+3n}\binom{a+3n}{n}\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{sen}3\phi\right)^{a+2n},$$

che vale per $\phi < \frac{\pi}{6}$, se ϕ è positivo.

III.

Sviluppare $(\sqrt{1+z^2}+z)^a$, secondo le potenze ascendenti della z.

Sia $p = \sqrt{1+z^2} + z$, e cominci dal valore 1, quando z parte da zero. Allora si ha

$$p^a = \frac{1}{2i\pi}\int t^a\left(\frac{dt}{t-p} - \frac{dt}{t+\frac{1}{p}}\right) \left(\text{camm. circ. } p, \text{ escl. } 0, -\frac{1}{p}\right)$$

$$= 2\sqrt{1+z^2}\cdot\frac{1}{2i\pi}\int\frac{t^a\,dt}{t^2-1-2zt}.$$

Perchè lo sviluppo riesca possibile, è necessario e sufficiente che il valore assoluto della funzione

$$\frac{t^2-1}{2t}$$

si mantenga maggiore di quel della z lungo tutto il cammino d'integrazione. I soli nodi della serie di isotime della funzione sono i, $-i$, ed appartengono alla isotima (param. 1); la quale è composta di due cerchi, aventi -1 ed 1 per centri rispettivi, ed intersecantisi nei punti i, $-i$; talchè divide il piano nelle quattro regioni (-1), (1), (0) (∞). Finchè sia mod. $z < 1$, la isotima (mod. z) consta di due pezzi situati ciascuno fuor dell'altro, l'uno passante pel punto p nella regione (1), l'altro passante per $-\frac{1}{p}$ nella regione (-1); epperò una via d'integrazione, tracciata per es. lungo il contorno della regione (1), soddisfa alle condizioni. Sviluppando si ha la

$$p^a = 2\sqrt{1+z^2}\cdot\sum(2z)^n\cdot\frac{1}{2i\pi}\int\frac{t^{a+n}\,dt}{(t^2-1)^{n+1}} \ (\text{camm. circ. } 1, \text{ escl. } 0, -1).$$

Ponendo $t^2 = u$, l'integrale, diviso per $2i\pi$, si cambia in

$$\frac{1}{2i\pi}\int u^{\frac{1}{2}(a+n-1)}\cdot\tfrac{1}{2}\frac{du}{(u-1)^{n+1}} \text{ (camm. circ. 1, escl. 0)} = \tfrac{1}{2}\binom{\frac{1}{2}(a+n-1)}{n}.$$

Quindi si ha lo sviluppo

$$p^a = \sqrt{1+z^2}\cdot\sum\binom{\frac{a+n-1}{2}}{n}(2z)^n,$$

e, ponendo mente alla

$$p^{a+1} + p^{a-1} = 2\sqrt{1+z^2}\cdot p^a,$$

si ottiene altresì lo sviluppo domandato

$$p^a = \sum\frac{a}{a+n}\binom{\frac{1}{2}(a+n)}{n}(2z)^n.$$

Questi risultati coincidono colle formole note

$$e^{a\theta} = \sum 2^n\binom{\frac{1}{2}(a+n-1)}{n}\operatorname{sen h}^n\theta\cdot\cos h\cdot\theta$$
$$= \sum 2^n\frac{a}{a+n}\binom{\frac{1}{2}(a+n)}{n}\operatorname{sen h}^n\theta.$$

Se $\theta = \xi + i\eta$, e ξ, η siano reali, questi due sviluppi hanno luogo, a partire da ($\xi = 0$, $\eta = 0$), fino a che si mantenga $\operatorname{sen h}^2\xi < \cos^2\eta$, epperò soltanto entro una porzione finita del piano rappresentativo della θ, il cui diametro reale ha per misura $2\log(\sqrt{2}+1)$, quello laterale π.

IV.

Nella seconda parte dell'articolo II ho fatto uso della serie d'isotime della funzione $(t+1)^2:4t$, o, ciò che torna lo stesso, della funzione $(z-1)^2:z$; ora mi permetto di aggiungere un esempio, in cui le isofasi di questa funzione possono ajutare l'immaginazione, cioè il problema di valutare la funzione di Bessel per un argomento grandissimo. Alla soluzione di tale problema sono già dedicati, per verità, i §§ 6 e 7 della Memoria del sig. Hankel, intitolata: *Die Cylinderfunctionen erster und zweiter Art,* e inserta negli Annali di Clebsch e Neumann (tom. I, p. 491); ma in essa l'autore non esibisce una espressione esatta dell'errore finito inseparabile dallo sviluppo, con cui s'intende di valutare la funzione. Pertanto non credo inutile di far qui vedere che il problema in discorso è una quistione di cammino d'integrazione, e di mettere l'errore sotto la forma di un integrale doppio facile a valutarsi.

Indicherò colla lettera N un numero positivo grandissimo destinato a crescere senza fine, riservando il segno ∞ per l'infinito propriamente detto, la cui immagine nel piano rappresentativo soglio chiamare orizzonte.

La funzione indicata e definita dalla equazione

$$F(a,\ x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(n+1)\Gamma(a+n+1)}x^n$$

ha, com'è noto, in virtù delle formole

$$\frac{1}{\Gamma(a+n+1)}=\frac{1}{2i\pi}\int e^t\, t^{-a-n-1}\,dt \text{ (cammino: un cappio da } -N \text{ circondante } 0),$$

$$\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-a)\Gamma(n+a+1)}=\frac{1}{2i\pi}\int t^{n-\frac{1}{2}}(t-1)^{a-\frac{1}{2}}dt \text{ (cappio da } 0 \text{ circ. } 1),$$

le due espressioni integrali

$$F(a,\ x)=\frac{1}{2i\pi}\int e^{t+\frac{x}{t}}\, t^{-a-1}\,dt \text{ (cappio da } -N \text{ circ. } 0),$$

sottinteso che $\log t$ sia reale nell'istante in cui t passa per un valore positivo,

$$F(a,\ x)=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-a)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\cdot\frac{1}{2i\pi}\int(t-1)^{a-\frac{1}{2}}\cosh\cdot(2\sqrt{x}\sqrt{t})\frac{dt}{\sqrt{t}}$$

(cappio da 0 circ. 1; $\log(t-1)$ reale e $\sqrt{t}$ positivo, quando $t-1$ è positivo);

le quali sussistono per tutti i valori finiti sì del parametro a che dell'argomento x. Nella seconda di esse la via si può stringere sull'asse reale quando la componente reale di $a+\frac{1}{2}$ sia positiva; ed è la espressione così ridotta che il sig. Hankel ha scelto per la ricerca risguardante un argomento grandissimo. Ma poichè non importa a quale si ricorra delle due espressioni, scegliamo la prima, più affine alla definizione data da Bessel, per oggetto della investigazione.

Pongasi $x=y^2e^{2i\gamma}$, dove y sia positivo, γ reale e compreso tra 0 e π, ed inoltre $t+\frac{x}{t}=2u$. Poichè $\left(t-\frac{x}{t}\right)^2=4(u^2-y^2e^{2i\gamma})$, il piano rappresentativo della indipendente u, rispetto a t come funzione, consta di due strati con una linea di transito, la quale congiunge i due punti di diramazione $ye^{i\gamma}$, $-ye^{i\gamma}$ e può essere concepita come retta. Se chiamiamo strato superiore quello il cui orizzonte è l'immagine di $t=\infty$, l'orizzonte dello strato inferiore sarà l'immagine di $t=0$. Se t rimane grande (supponiamolo dapprima) lungo tutta la via intorno a 0, anche u rimarrà grande e farà nello strato superiore un giro intorno alla linea di transito avente principio e fine in $-N$. Ma più adatta allo scopo della ricerca sarà una via, lungo la quale il valore assoluto di e^u non monti più in alto del necessario e in pari tempo varii colla maggior celerità possibile. La prima condizione esige che la via si pieghi intorno a ciascun dei punti di diramazione; la seconda che du sia sempre reale. Dunque bisogna che la u, partendo da $-N$ nello strato superiore, percorra l'orizzonte fino a $-N-ye^{i\gamma}$, vada poi in linea retta fino al punto di diramazione $-ye^{i\gamma}$, ivi, scendendo nello strato inferiore, segua la medesima via indietro fino a $-N$ al disotto del punto di partenza, per continuare il corso lungo l'orizzonte fino a $-N+ye^{i\gamma}$, di là vada in linea retta fino all'altro punto di diramazione $ye^{i\gamma}$ e, risalendo ivi nello strato superiore, ritorni, passando per $-N+ye^{i\gamma}$, al punto di partenza $-N$. Per l'estrema piccolezza di e^{-N} le parti dell'integrale situate nell'orizzonte si potranno trascurare; il che facendo, l'integrale resterà spezzato in due integrali separati A e B. L'integrale A sia quello la cui via si piega intorno a $ye^{i\gamma}$, così che la via del B si piegherà intorno all'altro punto di diramazione. Per determinare ciascuno degli integrali completamente, basta osservare che $\log t$ ha in $u=ye^{i\gamma}$, $-ye^{i\gamma}$ rispettivamente $i\gamma$, $-i(\pi-\gamma)$ per parte laterale, come si vede facendo partire la u nello strato superiore da un valore positivo molte volte più grande di y (Mentre la u percorre la linea di transito da $-ye^{i\gamma}$ a $ye^{i\gamma}$ dal lato attiguo ai valori positivi dello strato superiore, la t descrive da $-ye^{i\gamma}$ fino a $ye^{i\gamma}$ intorno a 0 quel semicerchio che passa per y).

Consideriamo dapprima l'integrale A e poniamo $u=ye^{i\gamma}-\frac{1}{2}s$, $t=ye^{i\gamma}z$ Allora s deve sempre essere positivo, e si ha

$$-s=t+\frac{x}{t}-2ye^{i\gamma}=ye^{i\gamma}\frac{(z-1)^2}{z}.$$

Dunque la fase (il coefficiente di i nel logaritmo) della funzione $\frac{(z-1)^2}{z}$ deve rimanere $\pi-\gamma$, cosicchè z percorre la isofasi corrispondente, rappresentata dalla equazione

$$e^{i\gamma}(z-1)^2 z' - e^{-i\gamma}(z'-1)^2 z = 0,$$

dove z' dinota la conjugata di z. Però questa curva è di terz'ordine ed ha nel punto ($z=1$, $z'=1$) un nodo. Prendendo questo punto per origine di coordinate polari, si ponga $z=1+re^{i\omega}$, $z'=1+re^{-i\omega}$; ne risulterà

$$r = -\frac{\operatorname{sen}(2\omega+\gamma)}{\operatorname{sen}(\omega+\gamma)}, \quad z = -\frac{\operatorname{sen}\omega}{\operatorname{sen}(\omega+\gamma)} e^{i(2\omega+\gamma)},$$

e ponendo $\omega = \frac{\pi-\gamma+\varphi}{2}$, si avrà

$$z = \frac{\cos\frac{\gamma-\varphi}{2}}{\cos\frac{\gamma+\varphi}{2}} e^{i\varphi}, \quad s = y\frac{\operatorname{sen}^2\varphi}{\cos\frac{\gamma+\varphi}{2}\cos\frac{\gamma-\varphi}{2}}.$$

Con questo valore di z si ha

$$A = \frac{1}{2i\pi} y^{-a} e^{-ia\gamma} \int e^{ye^{i\gamma}\left(z+\frac{1}{z}\right)} z^{-a}\frac{dz}{z} \quad (\gamma-\pi<\phi<\pi-\gamma),$$

e poichè a due valori opposti di ϕ corrispondono due valori reciproci di z, l'espressione si riduce alla

$$A = \frac{1}{2i\pi} y^{-a} e^{-ia\gamma} \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi-\gamma} e^{ye^{i\gamma}\left(z+\frac{1}{z}\right)} (z^a + z^{-a})\frac{dz}{z}.$$

Uno sguardo alle vie percorse dalla u nel formare gli integrali $2i\pi A$, $2i\pi B$ fa manifesto che lo scambio di γ con $\pi-\gamma$ e di i con $-i$ trasmuta ciascuno di essi nell'opposto dell'altro, epperò A in B; basterà dunque calcolare la sola espressione A. Ponendo

$$v = \frac{(z-1)^2}{z} = \frac{s}{y} e^{i(\pi-\gamma)},$$

si ha

$$\frac{dz}{z} = \frac{dv}{z-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}+z^{-\frac{1}{2}}}\frac{dv}{v^{\frac{1}{2}}}$$

$\left(\text{sottinteso che } z^{\frac{1}{2}},\ v^{\frac{1}{2}} \text{ abbiano } \frac{\varphi}{2},\ \frac{\pi-\gamma}{2} \text{ per fasi rispettive}\right)$,

$$(\omega-z)\left(\omega-\frac{1}{z}\right) = (\omega-1)^2 - v\omega,$$

$$z^a + z^{-a} = \frac{1}{2i\pi}\int \omega^{a-\frac{1}{2}}\left(\frac{z^{\frac{1}{2}}}{\omega - z} + \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{\omega - \frac{1}{z}}\right)d\omega$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\left(z^{\frac{1}{2}} + z^{-\frac{1}{2}}\right)\int \frac{\omega^{a-\frac{1}{2}}(\omega - 1)}{(\omega-1)^2 - v\omega}\, d\omega \quad \left(\text{camm. circ. } z,\ \frac{1}{z},\ \text{escl. } 0\right);$$

epperò

$$A = \frac{1}{4i\pi^2} y^{-a-\frac{1}{2}} e^{2ye^{i\gamma} - i\left(a+\frac{1}{2}\right)\gamma} \iint e^{-s} s^{-\frac{1}{2}} \frac{\omega^{a-\frac{1}{2}}(\omega-1)}{(\omega-1)^2 + \frac{s}{y}e^{-i\gamma}\omega}\, d\omega\, ds.$$

Rammentando quella isotima (param. 4) della funzione $\frac{(z-1)^2}{z}$, che ha un nodo in -1 e divide il piano nelle tre regioni (1), (0) (∞), si vede che lo sviluppo completo della frazione sotto il segno d'integrazione secondo le potenze ascendenti di s richiede che la via della ω si tenga entro la regione (1), epperò che s rimanga minore di $4y$. Bisognerà dunque arrestare lo sviluppo. Inoltre, affinchè la via della ω possa sempre passare fra $\frac{1}{z}$ e 0, la s non deve raggiungere l'infinito positivo; ma bisogna togliere via dall'integrale A un pezzo piccolissimo corrispondente all'intervallo

$$\pi - \gamma - \varepsilon < \phi < \pi - \gamma$$

(ove ε sia positivo piccolissimo), entro il quale s è sempre maggiore di $\frac{2}{\varepsilon} y \operatorname{sen}\gamma$. Resta per z e $\frac{1}{z}$ l'intervallo determinato da

$$-(\pi - \gamma - \varepsilon) < \phi < \pi - \gamma - \varepsilon,$$

al quale corrisponde una porzione della isofasi (fase $\pi - \gamma$); e intorno a questa porzione s'immagini ora condotta la via della ω, senza racchiudere 0. Ch'essa via racchiude 1, apparisce da ciò che la detta porzione di isofasi passa per 1.

Nei singoli termini dello sviluppo le due integrazioni si separano e sono facili ad eseguirsi, se si fa $\varepsilon = 0$, ciò che ora è permesso. Persino l'integrale doppio del resto è suscettibile di una trasformazione tale da permettere che ε svanisca. Se lo sviluppo si estende a m termini, la immediata espressione del resto è

$$\frac{(-1)^m}{2\pi^2} y^{-m-a-\frac{1}{2}} e^{2ye^{i\gamma} - i\left(m+a+\frac{1}{2}\right)\gamma} S,$$

dove

$$S=\frac{1}{2i}\iint e^{-s}s^{m-\frac{1}{2}}\frac{\omega^{m+a-\frac{1}{2}}(\omega-1)^{-2m+1}}{(\omega-1)^2+\frac{s}{y}e^{-i\gamma}\omega}d\omega\,ds=\int e^{-s}s^{m-\frac{1}{2}}\,T\,ds.$$

Ora il numero intero e positivo m può supporsi abbastanza grande da superare la componente reale tanto di $-a-\frac{1}{2}$ quanto di $a-\frac{1}{2}$, di modo che l'integrale relativo a ω rimane convergente sì per $\omega=0$, che per $\omega=\infty$. In conseguenza la via chiusa della ω si può aprire nella vicinanza del punto $-Ne^{-i\gamma}$, per portare il principio della via in avanti, ed il termine indietro, lungo l'orizzonte fino a $-N$. La via, divenuta così un cappio retrogrado da $-N$ intorno a 0, si può stringere sulla metà negativa dell'asse reale. Così, ponendo $\omega=-\psi$, si ottiene per l'integrale T relativo ad ω

$$T=(-1)^m\cos a\pi\cdot\int_0^\infty\frac{\psi^{m+a-\frac{1}{2}}(\psi+1)^{-2m+1}}{(\psi+1)^2-\frac{s}{y}e^{-i\gamma}\psi}d\psi,$$

e, mediante la sostituzione $\psi=\frac{1-\omega}{\omega}$,

$$T=(-1)^m\cos a\pi\cdot\int_0^1\frac{\omega^{m-a-\frac{1}{2}}(1-\omega)^{m+a-\frac{1}{2}}}{1-\frac{s}{y}e^{-i\gamma}\omega(1-\omega)}d\omega.$$

Il numeratore della frazione sotto il segno d'integrazione è sempre positivo, e il valore assoluto del denominatore non è mai minore di $\operatorname{sen}\gamma$, quando $0<\gamma\leqq\frac{\pi}{2}$, e sempre più grande di 1, quando $\frac{\pi}{2}<\gamma<\pi$. Indicando dunque con M il valore assoluto di

$$(-1)^m\cos a\pi\cdot\frac{\Gamma(m-a+\frac{1}{2})\Gamma(m+a+\frac{1}{2})}{\Gamma(2m+1)}=\pi\cdot\binom{m+a-\frac{1}{2}}{2m},$$

sappiamo che il valore assoluto di T è minore di $\frac{M}{\operatorname{sen}\gamma}$ nel primo caso, e minore di M nel secondo. Da ciò apparisce che il limite superiore dell'integrale S può andare all'infinito positivo; in altre parole, che l'ultima forma dell'integrale doppio ammette lo svanire della quantità piccolissima ε.

In fine abbiamo

$$A=\frac{1}{2\pi}e^{2y\cos\gamma}y^{-a-\frac{1}{2}}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1}(-1)^{\lambda}\Gamma(\lambda+\tfrac{1}{2})\binom{\lambda+a-\frac{1}{2}}{2\lambda}y^{-\lambda}e^{i\left[2y\operatorname{sen}\gamma-\left(a+\lambda+\frac{1}{2}\right)\gamma\right]}$$

$$+\frac{\cos a\pi}{2\pi^2}e^{2y\cos\gamma}y^{-m-a-\frac{1}{2}}e^{i\left[2y\operatorname{sen}\gamma-\left(m+a+\frac{1}{2}\right)\gamma\right]}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}e^{-s}s^{m-\frac{1}{2}}\left(\int_0^1\frac{\omega^{m-a-\frac{1}{2}}(1-\omega)^{m+a-\frac{1}{2}}}{1-\frac{s}{y}e^{-i\gamma}\omega(1-\omega)}d\omega\right)ds,$$

$$B=\frac{1}{2\pi}e^{-2y\cos\gamma}y^{-a-\frac{1}{2}}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1}(-1)^{\lambda}\Gamma(\lambda+\tfrac{1}{2})\binom{\lambda+a-\frac{1}{2}}{2\lambda}y^{-\lambda}e^{i\left[-2y\operatorname{sen}\gamma+\left(a+\lambda+\frac{1}{2}\right)(\pi-\gamma)\right]}$$

$$+\frac{\cos a\pi}{2\pi^2}e^{-2y\cos\gamma}y^{-m-a-\frac{1}{2}}e^{i\left[-2y\operatorname{sen}\gamma+\left(m+a+\frac{1}{2}\right)(\pi-\gamma)\right]}\times$$

$$\times\int_0^{\infty}e^{-s}s^{m-\frac{1}{2}}\left(\int_0^1\frac{\omega^{m-a-\frac{1}{2}}(1-\omega)^{m+a-\frac{1}{2}}}{1+\frac{s}{y}e^{-i\gamma}\omega(1-\omega)}d\omega\right)ds;$$

e poi $F(a,\ y^2e^{2i\gamma})=A+B$.

Nel caso di $\gamma=0$ questa trasformazione non è possibile. Nel caso di $\gamma=\frac{\pi}{2}$ si ponga

$$y=\frac{z}{2},\quad \overset{a}{J}(z)=\left(\frac{z}{2}\right)^{a}F\left(a,\ -\frac{z^2}{4}\right),$$

$$S_m=\int_0^{\infty}e^{-s}s^{m-\frac{1}{2}}\int_0^1\frac{\omega^{m-a-\frac{1}{2}}(1-\omega)^{m+a-\frac{1}{2}}}{1+\frac{4s^2}{z^2}\omega^2(1-\omega)^2}d\omega\cdot ds;$$

e si avrà

$$\overset{a}{J}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m-1}\frac{\Gamma(\lambda+a+\frac{1}{2})\Gamma(\lambda-a+\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+a)\Gamma(\frac{1}{2}-a)\Gamma(\lambda+1)}\left(\frac{1}{2z}\right)^{\lambda}\cos\left(z-(\lambda+a+\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right)$$

$$+\frac{\cos a\pi}{\pi^2}\left(\frac{2}{z}\right)^{m+\frac{1}{2}}\cos\left(z-(m+a+\tfrac{1}{2})\frac{\pi}{2}\right)\cdot S_m+$$

$$+\frac{\cos a\pi}{\pi^2}\left(\frac{2}{z}\right)^{m+\frac{3}{2}}\cos\left(z-(m+a+\tfrac{3}{2})\frac{\pi}{2}\right)\cdot S_{m+1}.$$

Da quanto precede si può ricavare per la funzione di Bessel una espressione integrale più convergente delle note altre due, la quale è altresì di forma reale, quando il parametro a e l'argomento z sono reali; ed è la parte reale nella equazione

$$\overset{a}{J}(z)+i\frac{2}{\pi}\overset{a}{K}(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{-z\frac{\cos^2\varphi}{\operatorname{sen}\varphi}+i(z-a\varphi)}\operatorname{tang}^{-a}\frac{\varphi}{2}\left(1-\frac{i}{\operatorname{sen}\varphi}\right)d\phi,$$

ove la componente immaginaria è definita dalla

$$\overset{a}{K}(z)=\frac{\pi}{2\operatorname{sen}a\pi}[\cos a\pi\cdot\overset{a}{J}(z)-\overset{-a}{J}(z)].$$

La funzione complementare, così chiamata dal sig. Neumann e dinotata con $\overset{n}{Y}(z)$, proviene da $\overset{a}{K}(z)+[\log 2+\Gamma'(1)]\cdot\overset{a}{J}(z)$, quando a raggiunge un numero intero nullo o positivo n; e la funzione $\overset{a}{Y}(z)$ del sig. Hankel eguaglia $\frac{2}{\cos a\pi}e^{ia\pi}\overset{a}{K}(z)$.

V.

Nei trattati di calcolo integrale si valutano parecchi integrali semplici definiti o per mezzo di integrali doppi, sovente di una forma non facile ad indovinarsi, ovvero per mezzo di equazioni differenziali. Ma in quasi tutti questi casi non v'è bisogno di abbandonare la semplicità dell'integrale proposto; anzi le discontinuità della funzione da integrarsi indicano di per sè, come si debba mutare la via d'integrazione per giungere ad una valutazione.

1.° Sia proposto l'integrale definito

$$X=\int_0^{\infty} e^{-t}t^a\frac{dt}{t+x},$$

(dove x e la componente reale di $a+1$ siano positivi); invece di esso si consideri l'integrale

$$\int e^u u^a\frac{du}{u-x}\ \text{(cappio da }-N\text{ circ. 0, escl. }x\text{)},$$

il quale si mostra uguale a $2i\operatorname{sen}a\pi\cdot X$, stringendo la via della u sulla metà negativa dell'asse reale. Poichè un giro intorno ad x non muta il valore della funzione da integrarsi, se ne conchiude:

$$2i\,\mathrm{sen}\,a\pi\cdot X=\int e^u u^a \frac{du}{u-x}\ \text{(cappio da }-N\text{ circ. }0,\ x;\ \mathrm{mod}.u>x)$$

$$-\int e^u u^a \frac{du}{u-x}\ \text{(camm. circ. }x,\text{ escl. }0).$$

Ora il primo di questi integrali ammette lo sviluppo secondo le potenze ascendenti della x, avente per termine generale

$$x^n\int e^u u^{a-n-1}\,du=\frac{2i\pi}{\Gamma(n+1-a)}x^n;$$

ed il secondo ha $-2i\pi\cdot e^x x^a$ per valore e si può sviluppare secondo x^a, x^{a+1},... In fine si ottiene

$$\int_0^\infty e^{-t}t^a\frac{dt}{t+x}=\frac{\pi}{\mathrm{sen}\,a\pi}\left\{\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{x^n}{\Gamma(n+1-a)}-e^x x^a\right\}.$$

2.° In luogo dell'integrale

$$A=\int_0^\infty e^{-x^2+i\frac{\alpha^2}{x^2}}\,dx,$$

trattato nelle lezioni di Riemann sopra le equazioni alle derivate parziali, pubblicate da Hattendorf (p. 134), si consideri l'integrale

$$\frac{1}{2i\pi}\int e^{t-i\frac{\alpha^2}{t}}t^{-\frac{1}{2}}\,dt\ \text{(cappio da }-N\text{ circ. }0)=F(-\tfrac{1}{2},\ -i\alpha^2)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\cosh\cdot(\alpha\sqrt{2}-i\alpha\sqrt{2}).$$

Si può far sì che la via consista di un cappio da $\frac{i\alpha^2}{N}$ intorno a 0 e di due pezzi coincidenti, che congiungano $-N$ con $\frac{i\alpha^2}{N}$, e di cui uno appartenga all'andata, l'altro al ritorno della t. Lungo questi due pezzi gli integrali, sommati insieme, dànno la

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-u+i\frac{\alpha^2}{u}}u^{-\frac{1}{2}}\,du=\frac{2}{\pi}A,$$

dove abbiamo trasferito il limite inferiore da $-\frac{i\alpha^2}{N}$, con una rotazione di $\frac{\pi}{2}$, nel punto $\frac{1}{N}$ e poi in 0. Nell'integrale preso lungo il cappio, si sostituisca $-\frac{i\alpha^2}{u}$ per t; e per poter cambiare il moto retrogrado della u nel diretto, si moltiplichi il differenziale per -1; ne risulta

$$e^{-\frac{i\pi}{4}}\alpha\cdot\frac{1}{2i\pi}\int e^{u-\frac{i\alpha^2}{u}}u^{-\frac{3}{2}}du \text{ (cappio da } -N \text{ circ. } z)$$

$$=e^{-\frac{i\pi}{4}}\alpha F(\tfrac{1}{2},\, -i\alpha^2)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\operatorname{senh}(\alpha\sqrt{2}-i\alpha\sqrt{2}),$$

supposto che α sia positivo. Quindi si ha

$$A=\Gamma(\tfrac{3}{2})\,e^{-\alpha\sqrt{2}+i\alpha\sqrt{2}}.$$

(Si confronti anche Mey r: *Ueber zwei in der Wärmetheorie auftretende bestimmte Integrale,* A a. di Clebsch e Neumann, III, pag. 157).

3.° Sia proposto

$$Z=\frac{2}{\pi}\int_z^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\varphi\cdot d\varphi}{\sqrt{\varphi^2-z^2}}.$$

Per sciogliere la diramazione si ponga $\phi=\frac{z}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right)$, si avrà

$$Z=\frac{1}{i\pi}\int_1^N e^{i\frac{z}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right)}\frac{dp}{p}-\frac{1}{i\pi}\int_1^N e^{-i\frac{z}{2}\left(p+\frac{1}{p}\right)}\frac{dp}{p}.$$

Facendo $ip=t$ nel primo termine e $-ip=t$ nel secondo, si ha la somma di due integrali della medesima forma, colla sola differenza che t nel primo va da i ad iN, nel secondo da $-iN$ a $-i$. Si possono connettere le due vie frapponendo il pezzo dell'orizzonte da iN per $-N$ fino a $-iN$, lungo il quale l'integrale è nullo. Ora si ha

$$Z=\frac{1}{i\pi}\int e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}\frac{dt}{t},$$

dove t va da i, traversando l'asse reale nella metà negativa, fino a $-i$.

Conviene prendere per cammino un semicerchio, ossia porre $t = -e^{i\varphi}$, $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$; così si ottiene

$$Z = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-iz\,\mathrm{sen}\,\varphi}\, d\phi = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(z\,\mathrm{sen}\,\phi)\, d\phi ;$$

cioè

$$Z = \overset{0}{J}(z).$$

(Vedi Ann. di CLEBSCH e NEUMANN, V, p. 142.)

Gravedona, 4 ottobre 1872.

Sulla serie di Fourier

(*per* Giulio Ascoli, *a Milano*).

I.

Dei vari modi possibili di comportarsi di una funzione continua tra a e b, quando ci si avvicini indefinitamente ad uno dei valori limiti.

Tiro in un piano verticale due rette ortogonali, l'una orizzontale, e le assumo per assi delle coordinate cartesiane. Suppongo quindi che un punto variabile x si muova sull'asse omonimo da meno a più infinito: ora, se ad un numero limitato o illimitato di posizioni del punto mobile corrisponde una grandezza assegnabile y (a ciascun valore di x uno soltanto per y), che potrà supporsi rappresentata graficamente nel solito modo, diremo che y è una funzione della x. Così p. e. se fissassi un numero determinato di punti sulla retta $y=0$ ed in ciascuno dei medesimi tirassi un segmento verticale di lunghezza arbitraria, avrei costruito una funzione della x. Una serie di cui tutti i termini dipendono dalla x, che non diverge per ogni valor particolare di quest'ultima, ci offre un altro esempio di funzione, come

$$A+\sum_1 {}_n 1\cdot 2\cdots n x^n,$$

A indicando una grandezza qualsivoglia. L'espressione

$$\sum_1 {}_n \frac{1}{n^s}\operatorname{sen}\frac{1}{\operatorname{sen} n x \pi} \quad (s>1)$$

definisce una funzione, la quale esiste soltanto pei valori incommensurabili della variabile indipendente. Riemann nella sua Memoria: *Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe,* ragiona così (p. 24 e seg.):... « betrachten wir die Reihe

$$a_1 \operatorname{sen} x + a_2 \operatorname{sen} 2x + \cdots$$
$$\tfrac{1}{2} b_0 + b_1 \cos x + b_2 \cos 2x + \cdots$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\tfrac{1}{2}b_0 = A_0, \quad a_1 \operatorname{sen} x + b_1 \cos x = A_1, \quad a_2 \operatorname{sen} 2x + b_2 \cos 2x = A_2, \ldots$$

setzen, die Reihe

$$A_0 + A_1 + A_2 + \cdots$$

als gegeben. Wir bezeichnen diesen Ausdruck durch Ω und seinen Werth durch $f(x)$, so dass diese Function nur für diejenigen Werthe von x vorhanden ist, wo die Reihe convergirt ». Nè queste parole soltanto accennano alla definizione data superiormente; tosto dopo la proposizione riportata Riemann soggiunge: « Zur Convergenz einer Reihe ist nothwendig, dass ihre Glieder zuletzt unendlich klein werden. Wenn die Coefficienten a_n, b_n mit wachsendem n in's Unendliche abnehmen, so werden die Glieder der Reihe Ω für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein; andernfalls kann dies nur für besondere Werthe von x stattfinden ». Ora se si interpreta, come mi pare si debba, che le parole besondere Werthe accennino a ciò, che codesti valori non riempiano mai un tratto continuo dell'asse delle X, nell'ultima asserzione sta il teorema: Se per tutti i punti di un segmento comunque piccolo l'espressione

$$a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx$$

converge a zero per n infinito, sarà

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \quad (n = \infty).$$

Codesto teorema fu dimostrato dal sig. Cantor nel vol. IV del Giornale di Clebsch e Neumann. Riemann, coerentemente a quanto osserva a pag. 24... « es müssen daher zunaechst zur Darstellbarkeit nothwendige Bedingungen aufgesucht und aus diesen dann zur Darstellbarkeit hinreichende ausgewählt werden », cerca in prima le condizioni che necessariamente denno essere soddisfatte, « wenn eine nach dem Intervall 2π periodisch sich wiederholende Function $f(x)$ durch eine trigonometrische Reihe, deren Glieder für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein werden, darstellbar sein soll »... (v. p. 32). A pagina 37 osserva: « Es bleibt nun noch der Fall zu untersuchen, wo die Glieder der Reihe Ω für den Argumentwerth x zuletzt unendlich klein werden, ohne dass diess für jeden Argumentwerth stattfindet ». Ora, se non si desse al concetto di funzione il significato testè attribuitole, che non porta di necessaria conseguenza l'esistenza della medesima per tutti i punti di un tratto dell'asse delle X, sarebbero anzitutto superflue le parole « deren

Glieder für jeden Werth von x zuletzt unendlich klein werden »; nè d'altra parte avrebbe alcun significato il cercare le condizioni, affinchè una funzione sia esprimibile per serie trigonometrica i cui coefficienti non vanno a zero per n infinito, in quanto il non ammettere soddisfatta questa ultima condizione escluderebbe a priori la esprimibilità della funzione per serie della forma

$$\tfrac{1}{2}b_0 + \sum_1 (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx).$$

Supponendo che la dipendenza della y dalla x non cessi per un numero illimitato di punti del tratto ab, se si ponno tirare due rette parallele all'asse delle X tali, che la $f(x)$ rimanga del tutto compresa tra le medesime, considerata che sia nell'intervallo ab, si dirà che la data funzione resta ivi finita; se non può soddisfarsi a codesta condizione, che va all'infinito nel detto segmento. Sia η una grandezza positiva qualsivoglia e tra c e $c+\eta$ non cessi, almeno del tutto, la dipendenza della y dalla x, di più, essendo $0<\eta_1<\eta$, la $f(x)$ si mantenga finita nel segmento $c+\eta_1\ c+\eta$, mentre ciò non si verifica tra c e $c+\eta_1$, diremo in tale ipotesi che la $f(x)$ va all'infinito per $x=c+0$, potendo il simbolo $f(c)$ avere o no significato: per $x=c-0$, ove non cessasse la dipendenza, la y potrebbe restar finita oppure andare all'infinito, ed in quest'ultimo caso si direbbe che la y cresce al di là di ogni limite per $x=c$. Così p. e. se imaginassi tracciata una linea continua qualsiasi, la quale copra semplicemente il segmento ab ed abbia per asintoto la retta $y=a$, e quindi, giovandomi di cotesta curva, definissi per modo una funzione che nell'intervallo $a\ a+\eta$, qualunque si fosse la quantità η, non cessasse, almeno del tutto, la dipendenza, otterrei una funzione la quale va all'infinito a destra di a. Più generalmente, si potrà dire che una funzione $f(x)$ va all'infinito per $x=c+0$ quando, comunque piccola sia la grandezza η, non cessi la dipendenza nel tratto $c\ c+\eta$, nè si possano tracciare due parallele all'asse delle X che comprendano tra loro la $f(x)$, considerata che sia tra c e $c+\eta$, così p. e. la funzione $\dfrac{1}{\cos\frac{1}{\sqrt{x}}}$ va all'infinito per $x=+0$.

Si supponga ora che la y dipenda dalla x pel valor particolare a e per tutti quelli del segmento $a\ a+\eta$, η essendo una grandezza comunque piccola, poniamo poi che, assunta una quantità qualsivoglia ε e tracciate le rette $y=f(a)-\varepsilon$, $f(a)$, $f(a)+\varepsilon$, si possa determinare un tratto $a\ a+\eta_1$ tale, che gli estremi delle ordinate corrispondenti ai punti del medesimo cadano tra le due rette $y=f(a)\pm\varepsilon$, diremo in allora che la $f(x)$ è continua a destra del valor particolare a; la qual condizione è al certo verificata da una funzione, che ha per imagine una linea arbitrariamente segnata avente uno dei suoi estremi in un punto di ascissa a e giacente a destra del medesimo. Supposto che la $f(x)$ sia continua a destra di a, nè sia costante, se si fa decrescere senza limite la quantità ε secondo una legge qualunque, dovrà altresì avvertirsi che η_1 andrà di più in più diminuendo e senza confine, chè, se ciò non avesse luogo, sarebbe la $f(x)$ costante a destra di a, contro l'ipotesi. Se poi avesse luogo continuità da ambo le parti di a, si direbbe che la $f(x)$ è continua pel valor particolare a.

Sia $f(x)$ una funzione della x e la dipendenza non cessi per tutti i punti dell'intervallo ab, $a<b$, non facendosi veruna ipotesi circa i simboli $f(a)$, $f(b)$. Ora, giova distinguere due casi: la data funzione ha un numero finito di massimi e minimi nel dato segmento, oppure ne ha un numero illimitato; si dice che ha luogo il primo caso quando si può dividere il tratto ab in parti entro ciascuna delle quali la funzione non è crescente e decrescente; se non può soddisfarsi a codesta condizione, diremo che si verifica il secondo. Quanto alle funzioni della prima specie Riemann osserva nella sua Memoria (p. 15, annotazione): « Es ist nicht schwer zu beweisen, dass der Werth einer Function f, welche nicht unendlich viele Maxima und Minima hat, stets, sowohl wenn der Argumentwerth abnehmend, als wenn er zunehmend gleich x wird, entweder festen Grenzwerthen $f(x+0)$ und $f(x-0)$ sich nähern oder unendlich gross werden müsse ». Codesta asserzione è subito dimostrata: sia x un valore tale che $a<x<b$ ed avviciniamoci indefinitamente al medesimo dalla sua destra, la $f(x)$, ove non sia costante nelle estreme vicinanze di $x+0$, crescerà sempre, oppure ora crescerà ed ora manterrà un valore costante; se essa adunque non va all'infinito per $x=x+0$, dovrà tendere ad un limite per un noto assioma, per $x=x-0$ la $f(x)$ tende altresì verso un limite, ove non vada all'infinito; se si avesse poi

$$f(x-0)=f(x)=f(x+0),$$

la data funzione sarebbe continua pel valore particolare x. Gli è manifesto come una funzione dotata di un numero illimitato di massimi e minimi nell'intervallo ab possa non esser continua per nessun punto del medesimo, il che avverrebbe per una funzione eguale ad 1 per tutti i punti di detto segmento cui corrispondono ascisse razionali ed a 0 per gli altri, oppure possa esser continua per un numero limitato o illimitato di punti, ed in quest'ultimo caso i punti, pei quali ha luogo continuità, potrebbero non riempire verun tratto di ab. Qual esempio di una funzione che si comporta in tal guisa valga il seguente, tolto da RIEMANN (pag. 21):

« Man bezeichne der Kürze wegen durch (x) den Ueberschuss von x über die nächste ganze Zahl, oder, wenn x zwischen zweien in der Mitte liegt und diese Bestimmung zweideutig wird, den Mittelwerth aus den beiden Werthen $\frac{1}{2}$ und $-\frac{1}{2}$, also die Null, ferner durch n eine ganze durch p eine ungerade Zahl und bilde alsdann die Reihe

$$f(x)=\frac{(x)}{1}+\frac{(2x)}{4}+\frac{(3x)}{9}+\cdots=\sum_{1}\frac{(nx)}{n\cdot n};$$

so convergirt, wie leicht zu sehen, diese Reihe für jeden Werth von x; ihr Werth nähert sich, sowohl, wenn der Argumentwerth stetig abnehmend, als wenn er stetig zunehmend gleich x wird, stets einem festen Grenzwerth, und zwar ist, wenn $x=\frac{p}{2n}$ (wo p, n relative Primzahlen)

$$f(x+0)=f(x)-\frac{1}{2nn}\left(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots\right)=f(x)-\frac{\pi\cdot\pi}{16n\cdot n}$$

$$f(x-0)=f(x)+\quad » \quad » \quad » \quad = » + »$$

sonst aber überall $f(x+0)=f(x)$, $f(x-0)=f(x)$ ».

Se la $f(x)$ è continua per tutti i punti dell'intervallo ab, non facendosi veruna ipotesi circa i simboli $f(a)$, $f(b)$, diremo che è continua tra a e b, oppure nel tratto ab, ad es. la funzione $e^{\frac{1}{x-a}}+e^{\frac{1}{b-x}}$: se poi la $f(x)$ fosse continua altresì a destra di a ed a sinistra di b si direbbe che è continua tra a e b inclusi i limiti. Assegnata secondo una legge qualunque una funzione finita per una serie illimitata di punti nel tratto ab, ammetteremo come evidente potersi sempre tirare una retta parallela all'asse delle X, la quale goda della proprietà che, tiratane un'altra qualsiasi pure parallela alla retta $y=0$ ed al disotto della prima, l'estremo di una ordinata almeno cada al disopra della seconda, mentre l'estremo di nessuna cade superiormente all'altra. Così p. e. se considero la funzione $\operatorname{sen} x$ in un intervallo qualsivoglia, purchè non inferiore a 2π, la retta in discorso sarà quella di equazione $y=1$. Chiameremo limite superiore dei valori della data funzione la distanza di questa parallela dall'asse delle X. In modo analogo si definirebbe il limite inferiore. L'ammettere l'esistenza di codeste parallele non conduce già alla necessaria conseguenza che ad un punto almeno del segmento ab abbia a corrispondere una normale che eguagli il limite superiore e ad un altro una eguale al limite inferiore, la qual cosa potrà e non potrà aver luogo. Così p. e. se con raggio eguale all'unità di misura nel punto di coordinate 1, 0 come centro traccio un semicircolo del tutto superiore all'asse delle X, e definisco nell'intervallo 02 una funzione per modo che in tutti i punti distanti dall'origine di lunghezze incommensurabili con l'unità di misura abbia l'ordinata corrispondente eguale a quella del circolo, per gli altri non abbia luogo veruna dipendenza, gli è chiaro che nè il limite superiore, che è eguale ad 1, nè l'inferiore, che è lo zero, viene conseguito. Supposto poi che per $x=a$, essendo $0 \leq a \leqq 2$, codesta funzione, anzichè esser indeterminata, oppure esser eguale all'ordinata corrispondente del circolo, fosse eguale ad A, $A \geq 1$, sarebbe A il limite superiore dei suoi valori, il quale verrebbe raggiunto. Gli è però degno di nota che, se la data funzione è continua in un certo tratto, i limiti inclusi, essa raggiunge il limite superiore e l'inferiore dei suoi valori ed uno qualsiasi ad essi intermedio. Infatti, sia A il limite superiore dei valori della $f(x)$ nel segmento ab, dico che esiste almeno un punto nel medesimo pel quale la ordinata è eguale ad A. Poniamo per un momento che non si possa assegnare un tal punto: gli è manifesto che la funzione assumerà valori i quali differiscono da A tanto poco quanto si vuole, imperocchè se ciò non avesse luogo non sarebbe A il limite superiore dei suoi valori. Si dimezzi ora in α_1 il segmento ab, la $f(x)$ considerata che sia nel tratto $a\alpha_1$ avrà il suo limite superiore eguale o minore di A; nella prima ipotesi si dimezzi $a\alpha_1$, nella seconda $\alpha_1 b$, essendo in allora manifestamente A il limite superiore della $f(x)$ nel segmento $\alpha_1 b$, e si dica α_2 codesto novello punto di mezzo: si proceda in questo modo indefinitamente, dimezzando ogni qualvolta vi sia ambiguità l'intervallo posto a sinistra, si tenderà ad un punto α tale che $f(\alpha)=A$. Infatti, se fosse $f(\alpha)$ diverso da A, sarebbe minore del medesimo ed eguale, poniamo, ad $A-\mu$; indico ora con ε una quantità scelta per modo che $A-\mu+\varepsilon<A$ e separo da amendue le parti di α, poichè α è diverso nelle ipotesi fatta da a e da b, un segmento tale, che le ordinate corrispondenti ai punti di ciascuno dei medesimi differiscano da $A-\mu$ a meno di ε, la qual cosa è al certo possibile essendo la $f(x)$ continua per ogni valor particolare tra a e b. Prendiamo ora n per modo che α_n, $\alpha_{n+1}, \ldots$ cadano negli intervalli or ora segnati: adunque nei medesimi vi sono punti, ai quali corrispondono ordinate diverse da A tanto poco quanto si vuole e che quindi hanno i loro estremi superiormente alla retta $y=A-\mu+\varepsilon$, le quali cose non potendo

coesistere, dovrà necessariamente essere $f(\alpha)=A$, come si voleva dimostrare. Gli è chiaro come nell'ipotesi momentaneamente fatta, che non si possa assegnare un punto del segmento ab in cui la ordinata sia eguale ad A, si dovrà supporre $f(\alpha_1)$, $f(\alpha_2),\ldots < A$ e quindi i punti α_n, $\alpha_{n+1},\ldots$, quale si sia n, non finiranno mai per trovarsi dalla stessa parte di α. Dal teorema testè dimostrato ne consegue come, data una funzione continua tra a e b, un limite almeno escluso, $f(a+0)$ ed $f(b-0)$ avendo significato, se si sapesse che la medesima non raggiunge nell'intervallo ab il limite superiore dei suoi valori, si avrebbe $A=f(a+0)$, oppure $=f(b-0)$. Si ha altresì che, se una funzione finita tra a e b non raggiunge il limite superiore dei suoi valori, si potrebbe pur sempre assegnare un punto nelle vicinanze del quale la funzione assumerebbe valori di più in più prossimi a codesto limite; la funzione poco fa definita nel tratto 02 ce ne offre un esempio. Ponendo mente che la $-f(x)$, se la $f(x)$ è continua tra a e b inclusi i limiti, consegue il limite superiore dei suoi valori almeno per un valore β, si ha che la data funzione raggiunge nel segmento considerato il limite inferiore dei suoi valori. Sia ora C un valore intermedio ai due limiti, dico che per un punto γ almeno compreso tra α e β la ordinata corrispondente è eguale a C. Poniamo per un momento che codesto punto non si possa assegnare: nell'intervallo $\alpha\beta$ la funzione proposta raggiunge un numero illimitato di valori maggiori e minori di C; divido $\alpha\beta$ per metà in γ_1, $f(\gamma_1)$ non è al certo per l'ipotesi fatta eguale a C: ora, ei potrebbe darsi che la retta $y=C$ fosse esterna alle due che limitano i valori della $f(x)$ nel segmento $\alpha\gamma_1$ e quindi nell'altro $\gamma_1\beta$ interna alle due rette ad esso corrispondenti, oppure l'inverso, o in fine la linea $y=C$ potrebbe essere interna ad amendue le coppie di rette relative ai tratti $\alpha\gamma_1$, $\gamma_1\beta$; nel primo caso si dimezzi $\gamma_1\beta$ in γ_2, nel secondo $\alpha\gamma_1$, nel terzo infine uno qualunque dei due, e per fissar le idee, il primo muovendosi verso l'origine delle coordinate. Si escluse il caso che la retta $y=C$ coincida con una delle rette limiti, poichè, per ipotesi, noi non sappiamo assegnare un punto pel quale la ordinata sia eguale a C. Essendo $f(\gamma_2)\gtrless C$, si proceda in tal guisa indefinitamente, si tenderà ad un punto γ pel quale $f(\gamma)=C$. Ed in vero, poniamo che ciò non abbia luogo, sarà in allora $f(\gamma)=C\pm\mu$, e quindi da ambo le parti di γ le ordinate cadranno coi loro estremi al disopra della retta $y=C$, oppure al disotto, mentre sufficientemente vicino a questo punto si ponno assegnare infiniti punti le cui ordinate cadano superiormente, ed infiniti altri le cui ordinate cadano inferiormente ad essa parallela: le quali cose contrastando le une con le altre, dovrà essere $f(\gamma)=C$. Da quanto si disse or ora consegue altresì come una funzione continua, che raggiunge il valore M per $x=m$ ed N per $x=n$, acquisti un valore qualsiasi compreso tra M ed N, almeno per un punto intermedio ad m e ad n.

Supposto che la $f(x)$ dinoti una funzione continua tra a e b, studiamo i vari modi possibili di comportarsi della medesima quando si converga ad uno dei valori limiti, a p. e. Ora, se la $f(x)$ si mantiene finita per $x=a+0$, si possono sempre tracciare due rette parallele all'asse delle X, le quali ponno confondersi in una, e ciò avrà luogo ogni qualvolta il simbolo $f(a+0)$ hà significato, tali che, assegnata una quantità arbitraria ε, si possano tirar sempre altre due, l'una al disopra della superiore della grandezza ε, l'altra al disotto della inferiore pure di ε, che godono della proprietà che per tutti i punti di un tratticello sufficientemente piccolo aderente ad $a+0$ l'imagine della $f(x)$ cada tra le medesime. Infatti, sia x un punto tra a e b, la funzione proposta, considerata che sia nel tratto ax, ammette un limite superiore ed inferiore, i quali non vengono necessariamente raggiunti; mentre si tende ad $a+0$, codesti limiti potranno mantenersi costanti, oppure ciò non avrà luogo, di certo sono funzioni ad un valore della x: convergendo ad $a+0$ si dovrà pur avvertire, se il limite superiore ad es. finisce per mantenersi costante, il che avviene per la funzione $\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}$, oppure se ciò non ha luogo, come per l'altra $\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}+(x-a)$, In tal caso la funzione limite superiore $\varphi(x)$, non potendo che ognora decrescere, oppure alternativamente decrescere e mantenere un valore costante, e la $f(x)$ restando per ipotesi finita per $x=a+0$, dovrà tendere ad un limite $\varphi(a+0)$: altrettanto dicasi circa la funzione limite inferiore $\psi(x)$ nel tratto $a+0$ x, cioè convergendo ad $a+0$ finirà per restar costante, oppure, se ciò non ha luogo, non potendo che di continuo crescere, ossia ora crescere ed ora mantenere lo stesso valore, e la $f(x)$ restando finita per $x=a+0$, dovrà tendere ad un limite $\psi(a+0)$, e con ciò risulta dimostrato quanto poco fa venne asserito: diremo poi che la data funzione oscilla tra le due grandezze $\varphi(a+0)$, $\psi(a+0)$ per $x=a+0$. Gli è degno di nota come le funzioni $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sieno continue tra a ed x: infatti, considerando la $\varphi(x)$, abbiamo che è una funzione finita ad un valore per tutti i punti di detto intervallo e nel medesimo ognora costante o decrescente, o in fine ora l'uno ora l'altro, quando si converga al punto $a+0$; quindi avvicinandoci ad un punto qualsivoglia x_1+0 tra a ed x si tenderà ad un certo valore, che dico essere il limite superiore dei valori della $f(x)$ tra x ed x_1; ed invero, se ciò non avesse luogo, sarebbe $\phi(x_1+0)>\phi(x_1)$, non potendo al certo essere $\phi(x_1)>\phi(x_1+0)$. Ma anche la diseguaglianza $\phi(x_1+0)>\phi(x_1)$ è impossibile. Infatti, se, avvicinandomi indefinitamente al punto x_1+0, una funzione $\theta(x)$, continua pel valore x_1, assume pur sempre valori più grandi che la quantità A, potrà essere $\theta(x_1+0)=\theta(x_1)=A$: laddove, se si sapesse altresì che codesta funzione $\theta(x)$, per quanto si vada vicino al punto considerato, raggiunge pur sempre valori maggiori di A di una grandezza assegnabile, non si potrebbe avere al certo $\theta(x_1+0)=\theta(x_1)=A$ e ciò per la continuità, ma bensì $\theta(x_1+0)=\theta(x_1)>A$. Ora, supposto $\phi(x_1+0)>\phi(x_1)$, la $f(x)$ avvicinandoci indefinitamente al punto x_1+0 raggiungerebbe valori, i quali sono più grandi di $\phi(x_1)$ di una quantità, che può ammettersi maggiore di $\phi(x_1+0)-\phi(x_1)-\varepsilon$, quale si sia ε, quindi dovrebbe essere $f(x_1)>\phi(x_1)$, adunque $\phi(x_1)$ non sarebbe il limite superiore dei valori assunti dalla $f(x)$ nell'intervallo $a\,x_1$, la qual cosa essendo contraria all'ipotesi, si avrà

$$\phi(x_1+0)=\phi(x_1).$$

Analogamente farei vedere come si abbia $\phi(x_1-0)=\phi(x_1)$. La funzione $\phi(x)$ tendendo entro l'intervallo ax ad uno qualsiasi dei valori che raggiunge e da ambo le parti del punto pel quale lo consegue, è quindi continua tra a ed x e pel valore x, di più il simbolo $\phi(a+0)$ ha significato. Accenno ora ad alcune relazioni che passano tra le funzioni $\phi(x)$ ed $f(x)$. Se nelle estreme vicinanze del punto x_1+0 la $\phi(x)$ decresce sempre, cioè nell'intervallo $x_1\; x_1+\eta$, η essendo una grandezza qualsivoglia, avremo $\phi(x_1)=f(x_1)$, poichè la data funzione assume valori maggiori di $\phi(x_1)$ per quanto ci si accosti al punto x_1+0, mentre tra x_1 e $x_1-\eta$ le sue ordinate non sono superiori a $\phi(x_1)$, e la $f(x)$ è continua per $x=x_1$. Ne consegue che, se per un certo tratto x_1x_2 la $\phi(x)$ decresce sempre, la data funzione raggiunge nel segmento limitato dai punti a e da uno qualunque appartenente all'intervallo considerato inclusi gli estremi x_1, x_2 il limite superiore dei suoi valori. Se la $f(x)$ non raggiungesse il limite superiore dei suoi valori tra a ed x, sarebbe $\phi(x)=\text{Cost.}$ in detto intervallo. Infatti, supponiamo che ciò non abbia luogo, in allora per un certo tratto ax_1, essendo $x_1<x$, il limite superiore sarà diverso da quello corrispondente all'altro ax e minore, onde il limite superiore dei valori della $f(x)$ nell'intervallo x_1x è $\phi(x)$, ma la $f(x)$ è continua tra x_1 ed x inclusi i limiti,

raggiunge adunque il valore $\phi(x)$, il che è contrario all'ipotesi, ad es. $\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}-(x-a)$, per la quale $\phi(x)=1$. La reciproca non è vera, ad es. $\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}\cdot$ Se le due rette $y=\phi(a+0)$, $=\psi(a+0)$ si confondessero in una sola, la funzione tenderebbe, il che fu già osservato, per $x=a+0$ ad un valore, senza conseguirlo necessariamente, come $\operatorname{arctg}\frac{1}{x-a}\cdot$

Supponendo ora che codeste due rette sieno distinte, studiamo il modo di comportarsi della funzione nelle estreme vicinanze di $a+0$, ed a tal fine non sarà forse inopportuno il considerare come coesistenti la linea imagine della $f(x)$ con una retta $y=D$, tale che $\psi(a+0)<D<\phi(a+0)$. Osservo anzitutto che codesta retta ha un numero illimitato di punti a comune con la data funzione nell'intervallo $a\ a+\eta$, η essendo qualsivoglia. Infatti, la $f(x)$ nelle estreme vicinanze di $a+0$ non è al certo eguale a D; d'altra parte, se io potessi assegnare una grandezza qualunque η_1 tale, che nel segmento $a\ a+\eta_1$ la $f(x)$ non fosse mai eguale a D, dovrebbe la medesima in esso tratto esser sempre maggiore o minore di D, il che è altresì contrario all'ipotesi; adunque tra $a+0$ ed $a+\eta$ la funzione proposta ha un numero illimitato di punti a comune con la linea $y=D$. Per veder meglio come si comporti la $f(x)$ nelle estreme vicinanze di $a+0$ giova distinguere il caso in cui la retta $y=D$ ha tutti gli elementi comuni con la $f(x)$, i quali ponno essere o punti o tratticelli soltanto, o gli uni e gli altri, isolati, procedendo dalla destra verso la sinistra, quando si consideri un segmento qualsivoglla aderente ad $a+0$, dal caso in cui questa condizione non sia soddisfatta. Dico che una funzione ha un punto isolato a comune con una linea arbitrariamente segnata per $x=c$, quando l'estremo di $f(c)$ cade su codesta linea, mentre si può assegnare una quantità ε_1 tale, che per tutti i valori di ε non maggiori ad ε_1, $f(c\pm\varepsilon)$ è diverso da $\omega(c\pm\varepsilon)$ rispettivamente, se con $\omega(x)$ si rappresenta l'ordinata corrispondente all'ascissa variabile x della linea arbitrariamente segnata. Così p. e. la funzione $\operatorname{sen} x$ ha a comune con l'asse delle X un punto isolato nell'origine delle coordinate, la qual cosa non ha luogo per l'altra $x \operatorname{sen}\frac{1}{x}\cdot$ La $f(x)$ potrebbe avere un contatto di ordine comunque elevato con la linea considerata per $x=c$, e tuttavolta il punto di coordinate $c, f(c)$, che essa ha a comune con la medesima, essere isolato, ad es. $e^{-\frac{1}{x^2}}$ per $x=0$, in modo analogo si definirebbe il tratto isolato.

Quando la retta $y=D$ ha i suoi elementi (punti e segmenti o gli uni o gli altri soltanto) comuni con la $f(x)$ staccati nell'intervallo $a\ a+\eta$, comunque piccola sia la quantità η, gli è chiaro che il numero dei medesimi nel segmento $a+\varepsilon\ a+\eta$, essendo $\varepsilon<\eta$, sarà limitato, poichè, se ciò non avesse luogo, codesti elementi si dovrebbero addensare nel tratto $a+\varepsilon\ a+\eta$, in numero illimitato almeno presso ad un punto, poniamo di ascissa d, laonde si avrebbe $f(d)=D$, ed il punto d, $f(d)$ non sarebbe al certo isolato, contro la fatta ipotesi. Se ora si fa convergere ε a zero sempre decrescendo codesto numero crescerà senza fine. Sia ora α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots$ la serie illimitata di codesti elementi, quali si ottengono successivamente muovendosi da $a+\eta$ ad $a+0$, tra due consecutivi qualunque $\alpha_s\ \alpha_{s+1}$ la funzione giacerà tutta al disopra oppure al disotto alla parallela $y=D$, poichè la $f(x)$, essendo continua nell'intervallo anzidetto, non potrebbe assumere valori maggiori e minori di D senza che l'espressione $f(x)-D$ si annullasse almeno per un elemento (punto o tratto) sito tra α_s ed α_{s+1} esclusi i limiti; ed è chiaro che tra i segmenti determinati dai punti o tratticelli α_1, α_2, $\alpha_3, \ldots$ vi sarà un numero senza fine pei quali giace inferiormente ed un numero pure senza limite pei quali giace superiormente. Poniamo ora che tra gli elementi α_s α_{s+1} la $f(x)$ giaccia superiormente alla retta $y=D$, in tale ipotesi essa ammetterà, considerata che sia in questo intervallo, un limite inferiore eguale a D, che raggiungerà due volte e due soltanto, cioè agli estremi del segmento considerato, ed un limite superiore A_s, il quale verrà conseguito almeno una volta; se indico poi con

$$\alpha_r\alpha_{r+1},\ \alpha_q\alpha_{q+1},\ldots$$

la serie dei tratti pei quali la $f(x)$ giace superiormente alla retta $y=D$, quali si ottengono convergendo al punto $a+0$, gli è manifesto, che, tirate le due parallele $y=\phi(a+0)\pm\varepsilon$, ε essendo qualsivoglia, nella serie illimitata di grandezze

$$A_r,\quad A_q,\ldots$$

ve ne sarà un'altra pure illimitata, che potrà confondersi con la precedente, tutte comprese tra $\phi(a+0)-\varepsilon$ e $\phi(a+0)+\varepsilon$. Analoghe considerazioni si possono fare relativamente ai rami della funzione che sono sotto alla retta $y=D$. Ecco un esempio di una funzione che si comporta nel modo or ora studiato: divido il segmento η aderente ad $a+0$, supposto $D=0$, secondo una legge qualsiasi, in guisa che i punti di divisione si vadano indefinitamente costipando solo al punto $a+0$, siano cioè isolati tra loro procedendo dalla destra verso alla sinistra, e siano $\alpha_1 (= a + \eta)$, α_2, $\alpha_3, \ldots$ codesti punti; tiro quindi la retta $y = m(x - a) + b\,(b > 0)$ ed innalzo nei punti di mezzo dei segmenti

$$\alpha_1\alpha_2, \quad \alpha_4\alpha_5, \quad \alpha_7\alpha_8, \quad \alpha_{10}\alpha_{11}, \ldots$$

altrettante normali A_1, A_4, A_7, $A_{10}, \ldots$ sino al loro incontro con la retta or ora condotta; costruisco quindi al disopra dell'asse delle X tante semiellissi nel modo seguente: la prima muovendosi verso il punto $a + 0$ abbia per uno dei suoi assi il segmento $\alpha_1\alpha_2$ e per altro il doppio della normale A_1; così la seconda i tratti $\alpha_4\alpha_5$, $2A_4$; la terza gli intervalli $\alpha_7\alpha_8$, $2A_7$; e via di seguito indefinitamente: tirata poi la retta $y = m_1(x - a) + b_1$ $(b_1 < 0)$, definisco nello stesso modo la $f(x)$ nei tratti

$$\alpha_3\alpha_4, \quad \alpha_6\alpha_7, \quad \alpha_9\alpha_{10}, \ldots;$$

negli altri intervalli la $f(x)$ abbia un valore nullo; in questo caso si ha $\varphi(a+0) = b$, $\psi(a+0) = b_1$.

Supponiamo ora che gli elementi comuni (tratti o punti) alla $f(x)$ ed alla retta $y = D$ nell'intervallo $a + 0\, a + \eta$, qualunque sia η, non sieno tutti isolati, ben si intende muovendoci dalla destra verso la sinistra, e studiamo in tale ipotesi il modo di comportarsi della $f(x)$ nelle estreme vicinanze di $a + 0$. Gli è manifesto che, se io parto dal punto $a + \eta_1$ verso $a + 0$, segnando i tratticelli della retta $y = D$ non comuni alla imagine della $f(x)$, quando ciò sia possibile, cioè quando a sinistra del punto $a + \eta_1$, supposto che $f(a + \eta_1 - \varepsilon)$ per tutti i punti del tratto $a + \eta_1\, a + \eta_1 - \varepsilon$, ε essendo qualsivoglia, non sia sempre eguale a D, codesti elementi sieno isolati, io non convergo al certo al punto $a + 0$; imperocchè, se ciò avesse luogo, si sarebbe nel caso or ora contemplato, contrariamente all'ipotesi. Così, se considero la funzione $x \operatorname{sen} \frac{1}{x} + (x - \alpha) \operatorname{sen} \frac{1}{x - \alpha}$, gli è chiaro che potrò partire da un punto intermedio ad α ed all'origine delle coordinate e muovermi verso quest'ultimo, sempre segnando i tratti non comuni alla retta $y = 0$ ed alla $f(x)$, ed in tal guisa mi potrò approssimare indefinitamente al punto $x = 0$, laddove io non potrei partire da α. Tiro ora le due rette $y = D + \varepsilon$ ed $y = D - \sigma$, essendo $0 < \varepsilon < \varphi(a+0) - D$, $0 < \sigma < D - \psi(a+0)$, e mi propongo, muovendomi da $a + \eta$ verso $a + 0$, di segnare quei tratti non comuni alle due linee $y = D$, $y = f(x)$, cui corrispondono limiti superiori più grandi che $D + \varepsilon$ ed inferiori più piccoli che $D - \sigma$; gli è chiaro che io potrò tendere in tal guisa al punto $a + 0$. Infatti, i tratticelli in discorso sono tutti assegnabili, poichè, se una funzione continua pel valor particolare c assume un valore diverso da zero pel medesimo, potrò sempre segnare intorno a c due tratti, pei quali essa non giace sull'asse delle X; d'altra parte il numero di codesti tratticelli è illimitato. Un esempio schiarirà le cose ora dette: divido il segmento $a+0\ a+\eta$ nel solito modo e sieno $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ codesti punti di divisione; definisco quindi una funzione come segue: tra $\beta_1\beta_2, \beta_4\beta_5, \beta_7\beta_8, \ldots$ essa giaccia superiormente all'asse delle X, si annulli ai limiti, del resto si comporti comunque purchè continua, ed abbia il limite superiore dei suoi valori corrispondente a ciascuno dei tratti anzidetti sovra un arco di circolo descritto con raggio arbitrario A intorno ad a come centro; nei tratti successivi ai precedenti si comporti nello stesso modo, giaccia però sotto alla retta $y=0$. Veniamo ora agli altri intervalli, dimezzo $\beta_3\beta_4$ in γ_1; quindi $\beta_3\gamma_1$ in γ_2, $\gamma_1\beta_4$ in γ'_2; poi $\gamma_2\gamma_1$, $\gamma_1\gamma'_2$ in γ_3, γ'_3 rispettivamente; e così procedo senza limite. La $f(x)$ sia costante ed eguale a zero negli intervalli $\beta_3\gamma_2$, $\gamma'_2\beta_4$; $\gamma_3\gamma_4$, $\gamma'_4\gamma'_3$; e così via; nei tratti restanti non giaccia sull'asse delle X e sia continua inclusi i limiti, pei quali si annulli; analogamente la definisco nei segmenti $\beta_6\beta_7$, $\beta_9\beta_{10}, \ldots$ Ed ecco costruita una funzione per la quale

$$\phi(a+0)=A,\quad \psi(a+0)=-A,$$

e che gode della proprietà che, se ci moviamo dal punto $a+\eta_1\,(\eta_1 \leqq \eta)$ verso $a+0$ raccogliendo quei tratti della retta $y=0$, che non sono comuni alla $f(x)$, non si tende mai ad esso punto, ma sempre ad uno dei punti di mezzo dei segmenti $\beta_3\beta_4$, $\beta_6\beta_7$, $\beta_9\beta_{10}, \ldots$, ben si intende però che il punto di partenza non dee coincidere con uno dei medesimi.

Poniamo ora che la $f(x)$ non resti finita per $a+0$, cioè che amendue o uno soltanto dei simboli $\phi(a+\eta)$, $\psi(a+\eta)$ non abbia significato. Da ciò consegue tosto una prima divisione dei rami infiniti delle funzioni, ad es.

$$\frac{1}{x-a}\operatorname{sen}\frac{1}{x-a},\quad \frac{1}{x-a}\operatorname{sen}^2\frac{1}{x-a},$$

per la prima delle quali nessuno dei due simboli precedenti ha significato, per l'altra solo il secondo. Le funzioni poi che nell'intervallo $a+0\ a+\eta$ ammettono un limite superiore od inferiore, si ponno dividere in due classi, a seconda che codesto limite all'indefinito diminuire di η tende ad una posizione, oppure va all'infinito, come $\frac{1}{x-a}\operatorname{sen}^2\frac{1}{x-a}-(x-a)$ ed $\frac{1}{x}\cdot$ Queste ultime poi, per le quali i due segni $\phi(a+0)$, $\psi(a+0)$ sono scevri da significato, laddove, comunque piccola sia la grandezza η, una delle due espressioni $\phi(a+\eta)$, $\psi(a+\eta)$ ha valore, si ponno suddividere in due classi, a seconda che ad immediata distanza di $a+0$ hanno un numero limitato o illimitato di massimi e minimi, ad es. $\frac{1}{x-a}+\operatorname{sen}\frac{1}{x-a}$, $\frac{1}{x-a}+\operatorname{sen}\frac{1}{(x-a)^2}$, delle quali la prima presso ad $a+0$ soddisfa all'una, l'altra alla seconda delle precedenti condizioni; infatti le due derivate sono

$$\frac{-1}{(x-a)^2}\left(1+\cos\frac{1}{x-a}\right),\quad \frac{-1}{(x-a)^2}\left(1+\frac{2}{x-a}\cos\frac{1}{(x-a)^2}\right).$$

Le funzioni che vanno all'infinito dotate di un numero limitato di massimi e minimi si ponno distinguere in funzioni, che sono sempre crescenti o decrescenti, ed in quelle, che non sono sempre tali, ma di tanto in tanto mantengono un valore costante. Le funzioni per le quali i due simboli $\phi(a+\eta)$, $\psi(a+\eta)$ non hanno significato, come pure quelle che ammettono una retta limite soltanto $y=\phi(a+0)$ oppure $y=\psi(a+0)$, la quale rispetto alla retta $y=0$ sia dalla parte opposta a quella nella quale la $f(x)$ va all'infinito, hanno un numero illimitato di elementi a comune con l'asse delle X. Anche ora giova distinguere due casi, codesti elementi, almeno nelle estreme vicinanze di $a+0$, sono isolati, oppure non lo sono. Stando la prima ipotesi, se mi muovo verso il punto $a+0$ segnando tutti i tratticelli pei quali la $f(x)$ non ha punti comuni con la retta $y=0$ io convergo manifestamente al medesimo. Ed è chiaro altresì come in codesto caso vi sia un numero illimitato di tratti pei quali la $f(x)$ giace superiormente ed un altro pure illimitato pei quali sta inferiormente all'asse delle X. Supposto che gli elementi comuni alla $f(x)$ ed alla retta $y=0$ non sieno isolati tiro le linee $y=\varepsilon$, $=-\varepsilon$, ε essendo minore in valore assoluto di quella delle due grandezze $\phi(a+0)$, $\psi(a+0)$, che per avventura potrebbe esistere, considero quindi soltanto quei segmenti dell'asse delle X, pei quali la $f(x)$ ha uno dei suoi valori limiti maggiore di ε, astrazion fatta dal segno, ed in tal guisa sarò condotto al caso or ora contemplato. È manifesto altresì che, se la $f(x)$ va all'infinito per modo che i due simboli $\phi(a+\eta)$, $\psi(a+\eta)$ sieno scevri da significato, una retta qualsiasi parallela all'altra $y=0$ avrà con essa a comune un numero illimitato di elementi; se all'incontro la data funzione è tale che uno dei due segni $\phi(a+0)$, $\psi(a+0)$ rappresenti una grandezza, la parallela dovrà tirarsi al disotto dell'altra $y=\phi(a+0)$ o al disopra della $y=\psi(a+0)$.

II.

Esame dei casi in cui l'integrale $\int_\varepsilon f(x)\,dx$, $f(x)$ essendo una funzione continua tra $+0$ ed η, converge all'annullarsi di ε.

Se si indica con $f_1(x)$ una funzione continua tra $+0$ ed η, la quale per $x=+0$ diviene infinita però sempre crescendo, e si dinota con $f(x)$ una funzione pure continua in esso intervallo; si dirà che la $f(x)$ va all'infinito come la $f_1(x)$ per $x=+0$, se il rapporto

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}=\theta_1(x)$$

non diviene nè zero nè infinito, mentre x si annulla. Codesto rapporto potrà adunque tendere verso un limite, oppure oscillare tra due grandezze quali si sieno. Così p. e. la funzione $e^{\frac{1}{x}}\cdot\omega(x)+\frac{1}{x^m}\omega_1(x)$ diviene infinita come $e^{\frac{1}{x}}$, $\omega(x)$ ed $\omega_1(x)$ essendo due funzioni che per $x=+0$ non vanno all'infinito, e delle quali la prima non converge a zero. Ora, gli è degno di nota come, data una funzione $f(x)$, la quale è continua e per $x=+0$ va all'infinito, esista sempre un numero illimitato di funzioni $f_1(x)$, che per $x=+0$ aumentano sempre, sono continue, e fanno sì che il rapporto

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}$$

soddisfaccia alle condizioni anzidette. Suppongo in prima che la $f(x)$ ammetta nel tratto $+0\eta$ una retta limite; considero quindi il caso che ciò non abbia luogo. Stando la prima ipotesi, divido in un numero illimitato di parti, secondo una legge qualsivoglia, l'intervallo $+0\eta$ per modo che i punti di divisione di più in più si costipino ad $x=+0$. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,\ldots$ $(\alpha_1=\eta)$ le ascisse dei medesimi: nel segmento $\alpha_1\alpha_2$ ed agli estremi la $f(x)$ è continua, raggiungerà quindi i suoi valori limiti A_1, B_1; altrettanto dicasi circa il tratto $\alpha_2\alpha_3$; e così di seguito indefinitamente. Consideriamo ora le due serie di grandezze

$$A_1,\quad A_2,\quad A_3,\ldots,$$
$$B_1,\quad B_2,\quad B_3,\ldots.$$

Gli è chiaro che il limite superiore A dei valori A_1, A_2,..., se pur esiste, la qual cosa ha luogo ogni qualvolta il simbolo $\phi(\eta)$ ha significato, e soltanto in questa ipotesi, è precisamente il limite superiore dei valori assunti dalla $f(x)$ nell'intervallo $+0\eta$. Ed invero, in tale ipotesi la $f(x)$ non va all'infinito nel verso positivo dell'asse delle Y; d'altra parte, il suo limite superiore tra $+0$ ed η non può essere maggiore di A, in quanto, se ciò avesse luogo, io potrei assegnare dei punti sulla retta $y=0$, nei quali le ordinate sarebbero più grandi che A; adunque almeno in un intervallo $\alpha_s\alpha_{s+1}$ il limite superiore A_s sarebbe più grande che A, il che manifestamente non può essere; ma neppure può aversi $\phi(\eta)<A$, quindi sarà $\phi(\eta)=A$. Si ha altresì che il limite B dei limiti inferiori, se pur esiste, il che avrà luogo ogniqualvolta il simbolo $\psi(\eta)$ ha significato, è il limite inferiore dei valori della funzione tra $+0$ ed η. Adunque i termini di una almeno delle due serie precedenti devono crescere in valore assoluto indefinitamente, se si ammette che la $f(x)$ per $x=+0$ va all'infinito. Poniamo, per fissare le idee, che la quantità A_s al crescere indefinito di s vada all'infinito oscillando o no al disopra dell'asse delle X, senza fare alcuna ipotesi circa al modo di comportarsi della B_s per s infinito, mentre il simbolo $\psi(\eta)$ ha significato. Nell'intervallo $\alpha_1\alpha_2$, i limiti compresi, la funzione proposta può raggiungere una o più volte il suo limite superiore; nel primo caso sia a_1 l'ascissa dell'unico punto pel quale lo consegue, nel secondo quella del primo pel quale lo raggiunge andando verso α_2; si determini a_2 nello stesso modo relativamente all'intervallo $\alpha_2\alpha_3$ e così via, e di codesti punti non più di due per volta potranno coincidere. In tal guisa si segna sulla retta $y=0$ un numero illimitato di punti che si costipano all'origine delle coordinate. Sia ora a_r il primo punto della serie or ora segnata dopo a_1, pel quale la ordinata è superiore a quella di quest'ultimo, ed il punto a_t abbia la stessa proprietà rispetto ad a_r, in tal guisa si otterrà una novella serie di punti e manifestamente illimitata. Ammettendo ora come evidente che esista un numero senza fine di funzioni $\omega(x)$, le quali per $x=a$ e così pure per $x=b$ assumono un determinato valore, essendo $b<a$ e $\omega(b)>\omega(a)$, crescono sempre tra a e b e sono continue inclusi i limiti, ne consegue che il teorema è dimostrato, ogniqualvolta la data funzione ammetta una retta limite nell'intervallo $+0\eta$. Imperocchè io costruirò in prima una funzione che per $x=a_1$, $=a_r$ assuma i valori $f(a_1)$, $f(a_r)$ rispettivamente, ed in codesto intervallo cresca sempre ed in guisa che la $f(x)$ sia tra a_1 ed a_r inferiore alla medesima; nello stesso modo opererò nel tratto a_ra_t; e così di seguito indefinitamente; codesti rami della

$f_1(x)$ potranno succedersi secondo infinite leggi. È chiaro che, se la retta limite inferiore dei valori assunti dalla $f(x)$ nell'intervallo $+0+\eta$ tende ad una posizione determinata all'annullarsi di η, il rapporto della $f(x)$ e della funzione or ora costruita oscillerà tra lo zero e l'unità positiva. Se poi per $\eta=+0$ la retta limite inferiore andasse all'infinito, il quoto $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ potrebbe tendere verso un limite che sarebbe l'unità, oppure oscillare tra le due rette $y=1$, $=c$ essendo $1>c\geq 0$. Supponiamo ora che la $f(x)$ vada all'infinito per modo che nessuno dei due simboli $\phi(\eta)$, $\psi(\eta)$ abbia significato. Stando le cose in questi termini, ribalto la parte di piano sottoposta all'asse delle X intorno al medesimo come a cerniera, in sino a che venga a combaciare con la parte superiore; in allora otterrò una nuova funzione $f_{11}(x)$ che sarà altresì continua; costruisco quindi come precedentemente la $f_1(x)$: in tale ipotesi il quoto $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ non potrà al certo convergere verso l'unità positiva o negativa; oscillerà adunque fra due rette limiti, delle quali una al certo ha per equazione $y=1$, o $=-1$, mentre l'altra, se non si confonde con l'asse delle X, sarà in valore assoluto discosta dal medesimo al massimo dell'unità; la qual cosa avverebbe p. e. quando nella serie illimitata a_1, a_r, a_t,... vi fosse un numero senza fine di punti, pei quali le ordinate sono negative e positive.

Dimostrato come, data una funzione $f(x)$ continua tra $+0$ ed η, la quale diviene più grande di qualsivoglia quantità assegnabile per $x=+0$, esista un numero infinito di funzioni $f_1(x)$ pure continue tra $+0$ ed η sempre crescenti, e le quali fanno sì che il quoto $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ non vada nè a zero nè all'infinito, studiamo il modo di comportarsi dell'integrale

$$\int_\varepsilon^a f(x)\,dx \qquad 0<a<\eta$$

per $\varepsilon=+0$. L'integrale precedente rappresentando una funzione continua tra $+0$ ed η, gli è chiaro che all'annullarsi del limite inferiore potranno presentarsi tutte le singolarità di una tale funzione, quando ci si avvicini indefinitamente ad uno dei valori limiti. Ma, senza impegnarci nello studio dei casi, nei quali si presenti una singolarità piuttosto che un'altra, vediamo, il che è quanto principalmente importa sapere, quando è che l'integrale precedente converga. Sia $f_1(x)$ una tra le infinite funzioni sempre crescenti e per le quali il quoto $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ si mantiene finito, e vediamo, possibilmente, di far dipendere le condizioni di integrabilità della $f(x)$ da quelle della funzione più semplice $f_1(x)$. Per tanto, gli è facile il vedere che, se la $\theta_1(x)$ tende ad un limite per $x = +0$, oppure oscilla fra due rette amendue diverse dall'asse delle X e site dalla stessa parte del medesimo, la condizione necessaria e sufficiente affinchè la $f(x)$ sia integrabile si è che lo sia la $f_1(x)$. Infatti, potendosi porre in questi due casi $\pm f(x) > c f_1(x)$ $(c > 0)$, ne consegue la necessità che sia soddisfatta la condizione testè detta; che essa sia sufficiente risulta manifesto osservando che l'annullarsi dell'integrale

$$\int_{+0}^{\mu} f_1(x)\,dx$$

per $\mu = +0$ porti come conseguenza che anche l'espressione

$$A\int_{+0}^{\mu} f_1(x)\,dx$$

converga a zero quale si sia la costante A, e di più come si possa sempre scegliere A per modo che

$$A \cdot f_1(x) \geq \pm\,\theta_1(x) f_1(x).$$

Così p. e. convergono gli integrali delle funzioni

$$\frac{1}{x^\mu} + \lambda(x), \quad \left(\frac{1}{x^\mu} + \lambda(x)\right)\left(\operatorname{sen}\frac{1}{x} + 2\right), \qquad \mu < 1,$$

$$\lim_{x=0} x^\mu \lambda(x) = 0$$

$$\frac{1}{x \log\frac{1}{x} \cdots \left(\log^n \frac{1}{x}\right)^\alpha} + \lambda(x), \qquad \alpha > 1,$$

$$\left(\frac{1}{x \log\frac{1}{x} \cdots \left(\log^n \frac{1}{x}\right)^\alpha} + \lambda(x)\right)\left(\cos\frac{1}{x} + 2\right),$$

poichè

$$\frac{d}{dx}\frac{x^{1-\mu}}{1-\mu} = \frac{1}{x^\mu}, \quad \frac{d}{dx}\left(\log^n \frac{1}{x}\right)^{1-\alpha} = -(1-\alpha)\frac{1}{x\log\frac{1}{x} \cdots \left(\log^n \frac{1}{x}\right)^\alpha}.$$

Se la funzione $\theta_1(x)$ oscillasse tra due rette poste da parte diversa dell'asse delle X, o se una delle medesime si confondesse con esso, l'integrale $\int_\varepsilon f_1(x)\,dx$ convergendo, si potrebbe asserire l'egual cosa dell'altro $\int_\varepsilon f(x)\,dx$.

Gli è però degno di nota, come nei due casi or ora accennati l'integrale $\int_\varepsilon f_1(x)\,dx$ possa divergere mentre l'altro converge, ad es. $f_1(x)=\frac{1}{x}$, $f(x)=\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$, poichè si ha $D_x\left(x\cos\frac{1}{x}\right)=\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$. Si può anzi dimostrare come, data una funzione $f_1(x)$ continua tra $+0$ ed η, la quale va all'infinito sempre crescendo, in guisa che il suo integrale divenga più grande di qualsivoglia quantità assegnabile per $\varepsilon=+0$, esista un numero illimitato di funzioni che vanno all'infinito come la $f_1(x)$, e per modo che il loro integrale converga all'annullarsi del limite inferiore.

Rappresento nel solito modo la $f_1(x)$ e divido secondo una legge qualsivoglia il segmento η, aderente all'origine delle coordinate, in un numero illimitato di parti in guisa che i punti di divisione si vadano costipando soltanto al punto $x=+0$. Così p. e. potrei dimezzare il segmento 0η in α_2, quindi $0\alpha_2$ in α_3, e così via. Ammetto ora come assioma il lemma: dati due punti $a\,b$ sulla retta $y=0$ ed una quantità qualsivoglia A, esiste un numero illimitato di funzioni continue tra a e b ed ai limiti, tutte positive, le quali per $x=a$, $=b$ si annullano, raggiungono nel detto intervallo un numero arbitrario di volte il valore A, e rendono l'integrale $\int_a^b$ eguale o minore di una quantità qualunque μ. Ciò posto, sia

$$\sum_1 u_n$$

una serie convergente ed a termini positivi: costruisco tra $\alpha_1\alpha_2$ una funzione continua $\omega_1(x)$, la quale si annulli per codesti valori ed abbia la retta limite superiore distante dall'asse delle X di una lunghezza, che chiameremo A_1, eguale ad una delle ordinate della funzione $f(x)$ nell'intervallo $\alpha_1\alpha_2$, e di più soddisfaccia alla condizione

$$\int_{\alpha_2}^{\alpha_1}\omega_1(x)\,dx \gtreqless u_1;$$

analogamente costruisco una funzione $\omega_2(x)$ nell'intervallo $\alpha_2\alpha_3$ e tale che si abbia

$$\int_{\alpha_3}^{\alpha_2} \omega_2(x)\,dx \overline{<} u_2;$$

e così di seguito. Non si potrebbe soddisfare alla condizione

$$\int_{\alpha_{t+1}}^{\alpha_t} \omega_t(x)\,dx = u_t,$$

se il rettangolo di dimensioni $\alpha_t\alpha_{t+1}$, A_t fosse minore di u_t, però all'altra

$$\int_{\alpha_{t+1}}^{\alpha_t} \omega_t(x)\,dx < u_t,$$

sempre. Le funzioni $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$,..., le quali si connettono con continuità, si potranno succedere secondo infinite leggi.

Con ragionamento facile ad eseguirsi si potrebbe dimostrare la esistenza di infinite funzioni $f(x)$, le quali oscillano tra meno e più infinito, sono integrabili sino $x = +0$, e diventano infinite come una funzione non integrabile $f_1(x)$.

Ponendo mente come si abbia

$$(x - \alpha_s)(x - \alpha_{s+1}) = x^2 - (\alpha_s + \alpha_{s+1})x + \alpha_s \cdot \alpha_{s+1},$$

$$\int_{\alpha_{s+1}}^{\alpha_s} [x^2 - (\alpha_s + \alpha_{s+1})x + \alpha_s \cdot \alpha_{s+1}]\,dx = \frac{\alpha^3_s - \alpha^3_{s+1}}{3} - (\alpha_s + \alpha_{s+1})\frac{\alpha^2_s - \alpha^2_{s+1}}{2} + \alpha_s \cdot \alpha_{s+1}(\alpha_s - \alpha_{s+1}),$$

si potrà supporre definita una funzione nell'intervallo generico $\alpha_s\alpha_{s+1}$ dalla espressione analitica

$$(-1)^s u_s \frac{(x-\alpha_s)(x-\alpha_{s+1})}{\frac{\alpha^2_s - \alpha^3_{s+1}}{3} - (\alpha_s + \alpha_{s+1})\frac{\alpha^2_s - \alpha^2_{s+1}}{2} - \alpha_s \cdot \alpha_{s+1}(\alpha_s - \alpha_{s+1})},$$

essendo la serie

$$\sum_1 {}_s (-1)^{s-1} u_s$$

convergente, mentre ciascuna delle altre due

$$\sum_1 u_{2s-1}, \quad \sum_1 u_{2s}$$

diverge.

Circa alle cose testè dette Riemann osserva quanto segue nella memoria già più volte citata (p. 23):

« Hat aber die Function $f(x)$ unendlich viele Maxima und Minima, so lässt sich über die Ordnung ihres Unendlichwerdens nichts bestimmen. In der That nehmen wir an, die Function sei ihrem absoluten Werthe nach, vovon die Ordnung des Unendlichwerdens allein abhängt, gegeben, so wird man immer durch geeignete Bestimmung des Zeichens bewirken können, dass das Integral $\int f(x)\,dx$ bei unendlichem Abnehmen der unteren Grenze convergire ».

Fra le funzioni che vanno all'infinito per modo che amendue i simboli $\phi(\eta)$, $\psi(\eta)$ non abbiano significato, è bene il fare una distinzione, che è la seguente: la $f(x)$ è integrabile anche quando la si prenda sempre con lo stesso segno, oppure codesta condizione non è soddisfatta. La funzione che si ottiene pigliando la $f(x)$ nel modo testè indicato è altresì continua; la indicheremo con $f_{11}(x)$.

Ora, se la $f_{11}(x)$ è integrabile per $x=+0$, gli è chiaro che l'integrale

$$\int_\varepsilon f(x)\,\omega(x)\,dx$$

convergerà all'annullarsi di ε, $\omega(x)$, essendo una funzione continua che per $x=+0$ si mantiene finita; la qualcosa potrà però non aver luogo, se la $f_{11}(x)$ non è integrabile.

A chiarire la cosa valgono i seguenti esempi: divido nel modo già più volte indicato il segmento $+0\eta$, definisco quindi una funzione continua come segue: nei tratti $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_4\alpha_5$, $\alpha_6\alpha_7$,... essa assuma un valore nullo, laddove tra $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_5\alpha_6$,... sia positiva e gli integrali relativi a codesti segmenti abbiano rispettivamente i valori 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$,..., negli altri segmenti sia negativa e le quantità

$$\int_{\alpha_4}^{\alpha_3}, \quad \int_{\alpha_8}^{\alpha_7}, \ldots$$

sieno ordinatamente eguali a $-\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{6}$,.... In tale ipotesi, rammentando come le due serie

$$\sum_1^n \frac{1}{2n-1}, \quad \frac{1}{2}\sum_1^n \frac{1}{n}$$

divergano, i due simboli $\phi(\eta)$, $\psi(\eta)$ non hanno al certo significato, mentre l'integrale

$$\int_\varepsilon f(x)\,dx$$

tende ad un limite per $\varepsilon = +0$, poichè la serie $\sum_1 (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ rappresenta una grandezza.

Costruisco ora una funzione $\omega(x)$, che per $x=+0$ resti finita, nel modo che segue: negli intervalli $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_5\alpha_6, \ldots$ essa assuma il valore uno, negli altri $\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_7\alpha_8, \ldots$ sia negativa ed in valore assoluto pure eguale ad uno, del resto continua; in tale ipotesi l'integrale

$$\int_\varepsilon f(x)\,\omega(x)\,dx$$

per $\varepsilon = +0$ si comporta come la serie $\sum_1^n \frac{1}{n}$ per n infinito, cioè diverge. Se all'incontro la $\omega(x)$ fosse eguale a $+1$ nei tratti in cui la $f(x)$ è diversa da zero, negli altri invece raggiungesse valori negativi e fosse continua, l'integral precedente tenderebbe ad un limite per $\varepsilon = +0$.

Poniamo ora che, essendo $\omega(+0)=0$, la $\omega(x)$ sia eguale ad 1, $\frac{1}{\log 3}$, $\frac{1}{\log 5}, \ldots$ rispettivamente negli intervalli $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_5\alpha_6$, $\alpha_9\alpha_{10}, \ldots$, negli altri $\alpha_3\alpha_4$, $\alpha_7\alpha_8$, $\alpha_{11}\alpha_{12}, \ldots$ eguale a zero, del resto continua; in allora l'integrale

$$\int_\varepsilon f(x)\,\omega(x)\,dx$$

divergerà all'indefinito diminuire del limite inferiore, poichè la serie

$$\sum_1^n \frac{1}{(2n+1)\log(2n+1)}$$

va con n all'infinito.

Ma senza trattenerci più a lungo sovra codesto argomento, il quale non è già quello che ci proponemmo di trattare in questa nota, dimostriamo il seguente teorema, che ci servirà in appresso:

Se $\lambda(x)$ e $\theta(x)$ sono due funzioni continue tra $+0$ ed η, dotate di derivate prime pure continue nello stesso intervallo, e se il simbolo $\lambda(x)\cdot\theta(x)$ tende per $x=+0$ ad un limite, gli integrali

$$\int_\varepsilon \lambda(x)\,\theta'(x)\,dx, \quad \int_\varepsilon \lambda'(x)\,\theta(x)\,dx$$

convergeranno o divergeranno insieme per $\varepsilon = +0$.

Infatti si ha

$$\int_{\varepsilon} \lambda'(x)\,\theta(x)\,dx = [\lambda(x)\cdot\theta(x)]_{\varepsilon} - \int_{\varepsilon} \lambda(x)\,\theta'(x)\,dx.$$

Se quindi le due funzioni $\lambda(x)$, $\theta(x)$ tendono per $x=+0$ ad un limite e la $\theta'(x)$ resta finita, oppure, se va all'infinito, ci va per modo che l'integrale relativo alla medesima, quando la si pigli con lo stesso segno, abbia pur sempre significato per $\varepsilon=+0$, il simbolo

$$\int_{+0} \lambda'(x)\,\theta(x)\,dx$$

rappresenterà una grandezza.

III.

Lemma: Se una funzione $f(x)$ periodica secondo 2π, continua tranne che per un numero determinato di punti nel segmento 02π, e di cui gli integrali

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon} + \int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\varphi_\sigma(\eta)}\right) f(x)\,dx, \quad \left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon} + \int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\varphi_\sigma(\eta)}\right) f(x)\,(x_\sigma - x)\,dx$$

convergono all'indefinito diminuire di ε, $\varphi_\sigma(\varepsilon)$ essendo una funzione continua insieme alla sua derivata prima, che per $\varepsilon=+0$ si annulla sempre decrescendo e per modo che il quoto $\frac{\varphi_\sigma(\varepsilon)}{\varepsilon}$ non abbia infiniti massimi e minimi, ed x_σ un punto, pel quale la $f(x)$ non sia integrabile, è esprimibile, senza escludere una eccezione per un sistema ν volte infinito di punti, per serie della forma

$$\sum_{0} (a_n \operatorname{sen} n\alpha + b_n \cos n\alpha),$$

e se

$$\lim_{\alpha=+0} \frac{1}{\alpha} \int_{+0}^{\alpha} \left[\lim_{\varepsilon=+0} \left(\int_{x_\sigma-\alpha}^{x_\sigma-\varepsilon} + \int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\alpha}\right) f(x)\,dx\right] d\alpha = 0,$$

si avrà

$$b_0=\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon=0}\sum_\sigma\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_{\sigma+1}-\varepsilon}f(x)\,dx,$$

$$a_n\operatorname{sen}na+b_n\cos na=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon=0}\sum_\sigma\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_{\sigma+1}-\varepsilon}f(x)\cos n(x-a)\,dx.$$

La $f(x)$ essendo per ipotesi continua ad eccezione di un numero limitato di punti nel segmento $0\,2\pi$, lo si potrà dividere in un numero finito di parti, comprese tra $x_0(=0)x_1$, $x_1x_2,\ldots\, x_{\tau-1}x_\tau(=2\pi)$, entro ciascuna delle quali la funzione è continua: avvicinandoci poi ad uno dei valori critici della medesima, la stessa potrà comportarsi nei modi già studiati. Nei punti x_0, $x_1,\ldots$ la data funzione potrebbe cessare di esser tale, come $\frac{1}{x-x_0}$, $\operatorname{sen}\frac{1}{x-x_1},\ldots$, oppure avere un valore, ad es. $\psi(x)=\sum_0\frac{\operatorname{sen}nx}{n}$, che per $x=0$ si annulla, mentre $\psi(+0)=\frac{\pi}{2}$, $\psi(-0)=-\frac{\pi}{2}$. Giova altresì l'osservare come il modo di comportarsi della $f(x)$ per $x=x_\sigma-0$ sia del tutto indipendente da quello che corrisponde ad $x_\sigma+0$.

Le condizioni relative agli integrali limitano manifestamente i modi di andare all'infinito della $f(x)$. Esaminiamo un po' da vicino codeste condizioni, e nel fare ciò faremo astrazione dal potersi o no esprimere le funzioni considerate per serie trigonometrica.

Affinchè l'espressione

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\varphi_\sigma(\eta)}\right)f(x)\,dx,$$

non ponendo mente per un momento agli altri integrali, converga per $\varepsilon=+0$, non è già necessario che ciascuno degli integrali, nei quali può decomporsi, abbia a tendere ad un limite; anzi da una parte di x_σ la $f(x)$ si potrebbe comportare comunque, così p. e. si potrebbe avere nelle estreme vicinanze di $x_\sigma-0$

$$f(x_\sigma-x)=\frac{1}{(x_\sigma-x)^n}+\theta(x_\sigma-x),\quad n>1,$$

l'integrale

$$\int^{x_\sigma-\varepsilon}\theta(x)\,dx$$

convergendo; se si suppone poi la $\phi_\sigma(\varepsilon)$ data con una derivata non annullantesi a destra delle origini delle coordinate, si potrebbe porre

$$f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)]\,\phi'_\sigma(x) = -\frac{1}{x^n},$$

poichè si avrebbe

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon} + \int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\varphi_\sigma(\eta)}\right) f(x)\,dx =$$

$$\int_\varepsilon^\eta \{ f(x_\sigma - x) + f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)]\,\phi'_\sigma(x)\}\,dx = \int_\varepsilon^\eta \theta(x_\sigma - x)\,dx.$$

Nell'esempio precedente si suppose che la $\phi'_\sigma(x)$ non si annulli a destra del punto $x=0$, poichè se ciò avesse luogo nell'intervallo $+0\eta$, quale si fosse η, non al certo però lungo tratticelli, in quanto la $\phi_\sigma(x)$ decresce sempre per $x=+0$, la $f(x)$, essendo per ipotesi

$$f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)] = -\frac{1}{x^n\,\varphi'_6(x)},$$

non sarebbe continua tra $x_\sigma + 0$ ed $x_\sigma + \eta$.

Il convergere poi dell'integrale

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon} + \int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\varphi_\sigma(\eta)}\right) f(x)\,(x_\sigma - x)\,dx =$$

$$\int_\varepsilon^\eta \{ f(x_\sigma - x)\,x - f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)]\,\phi_\sigma(x)\,\phi'_\sigma(x)\}\,dx$$

non è una necessaria conseguenza del convergere dell'integral precedente; così, se consideriamo l'esempio di prima, si vede che ogni qualvolta $n \geq 2$ l'ultimo integrale va all'infinito, poichè il simbolo

$$\int_\varepsilon^\eta x \cdot \theta(x_\sigma - x)\,dx$$

serba significato per $\varepsilon = +0$, mentre l'integrale

$$\int_\varepsilon^\eta \frac{1}{x^n}[x + \phi_\sigma(x)]\,dx = \int_\varepsilon^\eta \frac{1}{x^{n-1}}\left(1 + \frac{\varphi_\sigma(x)}{x}\right)dx = \int_\varepsilon^\eta \frac{1}{x^n \dfrac{1}{\varphi_\sigma(x)}}\left(\frac{x}{\varphi_\sigma(x)} + 1\right)dx$$

diverge; se però n fosse minore di due e se il quoto $\dfrac{\varphi_\sigma(x)}{x}$ non andasse all'infinito per $x = +0$, oppure se ciò avesse luogo e se l'integrale

$$\int_{\varepsilon} \frac{1}{x^n \frac{1}{\varphi_\sigma(x)}} dx$$

tendesse ad un limite per $\varepsilon = +0$, convergerebbe altresì l'espressione

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{1}{x^n} [x + \varphi_\sigma(x)] \, dx.$$

Così p. e. non si potrebbe avere

$$n = \tfrac{9}{5}, \quad \varphi_\sigma(x) = x^{\frac{4}{5}} \cdot \left(\log \frac{1}{x}\right)^{-1},$$

perchè il simbolo

$$\int_{+0} \frac{1}{x \log \frac{1}{x}} = -\left[\log^2 \frac{1}{x}\right]_{+0}$$

non ha significato, ma bensì

$$n = \tfrac{9}{5}, \quad \varphi_\sigma(x) = x^{\frac{4}{5}} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{-2},$$

imperocchè

$$\frac{d}{dx}\left(\log \frac{1}{x}\right)^{-1} = \frac{1}{x\left(\log \frac{1}{x}\right)^2}.$$

Reciprocamente, il convergere del secondo degli integrali precedenti non porta come necessaria conseguenza che anche il primo tenda ad un limite per $\varepsilon = +0$. Così p. e. se

$$f[x_\sigma + \varphi_\sigma(x)] \, \varphi'_\sigma(x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \operatorname{sen} e^{\frac{1}{x}},$$

$$f(x_\sigma - x) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \operatorname{sen} e^{\frac{1}{x}},$$

stando sempre fissa l'ipotesi che la $\varphi_\sigma(x)$ sia già assegnata e che la sua derivata prima non si annulli in prossimità al punto $x = +0$, l'integrale

$$\left(\int_{x_\sigma - \eta}^{x_\sigma - \varepsilon} + \int_{x_\sigma + \varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma + \varphi_\sigma(\eta)}\right) f(x) \, (x_\sigma - x) \, dx$$

convergerebbe, ogni qualvolta non si abbia $\lim\limits_{x=+0} \frac{\varphi_\sigma(x)}{x} = \infty$, imperocchè esso è eguale a

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \operatorname{sen} e^{\frac{1}{x}} [x - \phi_\sigma(x)]\, dx = \int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \operatorname{sen} e^{\frac{1}{x}} \left(1 - \frac{\varphi_\sigma(x)}{x}\right) dx,$$

e la funzione $\frac{\varphi_\sigma(x)}{x}$ essendo scevra per ipotesi da infiniti massimi e minimi, la sua derivata prima, che esiste per dato, è sempre dello stesso segno, e d'altra parte si ha

$$D_x(x \cos e^{\frac{1}{x}}) = \cos e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} \operatorname{sen} e^{\frac{1}{x}}.$$

L'integrale

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon} + \int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\varphi_\sigma(\eta)}\right) f(x)\, dx = \int_{\varepsilon}^{\eta} \{f(x_\sigma - x) + f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)]\, \phi'_\sigma(x)\}\, dx$$

$$= 2\int_{\varepsilon}^{\eta} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \operatorname{sen} e^{\frac{1}{x}}\, dx$$

all'incontro diverge, infatti si ha

$$D_x(\cos e^{\frac{1}{x}}) = \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \operatorname{sen} e^{\frac{1}{x}}.$$

Gli è chiaro che la condizione

$$\lim_{\alpha=+0} \frac{1}{\alpha} \int_{+0}^{\alpha} \left[\lim_{\varepsilon=+0}\left(\int_{x_\sigma-\alpha}^{x_\sigma-\varepsilon} + \int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\alpha}\right) f(x)\, dx\right] d\alpha$$

è indipendente dalle due che precedono, ossia, esse ponno essere soddisfatte senza che lo sia quest'ultima. Valga l'esempio che segue: essendo

$$f(x_\sigma - x) = \frac{1}{x}, \quad f(x_\sigma + x) = -\frac{2}{x}, \quad \phi_\sigma(x) = \sqrt{x},$$

i due integrali

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon} + \int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\varphi_\sigma(\eta)}\right) f(x)\, dx = \int_{\varepsilon}^{\eta} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\right) dx = 0,$$

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon} + \int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{y_\sigma+\varphi_\sigma(\eta)}\right) f(x)(x_\sigma - x)\, dx = \int_{\varepsilon}^{\eta} (1 + x^{-\frac{1}{2}})\, dx = [x + 2x^{\frac{1}{2}}]_{\varepsilon}^{\eta}$$

convergerebbero per $\varepsilon = +0$, laddove si avrebbe

$$\left(\int_{x_\sigma-\alpha}^{x_\sigma-\varepsilon} + \int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\alpha}\right) f(x)\,dx = -\log\alpha,$$

e quindi

$$\lim_{\alpha=+0}\frac{1}{\alpha}\left[\int_{+0}^{\alpha}\lim_{\varepsilon=0}\left(\int_{x_\sigma-\alpha}^{x_\sigma-\varepsilon} + \int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\alpha}\right) f(x)\,dx\right]d\alpha = -\frac{1}{\alpha}\int_{+0}^{\alpha}\log\alpha\,d\alpha = +\infty$$

Il dire che la $\phi_\sigma(x)$ non abbia per $x = +0$ infiniti massimi e minimi ed il dire che il quoto $\frac{\varphi_\sigma(x)}{x}$ non ne abbia sono due condizioni distinte; infatti, se si avesse

$$\phi_\sigma(x) = x + x^m \operatorname{sen}\frac{1}{x}, \quad (m > 2),$$

la $\phi_\sigma(x)$ per $x = +0$ non avrebbe al certo infiniti massimi e minimi, poichè

$$\phi'_\sigma(x) = 1 + m x^{m-1}\operatorname{sen}\frac{1}{x} - x^{m-2}\cos\frac{1}{x} > 0$$

per $x = +0$, laddove il quoto

$$\frac{\varphi_\sigma(x)}{x} = 1 + x^{m-1}\operatorname{sen}\frac{1}{x}$$

oscilla continuamente. Se però esso quoto non ha infiniti massimi e minimi, e se tende ad un valore sempre decrescendo, gli è manifesto che anche il suo numeratore sarà scevro da infiniti massimi e minimi per $x = +0$; ma se il medesimo crescesse ognora, la $\phi_\sigma(x)$ potrebbe oscillare di continuo. Ad es.

$$\phi_\sigma(x) = \frac{1}{\log\frac{1}{x}}\left(2 + \operatorname{sen}\log\frac{1}{x}\right), \quad \frac{\varphi_\sigma(x)}{x} = \frac{1}{x\log\frac{1}{x}}\left(2 + \operatorname{sen}\log\frac{1}{x}\right),$$

si avrebbe infatti

$$\phi'_\sigma(x) = \frac{1}{x\log\frac{1}{x}}\left(-\cos\log\frac{1}{x} + \frac{2}{\log\frac{1}{x}} + \frac{\operatorname{sen}\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{x}}\right),$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\varphi_\sigma(x)}{x}\right) = -\frac{1}{x^2\log\frac{1}{x}}\left(2 + \cos\log\frac{1}{x} + \operatorname{sen}\log\frac{1}{x} - \frac{2}{\log\frac{1}{x}} - \frac{\operatorname{sen}\log\frac{1}{x}}{\log\frac{1}{x}}\right)$$

Non trovo inopportuno l'intercalare costì alcune considerazioni di calcolo integrale. Proponiamoci il seguente problema: data una funzione $f(x)$, la quale per $x = x_\sigma$ va all'infinito non essendo integrabile da nessuna delle due parti di detto punto, si può sempre determinare una funzione $\theta_\sigma(x)$ continua tra $+0$ ed η, η essendo una grandezza positiva qualsivoglia, che per $x = +0$ tenda a zero sempre decrescendo e faccia sì che l'integrale

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon} + \int_{x_\sigma+\theta_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\eta}\right) f(x)\,dx$$

converga all'indefinito decrescere di ε? Gli è facile il vedere come codesta funzione non si potrà sempre assegnare; il che avverrebbe p. e. se l'integrale

$$\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon} f(x)\,dx$$

restasse finito oscillando fra due rette limiti, mentre l'altro

$$\int_{x_\sigma+\varepsilon}^{x_\sigma+\eta} f(x)\,dx$$

crescesse al di là di ogni limite; poichè, qualunque si fosse la $\theta_\sigma(x)$, l'espressione

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon} + \int_{x_\sigma+\theta_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\eta}\right) f(x)\,dx$$

diverrebbe più grande di qualsivoglia grandezza assegnabile all'annullarsi di ε. Se però esiste una funzione $\theta_\sigma(\varepsilon)$ che soddisfà alle condizioni volute, gli è chiaro che se ne potrà assegnare un numero illimitato. Infatti, ponendo

$$\psi_\sigma(\varepsilon) = \theta_\sigma(\varepsilon) + \omega_\sigma(\varepsilon),$$

basterà che si abbia

$$\lim_{\varepsilon=+0} \int_{x_\sigma+\theta_\sigma(\varepsilon)+\omega_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\theta_\sigma(\varepsilon)} f(x)\,dx = 0.$$

Supponiamo ora di avere una funzione, la quale per $x_\sigma - 0$ vada all'infinito senza esser integrabile, di più si comporti nel modo seguente: giaccia tutta da una parte dell'asse delle X, non escludendosi con ciò che essa nel segmento $x_\sigma - 0\ x_\sigma - \eta$, quale si sia η, abbia degli elementi (punti o tratticelli) a comune con la retta $y = 0$, oppure oscilli continuamente tra valori positivi e negativi, in guisa però che l'integrale relativo ad una delle parti in cui la funzione è divisa dall'asse delle X converga e quindi, per l'ipotesi fatta, diverga quello relativo all'altra. E per integrale della $f(x)$, corrispondente alla parte di piano superiore o inferiore all'asse delle X, intendiamo quello relativo a quella funzione continua, che si ottiene dalla proposta dando alla medesima nel tratto $x_\sigma - 0\ x_\sigma - \eta$, qualunque sia η, un valore nullo, ove essa è rispettivamente negativa o positiva. La $f(x)$ a destra di x_σ si comporti in modo analogo, avvertendo però, che dee divergere l'integrale per quella parte di piano soltanto rispetto alla quale diverge l'integrale a sinistra di x_σ. Stando le cose in questi termini, si può sempre determinare una funzione continua $\theta_\sigma(x)$, e quindi infinite, sempre decrescente sino allo zero tra $x = +0$ ed $x = \eta$, e tale che l'integrale

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon} + \int_{x_\sigma+\theta_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\eta}\right) f(x)\,dx$$

tenda verso un limite qualsivoglia.

