ANNALI

DI

MATEMATICA

PURA ED APPLICATA

GIÀ DIRETTI DA

FRANCESCO BRIOSCHI

e continuati dai professori:

Luigi Bianchi in Pisa | **Tullio Levi-Civita** in Roma
Salvatore Pincherle in Bologna | **Francesco Severi** in Roma

SERIE QUARTA - TOMO III

(LX DELLA RACCOLTA)

BOLOGNA

NICOLA ZANICHELLI

MCMXXVI

Bologna, Cooperativa Tipografica Azzoguidi, 1926

Nuova trattazione della geometria proiettivo-differenziale delle curve sghembe.

Memoria 2ª di GUSTAVO SANNIA (a Modena).

Nella Memoria 1ª (« Annali di Matematica », serie 4ª, tomo I, fasc. 1, pagg. 1-18) ho posto i *fondamenti della geometria proiettivo-differenziale delle curve sghembe*, introducendo l'*arco* σ, le *curvature* I e J, il *tetraedro fondamentale* F, le *formule di* FRÉNET-SERRET (proiettivi); in questa seconda espongo uno studio approfondito dell'intorno di un punto di una curva, dò interpretazioni geometriche per F e altri tetraedri, ecc.

Per comodità di riferimento, proseguo in essa la numerazione dei paragrafi, delle formule e delle note contenuti nella prima.

§ 5. Prime equazioni locali di v. Cono quadrico e cubica sghemba (e duali) osculatori.

22. Per lo studio di v nell'intorno di un suo punto P è naturale assumere F (n.° 16) come tetraedro di riferimento locale e P stesso come origine degli archi σ su v. Or le coordinate (rispetto al tetraedro primitivo o fisso) di ogni punto M o piano μ dello spazio sono combinazioni lineari di quelle (40) dei vertici o delle facce di F

$$(y'x + y''t + y'''n + y^{\text{IV}}b) \quad \text{o} \quad (\eta'\xi + \eta''\tau + \eta'''\nu + \eta^{\text{IV}}\beta) \tag{51}$$

e i coefficienti $y',..., y^{\text{IV}}$ o $\eta',..., \eta^{\text{IV}}$ sono appunto le *coordinate locali* di M o μ riferito a F e al punto unità $(x + t + n + b)$ o al piano unità $(\xi + \tau + \nu + \beta)$.

Avvertenza. *La condizione di appartenenza tra un punto* $\mathrm{M} \equiv (\mathrm{y})$ *e un piano* $\mu \equiv (\eta)$ *è*

$$y'\eta^{\text{IV}} - y''\eta''' + y'''\eta'' - y^{\text{IV}}\eta' = 0 \tag{52}$$

(e non $y'\eta' + ... + y^{\text{IV}}\eta^{\text{IV}} = 0$). Ciò risulta scrivendo che la somma dei prodotti delle coordinate (51) omologhe è nulla e tenendo conto delle (48) e (49).

23. *a)* Se M sta sulla curva v (in un certo intorno di P) le sue coordinate non locali saranno funzioni $x(\sigma)$ di $\sigma = PM$ rappresentabili nella forma

$$x + x_1\sigma + x_2\frac{\sigma^2}{2!} + \dots + x_8\frac{\sigma^8}{8!} + r_9 \quad (53)$$ [42],

ove x, x_1, x_2,... indicano i valori di $x(\sigma)$ e delle sue derivate calcolate in P (per $\sigma = 0$). Questi valori si possono esprimere tutti in funzione di quelli di x, t, n, b (calcolati in P) mediante le (45), (46) e quelle che si deducono derivando successivamente (46) ed eliminando ogni volta x_1, t_1, n_1, b_1 mediante le (43). Sostituendo in (53) i valori che così si ottengono, si perviene ad una espressione del tipo della prima delle (51) con coefficienti che saranno le coordinate y',... di M, e si conclude che:

Le coordinate locali omogenee rispetto a F *di un punto* M *di* v *espresse mediante l'arco* $\sigma =$ PM *valgono* (in un intorno di P ed a prescindere da un fattor comune):

$$(54)\quad\left\{\begin{aligned}
y' &= 1 - 5I\frac{\sigma^2}{2!} - 2\theta_3\frac{\sigma^3}{3!} + (50I^2 - K)\frac{\sigma^4}{4!} + (100II_1 + 40\theta_3 I - K_1)\frac{\sigma^5}{5!} + \\
&\quad + (150II_2 - K_2 + 60I_1\theta_3 - 500I^4 + 15IK + 8\theta_3^2)\frac{\sigma^6}{6!} + (200II_3 - K_3 + \\
&\quad + 120I_2\theta_3 - 3000I^2I_1 + 40I_1K + 25IK_1 - 600I^2\theta_3 + 6K\theta_3)\frac{\sigma^7}{7!} + r_8, \\
y'' &= \sigma - 5I\frac{\sigma^3}{3!} - 2(5I_1 + 2\theta_3)\frac{\sigma^4}{4!} + (50I^2 - 10I_2 - K)\frac{\sigma^5}{5!} + \\
&\quad + (250II_1 + 60I\theta_3 - 2K_1 - 10I_3)\frac{\sigma^6}{6!} + (400I_1^2 - 3I_2 - 10I_4 + \\
&\quad + 200I_1\theta_3 + 400II_2 - 500I^3 + 15IK + 16\theta_3^2)\frac{\sigma^7}{7!} + r_8, \\
y''' &= \frac{\sigma^2}{2!} - 10I\frac{\sigma^4}{4!} - (20I_1 + 4\theta_3)\frac{\sigma^5}{5!} + (100I^2 - 30I_2 - K)\frac{\sigma^6}{6!} + \\
&\quad + (80I\theta_3 + 600II_1 - 3K_1 - 40I_3)\frac{\sigma^7}{7!} + (1000I_1^2 - 6K_2 - 50I_4 + \\
&\quad + 280I_1\theta_3 - 1000I^2 + 20IK + 1300II_2 + 16\theta_3^2)\frac{\sigma^8}{8!} + r_9, \\
y^{\mathrm{IV}} &= \frac{\sigma^3}{3!} - 10I\frac{\sigma^5}{5!} - (30I_1 + 4\theta_3)\frac{\sigma^6}{6!} + (100I^2 - 60I_2 - K)\frac{\sigma^7}{7!} + \\
&\quad + (800II_1 - 100I_3 - 4K_1 + 80I\theta_3)\frac{\sigma^8}{8!} + r_9.
\end{aligned}\right.$$

[42] Qui e in tutti gli sviluppi successivi indicheremo in generale con r_n *un resto infinitesimo di ordine* n (rispetto all'infinitesimo principale, che qui è σ).

b) *Se nelle* (54) *si cambiano* θ_3, $y', \ldots, y^{IV}$ *in* $-\theta_3$, $\eta', \ldots, \eta^{IV}$, *si hanno equazioni corrispondenti per la sviluppabile* v.

24. *a)* Cerchiamo fra i coni quadrici col vertice in P quello osculatore C_2.

Ogni quadrica-luogo tangente a v in P ha un'equazione locale del tipo

$$\Sigma a_{rs} y^{(r)} y^{(s)} = 0, \quad (a_{rs} = a_{sr}, \; a_{11} = a_{12} = 0) \tag{55}$$

il cui primo membro per i valori (54) diventa

$$\left\{ \begin{aligned} &(a_{13} + a_{22})\sigma^2 + \left(\frac{a_{14}}{3} + a_{23}\right)\sigma^3 + \left(\frac{a_{24}}{3} + \frac{a_{33}}{4} - \frac{5}{3} I a_{22} - \frac{10}{3} I a_{13}\right)\sigma^4 + \left(\frac{a_{34}}{6} - \frac{5I}{3} a_{23} - \right. \\ &\quad - \frac{6\theta_3 + 5I_1}{15} a_{13} - \left. \frac{5I_1 + 2\theta_3}{6} a_{22}\right)\sigma^5 + \left(\frac{a_{44}}{36} - \frac{15I_1 + 22\theta_3}{180} a_{14} - \frac{45I_1 + 14\theta_3}{60} a_{23} + \right. \\ &\quad + \left. \frac{I}{9} a_{24} - \frac{5I}{12} a_{33} + \frac{800I^2 - 15I_2 - 8K}{180} a_{13} + \frac{250I^2 + 10I_2 + K}{60} a_{22}\right)\sigma^6 + r_7 . \end{aligned} \right. \tag{56}$$

Imponendo che (55) rappresenti un cono col vertice $P \equiv (1, 0, 0, 0)$ (quindi che sia $a_{13} = a_{14} = 0$) e che in (56) siano nulli i coefficienti di $\sigma^2, \ldots, \sigma^6$, si hanno equazioni che determinano tutti gli a_{rs} e si conclude che:

Il cono quadrico osculatore (contatto di 6° ordine) C_2 *della curva* v *in* P *ha l'equazione*

$$2y'''^2 - 3y''y^{IV} + 6Iy^{IV^2} = 0. \tag{57}$$

b) Dualmente: *la quadrica limite osculatrice* Γ_2 *della sviluppabile* v *in* π *ha per equazione*

$$2\eta'''^2 - 3\eta''\eta^{IV} + 6I\eta^{IV^2} = 0; \tag{58}$$

gli assi degli ∞^1 *fasci di piani di cui è costituita inviluppano nel piano* π *una conica* c_2 *tangente alla curva* v *in* P *e di equazioni*

$$3y''^2 - 8y'y''' - 16Iy'''^2 = 0, \quad y^{IV} = 0 \text{ [43]}. \tag{59}$$

---

[43] Rimane da dimostrare la 2ª parte. Ed infatti le derivate parziali rispetto a $\eta', \ldots, \eta^{IV}$ del 1° membro di (58) sono proporzionali a $-y^{IV}$, y''', $-y''$, y' se (y', y'', y''', y^{IV}) è il punto ove il piano $(\eta', \eta'', \eta''', \eta^{IV})$ della (58) tocca il suo inviluppo (per l'*avvertenza* del n.° 22); quindi si ha

$$\rho y^{IV} = 0, \quad \rho y''' = 3\eta', \quad \rho y'' = 4\eta''', \quad \rho y' = 3\eta'' - 12I\eta^{IV}.$$

Eliminando $\eta', \ldots, \eta^{IV}$ tra queste equazioni e la (58), si hanno le (59).

25. *a)* Poichè una cubica sghemba è individuata da 6 punti e può ottenersi come intersezione (parziale) di due coni quadrici aventi una generatrice a comune (non di contatto), la *cubica sghemba osculatrice* c_3 della curva v in P avrà un contatto di 5° ordine con v e potrà ottenersi come intersezione del cono (57) e di un cono quadrico avente un contatto di 5° ordine con v in P ed avente a comune con (57) una generatrice, per es. la $y''-2Iy^{\text{IV}}=0$, $y'''=0$. Questa incontrerà la c_3 (oltre che in P) in un punto $R\equiv(y', 2I, 0, 1)$, con y' da determinare, e che sarà quel punto ove (oltre che in P) la c_3 incontra il piano π_τ.

Ora, imponendo alla (55) di rappresentare un cono col vertice R, cioè che sia

$$a_{14}=0,\quad 2Ia_{22}+a_{24}=0,\quad a_{13}y'+2Ia_{23}+a_{34}=0,\quad 2Ia_{24}+a_{44}=0,$$

e di avere un contatto di 5° ordine con v in P, cioè che siano nulli i coefficienti di $\sigma^2,\ldots,\sigma^5$ in (56), si hanno equazioni sufficienti per il calcolo di tutti gli a_{rs} e di y' e si trova che:

$$(60)\qquad 5(y''-2Iy^{\text{IV}})^2-2y'''[5y'+10Iy'''+(2\theta_3-15I_1)y^{\text{IV}}]=0$$

è l'equazione del cono proiettante la c_3 *dal punto*

$$(61)\qquad R\equiv(15I_1-2\theta_3,\ 10I,\ 0,\ 5)$$

ove c_3 *incontra il piano rettificante* π_τ *di* v *in* P.

Dunque: (57) *e* (60) *sono le equazioni di* c_3.

b) Dualmente: *le equazioni della «sviluppabile di terza classe* γ_3 *osculatrice» alla sviluppabile* v *in* π *sono la* (58) *e l'altra*

$$(62)\qquad 5(\eta''-2I\eta^{\text{IV}})^2-2\eta'''[5\eta'+10I\eta'''-(2\theta_3+15I_1)\eta^{\text{IV}}]=0.$$

Qui γ_3 vien considerata come inviluppo dei piani comuni alla quadrica limite osculatrice Γ_2, di equazione (58), *e all'altra quadrica limite* (62) *costituita dai fasci di piani aventi per assi le rette della conica-inviluppo secondo cui la sviluppabile* γ_3 *è segata dal suo piano* $\rho=(15I_1+2\theta_3,\ 10I,\ 0,\ 5)$ *che passa per il vertice* P_t *di* F.

§ 6. Tetraedri osculatori di c_3 e γ_3. Quadriche e complesso lineare osculatori.

26. Le equazioni (57) e (60) di c_3 suggeriscono la trasformazione di coordinate di punto

$$(63)\quad z'=y'+2Iy'''+\left(\frac{2}{5}\theta_3-3I_1\right)y^{\text{IV}},\quad z''=y''-2Iy^{\text{IV}},\quad z'''=2y''',\quad z^{\text{IV}}=6y^{\text{IV}},$$

che fa acquistare ad esse la forma *canonica*

$$z'''^2 - z''z^{\mathrm{IV}} = 0, \quad z''^2 - z'z''' = 0. \tag{64}$$

In corrispondenza, si ha la trasformazione di coordinate di piano [44]

$$\eta' = \left(\frac{2}{5}\theta_3 - 3I_1\right)\xi' - 2I\xi''' + 6\xi^{\mathrm{IV}}, \quad \eta'' = -2I\xi' - 2\xi''', \quad \eta''' = \xi'', \quad \eta^{\mathrm{IV}} = -\xi', \tag{65}$$

che muta le equazioni (58) e (62) di γ_3 nelle altre

$$\xi''^2 - 3\xi'\xi''' = 0, \quad 5\xi'''^2 - 15\xi''\xi^{\mathrm{IV}} - 2\theta_3\xi'\xi'' = 0. \tag{66}$$

Risulta dalle (63) che: *il nuovo tetraedro* O *di riferimento ha per vertici quelli* P *e* $\mathrm{P_t}$ *di* F, *il punto* $\mathrm{P'_n} \equiv (2\mathrm{I}, 0, -1, 0)$ *della normale principale e il punto* $\mathrm{R} \equiv (61)$, *i quali assumono le nuove coordinate* (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1).

Quindi: O *ha comuni con* F *(e con* D *e* Δ *del n.° 15) anche le facce* π, π_t *e gli spigoli* $\mathrm{PP_t}$, $\mathrm{PP_n} \equiv \mathrm{PP'_n}$.

Dalle (54) e (63) si trova che: *le espressioni mediante* $\sigma = \mathrm{PM}$ *delle coordinate locali rispetto a* O *di un punto* M *di* v *sono (in un intorno di* P *ed a meno di un fattor comune):*

$$\left\{\begin{aligned}
z' &= 1 - \frac{3}{2} I\sigma^2 - (8\theta_3 + 15I_1)\frac{\sigma^3}{30} + (30I^2 - K)\frac{\sigma^4}{4!} + (90II_1 + 28I\theta_3 - K_1)\frac{\sigma_5}{5!} + \\
&\quad + (65IK - 5K_2 - 1500I^3 + 450II_2 + 300I_1\theta_3 + 450I_1^2 + 32\theta_3^2)\frac{\sigma^6}{6!} + r_7, \\
z'' &= \sigma - \frac{7}{6} I\sigma_3 - (2\theta_3 + 5I_1)\frac{\sigma^4}{12} + (70I^2 - K - 10I_2)\frac{\sigma^5}{5!} + \\
&\quad + (34I\theta_3 + 155II_1 - K_1 - 5I_3)\frac{\sigma^6}{3\cdot 5!} + (17IK - 3K_2 + 200I_1\theta_3 + \\
&\quad + 400I_1^2 + 520II_2 - 10I_4 - 700I^3 + 16\theta_3^2)\frac{\sigma^7}{7!} + r_8, \\
z''' &= 2y''', \quad z^{\mathrm{IV}} = 6^{\mathrm{IV}},
\end{aligned}\right. \tag{67}$$

ove y''' *e* $\mathrm{y^{IV}}$ *hanno i valori* (54).

[44] Che si deduce imponendo che la condizione (52) di appartenenza tra punto e piano diventi $z'\xi' + \dots + z^{\mathrm{IV}}\xi^{\mathrm{IV}} = 0$, sicchè punto e piano unità siano *armonici* rispetto al nuovo tetraedro.

27. *a)* Dalle (66) seguono *le equazioni parametriche canoniche di* c_3 *riferita a* 0:

$$z' = m^3, \quad z'' = m^2, \quad z''' = m, \quad z^{IV} = 1, \tag{68}$$

(i punti P e R di c_3 corrispondendo a $m = \infty$ e a $m = 0$).

Allora in un punto qualunque $\overline{R} \equiv (m)$ di c_3 la *tangente* ha le equazioni

$$z' - 2mz'' + m^2z''' = 0, \quad z'' - 2mz''' + m^2z^{IV} = 0, \tag{69}$$

ed il *piano osculatore* ha l'equazione

$$z' - 3mz'' + 3m^2z''' - m^3z^{IV} = 0, \tag{70}$$

e quindi ha le coordinate omogenee

$$\xi' = 1, \quad \xi'' = -3m, \quad \xi''' = 3m^2, \quad \xi^{IV} = -m^3. \tag{71}$$

Le equazioni (71) o le equivalenti

$$\xi''\xi''' - 9\xi'\xi^{IV} = 0, \quad \xi'''^2 - 3\xi''\xi^{IV} = 0 \tag{72}$$

definiscono *la sviluppabile* c_3 riferita a 0.

Dal confronto delle (64) e (72) segue che: *solo se* v *appartiene a un complesso lineare* ($\theta_3 = 0$) *le sviluppabili e* (quindi) *le curve* c_3 *e* γ_3 *coincidono.*

Ma: *in ogni caso le sviluppabili* c_3 e γ_3 *sono contenute ambedue nella quadrica lineare osculatrice* Γ_2 [n.° 24, *b*)] *e* (dualmente) *le curve* c_3 *e* γ_3 *sono contenute ambedue sul cono quadrico osculatore* C_2 [n.° 24, *a*)].

Ciò segue dal fatto che, eliminando ξ^{IV} tra le (72), si ha la prima delle (66), che è l'equazione di Γ_2, alla quale già sappiamo che appartiene γ_3 [n.° 25, *b*)].

Segue poi subito dalle (69) e (70) che: *le facce di* O *sono i piani osculatori* $z^{IV} = 0$ *e* $z' = 0$ *di* c_3 *nei punti* P *e* R, *ed i piani* $z''' = 0$ *e* $z'' = 0$ *passanti per uno di questi punti di* c_3 *e per la tangente nell'altro.*

Del resto è ben noto che le equazioni di una cubica sghemba assumono la forma canonica (64) ≡ (68) solo quando la cubica vien riferita a un qualunque suo *tetraedro osculatore* ([45]) (e ad un conveniente punto unità) ossia a un tetraedro che abbia, come *O*, per facce i piani osculatori in due suoi punti e i piani passanti per ciascuno di questi e per la tangente nell'altro.

Qui però *O* ha un vertice precisamente in *P*, e quindi per una delle facce ed uno degli spigoli il piano osculatore e la tangente comuni a v e a c_3.

([45]) Questa denominazione è di H. SCHRÖDER.

E noi in seguito dicendo « tetraedro osculatore di c_3 » *intenderemo sempre di riferirci ad uno di quelli che hanno un vertice in* P, *sicchè ogni altro tetraedro osculatore* $\overline{O}$ *di* c_3 *che introdurremo avrà a comune con* O *il vertice* P, *la faccia* π *e lo spigolo costituito della tangente a* v *in* P.

Inoltre: *quando assumeremo uno di tali* $\overline{O}$ *come tetraedro di riferimento, sottintenderemo sempre di scegliere un punto unità che faccia assumere alle equazioni di* c_3 *la forma canonica* (64) $\equiv$ (68) *e il suo piano armonico rispetto a* O *come piano unità.*

b) Dalle (69) combinate con $z^{IV}=0$, si deduce che: *il luogo delle tracce delle tangenti di* c_3 *(che è pure l'inviluppo delle tracce dei piani osculatori di* c_3*) sul piano osculatore* π *di* v *in* P *è la conica di equazioni*

$$(73) \qquad 3z''^2 - 4z'z''' = 0, \quad z^{IV} = 0 \ (^{46}).$$

Dicesi (con WILCZYNSKI) *conica osculatrice* di v in P.

Qui vediamo che *essa coincide con la conica* c_2 del n.° 24, *b*); perchè, applicando le (63) alle (72), si ritrovano le equazioni (59) di c_2.

Poi: *la conica* q_2 *proiezione di* c_3 *su* π *dal vertice opposto* R *di* O *è*

$$(74) \qquad z''^2 - z'z''' = 0, \quad z^{IV} = 0.$$

Risulta facilmente dalle (73) e (74) che: c_2 *e* q_2 *sono bitangenti nei vertici* P *e* P'_n *di* O *ed ivi hanno per tangenti gli spigoli* PP_t *e* P'_nP_t *di* O, *sicchè rispetto ad esse* P_t *e* PP'_n *sono polo e polare.*

c) *La* c_3 *appartiene al complesso lineare*

$$(75) \qquad 3p^{(2,3)} - p^{(1,4)} = 0 \ (^{47})$$

che è quello osculatore di v *in* P.

Poichè anzitutto le coordinate

$$p^{(2,3)} = z''z_1''' - z'''z_1'' = -m^2, \quad p^{(1,4)} = z'z_1^{IV} - z^{IV}z_1' = -3m^2 \ (^{48})$$

di una tangente qualunque di c_3, dedotte dalle (69), soddisfanno la (75).

Poi v e c_3, avendo 6 punti comuni consecutivi, hanno pure 5 tangenti comuni consecutive ed appartenenti al complesso, che perciò è quello indi-

---

(46) Purchè si escludano la tangente e il piano osculatore di c_3 in P.

(47) Per il significato delle $p^{(ik)}$ cfr. (16).

(48) Qui l'indice 1 denota derivazione rispetto a m.

viduato dalle tangenti stesse, ossia è quello osculatore. Altrimenti: le stesse coordinate di rette, ma calcolate per la tangente a v nel punto (67), valgono

$$(77)\qquad \begin{cases} p^{(2,3)} = z'' z_1''' - z''' z_1'' = \sigma^2 - \frac{4}{3} I\sigma^4 + (2\theta_3 + 15 I_1)\frac{\sigma^5}{30} + r_6, \\ p^{(1,4)} = z' z_1^{\mathrm{IV}} - z^{\mathrm{IV}} z_1' = 3\sigma^2 - 4I\sigma^4 - (2\theta_3 + 15 I_1)\frac{\sigma^5}{30} + r_6 \; (^{49}) \end{cases}$$

e dànno la formula

$$(78)\qquad 3p^{(2,3)} - p^{(1,4)} = \frac{2}{5}\theta_3\sigma^5 + \sigma_6,$$

la quale prova che (75) è osculatore a v in P.

La (78) prova inoltre che: *se* $\theta_3 = 0$ *in* P, *ivi il complesso lineare osculatore è surosculatore* [50].

d) Il complesso (75) (o la cubica c_3 che gli appartiene) determina, come è noto, un *sistema nullo* nel quale si corrispondono, come *polo* e *piano polare*, un punto (z', z'', z''', z^{IV}) e un piano (ξ', ξ'', ξ''', ξ^{IV}) se (a meno d'un fattore):

$$(79)\qquad \xi' = z^{\mathrm{IV}}, \quad \xi'' = -3z''', \quad \xi''' = 3z'', \quad \xi^{\mathrm{IV}} = -z' \; (^{51}).$$

Ad esso intenderemo sempre di riferirci tutte le volte che diremo « sistema nullo ».

Come è evidente, o come risulta dalle (79), *nel sistema nullo si corrispondono la curva e la sviluppabile* c_3, *i vertici e le facce di* O, *ecc.*

e) *Se si introducono le coordinate non omogenee di punto*

$$(80)\qquad x = z'' : z', \quad y = z''' : z', \quad z = z^{\mathrm{IV}} : z',$$

alle equazioni (64) *di* c_3 *si possono sostituire le altre*

$$(81)\qquad y = x^2, \quad z = x^3 \; (^{52}).$$

Allora, poichè v ha con c_3 un contatto sei-punto in $P(x = y = z = 0)$, *le equazioni della curva* v *possono mettersi (in un intorno di* P*) sotto la*

---

(49) Qui l'indice 1 denota derivazione rispetto a σ.

(50) Abbiamo così dimostrato il teorema contrario (quindi il reciproco) di quello dimostrato in (16). Dalla (78) segue anche quel teorema, ma soltanto se $\vartheta_4 \neq 0$, per le ipotesi restrittive poste alle curve che consideriamo (n.° 7).

(51) È noto come si perviene alle (79): sostituendo in (75) alle $p^{(2,3)}$ e $p^{(1,4)}$ le loro prime espressioni (77), poi ordinando rispetto alle z'_1;... ed ugugliando i coefficienti a ξ',....

(52) Rappresentano i coni proiettanti c_3 da R e da P'_n.

forma

$$y = x^2 + ax^6 + bx^7 + cx^8 + r_9, \quad z = x^3 + a'x^6 + b'x^7 + c'x^8 + r_9, \tag{82}$$

con coefficienti che saranno invarianti proiettivi di v *calcolati in* P [53].

f) Dalle (82) segue

$$y - x^2 = ax^6 + bx^7 + cx^8 + r_9, \quad xz - y^2 = a'x^7 + (b' - 2a)x^8 + r_9,$$
$$z - xy = a'x^6 + (b' - a)x^7 + (c' - b)x^8 + r_9; \quad z^2 = x^6 + r_9,$$

e quindi

$$A(y - x^2) + B(z - xy) + C(xz - y^2) + Dz^2 = 0, \tag{83}$$

a meno di un r_9, se A, B, C, D si scelgono in modo che risulti

$$Aa + Ba' + D = 0, \quad Ab + B(b' - a) + Ca' = 0, \quad Ac + B(c' - b) + C(b' - 2a) = 0;$$

ed in tal caso la (83) rappresenta la quadrica-luogo che è *osculatrice* (contatto 9-punto) a v in P. Dunque, eliminando A, B, C, D, si ha che:

$$\begin{vmatrix} y - x^2 & z - xy & xz - y^2 & z^2 \\ a & a' & 0 & 1 \\ b & b' - a & a' & 0 \\ c & c' - b & b' - 2a & 0 \end{vmatrix} = 0 \tag{84}$$

è l'equazione della quadrica-luogo osculatrice alla curva v *in* P.

g) *Se si introducono le coordinate non omogenee di piano*

$$\xi = \xi''' : \xi^{\text{IV}}, \quad \eta = \xi'' : \xi^{\text{IV}}, \quad \zeta = \xi' : \xi^{\text{IV}}, \tag{85}$$

alle equazioni (72) *della sviluppabile* c_3 *si possono sostituire le altre*

$$\eta = \frac{1}{3}\xi^2, \quad \zeta = \frac{1}{3^3}\xi^3. \tag{86}$$

h) Per avere le analoghe equazioni della sviluppabile v, osserviamo che il piano osculatore μ di v in un punto generico, che per le (85) è

$$(1, \quad x, \quad x^2 + ax^6 + bx^7 + cx^8 + r_9, \quad x^3 + a'x^6 + b'x^7 + c'x^8 + r_9),$$

passa anche per i punti

$$(0, \quad 1, \quad 2x + 6ax^5 + 7bx^6 + 8cx^7 + r_8, \quad 3x^2 + 6a'x^5 + 7b'x^6 + 8c'x^7 + r_8),$$
$$(0, \quad 0, \quad 1 + 15ax^4 + 21bx^5 + 28cx^6 + r_7, \quad 3x^2 + 15a'x^4 + 21b'x^5 + 28c'x^6 + r_7),$$

[53] Essendo intrinseca e proiettiva la definizione degli elementi di riferimento. Calcoleremo in seguito (n.° 29) le loro effettive espressioni.

e quindi ha le coordinate omogenee

$$\begin{aligned}
\xi' &= -x^3 - 10a'x^6 + 15(a - b')x^7 + r_8,\\
\xi'' &= 3x^2 + 24a'x^5 + (35b' - 27a)x^6 + 6(8c' - 7b)x^7 + r_8,\\
\xi''' &= -3x - 15a'x^4 - 21b'x^5 - 28c'x^6 + r_7,\\
\xi^{IV} &= 1 + 15ax^4 + 21bx^5 + 28cx^6 + r_7.
\end{aligned}$$

Dall' ultima segue l' altra

$$1 : \xi^{IV} = 1 - 15ax^4 - 21bx^5 - 28cx^6 + r_7$$

che, moltiplicata per le precedenti, dà per le (85)

$$\begin{aligned}
\xi &= -3x - 15a'x^4 + 3(15a - 7b')x^5 + 7(9b - 4c')x^6 + r_7,\\
\eta &= 3x^2 + 24a'x^5 + (35b' - 72a)x^6 + 3(16c' - 35b)x^7 + r_8,\\
\zeta &= -x^3 - 10a'x^6 + 15(2a - b')x^7 + r_8.
\end{aligned}$$

Dalla prima si possono esprimere $\xi^2, \dots, \xi^7$ mediante $x^2, \dots, x^7$ (prescindendo sempre da un r_8) e poi, viceversa, le seconde mediante le prime; allora, sostituendo nelle altre due i valori trovati per $x^2, \dots$, si conclude che: *alle equazioni della sviluppabile* v *si può dare la forma*

$$(87) \qquad \left\{\begin{aligned}
\eta &= \frac{1}{3}\xi^2 + \frac{2a'}{3^4}\xi^5 + \frac{18a - 7b'}{3^6}\xi^6 + \frac{8c' - 21b}{3^7}\xi^7 + r_8,\\
\zeta &= \frac{1}{3^3}\xi^3 + \frac{5a'}{3^6}\xi^6 + \frac{5a + 2b'}{3^6}\xi^7 + r_8,
\end{aligned}\right.$$

ove a, b,..., c′ *sono i coefficienti delle equazioni* (82) *della curva* v.

k) Osservazione (importante). In questo paragrafo abbiamo assunto come tetraedro di riferimento *O*, che è un *particolare* tetraedro osculatore di c_3; ma è da osservare che tutti i risultati del presente n.° 27 li abbiamo dedotti fondandoci *esclusivamente* sulla forma (66) ≡ (68) delle equazioni di c_3. Dunque, ricordando quanto si è detto in *a)*, possiamo asserire che: *Tutti i risultati (formule incluse) del presente* n.° 27 *seguitano a sussistere se si prende come tetraedro di riferimento, invece di* O, *un qualunque altro tetraedro osculatore* $\overline{\mathrm{O}}$ *di* c_3; *variano soltanto la conica* q_2 *di* b) *e i valori dei coefficienti* a, b, ... c′, *ma conservando sempre il loro carattere intrinseco e invariante per collineazione se tale carattere ha la definizione di* $\overline{\mathrm{O}}$.