Ed invero, poniamo per fissare le idee che l'integrale $\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon}$ relativo alla parte di piano posta al disopra alla retta $y=0$ vada all'inifinito, e quindi anche l'altro $\int_{x_\sigma+\varepsilon_1}^{x_\sigma+\eta_1}$ relativamente alla stessa parte. In tale ipotesi gli è manifesto che, se la $f(x)$ non ha elementi a comune con quest'ultimo nelle estreme vicinanze di $x_\sigma - 0$, ed in caso contrario se non sono che punti, l'integrale

$$\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon} f(x)\,dx$$

va al di là di ogni limite sempre crescendo. Se all'incontro la $f(x)$, comunque giacente dalla parte positiva dell'asse delle Y, avesse pur sempre nel segmento $x_\sigma - 0\ x_\sigma - \eta$, quale si sia η, a comune con la retta $y=0$ dei tratticelli, l'integral precedente non avrebbe gli è vero infiniti massimi e minimi, ma non andrebbe all'infinito sempre crescendo. Se per ultimo la $f(x)$ per $x_\sigma - 0$ oscillasse di continuo tra valori positivi e negativi, l'integrale precedente andrebbe nelle ipotesi fatte all'infinito insieme alla retta limite inferiore corrispondente all'intervallo $x_\sigma - \eta$, $x_\sigma - 0$ per $\eta = +0$, ma tentennerebbe di continuo.

Per dimostrare il teorema testè enunciato fa di mestieri trasformare la $f(x)$ in un' altra funzione $f_1(x)$ tale, che l'integrale

$$\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon} f_1(x)\,dx$$

vada all'infinito sempre crescendo per $\varepsilon = +0$. A tal fine tiro la retta $y=\mu$, μ essendo una grandezza positiva qualsivoglia; considerando quindi la data funzione nell'intervallo $x_\sigma - 0 \ x_\sigma - \lambda$, essendo $f(x_\sigma - \lambda) = 0$ ed $f(x)$ nelle estreme vicinanze di $x_\sigma - \lambda + 0$ diverso da zero, io potrò convergere al punto $x_\sigma - 0$ segnando tutti quei tratticelli $a_1, a_2, a_3, \ldots$ agli estremi dei quali la $f(x)$ è nulla, ed entro i quali giace del tutto superiormente all'asse delle X ed ha la sua retta limite superiore maggiore di μ; sieno poi $b_1, b_2, b_3, \ldots$ gli altri intervalli tutti assegnabili limitati dai segmenti $a_1 a_2, a_2 a_3, a_3 a_4, \ldots$ Pertanto l'integrale relativo alla $f_{11}(x)$, dedotta dalla $f(x)$ dandole un valore nullo nei tratticelli $a_1, a_2, a_3, \ldots$, converge, e sia A il suo valore. Costruisco ora la funzione continua $f_1(x)$ per modo che nei tratti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ si comporti come la $f(x)$, negli altri $b_1, b_2, b_3, \ldots$ si annulli ai limiti e giaccia sempre superiormente all'asse delle X, sia continua, nè vada all'infinito. In allora l'integrale relativo ad una funzione, la quale nei tratticelli $b_1, b_2, b_3, \ldots$ si comporta come la $f_1(x)$ e sia nulla invece negli altri $a_1, a_2, a_3, \ldots$ converge manifestamente, e sia B il suo valore.

L'integrale

$$\rho = \int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon} f_1(x)\,dx = \theta(\varepsilon),$$

supposto $\eta < \lambda$, va all'infinito sempre crescendo, e si ha altresì

$$\lim_{\varepsilon=+0}\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon} f(x)\,dx - \int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon} f_1(x)\,dx\right) = A - B.$$

Quanto all'altro integrale

$$\int_{x_\sigma+\varepsilon_1}^{x_\sigma+\eta_1} f(x)\,dx,$$

gli è chiaro che, se ε_1 va a zero, ben si intende sempre decrescendo, e se la $f(x)$ nel tratto $x_\sigma + \eta_1 \ x_\sigma + 0$, qualunque sia η_1, non ha elementi a comune con la retta $y=0$, o se ne ha sono punti soltanto, isolati o no poco importa, andrà all'infinito sempre decrescendo; se poi ciò non ha luogo, operando come precedentemente, si potrà sempre costruire una funzione $f_2(x)$ tale, che il simbolo

$$\int_{x_\sigma+\varepsilon_1}^{x_\sigma+\eta_1} f_2(x)\,dx$$

vada all'infinito sempre decrescendo, e si avrà

$$\lim_{\varepsilon_1=0}\left(\int_{x_\sigma+\varepsilon_1}^{x_\sigma+\eta_1} f(x)\,dx - \int_{x_\sigma+\varepsilon_1}^{x_\sigma+\eta_1} f_2(x)\,dx\right) = A_1 - B_1,$$

avendo A_1 e B_1 un significato analogo a quello delle quantità A, B.

L'integrale

$$\rho_1 = \int_{x_\sigma+\varepsilon_1}^{x_\sigma+\eta_1} f_2(x)\,dx = \theta_1(\varepsilon_1)$$

va, come si osservò or ora, all'infinito con continuità e sempre decrescendo. Ponendo mente come una funzione continua tra $x_\sigma+0$ $x_\sigma+\eta_1$, che va all'infinito sempre decrescendo a partire dal valore $\theta_1(\eta_1)=0$ passi per un valore negativo qualsivoglia per un punto compreso tra $x_\sigma+0$ ed $x_\sigma+\eta_1$, e ci passi una volta soltanto, si vede facilmente come si possa porre

$$\varepsilon_1 = \theta_{11}(\rho_1),$$

ε_1 essendo una funzione che tende a zero sempre decrescendo, mentre ρ_1 va all'infinito negativamente e sempre diminuendo; abbiamo quindi

$$\rho_1 = \theta_1(\varepsilon_1) = \theta_1[\theta_{11}(\rho_1)] = \rho_1.$$

Se adunque poniamo

$$\varepsilon_1 = \theta_{11}[-\theta(\varepsilon)+D],$$

D essendo una quantità qualsivoglia, il che è lecito, si avrà

$$\int_{x_\sigma+\varepsilon_1}^{x_\sigma+\eta_1} f_2(x)\,dx = \theta_1\{\theta_{11}[-\theta(\varepsilon)+D]\} = -\theta(\varepsilon)+D,$$

laonde

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon} + \int_{x_\sigma+\varepsilon_1}^{x_\sigma+\eta_1}\right) f(x)\,dx = (A-B)+(A_1-B_1)+$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon} f_1(x)\,dx + \int_{x_\sigma+\varepsilon_1}^{x_\sigma+\eta_1} f_2(x)\,dx\right) = (A-B)+(A_1-B_1)+D.$$

Il teorema adunque è dimostrato.

Ponendo mente come si abbia

$$\frac{d\rho_1}{d\varepsilon_1} = -f_2(x_\sigma + \varepsilon_1), \quad \frac{d\varepsilon_1}{d\rho_1} = -\frac{1}{f_2(x_\sigma + \varepsilon_1)},$$

$$\frac{d\varepsilon_1}{d\varepsilon} = \frac{1}{f_2\{x_\sigma + \theta_{11}[-\theta(\varepsilon) + D]\}} f_1(x_\sigma - \varepsilon),$$

si vede come la ε_1 sia dotata di una derivata prima, la quale, ogni qualvolta la $f(x)$ non ha elementi a comune con l'asse delle X nelle vicinanze di $x = x_\sigma + 0$, è altresì ivi continua.

Ritornando al nostro argomento, gli è degno di nota che, se la $f(x)$ è ovunque integrabile, in virtù del teorema dimostrato alla fine del numero II, la serie di Fourier relativa alla medesima è completamente determinata: d'altra parte, se gli integrali

$$\left(\int_{x_\sigma - \eta}^{x_\sigma - \varepsilon} + \int_{x_\sigma + \varphi_\sigma'(\varepsilon)}^{x_\sigma + \varphi_\sigma(\eta)}\right) f(x)\,dx, \quad \left(\int_{x_\sigma - \eta}^{x_\sigma - \varepsilon} + \int_{x_\sigma + \varphi_\sigma'(\varepsilon)}^{x_\sigma + \varphi_\sigma'(\eta)}\right) f(x)(x_\sigma - x)\,dx$$

convergono, la serie di Fourier nella quale

$$2\pi \cdot b_0 = \lim_{\varepsilon=0} \sum_0^{\tau-1}{}_\sigma \int_{x_\sigma + \varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_{\sigma+1} - \varepsilon} f(x)\,dx,$$

$$(a_n \operatorname{sen} n\alpha + b_n \cos n\alpha)\pi = \lim_{\varepsilon=0} \sum_0^{\tau-1}{}_\sigma \int_{x_\sigma + \varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_{\sigma+1} - \varepsilon} f(x) \cos n(x - \alpha)\,dx,$$

ha al certo significato.

Infatti, si ha

$$\int_{x_\sigma - \eta}^{x_\sigma - \varepsilon} f(x) \cos n(x - \alpha)\,dx + \int_{x_\sigma + \varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma + \varphi_\sigma(\eta)} f(x) \cos n(x - \alpha)\,dx =$$

$$\cos n(x_\sigma - \alpha) \int_\varepsilon^\eta f(x_\sigma - x) \cos nx\,dx + \operatorname{sen} n(x_\sigma - \alpha) \int_\varepsilon^\eta f(x_\sigma - x) \operatorname{sen} nx\,dx +$$

$$\cos n(x_\sigma - \alpha) \int_{\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{\varphi_\sigma'(\eta)} f(x_\sigma + x) \cos nx\,dx - \operatorname{sen} n(x_\sigma - \alpha) \int_{\varphi_\sigma'(\varepsilon)}^{\varphi_\sigma(\eta)} f(x_\sigma + x) \operatorname{sen} nx\,dx =$$

$$\cos n(x_\sigma - \alpha) \int_\varepsilon^\eta \{f(x_\sigma - x) \cos nx + f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)]\, \phi'_\sigma(x) \cos n\phi_\sigma(x)\}\,dx +$$

$$\operatorname{sen} n(x_\sigma - \alpha) \int_\varepsilon^\eta \{f(x_\sigma - x) \operatorname{sen} nx - f[x_\sigma + \phi_\sigma'(x)]\, \phi'_\sigma(x) \operatorname{sen} n\phi_\sigma(x)]\,dx.$$

Ora

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} \{ f(x_\sigma - x) \cos nx + f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)] \cos n\phi_\sigma(x) \cdot \phi'_\sigma(x) \} dx =$$

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} \{ f(x_\sigma - x) + f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)] \phi'_\sigma(x) \} dx -$$

$$-\frac{n^2}{\underline{|2}} \int_{\varepsilon}^{\eta} \{ f(x_\sigma - x) x^2 + f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)] \phi'_\sigma(x) \phi_\sigma(x)^2 \} dx +$$

$$\frac{n^4}{\underline{|4}} \int_{\varepsilon}^{\eta} \{ f(x_\sigma - x) x^4 + f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)] \phi'_\sigma(x) \phi_\sigma(x)^4 \} dx + \cdots,$$

ma gli integrali

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} \{ f(x_\sigma - x) + f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)] \phi'_\sigma(x) \} dx$$

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} \{ f(x_\sigma - x) x - f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)] \phi_\sigma(x) \phi'_\sigma(x) \} dx$$

convergono per ipotesi, quindi convergerà anche il seguente

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} x \{ f(x_\sigma - x) + f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)] \phi'_\sigma(x) \} dx,$$

che, sottratto dal secondo dei due precedenti, dà, ommettendo il fattore 2,

$$-\int_{\varepsilon}^{\eta} f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)] \phi'_\sigma(x) [x + \phi_\sigma(x)] dx =$$

$$-\int_{\varepsilon}^{\eta} f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)] \phi'_\sigma(x) \phi_\sigma(x) \left(1 + \frac{x}{\varphi_\sigma(x)}\right) dx;$$

adunque l'integrale

$$-\int_{\varepsilon}^{\eta} f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)] \phi'_\sigma(x) \phi_\sigma(x) dx$$

converge $\varepsilon = +0$, poichè la funzione

$$\frac{1}{1 + \frac{x}{\varphi_\sigma(x)}}$$

tende ad un limite per $x=+0$ ed è dotata di una derivata prima, che mantiene sempre lo stesso segno, e quindi anche l'altro

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} x f(x_\sigma - x)\,dx;$$

siccome poi la derivata di $\phi_\sigma(x)$ per $x=+0$ non è e al disopra e al disotto dell'asse delle X, si vede facilmente che l'espressione

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} \{ f(x_\sigma - x)\cos nx - f[x_\sigma - \phi_\sigma(x))\,\phi'_\sigma(x)\cos n\phi_\sigma(x)\}\,dx$$

serba significato per $\varepsilon=+0$, e così pure l'altra

$$\int_{\varepsilon}^{\eta} \{ f(x_\sigma - x)\operatorname{sen} nx - f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)]\,\phi'_\sigma(x)\operatorname{sen} n\phi_\sigma(x)\}\,dx =$$

$$n\int_{\varepsilon}^{\eta} \{ f(x_\sigma - x)\,x - f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)]\,\phi'_\sigma(x)\,\phi_\sigma(x)\}\,dx -$$

$$\frac{n^3}{\lfloor 3}\int_{\varepsilon}^{\eta} \{ f(x_\sigma - x)\,x^3 - f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)]\,\phi'_\sigma(x)\,\phi_\sigma(x)^3\}\,dx + \cdots$$

Ed in ciò che segue, supposto che i due integrali già più volte indicati convergano e che la funzione $\phi_\sigma(x)$ soddisfaccia alle condizioni dette nel Lemma, per serie di Fourier relativa ad una funzione non ovunque integrabile intenderemo quella testè definita.

Diamo ora qualche schiarimento circa a ciò che va inteso col dire, un sistema di punti ν volte infinito. A tal fine ragioneremo col sig. Cantor (V. il giornale di Clebsch e Neumann, vol. V.°, pag. 128 e 129) nel modo che segue: data una serie illimitata di punti P in un intervallo finito qualsivoglia, con la medesima risulta definita una seconda, con questa una terza, e così via: codeste serie poi sono essenziali per lo studio della primitiva. Per definirle fa duopo di premettere il concetto di punto limite. Con codesto nome in una serie illimitata di punti va inteso un punto dell'intervallo considerato, inclusi i limiti, da una o da ambo le parti del quale si addensi un numero senza fine di elementi P, potendo il medesimo appartenere alla serie data. Ne consegue che una serie illimitata di punti definiti nell'intervallo ab ammette almeno un punto limite, e con essa è altresì completamente determinata la serie dei suoi punti limiti, che chiameremo la prima derivata di P ed indicheremo P'. Ora, se P' non consta di un numero limitato o nullo di punti, e quest'ultimo caso avrebbe luogo quando la serie data contenesse un numero finito di punti, ammetterà una serie derivata P'', che si dirà la derivata seconda di P. Procedendo in tal guisa si vede facilmente ciò che vada inteso per serie derivata di ordine ν.

Ecco alcuni esempi: Se il sistema P consta di tutti i punti siti tra 0 ed 1, cui corrispondono ascisse irrazionali, la serie P' sarà di tutti i punti siti tra 0 ed 1, i limiti compresi, il che ha altresì luogo per tutte le serie derivate successive P'', P''',...; e il sistema di punti in codesto caso sarebbe di ordine infinito. Se all'incontro il sistema P comprende i punti di ascisse $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, la serie derivata prima consta di un solo punto che è l'origine delle coordinate.

Ora, ei può avvenire, ed è questo caso quello che principalmente ci interessa, che il sistema $P^{(\nu)}$ sia di un numero limitato di punti; diremo in allora che la serie P è dell'ordine ν, ossia ν volte infinita. Così p. e. la seconda delle serie testè considerate è di primo ordine; se consideriamo poi il tratto oa, a essendo una grandezza qualsivoglia, i punti di ascissa

$$\frac{1}{3^{s_1}} + \frac{1}{5^{s_2}} + \frac{1}{7^{s_3}} + \frac{1}{11^{s_4}},$$

gli interi s_1, s_2, s_3, s_4 essendo capaci di tutti i valori positivi da uno sino all'infinito, punti che manifestamente sono tutti distinti tra loro, determineranno una serie del quarto ordine, di cui la derivata prima è

$$\frac{1}{3^{s_1}} + \frac{1}{5^{s_2}} + \frac{1}{7^{s_3}}, \quad \frac{1}{3^{s_1}} + \frac{1}{5^{s_2}} + \frac{1}{11^{s_4}}, \quad \frac{1}{3^{s_1}} + \frac{1}{7^{s_3}} + \frac{1}{11^{s_4}}, \quad \frac{1}{5^{s_2}} + \frac{1}{7^{s_3}} + \frac{1}{11^{s_4}};$$

la seconda

$$\frac{1}{3^{s_1}} + \frac{1}{5^{s_2}}, \quad \frac{1}{3^{s_1}} + \frac{1}{7^{s_3}}, \quad \frac{1}{5^{s_2}} + \frac{1}{7^{s_3}}, \quad \frac{1}{3^{s_1}} + \frac{1}{11^{s_4}}, \quad \frac{1}{5^{s_2}} + \frac{1}{11^{s_4}}, \quad \frac{1}{7^{s_3}} + \frac{1}{11^{s_4}};$$

la terza

$$\frac{1}{3^{s_1}}, \quad \frac{1}{5^{s_2}}, \quad \frac{1}{7^{s_3}}, \quad \frac{1}{11^{s_4}};$$

la quarta l'origine delle coordinate, ed i termini di ciascuna serie non appartengono alla od alle precedenti.

Gli è manifesto come, assegnata una serie di punti ν volte infinita in un intervallo qualsivoglia, si possano sempre determinare nel medesimo infiniti tratti entro ed ai limiti dei quali non cada verun punto del sistema; poichè, se ciò non avesse luogo, il sistema proposto sarebbe infinito di ordine infinito contro l'ipotesi, la serie P' componendosi di tutti i punti del sistema dato.

Sia $\alpha_1 \beta_1$ un tratto per ciascun punto del quale la $f(x)$ sia esprimibile per la corrispondente serie I; per tutti i valori particolari di x tali che $\alpha_1 \leq x \leq \beta_1$ si avrà quindi

$$\lim_{n=\infty} (a_n \operatorname{sen} x + b_n \cos n x) = 0,$$

laonde

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \quad (n = \infty).$$

Adunque la funzione

$$F(x) = b_0 \frac{x^2}{2} - \sum_0 \frac{a_n \operatorname{sen} n x + b_n \cos n x}{n^2} = A_0 \frac{x^2}{2} - \sum_0 \frac{A}{n^2},$$

per le ricerche contenute nel paragrafo 8 della memoria di Riemann, gode delle seguente proprietà:

I. Essa è ovunque continua.

II. Si ha

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha^2} = \sum_0{}_n (a_n \operatorname{sen} n x + b_n \cos n x)$$

per tutti quei valori di x pei quali la I converge.

III. Quale si sia x l'espressione

$$\frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha}$$

va a zero con α.

I punti singolari della $f(x)$ si suppongono compresi nella serie ν volte infinita, pei punti della quale non si fa alcuna ipotesi circa al significato della serie I.

Ora, poichè la $F(x)$ converge in egual grado, si avrà che l'integral della somma è eguale alla somma degli integrali, ossia

$$-\frac{a_n \operatorname{sen} n x + b_n \cos n x}{n^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(F(t) - \frac{b_0}{2} t^2 \right) \cos n (t - x) \, dt.$$

Sia ora a un punto qualsivoglia del segmento $0\,2\pi$, tale però che l'integrale

$$\int_{a+\varepsilon} f(x) \, dx$$

converga all'annullarsi di ε, e quindi, per le condizioni imposte alla $f(x)$, anche l'altro

$$\int_{a-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

e consideriamo l'espressione

$$\int_{a\pm 0}^{x} f(x)\,dx = \psi(x)$$

nella sua dipendenza dal limite superiore x; pertanto, se con x si indica un punto pel quale la $f(x)$ è continua, oppure uno tra il numero limitato di punti singolari pel quale sia integrabile, se pur ve ne sono, ed intendiamo che una funzione continua, la quale per $x=c$ va all'infinito da una e da ambo le parti, sia integrabile per esso valore quando l'espressione

$$\left(\int_{c-\eta}^{c-\alpha_1} + \int_{c+\alpha_1}^{c+\eta}\right) f(x)\,dx$$

si avvicina ad un limite determinato, se si fa convergere comunque le grandezze α_1 ed α_2 verso lo zero (V. RIEMANN, p. 18), gli è chiaro che il simbolo

$$\int_{a\pm 0}^{x} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon=+0}\left(\int_{a\pm 0}^{x_\mu-\varepsilon} + \int_{x_\mu+\varphi_\mu(\varepsilon)}^{x_\lambda-\varepsilon} + \int_{x_\lambda+\varphi_\lambda(\varepsilon)}^{x_\rho-\varepsilon} + \cdots + \int_{x_\nu+\varphi_\nu(\varepsilon)}^{x}\right) f(x)\,dx,$$

rappresenterà una funzione continua della x tranne che pei valori analoghi ad x_μ, $x_\lambda, \ldots$, pei quali non assumerà alcun valore. Nella espressione che precede x_μ, $x_\lambda, \ldots$ indicano quei punti siti per avventura tra a ed x, pei quali la funzione proposta non è integrabile.

Essendo $a_{\sigma-1}$ un punto compreso tra $x_{\sigma-1}$ ed x_σ consideriamo l'integrale

$$F_{\sigma-1}(x) = \int_{a_{\sigma-1}}^{x} \psi(x)\,dx, \quad (\sigma = 1, \ldots, \tau)$$

che rappresenta una funzione continua del limite superiore nell'intervallo $x_{\sigma-1}$ ed x_σ ed ammette per derivata seconda nel medesimo la $f(x)$. Le due funzioni $F(x)$ ed $F_{\sigma-1}(x)$ sono adunque continue tra $x_{\sigma-1}$ ed x_σ, la prima anche ai limiti; la $F(x)$ ha poi per secondo quoziente differenziale la $f(x)$ tra 0 e 2π, tranne che per un sistema di punti formanti una serie, che è al massimo dell'ordine ν. Ciò essendo, si ha

$$F(x)=F_{\sigma-1}(x)+c_{\sigma-1}x+c'_{\sigma-1},$$
$$F(x_{\sigma-1}+0)=F_{\sigma-1}(x_{\sigma-1}+0)+c_{\sigma-1}x_{\sigma-1}+c'_{\sigma-1},$$
$$F(x_\sigma-0)=F_{\sigma-1}(x_\sigma-0)+c_{\sigma-1}x_\sigma+c'_{\sigma-1}$$
$$(\sigma=1,\ldots,\tau)$$

Per dimostrar ciò rammento anzitutto il teorema seguente del sig. Schwarz: Una funzione continua tra a e b ed ai limiti di cui la derivata seconda è nulla in detto intervallo (non si fa alcuna ipotesi circa ai limiti) è della forma

$$A\cdot x+B$$

A e B essendo due costanti. Ho letto la dimostrazione di codesto teorema nella seconda delle memorie del sig. Cantor inserite nel vol. 72 del Giornale di Crelle.

Consideriamo ora l'intervallo $x_{\sigma-1}+\varepsilon\ x_\sigma-\varepsilon$, ε essendo una quantità comunque piccola, nel quale la funzione

$$F(x)-F_{\sigma-1}(x)$$

è continua i limiti inclusi, e facciamo vedere in prima come in codesto tratto sino ai suoi limiti si abbia

$$F(x)-F_{\sigma-1}(x)=c_{\sigma-1}x+c'_{\sigma-1}.$$

A tal fine seguiremo il metodo del sig. Cantor nella Memoria: *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen.* (V. il Giornale di Clebsch e Neumann, vol. V.°, p. 131 e seg.)

Consideriamo anzitutto un intervallo pq compreso in $x_{\sigma-1}+\varepsilon\ x_\sigma-\varepsilon$, nel quale giaccia soltanto un numero finito di punti della serie P; siano essi $y_0, y_1, y_2,\ldots y_r$, scritti secondo l'ordine di successione procedendo dalla destra verso la sinistra. Dico che la $F(x)-F_{\sigma-1}(x)$ è lineare in codesto tratto: infatti, codesta funzione è tale in ciascuno dei segmenti nei quali pq viene scisso dai punti $y_0, y_1, y_2,\ldots y_r$, e ciò pel teorema che precede, resta adunque a dimostrarsi l'identità di codeste funzioni lineari. Ora si abbia nell'intervallo $y_1 y_0$

$$F(x)-F_{\sigma-1}(x)=c_{\sigma-1}x+c'_{\sigma-1},$$

nel successivo

$$F(x)-F_{\sigma-1}(x)=d_{\sigma-1}x+d'_{\sigma-1}.$$

Per la continuità della $F(x) - F_{\sigma_{-1}}(x)$ pel valore y_1 abbiamo

$$F(y_1) - F_{\sigma_{-1}}(y_1) = c_{\sigma_{-1}} y_1 + c'_{\sigma_{-1}} = d_{\sigma_{-1}} y_1 + d'_{\sigma_{-1}};$$

per valori sufficientemente piccoli di α si ha poi

$$F(y_1 + \alpha) - F_{\sigma_{-1}}(y_1 + \alpha) = d_{\sigma_{-1}}(y_1 + \alpha) + d'_{\sigma_{-1}},$$

$$F(y_1 - \alpha) - F_{\sigma_{-1}}(y_1 - \alpha) = c_{\sigma_{-1}}(y_1 - \alpha) + c'_{\sigma_{-1}},$$

quindi per la proprietà III della $F(x)$

$$\lim_{\alpha=0} (d_{\sigma_{-1}} - c_{\sigma_{-1}}) = 0,$$

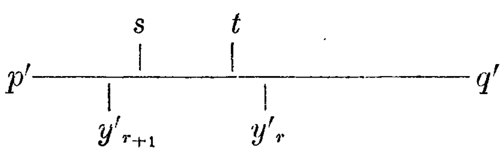
e perciò

$$d_{\sigma_{-1}} = c_{\sigma_{-1}}, \quad d'_{\sigma_{-1}} = c'_{\sigma_{-1}}:$$

adunque, se nell'intervallo pq il numero dei punti della serie ν volte infinita è limitato, nel medesimo sarà

$$F(x) - F_{\sigma_{-1}}(x) = c_{\sigma_{-1}} x + c'_{\sigma_{-1}}.$$

Consideriamo ora un segmento $p'q'$ tutto compreso in $x_{\sigma_{-1}} + \varepsilon x_\sigma - \varepsilon$, il quale contenga un numero determinato di punti della serie derivata prima P', e sieno $y'_0, y'_1, y'_2, \ldots y'_r$ codesti punti nell'ordine in cui si succedono dalla destra verso la sinistra: nel tratto $y'_r\, y'_{r+1}$ ad es. la funzione studiata è lineare. Infatti, nel segmento st



havvi soltanto un numero limitato di punti del sistema P, chè, se ciò non fosse, nel medesimo cadrebbero altri punti della serie P' contro l'ipotesi fatta, quindi in st per quanto si disse or ora la funzione $F(x) - F_{\sigma_{-1}}(x)$ è lineare. Facendo convergere i due punti s e t rispettivamente agli altri $y'_{r+1}\, y'_r$ si conclude tosto che la funzione $F(x) - F_{\sigma_{-1}}(x)$, continua nel tratto $y'_{r+1}\, y'_r$ ed ai suoi limiti, è lineare nel medesimo. Quindi come precedentemente si dimostrerebbe l'identità delle varie funzioni corrispondenti ai tratti $y'_0 y'_1, y'_1 y'_2, \ldots$ Adunque, se $p'q'$ è un intervallo tutto compreso nell'altro $x_{\sigma_{-1}} + \varepsilon\, x_\sigma - \varepsilon$, il quale contenga un numero determinato di punti della serie derivata prima P', la funzione è lineare in esso tratto.

Appoggiandoci a quanto ora si disse si potrebbe mostrare agevolmente come la $F(x) - F_{\sigma_{-1}}(x)$ e lineare in un tratto $p''q''$ tutto compreso in $x_{\sigma_{-1}} + \varepsilon$

$x_\sigma - \varepsilon$, il quale contenga un numero limitato di punti della serie derivata seconda P''. Così procedendo e rammentando come per ipotesi il sistema P sia ν volte infinito, ossia ammetta ν serie derivate soltanto, delle quali la ν^a consta di un numero limitato di punti si vede di leggieri come si abbia

$$F(x) = F_{\sigma_{-1}}(x) + c_{\sigma_{-1}} x + c'_{\sigma_{-1}} \quad (\sigma = 1, \ldots, \tau)$$

tra $x_{\sigma_{-1}} + \varepsilon$ ed $x_\sigma - \varepsilon$ i limiti racchiusi. Facendo ora convergere ε a zero risulta il teorema che si voleva dimostrare.

La funzione $c_{\sigma_{-1}} x + c'_{\sigma_{-1}}$ è ovunque continua, l'integrale quindi

$$\int_{a_{\sigma-1}}^{x} \psi(x)\,dx$$

converge per $x = x_{\sigma_{-1}} + 0,\ = x_\sigma - 0.$

Pertanto, l'espressione

$$\int_{a}^{x} \psi(x)\,dx = F_1(x)$$

rappresenta una funzione continua del limite superiore: gli è facile poi il vedere come si abbia

$$F_1(x + 2\pi) = F_1(x) + Cx + C':$$

ed invero,

$$F_1(x+2\pi) = \int_a^{x+2\pi} \psi(x)\,dx = \int_a^{a+2\pi} \psi(x)\,dx + \int_{a+2\pi}^{x+2\pi} \psi(x)\,dx$$

$$= C'_1 + \int_a^x \psi(x + 2\pi)\,dx.$$

$$\psi(x+2\pi) = \int_{a\pm 0}^{x+2\pi\mp 0} f(x)\,dx = \int_{a+0}^{a+2\pi-0} f(x)\,dx + \int_{a+2\pi\pm 0}^{x+2\pi\mp 0} f(x)\,dx$$

$$= C + \int_{a\pm 0}^{x\mp 0} f(x)\,dx = C + \psi(x).$$

e quindi

$$F_1(x+2\pi) = F_1(x) + Cx + C',$$

essendo

$$C' = C'_1 - Ca.$$

Il metodo tenuto per dimostrare l'ultima eguaglianza non è applicabile quando x sia un punto pel quale la $f(x)$ non è integrabile; se però con x, si indica un punto sufficientemente vicino al precedente si avrà

$$F_1(x_1+2\pi)=F_1(x_1)+Cx_1+C'$$

e poichè le due funzioni

$$F_1(x),\quad Cx+C'$$

sono ovunque continue, facendo convergere x_1 verso x si vede che la equazione testè scritta è sempre vera.

Si potrà adunque togliendo dalla $F_1(x)$ una espressione della forma $\frac{\alpha}{2}x^2+\beta x$ renderla periodica secondo 2π, basterà che sia

$$C-2\alpha\cdot\pi=0,$$
$$C'-2\alpha\pi^2-2p\pi=0,$$

infatti,

$$F_1(x+2\pi)-\frac{\alpha}{2}(x+2\pi)^2-\beta(x+2\pi)=F_1(x)+Cx+C'-\frac{\alpha}{2}x^2-$$
$$\frac{\alpha}{2}\overline{2\pi}^2-\frac{\alpha}{2}\cdot 4\cdot\pi\cdot x-\beta x-\beta\cdot 2\pi=F_1(x)-\frac{\alpha}{2}x^2-\beta x.$$

Ora

$$\int_0^{2\pi}\left(F_1(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-\beta t\right)\cos n(t-x)\,dt=$$
$$-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}[\psi(t)-\alpha\cdot t]\,\mathrm{sen}\,n(t-x)\,dt=$$
$$-\frac{1}{n}\lim_{\varepsilon=0}\sum_1^{\tau}{}_\sigma\int_{x_{\sigma-1}+\varphi_{\sigma-1}(\varepsilon)}^{x_\sigma-\varepsilon}[\psi(t)-\alpha\cdot t]\,\mathrm{sen}\,n(t-x)\,dt=$$
$$\frac{1}{n^2}\lim_{\varepsilon=0}\sum_1^{\tau}{}_\sigma\Big[[\psi(t)-\alpha\cdot t]\cos n(t-x)\Big]_{x_{\sigma-1}+\varphi_{\sigma-1}(\varepsilon)}^{x_\sigma-\varepsilon}-$$
$$\frac{1}{n^2}\lim_{\varepsilon=0}\sum_1^{\tau}{}_\sigma\int_{x_{\sigma-1}+\varphi_{\sigma-1}(\varepsilon)}^{x_\sigma-\varepsilon}f(t)\cos n(t-x)\,dt;$$

codesta decomposizione è lecita perchè l'integrale

$$\lim_{\varepsilon=+0}\sum_1^{\tau}{}_\sigma\int_{x_{\sigma-1}+\varphi_{\sigma-1}(\varepsilon)}^{x_\sigma-\varepsilon}f(t)\cos n(t-x)\,dt$$

converge nelle ipotesi fatte.

Gli è facile il vedere come si abbia

$$\lim_{\varepsilon=0}\sum_{1}^{\tau}{}_{\sigma}\Big[[\psi(t)-\alpha\cdot t]\cos n(t-x)\Big]_{x_{\sigma-1}+\varphi_{\sigma-1}(\varepsilon)}^{x_\sigma-\varepsilon}=0.$$

Infatti

$$[\psi(x_\sigma-\varepsilon)-\alpha(x_\sigma-\varepsilon)]\cos n(x_\sigma-\varepsilon-x)-\{\psi[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]-\alpha[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]\}\cdot$$
$$\cos n[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)-x]=\cos n(x_\sigma-x)\{\psi(x_\sigma-\varepsilon)\cos n\varepsilon-\alpha(x_\sigma-\varepsilon)\cos n\varepsilon-$$
$$-\psi[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]\cos n\phi_\sigma(\varepsilon)+\alpha[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]\cos n\phi_\sigma(\varepsilon)\}+\operatorname{sen} n(x_\sigma-x)\cdot$$
$$\{\psi(x_\sigma-\varepsilon)\operatorname{sen} n\varepsilon-\alpha(x_\sigma-\varepsilon)\operatorname{sen} n\varepsilon+\psi[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]\operatorname{sen} n\phi_\sigma(\varepsilon)-\alpha[x_\sigma+$$
$$\phi_\sigma(\varepsilon)]\operatorname{sen} n\phi_\sigma(\varepsilon)\};$$

ma

$$\psi(x_\sigma-\varepsilon)\cos n\varepsilon-\psi[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]\cos n\phi_\sigma(\varepsilon)=$$
$$\psi(x_\sigma-\varepsilon)-\psi[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]-\frac{n^2}{2}\{\psi(x_\sigma-\varepsilon)\varepsilon^2-\psi[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]\phi_\sigma(\varepsilon)^2\}+$$
$$\frac{n^4}{4}\{\psi(x_\sigma-\varepsilon)\varepsilon^4-\psi[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]\phi_\sigma(\varepsilon)^4\}\cdots;$$

d'altra parte

$$\psi[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]-\psi(x_\sigma-\varepsilon)=\left(\int_{a\pm0}^{x_\sigma+\varphi_\sigma'(\varepsilon)}-\int_{a\pm0}^{x_\sigma-\varepsilon}\right)f(x)\,dx=$$
$$=\left(\int_{x_\sigma-\varepsilon}^{x_\sigma-0}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma'(0)}^{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}\right)f(x)\,dx,$$

quindi per dato

$$\lim_{\varepsilon=0}\{\psi[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]-\psi(x_\sigma-\varepsilon)\}=0.$$

Abbiamo altresì

$$\int_\varepsilon x f(x_\sigma-x)\,dx=[x\psi(x_\sigma-x)]^\varepsilon+\int_\varepsilon\psi(x_\sigma-x)\,dx,$$

e poichè nelle nostre ipotesi i due integrali

$$\int_\varepsilon x f(x_\sigma-x)\,dx,\quad \int_\varepsilon\psi(x_\sigma-x)\,dx$$

convergono all'indefinito diminuire del limite inferiore, l'espressione

$$\varepsilon\cdot\psi(x_\sigma-\varepsilon)$$

convergerà altresì per $\varepsilon = +0$, e manifestamente verso lo zero; chè, se ciò non fosse, si potrebbe porre

$$\pm \varepsilon \psi(x_\sigma - \varepsilon) > c$$

a partire da un limite assegnabile d e quindi

$$\pm \int_\varepsilon^d \psi(x_\sigma - \varepsilon)\, d\varepsilon > c\left(\log\frac{1}{\varepsilon} - \log\frac{1}{d}\right).$$

Così pure, essendo

$$\int_\varepsilon f[x_\sigma + \phi_\sigma(x)]\,\phi_\sigma(x)\,\phi'_\sigma(x)\,dx = [\phi_\sigma(x)\,\psi(x_\sigma + \phi_\sigma(x)]_\varepsilon -$$

$$\int_\varepsilon \psi[x_\sigma + \phi_\sigma(x)]\,\phi'_\sigma(x)\,dx,$$

si vede agevolmente come anche il simbolo

$$\phi_\sigma(\varepsilon)\,\psi[x_\sigma + \phi_\sigma(\varepsilon)]$$

tenda ad un limite per $\varepsilon = +0$, questo limite è lo zero, infatti, se ciò non fosse, si potrebbe porre

$$\pm \psi[x_\sigma + \phi_\sigma(\varepsilon)] > c\,\frac{1}{\varphi_\sigma(\varepsilon)}$$

e quindi

$$\pm \psi[x_\sigma + \phi_\sigma(\varepsilon)]\,\phi'_\sigma(\varepsilon) > c\,\frac{\varphi'_\sigma(\varepsilon)}{\varphi_\sigma(\varepsilon)}$$

e l'espressione

$$\int_{\varphi_\sigma(\varepsilon)} \psi(x_\sigma + x)\,dx$$

andrebbe all'infinito per $\varepsilon = +0$, il che non ha luogo: si ha perciò

$$\lim_{\varepsilon=+0} n\psi(x_\sigma - \varepsilon)\varepsilon = 0 \qquad \lim_{\varepsilon=+0} n\psi[x_\sigma + \phi_\sigma(\varepsilon)]\,\phi_\sigma(\varepsilon) = 0;$$

quindi

$$\lim_{\varepsilon=+0}\{\phi(x_\sigma - \varepsilon)\cos n\varepsilon - \alpha(x_\sigma - \varepsilon)\cos n\varepsilon - \psi[x_\sigma + \phi_\sigma(\varepsilon)]\cos n\phi_\sigma(\varepsilon)$$
$$+ \alpha[x_\sigma + \phi_\sigma(\varepsilon)]\cos n\phi_\sigma(\varepsilon)\} = 0$$

Ponendo mente come si abbia

$$\psi(x_\sigma - \varepsilon)\,\mathrm{sen}\, n\varepsilon + \psi[x_\sigma + \phi_\sigma(\varepsilon)]\,\mathrm{sen}\, n\phi_\sigma(\varepsilon) =$$

$$n\{\phi(x_\sigma - \varepsilon)\varepsilon + \psi[x_\sigma + \phi_\sigma(\varepsilon)]\,\phi_\sigma(\varepsilon)\} - \frac{n^3}{3}\{\phi(x_\sigma - \varepsilon)\varepsilon^3 + \psi[x_\sigma + \phi_\sigma(\varepsilon)]\,\phi_\sigma(\varepsilon)^3\} + \cdots,$$

si vede facilmente come sia

$$\lim_{\varepsilon=+0}\{\psi(x_\sigma-\varepsilon)\operatorname{sen} n\varepsilon+\psi[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]\operatorname{sen} n\phi_\sigma(\varepsilon)\}=0$$

Consideriamo ora l'espressione

$$[\psi(2\pi-\varepsilon)-\alpha(2\pi-\varepsilon)]\cos n(\varepsilon+x)-\{\psi[\phi_0(\varepsilon)]-\alpha\phi_0(\varepsilon)\}\cos n[\phi_0(\varepsilon)-x]=$$
$$\{\psi(2\pi-\varepsilon)\cos n\varepsilon-\alpha(2\pi-\varepsilon)\cos n\varepsilon-\psi[\phi_0(\varepsilon)]\cos n\phi_0(\varepsilon)$$
$$+\alpha\phi_0(\varepsilon)\cos n\phi_0(\varepsilon)\}\cos nx-\{\psi(2\pi-\varepsilon)\operatorname{sen} n\varepsilon-\alpha(2\pi-$$
$$\varepsilon)\operatorname{sen} n\varepsilon+\psi[\phi_0(\varepsilon)]\operatorname{sen} n\phi_0(\varepsilon)-\alpha\phi_0(\varepsilon)\operatorname{sen} n\phi_0(\varepsilon)\}\operatorname{sen} nx;$$

si ha

$$\int_{a-0}^{\varphi_0(\varepsilon)} f(x)\,dx=\psi[\phi_0(\varepsilon)]$$

$$\int_{a+0}^{2\pi-\varepsilon} f(x)\,dx=\psi(2\pi-\varepsilon),$$

laonde

$$\psi(2\pi-\varepsilon)-\psi[\phi_0(\varepsilon)]=\left(\int_{a+0}^{2\pi-\varepsilon}-\int_{a-0}^{\varphi_0(\varepsilon)}\right)f(x)\,dx=\int_{\varphi_0(\varepsilon)}^{2\pi-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

perciò, essendo

$$2\pi\cdot\alpha=\int_{a+0}^{2\pi+a-0} f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon=+0}\int_{\varphi_0(\varepsilon)}^{2\pi-\varepsilon} f(x)\,dx,$$

si avrà

$$\lim_{\varepsilon=+0}\sum_1^\tau{}_\sigma\Big[[\psi(t)-\alpha\cdot t]\cos n(t-x)\Big]_{x_{\sigma-1}+\varphi_{\sigma-1}(\varepsilon)}^{x_\sigma-\varepsilon}=0,$$

e quindi

$$\int_0^{2\pi}\left(F_1(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-\beta t\right)\cos n(t-x)\,dt=$$
$$-\frac{1}{n^2}\lim_{\varepsilon=+0}\sum_1^\tau{}_\sigma\int_{x_{\sigma-1}+\varphi_{\sigma-1}(\varepsilon)}^{x_\sigma-\varepsilon} f(t)\cos n(t-x)\,dt.$$

Per un noto teorema, il quale del resto verrà dimostrato tra breve, si ha

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi}\left(F_1(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-\beta t\right)\cos n(t-x)\,dt=0;$$

e poichè la funzione $F_1(x)-\frac{\alpha}{2}x^2-\beta x$ è dotata di derivata prima tranne tutto al più per un numero limitato di punti, e sono quelli pei quali la $f(x)$ non è integrabile, si avrà

$$F_1(x) - \frac{\alpha}{2}x^2 - \beta x = C_{11} - \frac{A'_1}{1} - \frac{A'_2}{4} - \frac{A'_3}{9} \dots,$$

posto

$$C_{11} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(F_1(t) - \frac{\alpha}{2}t^2 - \beta t\right)dt,$$

$$A'_n = \lim_{\varepsilon=+0}\sum_1^{\tau}\sigma\int_{x_{\sigma-1}+\varphi_{\sigma-1}(\varepsilon)}^{x_\sigma-\varepsilon} f(t)\cos n(t-x)\,dt;$$

restando pel momento ignoto il significato di codesta serie pei punti di cui or ora si tenne parola.

Si ha manifestamente, per quanto si disse poco fa, tra $x_{\sigma-1}$ ed x_σ

$$F(x) - F_1(x) = C_{\sigma-1}x + C'_{\sigma-1}, \quad (\sigma = 1, \dots, \tau);$$

gli è però facile il vedere come si abbia

$$C_{\sigma-1} = C_\sigma, \quad C'_{\sigma-1} = C'_\sigma \quad (\sigma = 1, 2, \dots, \overline{\tau-1}).$$

Infatti

$$\lim_{\alpha=0}\frac{F(x+\alpha) - 2F(x) + F(x-\alpha)}{\alpha} = 0$$

qualunque sia x; d'altra parte, detto x_σ un punto pel quale la $f(x)$ non sia integrabile, si ha per ipotesi

$$\lim_{\alpha=0}\frac{1}{\alpha}\int_{+0}^{\alpha}\left(\int_{x_\sigma-\alpha}^{x_\sigma-0} + \int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(0)}^{x_\sigma+\alpha}\right)f(x)\,dx\,d\alpha = 0,$$

ma

$$F_1(x_\sigma+\alpha) = \int_a^{x_\sigma+\alpha}\psi(x)\,dx, \quad F_1(x_\sigma+0) = \int_a^{x_\sigma+0}\psi(x)\,dx,$$

$$F_1(x_\sigma-\alpha) = \int_a^{x_\sigma-\alpha}\psi(x)\,dx, \quad F_1(x_\sigma-0) = \int_a^{x_\sigma-0}\psi(x)\,dx,$$

onde

$$F_1(x_\sigma+\alpha) - F_1(x_\sigma+0) = \int_{x_\sigma+0}^{x_\sigma+\alpha}\psi(x)\,dx = \int_{+0}^{+\alpha}\psi(x_\sigma+x)\,dx,$$

$$F_1(x_\sigma-\alpha) - F_1(x_\sigma-0) = \int_{x_\sigma-0}^{x_\sigma-\alpha}\psi(x)\,dx = -\int_{+0}^{+\alpha}\psi(x_\sigma-x)\,dx,$$

e quindi

$$F_1(x_\sigma+\alpha)-2F_1(x_\sigma)+F_1(x_\sigma-\alpha)=\int_{+0}^{\alpha}[\psi(x_\sigma+x)-\psi(x_\sigma-x)]\,dx.$$

Ora,

$$\psi(x_\sigma+x)=\int_{a\pm 0}^{x_\sigma+x}f(x)\,dx,\quad \psi(x_\sigma-x)=\int_{a\pm 0}^{x_\sigma-x}f(x)\,dx,$$

perciò

$$\psi(x_\sigma+x)-\psi(x_\sigma-x)=\lim_{\varepsilon=+0}\left(\int_{x_\sigma-x}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+x}\right)f(x)\,dx,$$

adunque

$$\lim_{\alpha=0}\frac{F_1(x_\sigma-\alpha)-2F_1(x_\sigma)+F_1(x_\sigma-\alpha)}{\alpha}=0,$$

e per questo

$$C_\sigma=C_{\sigma-1},\quad C'_\sigma=C'_{\sigma-1}\quad(\sigma=1,\ 2,\dots,\ \overline{\tau-1}).$$

Possiamo adunque porre

$$F(x)-\frac{A_0}{2}x^2-F_1(x)+\frac{\alpha}{2}x^2+\beta\cdot x=D,$$

D essendo una costante, ossia

$$-\sum_1\frac{A_n-A'_n}{n^2}-C_{11}-D=0,$$

poichè le due funzioni

$$F(x)-\frac{A_0}{2}x^2,\quad F_1(x)-\frac{\alpha}{2}x^2-\beta x$$

sono periodiche secondo 2π.

Ma una equazione della forma

$$K+\sum_1(c_n\operatorname{sen}nx+d_n\cos nx)=0$$

non può sussistere per ogni valore delle x particolare tranne un numero limitato di punti senza che si abbia

$$K=c_n=d_n=0,$$

come dimostrò il sig. Cantor nel vol. 72 del Giornale di Crelle; abbiamo adunque

$$A'_n=a_n\operatorname{sen}nx+b_n\cos nx=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon=+0}\sum_1^{\tau}{}_\sigma\int_{x_{\sigma-1}+\varphi_{\sigma-1}(\varepsilon)}^{x_\sigma-\varepsilon}f(t)\cos n(t-x)\,dt,$$

come si voleva dimostrare.

Se $\Phi_\sigma(\varepsilon)=\varepsilon$, l'integrale

$$\left(\int_{x_\sigma-x}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\varepsilon}^{x_\sigma+x}\right)f(x)\,dx$$

converge per $\varepsilon=+0$, ossia l'espressione

$$\lim_{\varepsilon=+0}\int_{\varepsilon}^{x}[f(x_\sigma-x)+f(x_\sigma+x)]\,dx$$

va a zero con x, laonde la condizione

$$\lim_{\alpha=0}\frac{1}{\alpha}\int_{+0}^{\alpha}\lim_{\varepsilon=+0}\left(\int_{x_\sigma-\alpha}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\varepsilon}^{x_\sigma+\alpha}\right)f(x)\,dx\cdot d\alpha$$

sarebbe soddisfatta da sè.

Gli è altresì manifesto come si possa avere

$$\lim_{\alpha=0}\frac{1}{\alpha}\int_{+0}^{\alpha}\theta(x)\,dx=0,$$

senza che di necessità si abbia $\theta(+0)=0$, ad esempio

$$\theta(x)=(1+\mu)x^{\mu}\cos\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{1-\mu}}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\quad(0<\mu<1),$$

essendo

$$\int_{+0}^{\alpha}\theta(x)\,dx=\alpha^{1+\mu}\cos\frac{1}{\alpha}\cdot$$

Osserveremo per ultimo che, se si fa astrazione dalle funzioni che hanno infiniti massimi e minimi, si può enunciare il seguente teorema:

Se una funzione $f(x)$ periodica secondo 2π, continua ad eccezione di un numero limitato di punti, è esprimibile, tranne che per un sistema di punti dell'ordine ν inclusi i punti critici, per serie della forma

$$\sum_0(a_n\operatorname{sen}nx+b_n\cos nx),$$

sarà

$$b_0=\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon=+0}\sum_1^{\tau}{}_\sigma\int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon}f(t)\,dt,$$

$$a_n\operatorname{sen}nx+b_n\cos nx=\frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon=+0}\sum_1^{\tau}{}_\sigma\int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon}f(t)\cos n(t-x)\,dt.$$

Gli è facile il vedere anzitutto come l'integral principale relativo alla data funzione debba convergere: ed invero, si ha

$$F(x) - F_{\sigma_{-1}}(x) = C_{\sigma_{-1}} x + C'_{\sigma_{-1}} \quad (\sigma = 1, \ldots, \tau),$$

essendo

$$\psi_{\sigma_{-1}}(x) = \int_{a_{\sigma-1}}^{x} f(x)\,dx, \quad F_{\sigma_{-1}}(x) = \int_{a_{\sigma-1}}^{x} \psi_{\sigma_{-1}}(x)\,dx;$$

d'altra parte

$$\lim_{\alpha=0} \frac{F(x_\sigma + \alpha) - 2F(x_\sigma) + F(x_\sigma - \alpha)}{\alpha} = 0,$$

quindi l'espressione

$$\frac{F_\sigma(x_\sigma + \alpha) - F_\sigma(x_\sigma + 0) - F_{\sigma_{-1}}(x_\sigma - 0) + F_{\sigma_{-1}}(x_\sigma - \alpha)}{\alpha}$$

tende per $\alpha = 0$ al limite $C_\sigma - C_{\sigma_{-1}}$.

Ora

$$F_\sigma(x_\sigma + \alpha) = \int_{a_\sigma}^{x_\sigma + \alpha} \psi_\sigma(x)\,dx, \quad F_{\sigma_{-1}}(x_\sigma - \alpha) = \int_{a_{\sigma-1}}^{x_\sigma - \alpha} \psi_{\sigma_{-1}}(x)\,dx,$$

$$F_\sigma(x_\sigma + 0) = \int_{a_\sigma}^{x_\sigma + 0} \psi_\sigma(x)\,dx, \quad F_{\sigma_{-1}}(x_\sigma - 0) = \int_{a_{\sigma-1}}^{x_\sigma - 0} \psi_{\sigma_{-1}}(x)\,dx,$$

per cui

$$\lim_{\alpha=0} \frac{1}{\alpha} \int_{+0}^{\alpha} [\psi_\sigma(x_\sigma + x) - \psi_{\sigma_{-1}}(x_\sigma - x)]\,dx = C_\sigma - C_{\sigma_{-1}}$$

ma nelle ipotesi fatte, cioè di far astrazione dalle funzioni che hanno infiniti massimi e minimi, si ha necessariamente

$$\psi(x_\sigma + 0) - \psi_{\sigma_{-1}}(x_\sigma - 0) + C_{\sigma_{-1}} - C_\sigma = 0,$$

ossia l'integrale

$$\int_{a_{\sigma-1}}^{x_\sigma - \varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_{\sigma+\varepsilon}}^{a} f(x)\,dx$$

converge all'indefinito diminuire di ε.

La funzione $(x - x_\sigma)\psi_\sigma(x)$ non avendo infiniti massimi e minimi, sempre per la nostra ipotesi, e la $\psi_\sigma(x)$ essendo integrabile per $x_\sigma + 0$, dovrà la prima tendere verso un limite per $x = x_\sigma + 0$, che manifestamente non può essere che lo zero, quindi si ha che l'espressione

$$\frac{d}{dx}(x-x_\sigma)\psi_\sigma(x)=(x-x_\sigma)f(x)+\psi(x),$$

e perciò anche l'altra

$$(x-x_\sigma)f(x)$$

è integrabile per $x=x_\sigma+0$, quindi per il teorema testè dimostrato si ha

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_1{}_\sigma\int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon}f(t)\,dt+\sum_1{}_n\frac{1}{\pi}\sum_1^\tau{}_\sigma\int_{x_{\sigma-1}+\varepsilon}^{x_\sigma-\varepsilon}f(t)\cos n(t-x)\,dt.$$

(V. Riemann, p. 40 e 41.)

Poniamo che la $f(x)$ soddisfaccia alle condizioni dette nel lemma e che di più gli integrali

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\psi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\eta}\right)f(x)\,dx,\quad \left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\psi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\eta}\right)f(x)(x_\sigma-x)\,dx,$$

convergano, e si abbia altresì

$$\lim_{\alpha=0}\frac{1}{\alpha}\int_{+0}^{\alpha}\lim_{\varepsilon=+0}\left(\int_{x_\sigma-\alpha}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\psi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\alpha}\right)f(x)\,dx\,d\alpha=0,$$

$\psi_\sigma(\varepsilon)$ soddisfacendo alle condizioni imposte alla $\phi_\sigma(\varepsilon)$, sarà in allora

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\eta}\right)f(t)\cos n(t-x)\,dt=$$

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\psi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\eta}\right)f(t)\cos n(t-x)\,dt,\quad (\sigma=1,\ldots,\tau),$$

come vedrassi in appresso.

Riemann a pagina 36 dice:

«Zerlegt man aber das Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\operatorname{sen} n(x-a)\,dx,$$

in welcher Form von dem Factor $\frac{1}{\pi}$ abgesehen die Coefficienten der Reihe enthalten sind...» a pagina 42:

« Was die Functionen betrifft, welche unendlich viele Maxima und Minima haben, so ist es wohl nicht uberflüssig zu bemerken, dass eine Function $f(x)$, welche unendlich viele Maxima und Minima hat, einer Integration durchgehends fähig sein kann, ohne durch die Fourier'sche Reihe darstellbar zu sein. » ed a pag. 45:

« Eben sowohl aber, wie hienach für eine Function trotz der durchgängigen Möglichkeit der Integration die Fourier'sche Reihe nicht convergiren und selbst... »

Adunque il teorema: se una funzione, continua tranne per un numero limitato di punti ed ovunque integrabile, è esprimibile per serie trigonometrica non lo è che per quella di Fourier, è caso particolare d'altro più generale di Riemann, ed il quale comunque non nettamente enunciato nella Memoria pure chiaro traspare dai periodi testè riportati.

L'idea poi di considerare funzioni, le quali per singoli valori della variabile vanno all'infinito senza essere integrabili, mi fu suggerita dallo studio del paragrafo 12 della Memoria di Riemann, nel quale trovasi il germe di codesta estensione.

Del lemma detto al principio del n. III, pel caso particolare in cui

$$\phi_{\sigma-1}(\varepsilon)=\varepsilon \quad (\sigma=1,\ 2,\dots\ \tau), \quad \nu=0,$$

ho già dato una dimostrazione nel VI volume degli Annali di Matematica di Clebsch e Neumann.

(*Continua.*)

Studio sulla Geometria projettiva

(*del prof.* ENRICO D'OVIDIO, *a Torino.*)

La presente Memoria reca qualche contribuzione ad un argomento che da alcuni anni occupa i geometri, voglio dire la teoria degli spazii di curvatura costante, e precisamente di quelli a tre dimensioni, i quali costituiscono la così detta Geometria non-euclidea o meglio projettiva.

Non essendo mio scopo presentare una esposizione di quanto la scienza possiede su codesto importantissimo campo, posso dispensarmi dal tessere la storia delle ricerche che vi si riferiscono, e limitarmi solo a citare alcuni fra i più cospicui autori, consultando i quali il lettore non solamente potrà discernere quello che nel presente scritto è solo una opportuna ripetizione di cose già note, ma rileverà anche le notizie storiche necessarie ad un ulteriore studio del soggetto e troverà inoltre trattata la parte filosofica di esso:

RIEMANN: *Ueber die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen;* nel vol. XIII delle Memorie di Gottinga;

BELTRAMI: *Saggio d'interpretazione della Geometria non-euclidea;* nel Giorn. di Mat. t. VI, Napoli. — *Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante;* Ann. di Mat., Milano, 1868. — *Osservazione,* ecc.; ibid., 1872;

KLEIN: *Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie;* Math. Ann.; Lipsia, 1871 e 1873;

CAYLEY: *Sixth Memoir upon Quantics;* Phil. Trans.; Londra, 1859. — *On the Non-Euclidian Geometry;* Math. Ann., 1872.

Accennerò ora il contenuto delle seguenti pagine.

Nel § I sono esposte alcune relazioni fra' coefficienti di due forme quadratiche reciproche e parecchie notabili trasformazioni di determinanti aventi per elementi certe funzioni bilineari, facendo capo all'ultimo de'citati lavori del ch.° prof. BELTRAMI. Tali relazioni valgono per spazii di quante si vogliano dimensioni; ma qui non occorre applicarle che a spazii di tre e quattro dimensioni. — Nel § II è compendiata quella parte della prima Memoria del KLEIN, che è indispensabile a porre le definizioni di distanza fra due punti o due piani nella Geometria projettiva. — Nel § III si stabilisce una nozione, la quale non mi pare sia stata prima da altri accennata, e che intanto è la base del presente studio; quella, cioè, della doppia distanza fra due rette nella detta Geometria, e quindi del momento di due rette, ecc., onde deriva poi naturalmente la già nota definizione dell'angolo di due rette uscenti da un punto. — Seguono le definizioni delle distanze fra punti e piani (§ IV), punti e rette o piani e rette (§ V), e le relative espressioni analitiche, la prima delle quali è dovuta al CAYLEY. — Ne' §§ VI-IX sono applicate le precedenti definizioni e le formole che vi si collegano alla ricerca di molte relazioni fra le mutue distanze di punti, piani e rette; tali relazioni rinchiudono come casi particolari le più rilevanti proposizioni della Geometria ordinaria concernenti punti nello spazio, triangoli sferici ed angoli triedri, tetraedri, ecc. — Da ultimo nel § X è trattato dell'assoluto, o superficie fondamentale della Geometria projettiva, rappresentato da una equazione in coordinate di rette; e le formole ivi accennate mi porgeranno forse occasione ad ulteriori studii sulle relazioni metriche fra rette.

I.

1. Siano:

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_n$$

le coordinate omogenee di un elemento in uno spazio di $n-1$ dimensioni e di curvatura costante;

$$A_{xx} \equiv \sum a_{rs} x_r x_s = 0$$

$$(a_{rs} = a_{sr};\ r,\ s = 1,\ 2, \ldots,\ n)$$

l'equazione dell'assoluto o spazio limite di $n-2$ dimensioni rispetto allo spazio proposto, ed a il discriminante della forma quadratica A_{xx}.

Posto

$$\xi_i = \tfrac{1}{2} \frac{\partial A_{xx}}{\partial x_i} \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ n), \tag{1}$$

si ha

$$A_{xx} = \sum x_i \xi_i;$$

e posto anche

$$\alpha_{rs}=\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial a_{rs}},$$

$$A_{\xi\xi}=\sum \alpha_{rs}\xi_r\xi_s,$$

si ha

$$\alpha_{rs}=\alpha_{sr},$$

e si deduce dalle (1)

$$x_i=\tfrac{1}{2}\frac{\partial A_{\xi\xi}}{\partial \xi_i}, \tag{1)'$$

onde

$$A_{\xi\xi}=\sum \xi_i x_i,$$

ovvero

$$A_{\xi\xi}=A_{xx}.$$

Si ha pure

$$\sum_r a_{ir}\alpha_{ir}=1, \quad \sum_r a_{ir}\alpha_{jr}=0.$$

Chiamando poi α il discriminante della forma $A_{\xi\xi}$, ed applicando gli ovvii teoremi su'determinanti ad elementi reciproci a'determinanti che hanno per elementi a_{rs}, $a\alpha_{rs}$ e che quindi sono reciproci, si ottengono le relazioni seguenti:

$$a\alpha=1,$$

$$a_{rs}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_{rs}}, \tag{2}$$

$$\begin{vmatrix} a_{ip} & a_{iq} \\ a_{jp} & a_{jq} \end{vmatrix}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha_{ip}\partial \alpha_{jq}},$$

$$\begin{vmatrix} a_{ip} & a_{iq} & a_{ir} \\ a_{jp} & a_{jq} & a_{jr} \\ a_{kp} & a_{kq} & a_{kr} \end{vmatrix}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial^3 \alpha}{\partial \alpha_{ip}\partial \alpha_{jq}\partial \alpha_{kr}},$$

e così di seguito. Qui $i, j, k, \ldots$, come anche $p, q, r, \ldots$, denotano combinazioni qualunque degl'indici $1, 2, \ldots, n$.

Analogamente, oltre alla relazione ipotetica

$$\alpha_{rs}=\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial a_{rs}},$$

si ha

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ip} & \alpha_{iq} \\ \alpha_{jp} & \alpha_{jq} \end{vmatrix}=\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial a_{ip}\partial a_{jq}}, \tag{2)'$$

$$\left|\begin{array}{ccc} a_{ip} & a_{iq} & a_{ir} \\ a_{jp} & a_{jq} & a_{jr} \\ a_{kp} & a_{kq} & a_{kr} \end{array}\right| = \frac{1}{a} \frac{\partial^3 a}{\partial a_{ip} \partial a_{jp} \partial a_{kr}}, \tag{2)'}$$

e così di seguito.

Le forme A_{xx}, $A_{\xi\xi}$ sono reciproche, e le precedenti eguaglianze mostrano come si trasformino le x, a nelle ξ, α, e viceversa, mediante formole del tutto reciproche. Ad ogni sistema di valori delle x corrisponde un sistema di valori delle ξ, e viceversa.

2. In forza delle formole precedenti può scriversi:

$$A_{xx} = \sum \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \alpha_{rs}} x_r x_s = -\frac{1}{\alpha} \left|\begin{array}{cccc} 0 & x_1 & \cdot & x_n \\ x_1 & \alpha_{11} & \cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & a_{n1} & \cdot & \alpha_{nn} \end{array}\right|,$$

ovvero, usando una notazione più concisa,

$$A_{xx} = -\frac{1}{\alpha} \left\| \begin{array}{cc} 0 & x \\ x & \alpha \end{array} \right\|;$$

similmente può scriversi:

$$A_{\xi\xi} = -\frac{1}{a} \left\| \begin{array}{cc} 0 & \xi \\ \xi & a \end{array} \right\|;$$

e per conseguenza

$$A_{xx} = A_{\xi\xi} = -\frac{1}{\alpha} \left\| \begin{array}{cc} 0 & x \\ x & \alpha \end{array} \right\| = -\frac{1}{a} \left\| \begin{array}{cc} 0 & \xi \\ \xi & a \end{array} \right\|. \tag{3}$$

Più generalmente, siano

$$x'_1, \quad x'_2, \ldots, \quad x'_n$$

le coordinate di un altro elemento e

$$\xi'_1, \quad \xi'_2, \ldots, \quad \xi'_n$$

le corrispondenti ξ, e si costruiscano le funzioni bilineari

$$A_{xx'} \equiv \sum a_{rs} x_r x'_s,$$

$$A_{\xi\xi'} \equiv \sum \alpha_{rs} \xi_r \xi'_s:$$

si troverà allo stesso modo

$$A_{xx'} = A_{\xi\xi'} = \sum x_i \xi'_i = \sum \xi_i x'_i = -\frac{1}{\alpha} \left\| \begin{array}{cc} 0 & x \\ x' & \alpha \end{array} \right\| = -\frac{1}{a} \left\| \begin{array}{cc} 0 & \xi \\ \xi' & a \end{array} \right\|. \tag{4}$$

Aggiungiamo qui alcune trasformazioni di determinanti aventi per elementi funzioni bilineari analoghe alle precedenti, e richiamiamo su di esse l'attenzione del lettore in grazia dell'uso continuo che ci occorrerà di farne.

Si ottiene in primo luogo con facili trasformazioni:

$$\begin{vmatrix} A_{xx_\lambda} & A_{xx_\mu} \\ A_{x'x_\lambda} & A_{x'x_\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \dots & x_n \\ x'_1 & x'_2 \dots & x_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \xi_{\lambda 1} & \xi_{\lambda 2} \dots & \xi_{\lambda n} \\ \xi_{\mu 1} & \xi_{\mu 2} \dots & \xi_{\mu n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ x'_i & x'_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_{\lambda i} & \xi_{\lambda j} \\ \xi_{\mu i} & \xi_{\mu j} \end{vmatrix} \quad (i,\ j=1, \dots,\ n \text{ e } i<j)$$

$$= \sum \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ x'_i & x'_j \end{vmatrix} \left\{ \begin{vmatrix} x_{\lambda 1} & x_{\lambda 2} \dots & x_{\lambda n} \\ x_{\mu 1} & x_{\mu 2} \dots & x_{\mu n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} \dots & a_{in} \\ a_{j1} & a_{j2} \dots & a_{jn} \end{vmatrix} \right\}$$

$$= \sum \begin{vmatrix} x_i & x_j \\ x'_i & x'_j \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{\lambda_p} & x_{\lambda q} \\ x_{\mu_p} & x_{\mu_q} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{ip} & a_{iq} \\ a_{jp} & a_{jq} \end{vmatrix} \quad (p,\ q=1, \dots,\ n \text{ e } p<q)$$

$$= \sum \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha_{ip} \partial \alpha_{jq}} (x_i x'_j - x_j x'_i)(x_{\lambda_p} x_{\mu_q} - x_{\lambda_q} x_{\mu_p})$$

$$= \frac{1}{\alpha} \begin{vmatrix} 0 & 0 & x_1 & \cdot & x_n \\ 0 & 0 & x'_1 & \cdot & x'_n \\ x_{\lambda 1} & x_{\mu 1} & \alpha_{11} & \cdot & \alpha_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{\lambda n} & x_{\mu n} & \alpha_{n1} & \cdot & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha} \left\| \begin{matrix} 0 & & x \\ & & x' \\ x_\lambda & x_\mu & \alpha \end{matrix} \right\|,$$

e per conseguenza

$$\begin{vmatrix} A_{xx_\lambda} & A_{xx_\mu} \\ A_{x'x_\lambda} & A_{x'x_\mu} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{\xi\xi_\lambda} & A_{\xi\xi_\mu} \\ A_{\xi'\xi_\lambda} & A_{\xi'\xi_\mu} \end{vmatrix} \tag{5}$$

$$= \sum \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha_{ip} \partial \alpha_{jq}} (x_i x'_j - x_j x'_i)(x_{\lambda_p} x_{\mu_q} - x_{\lambda_q} x_{\mu_p})$$

$$= \sum \frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial a_{ip} \partial a_{jq}} (\xi_i \xi'_j - \xi_j \xi'_i)(\xi_{\lambda_p} \xi_{\mu_q} - \xi_{\lambda_q} \xi_{\mu_p})$$

$$= \frac{1}{\alpha} \left\| \begin{matrix} 0 & & x \\ & & x' \\ x_\lambda & x_\mu & \alpha \end{matrix} \right\| = \frac{1}{a} \left\| \begin{matrix} 0 & & \xi \\ & & \xi' \\ \xi_\lambda & \xi_\mu & a \end{matrix} \right\|$$

$$(i,\ j,\ p,\ q=1,\ 2, \dots,\ n \text{ e } i<j,\ p<q).$$

Con lo stesso procedimento si trova in generale:

$$\begin{vmatrix} A_{xx_\lambda} & A_{xx_\mu} & \cdot\cdot & A_{xx_\omega} \\ A_{x'x_\lambda} & A_{x'x_\mu} & \cdot\cdot & A_{x'x_\omega} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{x^{(h)}x_\lambda} & A_{x^{(h)}x_\mu} & \cdot\cdot & A_{x^{(h)}x_\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{\xi\xi_\lambda} & A_{\xi\xi_\mu} & \cdot\cdot & A_{\xi\xi_\omega} \\ A_{\xi'\xi_\lambda} & A_{\xi'\xi_\mu} & \cdot\cdot & A_{\xi'\xi_\omega} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{\xi^{(h)}\xi_\lambda} & A_{\xi^{(h)}\xi_\mu} & \cdot\cdot & A_{\xi^{(h)}\xi_\omega} \end{vmatrix} \tag{6}$$

$$= \frac{(-1)^{h-1}}{\alpha} \begin{Vmatrix} & & & x \\ & 0 & & x' \\ & & & \cdot \\ & & & x^{(h)} \\ x_\lambda & x_\mu & \cdot\, x_\omega & \alpha \end{Vmatrix} = \frac{(-1)^{h-1}}{a} \begin{Vmatrix} & & & \xi \\ & 0 & & \xi' \\ & & & \cdot \\ & & & \xi^{(h)} \\ \xi_\lambda & \xi_\mu & \cdot\, \xi_\omega & a \end{Vmatrix}.$$

Però è da notare che per $h \geqq n$ questi determinanti si annullano, e che per $h = n - 1$ si ha

$$\begin{vmatrix} A_{xx_\lambda} & \cdot\cdot & A_{xx_\omega} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{x^{(n-1)}x_\lambda} & \cdot\cdot & A_{x^{(n-1)}x_\omega} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{\xi\xi_\lambda} & \cdot\cdot & A_{\xi\xi_\omega} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{\xi^{(n-1)}\xi_\lambda} & \cdot\cdot & A_{\xi^{(n-1)}\xi_\omega} \end{vmatrix} \tag{7}$$

$$= \frac{1}{\alpha} \begin{vmatrix} x_1 & \cdot\cdot & x_n \\ x'_1 & \cdot\cdot & x'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1^{(n-1)} & \cdot\cdot & x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_{\lambda 1} & \cdot\cdot & x_{\lambda n} \\ x_{\mu 1} & \cdot\cdot & x_{\mu n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{\omega 1} & \cdot\cdot & x_{\omega n} \end{vmatrix} = \frac{1}{a} \begin{vmatrix} \xi_1 & \cdot\cdot & \xi_n \\ \xi'_1 & \cdot\cdot & \xi'_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_1^{(n-1)} & \cdot\cdot & \xi_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi_{\lambda 1} & \cdot\cdot & \xi_{\lambda n} \\ \xi_{\mu 1} & \cdot\cdot & \xi_{\mu n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \xi_{\omega 1} & \cdot\cdot & \xi_{\omega n} \end{vmatrix}.$$

II.

1. Applichiamo le formole esposte innanzi ad uno spazio a tre dimensioni e di curvatura costante.

A tal uopo, le lettere P, Π, R variate con indici od accenti denotino rispettivamente i punti, i piani, e le rette nello spazio a tre dimensioni. E riferendoci ad un tetraedro fisso, siano P_1, P_2, P_3, P_4 i vertici di questo;

Π_1, Π_2, Π_3, Π_4 le facce; x_1, x_2, x_3, x_4 le coordinate di un punto P rispetto al tetraedro; coordinate che differiscono per quattro rispettivi fattori costanti dalle distanze fra il punto P e le facce del tetraedro, quando non siano addirittura eguali a queste distanze.

Sarà allora $A_{xx}=0$ l'equazione dell'assoluto, o spazio limite di due dimensioni, o superficie fondamentale di second'ordine, considerato come luogo di punti.

Le ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4, corrispondenti alle coordinate x_1, x_2, x_3, x_4 del punto P, saranno le coordinate del piano Π polare di P rispetto all'assoluto, e però $A_{\xi\xi}=0$ sarà l'equazione dell'assoluto considerato come inviluppo di piani.

Le ξ differiscono per quattro rispettivi fattori costanti dalle distanze fra' vertici del tetraedro e il piano Π, quando non siano addirittura eguali a queste distanze. Ma per la esatta definizione delle coordinate x e ξ bisognerà ricordare che quando un punto P' cade in un piano Π si ha $\sum x'_i\xi_i=0$.

Nel caso attuale si ha pure

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\alpha_{ip}\partial\alpha_{jq}}=\frac{\partial^2 a}{\partial a_{kr}\partial a_{ls}} \quad \text{e} \quad \frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial a_{ip}\partial a_{jq}}=\frac{\partial^2\alpha}{\partial\alpha_{kr}\partial\alpha_{ls}},$$

ove $ijkl$ e $pqrs$ indicano permutazioni di prima classe (ossia dotate di un numero pari d'inversioni) del gruppo 1234.

2. Ciò posto, i due rapporti $\frac{\lambda}{\mu}$ in cui l'assoluto divide la retta che unisce due punti P, P' sono dati dalla equazione

$$\sum a_{rs}(\mu x_r+\lambda x'_r)(\mu x_s+\lambda x'_s)=0,$$

ossia

$$A_{xx}\mu^2+2A_{xx'}\mu\lambda+A_{x'x'}\lambda^2=0;$$

quindi i due rapporti anarmonici (reciproci l'uno dell'altro), determinati da' punti P, P' e da'due punti comuni alla retta ed all'assoluto, saranno i quozienti de'due valori di $\frac{\lambda}{\mu}$ forniti dall'ultima equazione, vale a dire (posto $i=\sqrt{-1}$)

$$\frac{A_{xx'}\pm i\sqrt{A_{xx}A_{x'x'}-A^2_{xx'}}}{A_{xx'}\mp i\sqrt{A_{xx}A_{x'x'}-A^2_{xx'}}}.$$

Fissiamo la nostra attenzione a quel rapporto che corrisponde al segno superiore di i, e chiamiamo distanza o segmento fra'due punti P, P'

il logaritmo, moltiplicato per $\frac{1}{2i}$, del rapporto anarmonico suddetto: allora indicando con (PP') la distanza così definita (*), sarà

$$(PP') = \frac{1}{2i} \log \frac{A_{xx'} + i\sqrt{A_{xx}A_{x'x'} - A^2_{xx'}}}{A_{xx'} - i\sqrt{A_{xx}A_{x'x'} - A^2_{xx'}}},$$

onde

$$\cos(PP') = \frac{A_{xx'}}{\sqrt{A_{xx}A_{x'x'}}}, \tag{8}$$

$$\operatorname{sen}(PP') = \frac{\sqrt{A_{xx}A_{x'x'} - A^2_{xx'}}}{\sqrt{A_{xx}A_{x'x'}}}.$$

Essendo il logaritmo una funzione che ha per periodo $2i\pi$, la quantità (PP') è una funzione ad infiniti valori e di periodo π; ma, per semplicità, noi assumeremo per (PP') quel valore che è minore di π.

Si può anche scrivere, avuto riguardo alle formole del § I,

$$\cos(PP') = -\frac{\begin{Vmatrix} 0 & x \\ x' & \alpha \end{Vmatrix}}{\left\{\begin{Vmatrix} 0 & x \\ x & \alpha \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & x' \\ x' & \alpha \end{Vmatrix}\right\}^{\frac{1}{2}}}, \tag{8'}$$

$$\operatorname{sen}(PP') = \left\{\frac{\alpha\begin{Vmatrix} 0 & & x \\ & & x' \\ x & x' & \alpha \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 0 & x \\ x & \alpha \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & x' \\ x' & \alpha \end{Vmatrix}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Hanno una stessa distanza D da un punto dato P' tutti i punti P per i quali è verificata l'equazione

$$\cos^2 D \cdot A_{x'x'}A_{xx} - A^2_{xx'} = 0,$$

cioè tutti i punti di una certa superficie di second'ordine, tangente all'assoluto, lungo una conica situata nel piano polare di P' rispetto all'assoluto. Le varie superficie che si ottengono facendo variare D si diranno *sfere* di centro P' e raggio D.

(*) La distanza (PP') differisce solo per un coefficiente costante arbitrario da quelle adoperate dai sig. Beltrami e Klein. Per abbreviare, intendiamo incluso tale coefficiente nella notazione (PP').

Hanno una distanza infinita da un punto P' tutti i punti P per i quali è verificata l'equazione

$$A_{xx'} \pm i\sqrt{A_{xx}A_{x'x'} - A^2_{xx'}} = 0 \text{ ovvero } A_{xx} = 0,$$

cioè tutti i punti dell'assoluto.

Hanno una distanza nulla da P' tutti i punti P per i quali

$$A_{x'x'}A_{xx} - A^2_{xx'} = 0,$$

cioè tutti i punti del cono circoscritto da P' all'assoluto.

Hanno una distanza $\frac{\pi}{2}$ da P' tutti i punti P per i quali

$$A_{xx'} = 0,$$

cioè tutti i punti del piano polare di P' rispetto all'assoluto.

3. Analogamente, definito come distanza o angolo di due piani Π, Π' il logaritmo, moltiplicato per $\frac{1}{2i}$, del rapporto anarmonico determinato da' due piani Π, Π' e da' due piani tangenti all'assoluto condotti per la retta intersezione de' piani Π, Π', ed indicata con $(\Pi\Pi')$ tale distanza, si ha

$$(\Pi\Pi') = \frac{1}{2i}\log\frac{A_{\xi\xi'} + i\sqrt{A_{\xi\xi}A_{\xi'\xi'} - A^2_{\xi\xi'}}}{A_{\xi\xi'} - i\sqrt{A_{\xi\xi}A_{\xi'\xi'} - A^2_{\xi\xi'}}},$$

$$\cos(\Pi\Pi') = \frac{A_{\xi\xi'}}{\sqrt{A_{\xi\xi}A_{\xi'\xi'}}} = -\frac{\begin{Vmatrix} 0 & \xi \\ \xi' & a \end{Vmatrix}}{\left\{\begin{Vmatrix} 0 & \xi \\ \xi & a \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & \xi' \\ \xi' & a \end{Vmatrix}\right\}^{\frac{1}{2}}}, \tag{9}$$

$$\operatorname{sen}(\Pi\Pi') = \frac{\sqrt{A_{\xi\xi}A_{\xi'\xi'} - A^2_{\xi\xi'}}}{\sqrt{A_{\xi\xi}A_{\xi'\xi'}}} = \left\{\frac{a\begin{Vmatrix} 0 & & \xi \\ & & \xi' \\ \xi & \xi' & a \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 0 & \xi \\ \xi & a \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & \xi' \\ \xi' & a \end{Vmatrix}}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Se il piano Π' è dato, per tutti i piani Π aventi da esso la distanza Δ si ha

$$\cos^2\Delta \cdot A_{\xi'\xi'}A_{\xi\xi} - A^2_{\xi\xi'} = 0,$$

e però essi inviluppano una certa superficie di seconda classe tangente all'assoluto lungo una conica contenuta nel piano Π'. Tale superficie diviene l'assoluto per $\Delta = \infty$, la conica ora citata per $\Delta = 0$, il polo di Π' per $\Delta = \frac{\pi}{2}$.

4. Se due punti P, P' sono i poli de' due piani Π, Π' rispetto all'assoluto, si ha manifestamente

$$(PP') = (\Pi\Pi').$$

III.

1. Quando consideriamo una retta R come raggio (*) per due punti PP', assumiamo per coordinate di essa le sei quantità

$$z_{ij} \equiv x_i x'_j - x_j x'_i$$
$$(ij = 12,\ 34,\ 13,\ 42,\ 14,\ 23).$$

I mutui rapporti delle z non si alterano, comunque i punti P, P' scorrano sulla retta; onde ogni funzione delle z, che sia omogena e di grado nullo, rimane immutata per effetto dello spostamento de' due punti.

Quando invece risguardiamo la retta come asse in due piani Π, Π', assumiamo per coordinate di essa le sei quantità

$$\zeta_{ij} \equiv \xi_i \xi'_j - \xi_j \xi'_i,$$

i mutui rapporti delle quali restano del pari invariati, comunque i due piani rotino intorno alla retta.

Per una medesima retta riescono eguali i rapporti

$$z_{ij} : \zeta_{kl},$$

ove $ijkl$ indica una permutazione di prima classe del gruppo 1234; sicchè in ogni funzione omogenea di grado nullo rispetto alle z_{12}, z_{34},... si può sostituire ad esse le ζ_{34}, ζ_{12},...

È bene infine ricordare che

$$z_{12} z_{34} + z_{13} z_{42} + z_{14} z_{23} = 0$$
$$\zeta_{12} \zeta_{34} + \zeta_{13} \zeta_{42} + \zeta_{14} \zeta_{23} = 0.$$

2. Ciò premesso, siano date due rette R, R'. Esistono due rette tali, che si appoggino alle R, R' e sieno conjugate o polari reciproche rispetto all'assoluto: esse sono precisamente quelle due rette che si appoggiano alle R, R' ed alle conjugate di queste. Ora siano P, P' i punti ove la prima

(*) Plücker: *Neue Geometrie des Raumes*, etc. Leipzig, 1868-69.

delle due rette in questione seca le R, R', e P'', P''' i punti ove la seconda seca le stesse R, R'; siano poi Π, Π' i piani condotti per la $P''P'''$ e rispettivamente per le R, R'; e siano Π'', Π''' i piani condotti per la PP' e rispettivamente per le R, R'. È chiaro che si ha

$$(PP') = (\Pi\Pi'), \quad (P''P''') = (\Pi''\Pi''').$$

Noi definiremo come distanze delle due rette date R, R' le due quantità

$$(PP'), \quad (P''P''')$$

o le equivalenti

$$(\Pi\Pi'), \quad (\Pi''\Pi''') \ (*).$$

Il prodotto de' seni delle due distanze potrà chiamarsi il momento delle due rette R, R', l'una rispetto all'altra; il prodotto de' coseni lo chiameremo il co-momento.

È chiaro che le distanze di due rette sono eguali a quelle delle loro conjugate e superano di $\frac{\pi}{2}$ le distanze fra una delle due rette e la conjugata dell'altra; onde il co-momento delle due rette è il momento di una di di esse rispetto alla conjugata dell'altra. È anche evidente che le rette PP''', $P'P''$ hanno le stesse distanze delle R, R'.

3. Per ottenere l'espressione del momento e del co-momento mediante le coordinate z e z' delle rette R, R', ricorriamo alle formole (5) e (7) del § I, tenendo presente che nella nostra ipotesi si ha

$$A_{xx''} = A_{xx'''} = A_{x'x''} = A_{x'x'''} = 0:$$

sicchè verrà

$$\begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xx''} \\ A_{x''x} & A_{x''x''} \end{vmatrix} = A_{xx} A_{x''x''} = \sum \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha_{ip} \partial \alpha_{jq}} z_{ij} z_{pq},$$

$$\begin{vmatrix} A_{x'x'} & A_{x'x'''} \\ A_{x'''x'} & A_{x'''x'''} \end{vmatrix} = A_{x'x'} A_{x'''x'''} = \sum \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha_{ip} \partial \alpha_{jq}} z'_{ij} z'_{pq},$$

$$\begin{vmatrix} A_{xx'} & A_{xx'''} \\ A_{x''x'} & A_{x''x'''} \end{vmatrix} = A_{xx'} A_{x''x'''} = \sum \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha_{ip} \partial \alpha_{jq}} z_{ij} z'_{pq},$$

$$(ij,\ pq = 12,\ 34,\ 13,\ 42,\ 14,\ 23)$$

(*) Non ci fermiamo qui a mostrare come codeste due distanze corrispondano all'angolo ed alla minima distanza di due rette nella Geometria Euclidea.

$$\begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xx'} & A_{xx''} & A_{xx'''} \\ A_{x'x} & A_{x'x'} & A_{x'x''} & A_{x'x'''} \\ A_{x''x} & A_{x''x'} & A_{x''x''} & A_{x''x'''} \\ A_{x'''x} & A_{x'''x'} & A_{x'''x''} & A_{x'''x'''} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xx'} \\ A_{x'x} & A_{x'x'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{x''x''} & A_{x''x'''} \\ A_{x'''x''} & A_{x'''x'''} \end{vmatrix} = \frac{1}{\alpha} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{vmatrix}^2$$

$$= \frac{1}{\alpha}(z_{12}z'_{34} + z_{34}z'_{12} + z_{13}z'_{42} + z_{42}z'_{13} + z_{14}z'_{23} + z_{23}z'_{14})^2.$$

Quindi le due equazioni

$$\mathrm{m}(RR') = \operatorname{sen}(PP')\operatorname{sen}(P''P''') = \left\{ \frac{\begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xx'} \\ A_{x'x} & A_{x'x'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{x''x''} & A_{x''x'''} \\ A_{x'''x''} & A_{x'''x'''} \end{vmatrix}}{A_{xx} A_{x'x'} A_{x''x''} A_{x'''x'''}} \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathrm{cm}(RR') = \cos(PP')\cos(P''P''') = \frac{A_{xx'} A_{x''x'''}}{\sqrt{A_{xx} A_{x'x'} A_{x''x''} A_{x'''x'''}}}$$

divengono

$$\mathrm{m}(RR') = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{z_{12}z'_{34} + z_{34}z'_{12} + z_{13}z'_{42} + z_{42}z'_{13} + z_{14}z'_{23} + z_{23}z'_{14}}{\left\{ \sum \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha_{ip} \partial \alpha_{jq}} z_{ij} z_{pq} \sum \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha_{ip} \partial \alpha_{jq}} z'_{ij} z'_{pq} \right\}^{\frac{1}{2}}}, \tag{10}$$

$$\mathrm{cm}(RR') = \frac{\sum \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha_{ip} \partial \alpha_{jq}} z_{ij} z'_{pq}}{\left\{ \sum \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha_{ip} \partial \alpha_{jq}} z_{ij} z_{pq} \sum \frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha_{ip} \partial \alpha_{jq}} z'_{ij} z'_{pq} \right\}^{\frac{1}{2}}}, \tag{11}$$

e forniscono le due espressioni cercate.

Si osservi che i secondi membri delle due ultime equazioni sono omogenei e di grado zero nelle z e z', e che quindi nelle

$$z_{12} = x_1 x_2' - x_2 x_1', \ldots \quad \text{e} \quad z_{12}' = x_1'' x_2''' - x_2'' x_1''', \ldots$$

le x, x', x'', x''' possono rappresentare le coordinate di due coppie qualunque di punti presi sulle R, R'. Se dunque si volesse esprimere $\mathrm{m}(RR')$ e $\mathrm{cm}(RR')$ mediante le coordinate di due coppie di punti qualunque delle R, R', si potrebbe sostituire alle precedenti espressioni le seguenti più esplicite:

$$\mathrm{m}(RR') = \frac{\sqrt{a} \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1' & x_2' & x_3' & x_4' \\ x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\ x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4''' \end{vmatrix}}{\left\{ \left\| \begin{matrix} 0 & & x \\ & & x' \\ x & x' & \alpha \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & & x'' \\ & & x''' \\ x'' & x''' & \alpha \end{matrix} \right\| \right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xx'} & A_{xx''} & A_{xx'''} \\ A_{x'x} & A_{x'x'} & A_{x'x''} & A_{x'x'''} \\ A_{x''x} & A_{x''x'} & A_{x''x''} & A_{x''x'''} \\ A_{x'''x} & A_{x'''x'} & A_{x'''x''} & A_{x'''x'''} \end{vmatrix}}{\left\{ \begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xx'} \\ A_{x'x} & A_{x'x'} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_{x''x''} & A_{x''x'''} \\ A_{x'''x''} & A_{x'''x'''} \end{vmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}}}, \tag{10'}$$

$$\mathrm{cm}(RR') = \frac{\left\| \begin{matrix} 0 & x \\ & x' \\ x'' & x''' & \alpha \end{matrix} \right\|}{\left\{ \left\| \begin{matrix} 0 & x \\ & x' \\ x & x' & \alpha \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} 0 & x'' \\ & x''' \\ x'' & x''' & \alpha \end{matrix} \right\| \right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left| \begin{matrix} A_{xx''} & A_{xx'''} \\ A_{x'x''} & A_{x'x'''} \end{matrix} \right|}{\left\{ \left| \begin{matrix} A_{xx} & A_{xx'} \\ A_{x'x} & A_{x'x'} \end{matrix} \right| \left| \begin{matrix} A_{x''x''} & A_{x''x'''} \\ A_{x'''x''} & A_{x'''x'''} \end{matrix} \right| \right\}^{\frac{1}{2}}}. \quad (11)'$$

Basterà mutare le x, z, α nelle ξ, ζ, a per ottenere $\mathrm{m}(RR')$ e $\mathrm{cm}(RR')$ espressi nelle coordinate delle rette R, R' considerate come assi, o, più esplicitamente, nelle coordinate di due coppie di piani condotti per le R, R'.

4. Rendiamo adesso a P, P', P'', P''' il significato originale. Allora la relazione

$$[\mathrm{sen}(PP') + \mathrm{sen}(P''P''')]^2 = [1 + \mathrm{m}(RR')]^2 - \mathrm{cm}^2(RR'),$$

insieme alla

$$\mathrm{sen}(PP')\,\mathrm{sen}(P''P''') = \mathrm{m}(RR'),$$

serve a determinare i seni delle due distanze fra R ed R' quando siano date le coordinate di queste rette, ovvero di due coppie di punti o piani che le individuino.

E similmente la

$$[\cos(PP') + \cos(P''P''')]^2 = [1 + \mathrm{cm}(RR')]^2 - \mathrm{m}^2(RR')$$

con la

$$\cos(PP')\cos(P''P''') = \mathrm{cm}(RR')$$

determina i coseni delle distanze medesime.

5. Il momento di due rette è nullo quando esse s'incontrano (*). Infatti l'annullarsi del momento implica che sia nulla una almeno delle distanze (PP'), $(P''P''')$: ora la prima, per es., si annulla qnando P' coincide con P e quando la PP' è tangente all'assoluto (§ II): nel primo caso le due rette hanno un punto comune; e nel secondo caso le PP', $P''P'''$ stanno in un piano tangente all'assoluto e sono conjugate armonicamente rispetto a quelle due rette dell'assoluto che cadono nel detto piano, onde anche l'altra distanza è nulla e le rette R, R' giacciono nel piano tangente. In altri termini, tutte le rette R che hanno momento nullo rispetto ad una medesima R' costituiscono un complesso lineare speciale intorno ad essa R'.

(*) Ciò si può anche dedurre dall'osservazione, che allora $z_{12}z'_{34} + \cdots + z_{23}z'_{14} = 0$.

Il co-momento di una qualunque di queste rette R rispetto alla R' si riduce al coseno di quella unica distanza fra R ed R' che per avventura non è nulla, e che può ben dirsi la distanza o l'angolo delle due rette R, R'. Sicchè l'angolo o la distanza di due rette che si sechino è il logaritmo, moltiplicato per $\frac{1}{2i}$, del rapporto anarmonico determinato dalle due rette e dalle due tangenti condotte dal loro punto comune alla conica secondo cui il loro piano seca l'assoluto, le quali tangenti sono anche le due generatrici secondo cui il piano delle due rette seca il cono circoscritto all'assoluto dal loro punto d'incontro.

Tale distanza si annulla anch'essa quando le due rette coincidono, quando stanno in un piano tangente all'assoluto, e quando si secano in un punto dell'assoluto. In questi casi il co-momento raggiunge l'unità.

6. Esaminiamo ora i casi in cui è nullo il co-momento. Ciò avviene quando una almeno delle due distanze (PP'), $(P''P''')$ sia $\frac{\pi}{2}$, ovvero quando ciascuna delle rette R, R' incontri la conjugata dell'altra. Allora le due rette possono chiamarsi perpendicolari, ed il momento si riduce al seno dell'altra distanza. Se anche quest'altra distanza è $\frac{\pi}{2}$, cioè se le due rette sono conjugate rispetto all'assoluto, allora esse riescono due volte perpendicolari: il loro momento è l'unità.

Quindi segue che ad una retta R' ne corrispondono infinite perpendicolari, e sono tutte le rette che incontrano la conjugata di R', fra le quali conta la stessa conjugata come due volte perpendicolare ad R'. In altri termini, tutte le rette perpendicolari ad una stessa R' costituiscono un complesso lineare speciale intorno alla sua conjugata.

Quelle perpendicolari che passano per un dato punto formano un fascio nel piano individuato dal punto e dalla conjugata di R'; e quelle che giacciono in un dato piano formano un fascio intorno al punto ove il piano taglia la conjugata suddetta.

Quelle rette che si appoggiano simultaneamente ad una retta ed alla sua conjugata sono le loro comuni perpendicolari secanti. Esse costituiscono una congruenza lineare avente per direttrici le due rette conjugate.

A due rette corrispondono infinite perpendicolari comuni, e sono quelle rette che si appoggiano alle conjugate delle due rette proposte, ovvero costituiscono una congruenza lineare avente per direttrici le conjugate delle due rette date. Per ogni punto ne passa una ed in ogni piano ne giace una (eccetto i punti delle direttrici e i piani per ciascuna direttrice). Infinite fra tali rette secano una retta assegnata, e costituiscono una superficie rigata di secondo grado; due sole secano due rette assegnate. In particolare, due perpendicolari comuni secano le due rette date, e sono appunto quelle di cui ci siamo serviti di sopra per istabilire la nozione delle due distanze fra due rette.

Ond'è che le distanze fra due rette date possono definirsi: 1° come i segmenti che le due rette segnano sulle loro due comuni perpendicolari secanti; 2° come gli angoli compresi fra le coppie di piani condotti per le due rette date e rispettivamente per ciascuna delle loro due comuni perpendicolari secanti; 3° od anche, come il segmento segnato dalle due rette date sopra una delle dette perpendicolari e l'angolo compreso fra i piani condotti per ciascuna delle due rette e per la medesima perpendicolare.

IV.

1. Tutte le rette uscenti dal polo P di un piano Π sono perpendicolari a tutte le rette del piano, anzi sono perpendicolari due volte a quelle che incontrano; quindi tutte le rette uscenti dal polo P possono dirsi *perpendicolari* al piano Π. Le distanze intercette su di esse fra il polo ed il piano sono tutte eguali a $\frac{\pi}{2}$.

La perpendicolare condotta da un punto ad un piano è, per conseguenza, la retta che passa pel punto e pel polo del piano. E la *distanza* fra il punto ed il piano è il segmento compreso fra il punto ed il piede della perpendicolare condotta dal punto sul piano; quindi la detta distanza è l'eccesso di $\frac{\pi}{2}$ sulla distanza fra il polo del piano ed il punto, od anche l'eccesso di $\frac{\pi}{2}$ sulla distanza fra il piano dato ed il piano polare del punto dato.

2. Siano P, Π' il punto ed il piano dati, Π il piano polare di P, P' il polo di Π', ed indichi $(P\Pi')$ la distanza fra P e Π': avremo dalla (8)

$$\operatorname{sen}(P\Pi') = \frac{A_{xx'}}{\sqrt{A_{xx}A_{x'x'}}};$$

e siccome (§ I)

$$A_{xx'} = \sum x_i \xi'_i \quad (i = 1, \ldots, 4),$$

e

$$A_{x'x'} = A_{\xi'\xi'};$$

così

$$\operatorname{sen}(P\Pi') = \frac{\sum x_i \xi'_i}{\sqrt{A_{xx} A_{\xi'\xi'}}}. \tag{12}$$

Si scorge con facili considerazioni geometriche, o con l'uso delle formole già stabilite, che l'angolo di due piani è eguale all'angolo delle due rette secondo le quali essi vengono intersecati da un piano perpendicolare ad entrambi (cioè condotto per la conjugata della loro intersezione), ed è supplemento a π dell'angolo di due rette condotte da un punto comune a' due piani perpendicolarmente ad essi (cioè dirette a' loro poli).

La distanza fra un punto ed un piano, e quella fra il polare dell'uno e il polo dell'altro, sono eguali e contate sulla stessa retta.

V.

1. Fra le infinite rette secanti perpendicolarmente una data retta R ve ne ha una che passa per un dato punto P, cioè quella che passando per P si appoggia ad R ed alla conjugata di R. Distanza fra il punto P e la retta R è la distanza fra P ed il punto ove la detta perpendicolare seca la R. Onde le distanze di uno stesso punto da due rette conjugate sono nella medesima perpendicolare e differiscono di $\frac{\pi}{2}$.

Del pari, ogni piano Π contiene una delle perpendicolari secanti la R, e questa perpendicolare è in un piano tanto con R quanto con la conjugata di R. Distanza od angolo fra il piano Π e la retta R è la distanza fra Π ed il piano condotto per la detta perpendicolare e per R. Onde le distanze di uno stesso piano da due rette conjugate differiscono di $\frac{\pi}{2}$ e stanno intorno alla medesima perpendicolare.

La distanza fra un punto ed una retta eguaglia quella fra il piano polare del punto e la conjugata della retta.

2. Per esprimere la distanza (PR) nelle coordinate di P e di R, chiamiamo P', P'' due punti di R e P''' il punto in cui il piano PR seca la

conjugata di R: sicchè si avrà

$$A_{x'x'''} = A_{x''x'''} = 0$$

e

$$x_i''' = \lambda x'_i + \mu x_i'' + \nu x_i,$$

ove $i=1,\ldots, 4$ e λ, μ, ν sono tre numeri che soddisfanno alla equazione

$$\lambda + \mu + \nu = 1.$$

Ne segue:

$$A_{x'x'''} = \lambda A_{x'x'} + \mu A_{x'x''} + \nu A_{x'x} = 0,$$

$$A_{x''x'''} = \lambda A_{x''x'} + \mu A_{x''x''} + \nu A_{x''x} = 0,$$

dalle quali due equazioni si ricava

$$\frac{\lambda}{\begin{vmatrix} A_{x'x''} & A_{x'x} \\ A_{x''x''} & A_{x''x} \end{vmatrix}} = \frac{\mu}{\begin{vmatrix} A_{x'x} & A_{x'x'} \\ A_{x''x} & A_{x''x'} \end{vmatrix}} = \frac{\nu}{\begin{vmatrix} A_{x'x'} & A_{x'x''} \\ A_{x''x'} & A_{x''x''} \end{vmatrix}}.$$

Si ha pure

$$A_{xx'''} = \lambda A_{xx'} + \mu A_{xx''} + \nu A_{xx},$$

ovvero, per le ultime equazioni,

$$A_{xx'''} = \nu \frac{\begin{vmatrix} A_{x'x'} & A_{x'x''} & A_{x'x} \\ A_{x''x'} & A_{x''x''} & A_{x''x} \\ A_{xx'} & A_{xx''} & A_{xx} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_{x'x'} & A_{x'x''} \\ A_{x''x'} & A_{x''x''} \end{vmatrix}},$$

ed avuto riguardo alle (5) e (6),

$$A_{xx'''} = -\nu \frac{\left\| \begin{matrix} & & & x' \\ & 0 & & x'' \\ & & & x \\ x' & x'' & x & \alpha \end{matrix} \right\|}{\left\| \begin{matrix} & 0 & x' \\ & & x'' \\ x' & x'' & \alpha \end{matrix} \right\|} = -\nu \frac{\sum \dfrac{\partial^2 \left\| \begin{matrix} 0 & x \\ x & \alpha \end{matrix} \right\|}{\partial \alpha_{ip} \partial \alpha_{jq}} z_{ij} z_{pq}}{\sum \dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha_{ip} \partial \alpha_{jq}} z_{ij} z_{pq}}.$$

Da ultimo si ha

$$A_{x'''x'''} = \lambda A_{x'x'''} + \mu A_{x''x'''} + \nu A_{xx'''} = \nu A_{xx'''}.$$

Adunque, sostituendo nella equazione

$$\operatorname{sen}^2(PR) = \cos^2(PP''') = \frac{A^2_{xx'''}}{A_{xx} A_{x'''x'''}} = \frac{A_{xx'''}}{\nu A_{xx}},$$

risulta

$$\operatorname{sen}^2(PR) = -\frac{\sum \dfrac{\partial^2 \begin{Vmatrix} 0 & x \\ x & \alpha \end{Vmatrix}}{\partial \alpha_{ip} \partial \alpha_{jq}} z_{ij} z_{pq}}{A_{xx} \cdot \sum \dfrac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha_{ip} \partial \alpha_{jq}} z_{ij} z_{pq}}. \tag{13}$$

Mutando le lettere P, a, x, z nelle Π, α, ξ, ζ, si otterrà la distanza fra un piano Π e la retta R:

$$\operatorname{sen}^2(\Pi R) = -\frac{\sum \dfrac{\partial^2 \begin{Vmatrix} 0 & \xi \\ \xi & a \end{Vmatrix}}{\partial a_{ip} \partial a_{jq}} \zeta_{ij} \zeta_{pq}}{A_{\xi\xi} \cdot \sum \dfrac{\partial^2 a}{\partial a_{ip} \partial a_{jq}} \zeta_{ij} \zeta_{pq}}. \tag{13)'$$

VI.

1. Le definizioni e le formole esposte innanzi ci pongono in grado di trovare alcune relazioni fra le distanze di punti, piani e rette, le quali meritano attenzione e per la loro eleganza e perchè rinchiudono come casi particolari parecchie importanti proposizioni della Geometria ordinaria.

Consideriamo in primo luogo quattro punti P, P', P'', P'''. Dalle (8) e (11)' si ricava facilmente

$$\operatorname{sen}(PP')\operatorname{sen}(P''P''')\operatorname{cm}(PP',\ P''P''') = \frac{\begin{vmatrix} A_{xx''} & A_{xx'''} \\ A_{x'x''} & A_{x'x'''} \end{vmatrix}}{\sqrt{A_{xx} A_{x'x'} A_{x''x''} A_{x'''x'''}}}$$

$$= \frac{\alpha \begin{Vmatrix} 0 & & x \\ & & x' \\ x'' & x''' & \alpha \end{Vmatrix}}{\left\{ \begin{Vmatrix} 0 & x \\ x & \alpha \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & x' \\ x' & \alpha \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & x'' \\ x'' & \alpha \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 & x''' \\ x''' & \alpha \end{Vmatrix} \right\}^{\frac{1}{2}}},$$

onde

$$\operatorname{sen}(PP')\operatorname{sen}(P''P''')\operatorname{cm}(PP',\ P''P''') = \begin{vmatrix} \cos(PP'') & \cos(PP''') \\ \cos(P'P'') & \cos(P'P''') \end{vmatrix}; \tag{14}$$

relazione che contiene come caso particolare una nota proposizione di Gauss (*Disq. gen. c. sup. curv.*) e che riducesi a quella che dà $\operatorname{sen}(PP')$ quando P'' e P''' coincidono con P, P'.

Nel caso che i quattro punti si trovino in un piano, il co-momento si muta nel coseno.

Analogamente, per quattro piani qualunque si ha

$$\operatorname{sen}(\Pi\Pi')\operatorname{sen}(\Pi''\Pi''')\operatorname{cm}(\Pi\Pi',\ \Pi''\Pi''') = \begin{vmatrix} \cos(\Pi\Pi'') & \cos(\Pi\Pi''') \\ \cos(\Pi'\Pi'') & \cos(\Pi'\Pi''') \end{vmatrix} \qquad (14)'$$

2. Si deduce dalle due ultime eguaglianze:

$$\operatorname{sen}(PP')\operatorname{sen}(P''P''')\operatorname{cm}(PP',\ P''P''') + \operatorname{sen}(PP'')\operatorname{sen}(P'''P')\operatorname{cm}(PP'',\ P'''P')$$
$$+\operatorname{sen}(PP''')\operatorname{sen}(P'P'')\operatorname{cm}(PP''',\ P'P'') = 0,$$
$$\operatorname{sen}(\Pi\Pi')\operatorname{sen}(\Pi''\Pi''')\operatorname{cm}(\Pi\Pi',\ \Pi''\Pi''') + \operatorname{sen}(\Pi\Pi'')\operatorname{sen}(\Pi'''\Pi')\operatorname{cm}(\Pi\Pi'',\ \Pi'''\Pi')$$
$$+\operatorname{sen}(\Pi\Pi''')\operatorname{sen}(\Pi'\Pi'')\operatorname{cm}(\Pi\Pi''',\ \Pi'\Pi'') = 0,$$

relazioni, l'analoga delle quali nella Geometria ordinaria è dovuta a Joachimsthal (Journ. Crelle, 24).

VII.