28. Dalla prima delle (67) si deduce l'altra

$$\begin{aligned}\frac{1}{z'} = 1 + \frac{3}{2} I\sigma^2 + (8\theta_3 + 15I_1)\frac{\sigma^3}{30} + (K + 24I^2)\frac{\sigma^4}{4\,!} + (K_1 + 90II_1 + 68I\theta_3)\frac{\sigma^5}{5\,!} + \\ + (224\theta_3^2 + 150I_3 + 660I_1\theta_3 + 385IK + 5K_2 - 450II_2 + 450I_1^2)\frac{\sigma^6}{6\,!\,5} + r_7,\end{aligned}$$

che, moltiplicata per le rimanenti, dà, per le (80), *le coordinate non omogenee rispetto a* O *di un punto* M *di* v (*in un intorno di* P) *espresse mediante* σ:

$$(88)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \sigma + \frac{I}{3}\sigma^3 + (6\theta_3 + 5I_1)\frac{\sigma^4}{60} + (2K - 5I_2 - 10I^2)\frac{\sigma^5}{60} + \\ &\quad + (36\theta_3 I - 10II_1 + 2K_1 - 5I_3)\frac{\sigma^6}{360} + (528\theta_3^2 + 1240IK + 20K_2 + \\ &\quad + 720I_1\theta_3 - 100I_1^2 - 3700II_2 - 50I_4 - 9800I^3)\frac{\sigma^7}{5\cdot 7\,!} + r_8, \\ y &= \sigma^2 + \frac{2I}{3}\sigma^4 + (6\theta_3 + 5I_1)\frac{\sigma^5}{30} + (7K + 5I^2 - 15I_2)\frac{\sigma^6}{180} + \\ &\quad + (2K_1 - 20I_3 + 348I\theta_3 + 90II_1)\frac{\sigma^7}{7\cdot 180} + (456\theta_3^2 + 80I_1^2 - \\ &\quad - 1870II_2 + 756I_1\theta_3 + 696IK - 4280I^3 + 11K_2 - 25I_4)\frac{\sigma^8}{2\cdot 7\,!} + r_9, \\ z &= \sigma^3 + I\sigma^5 + (14\theta_3 + 15I_1)\frac{\sigma^6}{60} + (17K + 155I^2 - 30I_2)\frac{\sigma^7}{420} + \\ &\quad + (13K_1 + 664I\theta_3 + 410II_1 - 25I_3)\frac{\sigma^8}{1680} + r_9 .\end{aligned}\right.$$

29. Dalla prima delle (88) si possono esprimere $x^2, \ldots, x^8$ mediante $\sigma^2, \ldots, \sigma^8$ (prescindendo sempre da un r_9) e poi viceversa le seconde mediante le prime; allora, sostituendo nelle altre due, si hanno le previste equazioni (82) della curva v, nelle quali *i coefficienti (invarianti proiettivi) hanno i valori*

$$(89)\quad \left\{\begin{aligned} & a = \frac{1}{36}(9I^2 + 3I_2 - K), \quad b = \frac{1}{7\cdot 180}(15I_3 - 5K_1 + 12I\theta_3 + 90II_1), \\ & c = \frac{1}{10\cdot 7\,!}(200IK - 1800I^3 - 150II_2 + 75I_4 - 25K_2 + 450I_1^2 + 60I_1\theta_3 - 336\theta_3^2), \\ & a' = -\frac{\theta_3}{15}, \quad b' = \frac{5}{84}(3I_2 - K + 9I^2), \quad c' = \frac{1}{560}(15I_2 - 5K_1 + 16I\theta_3 + 90II_1).\end{aligned}\right.$$

Più semplici sono le loro espressioni mediante I *e* J:

$$(90)\quad \begin{cases} a = -\dfrac{J}{36}, & b = \dfrac{1}{1260}(12I\theta_3 - 5J_1), \quad c = \dfrac{1}{10 \cdot 7!}(200IJ - 25J_2 + 60I\theta_3 - 336\theta_3^2), \\ a' = -\dfrac{\theta_3}{15}, & b' = -\dfrac{5J}{84}, \quad c' = \dfrac{1}{560}(16I\theta_3 - 5J_1) \ (^{54}). \end{cases}$$

30. Sappiamo [n.° 25, *a*)] che le *curve* v e c_3 hanno un contatto di 5° ordine in P; cerchiamo quello delle *sviluppabili* v e c_3 in π.

Per le (90), a' è nullo o non secondo che v appartiene ($\theta_3 = 0$) o non ($\theta_3 = 1$) a un complesso lineare, ed allora i secondi membri della (86) e (87) coincidono fino ai termini in ξ^5 o ξ^6 rispettivamente; dunque: *le sviluppabili* v *e* c_3 *hanno nel piano comune* π *un contatto di 5° o di 4° ordine, secondo che* v *appartiene o non a un complesso lineare* [55].

31. *a)* È poi da osservare che la coincidenza tra le seconde equazioni (86) e (87) si spinge più oltre in ogni caso, sicchè le due curve (inviluppi piani) da esse rappresentate hanno un contatto dl ordine maggiore di quello delle sviluppabili v e c_3; e tali curve giacciono nel piano di coordinate $\xi = 0$, $\eta = 1$, $\zeta = 0$ o, per le (85), di coordinate $\xi' = 0$, $\xi'' = 1$, $\xi''' = 0$, $\xi^{\text{IV}} = 1$, piano che incontra la tangente comune a v e a c_3 in P nello stesso P.

Ne segue [56] che: *le sviluppabili* v *e* c_3 *hanno per punto principale nel piano comune* π *il punto* P *comune alle due curve* v *e* c_3.

b) Le seconde equazioni (81) e (82) delle curve v e c_3 rappresentano coni col vertice $P'_n(x = 0,\ y = 1,\ z = 0)$ di O, il quale giace nel piano π. Ora, solo se $a' = 0$ (ossia $\theta_3 = 0$) questi hanno un contatto di 6° ordine, quindi

---

(54) Si deducono eliminando K con la (28). E si noti che la maggior semplicità *non è soltanto formale.* Infatti esse provano che il valore del numero n (n.° 11, osserv.) in $a, b, \ldots, c'$ è minore di quello che apparisce dalle corrispondenti espressioni (98).

(55) *Questo risultato è degno di rilievo*, perchè l'intuizione condurrebbe invece ad asserire che il contatto *è soltanto di 3° ordine* in generale. Ed infatti dall'avere le curve v e c_3 sei punti consecutivi comuni si induce che le sviluppabili v e c_3 hanno quattro (e non cinque) piani consecutivi comuni.

(56) Per il duale di un notevole teorema di HALPHEN, loc. cit. (2), che può enunciarsi: *Se due curve hanno un contatto di un certo ordine in un punto comune* P, *i coni che si ottengono proiettandole da un punto qualunque di un certo piano passante per la tangente comune (e non da altri punti) hanno un contatto di ordine maggiore.* Tale piano dicesi *piano (tangente) principale* delle due curve in P.

Quel punto che il teorema duale associa a due sviluppabili in un piano ove si tocchino si dirà *punto principale.*

maggiore di quello fra v e c_3; dunque, per il teorema ricordato in ([56]): *le curve* v *e* c_3 *hanno come piano principale nel punto* P *il comune piano osculatore* π *solo quando* v *appartiene a un complesso lineare.*

32. Tutti i risultati, formule incluse, dei n.ⁱ 26,..., 31 ammettono i loro duali (nel senso del n.° 11) e che basterà accennare.

Ad ogni tetraedro osculatore $\overline{O}$ di c_3 corrisponde un *tetraedro osculatore* $\overline{\Omega}$ di γ_3 [sul quale intendiamo fatte le convenzioni duali di quelle poste su $\overline{O}$ nel n.° 27, *a*)]; ed in particolare ad O (n.° 26) corrisponde *un tetraedro* Ω ([57]) *che ha per facce le* π, $\pi_1 \equiv \pi_\tau$ *di* F, *il piano* $\pi'_v \equiv (2I,\ 0,\ -1,\ 0)$ *(passante per la normale principale) ed il piano* $\rho \equiv (15I_1 + 2\theta_3,\ 15I,\ 0,\ 5)$ *che è quel piano della sviluppabile* γ_3 *che passa per* P_t; *quindi esso ha a comune con* F (e con D e Δ del n.° 15) *anche i vertici* P, P_t *e gli spigoli* $\pi\pi_\tau$, $\pi\pi_v$.

Alle coniche c_2, q_2 del n.° 27, *b*) corrispondono due *inviluppi conici di 2ª classe* C_2 *e* Q_2 *col vertice in* P, *i quali sono bitangenti nelle facce* π *e* π'_v *di* Ω; C_2 *coincide col cono quadrico osculatore della curva* v *in* P [n.° 24, *a*)], *ma considerato come inviluppo di piani;* C_2 si ottiene *proiettando da P le generatrici di* γ_3 *e* Q_2, *segando i piani di* γ_3 *con la faccia* ρ *di* Ω *e proiettando le intersezioni da* P.

γ_3 *appartiene al complesso lineare osculatore di* v *in* P [n.° 27, *c*)] *che è autoduale,* quindi γ_3 *determina lo stesso sistema nullo determinato da* c_3 *(o da tale complesso).*

Alla quadrica-luogo (84) corrisponde la *quadrica-inviluppo osculatrice* della sviluppabile v in π.

Le curve v *e* γ_3 *hanno nel punto comune* P *un contatto di 5° o 4° ordine secondo che* v *appartiene o non a un complesso lineare; ed hanno come piano principale il comune piano osculatore* π. *Le sviluppabili* v *e* γ_3 *hanno come punto principale nel piano comune* π *il punto* P *solo quando* v *appartiene a un complesso lineare.*

33. *I tetraedri osculatori di* γ_3 *sono distinti da quelli (duali) di* c_3 *solo se* v *non appartiene a un complesso lineare.* Infatti c_3 ha contatto 6-punto e γ_3 ha contatto 5-punto (almeno, per il n.° 30) con v in P; dunque c_3 *e* γ_3

([57]) Che nasce da F applicando formule duali delle (63), cioè con θ_3 cambiato in $-\theta_3$ e le coordinate di punti cambiate in coordinate di piano e viceversa. E con tali scambii nasce in generale da ogni equazione dei n.ⁱ 26,.., 29 relative a un ente riferito ad O, un'equazione relativa all'ente duale riferito a Ω.

hanno a comune 5 punti coincidenti in P. Se hanno a comune un tetraedro osculatore, hanno a comune un sesto punto (vertice del tetraedro opposto a π) e perciò coincidono; quindi [n.° 27, *a*)] v appartiene a un complesso lineare.

§ 7. Equazioni locali canoniche di v.

34. Sappiamo [n.° 27, *k*)] che le equazioni locali della curva v conservano la forma (82) se invece di O si assume come tetraedro di riferimento un qualunque altro tetraedro osculatore $\overline{O}$ di c_3. Ora:

Le formule di trasformazione (puntuali) per il passaggio da O *a* $\overline{O}$ *sono, in coordinate omogenee, del tipo*

$$(91)\qquad \begin{cases} \overline{z}' = l^3(z' - 3mz'' + 3m^2z''' - m^3z^{\text{IV}}), \\ \overline{z}'' = l^2(z'' - 2mz''' + m^2z^{\text{IV}}), \quad \overline{z}''' = l(z''' - mz^{\text{IV}}), \quad \overline{z}^{\text{IV}} = z^{\text{IV}}, \end{cases}$$

con $l \neq 0$ *e* m *costanti* [58]; *in coordinate non omogenee* (80), *ed analoghe*

$$(92)\qquad \overline{x} = \overline{z}'' : \overline{z}' \quad \overline{y} = \overline{z}''' : \overline{z}', \quad \overline{z} = \overline{z}^{\text{IV}} : \overline{z}',$$

diventano

$$(93)\qquad l\overline{x} = A : D, \quad l^2\overline{y} = B : D, \quad l^3\overline{z} = C : D,$$

ove

$$(94)\qquad A = x - 2my + m^2z, \quad B = y - mz, \quad C = z,$$

$$(95)\qquad D = 1 - 3mx + 3m^2y - m^3z \text{ [59]}.$$

Infatti le formule di trasformazione (in coordinate omogenee) debbono esser tali che: le equazioni dei piani osculatori di c_3 in P e nel punto $\overline{R} \equiv (68)$, le quali rispetto a O sono $z^{\text{IV}} = 0$ e (70), diventino $\overline{z}^{\text{IV}} = 0$ e $\overline{z}' = 0$ rispetto a $\overline{O}$; e le equazioni dei piani passanti per uno dei punti P, $\overline{R}$ e per la tangente di c_3 nell'altro, le quali rispetto a O sono $z''' - mz^{\text{IV}} = 0$ e la seconda delle (69), diventino $\overline{z}''' = 0$ e $\overline{z}'' = 0$.

Da ciò segue intanto che le dette formule debbono essere del tipo

$$(96)\qquad \begin{cases} \overline{z}' = h(z' - 3mz'' + 3m^2z''' - m^3z^{\text{IV}}), \\ \overline{z}'' = k(z'' - 2mz''' + m^2z^{\text{IV}}), \quad \overline{z}''' = l(z''' - mz^{\text{IV}}), \quad \overline{z}^{\text{IV}} = z^{\text{IV}}. \end{cases}$$

---

(58) Che fissano il tetraedro $\overline{O}$; e precisamente: m fissa il 2° punto $\overline{R}$ di c_3 che (oltre P) è vertice di $\overline{O}$, ed l fissa il nuovo punto unità.

(59) Con le stesse formule, ma in coordinate di piani, si passa da Ω a $\overline{\Omega}$ (n.° 32).

Poi le costanti h, k, l (dalle quali dipende solo il nuovo punto unità) debbono esser tali che le prime delle (64) e (73) (che definiscono enti geometrici ben determinati) conservino la stessa forma dopo la trasformazione; e ciò esige che sia $k = l^2$, $h = l^3$, come subito si vede. Le (96) si riducono così alle (91) le quali effettivamente non alterano la forma delle equazioni canoniche (64) di c_3.

35. Inoltre: *passando da* O *a* $\overline{\mathrm{O}}$ *le equazioni* (82) *della curva* v *diventano*

(97) $$\bar{y} = \bar{x}^2 + \bar{a}\,\bar{x}^6 + \bar{b}\,\bar{x}^7 + \bar{c}\,\bar{x}^8 + r_9, \quad \bar{z} = \bar{x}^3 + \bar{a}'\,\bar{x}^6 + \bar{b}'\,\bar{x}^7 + \bar{c}'\,\bar{x}^8 + r_9,$$

ove

(98) $$\begin{cases} \bar{a} = l^4(a - a'm), \quad \bar{b} = l^5[b + (a - b')m + a'm^2], \\ \bar{c} = l^6[c - c'm + (2b' - 3a)m^2 - a'm^3], \\ \bar{a}' = l^3a', \quad \bar{b}' = l^4(b' - 3a'm), \quad \bar{c}' = l^5[c' + 2(3a - 2b')m + 3a'm^2]. \end{cases}$$

Infatti, per le (82), le (94) e (95) diventano

$$\begin{aligned} A &= (1 - mx)^2x + (a'm - 2a)mx^6 + (b'm - 2b)mx^7 + (c'm - 2c)mx^8 + r_9, \\ B &= (1 - mx)x^2 + (a - a'm)x^6 + (b - b'm)x^7 + (c - c'm)x^8 + r_9, \\ C &= x^3 + a'x^6 + b'x^7 + c'x^8 + r_9, \\ D &= (1 - mx)^3 + (3a - a'm)m^2x^5 + (3b - b'm)m^2x^7 + (3c - c'm)m^2x^8 + r_9, \end{aligned}$$

e dànno

(99) $$\begin{cases} BD - A^2 = (a - a'm)x^6 + [b + (a - b')m + a'm^2]x^7 + \\ \qquad\qquad + [c + (b - c')m + (b' - 2a)m^2]x^8 + r_9, \\ CD - A^3 = a'x^6 + (b' - ba'm)x^7 + [c' + 6(a' - b')m + 12a'm^2]x^8 + r_9; \end{cases}$$

inoltre, per la (95),

(100) $$1 : D = 1 + 3mx + 6m^2x^2 + r_3,$$

da cui

(101) $$1 : D^2 = 1 + 6mx + 21m^2x^2 + r_3, \quad 1 : D^3 = 1 + 9mx + 45m^2x^2 + r_3;$$

poi, moltiplicando le (99) ordinatamente per le (101) e tenendo conto delle (92), si ha

(102) $$\begin{cases} l^2(\bar{y} - \bar{x}^2) = (a - a'm)x^6 + [b + (7a - b')m - 5a'm^2]x^7 + \\ \qquad\qquad + [c + (7b - c')m + 5(5a - b')m^2 - 15a'm^3]x^8 + r_9, \\ l^3(\bar{z} - \bar{x}^3) = a'x^6 + (b' + 3a'm)x^7 + [c' + 3(2a - b')m + 3a'm^2]x^8 + r_9; \end{cases}$$

ancora, moltiplicando $A = x - 2mx^2 + m^2x^3 + r_4$ per la (100), si ha, per le (92),

$$l\bar{x} = A : D = 1 + mx^2 + m^2x^3 + r_4,$$

da cui

$$l^6\bar{x}^6 = x^6 + 6mx^7 + 21m^2x^8 + r_9, \quad l^7\bar{x}^7 = x^7 + 7mx + r_9, \quad l^8\bar{x}^8 = x^8 + r_9;$$

infine, risolvendo queste rispetto a x^6, x^7, x^8 e sostituendo nelle (102), si trovano le (97) con i valori (98) per $\bar{a},\ldots, \bar{c}'$ ([60]).

36. Ora possiamo disporre di l ed m in modo che le (97) (o le duali) assumano una forma *canonica*; ed allora il corrispondente tetraedro $\bar{O}$ (il duale $\bar{\Omega}$) si dirà *tetraedro canonico* della curva (sviluppabile) v in P (in π) e si indicherà con O_c (con Ω_c). Distinguiamo due casi.

1° caso: v appartenga a un complesso lineare (sicchè $\theta_3 = 0$ e $J = \pm 1$). Allora, per le (90) e (98), si ha

$$\bar{a} = -\frac{J}{36}l^4, \quad \bar{b} = \frac{2J}{63}l^6 m, \quad \bar{c} = \left(\frac{IJ}{252} - \frac{m^2}{28}\right)l^6, \quad \bar{a}' = 0, \quad \bar{b}' = -\frac{5J}{84}l^4, \quad \bar{c}' = -\frac{J}{6}l^5 m.$$

Essendo $l \neq 0$, conviene evidentemente assumere $m = 0$, ed allora $\bar{O}$ si riduce ad O, per le (91), che sarà O_c; inoltre converrà assumere $l = \sqrt{6}$, sì da rendere $\bar{a} = -J (= \pm 1)$. Dunque:

La forma canonica delle equazioni locali di una curva v *appartenente a un complesso lineare è*

$$\bar{y} = \bar{x}^2 - J\bar{x}^6 + \frac{6}{7}JIx^8 + r_9, \quad \bar{z} = \bar{x}^3 - \frac{15}{7}J\bar{x}^7 + r_9; \tag{103}$$

il tetraedro canonico O_c *coincide con* O ([61]). *E* (dualmente) *tale è pure la forma canonica delle equazioni (con* $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ *cambiate in* ξ, $\bar{\eta}$, ζ*) della sviluppabile* v *riferita al tetraedro canonico* Ω_c, *che coincide con* $\Omega \equiv O$ (n.° 33) *ossia con* O_c.

2° caso: v non appartenga a un complesso lineare (sicchè $\theta_3 = 1$). Sarà $\bar{a}' \neq 0$, per le (90) e (98), quindi il coefficiente del termine di grado più basso in (97) suscettibile di annullamento è $\bar{a} = l^4(a - a'm)$ e per $m = a : 5J : 12\theta_3$, per le (90); converrà poi scegliere l in guisa che si riduca a -1 il coeffi-

([60]) Il procedimento seguito è sostanzialmente quello usato dal WILCZYNSKI in loc. cit. ([3]).

([61]) Però *non coincidono i punti unità assunti coi tetraedri* O_c *e* O: perchè le formule di passaggio sono $\bar{x} = lx$, $\bar{y} = l^2y$, $\bar{z} = l^3z$ con $l = \sqrt{6}$ (e non $l = 1$).

ciente $\overline{a}' = l^3 a' = - l^3\theta_3 : 15$ dell'altro termine di pari grado, ossia porre $l = \sqrt[3]{15 : \theta_3}$. È poi facile determinare il tetraedro canonico O_c a cui così si riduce $\overline{O}$; perchè dalle coordinate omogenee $\overline{z}',\ldots$ dei suoi vertici rispetto allo stesso $\overline{O}$, e che sono (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), si deducono quelle $z',\ldots$ rispetto a O mediante le (91). Eseguiti tutti i calcoli indicati, si trova che:

La forma canonica delle equazioni locali di una curva v *non appartenente a un complesso lineare è*

$$\overline{y} = x^2 + \overline{b}\,\overline{x}^7 + c\,\overline{x}^8 + r_9, \quad \overline{z} = x^3 - \overline{x}^6 + \overline{b}'\,x^7 + \overline{c}'\,x^8 + r_9, \tag{104}$$

ove

$$\left\{\begin{aligned} \overline{b} &= 2^{-4}3^{-3}\cdot 5^{-1}\cdot 7^{-1}\, l_c^5 (144 I\theta_3^2 - 60 J_1\theta_3 + 25 J^2), \\ \overline{c} &= 2^{-6}3^{-4}5^{-2}7^{-1}\, l_c^6 [-6048\theta_3^4 + 1080 I\theta_3^3 - 450(J_2 + 16 IJ)\theta_3^2 + \\ &\qquad\qquad + 3375 JJ_1\theta_3 - 1250 J^3], \\ \overline{b}' &= 2^{-1}3^{-1}7^{-1}\, l_c^4 J, \quad \overline{c}' = 2^{-4}3^{-2}5^{-1}\cdot 7^{-1}\theta_3^{-1}(144\theta_3^2 - 45 J_1\theta_3 - 25 J^2); \end{aligned}\right. \tag{105}$$

il tetraedro canonico O_c *ha per vertici i punti di coordinate*

$$(1,\ 0,\ 0,\ 0), \quad (3m_c,\ 1,\ 0,\ 0), \quad (3m_c^2,\ 2m_c,\ 1,\ 0), \quad (m_c^3,\ m_c^2,\ m_c,\ 1) \tag{106}$$

rispetto a O, *dove*

$$l_c = \sqrt[3]{15 : \theta_3}, \quad m_c = 5J : 12\theta_3, \quad (\theta_3 = 1). \tag{107}$$

(Cambiando $\overline{\mathrm{x}}$, $\overline{\mathrm{y}}$, $\overline{\mathrm{z}}$, θ_3, O, O_c *in* ξ, $\overline{\eta}$, $\overline{\zeta}$, $-\theta_3$, Ω, Ω_c, *si ha il teorema duale per la sviluppabile* v*).*

Osservazione. *Solo se* $\mathrm{J} = 0$ *in* P, *i tetraedri canonici* O_c *e* Ω_c *coincidono con* O *e* Ω *rispettivamente* (ma non tra loro come nel 1° caso) ([62]).

([62]) Sviluppi del tipo (103) e (104) (non i duali) furono già dati per la prima volta da HALPHEN, però con coefficienti che erano invarianti proiettivi *relativi* (soltanto). WILCZYNSKI ha poi dato sviluppi con coefficienti invarianti ***assoluti***, come quelli di (103) e (104), ma diversi e limitati ai termini in x^7.

Queste differenze provano che, pur coincidendo i tetraedri canonici di riferimento di HALPHEN, di WILCZYNSKI e il nostro O_c (necessariamente, perchè, come risulta dalle dimostrazioni del testo, di tetraedri di riferimento che facciano assumere alle equazioni di v la forma (103) o (104) non ve n'è che un solo), ***non coincidono i tre punti unità e il primo punto non è definito in modo intrinseco e invariante per collineazioni, come gli altri due.***

37. Le quadriche-luogo aventi con la curva v sette punti comuni in P costituiscono una rete. Poichè dalle (97) si ha

$$\bar{x}^2 + \bar{a}\,\bar{z}^2 - \bar{y} = -\bar{b}\,\bar{x}^7 + r_8, \quad \bar{y}^2 - \bar{x}\,\bar{z} = -\bar{a}'\,\bar{x}^7 + r_8,$$
$$\bar{a}'\,\bar{z}^2 + \bar{x}\,\bar{y} - \bar{z} = (\bar{a} - \bar{b}')\bar{x}^7 + r_8,$$

tre di tali quadriche hanno (riferite a $\bar{O}$) le equazioni

(108) $$\bar{x}^2 + \bar{a}\,\bar{z}^2 - \bar{y} = 0, \quad \bar{y}^2 - \bar{x}\,\bar{z} = 0, \quad \bar{a}'\,\bar{z}^2 + \bar{x}\,\bar{y} - \bar{z} = 0.$$

Ora queste hanno a comune un ottavo punto S che apparterrà a tutte le quadriche della rete, e che risulta così definito *geometricamente e proiettivamente.*

Per determinare S conviene supporre $\bar{O} \equiv O_c$. Allora: se v appartiene a un complesso lineare è (n.° 36, 1° caso) $a = -1$, $\bar{a}' = 0$ e dalle (108) risulta per S $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$ ossia che $S \equiv P$; altrimenti è (n.° 36, 2° caso) $\bar{a} = 0$, $\bar{a}' = -1$ e dalle (108) risulta che per S è $\bar{x} = \bar{y} = 0$, $\bar{z} = -1$, quindi, per le (92) e poi per le (91), risulta che è $z' = m_c^3 - 1/l_c^3$, $z'' = m_c^2$, $z''' = m_c$, $z^{IV} = 1$. Dunque:

Se v *appartiene a un complesso lineare è* $\mathrm{S} \equiv \mathrm{P}$; *altrimenti* S *è un punto dello spigolo* $\mathrm{PR_c}$ (uscente da P e non giacente in π) *di* $\mathrm{O_c}$ *che rispetto a* O *ha le coordinate*

(109) $$(m_c^3 - 1/l_c^3,\ m_c^2,\ m_c,\ 1).$$

Dualmente: *le quadriche-inviluppo aventi un contatto 7-piano con la sviluppabile* v *in* π (e costituenti un *tessuto*) *hanno un 8-piano comune* σ; *se* v *appartiene a un complesso lineare è* $\sigma \equiv \pi$, *altrimenti* σ *è un piano passante per lo spigolo* $\pi\rho_c$ (che giace in π e non passa per P) *di* Ω_c *che ha rispetto a* Ω *le coordinate* (109), *ove* $\mathrm{l_c}$ *e* $\mathrm{m_c}$ *hanno i valori* (107) *con* θ_3 *cambiato in* $-\theta_3$.

§ 8. Interpretazioni geometriche di D, Δ, F, O, Ω, O_c, Ω_c.

38. I tetraedri D, Δ,..., Ω_c successivamente introdotti li abbiamo definiti solo *analiticamente*, e la definizione dei primi due (n.° 15), dai quali abbiamo poi dedotti i rimanenti, *presuppone la normalizzazione delle coordinate dei punti e dei piani di* v.

Tuttavia le definizioni stesse sono intrinseche e invarianti per collineazioni, quindi suscettibili di interpretazioni *geometriche* ([63]). Tali interpretazioni siamo ora in grado di dare, procedendo a ritroso. Distingueremo due casi.

1° caso: v *appartenga a un complesso lineare; sicchè* $O_c \equiv O \equiv \Omega \equiv \Omega_c$ (n.° 36, 1° caso).

a) Applicando la (84) alle equazioni (103) della curva v riferita a O_c, si ha che la quadrica-luogo osculatrice in P ha l'equazione

$$\bar{x}^2 + 6I\bar{y}^2 - J\bar{z}^2 - 6I\bar{x}\,\bar{z} - \bar{y} = 0, \tag{110}$$

e quindi ha come piano tangente in $P \equiv (1, 0, 0, 0)$ il piano $\bar{y} = 0$ o $y = 0$ (perchè $O_c \equiv O$), piano che è π_τ; dunque:

Per una curva v *appartenente a un complesso lineare i tetraedri* O, Ω, O_c, Ω_c *in un suo punto* P *si riducono a un solo, che è quel tetraedro osculatore di* $c_3 \equiv \gamma_3$ [n.° 27, *a*)] *che ha per una delle facce* π_τ, *che è piano tangente in* P *alla quadrica-luogo osculatrice in* P; *oppure* (dualmente) *che ha per uno dei vertici* P_t, *che è punto di contatto della quadrica-inviluppo osculatrice col piano* π.

b) Con ciò risultano definiti geometricamente anche: *il piano rettificante* (che è π_τ), *il punto* P_t (suo duale e suo polo nel sistema nullo), *la normale principale* (come spigolo di O_c appartenente a P e a π diverso dalla tangente).

c) *Questi ultimi sono elementi anche di* D, che ha per vertici i punti P, $P_t \equiv P_1$, P_2 e P_3 (n.° 15). Si completa la sua definizione geometrica osservando che: *lo spigolo* P_1P_2 e la faccia $P_1P_2P_3$ sono tangente e piano osculatore in P_t (già definito) alla curva luogo di esso, variando P su v (n.° 15); *il vertice* P_2 è quindi intersezione di P_1P_2 con la normale principale (già definita); poi *lo spigolo* P_2P_3 è la tangente in P_2 alla curva luogo di P_2 (n.° 15); infine *il vertice* P_3 è l'intersezione di detto spigolo con π_τ (già definito).

d) *Dualmente si costruisce* Δ (n.° 15).

e) *Da* D *e* Δ *si ottiene* F *con costruzione di quarti armonici* (n.° 16) ([64]).

([63]) Non così i tetraedri di riferimento usati nelle precedenti trattazioni, cit. in ([2]) e ([3]), per giungere fino a O_c.

([64]) Ma alcuni suoi elementi possono anche ottenersi indipendentemente da D e Δ; *tali sono* [*oltre agli elementi* b)] *il vertice* P_n *e la faccia* π_v. Sussiste infatti il teorema (la cui dimostrazione omettiamo per brevità): *sulla normale principale di* v *in* P *il vertice* P_n *di* F *è il solo punto diverso da* P *al quale corrisponde nel sistema nullo il piano tangente nel punto stesso alla rigata luogo delle normali principali; e tale piano è* π_v.

2° caso: v *non appartenga a un complesso lineare; sicchè* O, Ω, O_c, Ω_c *sono distinti* ([65]).

a) Consideriamo solo le prime fra le equazioni (104) e $\bar{y}=\bar{x}^2$, $z=\bar{x}^3$, delle curve v e c_3 riferite a O_c. Esse rappresentano coni aventi un contatto di ordine sei in P, quindi maggiore di quello (cinque) delle curve stesse, e tali coni hanno per vertice comune il vertice $\bar{x}=\bar{y}=0$, $\bar{z}=1$ di O_c, giacente sul piano $\bar{y}=0$ passante per la tangente comune a v e a c_3 in P; quindi ([66]) tale piano è quello principale delle due curve in P. La sua equazione $\bar{y}=0$, o $\bar{z}'''=0$ per le (92), diventa

$$12\theta_3 z'''-5Jz^{\text{IV}}=0 \tag{111}$$

per le (91) e (107), e poi, per le (63),

$$4\theta_3 y'''-5Jy^{\text{IV}}=0; \tag{112}$$

quindi (n.° 22, *avvertenza*) le sue coordinate rispetto a F sono $(5J,\ 4\theta_3,\ 0,\ 0)$. Dunque:

Per una curva v *non appartenente a un complesso lineare il tetraedro canonico* O_c *in un suo punto* P *è quel tetraedro osculatore della* c_3 *relativa a* P *che ha come una delle facce il piano principale di* v *e* c_3 *in* P, *il quale rispetto a* F *ha le coordinate* $(5J,\ 4\theta_3,\ 0,\ 0)$. *E* (dualmente) *per la sviluppabile* v *il tetraedro canonico* Ω_c *in* π *è quel tetraedro osculatore della sviluppabile* γ_3 *relativa a* π *che ha come uno dei vertici il punto principale di* v *e* γ_3 *in* π, *il quale rispetto a* F *ha le coordinate* $(5J,\ -4\theta_3,\ 0,\ 0)$.

b) Per passare a O e Ω, osserviamo che il piano principale di v e γ_3 ha rispetto a O l'equazione (111) e quindi ha le coordinate $\xi'=0$, $\xi''=0$, $\xi'''=12\theta_3$, $\xi^{\text{IV}}=-5J$; ad esso, per le (79), corrisponde nel sistema nullo il punto di coordinate $(5J,\ -4\theta_3,\ 0,\ 0)$ rispetto ad O, ed anche rispetto ad F per le (63), e perciò forma un gruppo armonico con $P\equiv(1,0,0,0)$, $P_t\equiv(0,1,0,0)$ e col punto principale $(5J,\ -4\theta_3,\ 0,\ 0)$ di v e c_3.

Dunque: *il tetraedro* Ω *relativo a un piano* π *di una sviluppabile* v *non appartenente a un complesso lineare è quel tetraedro osculatore della* γ_3 *relativa a* π *un cui vertice è* P_t, *che è coniugato armonico del punto che nel sistema nullo corrisponde al piano principale delle curve* v *e* c_3, *ri-*

([65]) Che O e O_c (Ω e Ω_c) siano distinti segue dal teorema del n.° 36, 2° caso; che poi O e O_c siano distinti da Ω e Ω_c segue dal n.° 33.

([66]) Cfr. ([56]).

spetto al punto P *e al punto principale delle sviluppabili* v *e* γ_3. Dualmente si ha O (e π_τ) (67).

c) Ottenuti così O e Ω, i rimanenti tetraedri D, Δ, F se ne deducono come nel primo caso.

§ 9. **Altri risultati.**

39. *a)* Gli enti geometrici considerati nei paragrafi precedenti in un punto P di v li abbiamo spesso riferiti a tetraedri locali differenti (F, O e Ω, O_c e Ω_c, in generale $\overline{O}$ e $\overline{\Omega}$); ma per studiare le loro mutue relazioni conviene *riferirli tutti a uno stesso tetraedro*. Li riferiremo (limitandoci ai più notevoli) al tetraedro fondamentale F, giovandoci delle formule di trasformazione (63), (91) e loro *duali*, cioè che se ne deducono *scambiando le coordinate di punto con quelle di piano e* θ_3 *con* $-\theta_3$.

b) Qui si è alluso alla pseudo-dualità sempre considerata (fin dal n.° 11). Ma or conviene considerare anche la dualità (effettiva) che nasce se si fa corrispondere a ciascun ente quello *polare*, cioè che gli corrisponde nel sistema nullo [n.° 27, *d*)]. Ora, poichè le equazioni (79) di tal sistema riferito a O si mutano, per le (63) e (65), nelle

$$(113) \qquad y' = \eta', \quad y'' = \eta'', \quad y''' = \eta''', \quad y^{\text{IV}} = \eta^{\text{IV}},$$

risulta che : se F è il tetraedro di riferimento (come supporremo d'ora innanzi), da ogni espressione o equazione relativa ad un ente si deduce quella relativa all'ente polare, *scambiando le coordinate di punto con quelle di piano.*

Con tale scambio si deducono per es. dalle equazioni della curva v e della sviluppabile v riferite a F, e che sono le (54) e le duali, quelle di una sviluppabile v' e della curva v' (suo spigolo di regresso) costituenti *la varietà polare* di v (relativa a P). E dal confronto delle equazioni delle curve v e v' risulta che : v′ *coincide con* v *se* v *appartiene a un complesso lineare ; in caso contrario* v′ *ha le stesse curvature di* v *ed elemento lineare opposto.* (D'accordo col n.° 14).

c) Segue poi da *a)* e *b)* che, se in una espressione o equazione riferentesi a un ente relativo a *v si cambia* θ_3 *in* $-\theta_3$, si ha quella riferentesi all'ente *omologo* (e non duale o polare) relativo a v'.

(67) Daremo in fine del n.° 43 un'altra costruzione di P_t e π_τ, e quindi di O e Ω.

40. *a)* Così, poichè (57) non dipende da θ_3, si ha che v *e* v′ *hanno in* P *lo stesso cono quadrico osculatore* C_2, *di equazione* (57), *e* (dualmente) *la stessa quadrica limite* Γ_2 *(e conica* c_2*) osculatrice, di equazione* (58); *sicchè tali enti sono nel contempo duali e polari tra loro.*

b) E, poichè le varietà c_3 e γ_3 sono autopolari [n.° 27, *d*) e n.° 32]: v *e* v′ *hanno pure a comune in* P *le varietà* c_3 *e* γ_3*; ma con ufficii scambiati* (poichè alla curva e alla sviluppabile v' sono osculatrici rispettivamente la curva γ_3 e la sviluppabile c_3).

41. a) *Il tetraedro* F *di* v *in* P *è autopolare (coincide con l'omologo di* v′) *e precisamente i vertici* P, P_t, P_n, P_b *sono i poli delle facce* (duali) π, π_τ, π_ν, π_β *rispettivamente.* Perchè con queste hanno a comune le coordinate rispetto a F [n.° 39, *b*)].

b) Risulta dalla (45) che *il tetraedro* D *di* v *in* P (n.° 15) *ha per vertici*

$$P \equiv (1, 0, 0, 0), \qquad P_1 \equiv P_t \equiv (0, 1, 0, 0),$$
$$P_2 \equiv (5I, 0, -1, 0), \quad P_3 \equiv (2\theta_3, 5I_1, 0, -1) \tag{114}$$

e quindi (n.° 22, *avvertenza*) *ha per facce*

$$(1, 0, 0, 0), \quad (0, 1, 0, 0), \quad (5I, 0, 1, 0), \quad (-2\theta_3, 5I_1, 0, 1). \tag{115}$$

Dualmente [n.° 39, *a*)]: *il tetraedro* Δ *ha per facce*

$$\pi \equiv (1, 0, 0, 0), \qquad \pi_1 \equiv \pi_\tau \equiv (0, 1, 0, 0),$$
$$\pi_2 \equiv (5I, 0, -1, 0), \quad \pi_3 \equiv (-2\theta_3, 5I_1, 0, -1) \tag{116}$$

e per vertici

$$(1, 0, 0, 0), \quad (0, 1, 0, 0), \quad (5I, 0, 1, 0), \quad (2\theta_3, 5I_1, 0, 1). \tag{117}$$

Combinando per addizione e per sottrazione le coordinate dei quarti vertici di D e Δ, si hanno i punti $E \equiv (2\theta_3, 5I_1, 0, 0)$, $P_b \equiv (0, 0, 0, 1)$; dunque: *i vertici di* D, Δ, F *opposti alla faccia comune* π *appartengono a una medesima retta che incontra la tangente nel punto* $\mathrm{E} \equiv (2\theta_3, 5I_1, 0, 0)$ *che forma con essi un gruppo armonico.*

Dualmente: *le facce di* D, Δ, F *opposte al vertice comune* P *appartengono a una medesima retta che determina con la tangente un piano* $\varepsilon \equiv (-2\theta_3, 5I_1, 0, 0)$ *che forma con esse un gruppo armonico.*

c) Cambiando θ_3 in $-\theta_3$ nelle (114),..., (117), si hanno vertici e facce di omologhi tetraedri D', Δ' (tra loro duali) che sono *i tetraedri normali di* v′, e perciò legati a F come D e Δ; essi dànno perciò un punto $E' \equiv (-2\theta_3, 5I_1, 0, 0)$ e un piano $\varepsilon' = (2\theta_3, 5I_1, 0, 0)$ omologhi di E ed ε, definiti in b).

E si riconosce subito che: E *ed* E' (ε *ed* ε') *sono separati armonicamente da* P *e* $\mathrm{P_t}$ (π *e* π_τ).

Ed inoltre che: D' *è polare di* Δ, *e* Δ' *di* D [n.° 39, *b*)]; D *e* D' (Δ *e* Δ') *sono distinti, ma hanno a comune tre vertici giacenti in* π *(tre facce passanti per* P*) ed i quattro vertici allineati con* P *(le quarte facce formanti fascio con* π*).*

42. *a)* Consideriamo un tetraedro osculatore qualunque $\bar{O}$ della c_3 relativa a P [n.° 27, *a*)], che perciò ha due vertici su c_3, che sono P e un altro punto qualunque $\bar{R}$ di c_3.

I vertici, che rispetto a $\bar{O}$ stesso hanno le coordinate (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), avranno rispetto a O coordinate del tipo

$$(1, 0, 0, 0), \quad (3m, 1, 0, 0), \quad (3m^2, 2m, 1, 0), \quad (m^3, m^2, m, 1),$$

per le (91); allora, applicando le (63), si trova che: *riferiti a* F, *i vertici e le facce di* $\bar{\mathrm{O}}$ *hanno a comune* ([68]) *le seguenti coordinate*

$$\begin{gathered}(1, 0, 0, 0), \quad (3m, 1, 0, 0), \quad (6m^2 + 2I, 4m, 1, 0), \\ \left(6m^3 - 6Im + 3I_1 - \frac{2}{5}\theta_3, \quad 6m^2 + 12I, 3m, 1\right).\end{gathered} \tag{118}$$

Il tetraedro $\bar{O}$ considerato dipende dal parametro m che fissa il suo vertice $\bar{R}$: *solo assumendo per* m *un (qualsiasi) invariante proiettivo di* v *(calcolato in* P*), si ha un tetraedro* $\bar{\mathrm{O}}$ *definito in modo intrinseco e invariante per collineazioni* (e che perciò può presentare interesse).

Sicchè *si deve sempre assumere* (n.° 10)

$$m = f(\theta_3, I, J, I_1, J_1, I_2, J_2, \ldots) \tag{119}$$

ove f *è funzione arbitraria dei suoi argomenti calcolati in* P, *cioè per* $\sigma = 0$ (se P è l'origine degli archi σ su v, come supporremo).

b) Così, per $m = 0$ si ha il tetraedro O col vertice R nel piano rettificante (n.° 26).

Poi: *il tetraedro canonico* $\mathrm{O_c}$ *della curva* v *in* P *coincide con* O *se* v *appartiene a un complesso lineare* (n.° 36, 1° caso); *in caso contrario è quel tetraedro* O *che corrisponde al valore* $\mathrm{m_c}$ *di* m (n.° 36, 2° caso).

([68]) Per il n.° 39, *b*) e perchè un $\bar{O}$ qualunque è autopolare (come c_3).

c) Cambiando θ_3 in $-\theta_3$, si ha da ogni tetraedro $\overline{O}$ di v l'omologo $\overline{O}'$ di v', *il quale coincide col tetraedro* Ω *(duale di* $\overline{\mathrm{O}}$*) di* v; sicchè, in particolare, da O e O_c si hanno i tetraedri Ω (n.° 32) e Ω_c (n.° 36).

d) Supponiamo che v *non appartenga a un complesso lineare* ($\theta_3 \neq 0$). Allora $\overline{O}$ e Ω sono distinti (n.° 33) ed hanno il solo vertice P e la sola faccia π a comune, in generale.

Però: *se* $\mathrm{m} \equiv (119)$ *è funzione pari di* θ_3, $\overline{\mathrm{O}}$ *e* $\overline{\Omega}$ *hanno a comune i primi tre vertici e le prime tre facce, di coordinate* (118); *poi i quarti vertici* $\overline{\mathrm{R}}$, $\overline{\mathrm{R}}'$ *allineati con* P *e le quarte facce* $\overline{\rho}$, $\overline{\rho}'$ *formanti fascio con* π [69].

Ciò vale in particolare ($\mathrm{m}=0$) *per* O *e* Ω, *i quali perciò hanno comuni i tre vertici* P, $\mathrm{P_t}$, $\mathrm{P_n}$ (n.° 26), *e le tre facce* π, π_τ, π_ν (n.° 32) [70].

e) *Se invece* $\mathrm{m} \equiv (119)$ *è funzione dispari di* θ_3 *i secondi vertici (le seconde facce)* (118) *di* $\overline{\mathrm{O}}$ *e* $\overline{\Omega}$ *formano un gruppo armonico con* P *e* $\mathrm{P_t}$ (π *e* π_τ); *la retta comune ai terzi vertici (alle terze facce) passa per* $\mathrm{P_t}$ *(giace in* π_τ*) e determina con la normale principale il punto (piano) coniugato armonico di* $\mathrm{P_t}$ *(di* π_τ*) rispetto ai primi due (alle prime due); la retta comune ai quarti vertici* $\overline{\mathrm{R}}$, $\overline{\mathrm{R}}'$ *(alle quarte facce* $\overline{\rho}$, $\overline{\rho}'$*) incontra la normale principale e determina con questa e con* π_τ *(con* $\mathrm{P_t}$*) due punti (piani)*

$$(120) \qquad \left(6m^3 - 6Im - \frac{2}{5}\theta_3,\ 0,\ 3m,\ 0\right),\quad (3I,\ 6m^2+12I,\ 0,\ 1)$$

formanti con $\overline{\mathrm{R}}$ *e* $\overline{\mathrm{R}}'$ ($\overline{\rho}$ *e* $\overline{\rho}'$) *un gruppo armonico.*

Ciò vale in particolare per i tetraedri $\mathrm{O_c}$ *e* Ω_c *(quando* v *non appartiene a un complesso lineare), corrispondenti al valore* $\mathrm{m_c}$ *di* m (n.° 36, 2° caso); *allora la seconda faccia di* $\mathrm{O_c}$ *e il secondo vertice di* Ω_c *sono rispettivamente il piano principale delle curve* v *e* $\mathrm{c_3}$, *e il punto principale delle sviluppabili* v *e* γ_3 [n.° 38, 2° caso, *a*)] *i quali hanno perciò le coordinate*

$$(121) \qquad (5J_1,\ 4\theta_3,\ 0,\ 0),\quad (5J,\ 4\theta_3,\ 0,\ 0).$$

Poi: *il secondo vertice di* $\mathrm{O_c}$ *e la seconda faccia di* Ω *sono il punto principale delle sviluppabili* v' *e* $\mathrm{c_3}$ *e il piano principale delle curve* v' *e* γ_3, *ed hanno pure le coordinate* (121) [71].

(69) Cioè $\overline{R}$ e $\overline{R}'$ ($\overline{\rho}$ e $\overline{\rho}'$) sono punti (piani) di c_3 e γ_3 rispettivamente appartenenti a una stessa generatrice del cono quadrico osculatore C_2 (a una stessa tangente della conica osculatrice c_2).

(70) E non solo i primi due vertici e le prime due facce, come fin qui sapevamo.

(71) Perchè se O'_c, Ω'_c sono i tetraedri canonici di v', si ha $O'_c \equiv \Omega_c$, $\Omega'_c \equiv O_c$. Cfr. n.° 42, *c*).

Ne segue che: *i due punti (piani) principali sono separati armonicamente da* P *e* P_t (π *e* π_τ).

43. *La* v *non appartenga a un complesso lineare.*

Allora allo spigolo PR_c di O_c ($\pi\rho_c$ di Ω_c) appartiene un punto $S \neq P$ (piano $\sigma \neq \pi$), geometricamente definito nel n.° 37.

Dalle coordinate (109) di S rispetto a O si deducono quelle rispetto a F mediante le (63), e si trova che: *riferito a* F *il punto* S *ha le coordinate*

$$(122) \qquad \left(6m_c^3 - 6Im_c + 3I_1 - \frac{4}{5}\theta_3, \quad 6m_c^2 + 12I, \ 3m_c, \ 1\right),$$

e (quindi) *il piano* σ *ha le coordinate*

$$(123) \qquad \left(-6m_c^3 + 6Im_c + 3I_1 + \frac{4}{5}\theta_3, \quad 6m_c^2 + 12I, \ 3m_c, \ 1\right) \ ([72]).$$

E le stesse coordinate (122) *e* (123) *hanno il piano* σ' *e il punto* S' *rispettivamente* (loro polari) *relativi a* v'.

Se ne deduce che: *la retta* SS' ($\sigma\sigma'$) *incontra la normale principale e determina con questa e col piano* π_τ *(punto* P_t*) due punti (piani)*

$$(124) \qquad \left(6m_c^3 - 6Im_c - \frac{4}{5}\theta_3, \ 0, \ 3m_c, \ 0\right), \quad (3I_1, \ 6m_c^2 + 12I, \ 0, \ 1)$$

formanti con S *e* S' (σ *e* σ') *un gruppo armonico.*

Il secondo punto (124) coincide col secondo punto (120) per $m = m_c$; dunque: *la retta* SS' *e la retta* $R_cR'_c$ *(congiungente i vertici di* O_c *e* Ω_c *opposti alla faccia comune* π*) concorrono in uno stesso punto del piano rettificante* π_τ*;* e (dualmente) *la retta* $\sigma\sigma$ *e la retta* $\rho_c\rho'_c$ *(comune alle facce di* O_c *e* Ω_c *opposte a* P*) giacciono in uno stesso piano passante per* P_t.

Essendo geometricamente definiti O_c, Ω_c (e quindi R_c, R'_c) [n.° 38, 2° caso, a)] ed S, S' (n.° 37), *l'ultimo teorema dà una seconda definizione geometrica del piano* π_τ *e del punto* P_t, e quindi dei tetraedri O e Ω ([73]).

([72]) Si ottengono dalle (122) cambiando θ_3 in $-\theta_3$, ed allora $m_c \equiv$ (107) diventa $-m_c$.
([73]) La prima è quella data nel n.° 38.

Sulle varietà abeliane reali.

Memoria 2ª di ANNIBALE COMESSATTI (a Padova).

(Vedi la Memoria 1ª negli « Annali di Matematica », serie IV, tomo II, pagg. 67-106).

§ 4. Proprietà reali dei sistemi Σ appartenenti alle varietà abeliane. Il problema dei gruppi semicanonici reali.

13. **Trasformazione delle ϑ.** — Sia V_p una varietà abeliana *di tipo reale*, corrispondente ad una tabella normale del tipo (VII) (incluso il caso $\lambda = 0$, in cui la (VII) si riduce alla (V) con $e_1 = e_2 = \dots = e_p = 1$) nella quale, come sempre, supporremo che le ε_{rs} abbiano i valori di uno degli *schemi normali* (VIII). Poichè la relazione normale corrispondente ha i divisori unitarî, così il relativo sistema Φ_1 è un sistema Σ (n.° 9) e le sue varietà son notoriamente rappresentate, al variare delle c_i, dalle equazioni

$$\vartheta(u_1 - c_1,\ u_2 - c_2, \dots,\ u_p - c_p) = 0, \tag{1}$$

il cui primo membro verrà spesso abbreviatamente indicato con $\vartheta[u - c]$.

Il sistema Σ è trasformato in sè stesso da tutte le simmetrie $u'_i \equiv \bar{u}_i + \gamma_i$ [49], in quanto la corrispondente sostituzione (IX) sui cicli muta in sè la relazione normale, ed anche, per analoga ragione dalle $u'_i \equiv -\bar{u}_i + \delta_i$; cioè insomma, se V_p non è singolare, da *tutte* le simmetrie di V_p (n.° 6). Fissata una, S, di queste simmetrie, ad esempio, come a noi converrà, la $u'_i \equiv \bar{u}_i$, e detti c_i, c'_i i *parametri* (cioè le costanti delle relative equazioni (1)) di due varietà V, V' di Σ in essa corrispondenti, ci proponiamo di esprimere le c'_i mediante le c_i, cioè di scrivere *le equazioni (fra i parametri) della trasformazione indotta dalla simmetria S entro al sistema Σ.*

Poichè dall'equazione $\vartheta[u - c] = 0$ di V, si deduce subito per V' l'equazione

$$\vartheta[u - \bar{c}] = 0, \tag{2}$$

così tutto si riduce a trasformare il primo membro della (2) in una $\vartheta[u - c']$,

[49] Qui per evitare equivoci, indichiamo le costanti delle simmetrie con γ_i, δ_i anzichè con c_i, d_i.

cioè ad esprimere la $\overline{\vartheta}$ mediante la ϑ. La possibilità di tale espressione è *a priori* garantita dall'*equivalenza* fra la tabella normale e la sua *coniugata*, ch'è pure normale (n.° 9).

Tratteremo per semplicità il problema nei due casi (*diasimmetrico* ed *ortosimmetrico*) corrispondenti a $p=2$, $\lambda=2$, che dànno indicazioni più che sufficienti per la discussione del caso generale.

Se, indicando provvisoriamente con σ_{rs} i periodi ai cicli N_s, ricordiamo che

(3) $$\vartheta(u_1, u_2)=\sum_{m_1, m_2}^{-\infty, +\infty} e^{\pi i(\sigma_{11}m_1^2+2\sigma_{12}m_1m_2+\sigma_{22}m_2^2)+2\pi i(m_1u_1+m_2u_2)}$$ (50),

abbiamo intanto subito

(3') $$\overline{\vartheta}(u_1, u_2)=\sum_{m_1, m_2}^{-\infty, +\infty} e^{-\pi i(\overline{\sigma}_{11}m_1^2+2\overline{\sigma}_{12}m_1m_2+\overline{\sigma}_{22}m_2^2)-2\pi i(m_1u_1+m_2u_2)}$$

e quindi nel *caso diasimmetrico* in cui

(4) $$\sigma_{11}=\frac{1}{2}+i\tau_{11}, \quad \sigma_{22}=\frac{1}{2}+i\tau_{22}, \quad \sigma_{12}=\sigma_{21}=i\tau_{12},$$

tenendo conto che, *se m è intero*, si ha sempre

$$-m^2\frac{\pi i}{2}\equiv m^2\frac{\pi i}{2}-m\pi i, \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi i)$$

risulta

$$\overline{\vartheta}(u_1, u_2)=\vartheta\left(-u_1-\frac{1}{2}, -u_2-\frac{1}{2}\right),$$

cioè, per la *parità* della ϑ

(5) $$\overline{\vartheta}(u_1, u_2)=\vartheta\left(u_1+\frac{1}{2}, u_2+\frac{1}{2}\right).$$

Invece nel *caso ortosimmetrico*, avendosi

(6) $$\sigma_{11}=i\tau_{11}, \quad \sigma_{22}=i\tau_{22}, \quad \sigma_{12}=\sigma_{21}=\frac{1}{2}+i\tau_{12},$$

si trova analogamente $\overline{\vartheta}(u_1, u_2)=\vartheta(-u_1, -u_2)$ ed infine

(7) $$\overline{\vartheta}(u_1, u_2)=\vartheta(u_1, u_2).$$

---

(50) Nel confronto colla definizione di RIEMANN (KRAZER, § 4) si tenga presente la differenza delle convenzioni circa i periodi ai cicli M_i (1 invece di πi).

Così procedendo si ottengono in generale le seguenti *formule di trasformazione delle* ϑ

$$\text{(XI)}\quad \begin{array}{ll} d) & \bar{\vartheta}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \vartheta\left(u_1 + \frac{1}{2}, \ldots, u_\lambda + \frac{1}{2}, u_{\lambda+1}, \ldots, u_p\right) \\ o) & \bar{\vartheta}(u_1, u_2, \ldots, u_p) = \vartheta(u_1, u_2, \ldots, u_p), \end{array}$$

mediante le quali dalla (2) si deducono per la *trasformazione indotta entro al sistema* Σ *dalla simmetria* $u'_i \equiv \bar{u}_i$ le seguenti equazioni

$$\text{(XII)}\quad \begin{array}{llll} d) & c'_h \equiv \bar{c}_h + \frac{1}{2}, \quad c'_k \equiv \bar{c}_k \text{ (51)} & & (h = 1, 2, \ldots, \lambda;\ k = \lambda + 1, \ldots, p) \\ o) & c'_i \equiv \bar{c}_i & & (i = 1, 2, \ldots, p). \end{array}$$

La deduzione delle analoghe equazioni corrispondenti alle altre simmetrie è immediata, dato che esse son prodotti della $u'_i \equiv \bar{u}_i$ per *trasformazioni ordinarie*; e d'altronde presenta meno interesse perchè, come fu osservato più volte, ogni simmetria *dotata di punti uniti* è riducibile (scelti opportunamente i parametri) alla $u'_i \equiv \bar{u}_i$.

Sul modello $V_p^{(0)}$ dove $u'_i \equiv \bar{u}_i$ è il coniugio, diremo addirittura che le (XII) son *le equazioni del coniugio di* Σ.

14. Varietà reali di Σ e trasformazioni di prima specie che le mutano in sè. — Per comodità di discorso ci riferiremo al predetto modello $V_p^{(0)}$, con che resta sottinteso che consideriamo solo varietà *dotate di punti reali.*

Le condizioni perchè una varietà ϑ sia reale, sono espresse dalle (XII) nelle quali al posto delle c' si scrivano ancora le c. Nel caso ortosimmetrico si ottengono così le stesse equazioni che servono a determinare i parametri dei punti reali di $V_p^{(0)}$; sicchè trascrivendo la (8) del n.° 7 (cfr. n.° 12, I) troviamo per i *parametri delle* ϑ *reali nel caso ortosimmetrico* i valori

$$\text{(8}o\text{)}\qquad c \equiv r + (0, 0, \ldots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \ldots, h_p),$$

nella cui formulazione seguiamo le convenzioni del § 2.