1. Siano ora P, P', P'' tre punti ad arbitrio, e pongasi

$$T = \begin{vmatrix} \cos(PP) & \cos(PP') & \cos(PP'') \\ \cos(P'P) & \cos(P'P') & \cos(P'P'') \\ \cos(P''P) & \cos(P''P') & \cos(P''P'') \end{vmatrix}.$$

La (14) dà

$$\operatorname{sen}(PP')\operatorname{sen}(PP'')\cos(PP',\ PP'') = -\frac{\partial T}{\partial \cos(P'P')};$$

ed è pure

$$\operatorname{sen}^2(PP') = \frac{\partial T}{\partial \cos(P''P')}, \quad \operatorname{sen}^2(PP'') = \frac{\partial T}{\partial \cos(P'P')};$$

quindi

$$[\operatorname{sen}(PP')\operatorname{sen}(PP'')\operatorname{sen}(PP',\ PP'')]^2 =$$
$$\frac{\partial T}{\partial \cos(P'P'')}\,\frac{\partial T}{\partial \cos(P'P')} - \left\{\frac{\partial T}{\partial \cos(P''P')}\right\}^2 = T\cos(PP) = T.$$

Di qui si conclude, tenuto conto delle (8) e (6):

$$\begin{vmatrix} \cos(PP) & \cos(PP') & \cos(PP'') \\ \cos(P'P) & \cos(P'P') & \cos(P'P'') \\ \cos(P''P) & \cos(P''P') & \cos(P''P'') \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \qquad (15)$$

$$
=\frac{\begin{vmatrix} A_{xx} & A_{xx'} & A_{xx''} \\ A_{x'x} & A_{x'x'} & A_{x'x''} \\ A_{x''x} & A_{x''x'} & A_{x''x''} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{A_{xx}\,A_{x'x'}\,A_{x''x''}}} = \alpha\left\{\frac{\begin{Vmatrix} & & & x \\ & 0 & & x' \\ & & & x'' \\ x & x' & x'' & \alpha \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} 0 & x \\ x & \alpha \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 & x' \\ x' & \alpha \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 & x'' \\ x'' & \alpha \end{Vmatrix}\begin{Vmatrix} 0 & x''' \\ x''' & \alpha \end{Vmatrix}}\right\}^{\frac{1}{2}}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\operatorname{sen}(PP')\operatorname{sen}(PP'')\operatorname{sen}(PP',\ PP'') \\
&=\operatorname{sen}(P'P'')\operatorname{sen}(P'P)\operatorname{sen}(P'P'',\ P'P) \\
&=\operatorname{sen}(P''P)\operatorname{sen}(P''P')\operatorname{sen}(P''P,\ P''P')
\end{aligned}
$$

espressioni equivalenti che, per brevità, denoteremo con $(PP'P'')$.

Parimenti si ha per tre piani Π, Π', Π'':

$$
\begin{vmatrix} \cos(\Pi\Pi) & \cos(\Pi\Pi') & \cos(\Pi\Pi'') \\ \cos(\Pi'\Pi) & \cos(\Pi'\Pi') & \cos(\Pi'\Pi'') \\ \cos(\Pi''\Pi) & \cos(\Pi''\Pi') & \cos(\Pi''\Pi'') \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} = \text{ecc.} \tag{15'}
$$

$$
=\operatorname{sen}(\Pi\Pi')\operatorname{sen}(\Pi\Pi'')\operatorname{sen}(\Pi\Pi',\ \Pi\Pi'') = \text{ecc.} = (\Pi\Pi'\Pi'').
$$

È evidente la grande analogia fra le relazioni ora trovate e quelle che si riferiscono, nella Geometria ordinaria, alle varie espressioni dell'area di un triangolo di dati vertici o del così detto seno di un angolo triedro di date facce. È poi noto che tutta la Trigonometria sferica ordinaria si può applicare al triangolo $PP'P''$ o al triedro $\Pi\Pi'\Pi''$, purchè si attribuiscano a'lati ed angoli le loro novelle definizioni. Del resto, sarebbe facile ritrovare le formole trigonometriche in questione seguendo procedimenti simili a quelli da noi qui tenuti.

Se i punti P, P', P'' sono i poli de'piani Π, Π', Π'', sarà

$$
(PP'P'') = (\Pi\Pi'\Pi'').
$$

2. Date due terne di punti, $PP'P''$ e $P_\lambda P_\mu P_\nu$, e denotati con Π, Π' i due piani che esse determinano, si ha

$$
\xi_i = \omega\begin{vmatrix} x_j & x_k & x_l \\ x'_j & x'_k & x'_l \\ x''_j & x''_k & x''_l \end{vmatrix},\quad \xi'_i = \omega'\begin{vmatrix} x_{\lambda j} & x_{\lambda k} & x_{\lambda l} \\ x_{\mu j} & x_{\mu k} & x_{\mu l} \\ x_{\nu j} & x_{\nu k} & x_{\nu l} \end{vmatrix},
$$

ove $ijkl$ è una permutazione di prima classe del gruppo 1234 ed ω, ω'

sono quantità da determinare. Se ne ricava

$$A_{\xi\xi}=\sum \alpha_{rs}\xi_r\xi_s=-\omega^2\left\|\begin{array}{cccc} & & & x\\ & 0 & & x'\\ & & & x''\\ x & x' & x'' & \alpha\end{array}\right\|,$$

$$A_{\xi'\xi'}=-\omega'^2\left\|\begin{array}{cccc} & & & x_\lambda\\ & 0 & & x_\mu\\ & & & x_\nu\\ x_\lambda & x_\mu & x_\nu & \alpha\end{array}\right\|,\quad A_{\xi\xi'}=-\omega\omega'\left\|\begin{array}{cccc} & & & x\\ & 0 & & x'\\ & & & x''\\ x_\lambda & x_\mu & x_\nu & \alpha\end{array}\right\|$$

e

$$\cos(\Pi\Pi')=\frac{A_{\xi\xi'}}{\sqrt{A_{\xi\xi}A_{\xi'\xi'}}}=-\frac{\left\|\begin{array}{cccc} & & & x\\ & 0 & & x'\\ & & & x''\\ x_\lambda & x_\mu & x_\nu & \alpha\end{array}\right\|}{\left\{\left\|\begin{array}{cccc} & & & x\\ & 0 & & x'\\ & & & x''\\ x & x' & x'' & \alpha\end{array}\right\|\cdot\left\|\begin{array}{cccc} & & & x_\lambda\\ & 0 & & x_\mu\\ & & & x_\nu\\ x_\lambda & x_\mu & x_\nu & \alpha\end{array}\right\|\right\}^{\frac{1}{2}}}. \tag{16}$$

Da questa equazione e dalla (15) risulta

$$(PP'P'')(P_\lambda P_\mu P_\nu)\cos(\Pi\Pi') \tag{17}$$

$$=-\frac{\alpha^2\left\|\begin{array}{cccc} & & & x\\ & 0 & & x'\\ & & & x''\\ x_\lambda & x_\mu & x_\nu & \alpha\end{array}\right\|}{\left\{\left\|\begin{array}{cc}0 & x\\ x & \alpha\end{array}\right\|\left\|\begin{array}{cc}0 & x'\\ x' & \alpha\end{array}\right\|\cdots\left\|\begin{array}{cc}0 & x_\nu\\ x_\nu & \alpha\end{array}\right\|\right\}^{\frac{1}{2}}}=\frac{\begin{vmatrix}A_{xx_\lambda} & A_{xx_\mu} & A_{xx_\nu}\\ A_{x'x_\lambda} & A_{x'x_\mu} & A_{x'x_\nu}\\ A_{x''x_\lambda} & A_{x''x_\mu} & A_{x''x_\nu}\end{vmatrix}}{\sqrt{A_{xx}A_{x'x'}\ldots A_{x_\nu x_\nu}}}$$

$$=\begin{vmatrix}\cos(PP_\lambda) & \cos(PP_\mu) & \cos(PP_\nu)\\ \cos(P'P_\lambda) & \cos(P'P_\mu) & \cos(P'P_\nu)\\ \cos(P''P_\lambda) & \cos(P''P_\mu) & \cos(P''P_\nu)\end{vmatrix},$$

la quale relazione è più generale della (15).

Allo stesso modo si ottiene

$$(\Pi\Pi'\Pi'')(\Pi_\lambda\Pi_\mu\Pi_\nu)\cos(PP') \tag{17'}$$

$$
=\begin{vmatrix}
\cos(\Pi\Pi_\lambda) & \cos(\Pi\Pi_\mu) & \cos(\Pi\Pi_\nu) \\
\cos(\Pi'\Pi_\lambda) & \cos(\Pi'\Pi_\mu) & \cos(\Pi'\Pi_\nu) \\
\cos(\Pi''\Pi_\lambda) & \cos(\Pi''\Pi_\mu) & \cos(\Pi''\Pi_\nu)
\end{vmatrix},
$$

ove P, P' sono i punti individuati da due terne di piani: Π, Π', Π'' e Π_λ, Π_μ, Π_ν.

VIII.

1. Presi comunque quattro punti $PP'P''P'''$, si ottiene immediatamente dalle (8), (7), (8)′ e (10)′:

$$
\begin{vmatrix}
\cos(PP) & \cos(PP') & \cos(PP'') & \cos(PP''') \\
\cos(P'P) & \cos(P'P') & \cos(P'P'') & \cos(P'P''') \\
\cos(P''P) & \cos(P''P') & \cos(P''P'') & \cos(P''P''') \\
\cos(P'''P) & \cos(P'''P') & \cos(P'''P'') & \cos(P'''P''')
\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} \tag{18}
$$

$$
=\frac{\begin{vmatrix}
A_{xx} & A_{xx'} & A_{xx''} & A_{xx'''} \\
A_{x'x} & A_{x'x'} & A_{x'x''} & A_{x'x'''} \\
A_{x''x} & A_{x''x'} & A_{x''x''} & A_{x''x'''} \\
A_{x'''x} & A_{x'''x'} & A_{x'''x''} & A_{x'''x'''}
\end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{A_{xx}\,A_{x'x'}\,A_{x''x''}\,A_{x'''x'''}}}
=\frac{\alpha^{\frac{3}{2}}\begin{vmatrix}
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\
x'_1 & x'_2 & x'_3 & x'_4 \\
x_1'' & x_2'' & x_3'' & x_4'' \\
x_1''' & x_2''' & x_3''' & x_4'''
\end{vmatrix}}{\left\{\left\|\begin{matrix} 0 & x \\ x & \alpha \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} 0 & x' \\ x' & \alpha \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} 0 & x'' \\ x'' & \alpha \end{matrix}\right\| \cdot \left\|\begin{matrix} 0 & x''' \\ x''' & \alpha \end{matrix}\right\|\right\}^{\frac{1}{2}}}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{sen}(PP')\ \operatorname{sen}(P''P''')\,\mathrm{m}(PP',\ P''P''') \\
&= \operatorname{sen}(PP'')\ \operatorname{sen}(P'''P')\ \mathrm{m}(PP'',\ P'''P') \\
&= \operatorname{sen}(PP''')\,\operatorname{sen}(P'P'')\ \mathrm{m}(PP''',\ P'P''),
\end{aligned}
$$

le quali espressioni equivalenti denoteremo con

$$(PP'P''P''').$$

Ognun vede come codeste relazioni siano analoghe a quelle che forniscono varie espressioni pel volume di un tetraedro di dati vertici nella Geometria euclidea.

Allo stesso modo per quattro piani si ha

$$
\begin{vmatrix}
\cos(\Pi\Pi) & \cos(\Pi\Pi') & \cos(\Pi\Pi'') & \cos(\Pi\Pi''') \\
\cos(\Pi'\Pi) & \cos(\Pi'\Pi') & \cos(\Pi'\Pi'') & \cos(\Pi'\Pi''') \\
\cos(\Pi''\Pi) & \cos(\Pi''\Pi') & \cos(\Pi''\Pi'') & \cos(\Pi''\Pi''') \\
\cos(\Pi'''\Pi) & \cos(\Pi'''\Pi') & \cos(\Pi'''\Pi'') & \cos(\Pi'''\Pi''')
\end{vmatrix} = \text{ecc.} \tag{18'}
$$

$$=\operatorname{sen}(\Pi\Pi')\operatorname{sen}(\Pi''\Pi''')\,\mathrm{m}(\Pi\Pi',\ \Pi''\Pi''')= \text{ ecc.}$$
$$=(\Pi\Pi'\Pi''\Pi''')\ (*).$$

2. Se i punti $P,\ldots$ sono i poli dei piani $\Pi,\ldots$, si ha
$$(PP'P''P''')=(\Pi\Pi'\Pi''\Pi''').$$

Se invece $\Pi,\ldots$ sono le facce del tetraedro di vertici $P,\ldots$, e si domanda una relazione fra $(PP'P''P''')$ e $(\Pi\Pi'\Pi''\Pi''')$, si osservi che, posto
$$V=\begin{vmatrix} \cos(PP) & \ldots & \cos(PP''') \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos(P'''P) & \ldots & \cos(P'''P''') \end{vmatrix},$$
la (17) darà
$$\cos(\Pi\Pi')=\frac{\dfrac{\partial V}{\partial\cos(PP)}}{(P'P''P''')(P''P'''P)},\ \text{ecc.};$$
d'onde risulta
$$(\Pi\Pi'\Pi''\Pi''')=\begin{vmatrix} \cos(\Pi\Pi) & \ldots & \cos(\Pi\Pi''') \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos(\Pi'''\Pi) & \ldots & \cos(\Pi'''\Pi''') \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$
$$=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial V}{\partial\cos(PP)} & \ldots & \dfrac{\partial V}{\partial\cos(PP''')} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial V}{\partial\cos(P'''P)} & \ldots & \dfrac{\partial V}{\partial\cos(P'''P''')} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}} :(P'P''P''')(P''P'''P)(P'''PP')(PP'P'');$$
e poichè l'ultimo determinante vale V^3 ossia $(PP'P''P''')^6$, si conclude
$$(\Pi\Pi'\Pi''\Pi''')=\frac{(PP'P''P''')^3}{(P'P''P''')(P''P'''P)(P'''PP')(PP'P'')}, \tag{19}$$
che è la relazione domandata.

(*) Nella Geometria ordinaria $(\Pi\Pi'\Pi''\Pi''')=0$.

Reciprocamente

$$(PP'P''P''')=\frac{(\Pi\Pi'\Pi''\Pi''')^3}{(\Pi'\Pi''\Pi''')(\Pi''\Pi'''\Pi)(\Pi'''\Pi\Pi')(\Pi\Pi'\Pi'')}\cdot \tag{19'}$$

3. Consideriamo ora un secondo tetraedro $P_\lambda P_\mu P_\nu P_\varrho$. Avremo dalla (18)

$$(PP'P''P''')\cdot(P_\lambda P_\mu P_\nu P_\varrho) \tag{20}$$

$$=\frac{\alpha^3\begin{vmatrix} x_1 & .. & x_4 \\ x_1' & .. & x_4' \\ x_1'' & .. & x_4'' \\ x_1''' & .. & x_4''' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_{\lambda 1} & .. & x_{\lambda 4} \\ x_{\mu 1} & .. & x_{\mu 4} \\ x_{\nu 1} & .. & x_{\nu 4} \\ x_{\rho 1} & .. & x_{\rho 4} \end{vmatrix}}{\left\{\begin{Vmatrix} 0 & x \\ x & \alpha \end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} 0 & x' \\ x' & \alpha \end{Vmatrix}\cdots\begin{Vmatrix} 0 & x_\rho \\ x_\rho & \alpha \end{Vmatrix}\right\}^{\frac{1}{2}}}=\frac{\begin{vmatrix} A_{xx_\lambda} & A_{xx_\mu} & A_{xx_\nu} & A_{xx_\rho} \\ A_{x'x_\lambda} & A_{x'x_\mu} & A_{x'x_\nu} & A_{x'x_\rho} \\ A_{x''x_\lambda} & A_{x''x_\mu} & A_{x''x_\nu} & A_{x''x_\rho} \\ A_{x'''x_\lambda} & A_{x'''x_\mu} & A_{x'''x_\nu} & A_{x'''x_\rho} \end{vmatrix}}{\sqrt{A_{xx}\,A_{x'x'}\;\dots\;A_{x_\rho x_\rho}}}$$

$$=\begin{vmatrix} \cos(PP_\lambda) & \cos(PP_\mu) & \cos(PP_\nu) & \cos(PP_\varrho) \\ \cos(P'P_\lambda) & \cos(P'P_\mu) & \cos(P'P_\nu) & \cos(P'P_\varrho) \\ \cos(P''P_\lambda) & \cos(P''P_\mu) & \cos(P''P_\nu) & \cos(P''P_\varrho) \\ \cos(P'''P_\lambda) & \cos(P'''P_\mu) & \cos(P'''P_\nu) & \cos(P'''P_\varrho) \end{vmatrix},$$

formola, che ha la sua analoga nella Geometria ordinaria, e che è più generale della (18).

Similmente

$$(\Pi\Pi'\Pi''\Pi''')(\Pi_\lambda\Pi_\mu\Pi_\nu\Pi_\varrho)= \text{ecc.} \tag{20'}$$

$$=\begin{vmatrix} \cos(\Pi\Pi_\lambda) & .. & \cos(\Pi\Pi_\varrho) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cos(\Pi'''\Pi_\lambda) & .. & \cos(\Pi'''\Pi_\varrho) \end{vmatrix}.$$

IX.

Ecco alcune altre relazioni, che si dimostrano col sussidio delle precedenti, e di cui sarà agevole al lettore ravvisare le analoghe nella Geometria euclidea.

1. Dalla (17) si trae, conservando le notazioni che ad essa si riferiscono:

$$[(P'P''P''')(P''P'''P)\operatorname{sen}(\Pi\Pi')]^2=\frac{\partial V}{\partial\cos(PP)}\,\frac{\partial V}{\partial\cos(P'P')}-\left\{\frac{\partial V}{\partial\cos(PP')}\right\}^2$$

$$=V\begin{vmatrix} \cos(PP) & \cos(PP') \\ \cos(P'P) & \cos(P'P') \end{vmatrix}=\operatorname{sen}^2(PP')\cdot(PP'P''P''')^2,$$

onde

$$(PP'P''P''')=\frac{(P'P''P''')(P''P'''P)\,\mathrm{sen}(\Pi\Pi')}{\mathrm{sen}(PP')}=\frac{(P'''PP')(PP'P'')\,\mathrm{sen}(\Pi''\Pi''')}{\mathrm{sen}(P''P''')}=\text{ecc.} \tag{21}$$

e similmente

$$(\Pi\Pi'\Pi''\Pi''')=\frac{(\Pi'\Pi''\Pi''')(\Pi''\Pi'''\Pi)\,\mathrm{sen}(PP')}{\mathrm{sen}(\Pi\Pi')}=\text{ ecc.} \tag{21$'$}$$

2. Si ricava dalla stessa (17)

$$(P'P''P''')(P''P'''P)(P'''PP')(\Pi\Pi'\Pi'')$$
$$=\begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial\cos(PP)} & \frac{\partial V}{\partial\cos(PP')} & \frac{\partial V}{\partial\cos(PP'')} \\ \frac{\partial V}{\partial\cos(P'P)} & \frac{\partial V}{\partial\cos(P'P')} & \frac{\partial V}{\partial\cos(P'P'')} \\ \frac{\partial V}{\partial\cos(P''P)} & \frac{\partial V}{\partial\cos(P''P')} & \frac{\partial V}{\partial\cos(P'P')} \end{vmatrix}^{\frac{1}{2}}$$
$$=V\sqrt{\cos(P'''P''')}=(PP'P''P''')^2,$$

e per conseguenza

$$\frac{(PP'P''P''')^2}{(P'P''P''')(P''P'''P)(P'''PP')(PP'P'')} \tag{22}$$
$$=\frac{(\Pi\Pi'\Pi'')}{(PP'P'')}=\frac{(\Pi'\Pi''\Pi''')}{(P'P''P''')}=\frac{(\Pi''\Pi'''\Pi)}{(P''P'''P)}=\frac{(\Pi'''\Pi\Pi')}{(P'''PP')},$$

ed anche

$$\frac{(\Pi\Pi'\Pi''\Pi''')}{(\Pi'\Pi''\Pi''')(\Pi''\Pi'''\Pi)(\Pi'''\Pi\Pi')(\Pi\Pi'\Pi'')}=\frac{(PP'P'')}{(\Pi\Pi'\Pi'')}=\text{ ecc.} \tag{22$'$}$$

3. Le (15) e (12) porgono

$$(P'P''P''')\,\mathrm{sen}(P\Pi)=(P''P'''P)\,\mathrm{sen}(P'\Pi')=\text{ ecc.} \tag{23}$$
$$=\frac{\alpha^{\frac{3}{2}}\begin{vmatrix} x_1 & \ldots & x_4 \\ x_1' & \ldots & x_4' \\ x_1'' & \ldots & x_4'' \\ x_1''' & \ldots & x_4''' \end{vmatrix}}{\left\{\begin{Vmatrix} 0 & x \\ x & \alpha \end{Vmatrix}\cdots\begin{Vmatrix} 0 & x''' \\ x''' & \alpha \end{Vmatrix}\right\}^{\frac{1}{2}}}$$
$$=(PP'P''P''').$$

Si ha pure

$$(\Pi'\Pi''\Pi''')\,\mathrm{sen}(\Pi P)=\text{ ecc. }=(\Pi\Pi'\Pi''\Pi'''). \tag{23$'$}$$

4. Si può dimostrare anche che

$$\left.\begin{array}{c}\operatorname{sen}(PP')\operatorname{sen}(PP'')\operatorname{sen}(PP''')\\ \left|\begin{array}{ccc}\cos(PP', PP') & \cos(PP', PP'') & \cos(PP', PP''')\\ \cos(PP'', PP') & \cos(PP'', PP'') & \cos(PP'', PP''')\\ \cos(PP''', PP') & \cos(PP''', PP'') & \cos(PP''', PP''')\end{array}\right|^{\frac{1}{2}} = \text{ecc.}\\ =(PP'P''P'''),\end{array}\right\} \quad (24)$$

ove si può mutare le P in Π.

X.

1. Pongasi

$$A_{zz}=\sum\frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\alpha_{ip}\partial\alpha_{jq}}z_{ij}z_{pq}=\sum\left|\begin{array}{cc}a_{ip} & a_{iq}\\ a_{jp} & a_{jq}\end{array}\right|z_{ij}z_{pq}$$

$$(ij,\ pq=12,\ 34,\ 13,\ 42,\ 14,\ 23).$$

Fu già notato (§ II) che la equazione $A_{zz}=0$ è soddisfatta da tutte le rette tangenti all'assoluto, poichè, in forza della (5), essa equivale all'altra

$$A_{xx}A_{x'x'}-A^2_{xx'}=0,$$

denotando con le x e le x' le coordinate di due punti della retta di coordinate z. Tali rette costituiscono un complesso di secondo grado, nel quale tutte le rette passanti per un punto formano il cono circoscritto dal punto all'assoluto e tutte le rette giacenti in un piano inviluppano la conica comune al piano ed all'assoluto: in altri termini, la equazione

$$A_{zz}=0$$

rappresenta l'assoluto in coordinate di rette-raggi.

Giungiamo così ad assegnare l'equazione di una superficie di secondo grado in coordinate di rette, partendo dalla equazione in coordinate di punti, per una via diversa da quella tenuta da Plücker (*).

L'equazione dell'assoluto in coordinate di rette-assi sarà

$$A_{\zeta\zeta}\equiv\sum\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial a_{ip}\partial a_{jq}}\zeta_{ij}\zeta_{pq}=\sum\left|\begin{array}{cc}\alpha_{ip} & \alpha_{iq}\\ \alpha_{jp} & \alpha_{jq}\end{array}\right|\zeta_{ij}\zeta_{pq}=0.$$

(*) Neue Geometrie, ecc., art. 262.

2. Formiamo ora le funzioni bilineari

$$A_{zz'} \equiv \sum \begin{vmatrix} a_{ip} & a_{iq} \\ a_{jp} & a_{jq} \end{vmatrix} z_{ij} z'_{pq},$$

$$A_{\zeta\zeta'} \equiv \sum \begin{vmatrix} \alpha_{ip} & \alpha_{iq} \\ \alpha_{jq} & \alpha_{jp} \end{vmatrix} \zeta_{ij} \zeta'_{pq},$$

con le coordinate z, z' o ζ, ζ' di due rette R, R': allora potremo scrivere concisamente:

$$\begin{aligned} \mathrm{m}(RR') &= \frac{z_{12} z'_{34} + \cdots + z_{23} z'_{14}}{\sqrt{\alpha A_{zz} A_{z'z'}}} = \frac{\zeta_{12} \zeta'_{34} + \cdots + \zeta_{23} \zeta'_{14}}{\sqrt{a A_{\zeta\zeta} A_{\zeta'\zeta'}}}, \\ \mathrm{cm}(RR') &= \frac{A_{zz'}}{\sqrt{A_{zz} A_{z'z'}}} = \frac{A_{\zeta\zeta'}}{\sqrt{A_{\zeta\zeta} A_{\zeta'\zeta'}}}; \end{aligned} \tag{25}$$

ed è visibile l'analogia fra l'ultima formola e quelle che danno il coseno della distanza fra due punti o due piani.

3. Ponendo inoltre

$$\frac{1}{\alpha} \frac{\partial^2 \alpha}{\partial \alpha_{ip} \partial \alpha_{jq}} = \begin{vmatrix} a_{ip} & a_{iq} \\ a_{jp} & a_{jq} \end{vmatrix} = b_{ij,pq}$$

$$\frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial a_{ip} \partial a_{jq}} = \begin{vmatrix} \alpha_{ip} & \alpha_{iq} \\ \alpha_{jp} & \alpha_{jq} \end{vmatrix} = \beta_{ij,pq}$$

si ha

$$A_{zz} = \sum b_{ij,pq} z_{ij} z_{pq}, \quad A_{zz'} = \sum b_{ij,pq} z_{ij} z'_{pq},$$
$$A_{\zeta\zeta} = \sum \beta_{ij,pq} \zeta_{ij} \zeta_{pq}, \quad A_{\zeta\zeta'} = \sum \beta_{ij,pq} \zeta_{ij} \zeta'_{pq},$$

e (cfr. § II, 1)

$$b_{ij,pq} = \frac{1}{\alpha} \beta_{kl,rs}, \quad \beta_{ij,pq} = \frac{1}{a} b_{kl,rs}, \tag{26}$$

ove $ijkl$ e $pqrs$ indicano permutazioni di prima classe del gruppo 1234.

Si ha altresì (posto che $i'j'k'l'$ indichi una permutazione di prima classe diversa da $ijkl$)

$$\sum\nolimits_{pqrs} b_{ij,pq} b_{kl,rs} = a, \quad \sum\nolimits_{pqrs} b_{ij,pq} b_{k'l',rs} = 0,$$

ovvero, per le (26),

$$\sum\nolimits_{pq} b_{ij,pq} \beta_{ij,pq} = 1, \quad \sum\nolimits_{pq} b_{ij,pq} \beta_{i'j',pq} = 0. \tag{27}$$

Dal sistema (27) si ricava immediatamente, indicando con b e β i discriminanti delle forme quadratiche a sei variabili A_{zz}, $A_{\zeta\zeta}$ (*):

$$\beta_{ij,pq}=\frac{1}{b}\frac{\partial b}{\partial b_{ij,pq}};$$

onde si rileva che le forme A_{zz}, $A_{\zeta\zeta}$ e le quantità denotate dalle lettere b, β, si trovano nelle stesse condizioni delle forme A_{xx}, $A_{\xi\xi}$ e delle quantità denotate dalle lettere a, α nel § I. Si avrà dunque senz'altro, applicando le formole (2) e (2)' colà sviluppate;

$$\left.\begin{array}{c} b\beta=1 \\ b_{ij,pq}=\dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial\beta}{\partial\beta_{ij,pq}} \\ \begin{vmatrix} b_{ef,pq} & b_{ef,tu} \\ b_{ij,pq} & b_{ij,tu} \end{vmatrix}=\dfrac{1}{\beta}\dfrac{\partial^2\beta}{\partial\beta_{ef,ij}\partial\beta_{pq,tu}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_{ij,pq}=\dfrac{1}{b}\dfrac{\partial b}{\partial b_{ij,pq}}, \\ \begin{vmatrix} \beta_{ef,pq} & \beta_{ef,tu} \\ \beta_{ij,pq} & \beta_{ij,tu} \end{vmatrix}=\dfrac{1}{b}\dfrac{\partial^2 b}{\partial b_{ef,ij}\partial b_{pq,tu}}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (28)$$

ove

$$ef,\ ij,\ pq,\ tu,\ldots=12,\ 34,\ 13,\ 42,\ 14,\ 23.$$

Le forme A_{zz}, $A_{\zeta\zeta}$ sono reciproche, e si trasformano l'una nell'altra, con la condizione che risulti

$$A_{zz}=A_{\zeta\zeta},$$

per mezzo delle sostituzioni reciproche

$$z_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial A_{\zeta\zeta}}{\partial\zeta_{ij}},\quad \zeta_{ij}=\frac{1}{2}\frac{\partial A_{zz}}{\partial z_{ij}}. \qquad (29)$$

Le z e ζ che figurano in queste sostituzioni sono le coordinate di due rette conjugate rispetto all'assoluto, purchè s'individui l'una retta mediante due punti e la conjugata mediante i piani polari di essi.

In questa ipotesi sarà anche per due rette R, R':

$$A_{zz'}=A_{\zeta\zeta'}.$$

(*) Dalle penultime equazioni si trae $b=a^3$. Analogamente $\beta=\alpha^3$.

4. Due rette, che verifichino la equazione

$$A_{zz'}=0 \text{ ovvero } A_{\zeta\zeta'}=0,$$

hanno il co-momento nullo, e quindi sono perpendicolari (cfr. § III), vale a dire che ciascuna incontra la conjugata dell'altra; onde la detta equazione, quando la R' rimane fissa, rappresenta il complesso lineare speciale costituito dalle rette perpendicolari ad R'. Questo è appunto il complesso polare di R' rispetto al complesso $A_{zz}=0$ ovvero $A_{\zeta\zeta}=0$ (*); e la retta R' e la sua conjugata rispetto all'assoluto sono, nel caso attuale, polari l'una dell'altra rispetto al complesso $A_{zz}=0$ ovvero $A_{\zeta\zeta}=0$.

5. Infine, applicando le rimanenti formole (3), ecc. del citato § I, si trova:

$$A_{zz}=A_{\zeta\zeta}=\sum z_{ij}\zeta_{ij}=-\frac{1}{\beta}\begin{Vmatrix} 0 & z \\ z & \beta \end{Vmatrix}=-\frac{1}{b}\begin{Vmatrix} 0 & \zeta \\ \zeta & b \end{Vmatrix},$$

$$A_{zz'}=A_{\zeta\zeta'}=\sum z_{ij}\zeta'_{ij}=\sum \zeta_{ij}z'_{ij}$$

$$=-\frac{1}{\beta}\begin{Vmatrix} 0 & z \\ z' & \beta \end{Vmatrix}=-\frac{1}{b}\begin{Vmatrix} 0 & \zeta \\ \zeta' & b \end{Vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} A_{zz_\lambda} & A_{zz_\mu} \\ A_{z'z_\lambda} & A_{z'z_\mu} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{\zeta\zeta_\lambda} & A_{\zeta\zeta_\mu} \\ A_{\zeta'\zeta_\lambda} & A_{\zeta'\zeta_\mu} \end{vmatrix}=\frac{1}{\beta}\begin{Vmatrix} 0 & & z \\ & & z' \\ z_\lambda & z_\mu & \beta \end{Vmatrix}=\frac{1}{b}\begin{Vmatrix} 0 & & \zeta \\ & & \zeta' \\ \zeta_\lambda & \zeta_\mu & b \end{Vmatrix},$$

e così via via, sino a

$$\begin{vmatrix} A_{zz_\lambda} & \cdot\ \cdot & A_{zz_\rho} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{z^{v}z_\lambda} & \cdot\ \cdot & A_{z^{v}z_\rho} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_{\zeta\zeta_\lambda} & \cdot\ \cdot & A_{\zeta\zeta_\rho} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ A_{\zeta^{v}\zeta_\lambda} & \cdot\ \cdot & A_{\zeta^{v}\zeta_\rho} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\beta}\begin{vmatrix} z_{12} & \cdot\ \cdot & z_{34} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ z^{v}_{12} & \cdot\ \cdot & z^{v}_{34} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} z_{\lambda,12} & \cdot\ \cdot & z_{\lambda,34} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ z_{\rho,12} & \cdot\ \cdot & z_{\rho,34} \end{vmatrix}=\frac{1}{b}\begin{vmatrix} \zeta_{12} & \cdot\ \cdot & \zeta_{34} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \zeta^{v}_{12} & \cdot\ \cdot & \zeta^{v}_{34} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} \zeta_{\lambda,12} & \cdot\ \cdot & \zeta_{\lambda,34} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \zeta_{\rho,12} & \cdot\ \cdot & \zeta_{\rho,34} \end{vmatrix}.$$

Torino, luglio 1873.

(*) Plücker, op. cit.

Sopra l'equazioni di equilibrio dei corpi solidi elastici

(*Memoria del prof.* ENRICO BETTI, *a Pisa.*)

In questa Memoria dimostro un teorema che, nella teorica delle forze elastiche dei corpi solidi, tiene il luogo che il teorema di GREEN ha nella teorica delle forze che agiscono secondo la legge di NEWTON, e quanto alle applicazioni mi limito a dedurne formule analoghe a quella di GREEN per le funzioni potenziali, per esprimere il coefficiente di condensazione e le componenti della rotazione di un elemento qualunque di un corpo solido elastico, omogeneo ed isotropo deformato per l'azione di forze date arbitrariamente. Altre applicazioni si troveranno nella Teorica della elasticità che si pubblica nel *Nuovo Cimento.*

Sia S lo spazio occupato da un corpo solido elastico omogeneo e σ la superficie che ne forma il contorno; ρ la sua densità; X, Y, Z le componenti, secondo tre assi ortogonali x, y, z, delle forze che agiscono in tutti i punti del corpo; L, M, N le componenti delle forze che agiscono alla superficie σ. Siano u, v, w le componenti degli spostamenti che i punti del corpo hanno ricevuto quando il corpo si è deformato, in guisa che le forze elastiche sviluppate fanno equilibrio alle forze date. Denotiamo con P il potenziale di queste forze elastiche in un elemento del corpo. Se poniamo:

$$\frac{du}{dx}=a,\quad \frac{dv}{dy}=b,\quad \frac{dw}{dz}=c$$

$$\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}=2f,\quad \frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}=2g,\quad \frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}=2h$$

il potenziale P sarà una funzione omogenea di secondo grado delle sei quantità a, b, c, f, g, h, con i coefficienti costanti se il corpo è omogeneo. Affinchè il corpo solido sia in equilibrio è necessario e sufficiente che in tutto lo spazio S siano soddisfatte le equazioni a derivate parziali di 2° ordine

$$
\left.\begin{aligned}
\rho X &= \frac{d}{dx}\frac{dP}{da} + \frac{d}{dy}\frac{dP}{2dh} + \frac{d}{dz}\frac{dP}{2dg} \\
\rho Y &= \frac{d}{dx}\frac{dP}{2dh} + \frac{d}{dy}\frac{dP}{db} + \frac{d}{dz}\frac{dP}{2df} \\
\rho Z &= \frac{d}{dx}\frac{dP}{2dg} + \frac{d}{dy}\frac{dP}{2df} + \frac{d}{dz}\frac{dP}{dc}
\end{aligned}\right\} \qquad (1)
$$

e sopra tutta la superficie σ le equazioni a derivate parziali di 1° ordine

$$
\left.\begin{aligned}
L &= \frac{dP}{da}\alpha + \frac{dP}{2dh}\beta + \frac{dP}{2dg}\gamma \\
M &= \frac{dP}{2dh}\alpha + \frac{dP}{db}\beta + \frac{dP}{2df}\gamma \\
N &= \frac{dP}{2dg}\alpha + \frac{dP}{2df}\beta + \frac{dP}{dc}\gamma
\end{aligned}\right\} \qquad (2)
$$

dove α, β, γ denotano i coseni degli angoli che la normale alla superficie σ, diretta verso l'interno dello spazio S, fa colle direzioni positive degli assi delle x, y e z.

Siano dati due sistemi di forze X, Y, Z, L, M, N applicate allo stesso corpo solido elastico, e distinguiamo con un apice le forze del 1° sistema e le componenti degli spostamenti che loro fanno equilibrio, e con due apici le forze e gli spostamenti del 2° sistema. Moltiplichiamo rispettivamente le tre equazioni (1) nelle quali tutte le quantità sono distinte con un apice per $u''dS$, $v''dS$, $w''dS$, sommiamo e integriamo a tutto lo spazio S. Effettuando la nota integrazione per parti nel secondo membro e ponendo mente all'equazioni (2), avremo

$$
\left.\begin{aligned}
\rho\int_S (X'u'' + Y'v'' + Z'w'')\,dS &= -\int_\sigma (L'u'' + M'v'' + N'w'')\,d\sigma \\
&- \int_S \left(\frac{dP'}{da'}a'' + \frac{dP'}{db'}b'' + \frac{dP'}{dc'}c'' + \frac{dP'}{df'}f'' + \frac{dP'}{dg'}g'' + \frac{dP'}{dh'}h''\right)dS.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)
$$

Applicando lo stesso processo all'equazioni (1) con due apici, si trova

$$
\left.\begin{aligned}
\rho\int_S (X''u' + Y''v' + Z''w')\,dS &= -\int_\sigma (L''u' + M''v' + N''w')\,d\sigma \\
&- \int_S \left(\frac{dP''}{da''}a' + \frac{dP''}{db''}b' + \frac{dP''}{dc''}c' + \frac{dP''}{df''}f' + \frac{dP''}{dg''}g' + \frac{dP''}{dh''}h'\right)dS.
\end{aligned}\right\} \qquad (4)
$$

Ora essendo P' e P'' le funzioni che si ottengono sostituendo, nella funzione omogenea di 2° grado P, alle a, b, c, f, g, h una volta le stesse lettere con un apice e l'altra con due, sarà

$$\frac{dP'}{da'}a''+\frac{dP'}{db'}a''+\cdots=\frac{dP''}{da''}a'+\frac{dP''}{db''}b'+\cdots$$

quindi sottraendo la equazione (4) dalla (3) si ottiene

$$\int_\sigma (L'u''+M'v''+N'w'')\,d\sigma+\rho\int_S (X'u''+Y'v''+Z'w'')\,dS$$
$$=\int_\sigma (L''u'+M''v'+N''w')\,d\sigma+\rho\int_S (X''u'+Y''v'+Z''w')\,dS.$$

Onde il seguente teorema:

Se, in un corpo solido elastico omogeneo, due sistemi di spostamenti fanno rispettivamente equilibrio a due sistemi di forze, la somma dei prodotti delle componenti delle forze del primo sistema per le corrispondenti componenti degli spostamenti degli stessi punti nel secondo sistema è uguale alla somma dei prodotti delle componenti delle forze del secondo sistema per le componenti degli spostamenti nei medesimi punti del primo sistema.

In questo teorema è supposto che le componenti degli spostamenti nei due sistemi siano funzioni finite continue e a un sol valore insieme colle loro derivate prime in tutto lo spazio S.

Se il corpo è isotropo il potenziale P ha la forma:

$$P=-\lambda(a+b+c)^2-\mu(a^2+b^2+c^2+2f^2+2g^2+2h^2)$$

e le equazioni (1) divengono

$$\left.\begin{aligned}&(2\lambda+\mu)\frac{d\Theta}{dx}+\mu\Delta^2 u+\rho X=0\\&(2\lambda+\mu)\frac{d\Theta}{dy}+\mu\Delta^2 v+\rho Y=0\\&(2\lambda+\mu)\frac{d\Theta}{dz}+\mu\Delta^2 w+\rho Z=0\end{aligned}\right\}\qquad(5)$$

e le equazioni (2)

$$\left.\begin{aligned}
&L+2\left(\lambda\Theta+\mu\frac{du}{dx}\right)\alpha+\mu\left(\frac{du}{dy}+\frac{dv}{dx}\right)\beta+\mu\left(\frac{du}{dz}+\frac{dw}{dx}\right)\gamma=0\\
&M+\mu\left(\frac{dv}{dx}+\frac{du}{dy}\right)\alpha+2\left(\lambda\Theta+\mu\frac{dv}{dy}\right)\beta+\mu\left(\frac{dv}{dz}+\frac{dw}{dy}\right)\gamma=0\\
&N+\mu\left(\frac{dw}{dx}+\frac{du}{dz}\right)\alpha+\mu\left(\frac{dw}{dy}+\frac{dv}{dz}\right)\beta+2\left(\lambda\Theta+\mu\frac{dw}{dz}\right)\gamma=0
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

dove

$$\Theta=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}$$

e

$$\Delta^2=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d^2}{dy^2}+\frac{d^2}{dz^2}.$$

Se prendiamo

$$u''=\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+\xi,\quad v''=\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+\eta,\quad w''=\frac{d\frac{1}{r}}{dz}+\zeta$$

dove r denota la distanza di un punto qualunque di coordinate (x, y, z) da un punto di coordinate (x', y', z') dello spazio S occupato dal corpo, poichè

$$\Delta^2\frac{1}{r}=0$$

avremo

$$\Theta''=\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}$$

$$\Delta^2 u''=\Delta^2\xi,\quad \Delta^2 v''=\Delta^2\eta,\quad \Delta^2 w''=\Delta^2\zeta;$$

quindi se le tre funzioni ξ, η, ζ sono finite, continue e a un sol valore insieme colle loro derivate, e soddisfano alle tre equazioni (5), nelle quali $X=Y=Z=0$ in tutto lo spazio S, anche le tre funzioni u'', v'', w'' soddisferanno nello stesso spazio a queste equazioni, e saranno finite, continue e a un sol valore insieme colle loro derivate in tutto lo spazio S', che si ottiene togliendo da S uno spazio s piccolo quanto si vuole che contenga il punto (x', y', z'), nel quale la funzione $\frac{1}{r}$ e le sue derivate divengono infinite. Quindi abbiamo, nella parte di corpo solido che occupa lo spazio S', il sistema delle forze (X', Y', Z') che agiscono sopra ciascun punto di S', delle forze (L', M', N') che agiscono sopra la parte σ del contorno di questo spazio, e delle tensioni (L'_1, M'_1, N'_1) che agiscono sopra l'altra parte σ' del contorno, essendo σ' la superficie che separa lo spazio S dallo spazio s, e il sistema degli spostamenti (u', v', w') che fanno equilibrio a queste forze. Abbiamo inoltre il sistema di forze che risultano dalle tensioni (L'', M'', N'') ed (L_1'', M_1'', N_1'') prodotte rispettivamente alle superficie σ e σ' dagli spostamenti $\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}, \frac{d\frac{1}{r}}{dy}, \frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right)$, e di quelle che risultano dalle tensioni (L^0, M^0, N^0) ed (L_1^0, M_1^0, N_1^0) prodotte dagli spostamenti (ξ, η, ζ), e il sistema degli spostamenti (u'', v'', w'') che fanno equilibrio a questo sistema di forze. Quindi possiamo applicare il teorema precedente, ed osservando che lo spazio s si può prendersi infinitesimo, e perciò

$$\int_{\sigma'} (L_1^0 u' + M_1^0 v' + N_1^0 w')\, d\sigma' = 0,$$

$$\int_{\sigma'} (L'_1 \xi + M'_1 \eta + N'_1 \zeta)\, d\sigma' = 0,$$

e che

$$X'' = Y'' = Z'' = 0,$$

si ottiene

$$\left.\begin{aligned}
&\int_\sigma \left[L'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \xi\right) + M'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \eta\right) + N'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dz} + \zeta\right)\right] d\sigma \\
&\quad + \int_{\sigma'} \left(L'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + M'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + N'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right) d\sigma' \\
&+ \rho \int_{S'} \left[X'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \xi\right) + Y'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \eta\right) + Z'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dz} + \zeta\right)\right] dS' = \\
&= \int_\sigma [(L'' + L^0) u' + (M'' + M^0) v' + (N'' + N^0) w'] \, d\sigma \\
&\quad + \int_{\sigma'} (L''_1 u' + M''_1 v' + N''_1 w')\, d\sigma'.
\end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Ora sostituendo i valori di L'_1, M'_1, N'_1 tratti dalle (6), ed osservando che se prendiamo per σ' una sfera col centro nel punto $(x'\, y'\, z')$ abbiamo sopra σ'

$$\alpha = \frac{dx}{dr}, \quad \beta = \frac{dy}{dr}, \quad \gamma = \frac{dz}{dr}$$

e quindi

$$\int_{\sigma'} \left(L'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + M'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + N'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) d\sigma'$$

$$= -\int_{\sigma'} \left[2\lambda \Theta' \frac{d\frac{1}{r}}{dr} + 2\mu \left(\frac{du'}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \frac{dv'}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \frac{dw'}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) \right] d\sigma'$$

e sostituendo per L_1'', M_1'', N_1'' i valori dati dalle equazioni (6) quando in esse si ponga

$$u = \frac{d\frac{1}{r}}{dx}, \quad v = \frac{d\frac{1}{r}}{dy}, \quad w = \frac{d\frac{1}{r}}{dz},$$

si ottiene

$$\int_{\sigma'} (L_1'' u' + M_1'' v' + N_1'' w')\, d\sigma' = -2\mu \int_{\sigma'} \left(u' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + v' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + w' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) d\sigma'.$$

Onde:

$$\int_{\sigma'} \left(L'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dx} + M'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + N'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) d\sigma' - \int_{\sigma'} (L_1'' u' + M_1'' v' + N_1'' w')\, d\sigma' =$$

$$= -2\lambda \int_{\sigma'} \Theta' \frac{d\frac{1}{r}}{dr} d\sigma' - 2\mu \int_{\sigma'} \left(\frac{du'}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} - u' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dx} \right) d\sigma'$$

$$-2\mu \int_{\sigma'} \left(\frac{dv'}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} - v' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dy} \right) d\sigma' - 2\mu \int_{\sigma'} \left(\frac{dw'}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} - w' \frac{d}{dr} \frac{d\frac{1}{r}}{dz} \right) d\sigma'$$

$$= 8\pi(\lambda + \mu)\Theta$$

denotando con Θ il valore di Θ' nel punto x', y', z'.

Sostituendo nella equazione (7) si ottiene

$$8\pi(\lambda+\mu)\Theta = -\int_\sigma \left[L'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+\xi\right) + M'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+\eta\right) + N'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dz}+\zeta\right)\right] d\sigma$$

$$+\int_\sigma [(L''+L^0)u' + (M''+M^0)v' + (N''+N^0)w'] d\sigma$$

$$-\int_{S'} \left[X'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+\xi\right) + Y'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+\eta\right) + Z'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dz}+\zeta\right)\right] dS'.$$

Essendo la sfera s infinitesima e ξ, η, ζ, X', Y', Z' funzioni sempre finite sarà:

$$\int_s (X'\xi + Y'\eta + Z'\zeta) ds = 0;$$

abbiamo inoltre, denotando con ε il raggio della sfera infinitesima s, e con ϖ la superficie della sfera di raggio uguale all'unità,

$$\int_s \left(X'\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + Y'\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + Z'\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\right) ds = -\int_0^\varepsilon \int_\varpi (X'\alpha + Y'\beta + Z'\gamma)\, dr\, d\varpi$$

che è infinitesimo dell'ordine di ε. Dunque l'integrale triplo, invece di estenderlo allo spazio S' si può estendere allo spazio S' più lo spazio s, ossia allo spazio S.

Se ora le funzioni ξ, η, ζ si prendono in modo che sia

$$L^0 + L'' = 0$$
$$M^0 + M'' = 0$$
$$N^0 + N'' = 0$$

avremo

$$8\pi(\lambda+\mu)\Theta = -\int_\sigma \left[L'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+\xi\right) + M'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+\eta\right) + N'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dz}+\zeta\right)\right] d\sigma$$

$$-\rho\int_S \left[X'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+\xi\right) + Y'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+\eta\right) + Z'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dz}+\zeta\right)\right] dS$$

e così il coefficiente di condensazione Θ espresso per le sole quantità date (L', M', N', X', Y', Z').

Le tre funzioni ξ, η, ζ, che qui tengono il luogo che la funzione di Green ha nella espressione delle funzioni potenziali, hanno un significato fisico, come lo ha la funzione di Green nella elettrostatica.

Infatti:

$$L^0 = -L'' = 2\mu \frac{d}{dp} \frac{d\frac{1}{r}}{dx}$$

$$M^0 = -M'' = 2\mu \frac{d}{dp} \frac{d\frac{1}{r}}{dy}$$

$$N^0 = -N'' = 2\mu \frac{d}{dp} \frac{d\frac{1}{r}}{dz}$$

quindi il teorema:

Le funzioni ξ, η, ζ esprimono le componenti degli spostamenti che prende un corpo elastico isotropo per fare equilibrio a forze applicate alla superficie soltanto, l'azione delle quali è per ogni punto di applicazione uguale in intensità e direzione a quella esercitata da un elemento magnetico situato nel punto (x', y', z'), di momento 2μ, coll'asse parallelo alla normale alla superficie nel punto di applicazione, sopra un polo magnetico situato in questo punto.

Prendiamo:

$$u'' = \frac{d\frac{1}{r}}{dy} + \xi, \quad v'' = -\frac{d\frac{1}{r}}{dx} + \eta, \quad w'' = \zeta$$

dove r ha sempre lo stesso significato e ξ, η, ζ sono funzioni finite, continue e a un sol valore insieme colle loro derivate, che soddisfano in tutto lo spazio S all'equazioni (5), nelle quali:

$$X'' = Y'' = Z'' = 0.$$

Le funzioni u'', v'', w'' saranno anch'esse finite, continue e a un sol valore e soddisferanno alle stesse equazioni in tutto lo spazio S' che si ottiene togliendo da S la sfera infinitesima s che ha il centro nel punto (x', y', z').

Denotiamo con L'_1, M'_1, N'_1 le componenti delle tensioni dovute agli spostamenti u', v', w' sopra la superficie sferica σ' contorno dello spazio S: con L'', M'', N'' le componenti delle tensioni, dovute agli spostamenti $\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}, -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}, 0\right)$, sopra la superficie σ, e con L''_1, M''_1, N''_1 le componenti delle tensioni dovute agli stessi spostamenti sopra σ'; con L^0, M^0, N^0 le componenti delle tensioni sopra σ, dovute agli spostamenti (ξ, η, ζ) e con L^0_1, M^0_1, N^0_1 quelle sopra σ' dovute ai medesimi spostamenti. Osservando che si ha

$$\int_{\sigma'}(L'_1\xi + M'_1\eta + N'_1\zeta)\,d\sigma' = 0,$$

$$\int_{\sigma'}(L^0_1 u' + M^0_1 v' + N^0_1 w')\,d\sigma' = 0,$$

e che

$$X'' = Y'' = Z'' = 0$$

avremo, applicando il nostro teorema

$$\left.\begin{aligned}
&\int_\sigma\left[L'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+\xi\right)+M'\left(-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+\eta\right)+N'\zeta\right]d\sigma+\int_{\sigma'}\left(L'_1\frac{d\frac{1}{r}}{dy}-M'_1\frac{d\frac{1}{r}}{dx}\right)d\sigma'\\
&\qquad+\rho\int_S\left[X'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+\xi\right)+Y'\left(-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+\eta\right)+Z'\zeta\right]dS'\\
&\quad=\int_\sigma[(L''+L^0)u'+(M''+M^0)v'+(N''+N^0)w']\,d\sigma\\
&\qquad+\int_{\sigma'}(L''_1u'+M''_1v'+N''_1w')\,d\sigma'.
\end{aligned}\right\}\quad(8)$$

Sostituendo i valori delle componenti delle tensioni L', M' abbiamo

$$L'\frac{d\frac{1}{r}}{dy}-M'\frac{d\frac{1}{r}}{dx}=2\mu\left(\frac{dv'}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dx}-\frac{du'}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\right)+\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{dv'}{dx}-\frac{du'}{dy}\right)$$

$$+\mu\frac{d\frac{1}{r}}{dz}\left[\left(\frac{dw'}{dy}-\frac{dv'}{dz}\right)\frac{dx}{dr}+\left(\frac{du'}{dz}-\frac{dw}{dx}\right)\frac{dy}{dr}+\left(\frac{dv'}{dx}-\frac{du'}{dy}\right)\frac{dz}{dr}\right]$$

e sostituendo i valori delle componenti delle tensioni L''_1, M''_1, N''_1, dovute agli spostamenti $\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}, -\frac{d\frac{1}{r}}{dx}, 0\right)$ sopra la superficie σ', si ha

$$L''_1 u' + M''_1 v' + N''_1 w' = 2\mu\left(v' \frac{d}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dx} - u' \frac{d}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\right)$$

$$+\mu\left[\frac{dx}{dr}\left(v'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2} - w'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy\,dz}\right) + \frac{dy}{dr}\left(w'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx\,dz} - u'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dz^2}\right) + \frac{dz}{dr}\left(u'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dy\,dz} - v'\frac{d^2\frac{1}{r}}{dx\,dz}\right)\right].$$

Onde:

$$L'_1\frac{d\frac{1}{r}}{dy} - M'_1\frac{d\frac{1}{r}}{dx} - L''_1 u' - M''_1 v' - N''_1 w' =$$

$$= 2\mu\left(\frac{dv'}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dx} - v'\frac{d}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dx} - \frac{du'}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + v'\frac{d}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\right) + \frac{\mu}{r^2}\left(\frac{dv'}{dx} - \frac{du'}{dy}\right)$$

$$+\mu\left[\frac{dx}{dr}\left(\frac{d\,w'\frac{d\frac{1}{r}}{dz}}{dy} - \frac{d\,v'\frac{d\frac{1}{r}}{dz}}{dz}\right) + \frac{dy}{dr}\left(\frac{d\,u'\frac{d\frac{1}{r}}{dz}}{dz} - \frac{d\,w'\frac{d\frac{1}{r}}{dz}}{dx}\right) + \frac{dz}{dr}\left(\frac{d\,v'\frac{d\frac{1}{r}}{dz}}{dz} - \frac{d\,u'\frac{d\frac{1}{r}}{dz}}{dy}\right)\right].$$

Poniamo:

$$\frac{Z-Z'}{r} = \gamma$$

ed osserviamo che si ha

$$\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\frac{dx}{dr} = \frac{d\frac{1}{r}}{dx}\frac{dy}{dr}, \ldots$$

avremo:

$$L'_1\frac{d\frac{1}{r}}{dy} - M'_1\frac{d\frac{1}{r}}{dx} - L''_1 u' - M''_1 v' - N''_1 w' =$$

$$= 2\mu\left(\frac{dv'}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dx} - v'\frac{d}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dx} - \frac{du'}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dy} + u'\frac{d}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\right) + \frac{\mu}{r}\left(\frac{dv'}{dx} - \frac{du'}{dy}\right)$$

$$+\frac{\mu}{r^2}\left[\frac{dx}{dr}\left(\frac{d(v'\gamma)}{dz} - \frac{d(w'\gamma)}{dy}\right) + \frac{dy}{dr}\left(\frac{d(w'\gamma)}{dx} - \frac{d(u'\gamma)}{dz}\right) + \frac{dz}{dr}\left(\frac{d(u'\gamma)}{dy} - \frac{d(v'\gamma)}{dx}\right)\right].$$

Moltiplicando per $d\sigma'$ e integrando a tutta la superficie σ', se osserviamo che r è costante sopra σ', ed u', v', w', γ sono funzioni finite e continue insieme colle loro derivate in tutto lo spazio s, e quindi l'integrale dell'ultimo termine per un teorema noto è uguale a zero, avremo:

$$\int_{\sigma'}\left(L'_1\frac{d\frac{1}{r}}{dy}-M'_1\frac{d\frac{1}{r}}{dx}-L''_1u'-M''_1v'-N''_1w'\right)d\sigma'$$

$$=2\mu\int_{\sigma'}\left(\frac{dv'}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dx}-v'\frac{d}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dx}-\frac{du'}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+u'\frac{d}{dr}\frac{d\frac{1}{r}}{dy}\right)d\sigma'+\mu\int_{\sigma'}\left(\frac{dv'}{dx}-\frac{du'}{dy}\right)\frac{d\sigma'}{r^2}$$

$$=4\pi\mu\left(\frac{du'}{dy}-\frac{dv'}{dx}\right).$$

Sostituendo nella equazione (8) si ottiene:

$$4\mu\pi\left(\frac{du'}{dy}-\frac{dv'}{dx}\right)=-\int_{\sigma}\left[L'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+\xi\right)+M'\left(-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+\eta\right)+N'\zeta\right]d\sigma$$

$$+\int_{\sigma}[(L''+L^0)u'+(M''+M^0)v'+(N''+N^0)w']\,d\sigma$$

$$-\int_{S}\left[X'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+\xi\right)+Y'\left(-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+\eta\right)+Z'\zeta\right]dS.$$

Abbiamo posto lo spazio S invece di S' perchè anche in questo caso l'integrale esteso alla sfera infinitesima s è uguale a zero.

Se determiniamo ξ, η, ζ in modo che sia sopra σ:

$$L''+L^0=0,\quad M''+M^0=0,\quad N''+N^0=0,$$

avremo:

$$4\pi\mu\left(\frac{du'}{dy}-\frac{dv'}{dx}\right)=-\int_{\sigma}\left[L'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+\xi\right]+M'\left(-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+\eta\right)+N'\zeta\right]d\sigma$$

$$-\int_{S}\left[X'\left(\frac{d\frac{1}{r}}{dy}+\xi\right)+Y'\left(-\frac{d\frac{1}{r}}{dx}+\eta\right)+Z'\zeta\right]dS$$

cioè la componente della rotazione dell'elemento che si trova nel punto (x', y', z') espressa per le sole forze che agiscono sul corpo.

Formule analoghe si hanno per le altre due componenti.

Sopra le serie di funzioni sferiche

(*del prof.* ULISSE DINI, *a Pisa*.)

Uno dei teoremi più importanti dell'Analisi è quello che permette di esprimere analiticamente per una serie di funzioni sferiche una funzione di due variabili reali data arbitrariamente sopra la sfera. Le dimostrazioni però di DIRICHLET e di BONNET che ordinariamente si danno di questo teorema non mi pare che possano dirsi del tutto rigorose, a meno che non si facciano sulla natura della funzione certe restrizioni delle quali nelle dimostrazioni stesse non si fà parola (*). Io ho cercato perciò di dare dello stesso teorema una dimostrazione più rigorosa e dotata di maggior generalità (anche pel caso cioè che la funzione abbia un numero infinito di massimi e minimi), e ho cercato pure di completare le dimostrazioni di DIRICHLET intorno alla serie che rappresenta la densità di una materia distribuita su una superficie sferica, quando il potenziale di questa materia è dato in ogni punto della superficie stessa (V. p. es. *Journal de Liouville*, 2e série, tom. II, pag. 57); e credo di esservi riuscito nel modo che ora passo ad esporre.

1. Siano θ e ϕ le solite coordinate sferiche, e $f(\theta, \phi)$ i valori dati della funzione sopra la sfera. Indicando con $P_n(\cos\gamma)$ o più semplicemente con P_n la solita funzione di LEGENDRE, essendo:

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\phi - \phi'),$$

(*) Nella dimostrazione di DIRICHLET p. es. la quantità che si trova indicata con $\Theta'(0)$ dovrebbe calcolarsi cercando il limite di $\Theta'(\psi)$ per ψ positivo e tendente a zero, e non prendendo per essa, come fà DIRICHLET, il valore di $\Theta'(\psi)$ per $\psi=0$, o almeno dovrebbe anche mostrarsi la continuità di $\Theta'(\psi)$ per $\psi=0$, ciò che da DIRICHLET non vien fatto, e porterebbe, mi pare, alcune restrizioni. Nella dimostrazione di BONNET poi si suppone in sostanza che la funzione ammetta delle derivate.

la serie di funzioni sferiche corrispondente alla funzione $f(\theta, \phi)$ nel punto (θ', ϕ') sarà la seguente:

$$\sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^\pi d\theta\int_0^{2\pi} f(\theta, \phi)P_n \operatorname{sen}\theta\, d\phi; \qquad (1)$$

e si tratterà perciò di trovare se e in quali casi questa serie è convergente e ha per somma il valore $f(\theta', \phi')$ della funzione nel punto (θ', ϕ').

Supponiamo perciò che $f(\theta, \phi)$ sia sempre finita e sia anche continua o abbia soltanto alcune discontinuità in un numero finito di punti separati o in un numero finito di linee; e consideriamo dapprima il caso in cui $\theta'=0$, con che $P_n(\cos\gamma)$ si riduce a $P_n(\cos\theta)$ e viene ad essere indipendente da ϕ. Ponendo:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \phi)\, d\phi = F(\theta),$$

la serie (1) si trasformerà nell'altra:

$$\tfrac{1}{2}\sum_0^\infty (2n+1)\int_0^\pi F(\theta)P_n \operatorname{sen}\theta\, d\theta;$$

e quindi per la questione che ci siamo proposti, converrà considerare la somma:

$$S_n = -\tfrac{1}{2}\int_0^\pi [P_0 + 3P_1 + 5P_2 + \cdots + (2n+1)P_n]\, F(\theta) \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

dei primi $n+1$ termini di questa serie, e cercarne il limite per $n=\infty$.

Incominciamo perciò dal trasformare questa somma, e per questo ricordiamo che la funzione $P_n(\cos\gamma)$ non è altro che la funzione che s'indica generalmente con X_n nella quale è stato posto $x=\cos\gamma$; e poichè per la funzione X_n si ha da relazioni note, per $n>0$;

$$(2n+1)X_n = \frac{dX_{n+1}}{dx} - \frac{dX_{n-1}}{dx},$$

e quindi:

$$X_0 + 3X_1 + 5X_2 + \cdots + (2n+1)X_n = \frac{dX_n}{dx} + \frac{dX_{n+1}}{dx};$$

si avrà:

$$P_0 + 3P_1 + 5P_2 + \cdots + (2n+1)P_n = -\frac{1}{\operatorname{sen}\gamma}\left(\frac{dP_n}{d\gamma} + \frac{dP_{n+1}}{d\gamma}\right),$$

e perciò sarà:

$$S_n = -\tfrac{1}{2}\int_0^\pi (P'_n + P'_{n+1}) F(\theta) d\theta, \tag{2}$$

avendo osservato che in S_n $\gamma = \theta$, e avendo indicato con P'_n e P'_{n+1} le derivate di $P_n(\cos\theta)$ e $P_{n+1}(\cos\theta)$ rispetto a θ.

Ora per trovare il limite di questa espressione di S_n per $n = \infty$, incominciamo dall'osservare che se $f(\theta, \phi)$ è, come supponiamo, una funzione finita e continua o avente soltanto alcune discontinuità in un numero finito di punti separati o lungo un numero finito di linee, a meno che alcune di queste linee non siano linee $\theta = \text{cost}$; o porzioni di esse, seguendo i metodi di dimostrazione di Weierstrass e di Schwarz, si trova facilmente che $F(\theta)$ è una funzione continua di θ per tutti i valori di θ fra 0 e π (0 e π al più esclusi); talchè supponendo per la generalità che $f(\theta, \phi)$ sia discontinua lungo le linee $\theta = \alpha_1$, $\theta = \alpha_2, \ldots$ $\theta = \alpha_{m-1}$ in tutta la loro estensione o anche soltanto in alcune parti di esse, la funzione $F(\theta)$ pei valori di θ fra 0 e π (0 e π al più esclusi) sarà discontinua tutt'al più per $\theta = \alpha_1$, $\theta = \alpha_2, \ldots$ $\theta = \alpha_{m-1}$.

Inoltre, se per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ la funzione $f(\theta, \phi)$ sarà continua, o se in questi punti avrà soltanto di quelle discontinuità che possono togliersi mutando il valore della funzione nei punti stessi, o di quelle che compariscono soltanto andandovi lungo un numero finito di meridiani (*), allora $F(\theta)$ sarà continua anche per $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, o almeno coll'avvicinarsi indefinitamente di θ a 0 e a π tenderà verso quantità finite e determinate che saranno i valori di $f(\theta, \phi)$ nei punti stessi, o quelli verso cui $f(\theta, \phi)$ tende, almeno generalmente, andandovi lungo i varii meridiani; e se per $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, $f(\theta, \phi)$ avrà altre discontinuità, allora $F(\theta)$ per $\theta = 0$ o $\theta = \pi$ potrà essa pure essere discontinua, ma ciò non ostante potrà ancora avvenire (come nel caso della continuità) che le quantità $F(\varepsilon)$, e $F(\pi - \varepsilon)$, ove ε è positivo, abbiano limiti finiti e determinati; e noi perciò, volendo conservare

(*) Notiamo bene che col dire che nel punto $\theta = 0$ o $\theta = \pi$, o anche più generalmente in un punto qualunque della sfera preso come polo, la funzione $f(\theta, \varphi)$ ha di quelle discontinuità che compariscono nel punto stesso soltanto andandovi lungo un numero finito dei meridiani corrispondenti a quel punto, intendiamo dire che tolti dalla sfera gli stessi meridiani con spazii superficiali, presi fra meridiani che racchiudano quelli indicati e vicini fra loro quanto si vuole, e cambiato, se occorre, il valore della funzione nel punto che si considera, questa funzione negli spazii restanti diviene continua.

la maggiore generalità che ci è possibile, supporremo soltanto che queste condizioni intorno alle quantità stesse $F(\varepsilon)$ e $F(\pi-\varepsilon)$ siano soddisfatte, senza preoccuparci delle particolari discontinuità che $f(\theta, \phi)$ può avere per $\theta=0$ o $\theta=\pi$; e solo osservando che le discontinuità che possono togliersi mutando il valore della funzione nei punti o lungo le linee corrispondenti non hanno evidentemente influenza sui termini e sulla somma della serie (1) e tutto accade come se queste discontinuità non ci fossero, noi, per non complicare inutilmente il linguaggio, supporremo sempre che di queste discontinuità non ve ne siano.

Ciò posto, indicando con $F(0)$ e $F(\pi)$ i valori limiti di $F(\varepsilon)$ e $F(\pi-\varepsilon)$ per $\varepsilon=0$, esisterà un numero positivo e differente da zero ε tale che per tutti i valori di θ fra 0 e ε e fra $\pi-\varepsilon$ e π le differenze $F(\theta)-F(0)$ e $F(\theta)-F(\pi)$ siano numericamente minori di una quantità data arbitrariamente piccola σ, e si potrà porre:

$$\begin{aligned} S_n = & -\tfrac{1}{2}\int_0^{\varepsilon}(P'_n+P'_{n+1})\{F(\theta)-F(0)\}\,d\theta-\tfrac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}(P'_n+P'_{n+1})F(\theta)\,d\theta- \\ & -\tfrac{1}{2}\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}(P'_n+P'_{n+1})\{F(\theta)-F(\pi)\}\,d\theta-\tfrac{1}{2}F(0)\int_0^{\varepsilon}(P'_n+P'_{n+1})\,d\theta- \\ & -\tfrac{1}{2}F(\pi)\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}(P'_n+P'_{n+1})\,d\theta; \end{aligned}$$

e poichè $P_n(1)=1$, $P_n(-1)=(-1)^n$, $P_n(-\cos\varepsilon)=(-1)^n P_n(\cos\varepsilon)$, si avrà di qui:

$$\left.\begin{aligned} S_n-F(0)= & -\tfrac{1}{2}\int_0^{\varepsilon}(P'_n+P'_{n+1})\{F(\theta)-F(0)\}\,d\theta- \\ & -\tfrac{1}{2}\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon}(P'_n+P'_{n+1})F(\theta)\,d\theta-\tfrac{1}{2}\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi}(P'_n+P'_{n+1})\{F(\theta)-F(\pi)\}\,d\theta- \\ & -\tfrac{1}{2}\{F(0)\pm F(\pi)\}P_n(\cos\varepsilon)-\tfrac{1}{2}\{F(0)\mp F(\pi)\}P_{n+1}(\cos\varepsilon). \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Indichiamo ora con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ le radici fra 0 e π in ordine crescente della equazione $P_n(\cos\theta)=0$, le quali, come è noto, sono diseguali, e comprendono le radici $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{n-1}$ della equazione $P'_n(\cos\theta)=0$, e supponiamo subito ε tanto piccolo che i punti di discontinuità $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{m-1}$ di $F(\theta)$ (se pure vi sono) cadano tutti fra ε e $\pi-\varepsilon$; e osserviamo che per quanto piccolo sia ε per valori sufficientemente grandi di n alcune delle radici λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_n$ della equazione $P_n(\cos\theta)=0$ saranno sempre comprese fra 0 e ε (ε inclus.) e altre fra ε e $\pi-\varepsilon$ e fra $\pi-\varepsilon$ e π ($\pi-\varepsilon$ inclus.) (*).

(*) Ponendo infatti $\cos\theta=x$, $P_n(\cos\theta)$ si muta in X_n e si ha:

$$\frac{X'_n}{X_n}=\frac{1}{x-a_1}+\frac{1}{x-a_2}+\cdots+\frac{1}{x-a_n},$$

essendo a_1, $a_2, \ldots a_n$ le n radici in ordine decrescente della equazione $X_n=0$, le quali, come è noto, sono tutte comprese fra 1 e -1, e all'infuori della radice zero, quando n è dispari, sono due a due eguali e di segno contrario; e da questa facendovi $x=1$, e osservando che $X_n(1)=1$ e che dalla equazione differenziale delle X_n si ha $X'_n=\frac{n(n+1)}{2}$, si trova la equazione:

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{1-a_1}+\frac{1}{1-a_2}+\cdots+\frac{1}{1-a_n},$$

la quale ci dà evidentemente:

$$\frac{n(n+1)}{2}<\frac{n}{1-a_1},$$

e perciò

$$1-a_1<\frac{2}{n+1},$$

donde risulta appunto che fra 0 e ε e quindi anche fra $\pi-\varepsilon$ e π, quando n è sufficientemente grande, esiste sempre almeno una radice della equazione $P_n(\cos\theta)=0$.

Se poi si osserva che quando θ è compreso fra ε e $\pi-\varepsilon$, per una formola nota si può porre (V. Bonnet: *Sur les développ. des Fonct. en séries ordonnées suiv. les Fonct. X_n et Y_n. Journal. de Liouv.* tom. XVII, pag. 270):

$$P_n(\cos\theta)=\frac{2\cos\left(n\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi\operatorname{sen}\theta}}+\frac{A}{n\sqrt{n}\operatorname{sen}^2\varepsilon},$$

ove A è una quantità che dipende da n da θ e da ε, e che qualunque siano n e θ resta sempre finita, si vede sùbito che fra ε e $\pi-\varepsilon$ le radici della equazione $P_n(\cos\theta)=0$, a partire da un valore sufficientemente grande di n, devono corrispondere a valori di θ che rendono $\cos\left(n\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$ dell'ordine di piccolezza almeno di $\frac{1}{n}$ e che quindi sono della forma $\theta=\frac{2k+1}{2n+1}\pi+\frac{\pi}{2(2n+1)}+\frac{\delta}{n}$, ove k è intero, e δ col crescere indefinito di n decresce indefinitamente almeno come $\frac{1}{n}$; e ora, poichè $P_n(\cos\theta)$ è una funzione continua di θ, e quando per es. $\cos\left(n\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\pm 1$ il segno di $P_n(\cos\theta)$ per n abbastanza grande viene ad essere quello dello stesso coseno, si conclude anche che tutti i valori di θ della forma precedente che non sono inferiori ad ε nè superiori a $\pi-\varepsilon$ per tutti i valori interi di k sono radici della equazione $P_n(\cos\theta)=0$; e quindi, siccome ε è arbitrariamente piccolo, oltre a

Inoltre osserviamo che se $\phi(\theta)$ è una funzione qualunque di θ atta alla integrazione si ha:

$$\int_0^{\lambda_1} \phi(\theta) P'_n d\theta = -\phi(\theta_1),$$

$$\int_{\lambda_t}^{\lambda_{t+1}} \phi(\theta) P'_n d\theta = \int_{\lambda_t}^{\mu_t} + \int_{\mu_t}^{\lambda_{t+1}} = \{\phi(\theta_t) - \phi(\theta'_t)\} P_n(\cos\mu_t),$$

ove $\phi(\theta_1)$, $\phi(\theta_t)$, $\phi(\theta'_t)\ldots$ sono valori compresi fra i massimi e minimi (o limiti superiori e inferiori) di $\phi(\theta)$ nei respettivi intervalli d'integrazione da 0 a λ_1, da λ_t a μ_t e da μ_t a $\lambda_{t+1},\ldots$; e se ε è compreso fra λ_s e λ_{s+1} si ha:

$$\int_{\lambda_s}^{\varepsilon} \phi(\theta) P'_n d\theta = \phi(\theta_s) P_n(\cos\varepsilon),$$

$$\int_{\varepsilon}^{\lambda_{s+1}} \phi(\theta) P'_n d\theta = \int_{\varepsilon}^{\mu_s} + \int_{\mu_s}^{\lambda_{s+1}} = \{\phi(\theta_s'') - \phi(\theta'_s)\} P_n(\cos\mu_s) - \phi(\theta_s'') P_n(\cos\varepsilon),$$

o:

$$\int_{\lambda_s}^{\varepsilon} \phi(\theta) P'_n d\theta = \{\phi(\theta_s) - \phi(\theta'_s)\} P_n(\cos\mu_s) + \phi(\theta'_s) P_n(\cos\varepsilon),$$

$$\int_{\varepsilon}^{\lambda_{s+1}} \phi(\theta) P'_n d\theta = \phi(\theta_s'') P_n(\cos\varepsilon),$$

secondochè μ_s è compreso fra ε e λ_{s+1} o fra λ_s e ε, e similmente se $\varepsilon = \mu_s$, e quindi si avrà evidentemente in valore assoluto:

$$\int_0^{\varepsilon} P'_n \{F(\theta) - F(0)\} d\theta < \textstyle\sum_{0,\varepsilon} D_t + \sigma P_n(\cos\varepsilon),$$

$$\int_{\varepsilon}^{\pi-\varepsilon} P'_n F(\theta)\, d\theta < \textstyle\sum_{\varepsilon,\pi-\varepsilon} D_t P_n(\cos\mu_t) + 2M P_n(\cos\varepsilon),$$

$$\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} P'_n \{F(\theta) - F(\pi)\} d\theta < \textstyle\sum_{\pi-\varepsilon,\pi} D_t + \sigma P_n(\cos\varepsilon),$$

---

potere asserire che col crescere indefinito di n questa equazione finisce per avere in vicinanza di $\theta=0$ e $\theta=\pi$ tante radici quante si vuole, si può dire altresì che la differenza fra due radici consecutive λ_t e λ_{t+1}, quando sono comprese fra ε e $\pi-\varepsilon$, per quanto piccolo sia ε, finisce per essere sempre della forma $\frac{\pi}{n}+\frac{\delta'}{n}$ ove δ' decresce indefinitamente col crescere di n, e diviene perciò piccola quanto si vuole.

ove le D_t sono le oscillazioni della funzione $F(\theta)$ negli intervalli da 0 a λ_1, da λ_1 a $\lambda_2, \ldots$ da λ_s a ε, da ε a λ_{s+1}, da λ_{s+1} a $\lambda_{s+2}, \ldots$, le μ_t per $t=s$ e $t=n-s$ sono valori di θ negli intervalli fra ε e λ_{s+1} e fra λ_{n-s-1} e $\pi-\varepsilon$, e le altre sono le radici di $P'_n(\cos\theta)=0$ fra ε e $\pi-\varepsilon$, M è il massimo valore o limite superiore di $F(\theta)$ fra 0 e π, o, se vuolsi, il limite superiore dei valori di $f(\theta, \phi)$ sulla sfera, e le somme $\sum_{0,\varepsilon}$, $\sum_{\varepsilon,\pi-\varepsilon}$, $\sum_{\pi-\varepsilon,\pi}$ sono estese agli intervalli indicati sopra fra 0 e ε, fra ε e $\pi-\varepsilon$, e fra $\pi-\varepsilon$ e π rispettivamente.

Ma per le funzioni $P_n(\cos\theta)$ e $P_{n+1}(\cos\theta)$ si ha fra ε e $\pi-\varepsilon$:

$$P_n = \frac{A_n}{\sqrt{n}\,\mathrm{sen}^2\varepsilon}, \quad P_{n+1} = \frac{A'_n}{\sqrt{n}\,\mathrm{sen}^2\varepsilon},$$

essendo A_n, A'_n funzioni di n, θ, e ε che, quando si lascia fisso ε, per tutti i valori di θ fra ε e $\pi-\varepsilon$ (ε e $\pi-\varepsilon$ inclus.) e per tutti i valori di n restano sempre numericamente inferiori a una quantità finita g_ε; quindi si potrà anche scrivere:

$$\int_0^\varepsilon P'_n\{F(\theta)-F(0)\}d\theta + \int_\varepsilon^{\pi-\varepsilon} P'_n F(\theta)\,d\theta +$$
$$+\int_{\pi-\varepsilon}^{\pi} P'_n\{F(\theta)-F(\pi)\}d\theta < \sum\nolimits_{0,\varepsilon} D_t + \sum\nolimits_{\varepsilon,\pi-\varepsilon} D_t + \frac{g_\varepsilon}{\sqrt{n}\,\mathrm{sen}^2\varepsilon}\left(2M+2\sigma+\sum\nolimits_{\varepsilon,\pi-\varepsilon} D_t\right);$$

e ora avendo riguardo alla (3), coll'osservare che per gli integrali che si deducono da questi cambiandovi P'_n in P'_{n+1}, sussiste questa stessa formola col solo cambiamento delle D_t nelle D'_t corrispondenti ai nuovi intervalli relativi alle radici di $P_{n+1}(\cos\theta)=0$, si vede subito che si avrà in valore assoluto:

$$\left.\begin{aligned} S_n - F(0) < \sum\nolimits_{0,\varepsilon} D_t + \sum\nolimits_{0,\varepsilon} D'_t + \sum\nolimits_{\pi-\varepsilon,\pi} D_t + \sum\nolimits_{\pi-\varepsilon,\pi} D'_t + \\ + \frac{g_\varepsilon}{\sqrt{n}\,\mathrm{sen}^2\varepsilon}\left(6M+4\sigma+\sum\nolimits_{\varepsilon,\pi-\varepsilon} D_t + \sum\nolimits_{\varepsilon,\pi-\varepsilon} D'_t\right). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Questa formola vale qualunque sia il numero delle discontinuità di $f(\theta, \phi)$ e di $F(\theta)$, bastando solo che le quantità $F(0)$ e $F(\pi)$ abbiano un signficato. Venendo ora al caso che abbiamo detto di considerare, quello cioè in cui la discontinuità di $f(\theta, \phi)$ sono in numero finito, osserveremo che, indicando con λ_p, λ_q, $\lambda_r, \ldots$ λ_u le ultime radici della equazione $P_n(\cos\theta)=0$ prima di arrivare ai punti di discontinuità di $F(\theta)$ fra ε e $\pi-\varepsilon$, e con λ_{p_1}, λ_{q_1}, $\lambda_{r_1}, \ldots$ λ_{u_1} quelle che seguono immediatamente questi punti, e introducendo notazioni simili per le radici della equazione $P_{n+1}(\cos\theta)=0$, si potrà anche scrivere evidentemente:

$$S_n - F(0) < \sum_{0,\varepsilon} D_t + \sum_{0,\varepsilon} D'_t + \sum_{\pi-\varepsilon,\pi} D_t + \sum_{\pi-\varepsilon,\pi} D'_t$$
$$+ \frac{g_\varepsilon}{\sqrt{n}\,\mathrm{sen}^2\varepsilon}\{2M(4m-1)+4\sigma+$$
$$+ \sum_{\varepsilon,\alpha_1} D_t + \sum_{\alpha_1,\alpha_2} D_t + \cdots + \sum_{\varepsilon,\alpha_1} D'_t + \sum_{\alpha_1,\alpha_2} D'_t + \cdots\},$$

ove colle notazioni $\sum_{\varepsilon,\alpha_1}$, $\sum_{\alpha_1,\alpha_2},\ldots$ sono ora indicate quelle somme che propriamente colle notazioni precedenti dovrebbero essere indicate con $\sum_{\varepsilon,\lambda_p}$, $\sum_{\lambda_{p_1},\lambda_q},\ldots$ $\sum_{\varepsilon,\lambda'_p}$, $\sum_{\lambda'_{p_1},\lambda'_q},\ldots$; e così le quantità D_t saranno ora tutte della forma $F(\theta_t)-F(\theta'_t)$, essendo $F(\theta_t)$ e $F(\theta'_t)$ valori effettivi della funzione $F(\theta)$.

Ma, essendo $F(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta,\,\phi)\,d\phi$, si ha ora per una qualunque delle somme $\sum_{\varepsilon,\alpha_1}$, $\sum_{\alpha_1,\alpha_2},\ldots$

$$\sum D_t = F(\theta_1)-F(\theta'_1)+F(\theta_2)-F(\theta'_2)+\cdots=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{f(\theta_1,\,\phi)-f(\theta'_1,\,\phi)+f(\theta_2,\,\phi)-f(\theta'_2,\,\phi)+\cdots\}d\phi;$$

quindi indicando con $\sum\delta_t$ il limite superiore delle somme

$$f(\theta_1,\,\phi)-f(\theta'_1,\,\phi)+f(\theta_2,\,\phi)-f(\theta'_2,\,\phi)+\cdots$$

delle oscillazioni della funzione $f(\theta,\,\phi)$ sui varii meridiani $\phi=\mathrm{cost}$; si avrà $\sum D_t \leq \sum\delta_t$, e perciò sarà:

$$S_n - F(0) < \sum_{0,\varepsilon} D_t + \sum_{\pi-\varepsilon,\pi} D_t + \sum_{0,\varepsilon} D'_t + \sum_{\pi-\varepsilon,\pi} D'_t + \frac{g_\varepsilon}{\sqrt{n}\,\mathrm{sen}^2\varepsilon}\{2M(4m-1)+4\sigma+$$
$$+ \sum_{\varepsilon,\alpha_1}\delta_t + \sum_{\alpha_1,\alpha_2}\delta_t + \cdots + \sum_{\varepsilon,\alpha_1}\delta'_t + \sum_{\alpha_1,\alpha_2}\delta'_t + \cdots\},$$

e in questa le somme $\sum_{\varepsilon,\alpha_1}$, $\sum_{\alpha_1,\alpha_2},\ldots$ possono ora anche intendersi estese come in principio agli interi intervalli da ε a α_1, da α_1 a $\alpha_2,\ldots$ e quindi si può anche scrivere:

$$S_n - F(0) < \sum_{0,\varepsilon} D_t + \sum_{\pi-\varepsilon,\pi} D_t + \sum_{0,\varepsilon} D'_t + \sum_{\pi-\varepsilon,\pi} D'_t +$$
$$+ \frac{g_\varepsilon}{\sqrt{n}\,\mathrm{sen}^2\varepsilon}\{2M(4m-1)+4\sigma+\sum_{\varepsilon,\pi-\varepsilon}\delta_t + \sum_{\varepsilon,\pi-\varepsilon}\delta'_t\},$$

e anche:

$$\left.\begin{aligned} S_n - F(0) < \sum\nolimits_{0,\varepsilon}\delta_t + \sum\nolimits_{\pi-\varepsilon,\pi}\delta_t + \sum\nolimits_{0,\varepsilon}\delta'_t + \sum\nolimits_{\pi-\varepsilon,\pi}\delta'_t + \\ + \frac{g_\varepsilon}{\sqrt{n}\,\mathrm{sen}^2\varepsilon}\{2M(4m-1) + 4\sigma + \sum\nolimits_{\varepsilon,\pi-\varepsilon}\delta_t + \sum\nolimits_{\varepsilon,\pi-\varepsilon}\delta'_t\}; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

e ora per queste formole si può dire che S_n col crescere indefinito di n, avrà per limite $F(0)$ tutte le volte che con un valore sufficientemente piccolo di ε, e per qualunque valore di n maggiore di un numero sufficientemente grande ma finito, le somme $\sum\delta_t$ fra parentesi restino finite e le altre $\sum D_t$ o $\sum\delta_t$ possano rendersi minori di quella quantità che più ci piace; e quindi in questo caso la serie (1) sarà convergente e avrà per somma il valore della funzione $f(\theta, \phi)$ nel punto $\theta=0$ quando in questo punto si ha continuità, e in generale avrà per somma la media $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(0, \phi)d\phi$ dei valori $f(0, \phi)$ verso cui tende $f(\theta, \phi)$ avvicinandosi indefinitamente al punto $\theta=0$ in tutte le direzioni, o almeno il limite $\lim\limits_{\theta=0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \phi)d\phi$ della media dei valori di $f(\theta, \phi)$ lungo i paralleli vicinissimi al punto $\theta=0$, tutte le volte che questo limite è determinato.

Ora, per conoscere almeno alcuni casi semplici nei quali è soddisfatta la indicata condizione intorno alle quantità $\sum\delta_t$ e $\sum D_t$, consideriamo separatamente il caso in cui la funzione $f(0, \phi)$ sopra ogni meridiano $\phi=\text{cost}$ della sfera ha un numero finito di massimi e minimi, e quello in cui lungo questi meridiani, o anche soltanto in vicinanza di alcuni punti speciali, il numero dei massimi e minimi non è finito, ma o è infinito o almeno, restando sempre finito su ogni meridiano determinato, va crescendo indefinitamente coll'avvicinarsi degli stessi meridiani a certe posizioni particolari.

Incominciamo dal considerare il primo caso, supponendo anche che $f(\theta, \phi)$ sia continua nei punti $\theta=0$ e $\theta=\pi$ o almeno sia tale che l'integrale $\int_0^{2\pi} f(\theta, \phi)d\phi$ fra 0 a ε e fra ε e $\pi-\varepsilon$ abbia anch'esso un numero finito q di massimi e minimi.

Indicando con $p-1$ un numero non inferiore nè a q nè al numero massimo di massimi e minimi (o limiti superiori e inferiori) di $f(\theta, \phi)$ su ogni meridiano $\phi=\text{cost}$ della sfera, e osservando che $2M$ è maggiore o uguale alla massima differenza fra i massimi e minimi (o limiti superiori e inferiori) dei valori di $f(\theta, \phi)$ sulla sfera, si vede subito che ciascuna delle somme $\sum_{\varepsilon,\pi-\varepsilon}\delta_t$, $\sum_{\varepsilon,\pi-\varepsilon}\delta'_t$ non supererà in valore assoluto $4pM$, e le somme $\sum_{0,\varepsilon}\delta_t$, $\sum_{0,\varepsilon}\delta'_t$, $\sum_{\pi-\varepsilon,\pi}\delta_t$, $\sum_{\pi-\varepsilon,\pi}\delta'_t$ nel caso della continuità di $f(\theta, \phi)$ nei punti $\theta=0$ e $\theta=\pi$, e le altre $\sum_{0,\varepsilon}D_t,\ldots$ nel caso della discontinuità saranno numericamente inferiori a $2p\sigma$, e perciò sarà sempre:

$$S_n - F(0) < 8p\sigma + \frac{g_\varepsilon}{\sqrt{n}\,\mathrm{sen}^2\varepsilon}\left[2M(4m+4p-1)+4\sigma\right], \tag{6}$$

e quindi si avrà:

$$\lim S_n = F(0) = \lim_{\theta=0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \phi)\,d\phi.$$

Nel secondo caso poi [quello cioè in cui il numero dei massimi e minimi di $f(\theta, \phi)$ lungo i meridiani $\phi=\text{cost}$; o anche soltanto in vicinanza di punti speciali non è finito] ammettiamo che ciascun meridiano possa dividersi in intervalli il cui numero non superi un numero finito q, e tali che in alcuni di essi i_s il numero dei massimi e minimi che vi cadono non sia maggiore di un numero finito $p-1$, e negli altri i'_s nei quali il numero dei massimi e minimi è maggiore di $p-1$ e per alcuni è anche maggiore di quel numero che più ci piace, la funzione sia sempre continua e goda della proprietà che esista un numero positivo e differente da zero ε' tale che in ogni intervallo di ampiezza $2h<2\varepsilon'$ preso negli intervalli stessi le oscillazioni δ della funzione siano almeno dell'ordine di piccolezza dell'intervallo stesso $2h$, talchè si possa porre $\delta<\alpha h$, essendo α una quantità determinata o no, ma che resta sempre inferiore ad una quantità finita α' (*); e ammettiamo inoltre che se su alcuni meridiani gli estremi $\theta=0$ e $\theta=\pi$ appartengono a intervalli i_s nei quali cade soltanto un numero finito di massimi e minimi, la funzione $f(\theta, \phi)$ sia continua negli stessi punti o almeno sia tale che l'integrale $\int_0^{2\pi} f(\theta, \phi)\,d\phi$ fra 0 e ε e fra ε e $\pi-\varepsilon$ abbia un numero finito di

(*) S'intende che può anche essere benissimo che alcuni meridiani non debbano dividersi in intervalli parziali, perchè su essi il numero dei massimi e minimi non supera $p-1$; e s'intende pure che non si esclude qui il caso che dagli intervalli i'_s nei quali il numero dei massimi e minimi è maggiore di $p-1$ possano estrarsene altri (anche in numero infinito) nei quali lo stesso numero è inferiore a p, poichè pel nostro scopo basta soltanto che sia soddisfatta la condizione che lungo quelli intervalli i'_s si abbia, come è detto sopra, $\delta<\alpha h$.

massimi e minimi o, avendone un numero infinito, soddisfi a condizioni analoghe a quelle che si sono poste per $f(\theta, \phi)$ pei varii meridiani.

Osservando che il numero ε può sempre supporsi minore di ε', e gli intervalli fra due radici consecutive di $P_n(\cos\theta)=0$ e di $P_{n+1}(\cos\theta)=0$ fra ε e $\pi-\varepsilon$ possono supporsi piccoli quanto si vuole, e quindi minori essi pure di ε', si vedrà subito che in questo caso si ha:

$$S_n - F(0) < 8pq\sigma + 4\alpha'\varepsilon + \frac{g_\varepsilon}{\sqrt{n}\,\text{sen}^2\varepsilon}\{2M(4m+4pq-1)+4\sigma+2\alpha'\pi\}, \quad (7)$$

e quindi sarà ancora:

$$\lim S_n = F(0) = \lim_{\theta=0} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \phi)\, d\phi;$$

e ora, poichè colle osservazioni stesse di Dirichlet i risultati che si hanno pel punto $\theta'=0$ si estendono ad un punto qualunque (θ', ϕ') della sfera, si conclude intanto che: « se la funzione $f(\theta, \phi)$ è data in tutti i punti di « una sfera ed è sempre finita e continua o ha soltanto alcune discontinuità « in un numero finito di punti o lungo un numero finito di linee, essa sarà « sviluppabile in serie di funzioni sferiche come la (1) per ogni punto di « continuità, quando anche nel punto diametralmente opposto essa sia con- « tinua, e sulla superficie della sfera soddisfi a una delle seguenti condizioni:

I.ª che il numero dei massimi e minimi, che essa ha sui meridiani cor- « rispondenti al punto che si considera preso come polo, sia finito;

II.ª che non essendo finito il numero dei massimi e minimi sugli stessi « meridiani (cioè non esistendo un limite superiore finito per questo numero), « si possano dividere questi meridiani in intervalli parziali il cui numero « non superi un numero finito q, e tali che per alcuni di essi il numero dei « massimi e minimi che vi cadono non sia superiore a un numero determi- « nato $p-1$ e per gli altri, nei quali cadono massimi e minimi in numero « maggiore di $p-1$, la funzione sia continua ed esista un numero positivo « e differente da zero ε', tale che in ogni intervallo di ampiezza $2h$ minore « o uguale a $2\varepsilon'$ preso negli intervalli stessi, le oscillazioni δ della funzione « siano almeno dello stess'ordine di piccolezza dell'intervallo, per modo che « si abbia $\delta < \alpha h$ essendo α una quantità determinata o no, ma sempre in- « feriore a una quantità finita α'. »

Se poi la funzione nel punto che si considera sarà ancora continua ma in quello diametralmente opposto sarà discontinua, allora i risultati precedenti sussisteranno ancora tutte le volte che in questo punto la discontinuità sarà di quelle che compariscono soltanto andandovi lungo un numero finito dei meridiani $\phi_1 = \text{cost.}$ corrispondenti al punto stesso, o anche, più in generale, quando in vicinanza dello stesso punto la funzione sarà tale che la quantità corrispondente $\int_0^{2\pi} f(\gamma, \phi_1) d\phi_1$ abbia un limite determinato per $\gamma = \pi$ (*), e quando inoltre questa funzione di γ fra $\pi - \varepsilon$ e π avrà un numero finito di massimi e di minimi, o, avendone un numero infinito, soddisfarà nello stesso intervallo a condizioni del tutto analoghe a quelle contenute nella II^a delle condizioni precedenti per $f(\theta, \phi)$.

Pei punti della sfera poi nei quali $f(\theta, \phi)$ è discontinua la serie (1) sarà ancora convergente tutte le volte che, oltre alle condizioni che si richiedevano sopra pel caso della continuità, sarà soddisfatta l'altra che la discontinuità che si ha in quei punti sia di quelle che ora ammettevamo potersi avere nei punti diametralmente opposti; però in questo caso la somma della serie non darà appunto, almeno in generale, il valore della funzione nel punto che si considera, ma darà soltanto un valore medio, $\lim_{\gamma=0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma, \phi_1) d\phi_1$, fra quelli cui essa tende avvicinandosi indefinitamente ai punti stessi; e così in particolare in quei punti nei quali la discontinuità è di quelle che vi compariscono soltanto andandovi lungo un numero finito dei meridiani corrispondenti, la somma della serie ci darà il valore verso cui si tende generalmente avvicinandosi indefinitamente al punto che si considera; e se il punto che si considera sarà tale che da una parte di una data linea, la cui tangente sia determinata, i valori della funzione tendano verso una quantità e dall'altra parte tendano verso un'altra, per modo che in quel punto considerato dalle due parti separatamente, tolta la linea di divisione con cerchi massimi vicini l'uno all'altro quanto si vuole e che passino pel punto dato, la funzione sia continua o abbia soltanto una di quelle discontinuità che possono togliersi mutando il valore della funzione nel punto stesso, la somma della serie ci darà il valore medio fra i due valori cui tende la funzione avvicinandosi indefinitamente a quel punto dall'una e dall'altra parte della linea di divisione.

Se poi si osserva che per n abbastanza grande gli intervalli fra due radici

(*) È quasi superfluo l'osservare che con γ e φ_1 s'indicano qui le solite coordinate sferiche di un punto qualunque della sfera riferite al punto dato (θ', φ') preso come polo.

consecutive delle equazioni $P_n(\cos\theta)=0$ e $P_{n+1}(\cos\theta)=0$, quando queste radici sono comprese fra ε e $\pi-\varepsilon$, sono dell'ordine di piccolezza di $\frac{1}{n}$, la formola (5) ci mostra anche che se su alcuni dei varii sistemi di cerchi massimi che corrispondono come meridiani ai differenti punti della sfera, presi successivamente come polo, il numero dei massimi e minimi della funzione $f(\theta, \phi)$ non è finito e per alcuni di essi non è soddisfatta la II.ª delle condizioni precedenti, ma soltanto si possono dividere in intervalli parziali tali che in quelli fra questi intervalli nei quali questa condizione non è soddisfatta le oscillazioni δ della funzione negli intervalli corrispondenti siano di un ordine di piccolezza superiore a $\sqrt{h}$, per modo cioè che si abbia $\delta<\phi(h)\sqrt{h}$, essendo $\phi(h)$ una quantità che col decrescere indefinitamente di h diviene infinitesima di ordine inferiore a $\sqrt{h}$, i risultati precedenti varranno ancora per quei punti della superficie della sfera pei quali avviene che nè essi nè i loro diametralmente opposti, considerati sui cerchi massimi corrispondenti, appartengono necessariamente ad intervalli nei quali si ha soltanto $\delta<\phi(h)\sqrt{h}$; e rimarrà perciò l'incertezza per quei soli punti della sfera pei quali si presenterà quest'ultima circostanza.

2. È poi da notare che quando insieme alla funzione data $f(\theta, \phi)$ si prenda in considerazione la funzione:

$$F(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\gamma, \phi_1)\,d\phi_1$$

che corrisponde a ogni punto della sfera, i risultati precedenti possono enunciarsi in modo differente e ricevere una maggiore estensione.

Supposto sempre infatti che pel punto (θ', ϕ') la funzione $f(\theta, \phi)$ sia finita e in questo punto e in quello diametralmente opposto rispetto alla continuità o alla discontinuità soddisfi alle condizioni indicate sopra, appoggiandosi sulla formola (4) invece che sulla (5) si vede subito che se la funzione $F(\gamma)$ corrispondente è finita fra 0 e π e non ha un numero infinito di massimi e minimi, la serie (1) per lo stesso punto (θ', ϕ') sarà sempre convergente e avrà per somma $f(\theta', \phi')$ o:

$$\lim_{\gamma=0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\gamma, \phi_1)\,d\phi_1;$$

e così in questo caso $f(\theta, \phi)$, sebbene debba ancora mantenersi atta alla integrazione in tutta la superficie della sfera, può però divenire infinita in alcuni punti o lungo alcune linee (in numero finito); e sì essa che $F(\gamma)$ possono anche avere un numero infinito di discontinuità.

E se la funzione $F(\gamma)$, che corrisponde al punto (θ', ϕ'), fra 0 e π sarà finita ma avrà un numero infinito di massimi e minimi, allora supposte sempre soddisfatte per $f(\theta, \phi)$ le condizioni precedenti pel punto che si considera e per quello diametralmente opposto, la serie (1) sarà convergente e avrà per somma $f(\theta', \phi')$ o $\lim_{\gamma=0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma, \phi_1) d\phi_1$ tutte le volte che l'intervallo da 0 a π si possa dividere in un numero finito q d'intervalli tali che in alcuni di essi $F(\gamma)$ abbia un numero finito di massimi e minimi e negli altri sia continua e si possa determinare un numero ε' dotato della proprietà che in ogni intervallo di ampiezza $2h \leq 2\varepsilon'$ preso negli intervalli stessi, le oscillazioni δ della funzione siano almeno dello stesso ordine di piccolezza dell'intervallo, per modo che si abbia $\delta < \alpha h$, essendo α una quantità determinata o no ma sempre inferiore a una quantità finita α'; e così anche in questo caso $f(\theta, \phi)$ può avere infinite discontinuità o divenire infinita in alcuni punti o in alcune linee, senza che cessi per questo di essere sviluppabile in serie di funzioni sferiche come la (1) per alcuni punti della sfera.

E lo stesso accade anche se questa condizione per la funzione $F(\gamma)$ non è soddisfatta altro che togliendo fra 0 e π alcuni intervalli speciali in numero finito, purchè a questi intervalli non appartengano i punti 0 e π, e in essi si abbia $\delta < \phi(h)\sqrt{h}$, essendo $\phi(h)$ una quantità che col decrescere indefinito di h si può rendere minore di quella quantità che più ci piace.

E inoltre, specialmente per il caso in cui $F(\gamma)$ abbia un numero infinito di massimi e minimi fra 0 e π essendo però sempre finita, si può aggiungere che la serie (1) continua ad essere convergente e ha per somma $f(\theta', \phi')$ o $\lim_{\gamma=0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\gamma, \phi_1) d\phi_1$ anche quando le divisioni precedenti dell'intervallo fra 0 e π non possano farsi altro che togliendovi un numero finito di intervalli parziali i_s, purchè in questi intervalli esclusi i_s la funzione $F(\gamma)$ ammetta una derivata che se diviene infinita resta atta alla integrazione anche riducendola ai suoi valori assoluti.

Osserviamo infatti che, supponendo per semplicità che si tratti del punto $\theta' = 0$ e che quindi la funzione $F(\gamma)$ sia la $F(\theta)$ del paragrafo precedente, e indicando con (a_1, b_1), (a_2, b_2),... gli intervalli i_s nei quali l'ultima condizione rispetto a $F(\theta)$ è soddisfatta, si potrà decomporre l'integrale fra 0 e π che comparisce nella formola (2) in un numero finito di integrali estesi agli intervalli (a_1, b_1), (a_2, b_2),... e agli intervalli rimanenti; e poichè per quest'ultimi potranno ripetersi le considerazioni precedenti, basterà ora occuparsi degli integrali $\int_{a_1}^{b_1}(P'_n + P'_{n+1})F(\theta)\,d\theta, \ldots$

Ora, siccome si ha:

$$\int_{a_1}^{b_1}(P'_n + P'_{n+1})F(\theta)\,d\theta = \left[F(\theta)(P_n + P_{n+1})\right]_{a_1}^{b_1} - \int_{a_1}^{b_1}(P_n + P_{n+1})F'(\theta)\,d\theta,$$

osservando che fra ε e $\pi - \varepsilon$ si ha in valore assoluto:

$$P_n + P_{n+1} < \frac{2g_\varepsilon}{\sqrt{n}\,\mathrm{sen}^2\varepsilon}, \quad \int_{a_1}^{b_1}(P_n + P_{n+1})F'(\theta)\,d\theta < \mu\int_{a_1}^{b_1}\phi(\theta)\,d\theta,$$

ove $\phi(\theta)$ è la funzione dei valori assoluti di $F'(\theta)$ fra a_1, e b_1 (a_1, e b_1 inclus.) e μ è il massimo valore di $P_n + P_{n+1}$ pure fra a_1, e b_1, si vede subito che se a_1 e b_1 sono differenti da zero e da π e compresi, come allora si può supporre, fra ε e $\pi - \varepsilon$, si ha in valore assoluto;

$$\int_{a_1}^{b_1}(P'_n + P'_{n+1})F(\theta)\,d\theta < \frac{2g_\varepsilon}{\sqrt{n}\,\mathrm{sen}^2\varepsilon}\left(2M + \int_{a_1}^{b_1}\phi(\theta)\,d\theta\right)$$

e perciò $\lim\limits_{n=\infty}\int_{a_1}^{b_1}(P'_n + P'_{n+1})F(\theta)\,d\theta = 0$; e se $a_1 = 0$ e b_1 è diverso da π, avendosi $\int_{a_1}^{b_1} = \int_0^{b_1} = \int_0^{\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{b_1}$, sarà:

$$-\tfrac{1}{2}\int_{a_1}^{b_1}(P'_n + P'_{n+1})F(\theta)\,d\theta - F(0) < \frac{g_\varepsilon}{\sqrt{n}\,\mathrm{sen}^2\varepsilon}\left(M + \int_0^{b_1}\phi(\theta)\,d\theta\right) + \int_0^{\varepsilon}\phi(\theta)\,d\theta,$$

e perciò $\lim\limits_{n=\infty}\tfrac{1}{2}\int_{a_1}^{b_1}(P'_n + P'_{n+1})F(\theta)\,d\theta = -F(0)$; e similmente, se $a_1 = 0$ e $b_1 = \pi$, e se $a_1 > 0$ e $b_1 = \pi$ si avrà rispettivamente:

$$\lim_{n=\infty}\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}(P'_n + P'_{n+1})F(\theta)\,d\theta = -F(0)$$

e:

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{2}\int_{a_1}^{\pi} (P'_n + P'_{n+1})\, F(\theta)\, d\theta = 0;$$

e si conclude perciò evidentemente quanto abbiamo enunciato sopra.

Osservazione. Non si può lasciare di notare che mentre pei teoremi qui dati si può asserire che ogni funzione finita e continua su tutta la superficie della sfera è sempre sviluppabile in serie di funzioni sferiche per tutti i punti della superficie stessa quando il numero dei massimi e minimi che essa ha su ogni circolo massimo è inferiore a un dato numero finito, non si può asserire altrettanto quando questo numero su alcuni circoli massimi è maggiore di quel numero che più ci piace; talchè potrebbe darsi che esistessero anche alcune funzioni che, sebbene finite e continue su tutta la superficie della sfera, non sono però sviluppabili in serie di funzioni sferiche per tutti i punti di essa.

3. Diamo ora anche l'espressione analitica della funzione $F(\gamma)$ corrispondente ad ogni punto $M(\theta', \phi')$ che non sia il polo $P(\theta' = 0)$, o il polo opposto $\theta' = \pi$.

Per questo consideriamo un punto variabile $N(\theta, \phi)$, e cambiamo le coordinate sferiche prendendo per nuovo polo il punto M e per primo meridiano il cerchio massimo dei due punti M e P. Indicando, come precedentemente, con γ e ϕ_1 le nuove coordinate sferiche del punto N, e considerando il triangolo sferico PMN, si avrà qualunque sia la posizione del punto N:

$$\cos\theta = \cos\gamma\cos\theta' + \operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\theta'\cos\phi_1;$$

e quindi, quando γ è costante, ossia lungo il cerchio C che ha per raggio sferico γ e per polo il punto M, si avrà:

$$\operatorname{sen}\theta\, d\theta = \operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\theta'\operatorname{sen}\phi_1\, d\phi_1 =$$
$$= \sqrt{\operatorname{sen}^2\gamma\operatorname{sen}^2\theta' - \cos^2\gamma\cos^2\theta' - \cos^2\theta - 2\cos\gamma\cos\theta'\cos\theta}\; d\phi_1.$$

ove il radicale cambia segno passando per zero, e perciò sarà:

$$\left.\begin{aligned} F(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{f(\theta, \varphi)\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\gamma\operatorname{sen}^2\theta' - \cos^2\gamma\cos^2\theta' - \cos^2\theta + 2\cos\gamma\cos\theta'\cos\theta}} + \\ + \frac{1}{2\pi}\int \frac{f(\theta, \varphi)\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\gamma\operatorname{sen}^2\theta' - \cos^2\gamma\cos^2\theta' - \cos^2\theta + 2\cos\gamma\cos\theta'\cos\theta}}, \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

intendendo che in questi integrali il radicale è preso positivamente, e nell'uno di essi i valori di $f(\theta, \phi)$ sono quelli della funzione data in una metà del cerchio C e nell'altro sono quelli della funzione nell'altra metà, e il limite inferiore degli stessi integrali è $\theta'-\gamma$ o $\gamma-\theta'$, secondochè $\theta'>\gamma$ o $\theta'<\gamma$, e il limite superiore è $\theta'+\gamma$ o $2\pi-(\theta'+\gamma)$ secondochè $\theta'+\gamma<\pi$ o $\theta'+\gamma>\pi$.

Osservando poi che dallo stesso triangolo si ha anche:

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos(\phi-\phi')$$

si vede subito che si può anche scrivere:

$$F(\gamma) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{\{f(\theta, \varphi'+\psi) + f(\theta, \varphi'-\psi)\}\operatorname{sen}\theta\, d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2\gamma\operatorname{sen}^2\theta' - \cos^2\gamma\cos^2\theta' - \cos^2\theta + 2\cos\gamma\cos\theta'\cos\theta}}, \tag{9}$$

ove ψ è il valore positivo $\leq\pi$ determinato dalla equazione:

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\cos\psi,$$

e i limiti dell'integrale sono presi come precedentemente; e ora con questa formola, come colla precedente, si ha appunto la espressione analitica della funzione $F(\gamma)$ corrispondente ai varii punti (θ', ϕ') della sfera, ad eccezione dei due $\theta'=0$ e $\theta'=\pi$, e nell'ipotesi che γ sia differente da zero e da π; perchè altrimenti le formole precedenti, non esistendo più il triangolo PMN, non sussistono più, e il radicale che comparisce al denominatore nei valori di $F(\gamma)$ diviene infinitesimo di prim'ordine rispetto a θ.