---

(51) Aggiungendo ai secondi membri il periodo al ciclo $N_1 + N_2 + \ldots + N_\lambda$, si vede che alle (XII d) possono sostituirsi le $c'_h \equiv \bar{c}_h + j_h$ $(h = 1, 2, \ldots, p)$ con $j_h = i(\tau_{h1} + \tau_{h2} + \ldots + \tau_{h\lambda})$.

Invece i *parametri delle* ϑ *reali nel caso diasimmetrico*, hanno i valori

$$(8d)\qquad c \equiv r + (1,\ 1, \ldots,\ 1,\ h_{\lambda+1},\ h_{\lambda+2}, \ldots,\ h_p),$$

che si desumono facilmente dalle (XIId) ([52]).

Le (8) in corrispondenza ai valori che può assumere la semicaratteristica a secondo membro, dànno $2^{p-\lambda}$ *sistemi di* ϑ *reali*, che in certa guisa fan riscontro alle $2^{p-\lambda}$ falde della varietà; le ϑ di ciascun sistema ottenendosi al variare dei parametri reali r_i.

Ogni varietà $\vartheta[u-c]=0$, è mutata in sè da *una* (ed una sola) trasformazione di 1ª specie T, di equazioni $u'_i \equiv -u_i + 2c_i$; viceversa una T di equazioni $u'_i \equiv -u_i + \gamma_i$ muta in sè 2^{2p} varietà ϑ (reali o no), i cui parametri si ottengono aggiungendo a $\frac{\gamma_i}{2}$ i 2^{2p} semiperiodi incongrui.

Se la $\vartheta[u-c]=0$ *è reale*, cioè se le c_i hanno i valori (8), le costanti $2c_i$ della T risultano congrue a numeri reali, cioè *T è reale e muta in sè tutte le falde di $V_p^{(0)}$* (n.° 7); viceversa se le γ_i son congrue a numeri reali, *la T muta in sè $2^{2p-\lambda}$ ϑ reali* che, ridotte le γ_i reali, *hanno i parametri*

$$(9)\quad \begin{array}{ll} d) & c \equiv \frac{1}{2}\gamma + (g_1,\ g_2, \ldots,\ g_p \mid 1,\ 1, \ldots,\ 1,\ h_{\lambda+1},\ h_{\lambda+2}, \ldots,\ h_p) \\ o) & c \equiv \frac{1}{2}\gamma + (g_1,\ g_2, \ldots,\ g_p \mid 0,\ 0, \ldots,\ 0,\ h_{\lambda+1},\ h_{\lambda+2}, \ldots,\ h_p). \end{array}$$

Il numero delle ϑ reali mutate in sè da T è dunque eguale a quello dei punti uniti reali di T (n.° 7); e così comincia ad affermarsi *anche nel campo reale* quella *reciprocità* fra i punti di V_p e le varietà ϑ di Σ, che notoriamente sussiste nel campo complesso ([53]).

È noto che *una* $\vartheta[u-c]=0$ *contiene* $2^{p-1}(2^p-1)$ *punti uniti della corrispondente* T. Ricordiamo brevemente come si giunge a tal risultato.

Gli argomenti dei punti uniti di T sono $c_i + \sigma_i$ (σ_i *semiperiodo*); quindi *la condizione d'appartenenza di quei punti alla* $\vartheta[u-c]=0$, *è* $\vartheta[\sigma]=0$.

([52]) Se queste congruenze si scrivono sotto la forma della nota precedente, si trova subito $c \equiv r + \frac{1}{2}j + (0,\ 0, \ldots,\ 0,\ h_{\lambda+1},\ h_{\lambda+2}, \ldots,\ h_p)$ dove j_h non è (come r_h) arbitrario, ma ha il valore predetto; ed i valori così ottenuti coincidono cogli (8 d) perchè $\frac{1}{2}j_h$ differisce dal semiperiodo $\overline{(1,\ 1, \ldots,\ 1,\ 0, \ldots,\ 0)}$ per una quantità *reale*.

([53]) Per $p=2$, cfr. ENRIQUES-SEVERI, *Mémoire sur les surfaces hyperelliptiques*. [Acta Math., vol. 32, (1909) pp. 283-392 e 33 (1910) pp. 321-403] n.° 23.

Essa è verificata allora e solo che il semiperiodo σ_i ha ***caratteristica dispari*** ([54]), cioè appunto per $2^{p-1}(2^p-1)$ valori di quella caratteristica (n.° 5).

Se la ϑ, e quindi la T, è reale, *quanti fra i predetti punti son reali?* Perciò bisogna che gli argomenti $c_i+\sigma_i$ abbian valori spettanti a punti reali ((8) del n.° 7); quindi, tenuto conto delle (9), *che il semiperiodo σ_i abbia una caratteristica* ***dispari*** *del tipo*

$$(10)\quad \begin{array}{ll} d) & (g_1, g_2,\ldots, g_p \mid 1, 1,\ldots, 1, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2},\ldots, h_p) \\ o) & (g_1, g_2,\ldots, g_p \mid 0, 0,\ldots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2},\ldots, h_p). \end{array}$$

Se ora ricordiamo (n.° 5) che ogni semicaratteristica del secondo gruppo, *esclusa la semicaratteristica impropria* $\overline{(0, 0,\ldots, 0)}$ appartiene a 2^{p-1} caratteristiche dispari, troviamo subito che le caratteristiche (10) e quindi *i punti uniti reali cercati sono $2^{p-1}\cdot 2^{p-\lambda}$ nel caso diasimmetrico, $2^{p-1}(2^{p-\lambda}-1)$ nel caso ortosimmetrico*; giacchè nel primo si possono dare ad $h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2},\ldots, h_p$ tutti i $2^{p-\lambda}$ valori possibili, nel secondo bisogna *eccettuarne i valori nulli.*

Inoltre negli argomenti $c_i+\sigma_i$ dei punti uniti, che son del tipo (8) (n.° 7), la semicaratteristica a secondo membro varia soltanto al variare delle h nelle (10), mentre le g dànno contributo alle parti reali; e tanto basta per concluderne che *i punti uniti considerati si distribuiscono a 2^{p-1} a 2^{p-1} su tante falde di $V_p^{(0)}$, quant'è nelle formule predette il coefficiente di 2^{p-1}.*

Nel caso diasimmetrico queste sono $2^{p-\lambda}$, cioè tutte le falde di $V_p^{(0)}$; invece *nel caso ortosimmetrico rimane esclusa una falda,* ch'è quella avente, nella (8) del n.° 7, la stessa semicaratteristica delle costanti c_i della ϑ.

Analogamente si prova che per un punto unito reale d'una T reale, passano $2^{p-1}\cdot 2^{p-\lambda}$, o risp. $2^{p-1}(2^{p-\lambda}-1)$ ϑ *reali*, ecc.

Se $p=2$ le formule ottenute esprimono il numero dei punti doppi *reali* della g_2^1 sopra una curva reale di Σ; in perfetto accordo col n.° 8.

14. Il problema dei gruppi semicanonici reali. I. Caso delle curve con rami reali. — Nelle conclusioni predette è quasi interamente contenuta (almeno per le curve con punti reali) la risoluzione d'un interessante problema, segnato dalla magistrale impronta dell'opera kleiniana ([55]). È il problema di determi-

---

([54]) Krazer, Cap. VII, § 1. Questo almeno *quando i moduli sono generali.*

([55]) Cfr. Klein, *Ueber Realitätsverhältnisse* (citata), *Riemann'sche Flächen*, Parte III. La tirannia dello spazio c'impedisce d'illustrare con maggiore ampiezza i molteplici rapporti della questione colla teoria delle ϑ-Riemanniane, e di ricordare al lettore le linee generali dei procedimenti di Klein. Ci riserbiamo però di ritornarvi in altro luogo.

nare il numero ed il comportamento dei *gruppi semicanonici reali*, d'una *curva reale* C di genere p (gruppi Γ_{p-1} di $p-1$ punti, che contati due volte son gruppi canonici), cioè *il numero degli* S_{p-1} *reali* $p-1$ *tangenti della curva canonica* (reale) C_{2p-2} di S_{p-1} (bitangenti della quartica piana, piani tritangenti della sestica sghemba di genere 4, ecc.) e la *distribuzione dei loro contatti* sui rami di C.

Per precisare nei riguardi di quest'ultimo punto la posizione del problema, indichiamo con μ (>0) il numero dei rami di C, e riuniamo in una stessa *classe* tutti i gruppi di $p-1$ punti, G_{p-1}, reali, i cui *punti reali* son distribuiti con *data parità* sui rami di C.

Otterremo tante classi quant'è il numero dei simboli $[t_1, t_2, \ldots, t_\mu]$ introdotti al n.° 8, cioè $2^{\mu-1}$, oppure $2^{\mu-1}-1$ secondo che μ è minore od eguale a $p+1$. Diremo brevemente con Klein, che tante son le classi *combinatoriamente possibili.*

Ricordiamo ancora dal n.° 8 che il *carattere reale* λ di C vale $p+1-\mu$, e che ad ognuna delle ($2^{p-\lambda}$ o risp. $2^{p-\lambda}-1$) classi predette, corrisponde una falda della $V_{p-1}^{(0)}$ imagine reale dei G_{p-1} di C.

Sia $W_p^{(0)}$ la *varietà di Jacobi imagine reale delle serie lineari d'ordine* p *di* C. Ai punti d'una varietà ϑ di $W_p^{(0)}$ corrispondono su C le serie i cui G_p son contenuti parzialmente in una g_{2p-1}^{p-1} e viceversa; in particolare se la g_{2p-1}^{p-1} risulta dall'aggiungere alla serie canonica un punto *fisso* O, le serie individuate dai G_p che hanno quel punto come fisso ([56]).

Quando O è *reale* lo è anche la varietà ϑ corrispondente, che indicheremo con V; e la T di 1ª specie che muta in sè V è imagine della corrispondenza fra i G_p per O che si ottiene associando due G_p provenienti (aggiungendo O) da due G_{p-1} *mutuamente residui rispetto alla serie canonica.* I punti uniti di T appartenenti a V provengono dunque dai Γ_{p-1} semicanonici, e pertanto il numero di questi gruppi *reali* coincide con quello dei punti uniti *reali* di T appartenenti a V. Si ha dunque, in base al n.° precedente (e posto $\lambda = p+1-\mu$) la conclusione:

Il numero dei gruppi semicanonici reali appartenenti ad una curva reale C, *di genere* p, *con* $\mu > 0$ *rami reali, è* $2^{p-1} \cdot 2^{\mu-1}$ *nel caso diasimmetrico* $2^{p-1}(2^{\mu-1}-1)$ *nel caso ortosimmetrico.*

Si vede poi subito che due Γ_{p-1} di classi diverse, aggregati ad O, dànno due G_p pure di classi diverse, cioè corrispondenti (n.° 8) a punti di falde

([56]) Cfr. la mia Nota, *Sulle trasformazioni Hermitiane delle varietà di Jacobi.* [Atti Accad. Torino, vol. 50 (1914-15), pp. 439-455] ed il Cap. IX del Krazer.

diverse di $W_p^{(0)}$, e viceversa: sicchè la distribuzione dei Γ_{p-1} in classi, corrisponde a quella dei punti uniti reali di T sulle falde di $W_p^{(0)}$. Sussiste quindi il teorema:

Una classe combinatoriamente possibile, che contenga gruppi semicanonici reali, ne contiene 2^{p-1}. *Nel caso diasimmetrico e nel caso ortosimmetrico massimo* $(\lambda = 0)$ *ciò si verifica per tutte le classi: negli altri casi ortosimmetrici una classe rimane esclusa.*

È questa la classe corrispondente al simbolo $[1, 1,..., 1]$ cioè quella degli S_{p-1} aventi *un numero dispari di contatti con tutti i rami di* C_{2p-2}. Ci limitiamo ad ennnciarlo senza dimostrazione, riservandoci di tornare in altro luogo sull'argomento ([57]).

15. **Il problema dei gruppi semicanonici reali. II. Caso delle curve senza punti reali.** — La discussione di questo problema ci condurrà anche a precisare il *carattere delle tabelle normali corrispondenti alle curve prive di punti reali,* a complemento di quel che si è già detto al n.° 8 (cfr. il n.° 12, III).

Riprendiamo, dal n.° 8, la considerazione delle $W_q^{(0)}$ imagini reali delle serie lineari d'ordine $q \geq p$ d'una curva reale C, che, come si è osservato sono altrettanti *modelli reali* della V_p di JACOBI relativa a C; e mostriamo che *se C non ha rami reali due modelli siffatti, corrispondenti a valori di q aventi diversa parità possono esser distinti di fronte alle trasformazioni birazionali reali.*

Difatti, sia $u_1, u_2,..., u_p$ un sistema d'integrali *reali e normali* di C; e ricordiamo che, fissata l'origine delle integrazioni, le equazioni del *coniugio* di C saranno del tipo $u'_r \equiv \overline{u}_r + \gamma_r$, colle γ_r congrue a numeri imaginarî puri j_r più un semiperiodo reale σ_r (n.° 6). Dette U_r le somme degli u_r nei gruppi G_{p+h} di C (che sono integrali di 1ª specie di V_p), la trasformazione indotta fra le serie lineari d'ordine $p+h$ dal coniugio di C, ha per corrispondente su V_p la simmetria $U'_r \equiv \overline{U}_r + (p+h)\gamma_r$ dalla quale proviene il modello $W_{p+h}^{(0)}$ (su cui quella simmetria è il coniugio, e gli U_r sòn reali e normali). Ora, *se $p+h$ è pari,* si ha $(p+h)\sigma_r \equiv 0$, quindi quella simmetria è $U'_r \equiv \overline{U}_r + (p+h)j_r$, cioè (n.° 6) è *della stessa classe di* $U'_r \equiv \overline{U}_r$, mentre

---

([57]) La classe corrispondente al simbolo $[1, 1,..., 1]$ va esclusa anche nel caso ortosimmetrico massimo, ma allora non è, nel nostro senso, *combinatoriamente possibile,* perchè $t_1 + t_2 + ... + t_\mu > p - 1$. Nel confronto col numero precedente si tenga presente che se $\mu = p+1$, V ha *una falda di meno di* $W_p^{(0)}$, di guisa che i punti uniti reali di T appartenenti a V sono esclusi da una falda di $W_p^{(0)}$.

se $p+h$ *è dispari* si ha $(p+h)\sigma_r \equiv \sigma_r$, quindi quella simmetria non è della classe di $U'_r \equiv \overline{U}_r$, almeno quando $\sigma_r \neq 0$ ([58]).

Torniamo ora al nostro problema, esaminando separatamente i due casi del genere pari e dispari.

a) GENERE p PARI. Sappiamo già (n.° 8) che $\lambda = p$, ed allora nell'espressione di γ_r manca (n.° 6) il semiperiodo σ_r. Inoltre essendo $p-1$ dispari, *non vi sono* Γ_{p-1} *reali.*

Detta O l'origine delle integrazioni, e, come prima, V la varietà ϑ corrispondente ai G_p col punto fisso O, se associamo due punti di V quando provengono da due G_p ottenuti aggregando ad O due G_{p-1} *coniugati*, otteniamo su V una simmetria rappresentata dalle equazioni $U'_r \equiv \overline{U}_r + (p-1)j_r$, che si può estendere a tutta la V_p ([59]). Tale simmetria è *della classe di* $U'_r \equiv \overline{U}_r$ sicchè il modello reale $V_p^{(0)}$ corrispondente (essendo $\lambda = p$) ha *una falda*; e su di esso la V è reale. Se $V_p^{(0)}$ fosse di tipo diasimmetrico la V conterrebbe 2^{p-1} punti uniti della corrispondente T (n.° 13) e quindi esisterebbero altrettanti Γ_{p-1} reali. Ma ciò è assurdo, dunque $V_p^{(0)}$ e quindi (anche) *la tabella normale relativa a C ha carattere ortosimmetrico.*

b) GENERE p DISPARI. Consideriamo su C le serie lineari d'ordine $p+1$, g_{p+1}, che in generale hanno la dimensione 1, e tra esse quelle *reali*, alle quali corrispondono i punti reali di $W_{p+1}^{(0)}$. Il coniugio subordina tra i loro elementi un'*antiproiettività involutoria*, che *a priori* (essendo *dispari* la dimensione dell'ente) può avere o no elementi uniti ([60]); quindi *a priori* tali g_{p+1} reali possono essere di due tipi nettamente distinti e non deducibili uno dall'altro per continuità. Dunque $W_{p+1}^{(0)}$ *ha una o due falde* (una ne ha certo in corrispondenza alle g_{p+1} individuate dai G_{p+1} reali).

Proviamo che non può verificarsi il primo caso. Difatti essendo $W_{p+1}^{(0)}$ un modello reale di V_p con punti reali, sarebbe (n.i 7, 8) $\lambda = p$ e quindi il coniugio di C avrebbe le equazioni $u'_r \equiv \overline{u}_r + j_r$. Ma allora i gruppi di p punti corrispondenti alle somme $U_h \equiv r_h + \frac{p}{2} j_h$ (r_h numero reale arbitrario) sarebbero reali, il che è assurdo perchè p è dispari. Dunque $W_{p+1}^{(0)}$ *ha due falde* e $\lambda = p-1$.

([58]) Se C ha punti reali la questione non si presenta perchè, avendo il coniugio punti uniti, è $\sigma_r = 0$, anzi si può addirittura supporre $\gamma_r = 0$, scegliendo come origine un punto reale.

([59]) Le U_r son somme relative a gruppi di p punti di C.

([60]) SEGRE, *Le rappresentazioni reali delle forme complesse*, ecc. [Math. Ann., vol. 40 (1892), pp. 413-467] pag. 431-32.

Sulla $W_{p+1}^{(0)}$ consideriamo la ϑ *reale* corrispondente alle g_{p+1} individuate dai G_{p+1} con due punti fissi A, B imaginarî coniugati. Essa ha *una sola falda* perchè le g_{p+1} reali che contengono la coppia A, B appartengono tutte al primo dei tipi sopra considerate, in quanto la serie residua è una g_{p-1} reale che in generale riducesi ad *un solo gruppo* reale.

Se la $W_{p+1}^{(0)}$ fosse di tipo diasimmetrico la varietà ϑ predetta conterrebbe $2 \cdot 2^{p-1}$ punti uniti della relativa T, divisi in due gruppi, ciascuno di 2^{p-1} punti, appartenenti alle due falde di $W_{p+1}^{(0)}$ e quindi avrebbe anch'essa due falde. Dunque la $W_{p+1}^{(0)}$ (cioè la tabella normale relativa a C) è di tipo ortosimmetrico, ed allora il numero dei punti uniti di T, che, come si vede subito dà ancora il numero dei gruppi semicanonici reali, è 2^{p-1}. In conclusione:

Una curva reale C, di genere p, priva di punti reali, ha carattere reale $\lambda = p$ o $p - 1$ secondo che p è pari o dispari, e matrice normale ortosimmetrica ([61]). *Il numero dei suoi gruppi semicanonici reali vale rispettivamente 0 o 2^{p-1}.*

Pertanto *anche in questo caso ognuna delle classi combinatoriamente possibili, contiene 2^{p-1} gruppi semicanonici reali.*

§ 5. Il caso critico nella classificazione delle superficie di Jacobi e delle curve di genere 2 reali.

16. **Posizione del problema e programma della discussione.** — Dalle conclusioni del n.° precedente, e del n.° 8, risulta che data una matrice normale di tipo reale, corrispondente ad una curva reale C ([62]), è perfettamente determinato, dagli elementi caratteristici fin quì considerati, il numero dei rami reali di C ed il suo carattere diasimmetrico od ortosimmetrico, fatta eccezione per le *matrici ortosimmetriche di carattere reale* $\lambda = p$ o $p - 1$ (secondo che p è pari o dispari) a cui possono corrispondere sia curve con $p + 1 - \lambda$ (cioè risp. *uno* o *due*) rami reali, sia curve prive di rami reali.

([61]) Se la distinzione fra curve di tipo diasimmetrico ed ortosimmetrico, si basa, con KLEIN, sul noto carattere topologico delle corrispondenti superficie di RIEMANN, le curve prive di rami reali son tutte di *tipo diasimmetrico.*

([62]) La matrice normale si suppone in ogni caso determinata partendo dalla relazione di RIEMANN di cui si parla al n.° 12, III, per modo da eliminare ogni ambiguità anche nel caso delle *curve singolari.* Quest'ipotesi è implicita nelle considerazioni dei due numeri precedenti.

Nasce quindi il problema di distinguere i due casi, sempre in base ad elementi dedotti dalle tabelle normali: alla sua discussione, *nel caso del genere due*, è dedicato il presente paragrafo ([63]).

Per precisarne bene la posizione, partiamo da una *matrice normale ortosimmetrica di genere e carattere reale eguali a 2*

$$(1) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & i\tau_{11} & \frac{1}{2}+i\tau_{12} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}+i\tau_{21} & i\tau_{22} \end{vmatrix}, \qquad \Delta > 0 (\tau_{12}=\tau_{21})$$

ed indichiamo con $F^{(0)}$ la *superficie di Jacobi reale, con una falda* ad essa corrispondente.

Intendiamo con ciò, a norma dei numeri 4, 6 (le cui considerazioni si trasportino a tabelle normali) di riferirci al modello (determinato a meno d'una trasformazione birazionale reale) corrispondente alla simmetria $u'_i \equiv \bar{u}_i$ (o ad un'altra della sua classe); mentre il modello $F_1^{(0)}$ corrispondente alla simmetria $u'_i \equiv -u_i$ (per cui gl'integrali normali della (1) *non sono reali*) si associerà alla *matrice complementare* della (1).

La superficie $F^{(0)}$ contiene, entro al sistema Σ, delle curve $C^{(0)}$ (di genere 2) *reali*, che, a norma delle (8 *o*) (n.° 14) son quelle corrispondenti a valori *reali* dei parametri c_i delle ϑ. Esse hanno come tabella normale la stessa (1), e quindi (n.° 8) possono avere *uno* o *zero* rami reali ([64]): però in ogni caso *sono tutte dello stesso tipo*, perchè, come si vede subito, posson dedursi una dall'altra mediante trasformazioni di 2ª specie ($u'_i \equiv u_i + c_i$) *reali*.

La stessa $F^{(0)}$ è poi *l'imagine reale propria*, nel senso del n.° 8, delle coppie di punti d'una sua $C^{(0)}$. Per quanto ciò emerga senz'altro dalla rappresentazione trascendente, si può persuadersene per via geometrica, considerando il sistema *reale* ∞^1, Γ costituito dalle curve di Σ che passano per un punto *reale* P di $F^{(0)}$, ed associando ad ogni coppia di punti di $C^{(0)}$ l'ulteriore intersezione delle due curve di Γ da essi determinate.

([63]) Per $p=1$ il problema non ha senso giacchè ad una matrice $|1, i\tau|$ corrispondono tante curve con *due rami*, provenienti dalle simmetrie della classe di $u' \equiv \bar{u}$, quanto curve *prive di rami*, provenienti dalle simmetrie della classe di $u' \equiv \bar{u} + \frac{1}{2}$, giacchè in questo caso la curva coincide colla propria varietà di Jacobi.

([64]) Si noti che, se $C^{(0)}$ non ha punti reali e si assume *un suo punto* come origine delle integrazioni, le equazioni del coniugio non rimangono più $u'_i \equiv \bar{u}_i$.

Viceversa se si parte da una curva reale $C^{(0)}$ di genere 2, avente come matrice normale la (1), cioè (n.[i] 8, 15) da una curva ortosimmetrica con un ramo reale, o da una curva priva di rami reali, l'imagine reale propria $F^{(0)}$ delle sue coppie di punti è del tipo predetto, ha come matrice normale la stessa (1), ecc. In conclusione:

Ad una matrice normale del tipo (1) *possono corrispondere superficie di Jacobi $F^{(0)}$ reali, con una falda, e curve reali $C^{(0)}$ di genere 2 d'uno dei due tipi seguenti:*

a) *Superficie su cui tutte le $C^{(0)}$ reali hanno un ramo reale;* lo diremo il caso ***propriamente ortosimmetrico;***

b) *Superficie su cui tutte le $C^{(0)}$ reali son prive di rami reali;* lo diremo il caso ***impropriamente ortosimmetrico.***

Per stabilire in base alla tabella (1) la distinzione fra i due casi, partiremo dall'osservazione, fatta al n.° 8, che *due curve $C^{(0)}$, $C_1^{(0)}$ corrispondenti a matrici* (1) *complementari, e le relative superficie di Jacobi $F^{(0)}$, $F_1^{(0)}$ appartengono l'una al tipo* a), *l'altra al tipo* b).

Questa osservazione fa intravedere l'esistenza di un rapporto fra il tipo della $C^{(0)}$ e della $F^{(0)}$, ed il *determinante* $\Delta = \tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2$ della (1) (che per la condizione del n.° 12, IV è *positivo*) appena si ricordi la relazione $16\Delta\Delta_1 = 1$ che intercede fra i determinanti di due matrici complementari (n.° 4 e n.° 12 V), dalla quale si deduce che ai valori di Δ (o di Δ_1) $> \frac{1}{4}$ corrispondono i valori di Δ_1 (o di Δ) $< \frac{1}{4}$. E la previsione, è come vedremo, confermata dal seguente teorema:

I casi propriamente ed impropriamente ortosimmetrico corrispondono rispettivamente a $\Delta < \frac{1}{4}$ ed a $\Delta > \frac{1}{4}$. Nel caso di transizione $\Delta = \frac{1}{4}$ le due superficie $F^{(0)}$, $F_1^{(0)}$ coincidono (si equivalgono per trasformazioni reali) *e la curva $C^{(0)}$ si spezza in due curve ellittiche imaginarie coniugate* (unisecantisi).

Ecco infine una breve visione d'assieme delle fasi attraverso cui passerà la nostra discussione, a titolo di *programma dei numeri seguenti:*

I) Date due matrici (1) entrambe con $\Delta > \frac{1}{4}$ $\left(o < \frac{1}{4}\right)$ si può passare con continuità dall'una all'altra senza che cessi d'esser verificata la condizione ($\Delta > 0$) d'esistenza della $F^{(0)}$, e senza che la curva del sistema Σ (corrispondente alla relazione normale) si spezzi, giacchè tale spezzamento può verificarsi solo per $\Delta = \frac{1}{4}$. Poichè durante tal variazione le curve reali di $C^{(0)}$ non possono cambiar tipo, ne segue che non cambia neppure quello della superficie $F^{(0)}$, e quindi che i due tipi *a), b)* corrispondono l'uno a $\Delta > \frac{1}{4}$, l'altro a $\Delta < \frac{1}{4}$.

II) Se $\Delta = \frac{1}{4}$ la superficie di JACOBI corrispondente alla (1) *è singolare* ed ammette una trasformazione birazionale *singolare* che muta l'una nell'altra le due simmetrie $u'_i \equiv \bar{u}_i$, $u'_i \equiv -\bar{u}_i$; quindi $F^{(0)}$ ed $F_1^{(0)}$ sono equivalenti per trasformazioni reali. Inoltre le curve C di Σ si spezzano in due curve ellittiche unisecantisi, che, quando C è reale (cioè è una $C^{(0)}$) sono imaginarie coniugate; viceversa ad ogni superficie $F^{(0)}$ delle coppie di punti di due curve ellittiche imaginarie coniugate, corrisponde una matrice (1) con $\Delta = \frac{1}{4}$.

III) Il caso impropriamente ortosimmetrico corrisponde a $\Delta > \frac{1}{4}$, e quindi il caso propriamente ortosimmetrico a $\Delta < \frac{1}{4}$.

17. I) **Separazione dei due tipi in base alle disuguaglianze** $\Delta \gtrless \frac{1}{4}$. — Supposto, com'è lecito (cfr. la nota ([48])) $\tau_{11} > 0$, poniamo $\tau_{11} = \sqrt{2}x$, $\tau_{22} = \sqrt{2}y$, $\tau_{12} = \tau_{21} = z$, ed interpretiamo le x, y, z come coordinate ortogonali di punto in S_3. Allora le due equazioni $\Delta = 0$, $\Delta = \frac{1}{4}$ divengono

$$z^2 - 2xy = 0, \quad z^2 - 2xy = -\frac{1}{4}, \tag{2}$$

e rappresentano la prima il *cono rotondo* Γ generato dalla rotazione degli assi x, y intorno alla loro bisettrice $x = y$, l'altra *l'iperboloide a due falde rotondo* J coassiale, generato dall'iperbole $8xy = 1$ ($z = 0$), del quale Γ è il *cono asintotico.*

Ad ogni punto del semispazio $x > 0$ ($\tau_{11} > 0$) *interno al cono* Γ ($\Delta > 0$), cioè alla *falda* Γ_0 di Γ generata dai *semiassi positivi* x, y, resta così associata una tabella (1) soddisfacente alla condizione d'esistenza $\Delta > 0$, quindi una superficie $F^{(0)}$: viceversa ad una tal superficie corrisponde un sistema di punti (provenienti dalle tabelle *equivalenti* alla (1) nel senso della nota ([42])) interni a Γ_0 e giacenti tutti (per l'invarianza di Δ) sulla stessa falda dell'iperboloide $z^2 - 2xy = \Delta$.

I punti per cui (oltre a $\tau_{11} > 0$ e $\Delta > 0$) si ha $\Delta > \frac{1}{4}$ sono interni alla falda J_0 di J giacente nel semispazio $x > 0$, ed i punti per cui $\Delta < \frac{1}{4}$ sono compresi fra J_0 e Γ_0, cioè sono esterni ad J_0 ed interni a Γ_0 (Fig. 1). Le due regioni così associate a $\Delta > \frac{1}{4}$ e $\Delta < \frac{1}{4}$ sono *connesse*, e tanto basta per confermare che *il passaggio continuo di cui in* I) *è compatibile colla condizione d'esistenza di* $F^{(0)}$.

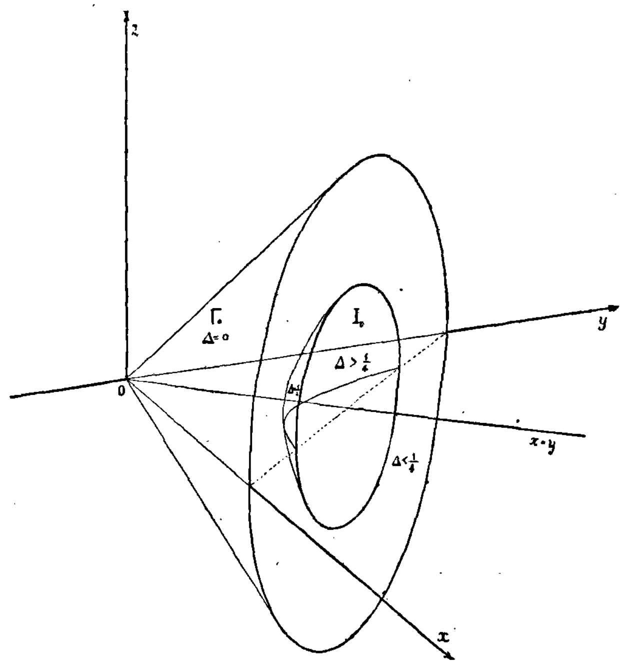

Fig. 1.

Rimane da provare che *per* Δ *diverso da* $\frac{1}{4}$ *la curva di* Σ *non può mai spezzarsi.* Un tale spezzamento, può, com'è noto, avvenire solo quando Σ *è somma di due fasci ellittici unisecantisi*, cioè *quando i periodi* (1) *soddisfano a due relazioni di divisore zero* la cui somma sia la relazione normale $(13) + (24) = 0$ corrispondente a Σ ([65]).

Siano a_{rs}, a'_{rs} i coefficienti (primi tra di loro) delle due relazioni di divisore 0, e supponiamone scelti i segni in modo che la condizione di dar per somma $(13) + (24) = 0$, si esprima mediante le

$$(3) \quad a_{12} + a'_{12} = a_{14} + a'_{14} = a_{23} + a'_{23} = a_{34} + a'_{34} = 0, \quad a_{13} + a'_{13} = a_{24} + a'_{24} = 1.$$

Scrivendo la prima per i periodi (1), e separando il reale dall'immaginario

---

([65]) BAGNERA-DE FRANCHIS, loc. cit., n.° 9. Vedi anche la mia Memoria: *Sulle superficie di Jacobi semplicemente singolari* [Memorie dei XL (3), vol. 21 (1919)], n.° 2. Si può aggiungere che *l'invariante simultaneo* delle due relazioni (che esprime il numero delle intersezioni tra le curve dei due fasci) deve risultare eguale ad 1: ma ciò non darebbe nulla di nuovo perchè tal condizione *è conseguenza* delle precedenti.

troviamo

$$(4) \qquad 2a_{12} + a_{13} + a_{42} - 2a_{34}D = 0 \qquad \left(D = \Delta + \frac{1}{4}\right)$$

$$(4') \qquad a_{14}\tau_{22} + a_{32}\tau_{11} + (a_{13} + a_{42} + a_{43})\tau_{12} = 0;$$

poi, esprimendo che le due relazioni hanno il divisore 0, e tenendo conto delle (3), otteniamo

$$(5) \qquad a_{12}a_{43} + a_{13}a_{24} + a_{14}a_{32} = 0, \quad a_{13} + a_{24} = 1.$$

Perchè la (4') sia compatibile colla condizione d'esistenza $\Delta > 0$, occorre che *il piano uscente dall'origine* rappresentato dalla (4'), in cui, come prima, si ponga $\tau_{11} = \sqrt{2}\cdot x$, $\tau_{22} = \sqrt{2}\cdot y$, $\tau_{12} = \tau_{21} = z$, sia *secante* rispetto al cono Γ, il che porta alla condizione

$$(6) \qquad (a_{13} + a_{42} + a_{43})^2 - 4a_{14}a_{32} > 0,$$

dalla quale, mediante le (4), (5) con qualche elaborazione si ricava

$$(7) \qquad 2a_{34}^2 D < 1 + a_{34}^2.$$

Ora non può essere $a_{34} = 0$, perchè dalla (4) e dalla seconda delle (5) si ricaverebbe $2(a_{12} + a_{13}) = 1$, ch'è evidentemente assurda; inoltre il primo membro della (7) è *intero* perchè lo sono a_{34} e (per la (4)) $2a_{34}D$. Se fosse $D > \frac{1}{2}$ quel primo membro risulterebbe maggiore di a_{34}^2, quindi almeno eguale ad $1 + a_{34}^2$ in contraddizione colla (7) stessa. Dunque $D \leq \frac{1}{2}$, cioè $\Delta \leq \frac{1}{4}$.

Ragionando allo stesso modo sulla *matrice complementare* della (1) *che si trova in analoghe condizioni,* si ricava $\Delta_1 \leq \frac{1}{4}$, e siccome $16\Delta\Delta_1 = 1$, così $\Delta \geq \frac{1}{4}$.

Si conclude in definitiva che lo spezzamento considerato può avvenire solo quando $\Delta = \frac{1}{4}$, e così resta provata la prima parte del nostro assunto.

18. II) **Il caso di transizione** $\Delta = \frac{1}{4}$. — Dimostriamo anzitutto che in questo caso *le due supeficie* $F^{(0)}$, $F_1^{(0)}$ *sono equivalenti per trasformazioni reali,* e quindi che alle due simmetrie $u'_i \equiv \bar{u}_i$, $u'_i \equiv -\bar{u}_i$ non corrispondono più due classi distinte (nel senso del n. 6) ma *una sola classe reale.*

Perciò passiamo alla *tabella complementare* della (1), sostituendo (n.° 12, V) ai relativi cicli normali M_1, M_2, N_1, N_2 i nuovi cicli

(8) $$P_1 = M_1 - 2N_2, \quad P_2 = M_2 - 2N_1; \quad Q_1 = M_2 - N_1, \quad Q_2 = M_1 - N_2,$$

ed agl'integrali normali u_1, u_2 i nuovi integrali normali

(9) $$v_1 = \frac{i}{2}(\tau'_{12}u_1 + \tau'_{22}u_2), \quad v_2 = \frac{i}{2}(\tau'_{11}u_1 + \tau'_{21}u_2),$$

dove le $\tau'_{r,s}$ son gli elementi reciproci delle $\tau_{r,s}$. Tenendo conto delle relative espressioni mediante le $\tau_{r,s}$ e di $\Delta = \frac{1}{4}$, troviamo facilmente che la matrice cercata è

(1, *c*) $$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & i\tau_{11} & \frac{1}{2} - i\tau_{21} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} - i\tau_{12} & i\tau_{22} \end{Vmatrix}.$$

Ora da questa si può passare alla (1) non soltanto mediante l'operazione inversa di quella che ci vi ha condotti, ma anche sostituendo ai relativi cicli P_1, P_2, Q_1, Q_2, i cicli, $-P_1$, P_2, $-Q_1 + P_2$, $Q_2 - P_1$ e quindi agli integrali normali v_1, v_2 i nuovi integrali $V_1 = -v_1$, $V_2 = v_2$ ([66]). Poichè *gli* u_1, u_2 *son reali su* $F^{(0)}$ *e i* V_1, V_2 (come i v_1, v_2) *su* $F_1^{(0)}$, e le matrici corrispondenti sono ora *identiche*, ne segue che se si associa ad ogni punto (u_1, u_2) di $F^{(0)}$, il punto (V_1, V_2) di $F_1^{(0)}$ dove $V_1 = u_1$, $V_2 = u_2$, si ha una *trasformazione birazionale reale che muta* $F^{(0)}$ *in* $F_1^{(0)}$.

E ciò, tenuto conto delle espressioni di V_1, V_2, val quanto dire che le formule

(10) $$\begin{aligned} u'_1 &\equiv 2i(\tau_{21}u_1 - \tau_{11}u_2) \\ u'_2 &\equiv 2i(\tau_{22}u_1 - \tau_{12}u_2), \end{aligned}$$

rappresentano, sulla superficie di JACOBI F di cui F^0 ed $F_1^{(0)}$ son modelli reali, una *trasformazione birazionale singolare* che muta una nell'altra le due simmetrie $u'_i \equiv \overline{u}_i$, $u'_i \equiv -\overline{u}_i$, come del resto si verifica direttamente.

La superficie F è dunque singolare; e difatti i periodi (1), oltre che dalla relazione normale $(13) + (24) = 0$ son legati anche dalla $\Delta = \frac{1}{4}$ che può

([66]) È questa una *trasformazione dei periodi normali* che rispetta la condizione (*a*) della nota ([42]) cioè *conserva la realtà degl'integrali normali*. Diremo perciò che le matrici normali (1) (1, *c*) sono *equivalenti nel campo reale*.

scriversi

$$(13)+(42)+2\cdot(34)=0, \tag{11}$$

e quindi da *tutte le relazioni del fascio*

$$(\lambda+\mu)(13)+(\lambda-\mu)(24)+2\mu(34)=0, \tag{12}$$

il cui *divisore* è $\lambda^2-\mu^2$. Per $\lambda=\pm\mu$ si hanno quindi le *due relazioni di divisore zero*

$$(13)+(34)=0, \quad (24)-(34)=0, \tag{13}$$

la cui somma è la relazione normale $(13)+(24)=0$, che son richieste (n.° prec.) per lo spezzamento di Σ. Poichè le (13) con ovvio significato dei simboli, possono scriversi

$$(1-4\cdot 3)=0, \quad (2-3\cdot 4)=0,$$

così se, indicando con $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ periodi ai cicli normali della (1), passiamo a nuovi periodi primitivi (cioè a nuovi cicli) Ω_i ponendo

$$\Omega_1=\omega_1-\omega_4, \quad \Omega_2=\omega_3, \quad \Omega_3=\omega_4, \quad \Omega_4=\omega_2-\omega_3, \tag{14}$$

le (13) (riferite ai nuovi cicli) divengono

$$(12)=0, \quad (34)=0. \tag{15}$$

La tabella dei nuovi periodi degli integrali normali u_1, u_2 è

$$\left|\begin{matrix} \frac{1}{2}-i\tau_{12} & i\tau_{11} & \frac{1}{2}+i\tau_{12} & -i\tau_{11} \\ -i\tau_{22} & \frac{1}{2}+i\tau_{21} & i\tau_{22} & \frac{1}{2}-i\tau_{21} \end{matrix}\right|, \tag{16}$$

ed i *due integrali ellittici* v_1, v_2 si ottengono combinando linearmente u_1, u_2 in modo che, com'è possibile in forza delle (15), si annullino i due periodi Ω_1, Ω_2 oppure Ω_3, Ω_4, cioè ponendo

$$\begin{aligned} v_1 &= i\tau_{22}u_1-\left(\frac{1}{2}+i\tau_{12}\right)u_2 \\ v_2 &= -i\tau_{22}u_1-\left(\frac{1}{2}-i\tau_{12}\right)u_2 . \end{aligned} \tag{17}$$

Allora, al posto della (16) si ottiene la tabella

$$(18)\qquad \left|\begin{matrix} i\tau_{22} & -\frac{1}{2}-i\tau_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i\tau_{22} & -\frac{1}{2}+i\tau_{12} \end{matrix}\right|,$$

ed inoltre le equazioni del coniugio di $F^{(0)}$, da $u'_i \equiv \bar{u}_i$ divengono

$$(19)\qquad v'_1 \equiv \bar{v}_2, \quad v'_2 \equiv \bar{v}_1,$$

il che mostra che $F^{(0)}$ (ed $F_1^{(0)}$) è *la superficie* (imagine propria) *delle coppie di punti di due curve ellittiche imaginarie coniugate.*

Viceversa siano C_1, C_2 due curve ellittiche imaginarie coniugate, v_1 un integrale di 1ª specie di C_1 coi periodi $a+ib$, $c+id$ ai cicli primitivi A_1, B_1, v_2 l'integrale *coniugato* di C_2, coi periodi $a-ib$, $c-id$ ai cicli A_2, B_2 *coniugati* di A_1, B_1. La superficie di Jacobi $F^{(0)}$ imagine propria delle coppie di punti delle due curve (ch'è *reale*) corrisponderà alla tabella

$$(20)\qquad \left|\begin{matrix} a+ib & c+id & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-ib & c-id \end{matrix}\right|,$$

ed avrà come equazioni del coniugio le (19).

Passiamo ora ad *integrali reali* w_1, w_2 ponendo

$$(21)\qquad w_1 = v_1 + v_2, \quad w_2 = i(v_2 - v_1),$$

e rendiamo *reali i cicli del primo gruppo,* sostituendo agli A_i, B_i (così continuiamo ad indicare anche i cicli della superficie di Jacobi, a cui son relativi i periodi (20)) i nuovi cicli

$$(22)\qquad M_1 = A_1 + A_2, \quad M_2 = B_1 + B_2, \quad N_1 = B_2, \quad N_2 = A_1,$$

che, per effetto del coniugio subiscono la sostituzione (IX o) del n.° 12 I ($p=\lambda=2$). Si trova subito che i nuovi periodi di w_1, w_2 sono

$$(23)\qquad \left|\begin{matrix} 2a & 2c & c-id & a+ib \\ 2b & 2d & d+ic & b-ia \end{matrix}\right|,$$

e non resta che *normalizzare gl'integrali reali,* rispetto ai cicli M_1, M_2, cioè porre

$$(24)\qquad \begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2D}(dw_1 - cw_2) \\ u_2 &= -\frac{1}{2D}(bw_1 - aw_2), \end{aligned} \qquad D = (ad - bc),$$

per ottenere in definitiva la tabella

$$(25)\qquad \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & -i\dfrac{c^2+d^2}{2D} & \dfrac{1}{2}+i\dfrac{bd+ac}{2D} \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{2}+i\dfrac{bd+ac}{2D} & -i\dfrac{a^2+b^2}{2D} \end{matrix} \right\|$$

ch'è *normale, ortosimmetrica, con* $\lambda = 2$ *e* $\Delta = \frac{1}{4}$.

Dalle considerazioni esposte risulta che una coppia di curve ellittiche imaginarie coniugate rappresenta un *tipo di transizione* fra la curva reale di genere 2 ortosimmetrica con un ramo, e la curva reale di genere 2 senza rami reali. Si può rendersene conto tanto per *via topologica*, quanto per *via algebrica*; ma i limiti di questo scritto non ci consentono tal digressione.

19. Identificazione del tipo corrispondente a $\Delta > \frac{1}{4}$. — In quest'ultima parte della discussione ci riferiremo a *periodi pseudonormali*, e costruiremo curve di genere 2 *prive di rami reali* sulle quali $|\Delta|$ ha un valore arbitrariamente grande. Ricordando che da una matrice normale si ottiene subito una matrice pseudonormale (n.° 12, I) collo stesso $|\Delta|$ e che per quest'ultime $|\Delta|$ è invariante (n.° 3) ne dedurremo che *il caso impropriamente ortosimmetrico corrisponde a* $\Delta > \frac{1}{4}$.

Consideriamo la curva Γ di genere 2, *priva di rami reali*, rappresentata dall'equazione

$$(26)\qquad w^2 = (z^2 + a^2)f(z),$$

nella quale a è un numero reale (positivo), ed $f(z)$ un polinomio di 4° grado a coefficienti reali, e radici complesse coniugate $\alpha, \bar\alpha, \beta, \bar\beta$, *negativo per tutti i valori reali di* z.

Segnati sul piano complesso $z = x + iy$ i 6 punti di diramazione $+ia$, $-ia$, α, $\bar\alpha$, β, $\bar\beta$ della funzione w, tagliamo il piano stesso lungo i tre segmenti paralleli all'asse y che li congiungono, e sovrapponendolo ad un secondo piano tagliato allo stesso modo, costruiamo la *superficie di Riemann R* relativa a Γ, riunendo i bordi opposti di due tagli appartenenti a piani diversi (Fig. 2).

Da facili considerazioni aiutate dalla figura, risulta subito che:

a) Al coniugio di Γ corrisponde su R la *simmetria* S nella quale sono omologhi due punti *di fogli diversi* simmetrici rispetto all'asse x ([67]);

b) I cicli A_1, A_2 della figura son mutati in sè da S, cioè son *reali*; invece i cicli B_1, B_2 son trasformati rispettivamente in $A_1 - B_1$, $A_2 - B_2$. Pertanto, a norma della (II) (n.° 2), e tenuto conto che $p = \lambda = 2$, si conclude che *i cicli* A_1, A_2, B_1, B_2 *sono pseudonormali*; sicchè la relativa tabella dei periodi dei due *integrali di 1ª specie reali* di Γ

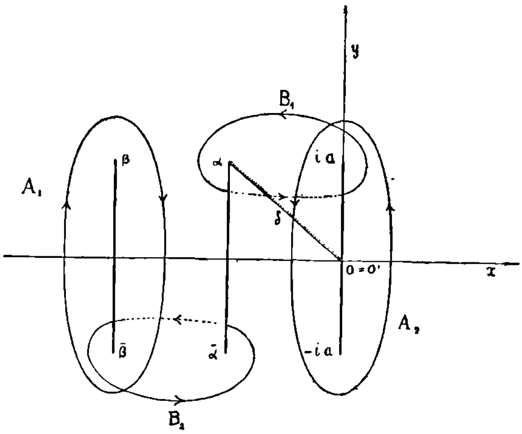

Fig. 2.

$$u = \int \frac{z\,dz}{w}, \quad v = \int \frac{dz}{w}, \tag{27}$$

sarà del tipo

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \frac{1}{2} a_{11} + i b_{11} & \frac{1}{2} a_{12} + i b_{12} \\ a_{21} & a_{22} & \frac{1}{2} a_{21} + i b_{21} & \frac{1}{2} a_{22} + i b_{22} \end{matrix} \right\|, \tag{28}$$

ed il *determinante* Δ *della matrice pseudonormale* corrispondente ai cicli A_i, B_i, che si deduce dalla (28) *normalizzando gl'integrali reali* rispetto ai cicli A_1, A_2, risulterà eguale a $\| b_{rs} \| : \| a_{rs} \|$.

Facciamo ora tendere a zero il numero reale a. Al limite *la curva* Γ *degenera nella curva ellittica* Γ' *priva di rami reali*

$$w^2 = z^2 f(z), \tag{29}$$

([67]) Invece la simmetria S_1 nella quale si corrispondono due punti *dello stesso foglio* simmetrici rispetto all'asse x, ch'è il prodotto di S per la g_2^1, corrisponde (n.° 8) al coniugio della curva $w^2 = -(z^2 + a^2) f(z)$ (*complementare* di Γ) che ha *un ramo reale* rappresentato su R dal circuito avente sede lungo l'asse x.

la cui equazione, posto $\eta = \dfrac{w}{z}$ può scriversi

$$\eta^2 = f(z), \tag{30}$$

e i due integrali u, v divengono

$$u' = \int \frac{dz}{\eta}, \quad v' = \int \frac{dz}{z \cdot \eta}, \tag{31}$$

sicchè *u rimane di 1ª specie,* mentre *v diviene di 3ª specie,* e acquista *due singolarità logaritmiche* nei due punti di Γ' corrispondenti a $z = 0$.

Durante la variazione di a il taglio $+ia$, $-ia$ della R si restringe fino a chiudersi; al limite rimane una superficie R' (della curva Γ') coi *due* tagli $\alpha\bar{\alpha}$, $\beta\bar{\beta}$, sulla quale i due punti O, O' sovrapposti nell'origine son da considerarsi come distinti, e sono precisamente i *punti di singolarità logaritmica* dell'integrale v'.

Durante la variazione di R possiamo supporre che i cicli A_1, A_2, B_2 restino invariati; invece il ciclo B_1, per effetto della chiusura del taglio che attraversa si riduce ad un *cammino aperto* δ congiungente i due punti O, O' attraverso al taglio $\alpha\bar{\alpha}$, ed omologo a quello risultante dai due segmenti rettilinei $O\alpha$, $\alpha O'$ percorsi su fogli differenti.

Indichiamo con a'_{rs}, b'_{rs} i valori *limiti* degli a_{rs}, b_{rs}. Intanto a'_{11}, a'_{12}, b'_{11}, b'_{12} son *finiti* perchè u' è di 1ª specie; anzi $a'_{12} = 0$ perchè *su R' il ciclo A_2 è omologo a zero,* mentre b'_{12} è certo *diverso da zero* altrimenti u' avrebbe un solo periodo non nullo a'_{11}. Invece, degli a'_{21}, a'_{22}, b'_{21}, b'_{22} il primo e l'ultimo *son finiti* perchè i cicli A_1, B_2 non circondano nè contengono singolarità logaritmiche di v', e lo è anche a'_{22} che, come *periodo polare di v' relativo alla singolarità logaritmica in O* vale

$$a'_{22} = \frac{2\pi i}{\sqrt{f(0)}} \ \text{[68]}; \tag{32}$$

mentre b'_{21} *è infinito* in quanto esprime il valore di v' lungo il cammino δ congiungente i due punti di singolarità logaritmica OO'. Si ha quindi

$$\lim \| a_{rs} \| = k, \quad \lim \| b_{rs} \| = \infty, \tag{33}$$

---

[68] Si noti che a'_{22}, limite del numero *reale* a_{22}, è reale perchè $f(0)$ è *negativo.* Il segno di $\sqrt{f(0)}$ dipende dalle convenzioni fatte circa la distribuzione dei valori di w sui due fogli di R.

con k finito; e dunque in definitiva

$$\lim \Delta = \infty, \tag{34}$$

cioè per a sufficientemente piccolo $|\Delta| > \frac{1}{4}$, conformemente al nostro proposito.

§ 6. Le varietà di Kummer reali.

20. **Richiami introduttivi.** — La questione che imprendiamo a trattare, e che presentiamo come un primo esempio d'applicazione dei nostri procedimenti a varietà abeliane di rango > 1, per la sua estensione, e per la varietà dei problemi accessorî a cui si collega, domanderebbe, in una trattazione dettagliata, uno sviluppo forse più ampio di quello che non ci sia concesso dai limiti imposti al presente scritto. Ci limiteremo quindi di necessità alle questioni di maggiore rilievo.

Chiameremo ***varietà di Kummer*** la varietà algebrica a p dimensioni K_p, imagine dell'involuzione Γ generata sopra una varietà abeliana V_p di *rango e divisori* 1 (cioè contenente almeno un sistema Σ) da una trasformazione di 1^a specie T, p. es. dalla $u'_i \equiv -u_i$.

Comunemente la denominazione si attribuisce ad un particolare *modello proiettivo* M_p della K_p, che si può costruire, in uno spazio ad $N = 2^p - 1$ dimensioni, ponendone le coordinate omogenee proporzionali a 2^p funzioni ϑ del secondo ordine, *pari*, di p argomenti, scelte opportunamente. L'*ordine* di M_p è $2^{p-1} \cdot p!$; in particolare per $p = 2$ si ha la nota *superficie di Kummer* ([69]).

Ad ogni coppia di punti di V_p coniugati in T corrisponde un punto di M_p; in particolare ai 2^{2p} punti uniti di T corrispondono 2^{2p} *punti singolari di molteplicità* 2^{p-1}, e su K_p altrettante *varietà razionali* H_{p-1} *fondamentali* per la corrispondenza (1, 2) fra K_p e V_p.

La caratteristica del semiperiodo collegato ad un punto unito di T si dirà *caratteristica del punto singolare* (o della H_{p-1}) corrispondente, e servirà anche a denotare il punto stesso.

Al sistema L delle sezioni iperpiane di M_p corrisponde su V_p un *sistema lineare* Λ, di dimensione $2^p - 1$, costituito da *varietà* ϑ *del* 2° *ordine* mutate

---

([69]) Talune delle proprietà quì richiamate si trovano in WIRTINGER, *Ueber eine Verallgemeinerung der Theorie der Kummer'schen Fläche* [Monatsh. für Math. u. Phys., vol. I (1890), pp. 113-128] altre sono facili generalizzazioni di quelle del caso $p = 2$. Per quest'ultime cfr. ENRIQUES-SEVERI, loc. cit., n.i 46-49.

in sè da T, al quale appartengono, come particolari *varietà spezzate*, le coppie di varietà ϑ (del 1° ordine) d'un sistema Σ, corrispondenti in T. Le loro imagini su M_p sono particolari sezioni con *iperpiani tangenti* lungo una M_{p-2} d'ordine $2^{p-3}\cdot p!$, appartenente ad uno spazio di dimensione $N-p-1$; l'inviluppo di tali iperpiani è *duale* della M_p.

Dalle brevi notizie date al n.° 9 sui sistemi di varietà intermediarie si deduce subito che il *sistema lineare* Λ *è completo*; quindi lo è anche L cioè M_p *è normale.*

Quando le due varietà ϑ di Σ corrispondenti in T coincidono, e quindi, se le equazioni di T sono $u'_i \equiv -u_i + c_i$, hanno i parametri $\frac{c_i}{2} + \sigma_i$ (σ_i semiperiodo), l'iperpiano corrispondente *tocca addirittura* M_p *lungo tutta l'intersezione* ch'è dunque una M_{p-1} d'ordine $2^{p-2}\cdot p!$ Si hanno così 2^{2p} *varietà singolari,* ed altrettanti *iperpiani singolari,* a ciascuno dei quali collegheremo la *caratteristica* del corrispondente σ_i.

Per ogni punto singolare passano $2^{p-1}(2^p-1)$ iperpiani singolari, e dualmente.

Le 2^{2p} varietà ϑ predette son trasformate *complessivamente* in sè da $2\cdot 2^{2p}$ trasformazioni ordinarie *involutorie* di V_p che, se la T è $u'_i \equiv -u_i$, hanno le equazioni $u'_i \equiv \pm u_i + \sigma_i$. Alle due trasformazioni di specie diversa provenienti dallo stesso semiperiodo (che sono una il prodotto dell'altra per la T) corrisponde *una stessa omografia* che trasforma in sè la M_p; sicchè M_p *ammette un gruppo di* 2^{2p} *omografie involutorie.*

Fissate ad arbitrio p costanti α_i, si associ ad ogni punto $u_i \equiv p_i$ di V_p la $\vartheta[u-q]=0$, i cui parametri soddisfano alle relazioni $p_i - q_i \equiv \alpha_i$. La corrispondenza così ottenuta, ha, come si vede subito, *carattere involutorio*; la diremo una *polarità abeliana di* V_p *di parametri* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$.

La condizione perchè un punto appartenga alla propria ϑ polare, è $\vartheta[\alpha]=0$, cioè è *indipendente dal punto*; le polarità abeliane sono quindi *polarità uniformi se* $\vartheta[\alpha] \neq 0$, *sistemi nulli se* $\vartheta[\alpha]=0$.

Le trasformazioni di 2ª specie di V_p mutano *ogni* polarità abeliana di V_p in sè stessa; invece le trasformazioni di 1ª specie mutano la polarità di parametri $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p)$ in quella di parametri $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_p)$. Vi sono pertanto 2^{2p} *polarità abeliane mutate in sè stesse da ogni trasformazione di 1ª specie di* V_p, e sono quelle aventi come parametri i 2^{2p} semiperiodi incongrui. In questo caso la condizione $\vartheta[\alpha]=0$, è, come sappiamo, soddisfatta allora e solo che *la caratteristica del semiperiodo* α_i *è dispari:* sicchè *fra le predette polarità* $2^{p-1}(2^p+1)$ *sono uniformi, e* $2^{p-1}(2^p-1)$ *son sistemi nulli.*

A queste polarità corrispondono, nello spazio S_N di M_p, $2^{p-1}(2^p+1)$ *polarità ordinarie* [70] e $2^{p-1}(2^p-1)$ *sistemi nulli che trasformano in sè la* M_p (il luogo nell'inviluppo duale di cui sopra); in particolare mutano i punti singolari negl'iperpiani singolari. Anzi da quanto precede si trae che un punto ed un iperpiano singolare assegnati, si corrispondono in *una sola* fra le predette polarità la cui caratteristica (cioè la caratteristica del corrispondente semiperiodo) è la differenza fra le caratteristiche del punto e dell'iperpiano.

Ogni varietà di KUMMER (in senso proiettivo) M_p, è, come abbiamo visto, collegata ad un sistema Σ della varietà V_p; quindi, se V_p non è singolare, è perfettamente determinata dalla V_p stessa a meno d'un'omografia. Viceversa se due varietà M_p, M'_p collegate rispettivamente ai sistemi Σ, Σ' delle varietà V_p, V'_p sono *omografiche*, si prova senza difficoltà (imitando un ragionamento che richiameremo tra poco) che quelle V_p e quei Σ sono birazionalmente identici: quindi in particolare, che una stessa M_p non può provenire da più coppie (V_p, Σ) birazionalmente distinte.