Del resto i valori di $F(\gamma)$ per $\gamma=0$ e $\gamma=\pi$ sono evidentemente i due $f(\theta', \phi')$ e $f(\pi-\theta', \phi'+\pi)$ che però non sempre coincidono coi valori limiti di $F(\varepsilon)$ e $F(\pi-\varepsilon)$, per ε tendente a zero per valori positivi, che sono i soli che noi abbiamo qui da considerare.

4. Le formole del § 1 conducono anche a dimostrare che « quando la « funzione $f(\theta, \phi)$ è finita su tutta la sfera e ha tutt'al più un numero finito « di discontinuità in punti separati o lungo linee separate e rispetto ai mas- « simi e minimi, soddisfa alle condizioni I e II del § 1 o a quelle analoghe « date per $F(\gamma)$ nel § 2, e i numeri α', p, q che si presentano in queste « condizioni sono sempre inferiori a numeri finiti e il numero ε' è sempre « superiore a un certo numero ε'_1 differente da zero, la serie (1) di funzioni « sferiche che le corrisponde è convergente in ugual grado su tutta la sfera « tutte le volte che la funzione $f(\theta, \phi)$ è sempre continua, ed è convergente « in ugual grado soltanto in generale tutte le volte che $f(\theta, \phi)$ in punti « separati o lungo linee separate è discontinua » intendendo dire, colle pa-

role convergente in ugual grado in generale, che essa è convergente in ugual grado in tutta la porzione di superficie sferica che resta quando dalla superficie della sfera si tolgono degli spazii superficiali piccoli quanto si vuole che racchiudono i punti o le linee di discontinuità di $f(\theta, \phi)$ e i punti o le linee diametralmente opposte.

Consideriamo infatti questo caso che è il più generale, e immaginiamo tolti, come si è detto, dalla superficie della sfera degli spazii superficiali piccoli quanto si vuole che racchiudano i punti o le linee di discontinuità e i punti o le linee diametralmente opposte. Negli spazii restanti S la funzione $f(\theta, \phi)$ sarà finita e continua, e se il punto (θ', ϕ') appartiene a questi spazii, supponendo che vi siano anche degli intervalli per alcuni cerchi massimi nei quali cadano infiniti massimi e minimi, dalla formola (7) del § 1 si avrà in valore assoluto:

$$S_n - f(\theta', \phi') < 8pq\sigma + 4\alpha'\varepsilon + \frac{g_\varepsilon}{\sqrt{n}\,\mathrm{sen}^2\varepsilon}\{2M(4m + 4pq - 1\} + 4\sigma + 2\alpha'\pi\},$$

ove le quantità che qui compariscono hanno rispetto al punto (θ, ϕ) lo stesso significato che esse avevano rispetto al punto $\theta' = 0$; e questa formola varrà anche nel caso che risultino soddisfatte soltanto le condizioni poste in principio del § 2.

Ma la quantità M ha un significato indipendente dalla posizione del punto (θ', ϕ') che si considera, e pei numeri m, p, q, α' si possono intendere presi anche dei numeri maggiori di quelli che si hanno in tutte le posizioni dello stesso punto, e che, per ipotesi, sono sempre finiti; inoltre, poichè negli spazii S la funzione $f(\theta, \phi)$ è finita e continua, si può dimostrare facilmente, seguendo i metodi di dimostrazione di Weierstrass e di Schwarz, che si può trovare un numero $\varepsilon \leq \varepsilon'_1$ che serva per tutti i punti degli stessi spazii (il contorno inclus.) quando si lascia a σ uno stesso valore piccolo a piacere, e allora con questo valore di ε si avrà anche per g_ε un valore che servirà per tutti i punti di S; quindi si potrà trovare evidentemente un numero n' tale che pei valori di $n \geq n'$ la differenza $S_n - f(\theta', \phi')$ per tutti i punti degli spazii S (il contorno inclus.) sia minore di quella quantità che più ci piace; e questo mostra appunto quanto abbiamo enunciato, giacchè $S_n - f(\theta', \phi')$ non è altro che il resto r_n della serie.

Osserviamo che questa proprietà delle serie di funzioni sferiche come la (1) ci permette anche di dire che « ad esse è applicabile la integrazione de-« finita tante volte quante si vuole lungo linee qualunque della sfera che

« siano tutte contenute negli spazii S (il contorno inclus.), tutte le volte che « la funzione $f(\theta, \phi)$ corrispondente soddisfa alle condizioni dette sopra. »

5. Supponiamo ora che la funzione $f(\theta, \phi)$ sia una funzione $f(\theta)$ della sola variabile θ data arbitrariamente fra 0 e π. Allora, osservando che da formole note si ha:

$$\int_0^{2\pi} P_n \, d\phi = 2\pi X_n(\cos\theta) X_n(\cos\theta'),$$

si vedrà subito che la serie (1) diviene la seguente:

$$\sum_0^{\infty} \frac{2n+1}{2} X_n(\cos\theta') \int_0^{\pi} X_n(\cos\theta) f(\theta) \operatorname{sen}\theta \, d\theta, \qquad (10)$$

e quando si ponga $\cos\theta = x$, e s'indichi con $f(x)$ la funzione $f(\theta)$ che allora si suppone data fra -1 e 1, essa si trasforma nell'altra:

$$\sum_0^{\infty} \frac{2n+1}{2} X_n \int_{-1}^{1} f(x) X_n \, dx, \qquad (11)$$

e ci permette perciò di concludere che « se $f(x)$ è una funzione di una « variabile reale x data arbitrariamente fra -1 e 1 ed è finita e continua « o ha soltanto un numero finito di discontinuità, essa sarà sviluppabile in « una serie di funzioni sferiche come la (11) in tutti i punti x di conti- « nuità, quando nei punti simmetrici $-x$ essa non abbia discontinuità di « seconda specie (*), e quando sia soddisfatta una delle due condizioni se- « guenti:

I.ª che fra -1 e 1 essa abbia un numero finito di massimi e minimi;

(*) Diciamo che $f(x)$ per $x = a$ ha una discontinuità ordinaria o di prima specie quando le quantità $f(a+\varepsilon)$ e $f(a-\varepsilon)$ per $\varepsilon = 0$ hanno limiti determinati e uno almeno di essi è differente da $f(a)$; e diciamo invece che $f(x)$ per $x = a$ ha una discontinuità di seconda specie quando una almeno delle due quantità $f(a+\varepsilon)$, $f(a-\varepsilon)$ per $\varepsilon = 0$ non ha limite determinato. Nel primo caso poi, i limiti di $f(a+\varepsilon)$ e $f(a-\varepsilon)$ s'indicano, come è noto, con $f(a+0)$ e $f(a-0)$.

E così quando nel punto $-x$ si abbia tutt'al più, come dicevamo sopra, una discontinuità ordinaria, riferendoci alla sfera si vede che, nel punto $\gamma = \pi$ opposto a quello $x(\theta', \varphi')$ che si considera, la discontinuità, se esiste, è tale che pei meridiani corrispondenti $\varphi_1 = \text{cost.}$ in tutta una metà della sfera può considerarsi come una di quelle che possono togliersi mutando il valore della funzione in quel punto, e lo stesso accade pei meridiani dell'altra metà; e perciò in questo caso non importa fare distinzione fra la continuità e la discontinuità della funzione nel punto stesso $\gamma = \pi$ o $-x$.

II.ª che avendo un numero infinito di massimi e minimi in vicinanza « di punti speciali o in intervalli di ampiezza finita, l'intervallo totale da « -1 a 1 si possa dividere in un numero finito di intervalli tali che in « alcuni di essi il numero dei massimi e minimi che vi cadono sia finito, « e per gli altri nei quali cadono infiniti massimi e minimi la funzione sia « continua e si possa trovare un numero positivo e differente da zero ε' tale « che in ogni intervallo di ampiezza $2h$ non superiore a $2\varepsilon'$ preso negli inter- « valli stessi le oscillazioni δ della funzione siano almeno dello stesso ordine « di piccolezza dell'intervallo, per modo che si abbia $\delta < \alpha h$ essendo α una « quantità determinata o no ma sempre inferiore a un numero finito α' ».

Se poi in alcuni di questi ultimi intervalli si ha soltanto $\delta < \phi(h)\sqrt{h}$, ove $\phi(h)$ col decrescere indefinito di h diviene infinitesimo ma soltanto di ordine inferiore a quello di $\sqrt{h}$, i risultati precedenti non potranno applicarsi con sicurezza ai punti che si trovino necessariamente compresi in questi intervalli, ma varranno ancora per gli altri punti.

E pei punti x diversi da 1 e da -1 e corrispondenti alle discontinuità ordinarie quando nei punti simmetrici $-x$ non si ha discontinuità di seconda specie, la serie (11) è ancora convergente e ha per somma $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$; e pei punti 1 e -1, quando in nessuno di essi si ha una discontinuità di seconda specie, la somma della serie è rispettivamente $f(1-0)$ e $f(-1+0)$.

6. Osserviamo poi che quando, come nel caso nostro, si ha $f(\theta, \phi) = f(\theta)$, la funzione $F(\gamma)$ dei §§ 2 e 3 pel punto $\theta' = 0$ o $\theta' = \pi$ è la stessa $f(\theta)$ o $f(\pi - \theta)$, e pel punto (θ', ϕ') è la seguente:

$$F(\gamma) = \frac{1}{\pi} \int \frac{f(\theta) \operatorname{sen} \theta \, d\theta}{\sqrt{\operatorname{sen}^2 \gamma \operatorname{sen}^2 \theta' - \cos^2 \gamma \cos^2 \theta' - \cos^2 \theta + 2 \cos \gamma \cos \theta' \cos \theta}},$$

ove il radicale è preso positivamente, e il limite inferiore dell'integrale è $\gamma - \theta'$ o $\theta' - \gamma$ secondochè $\theta' < \gamma$ o $\theta' > \gamma$, e il superiore è $\theta' + \gamma$ o $2\pi - (\theta' + \gamma)$ secondochè $\theta' + \gamma < \pi$ o $\theta' + \gamma > \pi$; e quindi, ponendo $\cos\theta = x$, $\cos\theta' = x'$, $\cos\gamma = \xi$, e mutando $f(\theta)$ in $f(x)$, si vede subito che pei punti $x' = 1$ e $x' = -1$ alla stessa funzione $F(\gamma)$ le corrisponde la funzione $f(x)$ o la funzione $f(-x)$ per tutti i valori di x da -1 a 1, e pei punti x' compresi fra 1 e -1 (questi limiti esclusi) le corrisponde invece la funzione:

$$F(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{x'\xi - \sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}^{x'\xi + \sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}} \frac{f(x) \, dx}{\sqrt{1 - x'^2 - \xi^2 - x^2 + 2 x x' \xi}},$$

o:

$$F(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f[x'\xi+y\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}]\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

nella quale i radicali devono prendersi positivamente, e ξ deve variare fra -1 e 1 (i limiti esclusi); e si conclude perciò anche (§ 2) che: « se $f(x)$ « è una funzione di x data arbitrariamente fra -1 e 1 e che in questo in- « tervallo è atta alla integrazione anche se ha un numero infinito di discon- « tinuità o se diviene infinita in un numero finito di punti, allora, in tutti i « punti x' differenti da -1 e da 1 e nei quali essa è finita e continua o « ha soltanto discontinuità ordinarie, la serie (11) corrispondente sarà con- « vergente e avrà per somma $f(x')$ o $\frac{f(x'+0)+f(x'-0)}{2}$ tutte le volte che la « funzione stessa $f(x)$ nel punto simmetrico corrispondente $-x'$ non ha di- « scontinuità di seconda specie, e la funzione di ξ:

$$F(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{x'\xi-\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}^{x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x'^2-\xi^2-x^2+2xx'\xi}},$$

o:

$$F(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} f[x'\xi+y\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}]\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

« nella quale i radicali sono presi positivamente, fra -1 e 1 soddisfa a una « delle due condizioni I.ª e II.ª che si richiedevano per $f(x)$ nel paragrafo « precedente; e lo stesso accadrà anche quando questa funzione $F(\xi)$ fra « -1 e 1 ha un numero infinito di massimi e minimi e non soddisfa alla « II.ª delle condizioni ora indicate altro che escludendo un numero finito di « intervalli parziali, purchè in questi intervalli esclusi essa ammetta una « derivata $F'(\xi)$ che se diviene infinita resta atta alla integrazione anche « riducendola ai suoi valori assoluti. »

Pei punti $x'=1$ o $x'=-1$ poi si ha la sola differenza che invece della funzione $F(\xi)$ bisogna considerare la stessa $f(x)$ da -1 a 1, e per la somma della serie bisogna prendere $f(1-0)$ o $f(-1+0)$ rispettivamente; quindi, osservando che il radicale che comparisce al denominatore nell'integrale di $F(\xi)$ diviene infinitesimo per $x=x'\xi\pm\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}$, e questo infinitesimo è del prim'ordine soltanto quando $x'=\pm1$ o $\xi=\pm1$, e negli altri casi è di ordine $\frac{1}{2}$, si può anche affermare che il divenire infinita la funzione $f(x)$, purchè di ordine inferiore a $\frac{1}{2}$ per una quantità finita, in un numero finito di punti fra -1 e 1 (questi limiti inclusi) non può recare ostacoli per la sua sviluppabilità in serie di funzioni sferiche come la (11) altro che pei punti $x'=\pm 1$ e per quelli ove essa diviene infinita e pei punti simmetrici, quando però riescano soddisfatte le altre condizioni precedenti rispetto a $F(\xi)$.

7. Supponiamo ora in particolare che $f(x)$ sia una funzione che fra -1 e 1 è sempre finita e continua e in questo intervallo ammette una derivata che è sempre finita o che tutt'al più diviene infinita in un numero finito di punti e soltanto di un ordine non superiore ad $\frac{1}{2}$. Coll'integrazione per parti si troverà che per tutti i valori di x' e ξ fra -1 e 1 (questi limiti esclusi) si ha:

$$F(\xi)=\frac{f[x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}]+f[x'\xi-\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}]}{2}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{x'\xi-\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}^{x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}} f'(x)\operatorname{arcsen}\frac{x-x'\xi}{\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}\,dx,$$

e perciò sarà:

$$F'(\xi)=\frac{1}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\int_{x'\xi-\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}^{x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}} f'(x)\frac{x'-x\xi}{\sqrt{1-x'^2-\xi^2-x^2+2xx'\xi}}\,dx;$$

donde risulta subito intanto che $F'(\xi)$ per gli stessi valori di x' e di ξ sarà sempre finito, e solo resta il dubbio che possa andare crescendo indefinitamente col tendere di ξ ad 1 o a -1.

Ma supponendo ora che ξ sia abbastanza prossimo ad 1 o a -1, per es. ad 1, si vede subito che il punto x' sarà compreso fra i limiti dell'integrale, e se esso non è di quelli nei quali $f'(x)$ diviene infinita, $f'(x)$ fra gli stessi limiti sarà sempre numericamente minore di un numero finito L, e perciò si avrà in valore assoluto:

$$F'(\xi)<\frac{L[\pm x'(1-\xi^2)\pm\xi\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}]}{\pi\sqrt{1-\xi^2}}\int_{x'\xi-\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}^{x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}\frac{dx}{\sqrt{1-x'^2-\xi^2-x^2+2xx'\xi}},$$

ovvero:

$$F'(\xi)<L(\pm x'\sqrt{1-\xi^2}\pm\xi\sqrt{1-x'^2}),$$

e quindi per gli stessi valori di x' la funzione $F'(\xi)$ si manterrà finita anche col tendere di ξ all'unità.

Pel caso poi in cui x' è uno dei punti nei quali $f'(x)$ diviene infinita, scriviamo $F'(\xi)\sqrt{1-\xi^2}$ sotto la forma:

$$F'(\xi)\sqrt{1-\xi^2}=\frac{1}{\pi}\int_{x'\xi-\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}^{x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}\frac{f'(x)(x'-x)\,dx}{\sqrt{1-x'^2-\xi^2-x^2+2xx'\xi}}+$$

$$+\frac{1-\xi}{\pi}\int_{x'\xi-\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}^{x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}\frac{xf'(x)\,dx}{\sqrt{1-x'^2-\xi^2-x^2+2xx'\xi}},$$

e cerchiamo separatamente come si comportino i due termini del secondo membro quando ξ converge verso uno.

Indichiamo perciò con A una quantità finita e positiva, e supponiamo ξ già abbastanza prossimo a 1. Pei valori di x compresi fra i limiti d'integrazione si avrà in valore assoluto $f'(x)(x-x')_1^{\frac{1}{2}}<A$, essendo $(x-x')_1$ il valore assoluto di $x-x'$; e questo ci mostra subito intanto che il primo dei termini del secondo membro della formola precedente sarà numericamente inferiore a:

$$\frac{A}{\pi}\sqrt{2}\sqrt[4]{(1-x'^2)(1-\xi^2)}\int_{x'\xi-\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}^{x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}\frac{dx}{\sqrt{1-x'^2-\xi^2-x^2+2xx'\xi}},$$

ovvero a:

$$A\sqrt{2}\sqrt[4]{(1-x'^2)(1-\xi^2)},$$

e perciò col tendere di ξ ad 1 diverrà infinitesimo almeno di ordine $\frac{1}{4}$.

L'altro termine poi sarà numericamente inferiore a:

$$\frac{A(1-\xi)}{\pi}\int_{x'\xi-\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}^{x'}\frac{dx}{\sqrt{(x'-x)[x-x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}][x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}-x]}}+$$

$$+\frac{A(1-\xi)}{\pi}\int_{x'}^{x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}\frac{dx}{\sqrt{(x-x')[x-x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}][x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}-x]}},$$

ovvero a:

$$\frac{A(1-\xi)}{\pi\sqrt{x'(\xi-1)+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}}\int_{x'\xi-\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}^{x'}\frac{dx}{\sqrt{(x'-x)[x-x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}]}}+$$

$$+\frac{A(1-\xi)}{\pi\sqrt{x'(1-\xi)+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}}\int_{x'}^{x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}\frac{dx}{\sqrt{(x-x')[x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}-x]}},$$

o anche infine inferiore a:

$$\frac{A(1-\xi)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{-x'(1-\xi)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{(1-x'^2)(1+\xi)}}}+\frac{A(1-\xi)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x'(1-\xi)^{\frac{1}{2}}+\sqrt{(1-x'^2)(1+\xi)}}},$$

e quindi lo stesso termine col tendere di ξ ad 1 diverrà infinitesimo almeno di ordine $\frac{3}{4}$; e questo permette ora di dire che $F'(\xi)$ anche pei valori di x' che consideriamo col tendere di ξ ad 1 resterà finito o tutt'al più diverrà infinito di ordine non superiore ad $\frac{1}{4}$.

Gli stessi risultati si ottengono quando si fa convergere ξ verso -1; quindi, osservando anche che per $x'=\pm 1$ la funzione $F(\xi)$ si riduce alla stessa $f(x)$ o $f(-x)$, e la sua derivata è sempre finita o tutt'al più diviene infinita di ordine non superiore a $\frac{1}{2}$, e applicando il teorema del paragrafo precedente nella sua ultima parte si concluderà subito che « se la funzione « $f(x)$ per tutti i valori di x da -1 a 1 (gli estremi inclusi) è finita e con- « tinua e ammette una derivata che è pure finita o che diviene infinita in « un numero finito di punti e soltanto di un ordine non superiore ad $\frac{1}{2}$, « essa sarà sviluppabile in serie di funzioni X_n come la (11) per tutti gli « stessi valori di x fra -1 e 1 (gli estremi inclusi) ».

S'intende che questo teorema è specialmente utile pel caso che la funzione abbia un numero infinito di massimi e di minimi.

8. Per quanto si è detto nel § 4 « le serie di funzioni X_n che corrispon- « dono a funzioni $f(x)$ di x che fra -1 e 1 sono sempre finite e hanno tut- « t'al più un numero finito di discontinuità, e soddisfano alle condizioni I.ª « o II.ª del § 5 sono convergenti in egual grado fra -1 e 1, quando $f(x)$ « è sempre continua, e lo sono soltanto in generale, quando $f(x)$ ha alcune « discontinuità; e alle stesse serie può sempre applicarsi l'integrazione de- « finita fra due numeri qualunque λ e x compresi fra -1 e 1 (questi limiti « inclusi), quando fra λ e x e fra i valori simmetrici $-\lambda$ e $-x$ non cade « nessun punto di discontinuità di $f(x)$ ».

Ora dimostrerò più generalmente che « se $f(x)$ è una funzione di x che « fra -1 e 1 è sempre finita o diviene infinita soltanto in un numero finito « di punti, e resta atta alla integrazione anche riducendola ai suoi valori « assoluti, e se inoltre l'integrale $\int_{-1}^{x} f(x)dx$ è una funzione finita e continua « della x che, anche nel caso in cui in vicinanza dei punti x ove $f(x)$ « diviene infinita ha un numero infinito di massimi e minimi, soddisfa alle

« condizioni che abbiamo poste nei paragrafi precedenti per la sua svilup-
« pabilità in serie di funzioni X_n per tutti i valori di x fra -1 e 1, la serie:

$$\sum_0^\infty A_n \int_\lambda^x X_n dx,$$

« i cui termini si ottengono applicando la integrazione definita fra i due
« numeri λ e x compresi fra -1 e 1 (questi limiti inclusi) ai termini della
« serie $\sum_0^\infty A_n X_n$ ove:

$$A_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) X_n dx,$$

« rappresenterà l'integrale $\int_\lambda^x f(x) dx.$ »

La dimostrazione di questo teorema si fa seguendo il processo che ho tenuto per la dimostrazione di un teorema analogo sulla serie di Fourier (*).

Si osservi perciò dapprima che se si pone:

$$F(x) = \int_{-1}^x f(x) dx,$$

questa funzione $F(x)$ sarà sviluppabile in serie di funzioni X_n per tutti i valori di x fra -1 e 1 (questi limiti inclusi), e si avrà:

$$F(x) = \sum_0^\infty B_n X_n,$$

essendo:

$$B_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 F(x) X_n dx.$$

Ma colla integrazione per parti si trova:

$$\int F(x) X_n dx = F(x) \int_{-1}^x X_n dx - \int f(x) \left[\int_{-1}^x X_n dx' \right] dx,$$

quindi, poichè per n diverso da zero si ha:

$$\int_{-1}^x X_n dx = \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2n+1}, \tag{12}$$

(*) V. la mia Mem.: *Sulla serie di Fourier*, Annali delle Univ. Tosc., vol. XIV.

sarà, sempre per n diverso da zero:

$$B_n = \frac{A_{n-1}}{2n-1} - \frac{A_{n+1}}{2n+3};$$

mentre per $n=0$ si ha invece:

$$B_0 = \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} F(x)\,dx = \tfrac{1}{2}[xF(x)]_{-1}^{1} - \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} xF'(x)\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)X_0\,dx - \tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)X_1\,dx = A_0 - \tfrac{1}{3}A_1;$$

e perciò sarà:

$$F(x) = A_0 - \tfrac{1}{3}A_1 + \sum_1^\infty \left(\frac{A_{n-1}}{2n-1} - \frac{A_{n+1}}{2n+3}\right)X_n. \tag{13}$$

Indichiamo ora con ε una quantità positiva arbitrariamente piccola, e decomponiamo l'integrale $\int_{-1}^{1} f(x)X_n\,dx$, cui è uguale la quantità $\frac{2A_n}{2n+1}$, nei tre integrali $\int_{-1}^{-1+\varepsilon} f(x)X_n\,dx$, $\int_{1-\varepsilon}^{1} f(x)X_n\,dx$, $\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x)X_n\,dx$.

Ricordando che, se $f_1(x)$ è la funzione dei valori assoluti di $f(x)$, questa funzione $f_1(x)$ è atta alla integrazione definita fra -1 e 1, si vede subito che i due primi di questi integrali col prendere ε sufficientemente piccolo possono rendersi minori di quella quantità che più ci piace; e siccome l'altro integrale $\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} f(x)X_n\,dx$ è numericamente inferiore a $\frac{g_\varepsilon}{\sqrt{n}\,\mathrm{sen}^2\varepsilon}\int_{-1}^{1} f_1(x)\,dx$, ove g_ε è un numero finito, si vede anche che, per quanto piccolo sia stato preso ε, per valori sufficientemente grandi di n lo stesso integrale è pure minore di quella quantità che più ci piace; e si conclude perciò che gli integrali $\int_{-1}^{1} f(x)X_n\,dx$, e quindi anche le quantità $\frac{A_n}{2n+1}$, tendono a zero col crescere indefinito di n.

Questo ci permette di dire che la serie del secondo membro della formola (13) può trasformarsi nell'altra:

$$A_0 + A_0 x + \sum_1^\infty \frac{A_n}{2n+1}(X_{n+1} - X_{n-1}),$$

e ora, osservando che questa serie, a causa della formola (12), non è altro che la serie $\sum_0^\infty A_n \int_{-1}^x X_n\,dx$, si conclude subito che si ha:

$$F(x) = \sum_0^\infty A_n \int_{-1}^x X_n\,dx,$$

e perciò anche:

$$\int_\lambda^x f(x)\,dx = \sum_0^\infty A_n \int_\lambda^x X_n\,dx,$$

come volevamo dimostrare.

9. È da notare anche che se si esprime l'integrale $\int_\lambda^x X_n\,dx$ per funzioni X_{n+1} e X_{n-1} per mezzo della formola (12), la serie integrale $\sum_0^\infty A_n \int_\lambda^x X_n\,dx$ si riduce subito alla serie $\sum_0^\infty B_n X_n(x) - \sum_0^\infty B_n X_n(\lambda)$ di funzioni X_n corrispondente all'integrale $\int_\lambda^x f(x)\,dx$.

Inoltre osserviamo che siccome dalla (12) si ha:

$$(2n+1)\,X_n = X'_{n+1} - X'_{n-1},$$

e oltre a questa si ha la formola (13), la somma dei primi $n+2$ termini della serie delle derivate dei termini della serie $\sum_0^\infty B_n X_n$ che corrisponde a $F(x)$ differisce dalla somma dei primi $n+1$ termini della serie $\sum_0^\infty A_n X_n$ che corrisponde a $f(x)$ soltanto per la quantità:

$$\frac{A_{n+1}}{2n+3} X'_n + \frac{A_{n+3}}{2n+5} X'_{n+1};$$

e quindi, osservando che, se la serie $\sum A_n X_n$ è convergente anche soltanto in un piccolo tratto finito fra $-1+\varepsilon$ e $1-\varepsilon$, i coefficienti A_n col crescere indefinito di n restano finiti o divengono infiniti tutt'al più di ordine inferiore a quello di $\sqrt{n}$ (*), e osservando anche che pei valori di x fra -1 e 1

(*) Per vedere questo si osserva che ponendo $x = \cos\theta$, e ricordando una formola di Bonnet, che noi abbiamo richiamata in una nota alla pag. 5, si ha per tutti i valori di θ fra ε e $\pi - \varepsilon$:

$$A_n X_n = \frac{A_n}{\sqrt{n}} \left\{ \frac{2\cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi \operatorname{sen}\theta}} + \frac{p_n}{n} \right\},$$

(questi limiti esclusi) X'_n col crescere indefinito di n diviene infinito dell'ordine di $\sqrt{n}$, almeno generalmente, mentre per $x=\pm 1$ diviene infinito dell'ordine di n^2, si può di qui concludere che « alla serie $\sum B_n X_n$ di funzioni X_n che corrisponde a una funzione $f(x)$ di x data fra -1 e 1, si « può anche applicare la derivazione termine a termine per tutti i valori di « x nello stesso intervallo (gli estremi però esclusi) tutte le volte che la « derivata $f'(x)$ di questa funzione fra -1 e 1 (i limiti al più esclusi) è « sviluppabile secondo una serie di funzioni sferiche $\sum A_n X_n$; e questa pro- « prietà sussiste anche pei valori $x=\pm 1$ tutte le volte che $f'(x)$ è svilup- « pabile secondo la serie $\sum A_n X_n$ anche per gli stessi valori ± 1 di x, e i « suoi coefficienti col crescere indefinito di n divengono infinitesimi di or- « dine superiore al primo ». S'intende bene però che qui vogliamo parlare di serie di funzioni sferiche come la (11), per le quali cioè si ha:

$$B_n=\frac{(2n+1)}{2}\int_{-1}^{1} f(x)X_n dx,\quad A_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1} f'(x)X_n dx.$$

E così in particolare si può dire che « se $f(x)$ è una funzione di x che « fra -1 e 1 (i limiti inclusi) ha una derivata $f'(x)$ finita, che non ha di- « scontinuità di seconda specie e che soddisfa alle altre condizioni I.ª o II.ª « poste per $f(x)$ nei §§ 5 e 6, alla serie di funzioni X_n corrispondente a $f(x)$ « può sempre applicarsi la derivazione termine a termine per tutti i valori « di x fra -1 e 1 (questi limiti al più esclusi) ».

Se poi la funzione $f(x)$ fra -1 e 1 (i limiti inclusi) ha anche una derivata seconda finita e determinata $f''(x)$ che soddisfa alle solite condizioni I.ª o II.ª del § 5, allora osservando che colla integrazione per parti si ha:

$$A_n=-\tfrac{1}{2}\int_{-1}^{1} f''(x)(X_{n+1}-X_{n-1})dx,$$

---

ove $\rho=\frac{2n+1}{2}$, e p_n è una funzione che per tutti i valori di n e per gli stessi valori di θ è sempre inferiore a un numero finito; e quindi siccome $A_n X_n$ in un intervallo finito fra ε e $\pi-\varepsilon$ tende a zero col crescere indefinito di n, ripetendo i ragionamenti fatti da Cantor nella sua Memoria: *Ueber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz* (Journal de Crelle, vol. 72, pag. 135 e seg.), coll'osservare che il termine $\frac{p_n}{n}$ tende a zero col crescere indefinito di n, si concluderà subito che se A_n non tende anch'esso a zero col crescere di n, vi tenderà però sempre la quantità $\frac{A_n}{\sqrt{n}}$, o in altri termini A_n rimarrà finito o tutt'al più diverrà infinito di ordine inferiore a quello di $\sqrt{n}$.

e osservando anche che la serie $\sum_0^\infty \frac{2n+1}{2} X_n \int_{-1}^{1} f''(x) X_n\, dx$ è convergente per $x = \pm 1$, si vede subito che A_n col crescere indefinito di n diviene infinitesimo di ordine superiore al primo (*); e quindi si può affermare che in questo caso alla serie di funzioni X_n che corrisponde a $f(x)$ può applicarsi la derivazione termine a termine anche pei valori estremi ± 1.

(*Sarà continuata.*)

(*) In generale si può dire che se $f(x)$ è una funzione di x le cui prime m derivate fra -1 e 1 (questi limiti inclusi) sono finite e determinate, e soddisfano alle condizioni I e II del § 5, colla successiva applicazione della integrazione per parti si trova che i coefficienti della serie di funzioni X_n che corrisponde alla stessa $f(x)$, col crescere indefinito di n, divengono infinitesimi di ordine superiore alla $(m-1)^{\circ}$; e quindi alla stessa serie possono applicarsi m derivazioni termine a termine per tutti i valori di x da -1 e 1, ad eccezione tutt'al più dei valori ± 1 per l'ultima derivata.

Ueber die Darstellung der ternären quadratischen Formen durch Quadrate

(*von Dr.* B. IGEL, *in Wien*).

Die Ueberführung algebraischer Formen in einfache, sogenannte kanonische Formen ist seit langer Zeit ein wichtiges Hülfsmittel zur Auffindung algebraischer und geometrischer Eigenschaften. Hierbei war die Darstellung durch Potenzen ganz besonders bevorzugt. Das Problem der Darstellung der Formen zweiten Grades durch Quadrate, namentlich zweier Formen zweiten Grades von n Variabeln als Summen von n Quadraten hat bekanntlich die grössten Mathematiker lange beschäftigt. Allein erst in der neuesten Zeit ist von Herrn ROSANES (*) das allgemein zu Grunde liegende Princip ausgesprochen und durch eine merkwürdige Darstellung von Formen beliebigen Grades beleuchtet worden. Es ist aber desshalb vielleicht nicht ohne Interesse, gewisse in älteren Arbeiten auftretende Identitäten von dem neuerdings gewonnenen Gesichtspunkte aus aufzufassen.

In der berühmten Abhandlung von ARONHOLD über die ternären cubischen Formen (*Crelle's Journal,* Bd. 55) welche der Grundstein der neueren algebraischen Untersuchungen bildet, findet sich die folgende Identität abgeleitet (Nr. 7, pag. 111):

$$\left.\begin{aligned} &-(\beta\gamma\delta)(\alpha\gamma\delta)(\alpha\beta\delta)(\alpha\beta\gamma)r_x^2 \\ =&-(\beta\gamma\delta)(\alpha\gamma\delta)\gamma_x\delta_x(r\alpha\beta)^2+(\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\delta)\beta_x\delta_x(r\alpha\gamma)^2 \\ &-(\alpha\gamma\delta)(\alpha\beta\delta)\alpha_x\delta_x(r\beta\gamma)^2+(\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma)\beta_x\gamma_x(r\alpha\delta)^2 \\ &+(\alpha\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma)\alpha_x\gamma_x(r\beta\delta)^2-(\alpha\beta\delta)(\alpha\beta\gamma)\alpha_x\beta_x(r\gamma\delta)^2. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Wir haben hier die in der genannten Abhandlung benutzten Buchstaben u, v, w, p, d durch resp. α, β, γ, δ, r ersetzt und ausserdem die jetzt übli-

(*) *Crelle's Journal*, Bd. 76, pag. 313.

chen Bezeichnungen

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = (\alpha\beta\gamma), \quad r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 = r_x$$

in Anwendung gebracht. Die in dieser identischen Gleichung auftretenden 18 Grössen sind vollkommen willkürliche. Bei Aronhold hat sie zum Zweck das Quadrat r^2_x durch die 6 Producte $\alpha_x\beta_x$, $\alpha_x\gamma_x$, $\alpha_x\delta_x$, $\beta_x\gamma_x$, $\beta_x\delta_x$, $\gamma_x\delta_x$, auszudrücken. Wir wollen die Formel in anderem Sinne auffassen. Da die linke Seite in Bezug auf die Grössen γ und x symmetrisch ist, so wird sie bei Vertauschung dieser Grössen nicht geändert. Dadurch erhält man somit aus (1)

$$\left.\begin{aligned} &-(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\delta)(\alpha\gamma\delta)(\beta\gamma\delta)r_x^2 \\ &= -(\beta\gamma\delta)(\alpha\gamma\delta)r_\gamma r_\delta(\alpha\beta x)^2 + (\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\delta)r_\beta r_\delta(\alpha\gamma x)^2 \\ &\quad -(\alpha\gamma\delta)(\alpha\beta\delta)r_\alpha r_\delta(\beta\gamma x)^2 + (\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma)r_\beta r_\gamma(\alpha\delta x)^2 \\ &\quad +(\alpha\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma)r_\alpha r_\gamma(\beta\delta x)^2 - (\alpha\beta\delta)(\alpha\beta\gamma)r_\alpha r_\beta(\gamma\delta x)^2. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Es sei nun

$$f(x) = \sum a_{k\lambda}x_kx_\lambda \quad (k=1,\ 2,\ 3;\ \lambda=1,\ 2,\ 3)$$

irgend eine ternäre quadratische Form und $a_{k\lambda} = a_{\lambda k}$. Dann können wir symbolisch setzen:

$$a_{k\lambda} = r_kr_\lambda,$$

so dass alsdann wird:

$$f(x) = r_x^2.$$

Die Gleichung (2) bleibt offenbar erhalten, wenn wir die Grössen r als Symbole einer Form f ansehen. Ersetzt man aber wieder r_kr_λ durch $a_{k\lambda}$ so wird links $f(x)$ auftreten. Rechts ist z. B.

$$r_\gamma r_\delta = \sum r_kr_\lambda\gamma_k\delta_\lambda = \sum a_{k\lambda}\gamma_k\delta_\lambda = f(\gamma,\ \delta),$$

wenn — ebenfalls nach Aronhold —

$$\tfrac{1}{2}\sum_i \gamma_i \frac{\partial f(\delta)}{\partial \delta_i} = f(\gamma,\ \delta) = f(\delta,\ \gamma)$$

gesetzt wird. Daher können wir statt (2) schreiben:

$$\left.\begin{aligned} &-(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\delta)(\alpha\gamma\delta)(\beta\gamma\delta)\cdot f(x) \\ &= -(\beta\gamma\delta)(\alpha\gamma\delta)f(\gamma,\ \delta)(\alpha\beta x)^2 + (\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\delta)f(\beta,\ \delta)(\alpha\gamma x)^2 \\ &\quad -(\alpha\gamma\delta)(\alpha\beta\delta)f(\alpha,\ \delta)(\beta\gamma x)^2 + (\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma)f(\beta,\ \gamma)(\alpha\delta x)^2 \\ &\quad +(\alpha\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma)f(\alpha,\ \gamma)(\beta\delta x)^2 - (\alpha\beta\delta)(\alpha\beta\gamma)f(\alpha,\ \beta)(\gamma\delta x)^2. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Die Formel (3) enthält die ausgeführte Darstellung der allgemeinen ternären quadratischen Form $f(x)$ durch die 6 Quadrate

$$(\alpha\beta x)^2, \quad (\alpha\gamma x)^2, \quad (\beta\gamma x)^2, \quad (\alpha\delta x)^2, \quad (\beta\delta x)^2, \quad (\gamma\delta x)^2.$$

Es ist bekannt, dass jede ternäre quadratische Form sich durch die Quadrate von irgend 6 linearen Ausdrücken darstellen lässt. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, wo die durch die 6 linearen Ausdrücke repräsentirten Geraden einen und denselben Kegelschnitt tangiren. Die oben in (3) auftretenden 6 Geraden

$$(\alpha\beta x)=0, \quad (\alpha\gamma x)=0, \quad (\beta\gamma x)=0, \quad (\alpha\delta x)=0, \quad (\beta\delta x)=0, \quad (\gamma\delta x)=0$$

haben aber die besondere Lage, dass sie die vier Punkte α, β, γ, δ paarweise verbinden, d. h. sie bilden die sechs Seiten des aus den 4 Punkten α, β, γ, δ bestehenden Vierecks. Da dieselben jene oben ausgeschlossene specielle Lage nicht besitzen, so ist die Möglichkeit der Darstellung von vornherein einzusehen. Die Formel (3) giebt aber zugleich die Coefficienten der Darstellung und gestattet so interessante Schlüsse für besondere Beziehungen des Vierecks zum Kegelschmitt. So oft ein Coefficient verschwindet, also wenn z. B. $f(\gamma, \delta)=0$ wird, so sind zwei Punkte, hier γ und δ, in Bezug auf den Kegelschnitt $f(x)=0$ einander conjugirt.

Bemerkenswerth erscheint hauptsächlich der Fall, wo zwei Paare conjugirter Punkte auftreten, z. B. α und γ, β und δ. Alsdann finden die beiden Gleichungen

$$f(\alpha, \gamma)=0, \quad f(\beta, \delta)=0$$

Statt, und es bleibt:

$$\begin{aligned}&-(\alpha\beta\gamma)(\alpha\beta\delta)(\alpha\gamma\delta)(\beta\gamma\delta)\cdot f(x)\\ =&-(\beta\gamma\delta)(\alpha\gamma\delta)f(\gamma, \delta)(\alpha\beta x)^2-(\alpha\gamma\delta)(\alpha\beta\delta)f(\alpha, \delta)(\beta\gamma x)^2\\ &+(\beta\gamma\delta)(\alpha\beta\gamma)f(\beta, \gamma)(\alpha\delta x)^2-(\alpha\beta\delta)(\alpha\beta\gamma)f(\alpha\beta)(\gamma\delta x)^2;\end{aligned}$$

d. h.: $f(x)$ stellt sich durch die Quadrate der wier Geraden

$$(\alpha\beta x)=0, \quad (\beta\gamma x)=0 \quad (\alpha\delta x)=0, \quad (\gamma\delta x)=0$$

dar, wie dies mit bekannten Sätzen übereinstimmt.

Wien, Januar 1874.

Extrait de deux lettres à Mr. Cremona

(*par Mr.* J. Bischoff, *professeur à l'École polytéchnique de Munich.*)

1.

. . . .

. . . .

Pour vous donner du moins un signe de vie géométrique, je vous propose une nouvelle manière d'établir le nombre des points d'inflexion d'une C^n. Si je ne me trompe pas, Mr. Cayley a le premier introduit le point tangentiel dans la géométrie, à l'occasion des courbes du 3ème ordre. Ce point peut être utilisé pour mon but. La tangente d'un point p d'une C^n donne $(n-2)$ autres points d'intersection ou tangentiels $\tilde{\omega}$ de p. En faisant le point p parcourir la C^n, son tangentiel $\tilde{\omega}$ decrira la même courbe et on aura sur la C^n deux séries de points (p) et $(\tilde{\omega})$, telles que chaque point p a $(n-2)$ points $\tilde{\omega}$ et chaque $\tilde{\omega}$ a $n(n-1)-2-2d-3r$ points p pour correspondants. Un rayon $P\alpha$ passant par le point fixe P de C^n coupe cette courbe en $(n-1)$ points qui pris pour p ont $(n-1)(n-2)$ correspondants $\tilde{\omega}$, et pris pour $\tilde{\omega}$ ont $(n-1)\{n(n-1)-2-2d-3r\}$ points p pour correspondants. En joignant à P les points qui correspondent aux $(n-1)$ points du rayon $P\alpha$, on aura, quand $P\alpha$ tourne autour de P, deux faisceaux concentriques et tels que chaque rayon du premier a $(n-1)(n-2)$ rayons correspondants dans le second, et chaque rayon du second a

$$(n-1\{n(n-1)-2-2d-3r\}$$

rayons correspondants dans le premier. Le nombre des rayons correspondants qui coincident, est donc

$$(n-1)(n-2)+(n-1)\{n(n-1)-2-2d-3r\}.$$

Or, dans ce nombre il y a: 1.° la tangente de P; 2.° les $\{n(n-1)-2-2d-3r\}$ tangentes qui passent par P; 3.° les droites qui joignent à P les points doubles et de rebroussement de la C^n. Mais il faut compter les 1.° $(n-2)$ fois, les 2.° $(n-3)$ fois et les 3.° deux fois. Le nombre cherché sera donc:

$$(n-1)(n-2)+(n-1)\{n(n-1)-2-2d-3r\}-(n-2)-(n-3)\{n(n-1)-2-2d-3r\}$$
$$-2d-2r=3n(n-2)-6d-8r.$$

. . . .

Munich, 4 novembre 1873.

2.

. . . .

J'ai repris dans le dernier temps la construction des trois autres points communs aux courbes C^4 d'un faisceau qui passent par treize points donnés, et je me permets de vous présenter ce que je crois avoir trouvé, si . . . Pourque vous puissiez embrasser le tout du même coup d'oeil, je serai un peu prolixe et emprunterai largement à l'*Essai sur la génération des courbes* du profond géomètre de Jonquières. J'avoue d'avance de n'avoir mis que le point au dessus d'une *i*. Il va sans dire que vous avez plein pouvoir de disposer de tout ce que je vous communique, d'en retrancher et d'y ajouter, soit que vous agréez l'insertion aux *Annali* ou non.

Soient $abcdefg$, 1, 2, 3, 4, 5, 6 treize points donnés, et G une droite fixe passant par le point a. Les courbes C^3 des six faisceaux qui ont pour points de base $(abcdefg1)$, $(abcdefg2)$... et $(abcdefg6)$ respectivement, coupent la G suivant six involutions, dans chacune desquelles on peut choisir une paire de points conjugués de manière, que les six nouvelles paires de points appartiennent elles-mêmes à une involution, et que les six courbes C^3, qui passent chacune par une de ces paires de points, fassent partie d'un faisceau aux points de base $(abcdefgx)$. A ce but il suffit de projeter d'un point fixe Q d'une conique quelconque les six involutions de la G sur cette conique, ce qui fournira six points $1'$, $2'$, $3'$... $6'$, c'est à dire les points par lesquels passent les droites qui joignent les projections des deux points de chaque paire de la première, de la seconde,... et de la dernière involution. Un point quelconque P' joint aux $1'$, $2'$, $3'$... $6'$ donne sur la conique auxiliaire six paires de points, qui projetées de Q sur la G déterminent les six paires de points cherchées en involution. En choisissant le point P' de manière que les six rayons $P'1'$, $P'2'$... $P'6'$ correspondent anharmoniquement aux six rayons $P1$, $P2$,... $P6$, P étant lui-même à déterminer, les six courbes $(abcdefgx)(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ correspondront anharmoniquement aux six rayons $P(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ et les points communs à deux éléments correspondants seront situés sur une C^4 qui passe par $abcdefgx123456P$.

Pour déterminer les points P' et P, que l'on fasse passer par 1, 2, 3, 4 une conique quelconque K et par $1'$, $2'$, $3'$, $4'$ une conique K' telle que les fonctions anharmoniques des quatre rayons $p(1, 2, 3, 4)$ et des quatre rayons $p'(1', 2', 3', 4')$ soient égales, p et p' étant fixes sur K et K'. A un point y' de K' ne corrispond qu'un seul point y de K, tel que les fonctions anharmoniques $y(1, 2, 3, 4, 5)$ et $y'(1', 2', 3', 4', 5')$ soient égales, de même que le point y' de K' n'a qu'un seul correspondant y_1 sur la K, tel que les fonctions anharmoniques $y'(1', 2', 3', 4', 6')$ et $y_1(1, 2, 3, 4, 6)$ soient les mêmes; py et py_1 décrivent donc, lorsque y' parcourt la K', deux faisceaux projectifs, dont les rayons doubles donnent deux positions du point P. Par conséquent chaque conique passant par 1, 2, 3, 4 ne contient que deux points P. Or les points 1, 2, 3, 4, 5, 6 sont eux-mêmes des positions de P. Donc la courbe-lieu de P passe par 1, 2, 3, 4, 5, 6 et est une cubique K^3.

Chaque point P de la K^3 et son correspondant unique P' determinent par les points communs à deux éléments correspondants des deux faisceaux

$$(abcdefgx)(1, 2, 3, 4, 5, 6...)$$

$$P(1, 2, 3, 4, 5, 6...)$$

une seule courbe C^4 qui coupe la K^3 en 1, 2, 3, 4, 5, 6, P et en cinq autres points (λ). Chacun de ces points (λ), pris pour un point P, donnera la même courbe C^4, car s'il était autrement, il faudrait, que du moins, deux courbes C^4 passent par un même point de K^3. Mais on voit d'un autre côté qu'en ajoutant aux treize points donnés un quatorzième par ex. J, le point P sera restreint à l'intersection des deux courbes K^3, K'^3, dont l'une passe par 1, 2, 3, 4, 5, 6, l'autre par 1, 2, 3, 4, 5, 7. Le point P ne peut donc avoir plus de trois positions, car si les restants quatre points communs à K^3 et K'^3 étaient des points P, il faudrait aussi que la courbe K''^3 passant par 1, 2, 3, 4, 6, 7 contienne ces quatre points et fasse partie du faisceau

(K^3, K'^3). Or le 9ième point commun à K^4 et K''^3 serait le point 6, et le 9ième point commun à K'^3 et K''^3 serait le point 7.

Il s'ensuit donc que d'entre les restants cinq points communs à C^4 et K^3, il n'y en a que deux qui, considérés comme des points P, puissent fournir la même C^4 et que les trois autres points d'intersection ne contribuent rien à la détermination de la C^4, de manière que ces points ne dépendent point du choix du point P sur K^3 et restent les mêmes pour toutes les C^4 que fournissent les divers points P de K^3. Donc

Toutes les courbes C^4 qui passent par treize points donnés, contiennent encore trois points fixes constructibles à l'aide de coniques, puisqu'ils sont communs aux K^3, K_1^3, K_2^3 passant respectivement par 1, 2, 3, 4, 5, 6; g, 2, 3, 4, 5, 6; g, 1, 3, 4, 5, 6.

. . . .

Munich, 31 janvier 1874.

Observatio Arithmetica

(*auctore* E. B. Christoffel, *prof. Argentinensi*).

1. Designantibus a, b numeros positivos integros et primos inter se, sint r_1, r_2, r_3,... residua minima non negativa numerorum a, $2a$, $3a$,... secundum modulum b, quem numero a majorem esse supponimus.

Haec series residuorum

$$(r.) \qquad r_1\ r_2\ r_3 \cdots$$

e repetitione indefinita periodi

$$r_1\ r_2 \ldots\ r_b$$

oritur, quae ipsa praeter ordinem cum numeris $0, 1, 2, \ldots\ b-1$ congruit, exstante primo residuo $r_1 = a$, ultimo $= 0$.

Iam in disquisitione valde diversa nuper observationem facere contigit, quae indolem arithmeticam talis seriei residuorum singulariter illustrare videtur.

Agitur autem de quaestione, quando r_m crescat vel decrescat, si m unitate augetur. Ad hanc quaestionem decidendam, ubi series $(r.)$ ipsa in promptu est, nil faciendum est nisi ut inspiciatur, utrum residuo r_m succedat numerus major vel minor r_{m+1}.

2. Quae tali modo, perlustrando seriem $(r.)$, de valoribus ipsius r_m crescentibus vel decrescentibus observantur, ad nostrum scopum egregie exprimuntur, si continua serie notatur litera c vel d, prout r_m crescit vel decrescit, i. e. prout post r_m invenitur numerus major vel minor r_{m+1}.

Hoc modo nova series nascitur, e duabus tantum literis c, d, sed certo quodam ordine composita: cujus terminos, si ad locum respicere oportet, quem in serie illa obtinent, per

$$(g.) \qquad g_1\ g_2\ g_3 \cdots$$

exhibemus, ita ut sit

$$g_\mu = c \quad \text{quoties} \quad r_\mu < r_{\mu+1},$$
$$g_\mu = d \quad \text{»} \quad r_\mu > r_{\mu+1}$$

est.

Haec series $(g.)$ erit et ipsa periodica sicut series $(r.)$ residuorum, et quidem

$$g_1\ g_2 \dots g_b = P$$

ejus periodus. Qua in re notandum est, ultimos terminos periodi semper fore $g_{b-1} = d$, $g_b = c$, quum propter $r_b = 0$ necessario sit $r_{b-1} > r_b < r_{b+1}$.

Rejectis igitur duobus ultimis terminis g_{b-1}, g_b, qui quum in quavis periodo iidem inveniantur, partem priorem

$$g_1\ g_2 \dots g_{b-2} = \Pi$$

vocabimus partem principalem periodi P. Quum autem sit

$r_{\mu+1} - r_\mu = r_{b-\mu} - r_{b-\mu-1}$, oportet esse $g_\mu = g_{b-\mu-1}$, i. e. $g_1 = g_{b-2}$, $g_2 = g_{b-3}$, e. i. p. ideoque pars principalis periodi semper est symmetrica, unde ipsum Π immutatum redit, si ordo literarum omnino intervertitur.

Exemplum I. Sit $a = 4$, $b = 11$, erit series $(r.)$ notis c, d ornata

$$\begin{array}{ccccccccccc|l} 4 & 8 & 1 & 5 & 9 & 2 & 6 & 10 & 3 & 7 & 0 & 4\ 8 \dots \\ c & d & c & c & d & c & c & d & c & d & c & c \dots \end{array}$$

et inde periodus

$$P = c\,d\,c\,c\,d\,c\,c\,d\,c\,d\,c$$

et ejus pars principalis

$$\Pi = c\,d\,c\,c\,|\,d\,|\,c\,c\,d\,c.$$

Exemplum II. Ut adsit exemplum latioris ambitus, sit $a = 7$, $b = 24$, erit periodus seriei $(r.)$

7 14 21 4 11 18 1 8 15 22 5 12 19 2 9 16 23 6 13 20 3 10 17 0

inde periodus seriei $(g.)$

$$P = c\,c\,d\,c\,c\,d\,c\,c\,c\,d\,c\,c\,d\,c\,c\,c\,d\,c\,c\,d\,c\,c\,d\,c$$

et ejus pars principalis

$$\Pi = c\,c\,d\,c\,c\,d\,c\,c\,c\,d\,c\,|\,c\,d\,c\,c\,c\,d\,c\,c\,d\,c\,c.$$

3. Periodus P igitur b literas continet et inter illas, quod e primis notionibus circa residua sequitur, literam d in a locis.

Dato igitur numero a et modulo b, prorsus determinata est periodus P, et vice versa, data periodo P prorsus determinatus est numerus a una cum modulo b.

Inde patet ordinem, quo literae c, d in periodo P distribuuntur, non esse arbitrarium, sed certis illum legibus premi, adeo ut aggregatum, quod e vera periodo literis c, d quocunque modo permutatis prodit, nequeat esse periodus ullius numeri a adjecto qualicunque modulo b.

Quamobrem ipsam seriem (g.) vocabimus **Characteristicam numeri** a **secundum modulum** b vel si placet characteristicam numeri fracti $\frac{a}{b}$.

4. Inter has ipsas leges circa characteristicam referenda sunt, quae summus Gauss de residuis quadraticis docuit (Theorematis arithmetici demonstratio nova) unde vix dubitari potest, in characteristica latere proprietates vel maxime intimas inter numeros a et b locum habentes.

Sed quae nobis hac occasione exponenda sunt, non tam alte spectant, nec ultra numerationem versantur.

Invenimus autem theorema, omnes periodos sub una sola forma, eademque simplicissima contineri, ita ut una eademque lex distributionem literarum c, d in omnibus characteristicis amplectatur.

5. Qua in re notatione utemur, quae quidem symmetriam ipsius Π modo commemoratam non sub ipsos oculos ponit, sed e vera fonte harum quaestionum petita ideoque pro utiliori ducenda est.

Si in characteristica litera c bis vel ter vel pluries continua serie notanda est, scribimus c^2, c^3 loco cc, ccc, et ita porro, unde c^0 significabit, literam c tali loco omnino esse omittendam.

In secundo exemplo erit igitur $\Pi = c^2dc^2dc^3dc^2dc^3dc^2dc^2$.

Eodem modo ipsa aggregata colligimus, scribendo $(c^n d)^2$ loco $c^n dc^n d$, et ita generaliter.

Hinc erit $P = \Pi dc$, si literarum ordo diligenter observatur, et ipsa characteristica numeri a secundum modulum b haec:

$$\Pi dc \Pi dc \ldots = (\Pi dc)^\infty = P^\infty.$$

6. His ita positis, habetur sequens

Theorema.

Sint s, s_1, s_2,... s_n numeri positivi integri, quorum ultimus s_n unitate major est, et formentur aggregata

$$\begin{array}{lll} c^{s-1} = \gamma & c^{s-1} d = c_1 & c^s d = d_1 \\ c_1^{s_1-1} = \gamma_1 & c_1^{s_1-1} d_1 = c_2 & c_1^{s_1} d_1 = d_2 \\ c_2^{s_2-1} = \gamma_2 & c_2^{s_2-1} d_2 = c_3 & c_2^{s_2} d_2 = d_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

tunc erit ipsius Π forma generalis haec:

$$\Pi = c_1 c_2 \ldots c_{n-1} \gamma_n \gamma_{n-1} \ldots \gamma_2 \gamma_1 \gamma,$$

atque inde sequitur

$$\frac{a}{b} = \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{s_1 + \cfrac{1}{s_2 \ldots + \cfrac{1}{s_n}}}}.$$

7. In exemplo secundo erat $\Pi = c^2 dc^2 dc^3 dc^2 dc^3 dc^2 dc^2$. Inde sequitur esse debere $\gamma = c^2$, $c_1 = c^2 d$, itaque $s = 3$, $d_1 = c^3 d$, $\gamma_1 = c_1^{s_1-1}$ atque

$$\Pi = c_1 \cdot c_1 d_1 c_1 d_1 c_1 \cdot \gamma.$$

Porro sequitur $\gamma_1 = c_1$, ergo $s_1 = 2$, $c_2 = c_1 d_1$, $d_2 = c_1^2 d_1$, $\gamma_2 = c_2^{s_2-1}$ atque $\Pi = c_1 c_2^2 \gamma_1 \gamma$; denique $\gamma_2 = c_2^2$, $s_2 = 2$, unde $\Pi = c_1 \gamma_2 \gamma_1 \gamma$ et

$$\frac{a}{b} = \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3}}} = \frac{7}{24},$$

sicut esse debet.

8. Ita patet:

I. quomodo pars principalis periodi ex evolutione fractionis $\frac{a}{b}$ in fractionem continuam ope numerorum positivorum integrorum s, s_1, s_2,... s_n obtinetur, quorum tamen ultimus debet esse > 1;

II. quomodo vice versa e vera periodo non solum numerus a una cum modulo b obtinetur, sed etiam numerorum s, $s_1, \ldots s_n$ series integra, ideoque fractio $\frac{a}{b}$ in fractionem continuam evoluta;

III. Denique patet, cognitis a et b, ex ipsa characteristica etiam residua r protinus resultare. Si enim terminorum g_1, $g_2, \ldots g_\mu$ inveniuntur m esse $=d$, reliqui autem $=c$, erit $r_\mu = \mu a - mb$.

9. Quae modo exposuimus, latius patent et attentione satis digna esse videntur. Nam series nostra P^∞ per solam numerationem literarum c, d numerum fractum $\frac{a}{b}$ determinat, et numerationibus succedentibus, si placet, ejus evolutionem in fractionem continuam praebet.

Quod ita pronunciari potest, per characteristicam etiam notionem numerorum fractorum ad solam et veram numerationem reduci, quae quidem res numerabiles sed qualescunque postulat, sine ulla notione divisionis, quae res divisibiles, id est quantitates sibi poscit.

Strassburg, 18/1/74.

Alfredo Clebsch e i suoi lavori scientifici (*).

SAGGIO STORICO-CRITICO

(PER CURA DI ALCUNI DE' SUOI AMICI).

(Dal t. VII dei *Mathem. Annalen.*)

Dopo la grave perdita toccata alla scienza, in sullo scorcio del passato autunno, per l'immatura morte dell'illustre Clebsch, il sentimento del comune dolore chiamò parecchi de'suoi amici e già scolari (Brill, Gordan, Klein, Lüroth, A. Mayer, Nöther, Von der Mühll) a raccogliersi insieme, per consegnare in una biografia scientifica di qualche mole i sensi della loro venerazione per l'estinto. Non sembrava facile invero dar mano subito ad un tal lavoro, trattandosi d'opere appartenenti sostanzialmente all'ultimo decennio e risguardanti i rami più disparati della scienza. Ma ciò appunto ne accresceva l'interesse, ne raddoppiava l'importanza; non si trattava semplicemente di far la storia delle ricerche d'un individuo, bensì ancora di confrontare con esse le ricerche altrui e di toccare quasi tutti i problemi che occupano i matematici contemporanei. A noi parve che, se tal cosa poteva riuscire quasi impossibile ad un solo studioso, circoscritto ad un determinato indirizzo scientifico, essa avrebbe invece presentato minor difficoltà ad un tentativo fatto in comune.

Già comparve una sommaria notizia biografica intorno a Clebsch nelle *Nachrichten* di Gottinga (dicembre 1872), che fu riprodotta anche in questi *Annalen* (t. 6, fasc. 2) (**). Primitivamente indirizzata ad una più ampia cerchia di lettori, il suo carattere è strettamente biografico, e le considera-

---

(*) La Direzione aveva già assegnato a questa traduzione i primi fogli disponibili negli Annali. Ma una recente inesplicabile mistificazione, cui il lavoro tedesco ha servito di pretesto e di vittima in un'altra traduzione italiana (firmata A. Favaro: nel Giornale di Napoli, t. 12°), ha reso doverosa l'immediata inserzione della presente.

I Direttori.

(**) Se ne può vedere la traduzione italiana nel t. II.° del Giornale di Napoli.

zioni d'ordine scientifico non v'escono dal campo generale. In quella vece l'esposizione seguente si rivolge al pubblico veramente matematico e s'informa ad un carattere scientifico del tutto speciale; egli è perciò ch'essa può trovare nella precedente, sotto molti aspetti, un utile complemento.

Gli svariati lavori dovuti all'operosità di Clebsch si possono ripartire, per il soggetto e per la succession loro, in sei distinti gruppi. Le prime ricerche di Clebsch si riferiscono alla *fisica matematica;* egli passò poscia al *calcolo delle variazioni* ed alla *teoria delle equazioni a derivate parziali di prim'ordine*. Vengono appresso i suoi primi lavori geometrici, riguardanti la *teoria generale delle curve e delle superficie.* Poi viene il periodo consacrato allo studio delle *funzioni abeliane* e delle *loro applicazioni geometriche.* Gli ultimi lavori finalmente si riferiscono a un tempo alla *rappresentazione delle superficie* ed alla *teoria degli invarianti.*

Questa ripartizione ha servito di base al nostro lavoro collettivo, nel senso che ciascuno di questi gruppi è stato assunto da uno di noi (nell'ordine rispettivo: Von der Mühll, Mayer, Lüroth, Brill, Nöther, Gordan), mentre le singole relazioni sono state poi fuse (da Klein) in un solo corpo. Forse il nostro lavoro non ha conseguito così tutta quell'omogeneità che si sarebbe potuta desiderare. Neppure si potè rendere interamente completo il nostro ragguaglio, giacchè l'analisi di taluni scritti relativi a problemi isolati avrebbe turbata la connessione delle varie parti. Tuttavia desideriamo e speriamo d'essere riusciti a delineare una fedele e chiara immagine dell'attività investigatrice del caro estinto, ed a promuovere per tal guisa una sempre più diffusa conoscenza degli scopi scientifici di tale attività.

Luglio 1873.

Se si guarda allo svolgimento della matematica, della *tedesca* specialmente, negli ultimi decennj, si ravvisano, generalmente parlando, due grandi gruppi di ricerche congeneri: da una parte le ricerche sulla dottrina delle funzioni, sulla teoria dei numeri, sulla fisica matematica; dall'altra la geometria e l'algebra moderna. Questa non è punto una distinzione esteriore, voluta dalla diversità degli oggetti. Il pensiero matematico istesso si è diversamente atteggiato nelle diverse discipline: da una parte l'indagine si è tutta concentrata sulla definizione al più possibile esatta dei concetti da introdursi; dall'altra essa ha pigliato le mosse da un piccolo numero di concetti fondamentali, già ben conosciuti, per esercitarsi nelle relazioni e nelle deduzioni che ne scaturiscono.

Il primo indirizzo risale, in Germania, a Dirichlet sostanzialmente ed in ultima istanza a Gauss; l'altro procedette dai lavori analitici di Jacobi e dai risultamenti delle moderne speculazioni geometriche.

Clebsch appartenne del tutto al secondo indirizzo, e deve anzi esserne considerato come il principale rappresentante fra i matematici tedeschi nell'ultimo decennio, tanto più che co' suoi molteplici rapporti personali, del pari che colla sua eminente attività didattica, lo ha grandemente promosso fra gli studiosi. Ciò nondimeno egli ha anche contribuito a preparare una futura fusione dei due indirizzi, giacchè coll'estendere le sue ricerche in sempre più lontane regioni della scienza, egli ha grandemente ravvicinati fra loro gli obbietti intorno a cui s'affaticano i matematici sì dell'uno e sì dell'altro indirizzo.

Clebsch era anzitutto algebrista, e ciò che s'ammira in tutti i suoi lavori, senza eccezione, è il compiuto dominio dell'apparato algebrico. Insieme a ciò si manifesta, nelle posteriori sue ricerche, una limpidezza di comprensione geometrica, in virtù della quale ogni passo fatto dall'analisi acquista un significato immediatamente intuibile. Il qual pregio non risiede tuttavia nel modo concreto di concepire le relazioni di spazio, quale si riscontra in molti altri geometri; per lui la contemplazione geometrica è piuttosto un simbolo ed una guida per la trattazione di problemi algebrici. Comparate alle multiformi ricerche degli altri geometri moderni, quelle di Clebsch si distingueranno sempre per l'accordo del pensiero algebrico col pensiero geometrico, e principal merito del loro autore sarà sempre quello d'avere, con questa peculiar dote, riconosciuto e rischiarato il terreno comune a dottrine che prima di lui s'erano tenute del tutto disgiunte.

A studii cosiffatti non poteva elevarsi che una mente come la sua, atta a sceverare le grandi idee madri dalla congerie dei minuti particolari. E quì noi tocchiamo un altro lato importante del suo pensiero matematico, che si riscontra in altri rappresentanti dell'indirizzo algebrico-geometrico, per es. in Jacobi, benchè non sia necessariamente legato colle ricerche d'algebra e di geometria. Pigliando le mosse da problemi speciali, Clebsch escogita *metodi generali* che lo conducono assai più oltre, e che danno ai suoi lavori l'*impronta d'un'armonica unità*. L'enunciazione del problema astratto, in forma per così dir filosofica, ed anche la concentrazione della ricerca sopra un soggetto fissato *a priori*, son lasciate alquanto in seconda linea; il concetto matematico scaturisce dal metodo con libero svolgimento organico.

Questo procedimento si riflette in tutta la sua chiarezza nell'esposizione piuttosto analitica che deduttiva tenuta da Clebsch ne' suoi lavori, la cui limpidezza induce non solo la convinzione dell'esattezza, ma altresì la coscienza d'una verità chiaramente riconosciuta. In ciò Clebsch era guidato, se l'espressione è concessa, da un tal quale istinto artistico: anzi la sua tendenza a dare un assetto armonico al materiale della ricerca ha avuto un grandissimo influsso tanto sull'indirizzo de' suoi studii, quanto sulla forma delle sue produzioni. Nè ciò crediamo essere stato di minor ajuto allo straordinario successo del suo insegnamento orale. L'interesse estetico che l'uditore pigliava alle lezioni di Clebsch gli agevolava grandemente l'accesso alle fondamentali vedute del maestro. E quì non dobbiamo neppur dimenticare l'amabilità con cui Clebsch amava profondere, nel campo delle sue relazioni personali, i tesori della sua mente. Egli sentiva in alto grado il bisogno dello scambio d'idee scientifiche, apprezzava condegnamente le ricerche altrui, e manteneva così una vivacità di lavorio mentale, in virtù della quale il campo della sua attività matematica, lungi dal serbare certi confini, tendeva a sempre più espandersi.

I primi lavori di Clebsch datano dalla metà dell'anno 1850. In opposizione ai lavori posteriori, essi riguardano per lo più problemi isolati, che egli seppe trattare con grande accorgimento e condurre a completa soluzione. Sono essi da considerare come studii preliminari, nei quali è ancor poco manifesta la maniera di Clebsch. La splendida serie delle sue ricerche algebrico-geometriche, che scaturiscono le une dalle altre per un legame intimo, e nelle quali Clebsch segna, con sempre maggiore consapevolezza, nuove vie alla scienza, comincia soltanto coll'anno 1860. Quando si pensa alla brevità del tempo consacrato a tutti questi lavori, quando si guarda allo svolgimento progressivo ch' essi presentano e che non potè a gran pezza raggiungere il suo punto culminante, si è tratti pur troppo a deplorare ancor più amaramente il danno sofferto dalla scienza per la morte prematura di Clebsch.

Clebsch ha incominciato la sua educazione matematica nella patria Università di Königsberg, da lui frequentata negli anni 1850-54. Era questo invero, a quell'epoca, il luogo più acconcio allo sviluppo di attitudini matematiche; giacchè i varii rami della scienza v'erano splendidamente rappresentati da Hesse, Neumann e Richelot. Le lezioni di Neumann introdussero Clebsch nelle dottrine, allora poco diffuse, della fisica matematica; la svariata ed infaticabile attività didattica di Richelot gli procacciò un'esatta cognizione dell'analisi allora coltivata; ma il più duraturo influsso fu esercitato su lui da Hesse, che gli svelò il magistero delle moderne ricerche algebrico-geometriche.

I primi lavori di Clebsch riguardano problemi di fisica matematica, specialmente d'elasticità e d'idrodinamica. La scelta di questi soggetti ebbe origine dapprima dalle lezioni di Neumann, ma la sua nomina al Politecnico di Carlsruhe, ove impartì dal 1858 al 1863 l'insegnamento della meccanica teoretica, lo trattenne più a lungo in cosiffatte ricerche. Del resto in questi lavori Clebsch non è veramente un fisico. Non ostante le molte sue cognizioni speciali, egli nutrì poco interesse per quel tenore d'indagini che è proprio della fisica e delle scienze naturali in genere. Solamente nel suo primo lavoro, cioè nella Dissertazione inaugurale « Sul moto d'un ellissoide in un fluido » (Königsberg 1854, e Giornale di Crelle, t. 52) ed in una posteriore ricerca sulla polarizzazione circolare (Giornale di Crelle, t. 57) trovasi un confronto dei risultati teorici coll'esperienza. Ciò che maggiormente lo interessava era la traduzione del problema in analisi, e la conseguente ricerca di sottili artifizii per conseguirne la soluzione; egli apparteneva, simile anche in ciò a Jacobi, a quell'indirizzo strettamente matematico, il quale ama coltivare il pensiero astratto senz'altro scopo che il pensiero stesso. Era quindi naturale che a poco a poco egli si scostasse dai problemi fisici per occuparsi di problemi puramente matematici.

Il Giornale di Borchardt (veggasi l'Elenco in fine) contiene una serie non breve di memorie relative a problemi idrodinamici ed ottici. Il merito di questi lavori consiste, più che nei risultati (benchè ve n'abbia alcuni di pregevolissimi), nel maneggio elegante delle formole analitiche; per il che appunto riescirebbe impossibile darne esatta notizia senza entrare in minuti particolari. Quasi a modo di coronamento di tal periodo d'attività fisico-matematica Clebsch pubblicò nel 1862 il suo « Trattato d'elasticità » (Lipsia, presso Teubner). La nota opera di Lamé era sopratutto commendevole per la deduzione e per la trasformazione delle generali equazioni d'elasticità e per la loro applicazione al problema della doppia rifrazione; questa invece di Clebsch si distingue essenzialmente per una magistrale trattazione del cosidetto problema di De St. Venant, del quale Clebsch ha per la prima volta considerato anche il problema inverso. De St. Venant s'era occupato del caso d'una verga, sulle cui faccie laterali non agiscono forze, ed aveva mostrato che il problema della flessione e della torsione può essere risoluto in certe ipotesi di forze distribuite sulle sezioni terminali. Clebsch fece vedere che, sotto analoghe condizioni, può risolversi anche l'altro caso in cui le faccie laterali sono sollecitate da certe forze, e le sezioni terminali son libere. Mentre quelle prime ricerche forniscono una soluzione approssimata del caso d'una verga soggetta a forze agenti alle sue estremità, queste altre porgono una soluzione pure approssimata del caso d'una lamina soggetta a forze agenti lungo il suo margine. Clebsch fa poscia vedere che, nel caso d'una verga molto sottile e in quello d'una lamina pure molto sottile, le ipotesi ammesse si avverano per quegli elementi in cui bisogna, secondo Kirchhoff, decomporre questi corpi affine d'avere equazioni esatte, e deduce dalle sue formole le equazioni finali date per la prima volta da Kirchhoff rispetto a questi due casi.

I primi lavori di matematica pura di Clebsch si collegano con ricerche di Hesse e di Jacobi. Clebsch non conobbe Jacobi personalmente, ma ne studiò le opere con ispeciale predilezione e si qualificò più tardi per suo discepolo. Nei lavori di cui stiamo per parlare, Clebsch piglia a studiare talune quistioni sollevate da Jacobi; e benchè l'ordine d'idee in cui quei lavori s'aggirano sia schiettamente jacobiano, i risultati particolari cui egli giunge vanno assai oltre i limiti cui era pervenuto il maestro.

Il problema di determinare una o più funzioni incognite in guisa che un integrale, contenente queste funzioni insieme colle loro derivate, acquisti un valore massimo o minimo, richiede anzitutto che si annulli la prima variazione dell'integrale, ed è da questa condizione che si ottengono le equazioni differenziali che somministrano, coll'integrazione, le funzioni incognite. Ma perchè le funzioni così ottenute corrispondano veramente ad un massimo o ad un minimo, bisogna inoltre ch'esse facciano prendere alla seconda variazione un segno determinato, talchè sorge così l'altro problema di dare a questa seconda variazione una forma appropriata a riconoscerne il segno. Questo problema conduce alla sua volta a nuove equazioni differenziali così complicate, a primo aspetto, che lo stesso Lagrange non ne potè conseguire l'integrazione: laonde è da tenersi per rilevantissima la scoperta fatta da Jacobi che la loro integrazione è immediatamente deducibile da quella delle prime (Giornale di Crelle, t. 17, 1837). Jacobi però non aveva considerato che il caso più semplice, quello d'un'integrale semplice e d'una sola funzione incognita; per lo che, pensando alla grande difficoltà incontrata nel dimostrare completamente i teoremi da lui enunciati, difficoltà superata soltanto nel lavoro di Hesse (Giornale di Borchardt, t. 54, 1857), a mala pena potevasi sperare che anche in casi più generali si riuscisse a stabilire teoremi analoghi a quello di Jacobi. Ciò non di meno Clebsch intraprese, subito dopo la pubblicazione del lavoro di Hesse, lo studio generale della seconda variazione [Giornale di Borchardt, t. 55, nov. 1857, febbr. 1858; t. 56, giugno 1858 (*)], e, riducendo molto perspicacemente i problemi del calcolo delle variazioni a problemi di massimo o minimo relativo, scevri da derivate d'ordine superiore al primo, riuscì a dimostrare, tanto per il caso d'integrali semplici, quanto per quello d'integrali multipli, che la riduzione della seconda variazione non richiede punto nuove integrazioni (**).

Nel caso d'un integrale semplice questa riduzione presenta la singolare circostanza che il risultato finale contiene, in apparenza, più costanti arbitrarie che non richiegga la teoria. Queste costanti sono inoltre legate da certe equazioni di condizione, e devono essere determinate in modo da non annullare il denominatore della riduzione entro i limiti dell'integrale. Era stato più volte trattato il problema (risoluto nei casi più semplici da Eisenlohr, Spitzer ed Hesse) di ridurre queste costanti ad un prestabilito numero minore, ma importava ancor più d'esprimere le costanti originarie in funzione di nuove costanti indipendenti, per guisa da rendere identicamente soddisfatte quelle equazioni di condizione. La prima soluzione completa d'ambidue questi problemi si trova nei lavori di Clebsch (Giorn. di Borch. t. 55, febbr. 1858) (***), ed è conseguita con un processo che è ancor più notabile del risultato medesimo. Esso porge la dimostrazione e la generalizzazione d'un altro principio fondamentale, accennato pure da Jacobi nel luogo citato, cioè che le equazioni differenziali d'ogni problema isoperimetrico in cui non entri che una sola variabile indipendente sono riducibili ad un'equazione a derivate parziali di prim'ordine (****), talchè il calcolo delle variazioni è reso accessibile a quei metodi che vennero aperti alla dinamica da Hamilton e da Jacobi.

Dopo questi lavori Clebsch si rivolse ben tosto a problemi geometrici,

(*) Quando non si avverta il contrario, la data delle citazioni è quella segnata dall'Autore alla fine del lavoro.

(**) Questa stessa riduzione venne più tardi conseguita un po' più semplicemente da Lipschitz (Giorn. di Borch., t. 65), però sotto alcune restrizioni. La deduzione effettiva dei criterii pei massimi e pei minimi fu data nello scritto d'abilitazione di Mayer (*Beiträge zur Theorie der Maxima und Minima der einfachen Integrale.* Leipzig, 1866) in base al lavoro di Clebsch (cfr. anche la Memoria di Mayer nel Giorn. di Borch., t. 69).

(***) Un'altra soluzione più diretta del primo problema fu data più tardi da Mayer (scritto citato), però in connessione coi concetti di Clebsch; una soluzione indipendente fu data da Stern (Mem. di Gottinga, t. 13, 1867).

(****) Nelle lezioni di Jacobi sulla dinamica, pubblicate in appresso (1866), questo stesso teorema è enunciato con pari generalità, ma dimostrato soltanto per casi particolari.

ma ebbe anche in seguito ripetute occasioni di trattare altre quistioni sollevate da Jacobi (1860-62, 1865). E dapprima fu mosso a ciò dall'assunta pubblicazione d'alcune parti dei lavori postumi di Jacobi, e delle lezioni di questo sulla Dinamica (uscite in luce nel 1866); i quali lavori di Clebsch, per la loro stretta relazione con quelli di cui s'è tenuto parola testè, è bene siano analizzati in questo posto.

Come nelle ricerche sul calcolo delle variazioni, così anche in queste è da commendare principalmente l'abilità con cui sono superate le difficoltà tecniche; ed è poi degna di nota l'inusitata chiarezza d'esposizione in argomenti così complicati.

Da un cenno di Jacobi (Giorn. di Crelle, t. 29, p. 253) risultava che il processo seguìto fino allora nella trattazione del problema di Pfaff era suscettibile di perfezionamento quanto al numero delle integrazioni da eseguire; nè era difficile congetturare che dovesse esistere per esso un metodo analogo a quello col quale Jacobi aveva così radicalmente promossa la teoria delle equazioni a derivate parziali di prim'ordine (*). La difficoltà stava nella molto maggiore complicazione delle operazioni a ciò necessarie. Ma Clebsch superò tutti questi ostacoli [Giorn. di Borch., t. 60 sett. 1860 (pubblicato nel 1862), t. 61, genn. 1861 (pubbl. nel 1862)], e rivocando il problema a sistemi d'equazioni a derivate parziali lineari simultanee, che possono essere stabiliti senza integrazione e indipendentemente gli uni dagli altri, aperse ad esso un nuovo punto di veduta, che si diè tosto a riconoscere di fondamentale importanza e che probabilmente servirà di base ad ogni futura ricerca sul problema di Pfaff.

Quì si presentava una difficoltà. I singoli sistemi d'equazioni a derivate parziali lineari, dalla cui integrazione dipende la soluzione del problema di Pfaff, non hanno a dirittura quella forma che Jacobi insegnò ad integrare nella *Nova Methodus;* laonde non si poteva applicar loro senz'altro il metodo jacobiano. Nasceva pertanto il bisogno d'istituire una ricerca generale sull'integrazione simultanea di più equazioni a derivate parziali lineari (**).

(*) Infatti Natani aveva già prima di Clebsch conseguita nel problema di Pfaff la diminuzione del numero d'integrazioni preveduta da Jacobi [Giorn. di Borch., t. 58, genn. 1860 (pubbl. nel 1861)]. Però il suo metodo e quello di Clebsch, benchè s'accordino quanto al numero delle integrazioni, non sono ancora stati messi in connessione fra loro.

(**) Prima di Clebsch s'era occupato di generali ricerche sull'integrazione simultanea di più equazioni a derivate parziali, senza considerare specialmente le lineari, il Bour, Fu solo alcuni anni più tardi (1865) che Clebsch ebbe occasione di ripigliare il problema, per promuoverne ulteriormente la risoluzione in questo senso. Egli si occupava allora delle equazioni a derivate parziali lineari, cui soddisfanno gli invarianti delle forme algebriche, e di cui dovremo discorrere più avanti. Egli aveva d'altronde preso conoscenza d'un lavoro di Weiler (Giornale di Schloemilch, 1863), nel quale veniva notabilmente scemato il numero delle integrazioni richieste dal metodo di Jacobi per le equazioni a derivate parziali di prim'ordine. La ricerca istituita da Clebsch (Giorn. di Borch., t. 65) pose capo a due importanti risultati, e cioè primieramente al teorema che ogni sistema d'equazioni a derivate parziali lineari, dotate di soluzioni comuni, è riducibile alla forma jacobiana, con che si viene ad avere un metodo comune per la risoluzione di tutti i problemi conducenti a tali equazioni differenziali parziali; e in secondo luogo alla dimostrazione, collegata colle ricerche di Weiler, del notabile abbassamento ond'è suscettibile il numero delle integrazioni, tanto nel metodo jacobiano propriamente detto, quanto nell'estensione di questo metodo al problema di Pfaff. Era riservato a più recenti ricerche il trovare che il numero delle integrazioni volute dal metodo Clebsch-Weiler può essere ancora notabilmente scemato (cfr. varie Memorie di Lie e di Mayer nelle *Nachrichten* di Gottinga del 1872, e nei *Math. Ann.*, t. 5 e 6), e, più generalmente, l'avviare queste teorie verso una fase che sembra dover essere di radicale svolgimento.

I lavori geometrico-algebrici di Clebsch cominciano coll'anno 1860. Come dichiara egli stesso, incominciò ad interessarsi di problemi geometrici mercè lo studio delle opere di Salmon che, come tutti sanno, esercitano una grande attrattiva sul lettore per la dovizia e la varietà degli argomenti. Dovette contribuire potentemente a ciò anche lo scambio d'idee scientifiche che Clebsch potè attuare con parecchi de'suoi colleghi di Carlsruhe: tanto che egli soleva più tardi rammentare con compiacenza speciale d'aver imparata allora da Schell la moderna geometria sintetica. Quanto al materiale analitico-geometrico delle ricerche che stava per iniziare, egli l'aveva

---

i cui risultati difettano però d'un'esatta enunciazione (cfr. un lavoro di Mayer, nei *Math. Annal.*, t. 4). Così le equazioni a derivate parziali lineari della teoria degli invarianti (su cui dovremo ritornare) erano già state studiate da Cayley nel 1856 riguardo alla loro integrazione simultanea (*A second Memoir upon Quantics*, Phil. Trans., vol. 146). Queste ricerche di Cayley sono molto affini alle posteriori di Clebsch, ma l'autore inglese non aveva posto in rilievo la loro importanza per la teoria delle equazioni differenziali parziali in genere.

attinto, come già dicemmo, dalle lezioni universitarie di Hesse, del quale aveva già proseguite le investigazioni in un altro campo (nella riduzione della seconda variazione).

Per acquistare una chiara idea del posto occupato nella scienza dalle ricerche di Clebsch, fa d'uopo ricapitolare sommariamente il movimento della geometria negli ultimi decennii.

Due sono i principali indirizzi che si pronunciarono in quest'epoca, e che per molti riguardi procedono parallelamente a quel generale dualismo delle ricerche matematiche che già dovemmo ricordare fin dal principio. Gli studii del primo genere sono caratterizzati massimamente dall'applicazione del calcolo infinitesimale a problemi metrici, e ad essi appartengono le ricerche sulla curvatura delle superficie, sulle linee geodetiche, ecc., promosse in Francia da Monge, in Germania da Gauss. Benchè queste ricerche abbiano contribuito allo svolgimento del calcolo infinitesimale, ed abbiano acquistato una grande importanza nella fisica matematica, il loro carattere originario era troppo poco algebrico perchè esse potessero restar collegate colle ricerche dell'altro genere, comprese sotto la denominazione di *geometria moderna.* Egli è soltanto in questi ultimi tempi che i progressi compiuti in ambidue gl'indirizzi tendono a prepararne il futuro ricongiungimento, il quale non mancherà d'essere sommamente fecondo d'interesse e di utilità.

La *geometria moderna* risale anch'essa a Monge ed ai suoi numerosi discepoli, fra i quali primeggia Poncelet pel suo fondamentale *Traité des propriétés projectives,* uscito in luce nel 1822. È molto singolare che la novella e vigorosa dottrina non abbia trovato sulle prime in Francia che un solo cultore, capace di farla progredire oltre il punto cui s'era fermato Poncelet; ed è in pari tempo da deplorare assai che, per la scarsità delle relazioni scientifiche di quell'epoca, il benemerito Chasles abbia dovuto rifare colle sole sue forze molta parte del cammino già percorso dai geometri tedeschi.

Giacchè, seguendo l'impulso dato dalla scuola francese, era sorta improvvisamente in Germania, verso la metà dell'anno 1820, una rigogliosa vita geometrica, il cui inizio è segnato dall'apparizione quasi contemporanea di tre grandi ricercatori: Möbius, Plücker e Steiner.

La prima ed insieme la più importante opera di Möbius, il *Calcolo baricentrico,* apparve fino dal 1827, ma rimase a lungo quasi inosservata. Le idee nuove e fondamentali depostevi da Möbius non potevano destare interesse, nè venire pienamente intese prima che il senso geometrico dei lettori si fosse innalzato gradatamente fino al punto donde Möbius avea dato le mosse alle sue investigazioni. Egli è perciò che il calcolo baricentrico non ha potuto associarsi allo svolgimento dei concetti geometrici in quella misura che avrebbe meritato per la ricchezza, novità e fecondità degli argomenti che vi sono trattati. Egual sorte ebbero pur troppo i lavori d'un altro investigatore, di H. Grassmann, lavori importantissimi, e non per la sola geometria. Soltanto adesso s'incomincia a studiare i lavori di Grassmann e si scorge che fin dal 1840 egli aveva già concepito un sistema d'idee molto larghe, che si esplicarono soltanto nel periodo successivo insieme col generale organismo geometrico, ma che in parte sono rimaste ancora intatte. Abbiamo voluto anticipare quì questo riconoscimento d'una straordinaria benemerenza, perchè il seggio isolato che Grassmann occupa nella scienza ci darà poche occasioni in seguito di riferire su lavori suoi, ed ancor più perchè noi esprimiamo così una convinzione che Clebsch nutriva nel modo più profondo.

I nomi di Plücker e di Steiner hanno servito di bandiera a quella separazione della geometria in analitica e sintetica che, fino ai tempi più vicini a noi, ha diviso i geometri tedeschi in due campi opposti. Steiner voleva trovare nell'immediata contemplazione geometrica il solo sussidio necessario ed il solo obbiettivo della sua ricerca; Plücker invece cercava la sorgente delle sue dimostrazioni nell'identità dei processi analitici e delle costruzioni geometriche, e considerava le verità geometriche come uno fra i molti riscontri possibili delle deduzioni analitiche. Eppure gli scopi cui miravano i due investigatori erano per molti riguardi strettamente legati fra loro. Il progresso della scienza ha reso possibile quasi dovunque il passaggio dall'una all'altra di queste maniere di vedere, diverse soltanto nella forma, e ne va ponendo sempre più in luce il vero carattere comune, che consiste nel pigliare a *fondamento* la *projettività* ed a *sussidio* l'*organismo algebrico*. La preferenza dell'una o dell'altra forma diventa cosa poco men che accessoria.

È precisamente questo modo di considerare i rapporti tra la geometria sintetica e l'analitica, che costituisce una delle vedute fondamentali di Clebsch. Si può consultare in proposito il suo discorso commemorativo su Plücker, inserito nel t. 16 delle Memorie di Gottinga (1871) (*), dov'egli presenta

(*) Che si può leggere in italiano nel t. II.° del Giornale di Battaglini.

un ampio quadro comparativo dei progressi compiuti fino a quel tempo dalla geometria, traendone l'occasione d'esporre generalmente le sue proprie idee fondamentali circa la scienza.

Intanto che l'indirizzo prettamente geometrico di Steiner, con cui strettaménte collegansi le contemporanee ricerche di Chasles, veniva sviscerato ne'suoi principii da Staudt, la geometria analitica traeva nuovo e sostanziale incremento dagli importanti lavori di Hesse. Mentre Plücker ravvisava il principale vantaggio delle sue considerazioni nella possibilità di supplire con vedute geometriche alle eliminazioni algebriche, Hesse fece vedere che, adoperando i sussidii analitici inventati nel frattempo, specialmente i determinanti, si poteva dare al calcolo algebrico quella flessibilità di cui Plücker deplorava il difetto, tanto da volere sbandita affatto ogni eliminazione.

Per questa via soltanto si rendeva possibile una fusione della geometria con quella nuova dottrina che oggi chiamasi *teorica delle forme* o *degli invarianti,* e che è destinata a rappresentare colla generalità dell'analisi i concetti fondamentali della geometria moderna.

Il merito d'aver creata questa dottrina, e d'averla congiunta colla speculazione geometrica, per guisa da recare quest'ultima al di là del punto cui era pervenuto Hesse, spetta ai geometri inglesi Sylvester, Cayley, Salmon, alle cui ricerche connettonsi in Germania quelle di Aronhold (*). Le posteriori ricerche di Steiner sopra le curve e le superficie d'ordine superiore, che, presentate senza dimostrazione dal loro autore, eccitarono l'attenzione e gli studii di tanti geometri, e segnatamente di Clebsch, furono fatte disgraziatamente senz'alcuna contezza dei lavori inglesi, talchè molti dei risultamenti notabilissimi pubblicati da Steiner erano stati già da lungo tempo divulgati dagl'investigatori inglesi. D'altro lato le ricerche istituite iu quel tempo sulla teoria degli invarianti da Hermite e da Brioschi avevano una forma troppo poco geometrica per riuscire direttamente utili alla geometria.

Tal'era a un dipresso la vicenda con cui s'erano alternati i progressi geometrico-algebrici quando Clebsch s'applicò alla geometria. Già un'altra volta (Giorn. di Borch., t. 53, 1855) egli aveva trattato un tema geometrico in uno de'suoi primi lavori, cioè il problema di Malfatti riportato

(*) Però i primi lavori inglesi non posseggono quell'eleganza analitica che si ammirava già nelle ricerche di Hesse.

da Steiner alle superficie di second'ordine, dimostrando che una certa soluzione algebrica di tal problema, data da Cayley, poteva essere facilmente espressa coll'ajuto delle funzioni ellittiche. È molto degno di nota che in questo lavoro Clebsch accennasse ad un ordine d'idee, il cui posteriore svolgimento, sebbene con diverso indirizzo, costituì appunto uno de' maggiori suoi titoli di gloria: vogliam dìre l'applicazione della teorica delle funzioni trascendenti alla geometria moderna.

Da quanto si accennò poco dianzi circa il progresso della geometria, deve apparir naturale che Clebsch entrasse dapprima nella via aperta dai geometri inglesi, trattando a dirittura i problemi in coordinate omogenee, definite puramente come numeri proporzionali, e facendo così un passo più in là di Hesse (*). In questa maniera di procedere non solo è indifferente la scelta dell'equazione rappresentatrice del piano all'infinito, ma rimane eziandio indeterminata la natura reale od immaginaria delle forme (od almeno tale determinazione è d'importanza secondaria). Lo strumento algebrico di cui si servì più frequentemente Clebsch nelle sue prime ricerche (traendo in ciò partito da quelle di Hesse) è il teorema di moltiplicazione dei determinanti, applicato a determinanti marginati. Rammenteremo primieramente, come importanti anche per questo rispetto, i lavori sulla *teoria generale delle curve e delle superficie algebriche,* comprendendo sotto questo titolo le ricerche aventi per iscopo lo studio delle curve o superficie generali d'un dato ordine nell'aspetto projettivo. Queste ricerche hanno uno strettissimo legame colla teorica degli invarianti relativi a sostituzioni lineari, e debbono per converso venire essenzialmente distinte da quelle altre, di cui diremo in appresso, ove una curva od una superficie è considerata come l'espressione d'una data irrazionalità algebrica, ed ove si va in traccia di proprietà inalterabili per ogni trasformazione univoca.

Il primo problema trattato da Clebsch nella teoria generale delle superficie si riferisce a quei punti d'una superficie algebrica d'ordine n nei quali questa ha un contatto quadripunto con una retta (*Zur Theorie der algebraischen Flächen,* Giorn. di Borch., t. 58, marzo 1860). Salmon aveva già trovato per via d'enumerazione (*Cambridge and Dublin Math. Journ.,*

(*) A ciò non contraddice punto la supposizione che fa talvolta Clebsch ne'suoi lavori, quando intervengono i differenziali delle coordinate, dell'esistenza d'un'equazione lineare non omogenea fra le coordinate stesse. Ciò ha soltanto per iscopo di poter applicare simmetricamente i processi d'eliminazione: ma i valori delle costanti di quell'equazione sono del tutto indifferenti.

t. 4, 1849) che il luogo di questi punti è d'ordine $11n-24$, ed aveva anche costruito (*Quarterly Journ.*, t. 1, 1857) l'equazione d'una superficie che sega la data secondo questa linea. Ma la forma di quest'equazione è alquanto involuta, e il merito del lavoro di Clebsch consiste appunto nella scoperta di una legge semplice per formare l'equazione medesima (*). Clebsch giunge a questo risultato coll'invenzione d'un metodo generale, che porge il modo di scrivere distesamente la risultante dell'eliminazione di n variabili omogenee fra $n-2$ equazioni lineari, un'equazione quadratica ed un'equazione di grado qualunque. In termini generali, il metodo consiste nel decomporre l'equazione quadratica in due fattori, coll'ajuto delle $n-2$ equazioni lineari, i quali fattori entrano simmetricamente nel risultato finale, epperò non involgono alcuna irrazionalità (cfr. la *Teoria delle forme binarie* di Clebsch, § 27). Per tal guisa la risultante si presenta non già come una complicata funzione dei coefficienti, ma come un'espressione formata con legge semplice e manifesta, al che appunto Clebsch attribuiva una speciale importanza.

Clebsch ha fatto varie altre applicazioni geometriche di questo metodo d'eliminazione, come nel lavoro sulle tangenti di flesso delle curve di terz'ordine (**) (Giorn. di Borch., t. 58, aprile 1860), più specialmente ancora nella Memoria sopra una classe di problemi d'eliminazione ecc. (*ibid.*, t. 58, giugno 1860), e finalmente nell'importante Memoria sulle curve di quart'ordine (t. 59, sett. 1860), la quale sembra essere stata dettata coll'intendimento di raccogliere materiali preliminari per una futura trattazione più completa di queste curve, materiali tuttora molto scarsi. Mentre le ricerche di Hesse e di Steiner versavano intorno ai notabili aggruppamenti offerti dalle 28 tangenti doppie state scoperte primamente da Plücker, il lavoro di Clebsch procede in un'altra direzione, si aggira cioè sulle proprietà delle cubiche polari corrispondenti ai punti del piano. In questa ricerca campeggia principalmente la *hessiana* di ciascuna di queste cubiche, o il determinante polare, come lo chiama Clebsch, luogo geometrico che dege-

(*) Il lavoro di Clebsch porta la data dell'11 marzo 1860. Il 14 giugno dello stesso anno Salmon comunicò alla *Società Reale* il medesimo risultato, senza dimostrazione, in una Memoria sulle forme ternarie cubiche (cfr. *Phil. Trans.*, 1870). Più tardi Gordan lo ricavò più brevemente dall'applicazione metodica della segnatura simbolica (Giorn. di Schloemilch, t. 12, 1867).

(**) Il prodotto delle nove tangenti di flesso, dato in questo lavoro, era già stato indicato senza dimostrazione da Salmon (*Higher Algebra*, 1ª ed., p. 116).

nera in un triangolo per infiniti punti del piano. I poli di questi triangoli formano una nuova curva di quart'ordine, la cui equazione è formata colle derivate terze della forma data nel modo stesso in cui il primo invariante d'una forma cubica è formato coi coefficienti. Una serie di bei teoremi serve ad illustrare le relazioni fra i determinanti polari ed i loro poli, e la notabile reciprocità che esiste fra questi e i vertici del triangolo rappresentato dal determinante polare, i quali descrivono anch'essi la nuova curva di quart'ordine.

Fra le forme cui conduce lo studio delle curve così trovate è particolarmente notabile, quantunque non sia la più semplice, un invariante di sesto grado, il quale ha la proprietà d'annullarsi quando l'equazione della curva di quart'ordine risulta dalla somma di cinque biquadrati (*). Si ha così un singolare esempio dell'impossibilità d'una trasformazione, la quale, in base alla semplice enumerazione delle costanti, si sarebbe giudicata possibile (cfr. il discorso commemorativo di Clebsch su Plücker, p. 23). Di quì pure ebbe Clebsch la prima occasione d'occuparsi del pentaedro delle superficie di terz'ordine e della trasformazione (ad esso subordinata) dell'equazione di queste superficie nella somma di cinque cubi, non parendogli soddisfacente la deduzione di questa forma canonica dal semplice accordo nel numero delle costanti. Il teorema del pentaedro gli doveva sembrare tanto più interessante, in quanto che permetteva di riguardare i teoremi sulle 27 rette delle superficie di terz'ordine come corollarii dei teoremi generali dati da lui stesso sul contatto quadripunto d'una retta con una superficie: tutto stava nel rintracciare, per le superficie d'ordine n, relazioni analoghe a quelle che emergono, nel caso delle superficie di terz'ordine, dall'esistenza del pentaedro.

Le superficie di terz'ordine non sono state studiate che da breve tempo. Nell'anno 1849 uscì in luce un lavoro di Cayley ad esse relativo, ove è dimostrata l'esistenza delle 27 rette che giacciono su ognuna di tali superficie, e poco dopo (*Cambridge and Dublin Math. Journ.*, t. 4) un altro lavoro di Cayley e Salmon contenente la deduzione delle principali proprietà che si collegano coll'esistenza di queste rette. In breve Sylvester scoperse, per mezzo di considerazioni algebriche, il pentaedro delle superficie di terz'ordine e le sue relazioni colla superficie hessiana (*ibid.*, t. 6,

(*) Queste curve singolari sono state posteriormente studiate più a fondo da Lüroth (*Math. Ann.*, t. 1).

1851). Queste due scoperte segnano i punti principali intorno a cui s'aggira, anche al presente, la teoria delle superficie di terz' ordine, ma è bene notare, come Clebsch ha fatto con insistenza, che non è peranco stato trovato un nesso semplice fra questi due rami della ricerca (*). La teoria delle 27 rette ha fatto un progresso importante mercè le considerazioni di Grassmann e di Steiner sulla generazione delle superficie di terz'ordine, poichè di qui si pervenne alla rappresentazione di queste superficie sul piano e quindi alla conoscenza d'un mezzo semplice per lo studio di queste proprietà; la stessa teoria ha inoltre servito di base a Schläfli per una classificazione delle superficie in discorso. Invece la teoria del pentaedro è restata finora relativamente stazionaria, quanto al suo ufficio nella geometria delle superficie di terz' ordine.

Sylvester aveva dato i suoi teoremi sul pentaedro senza dimostrazione. Cinque anni dopo, questi stessi teoremi, insieme con molti altri, furono dati pure da Steiner nella più volte citata Memoria sulle superficie di terz'ordine (Giorn. di Borch., t. 53, 1856), però senza dimostrazione (come allora soleva fare Steiner), anzi senza neppure un cenno del modo di ottenerla. Clebsch prese quindi a rintracciare una dimostrazione di questi teoremi. Dopo una comunicazione preliminare (Giorn. di Borch., t. 58, marzo 1860) dove, ammettendo l'esistenza del pentaedro, esponeva le relazioni di questo colla superficie hessiana e il procedimento da tenersi, in base alla teoria degli invarianti, per formare l'equazione di quinto grado, donde dipende la determinazione dei cinque piani pentaedrali (**), egli dimostrò, in un successivo più esteso lavoro (Giorn. di Borch., t. 59, febbraio 1861), che l'esistenza del pentaedro, del pari che la coincidenza de' suoi vertici coi punti nodali della superficie hessiana, sono proprietà che rientrano in un teorema generale sui punti nodali della hessiana d'una superficie d'ordine n. La dimostrazione di questo teorema, che in qualche punto richiederebbe d'essere perfezionata, si fonda sulla determinazione del numero dei punti

(*) Una dipendenza fra i due problemi è stata trovata da Clebsch, rispetto ad una speciale superficie di terz'ordine, detta da lui *superficie diagonale* (*Math. Ann.*, t. 4, *Zur Theorie des Fünfseits* ecc.), e in base a ciò Klein ha trovato un modo di costruire per approssimazione i piani del pentaedro quando le 27 rette sono tutte reali (*Berichte der Erlanger phys. med. Societät.*, giugno 1873).

(**) Nel già citato lavoro sulle forme quaternarie cubiche (giugno 1860) Salmon pubblicò risultati analoghi, evitando un errore in cui era caduto Clebsch per aver trascurato di considerare gl'invarianti di carattere dispari.

comuni a tutte le superficie rappresentate dai minori del hessiano posti eguali a zero, ed è diventata poscia importante per cosiffatte quistioni d'enumerazione. Per le superficie del terz'ordine questi punti sono, com'è noto, in numero di dieci, e costituiscono appunto i vertici del pentaedro. Clebsch discute ampiamente una peculiarità dell'equazione di 10.° grado corrispondente a questi punti, la quale consiste in ciò che certe coppie di radici determinano razionalmente una terza radice, talchè l'equazione ha una risolvente di 5.° grado. Il lavoro di Clebsch è interessante inoltre per la reiterata applicazione della segnatura simbolica, che Clebsch medesimo ha poscia adoperata sistematicamente (*).

Ricorderemo poscia la Memoria di Clebsch sul problema delle normali alle curve ed alle superficie di 2.° ordine (Giorn. di Borch., t. 62, gennaio 1862), che può servire di modello per la trattazione di problemi metrici nel senso del moderno concetto di projettività. La relazione metrica di perpendicolarità è sostituita, sull'esempio di Cayley, da quella di polarità rispetto ad una conica o ad una superficie di second'ordine arbitraria (ciò che del resto non generalizza i risultati, nel senso projettivo, per le forme del secondo grado), nel qual modo il problema rientra nel novero di quelli relativi al sistema di due forme quadratiche simultanee (con un numero qualunque di variabili). La distinzione di reale e d'immaginario, tanto curata da Joachimsthal nella sua nota Memoria sullo stesso problema (Giorn. di Borch., t. 59), non è punto toccata da Clebsch, il quale concentra invece la sua attenzione sulla ricerca del luogo di quei punti pei quali coincidono due, oppur tre, oppur due e due soluzioni del problema, trovando modo così di dare molti nuovi teoremi sull'interessante superficie dei centri di curvatura delle superficie di second'ordine (**).

Fra i molti lavori che Clebsch compose relativamente agli argomenti

(*) Stante il susseguente perfezionamento dei metodi algebrici, Gordan ha ripigliato la ricerca con maggior rigore (*Math. Ann.*, t. 5), usando costantemente il metodo simbolico, ed aggiungendo molte altre interessanti espressioni (come quella, già data senza dimostrazione da Salmon, del prodotto dei cinque piani pentaedrali). D'altro lato i lavori premiati di Cremona e di Sturm hanno fornito altre prove puramente geometriche dell'esistenza del pentaedro.

(**) Quasi contemporaneamente comparve nei *Monatsberichte* di Berlino un lavoro su questa superficie, dovuto a Kummer, il quale ne aveva costruito un modello (giugno 1862). Tanto Clebsch quanto Kummer correggono il vecchio errore (sussistente anche nell'edizione data da Liouville dell'opera di Monge) che una superficie di centri non possa generalmente avere una linea doppia.

già discorsi, vogliamo qui ricordarne ancora alcuni, come quello ov'egli pervenne, dopo molti tentativi, a determinare il numero dei punti doppi della curva dei contatti quadripunti sulle superficie d'ordine n (*Zur Theorie der algebraischen Flächen,* Giorn. di Borch., t. 63, maggio 1863), ottenendoli come intersezioni d'un sistema di superficie d'ordine $8n-14$, e facendone una speciale applicazione alla determinazione delle 135 intersezioni delle 27 rette d'una superficie di terz'ordine mediante un sistema di superficie del 10.° ordine. In un altro lavoro sui piani inflessionali delle curve gobbe (*ibid.,* sett. 1862) Clebsch pervenne all'equazione d'una superficie d'ordine $6m+6n-20$, che incontra la linea d'intersezione di due superficie degli ordini m ed n ne'suoi punti di flesso. Citeremo finalmente il lavoro « sopra alcune curve considerate da Steiner » (Giorn. di Borch., t. 64, luglio 1864) ove Clebsch fa uso per la prima volta del concetto di *genere* d'una curva, introdotto poco prima da lui per conseguire una nuova equazione determinatrice delle singolarità di curve riportate punto per punto l'una sull'altra.

Siamo giunti così all'epoca in cui, coll'introduzione delle funzioni abeliane e delle considerazioni ad esse relative, Clebsch diede alla geometria un nuovo e potente impulso, assicurando al proprio nome uno dei più importanti e duraturi titoli di gloria. Il nuovo indirizzo in cui da questo punto si mise Clebsch ebbe origine da una circostanza esteriore, dall'avere cioè Gordan conseguita in quest'epoca (estate 1863) la sua abilitazione in Giessen, ove Clebsch era stato chiamato poco prima da Carlsruhe (pasqua 1863). Da lui attinse Clebsch la conoscenza delle funzioni abeliane, ed in particolare delle ricerche di Riemann, che allora non erano peranco molto diffuse. Non fu però soltanto in quest'indirizzo, ma in molti altri ancora, che le intime relazioni personali in cui entrarono da quel punto i due investigatori riuscirono della più grande importanza per la loro attività e pei loro successi. È anzi difficile distinguere con precisione ciò che spetta all'uno ed all'altro, tanto più che molti dei loro lavori sono stati pubblicati in comune. In generale si può dire che spetta a Clebsch ciò che s'attiene all'interpretazione geometrica dei risultati algebrici, mentre la deduzione di questi ultimi è dovuta spessissimo a Gordan.

La prima occasione di porre le funzioni trascendenti in rapporto colla geometria moderna fu offerta a Clebsch da un teorema, dato senza dimostrazione da Steiner (Giorn. di Crelle, t. 33), circa certi poligoni che si possono inscrivere in una curva di terz'ordine. Clebsch riuscì a trovarne una dimostrazione semplice e naturale (Giorn. di Borch., t. 63, settembre 1863) basandosi sulla rappresentazione delle coordinate dei punti di tal curva per mezzo di funzioni ellittiche d'un parametro, rappresentazione data da Aronhold nei *Monatsberichte* di Berlino del 1861 [e più diffusamente esposta dallo stesso Aronhold nel t. 61 del Giornale di Borchardt (*)]. La dimostrazione non è altro che un'applicazione del teorema d'addizione delle funzioni ellittiche, poichè la relazione che ha luogo fra i limiti superiori di tre integrali ellittici di prima specie aventi somma costante è eguale a quella che ha luogo fra le ascisse dei tre punti d'intersezione d'una curva di terz'ordine con una retta, quando nell'equazione della curva non entri che il quadrato dell'ordinata. Con quest'osservazione si dimostra pressochè immediatamente il teorema di Steiner non solo, ma eziandio e d'un sol tratto tutti quei notabili teoremi che sono stati trovati da Maclaurin, Poncelet, Plücker, Hesse e Steiner sui flessi delle curve di terz'ordine, sulle loro tangenti, sulle coniche di contatto, ecc.: tutto dipende da quell'unica equazione che esprime essere costante (prescindendo da multipli dei due periodi) la somma degli argomenti relativi ai punti d'intersezione.