21. Genesi delle varietà di Kummer reali. — Il problema più generale concernente le varietà di KUMMER reali (in senso invariantivo) è ovviamente quello di classificare tutte le simmetrie che possono esistere sulla K_p. Noi però discuteremo soltanto il *caso più ristretto* delle simmetrie che conducono a *modelli reali del tipo proiettivo di* M_p.

Trasportiamoci addirittura sopra un modello $M_p^{(0)}$ siffatto, o più in generale sopra un suo equivalente proiettivo M_p, e quindi supponiamo che M_p *ammetta un'antiproiettività involutoria* s (imagine del coniugio di $M_p^{(0)}$, cioè) *dotata, in* S_N, *di punti uniti.* Quali condizioni restano con ciò imposte alla V_p, ed alla trasformazione T?

Per rispondere a tale questione, partiamo dall'osservare che la s trasforma in sè stesso il gruppo dei punti singolari di M_p, cioè l'insieme degli *elementi di diramazione* della corrispondenza (1, 2) fra M_p e V_p. Ne deduciamo subito, per il tramite d'un noto ragionamento, che *la simmetria* s *è imagine d'una*

[70] Ci si rende facilmente conto del perchè le *polarità uniformi* di V_p si trasformano in polarità che (in senso complesso) *non sono uniformi.* La condizione perchè un punto P di M_p giaccia sulla sua sezione iperpiana polare, è che il corrispondente P_1 di V_p giaccia sulla ϑ polare, *oppure sulla sua corrispondente in* T. Ora la prima circostanza è impossibile, perchè la polarità di V_p *è uniforme*, ma la seconda si presenta per tutti i punti di V_p i cui parametri soddisfano all'equazione $\vartheta[2u-\alpha]=0$, ai quali corrispondono i punti di M_p *autoconiugati* nella polarità ordinaria considerata.

trasformazione antibirazionale S di V_p in sè permutabile colla T [71], la quale, in forza del carattere antiproiettivo ed involutorio di s, è necessariamente *una simmetria od una trasformazione ciclica di 4° ordine avente per quadrato la T*, che trasforma in sè stesso il sistema Λ di V_p (corrispondente al sistema delle sezioni iperpiane di M_p) e quindi il sistema Σ associato ad M_p.

Si noti che la $S_1 = TS = ST$ è un'altra trasformazione *dello stesso tipo* avente ancora per imagine la s.

Viceversa ad una S di V_p del tipo predetto, corrisponde sopra la M_p associata ad un sistema Σ trasformato in sè da S, un'antiproiettività involutoria s. Poichè la dimensione $N = 2^p - 1$ dello spazio d'appartenenza di M_p *è dispari*, possono darsi due casi:

a) La s è dotata in S_N (in particolare, ma non necessariamente, su M_p) *di punti uniti*, è quindi è riducibile *proiettivamente* al coniugio. Diremo allora che la M_p, in quanto ammette una trasformata proiettiva $M_p^{(0)}$ reale, ***è proiettivamente reale.***

b) La s è priva di punti uniti, ed allora non è riducibile proiettivamente al coniugio. La M_p non ammette trasformate proiettive, ma solo *trasformate birazionali reali*: e si dirà ch'essa ***non è proiettivamente reale*** [72].

In forza della posizione fatta, *solo i tipi proiettivamente reali interessano il nostro problema.*

---

(71) Il « *noto ragionamento* » a cui si allude si basa sulle osservazioni seguenti: Entro alla riemanniana R_{2p} di M_p gli elementi di diramazione predetti (che sulla K_p son le varietà fondamentali H_{p-1}) son rappresentati da 2^{2p} varietà *reali* R_{2p-2}, girando intorno alle quali *si scambiano* i due punti P_1, P_2 di V_p corrispondenti ad un punto P di M_p; e un tale scambio avviene *soltanto in quel caso*, giacchè M_p è regolare, cioè ha *connessione lineare* 1. Se P, Q son due punti di M_p corrispondenti in s, quando P gira intorno ad una delle predette R_{2p-2}, lo stesso accade di Q, ecc.

(72) S'intende che su quelle trasformate reali, il coniugio s' è l'imagine di s. Non si può, almeno *a priori* escludere che queste siano alla loro volta $M_p^{(0)}$, ciò potendo verificarsi se sulla M_p esistono dei sistemi L' aventi le stesse caratteristiche invariantive del sistema L delle sezioni iperpiane, che siano mutati in sè da s. Ed allora si possono fare due ipotesi: α) Il sistema L' è mutato in L da qualche trasformazione birazionale τ di M_p in sè (di sistemi siffatti ne esistono notoriamente sulle M_2) ed allora detta ω la trasformazione birazionale che muta $M_p^{(0)}$ in M_p, la $\omega\tau$ è una *proiettività* fra $M_p^{(0)}$ ed M_p. Le $M_p^{(0)}$, M_p sono dunque omografiche, ma ciò non è in contraddizione con *b*) perchè la $\omega\tau$ non muta più (come ω) s' in s ma in un'antiproiettività σ *dotata di punti uniti*. β) L ed L' son birazionalmente distinti, ed allora $M_p^{(0)}$ corrisponde (nel senso precisato) ad *un'altra coppia* (V_p, Σ) per cui la S corrispondente ad s' soddisfa alle condizioni perchè si verifichi il caso *a*). Rimane però dubbia la possibilità di questo caso.

22. **Tipi provenienti da simmetrie.** — Denotiamo, al solito, con u_i integrali *reali* e *normali* di V_p, e supponiamo che la T sia $u'_i \equiv - u_i$, e la S, $u'_i \equiv \overline{u}_i + c_i$; allora la S_1 sarà $u'_i \equiv - \overline{u}_i + c_i$ ([73]). Più avanti ci converrà talvolta, per avere equazioni più convenienti, ricorrere ad un cambiamento di parametri; in proposito notiamo subito che:

1°) le equazioni $u'_i \equiv - u_i$ sono invarianti per qualunque cambiamento *omogeneo* di parametri;

2°) ai secondi membri delle equazioni di T, S si può aggiungere (o togliere) uno *stesso* sistema di numeri imaginarî puri j_i, trasformando quelle equazioni in $u'_i \equiv - u_i + j_i$, $u'_i \equiv u_i + c_i + j_i$. Basta cambiare i parametri u_i negli $u_i - \frac{1}{2} j_i$;

3°) ai secondi membri delle equazioni di T si può aggiungere (o togliere) un sistema di numeri reali r_i senz'alterare le equazioni di S. Basta cambiare gli u_i in $u_i - \frac{1}{2} r_i$.

Ciò premesso, ricordiamo dal n.° 6 che le costanti c_i d'una simmetria hanno le espressioni

$$c \equiv j + (0, 0, \ldots, g_{\lambda+1}, g_{\lambda+2}, \ldots, g_p), \tag{1}$$

valide anche (n.° 12, I) se gl'integrali son normali. Quì per la *permutabilità* di S con T occorre di più che sia $2c_i \equiv 0$, cioè che le c_i sian *semiperiodi*; sicchè le j_i saranno semiperiodi imaginarî puri. Ora un semiperiodo siffatto è una combinazione lineare dei semiperiodi ai cicli (imaginarî puri) $P_1, P_2, \ldots, P_p$, e quindi, stante le espressioni (n.° 12, V) di questi cicli, si può ridurre, per sottrazione di periodi, ad una somma di semiperiodi ai cicli $M_1, M_2, \ldots, M_\lambda$, $N_{\lambda+1}, N_{\lambda+2}, \ldots, N_p$: sicchè la (1) può scriversi

$$c \equiv (g_1, g_2, \ldots, g_p \,|\, 0, 0, \ldots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \ldots, h_p). \tag{2}$$

Il *criterio direttivo* per la più opportuna classificazione dei tipi in parola, è fornito dall'osservazione seguente:

([73]) S'intende che gli u_i son *reali* rispetto ad S e *normalizzati* in base alla relazione di RIEMANN a cui corrisponde il sistema Σ (reale rispetto ad S) collegato alle sezioni iperpiane di M_p (l'osservazione è superflua se V_p non è singolare). Avendo scelto come T la *particolare* $u'_i \equiv - u_i$ occorre lasciare alla S *tutta la sua generalità*: ma le trasformazioni che riducono S alla forma $u'_i \equiv \overline{u_i} + c_i$ e normalizzano gl'integrali, sono *omogenee*, quindi non alterano le equazioni di T.

I *punti uniti di s*, cioè i *punti reali* del corrispondente modello reale di M_p, provengono o da *punti uniti di S* o da *coppie comuni ad S e T*, cioè da *punti uniti di* S_1; inoltre la S ha punti uniti quando nella (2) si ha $g_{\lambda+1}=g_{\lambda+2}=\ldots=g_p=0$, e la S_1 invece quando $h_{\lambda+1}=h_{\lambda+2}=\ldots=h_p=0$ (n.° 6). In base a questa osservazione tratteremo separatamente i casi seguenti:

I) *Entrambe le simmetrie* S, S_1 *hanno punti uniti* (quindi *i tipi corrispondenti son sempre proiettivamente reali*).

Avendosi $g_{\lambda+1}=g_{\lambda+2}=\ldots=g_p=h_{\lambda+1}=h_{\lambda+2}=\ldots=h_p=0$, la (2) diviene

$$c=(g_1,\ g_2,\ldots,\ g_\lambda,\ 0,\ 0,\ldots,\ 0), \tag{3}$$

e quindi, sottraendo dalle c_h il periodo al ciclo $g_1N_1+g_2N_2+\ldots+g_\lambda N_\lambda$ oppure al ciclo $g_\lambda N_1+g_{\lambda-1}N_2+\ldots+g_1N_\lambda$ secondo che la matrice normale è *diasimmetrica* od *ortosimmetrica*, può scriversi

$$(4)\quad \begin{array}{ll} d) & c_h\equiv -i(g_1\tau_{h1}+g_2\tau_{h2}+\ldots+g_\lambda\tau_{h\lambda}) \\ o) & c_h\equiv -i(g_\lambda\tau_{h1}+g_{\lambda-1}\tau_{h2}+\ldots+g_1\tau_{h\lambda}). \end{array}$$

Le costanti c_h son dunque *imaginarie pure*, e perciò col cambiamento di parametri 2) si posson far sparire dai secondi membri delle equazioni di S, riducendole ad $u'_i\equiv\overline{u}_i$; però le equazioni di T divengono $u'_i\equiv -u_i-c_i$. Ma aggiungendo ora alle c_i il periodo predetto, le costanti dei secondi membri divengono *reali* e quindi si possono far sparire dalle equazioni di T senza alterare quelle di S. In definitiva le equazioni di T, S si son ridotte alle

$$u'_i\equiv -u_i\,;\quad u'_i\equiv\overline{u}_i, \tag{5}$$

quindi $M_p^{(0)}$ *è l'imagine dell'involuzione* Γ *generata dalla trasformazione di 1ª specie* $u'_i\equiv -u_i$ *sulla varietà abeliana reale* $V_p^{(0)}$ *di cui* $u'_i\equiv\overline{u}_i$ *è il coniugio*. Si noti che *la T muta in sè stesse tutte le falde di* $V_p^{(0)}$ (n.° 7) e che gl'integrali u_i son rimasti normali perchè le trasformazioni operate sono pure addizioni di costanti.

Di $M_p^{(0)}$ siffatte se ne hanno, per un dato p, tanti tipi quanti sono i valori di λ, distinguendo per λ pari il caso diasimmetrico da quello ortosimmetrico. In tutto dunque $\left[\dfrac{3p+2}{2}\right]$ *tipi*; in particolare 4 per $p=2$.

II) *Una sola delle due simmetrie* S, S_1 *ha punti uniti* (quindi ancora *i tipi corrispondenti son proiettivamente reali*).

Per il comportamento simmetrico di S, S_1 si può supporre che quella simmetria sia la S, sicchè le c_i son del tipo

(6) $$c \equiv (g_1, g_2, ..., g_\lambda, 0, 0, ..., 0 \mid 0, 0, ..., 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, ..., h_p),$$

con qualcuna delle h *diversa da zero*. Colle stesse trasformazioni del caso precedente, le equazioni di T, S si riducono a

(7) $$u'_i \equiv -u_i + (0, 0, ..., 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, ..., h_p), \quad u'_i \equiv \bar{u}_i,$$

sicchè, *come prima la* T *è reale sulla* $V_p^{(0)}$ *di cui* $u'_i \equiv \bar{u}_i$ *è il coniugio*, ma ora *essa è una di quelle trasformazioni che scambiano fra di loro le falde di* $V_p^{(0)}$. Data l'identità del comportamento di queste trasformazioni ([74]) si ha anche qui un tipo per ogni valore di λ e carattere diasimmetrico od ortosimmetrico, *escluso* $\lambda = p$, in cui le (7) riduconsi alle (5) (e d'altronde $V_p^{(0)}$ ha *una sola falda*), cioè in tutto $\left[\frac{3p-1}{2}\right]$ *tipi*, in particolare 2 per $p = 2$.

III) *Nessuna delle simmetrie* S, S_1 *ha punti uniti.*

Allora le c_i hanno i valori generali (2) con qualcuna delle g e delle h d'indice $> \lambda$ diversa da zero. Con trasformazioni analoghe alle precedenti, le equazioni di T, S possono allora ridursi alla forma

(8) $$\begin{gathered} u'_i \equiv -u_i, \\ u'_i \equiv \bar{u}_i + (0, 0, ..., 0, g_{\lambda+1}, g_{\lambda+2}, ..., g_p \mid 0, 0, ..., 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, ..., h_p). \end{gathered}$$

23. **Separazione dei tipi proiettivamente reali.** — Nell'ultimo caso del n.° precedente la s non ha su M_p punti uniti e quindi *il modello reale corrispondente non ha punti reali*; esso dunque sarà o non sarà *proiettivamente reale* secondo che l'*antiproiettività* s avrà o non avrà in S_N punti uniti. Ci proponiamo di approfondire tal distinzione.

Incominciamo perciò coll'osservare che, in uno spazio S_N *dispari*, un'antiproiettività involutoria s ha o non ha punti uniti, secondo che in un fascio d'iperpiani *unito* esistono o no elementi uniti. Difatti nell'ipotesi negativa i punti uniti di s potrebbero esistere soltanto nello S_{N-2} asse, e d'altronde ciò è impossibile perchè allora s sarebbe riducibile proiettivamente al coniugio e quindi i suoi punti uniti non potrebbero localizzarsi in un S_{N-2}; nell'ipotesi

([74]) Scegliendo opportunamente la *falda origine* (n.° 7) e i periodi normali, si può supporre che nelle (7) le h abbian valori prefissati, ad es. (1, 0,..., 0) *qualunque* sia la T del tipo considerato.

affermativa ci son certo punti uniti entro ad ogni iperpiano (del fascio) unito, perchè $N-1$ è pari.

Ciò premesso, detti c_i, d_i, due *arbitrari* sistemi di costanti, consideriamo su V_p le due varietà $\vartheta[u+c]=0$, $\vartheta[u+d]=0$, e le loro corrispondenti in T, $\vartheta[u-c]=0$, $\vartheta[u-d]=0$, e formiamo il rapporto

$$\frac{\vartheta[u+c]\vartheta[u-c]}{\vartheta[u+d]\vartheta[u-d]}. \tag{9}$$

Tenendo conto dei fattori che acquistano le ϑ quando le u aumentano di periodi, si vede subito che la (9) è una *funzione uniforme* del punto di V_p, che, per la parità della ϑ, assume lo stesso valore in due punti corrispondenti in T. Si tratta dunque d'una *funzione razionale del punto di M_p*.

D'altronde quella funzione si annulla nei punti della sezione iperpiana (tangente) corrispondente a $\vartheta[u+c]\vartheta[u-c]=0$, e diviene infinita nei punti della sezione iperpiana corrispondente a $\vartheta[u+d]\vartheta[u-d]=0$, quindi è *lineare fratta*, e, scelte opportunamente le coordinate omogenee x_i in S_N si può supporre ridotta ad $\frac{x_1}{x_2}$; in altre parole si può porre su M_p

$$\rho x_1=\vartheta[u+c]\vartheta[u-c], \quad \rho x_2=\vartheta[u+d]\vartheta[u-d]. \tag{10}$$

Se ora disponiamo dell'arbitrarietà delle costanti c_i, d_i in modo che gl'iperpiani $x_1=0$, $x_2=0$ si corrispondano in s, il fascio $x_1-\lambda x_2=0$ risulterà unito, e dall'antiproiettività ivi subordinata si potrà decidere della natura della s.

Ma affinchè $x_1=0$, $x_2=0$ si corrispondono in s, basta che $\vartheta[u+c]=0$, $\vartheta[u+d]=0$ (e di conseguenza $\vartheta[u-c]=0$, $\vartheta[u-d]=0$) si corrispondano in S. Si potranno quindi assumere ad arbitrio le c_i, ad esempio *tutte nulle*, ed allora le d_i resteranno determinate in base alle (8) ed alle formule di trasformazione delle ϑ del n.° 13; e precisamente avranno i valori

$$(11)\quad \begin{array}{ll} d) & (1,\ 1,\dots,\ 1,\ g_{\lambda+1},\ g_{\lambda+2},\dots,\ g_p \,|\, 0,\ 0,\dots,\ 0,\ h_{\lambda+1},\ h_{\lambda+2},\dots,\ h_p) \\ o) & (0,\ 0,\dots,\ 0,\ g_{\lambda+1},\ g_{\lambda+2},\dots,\ g_p \,|\, 0,\ 0,\dots,\ 0,\ h_{\lambda+1},\ h_{\lambda+2},\dots,\ h_p)\ (^{75}). \end{array}$$

Ora pensando le x_1, x_2 delle (10) (nelle quali le c_i, d_i hanno i valori stabiliti) come valori assunti in un dato punto P di M_p si calcolino i valori x'_1, x'_2 assunti

(75) Si noti che le d_i son *semiperiodi*, quindi le due varietà $\vartheta[u+d]=0$, $\vartheta[u-d]=0$ *coincidono*, come del resto le corrispondenti $\vartheta[u+c]=0$, $\vartheta[u-c]=0$ (essendo le c_i nulle). Insomma $x_1=0$, $x_2=0$ son due *iperpiani singolari*.

nel punto P' corrispondente in s, sostituendo al posto delle u_i le u'_i date dalle seconde delle (8); e questi valori si confrontino con $\bar\rho\,\bar x_1$, $\bar\rho\,\bar x_2$ tratti pure dalle (10) tenendo conto delle formule di trasformazione del n.° 13, e dei fattori che acquistano le ϑ quando le u_i aumentano di periodi ([76]). Con calcoli che risparmiamo al lettore si trova

$$(12)\qquad \begin{aligned} \bar\rho\,\bar x_2 &= \rho x'_1 \cdot e^{2\pi i \sum\limits_{\lambda+1}^{p} h_t\left(u_t + \frac{g_t}{2}\right)} \\ \bar\rho\,\bar x_1 &= \rho x'_2 \cdot e^{2\pi i \sum\limits_{\lambda+1}^{p} h_t u_t - \pi \sum\limits_{\lambda+1}^{p} \sum\limits_{\lambda+1}^{p} h_r h_s \tau_{rs}} \end{aligned}$$

e quindi, posto $x = \dfrac{x_1}{x_2}$, ed indicato con k il numero *reale positivo* $e^{-\pi \sum\limits_{\lambda+1}^{p} \sum\limits_{\lambda+1}^{p} h_r h_s \tau_{rs}}$.

$$(13)\qquad x' = \frac{k}{\pm\,\bar x},$$

valendo il segno $+$ *od il segno* $-$ *secondo che* $\sum\limits_{\lambda+1}^{p} h_t g_t$ cioè *la caratteristica del semiperiodo* $(0, 0, \dots, 0, g_{\lambda+1}, g_{\lambda+2}, \dots, g_p \mid 0, 0, \dots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \dots, h_p)$ *è pari o dispari.*

La (13) rappresenta l'antiproiettività subordinata da s nel fascio $x = \text{cost}$; essa ha o non ha elementi uniti secondo che vale il segno $+$ od il segno $-$, quindi:

I tipi del caso III sono o non sono proiettivamente reali, secondo che la caratteristica del semiperiodo dal quale dipendono le equazioni (8) *della simmetria S, è pari o dispari.*

Questi tipi esistono per ogni valore di $\lambda < p$; ma per $\lambda = p-1$ si hanno soltanto tipi *non* proiettivamente reali perchè soltanto g_p, h_p possono, e *devono* essere diverse da zero (eguali ad 1). Distinguendo al solito il caso diasimmetrico da quello ortosimmetrico, troviamo così facilmente $\left[\frac{3p-4}{2}\right]$ *tipi proiettivamente reali e* $\left[\frac{3p-1}{2}\right]$ *tipi birazionalmente ma non proiettivamente reali*; in particolare, per $p = 2$, risp. 1 o 2 tipi.

([76]) Krazer, § 4. Occorrerà modificare quelle formule in base alla già avvertita differenza di convenzioni, circa i periodi normali.

24. Tipi provenienti da trasformazioni cicliche di 4° ordine.

IV) Se la S è ciclica di 4° ordine ed $S^2 = T$, i punti uniti di S e di $S_1 = ST = TS$ sono anche punti uniti di T, e, come vedremo, esistono sempre. Queste trasformazioni dànno quindi luogo a *tipi proiettivamente reali privi di punti ordinarî reali ed aventi solo alcuni punti singolari reali.*

Detti u_i, p integrali di 1ª specie *qualunque* di V_p (la quale stavolta, almeno a priori *non è di tipo reale*) siano, com'è sempre lecito supporre, $u'_i \equiv -u_i$ le equazioni di T, e

$$(14) \qquad u'_i \equiv \lambda_{i1}\bar{u}_1 + \lambda_{i2}\bar{u}_2 + \ldots + \lambda_{ip}\bar{u}_p + \sigma_i ,$$

le equazioni di S. Tenendo conto che T trasforma in sè S e che $S^2 = T$, si trova subito che σ_i *è un semiperiodo,* e che se al suo posto nelle (14) si pone lo *zero* si ottiene ancora una trasformazione del tipo di S. *D'ora in poi indicheremo questa con* S e la (14) con S_σ; e ci occuperemo della S riservandoci di provare che S *ed* S_σ *sono equivalenti,* di fronte alle trasformazioni birazionali di V_p, e quindi di fronte al problema. Notiamo però fin d'ora che la condizione perchè essendo $S^2 = T$ sia anche $S_\sigma{}^2 = T$ è $\sigma_i \equiv \lambda_{i1}\bar{\sigma}_1 + \lambda_{i2}\bar{\sigma}_2 + \ldots + \lambda_{ip}\bar{\sigma}_p$, cioè che $u_i \equiv \sigma_i$ sia un punto unito della S.

Proviamo ora che *le trasformazioni del tipo considerato esistono solo se p è pari; ed allora, con un cambiamento omogeneo dei parametri le equazioni di S possono ridursi alle*

$$(15) \quad u'_1 \equiv \bar{u}_2,\ u'_2 \equiv -\bar{u}_1;\quad u'_3 \equiv \bar{u}_4,\ u'_4 \equiv -\bar{u}_3;\ldots;\quad u'_{p-1} \equiv \bar{u}_p,\ u'_p \equiv -\bar{u}_{p-1}.$$

Osserviamo difatti che se le (14), colle σ_i nulle, si considerano come *eguaglianze* anzichè come *congruenze,* resta ancor vero che il loro quadrato è $u'_i = -u_i$ ([77]), sicchè se le u_i s'interpretano come *coordinate omogenee* di punto in un S_{p-1}, le (14) rappresentano ivi un'*antiproiettività involutoria* (perchè allora $u'_i = -u_i$ è *l'identità*). Se questa avesse un punto unito, che, a meno d'un cambiamento (omogeneo) dei parametri si può supporre sia $u_2 = u_3 = \ldots = u_p = 0$, nelle (14) sarebbe $\lambda_{21} = \lambda_{31} = \ldots = \lambda_{p1} = 0$, ed allora scrivendo che $S^2 = T$ verrebbe $\lambda_{11}\bar{\lambda}_{11} = -1$ ch'è assurda perchè $\lambda_{11}\bar{\lambda}_{11}$ *è positivo.* Dunque *quell'antiproiettività non ha elementi uniti,* quindi $p-1$ è dispari, cioè *p è pari.*

Assumendo come vertici della piramide fondamentale di S_{p-1}, $\frac{p}{2}$ coppie di punti corrispondenti (il che implica un cambiamento omogeneo dei para-

([77]) Ciò non sarebbe più vero se le σ_i fossero $\neq 0$.

metri) le equazioni di quell'antiproiettività, avuto riguardo alla non esistenza di punti uniti, si riducono subito alla forma (15) colla presenza al più d'un fattore ρ nei secondi membri. Tornando alle congruenze, e scrivendo che $S^2 = T$, viene $\rho\bar{\rho} = 1$, dunque $\rho = e^{i\varphi}$ ed allora cambiando u_i in $e^{-i\frac{\varphi}{2}}u_i$ si ottengon proprio le (15).

Dimostriamo ancora che *la sostituzione*

$$C'_i = m_{i1}C_1 + m_{i2}C_2 + \dots + m_{i,2p}C_{2p}, \qquad (i = 1, 2, \dots, 2p) \tag{16}$$

indotta dalla S sui cicli d'un sistema primitivo, può, mediante una trasformazione unimodulare ridursi alla forma

$$\begin{gathered} C'_1 = C_2,\ C'_2 = -C_1;\quad C'_3 = C_4,\ C'_4 = -C_3; \dots; \\ C'_{2p-1} = C_{2p},\quad C'_{2p} = -C_{2p-1}, \end{gathered} \tag{17}$$

analoga alla (15).

Anche la sostituzione (16), come la (14), è ciclica di 4° ordine, ed il suo quadrato è la $C'_i = -C_i$ indotta da T sui cicli d'un sistema qualunque di V_p. Nel corso della dimostrazione supporremo che $2p$ sia un numero pari *qualunque* (quindi che p possa anche esser dispari), e, come al n.° 1, sostituiremo ai simboli C_i altrettante variabili x_i.

Il teorema è vero per $p = 1$. Difatti se la sostituzione

$$x'_1 = n_{11}x_1 + n_{12}x_2, \quad x'_2 = n_{21}x_1 + n_{22}x_2, \tag{18}$$

sottostà alle condizioni imposte alla (16), si ha anzitutto $n_{11}^2 + n_{12}n_{21} = -1$, $n_{11} = -n_{22}$; poi cambiando le variabili in

$$X_1 = \lambda x_1 + \mu x_2, \quad X_2 = (\lambda n_{11} + \mu n_{21})x_1 + (\lambda n_{12} + \mu n_{22})x_2, \tag{19}$$

(λ, μ interi) si ha senz'altro $X'_1 = X_2$ e quindi (perchè il quadrato è $X'_i = -X_i$) anche $X'_2 = -X_1$; sicchè la (18) è ridotta come proposto, *a patto che la* (19) *sia unimodulare*. Perciò occorre che gl'interi λ, μ soddisfino all'equazione

$$n_{12}\lambda^2 - 2\lambda\mu n_{11} - \mu^2 n_{21} = \pm 1, \tag{20}$$

la quale *ha effettivamente soluzioni* perchè il determinante della forma quadratica a primo membro è eguale a -1 [78].

---

[78] Od anche, in virtù d'un teorema di FROBENIUS (loc. cit., §§ 3, 4) perchè n_{11}, n_{12}, n_{21} son *primi fra di loro*.

Passando ora al caso generale, scriviamo la 1ª delle (16) sotto la forma

$$x'_1 = m_{11}x_1 + \delta(n_{12}x_2 + ... + n_{1,2p}x_{2p}), \tag{21}$$

dove δ è il m. c. d. di $m_{12},..., m_{1,2p}$ e perciò $n_{12},..., n_{1,2p}$ son *primi tra di loro*; e poniamo

$$X_1 = x_1, \quad X_2 = n_{12}x_2 + n_{13}x_3 + ... + n_{1,2p}x_{2p}, \tag{22}$$

scegliendo per $X_3, X_4,..., X_{2p}$ opportune combinazioni lineari (a coefficienti interi) delle $x_2, x_3,..., x_{2p}$ in modo che la sostituzione risulti *unimodulare*. Nelle nuove variabili, la prima delle (16), cioè la (21), è $X'_1 = m_{11}X_1 + \delta X_2$ e allora (sempre perchè il quadrato è $X'_i = - X_i$) anche la seconda è dello stesso tipo; quindi, in virtù di quanto precede, esse possono ulteriormente ridursi ad $X'_1 = X_2$, $X'_2 = - X_1$.

Dopo ciò il problema sarà ricondotto a $2p - 2$ variabili, e quindi il procedimento sarà proseguibile, se dalle espressioni di $X'_3, X'_4,..., X'_{2p}$ si potranno far sparire X_1, X_2. E questo scopo si raggiunge se (denotando sempre con m_{ik} i coefficienti) alle variabili X_i $(i = 3, 4,..., 2p)$ si sostituiscono le $y_i = X_i + m_{i1}X_2$ giacchè ciò fa sparire la X_1, e di conseguenza, per la proprietà del quadrato, la X_2. *Il teorema è così dimostrato.*

Ora cambiamo le notazioni dei nostri cicli, indicando con $D_1, D_2,..., D_p$ i cicli C_i d'indici dispari, e con $D_{p+1}, D_{p+2},..., D_{2p}$ quelli d'indici pari; ed inoltre denotiamo con

$$\begin{array}{c|cccccc|} & D_1 & D_2 & D_p & D_{p+1} & D_{p+2} & D_{2p} \\ \hline u_1 & \omega_{11} & \omega_{12} & \ldots\ \omega_{1p} & \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots\ \tau_{1p} \\ u_2 & \omega_{21} & \omega_{22} & \ldots\ \omega_{2p} & \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots\ \tau_{2p} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_p & \omega_{p1} & \omega_{p2} & \ldots\ \omega_{pp} & \tau_{p1} & \tau_{p2} & \ldots\ \tau_{pp} \end{array}, \tag{23}$$

i relativi periodi degli u_i. Facendo descrivere al punto di V_p uno dei cicli D_i, e tenendo conto degl' incrementi che allora, in virtù delle (17) (scritte fra i D_i) subiscono i due membri delle (15) si trovano le relazioni

$$\tau_{2i-1,h} = \overline{\omega}_{2i,h}, \quad \tau_{2i,h} = - \overline{\omega}_{2i-1,h}, \tag{24}$$

le quali esprimono che *ogni riga di posto dispari della matrice* $\|\tau_{rs}\|$ *è coniugata della riga di posto successivo della* $\|\omega_{rs}\|$, *ed ogni riga di posto pari della* $\|\tau_{rs}\|$ *è coniugata della riga di posto precedente della* $\|\omega_{rs}\|$ *cambiata di segno.*

Viceversa data una matrice (23), soddisfacente alle (24), *che ammetta una relazione principale, di divisori 1, e trasformata in sè dalla* (17) ([79]), sulla V_p corrispondente le (15) rappresentano una trasformazione S del tipo voluto.

Cerchiamo ora i punti uniti della S. Poichè essi sono punti uniti di T, i loro argomenti devon esser *semiperiodi* σ_i, soddisfacenti, per la (15), alle condizioni $\sigma_1 = \bar{\sigma}_2$, $\sigma_2 = -\bar{\sigma}_1$, ecc.. Ma posto $\sigma_i = (g_1, g_2, \ldots, g_p \mid h_1, h_2, \ldots, h_p)$ si ha per la (23) esplicitamente

$$
(25)\qquad
\begin{aligned}
\sigma_1 &\equiv \frac{1}{2}(g_1\omega_{11} + g_2\omega_{12} + \ldots + g_p\omega_{1p} + h_1\tau_{11} + h_{12}\tau_{12} + \ldots + h_p\tau_{1p})\\
\sigma_2 &\equiv \frac{1}{2}(g_1\omega_{21} + g_2\omega_{22} + \ldots + g_p\omega_{2p} + h_1\tau_{21} + h_2\tau_{22} + \ldots + h_p\tau_{2p}), \text{ ecc.,}
\end{aligned}
$$

e quindi, tenuto conto della (24), le condizioni predette son soddisfatte allora e soltanto che $g_i = h_i$. Dunque *S ha 2^p punti uniti, cioè metà di quelli di T.*

Se poi si ricorda che le relazioni $\sigma_1 = \bar{\sigma}_2$, $\sigma_2 = -\bar{\sigma}_1$, ecc., esprimono anche la condizione perchè la S_σ

$$
(26)\qquad u'_1 \equiv \bar{u}_2 + \sigma_1, \quad u'_2 \equiv -\bar{u}_2 + \sigma_2, \text{ ecc.}
$$

abbia per quadrato la T, si conclude che di trasformazioni siffatte ne esistono precisamente 2^p che potran dirsi *associate* alla S. E queste S_σ sono evidentemente le stesse delle (14) inizialmente considerate.

Ogni S_σ è il prodotto di S per la $u'_i \equiv u_i + \sigma_i$ ed è anche *la trasformata di S mediante la trasformazione di 2^a specie* $u'_i \equiv u_i + (g_1, g_2, \ldots, g_p)$ le g essendo quelle di σ_i, come si verifica agevolmente. Pertanto *S ed S_σ sono equivalenti*, come avevamo affermato.

In conclusione si ha così *per p pari un nuovo tipo proiettivamente reale*; e quindi in totale:

([79]) Si vede facilmente che queste condizioni son compatibili colle (24), e non traggono di conseguenza altre relazioni, di guisa che la V_p è in generale *non singolare*. Per $p = 2$ una matrice (23) soddisfacente a quelle condizioni, può dedursi dalla matrice *normale*

$$
\left\| \begin{matrix} 1 & 0 & a+ib & c \\ 0 & 1 & c & -a+ib \end{matrix} \right\|, \qquad (D_2 = b^2 > 0)
$$

cambiando segno alla 2^a colonna e scambiandola colla 3^a: anzi in tal caso si può provare che *ogni matrice di Riemann* (23) *che soddisfi alle condizioni in parola può trasformarsi nella predetta matrice normale.* Per p pari > 2 una matrice *composta* con $\frac{p}{2}$ matrici cosiffatte, fornisce un esempio che conferma la compatibilità enunciata.

Il numero dei tipi di varietà di Kummer M_p reali è $\frac{9p-2}{2}$ *o* $\frac{9p-5}{2}$ *secondo che p è pari o dispari* [80].

25. **Proprietà e caratteristiche distintive reali dei tipi ottenuti.** — Esaminiamo dapprima i tipi del n.° 22.

I) La simmetria $S\,(u'_i \equiv \bar{u}_i)$ ha come punti uniti tutti i punti reali di $V_p^{(0)}$, cioè quelli delle $2^{p-\lambda}$ falde, di argomenti (n.° 7)

$$u \equiv r + (0,\ 0, \ldots,\ 0,\ h_{\lambda+1},\ h_{\lambda+2}, \ldots,\ h_p), \tag{27}$$

e la simmetria $S_1\ (u'_i \equiv -\bar{u}_i)$ lascia invece uniti i punti di argomenti

$$u \equiv j + (0,\ 0, \ldots,\ 0,\ g_{\lambda+1},\ g_{\lambda+2}, \ldots,\ g_p), \tag{28}$$

cioè quelli che *divengon reali* sulle $2^{p-\lambda}$ falde della *varietà complementare* di $V_p^{(0)}$ che, per comodità di linguaggio, chiameremo *falde fittizie* di $V_p^{(0)}$.

Due falde reali o due falde fittizie non hanno punti comuni; invece una falda reale ed una falda fittizia hanno in comune il *punto unito reale di T*

$$(0,\ 0, \ldots,\ 0,\ g_{\lambda+1},\ g_{\lambda+2}, \ldots,\ g_p \,|\, 0,\ 0, \ldots,\ 0,\ h_{\lambda+1},\ h_{\lambda+2}, \ldots,\ h_p), \tag{29}$$

e, al variare delle due falde, si ottengono così tutti i $2^{2p-\lambda}$ punti singolari *reali* della T, di cui ogni falda, reale o fittizia, ne contiene come sappiamo (n.° 7) 2^p.

Ai punti delle falde reali e fittizie corrispondono (n.° 22) i punti reali di $M_p^{(0)}$: questa pertanto ha *una falda sola, divisa in $2^{p+1-\lambda}$ regioni,* connesse nel modo indicato attraverso ai $2^{2p-\lambda}$ punti singolari reali.

Fra le 2^{2p} ϑ unite in T da cui provengono gl'iperpiani singolari di $M_p^{(0)}$, ve ne sono, come sappiamo (n.° 14) $2^{2p-\lambda}$ unite in S, cioè, su $V_p^{(0)}$, *reali* (ed unite anche in S_1) che hanno i parametri (9) del n.° 14 per $\gamma_i = 0$; ognuna di esse contiene $2^{p-1} \cdot 2^{p-\lambda}$ dei predetti punti uniti reali, *nel caso diasimmetrico,* e $2^{p-1}(2^{p-\lambda}-1)$ *nel caso ortosimmetrico.*

---

[80] In particolare $(p=2)$ si hanno dunque *otto tipi di superficie di Kummer reali,* quanti ne ha trovati il ROHN nel suo noto lavoro *Die verschiedenen Gestalten der Kummer'schen Fläche* [Math. Ann., vol. 18 (1881), pp. 99-159]. Per quanto i nostri punti di vista sian del tutto diversi, in quanto il ROHN parte dal considerare la M_2 di KUMMER come superficie singolare d'un sistema di complessi quadratici confocali, e dalla loro rappresentazione in coordinate di KLEIN, siam dolenti che i limiti di questo scritto non ci consentano più dettagliati raffronti.

Infine il numero delle polarità e dei sistemi nulli reali di $M_p^{(0)}$ si determina subito osservando che ognuna di tali corrispondenze muta un punto singolare reale in un iperpiano singolare pure reale: tenendo fisso il primo e facendo variare il secondo si hanno così $2^{2p-\lambda}$ corrispondenze reali, delle quali son sistemi nulli quelle provenienti dagl' iperpiani passanti per il punto ([81]). In conclusione;

Le varietà di Kummer reali, appartenenti ad uno dei $\left[\frac{3p+2}{2}\right]$ *tipi del caso I (di carattere reale* λ*) hanno una falda reale,* $2^{2p-\lambda}$ *punti singolari ed altrettanti iperpiani singolari reali.*

La falda stessa resta suddivisa dai punti singolari reali in $2^{p+1-\lambda}$ *regioni, che si possono separare in due classi, ciascuna delle quali ne contiene* $2^{p-\lambda}$. *Una regione contiene* 2^p *punti singolari reali; due regioni della stessa classe non hanno punti comuni, mentre due regioni di classe diversa son connesse attraverso ad un punto singolare.*

Per ogni punto singolare reale passano $2^{p-1} \cdot 2^{p-\lambda}$ *iperpiani singolari reali nel caso diasimmetrico,* $2^{p-1}(2^{p-\lambda}-1)$ *nel caso ortosimmetrico e dualmente. Infine nel primo caso la varietà ammette* $2^{2p-\lambda-1}$ *polarità e altrettanti sistemi nulli reali, nel secondo* $2^{p-1}(2^{p-\lambda}+1)$ *polarità e* $2^{p-1}(2^{p-\lambda}-1)$ *sistemi nulli reali.*

Appartengono a questo gruppo i tipi Ia ($\lambda=0$), IIa ($\lambda=1$), III ($\lambda=2$, dias.), IVa ($\lambda=2$, ortos.) del ROHN.

II) I punti reali di $M_p^{(0)}$ corrispondono (n.° 22) soltanto ai punti uniti di $S\,(u'_i \equiv \bar{u}_i)$ cioè ai punti reali di $V_p^{(0)}$. Ma la T scambia a due a due le falde di $V_p^{(0)}$, dunque a ciascuna coppia di falde corrisponde una falda di $M_p^{(0)}$; inoltre la T non ha punti uniti reali, quindi $M_p^{(0)}$ non ha punti singolari reali, nè analogamente iperpiani singolari reali.

Determiniamo ora le polarità ed i sistemi nulli reali. Essi provengono da quelle fra le 2^{2p} *polarità abeliane* di V_p, mutate in sè da T (cioè aventi come parametri α_i dei *semiperiodi*) che sono, su $V_p^{(0)}$, *reali*, cioè vengon trasformate in sè stesse da S.

Ora a due punti *coniugati* $u_i \equiv p_i$, $u_i \equiv \bar{p}_i$ di $V_p^{(0)}$, corrispondono in una polarità abeliana π, di parametri α_i, le due varietà $\vartheta[u+\alpha-p]=0$, $\vartheta[u+\alpha-\bar{p}]=0$; quindi π sarà reale se quelle due varietà risulteranno anch' esse *coniugate* (corrispondenti in S) cioè se fra i loro parametri $p_i-\alpha_i$,

---

([81]) Si vede subito che il numero delle *omografie reali* di $M_p^{(0)}$ in sè è in ogni caso eguale alla *somma* dei due numeri che dànno le polarità ed i sistemi nulli reali.

$\bar{p}_i - \alpha_i$ correranno le relazioni (XII) del n.° 13. Effettuando la sostituzione, le p_i spariscono, e per le α_i si ottengono subito i valori (8) del n.° 14; senonchè in questo caso le α_i son semiperiodi e quindi devon esserlo anche le relative parti reali r_i: quindi in definitiva

$$(30)\quad \begin{array}{ll} d) & \alpha \equiv (g_1, g_2, \dots, g_p \mid 1, 1, \dots, 1, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \dots, h_p) \\ o) & \alpha \equiv (g_1, g_2, \dots, g_p \mid 0, 0, \dots, 0, h_{\lambda+1}, h_{\lambda+2}, \dots, h_p). \end{array}$$

Di quì segue subito che le corrispondenze reali cercate sono in tutto $2^{2p-\lambda}$; e la distinzione dei due tipi, in base alla *parità* delle caratteristiche di α (n.° 20) è d'altronde immediata. Dunque:

Le varietà di Kummer reali appartenenti ad uno dei $\left[\frac{3p-1}{2}\right]$ *tipi del caso* II *(di carattere reale* $\lambda < p$*) hanno* $2^{p-\lambda-1}$ *falde reali e nessun punto e iperpiano singolare reale. Esse ammettono* $2^{2p-\lambda-1}$ *polarità ed altrettanti sistemi nulli reali, nel caso diasimmetrico* $2^{p-1}(2^{p-\lambda}+1)$ *polarità e* $2^{p-1}(2^{p-\lambda}-1)$ *sistemi nulli, nel caso ortosimmetrico.*

Appartengono a questo gruppo i tipi Ib ($\lambda = 0$) e IIb ($\lambda = 1$) del Rohn.

III) In questo caso, come sappiamo, la $M_p^{(0)}$ *non ha punti reali*; essa però ammette lo stesso numero di polarità e sistemi nulli reali del caso precedente. Difatti adesso le equazioni di S sono $u'_i \equiv \bar{u}_i + \sigma_i$ (σ_i semiperiodo) sicchè a due punti corrispondenti $u_i \equiv p_i$, $u_i \equiv \bar{p}_i + \sigma_i$, corrispondono, in una polarità abeliana π, le due varietà $\vartheta[u + \alpha - p] = 0$, $\vartheta[u + \alpha - \bar{p} - \sigma] = 0$. Ma la condizione perchè due ϑ siano omologhe in S non è più, fra i parametri, rappresentata dalle (XII) del n.° 13, sibbene da quelle che se ne deducono incrementando di σ_i i secondi membri: sicchè per le α_i si ritrovano ancora i valori (30). Pertanto:

Le varietà di Kummer reali, appartenenti ad uno dei $\left[\frac{3p-4}{2}\right]$ *tipi del caso* III *(di carattere reale* $\lambda < p-1$*) non hanno punti reali. Esse ammettono però lo stesso numero di polarità e di sistemi nulli reali del caso precedente* ([82]).

Appartiene a questo gruppo il tipo Ic ($\lambda = 0$) di Rohn; inoltre, come si è già osservato (n.° 23), *per* $p = 2$ *si hanno anche due tipi birazionalmente ma non proiettivamente reali.*

([82]) Queste corrispondenze reali si possono considerare anche *sui modelli reali* dei $\left[\frac{3p-1}{2}\right]$ tipi birazionalmente ma non proiettivamente reali, *senza però estenderle allo spazio.*

IV) Veniamo infine al tipo del n.° 24. Come si è visto, esso non ha punti ordinarî reali, ma solo 2^p *punti singolari reali*, e, analogamente, 2^p iperpiani singolari reali ([83]).

Inoltre per un punto singolare reale *non* passano iperpiani singolari reali. Volendo dimostrare questa proprietà per la via consueta, ricorrendo ai parametri delle 2^p ϑ unite in S, occorrerebbe valersi di *periodi normali* che noi non possediamo. Ma possiamo pervenire all'enunciata conclusione, anche per la seguente via:

Intanto la proprietà è vera per $p=2$, giacchè una *conica singolare reale* non può avere *punti isolati reali* senza avere un ramo reale; e d'altronde non può avere rami reali perchè $M_2^{(0)}$ non ha punti ordinarî reali. Ne segue che la proprietà è vera per le $M_p^{(0)}$ corrispondenti a matrici (23) *composte* con $\frac{p}{2}$ matrici analoghe di genere 2; e quindi, per continuità è vera in generale.

Infine, procedendo come nel caso I, si trova subito che $M_p^{(0)}$ ammette 2^p polarità e nessun sistema nullo reale, sicchè in definitiva:

Le varietà di Kummer reali del tipo corrispondente al caso IV *(p pari) non hanno punti ordinarî reali, ma hanno 2^p punti singolari (isolati) reali, ed altrettanti iperpiani singolari reali non passanti per quei punti. Esse ammettono 2^p polarità e 0 sistemi nulli reali.*

Come caso particolare ($p=2$) si ha il tipo IV*b* del ROHN.

§ 7. Esempio di discussione d'un caso singolare.

28. **Presentazione del caso. Preliminari generici e specifici.** — Per quanto gran parte delle nostre conclusioni abbiano valore per varietà abeliane singolari e non singolari giacchè è in fondo di loro *proprietà comuni* che ci siamo fin quì occupati, ben poco abbiam potuto dire finora circa le *nuove questioni* che si presentano nell'esame dei casi singolari dal punto di vista reale. Come *primo avviamento allo studio di tali questioni*, vogliam presentare al lettore l'analisi di un caso speciale opportunamente preparato.

Diciamo però subito *qual'è in argomento la questione per noi principale*. Come per una varietà abeliana, l'esser singolare ([84]) porta in generale

([83]) Considerando come elementi di V_p, anzichè i punti, le varietà ϑ di Σ, le S, T vi subordinano trasformazioni analoghe, ecc.

([84]) Quì, come al § 2 « *singolare* » va riferito all'*indice di moltiplicabilità.*

di conseguenza un *ampliamento nel gruppo delle trasformazioni birazionali in sè,* per l'intervento di *trasformazioni birazionali singolari,* così è da prevedersi, che se la varietà è di tipo reale, lo stesso accadrà delle trasformazioni antibirazionali, in particolare che si presenteranno *nuovi tipi di simmetrie.* Potrà dunque alterarsi il numero delle *classi reali* in cui si ripartiscono le varietà reali birazionalmente identiche alla data; ed il problema che consideriamo come principale, è quello di precisare la natura ed il significato dell'alterazione.

Abbiamo di proposito parlato di *nuovi tipi,* non di simmetrie *singolari* perchè *la distinzione delle trasformazioni in ordinarie e singolari è impropria nel caso antibirazionale*; o, quanto mai, se una distinzione analoga è pur possibile, deve fondarsi su criterî del tutto diversi. Difatti mentre le trasformazioni birazionali *ordinarie* possono caratterizzarsi mediante le loro equazioni $u'_i \equiv \pm u_i + c_i$ *la cui forma è invariante per qualunque cambiamento di parametri,* questo non accade (quando esistono) per le trasformazioni antibirazionali $u'_i \equiv \pm \overline{u}_i + c_i$; mentre per contrapposto le equazioni di *qualunque* simmetria possono, come sappiamo, ridursi a quella forma. Una delle ragioni di tal differenza sembra risiedere in ciò, che, *mentre le trasformazioni birazionali ordinarie mutano in sè stessi tutti i sistemi* Φ_1 *della varietà* (perchè la corrispondente tresformazione dei periodi muta in sè tutte le relazioni di Riemann) *una simmetria* (per limitarci a questo caso) almeno nelle ipotesi più semplici, *muta in sè uno solo od una classe subordinata di quei sistemi,* rispetto ai quali, ed ai corrispondenti integrali normali, ha il carattere di trasformazione ordinaria ([85]). L'esempio che andiamo a svolgere illustrerà ampiamente tali osservazioni preliminari.

Consideriamo una superficie iperellittica *F di tipo reale,* cioè contenente una simmetria *S di carattere reale* $\lambda = 0$, ed indichiamo con A_1, A_2, B_1, B_2 i cicli d'un *sistema pseudonormale* relativo ad S. Supponiamo poi che fra i relativi periodi degl'integrali di 1ª specie di F interceda una relazione di Riemann *principale e di divisore 1*

$$(1) \qquad R \equiv a_{12}(12) + a_{13}(13) + a_{14}(14) + a_{23}(23) + a_{24}(24) + a_{34}(34) = 0,$$

a coefficienti tutti diversi da zero, ed inoltre, per ciascuno dei due gruppi $(a_{13}, a_{14}, a_{23}, a_{24})$ (a_{12}, a_{34}) primi tra di loro.

([85]) Si possono però costruire esempî di V_p *singolari* contenenti simmetrie che ne trasformano in sè *tutti* i sistemi Φ.

La sostituzione $A'_i = A_i$, $B'_i = -B_i$ che la S induce (n.° 2) sui cicli A_i, B_i muta la R in

$$(2) \qquad R' \equiv a_{12}(12) - a_{13}(13) - a_{14}(14) - a_{23}(23) - a_{24}(24) + a_{34}(34) = 0,$$

che, per l'ipotesi fatta sui coefficienti, *è distinta da R*; quindi:

a) La superficie F è singolare (ha indice di singolarità > 0);

b) Il sistema Σ corrispondente alla (1) *non è reale* rispetto ad S, cioè *F non è reale in quanto superficie di Jacobi* corrispondente a quel sistema Σ;

c) Le due relazioni $R - R' = 0$, $R + R' = 0$, che, liberate da fattori, son del tipo

$$(3) \qquad A \equiv a_{13}(13) + a_{14}(14) + a_{23}(23) + a_{24}(24) = 0, \quad B \equiv a_{12}(12) + a_{34}(34) = 0,$$

son trasformate in sè stesse dalla sostituzione predetta. Di esse, come sappiamo dal n.° 10 *solo la A è principale*, e quindi ad essa corrisponde un sistema di varietà intermediarie (del 1° ordine) Φ_0 *reale* rispetto ad S. Detto δ il *divisore* della A (che supponiamo sia un *numero primo* > 1) *la F è quindi reale come superficie di Picard di divisore δ.*

Ora riduciamo, col procedimento del n.° 10, la A alla *forma normale*

$$(4) \qquad A \equiv (13) + \delta(24) = 0,$$

e sia

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & i\tau_{11} & i\tau_{12} \\ 0 & \frac{1}{\delta} & i\tau_{21} & i\tau_{22} \end{vmatrix} \quad (\tau_{rs} = \tau_{sr}), \ \Delta = \tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2 > 0,$$

la corrispondente *tabella normale*, relativa ai cicli normali M_1, M_2, M_3, M_4 ed agl'integrali normali u_1, u_2. Poichè la sostituzione che riduce la primitiva A alla forma (4) opera separatamente sui due gruppi di cicli A_i, B_i, così per effetto di essa la B rimane ancora dello stesso tipo, e la trasformata di R è ancora, come inizialmente, $A + B$. Scrivendo che questa ha divisore 1, si trova

$$(6) \qquad a_{12}a_{34} = \delta - 1,$$

e quindi il *divisore della relazione* $\lambda A + \mu B = 0$ vale

$$(7) \qquad d = \lambda^2\delta + \mu^2(1 - \delta).$$

Pertanto, se $d = \delta$, *poichè δ è primo* sarà μ divisibile per δ, e posto $\lambda = x$, $\mu = \delta y$ verrà

$$(8) \qquad x^2 - \delta(\delta - 1)y^2 = 1,$$

cosicchè *i sistemi* Φ *di divisore* δ *corrispondono alle relazioni* $xA + \delta yB = 0$ *nelle quali gl'interi* x, y (primi fra di loro) *soddisfano all'equazione di Pell* (8). In particolare il sistema Φ_0 corrisponde ad $x = 1$, $y = 0$.

Fissato, com'è lecito, il segno di x *positivo*, ricordiamo che detta x_1, y_1 la *soluzione minima positiva* della (8), che, come si riconosce subito è

$$x_1 = 2\delta - 1, \quad y_1 = 2, \tag{9}$$

ogni altra soluzione x_α, y_α si ricava in modo noto dalla posizione

$$x_\alpha + y_\alpha\sqrt{\delta(\delta-1)} = [x_1 + y_1\sqrt{\delta(\delta-1)}]^\alpha, \tag{10}$$

nella quale α *è un intero arbitrario positivo o negativo* ([86]). Indicando con Φ_α il corrispondente sistema di varietà intermediarie *del 1° ordine*, otterremo così un *insieme numerabile di tali sistemi*, che potremo ordinare nella successione

$$\ldots, \quad \Phi_{-2}, \quad \Phi_{-1}, \quad \Phi_0, \quad \Phi_1, \quad \Phi_2, \ldots. \tag{11}$$

29. **Trasformazioni birazionali ed antibirazionali della superficie *F*.** — Siano ora

$$\begin{aligned} u'_1 &\equiv p\bar{u}_1 + q\bar{u}_2 + c_1 \\ u'_2 &\equiv r\bar{u}_1 + s\bar{u}_2 + c_2, \end{aligned} \tag{12}$$

le equazioni d'una trasformazione antibirazionale di F in sè, ed

$$M'_i = m_{i1}M_1 + m_{i2}M_2 + m_{i3}M_3 + m_{i4}M_4, \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{13}$$

quella della corrispondente sostituzione fra i cicli M_i. Eguagliando al solito gl'incrementi dei due membri di (12) lungo due cicli corrispondenti, troviamo *otto relazioni* fra gli m_{rs}, le p, q, r, s, ed i periodi (5), che, dopo eliminazione delle p, q, r, s si riducono a relazioni a coefficienti interi fra quest'ultimi. Nell'ipotesi ch'essi sian legati *soltanto dalle* $A = 0$, $B = 0$ tali relazioni dànno in definitiva

$$\begin{gathered} m_{12} = m_{13} = m_{21} = m_{24} = m_{31} = m_{34} = m_{42} = m_{43} = 0, \\ m_{11} = m_{22} = m_{33} = m_{44} = m, \quad m_{14} = -\rho\delta a_{34}, \\ m_{41} = \rho a_{12}, \quad m_{23} = \rho a_{34}, \quad m_{32} = -\rho\delta a_{12}, \end{gathered} \tag{14}$$

([86]) Cfr. Dirichlet, *Lezioni sulla Teoria dei Numeri* (Venezia, Tip. Emiliana, 1881), §§ 83, 84. Vedi anche la mia Memoria citata alla nota ([65]), in cui ai n.i 2, 3 è trattata una questione che ha talune analogie coll'attuale.

con *m e ρ interi*; dalle quali risostituendo nelle relazioni iniziali si ricava

$$(15)\qquad \begin{aligned} p &= m - i\rho\delta a_{34}\tau_{12}, & q &= i\rho\delta a_{34}\tau_{11} \\ r &= - i\rho\delta a_{34}\tau_{22}, & s &= m + i\rho\delta a_{34}\tau_{12}. \end{aligned}$$

La (13) è quindi

$$(16)\qquad \begin{aligned} M'_1 &= mM_1 - \rho\delta a_{34}M_4, & M'_2 &= mM_2 + \rho a_{34}M_3 \\ M'_4 &= \rho a_{12}M_1 - mM_4, & M'_3 &= - \rho\delta a_{12}M_2 - mM_3, \end{aligned}$$

e se esprimiamo che il suo determinante (o quello $ps - qr$ della (12)) è eguale a ± 1 troviamo

$$(17)\qquad m^2 - \delta(\delta - 1)\rho^2 = \pm 1,$$

cioè, salvo il doppio segno del 2° membro, *la stessa equazione di Pell* (8) [87].

Supponiamo anzi, per rendere più intimo il legame fra i problemi connessi alle due equazioni, che *la* (17) *non abbia soluzioni quando il secondo membro è* -1, come accade p. es. quando δ *è un numero primo della forma* $4k+1$.

Ad ogni soluzione m, ρ della (17), assieme alla sua opposta $-m$, $-\rho$ corrisponde *una schiera* di trasformazioni (12) che si ottengono tutte da una fra esse moltiplicandola per le trasformazioni ordinarie: e le (16) son determinate a meno d'un cambiamento di segno dei secondi membri, corrispondente al cambiamento di segno di m, ρ, cioè al prodotto per una trasformazione di 1ª specie.

Ogni schiera può quindi collegarsi ad una soluzione m_α, ρ_α della (17) con m_α positivo; indicandola con S_α possiamo quindi, al modo delle Φ_α, ordinare le S_α in una successione

$$(18)\qquad \ldots, \quad S_{-2}, \quad S_{-1}, \quad S_0, \quad S_1, \quad S_2, \ldots,$$

nella quale la S_0 corrisponde ad $m=1$, $\rho=0$, cioè contiene le trasformazioni $u'_i \equiv \pm \bar{u}_i + c_i$ tra cui c'è la simmetria S.

Un'analoga conclusione sussiste per le *trasformazioni birazionali*, dal momento che esse possono ottenersi come prodotti della $u'_i \equiv \bar{u}_i$ per quelle delle schiere S_α, cioè son rappresentate ancora dalle (12) nei secondi membri delle quali al posto delle $\bar{u}_i$ si scrivano le u_i. Se s'indica con T_α la schiera di queste trasformazioni che proviene dalla S_α, la corrispondente sostituzione

[87] Il determinante della (16) è il *quadrato* del 1° membro della (17) quindi di fatto vale $+1$, conformemente ad un risultato del CHERUBINO. Cfr. la nota [14].

sui cicli M_i si ottiene dalla (16) moltiplicandola (a sinistra) per la $M'_1 = M_1$, $M'_2 = M_2$, $M'_3 = -M_3$, $M'_4 = -M_4$ (indotta sui cicli normali dalla $u'_i \equiv u_i$) cioè *cambiando nei secondi membri il segno di* M_3, M_4.