Poco appresso comparve la grande Memoria sull'*applicazione delle funzioni abeliane alla geometria* (Giorn. di Borch., t. 63, ottobre 1863), i cui principii vennero diffusamente esemplificati, sui due casi più semplici, nelle due successive Memorie sulle curve le cui coordinate sono esprimibili per funzioni razionali, o per funzioni ellittiche d'un parametro (Giorn. di Borchardt, t. 64, maggio ed ottobre 1864).

Il punto di partenza è l'idea semplice di considerare come equazione di una curva algebrica quella che Abel assume a definizione dell'irrazionalità, negli integrali che hanno avuto nome da lui. In tale ipotesi i limiti di quegli integrali la cui somma, secondo il teorema d'Abel, dev'essere eguale ad una funzione logaritmica ed algebrica, sono individuati dalle coordinate dei punti d'intersezione della curva data con una curva mobile, ed i teoremi sopra questi sistemi di punti, stabiliti già sotto l'aspetto geometrico da Plücker, svolti poscia da Jacobi e da Cayley (cfr. Plücker, *Teoria delle curve algebriche,* introduzione), non sono altro che corollarii immediati del teorema d'Abel. Ma questo teorema è più comprensivo di quelli, poichè non solamente dà il numero delle condizioni fra i punti d'intersezione, ma porge queste condizioni stesse nella forma più semplice. Facendo

(*) Cfr. anche Brioschi negli *Ann. di Matem.*, serie I^a, t. 3, 1860 e nei *Comptes-rendus,* 1863-64.

a piacimento coincidere alcuni di questi punti, convertendo cioè la curva secante in curva tangente, Clebsch ottenne un gran numero di teoremi sul numero di tali curve di contatto relative ad una curva data. In pari tempo il carattere delle relazioni donde dipende la determinazione di queste curve permette di riconoscere lo speciale aggruppamento delle soluzioni, del pari che l'indole delle equazioni che si presentano nei corrispondenti problemi algebrici. Queste proposizioni includono come corollarii gli svariati teoremi di Hesse e di Steiner sulle tangenti doppie delle curve di quarto ordine (*). Tuttavia conviene osservare che le curve tangenti considerate da Clebsch non hanno che contatti dello *stesso* ordine nei punti ov'esse incontrano la curva data, talchè, quanto a generalità, stanno addietro di quelle considerate da Jonquières (Giorn. di Borch., t. 66) e da Cayley (*Phil. Trans.,* t. 158), i quali comprendono in una stessa formola il numero delle curve d'un sistema lineare soggette ad *arbitrarie* condizioni di contatto.

Ma alla Memoria di Clebsch è dovuto inoltre un principio fondamentale di classificazione delle curve algebriche: il *genere* (che Cayley chiama *deficiency*). Riemann pel primo riconobbe l'importanza di questo concetto rispetto alle equazioni fra due variabili, anzi lo stesso Abel può dirsi averne avuto qualche sentore, allorchè pose il problema del minimo numero d'integrali cui può essere ridotta una somma d'integrali con limiti dati (nel lavoro presentato fin dal 1826, ma pubblicato soltanto nel 1841 nel t. 7 dei *Mémoires des savants étrangers*). Secondo Clebsch appartengono allo stesso genere tutte quelle curve algebriche (piane o gobbe), che possono essere riferite l'una all'altra per guisa che a ciascun punto dell'una corrisponda un solo punto dell'altra e reciprocamente (per esempio una curva e la sua evoluta), o, ciò che torna allo stesso, che possono essere dedotte l'una dall'altra mediante una trasformazione univoca (cfr. la Memoria di Clebsch sulle singolarità delle curve algebriche, Giorn. di Borch., t. 64, aprile 1864). Per una curva data, il genere è una funzione dell'ordine e del numero di punti doppi e di cuspidi; ma esso è inoltre eguale alla classe delle funzioni abeliane che esprimono le coordinate dei punti della curva per mezzo d'un parametro.

Ammesso pure che, quando Clebsch scriveva il suo lavoro, l'idea d'in-

---

(*) In una bella Memoria, nel t. 66 del Giornale di Borchardt, Roch rappresenta esplicitamente le tangenti doppie d'una curva di quart'ordine mediante le funzioni abeliane per $p=3$, e ne trae la dimostrazione dei relativi teoremi, partendo dalle funzioni Θ.

terpretare geometricamente il concetto di genere esistesse già in embrione nel mondo matematico e fosse anche già stata formulata in qualche caso particolare (cfr. per esempio Schwarz: *de superficiebus explicabilibus* ecc. nel Giorn. di Borch., t. 64), è nondimeno un fatto che Clebsch l'ha enunciata pel primo in modo generale, ne ha riconosciuto tutta l'importanza ed ha saputo renderla feconda. D'allora in poi il concetto di genere è stabilmente entrato nel campo della geometria, ed è, senza divario alcuno, usufruito così dagli analisti come dai geometri puri. Non è al certo un caso fortuito che le formole generali d'enumerazione relative alle curve algebriche siano divenute essenzialmente più semplici coll'uso del genere, come ne fanno prova tra le altre l'elegante formola, già citata sopra, data da Jonquières e da Cayley pel numero delle curve soggette a date condizioni di contatto, e la formola di corrispondenza pei sistemi di punti situati sopra una curva di genere superiore (*).

Il teorema dell'invariabilità del genere rispetto ad ogni trasformazione univoca è in sè stesso algebrico, e come tale richiede una dimostrazione algebrica diretta (indipendente dalla considerazione di funzioni integrali) o, ciò che vale lo stesso nell'odierno svolgimento della geometria, una dimostrazione geometrica (**). Esso appartiene ad una dottrina che per la sua origine si lega strettamente con quella delle funzioni abeliane, ma che deve esserne disgiunta e costituita allo stato d'indipendenza, a quella dottrina cioè che tratta *delle proprietà delle funzioni algebriche inalterabili per ogni trasformazione univoca,* e che finora è stata scarsamente coltivata. Più innanzi dovremo dar ragguaglio d'altre ricerche spettanti a questa dottrina nel caso di funzioni a due variabili (teoria della rappresentazione delle superficie): avremo altresì occasione di parlare dei rapporti in che essa si trova coll'ordinaria teoria degli invarianti. Qui alludiamo soltanto alle ricerche istituite, sotto questo punto di veduta, da Clebsch e Gordan, nell'opera sulle funzioni abeliane, di cui fra poco dovremo tenere più diffuso discorso. Formulando algebricamente (nella terza Sezione) il problema delle trasformazioni univoche d'una curva, essi sono riusciti a dare

(*) Questa formola di corrispondenza è una generalizzazione del principio di corrispondenza di Chasles che, come è noto, non si riferisce che a forme razionali d'una sola dimensione. Trovata per induzione da Cayley nel 1866, fu recentemente dimostrata da Brill (*Math. Ann.*, t. 6).

(**) La dimostrazione data da Riemann appartiene all'analisi di sito.

una dimostrazione diretta (*) dell'invariabilità del genere mediante un sottile processo d'eliminazione, e valendosi della variazione delle costanti per sostituire ad una risultante identicamente nulla un'altra espressione che ne tien luogo: metodo che è stato poi trovato utile in molti altri problemi di geometria. Essi studiano poscia il problema relativo a quelle funzioni razionali delle coordinate primitive che devon essere poste eguali alle nuove coordinate, affinchè l'ordine della curva trasformata diventi il minimo possibile. Mentre Cayley aveva abbassato l'ordine fino a $p+2$ (detto p il genere), Clebsch e Gordan assegnano invece l'ordine $p+1$ per le curve prive di singolarità superiori, talchè al genere p serve di tipo, come curva normale, una curva d'ordine $p+1$ (**). Un'altra importante quistione, che si riferisce pure alla teoria delle trasformazioni univoche, ma che è appena toccata da Clebsch e Gordan, è quella dei *moduli,* cioè di quei parametri d'una curva che restano inalterati per ogni trasformazione univoca, e che quindi hanno, rispetto a questa, lo stesso ufficio degli invarianti assoluti, rispetto alle sostituzioni lineari. (Da un lavoro di Clebsch nelle Memorie di Gottinga, t. 15, 1870, risulta che le forme binarie non hanno invarianti relativi a trasformazioni d'ordine superiore, nel senso modulare.) La determinazione dei moduli, quale è data da Riemann, si fonda sopra considerazioni che non sono prettamente algebriche. Anche al presente non si conosce una soddisfacente determinazione algebrica di questi moduli, quantunque una certa obbiezione sollevata in proposito da Cayley abbia potuto essere rimossa sia colla considerazione di diversi casi particolari (***), sia mercè le ulteriori ricerche dello stesso Cayley (*Math. Ann.,* t. 3).

(*) Nella sua *Teoria delle superficie* Cremona ha dato una dimostrazione geometrica semplice dell'invariabilità del genere, giovandosi di considerazioni relative allo spazio di tre dimensioni. La quistione è stata nuovamente studiata, senza uscire dal piano, da Bertini (*Giorn. di Matem.,* t. 7) e da Zeuthen, l'ultimo dei quali considerò il caso generale di curve che si corrispondano polivocamente. Cfr. anche una nota di Brill e Nöther nelle *Nachrichten* di Gottinga, 1871.

(**) Questi teoremi valgono soltanto per $p>2$. Riemann ha assegnato una forma normale che contiene ciascuna variabile *separatamente* al minor grado possibile e che quindi, rappresentata con una curva, ha due punti all'infinito d'ordine eguale alla metà dell'ordine della curva. Nuove ricerche hanno mostrato che quando p è compreso fra $3(i+2)$ e $3(i+1)$, la curva normale d'ordine $p+1$ può sempre essere trasformata in una dell'ordine $p+1-i$ (cfr. la già citata Nota di Brill e Nöther nelle *Nachr.* di Gottinga, febbr. 1873).

(***) Cfr. le *Osservazioni* ecc. di Cremona e Casorati nei *Rendiconti* dell'Istit. Lomb. 1869 e due Note sopra i moduli (*Math. Ann.,* t. 1 e 2) come pure un altro lavoro (*ibid.,* t. 6) di Brill, il quale ha dimostrato l'esistenza di trasformazioni mercè le quali la curva data è trasformata in una certa curva normale, le cui costanti sono in numero eguale a quello dei moduli.

Dopo essersi occupato, nelle ricerche analizzate fin quì, di applicare la teorica delle funzioni abeliane alla geometria, Clebsch intraprese insieme con Gordan lo studio del problema inverso, di *applicare* cioè *la geometria alla teorica delle funzioni abeliane.* Prima di render conto del lavoro che nacque da cotesto intento comune (*Theorie der Abel'schen Functionen,* Leipzig, B. G. Teubner, 1866, colla data: Agosto 1866) gioverà dire alcune parole sul progressivo svolgimento di questa teoria, in genere. Ciò può farsi assai brevemente, per essere questo uno di que'pochi rami della scienza matematica che si sono spinti all'odierna altezza mercè un piccolo numero di lavori dovuti ad alcuni uomini eminenti, e per la via più pronta e più logica.

La teoria delle funzioni abeliane trae origine dal problema d'inversione degli integrali iperellittici con quattro moduli di periodicità, problema che Jacobi (Giorn. di Crelle, t. 9 e 13) ha enunciato formando due somme di due integrali ciascuna con limiti diversi, e proponendo la ricerca dell'equazione quadratica che ha per radici i loro limiti superiori. Questo problema fu risoluto tanto da Rosenhain (*Mém. des savants étrangers,* t. 11), quanto da Göpel (Giorn. di Crelle, t. 35), i quali congetturarono entrambi che i coefficienti di quelle equazioni dovessero formarsi mediante certe serie doppiamente infinite, analoghe alle funzioni Θ note dalla teoria delle funzioni ellittiche, e videro confermata dal calcolo la loro congettura. Convien dire però che il germe d'una soluzione diretta del problema d'inversione, anche nel caso di n somme composte di n integrali ciascuna, con $2n$ moduli di periodicità, somme in funzione delle quali debbansi esprimere i limiti superiori, era già deposto nelle *Fundamenta nova* di Jacobi. Com'è noto, Jacobi definisce la funzione Θ mediante un integrale di seconda specie, eguagliando la derivata del logaritmo di questa funzione alla funzione Z da lui stesso introdotta. Analogamente Weierstrass (Giorn. di Crelle, t. 47 e 52) ha definiti gli n integrali di seconda specie eguagliandoli alle derivate parziali d'una funzione che tien luogo della Θ, e coll'ajuto di questa funzione ha risoluto il problema d'inversione per i più generali integrali iperellittici.

Ma questo campo di ricerca doveva ancora essere notabilmente allargato. Abel medesimo aveva già esteso il suo teorema ad integrali, ove l'ordinario radicale quadratico era sostituito dalla più generale irrazionalità algebrica. Il problema d'inversione poteva essere posto anche per queste somme d'integrali. Se si riflette che, nel caso delle funzioni iperellittiche, le difficoltà consistevano massimamente nelle operazioni analitiche, effettuabili solo mediante calcoli lunghi e prolissi, è chiaro che la soluzione del generale problema d'inversione non poteva scaturire che dalla scoperta di qualche nuovo sussidio, conducente a definire senz'ambiguità le somme d'integrali mediante una determinazione certa della via d'integrazione. Un cosiffatto sussidio fu escogitato da Riemann nella superficie che ha avuto il nome da lui e ch'egli ha adagiata sul piano della variabile complessa, in modo da ricoprirlo più volte. Coll'ajuto di questa superficie e del principio da lui detto di Dirichlet, mercè il quale una funzione è definita, come in fisica matematica, da certe condizioni relative alle discontinuità ed ai limiti, Riemann potè assegnare in modo sorprendente certe relazioni fra trascendenti e funzioni algebriche, e conseguire con breve ragionamento la risoluzione del problema d'inversione.

Però alcuni punti dell'ardito e grandioso tentativo di Riemann sono soggetti ad obbiezioni non poco difficili a rimoversi e che infatti non sono ancora state dilucidate in ogni aspetto. In primo luogo la dimostrazione del principio di Dirichlet è in alcuni riguardi vulnerabile, nè può essere applicata senz'altro a funzioni così generali come le suppose Riemann (*). Inoltre non si può concepire una chiara idea della forma della superficie di Riemann, la quale, nel caso dei trascendenti abeliani, non è completamente determinata dalle condizioni che le sono imposte (**). Finalmente è stato osservato (cfr. Neumann nella Prefazione alle *Vorlesungen über* Riemann'*s Theorie* ecc.) che il nesso della funzione Θ colla teoria di Riemann non è così intimo come si potrebbe desiderare in uno dei più importanti elementi dell'intera dottrina.

Furono queste le principali considerazioni che eccitarono in Clebsch e Gordan il desiderio di ripigliare ad esame la teoria delle funzioni abeliane, e di fondarla sopra altre basi. Bisognava evitare le difficoltà inerenti ad un'esatta circoscrizione del concetto di funzione ritornando ai metodi jacobiani e dando maggior peso alla parte algebrica del soggetto (mediante il

(*) Cfr. fra le altre le osservazioni fatte sul principio di Dirichlet da Kronecker e da Weierstrass, citate in una Memoria di Heine nel Giorn. di Borch., t. 71.

(**) Recentemente Lüroth ha assegnato alla superficie una certa forma normale (*Math. Ann.*, t. 4), che elimina la difficoltà sovraccennata. In uno dei suoi ultimi scritti Clebsch ha dedotto dal lavoro di Lüroth alcuni risultati importanti, i quali estendono e completano per alcuni aspetti le ricerche contenute nella sezione sulla periodicità dell'opera, di cui si parlerà in appresso.

teorema d'Abel); bisognava inoltre render possibile il diretto passaggio alla funzione Θ, in modo analogo a quello tenuto da Weierstrass per le funzioni iperellittiche (*). Questa via conduce immediatamente alle Θ speciali, corrispondenti alle funzioni d'Abel, epperò evita gli scogli contro i quali deve fallire ogni tentativo di porre le funzioni Θ a base unica d'una teoria delle funzioni abeliane, almeno fino a tanto che non sia risoluta la quistione di cui parla Riemann al principio del suo lavoro (circa le relazioni fra i moduli di periodicità), come pure quella delle relazioni fra le funzioni Θ.

Lo studio dell'opera di Clebsch e Gordan presenta una certa difficoltà, in causa della duplice interpretazione geometrica dei problemi che vi son trattati, ciò ch'è dovuto al suo carattere algebrico ed analitico a un tempo, e non è forse privo di relazione colle diverse maniere di vedere dei due autori. Rispetto agli integrali, non si poteva in alcun modo evitare la rappresentazione delle vie d'integrazione sul piano complesso, insieme coi gironi, coi cappii e coi cicli (**) adoperati da Puiseux, metodi la cui utilità per lo studio delle funzioni doppiamente periodiche si era resa manifesta nella pregevole opera di Briot e Bouquet (1859). D'altro lato, in quanto alla funzione algebrica, il dire « equazione d'una curva » invece che « equazione fra due variabili », « sistema d'intersezioni », « punto doppio » o « cuspide » in luogo delle corrispondenti prolisse espressioni proprie dell'algebra, conferiva al discorso una speditezza molto maggiore di quella potuta conseguire, sotto questo rapporto, da Riemann. Quando si pensa ai vantaggi che una semplificazione, leggiera in apparenza, può procacciare allo svolgimento del pensiero, si è quasi tentati d'attribuire a questi modi di dire proprii della geometria molti risultamenti algebrici della Sezione sulla divisione, che non si trovano in Riemann, e in generale la felice soluzione del problema d'inversione ottenuta seguendo l'accennato indirizzo.

Ma introdotta una volta la curva nella fraseologia dell'opera, giovò poscia renderne eziandio omogenea l'equazione, sia per conseguire simmetria, sia per approfittare in generale dei vantaggi che questa forma possiede in geometria analitica. Facendosi per tal modo palese fin dal principio l'equi-

(*) Disgraziatamente le estese ricerche istituite da Weierstrass sulle funzioni abeliane non sono punto conosciute nel loro insieme, avendosene notizia soltanto da un breve articolo inserito nei *Monatsberichte* di Berlino (1869), il quale tratta delle *più generali* funzioni monodrome a $2n$ periodi.

(**) Cfr. una Memoria del prof. Casorati nel t. III di questi Annali (T.).

valenza di tutte le forme che l'equazione può assumere per mezzo di sostituzioni lineari, si schiudeva per questo lato la via a quel modo di considerare le funzioni algebriche nel quale non si hanno in mira che le proprietà inalterabili da ogni trasformazione univoca. Così la complicazione apparente arrecata dalla terza variabile è compensata da una maggiore uniformità e lucidezza d'esposizione, pregi che non sono offuscati neppure da quella tal quale nebulosità in che la perfetta simmetria avvolge talora il processo deduttivo.

L'introduzione delle coordinate omogenee traeva con sè la trasformazione degli integrali al modo già tenuto da Aronhold nel sovracitato lavoro (Giorn. di Borch., t. 61), egualmente commendevole per l'eleganza dell'esposizione e per l'interesse dell'argomento. L'uso di questa forma dà alla funzione logaritmica ed algebrica del teorema d'Abel un aspetto semplicissimo, specialmente se si confronta coll'espressione datane da Abel stesso nella sua Memoria premiata.

Il teorema d'Abel è il ponte naturale tra il lato trascendente ed il lato algebrico della teoria (*). Per trovare, seguendo la via tenuta da Weierstrass, il passaggio dagli integrali all'equazione relativa ai limiti superiori mediante integrali di seconda specie, gli autori hanno fatto uso del teorema d'Abel applicato ad integrali di terza specie. Però i coefficienti dell'equazione risultante contengono ancora certe somme T d'integrali di terza specie, le quali devono essere dapprima decomposte in somme U di natura analoga, ma con punti di discontinuità *disgiunti*. Questa ricerca, appoggiata alle due rappresentazioni geometriche ricordate più sopra, è la parte culminante dell'opera e si riassume alla sua volta nello svolgimento del differenziale di quella funzione U, le cui derivate parziali sono formate con integrali di seconda specie risultanti dalla differenziazione di certe speciali funzioni T. Gli autori trovano alla perfine che la detta funzione U possiede tutte le proprietà del logaritmo d'una funzione Θ, definita al modo di Riemann, non esclusa neppure la monodromia. In quest'occasione il concetto di monodromia, che fino allora non era stato applicato che al caso di

(*) Il carattere prevalentemente algebrico del teorema d'Abel emerge in particolare da recenti ricerche sulle funzioni algebriche, mercè le quali certi teoremi fondamentali che Riemann e Roch avevano desunto dalla considerazione d'integrali di seconda specie e dall'annullarsi della funzione Θ, sono stati dimostrati algebricamente e inseriti organicamente nella teoria delle funzioni algebriche. Cfr. la Nota di Brill e Nöther nelle *Nachr.* di Gottinga, febbrajo 1873.

due variabili, viene esteso a quello di p variabili, in base alla considerazione che una funzione non cessa di possedere la monodromia generale quand'anche diventi indeterminata in un campo di $p-2$ dimensioni.

È notabile la scelta peculiare degli argomenti della funzione Θ. Mentre in Riemann i limiti inferiori degli integrali onde si compongono gli argomenti sono eguali per eguali funzioni sotto il segno, diversi per diverse, in Clebsch e Gordan avviene perfettamente l'opposto. Gli autori hanno desunto il loro sistema di limiti inferiori dai punti di contatto di certe curve spezzate d'ordine $n-1$, che dipendono dalla posizione d'un sol punto (il quale *in ultima analisi* è indifferente). I pregi di questa scelta sono stati recentemente posti in rilievo da Weber a proposito del problema d'inversione (Giorn. di Borch., t. 70) e da Fuchs in certe applicazioni (Giorn. di Borch., t. 73).

Ricorderemo inoltre il capitolo relativo alla trasformazione della funzione Θ. Quando ad un sistema di moduli di periodicità d'integrali normali di prima specie, stabiliti coi metodi di Puiseux nella sezione sulla periodicità dell'opera di Clebsch e Gordan, si vuol sostituirne un altro consimile, si trova un determinante di sostituzione dotato di certe proprietà, il quale in questo caso (designato da Jacobi col nome di teoria delle infinite forme della funzione Θ) ha il valore 1 (trasformazione di prim'ordine). Il generale problema jacobiano circa la trasformazione delle funzioni ellittiche era stato trattato per le ultraellittiche da Hermite nella celebre Memoria: *Sur la transformation des fonctions abéliennes* (Comptes rendus, t. 55), mentre Koenigsberger aveva riportato (Giorn. di Borch., t. 65) alle stesse funzioni ultraellittiche un problema di trasformazione posto da Abel (*Oeuvres*, t. 1, n. XIV, p. 275). Nella sezione relativa alle infinite forme della funzione Θ, Clebsch e Gordan si occupano della trasformazione di prim'ordine delle funzioni abeliane in generale, ricercando la variazione che nasce negli integrali e nella funzione Θ dalla trasformazione dei moduli di periodicità, ed effettuando una certa determinazione di costanti, essenziale per la trasformazione della funzione Θ, al modo già tenuto da Kronecker (*Monats.* di Berlino, ott. 1866), cioè riducendo la trasformazione a certe trasformazioni elementari. Lo stesso problema fu trattato da Thomae (Dissertazione, Halle 1864), e recentemente da Weber (Giorn. di Borch., t. 74) mediante la somma di serie multiple di Gauss.

I due autori hanno finalmente considerato anche la divisione delle funzioni abeliane, argomento trattato fino allora soltanto per le funzioni ellittiche, e da Hermite per le iperellittiche. Clebsch e Gordan mostrano che i teoremi stabiliti per le funzioni ellittiche possono essere estesi non solo alle funzioni iperellittiche ma, salvo poche modificazioni, alle funzioni abeliane in generale. Come avviene per le funzioni ellittiche, il problema generale si risolve con estrazioni di radici quando sia risoluto il cosidetto problema speciale di divisione, poichè le funzioni cicliche dell'equazione generale di divisione diventano esprimibili razionalmente in funzione dei coefficienti, coll'intervento delle radici dell'equazione speciale, e si perviene così ad un'equazione abeliana. Quanto al problema speciale di divisione, esso conduce ad un'equazione che, in virtù di peculiari circostanze, è rivocabile ad un'equazione di grado inferiore ed a molte equazioni pure, ma quest'equazione di grado inferiore non è risolubile algebricamente.

Ricorderemo ancora il cosidetto *problema d'inversione generalizzato,* di cui trovasi la trattazione nel libro di Clebsch e Gordan. Questo problema era già stato formulato da Clebsch nel citato lavoro sulle curve le cui coordinate sono esprimibili per funzioni ellittiche d'un parametro (Giorn. di Borch., t. 64), e consisteva allora in ciò: date $m-1$ somme formate ciascuna con m integrali di terza specie, ed una somma di m integrali di prima specie, trovare un'equazione del grado m, le cui radici siano i limiti superiori di quegli integrali. I limiti superiori sono per tal modo definiti come funzioni dotate di periodicità $(m+1)$-pla, ma Clebsch fece vedere che la soluzione del problema dipende da quella dell'ordinario problema d'inversione. Le cose procedono in modo analogo per le funzioni abeliane.

Da quanto precede emerge in modo abbastanza chiaro che la teoria delle funzioni abeliane, al punto ove l'aveva lasciata Riemann, comprendeva due parti eterogenee: una parte analitica ed una parte algebrica. Gli sforzi fatti in seguito tendevano concordemente a conseguire una maggiore uniformità in tutto l'insieme, dando la preferenza, nell'ulteriore studio dei singoli problemi, all'uno od all'altro ordine di considerazioni. Clebsch e Gordan hanno, per parte loro, riposta nello svolgimento dei metodi algebrici la massima speranza di progresso della teoria, come è espressamente dichiarato nella prefazione del loro libro. Non è quindi senza una determinata mira ch'essi si sono esclusivamente occupati in appresso di ricerche algebriche (o geometriche).

Quelle di Clebsch procedettero secondo due direzioni, cioè si aggirarono sulla teoria delle trasformazioni univoche, e su quella degli invarianti relativi a sostituzioni lineari.

Nell'opera sulle funzioni abeliane non erano state considerate che le linee curve, rispetto alle proprietà inalterabili da ogni trasformazione univoca. In seguito, Clebsch estese queste ricerche alle forme del secondo grado, studiando cioè, come ora si suol dire, la *rappresentazione delle superficie.* Era questa una ricerca che sorgeva spontaneamente quale sviluppo ulteriore di quelle di Riemann, e che in qualche caso isolato era già stata iniziata dal lato geometrico: ma la dottrina sistematica che noi conosciamo oggi sotto questo nome è dovuta alla serie non interrotta dei lavori di Clebsch, ed al potente interesse ch'egli ha saputo creare intorno ad essa. Quanto alle ricerche sulla teoria degli invarianti, che occuparono Clebsch contemporaneamente a queste, ne parleremo più avanti. Il nesso delle due dottrine consisteva per Clebsch in ciò, che la teoria degli invarianti relativi a sostituzioni lineari doveva formare l'introduzione necessaria alle considerazioni più generali sulle trasformazioni univoche. Toccheremo in seguito delle ricerche, per vero dire poco numerose fin qui, che hanno aperto la via ad una futura attuazione di questo concetto.

Abbiamo già fatto cenno più sopra della differenza che corre fra la teoria della rappresentazione delle superficie, e quella teoria delle superficie algebriche che si basa sulla considerazione delle polari e che trova la sua immediata espressione algebrica nelle più semplici forme della teoria degli invarianti lineari. Non v'è neppure contatto fra la prima teoria e quella della rappresentazione conforme d'una superficie sopra un'altra, o la teoria fondata da Gauss delle superficie applicabili le une sopra le altre. La nuova teoria rappresentativa considera come equivalenti fra loro tutte quelle superficie che possono essere desunte l'una dall'altra mediante una trasformazione univoca: essa considera una superficie come l'immagine d'una funzione algebrica a due variabili, e concentra tutta la sua attenzione su quelle proprietà della funzione che rimangono inalterate per ogni trasformazione univoca. Nell'aspetto geometrico questo modo di considerare le cose corrisponde, almeno in certi riguardi, alla generazione della superficie per mezzo d'altre forme nello spazio, i cui parametri individuano univocamente i punti della superficie e forniscono quindi un sistema di coordinate sulla superficie stessa: laonde si possono considerare come precursori della rappresentazione delle superficie molti lavori geometrici relativi alla generazione delle superficie algebriche.

A questo riguardo sono da citare anzi tutto le ricerche di Grassmann e di Steiner sulle superficie di terz'ordine (Giorn. di Crelle, t. 49, 53), che gettano già tanta luce sul notabile sistema delle loro rette non solo, ma sulla disposizione delle loro curve d'ordine infimo (*). Queste ricerche furono continuate ed ampliate da Schläfli, August e Schröter (1858, 62, 63). Debbono essere ricordati in seguito i lavori di Kummer sulle superficie di quart'ordine contenenti infinite coniche (*Monats.* di Berlino, luglio 1863; Giorn. di Borch., t. 64). Le considerazioni ivi esposte sulla superficie steineriana di quart'ordine con tre rette doppie intersecantisi in un punto diedero occasione a Weierstrass (cfr. il lavoro di Kummer) ed a Cayley (Giorn. di Borch., t. 64, 1864) di esprimere le loro coordinate per funzioni quadratiche di due parametri, mentre d'altro lato Schröter (*Monats.* di Berlino, novembre 1863, Giorn. di Borch., t. 64) e Cremona (Giorn. di Borch., t. 63) studiavano la geometria delle figure esistenti su questa stessa superficie, senza che allora si sospettasse l'identità dei due procedimenti o si ponesse in luce il trapasso dall'uno all'altro.

Questo trapasso era stato già studiato, molto tempo prima, per una sola superficie di natura molto semplice, per quella cioè di second'ordine. Fin dal 1847 Plücker aveva avuto l'idea di valersi del reticolo formato su questa superficie dai due sistemi di generatrici, come d'un sistema di coordinate rettilinee sulla superficie stessa (Giorn. di Crelle, t. 34), ed aveva riconosciuta l'identità di questa determinazione dei punti della superficie mediante i parametri dei due sistemi di rette colla rappresentazione della superficie sul piano mediante la projezione stereografica generale, già studiata da Chasles nel 1828, della qual considerazione egli si giovò per riportare alla superficie alcuni teoremi piani. Più tardi, mentre Cayley (*Phil. Mag.*, luglio 1861) richiamava l'attenzione su questa teoria di Plücker e sopra una classificazione delle curve esistenti sulla superficie, basata sulla teoria medesima, Chasles si diede a svolgere con metodi proprii (*Compt. rend.*, t. 53, 1861) queste stesse idee di Plücker e di Cayley. Giovandosi di opportune relazioni fra i parametri, e fondandosi sul suo principio di corrispondenza, egli potè dedurne una discussione completa delle curve esistenti sulla superficie. Poco innanzi egli aveva già (*ibid.*) applicato, in

(*) I metodi per la generazione di tutte le forme algebriche, dati da Grassmann nella sua *Ausdehnungslehre* e poscia svolti dallo stesso in una serie di Memorie nel Giorn. di Crelle, nei quali è compresa come caso particolare la generazione delle superficie di terz'ordine dovuta allo stesso autore non sono ancora stati promossi ulteriormente dai geometri; è riserbato all'avvenire il metterne in chiaro le relazioni colle ricerche mentovate nel testo.

via prettamente geometrica, lo stesso metodo alle più semplici superficie rigate dotate di retta multipla, prendendo a considerare la relazione che una curva esistente sulla superficie istituisce fra due fasci di piani, aventi per assi la retta multipla ed una generatrice della superficie.

Nel caso delle superficie d'ordine più elevato non si poteva conferire importanza all'espressione delle loro coordinate in funzione algebrica di due parametri, e trarne vantaggio per lo studio della geometria di queste superficie, se non ricorrendo, per la parte algebrica, ai concetti ed ai metodi svolti da Clebsch e Gordan nelle loro ricerche sulle trasformazioni univoche, e mentovati più sopra a proposito delle funzioni abeliane. Questi autori non s'erano limitati soltanto a svolgere il sovracitato concetto di funzione anche rispetto alle superficie, ma avevano studiato eziandio e principalmente i metodi che servono allo studio delle singolarità che intervengono in una corrispondenza univoca. In ciò fare il nesso fra questo punto di vista e quello della generazione geometrica era già dato *a priori* rispetto alle curve, talchè partendo da queste si doveva giungere agli analoghi concetti rispetto alle superficie.

Però anche dal lato dell'investigazione puramente geometrica era stato già fatto un passo, colla creazione della teoria delle trasformazioni. Per lungo tempo non si era considerata, oltre l'omografia, che la più semplice trasformazione univoca, la quadratica, come quella che sembrava egualmente utile per la geometria projettiva e per la metrica (*). Ma nei lavori di Cremona (Accad. di Bologna, ser. II, t. 2, 1863; t. 5, 1864) fu stabilito e studiato il concetto più generale della trasformazione univoca di punti nel piano. Però egli è soltanto in questi ultimi anni (e quasi al tempo stesso da Clifford, Nöther e Rosanes - cfr. Clebsch nei *Math. Ann.* t. 4, p. 490) ch'è stato trovato il teorema fondamentale, del pari che semplice, di questa teoria, quello cioè che ogni trasformazione univoca del piano può essere ottenuta dalla reiterazione di più trasformazioni quadratiche (**).

(*) Però non si deve dimenticare che Magnus, nella prefazione ai suoi «Problemi», notava già (1837) che dalla reiterazione di trasformazioni quadratiche emergono trasformazioni univoche d'ordine superiore.

(**) L'uso della trasformazione quadratica per la risoluzione di problemi metrici, fondato sopra un caso speciale di essa, la trasformazione per raggi vettori reciproci, è stato recentemente esposto con metodo e generalità (cfr. i lavori dei geometri francesi Moutard, Laguerre, Darboux ed altri, del pari che quelli di Lie e Klein nei *Math. Ann.*, t. 5). Però queste ricerche sono relativamente remote da quelle di cui è detto nel testo.

Avuto riguardo a questa successione di ricerche, si spiega facilmente come l'origine vera e propria della teoria delle rappresentazioni, cioè la geometria sulle superficie di terz'ordine, sia stata contrassegnata da due lavori concordanti completamente nel metodo e nel contenuto, l'uno di Clebsch (Giorn. di Borch., t. 65, ott. 1865) e l'altro di Cremona (cfr. la Memoria nel Giorn. di Borch., t. 68, premiata nel 1866 dall'Accademia di Berlino): notabile esempio della completa corrispondenza che si è a poco a poco stabilita fra la trattazione analitica e lo studio sintetico della teoria delle superficie algebriche, tanto riguardo agli oggetti della ricerca, quanto riguardo ai concetti che le servono di fondamento. Ambidue gli autori studiano la rappresentazione delle superficie di terz'ordine sul piano, ponendo le basi di ciò che si chiama ora la « Geometria sopra la superficie »; ambidue partono dallo stesso fondamento, cioè dalla generazione (di Grassmann) della superficie mediante stelle projettive di piani. Clebsch desume direttamente la rappresentazione dalle formole stesse che esprimono questa generazione. Cremona studia invece dapprima una trasformazione di spazii nella quale ai piani corrispondono superficie di terz'ordine aventi in comune una curva di sest'ordine, trasformazione che in sostanza concorda con una relazione già considerata da Hesse nelle sue ricerche sulle curve di quart'ordine (Giornale di Crelle, t. 49).

Ciò che distingue questo e i lavori immediatamente successivi di Clebsch è il metodo col quale, dalla sola definizione delle funzioni cui è dovuta la rappresentazione, viene dedotta la geometria della superficie. Le proprietà delle figure esistenti sulla superficie sono totalmente determinate tostochè è dato il sistema delle curve piane che corrispondono, nella rappresentazione, alle sezioni piane della superficie, senza che si parli ancora del modo d'effettuare la rappresentazione stessa, quando la superficie è data.

Da questo metodo dipende anche l'indirizzo seguito sul principio da Clebsch ne'suoi lavori sull'argomento. Procedendo coll'ordine stesso delle difficoltà che s'incontrano nella ricerca dei singoli sistemi piani, Clebsch fece susseguire alla trattazione della superficie di terz'ordine quella della superficie di Steiner e della superficie rigata di terz'ordine, e più tardi quello d'una delle più notabili fra le superficie considerate da Kummer, la superficie di quart'ordine dotata di conica doppia (Giornale di Borch., t. 69, aprile 1868).

Ma incominciando già da quest'ultimo lavoro, e poscia per tutte le superficie studiate posteriormente da lui in questa direzione, Clebsch si occupò anche della costruzione geometrica della rappresentazione, non tanto per considerarla in sè medesima, quanto per dimostrarne la possibilità. Le considerazioni cui fu in tal modo condotto sono da annoverarsi fra le più importanti e le più belle che gli siano dovute nella teoria delle rappresentazioni.

Per dimostrare la rappresentabilità d'una superficie sopra un piano bisogna trovare sulla superficie due sistemi lineari di curve in numero semplicemente infinito, tali che ciascuna curva dell'uno non abbia che una sola intersezione variabile con una curva dell'altro. Questa ricerca dà luogo ad interessanti problemi geometrici, i quali alla lor volta conducono a notabili equazioni algebriche. Così nelle superficie di terz'ordine s'incontra una equazione di 27° grado, dalla cui soluzione dipende la determinazione delle rette esistenti sulla superficie. Per la superficie di quart'ordine a conica doppia fa d'uopo conoscere le 16 rette di questa superficie, che riescono determinate (in virtù dei cinque coni quadrici bitangenti scoperti da Kummer) da un'equazione di 5° grado, combinata con più equazioni quadratiche (*); ecc.

Benchè più tardi sia stata dimostrata (cfr. Nöther nei *Math. Ann.*, t. 3), in base ai lavori di Clebsch, l'esistenza di due sistemi di curve della specie voluta, in quelle superficie sulle quali ne esiste già uno, Clebsch medesimo era già riuscito a caratterizzare generalmente le equazioni che s'incontrano in questa ricerca, ed a scoprire un legame fra esse e le equazioni donde dipende la divisione delle funzioni abeliane (*Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen* etc., *Math. Ann.* t. 3, maggio 1870). A ciò fu condotto dal tentativo fatto di rappresentare sul piano le superficie di quint'ordine dotate d'una curva doppia di quart'ordine e di prima specie (Mem. di Gottinga, t. 15, genn. 1870). Anche qui, come nella rappresentazione già prima eseguita da Clebsch (*Math. Ann.*, t. 1, p. 253 e segg.) della superficie di quart'ordine dotata di retta doppia, si trattava di dimostrare l'esistenza di certe coniche isolate, oltre a quelle del fascio noto già *a priori*, problema il quale esigeva una difficile enumerazione (eseguita poscia da Lüroth, *Math. Ann.*, t. 7). Invece la rappresentazione bivoca sul piano, ovvero, come Clebsch si esprime, la rappresentazione

(*) Cfr. il citato lavoro di Clebsch. Le 16 rette della superficie di quart'ordine a conica doppia furono trovate per la prima volta da Darboux (*Ann. de l'Ec. Norm.*, 1863), il quale, nelle sue ricerche generali sopra i sistemi ortogonali, considerò particolarmente le superficie di quart'ordine che passano due volte pel circolo all'infinito.

sul piano doppio, nasceva quasi spontaneamente dal segare con un fascio di piani il fascio delle quadriche passanti per la curva doppia e seganti ulteriormente la superficie secondo una famiglia di coniche. Sorgeva così il nuovo problema di riportare il piano doppio sopra un nuovo piano, problema che dipende dalla ricerca di certe curve aventi contatto colla curva limite segnata nel piano doppio, e questa alla sua volta, come già si disse, da un problema di bissezione delle funzioni abeliane relative alla curva (le quali, nel caso in discorso, sono funzioni iperellittiche). Nell'esempio che Clebsch ha trattato con maggior profondità, e che risguarda la rappresentazione di un doppio piano con curva limite di quart'ordine, egli si è particolarmente giovato di certe proprietà assai riposte di queste curve, scoperte da Aronhold (*Monats.* di Berlino, luglio 1864) col porre a base della trattazione sette delle loro tangenti doppie. Il metodo corrispondente ottiene il medesimo successo in tutte le rappresentazioni di superficie fin qui conosciute (*). Con questi lavori Clebsch ha aperto una nuova ed ampia via, accessibile all'analisi del pari che alla geometria pura, ma nella quale non vennero fatti posteriormente che pochissimi passi.

La possibilità della corrispondenza univoca fra due superficie dipende da una serie di quistioni non ancora ben dilucidate. Però anche in questo indirizzo Clebsch ha fatto un primo passo. In un teorema pubblicato senza dimostrazione nei *Compt. rend.,* dic. 1868, egli ha stabilito un certo numero dipendente dalle singolarità delle superficie, numero che, in analogia al già conosciuto genere delle curve, egli chiama *genere della superficie,* come quello che rimane inalterato per ogni trasformazione univoca, e che deve quindi essere eguale per due superficie, acciò queste possano essere trasformate l'una nell'altra. Questo teorema venne da Nöther dimostrato analiticamente ed esteso al caso di più variabili (*Math. Ann.,* t. 2, 1869), poscia di nuovo dimostrato da Zeuthen mediante considerazioni geometriche (*Math. Ann.,* t. 4, 1869). La sua importanza fu resa anche maggiore dalla dimostrazione della proprietà invariantiva di certi sistemi di superficie dipendenti dalla superficie considerata (Nöther, *Nachr.* di Gottinga, marzo 1873), ed analoghi a quelli delle curve d'ordine $n-3$ dotate dell'egual

(*) È da notare che il problema della rappresentazione del piano doppio sul piano semplice, nei casi cui allude il testo, ove cioè il piano doppio è ottenuto dal riferimento d'una superficie ad un piano, viene agevolato dalla circostanza che una o più radici dell'equazione di divisione sono note *a priori.*

proprietà nella teoria delle funzioni abeliane. Questi teoremi sull'invariabilità dei generi sembrano destinati a porgere in avvenire le basi per una teoria generale delle funzioni algebriche di più variabili, teoria di cui quella della rappresentazione delle superficie può essere considerata come un preliminare. Clebsch stesso ha fatto un'altra applicazione del concetto di genere alla teoria delle equazioni differenziali algebriche, in uno de'suoi ultimi lavori, sul quale dovremo trattenerci più innanzi.

Noi non possiamo che accennare genericamente alla ricchezza dei risultamenti conseguiti da Clebsch tanto nella teoria generale, quanto nella geometria di superficie speciali (cfr. *Math. Ann.,* t. 1 e 3; Rend. del R. Istit. Lomb., novembre 1868). Rammenteremo soltanto il lavoro sulle superficie rigate di genere zero (*Math. Ann.,* t. 5, ott. 1871), nel quale è introdotto un nuovo concetto, quello della superficie tipo. Appartengono cioè allo stesso tipo tutte quelle superficie che possono essere riferite univocamente l'una all'altra senza intervento d'elementi singolari, per esempio il piano e la superficie di Steiner; laonde le superficie appartenenti ad uno stesso tipo hanno geometrie perfettamente simili.

Dell'espressione delle coordinate d'una superficie per mezzo di parametri Clebsch si è più volte giovato anche per trattare problemi infinitesimali relativi alla superficie stessa. Così dimostrò mediante l'integrazione essere algebriche le curve assintotiche della superficie di Steiner (Giornale di Borch., t. 67, luglio 1866), proprietà che Cremona dedusse poscia (1867) per via geometrica dalla rappresentazione medesima (*). Mostrò poi, generalizzando il metodo, che in tutte le superficie rigate la ricerca delle assintotiche è riducibile alle quadrature tosto che sia nota una di queste curve (Giorn. di Borch., t. 68, giugno 1867), ecc.

Un fatto recente manifesta con singolare evidenza come tutti questi lavori di Clebsch abbiano contribuito ancora a stabilire l'accordo nella sostanza fra i due metodi d'investigazione geometrica, l'analitico ed il sintetico. Come svolgimento ed illustrazione dei metodi e dei concetti preaccennati è sorta dall'opera simultanea di più geometri (Cayley, Cremona, Nöther, 1870-71) la nuova teoria delle trasformazioni univoche dello spazio, che può es-

(*) Questa determinazione delle assintotiche della superficie di Steiner può essere considerata come caso particolare dell'integrazione delle stesse curve, pure algebriche, sulla superficie di quart'ordine di Kummer con 16 punti nodali, integrazione effettuata da Lie e Klein (*Monatsb.* di Berlino, dic. 1870. Cfr. anche i *Math. Ann.*, t. 5).

sere considerata quale diretta generalizzazione delle trasformazioni piane di Cremona. Se questa teoria permette già fin d'ora, benchè ancora ne' suoi primordii, di dedurre senza quasi alcuna difficoltà tutte le rappresentazioni di superficie che sono state considerate fin qui, non bisogna dimenticare ch' essa ha germogliato appunto sul terreno di queste stesse ricerche.

Abbiamo dovuto indugiare fino a questo punto a parlare di proposito dei lavori di Clebsch sulla teoria degli invarianti, benchè già ne sia stato accennato alcunchè per incidenza, e benchè strettissima ne sia la connessione coi lavori geometrici di cui s'è tenuto parola. Infatti Clebsch s'è molto occupato di questa teoria appunto ne'suoi ultimi anni, e noi avremmo dovuto scindere il materiale complessivo da lui accumulato, se fossimo già entrati prima d'ora nel ragguaglio delle sue ricerche.

Sebbene la *teoria degli invarianti relativi a sostituzioni lineari* sia, quanto ai concetti fondamentali, il riscontro analitico della geometria projettiva, pure le sue origini si trovano non tanto nel campo delle investigazioni geometriche anteriori, quanto in quello della teoria algebrica dei determinanti e dell'applicazione di questi alla teoria dei numeri (trasformazione delle forme quadratiche, ecc.). Per lo svolgimento della teoria degli invarianti è stato anche di grande vantaggio, almeno indirettamente, il calcolo delle variazioni, collo speciale algoritmo delle sue operazioni. La geometria non ha influito che più tardi sulla teoria degli invarianti. Le operazioni elementari di questa concordano appuntino colle costruzioni proprie della geometria projettiva; ma i suoi sussidii, considerati nell'estensione che presero in appresso, vanno molto al di là delle ordinarie deduzioni geometriche. Di qui sorge il problema d'ampliare i concetti geometrici per guisa da recarli al livello di queste operazioni più elevate o più generali. D'altro lato la traduzione algebrica di certe categorie di problemi geometrici, specialmente di problemi infinitesimali, non è stata che recentemente iniziata nel senso della teoria degli invarianti, e manca ancora d'uno svolgimento metodico in ogni sua parte (*).

Col modo essenzialmente geometrico di concepire le relazioni algebriche ch'era proprio di Clebsch, e che andò sempre più pronunciandosi nelle sue ricerche, è naturale ch'egli considerasse di preferenza il lato geome-

(*) Cfr. in proposito le ricerche generali di Christoffel e di Lipschitz sulle espressioni differenziali omogenee (Giorn. di Borch., t. 71 e segg.), e gli svolgimenti dati da Beltrami alla teoria dei parametri differenziali (Mem. dell'Accad. di Bologna, 1869).

trico della teoria degl'invarianti, quantunque non si limitasse esclusivamente ad esso. La Memoria dal cui studio egli fu condotto ad occuparsi di questa teoria, e che determinò completamente l'indirizzo delle sue posteriori ricerche, fu la teoria delle forme ternarie cubiche di Aronhold (Giorn. di Borch., t. 55). Per una parte questo lavoro apriva una nuova via all'investigazione geometrico-algebrica colla gran copia di risultamenti originali immediatamente applicabili alla teoria delle curve di terz'ordine, del pari che colla trattazione elegante di problemi già studiati da altri (specialmente da Hesse). D'altra parte Aronhold vi faceva uso d'un algoritmo che fu con grandissimo interesse accolto da Clebsch, vogliam dire del metodo di rappresentare *simbolicamente* le forme algebriche come potenze d'espressioni lineari, metodo col quale Aronhold si pose in grado di concepire e di trattare i problemi colla massima generalità quanto alla scelta delle coordinate. Questo metodo risale ne'suoi primordii alla simbolica di cui fecero uso Cauchy, Boole ed altri (*) nella teoria delle equazioni differenziali, o, se si vuole, alla nota segnatura abbreviata dei termini della serie di Taylor. Esso aveva poi già ottenuto dai lavori di Cayley (cfr. per esempio il Giorn. di Crelle, t. 30) uno svolgimento che lo rendeva atto ad essere usato con buon successo nella teoria degli invarianti. Ma Aronhold, che v'era pervenuto da sè, gli diede, limitatamente alle funzioni razionali intere, una forma meno astratta, abbandonando i segni isolati d'operazione, usati prima di lui.

Il primo lavoro di Clebsch (**) sugli invarianti (Giorn. di Borch., t. 59, sett. 1860) parte senz'altro dalla segnatura simbolica di Aronhold, ma mentre questi non se n'era giovato che come d'un utile sussidio per la dimostrazione de'suoi teoremi, Clebsch ne fa proprio la base fondamentale dell'intera teoria, dimostrando che *la segnatura simbolica fornisce a dirittura tutte le funzioni invarianti mediante i suoi aggregati di determinanti.* Nell'enunciare però il teorema a questo modo assoluto, come ha fatto Clebsch, bisogna avere un espresso riguardo a ciò che allora (contrariamente in parte a ciò che s'intende oggi, dopo l'estensione data appunto da Clebsch a queste dottrine) s'intendeva per funzioni invarianti. Non si

(*) Cfr. anche le ricerche di Pfaff (*Nova Acta Petrop.*, t. 11, 1797) e di Jacobi (Giornale di Crelle, t. 36, p. 135) sulla serie ipergeometrica.

(**) Cfr. anche la citata Memoria sul pentaedro delle superficie di terz'ordine (Giorn. di Borch., t. 58), insieme coi lavori geometrici che vi si legano immediatamente.

consideravano allora che quelle espressioni che s'incontrano già nel caso di due e di tre variabili omogenee: invarianti, covarianti, forme aggiunte e forme intermedie o miste. In particolar modo le forme fondamentali non venivano costituite che con una sola serie di variabili primitive. Più tardi Clebsch e Gordan pigliarono le mosse da forme costituite con più serie distinte di variabili, cosa sulla quale ritorneremo in seguito più diffusamente. I simboli che si rendono per tal modo necessarii sono già alla lor volta composti d'altri simboli, e non rientrano quindi organicamente nei determinanti che si devono formare con essi all'uopo d'ottenere le funzioni invarianti. Il teorema di Clebsch non è quindi applicabile, nel suo enunciato originario, alle forme fondamentali aventi simboli composti.

Dal punto di vista conseguito dalla dimostrazione di Clebsch, ed entro i limiti testè indicati, l'aggregato simbolico diventa la definizione stessa degli invarianti; le relazioni fra le varie formazioni di cui va in traccia la teoria degli invarianti emergono dai semplici principii del calcolo simbolico; la teoria degli invarianti, insieme col suo concetto reale d'un sistema inalterabile per ogni sostituzione lineare, diventa quasi il corollario dell'algoritmo simbolico. Qui vengono in luce tutti i vantaggi che scaturiscono da un tale algoritmo, quando sia abilmente ordito. I sussidii del calcolo simbolico, nella forma in cui Clebsch li usava già fin d'allora, conducono immediatamente a formazioni il cui significato geometrico eccede i limiti dell'odierna cognizione puramente geometrica. Clebsch amava trattenersi su questo argomento ne'suoi privati discorsi, richiamando l'attenzione sull'esempio delle forme binarie di quinto e delle forme ternarie di quarto grado. Per ambedue queste forme la segnatura simbolica porge immediatamente una serie di covarianti lineari, mentre finora la geometria non è giunta a costruire alcun punto covariante di cinque punti dati sopra una linea retta, nè alcuna retta covariante d'una data curva di quart'ordine (*).

Nella sua Memoria nel t. 59 del Giorn. di Borch., Clebsch ha svolto, oltre il principio della generalità del metodo simbolico, anche un importante principio di trasformazione, subordinato appunto alla segnatura simbolica, ed in virtù del quale la teoria delle forme con un certo numero di variabili è resa utile per quelle con un numero più elevato. Un esempio gioverà a far vedere chiaramente in che consista questo principio e per qual via se ne renda proficua l'applicazione.

(*) I covarianti lineari qui rammentati furono scoperti da Hermite e da Joubert. Cfr. *Cambr. and Dubl. Math. Journ.*, t. 9.

Il noto discriminante d'una forma binaria biquadratica, cioè quell'invariante il cui annullarsi è condizione dell'eguaglianza di due fattori lineari della forma stessa, è rappresentato simbolicamente (come ogni invariante di forme binarie) da un aggregato di prodotti di determinanti binarii simbolici. Ora si può immediatamente, mercè il principio di cui si tratta, dedurre da quest'invariante la condizione affinchè una retta seghi una linea di quart'ordine in quattro punti la cui equazione abbia il discriminante nullo, si può cioè dedurne senz'altro l'equazione della curva in coordinate di rette. Basta convertire i determinanti binarii simbolici che entrano nell'espressione del discriminante in determinanti ternarii, aggiungendo un indice ed una linea di coordinate di rette, e considerare poscia i simboli come relativi all'equazione d'una curva di quart'ordine.

Clebsch ha dato appunto in tal modo l'equazione delle linee di quart'ordine in coordinate di rette, e similmente quella delle superficie di terz'ordine in coordinate di piani, deducendone un gran numero di nuovi teoremi sopra queste forme. Notiamo ancora che, mediante l'applicazione metodica di questo principio e del calcolo simbolico, i determinanti a doppio margine, di cui Clebsch s'era tanto servito (come già si disse) nei suoi primi lavori, vengono sostituiti da potenze simboliche, cioè da forme assai più concise.

Ricorderemo fin d'ora, pel suo legame col precedente, un posteriore lavoro di Clebsch sui complessi di Plücker (*Math. Ann.*, t. 2, aprile 1869), ove il sopraddetto principio di riduzione, e generalmente il metodo simbolico, ha da lui ricevuto essenziale incremento.

Quando Plücker, dopo avere per lungo tempo atteso alla fisica, ritornò una seconda volta alla geometria (1864) e creò quella nuova dottrina che dicesi ora *geometria della retta* (*), Clebsch ne accolse le idee col più grande interesse. Quand'anche una cosiffatta geometria della retta nello spazio non fosse stata da lui concepita anteriormente in modo esplicito, pure le sue considerazioni generali sulle formazioni simboliche relative alle forme quaternarie lo avevano condotto assai vicino ad essa (**), e determinarono

(*) Il libro di Plücker (*Neue Geometrie* ecc. Leipzig, Teubner 1868-69) fu preceduto da un gran numero di lavori d'altri autori, lavori che oggi si ascrivono alla geometria della retta. Cfr. Clebsch, Discorso su Plücker (Mem. di Gottinga, t. 15).

(**) Cfr. il ragguaglio che Clebsch ha dato del libro di Plücker nelle *Anzeigen* di Gottinga (1869).

eziandio l'indirizzo delle sue ricerche sui complessi di Plücker, indirizzo che si fonda sull'espressione delle coordinate della retta mediante i determinanti formati con due quaterne di coordinate di punti o di piani, e che fa così dipendere la geometria della retta dalla teoria delle forme quaternarie. Per lo contrario nel libro di Plücker la trattazione analitica di questa geometria è subordinata ad un altro indirizzo, a quello cioè nel quale la retta è considerata come elemento di spazio, indirizzo che fu poi seguito massimamente da Klein (*Math. Ann.*, t. 2 e 5). In questa seconda maniera le sei coordinate della retta vengono considerate come variabili distinte, legate da un'equazione di secondo grado, con che si lascia in disparte la teoria delle forme quaternarie per entrare in quella delle forme a sei variabili.

Fondandosi sull'espressione delle coordinate della retta per mezzo di determinanti binarii, Clebsch mostrò nel citato lavoro che un complesso lineare può essere rappresentato simbolicamente in forma di potenza d'un determinante quaternario, contenente due linee di coordinate di punti o di piani, dalle quali nascono appunto, nello sviluppo del determinante, le coordinate della retta. Un essenziale progresso che in ciò si fonda è questo, che i coefficienti della forma che si vuol rappresentare appariscono non già come semplici prodotti di simboli, ma come aggregati di determinanti di simboli (*). Clebsch ha avuto occasione posteriormente (*Math. Ann.*, t. 5, genn. 1872) di porre in piena luce la fecondità di questo metodo per la trattazione dei complessi, deducendone le equazioni esplicite di molte superficie considerate nella loro teoria. Egli ha altresì basato su questa nuova simbolica altre ricerche generali, delle quali dovremo parlare in appresso.

Due sono le vie tenute fin qui nello studio della teoria degli invarianti: l'una di queste vie conduce alla ricerca delle proprietà caratteristiche d'ogni funzione invariante, l'altra va in traccia delle loro relazioni reciproche, e delle forme fondamentali dalle quali si possano dedurre tutte le altre con processi uniformi.

Nelle sue prime ricerche Cayley ha definito gli invarianti per mezzo di certe equazioni a derivate parziali, nelle quali i coefficienti delle forme date fungono da variabili indipendenti, e che non hanno altre soluzioni razionali fuorchè gli invarianti stessi (Giorn. di Crelle, t. 47; cfr. anche Aronhold, *ibid.*, t. 62). Clebsch non ebbe ad occuparsi di queste equazioni differen-

(*) È questo dunque uno dei casi menzionati più sopra, pei quali deve farsi una restrizione al teorema di Clebsch sulla generalità della simbolica.

ziali che nel lavoro già ricordato di sopra (a proposito del problema di Pfaff) sulle equazioni lineari simultanee a derivate parziali del prim'ordine (Giorn. di Borch., t. 65), ov'esse si presentano come esempii d'un cosidetto sistema completo d'equazioni differenziali, cioè d'un sistema le cui equazioni, combinate insieme, non forniscono alcuna nuova formazione (*).

Un'altra definizione degli invarianti, che è quella donde parte segnatamente Aronhold nella sua Memoria « *Fundamentale Begründung der Invariantentheorie* » (Giorn. di Borch., t. 62), si desume dalle relazioni di trasformazione che devono essere soddisfatte, acciò due forme possano essere trasformate linearmente l'una nell'altra. Anche questa definizione fu lasciata da Clebsch in seconda linea. Per lui invece gli invarianti sono funzioni razionali dei coefficienti di date forme, dotate della proprietà di trasformarsi in sè stesse per ogni sostituzione lineare, salvo un fattore consistente in una potenza del modulo della sostituzione. Questa loro proprietà è recata alla maggiore evidenza dalla legge di formazione simbolica, epperò Clebsch era interessato a studiare di preferenza quei problemi di cui si potesse sperare una trattazione agevole dal metodo simbolico.

Incominciando già dalle forme binarie, il principio di questo metodo permette di dedurre un numero illimitato di funzioni invarianti, aumentando a piacimento il numero dei determinanti simbolici e delle variabili ausiliari; a maggior ragione si possono moltiplicare le funzioni relative alle forme ternarie, quaternarie, ecc. È naturale di cercare se, nella moltiplicità di tutte queste forme, si possa sceglierne un ristretto numero, dalle quali dedurre tutte le altre, mercè un conveniente processo.

Con siffatto intendimento, coltivato già da Cayley, Hermite, Brioschi ed altri, in parte però con indirizzo diverso, Clebsch e Gordan concentrarono anzitutto la loro attenzione sulla ricerca di forme colle quali si possano comporre tutte le altre in modo razionale ed intero, col solo intervento di fattori numerici. Per le forme binarie Gordan riuscì a dimostrare, col sussidio dell'algoritmo simbolico, che ogni forma binaria, od ogni sistema di forme cosiffatte, possiede sempre un numero *finito* di tali funzioni (Giorn. di Borch., t. 69). La teoria delle forme ha con questo teorema raggiunto un grado di perfezione relativa, che mosse Clebsch a dare un'esposizione metodica di questa teoria (*Theorie der binären algebraischen Formen*, Leip-

(*) L'indipendenza di queste equazioni è stata dimostrata più tardi da Christoffel e da Aronhold (Giorn. di Borch., t. 68 e 69).

zig, Teubner, datata dal settembre 1871, pubblicata nel 1872). Questo libro è destinato anzitutto a divulgare i risultamenti ed i metodi dell'odierna teoria degli invarianti (*), ma contiene altresì alcune parti che segnano un progresso in questa teoria e che devono essere qui analizzate. E, quanto al punto di vista accennato dianzi, Clebsch ha dimostrato nel suo libro (ciò che fu fatto al tempo stesso anche da Gordan in una Memoria sulle risultanti, *Math. Ann.*, t. 3) che a forme binarie con più serie di variabili si può sempre sostituire un sistema di forme simultanee contenenti una sola specie di variabili, con che il problema delle forme binarie viene ad essere per questa parte circoscritto, ed in particolare si rende legittima, nella formazione dei covarianti, l'ipotesi di forme binarie contenenti una sola serie di variabili.

Per le forme ternarie e successive, il teorema analogo a quello del numero finito delle funzioni invarianti di forme binarie, non potè essere stabilito, dopo ripetuti sforzi di Gordan, che in casi particolari. Per converso Clebsch, nel suo grande lavoro: *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie* (Mem. di Gottinga, t. 17, marzo 1872; cfr. anche i *Math. Ann.*, t. 5) intraprese lo studio di quelle quistioni che corrispondono, nel caso di più variabili, a quelle testè mentovate per le forme binarie. Per queste forme non v'è, sostanzialmente, che *una* sola specie di variabili, ordinariamente rappresentate dai punti d'una retta. Per le forme ternarie si hanno invece due, e per le quaternarie tre specie di variabili, corrispondenti alle diverse forme fondamentali che la geometria projettiva considera nel piano e nello spazio: il punto e la retta nel piano; il punto, la retta ed il piano nello spazio. Nel caso di n variabili omogenee il numero di questi diversi gradi (**) è $n-1$. Ora Clebsch dimostra che, escludendo tutte quelle funzioni che possono essere formate in modo razionale ed intero per mezzo d'altre già prima contemplate, basta considerare le funzioni *che contengono una serie al più di ciascuna specie di variabili.* Per esempio, nella geometria del piano basta considerare quelle forme che contengono o solamente una serie

(*) L'opera si colloca per tal guisa in linea con quella di Salmon: *Lessons introductory to the modern Algebra.* Il confronto di queste due opere caratterizza in modo speciale la mente di Clebsch: in Salmon si trova una gran copia di metodi differenti che si alternano in modo svariato, in Clebsch regna invece un metodo uniforme ed un severo organismo.

(**) Questi gradi sostengono già un importante ufficio nella *Ausdehnungslehre* di Grassmann (1844).

di coordinate di punti, o solamente una serie di coordinate di rette, od una serie dell'una ed una serie dell'altra specie di coordinate. Le prime due classi rappresentano, eguagliate a zero, l'equazione d'una curva in coordinate di punti o di rette. La terza classe corrisponde a ciò che prima si diceva *forma intermedia* o *mista*, ma che non aveva ricevuto un'interpretazione propriamente geometrica. Le forme di questa specie rappresentano geometricamente una correlazione fra punti del piano ed inviluppi di rette, ovvero fra rette del piano e luoghi di punti. Diremo più avanti come Clebsch, in base a questo lavoro, abbia introdotto nella geometria del piano, come nuova forma fondamentale, siffatta specie di correlazione geometrica, da lui denominata *connesso* (*Connex*), facendo così un primo passo per creare un legame fra la teoria delle equazioni differenziali di prim'ordine e le nuove ricerche geometriche.

Del resto, quanto alle forme ternarie, cui si riferisce l'esempio in discorso, Clebsch ha, nel citato lavoro, circoscritto ancor più strettamente il quadro delle forme da studiarsi. Gordan aveva già considerati, in un lavoro sui combinanti (*Math. Ann.*, t. 4), i connessi soddisfacenti ad una certa equazione a derivate parziali di second'ordine. Dalle ricerche di Clebsch emerge che basta considerare queste forme appunto. Sembra che un'analoga semplificazione del problema abbia luogo anche nel caso d'un maggior numero di variabili, ma questa quistione, formulata per la prima volta nel lavoro di Clebsch, non è stata ancora risoluta.

Dal punto di vista inaugurato da Clebsch con queste ricerche, la geometria della retta apparisce come un ramo speciale della dottrina corrispondente in generale all'uso di quattro variabili omogenee. Seguendo lo stesso principio, Clebsch è riuscito ad estendere la simbolica ch'egli aveva già svolta (come si disse) pei complessi di rette in particolare, a tutte le forme, qualunque sia il numero delle variabili. È dessa che gli porge il punto di partenza per le sue ricerche ulteriori, e che gli fornisce il mezzo essenziale di dimostrazione per i teoremi che si propone di stabilire.

I lavori testè analizzati mirano tutti ad assegnare certe forme dalle quali tutte le altre possano essere dedotte in modo razionale ed intero. Si può invece considerare soltanto la deducibilità per mezzo di espressioni *razionali*. Sotto questo punto di vista Hermite (*) e Brioschi (**) hanno sta-

(*) *Cambr. and Dublin Math. Journ.*, 1854. Giorn. di Crelle, t. 52.
(**) *Annali di matem.*, t. 1, p. 296.

bilito, rispetto alle forme binarie, un sistema del tutto generale di « forme associate ». Tutti i covarianti sono esprimibili razionalmente in funzione di queste, e propriamente in guisa che il denominatore è semplicemente la potenza d'una delle forme, per esempio della forma fondamentale. A questo importante teorema i citati autori pervennero mediante una certa sostituzione lineare, in virtù della quale la forma data assume per coefficienti certe espressioni formate con invarianti e covarianti (cfr. in proposito la teoria delle forme binarie di Clebsch, la cui seconda metà è consacrata a questa ricerca). Ora Clebsch ha mostrato, in una Nota nelle *Nachrichten* di Gottinga (agosto 1870; cfr. i *Math. Ann.*, t. 3), che i sistemi di forme associate stabiliti dai detti autori non sono i più semplici della loro specie, potendo essi risultare anche da forme inferiori, cioè dalla forma fondamentale, dai covarianti quadratici nei coefficienti, e dai determinanti funzionali formati con questi covarianti e colla forma fondamentale (cfr. la dimostrazione semplificata di Gundelfinger, Giorn. di Borch., t. 74).

Queste considerazioni s'applicano tanto agli invarianti quanto ai covarianti. Analoghe considerazioni, relative ai soli invarianti, tendono allo scopo d'introdurre come nuove variabili certe funzioni delle variabili primitive che stanno in relazione covariante colle forme date. I coefficienti della nuova forma « tipica » sono invarianti, coi quali si possono agevolmente esprimere tutti gli altri. Hermite, al quale principalmente è dovuto questo genere di considerazioni, si vale d'espressioni irrazionali per le forme tipiche: ma in tal modo scomparisce appunto la differenza caratteristica fra il metodo tipico e quello, tanto usitato, delle forme canoniche, cioè l'intervento delle sole espressioni razionali. All'incontro Clebsch e Gordan, in un lavoro comune sulle forme di quinto e di sesto grado (Ann. di Matem., t. 1, 1867), hanno mostrato con un esempio come si possano conseguire i vantaggi dell'espressioni razionali nelle forme d'ordine pari, introducendo come nuove variabili i covarianti quadratici. Posteriormente Clebsch e gli scolari di lui hanno dato l'espressione tipica d'altre forme ancora, come si può vedere nella seconda parte della Teoria delle forme binarie, ove sono riportate tutte queste ricerche.

Abbiamo già fatto parola più volte del nesso della teoria degli invarianti relativi a sostituzioni lineari colla teoria generale delle trasformazioni univoche, e reso conto dei risultati ulteriori che quest'ultima teoria ha già conseguiti rispetto alle forme ternarie e quaternarie. In quanto alle forme binarie, per le quali sembra molto più agevole la risoluzione dei problemi a ciò relativi, la questione fu trattata primieramente da Hermite (*Compt. Rend.*, t. 46, p. 961) e successivamente da Gordan (Giorn. di Borch., t. 71), collo stabilire a dirittura gli invarianti della forma trasformata per mezzo d'una data sostituzione univoca. Il modo in cui Gordan tratta la trasformazione univoca corrisponde esattamente a quello ond'è stato fatto uso per le forme ternarie da Clebsch e da lui nel libro sulle funzioni abeliane. Si suppongono le nuove variabili omogenee proporzionali a funzioni intere delle variabili primitive, e si eliminano queste ultime fra queste equazioni e la forma data posta eguale a zero. La risultante che si ottiene è la forma trasformata, ed è quindi un'invariante simultaneo della forma data e delle equazioni di trasformazione, donde consegue che i suoi invarianti sono formati cogli invarianti della forma data e delle funzioni di trasformazione.

Clebsch s'è occupato particolarmente della trasformazione quadratica delle forme binarie (cfr. *Das Fünfseit und die Gleichungen fünften Grades, Math. Ann.*, t. 4, giugno 1871). In questa ricerca egli s'è giovato principalmente d'una rappresentazione geometrica della trasformazione quadratica, che merita d'essere qui riferita come un esempio notabilissimo, nella sua semplicità, della corrispondenza istituita dai moderni studii fra la trattazione algebrica e la contemplazione geometrica. Si tirino n tangenti ad una conica. I gruppi di n punti in cui esse vengono segate da una qualunque altra tangente sono, come è noto, tutti projettivi fra loro. Se invece le n tangenti vengono segate da un'altra retta del piano, la relazione projettiva cessa, e la forma rappresentata dai nuovi punti d'intersezione risulta appunto dalla primitiva per mezzo d'una trasformazione quadratica, talchè la totalità delle forme risultanti da una trasformazione quadratica è rappresentata dalla totalità dei gruppi di intersezioni delle rette del piano colle n tangenti date (*). Per tal guisa, il problema di determinare una trasformazione quadratica in modo da conferire date proprietà invarianti alla forma trasformata, equivale a quello di determinare certe rette nel piano, equivale cioè ad un problema della teoria degli invarianti lineari per il caso di tre variabili.

Clebsch ha specialmente applicato queste ricerche alle forme binarie di quinto grado; ma non potendo noi dare qui una minuta esposizione dei numerosi risultati particolari da lui ottenuti, diremo soltanto ch'egli ha posto

(*) Similmente, le trasformazioni cubiche s'interpretano geometricamente, secondo Clebsch, intersecando con una retta dello spazio n piani osculatori d'una curva gobba del terz'ordine.

le sue ricerche in relazione con quelle di Jerrard, Hermite e Kronecker sulla risoluzione delle equazioni di quinto grado.

La teoria generale delle equazioni algebriche, fondata da Lagrange, ampliata da Gauss e da Abel, elevata da Galois alla sua presente altezza, interessò Clebsch in sommo grado. Egli non ha propriamente istituito ricerche originali in quest'indirizzo, ma vi ha giovato indirettamente coll'approfittare di tutte le occasioni in cui un problema geometrico od algebrico lo conduceva ad equazioni dotate d'uno speciale carattere, per attirare l'attenzione sovr'esse, come sopra argomento degno d'essere considerato in sè stesso. L'interesse di Clebsch per questo lato algebrico dei problemi geometrici fu primieramente eccitato dalle ricerche di Hesse, indi da quelle d'Abel, e fu poscia tenuto vivo, per tutto ciò che si connette ad aggruppamenti singolari delle radici d'un'equazione, dai molteplici rapporti in cui egli entrò con C. Jordan. Per converso fu Clebsch che, in gran parte, diè modo a C. Jordan di consacrare alle « equazioni della geometria » un capitolo speciale della sua grand'opera (*Traité des substitutions et des équations algébriques.* Paris, 1870).

Il primo esempio di codeste equazioni « geometriche » fu fornito dai nove flessi delle curve di terz'ordine, allorchè Hesse dimostrò ch'essi vengono determinati da un'equazione biquadratica e da due equazioni cubiche pure. Si possono citare in appresso le equazioni relative alla determinazione delle 28 tangenti doppie d'una curva di quart'ordine, o delle 27 rette d'una superficie di terz'ordine. Sebbene non si sia potuto abbassarne il grado (C. Jordan ha poi mostrato essere ciò impossibile), si sono potuti però trovare speciali aggruppamenti delle loro radici, i quali forniscono interessanti esempii delle peculiarità che intervengono nelle equazioni di grado elevato. Lo stesso Clebsch, nel suo lavoro già ricordato sul pentaedro delle superficie di terz'ordine, ha minutamente discusso l'equazione di 10^0 grado che corrisponde ai dieci vertici del pentaedro. Nella sua Memoria « sulle tangenti di flesso delle curve di terz'ordine » (Giorn. di Borch., t. 58) egli ha svolta un'interessante dipendenza fra un'equazione di quarto grado ed una di sesto grado che era già stata notata da Hesse. Abbiamo già rammentate anche le ricerche sulle equazioni per la divisione delle funzioni abeliane, date da Clebsch e Gordan nella loro opera comune. Sono però ancor più notabili, in quanto attestano l'indole generale del pensiero di Clebsch, due altre sue ricerche, che pure abbiamo già rammentate. L'una risguarda la dipendenza generale, trovata da Clebsch, fra le equazioni per la divisione delle funzioni abeliane e quelle per la determinazione delle curve di contatto d'una curva piana; l'altra ha per iscopo di far dipendere appunto dalla determinazione di queste curve di contatto le equazioni relative alla rappresentazione delle superficie.

In quest'occasione dobbiam fare inoltre speciale menzione del lavoro sulle forme binarie di sesto grado e sulla trisezione delle funzioni iperellittiche (Mem. di Gottinga, t. 14, giugno 1869; cfr. *Math. Ann.*, t. 2). Occupandosi della costruzione di curve del terz'ordine soggette a toccare sei date rette d'un fascio, Cayley aveva posto il problema (*Quart. Journ.*, t. 9) della scomposizione d'una forma binaria di sesto grado nella somma del cubo d'una forma quadratica e del quadrato d'una cubica. Clebsch ha mostrato che questo problema è del 40° grado, e che può essere risoluto con un'equazione del 27° ed un'altra del 5° grado. C. Jordan, cui Clebsch comunicò questo risultato, riconobbe che quest'equazione di 40° grado è la stessa di quella che s'incontra nella trisezione delle funzioni ultraellittiche. Lo stesso Clebsch mostrò, in seguito, come l'un problema si riduca all'altro. Nell'ulteriore trattazione del problema egli non solo dimostrò l'esistenza di certe risolventi, ma indicò altresì dei metodi per formare esplicitamente queste risolventi coi sussidii del calcolo simbolico, lo che rende notevolissima la sua ricerca. Si consulti in ordine a ciò la teoria delle forme binarie (p. 234 e segg.), ove Clebsch ha riprodotto, almeno in parte, queste ricerche.

Insieme con questi lavori, i quali tendono a collegare la teoria degli invarianti con altre dottrine matematiche che prima ne erano, si può dire, del tutto remote, rammenteremo una Memoria di Clebsch sulle caratteristiche delle coniche (*Math. Ann.*, t. 6, maggio 1872), che è concepita nel medesimo senso. Nella teoria delle caratteristiche, qual fu creata da Chasles, è di fondamentale importanza un principio che ha ricevuto, in via d'induzione, un'estensione grandissima, vogliam dire il principio che il numero delle coniche d'una serie semplicemente infinita, soddisfacenti ad una condizione data, risulti sempre formato in modo lineare ed omogeneo con due coppie di numeri, l'una delle quali appartiene esclusivamente alla serie, l'altra esclusivamente alla condizione prescritta. Ora Clebsch ha mostrato, in base ai risultati della sua Memoria « *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie* », di cui abbiamo già diffusamente parlato, che questo principio scaturisce da certe proprietà speciali appartenenti al sistema delle forme simultanee d'un gruppo arbitrario di forme piane, quando fra queste si trovi una conica. Per tale ricerca non solo il principio riesce dimostrato in un modo assai più completo di quel che fosse stato fatto prima (*), ma se ne rende probabile una limitazione, perchè la dimostrazione è subordinata alle proprietà speciali delle coniche, per modo da non potersi ammettere la validità del teorema, coll'enunciato medesimo, anche per le curve d'ordine superiore. Nè a ciò si oppone punto il fatto che, in casi particolari, esso sia stato riconosciuto vero anche per curve d'ordine elevato (cfr. Chasles nei *Compt. rend.*, t. 68, 1864; Zeuthen nei *Math. Ann.*, t. 3, p. 154), poichè in tali casi le condizioni imposte alle curve sono di natura speciale. Nella sua dimostrazione, Clebsch presuppone una certa indipendenza fra la data serie di coniche e la nuova condizione imposta. Quando siffatta indipendenza non sussiste, il principio di Chasles non ha alcun senso immediato. Tuttavia esso è stato indirettamente applicato a casi di questo genere, in base ad una induzione non del tutto fondata, da Chasles (*Comp. rend.*, 1864) e da Cremona (*ibid.*, 1865), ed ha condotto a risultati perfettamente esatti. Come si è detto, questi casi sono espressamente esclusi dalle considerazioni di Clebsch, e l'applicazione del principio di Chasles ai medesimi non è ancora confortata da alcuna dimostrazione.

Ricordiamo per ultimo le ricerche già citate intorno ai *connessi*, che Clebsch divisava introdurre come nuova forma fondamentale nella geometria analitica del piano (cfr. le *Nachr.* di Gottinga, agosto 1872; *Math. Ann.*, t. 6). Con questo concetto Clebsch ha aperto alla ricerca geometrica un orizzonte interminato di nuove speculazioni, senza potere tuttavia segnare null'altro che l'indirizzo ch'egli intendeva di seguire nella trattazione dell'argomento. Egli voleva erigere il connesso a soggetto dell'investigazione geometrica, allo stesso titolo della curva o della superficie. Un connesso ha singolarità proprie, fra le quali hanno luogo equazioni analoghe a quelle date da Plücker per le singolarità delle curve piane. Si può far ricerca dei luoghi comuni a due, tre connessi, ecc. Tutte queste forme hanno un *genere*, relativamente ad ogni trasformazione univoca (estesa al doppio sistema ternario delle coordinate di punti e di rette); e così via.

Ma ciò che sembra dotato di speciale importanza è il legame che sorge fra la teoria delle equazioni differenziali algebriche di prim'ordine (per ora

---

(*) Cfr. per es. le considerazioni di Darboux nei *Compt. rend.*, dove non sono contemplate che le serie di curve dipendenti razionalmente da un parametro. Recentemente il principio fondamentale della teoria delle caratteristiche è stato dimostrato geometricamente da Halphen (*Bull. de la Soc. Math.*, 1873).

fra due variabili assolute, ovvero fra tre variabili omogenee) e la teoria dei connessi. Ogni connesso trae con sè un'equazione differenziale cosiffatta; le curve integrali sono definite da ciò che ciascun punto del piano e la tangente in esso soddisfanno all'equazione del connesso. Si ottiene in tal guisa la più generale equazione differenziale algebrica di prim'ordine, ma ad una data equazione differenziale corrispondono ancora infiniti connessi. In tal modo si viene a conseguire per queste equazioni differenziali un punto di vista interamente nuovo, il quale quadra perfettamente colle nuove ricerche geometrico-algebriche. Si possono, per esempio, classificare queste equazioni differenziali in base ai loro generi, ecc. In ispecial modo poi si viene ad acquistare un algoritmo per la trattazione dei problemi differenziali, in armonia colle nuove vedute or dette. Questo algoritmo sembra destinato a completare le ricerche, di carattere piuttosto sintetico, iniziate in questi ultimi tempi sulle equazioni differenziali, specialmente da Lie.

Clebsch aveva intenzione di estendere le sue ricerche al caso d'un maggior numero di variabili. Per es. la teoria delle forme quaternarie, contenenti una serie di coordinate di punti ed una di coordinate di piani, include la teoria dell'equazioni a derivate parziali del prim'ordine fra tre variabili. Anche per queste ha luogo la divisione in generi: si può d'altronde adottare la suddivisione in gruppi, secondo l'ordine e la classe dei connessi cui esse appartengono. Clebsch non ha potuto che alludere in privati discorsi a tutte queste ricerche, che lo occupavano negli ultimi suoi giorni. Ma le grandi speranze ch'egli fondava sovr'esse ci hanno fatto parer doveroso di darne qui almeno questo cenno. Come già in tante altre occasioni, Clebsch aperse anche con queste sue ultime ricerche la via a nuove, ampie investigazioni, che in sè raccolgono ed armonizzano dottrine già note da lungo tempo, ma rimaste sempre disgiunte fra loro. Anche con esse egli ha incarnato il concetto fondamentale della sua attività matematica, ch'è stato sempre quello di considerare la scienza non già come una congerie di dottrine disparate, straniere l'una all'altra, ma come un gran tutto, vivente di vita organica.

ELENCO DELLE PUBBLICAZIONI

di Alfredo Clebsch.

I. Pubblicazioni fatte a parte.

1. De motu ellipsoidis in fluido incompressibili viribus quibuslibet impulsi. [Königsberg, 1854.]
2. Theorie der Elasticität fester Körper. [Leipzig, 1862, B. G. Teubner.]
3. Theorie der Abel'schen Functionen (con P. Gordan). [Leipzig, 1866, B. G. Teubner.]
4. Theorie der binären algebraischen Formen. [Leipzig, 1872, B. G. Teubner.]

In fascicoli autografati: Vorträge über elementare und über analytische Mechanik [Carlsruhe, 1858-59.]

II. Nel Giornale di Crelle-Borchardt.

t. 52 (1856). Ueber die Bewegung eines Ellipsoids in einer tropfbaren Flüssigkeit. 30 pag. [Agosto 1854.]

t. 53 (1857). Zusatz zu dem vorhergehenden Aufsatze. 5 pag. [Maggio 1856.]

Anwendung der elliptischen Functionen auf ein Problem der Geometrie des Raumes. 17 pag. [Dicembre 1855.]

t. 54 (1857). Ueber eine allgemeine Transformation der hydrodynamischen Gleichungen. 20 pag. [Maggio 1857.]

t. 55 (1858). Ueber die Reduction der zweiten Variation auf ihre einfachste Form. 20 pag. [Novembre 1857.]

Ueber diejenigen Probleme der Variationsrechnung, welche nur eine unabhängige Variable enthalten. 21 pag. [Febbrajo 1858.]

t. 56 (1859). Ueber die Integration der hydrodynamischen Gleichungen. 10 pag. [Marzo 1858.]

Ueber die zweite Variation vielfacher Integrale. 26 pag. [Giugno 1858.]

t. 57 (1860). Zur Theorie der Trägheitsmomente und der Drehung um einen Punkt. 5 pag. [1859.]

Ueber die Gleichgewichtsfigur eines biegsamen Fadens. 18 pag. [Maggio 1859.]

Ueber das Gleichgewicht schwimmender Körper. 21 pag. [Agosto 1859.]

Theorie der circularpolarisirenden Medien. 40 pag. [Ottobre 1859.]

t. 58 (1861). Zur Theorie der algebraischen Flächen. 16 pag. [Marzo 1860.]
Ueber eine Transformation der homogenen Functionen dritter Ordnung mit vier Veränderlichen. 18 pag. [Marzo 1860.]
Ueber die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung. 11 pag. [Aprile 1860.]
Ueber eine Classe von Eliminationsproblemen und über einige Punkte der Theorie der Polaren. 19 pag. [Giugno 1860.]

t. 59 (1861). Ueber symbolische Darstellung algebraischer Formen. 62 pag. [Settembre 1860.]
Ueber Curven vierter Ordnung. 21 pag. [Settembre 1860.]
Ueber Jacobi's Methode, die partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung zu integriren und ihre Ausdehnung auf das Pfaff'sche Problem (da una lettera al redattore). 3 pag. [Marzo 1861.]
Ueber die Knotenpunkte der Hesse'schen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung. 36 pag. [Febbrajo 1861.]

t. 60 (1862). Ueber das Pfaff'sche Problem. 59 pag. [Settembre 1860.]
Ueber eine Eigenschaft der Kugelfunctionen. 8 pag. [Giugno 1861.]

t. 61 (1863). Ueber das Pfaff'sche Problem, 2ª Mem. 34 pag. [Gennajo 1861.]
Bemerkung zur Abhandlung des Hrn. Röthig über das Potential eines homogenen rechtwinkeligen Cylinders. 8 pag. [Ottobre 1861.]
Ueber die Reflexion an einer Kugelfläche. 68 pag. [Ottobre 1861.]

t. 62 (1863). Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen der zweiten Ordnung. 46 pag. [Gennajo 1862.]
Ueber eine Classe von Gleichungen, welche nur reelle Wurzeln besitzen. 14 pag. [Novembre 1861.]

t. 63 (1864). Ueber die Wendungsberührebenen der Raumcurven. 8 pag. [Settembre 1862.]
Zur Theorie der algebraischen Flächen. 13 pag. [Maggio 1863.]
Ueber einen Satz von Steiner und einige Punkte der Theorie der Curven dritter Ordnung. 28 pag. [Settembre 1863.]
Bemerkung zu Jacobi's Beweis für die Anzahl der Doppeltangenten. 3 pag. [Luglio 1863.]
Ueber die Anwendung der Abel'schen Functionen in der Geometrie. 55 pag. [Ottobre 1863.]

t. 64 (1864). Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten rationale Functionen eines Parameters sind. 23 pag. [Maggio 1864.]
Ueber die Elimination aus zwei Gleichungen dritten Grades. 3 pag. [Apr. 1864.]
Ueber die Singularitäten algebraischen Curven. 3 pag. [Aprile 1864.]
Note zur Abhandlung des Hrn. Cremona: Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. 2 pag. [Giugno 1864.]
Ueber diejenigen ebenen Curven, deren Coordinaten sich als elliptische Functionen eines Parameters darstellen lassen. 61 pag. [Ottobre 1864.]

t. 64 (1864). Ueber einige von Steiner behandelte Curven. 6 pag. [Luglio 1864.]
t. 65 (1865). Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen. 12 pag. [Febbrajo 1865.]
Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung. 21 pag. [Ottobre 1865.]
t. 67 (1867). Ueber die Steiner'sche Fläche. 22 pag. [Luglio 1866.]
Ueber ein Problem der Forstwissenschaft. 18 pag. [Aprile 1866.]
Ueber simultane binäre cubische Formen. 11 pag. [Giugno 1867.]
Zur Theorie der binären Formen vierten Grades. 10 pag. [Giugno 1867.]
t. 68 (1867). Ueber die Curven der Haupttangenten bei windschiefen Flächen. 11 pag. [Giugno 1867.]
Ueber das simultane Formensystem einer quadratischen und einer cubischen binären Form. 8 pag. [Luglio 1867.]
t. 69 (1868) Ueber Flächen vierter Ordnung, welche eine Doppelcurve zweiten Grades besitzen. 43 pag. [Aprile 1868.]
Ueber eine Eigenschaft der Functionaldeterminanten. 4 pag. [Novembre 1868.]
t. 70 (1869). Note zu dem vorhergehenden Aufsatze. 7 pag. [Dicembre 1868.]

III. Nei *Mathematischen Annalen.*

t. 1 (1869) Ueber die Theorie der ternären cubischen Formen (con P. GORDAN). 34 pag. [Settembre 1867.]
Ueber die Curven, für welche die Classe der zugehörigen Abel'schen Functionen $p=2$ ist. 3 pag. [Ottobre 1868.]
Ueber die Abbildung algebraischer Flächen, insbesondere der vierten und fünften Ordnung. 64 pag. [Ottobre 1868.]
Ueber biternäre Formen mit contragredienten Variabeln (con P. GORDAN). 42 pag. [Settembre 1868.]
Bemerkung über die Geometrie auf den windschiefen Flächen dritter Ordnung. 3 pag. [Marzo 1869.]
t. 2 (1870). Ueber die Plücker'schen Complexe. 8 pag. [Aprile 1869.]
Zur Theorie der binären Formen sechster Ordnung und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen. 5 pag. [Giugno 1869] (cfr. le Memorie di Gottinga).
Ueber die Möglichkeit, zwei gegebene binäre Formen linear in einander zu transformiren. 9 pag. [Novembre 1869.]
Ueber die Bestimmung der Wendepunkte einer Curve dritter Ordnung. 3 pag. [Agosto 1869.]
Ueber die ebene Abbildung der geradlinigen Flächen vierten Grades, welche eine Doppelcurve dritten Grades besitzen. 27 pag. [Gennajo 1870.]
t. 3 (1871). Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen. 31 pag. [Maggio 1870.]

t. 3 (1871) Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit. 25 pag. [Maggio 1870.]

Ueber die Bedeutung einer simultanen Invariante einer binären quadratischen und einer binären biquadratischen Form. 2 pag. [Febbrajo 1870.]

Zur Theorie der binären algebraischen Formen. 3 pag. [Agosto 1870] (dalle *Nachr.* di Gottinga).

t. 4 (1871). Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen fünften Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits. 62 pag. [Giugno 1871.]

Ueber das ebene Fünfeck. 14 pag. [Luglio 1871.]

t. 5 (1872). Ueber die geradlinigen Flächen vom Geschlechte $p=0$. 26 pag. [Ottobre 1871.]

Ueber die ebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung. 3 pag. [Mar. 1872.]

Ueber zwei Erzengungsarten der ebenen Curven dritter Ordnung. 5 pag. [Marzo 1872.]

Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie. 8 pag. [Marzo 1872] (cfr. le Memorie di Gottinga).

Ueber die Complexflächen und die Singularitätenflächen der Complexe. 7 p. [Gennajo 1872] (dalle *Nachr.* di Gottinga).

t. 6 (1873). Zur Theorie der Charakteristiken. 15 pag. [Maggio 1872.]

Zur Theorie der Riemann'schen Fläche. 15 pag. [Settembre 1872.]

Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene. 13 p. [Settembre 1872] (dalle *Nachr.* di Gottinga).

IV. Negli *Annali di Matematica.*

1.ª ser. t. 4 (1862). Sur un problème concernant la Théorie des surfaces du 2ème ordre. 4 pag. [Febbrajo 1862]

2.ª ser. t. 1 (1867). Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie (con P. GORDAN). 57 pag. [Febbrajo 1867.]

V. Nel *Journal de Mathèmatiques* di LIOUVILLE.

t. 8 (1863). Sur la surface qui coupe la courbe d'intersection de deux surfaces algébriques données dans les points de contact des plans osculateurs stationnaires. 11 pag. [Settembre 1862.]

VI. Nelle *Memorie della Società reale delle Scienze* di Gottinga.

t. 14 (1868-69). Zur Theorie der binären Formen sechster Ordnung und zur Dreitheilung der hyperelliptischen Functionen. 59 pag. [Giugno 1869.]

t. 15 (1870). Ueber die Abbildung einer Classe von Flächen der fünften Ordnung. 62 pag. [Gennajo 1870.]
Ueber die partiellen Differentialgleichungen, welchen die absoluten Invarianten binärer Formen bei höheren Transformationen genügen. 35 pag. [Novembre 1870.]
t. 16 (1871). Zum Gedächtniss an Julius Plücker. 40 pag. [Dicembre 1871.]
t. 17 (1872). Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie. 60 pag. [Marzo 1872.]

VII. Nelle *Nachrichten* della Società reale ecc. di Gottinga.

1869. Ueber die Abbildung algebraischer Flächen. 4 pag. [Dicembre.]
1870. Ueber gewisse Probleme aus der Theorie der Oberflächen. 5 pag. [Maggio.]
Zur Theorie der binären algebraischen Formen. 5 pag. [Agosto.]
1871. Bemerkungen zu der Theorie der Gleichungen fünften und sechsten Grades. 6 pag. [Aprile.]
Ueber die geometrische Interpretation der höheren Transformationen binärer Formen und der Formen fünfter Ordnung insbesondere. 11 pag. [Giugno.]
1872. Ueber die Complexflächen und die Singularitätenflächen der Complexe. 12 p. [Febbrajo.]
Mittheilung über eine Fläche dritter Ordnung. 2 pag. Agosto.
Ueber ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene. 20 p. [Settembre.]

VIII. Nelle *Gelehrte Anzeigen* di Gottinga.

1869. Ragguaglio sulla «*Neue Geometrie des Raumes*» di Plücker. 12 pag. [Ottobre.]
1872. Ragguaglio sulla Teoria delle forme binarie di Clebsch. 14 pag. [Febbrajo.]

IX. Nei *Monatsberichte* dell'Accademia di Berlino.

1857. Ueber die Criterien des Maximums und des Minimums in der Variationsrechnung. 4 pag. [Dicembre.]
1860. Ueber eine symbolische Darstellungsweise algebraischer Formen, und über die davon zu machende Anwendung auf Probleme der Elimination. 5 pag. [Ottobre.]
1868. Ueber die Flächen vierter Ordnung mit einer Doppelcurve zweiter Ordnung. 6 pag. [Aprile.]

X. Nei *Comptes rendus* dell'Accademia delle Scienze di Parigi.

t. 60 (1865). Sur une propriété des courbes d'ordre n, à $\frac{n(n-3)}{2}$ points doubles. 3 pag. [Giugno.]

t. 62 (1866) Sur la théorie des fonctions abéliennes (con P. Gordan). 7 p. Marzo.
Sur la géometrie des courbes gauches tracées sur une surface générale du troisième ordre. 2 pag. [Maggio.]

t. 64 (1867). Sur les formes binaires du sixième degré (con P. Gordan). 7 pag. [Marzo.]

t. 67 (1868). Sur les surfaces algébriques. 2 pag. [Dicembre.]

XI. Nei *Rendiconti* del R. Istituto Lombardo.

1868. Intorno alla rappresentazione di superficie algebriche sopra un piano. 13 pag. [Novembre.]

XII. Opere e Memorie d'altri Autori, pubblicate per cura di Clebsch.

Jacobi. Nova methodus, aequationes differentiales partiales primi ordinis inter numerum variabilium quemcunque propositas integrandi. [Giorn. di Borchardt, t. 60. 1862.]

Jacobi. Vorlesungen über Dynamik. [Berlino, G. Reimer, 1866.]

Plücker. Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. [Leipzig, B. G. Teubner, 1868-69.]

Recensioni inserite nei volumi dei *Fortschritte der Physik,* nel primo e secondo volume dei *Fortschritte der Mathematik,* nella *Zeitschrift für mathem. etc. Unterricht* di Hoffmann.

Sopra le serie di funzioni sferiche (*)

(*del prof.* Ulisse Dini, *a Pisa.*)

10. Prendiamo ora a considerare la serie:

$$\sum_{0}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{4\pi}\right)^2\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta,\ \phi)P_n \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi, \tag{14}$$

che secondo Dirichlet rappresenta la densità di una materia distribuita su una superficie sferica, quando il suo potenziale è dato per ogni punto della stessa superficie ed è $f(\theta,\ \phi)$, e cerchiamone la somma. Questa somma fu data già da Dirichlet (V. *Journal de Liouv.,* deux. serie, tom. II pag. 57); ma il processo da lui seguito in questa ricerca, porta, quando si vuole essere rigorosi, a certe restrizioni che non compariscono o almeno si presentano sotto una forma meno limitativa quando si segue un processo simile a quello che qui ho tenuto per trovare la somma della serie (1).

Incominciamo perciò al solito a cercare la somma della serie (14) pel punto $\theta'=0$, e poniamo ancora:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta,\ \phi)\,d\phi=F(\theta);$$

e supponiamo che $F(\theta)$ sia una funzione che in tutti i punti fra 0 e π (questi limiti inclusi) ammette una derivata $F'(\theta)$ che insieme alla funzione $\frac{F'(\theta)}{\operatorname{sen}\theta}$ ha limiti determinati e finiti per $\theta=0$ e $\theta=\pi$, e nel resto fra 0 e π è finita e atta alla integrazione e ha un numero finito di massimi e minimi, o avendone un numero infinito soddisfa fra 0 e π alla II^a^ delle condizioni che si posero per la funzione $f(x)$ del § 5 fra -1 e 1.

(*) Continuazione e fine della Memoria a pag. 112 di questo tomo.

La somma della stessa serie per lo stesso punto $\theta'=0$ sarà il limite per $n=\infty$ della quantità:

$$\frac{1}{8\pi}\sum_0^n(2n+1)^2\int_0^\pi F(\theta)P_n \operatorname{sen}\theta\, d\theta;$$

quindi, poichè, colla integrazione per parti, per n diverso da zero si ha:

$$\int_0^\pi F(\theta)P_n \operatorname{sen}\theta\, d\theta=\int_0^\pi F'(\theta)\frac{P_{n+1}-P_{n-1}}{2n+1}d\theta,$$

e per $n=0$ si ha invece:

$$\int_0^\pi F(\theta)P_0 \operatorname{sen}\theta\, d\theta=F(0)+F(\pi)+\int_0^\pi F'(\theta)P_1\, d\theta,$$

per avere la stessa somma basterà cercare il limite per $n=\infty$ di:

$$\frac{1}{8\pi}\left\{F(0)+F(\pi)+\int_0^\pi F'(\theta)P_1\, d\theta+\sum_1^n(2n+1)\int_0^\pi F'(\theta)(P_{n+1}-P_{n-1})\,d\theta\right\},$$

ovvero di:

$$\frac{1}{4\pi}\left\{F(\pi)+\frac{(2n+1)}{2}\int_0^\pi F'(\theta)P_{n+1}\,d\theta+\right.$$

$$\left.\frac{(2n-1)}{2}\int_0^\pi F'(\theta)P_n\,d\theta-2\int_0^\pi F'(\theta)\sum_0^{n-1}P_n\,d\theta\right\}.$$

Ma, per le ipotesi fatte sulla funzione $\frac{F'(\theta)}{\operatorname{sen}\theta}$, e per le considerazioni del § 6 applicate ora a questa funzione col cangiare x in $\cos\theta$, si vede subito che la serie $\sum_0^\infty\frac{2n+1}{2}P_n(\cos\theta)\int_0^\pi F'(\theta)P_n\,d\theta$ è convergente per $\theta=0$; quindi il secondo e terzo termine della espressione precedente col crescere indefinito di n tendono a zero, e perciò ci resta soltanto da cercare il limite dell'integrale $2\int_0^\pi F'(\theta)\sum_0^{n-1}P_n\,d\theta$ per $n=\infty$.

Per questo osserviamo che siccome dalla formola di La-Place si ha:

$$P_n=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta\cos\phi)^n d\phi,$$

sarà:

$$2\int_0^\pi F'(\theta)\sum_0^{n-1} P_n\,d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi F'(\theta)\,d\theta\int_0^\pi \frac{1-(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi)^n}{1-\cos\theta-i\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi}\,d\phi =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{F'(\theta)}{\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}\,d\theta\int_0^\pi \frac{1-(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi)^n}{\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\cos\varphi}\,d\phi;$$

e quindi, indicando con ε un numero positivo arbitrariamente piccolo, e osservando che per θ differente da zero si ha da una formola nota:

$$\int_0^\pi \frac{d\varphi}{\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\cos\varphi}=\pi,$$

si potrà anche scrivere:

$$2\int_0^\pi F'(\theta)\sum_0^{n-1} P_n\,d\theta = \int_\varepsilon^\pi \frac{F'(\theta)}{\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}\,d\theta - \frac{1}{\pi}\int_\varepsilon^\pi \frac{F'(\theta)}{\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}\,d\theta\int_0^\pi \frac{(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi)^n}{\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\cos\varphi}\,d\phi +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\varepsilon \frac{F'(\theta)}{\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}\,d\theta\int_0^\pi \frac{1-(\cos\theta+i\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi)^n}{\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\cos\varphi}\,d\phi,$$

e basterà perciò considerare separatamente i tre integrali che qui compariscono.

Ora in quanto al primo integrale, per le ipotesi fatte su $\frac{F'(\theta)}{\mathrm{sen}\,\theta}$, si vede subito che quando si prenda ε sufficientemente piccolo, esso differisce da $\int_0^\pi \frac{F'(\theta)}{\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}\,d\theta$ tanto poco quanto si vuole.

In quanto al secondo poi si osservi che, indicando con ε_1 un numero positivo pure arbitrariamente piccolo, e scomponendo l'integrale relativo a ϕ che vi comparisce in tre integrali parziali uno da 0 a ε_1, uno da ε_1 a $\pi-\varepsilon_1$ e l'altro da $\pi-\varepsilon_1$ a π, si trova subito che esso è numericamente inferiore a:

$$\frac{1}{\pi}\left\{\frac{2\varepsilon_1}{\mathrm{sen}\frac{\varepsilon}{2}}+\frac{(\cos^2\varepsilon+\mathrm{sen}^2\varepsilon\cos^2\varepsilon_1)^{\frac{n}{2}}}{\mathrm{sen}\frac{\varepsilon}{2}}\right\}\int_0^\pi\left[\frac{F'(\theta)}{\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}\right]d\theta,$$

ove con $\left[\frac{F'(\theta)}{\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}\right]$ si è indicata la funzione dei valori assoluti di $\frac{F'(\theta)}{\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}$; quindi poichè, per quanto piccolo sia ε, si può sempre prendere ε_1 differente da zero e così piccolo che $\frac{2\varepsilon_1}{\operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{2}}$ sia minore di quella quantità che più ci piace, e si può poi trovare un numero n' così grande che per tutti i valori di n non inferiori a n' la quantità $\frac{(\cos^2\varepsilon+\operatorname{sen}^2\varepsilon\cos^2\varepsilon_1)^{\frac{n}{2}}}{\operatorname{sen}\frac{\varepsilon}{2}}$ sia essa pure inferiore a quella quantità che più ci piace, si conclude subito che il secondo integrale del secondo membro della (15) per valori sufficientemente grandi di n diverrà numericamente inferiore a qualunque quantità arbitrariamente piccola data.

Similmente, osservando che il modulo di:

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\cos\phi \quad \text{è:} \quad \sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}^2\phi};$$

e quindi in valore assoluto, per θ diverso da zero, si ha:

$$\int_0^\pi \frac{1-(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta\cos\varphi)^n}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\cos\varphi}\,d\phi<2\int_0^\pi\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\frac{\theta}{2}\operatorname{sen}^2\varphi}},$$

ovvero:

$$\int_0^\pi \frac{1-(\cos\theta+i\operatorname{sen}\theta\cos\varphi)^n}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}-i\cos\frac{\theta}{2}\cos\varphi}\,d\phi<A\log\theta,$$

ove A è inferiore a una quantità finita per tutti i valori di θ e di n, si vede subito che, per le ipotesi fatte, anche il terzo integrale della (15) col prendere ε sufficientemente piccolo, diviene inferiore a quella quantità che più ci piace; e si può perciò concludere ora evidentemente che tutte le volte che la funzione $F(\theta)$ insieme alla funzione $\frac{F'(\theta)}{\operatorname{sen}\theta}$ soddisfa alle condizioni poste sopra, la somma della serie (14) per $\theta'=0$ è:

$$\frac{1}{4\pi}\left\{F(\pi)-\int_0^\pi\frac{F'(\theta)}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}\,d\theta\right\},$$

come trovò già Dirichlet.

E così pel punto $\theta'=\pi$ la somma della stessa serie è:

$$\frac{1}{4\pi}\left\{F(0)+\int_0^\pi\frac{F'(\theta)}{\cos\frac{\theta}{2}}\,d\theta\right\},$$

e in generale pel punto (θ', ϕ') è:

$$\frac{1}{4\pi}\left\{F(\gamma)_{\gamma=\pi}-\int_0^{\pi}\frac{F'(\gamma)}{\operatorname{sen}\frac{\gamma}{2}}d\gamma\right\},$$

ove $F(\gamma)$ è la funzione di γ considerata nei §§ 2 e 3, e si suppone che insieme alla funzione $\frac{F'(\gamma)}{\operatorname{sen}\gamma}$ soddisfi alle condizioni che si sono poste sopra per la $F(\theta)$ e per la $\frac{F'(\theta)}{\operatorname{sen}\theta}$.

In particolare poi si può osservare che quando si tratta di una funzione di una sola variabile $f(\theta)$, o della solita funzione $f(x)$ data fra -1 e 1, tralasciando il fattore $\frac{1}{4\pi}$, la serie (14) si riduce all'altra:

$$\sum_0^{\infty}\frac{(2n+1)^2}{2}X_n\int_{-1}^{1}f(x)X_n\,dx;$$

e quindi si può dire che se $f(x)$ è una funzione di x che fra -1 e 1 (questi limiti inclusi) ammette sempre una derivata finita e determinata $f'(x)$ che soddisfa alle condizioni poste per la $f(x)$ del § 5, e lo stesso accade anche per la funzione di ξ corrispondente

$$F(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{x'\xi-\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}^{x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x'^2-\xi^2-x^2+2xx'\xi}}, \tag{16}$$

per tutti i valori di ξ fra -1 e 1 (i limiti inclusi) (*), la somma della stessa serie per $x=1$ sarà:

$$f(-1)+\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\frac{f'(x)\,dx}{\sqrt{1-x}};$$

per $x=-1$ sarà:

$$f(1)-\sqrt{2}\int_{-1}^{1}\frac{f'(x)\,dx}{\sqrt{1+x}};$$

e pel punto x' compreso fra -1 e 1 e diverso da questi limiti la somma

(*) Per quanto si disse al § 7, l'esistenza della derivata di $F(\xi)$ è conseguenza di quella della derivata di $f(x)$, e quindi rispetto a $F'(\xi)$ basta richiedere che essa soddisfi alle condizioni poste per $f(x)$ nel § 5.

della stessa serie sarà invece:

$$f(-x') + \sqrt{2}\int_{-1}^{1} \frac{F'(\xi)}{\sqrt{1-\xi}}\, d\xi,$$

essendo $F(\xi)$ la funzione data dalla (16).

E osserviamo inoltre che considerando la serie:

$$\sum_0^\infty \frac{(2n+1)^3}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} f(\theta,\ \phi) P_n \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi,$$

e seguendo il processo precedente, si troverebbe che pel punto $(\theta',\ \phi')$ essa ha per somma $\lim_{\gamma=0} \left\{ F(\gamma) - 8\frac{F'(\gamma)}{\operatorname{sen}\gamma} \right\}$ tutte le volte che le funzioni $F(\gamma)$, $\frac{F'(\gamma)}{\operatorname{sen}\gamma}$ e $\frac{1}{\operatorname{sen}\gamma}\left(\frac{F'(\gamma)}{\operatorname{sen}\gamma}\right)'$ soddisfano alle condizioni che sopra si richiedevano per le sole due funzioni $F(\gamma)$ e $\frac{F'(\gamma)}{\operatorname{sen}\gamma}$.

E in particolare la serie:

$$\sum_0^\infty \frac{(2n+1)^3}{2} X_n \int_{-1}^{1} f(x) \acute{X}_n\, dx$$

per $x = x'$ ha per somma $f(x') + 8 \lim_{\xi=0} F'(\xi)$ tutte le volte che fra -1 e 1 le funzioni $f(x)$ e $F(\xi)$ sono finite e continue insieme alle loro derivate prime, e le loro derivate seconde soddisfano alle condizioni I.ª o II.ª del § 5.

11. Infine faremo osservare che dai ragionamenti del paragrafo precedente risulta anche che se $F(\theta)$ è una funzione che fra 0 e π è atta alla integrazione, e che se diviene infinita in alcuni punti nello stesso intervallo resta atta alla integrazione anche riducendola ai suoi valori assoluti e anche moltiplicandola per $\log\theta$, la somma della serie:

$$\sum_0^\infty \int_0^\pi F(\theta) P_n(\cos\theta) \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

sarà $\int_0^\pi F(\theta) \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$; e quindi la somma della serie:

$$\sum_0^\infty \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta,\ \phi) P_n \operatorname{sen}\theta\, d\theta\, d\phi$$

pei punti $\theta'=0$ e $\theta'=\pi$ sarà respettivamente:

$$\int_0^\pi F(\theta)\cos\frac{\theta}{2}d\theta, \quad \text{e} \quad \int_0^\pi F(\theta)\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}d\theta,$$

e pel punto (θ', ϕ') sarà $\int_0^\pi F(\gamma)\cos\frac{\gamma}{2}d\gamma$, ove $F(\theta)$ è la solita funzione

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta, \phi)d\phi,$$

e $F(\gamma)$ è la funzione dei §§ 2 e 3, e sì $F(\theta)$ che $F(\gamma)$ fra 0 e π devono soddisfare alle condizioni indicate sopra per la sola $F(\theta)$.

E così in particolare se la funzione $f(x)$ e la sua corrispondente $F(\xi)$ restano atte alla integrazione definita fra -1 e 1, anche riducendole ai loro valori assoluti, e anche moltiplicandole respettivamente per $\log(1\pm x)$ e $\log(1\pm\xi)$, la somma della serie:

$$\sum_0^\infty X_n\int_{-1}^1 f(x)X_n dx \tag{17}$$

per $x=1$ sarà:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x}}dx,$$

per $x=-1$ sarà:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1+x}}dx;$$

e per $x=x'$, quando x' è compreso fra -1 e 1 e diverso da questi limiti, la somma delle stessa serie sarà:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^1 \frac{F(\xi)}{\sqrt{1-\xi}}d\xi,$$

essendo ancora $F(\xi)$ la funzione di ξ data dalla (16).

12. Si osservi poi che, quando $f(x)$ è una funzione finita di x che fra -1 e 1 soddisfa alle condizioni dei §§ 5 o 6, per modo che sia sviluppabile secondo la serie (11) per $x=1$ o $x=-1$, i coefficienti della serie (17) col crescere indefinitamente di n divengono infinitesimi almeno del prim'ordine, e quindi, poichè X_n fra $1+\varepsilon$ e $1-\varepsilon$ col crescere indefinitamente di n di-

viene infinitesimo di ordine $\frac{1}{2}$, alla stessa serie può applicarsi l'integrazione definita fra $-1+\varepsilon$ e $1-\varepsilon$, qualunque sia la piccolezza di ε, anche dopo di avere moltiplicato tutto per X_m; e siccome dopo questa integrazione i termini della stessa serie divengono infinitesimi almeno del second'ordine, si vede subito che ad essa può applicarsi l'integrazione definita anche fra -1 e 1, e quindi chiamando $S(x)$ la sua somma si avrà la formola seguente:

$$\int_{-1}^{1} f(x) X_n dx = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} S(x) X_n dx,$$

la quale da luogo evidentemente all'altra:

$$\int_{-1}^{1} f(x) X_n dx = \frac{2n+1}{2\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} X_n(x') dx' \int_{-1}^{1} \frac{F(\xi)}{\sqrt{1-\xi}} d\xi,$$

ovvero:

$$\int_{-1}^{1} f(x) X_n dx = \frac{2n+1}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} X_n(x') dx' \int_{-1}^{1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi}} \int_{x'\xi-\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}^{x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x'^2-\xi^2-x^2+2xx'\xi}},$$

che trasforma un integrale triplo in un integrale semplice, e viceversa.

In particolare poi per $X_n = X_0 = 1$ si ha di qui:

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} dx' \int_{-1}^{1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi}} \int_{x'\xi-\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}}^{x'\xi+\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x'^2-\xi^2-x^2+2xx'\xi}}.$$

o anche:

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \int_{-1}^{1} dx' \int_{-1}^{1} \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi}} \int_{-1}^{1} f[x'\xi + y\sqrt{(1-x'^2)(1-\xi^2)}]\, \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Pisa, aprile 1873.

Sulla unicità degli sviluppi delle funzioni di una variabile in serie di funzioni X_n.

APPENDICE ALLA MEMORIA PRECEDENTE

(*del prof.* ULISSE DINI, *a Pisa.*)

A rendere più completi gli studî che ho fatto nella Memoria che precede intorno agli sviluppi delle funzioni di una o di due variabili in serie di funzioni X_n e Y_n, occorrerebbe anche fare vedere che tali sviluppi non possono farsi che in un sol modo. Fino a questi ultimi tempi si era creduto di potere dimostrare questa proprietà per mezzo della integrazione per serie, ma la dimostrazione che se ne dava, quando non si facesse alcuna limitazione intorno alla natura della serie, era tutt'altro che rigorosa. Io ho cercato perciò di dimostrare rigorosamente questa proprietà, almeno pel caso delle funzioni di una sola variabile, e ora sono giunto a dimostrare anche più in generale che « se $f(x)$ è una funzione di x che fra -1 e 1 è sempre « determinata e finita o cessa di essere tale soltanto in un numero finito « di punti o in un gruppo infinito di punti di prima specie (*), non possono « esistere due serie distinte di funzioni X_n, $\sum a_n X_n$, $\sum a'_n X_n$ che rappresen- « tino la stessa funzione $f(x)$ per tutti i valori di x fra -1 e 1, o anche « soltanto pei valori di x che restano nello stesso intervallo da -1 a 1

(*) Per la definizione e per le proprietà dei gruppi di punti può vedersi la Memoria di CANTOR: *Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonom. Reihen* (Mathem. Annalen herausgeg. von CLEBSCH und NEUMANN, V. Band, p. 128), notando però che io chiamo quì gruppi di punti i Punktmenge di CANTOR, e gruppi di punti di prima specie quelli che hanno un numero finito ν di gruppi derivati (abgeleitete Punktmengen), e che CANTOR chiama Punktmenge von der ν^{ten} Art.

« quando si tolgono quelli corrispondenti a un numero finito di punti o a « un gruppo infinito di punti di prima specie »; e la mia dimostrazione è la seguente.

Incominciamo dall'osservare che, se esistessero le due serie qui dette $\sum a_n X_n$, $\sum a'_n X_n$, dovrebbe esistere una terza serie $\sum A_n X_n$ che per tutti i valori di x fra -1 e 1, eccettuati tutt'al più quelli corrispondenti a un numero finito di punti o a un gruppo infinito di punti di prima specie, avessero sempre per somma zero, e i cui coefficienti A_n non fossero tutti uguali a zero; e quindi pel teorema che vogliamo dimostrare basterà fare vedere che una tal serie non può esistere.

Ammettiamo perciò che una tal serie possa esistere, e sia la serie $\sum A_n X_n$; si avrà $\sum A_n X_n = 0$ per tutti i valori di x da -1 a 1, tranne tutt'al più per quelli corrispondenti a un numero finito di punti o a un gruppo infinito di punti di prima specie; quindi, escludendo questi punti singolari (se esistono) con un numero finito d'intervalli piccoli quanto si vuole i_1, i_2, i_3,..., negli intervalli restanti λ_1, λ_2,... si avrà sempre $\sum A_n X_n = 0$; e perciò in questi intervalli le quantità $A_n X_n$ col crescere indefinito di n tenderanno sempre a zero.

Ora, ponendo $x = \cos\theta$, e indicando con ε un numero differente da zero e positivo, piccolo quanto si vuole, per tutti i valori di θ fra ε e $\pi - \varepsilon$ si avrà la formola seguente (vedi Bonnet: *Sur les développements des fonctions en séries ordonnées suivant les fonctions X_n et Y_n;* Journal de Liouville, ser. I, tom. XVII, pag. 270):

$$X_n = \frac{2\cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{2n\pi \operatorname{sen}\theta}}\left(1 + \frac{(-1)^n}{4n}\right) + \frac{\cot\theta \operatorname{sen}\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{4n\sqrt{2n\pi\operatorname{sen}\theta}} + \frac{p_n}{n^2\sqrt{n}}, \tag{1}$$

ove $\rho = \frac{2n+1}{2}$, e p_n col crescere indefinito di n, restando però fisso ε, si mantiene sempre numericamente inferiore ad un numero finito ed è una funzione continua di θ; quindi sarà:

$$A_n X_n = \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi\operatorname{sen}\theta}}\left\{2\cos\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)\left(1 + \frac{(-1)^n}{4n}\right) + \frac{\cot\theta\operatorname{sen}\left(\rho\theta - \frac{\pi}{4}\right)}{4n} + \frac{p_n\sqrt{2\pi\operatorname{sen}\theta}}{n^2}\right\};$$

e ora, siccome per quanto abbiamo detto sopra, in uno o più intervalli finiti fra ε e $\pi - \varepsilon$ le quantità $A_n X_n$ tendono sempre a zero col crescere indefinitamente di n, ripetendo i ragionamenti fatti da Cantor nella sua Memoria:

Ueber einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz (Giornale di Borchardt, vol. 72, pag. 135 e seg.), coll'osservare anche che gli ultimi tre termini fra parentesi col crescere indefinito di n tendono a zero, si concluderà intanto che se i coefficienti A_n non tendono essi pure a zero col crescere indefinito di n (*), vi tenderanno però sempre le quantità $\frac{A_n}{\sqrt{n}}$.

Di quí risulta che la serie $\sum \frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta}{n^2\sqrt{n}}$ è convergente per tutti i valori di θ fra ε e $\pi-\varepsilon$; e quindi in tutti gli intervalli μ_1, μ_2,... fra ε e $\pi-\varepsilon$ che corrispondono agli antichi intervalli λ_1, λ_2,... nei quali non cadono punti singolari, si avrà sempre:

$$\sum \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left\{2\operatorname{sen}\theta\cos\left(\rho\theta-\frac{\pi}{4}\right)\left(1+\frac{(-1)^n}{4n}\right)+\frac{2\cos\theta\operatorname{sen}\left(\rho\theta-\frac{\pi}{4}\right)}{8n}\right\}+\sum\frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta}{n^2\sqrt{n}}=0,$$

o anche:

$$\sum \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left\{\left(1+\frac{(-1)^n}{4n}\right)\left[\operatorname{sen}\left((\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{sen}\left((\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\operatorname{sen}\left[(\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]+\operatorname{sen}\left[(\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{8n}\right\}+\sum\frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta}{n^2\sqrt{n}}=0,$$

e perciò in tutti gli intervalli μ_1, μ_2,... fra ε e $\pi-\varepsilon$ la prima serie del primo membro sarà convergente, e avrà per somma una funzione $\phi(\theta)$ di θ.

Ora, poichè le quantità $\frac{A_n}{\sqrt{n}}$ tendono a zero col crescere indefinito di n, la stessa serie si può evidentemente ridurre ad una serie trigonometrica:

$$\sum \alpha_n \operatorname{sen}\left[(\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]$$

nella quale i coefficienti α_n tendono a zero col crescere indefinito di n; quindi, per un teorema dato da Riemann nella sua Memoria: *Ueber die Darstellung einer Function durch eine trigonometrische Reihe* (Göttingen, 1867) la serie:

(*) Questo accade sempre tutte le volte che uno almeno dei punti 1 e -1 non è un punto singolare, perchè allora una almeno delle due serie $\sum A_n$, $\sum(-1)^n A_n$ è convergente.

$$-\sum\frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left\{\left(1+\frac{(-1)^n}{4n}\right)\left[\frac{\operatorname{sen}\left[(\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(\rho+1)^2}-\frac{\operatorname{sen}\left[(\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(\rho-1)^2}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8n}\left[\frac{\operatorname{sen}\left[(\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(\rho+1)^2}+\frac{\operatorname{sen}\left[(\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(\rho-1)^2}\right]\right\}$$

rappresenterà una funzione $\phi_1(\theta)$ di θ finita e continua, che in ogni punto θ negli intervalli μ_1, μ_2,... fra ε e $\pi-\varepsilon$ (*) soddisfarà alla condizione:

$$\lim_{\alpha=0}\frac{\varphi_1(\theta+\alpha)-2\varphi_1(\theta)+\varphi_1(\theta-\alpha)}{\alpha^2}=\phi(\theta)=-\sum\frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta}{n^2\sqrt{\pi}},$$

e per tutti i punti θ fra ε e $\pi-\varepsilon$ senza distinzione soddisfarà all'altra:

$$\lim_{\alpha=0}\frac{\varphi_1(\theta+\alpha)-2\varphi_1(\theta)+\varphi_1(\theta-\alpha)}{\alpha}=0.$$

D'altra parte, siccome la serie $\sum\frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta}{n^2\sqrt{n}}$ è anche convergente in ugual grado fra ε e $\pi-\varepsilon$, se si pone $\psi(\theta)=\sum\frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta}{n^2\sqrt{n}}$, $\psi(\theta)$ sarà una funzione finita e continua di θ, e si avrà:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\psi(\theta)\,d\theta=\sum\frac{A_n}{n^2\sqrt{n}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}p_n\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta\,d\theta;$$

quindi fra ε e $\pi-\varepsilon$ la serie del secondo membro sarà una funzione di θ finita e continua $\psi_1(\theta)$ che soddisfarà alle due condizioni:

$$\lim_{\alpha=0}\frac{\psi_1(\theta+\alpha)-2\psi_1(\theta)+\psi_1(\theta-\alpha)}{\alpha^2}=\psi(\theta)=\sum\frac{A_n p_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta}{n^2\sqrt{n}},$$

$$\lim_{\alpha=0}\frac{\psi_1(\theta+\alpha)-2\psi_1(\theta)+\psi_1(\theta-\alpha)}{\alpha}=0;$$

(*) Qui parrebbe a prima vista che si dovessero escludere i punti ε e $\pi-\varepsilon$ e gli estremi degli intervalli μ_1, μ_2,... quando anche questi intervalli vengono presi in considerazione. Però, siccome il numero ε può sempre impiccolirsi e gli intervalli i_1, i_2, i_3,... che escludono i punti singolari possono supporsi scelti in modo che possano prendersi anche intervalli più piccoli di quelli che qui abbiamo preso, s'intende subito che la indicata esclusione sarebbe per lo meno inutile.

e conseguentemente la funzione $\phi_1(\theta)+\psi_1(\theta)$ sarà una funzione $F(\theta)$ che fra ε e $\pi-\varepsilon$ è sempre finita e continua e soddisfa alla condizione:

$$\lim\frac{F(\theta+\alpha)-2F(\theta)+F(\theta-\alpha)}{\alpha}=0,$$

e negli intervalli μ_1, μ_2,... fra ε e $\pi-\varepsilon$ soddisfa altresì all'altra:

$$\lim\frac{F(\theta+\alpha)-2F(\theta)+F(\theta-\alpha)}{\alpha^2}=0.$$

Questo, per una osservazione fatta da Cantor nella Memoria che ho già citata in principio, porta subito a dire che la funzione $F(\theta)$ è una funzione di primo grado $c\theta+c'$ in tutto l'intervallo fra ε e $\pi-\varepsilon$; quindi nello stesso intervallo si avrà:

$$-\sum\frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\left\{\left(1+\frac{(-1)^n}{4n}\right)\left[\frac{\operatorname{sen}\left[(\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(\rho+1)^2}-\frac{\operatorname{sen}\left[(\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(\rho-1)^2}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{8n}\left[\frac{\operatorname{sen}\left[(\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(\rho+1)^2}+\frac{\operatorname{sen}\left[(\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(\rho-1)^2}\right]\right\}+\sum\frac{A_n}{n^2\sqrt{n}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}p_n\operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta\,d\theta=c\theta+c',$$

e alle serie del primo membro sarà anche applicabile una o più volte la integrazione definita in ogni intervallo fra ε e $\pi-\varepsilon$, giacchè esse sono convergenti in ugual grado.

Ora, si ha evidentemente:

$$\frac{\operatorname{sen}\left[(\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(\rho+1)^2}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\operatorname{sen}\left[(\rho+1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]d\theta+\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{\pi}{2}}{(\rho+1)^2}+$$
$$+\frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{\rho+1}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\frac{\operatorname{sen}\left[(\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]}{(\rho-1)^2}=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}d\theta\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\operatorname{sen}\left[(\rho-1)\theta-\frac{\pi}{4}\right]d\theta-\frac{\operatorname{sen}(n+1)\frac{\pi}{2}}{(\rho-1)^2}-$$
$$-\frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{\rho-1}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right);$$

quindi sostituendo nella formola precedente, e avendo riguardo alla formola (1) e alla circostanza che quelle serie, che oltre ad avere il $\sqrt{n}$ al denominatore hanno anche un altro divisore che è almeno di second'ordine, come $(\rho\pm 1)^2$, $n(\rho\pm 1),..$, sono tutte convergenti, mentre invece si è incerti sulla convergenza della serie $\sum \frac{A_n}{\sqrt{2n\pi}}\cos(n+1)\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\rho+1}+\frac{1}{\rho-1}\right)$, si avrà:

$$\sum A_n\left\{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta\, d\theta - \frac{\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2n\pi}}\left(\frac{1}{\rho+1}+\frac{1}{\rho-1}\right)\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = c_1\theta + c'_1;$$

e siccome $\frac{1}{\rho+1}+\frac{1}{\rho-1}=\frac{2}{n+1}+\frac{c_n}{n^2}$ ove c_n è sempre inferiore a un numero finito, e il secondo membro di questa eguaglianza deve annullarsi per $\theta=\frac{\pi}{2}$ come si annulla il primo, si potrà anche scrivere:

$$\sum A_n\left\{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta\, d\theta - \frac{2\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{(n+1)\sqrt{2n\pi}}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = c_2\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right), \qquad (2)$$

ove c_2 è una nuova costante; e alla serie del primo membro potrà ancora applicarsi una o più volte l'integrazione definita termine a termine in ogni intervallo compreso fra ε e $\pi-\varepsilon$.

Si osservi ora che quando θ è compreso fra ε e $\pi-\varepsilon$ con una doppia integrazione per parti si trova:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta\, d\theta - \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\right)'\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta\, d\theta +$$
$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\right)'' d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta\, d\theta,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \sqrt{\operatorname{sen}\theta}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta\, d\theta +$$
$$+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\right)'' d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta\, d\theta;$$

e quindi sostituendo si avrà:

$$\sum A_n \Big\{ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen}\theta d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen}\theta d\theta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen}\theta d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\right)'' d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta d\theta -$$

$$- \frac{2\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{(n+1)\sqrt{2n\pi}} \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\operatorname{sen}\theta} \Big\} = c_2 \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\operatorname{sen}\theta};$$

e poichè l'essere applicabile una o più volte l'integrazione definita termine a termine alla serie del primo membro della formola (2), in ogni intervallo fra ε e $\pi - \varepsilon$, porta che si abbia:

$$\sum A_n \Big\{ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen}\theta d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\right)'' d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen}^{\frac{3}{2}}\theta d\theta -$$

$$- \frac{2\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{(n+1)\sqrt{2n\pi}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen}\theta d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\right)'' \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) d\theta \Big\} =$$

$$= c_2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen}\theta d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\right)'' \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) d\theta;$$

e d'altra parte si ha anche:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\right)'' \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) d\theta = \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\right)' \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}} + 1,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen}\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sen}\theta}}\right)'' \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) d\theta = -\sqrt{\operatorname{sen}\theta}\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) - \cos\theta,$$

sostituendo si troverà:

$$\sum A_n \Big\{ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \operatorname{sen}\theta d\theta \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} X_n \operatorname{sen}\theta d\theta + \frac{2\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{(n+1)\sqrt{2n\pi}} \cos\theta \Big\} = - c_2 \cos\theta;$$

o anche, riponendo $\cos\theta = x$:

$$\sum A_n \left\{ \int_0^x dx \int_0^x X_n dx + \frac{2\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{(n+1)\sqrt{2n\pi}} x \right\} = -c_2 x;$$

e questa formola varrà per tutti i valori di x fra -1 e 1, esclusi soltanto i valori 1 e -1.

Ora, per $n > 0$ si ha:

$$\int_0^x X_n dx = \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2n+1} - \frac{X^0_{n+1} - X^0_{n-1}}{2n+1},$$

o anche:

$$\int_0^x X_n dx = \frac{X_{n+1} - X_{n-1}}{2n+1} + \frac{X^0_{n-1}}{n+1},$$

ove X^0_{n-1} e X^0_{n+1} sono i valore di X_{n-1} e X_{n+1} per $x=0$, giacchè per $x=0$ da una formula nota si ha:

$$(n+1)X^0_{n+1} + nX^0_{n-1} = 0;$$

quindi per $n > 1$ si avrà:

$$\int_0^x dx \int_0^x X_n dx = \frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} +$$
$$+ \frac{X^0_n}{(2n+1)(n+2)} - \frac{X^0_{n-2}}{(2n+1)n} + \frac{X^0_{n-1}}{n+1} x,$$

e per $n=1$ sarà invece:

$$\int_0^x dx \int_0^x X_1 dx = \frac{X_3 - X_1}{3 \cdot 5} + \frac{x}{6};$$

e ora, poichè dalla formola (1) si ha facilmente:

$$\frac{X^0_{n-1}}{n+1} = -\frac{2\cos(n+1)\frac{\pi}{2}}{(n+1)\sqrt{2n\pi}} + \frac{b_n}{n^2\sqrt{n}},$$

ove b_n col crescere indefinito di n resta sempre inferiore a un numero finito, e inoltre le due serie $\sum \frac{A_n b_n x}{n^2\sqrt{n}}$, $\sum A_n \left(\frac{X^0_n}{(2n+1)(n+2)} - \frac{X_{n-2}}{(2n+1)n} \right)$ sono convergenti, sostituendo nella formola (3) si troverà subito la seguente:

$$A_0 \frac{x^2}{2} + \frac{A_1(X_3 - X_1)}{3 \cdot 5} + \sum_2^\infty A_n \left\{ \frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} \right\} = c_3 x + c_4.$$

ove c_3 e c_4 sono due nuove costanti; e questa formola, sebbene dimostrata pei soli valori di x fra -1 e 1 esclusi i valori ± 1, varrà anche a questi limiti, giacchè la serie del primo membro e tutti gli altri termini sono funzioni continue di x.

Sussistendo ora questa formola anche per $x = \pm 1$, si avrà $\frac{A_0}{2} = c_3 + c_4$, e $\frac{A_0}{2} = -c_3 + c_4$; quindi sarà $c_3 = 0$, $c_4 = \frac{A_0}{2}$, e perciò si avrà:

$$A_0\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{A_1(X_3 - X_1)}{3 \cdot 5} + \sum_2^\infty A_n \left\{ \frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} \right\} = 0,$$

ovvero:

$$\frac{A_0(X_2 - X_0)}{3} + \frac{A_1(X_3 - X_1)}{3 \cdot 5} + \sum_2^\infty A_n \left\{ \frac{X_{n+2} - X_n}{(2n+1)(2n+3)} - \frac{X_n - X_{n-2}}{(2n-1)(2n+1)} \right\} = 0,$$

giacchè $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{X_2 - X_0}{3}$.

Osservando ora che, siccome la serie del primo membro è convergente in ugual grado nell'intervallo da -1 a 1, si può applicarle l'integrazione definita termine a termine da -1 a 1 dopo averla moltiplicata tutta per X_m; si troverà subito che i coefficienti di ogni funzione X_n nel primo membro della formola precedente devono essere tutti nulli, e si avranno quindi i due sistemi di equazioni seguenti:

$$-\frac{A_0}{3} + \frac{A_2}{3 \cdot 5} = 0,$$

$$\frac{A_0}{1 \cdot 3} - \frac{A_2}{3 \cdot 5} - \frac{A_2}{5 \cdot 7} + \frac{A_4}{7 \cdot 9} = 0,$$

$$\frac{A_2}{5 \cdot 7} - \frac{A_4}{7 \cdot 9} - \frac{A_4}{9 \cdot 11} + \frac{A_6}{11 \cdot 13} = 0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{A_{2n-4}}{(4n-7)(4n-5)} - \frac{A_{2n-2}}{(4n-5)(4n-3)} - \frac{A_{2n-2}}{(4n-3)(4n-1)} + \frac{A_{2n}}{(4n-1)(4n+1)} = 0,$$

$$\frac{A_{2n-2}}{(4n-3)(4n-1)} - \frac{A_{2n}}{(4n-1)(4n+1)} - \frac{A_{2n}}{(4n+1)(4n+3)} + \frac{A_{2n+2}}{(4n+3)(4n+5)} = 0,$$

$$-\frac{A_1}{3 \cdot 5} + \frac{A_3}{5 \cdot 7} = 0,$$

$$\frac{A_1}{3\cdot 5}-\frac{A_3}{5\cdot 7}-\frac{A_3}{7\cdot 9}+\frac{A_5}{9\cdot 11}=0,$$

$$\frac{A_3}{7\cdot 9}-\frac{A_5}{9\cdot 11}-\frac{A_5}{11\cdot 13}+\frac{A_7}{13\cdot 15}=0,$$

. . . .

$$\frac{A_{2n-5}}{(4n-9)(4n-7)}-\frac{A_{2n-3}}{(4n-7)(4n-5)}-\frac{A_{2n-3}}{(4n-5)(4n-3)}+\frac{A_{2n-1}}{(4n-3)(4n-1)}=0,$$

$$\frac{A_{2n-3}}{(4n-5)(4n-3)}-\frac{A_{2n-1}}{(4n-3)(4n-1)}-\frac{A_{2n-1}}{(4n+1)(4n+3)}+\frac{A_{2n+1}}{(4n+3)(4n+5)}=0,$$

le quali sommate respettivamente conducono alle altre:

$$\frac{A_{2n+2}}{4n+5}=\frac{A_{2n}}{4n+1},\quad \frac{A_{2n+1}}{4n+3}=\frac{A_{2n-1}}{4n-1},$$

che valgono per tutti i valori di n, e quindi ci danno:

$$A_{2n}=(4n+1)A_0,\quad A_{2n+1}=(4n+3)\frac{A_1}{3};$$

e ora, poichè di qui risulta che, se A_0 e A_1 non fossero zero, le quantità A_n non sarebbero tali che i rapporti $\frac{A_n}{\sqrt{n}}$ tendano a zero col crescere indefinito di n, perchè esse diverrebbero infinite di prim'ordine insieme con n, si conclude che A_0 e A_1 e così tutte le A_n devono essere identicamente nulle, e così il teorema enunciato in principio resta completamente dimostrato.

Pisa, 7 dicembre 1873.

Determinazione della pressione nell'interno d'un fluido incompressibile soggetto ad attrazioni interne ed esterne

(*del prof.* R. Lipschitz, *a Bonn*).

Il valore d'una funzione, monodroma, finita e continua insieme colle sue tre derivate prime (rispetto a tre direzioni ortogonali) entro uno spazio terminato, e soddisfacente in questo spazio all'equazione di Laplace, può essere, in ogni punto dello spazio medesimo, espresso mediante il teorema di Green con un integrale esteso sulla superficie limite, qualora per ogni punto di questa superficie sia dato il valore della funzione e quello della derivata presa rispetto alla normale. In questa Nota mostreremo che si può avere un'analoga espressione per la pressione che ha luogo in un fluido, in una estesa categoria di problemi idrodinamici.

Siano x, y, z le coordinate rettangolari d'un elemento di fluido incompressibile in istato di moto; u, v, w le componenti della sua velocità secondo i tre assi; P la pressione; ρ la densità uniforme del fluido; t il tempo. Supporremo che le parti del fluido si attraggano scambievolmente secondo la legge di Newton e siano attratte secondo la stessa legge da masse esterne arbitrarie. Sia V il potenziale della massa fluida in moto rispetto al punto (x, y, z) interno ad essa, W il potenziale delle masse esterne rispetto al medesimo punto, ε la forza attrattiva all'unità di distanza. Supponiamo inoltre che si debba tener conto eziandio delle forze dovute all'attrito della massa fluida con sè medesima. In tali ipotesi il moto del fluido è subordinato alle equazioni seguenti, nelle quali consentono tutti gli Autori che hanno studiato i principii dell'idrodinamica con riguardo all'attrito, come si può vedere dal ragguaglio che ne ha dato il sig. Oscar Emilio Meyer nel t. 59, p. 229 e nel t. 75, p. 336 del Giornale di Borchardt:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-k\Delta u=\varepsilon\frac{\partial V}{\partial x}+\varepsilon\frac{\partial W}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}-k\Delta v=\varepsilon\frac{\partial V}{\partial y}+\varepsilon\frac{\partial W}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y},\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}-k\Delta w=\varepsilon\frac{\partial V}{\partial z}+\varepsilon\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z};
\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0. \qquad (2)$$

In queste equazioni k è una costante dipendente dalle forze d'attrito, Δf simboleggia la somma delle tre derivate seconde $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$. Ponendo $k=0$, il precedente sistema d'equazioni a derivate parziali si converte in quello delle equazioni idrodinamiche euleriane.

Dalle equazioni (1) si deduce una nuova relazione, derivandole rispettivamente per x, y, z e facendone la somma, sotto la condizione che la natura delle funzioni u, v, w, P sia tale da permettere queste nuove derivazioni. Rappresentando con Θ_1 l'espressione $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$, che dev'esser nulla in virtù dell'equazione (2), si ottiene in tal guisa l'equazione:

$$\frac{\partial \Theta_1}{\partial t}+u\frac{\partial \Theta_1}{\partial x}+v\frac{\partial \Theta_1}{\partial y}+w\frac{\partial \Theta_1}{\partial z}-k\Delta\Theta_1+\psi=\varepsilon\Delta V+\varepsilon\Delta W-\frac{1}{\rho}\Delta P, \qquad (3)$$

dove ψ rappresenta la seguente funzione quadratica ed omogenea delle derivate prime delle componenti della velocità:

$$\psi=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+2\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}. \qquad (4)$$

In virtù di noti teoremi sull'attrazione, l'espressione ΔV, formata col potenziale V della massa fluida nel punto interno (x, y, z), ha il valore $-4\pi\rho$; mentre l'espressione ΔW, formata col potenziale W delle masse esterne, ha il valore 0. In virtù di questi valori, e per essere nulla, per l'equazione (2), l'espressione Θ_1, l'equazione (3) si riduce alla

$$\psi=-4\pi\varepsilon\rho-\frac{1}{\rho}\Delta P, \qquad (5)$$

che non contiene punto le derivate rispetto al tempo delle componenti della velocità, nè la costante k, nè il potenziale W, e che rimarrebbe quindi inalterata se si facesse astrazione dalle forze d'attrito, e da quelle emananti dalle masse esterne. È questa l'equazione di cui dobbiamo valerci per giungere all'annunziata proprietà della pressione P.

Nel moto d'un ellissoide fluido omogeneo, soggetto alle attrazioni mutue delle proprie particelle, moto che è stato studiato da DIRICHLET nella Memoria postuma ricostituita dal sig. DEDEKIND sotto il titolo di *Ricerche sopra un problema d'idrodinamica* (*), la determinazione della pressione che ha luogo nell'interno del fluido dipende da quella d'una funzione del solo tempo, funzione denotata ivi per σ. Nel § 4 di tale Memoria questa quantità σ è definita primieramente da un'equazione nella quale entra l'espressione $\frac{1}{2}\sum \frac{dl}{dt}\frac{d\lambda}{dt}$, e quest'espressione viene poscia trasformata in un'altra, che equivale alla metà della funzione ψ definita dalla precedente equazione (4). Sostituendo questo valore nell'equazione data da DIRICHLET per la determinazione della quantità σ, si ottiene appunto l'equazione che nasce dalla nostra equazione (5), quando in questa s'introducano le speciali ipotesi del problema di DIRICHLET. Per tal guisa la determinazione della quantità σ, quale risulta dal lavoro di DIRICHLET, si fonda sopra una proprietà del moto dei fluidi che sussiste in ipotesi molto più generali.

Si ottiene una rappresentazione geometrica della funzione ψ considerando la variazione che interviene in un elemento fluido durante un elemento di tempo dt, e supponendo che tale variazione perduri anche in seguito, per un tempo qualunque. Il parallelepipedo elementare avente un vertice nel punto (x, y, z) e gli spigoli (concorrenti in questo) paralleli agli assi coordinati e di lunghezza rispettivamente eguale a dx, dy, dz, talchè al vertice (x, y, z) si oppone il vertice $(x+dx, y+dy, z+dz)$, si trasforma, durante il tempuscolo dt, in un nuovo parallelepipedo, nel quale il primo vertice passa nella posizione di coordinate

$$x+udt, \quad y+vdt, \quad z+wdt,$$

ed il secondo in quella di coordinate

$$x+dx+udt+\frac{\partial u}{\partial x}dxdt+\frac{\partial u}{\partial y}dydt+\frac{\partial u}{\partial z}dzdt,$$

$$y+dy+vdt+\frac{\partial v}{\partial x}dxdt+\frac{\partial v}{\partial y}dydt+\frac{\partial v}{\partial z}dzdt,$$

$$z+dz+wdt+\frac{\partial w}{\partial x}dxdt+\frac{\partial w}{\partial y}dydt+\frac{\partial w}{\partial z}dzdt,$$

(*) *Abhandl. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen*, t. 8; e Giornale di BORCHARDT, t. 58, p. 181.

mentre gli altri sei vertici occupano posizioni, le cui coordinate risultano dalle espressioni testè scritte, ponendo eguali a zero due od una delle tre quantità dx, dy, dz. L'ipotesi dianzi menzionata consiste in ciò, che nelle precedenti espressioni delle coordinate dei vertici del nuovo parallelepipedo, si attribuisce alla quantità dt un valore finito qualunque. Il volume del parallelepipedo primitivo ha il valore $dxdydz$; quello del nuovo è eguale al prodotto di $dxdydz$ per il determinante

$$\begin{vmatrix} 1+\frac{\partial u}{\partial x}dt & \frac{\partial u}{\partial y}dt & \frac{\partial u}{\partial z}dt \\ \frac{\partial v}{\partial x}dt & 1+\frac{\partial v}{\partial y}dt & \frac{\partial v}{\partial z}dt \\ \frac{\partial w}{\partial x}dt & \frac{\partial w}{\partial y}dt & 1+\frac{\partial w}{\partial z}dt \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Ora ponendo

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=\Theta_1, \\ &\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}=\Theta_2, \\ &\Sigma\left(\pm\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\Theta_3, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

questo determinante equivale a

$$1+\Theta_1 dt+\Theta_2 dt^2+\Theta_3 dt^3. \tag{8}$$

La funzione precedentemente notata con ψ è legata colle funzioni Θ_1, Θ_2 dalla relazione

$$\psi=\Theta_1^2-2\Theta_2, \tag{9}$$

e poichè la funzione Θ_1 è nulla in virtù dell'equazione (2) nel problema idrodinamico, si ha, in questo caso:

$$\psi=-2\Theta_2. \tag{10}$$

Ora l'espressione (8) rappresenta il rapporto fra il volume del parallelepipedo variato e quello del primitivo, ordinato secondo le potenze di dt. La derivata prima di questo rapporto, presa rispetto a dt, cioè la quantità Θ_1, è nulla in virtù della ricordata equazione (2). La derivata seconda dello stesso rapporto, presa rispetto a dt, è la quantità

$$2\Theta_2, \tag{11}$$

essa rappresenta dunque, in virtù dell'equazione (10), il valore della funzione ψ presa col segno contrario.

Se si dividono per dt le nove quantità costituenti lo schema del determinante (6), e si scrive $-S$ in luogo del valore reciproco di dt, lo schema anzidetto si trasforma in quello considerato dal sig. Bertrand nella Nota intitolata: *Mécanique analytique. Théorème relatif au mouvement le plus général d'un fluide* (Comptes-rendus de l'Ac. des sc. de Paris, t. 66, p. 1227). Il determinante formato col detto schema (che dal sig. Bertrand è stato esaminato specialmente nel caso in cui si annulli) prende, colle segnature preindicate, la forma

$$-S^3+\Theta_1 S^2-\Theta_2 S+\Theta_3; \tag{12}$$

e designando con S_1, S_2, S_3 i tre valori di S che lo rendono nullo, si ottiene dall'equazione (9) il seguente valore della funzione ψ:

$$\psi=\frac{1}{S_1^2}+\frac{1}{S_2^2}+\frac{1}{S_3^2}. \tag{13}$$

Nel citato passo della Memoria di Dirichlet, come pure nel paragrafo successivo, si osserva che la funzione ψ dev'essere una quantità positiva, qualora u, v, w siano le derivate parziali d'una medesima funzione. Questo fatto emerge manifestamente dall'equazione (13), qualora si rammenti che in virtù delle necessarie condizioni d'integrabilità

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial y},\quad \frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial z},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$$

il determinante (6) riesce simmetrico, e che quindi, per un noto teorema, le radici S_1, S_2, S_3 sono necessariamente reali.

Per dedurre dall'equazione (5) un'espressione della pressione P, si scrivano in essa x', y', z' in luogo delle x, y, z e si denotino con un accento i risultati di questa sostituzione nelle singole funzioni. Fatto ciò, si moltiplichi l'equazione pel valore inverso della distanza r del punto (x, y, z) dal punto (x', y', z') e per l'elemento di volume $dx'dy'dz'$, ritenuto che il punto (x, y, z) sia uno qualunque di quelli posti nell'interno del fluido; indi si integri in tutto lo spazio occupato dal fluido stesso. Ora l'integrale $\iiint\frac{\rho\,dx'\,dy'\,dz'}{r}$ esprime il potenziale V relativo al punto (x, y, z). Inoltre, per una trasformazione nota, si ha l'equazione

$$\iiint\left(\frac{\partial^2 P'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 P'}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2 P'}{\partial z'^2}\right)\frac{dx'\,dy'\,dz'}{r}=-4\pi P+\int\left(\frac{\partial P'}{\partial n'}\frac{1}{r}-P'\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n'}\right)ds', \tag{14}$$

nel cui primo membro l'integrale si estende a tutto lo spazio occupato dal fluido, mentre nel secondo membro esso si estende su tutta la superficie s' che limita questo spazio, ds' essendo un elemento di questa superficie ed n' la normale esterna a questo elemento. Con queste avvertenze si ottiene l'equazione cercata

$$\iiint \frac{\psi' dx' dy' dz'}{r} = -4\pi\varepsilon V + 4\pi\frac{P}{\rho} - \frac{1}{\rho}\int\left(\frac{\partial P'}{\partial n'}\frac{1}{r} - P'\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'}\right) ds', \qquad (15)$$

in virtù della quale resta determinato il valore della pressione P in un punto qualunque (x, y, z) della massa fluida, qualora si conoscano i valori delle componenti della velocità u, v, w e del potenziale V di tutta la massa fluida in ogni punto interno a questa massa, ed i valori della pressione e della sua derivata rispetto alla normale in ogni punto della superficie limite. In quest'espressione non compariscono affatto il potenziale W delle masse esterne agenti sul fluido, e la costante k dell'attrito. Quando la superficie che limita il fluido è totalmente libera, ed è quindi soggetta ad una pressione costante, che diremo Q, il fattore $P' = Q$ esce fuori dall'integrale $\int P' \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n'} ds'$, e l'integrale stesso, esteso su tutta la superficie chiusa s', prende per un teorema di Gauss (*) il valore -4π. Conseguentemente l'equazione (15) assume la forma più semplice

$$\iiint \frac{\psi' dx' dy' dz'}{r} = -4\pi\varepsilon V + \frac{4\pi}{\rho}(P - Q) - \frac{1}{\rho}\int \frac{\partial P'}{\partial n'}\frac{ds'}{r}. \qquad (16)$$

Bonn, 25 maggio 1874.

(*) *Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum, ellipticorum, homogeneorum.* Comm. Soc. R. scient. Gottingensis rec., vol. II.

Démonstration d'un théorème de Mr. Hesse.

(*Extrait d'une lettre de Mr.* J. N. Bischoff *à Mr. L. Cremona.*)

. . . .

Soit xyz un triangle conjugué par rapport à une conique K; ϖ le pole d'une droite g; et $(u_1u_1', u_2u_2', \ldots)$ l'involution des points conjugués sur g. Les points xyz et chaque paire uu' déterminent une conique c^2, et toutes les c^2 forment un faisceau, dont le quatrième point de base se conclut facilement de ce qu'il y a dans le faisceau trois couples de droites, c'est-à-dire $(yz, \varpi x)$, $(zx, \varpi y)$, $(xy, \varpi z)$. ϖ est donc le quatrième point cherché, et toutes les c^2 qui sont circonscrites au triangle fixe xyz et à un triangle conjugué variable, dont ϖ soit un sommet fixe, forment un faisceau ayant la base $xyz\varpi$.

Soient maintenant $abcd$, $ABCD$ deux tétraèdres conjugués par rapport à une surface quadrique f^2. La droite aA coupera les plans bcd, BCD en deux points m, M, et la droite g, commune aux plans bcd, BCD, contiendra une involution $(u_1u_1', u_2u_2', \ldots)$ de points conjugués par rapport à f^2. Les points m, M étant les poles de g par rapport aux sections coniques, suivant lesquelles les plans bcd, BCD coupent la surface f^2, on aura deux faisceaux de coniques avec les bases $bcdm$, $BCDM$, de manière que les coniques de chaque faisceau coupent g suivant l'involution $(u_1u_1', u_2u_2', \ldots)$. Deux coniques $bcdmuu'$, $BCDMuu'$, passant par une même paire de points conjugués, déterminent avec la droite aA un hyperboloïde, et l'on a ainsi un faisceau d'hyperboloïdes passant par $abcdABCD$ et ayant pour base la droite aA et la cubique gauche $bcdBCD$. Or les droites Ab, Ac, Ad fournissent trois autres faisceaux d'hyperboloïdes. Donc les sommets des deux tétraèdres conjugués $abcd$, $ABCD$ sont les points communs à trois surfaces du second degré, q. d. e.

. . . .

Munich, 29 avril 1874.

Sul potenziale mutuo di due sistemi rigidi, ed in particolare sul potenziale elementare elettrodinamico

(*del prof.* E. Beltrami, *a Roma.*)

(Letto alla Reale Accademia de'Nuovi Lincei, nella seduta 1° dicembre 1873.)

Abbiansi due corpi rigidi M, M' reagenti l'uno sull'altro in virtù di forze mutue, dotate d'un potenziale V. Questo potenziale non può dipendere che da un certo numero di parametri, atti ad individuare le posizioni dei due corpi. Per esprimere questa proprietà, assumiamo nello spazio una terna d'assi ortogonali immobili OX, OY, OZ; poi fissiamo nel corpo M una terna d'assi ortogonali ox, oy, oz mobili col corpo stesso, e nel corpo M' un'altra terna d'assi ortogonali $o'x'$, $o'y'$, $o'z'$ mobili parimente con questo secondo corpo. Le coordinate delle due origini mobili o, o', e le direzioni degli assi delle due terne mobili corrispondenti, appariscono dalle relazioni seguenti fra le coordinate (x, y, z), (x', y', z'), (X, Y, Z) di uno stesso punto dello spazio:

$$\left.\begin{aligned} X &= a + a_1 x + a_2 y + a_3 z = a' + a'_1 x' + a'_2 y' + a'_3 z', \\ Y &= b + b_1 x + b_2 y + b_3 z = b' + b'_1 x' + b'_2 y' + b'_3 z', \\ Z &= c + c_1 x + c_2 y + c_3 z = c' + c'_1 x' + c'_2 y' + c'_3 z'. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ciò posto, la funzione V non può dipendere, nell'ipotesi più generale, che dalle 24 quantità (*)

$$(a,\ b,\ c;\quad a',\ b',\ c')_{0123},$$

(*) Scrivendo per brevità gli indici 0, 1, 2, 3 (o soltanto 1, 2, 3) al piede d'una parentesi, intenderemo che ai simboli racchiusi in questa si debbano apporre successivamente quegli indici, per considerare l'aggregato di tutti i termini così ottenuti. Nel caso attuale l'indice 0 corrisponde alla mancanza d'indice.

o, se si vuole, da ogni sistema di dodici parametri indipendenti coll'ajuto dei quali si possano esprimere queste 24 quantità. Il differenziale totale di V, cioè l'espressione

$$dV=\left(\frac{\partial V}{\partial a}da+\frac{\partial V}{\partial b}db+\frac{\partial V}{\partial c}dc+\frac{\partial V}{\partial a'}da'+\frac{\partial V}{\partial b'}db'+\frac{\partial V}{\partial c'}dc'\right)_{0123},$$

rappresenta il lavoro elementare sviluppato dalle forze mutue durante lo spostamento elementare corrispondente alle variazioni simultanee

$$(da,\ db,\ dc;\quad da',\ db',\ dc')_{0123}$$

e da quest'espressione si deducono facilmente le componenti delle forze e delle coppie che rappresentano l'azione mutua dei due corpi M, M'.

Infatti se si riporta al centro fisso O lo spostamento elementare del corpo M, e si rappresentano con du, dv, dw le componenti della traslazione elementare di questo punto, con dp, dq, dr le componenti della rotazione elementare del corpo M intorno ad un asse passante per lo stesso punto O (componenti riferite agli assi immobili OX, OY, OZ), si ha, come è notissimo:

$$\begin{aligned} da&=du+c\,dq-b\,dr, & da_i&=c_i\,dq-b_i\,dr \\ db&=dv+a\,dr-c\,dp, & db_i&=a_i\,dr-c_i\,dp \\ dc&=dw+b\,dp-a\,dq; & dc_i&=b_i\,dp-a_i\,dq \end{aligned}\Bigg\}\ i=1,\ 2,\ 3.$$

Dunque il lavoro elementare sviluppato dall'azione di M' sopra M, durante lo spostamento elementare

$$(du,\ dv,\ dw;\quad dp,\ dq,\ dr)$$

del corpo M, è dato da

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a}da+\frac{\partial V}{\partial b}db+\frac{\partial V}{\partial c}dc\right)_{0123}=\frac{\partial V}{\partial a}du+\frac{\partial V}{\partial b}dv+\frac{\partial V}{\partial c}dw$$
$$+\left\{\left(b\frac{\partial V}{\partial c}-c\frac{\partial V}{\partial b}\right)dp+\left(c\frac{\partial V}{\partial a}-a\frac{\partial V}{\partial c}\right)dq+\left(a\frac{\partial V}{\partial b}-b\frac{\partial V}{\partial a}\right)dr\right\}_{123}.$$

Accentando le lettere

$$(a,\ b,\ c,\ u,\ v,\ w,\ p,\ q,\ r)$$

si ottiene l'analoga espressione del lavoro elementare

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a'}da'+\frac{\partial V}{\partial b'}db'+\frac{\partial V}{\partial c'}dc'\right)_{0123}$$

sviluppato dall'azione di M sopra M', durante lo spostamento elementare

$$(du',\ dv',\ dw';\quad dp',\ dq',\ dr')$$

del corpo M'.

Ora designando con F la forza e con G la coppia che rappresentano l'azione di M' sopra M riportata al punto O, il primo lavoro è anche espresso da

$$F_x du + F_y dv + F_z dw + G_x dp + G_y dq + G_z dr,$$

dove F_x, F_y, F_z; G_x, G_y, G_z sono le componenti di F e di G rispettivamente secondo gli assi immobili; dunque

$$\left.\begin{aligned} F_x &= \frac{\partial V}{\partial a}, \\ F_y &= \frac{\partial V}{\partial b}, \\ F_z &= \frac{\partial V}{\partial c}; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} G_x &= \left(b\frac{\partial V}{\partial c} - c\frac{\partial V}{\partial b}\right)_{0123}, \\ G_y &= \left(c\frac{\partial V}{\partial a} - a\frac{\partial V}{\partial c}\right)_{0123}, \\ G_z &= \left(a\frac{\partial V}{\partial b} - b\frac{\partial V}{\partial a}\right)_{0123}. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Analoghe espressioni si hanno per le componenti di F' e di G', ossia della forza e della coppia che rappresentano l'azione di M sopra M' riportata al medesimo punto O.

Ciò premesso, proponiamoci di trovare le condizioni cui deve soddisfare il potenziale V affinchè le forze mutue agenti fra i due corpi M, M' soddisfacciano al principio dell'eguaglianza fra l'azione e la reazione, vale a dire affinchè le due azioni di M' sopra M e di M sopra M' si facciano equilibrio a vicenda, ogniqualvolta i due corpi vengano invariabilmente collegati in un sol sistema rigido (*). A tal uopo è necessario e sufficiente che per

$$du = du',\quad dv = dv',\quad dw = dw';\qquad dp = dp',\quad dq = dq',\quad dr = dr',$$

cioè per ogni spostamento simultaneo dei due corpi, considerati come invariabilmente connessi tra loro, il lavoro totale dovuto alle due azioni di M' sopra M e di M sopra M' sia nullo. Le equazioni del problema sono dunque

(*) A questa ricerca fui condotto dal desiderio di verificare un'affermazione di Helmholtz (*Monatsberichte* di Berlino per il 1873, Nota a piè della pag. 94), contraddicente ad un'altra di C. Neumann (*Die elektrischen Kräfte*, Lipsia 1873, p. 77). Quest'ultimo ha poscia riconosciuto l'esattezza della prima proposizione (*Mathem. Annalen*, t. VI, p. 350); ma la quistione generale che a questa si connette non era ancora stata, ch'io sappia, pienamente discussa.

le sei seguenti:

$$\frac{\partial V}{\partial a}+\frac{\partial V}{\partial a'}=0, \qquad \frac{\partial V}{\partial b}+\frac{\partial V}{\partial b'}=0, \qquad \frac{\partial V}{\partial c}+\frac{\partial V}{\partial c'}=0;$$

$$\left(b\frac{\partial V}{\partial c}-c\frac{\partial V}{\partial b}+b'\frac{\partial V}{\partial c'}-c'\frac{\partial V}{\partial b'}\right)_{0123}=0,$$

$$\left(c\frac{\partial V}{\partial a}-a\frac{\partial V}{\partial c}+c'\frac{\partial V}{\partial a'}-a'\frac{\partial V}{\partial c'}\right)_{0123}=0,$$

$$\left(a\frac{\partial V}{\partial b}-b\frac{\partial V}{\partial a}+a'\frac{\partial V}{\partial b'}-b'\frac{\partial V}{\partial a'}\right)_{0123}=0,$$

e ciò che si deve cercare è una funzione V soddisfacente, nel modo più generale, a queste sei equazioni lineari e simultanee alle derivate parziali del prim'ordine.

Le prime tre di queste equazioni esprimono che la funzione V non contiene le sei quantità $a, b, c; a', b', c'$ se non nelle differenze

$$a-a'=a_0, \quad b-b'=b_0, \quad c-c'=c_0.$$

Se dunque V si riguarda come funzione delle 21 quantità

$$(a, b, c)_{0123}, \quad (a', b', c')_{123},$$

le prime tre equazioni sono identicamente soddisfatte, e le ultime tre si possono scrivere come segue:

$$\left.\begin{aligned}
&\left(b\frac{\partial V}{\partial c}-c\frac{\partial V}{\partial b}\right)_{0123}+\left(b'\frac{\partial V}{\partial c'}-c'\frac{\partial V}{\partial b'}\right)_{123}=0,\\
&\left(c\frac{\partial V}{\partial a}-a\frac{\partial V}{\partial c}\right)_{0123}+\left(c'\frac{\partial V}{\partial a'}-a'\frac{\partial V}{\partial c'}\right)_{123}=0,\\
&\left(a\frac{\partial V}{\partial b}-b\frac{\partial V}{\partial a}\right)_{0123}+\left(a'\frac{\partial V}{\partial b'}-b'\frac{\partial V}{\partial a'}\right)_{123}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Per soddisfare nel modo più generale a queste tre equazioni, rappresentiamo colle formole

$$x'=\alpha_0+\alpha_1 x+\alpha_2 y+\alpha_3 z,$$
$$y'=\beta_0+\beta_1 x+\beta_2 y+\beta_3 z,$$
$$z'=\gamma_0+\gamma_1 x+\gamma_2 y+\gamma_3 z$$

le relazioni che passano fra le coordinate (xyz) e le $(x'y'z')$. Eliminando X, Y, Z fra le equazioni (1) ed identificando alle precedenti le espressioni che se ne deducono per le x', y', z' in funzione delle x, y, z, si trova

$$\left.\begin{aligned} \alpha_i &= a_i a'_1 + b_i b'_1 + c_i c'_1 \\ \beta_i &= a_i a'_2 + b_i b'_2 + c_i c'_2 \\ \gamma_i &= a_i a'_3 + b_i b'_3 + c_i c'_3 \end{aligned}\right\} i=0,\,1,\,2,\,3.$$

Queste equazioni danno

$$\left.\begin{aligned} a'_1 &= (a_i\alpha_i), & a'_2 &= (a_i\beta_i), & a'_3 &= (a_i\gamma_i), & a_0 &= \alpha_0(a_i\alpha_i) + \beta_0(a_i\beta_i) + \gamma_0(a_i\gamma_i), \\ b'_1 &= (b_i\alpha_i), & b'_2 &= (b_i\beta_i), & b'_3 &= (b_i\gamma_i), & b_0 &= \alpha_0(b_i\alpha_i) + \beta_0(b_i\beta_i) + \gamma_0(b_i\gamma_i), \\ c'_1 &= (c_i\alpha_i), & c'_2 &= (c_i\beta_i), & c'_3 &= (c_i\gamma_i), & c_0 &= \alpha_0(c_i\alpha_i) + \beta_0(c_i\beta_i) + \gamma_0(c_i\gamma_i), \end{aligned}\right\} i=1,2,3$$

cioè forniscono i valori delle quantità

$$(a',\ b',\ c')_{123},\quad (a_0,\ b_0,\ c_0)$$

in funzione delle quantità

$$(a,\ b,\ c)_{123},\quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma)_{0123}.$$

Dunque il potenziale V, che si riguardava dianzi come funzione delle quantità

$$(a,\ b,\ c)_{0123},\quad (a',\ b',\ c')_{123},$$

può essere egualmente considerato come funzione delle quantità

$$(a,\ b,\ c)_{123},\quad (\alpha,\ \beta,\ \gamma)_{0123}.$$

Distinguendo colle parentesi le derivate parziali di V prese in questa seconda ipotesi, si ha (*)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial a_i} &= \left(\frac{\partial V}{\partial a_i}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}\right)a'_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial \beta_i}\right)a'_2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_i}\right)a'_3 \\ \frac{\partial V}{\partial b_i} &= \left(\frac{\partial V}{\partial b_i}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}\right)b'_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial \beta_i}\right)b'_2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_i}\right)b'_3 \\ \frac{\partial V}{\partial c_i} &= \left(\frac{\partial V}{\partial c_i}\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}\right)c'_1 + \left(\frac{\partial V}{\partial \beta_i}\right)c'_2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_i}\right)c'_3 \end{aligned}\right\} i=0,\,1,\,2,\,3$$

$$\left\{\frac{\partial V}{\partial a'_1} = \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}a_i\right)_{0123},\quad \frac{\partial V}{\partial a'_2} = \left(\frac{\partial V}{\partial \beta_i}a_i\right)_{0123},\quad \frac{\partial V}{\partial a'_3} = \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_i}a_i\right)_{0123}\right\}_{abc},$$

(*) Scrivendo le lettere a, b, c (od α, β, γ) al piede d'una parentesi, intenderemo che all'espressione od all'equazione in a (od α) racchiusa in questa si debbono aggiungere le analoghe in b e c (o β e γ).

avvertendo però che, per l'ipotesi fatta testè, si deve porre

$$\left(\frac{\partial V}{\partial a_0}\right)=\left(\frac{\partial V}{\partial b_0}\right)=\left(\frac{\partial V}{\partial c_0}\right)=0.$$

Di qui

$$\left(b\frac{\partial V}{\partial c}-c\frac{\partial V}{\partial b}\right)_{0123}=\left\{b\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)-c\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)\right\}_{123}$$

$$+\left\{(b_i c'_1-c_i b'_1)\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}\right)+(b_i c'_2-c_i b'_2)\left(\frac{\partial V}{\partial \beta_i}\right)+(b_i c'_3-c_i b'_3)\left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_i}\right)\right\}_{i=0,1,2,3};$$

$$\left(b'\frac{\partial V}{\partial c'}-c'\frac{\partial V}{\partial b'}\right)_{123}=$$

$$=\left\{(c_i b'_1-b_i c'_1)\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_i}\right)+(c_i b'_2-b_i c'_2)\left(\frac{\partial V}{\partial \beta_i}\right)+(c_i b'_3-b_i c'_3)\left(\frac{\partial V}{\partial \gamma_i}\right)\right\}_{i=0,1,2,3},$$

talchè la prima delle equazioni (3) si riduce a

$$\left\{b\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)-c\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)\right\}_{123}=0,$$

e così le altre due a

$$\left\{c\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)-a\left(\frac{\partial V}{\partial c}\right)\right\}_{123}=0,$$

$$\left\{a\left(\frac{\partial V}{\partial b}\right)-b\left(\frac{\partial V}{\partial a}\right)\right\}_{123}=0.$$

Queste equazioni di condizione non contengono alcuna delle quantità $(\alpha, \beta, \gamma)_{0123}$, epperò il potenziale V può essere arbitrariamente formato con esse. Resta a trovare come vi debbano entrare i nove coseni $(a, b, c)_{123}$ affinchè queste tre equazioni siano identicamente soddisfatte.

A tal uopo designiamo con λ uno dei tre parametri indipendenti che servono ad esprimere, in uno dei modi conosciuti, i nove coseni di due terne d'assi ortogonali, e, posto per brevità

$$p=\left(b\frac{\partial c}{\partial \lambda}\right)_{123},\quad q=\left(c\frac{\partial a}{\partial \lambda}\right)_{123},\quad r=\left(a\frac{\partial b}{\partial \lambda}\right)_{123},$$

rammentiamo le note equazioni

$$\left\{\frac{\partial a}{\partial \lambda}=cq-br,\quad \frac{\partial b}{\partial \lambda}=ar-cp,\quad \frac{\partial c}{\partial \lambda}=bp-aq\right\}_{123}.$$

In base a queste si trova, omettendo le parentesi alle derivate,

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda}=\left\{(cq-br)\frac{\partial V}{\partial a}+(ar-cp)\frac{\partial V}{\partial b}+(bp-aq)\frac{\partial V}{\partial c}\right\}_{123}$$

$$=\left(b\frac{\partial V}{\partial c}-c\frac{\partial V}{\partial b}\right)_{123}p+\left(c\frac{\partial V}{\partial a}-a\frac{\partial V}{\partial c}\right)_{123}q+\left(a\frac{\partial V}{\partial b}-b\frac{\partial V}{\partial a}\right)_{123}r,$$

e quindi, in virtù delle precedenti equazioni di condizione,

$$\frac{\partial V}{\partial \lambda}=0.$$

Così sarebbero nulle le derivate di V rispetto agli altri due parametri indipendenti. Dunque i nove coseni $(a,\ b,\ c)_{123}$ devono entrare nel potenziale V in tal maniera che, sostituendo ad essi le loro espressioni in funzione di tre parametri indipendenti, questi parametri spariscano identicamente dal risultato; cioè V non può contenere quei nove coseni che nelle sei espressioni

$$(a^2)=A,\quad (b^2)=B,\quad (c^2)=C;\qquad (bc)=A',\quad (ca)=B',\quad (ab)=C',$$

le quali conservano, per ogni terna d'assi ortogonali, i valori costanti

$$A=B=C=1,\qquad A'=B'=C'=0.$$

Effettivamente, supponendo V funzione di A, B, C; A', B', C', si trova

$$\left(b\frac{\partial V}{\partial c}-c\frac{\partial V}{\partial b}\right)_{123}=$$

$$=(B-C)\frac{\partial V}{\partial A'}+2A'\left(\frac{\partial V}{\partial C}-\frac{\partial V}{\partial B}\right)-B'\frac{\partial V}{\partial C'}+C'\frac{\partial V}{\partial B'},$$

espressione che si annulla identicamente (insieme colle altre due analoghe) dando ad A, B, C; A', B', C' i suddetti valori costanti.

Riassumendo dunque, la forma più generale del potenziale V, soddisfacente alla condizione che ci siamo imposti, è quella d'una funzione arbitraria delle 12 quantità $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)_{0123}$, o meglio dei 6 parametri indipendenti, per mezzo dei quali si può sempre (ed in infiniti modi) individuare la posizione relativa dei due corpi M ed M' (*).

(*) È questo il principio enunciato da Helmholtz (nel citato passo dei *Monatsberichte*) per il caso del potenziale elementare elettrodinamico.

Che la proprietà dimostrata qui sopra per la funzione V sia **necessaria** si può tenere per evidente, giacchè l'azione e la reazione debbono emanare, per ipotesi, dai soli corpi M, M', e non già ancora da altri punti dello spazio. Ma che essa sia altresì **sufficiente**, Le componenti dell'azione (F, G) esercitata dal corpo M' sul corpo M, secondo gli assi $o'(x'y'z')$ fissi nel corpo M', si ottengono evidentemente dalle equazioni (2) mutando le lettere $(a, b, c)_{0123}$ nelle $(\alpha, \beta, \gamma)_{0123}$. Le componenti della stessa azione secondo assi paralleli ai precedenti, ma coll'origine in o [cioè nell'origine della terna $o(xyz)$ fissa nel corpo M], sono quindi

$$\left.\begin{aligned} F_{x'} &= \frac{\partial V}{\partial \alpha_0}, \\ F_{y'} &= \frac{\partial V}{\partial \beta_0}, \\ F_{z'} &= \frac{\partial V}{\partial \gamma_0}; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} G_{x'} &= \left(\beta\frac{\partial V}{\partial \gamma} - \gamma\frac{\partial V}{\partial \beta}\right)_{123}, \\ G_{y'} &= \left(\gamma\frac{\partial V}{\partial \alpha} - \alpha\frac{\partial V}{\partial \gamma}\right)_{123}, \\ G_{z'} &= \left(\alpha\frac{\partial V}{\partial \beta} - \beta\frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)_{123}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Indichiamo ora con α'_0, β'_0, γ'_0 le coordinate, relative agli assi $o(xyz)$, del punto o' (pel quale $x'=y'=z'=0$), talchè

$$\left.\begin{aligned} \alpha_0 &= -\alpha_1\alpha'_0 - \alpha_2\beta'_0 - \alpha_3\gamma'_0 \\ \beta_0 &= -\beta_1\alpha'_0 - \beta_2\beta'_0 - \beta_3\gamma'_0 \\ \gamma_0 &= -\gamma_1\alpha'_0 - \gamma_2\beta'_0 - \gamma_3\gamma'_0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Per avere le componenti secondo gli assi $o(xyz)$ dell'azione (F', G') di M sopra M', basta sostituire ordinatamente

$$\alpha'_0,\ \beta'_0,\ \gamma'_0;\quad \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1;\quad \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2;\quad \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3$$

in luogo di

$$a,\ \ b,\ \ c;\quad a_1,\ a_2,\ a_3;\quad b_1,\ b_2,\ b_3;\quad c_1,\ c_2,\ c_3$$

nei secondi membri delle equazioni (2). Si ha quindi

$$F'_x = \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha'_0}\right),\quad F'_y = \left(\frac{\partial V}{\partial \beta'_0}\right),\quad F'_z = \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma'_0}\right);$$

$$G'_x = \beta'_0\left(\frac{\partial V}{\partial \gamma'_0}\right) - \gamma'_0\left(\frac{\partial V}{\partial \beta'_0}\right) + \left\{\alpha_2\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_3}\right) - \alpha_3\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_2}\right)\right\}_{\alpha\beta\gamma},$$

$$G'_y = \gamma'_0\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha'_0}\right) - \alpha'_0\left(\frac{\partial V}{\partial \gamma'_0}\right) + \left\{\alpha_3\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_1}\right) - \alpha_1\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_3}\right)\right\}_{\alpha\beta\gamma},$$

$$G'_z = \alpha'_0\left(\frac{\partial V}{\partial \beta'_0}\right) - \beta'_0\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha'_0}\right) + \left\{\alpha_1\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_2}\right) - \alpha_2\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_1}\right)\right\}_{\alpha\beta\gamma},$$

---

cioè che la funzione dei sei parametri indipendenti possa essere scelta in modo assolutamente arbitrario, è cosa che parmi sia bene dimostrare. Qui sopra essa è non solo dimostrata, ma anche verificata.

Le derivate parziali di V che entrano in queste espressioni son prese nell'ipotesi che al posto di α_0, β_0, γ_0 siano sostituiti i trinomii (5), ed hanno quindi i valori seguenti:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha'_0}\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_0}\alpha_1\right)_{\alpha\beta\gamma}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \beta'_0}\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_0}\alpha_2\right)_{\alpha\beta\gamma}, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma'_0}\right) = -\left(\frac{\partial V}{\partial \alpha_0}\alpha_3\right)_{\alpha\beta\gamma};$$

$$\left\{\left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_1}\right) = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_1} - \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_0}\alpha'_0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_2}\right) = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_2} - \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_0}\beta'_0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial \varepsilon_3}\right) = \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_3} - \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_0}\gamma'_0\right\}_{\varepsilon=\alpha,\beta,\gamma}.$$

Di qui

$$\left.\begin{aligned} F'_x &= -\left(\alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha_0}\right)_{\alpha\beta\gamma}, \\ F'_y &= -\left(\alpha_2 \frac{\partial V}{\partial \alpha_0}\right)_{\alpha\beta\gamma}, \\ F'_z &= -\left(\alpha_3 \frac{\partial V}{\partial \alpha_0}\right)_{\alpha\beta\gamma}; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} G'_x &= \left(\alpha_2 \frac{\partial V}{\partial \alpha_3} - \alpha_3 \frac{\partial V}{\partial \alpha_2}\right)_{\alpha\beta\gamma}, \\ G'_y &= \left(\alpha_3 \frac{\partial V}{\partial \alpha_1} - \alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha_3}\right)_{\alpha\beta\gamma}, \\ G'_z &= \left(\alpha_1 \frac{\partial V}{\partial \alpha_2} - \alpha_2 \frac{\partial V}{\partial \alpha_1}\right)_{\alpha\beta\gamma}. \end{aligned}\right\} \quad (4)'$$

Volendo passare da queste componenti, relative agli assi $o(xyz)$, dell'azione di M sopra M', alle componenti della medesima azione relative agli assi condotti per o parallelamente a quelli dell'altra terna $o'(x'y'z')$, si debbono formare le espressioni seguenti [cfr. le eq. (4)]:

$$F'_{x'} = \alpha_1 F'_x + \alpha_2 F'_y + \alpha_3 F'_z = -\frac{\partial V}{\partial \alpha_0} = -F_{x'},$$

$$F'_{y'} = \beta_1 F'_x + \beta_2 F'_y + \beta_3 F'_z = -\frac{\partial V}{\partial \beta_0} = -F_{y'},$$

$$F'_{z'} = \gamma_1 F'_x + \gamma_2 F'_y + \gamma_3 F'_z = -\frac{\partial V}{\partial \gamma_0} = -F_{z'};$$

$$G'_{x'} = \alpha_1 G'_x + \alpha_2 G'_y + \alpha_3 G'_z = -\left(\beta \frac{\partial V}{\partial \gamma} - \gamma \frac{\partial V}{\partial \beta}\right)_{123} = -G_{x'},$$

$$G'_{y'} = \beta_1 G'_x + \beta_2 G'_y + \beta_3 G'_z = -\left(\gamma \frac{\partial V}{\partial \alpha} - \alpha \frac{\partial V}{\partial \gamma}\right)_{123} = -G_{y'},$$

$$G'_{z'} = \gamma_1 G'_x + \gamma_2 G'_y + \gamma_3 G'_z = -\left(\alpha \frac{\partial V}{\partial \beta} - \beta \frac{\partial V}{\partial \alpha}\right)_{123} = -G_{z'}.$$

Di qui risulta verificata a posteriori la proprietà, che doveva competere al potenziale, di soddisfare al principio dell'eguaglianza fra l'azione e la reazione.

Applichiamo le formole precedenti al caso dell'azione elementare elettrodinamica.

Se si ammette che anche in questo caso l'azione sia eguale e contraria alla reazione, il fattore di $ii' ds ds'$ nel potenziale di due elementi lineari ds, ds' percorsi da correnti d'intensità i, i' (*) non può avere che la forma $\phi(r, \theta, \theta', \varepsilon)$, dove r è la distanza assoluta dei due elementi, θ, θ' gli angoli che la direzione di r (contata da ds' verso ds) fa colle direzioni dei due elementi medesimi, ed ε l'angolo di queste due ultime direzioni; questi tre angoli si suppongono minori di due retti e misurati: i due primi dalla direzione di r verso quelle di ds o ds', il terzo da ds' verso ds. La funzione ϕ non è, teoricamente, soggetta ad alcuna condizione.

Per confrontare questa forma del potenziale, voluta dal teorema testè dimostrato, colla forma generale $V(\alpha, \beta, \gamma)_{0123}$, supponiamo che le origini o, o' delle due terne coincidano con quelle dei due elementi ds, ds', e designiamo con λ_1, λ_2, λ_3; μ'_1, μ'_2, μ'_3 i coseni degli angoli (invariabili) che questi elementi fanno colle terne rispettive $o(xyz)$, $o'(x'y'z')$. Si avrà, per tali ipotesi,

$$r = \sqrt{\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2},$$

$$\cos\theta = \frac{(\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\beta_1 + \gamma_0\gamma_1)\lambda_1 + (\alpha_0\alpha_2 + \beta_0\beta_2 + \gamma_0\gamma_2)\lambda_2 + (\alpha_0\alpha_3 + \beta_0\beta_3 + \gamma_0\gamma_3)\lambda_3}{r},$$

$$\cos\theta' = \frac{\alpha_0\mu'_1 + \beta_0\mu'_2 + \gamma_0\mu'_3}{r},$$

$$\cos\varepsilon = (\alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 + \alpha_3\lambda_3)\mu'_1 + (\beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 + \beta_3\lambda_3)\mu'_2 + (\gamma_1\lambda_1 + \gamma_2\lambda_2 + \gamma_3\lambda_3)\mu'_3,$$

e le 12 quantità $(\alpha, \beta, \gamma)_{0123}$ non entreranno in V che sotto queste quattro funzioni. Ponendo per brevità

$$(\alpha\lambda)_{123} = \mu_1, \quad (\beta\lambda)_{123} = \mu_2, \quad (\gamma\lambda)_{123} = \mu_3,$$

cioè rappresentando con μ_1, μ_2, μ_3 i coseni degli angoli che la direzione dell'elemento ds fa coi tre assi $o'(x'y'z')$, si trova quindi

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha_0} = F_r \frac{\alpha_0}{r} + F_s \mu_1 + F_{s'} \mu'_1,$$
$$\frac{\partial V}{\partial \beta_0} = F_r \frac{\beta_0}{r} + F_s \mu_2 + F_{s'} \mu'_2,$$
$$\frac{\partial V}{\partial \gamma_0} = F_r \frac{\gamma_0}{r} + F_s \mu_3 + F_{s'} \mu'_3,$$

(*) Parlando qui d'un potenziale elettrodinamico elementare, non intendo di pregiudicare minimamente la difficile questione della sua legittimità fisica.

dove per brevità si è posto

$$F_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r}-\frac{\partial\varphi}{\partial\cos\theta}\frac{\cos\theta}{r}-\frac{\partial\varphi}{\partial\cos\theta'}\frac{\cos\theta'}{r},$$

$$F_s=\frac{\partial\varphi}{\partial\cos\theta}\frac{1}{r},\quad F_{s'}=\frac{\partial\varphi}{\partial\cos\theta'}\frac{1}{r};$$

poi

$$\left(\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial\alpha_i}&=-G_\theta\frac{\alpha_0\lambda_i}{r\operatorname{sen}\theta}-G_\varepsilon\frac{\lambda_i\mu'_1}{\operatorname{sen}\varepsilon}\\ \frac{\partial V}{\partial\beta_i}&=-G_\theta\frac{\beta_0\lambda_i}{r\operatorname{sen}\theta}-G_\varepsilon\frac{\lambda_i\mu'_2}{\operatorname{sen}\varepsilon}\\ \frac{\partial V}{\partial\gamma_i}&=-G_\theta\frac{\gamma_0\lambda_i}{r\operatorname{sen}\theta}-G_\varepsilon\frac{\lambda_i\mu'_3}{\operatorname{sen}\varepsilon}\end{aligned}\right)_{123}$$

dove pure si è posto

$$G_\theta=\frac{\partial\varphi}{\partial\theta},\quad G_\varepsilon=\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}.$$

Si ha quindi, per le formole generali (4),

$$F_{x'}=F_r\frac{\alpha_0}{r}+F_s\mu_1+F_{s'}\mu'_1,$$

$$F_{y'}=F_r\frac{\beta_0}{r}+F_s\mu_2+F_{s'}\mu'_2,$$

$$F_{z'}=F_r\frac{\gamma_0}{r}+F_s\mu_3+F_{s'}\mu'_3;$$

$$G_{x'}=G_\theta\frac{\beta_0\mu_3-\gamma_0\mu_2}{r\operatorname{sen}\theta}+G_\varepsilon\frac{\mu'_2\mu_3-\mu'_3\mu_2}{\operatorname{sen}\varepsilon},$$

$$G_{y'}=G_\theta\frac{\gamma_0\mu_1-\alpha_0\mu_3}{r\operatorname{sen}\theta}+G_\varepsilon\frac{\mu'_3\mu_1-\mu'_1\mu_3}{\operatorname{sen}\varepsilon},$$

$$G_{z'}=G_\theta\frac{\alpha_0\mu_2-\beta_0\mu_1}{r\operatorname{sen}\theta}+G_\varepsilon\frac{\mu'_1\mu_2-\mu'_2\mu_1}{\operatorname{sen}\varepsilon}.$$

Dalla forma di queste espressioni emerge manifestamente che la forza F è la risultante di tre: F_r, F_s, $F_{s'}$, applicate all'origine dell'elemento ds nelle direzioni del raggio r, dell'elemento ds e dell'elemento ds' rispettivamente; e che la coppia G è la risultante di due: G_θ, G_ε, i cui assi sono diretti secondo gli assi degli angoli θ ed ε rispettivamente.

La forza F si può anche risolvere in altro modo, cioè secondo la direzione r e secondo le direzioni, che diremo σ e σ', delle componenti di ds e di ds'

normalmente ad r. Queste tre nuove componenti sono rispettivamente

$$F_r + F_s \cos\theta + F_{s'} \cos\theta' = \frac{\partial\varphi}{\partial r}, \quad F_s \operatorname{sen}\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}, \quad F_{s'} \operatorname{sen}\theta' = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta'}$$

e verranno designate coi simboli F_r, F_σ, $F_{\sigma'}$ (il primo dei quali ha quindi un significato diverso da quello di pocanzi). Ora la coppia Q_θ può essere risoluta nel sistema di due forze d'intensità $\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$, l'una applicata al punto o nella direzione σ, l'altra al punto o' nella direzione $-\sigma$. La prima elide la componente F_σ; talchè l'azione di ds' sopra ds (astrazion fatta dal coefficiente $ii'ds\,ds'$) può finalmente ridursi alle componenti che seguono:

$F_r\left(=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)$,	forza agente sul punto o, nella direzione da ds' verso ds;					
$F_{\sigma'}\left(=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta'}\right)$,	»	»	»	»	σ',	
$F_\sigma\left(=-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)$,	»	»	o',	»	σ;	
$G_\varepsilon\left(=\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}\right)$,	coppia agente nel piano (ds, ds'), nel senso da ds' verso ds.					

Rispetto alla terza componente è sottinteso che il suo punto d'applicazione o' debba venire invariabilmente connesso all'elemento ds.

Volendo applicare queste conclusioni all'azione reciproca di ds sopra ds', bisogna invertire la direzione del raggio r, e quindi cambiare gli angoli θ, θ' in $\pi-\theta$, $\pi-\theta'$. Le componenti di questa seconda azione sono dunque:

F_r,	forza agente sul punto o', nella direzione da ds verso ds'				
F_σ,	»	»	»	»	opposta a σ;
$F_{\sigma'}$,	»	»	o	»	opposta a σ';
G_ε,	coppia agente nel piano (ds, ds'), nel senso da ds verso ds'.				

Da questi risultati apparisce con evidenza che se i due elementi ds, ds' vengono invariabilmente connessi fra loro, il sistema da essi costituito è in equilibrio.

Se con dx, dy, dz; dx', dy', dz' si designano le componenti degli elementi lineari ds, ds' secondo tre assi ortogonali scelti in modo qualunque, la condizione (generalmente ammessa) che l'azione mutua dei due elementi ds, ds' sia eguale alla risultante delle azioni mutue delle loro componenti esige che la quantità $ds\,ds'\varphi(r, \theta, \theta', \varepsilon)$ sia una funzione bilineare, omogenea e simmetrica delle due terne di differenziali

$$(dx,\ dy,\ dz) \quad \text{e} \quad (dx',\ dy',\ dz').$$

Ma supponendo che l'asse delle x sia parallelo alla direzione r e che si abbia quindi

$$dx = ds\cos\theta, \quad dy = ds\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\omega, \quad dz = ds\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\omega,$$

$$dx' = ds'\cos\theta', \quad dy' = ds'\,\mathrm{sen}\,\theta'\cos\omega', \quad dz' = ds'\,\mathrm{sen}\,\theta'\,\mathrm{sen}\,\omega',$$

$$dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz' = ds\,ds'[\cos\theta\cos\theta' + \mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\theta'\cos(\omega'-\omega)] = ds\,ds'\cos\varepsilon,$$

è facile scorgere che un'espressione della specie anzidetta non può equivalere al prodotto di $ds\,ds'$ per una funzione dei soli tre angoli θ, θ', ε (oltre che della distanza r), se essa non è riducibile alla forma

$$H(r)\,dx\,dx' + K(r)\,(dx\,dx' + dy\,dy' + dz\,dz').$$

Dunque la funzione ϕ ha la forma

$$\phi(r,\ \theta,\ \theta',\ \varepsilon) = H(r)\cos\theta\cos\theta' + K(r)\cos\varepsilon,$$

dove le due funzioni $H(r)$, $K(r)$ non possono essere specificate che in base ad ulteriori postulati. Giova però osservare che, potendosi sempre sostituire alle H, K due nuove funzioni R, S di r in modo da rendere

$$H = \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{d^2R}{dr^2}, \quad K = S - \frac{1}{r}\frac{dR}{dr},$$

la funzione ϕ, in virtù delle note relazioni

$$\cos\theta = \frac{\partial r}{\partial s}, \quad \cos\theta' = -\frac{\partial r}{\partial s'}, \quad \cos\varepsilon = -\frac{\partial r}{\partial s}\frac{\partial r}{\partial s'} - r\frac{\partial^2 r}{\partial s\,\partial s'},$$

può sempre assumere la forma

$$\phi(r,\ \theta,\ \theta',\ \varepsilon) = \frac{\partial^2 R}{\partial s\,\partial s'} + S(r)\cos\varepsilon.$$

Quindi, allorchè si considera l'azione totale d'un arco finito s' sopra un altro arco finito s, è chiaro che la sola funzione

$$S = K - \int\frac{H\,dr}{r}$$

ha influenza sulla legge con cui varia la forza agente lungo l'arco s, in seguito alla composizione degli effetti dovuti ai singoli potenziali elementari; l'altra funzione R non ha influenza che sulle forze agenti alle estremità dell'arco s.

Sulla posizione dell'asse di rotazione della terra rispetto all'asse di figura (*)

(*del prof.* Emanuele Fergola, *a Napoli*).

Riguardiamo la terra come un'ellissoide di rivoluzione di cui sieno a il semiasse maggiore ed ε l'eccentricità, e supponiamo che la retta intorno alla quale si esegue la rotazione diurna non coincida con l'asse minore dell'ellissoide, ma sia un altro semidiametro, che comprenda con l'asse di figura un piccolo angolo ϖ; ciò che equivale a supporre l'asse principale minimo di inerzia non coincidente con l'asse di figura. Chiameremo meridiano geometrico qualunque sezione prodotta nello sferoide da un piano che passa per l'asse di figura, ed equatore geometrico la sezione che si ottiene dal piano condotto pel centro della terra perpendicolarmente all'asse medesimo.

In questa ipotesi sulla posizione dell'asse di rotazione, il meridiano astronomico di un qualsivoglia punto della superficie terrestre è il piano condotto per la normale parallelamente all'asse di rotazione; ed il meridiano geografico è il luogo dei punti in cui i meridiani astronomici sono fra loro paralleli. Il parallelo geografico di un punto qualunque è il luogo dei punti in cui le normali formano un angolo costante con l'asse di rotazione; ed in particolare l'equatore geografico è il luogo dei punti in cui le normali hanno direzioni perpendicolari all'asse di rotazione.

Da questi principii si desumono le seguenti proposizioni:

(*) Da una Memoria presentata all'Accademia di Scienze fisiche e matematiche, della Società Reale di Napoli, addì 7 maggio, 1874.

1. Solamente i punti dell'equatore geometrico, e quelli del meridiano geometrico in cui giace l'asse di rotazione, hanno il meridiano astronomico che passa pure per l'asse di rotazione.

2. I meridiani geografici sono curve piane, e passano tutti per i due estremi di un diametro situato in un medesimo piano con l'asse di figura e quello di rotazione. Nella ellisse segnata da questo piano sulla superficie terrestre, la retta sulla quale s'incontrano tutti i meridiani geografici è il diametro conjugato alla direzione perpendicolare all'asse di rotazione; e gli estremi di questa retta sono i soli punti della superficie terrestre, dove la rotazione diurna sembra farsi intorno alla verticale.

Quindi chiamando ϖ' l'angolo che la comune sezione di tutti i piani dei meridiani geografici forma con l'asse di rotazione, sarà $\operatorname{tg}\varpi' = \frac{\operatorname{tg}\varpi}{1-\varepsilon^2}$, donde si ricava $\varpi' - \varpi = 11'30''\cdot 65 \operatorname{sen} 2\varpi + 1''\cdot 16 \operatorname{sen} 4\varpi +$ ecc.

3. Preso per primo meridiano il piano condotto per l'asse di figura e l'asse di rotazione, si chiami v la longitudine di un qualunque punto, contato verso Ovest, e si dinotino con I l'angolo che la sezione comune dei due meridiani, astronomico e geografico di quel punto, forma con l'asse di rotazione, e con σ l'angolo diedro compreso fra i medesimi piani. È chiaro che, conoscendo I e σ, rimane compiutamente determinata la posizione del meridiano geografico. Ora queste due quantità si possono ottenere dalle due equazioni

$$\operatorname{tg} I = \operatorname{cotg}\varpi \sec v, \quad \sigma = \frac{\operatorname{sen} v}{\operatorname{sen} E \cos\varpi}(1 - \operatorname{sen}^2\varpi \operatorname{sen}^2 v)(\varpi' - \varpi)$$

dove

$$\cos E = \operatorname{sen}\varpi \operatorname{sen} v.$$

Da ciò si deduce facilmente la posizione della traccia orizzontale del meridiano geografico, poichè chiamando τ l'angolo che essa forma con la traccia orizzontale del meridiano astronomico, e ϕ la colatitudine, si ha

$$\operatorname{tg}\tau = \cos(I - \phi) \operatorname{tg}\sigma.$$

4. Gli assi maggiori di tutti i meridiani geografici si trovano sull'equatore geometrico e sono eguali all'asse maggiore dell'ellissoide. Gli assi minori invece stanno sopra una superficie conica, che ha il vertice al centro della terra, e passa per l'asse di figura e l'asse di rotazione. La sezione fatta in questo cono dal piano tangente all'estremo dell'asse di figura è un cerchio, che ha il centro nel piano del primo meridiano. Il meridiano geo-

grafico di massima eccentricità è quello i cui punti hanno la longitudine astronomica eguale a zero; ed il meridiano geografico di minima eccentricità è quello in cui la longitudine astronomica di un punto qualunque è 90°.

5. Generalmente parlando i paralleli non sono curve piane, ma projettati dal centro della terra sul piano tangente all'estremo dell'asse di rotazione vi producono ellissi simili e similmente poste, che hanno il centro comune nel punto dove il suddetto piano è incontrato dal diametro pel quale passano tutti i meridiani geografici. L'asse minore di ciascuna di queste ellissi è situato nel piano del primo meridiano.

Il solo parallelo situato in un piano è quello di colatitudine 90°, cioè l'equatore geografico, ed è determinato dal piano diametrale conjugato all'asse di rotazione. Il suo asse minore trovasi nel primo meridiano.

Si può trovare l'angolo ι compreso fra il meridiano geografico ed il parallelo, condotti per un medesimo punto, mediante l'equazione

$$\iota = 90^\circ - \varpi \cdot \varepsilon^2 [2 \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} v + \operatorname{sen} \varpi \cos \phi \operatorname{sen} 2v].$$

6. Un arco del meridiano astronomico di un punto compreso fra due paralleli qualunque, e l'arco del meridiano geografico del medesimo punto compreso fra gli stessi paralleli, sono fra loro eguali, a meno dei termini di 6° grado rispetto all'eccentricità ε ed al seno dell'angolo ϖ.

7. Ritenute le precedenti significazioni per a, ε ed ϖ, sieno inoltre:

$s_1 - s$ la lunghezza di un arco di meridiano geografico,

ϕ_1 e ϕ le colatitudini dei suoi estremi,

l la sua longitudine da un meridiano preso ad arbitrio, per esempio da Greenwich,

v la longitudine di Greenwich dal primo meridiano, cioè quello in cui si trova l'asse di figura;

si avrà fra tutte queste quantità la seguente equazione, a meno dei termini di grado superiore al 6° rispetto ad ε e $\operatorname{sen}\varpi$,

$$[(A+B)\operatorname{sen}^2(v+l) - 2B]\cos 2\varpi + 2C\cos(v+l)\operatorname{sen} 2\varpi = (A+B)\operatorname{sen}^2(v+l) - 2(A-D),$$

dove A, B, C, D sono ricavate dalle seguenti formole:

$$A = f(\phi_1 - \phi) + g\Phi_1 + i\Phi_2 \qquad B = m\Phi_1 + n\Phi_2$$

$$C = m\Psi_1 + i\Psi_2 \qquad D = p(\phi_1 - \phi) + q\Phi_1 + r\Phi_2 + t\Phi_3 - \frac{s_1 - s}{a}$$

$$f=\frac{1}{4}\varepsilon^2\left(1+\frac{11}{8}\varepsilon^2\right) \qquad g=-\frac{7}{16}\varepsilon^4 \qquad i=\frac{15}{64}\varepsilon^4$$

$$m=\frac{3}{4}\varepsilon^2\left(1+\frac{1}{4}\varepsilon^2+\frac{173}{184}\varepsilon^4\right) \qquad n=\frac{15}{32}\varepsilon^4 \qquad p=1+\frac{19}{64}\varepsilon^4-\frac{5}{256}\varepsilon^6$$

$$q=-\frac{7}{16}\varepsilon^4\left(1+\frac{4}{7}\varepsilon^2\right) \qquad r=-\frac{15}{128}\varepsilon^4\left(1-\frac{3}{4}\varepsilon^2\right) \qquad t=\frac{35}{1536}\varepsilon^6$$

$$\Phi_1=\mathrm{sen}(\phi_1-\phi)\cos(\phi_1+\phi) \qquad \Psi_1=\mathrm{sen}(\phi_1-\phi)\,\mathrm{sen}(\phi_1+\phi)$$

$$\Phi_2=\mathrm{sen}\,2(\phi_1-\phi)\cos 2(\phi_1+\phi) \qquad \Psi_2=\mathrm{sen}\,2(\phi_1-\phi)\,\mathrm{sen}\,2(\phi_1+\phi)$$

$$\Phi_3=\mathrm{sen}\,3(\phi_1-\phi)\cos 3(\phi_1+\phi).$$

Ammettendo che nella precedente relazione si possano introdurre per s_1-s i valori ottenuti con misure geodetiche per varii cerchi di meridiano, si potranno formare diverse equazioni contenenti le due incognite v ed ϖ, e si avranno quindi i valori di queste incognite. Così, per esempio, ritenendo per a ed ε i valori trovati da Bessel (*), e facendo uso dei seguenti dati numerici (**) desunti dalle maggiori operazioni geodetiche finora eseguite, si ottengono le infrascritte nove equazioni di condizione per trovare le incognite v ed ϖ.

I. Arco Anglo-francese. Saxavord-Formentera

$\phi=29^\circ 10' 22''\cdot 79 \quad \phi_1=51^\circ 20' 6''\cdot 83 \quad l=-0^\circ 30' \quad s_1-s=1264645^{\mathrm{T}}\cdot 92;$

II. Arco Russo. Fuglenœs-Staro Nekrassowka

$\phi=19^\circ 19' 48''\cdot 77 \quad \phi_1=44^\circ 39' 57''\cdot 06 \quad l=-26^\circ 40' \quad s_1-s=1447786^{\mathrm{T}}\cdot 783;$

III. Arco Indiano (2°). Kaliana-Punnœ

$\phi=60^\circ 29' 11''\cdot 678 \quad \phi_1=81^\circ 50' 28''\cdot 868 \quad l=-77^\circ 40' \quad s_1-s=1212885^{\mathrm{T}}\cdot 34;$

IV. Arco del Capo di Buona Speranza. N. End-Cape Point

$\phi=119^\circ 44' 17''\cdot 66 \quad \phi_1=124^\circ 21' 6''\cdot 26 \quad l=-18^\circ 30' \quad s_1-s=262470^{\mathrm{T}}\cdot 39;$

(*) Astronomische Nachrichten, n.° 438.

(**) *Ordnance Trigonometrical Survey of Great Britain and Ireland. — Account of the Observations and Calculations of the principal triangulation.* London, 1858, pag. 759.

Comparisons of the standards of Lenght, made at the Ordnance Survey Office, Southampton, by Cap. A. R. Clarcke, under the direction of Col. Sir H. James. London, 1866, pag. 282-283.

V. Arco Peruviano. Cotchesqui-Tarqui

$\phi=89°57'28''\cdot613 \quad \phi_1=93°4'32''\cdot068 \quad l=+79°0' \quad s_1-s=176875^{\mathrm{T}}\cdot5;$

VI. Arco Annoverese. Altona-Gottinga

$\phi=36°27'14''\cdot73 \quad \phi_1=38°28'12''\cdot15 \quad l=-9°57' \quad s_1-s=115163^{\mathrm{T}}\cdot725;$

VII. Arco Danese Lysabbel-Lauenburg

$\phi=35°5'49''\cdot648 \quad \phi_4=36°37'42''\cdot954 \quad l=-10°30' \quad s_1-s=87436^{\mathrm{T}}\cdot538;$

VIII. Arco Prussiano. Memel-Trunz

$\phi=34°16'19''\cdot554 \quad \phi_1=35°46'48''\cdot534 \quad l=-20°30' \quad s_1-s=86176^{\mathrm{T}}\cdot975;$

IX. Arco Indiano (1°). Paudree-Trivandeporum

$\phi=76°40'10''\cdot982 \quad \phi_1=78°15'7''\cdot410 \quad l=-79°0' \quad s_1-s=89815^{\mathrm{T}}\cdot45$

I $\quad 0=[+0.94135\,\mathrm{sen}^2(v-\ \ 0°30')-0.59624]\cos2\varpi+$
$\quad +3.73600\cos(v-\ \ 0°30')\,\mathrm{sen}\,2\varpi-0.94135\,\mathrm{sen}^2(v-\ \ 0°30')+0.65686$

II $\quad 0=[+1.66678\,\mathrm{sen}^2(v-26°40')-1.86160]\cos2\varpi+$
$\quad +3.86966\cos(v-26°40')\,\mathrm{sen}\,2\varpi-1.66678\,\mathrm{sen}^2(v-26°40')+2.01662$

III $\quad 0=[-0.80663\,\mathrm{sen}^2(v-77°40')+2.88330]\cos2\varpi+$
$\quad +2.21806\cos(v-77°40')\,\mathrm{sen}\,2\varpi+0.80663\,\mathrm{sen}^2(v-77°40')-2.81652$

IV $\quad 0=[-0.04306\,\mathrm{sen}^2(v-18°30')+0.35660]\cos2\varpi-$
$\quad -0.72290\cos(v-18°30')\,\mathrm{sen}\,2\varpi+0.04306\,\mathrm{sen}^2(v-18°30')-0.34512$

V $\quad 0=[-0.17624\,\mathrm{sen}^2(v+79°\ \ 0')+0.54012]\cos2\varpi-$
$\quad -0.02862\cos(v+79°\ \ 0')\,\mathrm{sen}\,2\varpi+0.17624\,\mathrm{sen}^2(v+79°\ \ 0')-0.52840$

VI $\quad 0=[+0.10305\,\mathrm{sen}^2(v-\ \ 9°57')-0.11688]\cos2\varpi+$
$\quad +0.34138\cos(v-\ \ 9°57')\,\mathrm{sen}\,2\varpi-0.10305\,\mathrm{sen}^2(v-\ \ 9°57')+0.13756$

VII $\quad 0=[+0.08552\,\mathrm{sen}^2(v-10°30')-0.08224]\cos2\varpi+$
$\quad +0.25516\cos(v-10°30')\,\mathrm{sen}\,2\varpi-0.08552\,\mathrm{sen}^2(v-10°30')+0.07350$

VIII $\quad 0=[+0.08791\,\mathrm{sen}^2(v-20°30')-0.08836]\cos2\varpi+$
$\quad +0.24878\cos(v-20°30')\,\mathrm{sen}\,2\varpi-0.08791\,\mathrm{sen}^2(v-20°30')+0.12002$

IX $$0 = [-0.07731 \operatorname{sen}^2 (v - 79^\circ\ 0') + 0.24934] \cos 2\varpi +$$
$$+ 0.11650 \cos (v - 79^\circ\ 0') \operatorname{sen} 2\varpi + 0.07731 \operatorname{sen}^2 (v - 79^\circ\ 0') - 0.24262.$$

I valori di v e ϖ, che rendono minima la somma dei quadrati dei secondi membri di queste equazioni sono

$$v = 239^\circ 31' \qquad \varpi = 1^\circ 8';$$

quindi, secondo questi calcoli, uno degli estremi dell'asse di figura della terra avrebbe la longitudine $120^\circ 29'$ Ovest da Greenwich, e la latitudine $88^\circ 52'$ Nord.

Napoli, 12 maggio 1874.

Two theorems in integration

(*by* John C. Malet M. A., *Trinity College Dublin*).

The theorems which I propose to prove in the following paper are:

I. If
$$X=(1+ax)(1+bx)(1+cx)(1+dx),$$
$$\lambda=\frac{ab-cd}{cd(a+b)-ab(c+d)},$$
$$\lambda'=\frac{ac-bd}{bd(a+c)-ac(b+d)},$$
$$\lambda''=\frac{ad-bc}{bc(a+d)-ad(b+c)},$$
then the expression
$$\left[\frac{1}{x-\lambda}+\frac{1}{x-\lambda'}+\frac{1}{x-\lambda''}\right]\frac{dx}{\sqrt{X}}$$
admits of finite integration.

II. If $d=0$,
$$\mu=\frac{bc}{a-b-c},\quad \mu'=\frac{ac}{b-a-c},\quad \mu''=\frac{ab}{c-a-b},$$
then the expression
$$\left[\frac{1}{1-\mu x}+\frac{1}{1-\mu' x}+\frac{1}{1-\mu'' x}\right]\frac{x\,dx}{\sqrt{X}}$$
admits of finite integration.

Proof of the first theorem.

The expression
$$\frac{\left[x-\frac{1}{x}\right]dx}{\sqrt{1+Ax+Bx^2+Ax^3+x^4}}$$

is integrable in finite terms, for put $x+\frac{1}{x}=\omega$ and the expression becomes

$$\frac{d\omega}{\sqrt{\omega^2+A\omega+B-2}},$$

hence we see

$$\int\frac{\left[x-\frac{1}{x}\right]dx}{\sqrt{1+Ax+Bx^2+Ax^3+x^4}}=\operatorname{Log}\left\{x+\frac{1}{x}+\frac{A}{2}+\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}+A\left(x+\frac{1}{x}\right)+B}\right\}.$$

Hence we can express in finite terms the integral

$$\int\frac{\left\{(\alpha\beta\gamma\delta)^{\frac{1}{4}}x-\frac{1}{(\alpha\beta\gamma\delta)^{\frac{1}{4}}x}\right\}dx}{\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)(1+\delta x)}}$$

if $\alpha\beta=\gamma\delta$, for let $(\alpha\beta\gamma\delta)x^4=x'^4$ and the integral becomes

$$\frac{1}{(\alpha\beta\gamma\delta)^{\frac{1}{4}}}\int\frac{\left[x'-\frac{1}{x'}\right]dx'}{\sqrt{1+Ax+Bx^2+Ax^3+x^4}},$$

where

$$A=\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}+\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}.$$

Hence we see, if $\alpha\beta=\gamma\delta$,

$$\int\frac{\left[(\alpha\beta\gamma\delta)^{\frac{1}{4}}x-\frac{1}{(\alpha\beta\gamma\delta)^{\frac{1}{4}}x}\right]dx}{\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)(1+\delta x)}}=$$

$$\frac{1}{(\alpha\beta\gamma\delta)^{\frac{1}{4}}}\operatorname{Log}\left\{(\alpha\beta\gamma\delta)^{\frac{1}{4}}x+\frac{1}{(\alpha\beta\gamma\delta)^{\frac{1}{4}}x}+\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+\sqrt{\frac{\gamma}{\delta}}+\sqrt{\frac{\delta}{\gamma}}\right]+\right.$$

$$\left.\frac{1}{(\alpha\beta\gamma\delta)^{\frac{1}{4}}x}\sqrt{(1+\alpha x)(1+\beta x)(1+\gamma x)(1+\delta x)}\right\}. \qquad (1)$$

Let us now examine for what values of λ the integral

$$\int\frac{\left\{\left[\frac{abcd}{\Lambda}\right]^{\frac{1}{4}}(x-\lambda)-\left[\frac{\Lambda}{abcd}\right]^{\frac{1}{4}}\frac{1}{x-\lambda}\right\}dx}{\sqrt{(1-ax)(1+bx)(1+cx)(1+dx)}}$$

can be expressed in finite terms, where

$$\Lambda = (1 + a\lambda)(1 + b\lambda)(1 + c\lambda)(1 + d\lambda).$$

If we put y for $x - \lambda$, and let

$$\alpha = \frac{a}{1+a\lambda},\ \beta = \frac{b}{1+b\lambda},\ \gamma = \frac{c}{1+c\lambda},\ \delta = \frac{d}{1+d\lambda},$$

the integral becomes

$$\frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \int \frac{\left\{(\alpha\beta\gamma\delta)^{\frac{1}{4}} y - \frac{1}{(\alpha\beta\gamma\delta)^{\frac{1}{4}} y}\right\} dy}{\sqrt{(1+\alpha y)(1+\beta y)(1+\gamma y)(1+\delta y)}}$$

which we have seen can be integrated in finite terms when $\alpha\beta = \gamma\delta$ or when

$$\lambda = \frac{ab - cd}{cd(a+b) - ab(c+d)}.$$

Hence for this value of λ we have

$$\int \frac{\left\{\left[\frac{abcd}{\Lambda}\right]^{\frac{1}{4}}(x-\lambda) - \left[\frac{\Lambda}{abcd}\right]^{\frac{1}{4}} \frac{1}{x-\lambda}\right\} dx}{\sqrt{X}} =$$

$$\frac{1}{(abcd\Lambda)^{\frac{1}{4}}} \operatorname{Log}\left\{\left[\frac{abcd}{\Lambda}\right]^{\frac{1}{4}}(x-\lambda) + \left[\frac{\Lambda}{abcd}\right]^{\frac{1}{4}} \frac{1}{x-\lambda}\right.$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a(1+b\lambda)}{b(1+a\lambda)}} + \sqrt{\frac{b(1+a\lambda)}{a(1+b\lambda)}} + \sqrt{\frac{c(1+d\lambda)}{d(1+c\lambda)}} + \sqrt{\frac{d(1+c\lambda)}{c(1+d\lambda)}}\right]$$

$$\left. + \frac{1}{(abcd\Lambda)^{\frac{1}{4}}} \cdot \frac{1}{x-\lambda} \sqrt{X}\right\} \tag{2}$$

Similarly, if

$$\lambda' = \frac{ac - bd}{bd(a+c) - ad(b+c)},\quad \lambda'' = \frac{ad - bc}{bc(a+d) - ad(b+c)}$$

and if Λ', Λ'' denote what X becomes when for x we substitute λ', λ'', we get the equations

$$\int \frac{\left\{\left[\frac{abcd}{\Lambda'}\right]^{\frac{1}{4}}(x-\lambda') - \left[\frac{\Lambda'}{abcd}\right]^{\frac{1}{4}} \frac{1}{x-\lambda'}\right\} dx}{\sqrt{X}} =$$

$$\frac{1}{(abcd\Lambda')^{\frac{1}{4}}}\,\mathrm{Log}\left\{\left[\frac{abcd}{\Lambda'}\right]^{\frac{1}{4}}(x-\lambda')+\left[\frac{\Lambda'}{abcd}\right]^{\frac{1}{4}}\frac{1}{x-\lambda'}\right.$$

$$+\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a(1+c\lambda')}{c(1+a\lambda')}}+\sqrt{\frac{c(1+a\lambda')}{a(1+c\lambda')}}+\sqrt{\frac{b(1+d\lambda')}{d(1+b\lambda')}}+\sqrt{\frac{d(1+b\lambda')}{b(1+d\lambda')}}\right]$$

$$\left.+\frac{1}{(abcd\Lambda')^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{x-\lambda'}\sqrt{X}\right\}, \tag{3}$$

$$\int\frac{\left\{\left[\frac{abcd}{\Lambda''}\right]^{\frac{1}{4}}(x-\lambda'')-\left[\frac{\Lambda''}{abcd}\right]^{\frac{1}{4}}\frac{1}{x-\lambda''}\right\}dx}{\sqrt{X}}=$$

$$\frac{1}{(abcd\Lambda'')^{\frac{1}{4}}}\,\mathrm{Log}\left\{\left[\frac{abcd}{\Lambda''}\right]^{\frac{1}{4}}(x-\lambda'')-\left[\frac{\Lambda''}{abcd}\right]^{\frac{1}{4}}\frac{1}{x-\lambda''}\right.$$

$$+\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a(1+d\lambda'')}{d(1+a\lambda'')}}+\sqrt{\frac{d(1+a\lambda'')}{a(1+d\lambda'')}}+\sqrt{\frac{b(1+c\lambda'')}{c(1+b\lambda'')}}+\sqrt{\frac{c(1+b\lambda'')}{b(1+c\lambda'')}}\right]$$

$$\left.+\frac{1}{(abcd\Lambda'')^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{x-\lambda''}\sqrt{X}\right\}. \tag{4}$$

Now multiply each side of equation (2) by $[abcd\Lambda]^{\frac{1}{4}}(\lambda'-\lambda'')$, of equation (3) by $[abcd\Lambda']^{\frac{1}{4}}(\lambda''-\lambda)$, of (4) by $[abcd\Lambda'']^{\frac{1}{4}}(\lambda-\lambda')$, and adding, remarking at the same time that

$$\sqrt{\Lambda}(\lambda'-\lambda'')=\sqrt{\Lambda'}(\lambda''-\lambda)=\sqrt{\Lambda''}(\lambda-\lambda''),$$

each being equal to

$$\frac{-\sqrt{abcd}(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}{[cd(a+b)-ab(c+d)][bd(a+c)-ac(b+d)][bc(a+d)-ad(b+c)]},$$

we get the result

$$\frac{\sqrt{abcd}(a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)}{[cd(a+b)-ab(c+d)][bd(a+c)-ac(b+d)][bc(a+d)-ad(b+c)]}\times$$

$$\times\int\left[\frac{1}{x-\lambda}+\frac{1}{x-\lambda'}+\frac{1}{x-\lambda''}\right]\frac{dx}{\sqrt{X}}$$

$$=(\lambda'-\lambda'')\,\mathrm{Log}\left\{\left[\frac{abcd}{\Lambda}\right]^{\frac{1}{4}}(x-\lambda)+\left[\frac{\Lambda}{abcd}\right]^{\frac{1}{4}}\frac{1}{x-\lambda}\right.$$

$$+\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a(1+b\lambda)}{b(1+a\lambda)}}+\sqrt{\frac{b(1+a\lambda)}{a(1+b\lambda)}}+\sqrt{\frac{c(1+d\lambda)}{d(1+c\lambda)}}+\sqrt{\frac{d(1+c\lambda)}{c(1+d\lambda)}}\right]$$
$$\left.+\frac{1}{(abcd\Lambda)^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{x-\lambda}\sqrt{X}\right\}$$
$$+(\lambda''-\lambda)\operatorname{Log}\left\{\left[\frac{abcd}{\Lambda'}\right]^{\frac{1}{4}}(x-\lambda')+\left[\frac{\Lambda'}{abcd}\right]\frac{1}{x-\lambda'}\right.$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a(1+c\lambda')}{c(1+a\lambda')}}+\sqrt{\frac{c(1+a\lambda')}{a(1+c\lambda')}}+\sqrt{\frac{b(1+d\lambda')}{d(1+b\lambda')}}+\sqrt{\frac{d(1+b\lambda')}{b(1+d\lambda')}}\right]$$
$$\left.+\frac{1}{(abcd\Lambda')^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{x-\lambda'}\sqrt{X}\right\}$$
$$+(\lambda-\lambda')\operatorname{Log}\left\{\left[\frac{abcd}{\Lambda''}\right]^{\frac{1}{4}}(x-\lambda'')+\left[\frac{\Lambda''}{abcd}\right]^{\frac{1}{4}}\frac{1}{x-\lambda''}\right.$$
$$+\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{a(1+d\lambda'')}{d(1+a\lambda'')}}+\sqrt{\frac{d(1+a\lambda'')}{a(1+d\lambda'')}}+\sqrt{\frac{b(1+c\lambda'')}{c(1+b\lambda'')}}+\sqrt{\frac{c(1+b\lambda'')}{b(1+c\lambda'')}}\right]$$
$$\left.+\frac{1}{(abcd\Lambda'')^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{x-\lambda''}\sqrt{X}\right\}, \tag{5}$$

which proves my first theorem.

Proof of the second theorem.

Let us consider the integral

$$\int\frac{\left[\frac{\mu^{\frac{1}{2}}(a+\mu)^{\frac{1}{2}}x}{1-\mu x}-\frac{1-\mu x}{\mu^{\frac{1}{2}}(a+\mu)^{\frac{1}{2}}x}\right]dx}{\sqrt{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}}.$$

Let

$$\frac{x}{1-\mu x}=x', \quad \text{hence } x=\frac{x'}{1+\mu x'}$$

and the expression becomes

$$\int\frac{\left[\mu^{\frac{1}{2}}(a+\mu)^{\frac{1}{2}}x'-\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}(a+\mu)^{\frac{1}{2}}x'}\right]dx'}{\sqrt{[1+(a+\mu)x'][1+(b+\mu)x'][1+(c+\mu)x'][1+\mu x')}}.$$

If now

$$\mu(a+\mu)=(b+\mu)(c+\mu), \quad \text{or } \mu=\frac{bc}{a-b-c},$$

we see by equation (1) that the integral can be expressed in finite terms; hence we have for this value of μ

$$\int \frac{\left[\frac{\mu^{\frac{1}{2}}(a+\mu)^{\frac{1}{2}}x}{1-\mu x}-\frac{1-\mu x}{\mu^{\frac{1}{2}}(a+\mu)^{\frac{1}{2}}x}\right]dx}{\sqrt{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}}=$$

$$\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}(a+\mu)^{\frac{1}{2}}}\operatorname{Log}\left\{\frac{\mu^{\frac{1}{2}}(a+\mu)^{\frac{1}{2}}x}{1-\mu x}+\frac{1-\mu x}{\mu^{\frac{1}{2}}(a+\mu)^{\frac{1}{2}}x}\right.$$

$$+\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{bc}{(a-b)(a-c)}}+\sqrt{\frac{(a-b)(a-c)}{bc}}+\sqrt{\frac{b(a-b)}{c(a-c)}}+\sqrt{\frac{c(a-c)}{b(a-b)}}\right]$$

$$\left.+\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}(a+\mu)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{x(1-\mu x)}\sqrt{X}\right\}, \tag{6}$$

where X now equals

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx).$$

In a similar manner, if

$$\mu'=\frac{ac}{b-a-c}, \quad \mu''=\frac{ab}{c-a-b},$$

we have the equations

$$\int \frac{\left\{\frac{\mu'^{\frac{1}{2}}(b+\mu')^{\frac{1}{2}}x}{1-\mu' x}-\frac{1-\mu' x}{\mu'^{\frac{1}{2}}(b+\mu')^{\frac{1}{2}}x}\right\}dx}{\sqrt{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}}=$$

$$\frac{1}{\mu'^{\frac{1}{2}}(b+\mu')^{\frac{1}{2}}}\operatorname{Log}\left\{\frac{\mu'^{\frac{1}{2}}(b+\mu')^{\frac{1}{2}}x}{1-\mu' x}+\frac{1-\mu' x}{\mu'^{\frac{1}{2}}(b+\mu')^{\frac{1}{2}}x}\right.$$

$$+\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{ac}{(b-a)(b-c)}}+\sqrt{\frac{(b-a)(b-c)}{ac}}+\sqrt{\frac{a(b-a)}{c(b-c)}}+\sqrt{\frac{c(b-c)}{a(b-a)}}\right]$$

$$\left.+\frac{1}{\mu'^{\frac{1}{2}}(b+\mu')^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{x(1-\mu' x)}\sqrt{X}\right\}, \tag{7}$$

$$\int \frac{\left\{\frac{\mu''^{\frac{1}{2}}(c+\mu'')^{\frac{1}{2}}x}{1-\mu''x} - \frac{1-\mu''x}{\mu''^{\frac{1}{2}}(c+\mu'')^{\frac{1}{2}}x}\right\}dx}{\sqrt{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}} =$$

$$\frac{1}{\mu''^{\frac{1}{2}}(c+\mu'')^{\frac{1}{2}}}\operatorname{Log}\left\{\frac{\mu''^{\frac{1}{2}}(c+\mu'')^{\frac{1}{2}}x}{1-\mu''x} + \frac{1-\mu''x}{\mu''^{\frac{1}{2}}(c+\mu'')^{\frac{1}{2}}x}\right.$$

$$+\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{ab}{(c-a)(c-b)}}+\sqrt{\frac{(c-a)(c-b)}{ab}}+\sqrt{\frac{a(c-a)}{b(c-b)}}+\sqrt{\frac{b(c-b)}{a(c-a)}}\right]$$

$$\left. + \frac{1}{\mu''^{\frac{1}{2}}(c+\mu'')^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{x(1-\mu''x)}\sqrt{X}\right\}. \tag{8}$$

Now multiplying equation (6) by $\mu^{\frac{1}{2}}(a+\mu)^{\frac{1}{2}}(\mu'-\mu'')$, (7) by $\mu'^{\frac{1}{2}}(b+\mu')^{\frac{1}{2}}(\mu''-\mu)$ and (8) by $\mu''^{\frac{1}{2}}(c+\mu'')^{\frac{1}{2}}(\mu-\mu')$, adding together and observing that

$$\mu(a+\mu)(\mu'-\mu'')=\mu'(b+\mu')(\mu''-\mu)=\mu''(c+\mu'')(\mu-\mu')$$

$$=\frac{abc(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b-c)(b-a-c)(c-a-b)},$$

and finally dividing each side by this factor, we get the formula

$$\int\left[\frac{1}{1-\frac{bcx}{a-b-c}}+\frac{1}{1-\frac{acx}{b-a-c}}+\frac{1}{1-\frac{abx}{c-a-b}}\right]\frac{x\,dx}{\sqrt{(1+ax)(1+bx)(1+cx)}}=$$

$$=\frac{(a-b-c)^2}{bc(a-b)(a-c)}\operatorname{Log}\left\{\frac{\frac{\sqrt{bc(a-b)(a-c)}\,x}{a-b-c}}{1-\mu x}+\frac{1-\mu x}{\frac{\sqrt{bc(a-b)(a-c)}\,x}{a-b-c}}\right.$$

$$+\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{bc}{(a-b)(a-c)}}+\sqrt{\frac{(a-b)(a-c)}{bc}}+\sqrt{\frac{b(a-b)}{c(a-c)}}+\sqrt{\frac{c(a-c)}{b(a-b)}}\right]$$

$$\left.+\frac{1}{\mu^{\frac{1}{2}}(a+\mu)^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{x(1-\mu x)}\sqrt{X}\right\}$$

$$+\frac{(b-a-c)^2}{ac(b-a)(b-c)}\operatorname{Log}\left\{\frac{\frac{\sqrt{ac(b-a)(b-c)}\,x}{b-a-c}}{1-\mu' x}+\frac{1-\mu' x}{\frac{\sqrt{ac(b-a)(b-c)}\,x}{b-a-c}}\right.$$

$$+\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{ac}{(b-a)(b-c)}}+\sqrt{\frac{(b-a)(b-c)}{ac}}+\sqrt{\frac{a(b-a)}{c(b-c)}}+\sqrt{\frac{c(b-c)}{a(b-a)}}\right]$$

$$\left.+\frac{1}{\mu'^{\frac{1}{2}}(b+\mu')^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{x(1-\mu' x)}\sqrt{X}\right\}$$

$$+\frac{(c-a-b)^2}{ab(c-a)(c-b)}\operatorname{Log}\left\{\frac{\frac{\sqrt{ab(c-a)(c-b)x}}{c-a-b}}{1-\mu'' x}+\frac{1-\mu'' x}{\frac{\sqrt{ab(c-a)(c-b)x}}{c-a-b}}\right.$$

$$+\tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{ab}{(c-a)(c-b)}}+\sqrt{\frac{(c-a)(c-b)}{ab}}+\sqrt{\frac{a(c-a)}{b(c-b)}}+\sqrt{\frac{b(c-b)}{a(c-a)}}\right]$$

$$\left.+\frac{1}{\mu''^{\frac{1}{2}}(c+\mu'')^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1}{x(1-\mu'' x)}\sqrt{X}\right\}, \tag{9}$$

which proves the second theorem.

Of course, according to the values of a, b, c, d, we may sometimes have to substitute arcs for logs in left hand sides of equations (5) and (9).

Both theorems are the statement in the integrals not-reduced to elliptic functions of a well known formula in elliptic functions; but the work necessary to show the correspondence is very tedious.

Dublin, 1873.

On the Correlation of two Planes (*)

(*by* T. Archer Hirst, F.R.S. *Greenwich*).

Definition and Determination of a Correlation.

1. A correlation is said to be established between two planes, when their points and right lines are so associated, that to each point in one of the planes, and to each line passing through that point, respectively correspond, in the other plane, *one* line and *one* point in that line.

2. It will be convenient to apply the familiar terms *pole* and *polar* to a point and its corresponding right line.

3. It has been shown by Chasles (**) and others, that such a correlation may be established, and that in one way only, when four points, in one plane, and their polars, in the other plane, are given; provided always that no three of the points are collinear, and no three polars concurrent. In fact, if $A_1 B_1 C_1 D_1$ be the four points in the first plane, and $a_2 b_2 c_2 d_2$ their respective polars in the other, then, x_2 being the polar of any fifth point X_1, it follows at once from the definition of a correlation that the pencils $A_1(B_1 C_1 D_1 X_1)$ and $B_1(A_1 C_1 D_1 X_1)$ must be equi-anharmonic, respectively, with the rows $a_2(b_2 c_2 d_2 x_2)$ and $b_2(a_2 c_2 d_2 x_2)$. Hence, by a well-known method, if X_1 be given, the intersections of its polar x_2 with a_2 and b_2, and hence x_2 itself, are readily found.

4. From the definition of a correlation it also follows that if the polar of A_1 pass through A_2, the polar of A_2 will pass through A_1; and similarly, that if the pole of a_1 lie on a_2, the pole of a_2 will lie in a_1. Hence we may term A_1 and A_2 *conjugate points,* and a_1 and a_2 *conjugate lines* of the correlation.

(*) Of the two questions, Correlation and Homography, the first has been selected for special consideration in this paper. With suitable modifications, however, as shown in the foot-notes on articles 41 and 42, the results are all applicable to the second question.

(**) « Géométrie Supérieure, » art. 581.

5. That in any correlation two given points, or two given right lines, shall be conjugate to each other, is obviously to be regarded as one condition; that a given point and line shall bear to each other the relation of pole and polar is, accordingly, equivalent to two conditions. Hence, and from art. 3, we may infer that eight conditions are necessary and sufficient for the establishment of a correlation between two planes (*).

6. The problem to determine a correlation between two planes which shall satisfy *any* eight given conditions, is susceptible, in general, of a finite number of solutions. The determination of this number, when the conditions are of the elementary kind, single and double, described in the last article, — a necessary step towards the solution of the more general problem, — is one of the objects of the present paper.

Systems of Correlations.

7. Two planes may obviously be correlated in innumerable ways so as to satisfy *seven* given conditions; the totality of such correlations constitute what may be termed *a system of correlations satisfying seven conditions.*

For example, if the polars $p_2 q_2 r_2$ of three points $P_1 Q_1 R_1$ were given, as well as two conjugate points A_1 and A_2, — a set of seven conditions which may be conveniently indicated thus:

$$\begin{matrix} P_1 & Q_1 & R_1 & A_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & A_2 \end{matrix} \qquad (1)$$

then, in general, any line a_2 passing through A_2 may be regarded as the polar of A_1, and a correlation established, in the manner indicated in art. 3, which shall satisfy the eight conditions,

$$\begin{matrix} P_1 & Q_1 & R_1 & A_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & a_2 \end{matrix}$$

and therefore, *à fortiori*, the seven given conditions (1).

(*) This also follows immediately from the « *expression analytique des figures corrélatives,* » given by Chasles in the « Géométrie Supérieure, » art. 594. Expressed in trilinear co-ordinates, the result there arrived at is that $\lambda_2 x + \mu_2 y + \nu_2 z = 0$ will be the polar of $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ if

$$\lambda_2 : \mu_2 : \nu_2 = l\alpha_1 + m\beta_1 + n\gamma_1 : l'\alpha_1 + m'\beta_1 + n'\gamma_1 : l''\alpha_1 + m''\beta_1 + n''\gamma_1,$$

where the ratios of $l, m, n, l', m', n', l'', m'', n''$ are the eight constants of the correlation.

By giving to a_2 all possible positions, we obtain the several correlations of the system. We shall find it convenient to denote such a system by the symbol

$$\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 & A_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & A_2 \end{pmatrix}.$$

8. It should be observed, however, that whenever a_2 passes through the intersection of any two of the three given lines $p_2 q_2 r_2$, the provision alluded to in art. 3 ceases to be observed, and no correlations, in the ordinary sense of the term, can be established.

9. Such exceptions occur in every system of correlations. As another example we may take the system

$$\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 & a_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & a_2 \end{pmatrix},$$

wherein a_1 and a_2 denote given conjugate lines. The several correlations of this system are obviously obtained by giving to A_1, the pole of a_2, all possible positions on a_1; but whenever A_1 comes into line with two of the three points $P_1 Q_1 R_1$, the method of establishing a correlation described in art. 3 ceases to be applicable.

10. Instead of excluding cases such as those described in the last two articles, it will be found of the highest importance to admit them as *exceptional correlations* into the system satisfying seven conditions, and carefully to study their properties. The part they play in the general theory of correlation will be found to be strictly analogous to that played by degenerate conics in the investigations of Chasles on systems of conics satisfying four conditions (*).

Origin and Nature of Exceptional Correlations.

11. With a view of obtaining an insight into the nature and origin of exceptional correlations, we will first consider all the exceptional forms which a homographic relation between two planes may assume; or, what is equally general, all the exceptional modes of putting two planes Π_1, Π' into perspective with each other.

(*) « Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences, 1864. »

It is clear that, so long as the centre of perspective lies in neither of the two planes, the homographic relation between them is of the ordinary type; we have, therefore, merely to consider the cases where the centre of perspective lies, 1) in one of the two planes, and 2) in the intersection of the two planes.

12. If the centre of perspective be a point Σ_1 in the plane Π_1, and if σ' be the line in which the second plane Π' is intersected by Π_1, it is obvious, *first,* that to every point M' of Π', which is situated on σ', corresponds, in Π_1, an indeterminate point on the line $\overline{\Sigma_1 M'}$, whilst to every other point of Π' corresponds the point Σ_1 itself; and, *secondly,* that to the point Σ_1 corresponds a wholly indeterminate point of the plane Π', whilst to every other point M_1 of Π_1 corresponds the intersection M' of $\overline{\Sigma_1 M_1}$ and σ'.

With respect to the correspondence between the lines of the two planes, it is equally obvious, *first,* that to the line σ' in Π' corresponds a wholly indeterminate line in Π_1, whilst to every other line m' in Π' corresponds the line through Σ_1 and $(m'\sigma')$; and, *secondly,* that to every line m_1 in Π_1 which passes through Σ_1, corresponds an indeterminate line in Π' passing through the intersection $(m_1\sigma')$, whilst to every other line in Π_1 corresponds the line σ' itself.

13. If the centre of perspective Σ_1 lie in the intersection σ' of the two planes, Π_1 and Π', then to Σ_1, regarded as a point of either plane, corresponds a wholly indeterminate point of the other plane; to any other point of σ', in either plane, corresponds an indeterminte point of the same line σ' in the other plane; whilst to every other point, of either plane, corresponds the point Σ_1 itself.

The lines of the two planes correspond in the following manner: to σ', regarded as a line of either plane, corresponds a wholly indeterminate line in the other plane; to any other line through Σ_1, in either plane, corresponds an indeterminate line through Σ_1 in the other plane; whilst to any other line, in either plane, corresponds the line σ' itself.

14. Passing now from the perspective, to any other position of the two planes, we conclude that the homographic correspondence between them may assume either of the following two exceptional or singular forms.

First. There may be a singular point in one plane, and a singular line in the other, whose respective correspondents are wholly indeterminate. To each point in the singular line will then correspond an indeterminate point in a determinate line passing through the singular point, whilst to each such line through the singular point will correspond an indeterminate line passing through a determinate point of the singular line.

It is of importance to observe that between the above-mentioned points on the singular line, and the associated lines through the singular point there must, by art. 12, always exist an equi-anharmonic, or (1, 1) correspondence.

Secondly. In each plane there may be a singular line, and a singular point situated in that line, whose respective correspondents are wholly indeterminate. To every other point in a singular line will then correspond an indeterminate point in the other singular line, whilst to every other line passing through a singular point will correspond an indeterminate line through the other singular point.

15. If an exceptional homographic relation exist between two planes Π_1 and Π', and any ordinary correlation, such as that described in art. 3, be established between the latter, and a third plane Π_2, it is evident that between the former Π_1 and this third plane Π_2 an exceptional correlation will exist; and *vice versâ,* from any exceptional correlation, we can always pass, by means of an auxiliary ordinary correlation, to an exceptional homographic relation. This principle enables us, readily, to deduce all possible exceptional forms of correlation from the results of the last article.

16. In so doing we must consider three cases, since the first case of the last article presents two varieties.

First. The exceptional homographic relation between Π_1 and Π' is such that in Π_1 there is a singular point Σ_1, and in Π' a singular line σ'. The pole of σ', in the plane Π_2, being Σ_2, we shall have, between Π_1 and Π_2, an *exceptional correlation with singular points* Σ_1 and Σ_2, whose characteristic properties, easily deducible from art. 14, may be briefly described thus:

The polar of a singular point is wholly indeterminate. The pole of every line through a singular point is an indeterminate point on a determinate line through the other singular point, the two lines thus associated being always corresponding rays of equi-anarmonic pencils.

Secondly. The exceptional homographic relation between Π_1 and Π' is such, that there is a singular line σ_1 in Π_1, and a singular point Σ' in Π'.

The polar of Σ', in the plane Π_2, being σ_2, we shall now have, between the planes Π_1 and Π_2, *an exceptional correlation with singular lines* σ_1 and σ_2, the characteristic properties of which, as deduced from art. 14, will be as follows:

The pole of a singular line is wholly indeterminate. The polar of every point in a singular line is an indeterminate line through a determinate point of the other singular line, the two points thus associated being always corresponding points of two equi-anharmonic rows.

Thirdly. The exceptional homographic relation between Π_1 and Π' is such that in each of these planes there is a singular line, and a singular point situated on that line.

Between the planes Π_1 and Π_2 we shall now have an *exceptional correlation with singular lines and points* (in each line a point), of which the following properties are characteristic:

The pole of each singular line, as well as the polar of each singular point, is wholly indeterminate. The polar of any point in a singular line, not coincident with the singular point situated therein, is an indeterminate line through the other singular point.

An exceptional correlation with singular points is determined when the positions of those points, and of three pairs of conjugate lines passing through them are known. In like manner, an exceptional correlation with singular lines requires, for its determination, a knowledge of the positions of those lines, as well as of three pairs of conjugate points situated thereon. Seven arbitrary conditions, of the kind described in art. 5, are necessary and sufficient, as we shall see, to determine an exceptional correlation with singular points, or with singular lines. An exceptional correlation of the third kind, however, that is to say, one which possesses singular lines and singular points situated therein, cannot, in general, be made to satisfy more than six such conditions. Hence it is that such exceptional correlations do not present themselves in the present paper; they have been described, solely, for the sake of completeness (*).

17. The following properties of the two first kinds of exceptional cor-

---

(*) It is well known, and has recently been again demonstrated by Schröter, (« Journal für die reine und angewandte Mathematik, » vol. 77, p. 105,) that two correlated planes can always be made to coincide in such a manner, that to each point the same line shall correspond, no matter to which of the two coincident planes that point be ascribed. The point and line, in fact, then become pole and polar relative to a conic. Now this conic degenerates to a line-pair, when the correlation has singular points; to a point-pair, when it has singular lines; and to a line-pair-point, when it has singular points and lines. Hence the connection between degenerate conics and exceptional correlations, alluded to in art. 10.

relations will be frequently referred to; they are easily deduced from those already described.

a. The pole of every line, in either plane, which does not pass through the singular point of that plane, coincides with the singular point of the other plane.

b. The polar of every point, in either plane, which does not coincide with the singular point of that plane, is a determinate line passing through the singular point of the other plane.

c. The polar of every point, in either plane, not situated on a singular line of that plane, coincides with the singular line of the other plane.

d. The pole of every line, in either plane, which does not coincide with the singular line in that plane, is a determinate point in the singular line of the other plane.

Relations between the Characteristics and Singularities of any System of Correlations.

18. M_1 being an arbitrary point in one of two correlated planes, its polars, in the several correlations of any system, envelope a curve, whose class μ indicates the number of correlations of the system, in each of which the polar of M_1 passes through an arbitrary point M_2 of the second plane. But since, in each of these correlations, (and in these solely) the polar of M_2 will pass through M_1 (art. 4), μ will also be the class of the curve enveloped by the polars of an arbitrary point M_2 in the second plane.

Regarded as the number of correlations of the system, in each of which two arbitrary points M_1 and M_2 are conjugate to each other, μ may be appropriately termed the *class of the system of correlations.*

19. In like manner, the poles of an arbitrary line, in either plane, lie on a curve whose order ν may be termed *the order of the system of correlations,* since it indicates the number of correlations of the system in each of which two arbitrary lines m_1 and m_2 are conjugate to each other.

20. Between the *characteristics* μ and ν of a system of correlations, and the number of exceptional correlations which that system includes, relations exist precisely like those which have been established by Chasles between the characteristics of a system of conics satisfying four given conditions, and the number of degenerate conics included in the system.

In fact, if π denote the number of exceptional correlations with singular points, and λ the number of exceptional correlations with singular lines included in the system of correlations whose characteristics are μ and ν, then

$$\left.\begin{array}{l}\mu=2\nu-\pi\\ \nu=2\mu-\lambda\end{array}\right\}. \qquad (1)$$

Hence we deduce

$$\left.\begin{array}{l}\lambda+\pi=\mu+\nu\\ \lambda-\pi=3(\mu-\nu)\end{array}\right\}, \qquad (2)$$

and also

$$\left.\begin{array}{l}3\mu=2\lambda+\pi\\ 3\nu=\lambda+2\pi\end{array}\right\}. \qquad (3)$$

21. Since each of the relations (1) follows from the other by te Principle of Duality, a demonstration of the first will be sufficient.

If a_1 and b_1 be any two lines in the first plane, and M_2 any point in the second plane, we have to determine the number of correlations of the system (μ, ν) in each of which the polar $\overline{A_2B_2}$ of the intersection $(a_1 b_1)$ passes through M_2. By hypothesis, there are ν correlations of the system in each of which the pole A_2 of a_1 lies in an arbitrary ray m_2 of the pencil whose centre is M_2. If the pole B_2 of b_1, in each of these ν correlations, be joined to M_2 by a ray m'_2, then to each ray m_2 will correspond ν rays m'_2.

In like manner, to each ray m'_2 will correspond ν rays m_2, passing, respectively, through the poles of a_1 in the several correlations in which the poles of b_1 lie in m'_2. Hence there is a (ν, ν) correspondence between the rays m_2 and m'_2, and consequently there are 2ν rays, with each of which an m_2 and its corresponding m'_2 coincide.

Although each of these 2ν rays passes through the poles of a_1 and b_1 in one and the same correlation, they are not all polars of $(a_1 b_1)$. For instance, if Σ_1 and Σ_2 be the singular points of one of the π exceptional correlations included in the system, the poles of the *arbitrary* lines a_1 and b_1 will coincide with Σ_2 (art. 17 **a**), and by so doing cause m_2 and m'_2 to coincide with $\overline{M_2\Sigma_2}$. The polar of $(a_1 b_1)$ in this exceptional correlation, however, will not in general coincide with this *arbitrary* line $\overline{M_2\Sigma_2}$, but with that ray of the pencil (Σ_2) which corresponds equi-anharmonically with the ray, through $(a_1 b_1)$, of the pencil (Σ_1), (arts. 16 first case, and 17 **b**).

Exceptional correlations with singular points being, clearly, the only ones in which the poles of a_1 and b_1 coincide, it follows, as indicated by the first of the relations (1) in art. 20, that the number μ of correlations in which the polar of $(a_1 b_1)$ passes through the arbitrary point M_2 is less than 2ν by the number π of exceptional correlations in the system which possess singular points.

22. The number of exceptional correlations in a system satisfying seven given conditions being directly determined, the relations (1) of art. 20, written in the form (3), will enable us to deduce at once the characteristics of the system.

I propose to apply this method to the determination of the characteristics of the *fundamental systems,* that is to say, of those systems which satisfy elementary conditions of the following types:

A given point shall have a given polar (2 conditions).

A given line shall have a given pole (2 conditions).

Two given points shall be conjugate (1 condition).

Two given lines shall be conjugate (1 condition).

The characteristics of the fundamental systems being thus determined, it will be easy to deduce the number of correlations which satisfy any eight given elementary conditions.

All that will be then requisite in order to enable us to ascend from elementary conditions to others of a more complex character, and thus to solve the problem of the correlation of two planes in all its generality, will be a more intimate knowledge of the properties of the curves of the order ν, and of the curves of the class μ which, as we have seen (arts. 18 and 19), are associated with each system of correlations.

Enumeration and Classification of the Fundamental Systems of Correlations.

23. α, β, γ, δ, being integers satisfying the condition

$$2\alpha + 2\beta + \gamma + \delta = 7,$$

we shall term $(\alpha\beta\gamma\delta)$ the *signature* of the system of correlations satisfying the following conditions:

α points in one plane have given polars in the other;

β right lines in the first plane have given poles in the second;

γ points and δ lines in each plane have given conjugates in the other plane.

It is obvious that the systems of correlations whose signatures are $(\alpha\beta\gamma\delta)$ and $(\beta\alpha\gamma\delta)$ are identical. The first symbol, in fact, being regarded as descriptive of the data in the one plane, the second will indicate the corresponding data in the correlated plane.

Now the total number of integral solutions of the equation

$$2\alpha+2\beta+\gamma+\delta=7$$

can be readily proved to be 52; hence *there are twenty-six distinct fundamental systems of correlations.*

24. These systems may be arranged in six groups as follows:

Group.	Signature.	
I.	(3010)	(0301)
II.	(2110)	(1201)
III.	(2030)	(0203)
	(2021)	(0212)
IV.	(1130)	(1103)
	(1121)	(1112)
V.	(1050)	(0105)
	(1041)	(0114)
	(1032)	(0123)
VI.	(0070)	(0007)
	(0061)	(0016)
	(0052)	(0025)
	(0043)	(0034)

25. In each group, the systems are arranged in two columns, such that the data of each system in one column are crrelative to the data of the system opposite thereto in the other column. Now to every correlation of the system $(\alpha\beta\gamma\delta)$ will obviously correspond, by the Principle of Duality, a correlation of the system $(\beta\alpha\delta\gamma)$; moreover, the class and order of the first system will be equal, respectively, to the order and class of the second system; and for every exceptional correlation with singular points in the former there will be an exceptional correlation with singular lines in the latter, and *vice versâ.* It will suffice, therefore, to consider the systems contained in one only of the two preceding columns.

Number and Nature of Exceptional Correlations in the Fundamental Systems.

26. I proceed first to determine, directly, the number and nature of the exceptional correlations included in each of the thirteen fundamental systems whose signatures stand in the first column of the preceding article. In doing so, two associated singular points of any exceptional correlation will always be indicated by the symbols Σ_1 and Σ_2, and two associated singular lines by σ_1 and σ_2.

27. Throughout this investigation it will be assumed that, between the positions of the given points and lines, no special relation whatever exists.

(3010) 28. Let the symbol of the system (3010) be

$$\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 & R_1 & A_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 & A_2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda=0$ In this system there can be no exceptional correlation with singular lines. To prove this, I observe, *first,* that σ_2 could not coincide with any one of the three lines $p_2 q_2 r_2$, say p_2; for if it did, then Q_1 and R_1, as poles of q_2 and r_2, would lie on σ_1 (art. 17 **d**); and A_1 not being situated thereon (art. 27), would have σ_2 for its polar, whereas by hypothesis this polar should pass through A_2; and *secondly,* that if there were a singular line σ_2 not coincident with any one of the three lines $p_2 q_2 r_2$, then the poles $P_1 Q_1 R_1$ of these lines would all lie on σ_1 (art. 17 **d**), which is inconsistent with the assumed generality of the data by which the system is defined (art. 27).

$\pi=3$ Again, if there be a singular point Σ_1 in the system, it must coincide with one of the three points $P_1 Q_1 R_1$; for if it did not, $p_2 q_2 r_2$ would concur in Σ_2 (art. 17 **b**), which is not the case. Now if Σ_1 were coincident with P_1, its polar, being perfectly arbitrary (art. 16 **a**), might obviously be regarded as coincident with p_2. Moreover, q_2 and r_2, as polars of Q_1 and R_1, would then intersect in Σ_2 (art. 17 **b**), and the polar of A_1 would be $\overline{A_2 \Sigma_2}$. In this manner all the seven conditions would be fulfilled, and the exceptional correlation would be perfectly and uniquely determined (art. 16); the polar of any point M_1, for instance, would be the ray m_2, which passes through $(q_2 r_2)$ and satisfies the anharmonic relation

$$P_1(Q_1 R_1 A_1 M_1) = (q_2 r_2)(q_2 r_2 A_2 m_2).$$

In like manner, Σ_1 might coincide with Q_1, if Σ_2 were coincident with $(r_2 p_2)$; or, lastly, Σ_1 might coincide with R_1, if Σ_2 were coincident with $(p_2 q_2)$. Hence we conclude that *in the system under consideration there are but three exceptional correlations, and that each of these has singular points*. We have, consequently, by art. 20 (3), the values

$$\lambda = 0, \quad \pi = 3, \quad \mu = 1, \quad \nu = 2.$$

29. The next system (2110) may be denoted by (2110)

$$\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 & r_1 & A_1 \\ p_2 & q_2 & R_2 & A_2 \end{pmatrix}.$$

Here r_1 cannot be coincident with σ_1; for if it were, p_2 and q_2, as polars of points not situated on σ_1, would be coincident with σ_2 (art. 17 **c**); hence R_2 must lie on σ_2 (art. 17 **d**). But if so, then, by art. 27, neither p_2 nor q_2 can coincide with σ_2, and as a consequence, P_1 and Q_1 must lie on σ_1. Again A_1, not being on σ_1, its polar, which by hypothesis passes through A_2, must be coincident with σ_2. Hence the *only possible correlation with singular lines is that in which these lines coincide, respectively, with $\overline{P_1 Q_1}$ and $\overline{R_2 A_2}$*; that this correlation satisfies the seven given conditions, and is precisely determined by them, is readily seen. $\lambda = 1$

Passing to possible exceptional correlations with singular points, it is obvious that R_2 cannot coincide with Σ_2; for if it did, P_1 and Q_1, the poles of two lines p_2 and q_2 which do not pass through R_2, would be *coincident* in Σ_1 (art. 17 **a**), which is not the case. Hence we infer, by art 17 **b**, that r_1 must pass through Σ_1, and as a consequence of this, — or rather of the fact that neither P_1 nor Q_1 can, under these circumstances, coincide with Σ_1, — that p_2 and q_2 must intersect in Σ_2. $\pi = 1$

That *there is one and only one exceptional correlation which has a singular point Σ_2 coincident with $(p_2 q_2)$, and its associate Σ_1 situaded in r_1*, and that this correlation is precisely determined by the seven given conditions, is obvious on remarking that the anharmonic relation

$$\Sigma_1 (P_1 Q_1 r_1 A_1) = (p_2 q_2)(p_2 q_2 R_2 A_2)$$

is the only remaining condition which Σ_1 has to fulfil (art. 16). The point Σ_1, in fact, is the intersection, with r_1, of the line which connects A_1 with the *only* point A on $\overline{P_1 Q_1}$ which satisfies the relation

$$P_1 Q_1 (P_1 Q_1 r_1 A) = (p_2 q_2)(p_2 q_2 R_2 A_2).$$

For the system now under consideration, the equations (3) of art. 20 furnish the following values:

$$\lambda=1, \quad \pi=1, \quad \mu=1, \quad \nu=1.$$

(2030) 30. The next system to be considered has the signature (2030), and the symbol

$$\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 & A_1 & B_1 & C_1 \\ p_2 & q_2 & A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda=0$ Neither p_2 nor q_2 can here coincide with σ_2; for if either did, the polars of $A_2B_2C_2$ would be coincident with σ_1 (art. 17 **c**), and therefore could not pass, respectively, through $A_1B_1C_1$. Hence we infer that if σ_1 exist, P_1 and Q_1 must lie on it (art. 17 **d**). But if σ_1 were coincident with $\overline{P_1Q_1}$, the polars of $A_1B_1C_1$ would be coincident with σ_2 (art. 17 **c**), which is inconsistent with the condition of their passing, respectively, through $A_2B_2C_2$. Hence we conclude that *there are no exceptional correlations with singular lines in the system.*

$\pi=3$ Again, if there be a singular point Σ_2, it must lie in one, at least, of the two lines p_2 and q_2, for otherwise P_1 and Q_1 would be coincident in Σ_2 (art. 17 **a**) If Σ_2 were on p_2, but not on q_2, its associate Σ_1 would coincide with Q_1 (art. 17), and Σ_2 itself would, by art. 16, simply have to satisfy the condition

$$Q_1(P_1A_1B_1C_1)) = \Sigma_2(p_2A_2B_2C_2). \tag{1}$$

This is clearly possible, and in one way only (art. 29).

In like manner, there is a second exceptional correlation for which Σ_1 is concident with P_1, and Σ_2 lies on q_2 so as to satisfy the condition

$$P_1(Q_1A_1B_1C_1) = \Sigma_2(q_2A_2B_2C_2). \tag{2}$$

In every other exceptional correlation, Σ_2 must be coincident with (p_2q_2), and Σ_1 must satisfy the homographic relation

$$\Sigma_1(P_1Q_1A_1B_1C_1) = (p_2q_2)(p_2q_2A_2B_2C_2).$$

Now it is well known that there is, in general, one and only one position for Σ_1 consistent with this relation (*). It is, in fact, the fourth inter-

(*) See Sturm's excellent paper on the *Problem der Projectivität und seine Anwendung auf die Flächen zweiten Grades*, in the « Mathematische Annalen, » vol. I, p. 533, wherein many of the auxiliary theorems employed in this paper are elaborately demonstrated.

section of two conics (S'_1) and (S''_1) circumscribed to the triangle $A_1B_1C_1$, one of which (S'_1) passes through P_1, and is determined by the anharmonic relation

$$(S'_1)(P_1A_1B_1C_1) = (p_2q_2)(p_2A_2B_2C_2),$$

and the other (S''_1) passes through Q_1 in such a manner that

$$(S''_1)(Q_1A_1B_1C_1) = (p_2q_2)(q_2A_2B_2C_2).$$

The only exceptional case which can present itself arises when the above two conics (S'_1) (S''_1) happen to coincide. This case, however, is excluded by art. 27, since it implies the existence of a special relation between the position of the given lines and points.

We conclude, then, that *the system under consideration contains three exceptional correlations with singular points*, and accordingly we have, as in art. 28,

$$\lambda = 0, \quad \pi = 3, \quad \mu = 1, \quad \nu = 2.$$

31. We proceed to the system (2021) whose symbol is (2021)

$$\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 & A_1 & B_1 & c_1 \\ p_2 & q_2 & A_2 & B_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

If p_2 were coincident with a singular line σ_2, then Q_1 would lie on σ_1 $\lambda=1$
(art. 17 **d**), and at the same time the polars of A_2 and B_2 would coincide with σ_1 (art. 17 **c**). But, since Q_1, A_1 and B_1 are not in a line (art. 27), this is obviously inconsistent with the condition that these polars should pass, respectively, through A_1 and B_1. In like manner, q_2 cannot be coincident with σ_2; hence, if this singular line exist at all, P_1 and Q_1 must lie on its associate σ_1 (art. 17 **d**), and the polars of A_1 and B_1 must coincide with σ_2 (art. 17 **c**), that is to say, σ_2 must pass through A_2 and B_2.

This being clearly possible, and moreover the seven conditions being precisely sufficient to determine such an exceptional correlation (*), we conclude that *the system contains one, and only one, exceptional correlation with singular lines;* the latter being coincident, respectively, with $\overline{P_1Q_1}$ and $\overline{A_2B_2}$.

Again, it can be shown, as in art. 30, that if there be a singular point $\pi=4$
Σ_2, it must lie on one, at least, of the lines p_2q_2. Now if Σ_2 were situated

(*) The pole of any line m_1, for example, would be the point M_2, on $\overline{A_2B_2}$, determined by the relation $\overline{P_1Q_1}(P_1Q_1c_1m_1) = \overline{A_2B_2}(p_2q_2c_2M_2)$.

on p_2, but not on q_2 then its associate Σ_1 would be coincident with Q_1, and the pole of c_1 would be coincident with Σ_2 (art. 17 **a**); but as this pole must be situated on c_2, $(p_2 c_2)$ is the only possible position for Σ_2. In like manner, if Σ_2 were on q_2, but not on p_2, it would necessarily coincide with $(q_2 c_2)$, and its associate Σ_1 with P_1. Moreover, it is evident that the seven given conditions suffice precisely to determine one of each of the exceptional correlations here described.

The only remaining position possible for Σ_2 is $(p_2 q_2)$, in which case the polar of c_2, necessarily a point on c_1, would be coincident with Σ_1 (art. 17 **a**). The sole condition to be satisfied by this point Σ_1 on c_1 is

$$\Sigma_1(P_1 Q_1 A_1 B_1) = (p_2 q_2)(p_2 q_2 A_2 B_2); \tag{1}$$

hence Σ_1 must be one of the intersections of c_1 by the conic (S_1) which passes through $P_1 Q_1 A_1 B_1$ and satisfies the anharmonic

$$(S_1)(P_1 Q_1 A_1 B_1) = (p_2 q_2)(p_2 q_2 A_2 B_2).$$

Taking into account the two solutions of (1), we conclude that *in the system under consideration there are four exceptional correlations with singular points.*

The equations (3) of art. 20 give us, in the present case, the values

$$\lambda = 1, \quad \pi = 4, \quad \mu = 2, \quad \nu = 3.$$

(1130) 32. We arrive next at the system (1130), which is defined by the symbol

$$\begin{pmatrix} P_1 & p_1 & A_1 & B_1 & C_1 \\ p_2 & P_2 & A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 0$ Since p_1, in this case, cannot coincide with σ_1 (for if it did, the polars of $P_1 A_1 B_1 C_1$ would be coincident with σ_2, which is obviously impossible), σ_2, if it exist, must pass through its pole P_2, and for a like reason its associate σ_1 must pass through P_1 (art. 17 **d**). Such an exceptional correlation, however, could not possibly satisfy the conditions in virtue of which the polars of A_1, B_1, C_1 pass, respectively, through A_2, B_2, C_2; hence we conclude that the *system under consideration includes no exceptional correlation with singular lines.*

$\pi = 3$ If P_1 were a singular point, P_2, as pole of a line p_1 which does not pass through that singular point, would necessarily be its associate, and *vice versâ* (art. 17 **a**). Such a correlation is clearly possible, and in one way only.

In any other exceptional correlation with singular points, Σ_1 would necessarily lie on p_1, since Σ_2 does not coincide with P_2; and for a like reason its associate Σ_2 would necessarily lie on p_2 (art. 17 **b**). The sole condition to be fulfilled by these associated singular points Σ_1, Σ_2 is

$$\Sigma_1(p_1 P_1 A_1 B_1 C_1) = \Sigma_2(P_2 p_2 A_2 B_2 C_2), \tag{1}$$

a relation which can be satisfied in two, and only two, ways. To prove this, I observe that, as shown in art. 29, to each point S_1 on p_1 corresponds one, and only one, point S_2 on p_2 such that

$$S_1(p_1 P_1 A_1 B_1) = S_2(P_2 p_2 A_2 B_2);$$

whilst to this point S_2 corresponds one, and only one, point S'_1 on p_1 such that

$$S'_1(p_1 P_1 A_1 C_1) = S_2(P_2 p_2 A_2 C_2).$$

Hence we may say that to each point S_1 corresponds one, and only one, point S'_1; for a like reason, to each point S'_1 corresponds one, and only one, point S_1. By a well-known theorem, therefore, there are two points on p_1 in each of which S_1 and S'_1 coincide.

Each of these points, considered as a position of Σ_1, together with its corresponding S_2, considered as a position of Σ_2, will clearly give a solution of the relation (1). Hence we conclude that the *system under consideration includes three exceptional correlations with singular points.* For the system now under consideration, therefore, we have, as in arts. 28 and 30, the following values:

$$\lambda = 0, \quad \pi = 3, \quad \mu = 1, \quad \nu = 2.$$

33. Next, in the order of sequence adopted in art. 24, comes the system (1121) (1121), whose symbol is

$$\begin{pmatrix} P_1 & p_1 & A_1 & B_1 & c_1 \\ p_2 & P_2 & A_2 & B_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

It can be shown here, precisely as in the preceding case, that if there be $\lambda = 2$ an exceptional correlation with singular lines, σ_1 must pass through P_1, and its associate σ_2 through P_2. But σ_1 must also pass either through A_1 or B_1; for if it did not do so, the polars of these points would coincide with σ_2 (art. 17 **c**), which is impossible, because σ_2 could not pass at one and the same time through P_2, A_2, and B_2 (art. 27). It is obvious, however, that $\overline{P_1 A_1}$ and $\overline{P_2 B_2}$, as well as $\overline{P_1 B_1}$ and $\overline{P_2 A_2}$, will be associated singular lines of an exceptional correlation satisfying the given conditions. Hence the *system includes two, and only two, exceptional correlations with singular lines.*

$\pi = 2$ Again, P_1 cannot coincide with a singular point Σ_1; for if it did, the pole of c_1 would coincide, in the associated singular point Σ_2, with P_2, the pole of p_1 (art. 17 **a**); whereas, by hypothesis, the pole of c_1 lies on c_2. Hence Σ_2, if it exist, must lie on p_2 (art. 17 **b**), and for a like reason its associate Σ_1 must lie on p_1. Moreover, if Σ_1 were not on c_1, its associate Σ_2 would, as pole of c_1 (art. 17 **a**), lie on c_2; and *vice versâ,* if Σ_2 were not on c_2, its associate Σ_1 would lie on c_1. Hence we conclude that the *system includes two exceptional correlations with singular points.* In one of these Σ_1 is at $(p_1 c_1)$, and its associate Σ_2 is the sole point on p_2 which satisfies the relation

$$(p_1 c_1)(p_1 P_1 A_1 B_1) = \Sigma_2 (P_2 p_2 A_2 B_2);$$

in the other, Σ_2 is at $(p_2 c_2)$, and its associate Σ_1 is the sole point on p_1 which fulfils the condition

$$\Sigma_1 (p_1 P_1 A_1 B_1) = (p_2 c_2)(P_2 p_2 A_2 B_2).$$

In the present case, therefore, we have as result,

$$\lambda = 2, \quad \pi = 2, \quad \mu = 2, \quad \nu = 2.$$

(1050) 34. We have now reached the fifth group of fundamental systems of correlations, the first in which is the system (1050) defined by the symbol

$$\begin{pmatrix} P_1 & A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 \\ p_2 & A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda = 0$ Here *there can be no exceptional correlations with singular lines;* for since no such line σ_1 could pass through more than two of the five given points $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1$ (art. 27), the polars of at least three of these points would be coincident in σ_2 (art. 17 **c**), and therefore could not all pass through the points respectively conjugate to them.

$\pi = 3$ On the other hand, it is obvious here, as in art. 30, that P_1 *would be the singular point of one exceptional correlation in the system,* its associate being the sole point Σ_2 in the second plane for which

$$P_1 (A_1 B_1 C_1 D_1 E_1) = \Sigma_2 (A_2 B_2 C_2 D_2 E_2).$$

If there be any singular point Σ_1, not coincident with P_1, then its associate Σ_2 must lie on p_2 (art. 17 **b**), and by art. 16, the two points must satisfy the homographic relation

$$\Sigma_1(P_1A_1B_1C_1D_1E_1)=\Sigma_2(p_2A_2B_2C_2D_2E_2), \tag{1}$$

an equation of which there are two solutions. The proof of this depends upon the following Theorem:

S_2 *being any point on* p_2, *the locus of a point* S_1 *such that*

$$S_1(P_1A_1B_1C_1D_1)=S_2(p_2A_2B_2C_2D_2) \tag{2}$$

is a cubic which passes through $A_1B_1C_1D_1$, *and has a double point at* P_1. In fact, it has already been proved in art. 32, that on any line drawn through one of these four points, say A_1, there are, exclusive of the point A_1 which is arbitrary, two points S_1 which satisfy the relation (2); and A_1 itself obviously does so when S_2 has the position determined, as at the end of art. 29, by the relation

$$A_1(P_1B_1C_1D_1)=S_2(p_2B_2C_2D_2).$$

Moreover, P_1 is a double point of the cubic, because, as in art. 31 (1), there are two points S_2 on p_2 such that

$$P_1(A_1B_1C_1D_1)=S_2(A_2B_2C_2D_2).$$

In like manner, the locus of a point S'_1 such that

$$S'_1(P_1A_1B_1C_1E_1)=S_2(p_2A_2B_2C_2E_2)$$

is another cubic having a double point at P_1, and also passing through $A_1B_1C_1E_1$.

Now, exclusive of the double point P_1 (which counts as four intersections), and the three points A_1, B_1, C_1, none of which leads to a solution of (1), these two cubics intersect in two points Σ_1, each of which, with its associated point Σ_2 on p_2 [determined by the relation

$$\Sigma_1(P_1A_1B_1C_1)=\Sigma_2(p_2A_2B_2C_2),$$

and, therefore, the same for both cubics] obviously satisfies the relation (1). We conclude, therefore, that *the system now under consideration includes three exceptional correlations with singular points.*

We have again, therefore, the values

$$\lambda=0, \quad \pi=3, \quad \mu=1, \quad \nu=2.$$

35. The second system in the fifth group of art. 24 has the signature (1041)

(1041) and the symbol

$$\begin{pmatrix} P_1 & A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & e_1 \\ p_2 & A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & e_2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda=0$ By a process of reasoning similar to that employed in the last two articles, it may be readily shown that in the present system *there are no exceptional correlations which have singular lines.*

$\pi=6$ If any singular point Σ_1 were coincident with P_1, the pole of e_1 would coincide with its associate Σ_2 (art. 17 **a**). Hence, and from art. 16, we conclude that the singular point Σ_2 associated with P_1 lies on e_2 and satisfies the relation

$$P_1(A_1 B_1 C_1 D_1) = \Sigma_2(A_2 B_2 C_2 D_2).$$

Of this there are obviously two solutions (art. 31), in other words, *there are two points Σ_2 on e_2 each of whose associates is coincident with* P_1.

Again, if there were any singular point Σ_1 not coincident with P_1, its associate Σ_2 would necessarily lie on p_2 (art. 17 **b**), and satisfy the relation

$$\Sigma_1(P_1 A_1 B_1 C_1 D_1) = \Sigma_2(p_2 A_2 B_2 C_2 D_2).$$

Now all such points Σ_1, as we have proved in the preceding article, lie on a cubic S_1^3 which passes through $A_1 B_1 C_1 D_1$ and has a double point at P_1. Hence, and from the fact that Σ_2 must lie on e_2 whenever Σ_1 is not on e_1, and *vice versâ,* that Σ_1 must lie on e_1 whenever Σ_2 is not on e_2 (art. 17 **a**), we conclude that there are *four, and only four, possible positions of Σ_2 on p_2*. In fact, in one of them Σ_2 coincides with $(p_2 e_2)$, and its associate Σ_1 is the sole point on S_1^3 which satisfies the relation

$$\Sigma_1(P_1 A_1 B_1 C_1 D_1) = (p_2 e_2)(p_2 A_2 B_2 C_2 D_2),$$

whilst, in its remaining three positions on the line p_2, Σ_2 corresponds, respectively, to the three intersections $\Sigma_1' \Sigma_1'' \Sigma_1'''$ of e_1 and the cubic (S_1^3).

On the whole, therefore, *there are in the system six exceptional correlations with singular points.* We have consequently the values,

$$\lambda=0, \quad \pi=6, \quad \mu=2, \quad \nu=4.$$

(1032) 36. The last of the systems we have to consider in Group V has the signature (1032), and is defined by the symbol

$$\begin{pmatrix} P_1 & A_1 & B_1 & C_1 & d_1 & e_1 \\ p_2 & A_2 & B_2 & C_2 & d_2 & e_2 \end{pmatrix}.$$

If there be any singular line σ_1 it must pass through P_1, for otherwise its associate σ_2 would coincide with p_2, and the polars of $A_2B_2C_2$ would be coincident with σ_1 (art. 17 **c**), instead of passing, respectively, through $A_1B_1C_1$. Moreover, σ_1 must likewise pass through one of the points $A_1B_1C_1$, otherwise the polars of these points would be coincident with σ_2, instead of passing, respectively, through $A_2B_2C_2$. But if σ_1 pass through P_1 and one of the points $A_1B_1C_1$, its associate σ_2, with which the polars of the other two will coincide (art. 17 **c**), must pass through the conjugates of the remaining two points. On the other hand, it is obvious that all the seven given conditions could be satisfied, and in one way only, by each exceptional correlation of the above kind. $\lambda = 3$

Hence we conclude that in *the system there are three exceptional correlations with singular lines;* the latter being $\overline{P_1A_1}$ and $\overline{B_2C_2}$, $\overline{P_1B_1}$ and $\overline{C_2A_2}$, and $\overline{P_1C_1}$ and $\overline{A_2B_2}$, respectively. $\pi = 6$

If P_1 were a singular point, (d_2e_2) would be its associate, since the poles of d_1 and e_1 would necessarily coincide with this associate (art. 17 **a**), and. at the same time, be situated on d_2 and e_2 respectively. Moreover, it is obvious that one, and only one, exceptional correlation, with these singular points satisfies the required conditions.

Since, in any other possible correlation with singular points, P_1 would not coincide with Σ_1, Σ_2 would necessarily lie on p_2 (art. 17 **b**). Further, if Σ_2 were not coincident with either of the points in which p_2 is intersected by d_2 and e_2, then the poles of the latter lines would coincide, in (d_1e_1), with Σ_1 (art. 17 **a**). This is clearly possible, and in one way only (art. 29); the necessary and sufficient relation to be satisfied by Σ_2 being

$$(d_1e_1)(P_1A_1B_1C_1) = \Sigma_2(p_2A_2B_2C_2).$$

If Σ_2 were coincident with (p_2d_2), then Σ_1, as pole of e_2, would be situated on e_1, and satisfy the equation

$$\Sigma_1(P_1A_1B_1C_1) = (p_2d_2)(p_2A_2B_2C_2);$$

of this equation there are obviously two solutions (art. 31).

In like manner, if Σ_2 were coincident with (p_2e_2), then there would be two positions of Σ_1, on d_2, each of which would satisfy the necessary and sufficient condition

$$\Sigma_1(P_1A_1B_1C_1) = (p_2e_2)(p_2A_2B_2C_2).$$

We conclude, therefore, that *the system under consideration contains, on the whole, six exceptional correlations with singular points.*

The following are the numerical values deducible from the above results:

$$\lambda=3,\quad \pi=6,\quad \mu=4,\quad \nu=5.$$

(0070) 37. The first of the four systems in Group VI. has the signature (0070), and is thus defined:

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 & G_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 & G_2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda=0$ There are here, as in art. 34, *no correlations with singular lines.*

$\pi=3$ The necessary and sufficient conditions to be fulfilled by a pair of singular points is

$$\Sigma_1(A_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1)=\Sigma_2(A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2), \tag{1}$$

of which equation, as Sturm and others have shown, *there are three solutions.* This important theorem results, in fact, from the following considerations: In art. 34 (1) it has been shown that, irrespective of F_2 (which is an arbitrary point), there are on any line f_2 passing through F_2, two points S_2, to each of which corresponds a point S_1, such that

$$S_1(A_1B_1C_1D_1E_1F_1)=S_2(A_2B_2C_2D_2E_2F_2). \tag{2}$$

It is obvious, too, that F_2 itself counts as one such point; since one, and only one, point S_1 can be found to satisfy the condition

$$S_1(A_1B_1C_1D_1E_1)=F_2(A_2B_2C_2D_2E_2).$$

Hence, and from symmetry, we infer that the locus of the point S_2, to which another point S_1 can correspond so as to satisfy the condition (2), is a cubic passing through the six points $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$. The corresponding points S_1 lie, of course, on another cubic, passing through $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, between whose points and those of the first cubic a (1, 1) correspondence obviously exists.

In like manner, the locus of each of the points S_1, S_2, which satisfy the relation

$$S_1(A_1B_1C_1D_1E_1G_1)=S_2(A_2B_2C_2D_2E_2G_2) \tag{3}$$

is a cubic passing, respectively, through the six points $A_1B_1C_1D_1E_1G_1$, and the six points $A_2B_2C_2D_2E_2G_2$. Exclusive of the five points $A_2B_2C_2D_2E_2$ and of another point S_2, which may be termed the *satellite* of this group of five out of the seven points $A_2B_2C_2D_2E_2F_2G_2$, the above two cubic loci in the second plane intersect in three points Σ_2, which, with their associated points Σ_1, satisfy the relation (1).

The excluded point S_2 is that which corresponds to *every* point S_1 on the conic $(A_1B_1C_1D_1E_1)$ in such a manner that

$$S_1(A_1B_1C_1D_1E_1)=S_2(A_2B_2C_2D_2E_2). \tag{4}$$

It is, obviously, the fourth intersection of two conics $(S'_2)(S''_2)$ circumscribed to the triangle $A_2B_2C_2$, one of which passes through D_2, and makes

$$(S'_2)(A_2B_2C_2D_2)=E_1(A_1B_1C_1D_1),$$

and the other passes through E_2, and makes

$$(S''_2)(A_2B_2C_2E_2)=D_1(A_1B_1C_1E_1).$$

This point S_2 is excluded for the following reason: Each of the cubic loci, in the first plane, determined by (2) and (3), cuts the conic $(A_1B_1C_1D_1E_1)$ once again; but under the assumption in art. 27 these two points of intersection will not be coincident, although by (2) and (3) each will have S_2 for its correspondent. Hence, although S_2 is common to the two cubics in the second plane, it cannot be regarded as one of the points Σ_2 with which a point Σ_1 is so associated as to satisfy the relation (1). It is easy to see, however, that the satellite S_2, defined by (4), is the only one of the four intersections of the two cubics, in the second plane, which fails to lead to a solution of (1).

We conclude, therefore, that the *system under consideration contains three exceptional correlations with singular points;* accordingly, we have the values

$$\lambda=0, \quad \pi=3, \quad \mu=1, \quad \nu=2.$$

38. We proceed to the second system (0061) of Group VI., the symbol for which is (0061)

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & F_1 & g_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & F_2 & g_2 \end{pmatrix}.$$

For the reasons stated in art. 34, *this system can contain no exceptional correlations with singular lines.* $\lambda=0$

If Σ_1, Σ_2 be the associated singular points of any exceptional correlation, the condition $\pi=6$

$$\Sigma_1(A_1B_1C_1D_1E_1F_1)=\Sigma_2(A_2B_2C_2D_2E_2F_2) \tag{1}$$

must be satisfied. Hence, as we have seen in art. 37, Σ_1 and Σ_2 must be corresponding points on two cubics; one of which passes through $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, as well as through the satellite of each of the six groups of five selected from these six points, and the other passes through $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$, as well as through the six satellites similarly connected therewith.

Besides satisfying the relation (1), however, it is to be remembered that if Σ_1 be not situated on g_1, then Σ_2 must lie on g_2; and further, that if Σ_2 be not on g_2, then Σ_1 must be on g_1, whence we conclude that *in the system there are six, and only six, exceptional correlations with singular points,* and that in three of these Σ_1 is on g_1, whilst in the other three Σ_2 is on g_2.

We have thus the following system of values:

$$\lambda=0, \quad \pi=6, \quad \mu=2, \quad \nu=4.$$

(0052) 39. We pass now to the third system (0052) of the Group VI., the symbol for which is

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & E_1 & f_1 & g_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & E_2 & f_2 & g_2 \end{pmatrix}.$$

$\lambda=0$ *Here again there are no exceptional correlations with singular lines.*

$\pi=12$ One condition to be satisfied by the singular points of every exceptional correlation which the system may contain is

$$\Sigma_1(A_1B_1C_1D_1E_1)=\Sigma_2(A_2B_2C_2D_2E_2), \tag{1}$$

in virtue of which to each point Σ_1 will correspond, in general, one, and only one, point Σ_2, and *vice versâ* (*). Hence we infer that *there can be but one position for Σ_1 exterior to both the lines f_1 and g_1,* for in such a case its associate would necessarily coincide with (f_2g_2) (art. 17 **a**). That there will be one such position of Σ_1, however, follows from the assumption in art. 27.

In like manner, *there will be one, and only one, exceptional correlation in which Σ_1 will be coincident with (f_1g_1), and its associate exterior both to f_2 and g_2.*

In all other cases, Σ_1 will lie on f_1, and therefore Σ_2 on g_2; or else Σ_1 will be on g_1, and Σ_2 on f_2. To decide how often the first of these cases will present itself, it will clearly suffice to determine the order of the locus of the points Σ_2 which, by the relation (1), correspond to the several points Σ_1 of the right line f_1.

(*) The only exceptions to this arise when Σ_1 (or Σ_2) coincides with one of the five points in its plane, or with the satellite S_1 (or S_2) of these five (art. 37).

To do this we will first enquire into the number of points in which any line a_2, passing through A_2, is intersected by the required locus. Now we have already proved that the locus of the point Σ_1 which satisfies the condition

$$\Sigma_1(A_1 B_1 C_1 D_1 E_1) = \Sigma_2(A_2 B_2 C_2 D_2 E_2)$$

is a cubic passing through $B_1 C_1 D_1 E_1$ and having a double point at A_1 (art. 34). Hence we may say that, exclusive of the point A_2, which has a perfectly arbitrary position on a_2, there are three positions of Σ_2 on a_2, to which correspond three positions of Σ_1 on f_1, such that the relation (1) is satisfied.

It is obvious, however, that this relation will also be satisfied when Σ_2 coincides with A_2, and Σ_1 with either of the intersections of f_1 and the conic (S_1), through $B_1 C_1 D_1 E_1$, determined by the anharmonic relation

$$(S_1)(B_1 C_1 D_1 E_1) = A_2(B_2 C_2 D_2 E_2).$$

Hence, and from symmetry, we conclude that *if Σ_1 describe any right line f_1, the locus of the point Σ_2, associated therewith by the relation* (1), *is a quintic which has a double point at each of the five points* $A_2 B_2 C_2 D_2 E_2$.

This quintic, *which has moreover a sixth double point* (at the satellite S_2 of the above five points) corresponding to the intersections of f_1 and the conic $(A_1 B_1 C_1 D_1 E_1)$, cuts g_2 in five points Σ_2, to each of which corresponds, by (1), a point Σ_1 situated on f_1; whence we infer *that there are five exceptional correlations in the system under consideration, of which one singular point lies in f_1, and its associate in g_2*. In like manner we conclude that *there are five exceptional correlations of which one singular point lies in g_1, and its associate in f_2*.

Altogether, therefore, *the system includes twelve exceptional correlations with singular points, but none with singular lines*. Accordingly we have the following numerical values:

$$\lambda = 0, \quad \pi = 12, \quad \mu = 4, \quad \nu = 8.$$

40. We have now arrived at the last of the fundamental systems which need investigation. Its signature is (0043) and its symbol (0043)

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & e_1 & f_1 & g_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 & e_2 & f_2 & g_2 \end{pmatrix}.$$

For reasons before stated (art. 36), every singular line σ_1 must pass $\lambda = 6$

through two of the four points $A_1B_1C_1D_1$, and its associate σ_2 must pass through the conjugates of the remaining two; moreover, it is easily seen that the seven given conditions can be satisfied, and that in one way only, by an exceptional correlation whose singular lines have any one of the six possible positions above indicated. Hence *in the system there are six correlations with singular lines.*

$\pi=12$ The associated singular points Σ_1, Σ_2 of every exceptional correlation in the system must, in the first place, satisfy the anharmonic relation

$$\Sigma_1(A_1B_1C_1D_1)=\Sigma_2(A_2B_2C_2D_2).$$

The position of one of the two points being known, therefore, we have at once a conic on which the other must be situated.

Now the point Σ_1 must lie in one, at least, of the three lines $e_1f_1g_1$, otherwise the poles of these lines would be coincident in Σ_2 (art. 17 **a**), which is obviously inconsistent with the condition of their being situated, respectively, on e_2, f_2, and g_2. Again, if Σ_1 lie on one only of the three lines $e_1f_1g_1$, then its associate will necessarily coincide with the intersection of the conjugates of the other two, and Σ_1 itself will be coincident with one of the two points in which the first line is intersected by a conic determined by (1). Lastly, if Σ_1 coincide with an intersection of any two of the lines $e_1f_1g_1$, then Σ_2 will necessarily coincide with one of the two points in which the conjngate of the third line is intersected by another conic, likewise determined by (1). In every possible case, therefore, one of the associated points Σ_1, Σ_2 must coincide with the intersection of two of three given lines, and the other must have one of two known positions on the conjugate of the third.

Taking all possible combinations into consideration, and remembering that each one of them leads to two exceptional correlations satisfying the seven conditions, we conclude that *the system under consideration contains twelve exceptional correlations with singular points.* We have consequently the following system of values:

$$\lambda=6, \quad \pi=12, \quad \mu=8, \quad \nu=10.$$

41. The class, order, and singularities of each of the thirteen fundamental systems, arranged in the left-hand column in art. 24, having now been determined, those of the remaining thirteen systems may, as stated in art. 25, be deduced by the Principle of Duality. The results may be thus tabulated:

Group.	Signature. $(\alpha\beta\gamma\delta)$	Characteristics. μ	ν	Singularities. π	λ
I.	(3010)	1	2	3	0
	(0301)	2	1	0	3
II.	(2110)	1	1	1	1
	(1201)	1	1	1	1
III.	(2030)	1	2	3	0
	(2021)	2	3	4	1
	(0212)	3	2	1	4
	(0203)	2	1	0	3
IV.	(1130)	1	2	3	0
	(1121)	2	2	2	2
	(1112)	2	2	2	2
	(1103)	2	1	0	3
V.	(1050)	1	2	3	0
	(1041)	2	4	6	0
	(1032)	4	5	6	3
	(0123)	5	4	3	6
	(0114)	4	2	0	6
	(0105)	2	1	0	3
VI.	(0070)	1	2	3	0
	(0061)	2	4	6	0
	(0052)	4	8	12	0
	(0043)	8	10	12	6
	(0034)	10	8	6	12
	(0025)	8	4	0	12
	(0016)	4	2	0	6
	(0007)	2	1	0	3 (*)

(*) The meanings of the symbols being suitably modified, the results contained in this Table are at once applicable to the case of two homographic planes. For by the method employed in art. 15, we have, corresponding to every system of correlations $(\alpha\beta\gamma\delta)$ in two planes Π_1, Π_2, *a system of homographic relations* $(\alpha\beta\gamma\delta)$ in the planes Π_1, Π', which satisfy seven conditions of the following type: α points in the first plane correspond to given points in the second; β lines in the first plane correspond to given lines in the second; γ points in the first plane each correspond to a point on a given line in the second; and δ lines in the first plane each correspond to a line through a given point in the second. Every such system of homographic relations contains exceptional ones. In π of these there is a singular point in the first plane and a singular line in the second, whilst in λ others there is a singular line in the first plane and a singular point in the

Number of Correlations satisfying eight Elementary Conditions.

42. The number of correlations which satisfy any eight elementary conditions may be readily determined from the preceding Table. In fact, if we indicate this number by the symbol $[\alpha\beta\gamma\delta]$, where α, β, γ, δ have the same signification as before (art. 23), but now satisfy the equation

$$2\alpha+2\beta+\gamma+\delta=8,$$

we shall clearly have $[\alpha\beta\gamma\delta]$ *equal to the class of the system of correlations* $(\alpha\beta\overline{\gamma-1}\,\delta)$, *as well as to the order of the system of correlations* $(\alpha\beta\gamma\overline{\delta-1})$. But the systems $(\alpha\beta\gamma\delta)$ and $(\beta\alpha\gamma\delta)$ being identical (art. 23), and the *class* and *order* of the system $(\alpha\beta\gamma\delta)$ being the same, respectively, as the *order* and *class* of the system $(\beta\alpha\delta\gamma)$ (art. 25), it follows that

$$[\alpha\beta\gamma\delta]=[\beta\alpha\gamma\delta]=[\alpha\beta\delta\gamma]=[\beta\alpha\delta\gamma],$$

in other words, that γ and δ as well as α and β are interchangeable in the symbol $[\alpha\beta\gamma\delta]$. The following Table, therefore, gives the number of solutions in all possible cases where the eight given conditions are of the elementary kind described in art. 22:

$$[4000]=1;$$

$$[3100]=1;$$

$$[2200]=0;$$

$$[3020]=1,$$
$$[3011]=2;$$

---

second (art. 14). The points which correspond, in the several homographic relations of a system, to a given point in the first plane, lie on a curve of the order μ in the second; those which correspond to a point in the second plane, however, lie on a curve of the order ν in the first. Similarly, the lines which correspond to a given line in the first plane envelope a curve of the class ν in the second, whilst those which correspond to a line in the second plane envelope a curve of the class μ in the first.

It is worth observing that if each point in the plane Π_1 be connected with every point in the plane Π' which corresponds thereto, in the several homographic relations of a system whose characteristics are μ and ν, we shall have, in space, a *complex of the degree* $\mu+\nu=\lambda+\pi$ [art. 20 (2)], of which Π_1 and Π' are singular planes. We have consequently twenty-six distinct complexes associated with the several fundamental systems of homographic relations satisfying seven conditions.

$$[2120] = 1,$$
$$[2111] = 1;$$

$$[2040] = 1,$$
$$[2031] = 2,$$
$$[2022] = 3;$$

$$[1140] = 1,$$
$$[1131] = 2,$$
$$[1122] = 2;$$

$$[1060] = 1,$$
$$[1051] = 2,$$
$$[1042] = 4,$$
$$[1033] = 5;$$

$$[0080] = 1,$$
$$[0071] = 2,$$
$$[0062] = 4,$$
$$[0053] = 8,$$
$$[0044] = 10 \quad (*).$$

43. The only results in the above Table which cannot be obtained in the manner described in art. 42 are the first three. Of these, however the first is well known, and has already been alluded to in art. 3. The second differs in form only from the first; for whenever the poles of three lines are given, as in the first case, the polars of three points (the intersections of the given lines) are always known, and *vice versâ*. With respect to the third result, it will be at once seen, on writing the eight conditions in full thus:

$$P_1, \quad Q_1, \quad r_1, \quad s_1$$
$$p_2, \quad q_2, \quad R_2, \quad S_2$$

that they cannot possibly be satisfied by any correlation unless the anharmonic ratios $(r_1 s_1)(Q_1 P_1 r_1 s_1)$ and $\overline{R_2 S_2}(p_2 q_2 R_2 S_2)$ are equal to one another. The assumption of any such equality, however, would be inconsistent with that already made in art. 27, in virtue of which the positions of the given points and lines are perfectly arbitrary.

(*) This Table obviously gives, also, the number of ways in which two planes may be rendered homographic (or put in perspective with each other) so as to satisfy eight conditions of the kind described in the note to art. 41.

Connexes determined by Fundamental Systems of Correlations.

44. In art. 18 allusion was made to the series (doubly infinite) of curves of the class μ, and to the series of curves of the order ν, which every system of correlations, satisfying seven conditions, determines in each of the two planes; and in art. 22 it was observed that upon a more intimate knowledge of the properties of these curves must depend the solution of the general problem of correlation. Although unprepared, at present, to treat this wide subject exhaustively, I propose, before terminating the present paper, to indicate briefly the more salient features of a few of the simplest series of curves of the above kind.

45. Before commencing to do so, I may observe that, according to the terminology employed by Clebsch in a very suggestive posthumous paper recently published in the « Mathematische Annalen » (vol. 6, p. 203), each point of one of our two planes, and its polar in any correlation of a system, constitute an *element of a connex* of the class μ and order ν; (*) whilst each point in the other plane, and any one of its polars constitute an element of the *conjugate connex*. As illustrations, therefore, of the Theory originated by the eminent Geometer, whose loss to science is so universally deplored, as well as on account of their application to the general problem of correlation, the well-defined conjugate connexes to which the several fundamental systems of correlations lead are well worthy of full investigation (**).

46. Each curve of the class μ may be termed the *representative* of the point by whose polars it is enveloped, and each curve of the order ν the *representative* of the line of whose poles it is the locus. It is obvious that *every representative of a point touches all the singular lines in its plane, and every representative of a line passes through all the singular points in its plane.*

(*) A connex $(\mu\nu)$, of the class μ and order ν, is defined by a given relation

$$(\xi,\ \eta,\ \zeta)^{\mu}(x,\ y,\ z)^{\nu}=0$$

between the coordinates x, y, z of a point, and the coordinates ξ, η, ζ of an associated right line.

(**) I may here mention that this investigation was in a tolerably advanced state eighteen months ago, when my studies were interrupted by other duties. Uncertainty as to when these studies may be resumed, has at length induced me, contrary to my original intention, to publish the present paper, before completing the whole enquiry.

47. Each of the systems (3010), (2030), (1130), (1050), and (0070) leads to a pair of conjugate connexes of the first class and second order. Connex (12) In each of these five systems, a point in either plane is represented by a point in the other plane, (in other words, every point of the plane has its conjugate, exactly in the same manner as the given points have), whilst every line is represented by a conic passing through the three fixed singular points of the three exceptional correlations which each system includes.

We have here, in fact, the well-known case of the *Quadric Correspondence* of two planes, presented in its most general form; the three pairs of singular points being identical with the three pairs of Principal Points. The five systems above enumerated correspond, obviously, to the five different ways of determining a Quadric Correspondence by means of given Corresponding Points, Principal Points, and Principal Lines (*).

48. The systems (0301), (0203), (1103), (0105), and (0007) all lead to connexes of the second class and first order. Connex (21) Every right line, in each of these systems, is represented by a right line; in other words, every line has its conjugate, in exactly the same sense as the given lines have. Every point, however, is represented by a conic touching the singular lines of the three exceptional correlations which each system includes. In short, we have here a correspondence established between two planes which is, simply, the correlative of the ordinary Quadric Correspondence (**).

49. Of the remaining sixteen fundamental systems of correlations, by far the simplest are the two whose signatures are (2110) and (1201), both Connex (11) of which lead to one and the same kind of connex of the first class and first order.

In illustration of this I will consider briefly the first of the two systems. Its complete definition is given by the symbol

$$\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 & r_1 & A_1 \\ p_2 & q_2 & R_2 & A_2 \end{pmatrix}$$

(*) See REYE on *Geometrische Verwandschaften zweiten Grades*, in the *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, vol. XI, 1865.

(**) The fact that we have no distinctive name for this correspondence is doubtless due to the circumstance that no terms correlative to the very convenient ones *quadric*, *cubic*, &c. are yet in general use. A special case of the correspondence in question was briefly described in my paper « On the Quadric Inversion of Plane Curves, » published in the Proceedings of the Royal Society, vol. XIV, 1865, and in the « Annali di Matematica pura ed applicata, » Tom. VII, Roma, 1865. It was also distinctly referred to in the paper by REYE above cited.

and, as shown in art. 29, it contains two exceptional correlations; of which one has the singular lines $\sigma_1 \equiv \overline{P_1 Q_1}$ and $\sigma_2 \equiv \overline{R_2 A_2}$, whilst the other has the singular points $\Sigma_2 \equiv (p_2 q_2)$, and Σ_1; the latter point being so situated, on r_1, that

$$\Sigma_1(P_1 Q_1 r_1 A_1) = \Sigma_2(p_2 q_2 R_2 A_2).$$

Since the characteristics are $\mu = 1$ and $\nu = 1$, it is obvious, *first*, that the polars of any point (say M_1) in any *two* correlations of the system (*e.g.*, in the two exceptional ones) determine, by their intersection, the point M_2, through which all the other polars of M_1 pass; and, *secondly*, that the poles of any right line m_1 in the two exceptional correlations determine the line m_2, upon which all the other poles of m_1 are situated. Now if M_1 be neither coincident with Σ_1 nor situated on σ_1, its polar in the exceptional correlation with singular lines will coincide with the singular line σ_2 (17 **a**), and its polar m_2, in the exceptional correlation with singular points, will pass through Σ_2 (17 **b**), and be determined by the relation

$$\Sigma_1(P_1 Q_1 r_1 M_1) = \Sigma_2(p_2 q_2 R_2 m_2).$$

Consequently, every such point M_1 is *represented*, in the connex, by a *point* $M_2 \equiv (m_2 \sigma_2)$ *on the singular line* σ_2. If M_1 were coincident with Σ_1, however, m_2 would be perfectly indeterminate (art. 16), and its representative M_2 would, as a consequence, be *an indeterminate point on* σ_2. Lastly, if M_1 were situated on σ_1, then, although m_2 would be determined by (1), as before, the polar of M_1 in the exceptional correlation with singular lines would be an indeterminate line through $(m_2 \sigma_2)$ (art. 16); and since the latter in one of its possible positions would be coincident with m_2, the representative of M_1 must be regarded as an *indeterminate point in* m_2 (*).

50. The peculiar *point by point* representation to which we are led by the system of correlations under consideration is such, therefore, that 1) the singular point of either plane is represented by an indeterminate point in the singular line of the other plane; 2) a point in the singular line of either plane is represented by an indeterminate point in a determinate line through the singular of the other plane; 3) every other point in the first

(*) It is obvious that, in all the correlations of the system, except that which has singular lines, the polars of a point on a singular line in either plane are *coincident* with a line which passes through the singular point of the other plane.

plane is represented by a perfectly determinate point in the singular line of the second plane. From similar considerations we infer that the *line by line* representation, to which the present system of correlations leads, may be briefly described thus: 1) a singular line is represented by an indeterminate line through a singular point; 2) a line through a singular point, by an indeterminate line through a determinate point on a singular line; 3) every other line, in either plane, is represented by a perfectly determinate line through a singular point.

51. It will be observed that the representation just described is not, even in an exceptional sense, homographic; since one of the characteristic properties of homographic correspondence is not fulfilled by it, — I mean that property, in virtue of which to a point in a line always corresponds a point in the corresponding line. The representation above indicated, however, as well as that termed homographic, is to be regarded as one of the forms to which a connex of the first class and first order may lead.

52. It is also worth observing that in the connex now under consideration the locus of the points which represent those situated in a given right line of either plane, breaks up into the representative of that line in the other plane, and the singular line of the latter plane; and further, that the envelope of the lines which represent those passing through a given point of either plane, breaks up into the representative of that point in the other plane, and the singular point of the latter plane.

We have here, in fact, the simplest case of a general theorem which holds for all the connexes determined by the fundamental systems of art. 41, and which may be thus enumerated:

The curve, of the order ν, which represents any straight line, is always a constituent part of the envelope of the curves, of the class μ, which represent the several points of that line; and, vice versâ, the curve, of the class μ, which represent any point, is always a constituent part of the envelope of the curves, of the order ν, which represent the several right lines passing through that point (*). In proof of this, it will be suf-

(*) In studying the properties of the various connexes, this theorem is of the greatest utility. It was to it, as a fruitful source of theorems on Envelopes, that I referred in a Note published in the *Educational Times* for December, 1871 (Reprint, vol. XVI, p. 99). The theorems demonstrated in that Note were special cases of more general ones, deducible from the connex treated of in art. 53.

ficient to show that if A_1 and a_2 be pole and polar in any correlation of a system, then, in that same correlation, the tangent at A_1 to the representative of a_2, and the point of contact of a_2 with the representative of A_1, will also be pole and polar (*). Now in the correlation immediately following the *first*, let a'_2 be the polar of A_1, and A'_1 the pole of a_2, in which case, of course, $(a_2 a'_2)$ will be the pole of $\overline{A_1 A'_1}$. Then, ultimately, as the latter correlation approaches to identity with the first, $(a_2 a'_2)$ becomes the point of contact of a_2 with the representative of A_1, and $\overline{A_1 A'_1}$ becomes the tangent at A_1 to the representative of a_2.

Connex (22) 53. The connexes, of the second class and second order, to which the systems (1121) and (1112) give rise, are essentially the same in character. We may confine our attention, therefore, to the first system, which has been denoted in art. 33 by the symbol

$$\begin{pmatrix} P_1 & p_1 & A_1 & B_1 & c_1 \\ p_2 & P_2 & A_2 & B_2 & c_2 \end{pmatrix},$$

and found to include four exceptional correlations. One of these has the singular lines $\sigma'_1 \equiv \overline{P_1 A_1}$, $\sigma'_2 \equiv \overline{P_2 B_2}$; another the singular $\sigma_1'' \equiv \overline{P_1 B_1}$ and $\sigma_2'' \equiv \overline{P_2 A_2}$; a third has the singular points $\Sigma'_1 \equiv (p_1 c_1)$ and Σ'_2, the latter being so situated on p_2 that

$$(p_1 c_1)(p_1 P_1 A_1 B_1) = \Sigma'_2 (P_2 p_2 A_2 B_2);$$

and the fourth has the singular points Σ''_1 and $\Sigma''_2 \equiv (p_2 c_2)$, of which the former is so situated on p_1 that

$$\Sigma_1''(p_1 P_1 A_1 B_1) = (p_2 c_2)(P_2 p_2 A_2 B_2).$$

The conjugate connexes to which we are led by the present system are such that every point, in either plane, is represented by a conic which touches the two singular lines of the other plane, and every right line in the first plane is represented by a conic which passes through the two singular points of the second.

54. It should be observed, however, that *the conics which represent the several points of each singular line, degenerate to point-pairs.*

(*) It is in consequence of this that the two connexes, to which every system of correlations leads, are *conjugate* in the manner defined by Clebsch, at p. 208 of the paper referred to in art. 45.

Thus, if M_1 be a point on the singular line σ'_1, its polar, in the exceptional correlation whose singular lines are σ'_1 and σ'_2, is an *indeterminate line* through the point M'_2, on σ'_2, which is determined by the relation

$$\sigma'_1(P_1 p_1 c_1 M_1) = \sigma'_2(p_2 P_2 c_2 M'_2). \tag{1}$$

Hence we at once infer that the conic which represents M_1 breaks up into the point M'_1, and another point M_2. The latter point must be situated on σ_2'', because this line is the polar of M_1 in the exceptional correlation whose singular lines are σ_1'' and σ_2'' (17 **c**), and it must also satisfy the relation

$$\sigma'_1(P_1 p_1 A_1 M_1) = \sigma_2''(p_2 P_2 A_2 M_2), \tag{2}$$

because the polars of M_1, in the correlation whose singular points are Σ'_1 and Σ'_2, as well as its polar in the correlation whose singular points are Σ_1'' and Σ_2'', obviously pass through the point M_2 thus determined. This point M_2, it will be observed, is conjugate to M_1 in precisely the same sense that A_2 is conjugate to A_1; in fact, we may say that *every point on a singular line of either plane has a conjugate point situated on the non-associated singular line of the other plane.*

The relations (1) and (2) also show that there is a (1, 1) correspondence between the points M_2 and M'_2 of a nature such that when one of them coincides with P_2, or falls upon p_2, the other does the same. Hence, by a well known theorem, we conclude that $\overline{M_2 M'_2}$ always passes through a fixed point S'_2 on p_2. In like manner, it can be shown that every point N_1 on the singular line σ_1'' is represented by a point-pair, N_2 (on σ'_2) and N_2'' (on σ_2''), whose double tangent $\overline{N_2 N_2''}$ passes through a fixed point S''_2 on p_2. It can be shown, moreover, that *the six points* Σ'_2, Σ''_2, M_2, M'_2, N_2, N''_2 *always lie on a conic;* and by the theorem of art. 52 we at once infer that *this is the conic which represents the arbitrary line* $\overline{M_1 N_1}$.

55. In a precisely similar manner, the following properties may be established:

Every line through a singular point of either plane has a conjugate line passing through the non-associated singular point of the other plane.

Every right line m_1 passing through the singular point Σ'_1 is represented by a line-pair m_2, m'_2, of which m'_2 passes through Σ'_2 and m_2 through Σ_2'', and the double point $(m_2 m'_2)$ of this line-pair lies on a fixed line s'_2 passing through P_2.

Every line n_1 passing through Σ_1'' is represented by a line-pair $n_2\, n_2''$, of which n_2'' passes through Σ_2'', and n_2 through Σ'_2; and the double point $(n_2 n_2'')$ of this line-pair lies on a fixed line s_2'' passing through P_2.

Every four such lines m_2, m'_2, n_2, n_2'', together with the singular lines σ'_2, σ_2'' constitute six tangents of the conic which represents the arbitrary point $(m_1 n_1)$.

56. The degenerate conics of the first plane which represent points and lines in the second, have precisely similar properties, that is to say:

The points of the point-pairs lie on the singular lines σ'_1, σ_1'', whilst their double tangents envelope a point-pair S'_1, S''_1, *whose own double tangent is coincident with the line p_1. The lines of the line-pairs pass through the singular points Σ'_1, Σ''_1, whilst their double points describe a line-pair $s'_1\; s_1''$, whose own double point is coincident with* P_1.

57. A degeneration such as that above described occurs in every fundamental system of correlations. We may in fact say, generally:

The curve of the class μ which represents any point through which pass $\varkappa$ singular lines, degenerates to $\varkappa$ points, situated on the associated singular lines, and to a curve of the class $\mu-\varkappa$, which touches the remaining $\lambda-\varkappa$ singular lines.

The curve of the order ν which represents any line in which lie $\varkappa$ singular points, degenerates to $\varkappa$ lines through the associated singular points, and to a curve of the order $\nu-\varkappa$ which passes through the remaining $\pi-\varkappa$ singular points.

58. Next in point of simplicity are the connexes determined by the systems of correlations of which (2021) and (2012) are the signatures. The first of these connexes is of the second class and third order, the second of the third class and second order.

Connex (23) The properties of the latter being at once deducible from those of the former by the Principle of Duality, we may confine our attention to the first of the above systems, the symbol for which is

$$\begin{pmatrix} P_1 & Q_1 & A_1 & B_1 & c_1 \\ p_2 & q_2 & A_2 & B_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

In art. 31 the existence was proved of a pair of singular lines $\overline{P_1 Q_1}$ and $\overline{A_2 B_2}$, and four pairs of singular points, viz., P_1 and $(q_2 c_2)$, Q_1 and $(p_2 c_2)$, Σ'_1 and $(p_2 q_2)$, and Σ_1'' and $(p_2 q_2)$, where $\Sigma'_1\; \Sigma_1''$ are the intersections, with c_1, of the conic (S_1) which passes through $P_1 Q_1 A_1 B_1$ so as to make the anharmonic ratio of these four points on it equal to

$$(p_2 q_2)(p_2 q_2 A_2 B_2).$$

59. The mode in which the conics and cubics representing special points and lines degenerate, is very instructive. Instead of attempting an exhaustive discussion of the question, however, I must limit myself here to those cases of degeneration which most elucidate the general character of the representative curves.

Every point C_2 on the singular line $\overline{A_2 B_2}$ is represented, as we have already stated in art. 57, by a point-pair C_1, C'_1. The point C'_1 is so situated on the associated singular line $\overline{P_1 Q_1}$ as to satisfy the condition

$$\overline{P_1 Q_1}(P_1 Q_1 c_1 C'_1) = \overline{A_2 B_2}(p_2 q_2 c_2 C_2); \tag{1}$$

the polar of C_2, in the exceptional correlation whose singular lines are $\overline{P_1 Q_1}$ and $\overline{A_2 B_2}$ being an *indeterminate* line through C'_1. The point C_1, through which the polar of C_2 in every other correlation of the system passes, is situated on the conic (S_1) and fulfils the condition

$$(S_1)(P_1 Q_1 A_1 B_1 C_1) = (p_2 q_2)(P_2 q_2 A_2 B_2 C_2), \tag{2}$$

as is at once obvious on considering the polars of C_2 in the two correlations whose singular points are Σ'_1 and $(p_2 q_2)$, and Σ_1'' and $(p_2 q_2)$.

60. Between the points of the conic (S_1), and those of the line $\overline{A_2 B_2}$, therefore, a (1, 1) correspondence is established, such that any two corresponding points $C_1 C_2$ thereof are conjugate to each other in the same sense as $A_1 A_2$ and $B_1 B_2$ are by hypothesis. The system of correlations, in fact, would suffer no change if $C_1 C_2$ were substituted in place of either of the latter pairs of conjugate points.

61. *The conic*, in the second plane, *which represents any arbitrary point*, say A_1, *of the conic* (S_1), *is a line-pair whose double point coincides with the corsesponding point* A_2 *on* $A_2 B_2$. This follows from the circumstance that, in the system now under consideration, there are *two* correlations for which the polar of A_1 coincides with an arbitrary line a_2 passing through A_2; in other words, there are two correlations which satisfy the eight conditions

$$\begin{array}{ccccc} P_1, & Q_1, & A_1, & B_1, & c_1 \\ p_2, & q_2, & a_2, & B_2, & c_2. \end{array}$$

In proof of this we need merely refer to the Table in art. 42, where it will be seen that $[3011]=2$.

62. From the above we infer that *every line* x_2 *in the second plane is represented by a cubic* x_1^3 *which has a double point* C_1 *on the conic* (S_1). For if C_1 be the point on (S_1) which corresponds, by art. 60, to the point C_2 in which $\overline{A_2B_2}$ is intersected by x_2, then, as we have just seen, there are two correlations of the system for which the pole of x_2 is coincident with C_1. *The cubic* x_1^3 *obviously passes also through the singular points* P_1, Q_1, Σ'_1, Σ_1'' *as well as through the point* C'_1 *on* $\overline{P_1Q_1}$, *which,* by (1) of art. 59, *corresponds to* C_2 *on* $\overline{A_2B_2}$.

63. Lastly, since two of the singular points of the second plane coincide in (p_2q_2) it is obvious that *every line* x_1 *in the first plane is represented by a cubic* x_2^3, *which has a double point at* (p_2q_2), *and passes, likewise, through the singular points* (p_2c_2), (q_2c_2), *as well as through the point* C_2, *on* $\overline{A_2B_2}$, *which corresponds,* by (1) of art. 59, *to the point* C'_1 *in which* x_1 *intersects* $\overline{P_1Q_1}$, *and through the points* D_2 *and* E_2, *on* $\overline{A_2B_2}$, *which correspond,* by (2) of art. 59, *to the points* D_1 *and* E_1 *in which* x_1 *intersects the conic* (S_1).

64. The remark in art. 61 is susceptible of generalisation in the form of the following useful Theorems, with the enunciation of which I will conclude the present paper:

Theorem I. *In a system of correlations* $(\alpha\beta\gamma\delta)$, *the curve, of the class* $[\alpha\beta(\gamma+1)\delta]$ (art. 42), *which represents either of two canjugate points* A_1, A_2, *breaks up into the other, together with a point on each of the singular lines associated with those which pass through the former. The multiplicity of* A_2 *on the representative of* A_1 *is* $[(\alpha+1)\beta(\gamma-1)\delta]$, *and that of* A_1 *on the representative of* A_2 *is* $[\alpha(\beta+1)(\gamma-1)\delta]$. *The number of singular lines which pass through* A_1 *is*

$$[\alpha\beta(\gamma+1)\delta]-[(\alpha+1)\beta(\gamma-1)\delta],$$

and the number of those which pass through A_2 *is*

$$[\alpha\beta(\gamma+1)\delta]-[\alpha(\beta+1)(\gamma-1)\delta].$$

Theorem II. *In a system of correlations whose signature is* $[\alpha\beta\gamma\delta]$ *the curve, of the order* $[\alpha\beta\gamma(\delta+1)]$ (art. 42), *which represents either of two conjugate lines* a_1, a_2, *breaks up into the other, together with a line* *through each of the singular points associated with those situated on the former. The multiplicity of* a_2 *on the representative of* a_1 *is* $[\alpha(\beta+1)\gamma(\delta-1)]$, *and that of* a_1 *on the representative of* a_2 *is* $[\alpha+1)\beta\gamma(\delta-1)]$. *The number of singular points situated on* a_1 *is*

$$[\alpha\beta\gamma(\delta+1)]-[\alpha(\beta+1)\gamma(\delta-1)],$$

and the number of those situated on a_2 *is*

$$[\alpha\beta\gamma(\delta+1)]-[(\alpha+1)\beta\gamma(\delta-1)].$$

May 2nd, 1874.

Sulla serie di Fourier (*)

(*per* GIULIO ASCOLI, *a Milano*).

IV.

Proponiamoci ora di studiare quando è che una funzione $f(x)$, periodica secondo 2π, continua tranne che per un numero limitato di punti tra 0 e 2π, e tale che gli integrali

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\eta}\right)f(x)\,dx,\quad \left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\eta}\right)f(x)\,(x_\sigma-x)\,dx$$

convergano all'indefinito diminuire di ε, $\varphi_\sigma(\varepsilon)$ soddisfacendo alle condizioni dette nel lemma, e che si abbia altresì

$$\lim_{\alpha=0}\frac{1}{\alpha}\int_{+0}^{\alpha}\left[\lim_{\varepsilon=0}\left(\int_{x_\sigma-\alpha}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\alpha}\right)f(x)\,dx\right]d\alpha=0,$$

sia esprimibile per serie trigonometrica.

Per le cose dimostrate nel lemma, ove non si voglia escludere a priori la esprimibilità della funzione proposta per serie trigonometrica, si dovrà ammettere che la espressione

$$\psi(x)=\int_{a\pm0}^{x}f(x)\,dx$$

sia ovunque integrabile.

Diremo poi che una funzione $f(x)$ è esprimibile per la serie indicata, quando si abbia

$$f(x)=\sum_0(a_n\operatorname{sen}nx+b_n\cos nx)$$

per tutti i valori tra 0 e 2π ad eccezione dei punti singolari e di una serie

(*) Continuazione e fine della Memoria a pag. 21 di questo tomo.

illimitata dell'ordine ν, non dicendosi, se nei detti punti il simbolo

$$\sum_0 (a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx)$$

abbia o no significato.

In virtù del lemma precedente costruiremo adunque la serie di FOURIER relativa alla data funzione, chè, se questa sarà atta a rappresentarla, la $f(x)$ sarà esprimibile per serie trigonometrica, altrimenti no. Ma la serie di FOURIER è tosto costruita bastando formare gli integrali

$$\sum_1^\tau \sigma \int_{x_{\sigma-1}+\varphi_{\sigma-1}(\varepsilon)}^{x_\sigma-\varepsilon} f(t)\,dt, \quad \sum_1^\tau \sigma \int_{x_{\sigma-1}+\varphi_{\sigma-1}(\varepsilon)}^{x_\sigma-\varepsilon} f(t)\cos n(t-x)\,dt$$

per ε evanescente. Affinchè però questa serie esprima la $f(x)$ è necessario, ma non sufficiente, che l'ultimo degli integrali precedenti vada a zero per n infinito per tutti i singoli valori compresi in infiniti tratti del segmento $0, 2\pi$, oppure, ciò che torna lo stesso, dovrà essere

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt = \lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\,dt = 0.$$

Vediamo adunque quando è che questa condizione è soddisfatta.

Lemma. (V. RIEMANN, p. 35 e seg.) Essendo $f(x)$ una funzione continua tra b e c ed ai limiti, gli integrali

$$\int_b^c f(x)\cos nx\,dx, \quad \int_b^c f(x)\operatorname{sen} nx\,dx$$

vanno a zero per n infinito.

Si ha

$$\int_b^c f(x)\cos nx\,dx = \int_0^{c-b} f(b+x)\cos n(b+x)\,dx,$$

$$\int_b^c f(x)\operatorname{sen} nx\,dx = \int_0^{c-b} f(b+x)\operatorname{sen} n(b+x)\,dx,$$

e poichè

$$\int_0^{c-b} f(b+x)\cos n(b+x)\,dx = \cos nb \int_0^d \phi(x)\cos nx\,dx - \operatorname{sen} nb \int_0^d \phi(x)\operatorname{sen} nx\,dx,$$

$$\int_0^{c-b} f(b+x)\operatorname{sen} n(b+x)\,dx = \operatorname{sen} nb \int_0^d \phi(x)\cos nx\,dx + \cos nb \int_0^d \phi(x)\operatorname{sen} nx\,dx,$$

essendosi posto per brevità $c - b = d$, $f(b+x) = \phi(x)$, basterà far vedere come si abbia

$$\lim_{n=\infty}\int_0^d \phi(x)\cos nx\,dx = \lim_{n=\infty}\int_0^d \phi(x)\operatorname{sen} nx\,dx = 0.$$

Consideriamo in prima l'integrale

$$\int_0^d \phi(x)\operatorname{sen} nx\,dx,$$

e decomponiamolo cominciando da $x=0$ in integrali di ampiezza $\frac{2\pi}{n}$; si avrà allora

$$\int_0^d \phi(x)\operatorname{sen} nx\,dx = \sum_1^s {}_l \int_{(l-1)\frac{2\pi}{n}}^{l\frac{2\pi}{n}} \phi(x)\operatorname{sen} nx\,dx + \int_{s\frac{2\pi}{n}}^d \phi(x)\operatorname{sen} nx\,dx,$$

s essendo il massimo multiplo di $\frac{2\pi}{n}$ contenuto in d. Il seno è positivo nella prima metà dell'integrale

$$\int_{(l-1)\frac{2\pi}{n}}^{l\frac{2\pi}{n}} \phi(x)\operatorname{sen} nx\,dx,$$

negativo nell'altra. Indicando con M il massimo valore di $\phi(x)$ nell'intervallo dell'integrale, con m il minimo, valori questi i quali vengono raggiunti dalla $\phi(x)$, perchè continua tra 0 e d inclusi i limiti, gli è manifesto che si aumenta l'integrale sostituendo nella prima metà, cioè tra $(l-1)\frac{2\pi}{n}$ e $(l-1)\frac{2\pi}{n}+\frac{\pi}{n}$, M per $\phi(x)$, nella seconda invece m; che lo si diminuisce all'incontro facendo la sostituzione inversa. Nel primo caso si ottiene il valore $\frac{2}{n}(M-m)$, nel secondo $\frac{2}{n}(m-M)$. Abbiamo adunque, poichè $\frac{2}{n}(M-m)$ è positivo $\frac{2}{n}(m-M)$ è negativo, ed amendue queste grandezze sono eguali in valore assoluto, astrazion fatta dal segno,

$$\frac{2}{n}(M-m) > \int_{(l-1)\frac{2\pi}{n}}^{l\frac{2\pi}{n}} \phi(x)\operatorname{sen} nx\,dx.$$

L'integrale

$$\int_0^d \phi(x) \operatorname{sen} nx\, dx$$

è quindi più piccolo della quantità

$$\frac{2}{n}\sum_1^s {}_r (M_r - m_r) + \eta,$$

indicando con M_r il massimo, con m_r il minimo valore di $\phi(x)$ nell'intervallo r^{mo}, e con η il valore assoluto dell'integrale

$$\int_{s\frac{2\pi}{n}}^d \phi(x) \operatorname{sen} nx\, dx.$$

Ora, poichè le quantità

$$\frac{2\pi}{n}\sum_1^s {}_r M_r, \quad \frac{2\pi}{n}\sum_1^s {}_r m_r$$

al crescere indefinito di n convergono al valore dell'integrale definito

$$\int_0^d \phi(x) \operatorname{sen} nx\, dx,$$

sarà

$$\lim_{n=\infty} \int_0^d \phi(x) \operatorname{sen} nx\, dx = 0.$$

Così pure si può dimostrare che l'integrale

$$\int_0^d \phi(x) \cos nx\, dx$$

va a zero per n infinito: in questo caso si ha

$$\int_0^d \phi(x) \cos nx\, dx =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \phi(x) \cos nx\, dx - \sum_1^s {}_l \int_{\frac{\pi}{2n}+(l-1)\frac{2\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2n}+l\frac{2\pi}{n}} \phi(x)(-\cos nx)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2n}+s\frac{2\pi}{n}}^d \phi(x) \cos nx\, dx,$$

il primo e l'ultimo degli integrali del secondo membro diventano nulli per

n infinito, all'aggregato

$$\Sigma \int_{\frac{\pi}{2n}+(t-1)\frac{2\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2n}+t\frac{2\pi}{n}} \Phi(x)(-\cos nx)\,dx$$

è applicabile il metodo precedente.

Adunque la somma

$$\left(\int_{x_0+\eta_0}^{x_1-\eta_1}+\int_{x_1+\eta_1}^{x_2-\eta_2}+\int_{x_2+\eta_2}^{x_3-\eta_3}+\cdots\right)f(t)\cos n(t-x)\,dt,$$

$\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ essendo costanti comunque piccole, va a zero per n infinito.

Resta dunque a studiarsi quando è che l'aggregato

$$\left(\int_{x_\tau-\eta_\tau}^{x_\tau-0}+\int_{x_0+\varphi_0(+0)}^{x_0+\eta_0}\right)f(t)\cos n(t-x)\,dt+\left(\int_{x_1-\eta_1}^{x_1-0}+\int_{x_1+\varphi_1(+0)}^{x_1+\eta_1}\right)f(t)\cos n(t-x)\,dt+\cdots$$

diminuisce indefinitamente al crescere illimitato di n: e se ciò ha luogo i coefficienti della serie di Fourier corrispondente alla data funzione diventano per ultimo zero. È facile vedere, come i termini della somma che precede non si distruggano a vicenda per n infinito, ma bensì come ciascuno dei medesimi vada a zero.

Si ha

$$\lim_{\varepsilon=+0}\left(\int_{x_\sigma-\eta_\sigma}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\varphi_\sigma(\eta_\sigma)}\right)f(t)\cos n(t-x)\,dt=$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\cos n(x_\sigma-x)\int_\varepsilon^{\eta_\sigma}\Big(f(x_\sigma-t)\cos nt+f[x_\sigma+\Phi_\sigma(t)]\,\Phi'_\sigma(t)\cos n\Phi_\sigma(t)\Big)dt$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\operatorname{sen} n(x_\sigma-x)\int_r^{\eta_\sigma}\Big(f(x_\sigma-t)\operatorname{sen} nt-f[x_\sigma+\Phi_\sigma(t)]\,\Phi'_\sigma(t)\operatorname{sen} n\Phi_\sigma(t)\Big)dt=$$

$$a_n^{(\sigma)}\cos nx_\sigma\cos nx+a_n^{(\sigma)}\operatorname{sen} nx_\sigma\operatorname{sen} nx+$$
$$b_n^{(\sigma)}\operatorname{sen} nx_\sigma\cos nx-b_n^{(\sigma)}\cos nx_\sigma\operatorname{sen} nx,$$

essendosi posto per brevità

$$a_n^{(\sigma)}=\int_0^{\eta_\sigma}\Big(f(x_\sigma-t)\cos nt+f[x_\sigma+\Phi_\sigma(t)]\,\Phi'_\sigma(t)\cos n\Phi_\sigma(t)\Big)dt,$$

$$b_n^{(\sigma)}=\int_0^{\eta_\sigma}\Big(f(x_\sigma-t)\operatorname{sen} nt-f[x_\sigma+\Phi_\sigma(t)]\,\Phi'_\sigma(t)\operatorname{sen} n\Phi_\sigma(t)\Big)dt.$$

L'aggregato degli integrali precedenti si può adunque porre sotto la forma

$$\sum_0^{\tau-1}{}_\sigma (a_n^{(\sigma)} \cos n x_\sigma + b_n^{(\sigma)} \operatorname{sen} n x_\sigma) \cos n x +$$

$$\sum_0^{\tau-1}{}_\sigma (a_n^{(\sigma)} \operatorname{sen} n x_\sigma - b_n^{(\sigma)} \cos n x_\sigma) \operatorname{sen} n x;$$

ed affinchè questa espressione vada a zero qualunque sia x, gli è chiaro come basti si abbia

$$\lim_{n=\infty} \sum_0^{\tau-1}{}_\sigma (a_n^{(\sigma)} \cos n x_\sigma + b_n^{(\sigma)} \operatorname{sen} n x_\sigma) = \lim_{n=\infty} \sum_0^{\tau-1}{}_\sigma (a_n^{(\sigma)} \operatorname{sen} n x_\sigma - b_n \cos n x_\sigma) = 0,$$

e come non sia necessario

$$\lim_{n=\infty} a_n^{(\sigma)} = \lim_{n=\infty} b_n^{(\sigma)} = 0 \quad (\sigma = 0, \ldots, \overline{\tau - 1}).$$

Nel nostro caso ciascuno dei termini $a_n^{(\sigma)}$, $b_n^{(\sigma)}$ va a zero per n infinito.

Per dimostrare questa asserzione, daremo un teorema, il quale è ben poco diverso da quello enunciato da Riemann alla fine della p. 29 della sua Memoria. La dimostrazione che io ne do differisce da quella data da Riemann soltanto nella ricerca del limite della somma

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_n \frac{\mu^2}{n^2 (n-\mu)^2} \quad (n \gtrless \mu)$$

all'infinito aumentare di μ. Questa proposizione riescirà utile anche in successive ricerche.

Se si indica con b e c due costanti qualunque, la maggiore con c, e con $\lambda(x)$ una funzione continua tra b e c ed ai limiti, con la sua derivata prima, e tale che si abbia

$$\left[\lambda(t) \frac{d B_{\mu \pm n}}{d t}\right]_c^b = \left[\lambda'(t) B_{\mu \pm n}\right]_c^b = 0,$$

essendosi posto per brevità

$$B_{\mu \pm n} = \tfrac{1}{2}(a_n \operatorname{sen} n x + b_n \cos n x) \cos(\mu \pm n)(t - x) \pm$$
$$\tfrac{1}{2}(a_n \cos n x - b_n \operatorname{sen} n x) \operatorname{sen}(\mu \pm n)(t - x),$$

e di cui la derivata seconda renda l'espressione

$$\int_b^c \lambda''(t) \cos r (t - x)\, d t$$

nulla per r infinito, l'integrale

$$\mu^2\int_b^c\left(F(t)-A_0\frac{t^2}{2}\right)\cos\mu(t-x)\lambda(t)\,dt$$

andrà a zero per μ crescente al di là di ogni limite, essendo

$$F(t)=\tfrac{1}{2}b_0t^2-\sum_1^n\frac{a_n\operatorname{sen}nt+b_n\cos nt}{n^2}=\frac{A_0}{2}t^2-\sum_1^n\frac{A_n}{n^2},$$

e

$$\lim a_n=\lim b_n=0\quad(n=\infty).$$

Riemann suppone che la funzione $\lambda(x)$ si annulli insieme alla sua derivata prima ai limiti b e c, comunque ei faccia uso del teorema precedente nel corso della sua Memoria (V. p. 35 e 39), di più che la derivata seconda $\lambda''(x)$ abbia un numero finito di massimi e minimi, poichè se la funzione $\lambda''(x)$ andasse all'infinito di continuo oscillando comunque integrabile, l'espressione

$$\int_b^c\lambda''(t)\cos r(t-x)\,dt$$

potrebbe non annullarsi per r infinito, la qual cosa va esclusa nella dimostrazione del teorema enunciato. Questo punto verrà schiarito da successive ricerche.

Si ha

$$\mu^2\int_b^c\left(F(t)-A_0\frac{t^2}{2}\right)\lambda(t)\cos\mu(t-x)\,dt=$$
$$-\sum_n\frac{\mu^2}{n^2}\int_b^c\lambda(t)A_n\cos\mu(t-x)\,dt.$$

Ora,

$$A_n\cos\mu(t-x)=(a_n\operatorname{sen}nt+b_n\cos nt)\cos\mu(t-x)=$$
$$[a_n\operatorname{sen}n(t-x+x)+b_n\cos n(t-x+x)]\cos\mu(t-x)=$$
$$[a_n\operatorname{sen}n(t-x)\cos nx+a_n\cos n(t-x)\operatorname{sen}nx+b_n\cos n(t-x)\cdot$$
$$\cos nx-b_n\operatorname{sen}n(t-x)\operatorname{sen}nx]\cos\mu(t-x)=$$
$$\tfrac{1}{2}a_n\cos nx[\operatorname{sen}(\mu+n)(t-x)-\operatorname{sen}(\mu-n)(t-x)]+$$
$$\tfrac{1}{2}a_n\operatorname{sen}nx[\cos(\mu+n)(t-x)+\cos(\mu-n)(t-x)]+$$
$$\tfrac{1}{2}b_n\cos nx[\cos(\mu+n)(t-x)+\cos(\mu-n)(t-x)]$$
$$-\tfrac{1}{2}b_n\operatorname{sen}nx[\operatorname{sen}(\mu+n)(t-x)-\operatorname{sen}(\mu-n)(t-x)]=$$

$$\tfrac{1}{2}(a_n \operatorname{sen} n x + b_n \cos n x)\cos(\mu+n)(t-x) +$$
$$\tfrac{1}{2}(a_n \cos n x - b_n \operatorname{sen} n x)\operatorname{sen}(\mu+n)(t-x) +$$
$$\tfrac{1}{2}(a_n \operatorname{sen} n x + b_n \cos n x)\cos(\mu-n)(t-x) -$$
$$\tfrac{1}{2}(a_n \cos n x - b_n \operatorname{sen} n x)\operatorname{sen}(\mu-n)(t-x) =$$
$$P_n \cos(\mu+n)(t-x) + Q_n \operatorname{sen}(\mu+n)(t-x) + P_n \cos(\mu-n)(t-x)$$
$$- Q_n \operatorname{sen}(\mu-n)(t-x) = B_{\mu+n} + B_{\mu-n}.$$

Le quantità $B_{\mu+n}$, $B_{\mu-n}$ vanno a zero per n infinito, essendo per ipotesi

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \quad (n=\infty).$$

Abbiamo poi

$$\frac{d^2 B_{\mu\pm n}}{d t^2} = -(\mu\pm n)^2 B_{\mu\pm n},$$

laonde il termine generale della serie precedente può porsi sotto alla forma

$$\frac{\mu^2}{n^2(\mu+n)^2}\int_b^c \frac{d^2 B_{\mu+n}}{d t^2}\lambda(t)\,d t + \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2}\int_b^c \frac{d^2 B_{\mu-n}}{d t^2}\lambda(t)\,d t,$$

oppure mediante due integrazioni successive, considerando in prima $\lambda(t)$ e quindi $\lambda'(t)$ come costante, e rammentando come si abbia per ipotesi

$$\left[\lambda(t)\frac{d B_{\mu\pm n}}{d t}\right]_b^c = \left[\lambda'(t) B_{\mu\pm n}\right]_b^c = 0,$$

si ottiene

$$\frac{\mu^2}{n^2(\mu+n)^2}\int_b^c B_{\mu+n}\lambda''(t)\,d t + \frac{\mu^2}{n^2(\mu-n)^2}\int_b^c B_{\mu-n}\lambda''(t)\,d t.$$

Per dato si ha che l'integrale

$$\int_b^c \lambda''(t)\cos r(t-x)\,d t$$

va a zero per r infinito, è chiaro adunque che si potrà assegnare un numero m tale che per $n \geq m$ gli integrali

$$P_n\int_b^c \lambda''(t)\cos(\mu\pm n)(t-x)\,d t,$$

$$Q_n\int_b^c \lambda''(t)\operatorname{sen}(\mu\pm n)(t-x)\,d t$$

risultino arbitrariamente piccoli qualunque sia μ, essendo P_n e Q_n nulli per n infinito. Per $n<m$ si avrà che gli integrali

$$\int_b^c \lambda''(t)\cos(\mu\pm n)(t-x)\,dt,\quad \int_b^c \lambda''(t)\operatorname{sen}(\mu\pm n)(t-x)\,dt$$

andranno a zero per dato, mentre μ cresce al di là di ogni limite, quale si sia x. Quindi, per dimostrare il nostro teorema, basta far vedere come la somma

$$\sum\frac{\mu^2}{n^2(n-\mu)^2},$$

estesa a tutti i valori di n diversi da μ, si mantenga finita per μ infinito. Poichè, fatta astrazione dal termine

$$\int_b^c \lambda(t)A_\mu\cos\mu(t-x)\,dt,$$

il quale manifestamente scompare mentre μ assume valori di più in più grandi, la serie precedente risulta minore di questa somma moltiplicata pel massimo valore di $\int_b^c B_{\mu\pm n}\lambda''(t)\,dt$, che diviene infinitamente piccolo per μ infinito. Ora questa somma è eguale alle due seguenti

$$\frac{\mu^2}{1^2(\mu+1)^2}+\frac{\mu^2}{2^2(\mu+2)^2}+\frac{\mu^2}{3^2(\mu+3)^2}+\cdots+\frac{\mu^3}{(\mu-1)(2\mu-1)^2}+\frac{\mu^2}{(\mu+1)^2(2\mu+1)^2}+\cdots$$

$$\frac{\mu^2}{1^2(\mu-1)^2}+\frac{\mu^2}{2^2(\mu-2)^2}+\frac{\mu^3}{3^2(\mu-3)^2}+\cdots+\frac{\mu^2}{(\mu-1)^2 1^2}+\frac{\mu^2}{(\mu+1)^2\cdot 1^2}+\cdots$$

La prima può porsi sotto la forma

$$\frac{1}{1^2\left(1+\frac{1}{\mu}\right)^2}+\frac{1}{2^2\left(1+\frac{2}{\mu}\right)^2}+\cdots,$$

e rimane quindi finita per μ infinito. Quanto alla seconda, essa può decomporsi nelle altre due

$$\frac{\mu^2}{1^2(\mu-1)^2}+\frac{\mu^2}{2^2(\mu-2)^2}+\cdots+\frac{\mu^2}{(\mu-1)^2\cdot 1^2},$$

$$\frac{\mu^2}{(\mu+1)^2 1^2}+\frac{\mu^2}{(\mu+2)^2\cdot 2^2}+\cdots,$$

la seconda delle quali non diviene al certo infinita se μ cresce al di là di ogni limite. La prima, secondo che μ è impari o pari, può porsi sotto una delle due forme

$$2\left[\frac{\mu^2}{1^2(\mu-1)^2}+\frac{\mu^2}{2^2(\mu-2)^2}+\cdots+\frac{\mu^2}{\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2\left(\frac{\mu+1}{2}\right)^2}\right],$$

$$2\left[\frac{\mu^2}{1^2(\mu-1)^2}+\cdots+\frac{\mu^2}{\left(\frac{\mu-2}{2}\right)^2\left(\frac{\mu+2}{2}\right)^2}\right]+\frac{\mu^2}{\left(\frac{\mu}{2}\right)^2\left(\frac{\mu}{2}\right)^2},$$

e poichè

$$\frac{\mu^2}{s^2(\mu-s)^2}=\frac{1}{s^2\left(1-\frac{s}{\mu}\right)^2},$$

è chiaro che anche questa somma resta finita per μ infinito: il teorema è dunque dimostrato.

È manifesto che nelle ipotesi fatte si ha altresì

$$\lim_{\mu=\infty}\mu^2\int_b^c\left(F(t)-\frac{b_0}{2}t^2\right)\lambda(t)\operatorname{sen}\mu(t-x)\,dt=0.$$

Ove la funzione $\lambda(x)$ si annullasse insieme colla sua derivata prima ai limiti b e c, l'integrale

$$\mu^2\int_b^c F(t)\cos\mu(t-x)\lambda(t)\,dt$$

andrebbe a zero per μ infinito, poichè si ha

$$\mu^2\int_b^c\lambda(t)\cos\mu(t-x)t^2\,dt=-\int_b^c\frac{d^2[t^2\lambda(t)]}{dt^2}\cos\mu(t-x)\,dt.$$

Ha luogo il teorema reciproco al precedente e può enunciarsi così:

Se $\lambda(x)$ è una funzione che soddisfa alle condizioni indicate, e se l'integrale

$$\mu^2\int_b^c\left(F(t)-\frac{b_0}{2}t^2\right)\lambda(t)\cos\mu(t-x)\,dt$$

va sempre a zero, quali si sieno le grandezze b e c, si avrà

$$\lim a_n=\lim b_n=0\quad(n=\infty).$$

A questo teorema Riemann allude a p. 33 con le parole: «...so muss (n. V.)

$$A_n = -\frac{n\cdot n}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(F(t) - C't - \frac{A_0}{2}t^2\right)\cos n(t-x)\,dt$$

mit wachsendem n zuletzt unendlich klein werden;...»

Sia $b<0$, $c>2\pi$, e $\lambda(x)$ una funzione che assume il valore 1 tra 0 e 2π, e la quale negli altri intervalli si comporta in modo qualunque, sempre però soddisfacendo alle ipotesi fatte, sarà in allora

$$\mu^2\int_b^c\left(F(t)-\frac{b_0}{2}t^2\right)\cos\mu(t-x)\lambda(t)\,dt =$$

$$\mu^2\left(\int_b^0+\int_{2\pi}^c\right)\left(F(t)-\frac{b_0}{2}t^2\right)\lambda(t)\cos\mu(t-x)\,dt +$$

$$\mu^2\int^{2\pi}\left(F(t)-\frac{b_0}{2}t^2\right)\lambda(t)\cos\mu(t-x)\,dt.$$

Definisco ora una funzione $\lambda_1(x)$ che nell'intervallo $b\cdot c-2\pi$ si comporti identicamente come $\lambda(x)$ nei tratti $b\cdot 0$ e $2\pi\cdot c$; allora si avrà per la periodicità della funzione $F(t)-\frac{b_0}{2}t^2$

$$\mu^2\left(\int_b^0+\int_0^{c-2\pi}\right)\left(F(t)-\frac{b_0}{2}t^2\right)\lambda_1(t)\cos\mu(t-x)\,dt =$$

$$\mu^2\left(\int_b^0+\int_{2\pi}^c\right)\left(F(t)-\frac{b_0}{2}t^2\right)\lambda(t)\cos\mu(t-x)\,dt,$$

e poichè

$$\lim_{\mu=\infty}\mu^2\int_b^{c-2\pi}\left(F(t)-\frac{b_0}{2}t^2\right)\lambda_1(t)\cos\mu(t-x)\,dt = 0,$$

si avrà

$$\lim_{\mu=\infty}\mu^2\int_0^{2\pi}\left(F(t)-\frac{b_0}{2}t^2\right)\cos\mu(t-x)\,dt = 0,$$

ossia

$$\lim_{\mu=\infty}\pi(a_\mu \operatorname{sen}\mu x + b_\mu\cos\mu x) = 0$$

qualunque sia x, e quindi

$$\lim a_\mu = \lim b_\mu = 0 \quad (\mu=\infty),$$

come si voleva dimostrare.

Ritorniamo ora al nostro argomento, a dimostrare cioè che, se l'aggregato

$$\left(\int_{x_\tau-\eta_\tau}^{x_\tau-0}+\int_{x_\tau+\varphi_0(+0)}^{x_\tau+\eta_\tau}\right)f(t)\cos n(t-x)\,dt+\left(\int_{x_1-\eta_1}^{x_1-0}+\int_{x_1+\varphi_1(+0)}^{x_1+\eta_1}\right)f(t)\cdot\cos n(t-x)\,dt+\cdots$$

va a zero per n infinito qualunque sia x, ciascun membro di detta somma deve separatamente annullarsi.

Sia $\lambda(x)$ una funzione continua insieme colla sua derivata prima nell'intervallo $x_\sigma-\eta_\sigma\cdot x_\sigma+\phi_\sigma(\eta_\sigma)$, che si annulla ai limiti insieme colla medesima, e di cui il secondo coefficiente differenziale è altresì finito e continuo nel detto intervallo; di più, poniamo che la $\lambda(x)$ sia eguale ad 1 tra $x_\sigma-\rho$ ed $x_\sigma+\rho$, ρ essendo una quantità positiva più piccola della minore delle grandezze η_σ, $\phi_\sigma(\eta_\sigma)$.

Ciò posto, si ha

$$n^2\int_{x_\sigma-\eta_\sigma}^{x_\sigma+\varphi_\sigma(\eta_\sigma)}F(t)\cos n(t-x)\lambda(t)\,dt=$$

$$n^2\lim_{\varepsilon=0}\left(\int_{x_\sigma-\eta_\sigma}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\varphi_\sigma(\eta_\sigma)}\right)F(t)\cdot\cos n(t-x)\lambda(t)\,dt;$$

d'altra parte

$$\int_{x_\sigma-\eta_\sigma}^{x_\sigma-\varepsilon}F(t)\cos n(t-x)\lambda(t)\,dt=$$

$$\left[F(t)\lambda(t)\frac{\operatorname{sen} n(t-x)}{n}\right]_{x_\sigma-\eta_\sigma}^{x_\sigma-\varepsilon}-\frac{1}{n}\int_{x_\sigma-\eta_\sigma}^{x_\sigma-\varepsilon}[F'(t)\lambda(t)+F(t)\lambda'(t)]\operatorname{sen} n(t-x)\,dt,$$

quindi

$$n^2\int_{x_\sigma-\eta_\sigma}^{x_\sigma+\varphi_\sigma(\eta_\sigma)}F(t)\cos n(t-x)\lambda(t)\,dt=$$

$$-n\lim_{\varepsilon=0}\left(\int_{x_\sigma-\eta_\sigma}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\varphi_\sigma(\eta_\sigma)}\right)[F'(t)\lambda(t)+F(t)\lambda'(t)]\operatorname{sen} n(t-x)\,dt.$$

Ora

$$\int_{x_\sigma-\eta_\sigma}^{x_\sigma-\varepsilon}[F'(t)\lambda(t)+F(t)\lambda'(t)]\operatorname{sen} n(t-x)\,dt=$$

$$-\frac{1}{n}\left[\Big(F'(t)\lambda(t)+F(t)\lambda'(t)\Big)\cos n(t-x)\right]_{x_\sigma+\eta_\sigma}^{x_\sigma-\varepsilon}+$$

$$+\frac{1}{n}\int_{x_\sigma-\eta_\sigma}^{x_\sigma-\varepsilon}[F''(t)\lambda(t)+F(t)\lambda''(t)+2F'(t)\lambda'(t)]\cos n(t-x)\,dt,$$

quindi

$$n^2\int_{x_\sigma-\eta_\sigma}^{x_\sigma+\varphi_\sigma(\eta_\sigma)}F(t)\cos n(t-x)\lambda(t)\,dt=$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\Big[[F'(x_\sigma-\varepsilon)\,\lambda(x_\sigma-\varepsilon)+F(x_\sigma-\varepsilon)\lambda'(x_\sigma-\varepsilon)]\cos n(x_\sigma-\varepsilon-x)-$$

$$\Big(F'[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]\lambda[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]+F[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]\lambda'[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]\Big)\cos n[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)-x]\Big]-$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\Big(\int_{x_\sigma-\eta_\sigma}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\varphi_\sigma(\eta_\sigma)}\Big)\Big(F(t)\lambda''(t)+2F'(t)\lambda'(t)+F(t)\lambda''(t)\Big)\cos n(t-x)\,dt.$$

Ma

$$\Big[F(x_\sigma-\varepsilon)\lambda'(x_\sigma-\varepsilon)+F'(x_\sigma-\varepsilon)\lambda(x_\sigma-\varepsilon)\Big]\cos n(x_\sigma-\varepsilon-x)-$$

$$\Big[F[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]\cdot\lambda'[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]+F'[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]\lambda[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]\Big]\cos n[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)-x]=$$

$$\cos n(x_\sigma-x)\Big(F'(x_\sigma-\varepsilon)\cos n\varepsilon-F'[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]\cos n\phi_\sigma(\varepsilon)\Big)+$$

$$\operatorname{sen} n(x_\sigma-x)\Big(F'(x_\sigma-\varepsilon)\operatorname{sen} n\varepsilon+F'[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]\operatorname{sen} n\phi_\sigma(\varepsilon)\Big),$$

poichè per ipotesi $\lambda(x_\sigma-\varepsilon)$, $\lambda(x_\sigma+\varepsilon)$ sono costanti per valori sufficientemente piccoli di ε ed eguali ad uno; d'altra parte, dimostrando il lemma si vide essere

$$\lim_{\varepsilon=0}\Big(F'[x_\sigma+\phi_\sigma(\varepsilon)]-F'(x_\sigma-\varepsilon)\Big)=0,$$

$$\lim_{\varepsilon=0}F'(x_\sigma-\varepsilon)\,\varepsilon=\lim_{\varepsilon=0}F'[x_\sigma+\phi]\,\phi_\sigma(\varepsilon)=0,$$

poichè

$$F(x)=\int_a^x\psi(x)\,dx+Cx+C',\quad \psi(x)=\int_{a\pm 0}^x f(x)\,dx:$$

adunque l'espressione

$$\Big(\int_{x_\sigma-\eta_\sigma}^{x_\sigma-0}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma'+0)}^{x_\sigma+\varphi_\sigma(\eta_\sigma)}\Big)[F''(t)\lambda(t)+2F'(t)\lambda'(t)+F(t)\lambda''(t)]\cdot\cos n(t-x)\,dt$$

va a zero per n infinito, e perciò anche l'altra

$$\Big(\int_{x_\sigma-\rho}^{x_\sigma-0}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(+0)}^{x_\sigma+\rho}\Big)[F''(t)\lambda(t)+2F'(t)\lambda'(t)+F(t)\lambda''(t)]\cos n(t-x)\,dt,$$

ossia

$$\left(\int_{x_\sigma-\rho}^{x_\sigma-0} + \int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(+0)}^{x_\sigma+\rho}\right) f(t)\cos n(t-x)\,dt;$$

poichè le funzioni considerate sono continue e finite tra $x_\sigma - \eta_\sigma$ e $x_\sigma - \rho$ ed $x_\sigma + \rho$ e $x_\sigma + \phi_\sigma(\eta_\sigma)$, e $\lambda'(t)$, $\lambda''(t)$ sono nulle nell'intervallo $x_\sigma - \rho \cdot x_\sigma + \rho$.

Vediamo adunque quando è che l'ultimo integrale va a zero, quale si sia x, al crescere indefinito di n.

È manifesto che, se la $f(x)$ si mantiene finita per $x = x_\sigma - 0$, $x_\sigma + 0$, cioè nelle estreme vicinanze del medesimo, si potrà sempre determinare la grandezza η_σ per modo, che l'integrale precedente risulti arbitrariamente piccolo, quale si sia n; a questa condizione si potrebbe soddisfare altresì, quando la $f(x)$ si comportasse comunque per $x = x_\sigma - 0$ ed $x_\sigma + 0$, purchè però l'integrale relativo alla funzione $+\sqrt{[f(x)]^2}$ sia convergente.

Consideriamo ora il caso in cui la $f(x)$ da una parte del punto x_σ, a destra p. es., si mantiene finita, o, se va all'infinito, ci vada per modo che la $f_1(x)$ sia ancora integrabile, mentre a sinistra cresce oltre ogni limite, in guisa che la $f(x)$ muti costantemente di segno, e la $f_1(x)$ non sia integrabile, e studiamo in questa ipotesi il comportarsi dell'integrale

$$\int_{x_\sigma-\eta_\sigma}^{x_\sigma-0} f(t)\cos n(t-x)\,dt$$

per n di più in più crescente.

Pertanto dimostriamo il seguente teorema:

Se $f(x)$ indica una funzione continua tra 0 e b, tale che $f(b-0)$ abbia significato, mentre $f(+\varepsilon)$ per $\varepsilon = +0$ diventa più grande di qualsiasi grandezza assegnabile, esistono infinite funzioni $\theta(n)$, le quali per n infinito tendono a zero sempre decrescendo, e rendono l'integrale

$$\int_{\theta(n)}^{b} f(t)\cos n(t-x)\,dt$$

piccolo oltre ogni misura, sia che l'espressione

$$\int_{\varepsilon} f(t)\,dt$$

abbia o no un limite per $\varepsilon = +0$.

Si ha

$$\int_{\theta(n)}^{b} f(t)\cos n(t-x)\,dt = \cos nx \int_{\theta(n)}^{b} f(t)\cos nt\,dt + \operatorname{sen} nx \int_{\theta(n)}^{b} f(t)\operatorname{sen} nt\,dt.$$

Ma

$$\int_{\theta(n)}^{b} f(t)\operatorname{sen} nt\,dt = \int_{0}^{b-\theta(n)} f[\theta(n)+t]\operatorname{sen} n[\theta(n)+t]\,dt =$$

$$\operatorname{sen} n\theta(n) \int_{0}^{b-\theta(n)} f[\theta(n)+t]\cos nt\,dt + \cos n\theta(n) \int_{0}^{b-\theta(n)} f[\theta(n)+t]\operatorname{sen} nt\,dt.$$

Ora, come si vide,

$$\int_{0}^{b-\theta(n)} f[\theta(n)+t]\operatorname{sen} nt\,dt < \frac{2}{n}\sum_{1}^{s}{}_r (M_r - m_r) + \eta,$$

essendo s il massimo multiplo di $\frac{2\pi}{n}$ contenuto in $b-\theta(n)$, ed η il valore assoluto dell'integrale

$$\int_{s\frac{2\pi}{n}}^{b-\theta(n)} f[\theta(n)+t]\operatorname{sen} nt\,dt.$$

Supposto in prima che la $f(x)$ cresca sempre per $x=+0$, si ha manifestamente

$$\sum_{1}^{s}{}_r (M_r - m_r) = M_1 - m_s = f[\theta(n)] - m_s,$$

poichè $m_{r-1} = M_r$. M_1 va all'infinito, mentre n cresce al di là di ogni limite, imperocchè $\theta(n)$ finisce coll'annullarsi; se però si fa crescere M_1 per modo che il prodotto $\frac{1}{n}M_1$ vada a zero, il che può conseguirsi in infiniti modi, come vedrassi tra breve, è manifesto che si avrà

$$\lim_{n=\infty} \int_{0}^{b-\theta(n)} f[\theta(n)+t]\operatorname{sen} nt\,dt = 0.$$

Quanto all'altro integrale

$$\int_{0}^{b-\theta(n)} f[\theta(n)+t]\cos nt\,dt,$$

si ha

$$\int_0^{b-\theta(n)} f[\theta(n)+t]\cos n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} f[\theta(n)+t]\cos n t\,dt -$$

$$\sum_1^s {}_l \int_{\frac{\pi}{2n}+(l-1)\frac{2\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2n}+l\frac{2\pi}{n}} - f[\theta(n)+t]\cos n t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2n}+s\frac{2\pi}{n}}^{b-\theta(n)} f[\theta(n)+t]\cos n t\,dt.$$

Ora,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} f[\theta(n)+t]\cos n t\,dt < f[\theta(n)]\cdot\frac{\pi}{2n},$$

$$\sum_1^s {}_l \int_{\frac{\pi}{2n}+(l-1)\frac{2\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2n}+l\frac{2\pi}{n}} - f[\theta(n)+t]\cos n t\,dt + \int_{\frac{\pi}{2n}+s\frac{2\pi}{n}}^{b-\theta(n)} f[\theta(n)+t]\cos n t\,dt <$$

$$\frac{2}{n}\left[f\left(\theta(n)+\frac{\pi}{2n}\right) - m'_s\right] + \eta$$

essendo m'_s il minimo valore della funzione $f(x)$ nell'intervallo

$$\theta(n)+\frac{\pi}{2n}, \quad \theta(n)+\frac{\pi}{2n}+s\frac{2\pi}{n},$$

ed η il valore assoluto dell'ultimo degli integrali precedenti.

Abbiamo adunque

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{b-\theta(n)} f[\theta(n)+t]\cos n t\,dt = 0,$$

e perciò

$$\lim_{n=\infty}\int_{\theta(n)}^{b} f(t)\cos n(t-x)\,dt = 0.$$

La possibilità di costruire infinite funzioni $\theta(n)$, le quali tendono a zero per n infinito sempre decrescendo, e per modo che l'espressione

$$\frac{1}{n} f[\theta(n)]$$

si annulli, risulta dalle seguenti considerazioni.

Dalla relazione

$$y = f(x) \tag{1}$$

si ottiene

$$x = \omega(y), \tag{2}$$

essendo x una funzione ad un valore della y tra i limiti $f(b-0)$ e l'infinito positivo, la quale diminuisce sempre in questo intervallo, e senza confine; di codesta inversione fù già fatto cenno nel numero III. Ora, se si pone il valore dato dalla (2) nella (1) si ha

$$y=f(x)=f[\omega(y)]=y;$$

posto poi nella (1) per x il valore $\omega[\lambda(n)]$, $\lambda(n)$ essendo una funzione che per n infinito va all'infinito con continuità e sempre crescendo, si ottiene

$$y=\lambda(n).$$

Si potrà adunque porre

$$\theta(n)=\omega[\lambda(n)],$$

essendo

$$\frac{1}{n}\lambda(n)$$

eguale a zero per n infinito.

Egli è poi evidente, come si possano costruire infinite funzioni $\lambda(n)$, che soddisfanno alle accennate condizioni. Così per es. si potrebbe prendere per la funzione $\lambda(n)$ una delle seguenti

$$\log n, \quad \log^2 n, \quad \log^3 n, \ldots$$

essendo, come è noto,

$$\lim \frac{\log^r n}{n}=0 \quad (n=\infty).$$

Sia

$$f(x)=e^{\frac{1}{x}}=y,$$

ne consegue

$$x=\frac{1}{\log y},$$

se prendiamo

$$\lambda(n)=\log n,$$

si avrà

$$\theta(n)=\frac{1}{\log^2 n}, \quad f[\theta(n)]=\log n,$$

e l'integrale

$$\int_{\frac{1}{\log^2 n}}^{b} e^{\frac{1}{t}} \cos n(t-x)\,dt$$

diviene più piccolo di qualsivoglia quantità assegnabile all'indefinito crescere di n.

Il teorema è adunque completamente dimostrato nella ipotesi, che la $f(x)$ vada all'infinito per $x=+0$ sempre crescendo, oppure sempre diminuendo. Ove essa andasse all'infinito pel valor considerato, ora crescendo (in valor assoluto) ed ora mantenendo un valore costante, per far vedere l'esistenza di infinite funzioni $\theta(n)$, le quali soddisfanno alle condizioni accennate, basterebbe considerare una funzione $f_{11}(x)$, la quale, andando all'infinito più rapidamente che la $f(x)$, crescesse o diminuisse sempre; ed egli è manifesto, che le infinite funzioni $\theta(n)$ relative alla $f_{11}(x)$ servirebbero all'uopo.

Se poi la $f(x)$ andasse per $x=+0$ all'infinito sempre oscillando, la dimostrazione precedente non sarebbe più applicabile. In codesto caso torna acconcio il metodo che segue:

Osservo anzitutto che, se $f(x)$ è una funzione continua in tutti i punti del segmento ab, si potrà sempre dividerlo in un numero limitato di parti uguali, per modo che, considerati due valori quali si sieno assunti dalla funzione in una delle medesime i limiti inclusi, essi differiscano tra loro di una quantità non maggiore della grandezza arbitraria 2σ.

Anzitutto divido il segmento ab nei punti $x_1, x_2, x_3, \ldots$ per modo che la differenza di due tra i valori assunti dalla funzione in uno qualunque dei tratti $ax_1, x_1x_2, x_2x_3, \ldots$ inclusi i limiti non sia superiore a σ, mentre la stessa proprietà non ha luogo, se si considera un intervallo qualsivoglia di ab diverso dai precedenti, ed il quale contenga per intero uno almeno di detti tratti.

A tal fine dimezzo l'intervallo ab in α_1, se il segmento $a\alpha_1$ soddisfa alle condizioni volute, esso sarà il primo dei tratti richiesti andando da a verso b; se ciò non ha luogo, avvertirò che le differenze di due valori quali si sieno di $\varphi(x)$ nel tratto $a\alpha_1$ non è, o è superiore a σ. Nel primo caso dimezzo $\alpha_1 b$, nel secondo $a\alpha_1$ in α_2, e se $a\alpha_2$ non è uno dei segmenti cercati dovrò determinare il punto di mezzo di uno dei tratti $\alpha_1\alpha_2$, $\alpha_2 b$, $a\alpha_2$, $\alpha_2\alpha_1$.

Ora, se dopo un numero limitato di operazioni non perverrò all'intervallo richiesto, col continuo dimezzare di tratti scelti convenientemente tenderò al certo al punto x_1, tale, che ax_1 sarà il primo dei tratti voluti. Con lo stesso metodo si determinerà quindi il successivo, e così di seguito.

Ora, gli è facile l'avvertire, come pel mezzo di un numero limitato di punti $x_1, x_2, x_3, \ldots$ si dovrà pervenire all'altro estremo b del segmento considerato, essendosi mossi da a.

Ed invero, se ciò non avesse luogo, operando nel modo testè indicato io tenderei ad un punto, che sarebbe b, oppure un altro intermedio ad a e b: sia c l'ascissa del medesimo, da c verso a io posso assegnare un tratto di lunghezza μ tale, che due ordinate qualunque corrispondenti ai punti siti tra $c-\mu$ e c inclusi i limiti non abbiano una differenza maggiore della quantità arbitraria σ, mentre la stessa cosa non ha luogo nell'intervallo $c-\mu\ c-\mu-\eta$, quale si sia η. Nel tratto $c-\mu\ c$ cadrà al certo un numero illimitato dei punti della serie $x_1, x_2, \ldots$: sieno $x_n, x_{n+1}, \ldots$. Rammentiamo che la $f(x)$, considerata che sia nel tratto $x_{n+s}\ x_{n+s+1}$ ad esempio, gode della proprietà, che le ordinate relative ai punti del detto segmento i limiti inclusi differiscono tra loro al massimo di σ, mentre codesta proprietà più non ha luogo nel tratto $x_{n+s}\ x_{n+s+1}+\eta$, quale si sia η; la qualcosa contrastando con ciò, che or ora si disse, dovrà necessariamente essere finito il numero dei punti $x_1, x_2, \ldots$.

Sia ora $x_l\, x_{l+1}$ il minimo tra gli intervalli $x_1 x_2, x_2 x_3, \ldots$, ed indichiamolo per brevità con ν. Porto il segmento ν a partire da a verso b tante volte nel tratto ab, quante in esso è compreso, e, se ab non è un multiplo di ν, il resto sarà al certo minore di quest'ultimo: facciamo astrazione dal medesimo, nel quale le differenze dei valori assunti dalla $f(x)$ non sono maggiori di σ inclusi i limiti.

Abbiamo adunque diviso il tratto ab nel modo richiesto, cioè in un numero limitato di parti eguali, tali che in una qualunque delle medesime la differenza di due valori quali si sieno della funzione sia minore di 2σ, poichè due successivi dell'ultima divisione non contengono mai tra loro due della prima.

Se ora supponiamo che σ vada a zero, dovrà verificarsi altrettanto per il segmento ν; chè, se ciò non fosse, ossia se non importasse eccedere un certo limite per ν, mentre σ decresce oltre ogni misura, la $f(x)$ sarebbe costante nell'intervallo ab, il che va escluso.

Sia $f(x)$ una funzione continua tra $+0$ ed a, che va all'infinito per $x=+0$. Consideriamo l'intervallo ηa, essendo η una quantità comunque piccola; per le cose or ora dette gli è manifesto, che potremo sempre dividerlo a partire da η in un numero limitato di parti eguali, per modo che la differenza di due quali si sieno dei valori della funzione in una di esse i limiti compresi sia minore di 2σ, qualunque sia σ, astrazion fatta se mai dia un tratticello aderente ad a, e minore di una di esse. Tenendo σ costante, se si fa decrescere η indefinitamente, dovrà avvenire altrettanto del segmento ν; chè, se ciò non fosse, la $f(x)$ non andrebbe all'infinito per $x=+0$, la qual cosa è contraria all'ipotesi.

La funzione

$$\nu = \nu(\sigma, \eta)$$

nella sua dipendenza da σ ed η è ad un valore, va a zero con σ se si mantiene η costante, e con η se si tien fisso σ, se poi si fa decrescere simultaneamente η e σ essa convergerà a fortiori a zero: gli è chiaro poi che si mandano a zero le grandezze η e σ sempre decrescendo. Poniamo $\eta = \sigma$, il che è manifestamente lecito, e si avrà

$$\nu = \nu(\sigma, \sigma) = \nu_1(\sigma),$$

ν è adunque una funzione ad un valore della variabile σ, che si annulla con essa.

Ora, gli è degno di nota, come la $\nu_1(\sigma)$ non abbia infiniti massimi e minimi per $\sigma = +0$.

Infatti, essendo $\nu_1 \sigma_1$, $\nu_2 \sigma_2$ due copie corrispondenti di valori, le quali soddisfanno alla equazione $\nu = \nu_1(\sigma)$ e $\sigma_1 > \sigma_2$, non potrà essere $\nu_2 > \nu_1$. Il valore di ν, che appartiene ad un dato η e σ, determinato che sia nel modo detto or ora, è il massimo dei segmenti assegnabili e tali, che, portandoli da η o da un altro punto qualsivoglia tra η ed a verso quest'ultimo, l'intervallo considerato risulti diviso in parti eguali, astrazion fatta tutto al più di un tratticello aderente ad a e minore di ν, e per modo, che la differenza di due valori quali si sieno della $f(x)$ in una di queste parti i limiti compresi risulti minore o eguale a 2σ. Ed invero, se io partissi dal primo tra gli estremi di uno degli intervalli ηx_1, $x_1 x_2$, $x_2 x_3, \ldots$ eguali a ν portando il segmento $\nu + \eta$, comunque piccola si fosse la quantità η, la condizione testè detta non sarebbe soddisfatta. Ora, se segno il segmento ν_2 il quale corrisponde ai valori eguali η_2 e $\sigma_2 < \sigma_1 = \eta_1$ a partire da η_2, o da un punto sito tra η_2 ed a, tante volte quanto è possibile, avrò diviso l'intervallo considerato in un numero limitato di parti eguali, se mai con un resto minore che ν_2, e tali, che in ciascuna delle medesime i limiti compresi le differenze dei valori della $f(x)$ sieno minori od eguali a $2\sigma_2$, ed a più forte ragione quindi di $2\sigma_1$, non potrà adunque essere $\nu_2 > \nu_1$, come si voleva dimostrare.

Ciò posto, abbiamo

$$\int_{\theta(n)}^{b} f(t) \cos n(t - x)\, dt = \int_0^{b-\theta(n)} f[\theta(n) + t] \cos n[\theta(n) + t - x]\, dt =$$

$$\cos n[\theta(n) - x] \int_0^{b-\theta(n)} f[\theta(n) + t] \cos nt\, dt - \operatorname{sen} n[\theta(n) - x] \cdot \int_0^{b-\theta(n)} f[\theta(n) + t] \operatorname{sen} nt\, dt.$$

Ora,

$$\int_0^{b-\theta(n)} f[\theta(n)+t] \operatorname{sen} n t\, d t < \frac{2}{n} \sum_1^s {}_r (M_r - m_r) + \eta,$$

si ha poi

$$\lim_{n=\infty} \frac{s}{n} = \lim_{n=\infty} \frac{s \dfrac{2\pi}{n}}{2\pi} = \frac{b}{2\pi},$$

ossia il quoto $\frac{s}{n}$ resta finito per n infinito; d'altra parte, se si indica con σ la massima delle differenze $M_r - m_r$, si ha altresì

$$\frac{2}{n} \sum_1^s {}_r (M_r - m_r) < 2 \frac{s}{n} \sigma.$$

Adunque, se la funzione $\theta(n)$ va a zero al crescere indefinito di n per modo che σ converga a zero, la qual cosa può conseguirsi in infiniti modi, come vedrassi tra breve, si avrà

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{b-\theta(n)} f[\theta(n)+t] \operatorname{sen} n t\, d t = 0,$$

essendo $\lim \eta = 0$ per n infinito.

Consideriamo ora l'integrale

$$\int_0^{b-\theta(n)} f[\theta(n)+t] \cos n t\, d t,$$

che è eguale all'aggregato

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} f[\theta(n)+t] \cos n t\, dt - \sum_1^s {}_l \int_{\frac{\pi}{2n}+(l-1)\frac{2\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2n}+l\frac{2\pi}{n}} \Big(-f[\theta(n)+t]\Big) \cos n t\, dt + \int_{\frac{\pi}{2n}+s\frac{2\pi}{n}}^{b-\theta(n)} f[\theta(n)+t] \cos n t\, dt.$$

La somma

$$\sum_1^s {}_l \int_{\frac{\pi}{2n}+(l-1)\frac{2\pi}{n}}^{\frac{\pi}{2n}+l\frac{2\pi}{n}} \Big(-f[\theta(n)+t]\Big) \cos n t\, d t$$

va a zero con l'integrale

$$\int_0^{b-\theta(n)} f[\theta(n)+t] \operatorname{sen} n t\, d t,$$

e ciò pel modo con cui determinerassi tra breve la funzione $\theta(n)$, resta adunque, supposto che si abbia

$$f[\theta(n)+t]=f[\theta(n)]+\delta,$$

a studiarsi l'integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} f[\theta(n)+t]\cos n t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} f[\theta(n)]\cos n t\,dt + \int_0^{\frac{\pi}{2n}} \delta\cos n t\,dt$$

e poichè, come vedrassi

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \delta\cos n t\,dt = 0,$$

se

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{n}f[\theta(n)]=0,$$

si avrà

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{b-\theta(n)} f[\theta(n)+t]\cos n t\,dt = 0,$$

e quindi

$$\lim_{n=\infty}\int_{\theta(n)}^{b} f(t)\cos n(t-x)\,dt=0.$$

La possibilità di costruire infinite funzioni $\theta(n)$, le quali soddisfanno alle condizioni or ora accennate, risulta manifesta dalle seguenti considerazioni.

Si ha

$$\nu=\nu_1(\sigma),$$

essendo ν una funzione della variabile σ, la quale si annulla insieme a questa e non è dotata di un numero illimitato di massimi e minimi.

Ammetto come assioma la proposizione che segue:

Data una funzione $\mu(x)$ nell'intervallo 0η (i limiti si ponno supporre esclusi), la quale è sempre positiva nel medesimo, e va a zero per $x=+0$ non di continuo oscillando, esiste un numero illimitato di funzioni $\lambda(x)$, continue, positive tra η e 0, sempre decrescenti in questo tratto, le quali si annullano con la variabile x in modo che si abbia $\lim\limits_{x=+0}\omega(x)\cdot\lambda(x)=0$, essendo $\omega(x)$ una funzione continua, che per $x=+0$ va in un modo qualsivoglia all'infinito, e tali, che tra 0 ed η sia ognora soddisfatta la diseguaglianza $\lambda(x)<\mu(x)$.

Considerando ora la dipendenza

$$\nu = \nu_1(\sigma),$$

costruisco, giovandomi del lemma precedente, la funzione

$$y = \theta_1(x), \tag{1}$$

la quale per $x = +0$ sempre decresca, e si annulli per modo che si abbia

$$\lim_{x=+0} \theta_1(x) \cdot f(x) = 0, \text{ e } \theta_1(x) < \nu_1(x).$$

Pongo quindi $\nu = y$, il che è lecito, poichè ad un ν qualunque posso sostituirne uno minore: questi valori di y e ν corrispondono a valori eguali di σ ed x. Dalla (1) si deduce

$$x = \theta_{11}(y) = \theta_{11}(\nu)$$

x essendo una funzione ad un valore della y, la quale decresce sempre al diminuire dell'ordinata y.

Facciamo $y = \nu = \frac{2\pi}{n}$ si avrà $x = \theta_{11}\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, ed il limite della espresione

$$\frac{2\pi}{n} f\left[\theta_{11}\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]$$

per n infinito sarà eguale a zero: si potrà adunque porre

$$\theta(n) = \theta_{11}\left(\frac{2\pi}{n}\right),$$

e con ciò risulta completamente dimostrato il teorema proposto.

Studiamo ora ciò che avviene dell'integrale

$$\int_{+0}^{b} f(t) \cos n(t-x)\, dt$$

per n infinito; affinchè però questa ricerca abbia significato, gli è manifesto che bisogna ammettere, che l'integrale

$$\int_{t}^{b} f(t)\, dt$$

converga all'annullarsi del limite inferiore. In tal caso il comportarsi dell'integral precedente per n infinito dipende soltanto dal comportarsi dell'integral singolare

$$\int_{+0}^{\theta(n)} f(t) \cos n(t-x)\, dt,$$

mentre n cresce al di là di ogni limite, in quanto l'espressione

$$\int_{\theta(n)}^{b} f(t)\cos n(t-x)\,dt$$

si annulla con $\frac{1}{n}$ e quindi anche le altre

$$\int_{\theta(n)}^{b} f(t)\cos n t\,dt,\quad \int_{\theta(n)}^{b} f(t)\operatorname{sen} n t\,dt.$$

Ora, ponendo mente come si abbia, $f(x)$ essendo integrabile per $x=+0$,

$$\int_{+0}^{\frac{\pi}{2n}} f(t)\operatorname{sen} n t\,dt=\Big[\Phi_1(t)\operatorname{sen} n t\Big]_{+0}^{\frac{\pi}{2n}}-n\int_{+0}^{\frac{\pi}{2n}} \Phi_1(t)\cos n t\,dt,$$

$$\int_{+0}^{\frac{\pi}{2n}} f(t)\cos n t\,dt=\Big[\Phi_1(t)\cos n t\Big]_{+0}^{\frac{\pi}{2n}}+n\int_{+0}^{\frac{\pi}{2n}} \Phi_1(t)\operatorname{sen} n t\,dt,$$

ove

$$\Phi_1(t)=\int_{a}^{t} f(t)\,dt,$$

essendo a una costante positiva minore di b, e quindi

$$\int_{+0}^{\frac{\pi}{2n}} f(t)\operatorname{sen} n t\,dt=\Phi_1\left(\frac{\pi}{2n}\right)-\Phi_1\left(\theta\frac{\pi}{2n}\right)\quad(0<\theta<1),$$

$$\int_{+0}^{\frac{\pi}{2n}} f(t)\cos n t\,dt=-\Phi_1(0)+\Phi_1\left(\theta_1\frac{\pi}{2n}\right)\quad(0<\theta_1<1),$$

si ricaverà

$$\lim_{n=\infty}\int_{+0}^{\frac{\pi}{2n}} f(t)\cos n(t-x)\,dt=0;$$

esistono adunque infinite funzioni $\omega(n)$ sempre decrescenti sino allo zero al crescere indefinito di n, e tali, che

$$\lim_{n=\infty}\int_{0}^{\omega(n)} f(t)\cos n(t-x)\,dt=0.$$

Determinate adunque le due funzioni $\theta(n)$ ed $\omega(n)$ relative alla data funzione, quando non sia $\omega(n) \geqq \theta(n)$, resterà a considerarsi l'integral singolare

$$\int_{\omega(n)}^{\theta(n)} f(t) \cos n(t-x)\, dt$$

per n infinito, mentre si ha

$$\lim_{n=\infty} \int_{\omega(n)}^{\theta(n)} f(t)\, dt = 0.$$

Ora gli è chiaro che, se la $f_1(x)$, dedotta dalla $f(x)$ dandole sempre il segno positivo, è tale, che l'espressione

$$\int_{\omega(n)}^{\theta(n)} f_1(t)\, dt$$

vada a zero per n infinito, l'integrale

$$\int_{+0}^{b} f(t) \cos n(t-x)\, dt$$

si annullerà con $\frac{1}{n}$; se ciò non ha luogo, converrà studiare il comportarsi dell'integral singolare precedente per n infinito.

Questa ricerca non è al certo delle più facili, ed alla medesima altresì si riferiscono le parole, che Riemann pone alla fine della pag. 35 della sua Memoria:

« Ob nun die Coefficienten der Reihe zuletzt unendlich klein werden, wird in vielen Fällen nicht aus ihrem Ausdrucke durch bestimmte Integrale, sondern auf anderem Wege entschieden werden müssen. »

I noti teoremi di Dirichlet (V. Riemann, p. 14):

1) « Wenn $0 < c \leqq \frac{\pi}{2}$, nähert sich $\int_0^c \phi(\beta) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\beta}{\operatorname{sen}\beta} d\beta$ mit wachsendem n zuletzt unendlich dem Werthe $\frac{\pi}{2}\phi(0)$;

2) Wenn $0 < b < c \leqq \frac{\pi}{2}$, nähert sich $\int_b^c \phi(\beta) \frac{\operatorname{sen}(2n+1)\beta}{\operatorname{sen}\beta} d\beta$ mit wachsendem n zuletzt unendlich dem Werthe 0, vorausgesetzt, dass die Function $\phi(\beta)$ zwischen den Grenzen dieser Integration entweder immer abnimmt, oder zunimmt » ponno venir generalizzati, sostituendo alla costante comun-

que piccola b una funzione convenientemente scelta di n, la quale si annulli con $\frac{1}{n}$; ad es. $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Quale esempio di un integral singolare, di cui i limiti sono funzioni di n, ed il quale va a zero per n infinito, mentre moltiplicando la funzione per $\cos n(t-x)$ codesta condizione non è più soddisfatta, valga il seguente (V. Riemann, p. 42 e seg.):

$$\int_{n^{-\frac{1}{2}}-n^{-\frac{1+\mu}{2}}}^{n^{-\frac{1}{2}}+n^{-\frac{1+\mu}{2}}} \frac{1}{t^{2-\nu}} \operatorname{sen}\frac{1}{t}\, dt, \qquad \begin{array}{l} 0<\nu\leq\frac{1}{2}, \\ 0<\mu<\frac{1}{2}. \end{array}$$

Si ha

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\nu}\cos\frac{1}{t}\right)=\nu t^{\nu-1}\cos\frac{1}{t}+\frac{1}{t^{2-\nu}}\operatorname{sen}\frac{1}{t},$$

quindi

$$\lim_{n=\infty}\int_{n^{-\frac{1}{2}}-n^{-\frac{1+\mu}{2}}}^{n^{-\frac{1}{2}}+n^{-\frac{1+\mu}{2}}} \frac{1}{t^{2-\nu}} \operatorname{sen}\frac{1}{t}\, dt=0.$$

Consideriamo ora l'integrale

$$\int_{n^{-\frac{1}{2}}-n^{-\frac{1+\mu}{2}}}^{n^{-\frac{1}{2}}+n^{-\frac{1+\mu}{2}}} \frac{1}{t^{2-\nu}} \operatorname{sen}\frac{1}{t}\cos n(t-x)\, dt=$$

$$\frac{1}{2}\int_{n^{-\frac{1}{2}}-n^{-\frac{1+\mu}{2}}}^{n^{-\frac{1}{2}}+n^{-\frac{1+\mu}{2}}} \frac{1}{t^{2-\nu}} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}\pm n(t-x)\right)dt.$$

Si faccia per brevità

$$\alpha=n^{-\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon=n^{-\frac{1}{2}(1+\mu)},$$

e si consideri in prima l'integrale relativo al segno superiore; ponendo

$$\frac{1}{t}+n(t-x)=y, \quad \frac{1}{\alpha}+n(\alpha-x)=\beta,$$

per valori sufficientemente piccoli di t sarà

$$y=\beta+\frac{(t-\alpha)^2}{1\cdot 2}\frac{1\cdot 2}{\alpha^3}-\frac{(t-\alpha)^3}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1\cdot 2\cdot 3}{\alpha^4}+\cdots,$$

essendo

$$-\frac{1}{\alpha^2}+n=0,$$

quindi

$$y_{\alpha\pm\varepsilon}=\beta+\frac{1}{\alpha}(\alpha^{2\mu}\mp\alpha^{3\mu}+\alpha^{4\mu}\mp\cdots)=\beta+\frac{1}{\alpha^{1-2\mu}}(1\mp\alpha^{\mu}+\alpha^{2\mu}\mp\cdots),$$

ponendo

$$t=\alpha\pm\varepsilon=\alpha\pm\alpha^{1+\mu},$$

come è lecito. Fatta astrazione da grandezze di ordine inferiore si ha adunque

$$y_{\alpha\pm\varepsilon}=\beta+\frac{1}{\alpha^{1-2\mu}},$$

e, per tutti i valori che sono compresi nell'intervallo $\alpha-\alpha^{1+\mu}\cdot\alpha+\alpha^{1+\mu}$, con maggior esattezza

$$y=\beta+\frac{(t-\alpha)^2}{\alpha^3},$$

per ciò

$$\frac{dy}{dt}=2\frac{t-\alpha}{\alpha^3}=\pm 2\sqrt{\frac{y-\beta}{\alpha^3}},$$

secondo che $t\gtrless\alpha$. Di più si ha

$$\frac{1}{t^{2-\nu}}=\frac{1}{\alpha^{2-\nu}}+\frac{t-\alpha}{1}(\nu-2)\alpha^{\nu-3}+\frac{(t-\alpha)^2}{1\cdot 2}(\nu-2)(\nu-3)\alpha^{\nu-4}+\cdots,$$

quindi

$$\left(\frac{1}{t^{2-\nu}}\right)_{\alpha\pm\varepsilon}=\frac{1}{\alpha^{2-\nu}}\left(1\pm(\nu-2)\alpha^{\mu}+\frac{(\nu-2)(\nu-3)}{1\cdot 2}\alpha^{2\mu}\pm\cdots\right)=\frac{1}{\alpha^{2-\nu}}(1\pm\alpha^{\mu})^{\nu-2},$$

e prossimamente

$$\left(\frac{1}{t^{2-\nu}}\right)_{\alpha\pm\varepsilon}=\frac{1}{\alpha^{2-\nu}},$$

e pei valori di x che sono compresi nell'intervallo $\alpha-\alpha^{1+\mu}\cdot\alpha+\alpha^{1+\mu}$ con maggior precisione.

Trascurando grandezze di ordine inferiore, si ha adunque

$$\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\frac{1}{t^{2-\nu}}\operatorname{sen}y\,dt=-\frac{1}{2}\left(\int_{\beta+\frac{1}{\alpha^{1-2\mu}}}^{\beta}-\int_{\beta}^{\beta+\frac{1}{\alpha^{1-2\mu}}}\right)\frac{\sqrt{\alpha^3}}{2}\cdot\frac{1}{\alpha^{2-\nu}}\cdot\frac{\operatorname{sen}y\,dy}{\sqrt{y-\beta}},$$

ossia

$$=\frac{1}{\alpha^{2-\nu}}\frac{\sqrt{\alpha^3}}{2}\int_0^{\alpha^{\frac{1}{1-2\mu}}}\frac{\operatorname{sen}(y+\beta)\,dy}{\sqrt{y}}.$$

Se si manda ora n all'infinito, l'espressione $\frac{1}{\alpha^{1-2\mu}}$, poichè per ipotesi $\mu<\frac{1}{2}$, diviene pure infinita, e siccome si ha, come è noto,

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}(y+\beta)\frac{dy}{\sqrt{y}}=\operatorname{sen}\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\pi},$$

si avrà per n infinito

$$\frac{\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\frac{1}{t^{2-\nu}}\operatorname{sen} y\,dt}{\frac{1}{2}n^{\frac{1-2\nu}{4}}\operatorname{sen}\left(\beta+\frac{\pi}{4}\right)\sqrt{\pi}}=1.$$

Seguendo il metodo testè tenuto, si vedrebbe facilmente come si abbia

$$\lim_{n=\infty}\frac{1}{2}\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\frac{1}{t^{2-\nu}}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{t}-n(t-x)\right)dt=0.$$

L'integrale singolare

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\frac{1}{t^{2-\nu}}dt$$

diverge per n infinito; infatti, esso è eguale a

$$\frac{\alpha^{\nu-1}}{\nu-1}\left[\left(1+\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{\nu-1}-\left(1-\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{\nu-1}\right]=\frac{\alpha^{\nu-1}}{\nu-1}\left(2(\nu-1)\frac{\varepsilon}{\alpha}+2(\nu-1)_3\frac{\varepsilon^3}{\alpha^3}+\cdots\right),$$

e prossimamente

$$2\frac{\alpha^{\nu-1}}{\nu-1}\cdot(\nu-1)\frac{\varepsilon}{\alpha}=2\alpha^{\nu+\mu-1},$$

essendo $\nu+\mu-1<0$: l'altro

$$\int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon}\frac{1}{t^{2-\nu}}\operatorname{sen}\frac{1}{t}dt$$

all'incontro converge, e ciò pel rapido alternarsi dei segni della funzione $\frac{1}{t^{2-\nu}}\operatorname{sen}\frac{1}{t}$, onde avviene che gli accrescimenti della medesima vicendevolmente si distruggano; l'aggiunta del fattore $\cos n(t-x)$ fa sì che codesti accrescimenti di nuovo si sommino intorno al punto α, essendo

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=\alpha}=-\frac{1}{\alpha^2}+n=0,$$

e quindi la funzione

$$\frac{1}{t}+n(t-x)$$

essendo quasi costante nelle estreme vicinanze di α.

Riemann a pagina 45 del suo lavoro osserva:

« Wie man sieht, heben sich in dem Integrale $\int_x f(x)\,dx$ bei unendlichem Abnehmen von x die Zuwachse des Integrals, obwohl ihr Verhältniss zu den Aenderungen von x sehr rasch wächst, wegen des raschen Zeichenwechsels der Function $f(x)$ einander auf; durch das Hinzutreten des Factors $\cos n(x-a)$ aber wird hier bewirkt, dass diese Zuwachse sich summiren. »

Supponiamo ora che la $f(x)$ vada all'infinito per $x=0$ essendo integrabile, mentre però i due integrali

$$\int_{-\eta}^{-\varepsilon} f_1(t)\,dt, \quad \int_{\varepsilon}^{\eta} f(t)\,dt$$

divergono per $\varepsilon=+0$, $f_1(x)$ essendo dedotta dalla proposta pigliandola sempre con lo stesso segno. In questo caso, poichè si ha

$$\int_{-\eta}^{-0} f(t)\cos n(t-x)\,dt+\int_{+0}^{+\eta} f(t)\cos n(t-x)\,dt=$$

$$\cos nx\int_{+0}^{\eta}[f(-t)+f(t)]\cos nt\,dt+\operatorname{sen} nx\int_{+0}^{\eta}[f(t)-f(-t)]\operatorname{sen} nt\,dt,$$

e giacchè l'annullarsi della espressione

$$a_n \operatorname{sen} nx+b_n\cos nx,$$

per tutti i valori particolari di un segmento comunque piccolo, porta come necessaria conseguenza che si abbia

$$\lim a_n=\lim b_n=0 \quad (n=\infty),$$

si avrà necessariamente

$$\lim_{n=\infty}\int_{+0}^{\eta}[f(t)+f(-t)]\cos n t\, d t=0,$$

$$\lim_{n=\infty}\int_{+0}^{\eta}[f(t)-f(-t)]\operatorname{sen} n t\, d t=0.$$

Se per $x=x_\sigma$ la $f(x)$ andasse all'infinito senza essere integrabile, si dovrebbe avere

$$\lim_{n=\infty}\int_{+0}^{\eta}\Big(f(x_\sigma-t)\cos n t+f[x_\sigma+\phi_\sigma(t)]\,\phi'_\sigma(t)\cos n\,\phi_\sigma(t)\Big)dt=0,$$

$$\lim_{n=\infty}\int_{+0}^{\eta}\Big(f(x_\sigma-t)\operatorname{sen} n t-f[x_\sigma+\phi_\sigma(t)]\,\phi'_\sigma(t)\operatorname{sen} n\,\phi_\sigma(t)\Big)dt=0;$$

ad esempio:

$$f(x_\sigma+t)=\frac{1}{t\log\frac{1}{t}\cdots\log^{m-1}\frac{1}{t}},$$

$$f(x_\sigma-t)=-\frac{1}{t\log\frac{1}{t}\cdots\log^{m-1}\frac{1}{t}},$$

imperocchè in allora l'integrale

$$\int_{+0}^{\eta}[f(x_\sigma+t)+f(x_\sigma+t)]\cos n t\, d t$$

per valori sufficientemente piccoli di η sarebbe nullo, e l'altro

$$\int_{+0}^{\eta}[f(x_\sigma-t)-f(x_\sigma+t)]\operatorname{sen} n t\, d t$$

eguale a

$$-2\int_{+0}^{\eta}\frac{dt}{\log\frac{1}{t}\cdots\log^{m-1}\frac{1}{t}}\,\frac{\operatorname{sen} n t}{t}\,dt,$$

e quindi, per il teorema di Dirichlet citato poco fa, nullo per n crescente al di là di ogni limite.

Se all'incontro si avesse

$$f(x_\sigma+t)=-\frac{1}{t},\quad f(x_\sigma-t)=\frac{1}{t},$$

sarebbe

$$\lim_{n=\infty}\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-0}+\int_{x_\sigma+0}^{x_\sigma+\eta}\right)f(t)\cos n(t-x)dt=\operatorname{sen} n(x_\sigma-x)\lim_{n=\infty}\int_{+0}^{\eta}2\frac{\operatorname{sen} nt}{t}dt=\pi\operatorname{sen} n(x_\sigma-x).$$

In quest'ultimo caso i coefficienti della serie di Fourier non si annullerebbero per n infinito quale si sia x.

Dalle cose dette sin qui risulta manifesto, come il comportarsi dell'integrale

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos n(t-x)\,dt,$$

per n crescente al di là di ogni limite, dipenda soltanto dai modi, secondo i quali la $f(x)$ va all'infinito intorno a quei punti, pei quali non risulta integrabile, pigliata che sia sempre con lo stesso segno: in quanto, se una funzione non è integrabile intorno ad un punto nelle vicinanze del quale cambia costantemente di segno, non lo sarà a più forte ragione quando si trasformi nel modo accennato.

Se si fa astrazione dalle funzioni che hanno infiniti massimi e minimi, gli è agevole il trovare le condizioni necessarie e sufficienti, perchè l'integrale

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos n(t-x)\,dt$$

si annulli con $\frac{1}{n}$. Nella dimostrazione del primo lemma si avvertì, come l'integral principale relativo alla data funzione debba in questa ipotesi convergere, il che è sufficiente, perchè l'espressione

$$\int_{+0}^{\eta}[f(x_\sigma+t)+f(x_\sigma-t)]\cos nt\,dt$$

vada a zero con $\frac{1}{n}$, $f(x_\sigma+t)+f(x_\sigma-t)$ essendo, per dato, scevro da infiniti massimi e minimi. Si vide altresì come anche l'integrale

$$\int_{+0}^{\eta}[f(x_\sigma-t)-f(x_\sigma+t)]\operatorname{sen} nt\,dt$$

debba convergere; ora, se si pone $f(x_\sigma-t)t-f(x_\sigma+t)t=\phi(t)$, avremo

$$\lim_{n=\infty}\int_{+0}^{\eta}\phi(t)\frac{\operatorname{sen} nt}{t}dt=\frac{\pi}{2}\phi(+0).$$

l'espressione $\phi(t)=f(x_\sigma-t)t-f(x_\sigma+t)t$ deve adunque convergere a zero con t, e poichè $f(x_\sigma+t)+f(x_\sigma-t)$ è integrabile per $t=0$, e quindi anche la quantità $f(x_\sigma+t)t+f(x_\sigma-t)t$, nell'ipotesi fatta, si annulla con t, amendue le grandezze $f(x_\sigma+t)t$ ed $f(x_\sigma-t)t$ dovranno svanire con t.

Possiamo adunque conchiudere con Riemann (V. p. 41):

« Von Functionen, welche unendlich viele Maxima und Minima haben abgesehen, ist es also zur Darstellbarkeit der Function $f(x)$ durch eine trigonometrisce Reihe mit in's Unendliche abnehmenden Coefficienten hinreichend und nothwendig, dass, wenn sie für $x=x_\sigma$ unendlich wird, $f(x_\sigma+t)t$ und $f(x_\sigma-t)t$ mit t unendlich klein werden und $f(x_\sigma+t)+f(x_\sigma-t)$ bis an $t=0$ integrirt werden kann. »

Le parole spazieggiate sono nel caso nostro superflue, perchè conseguenza della condizione che la $f(x)$ sia esprimibile per serie trigonometrica. Nel caso contemplato da Riemann sono poi esse veramente necessarie?

Vedremo poi tra breve come, se una funzione è scevra da infiniti massimi e minimi, la condizione

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi} f(t)\cos n(t-x)\,dx=0$$

porti di necessaria conseguenza l'esprimibilità per serie di Fourier.

Nell'ipotesi che l'integral precedente vada a zero per n infinito, qualunque sia x, i coefficienti della serie di Fourier relativa alla data funzione vanno a zero; altrimenti ciò non ha luogo. È però notevole come in questo caso l'integral precedente si annulli per un numero limitato soltanto di punti, e come i medesimi abbiano delle posizioni simmetriche rispetto ai punti, pei quali l'espressione

$$\lim_{\varepsilon=+0}\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\rho_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\rho_\sigma(\eta)}\right)f(t)\cos n(t-x)\,dt$$

non si annulla con $\frac{1}{n}\cdot$ Questa asserzione verrà dimostrata in appresso.

Sia ora a_1 un valor particolare della x, tale che per esso l'integrale

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos n(t-a_1)\,dt$$

si annulli per n infinito, senza asseverar nulla se altrettanto abbia o no luogo dell'integral precedente qualunque sia a, e supposto che l'espressione

$$f(a_1+0)+f(a_1-0)$$

rappresenti una grandezza, e la serie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt + \sum_1^n \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos n(t-a_1)\,dt$$

converga, sarà la sua somma

$$f(a_1+0)+f(a_1-0)\ ?$$

È facile il dimostrare come ciò abbia sempre luogo.

Giovandoci delle notazioni usate nel n.° III (V. RIEMANN, p. 37), abbiamo:

$$F_1(a_1)-\frac{\alpha}{2}a_1^2-\beta a_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(F_1(x)-\frac{\alpha}{2}x^2-\beta x\right)dx-\sum_1^n\frac{1}{n^2}\int_0^{2\pi}f(x)\cos n(x-a_1)dx,$$

ossia

$$F_1(a_1)=\frac{\alpha}{2}a_1^2+\beta a_1+\gamma-\sum_1^n\frac{1}{n^2}(a_n\cos n a_1+b_n\operatorname{sen} n a_1);$$

così pure

$$F_1(a_1\pm t)=\frac{\alpha}{2}(a_1\pm t)^2+\beta(a_1\pm t)+\gamma-\sum_1^n\frac{1}{n^2}[a_n\cos n(a_1\pm t)+b_n\operatorname{sen} n(a_1\pm t)],$$

e perciò

$$\frac{F_1(a_1+t)+F_1(a_1-t)}{2}=\frac{\alpha}{2}a_1^2+\frac{\alpha}{2}t^2+\beta a_1+\gamma-\sum_1^n\frac{1}{n^2}(a_n\cos na_1+b_n\operatorname{sen} na_1)\cos nt=$$

$$E+\frac{\alpha}{2}t^2-\sum_1^n\frac{A'_n}{n^2}\cos nt=G(t),$$

essendosi posto per brevità

$$E=\frac{\alpha}{2}a_1^2+\beta a_1+\gamma.$$

Ora

$$G(t)=G(0)+G'(+0)\frac{t}{1}+G''(\theta t)\frac{t^2}{2},\quad 0<\theta<1,$$

e d'altra parte

$$G(0)=F_1(a_1),$$

$$G(t)=\tfrac{1}{2}\left(\int_a^{a_1+t}\psi(x)\,dx+\int_a^{a_1-t}\psi(x)\,dx\right),$$

quindi

$$G'(t)=\tfrac{1}{2}[\psi(a_1+t)-\psi(a_1-t)]=\tfrac{1}{2}\left(\int_{a\pm0}^{a_1+t}f(x)dx+\int_{a\pm0}^{a_1-t}f(x)\,dx\right)=$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{a_1-t}^{a_1+t}f(x)\,dx=\tfrac{1}{2}\int_{+0}^{t}[f(a_1+t)+f(a_1-t)]\,dt,$$

perciò

$$G'(+0)=0;$$

si ha pure

$$G''(t)=\tfrac{1}{2}[f(a_1+t)+f(a_1-t)],$$

laonde

$$\lim_{t=+0}\frac{G(t)-G(0)}{t^2}=\tfrac{1}{4}[f(a_1+0)+f(a_1-0)],$$

e per un noto teorema (V. RIEMANN, p. 25)

$$\frac{G(+t)-2G(0)+G(-t)}{t^2}=a+\sum_1^n(a_n\cos na_1+b_n\operatorname{sen} na_1)=\tfrac{1}{2}[f(a_1+0)+f(a_1-0)].$$

Si è dimostrato adunque il seguente teorema:

Se $f(x)$ è una funzione periodica secondo 2π, continua tranne che per un numero limitato di punti tra 0 e 2π, e se gli integrali

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\eta}\right)f(t)\,dt,$$

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\eta}\right)f(t)(x_\sigma-t)\,dt$$

convergono per $\varepsilon=+0$, (x_σ essendo uno qualunque dei punti, pei quali la $f(x)$ va all'infinito e non è integrabile), mentre la funzione

$$\int_{a\pm0}^{x}f(x)$$

quale si sia x rappresenta una grandezza, sarà

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\,dt+\sum_1\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos n(t-a_1)\,dt=\tfrac{1}{2}f(a_1+0)+\tfrac{1}{2}f(a_1-0),$$

ogniqualvolta la serie converga, ed i simboli

$$\tfrac{1}{2}f(a_1+0)+\tfrac{1}{2}f(a_1-0),\quad \int_{+0}f(a_1+t)\,t\,dt \tag{1}$$

non sieno scevri da significato.

Adunque, se la $f(x)$ è continua pel valore a_1 la serie di FOURIER la rappresenta: se all'incontro questa condizione non è soddisfatta, la serie trigonometrica la rappresenterà ogniqualvolta si abbia

$$f(a_1)=\tfrac{1}{2}f(a_1+0)+\tfrac{1}{2}f(a_1-0);$$

altrimenti no.

Gli è però degno di nota, come l'ammettere che l'espressione (1) abbia significato, non porti di necessità che ciascuno dei simboli

$$f(a_1+0), \quad f(a_1-0)$$

rappresenti una grandezza; la qual cosa potrà aver luogo o no: nel primo caso la $f(x)$ per $x=a_1$ sarebbe continua, oppure salterebbe da un valore ad un altro. Ciò che importa notare si è, che l'espressione complessiva

$$f(a_1+0)+f(a_1-0)$$

abbia significato, il che avverrebbe per es. se la $f(x)$ a destra del punto a_1 fosse eguale a

$$\operatorname{sen}\frac{1}{x-a_1},$$

mentre a sinistra si comportasse come

$$\operatorname{sen}\frac{1}{x-a_1}+\phi(x),$$

$\phi(a_1-0)$ avendo significato; o, per altro esempio, se la $f(x)$ per $x=a_1+0$ fosse eguale a

$$\log(x-a_1),$$

e per $x=a_1-0$ a

$$-\log(a_1-x)+\phi(x).$$

Vedremo tra breve, come la serie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx+\frac{1}{\pi}\sum_1^{}{}_n\int_0^{2\pi}f(x)\cos n(x-a_1)\,dx$$

possa convergere, mentre il simbolo

$$f(a_1+0)+f(a_1-0)$$

non ha significato, e viceversa.

Ciò posto, sorge spontanea la domanda: ammesso che l'ultima espressione rappresenti una grandezza, e che pel valor particolare a_1 si abbia

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\cos n(x-a)\,dx=0,$$

senza asseverar nulla, se ciò si verifichi o meno qualunque sia a, a qual criterio converrà ricorrere per giudicare se la serie converga?

Poichè la serie

$$-\frac{A'_1\cos t}{1}-\frac{A'_2\cos 2t}{4}-\frac{A'_3\cos 3t}{9}-\cdots=-\sum_1^n\frac{(a_n\cos n\alpha_1+b_n\,\mathrm{sen}\,n\alpha_1)\cos nt}{n^2}$$

converge in egual grado, la funzione

$$G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E,$$

periodica secondo 2π, è ovunque continua, e di più

$$A'_n=-\frac{n^2}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\cos nt\,dt.$$

Ora, si ha manifestamente (V. Riemann, p. 33 e seg., 37 e seg.)

$$\sum_1^n{}_s A'_s=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2\right)\sum_1^n{}_s-s^2\cos st\,dt;$$

ma

$$\tfrac{1}{2}+\sum_1^n{}_s\cos st=\tfrac{1}{2}\frac{\mathrm{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\mathrm{sen}\frac{1}{2}t},$$

quindi

$$-\sum_1^n{}_s s^2\cos st=\tfrac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\mathrm{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\mathrm{sen}\frac{1}{2}t},$$

laonde

$$A'_1+A'_2+\cdots A'_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2\right)\frac{d^2}{dt^2}\frac{\mathrm{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\mathrm{sen}\frac{1}{2}t}\,dt,$$

oppure

$$\sum_1^n{}_s A'_s=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2\right)\frac{d^2}{dt^2}\left(\mathrm{sen}\,nt\frac{\cos\frac{1}{2}t}{\mathrm{sen}\frac{1}{2}t}+\cos nt\right)dt.$$

Consideriamo ora l'integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\lambda(t)\frac{d^2}{dt^2}\frac{\mathrm{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\mathrm{sen}\frac{1}{2}t}\,dt,$$

[ove $\lambda(t)$ rappresenta una funzione della quale tra breve si diranno le proprietà] che, osservando come si abbia

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}=\frac{d^2}{dt^2}\left(\operatorname{sen}nt\frac{\cos\frac{1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}+\cos nt\right)=$$

$$=-n^2\operatorname{sen}nt\frac{\cos\frac{1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}-n\cos nt\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}t}+\operatorname{sen}nt\cdot\frac{\cos\frac{1}{2}t}{2\operatorname{sen}^3\frac{1}{2}t}-n^2\cos nt,$$

è eguale all'aggregato

$$-\frac{n^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\cos nt\lambda(t)\,dt,$$

$$-\frac{n^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\operatorname{sen}nt\lambda(t)\frac{\cos\frac{1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt,$$

$$-\frac{n}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\cos nt\lambda(t)\frac{dt}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}t},$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\operatorname{sen}nt\frac{\lambda(t)\cos\frac{1}{2}t}{2\operatorname{sen}^3\frac{1}{2}t}\,dt.$$

È facile dimostrare, che ciascuno di questi integrali converge a zero per n infinito. A tal fine rammento anzitutto il teorema già dimostrato:

Se si indicano con b e con c due costanti qualunque, la maggiore con c, e con $\lambda(t)$ una funzione continua tra b e c ed ai limiti con la sua derivata prima, e tale che sia

$$\left[\lambda(t)\frac{dB_{\mu\pm n}}{dt}\right]_b^c=\left[\lambda'(t)B_{\mu\pm n}\right]_b^c=0,$$

essendosi posto per brevità

$$B_{\mu\pm n}=\tfrac{1}{2}(a_n\operatorname{sen}nx+b_n\cos nx)\cos(\mu\pm n)(t-x)\pm$$
$$\tfrac{1}{2}(a_n\cos nx-b_n\operatorname{sen}nx)\operatorname{sen}(\mu\pm n)(t-x),$$

e di cui la derivata seconda renda l'espressione

$$\int_b^c\lambda''(t)\cos r(t-x)\,dt$$

nulla per r infinito; l'integrale

$$\mu^2\int_b^c\left(\sum_1^n\frac{a_n\operatorname{sen}nt+b_n\cos nt}{n^2}\right)\cos\mu(t-x)\lambda(t)\,dt,$$

essendo

$$\lim a_n = \lim b_n = 0 \qquad (n=\infty),$$

andrà a zero per μ crescente al di là di ogni limite.

Consideriamo in prima l'integrale

$$-n^2\int_{-\pi}^{+\pi}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\cos nt\lambda(t)\,dt = n^2\int_{-\pi}^{+\pi}\left(\sum_1 {}_s\frac{A'_s}{s^2}\cos st\right)\lambda(t)\cos nt\,dt:$$

in questo caso si ha

$$B_{\mu\pm n} = B_{n\pm s} = \tfrac{1}{2}A'_s\cos(n\pm s)t,$$

$$\frac{dB_{n\pm s}}{dt} = -(n\pm s)\tfrac{1}{2}A'_s\operatorname{sen}(n\pm s)t,$$

perciò

$$\left[\lambda(t)\frac{dB_{n\pm s}}{dt}\right]_{-\pi}^{\pi}=0, \quad \left[\lambda'(t)B_{n\pm s}\right]_{-\pi}^{\pi}=0,$$

se si suppone che $\lambda(t)$ sia continua colle sue derivate prima e seconda tra $-\pi$ e π, i limiti inclusi, e di più che $\lambda'(\pi)=\lambda'(-\pi)$, abbiamo adunque

$$\lim_{n=\infty} n^2\int_{-\pi}^{+\pi}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\lambda(t)\cos nt\,dt = 0.$$

Studiamo ora l'integrale

$$n^2\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_1 {}_s\frac{A'_s}{s^2}\cos st\right)\lambda(t)\frac{\cos\frac{1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\operatorname{sen} nt\,dt:$$

si ha

$$B_{n\pm s} = \tfrac{1}{2}A'_s\operatorname{sen}(n\pm s)t,$$

$$\frac{dB_{n\pm s}}{dt} = \tfrac{1}{2}(n\pm s)A'_s\cos(n\pm s)t.$$

Se si suppone

$$\lambda(0)=\lambda'(0)=\lambda''(0)=0,$$

e che $\lambda'''(x)$ sia continua pel valor particolare 0, gli è chiaro, che la funzione $\dfrac{\lambda(t)\cos\frac{1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}$ sarà continua colle sue derivate prima e seconda nell'intervallo $-\pi\cdot+\pi$, inclusi i limiti. Ed invero,

$$\lim_{t=0}\frac{\lambda(t)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}=2\lambda'(0)=0,\quad \frac{d}{dt}\frac{\lambda(t)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}=\lambda'(t)\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}-\lambda(t)\frac{\cos\frac{1}{2}t}{2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}t},\quad \lim_{t=+0}\frac{\lambda'(t)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}=2\lambda''(0)=0,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\lambda(t)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}=\lambda''(t)\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}-2\lambda'(t)\frac{1}{2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}t}+\lambda(t)\frac{\cos\frac{1}{2}t}{2\operatorname{sen}^3\frac{1}{2}t};$$

quindi
$$\lim_{n=\infty} n^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \left(G(t) - \frac{\alpha}{2} t^2 - E \right) \operatorname{sen} nt \lambda(t) \frac{\cos \frac{1}{2} t}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} t} dt = 0,$$
essendo
$$\left[\frac{\lambda(t) \cos \frac{1}{2} t}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} t} \frac{d B_{n \pm s}}{dt} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0,$$
$$\left[B_{n \pm s} \left(\lambda'(t) \frac{\cos \frac{1}{2} t}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} t} - \frac{\lambda(t)}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t} \right) \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Consideriamo ora il terzo dei precedenti integrali: si ha in questo caso
$$B_{n \pm s} = \tfrac{1}{2} A'_s \cos (n \pm s) t, \quad \frac{d B_{n \pm s}}{dt} = - (n \pm s) \tfrac{1}{2} A'_s \operatorname{sen} (n \pm s) t.$$

La funzione $\dfrac{\lambda(t)}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t}$ è continua tra $-\pi$ e $+\pi$, inclusi i limiti, poichè per ipotesi $\lambda'(0) = \lambda''(0) = 0$, consideriamo ora le due derivate
$$\frac{d}{dt} \frac{\lambda(t)}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t} = \frac{\lambda'(t)}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t} - \frac{\lambda(t) \cos \frac{1}{2} t}{2 \operatorname{sen}^3 \frac{1}{2} t},$$
$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\lambda(t)}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t} = \frac{\lambda''(t)}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t} - \frac{\lambda'(t) \cos \frac{1}{2} t}{\operatorname{sen}^3 \frac{1}{2} t} + \lambda(t) \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t + 3 \cos^2 \frac{1}{2} t}{4 \operatorname{sen}^4 \frac{1}{2} t}.$$

La derivata prima è manifestamente continua tra $-\pi$ e $+\pi$, inclusi i limiti; gli è facile poi l'avvertire, come, supposto anche $\lambda'''(t)$ continua per $x = 0$, la derivata seconda sia pure continua tra $-\pi$ e $+\pi$, i limiti inclusi. Ed invero,
$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\lambda(t)}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\frac{1}{4} t^2}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t} \cdot \frac{\lambda(t)}{\frac{1}{4} t^2} \right) = \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\frac{1}{4} t^2}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t} \right) \cdot$$
$$\frac{\lambda(t)}{\frac{1}{4} t^2} + 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{1}{4} t^2}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\lambda(t)}{\frac{1}{4} t^2} \right) + \frac{\frac{1}{4} t^2}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\lambda(t)}{\frac{1}{4} t^2} \right);$$
d'altra parte, le funzioni
$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\frac{1}{4} t^2}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t} \right), \quad \frac{\lambda(t)}{\frac{1}{4} t^2}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\frac{1}{4} t^2}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t} \right), \quad \frac{d}{dt} \frac{\lambda(t)}{\frac{1}{4} t^2}, \quad \frac{\frac{1}{4} t^2}{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t}$$
sono al certo continue per $t = 0$; resta dunque a considerarsi l'espressione
$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\lambda(t)}{t^2} \right) = \frac{d}{dt} \frac{t^2 \lambda'(t) - 2 t \lambda(t)}{t^4} = \frac{d}{dt} \frac{t \lambda'(t) - 2 \lambda(t)}{t^3} =$$
$$\frac{t^3 [\lambda'(t) + t \lambda''(t) - 2 \lambda'(t)] - 3 t^2 [t \lambda'(t) - 2 \lambda(t)]}{t^6} = \frac{t^2 \lambda''(t) - 4 t \lambda'(t) + 6 \lambda(t)}{t^4}.$$

le derivate prima e seconda del numeratore sono

$$t^2\lambda'''(t)-2t\lambda''(t)+2\lambda'(t),\quad t^2\lambda''''(t);$$

e poichè per ipotesi $\lambda''''(t)$ è continua per $t=0$, lo è altresì la funzione

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\lambda(t)}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}t}\right).$$

D'altra parte si ha

$$\left[\frac{\lambda(t)}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}t}\frac{dB_{n\pm s}}{dt}\right]_{-\pi}^{\pi}=\left[B_{n\pm s}\left(\frac{\lambda'(t)}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}t}-\frac{\lambda(t)\cos\frac{1}{2}t}{\operatorname{sen}^3\frac{1}{2}t}\right)\right]_{-\pi}^{\pi}=0,$$

quindi

$$\lim_{n=\infty} n^2\int_{-\pi}^{+\pi}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\cos nt\frac{\lambda(t)}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}t}dt=0,$$

ed a più forte ragione

$$\lim_{n=\infty} n\int_{-\pi}^{+\pi}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\cos nt\frac{\lambda(t)}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}t}dt=0.$$

Ponendo mente come la funzione

$$\frac{\lambda(t)\cos\frac{1}{2}t}{\operatorname{sen}^3\frac{1}{2}t}$$

sia continua tra $-\pi$ e $+\pi$, i limiti inclusi, si vede facilmente come si abbia

$$\lim_{n=\infty}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\operatorname{sen} nt\frac{\lambda(t)\cos\frac{1}{2}t}{2\operatorname{sen}^3\frac{1}{2}t}dt=0.$$

Riepilogando, se $\lambda(t)$ è una funzione continua colle sue derivate prima e seconda tra $-\pi$ e $+\pi$, compresi i limiti, e se

$$\lambda(0)=\lambda'(0)=\lambda''(0)=0,\quad \lambda'(\pi)=\lambda'(-\pi),$$

$\lambda'''(t)$ e $\lambda''''(t)$ essendo continue per $t=0$, l'integrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\lambda(t)\frac{d^2}{dt^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}dt$$

va a zero all'indefinito aumentare di n.

Poniamo ora

$$\lambda(t)=1-\rho(t),$$

ove $\rho(t)$ rappresenta una funzione continua ovunque colle sue derivate prima e seconda e sempre nulla, tranne che nel tratto $-\eta$, $+\eta$, e tale che si abbia

$$\rho(-\eta)=\rho(+\eta)=\rho'(-\eta)=\rho'(+\eta)=\rho''(-\eta)=\rho''(+\eta)=0,$$

e che fra $-\mu$ e $+\mu$ sia eguale ad uno, la grandezza positiva μ essendo minore di η.

Se si fosse posto subito $\lambda(t)=1-\rho(t)$, $\rho(t)$ soddisfacendo alle condizioni or ora dette, sarebbe riuscito alquanto più semplice il dimostrare la eguaglianza

$$\lim_{n=\infty} n^2\int_{-\pi}^{+\pi}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\lambda(t)\frac{d^2}{dt^2}\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt=0;$$

si è preferito però la funzione più generale $\lambda(t)$ per rischiarare quanto Riemann dice nelle p. 33 e seg.^{ti}, 38 e seg.^{te} della sua Memoria.

Essendo $\lambda(t)=1-\rho(t)$, ne consegue che la differenza

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\right)dt-$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\right)\rho(t)\,dt,$$

ossia l'altra

$$\sum_{1}^{n}{}_s A'_s-\frac{1}{2\pi}\int_{-\eta}^{\eta}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\right)\rho(t)\,dt$$

si annulla per n infinito.

Ora, si ha

$$\int_{-\eta}^{\eta}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\right)\rho(t)\,dt=$$
$$\left[\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\right)\rho(t)\right]_{-\eta}^{\eta}-$$
$$\int_{-\eta}^{\eta}\frac{d}{dt}\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\left[\rho'(t)\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)+\rho(t)[G'(t)-\alpha t]\right]dt,$$

ma per ipotesi $\rho(\eta)=\rho(-\eta)=0$, quindi

$$\int_{-\eta}^{\eta}\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\right)\rho(t)\,dt=$$

$$\int_{-\eta}^{\eta}\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\left[\rho''(t)\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)+2\rho'(t)[G'(t)-\alpha t]+\rho(t)[G''(t)-\alpha]\right]dt,$$

essendo $\rho'(\eta)=\rho'(-\eta)=0$.

L'integrale

$$\left(\int_{-\eta}^{-\mu}+\int_{+\mu}^{+\eta}\right)\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\left[\rho''(t)\left(G(t)-\frac{\alpha}{2}t^2-E\right)+2\rho'(t)[G'(t)-\alpha t]+\rho(t)[G''(t)-\alpha]\right]dt$$

va a zero per n infinito; e poichè $\rho'(t)$, $\rho''(t)$ sono nulle tra $-\mu$ e $+\mu$, la differenza

$$A'_1+A'_2+A'_3+\cdots+A'_n-\frac{1}{2\pi}\int_{-\mu}^{+\mu}[G''(t)-\alpha]\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt$$

andrà a zero per n infinito.

Ora, si ha

$$\int_{-\mu}^{+\mu}[G''(t)-\alpha]\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt=2\int_{+0}^{\mu}[G''(t)-\alpha]\cdot\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt,$$

poichè

$$G(t)=G(-t);$$

ma

$$2\int_{+0}^{\mu}[G''(t)-\alpha]\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt=$$

$$\int_{+0}^{\mu}[f(a_1+t)+f(a_1-t)]\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt-2\alpha\int_{+0}^{\mu}\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt;$$

stando sempre l'ipotesi che l'uno dei due integrali

$$\int_t f(a_1+t)\,t\,dt,\quad \int_t f(a_1-t)\,t\,dt$$

converga per $t=+0$.

D'altra parte

$$\int_{+0}^{\mu}[f(a_1+t)+f(a_1-t)]\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt=$$

$$[f(a_1+0)+f(a_1-0)]\int_{+0}^{\mu}\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt+\int_{+0}^{\mu}\psi(t)\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt,$$

essendosi posto per brevità

$$f(a_1+t)+f(a_1-t)-f(a_1+0)-f(a_1-0)=\psi(t).$$

Ma è noto che

$$\lim_{n=\infty}\int_{+0}^{\mu}\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}=\pi,$$

quindi

$$\lim_{n=\infty}2\alpha\int_{+0}^{\mu}\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}=\int_{0}^{2\pi}f(x)\,dx,$$

essendo $\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\,dx$; dunque la serie

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\,dx+\frac{1}{\pi}\sum_{1}\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos n(x-a_1)\,dx$$

convergerà, ed avrà per somma l'espressione $f(a_1+0)+f(a_1-0)$, supposto ben inteso che quest'ultima abbia significato, ogniqualvolta sia

$$\lim_{n=\infty}\int_{+0}^{\mu}\psi(t)\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt=0,$$

ed il simbolo $\int_{+0}f(a_1+t)t\,dt$ rappresenti una grandezza.

Dunque il convergere della serie

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\,dx+\sum_{1}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi}f(x)\cos n(x-a)\,dx$$

pel valor particolare a_1, dipende, nelle ipotesi fatte, dal comportarsi dell'integral singolare $\int_{+0}^{\theta(n)} \psi(t) \frac{\operatorname{sen} n t}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} t} \cos \frac{1}{2} t\, d t$ per n infinito.

Ponendo mente che se la serie converge e se $f(a_1+0)+f(a_1-0)$ ed $\int_{+0} f(a_1+t) t\, d t$ hanno significato, questo integrale deve annullarsi, si ha il teorema:

Se l'integrale

$$\int_{+0}^{\mu} \psi(t) \frac{\operatorname{sen}(2 n+1) \frac{t}{2}}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} t} d t$$

converge per n infinito, $\psi(t)$ essendo una funzione continua nelle estreme vicinanze dell'origine delle coordinate, che va a zero con t, si avrà

$$\lim_{n=\infty} \int_{+0}^{\mu} \psi(t) \frac{\operatorname{sen}(2 n+1) \frac{t}{2}}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} t} d t=0.$$

Ora giova osservare come il convergere della serie dipenda dal complessivo comportarsi della funzione nelle estreme vicinanze del punto a_1, non già dal singolo comportarsi dell'integral precedente da ciascuna delle due parti. Così, se la funzione per $x=a_1$ fosse continua, o saltasse bruscamente da un valore ad un altro, amendue assegnabili, l'espressione $f(a_1+t)-f(a_1+0)$ potrebbe andare a zero comunque, imperocchè si potrebbe sempre disporre del modo di annullare l'espressione

$$f(a_1+t)+f(a_1-t)-f(a_1+0)-f(a_1-0).$$

Di più il simbolo $f(a_1+0)$, come poc'anzi già si è osservato, potrebbe non aver significato, mentre la $f(t)$ si comporta a destra di a_1 in un modo qualsivoglia compatibile con le condizioni imposte alla $f(x)$, e tuttavolta la espressione $f(a_1+t)+f(a_1-t)$ potrebbe tendere ad un limite all'annullarsi di t, e l'integrale

$$\int_{+0}^{\mu} \psi(t) \frac{\operatorname{sen} n t}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} t} \cos \frac{1}{2} t\, d t$$

andare a zero per n infinito.

Così per es. si potrebbe avere

$$f(a_1+t)=\frac{1}{t}, \quad f(a_1-t)=-\frac{1}{t},$$

ed allora

$$\int_{+0}^{\mu}[f(a_1+t)+f(a_1-t)]\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt=0,$$

mentre si avrebbe

$$\int_{+0}^{\mu}f(a_1+t)\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt=\infty,$$

$$\int_{+0}^{\mu}f(a_1-t)\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt=-\infty,$$

quale si sia n.

Riemann a pag. 35 della sua Memoria osserva:

« Aus dieser Untersuchung hat sich also ergeben, dass, wenn die Coefficienten der Reihe Ω zuletzt unendlich klein werden, dann die Convergenz der Reihe für einen bestimmten Werth von x nur abhängt von dem Verhalten der Function $f(x)$ in unmittelbarer Nähe dieses Werthes. »

Si vede dunque, come per le funzioni $f(x)$ da noi considerate, il teorema di Riemann sia caso particolare di altro più generale.

Gli è chiaro poi, che ogniqualvolta l'integrale

$$\int_{+0}^{\mu}[f(a_1+t)+f(a_1-t)]\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt$$

converga verso un limite all'indefinito crescere di n, la serie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)dx+\frac{1}{\pi}\sum_1 {}_n\int_0^{2\pi}f(x)\cos n(x-a_1)\,dx$$

rappresenterà precisamente questo limite; il che non porta come conseguenza che il simbolo

$$f(a_1+0)+f(a_1-0)$$

abbia significato. La qual cosa avverrebbe per esempio, se nelle estreme vicinanze di a_1+0 la $f(x)$ avesse un valore costante A, mentre per a_1-0

fosse eguale ad una funzione positiva $\theta(t)$, la quale, oscillando tra 0 e $+1$, rendesse integrabile la funzione $\frac{1}{t}\theta(t)$: poichè allora il simbolo

$$f(a_1+0)+f(a_1-0)$$

non rappresenterebbe alcuna grandezza, laddove

$$\lim_{n=\infty}\int_{+0}^{\mu}[f(a_1+t)+f(a_1-t)]\frac{\operatorname{sen} nt}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}t}dt=A\cdot\pi.$$

Possiamo dunque dire più generalmente: il convergere della serie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,dx+\sum_1\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos n(x-a)\,dx$$

pel valor particolare a_1, pel quale

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi}f(x)\cos n(x-a_1)\,dx=0,$$

dipende dal comportarsi della $f(x)$ nelle estreme vicinanze del medesimo, purchè gl'integrali

$$\int_t[f(a_1+t)+f(a_1-t)]\,dt \quad \text{e} \int_t f(a_1+t)\,t\,dt$$

convergano per $t=0$.

Riemann a pag. 33 della sua Memoria dice:

« Wenn umgekehrt diese beiden Bedingungen erfüllt sind, so giebt es eine trigonometrische Reihe in welcher die Coefficienten zuletzt unendlich klein werden, und welche überall, wo sie convergirt, die Function darstellt. »

Alla quale asserzione va aggiunto « ovunque la funzione è continua, oppure ovunque essa assume un valore eguale alla somma della serie. »

Dalle cose sin qui dette risulta come, data una funzione $f(x)$ periodica secondo 2π, continua tranne che per un numero limitato di punti tra 0 e 2π, e tale che gl'integrali

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\varphi_\sigma(\eta)}\right)f(x)\,dx,\ \left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\varphi_\sigma(\eta)}\right)f(x)(x_\sigma-x)\,dx \quad (\sigma=0,\ldots,\tau-1)$$

convergano all'indefinito diminuire di ε, e che la funzione

$$\int_{a\pm 0}^{x}f(x)\,dx$$

sia ovunque integrabile, esista una serie trigonometrica, che è quella di Fourier, per la definizione data nel n.° III, nella quale, se

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx=0$$

qualunque sia a, i coefficienti si annullano con $\frac{1}{n}$; altrimenti ciò non avviene. Nell'ultimo caso il numero dei punti pei quali si annulla l'integral precedente è limitato, come vedrassi tra breve. Se poi per $a=a_1$ l'integrale

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a_1)\,dx$$

va a zero, il convergere della serie dipende dal comportarsi dell'integrale

$$\int_{+0}^{\eta}[f(a_1+t)+f(a_1-t)]\frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\,dt$$

per n infinito.

Se di più si avesse

$$\lim_{\alpha=+0}\int_{+0}^{\alpha}\lim_{\varepsilon=+0}\int_{\varepsilon}^{\alpha}\Big(f(x_\sigma-x)+f[x_\sigma+\Phi_\sigma(x)]\,\Phi'_\sigma(x)\Big)dx\,d\alpha=0,$$

si potrebbe affermare che, se la serie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx+\sum\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx$$

non rappresenta la data funzione, essa non è esprimibile per serie trigonometrica; gli è manifesto altresì che ogni qualvolta si abbia, qualunque sia a,

$$\lim_{n=\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos n(x-a)\,dx=0,$$

sarà

$$\lim_{\alpha=+0}\int_{+0}^{\alpha}\lim_{\varepsilon=+0}\int_{\varepsilon}^{\alpha}\Big(f(x_\sigma-x)+f[x_\sigma+\Phi_\sigma(x)]\,\Phi'_\sigma(x)\Big)dx\,d\alpha=0,$$

e ciò in virtù del teorema (2) di Riemann dato a pag. 29.

Nell'ipotesi che l'espressione

$$f(a_1+\varepsilon)+f(a_1-\varepsilon)$$

tenda ad un limite per $\varepsilon = +0$, e che

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos n(x-a_1)\, dx = 0,$$

vediamo quando è che la serie converga; ciò avrà luogo, ogni qualvolta l'integral singolare

$$\int_{+0}^{\theta(n)} \psi(t) \frac{\operatorname{sen}\frac{2n+1}{2}t}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t}\, dt,$$

ossia l'altro

$$\int_{+0}^{\theta(n)} \psi(t) \frac{\operatorname{sen} nt}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}t} \cos\tfrac{1}{2}t\, dt,$$

o anche

$$\int_{+0}^{\eta} \psi(t) \frac{\operatorname{sen} nt}{t}\, dt$$

si annulli per n infinito, η essendo una quantità arbitrariamente piccola.

Ora, come è noto, ciò avviene ogniqualvolta la espressione

$$\psi(t) = f(a_1+t) + f(a_1-t) - f(a_1+0) - f(a_1-0)]$$

si annulli sempre decrescendo; la qual cosa fu dimostrata da Dirichlet.

Poniamo che si possa assegnare una grandezza ν comunque piccola, e tale che si abbia

$$\lim_{t=0} \frac{\psi(t)}{t^\nu} = 0, \qquad (0<\nu<1),$$

(ciò avverrebbe per es. se si avesse $\psi(t) = t^\nu \lambda(t)$, essendo $\lambda(t)$ una funzione che si annulla comunque con t) allora sarebbe

$$\int_{+0}^{\eta} \psi(t) \frac{\operatorname{sen} nt}{t}\, dt = \int_{+0}^{\eta} \frac{\psi(t)}{t^\nu} \frac{\operatorname{sen} nt}{t^{1-\nu}}\, dt =$$

$$\int_{+0}^{\eta} \lambda(t) \frac{\operatorname{sen} nt}{t^{1-\nu}}\, dt = \lambda(\theta\cdot\eta) \operatorname{sen} n\theta\cdot\eta \int_{+0}^{\eta} \frac{dt}{t^{1-\nu}} = \lambda(\theta\cdot\eta) \operatorname{sen} n\theta\eta \frac{\eta^\nu}{\nu}, \quad (0<\theta<1),$$

laonde

$$\lim_{n=\infty} \int_{+0}^{\theta(n)} \psi(t) \frac{\operatorname{sen} nt}{t}\, dt = 0,$$

e la serie convergerebbe. Questa osservazione è di Lipschitz.

Supposto che si abbia

$$\lim_{t=+0}\psi(t)\log\frac{1}{t}\log^2\frac{1}{t}\cdots\log^{m-1}\frac{1}{t}\left(\log^m\frac{1}{t}\right)^{1+\alpha}=0,$$

essendo $\alpha>0$, sarà

$$\int_\varepsilon^\eta\psi(t)\frac{\operatorname{sen} nt}{t}dt=\int_\varepsilon^\eta\frac{\lambda(t)}{t\log\frac{1}{t}\cdots\left(\log^m\frac{1}{t}\right)^{1+\alpha}}\operatorname{sen} ntdt=$$

$$\operatorname{sen} n[\varepsilon+\theta(\eta-\varepsilon)]\lambda[\varepsilon+\theta(\eta-\varepsilon)]\int_\varepsilon^\eta\frac{1}{t\log\frac{1}{t}\cdots\left(\log^m\frac{1}{t}\right)^{1+\alpha}},$$

e quindi

$$\int_{+0}^\eta\psi(t)\frac{\operatorname{sen} nt}{t}dt=\operatorname{sen} n\theta\eta\lambda(\theta\cdot\eta)\frac{1}{\alpha}\left(\log^m\frac{1}{\eta}\right)^{-\alpha}$$

laonde anche in questo caso, essendo

$$\lim_{n=\infty}\int_{+0}^{\theta(n)}\psi(t)\frac{\operatorname{sen} nt}{t}dt=0,$$

la serie convergerebbe (*).

I due ultimi criteri sono casi particolari del seguente:

Se $\omega(t)$ è una funzione continua, che va all'infinito per $t=+0$ crescendo sempre, e se l'integrale

$$\int_t\frac{1}{t\omega(t)}dt$$

converge per $t=+0$, e l'espressione

$$\psi(t)\cdot\omega(t)$$

non va all'infinito all'annullarsi di t, la serie sarà convergente.

Ed infatti, si ha

$$\int_{+0}^\eta\frac{\psi(t)}{t}\operatorname{sen} ntdt=\int_{+0}^\eta\frac{\psi(t)\omega(t)}{t\omega(t)}\operatorname{sen} ntdt=\psi(\theta\cdot\eta)\omega(\theta\cdot\eta)\operatorname{sen} n\theta\eta\int_{+0}^\eta\frac{dt}{t\omega(t)},$$

quindi, nelle ipotesi fatte,

$$\lim_{n=\infty}\int_{+0}^{\theta(n)}\frac{\psi(t)}{t}\operatorname{sen} ntdt=0.$$

(*) Vedi THOMAE, *Abriss einer Theorie der complexen Functionen*, Halle, 1870, pag. 41.

Gli è altresì manifesto che se l'espressione

$$\lim_{t=0} \frac{\psi(t)-\psi(0)}{t}$$

avesse significato, l'integrale

$$\int_{+0}^{\eta} \psi(t) \frac{\operatorname{sen} n t}{t} dt$$

andrebbe a zero per n infinito, poichè allora si avrebbe

$$f(a_1+t)+f(a_1-t)-f(a_1+0)-f(a_1-0) = t \lim_{t=0} \frac{\psi(t)-\psi(0)}{t} + t \cdot \varepsilon,$$

ε annullandosi con t. Ed è manifesto come il supporre che il simbolo

$$\lim_{t=0} \frac{\psi(t)-\psi(0)}{t}$$

abbia significato, non porta di necessità che ciascuno dei termini

$$f'(a_1+0)+f'(a_1-0), \quad f'(a_1+0), \quad f'(a_1-0)$$

rappresenti una grandezza; il che potrà aver luogo, o anche no.

Le cose dette or ora farebbero quasi credere, che il convergere della serie dipenda dalla maggiore o minor lentezza con la quale la funzione $\psi(t)$ converge a zero: questa supposizione però è erronea, come risulta dalle seguenti considerazioni.

Se si indica con $f_1(x)$ una funzione continua tra $+0$ ed η, la quale si annulla sempre decrescendo, e si dinota con $f(x)$ una funzione pure continua in esso intervallo, si dirà che la $f(x)$ va a zero come la $f_1(x)$, ogniqualvolta il rapporto

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}$$

non divenga nè zero nè infinito per $x=+0$.

Ora, gli è facile dimostrare come, data una funzione $f(x)$ la quale si annulla comunque per $x=+0$, esista un numero illimitato di funzioni $f_1(x)$, che per $x=+0$ convergono allo zero sempre decrescendo, e fanno sì che il quoto precedente soddisfaccia alla condizione testè detta.

Supponiamo in prima che la $f(x)$ nelle estreme vicinanze dell'origine delle coordinate non giaccia mai inferiormente alla retta $y=0$, non escludendosi che essa nelle estreme vicinanze del punto $x=+0$ abbia un numero illimitato di elementi (tratti o punti) comuni con l'asse delle X; considereremo poi il caso, in cui giaccia e sopra e sotto. Divido il segmento $+0\eta$ in un numero illimitato di parti terminate ai punti $\alpha_1 (=\eta)$, α_2, $\alpha_3, \ldots$, che si costipino indefinitamente a destra del punto $x=+0$, e per modo che il limite superiore dei valori assunti dalla $f(x)$ nel tratto $\alpha_1\alpha_2$ sia maggiore di quelli corrispondenti ai segmenti $\alpha_2\alpha_3$, $\alpha_3\alpha_4, \ldots$, e così di seguito; la qual cosa può farsi in infiniti modi.

Ed invero, divido anzitutto secondo una legge qualsivoglia il tratto $+0\eta$ nei punti $\beta_1=\eta=\alpha_1$, β_2, $\beta_3, \ldots$, che si addensino di più in più all'origine delle coordinate. Ora, ei potrebbe darsi che il limite superiore relàtivo al tratto $\beta_1\beta_2$ fosse maggiore di quello corrispondente ad un altro successivo qualsivoglia $\beta_r\beta_{r+1}$, farei in allora $\beta_2=\alpha_2$. Se ciò non avesse luogo, aggruppando un numero conveniente di tratti $\beta_1\beta_2$, $\beta_2\beta_3, \ldots$, $\beta_s\beta_{s+1}$, del resto il minimo possibile, dovrà avvertirsi che il limite superiore corrispondente all'intervallo $\beta_1\beta_{s+1}$ è maggiore di quello che appartiene ad un intervallo qualsivoglia $\beta_{s+1}\beta_{s+2}$, $\beta_{s+2}\beta_{s+2}, \ldots$; chè, se non si potesse soddisfare a questa condizione, comunque grande fosse il numero s, la $f(x)$ non si annullerebbe per $x=+0$, contro l'ipotesi. Faccio $\beta_{s+1}=\alpha_2$, e procedo in tal guisa indefinitamente.

Indico ora con a_1 l'ascissa del punto, pel quale la $f(x)$ raggiunge il suo limite superiore A_1 nel tratto $\alpha_1\alpha_2$, se lo raggiunge una sol volta; se ciò non ha luogo, quella del primo, pel quale lo consegue (dico il primo per fissare le idee); analogo significato abbia a_2 rispetto al segmento $\alpha_2\alpha_3$; e così di seguito. In a_1 elevo una normale A'_1, che abbia con A_1 un dato rapporto maggiore di uno, e così pure in a_2 la grandezza A'_2, che stia ad A_2 in una ragione maggiore di uno, ma non maggiore di $\frac{A'_1}{A_1}$, e così via. Costruisco quindi una funzione $\omega_1(x)$ nel segmento $a_1 a_2$, che per $x=a_1$ sia eguale ad A'_1, per $x=a_2$ ad A'_2, e sia nel medesimo sempre decrescente, nè giaccia mai inferiormente alla $f(x)$; e di codeste funzioni manifestamente ne potrò formare un numero illimitato; analogamente costruisco la $\omega_2(x)$ nel segmento $a_2 a_3$; e così di seguito.

Ed ecco formata una funzione $f_1(x)$, che per $x=+0$ decresce sempre, e per modo che il quoto $\frac{f(x)}{f_1(x)}$ resti finito.

Se la $f(x)$ nelle estreme vicinanze dell'origine delle coordinate mutasse di continuo di segno, basterebbe ribaltare la parte di piano sottoposta all'asse delle X sulla parte superiore, e ragionare quindi come un momento fa.

Ciò posto voglio dimostrare come, ammesso che il simbolo $f(a_1+0)+f(a_1-0)$ abbia significato, la $\psi(t)$ possa andare a zero con quella lentezza che più ci pare e piace, e in pari tempo l'integrale possa

$$\int_0^{\theta(n)} \psi(t) \frac{\operatorname{sen} n t}{t} d t$$

annullarsi per n infinito, ossia la serie convergere al valore $f(a_1+0)+f(a_1-0)$.

Infatti, se la $\psi(t)$ va comunque a zero, non cambiando però mai di segno, e se l'integrale

$$\int_t \frac{\psi(t)}{t} d t$$

converge per $t=+0$, il teorema è dimostrato. Poniamo invece, che l'integrale precedente non converga, stando le altre ipotesi circa la $\psi(t)$; potrò allora sempre determinare una funzione $\theta_1(t)$, oscillante nelle estreme vicinanze del punto $x=+0$ tra l'asse delle X e una parallela qualsivoglia al medesimo, la quale renda integrabile la funzione $\frac{\psi(t)}{t}\theta_1(t)$, e poichè le due espressioni $\psi(t)$, $\psi(t)\cdot\theta_1(t)$ vanno in egual modo a zero, l'asserto è completamente dimostrato.

Dimostriamo ora che, se l'integrale

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos n(x-a) d x$$

non si annulla, quale si sia a, per n infinito, non potrà andare a zero che per un numero limitato di punti in un segmento di lunghezza 2π.

Abbiamo

$$G(t)=\frac{F(a_1+t)+F(a_1-t)}{2},$$

a_1 essendo un valore di a, pel quale l'integrale precedente si annulla per n infinito, sarà allora

$$\lim_{\mu=\infty} \mu^2 \int_b^c G(t) \lambda(t) \cos \mu(t-a) d t=0$$

per tutti i valori di a, se $\lambda(t)$ è una funzione continua colle sue derivate prima e seconda nell'intervallo bc, e se

$$\lambda(b)=\lambda(c)=\lambda'(b)=\lambda'(c)=0.$$

Lasciando ora la parola a RIEMANN, proseguiremo:

« Der Werth dieses Integrals setzt sich zusammen aus den beiden Bestandtheilen

$$\mu^2\int_b^c \frac{F_1(a_1+t)}{2}\cos\mu(t-a)\lambda(t)\,dt \text{ und } \mu^2\int_b^c \frac{F_1(a_1-t)}{2}\cos\mu(t-a)\lambda(t)\,dt.$$

Das Unendlichkleinwerden desselben wird daher bewirkt durch das Verhalten der Function F_1 an zwei symmetrisch zu a_1 gelegenen Stellen. Es ist aber zu bemerken, dass hier Stellen vorkommen müssen, wo jeder Bestandtheil für sich nicht unendlich klein wird; denn sonst würden die Glieder der Reihe für jeden Argumentwerth zuletzt unendlich klein werden. Es müssen also dann die Beiträge der symmetrisch zu beiden Seiten von a_1 gelegenen Stellen einander aufheben, so dass ihre Summe für ein unendliches μ unendlich klein wird. Hieraus folgt, dass die Reihe Ω nur für solche Werthe der Grösse x convergiren kann, zu welchen die Stellen, wo nicht $\mu^2\int_b^c F(x)\cos\mu(x-a)\lambda(x)\,dx$ für ein unendliches μ unendlich klein werden, symmetrisch liegen. Offenbar kann daher nur dann, wenn die Anzahl dieser Stellen unendlich gross ist, die trigonometrische Reihe mit nicht in's Unendliche abnehmenden Coefficienten für eine unendliche Anzahl von Argumenten convergiren. »

Termineremo questa Nota dimostrando l'asserzione fatta a pag. 70 di questo tomo, la qual cosa ora può farsi agevolmente.

I due integrali

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\eta}\right)f(x)\cos n(x-a)\,dx,$$

$$\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\psi_\sigma'(\varepsilon)}^{x_\sigma+\eta}\right)f(x)\cos n(x-a)\,dx$$

(x_σ essendo uno qualunque dei punti, pei quali la $f(x)$ va all'infinito non essendo integrabile) convergono a zero, nelle ipotesi fatte, insieme ad $\frac{1}{n}$. Ciò posto, consideriamo una funzione $\phi(x)$, ovunque nulla, tranne che nell'intervallo $x_\sigma-\eta$ $x_\sigma+\eta$, ove si comporti come la $f(x)$: questa funzione, per le cose dette in questo n.° IV, è sviluppabile in serie di FOURIER avente per termine generale l'una o l'altra delle due espressioni

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon=0}\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\varphi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\eta}\right)f(x)\cos n(x-a)\,dx,$$

$$\frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon=0}\left(\int_{x_\sigma-\eta}^{x_\sigma-\varepsilon}+\int_{x_\sigma+\psi_\sigma(\varepsilon)}^{x_\sigma+\eta}\right)f(x)\cos n(x-a)\,dx.$$

Ma, se una funzione nulla, ad eccezione di un numero illimitato di punti formanti un gruppo di ordine finito, è esprimibile per serie trigonometrica, i coefficienti della medesima sono nulli, come dimostrò il sig. CANTOR nel 5° volume dei *Math. Annalen* di CLEBSCH e NEUMANN; dunque i due integrali precedenti sono eguali; il che precisamente si voleva dimostrare.

Settembre, 1873.

ANNUNCIO NECROLOGICO.

Addì 24 agosto 1874 spirò in Aricia il benemerito fondatore degli Annali di Matematica

BARNABA TORTOLINI

già professore di calcolo sublime nella Università della Sapienza. Egli era nato in Roma il 19 novembre 1808. Ci riserbiamo di pubblicare più tardi un cenno sulla vita e sulle opere di lui.

I DIRETTORI.