Poichè la matrice (5) ha *carattere reale nullo* (n.° 6) *nella schiera* S_0 *vi sono quattro classi di simmetrie*: ed è facile vedere che *la stessa cosa si verifica per le altre schiere*. Difatti la (12) dove le p, q, r, s hanno i valori (15), quando $c_1 = c_2 = 0$ è involutoria, quindi *è una simmetria dotata di punti uniti* (p. es. $u_1 = u_2 = 0$); sicchè con un cambiamento di parametri può ridursi ad $u'_i \equiv \bar{u}_i$. Simultaneamente la (16) ch'è pure involutoria, può, a norma del n.° 2, ridursi alla $N'_1 = N_1$, $N'_2 = N_2$, $N'_3 = -N_3$, $N'_4 = -N_4$ [88], mostrando che le simmetrie della schiera S_α hanno anch'esse *carattere reale nullo*, e quindi si distribuiscono in 4 classi come si è sopra asserito.

30. **Trasformazione delle Φ e classi reali corrispondenti alla superficie F.** — Quante fra le predette classi di simmetrie sono effettivamente distinte di fronte alle trasformazioni birazionali (ed antibirazionali) di F in sè? Per rispondere a questa domanda cerchiamo come son trasformati i sistemi Φ_α della F.

Perciò (n.° 9) trasformiamo mediante l'inversa della (16), cioè la (16) stessa, le relazioni $A = 0$, $B = 0$. Troviamo facilmente, le notazioni riferendosi ai primi membri, e supposto che agli m, ρ delle (16) sian sostituiti m_α, ρ_α

$$(19) \qquad \begin{aligned} A' &= -(m_{2\alpha}A + \delta\rho_{2\alpha}B) \\ B' &= (\delta - 1)\rho_{2\alpha}A + m_{2\alpha}B, \end{aligned}$$

da cui intanto segue che la relazione $A = 0$ è trasformata in $m_{2\alpha}A + \delta\rho_{2\alpha}B = 0$, cioè (per l'identità delle equazioni (8) (17)) che le S_α mutano Φ_0 in $\Phi_{2\alpha}$. Poi, tenendo conto che, come risulta facilmente dalle (10)

$$(20) \qquad m_{p+q} = m_p m_q + \delta(\delta - 1)\rho_p\rho_q, \quad \rho_{p+q} = m_p\rho_q + m_q\rho_p,$$

si vede, mediante le (19), che la relazione

$$m_pA + \delta\rho_pB = 0,$$

[88] Si prova con facilità che condizione necessaria e sufficiente perchè una sostituzione unimodulare involutoria su *due* variabili, di coefficienti m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{22} sia riducibile alla $x'_1 = x_1$, $x'_2 = -x_2$ è che sia $m_{11} = -m_{22}$ e che m_{12}, m_{21} siano *entrambi pari*. Ora a tali condizioni soddisfano le due sostituzioni in cui si decompone la (16) considerata come operante su ciascuna delle coppie M_1, M_4; M_2, M_3 perchè come risulta dalle (9) (10) l'intero ρ è sempre *pari*.

corrispondente a Φ_p, è mutata in quella corrispondente a $\Phi_{2\alpha-p}$; in particolare per $\alpha=0$, che le S_0 mutano Φ_p in Φ_{-p}. Infine tenendo conto che le T_α sono prodotti d'una S_0 per le S_α si perviene alla conclusione:

Il sistema Φ_p è mutato dalle trasformazioni della schiera T_α in $\Phi_{2\alpha+p}$, da quelle della schiera S_α in $\Phi_{2\alpha-p}$.

Ne segue che *le trasformazioni birazionali T_α non lasciano fisso alcun sistema Φ fatta eccezione per le T_0 (trasformazioni ordinarie) che li lascian fissi tutti; mentre le trasformazioni antibirazionali di ogni schiera S_α lascian fisso un sistema Φ e precisamente Φ_α.*

Inoltre si ricava che *la condizione perchè due sistemi $\Phi_p\Phi_q$ siano equivalenti di fronte alle trasformazioni (birazionali ed antibirazionali) di F in sè, è che gl'indici p, q abbiano la stessa parità.*

In tal caso saranno evidentemente equivalenti anche le simmetrie che mutano in sè quei sistemi (e viceversa); e pertanto si conclude che la F possiede *otto classi di simmetrie* effettivamente distinte, cioè che *alla classe definita in senso complesso da F appartengono otto classi di superficie reali,* vale a dire *il doppio di quante si hanno, per $\lambda=0$, nel caso non singolare.*

Quattro fra queste classi hanno per rappresentanti le simmetrie della schiera S_0 che corrispondono alla tabella normale (5), le altre quattro hanno come rappresentanti le simmetrie della schiera S_1. Cerchiamo qual'è la tabella normale corrispondente.

Sostituendo nelle (16) alle m, ρ la *soluzione minima positiva* $m_1=2\delta-1$, $\rho_1=2$, dalla (17) si ricava

$$(21)\qquad \begin{array}{ll} M'_1=(2\delta-1)M_1-2\delta a_{34}M_4, & M'_2=(2\delta-1)M_2+2a_{34}M_3 \\ M'_4=2a_{12}M_1-(2\delta-1)M_4, & M'_3=-2\delta a_{12}M_2-(2\delta-1)M_3, \end{array}$$

ed inoltre la relazione corrispondente al sistema Φ_1 mutato in sè da S_1 è

$$(22)\qquad (2\delta-1)A+2\delta B=0.$$

Per passare a *cicli normali* del tipo considerato al n.° 10, occorrerà trovare una sostituzione che riduca le (21) alla forma caratteristica corrispondente alle tabelle normali di carattere reale 0 (n.° 10, IV) e *contemporaneamente normalizzi* la relazione (22).

Con qualche tentativo si trova che tal sostituzione è

$$(23)\qquad \begin{array}{ll} N_1=\delta M_2+a_{34}M_3, & N_2=M_1+a_{34}M_4 \\ N_4=a_{12}M_2+M_3, & N_3=a_{12}M_1+\delta M_4, \end{array}$$

e calcolando i periodi di u_1, u_2 ai *nuovi cicli normali* N_i si ha la tabella

$$(24) \qquad \left| \begin{matrix} ia_{34}\tau_{11} & 1 - ia_{34}\tau_{12} & -a_{12} + i\delta\tau_{12} & i\tau_{11} \\ 1 + ia_{34}\tau_{12} & -ia_{34}\tau_{22} & i\delta\tau_{22} & \frac{a_{12}}{\delta} + i\tau_{22} \end{matrix} \right| .$$

Gl' integrali u_1, u_2 non sono dunque normali ai nuovi cicli, e ciò è evidente a priori, dal momento che le equazioni delle simmetrie della schiera S_1 non sono della forma $u'_i \equiv \pm \bar{u}_i + c_i$ ma della forma (12) per i valori di p, q, r, s dedotti dalle (15) ponendo $m = 2\delta - 1$, $\rho = 2$. Ma osservando che il determinante dei periodi (24) ai cicli N_1, N_2 vale $a_{34}^2\Delta - 1$, cioè per la B e per la (6), $-\frac{1}{\delta}$, si ottengono come *integrali normali ai cicli* N_i

$$(25) \qquad \begin{aligned} U_1 &= \delta[ia_{34}\tau_{22}u_1 + (1 - ia_{34}\tau_{12})u_2] \\ U_2 &= (1 + ia_{34}\tau_{12})u_1 - ia_{34}\tau_{11}u_2, \end{aligned}$$

e la *relativa tabella normale* è allora

$$(26) \qquad \left| \begin{matrix} 1 & 0 & i\delta\tau_{22} & i\tau_{12} \\ 0 & \frac{1}{\delta} & i\tau_{12} & i\frac{\tau_{11}}{\delta} \end{matrix} \right| .$$

La superficie F ammette quindi due tabelle normali di tipo reale (5) (26) *non equivalenti nel campo reale,* cioè non riducibili una all' altra con una trasformazione che *conservi la realtà degl' integrali normali.* Difatti una tale equivalenza condurrebbe, come al n.° 18, ad una trasformazione birazionale per effetto della quale ie simmetrie della schiera S_0 si muterebbero in quelle della S_1 contrariamente alle conclusioni precedenti.

Nota aggiunta durante la correzione delle bozze. — Nei riguardi dell' applicazione dei nostri procedimenti e risultati *a tutte le varietà algebriche irregolari* (di tipo reale) crediamo opportuno aggiungere alla nota (7) un ulteriore chiarimento esplicativo riguardante l' *interpretazione topologica* della formula (2) (n.° 1) e delle analoghe del testo. Tali formule, perfettamente corrette quando i *sistemi di cicli primitivi* si considerano, come a noi basta, quali *sostituti simbolici* dei corrispondenti *sistemi di periodi primitivi* degl' integrali di 1ª specie, lo sono anche in senso topologico (sostituendo al segno d' *eguaglianza* quello d' *omologia*) se riferite a *varietà algebriche prive di torsione lineare* (come le varietà abeliane e le curve algebriche), mentre nel caso delle varietà con *indice di torsione lineare* σ non nullo, l'interpretazione topologica è lecita solo a patto di *prescindere dall'aggiunta di cicli divisori dello zero*. Invero, com'è noto, ogni ciclo (lineare) di quest'ultime varietà può esprimersi come combinazione lineare a coefficienti interi dei cicli d'un *sistema fondamentale* costituito da $2p$ cicli *indipendenti* C_i e da certi q *divisori dello zero* Γ_j; e nella sostituzione unimodulare con cui si passa dal sistema C_i, Γ_j ad un sistema analogo C'_i, Γ'_j (p. es. al trasformato mediante una simmetria S) i Γ'_j si esprimono *soltanto mediante i* Γ_j, giacchè, in caso contrario i C_i dovrebbero soddisfare a relazioni d'omologia contraddicenti alla loro indipendenza. Ne segue che nelle formule esprimenti i C'_i mediante i C_i, Γ_j, i coefficienti m_{ih} dei C_h formano un determinante eguale a ± 1, e quindi che, *a patto di trascurare i* Γ_i si può attribuire ancora alle (2) significato topologico. Infine, dato che *i periodi degl'integrali di 1ª specie ai cicli* Γ_i *sono nulli*, ogni influenza di questi cicli sulle (2) si elimina nel passaggio ai periodi, onde resta confermato il *valore simbolico* affatto generale di quelle relazioni.

I sottogruppi del gruppo modulare con coefficienti del corpo di Jacobi-Eisenstein e un teorema sui gruppi finiti.

Memoria di GIOVANNI SANSONE (a Firenze).

SOMMARIO — Introduzione — § 1 - 1. L'indice $\mu(n)$ dei sottogruppi $\Gamma_{\mu(n)}$ del gruppo Γ di sostituzioni lineari unimodulari con coefficienti del campo di JACOBI-EISENSTEIN $\left(1,\ \varepsilon=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ - 2. Il poliedro fondamentale del sottogruppo $\Gamma_{\mu(1-\varepsilon)}$ — § 2 - 3. I campi fondamentali dei gruppi $\Gamma_{\mu(n)}$ - 4. Impossibilità di limitare con un numero finito di piani e sfere di riflessione i poliedri fondamentali dei gruppi $\Gamma_{\mu(n)}$, con n intero razionale pari, diverso da 2 — § 3 - 5. Relazioni fondamentali fra le sostituzioni generatrici del gruppo $\overline{\Gamma}$ di sostituzioni lineari con coefficienti del corpo $K(\varepsilon)$ con determinante ± 1 — § 4 - 6. Sulla indipendenza delle sostituzioni S, T, U, generatrici del gruppo finito $G_{2\mu(n)}$ e sulle loro relazioni caratteristiche nel gruppo $G_{2\mu(n)}$ — § 5 - 7. Dimostrazione del teorema fondamentale sui gruppi $G_{2\mu(n)}$. Lemmi preliminari - 8. Dimostrazione del teorema fondamentale nel caso di moduli primi con $2(1-\varepsilon)$ — § 6 - 9. Il teorema fondamentale per i moduli $m(1-\varepsilon)$, $3m$, $2m$, $2m(1-\varepsilon)$, $6m$ con m primo con 6 - 10. Immagine geometrica dei gruppi $G_{2\mu(1-\varepsilon)}$, $G_{2\mu(2)}$ — § 7 - 11. Il gruppo delle sostituzioni unimodulari $\begin{pmatrix}1+4ma, & 4mb\\ 4mc, & 1+4md\end{pmatrix}$, $\left[\frac{c}{1+4ma}\right]=+1$, e il caso eccezionale dei moduli $4m$ - 12. Il gruppo delle sostituzioni unimodulari $\begin{pmatrix}1+3m(1-\varepsilon)a, & 3m(1-\varepsilon^2)b\\ 3m(1-\varepsilon)c, & 1+3m(1-\varepsilon)d\end{pmatrix}$, $\left[\frac{c}{1+3m(1-\varepsilon)a}\right]_3=+1$ e il caso eccezionale dei moduli $3(1-\varepsilon)m$.

INTRODUZIONE

Nella mia Memoria *I sottogruppi del gruppo di Picard e due teoremi sui gruppi finiti analoghi al teorema del Dick* [1] e nella Nota *Le relazioni fondamentali tra le operazioni generatrici del gruppo modulare finito con coefficienti del campo di Gauss* [2] scrissi che i metodi da me trovati potevano applicarsi allo studio dei gruppi del BIANCHI di sostituzioni lineari con

[1] Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (Tomo XLVII, pp. 273-332). Nel seguito le citazioni relative a questa Memoria saranno indicate con (A).

[2] Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo XLIX.

coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginari [3]. In questa Nota infatti io studio i gruppi Γ di sostituzioni unimodulari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

con coefficienti α, β, γ, δ interi del corpo $K(\varepsilon)$, $\left(\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right)$ di JACOBI-EISENSTEIN delle radici cubiche dell'unità, ma le ricerche possono estendersi ai gruppi di sostituzioni lineari unimodulari con coefficienti dei corpi $K(i\sqrt{2})$; $K\left(\frac{-1 + i\sqrt{D}}{2}\right)$, $D = 7$, 11, 15, 19 e in generale a quei corpi il cui poliedro fondamentale abbia un solo vertice singolare [4] e si possa limitare con un numero finito di piani e sfere di riflessioni.

Il procedimento generale che si presenta è il seguente. Dato il gruppo Γ di sostituzioni lineari unimodulari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

con coefficienti di un corpo quadratico immaginario, si può determinare con un semplice ragionamento aritmetico l'indice finito $\mu(n)$ del suo sottogruppo invariante $\Gamma_{\mu(n)}$ formato dalle sostituzioni $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ caratterizzate dalle relazioni:

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1, & 0 \\ 0, & 1\end{pmatrix}, \qquad (\text{mod. } n),$$

con n intero del corpo (§ 1, (A)). Costruito il poliedro fondamentale del gruppo Γ, si determinano, combinando le riflessioni sulle facce del poliedro, le sue sostituzioni ellittiche generatrici (§ 5, (A)); queste sono anche le sostituzioni ellittiche generatrici del gruppo modulare finito $G_{\mu(n)}$ di ordine $\mu(n)$ mediante il quale Γ si rappresenta per $\Gamma_{\mu(n)}$. Un primo gruppo di relazioni tra le sostituzioni di $G_{\mu(n)}$ sono quelle che esprimono il periodo delle sue sostituzioni ellittiche generatrici, un altro gruppo di condizioni si ottiene

(3) L. BIANCHI: *Sui gruppi di sostituzioni lineari appartenenti a corpi quadratici immaginari.* (Matematische Annalen, Bd. XL; pp. 332-412).

(4) Questa circostanza si deve presentare secondo un teorema enunciato dal BIANCHI, ma ancora non dimostrato, per i corpi quadratici privi di ideali secondari. Cfr. L. BIANCHI, loc. cit. (3), p. 333.

dall'esprimere che le sostituzioni paraboliche del gruppo $\Gamma_{\mu(n)}$ si rappresentano in $G_{\mu(n)}$ con l'unità (§ 7, (A)). Per provare poi se le relazioni trovate tra le sostituzioni generatrici di $G_{\mu(n)}$ sono sufficienti a caratterizzarlo, basta dimostrare che le sostituzioni unimodulari $\begin{pmatrix} 1+na, & nb \\ nc, & 1+nd \end{pmatrix}$ con a, b, c, d interi del corpo sono esprimibili come prodotti di un numero finito di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(n)}$ (§ 8 a § 11, (A)). Questa proposizione non è in generale vera nel corpo di GAUSS $K(i)$, ove fanno eccezione i moduli $n \equiv 0 \pmod{4}$ [5], così nel corpo $K(\varepsilon)$ fanno soltanto eccezione i moduli divisibili per 2^λ, $(1-\varepsilon)^{\lambda+1}$ con $\lambda > 2$, in altre parole quei moduli che contengono il divisore 2^2, o la potenza $(1-\varepsilon)^3$ del divisore $1-\varepsilon$ del numero primo critico del corpo.

Riassumiamo ora i resultati di questa Nota.

L'indice $\mu(n)$ del gruppo $\Gamma_{\mu(n)}$ in Γ è dato dalla formula:

(1) $$\mu(n) = \frac{1}{\lambda} N^3(n) \prod_i^{1\ldots h} \left(1 - \frac{1}{N^2(p_i)}\right),$$

essendo $N(n)$ la norma del numero n, il prodotto esteso a tutti i fattori primi $p_1, p_2, \ldots, p_h$ essenzialmente distinti di n, e $\lambda = 1$ per $n = \pm 2\varepsilon^\rho$, $(\rho = 0, 1, 2)$ e $\lambda = 2$ in ogni altro caso (§ 1).

Il poliedro fondamentale del gruppo $\Gamma_{\mu(n)}$ ha almeno $\mu(n) : 3N(n)$ vertici impropri, e il gruppo $\overline{\Gamma}^0_{\mu(n)}$ ottenuto da $\Gamma_{\mu(n)}$ ampliandolo con la rotazione $z' = -z$ e la riflessione $z' = z_0$ non può limitarsi per n intero razionale pari, diverso da 2, con un numero finito di piani e sfere di riflessione del gruppo stesso (§ 2). Le sostituzioni generatrici del gruppo $\overline{\Gamma}$ ottenuto da Γ ampliandolo con la rotazione $z' = -z$ sono:

$$S = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 0, & -\varepsilon \\ \varepsilon^2, & 0 \end{pmatrix},$$

caratterizzate dalle relazioni:

(2) $$S^2 = 1, \quad T^3 = 1, \quad U^2 = 1, \quad (SU)^6 = 1, \quad (TU)^3 = 1, \quad (ST^2)^2 = 1 \qquad (§ 3).$$

Indicando con $G_{2\mu(n)}$ il gruppo modulare finito di ordine $2\mu(n)$ mediante il quale Γ si rappresenta per $\Gamma_{\mu(n)}$, si trova che nell'ipotesi che il numero

---

([5]) Cfr. la nota dell'A., loc. cit. ([2]).

$n = n_1 + n_2\varepsilon$ sia primo con $2(1-\varepsilon)$, le S, T, U considerate come sostituzioni generatrici di questo gruppo oltre che dalle (2) sono legate dalle relazioni:

$$(3)\qquad \begin{aligned} &[(US)^2(TU)^2]^{n_1}[(SU)^2(TU)^2(SU)^2]^{n_2} = 1,\\ &[(US)^2(TU)^2]^{-n_2}[(SU)^2(TU)^2(SU)^2]^{n_1-n_2} = 1, \end{aligned}$$

e ne segue il teorema: *Se i legami fra tre operazioni di natura qualsiasi* S, T, U *sono espressi dalle* (2) e (3) (o da conseguenze di queste) *ed esse sono atte a generare un gruppo finito, l'ordine del gruppo è* $2\mu(n)$ *con* $\mu(n)$ *espresso dalla* (1) (§ 4 e § 5).

Nel § 6 si dimostra che il teorema è vero per i moduli $2^\lambda(1-\varepsilon)^\mu m$ con m primo con $2(1-\varepsilon)$; $\lambda = 0, 1$; $\mu = 0, 1$; e come esempio si studiano i gruppi $G_{2\mu(1-\varepsilon)}$ e $G_{2\mu(2)}$ isomorfi rispettivamente coi gruppi ampliati del tetraedro e dell'icosaedro regolare.

Nel § 7 infine si dimostra che il teorema non sussiste per i moduli $4m$, $(1-\varepsilon)^3 m$ qualunque sia m. Tali casi eccezionali sono conseguenza dei due notevoli teoremi:

a) Tutte le sostituzioni unimodulari $\begin{pmatrix} 1+4ma, & 4mb \\ 4mc, & 1+4md \end{pmatrix}$, per le quali il simbolo di JACOBI dei residui quadratici $\left[\dfrac{c}{1+4ma}\right]$ abbia il valore $+1$ formano gruppo.

b) Tutte le sostituzioni unimodulari $\begin{pmatrix} 1+3m(1-\varepsilon)a, & 3m(1-\varepsilon^2)b \\ 3m(1-\varepsilon)c, & 1+3m(1-\varepsilon)d \end{pmatrix}$, per le quali il simbolo relativo ai residui cubici $\left|\dfrac{c}{1+3m(1-\varepsilon)a}\right|_3$ abbia il valore $+1$ formano gruppo.

§ 1. L'indice $\mu(n)$ dei sottogruppi $\Gamma_{\mu(n)}$ del gruppo Γ di sostituzioni lineari unimodulari con coefficienti interi del campo di Jacobi-Eisenstein $\left(1,\ \varepsilon = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$. Il poliedro fondamentale del sottogruppo $\Gamma_{\mu(1-\varepsilon)}$.

1. Si consideri il gruppo Γ di sostituzioni unimodulari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \qquad\qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1,$$

a coefficienti interi del corpo $K(\varepsilon)$, $\varepsilon = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$. Siccome il corpo $K(\varepsilon)$

(privo di ideali secondari) si comporta come il corpo di GAUSS agli effetti della divisibilità ([6]), ripetendo i ragionamenti del § 1, (A) ([7]) concluderemo che *il sottogruppo* $\Gamma_{\mu(n)}$ *di sostituzioni*

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \alpha - 1 \equiv \delta - 1 \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{n},$$

con n *intero del corpo* k(ε), *è un sottogruppo invariante di indice* $\mu(n)$, *con*

$$\mu(n) = \frac{1}{\lambda} N^3(n) \prod_i^{1\ldots h}\left(1 - \frac{1}{N^2(p_i)}\right),$$

essendo N(n) *la norma del numero* n, *il prodotto esteso a tutti i fattori primi* p_1, p_2,..., p_h *distinti di* n, *e con* $\lambda = 1$ *per* $n = \pm 2\varepsilon^\rho$, $(\rho = 0, 1, 2)$, *e* $\lambda = 2$ *negli altri casi.*

Si avrà ad esempio

$$\mu(1-\varepsilon) = \frac{1}{2} 3^3\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = 12; \quad \mu(2) = 4^3\left(1 - \frac{1}{16}\right) = 60.$$

2. Costruiamo il poliedro fondamentale del gruppo $\Gamma_{\mu(1-\varepsilon)}$, verificheremo così per via geometrica che si ha $\mu(1-\varepsilon) = 12$.

Infatti il gruppo di sostituzioni lineari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0 \pmod{1-\varepsilon},$$

con α, β, γ, δ interi del corpo $K(\varepsilon)$ ha per poliedro fondamentale il tetraedro regolare T_0 limitato dai tre piani,

$$\eta = 0, \quad \eta = \xi\sqrt{3}, \quad \xi\sqrt{3} + \eta = \sqrt{3}$$

e dalla sfera:

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3},$$

essendo (ξ, η, ζ) una terna di assi ortogonali con gli assi ξ, η nel piano limite del semispazio iperbolico, e il semiasse $\zeta > 0$ interno allo stesso semi-

([6]) Cfr. ad es. L. BIANCHI: *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici.* (Bologna, N. Zanichelli, 1923), p. 101 e seg.

([7]) Cfr. G. SANSONE, loc. cit. ([1]), p. 276 e seg.

spazio (8), e il gruppo considerato ha l'indice 24 nel gruppo di sostituzioni:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

Associando a T_0 il simmetrico rispetto al piano $\eta = 0$, considerando cioè il poliedro T limitato dai 4 piani (Fig. 1)

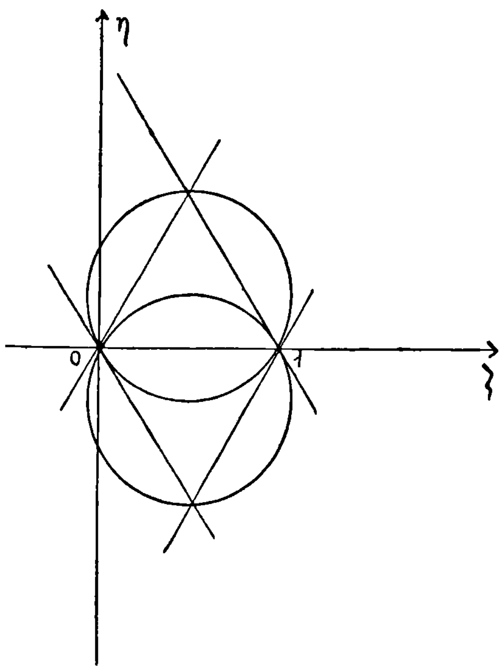

Fig. 1.

$$\eta = \pm \xi\sqrt{3}, \quad \xi\sqrt{3} \pm \eta = \sqrt{3},$$

e dalle due sfere:

$$\left(\xi - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\eta \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \zeta^2 = \frac{1}{3},$$

esso è il poliedro fondamentale del gruppo

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad (\text{mod. } 1 - \varepsilon).$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1, \quad \beta \equiv \gamma \equiv 0,$$

Tale gruppo coincide col gruppo $\Gamma_{\mu(1-\varepsilon)}$ perchè avendosi

$$\alpha\delta \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 1 - \varepsilon)$$

segue

$$\alpha - \delta \equiv \pm 1 \quad (\text{mod. } 1 - \varepsilon)$$

e cambiando al più il segno ad α, β, γ, δ, si ha

$$\alpha \equiv \delta \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 1 - \varepsilon).$$

Segue che il gruppo $\Gamma_{\mu(1-\varepsilon)}$ ha l'indice 24 nel gruppo $\overline{\Gamma}$

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

e perciò l'indice 12 in Γ.

(8) Cfr. L. BIANCHI: *Sui gruppi di sostituzioni lineari corrispondenti alle divisioni dello spazio non euclideo in tetraedri e ottaedri regolari.* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie V degli Atti, vol. XVIII, 1° sem. 1909, pp. 645-652), p. 645 e seg.

Le sostituzioni Q_1, Q_2,..., Q_{12} che dànno la rappresentazione di Γ per mezzo di $\Gamma_{\mu(1-\varepsilon)}$ formano il gruppo tetraedrale:

$$\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0, & -\varepsilon\\ \varepsilon^2, & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-\varepsilon^2, & \varepsilon^2\\ 1, & \varepsilon^2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\varepsilon, & 1\\ \varepsilon, & -\varepsilon\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\varepsilon^2, & \varepsilon\\ 0, & \varepsilon\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0, & -\varepsilon^2\\ \varepsilon, & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-\varepsilon, & 0\\ \varepsilon^2, & -\varepsilon^2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\varepsilon, & -\varepsilon\\ 0, & \varepsilon^2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & -1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1, & -\varepsilon^2\\ \varepsilon, & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\varepsilon^2, & 0\\ \varepsilon^2, & \varepsilon\end{pmatrix}.$$

§ 2. **I campi fondamentali dei gruppi $\Gamma_{\mu(n)}$.**

3. Il tetraedro T' limitato dai 3 piani

$$\xi = \frac{1}{2},\quad \xi \pm \eta\sqrt{3} = 0,$$

e dalla sfera

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

è il poliedro fondamentale del gruppo $\overline{\Gamma}$ di sostituzioni lineari

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},\quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

con α, β, γ, δ interi del corpo $K(\varepsilon)$ (9). Associando a T' il suo simmetrico rispetto al piano $\xi = \frac{1}{2}$ si ha che la piramide P limitata dai 4 piani

$$\xi \pm \eta\sqrt{3} = 0,\quad \xi \pm \eta\sqrt{3} = 1,$$

e dalle due sfere

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,\quad (\xi - 1)^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

è il poliedro fondamentale del gruppo Γ (Fig. 2).

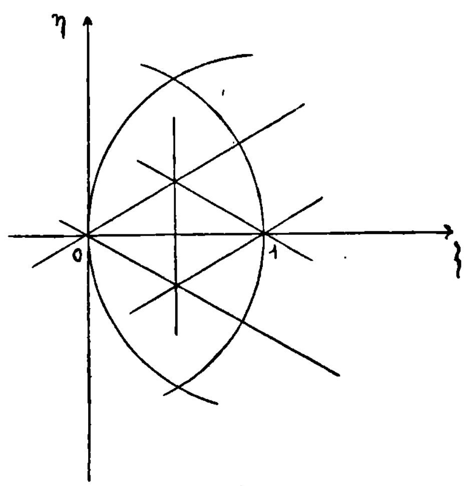

Fig. 2.

Chiamando con Σ la divisione regolare del semispazio iperbolico operata dalla piramide P e considerando la rete dei prismi a base quadrangolare determinata dai due sistemi di piani $\xi \pm \eta\sqrt{3} = l$ con l intero arbitrario, troviamo che ad ogni prisma della rete appartiene una cella di Σ avente per

(9) Cfr. L. Bianchi, loc. cit. (3), p. 365.

vertice il punto all'infinito V_∞ del semispazio iperbolico. Escluso il caso $n = \pm(1-\varepsilon)^\rho$, $\rho = 0, 1, 2$, da noi esaminato al § 1, i movimenti di $\Gamma_{\mu(n)}$ che lasciano fisso V_∞ sono le traslazioni $z' = z + nb$ con b intero arbitrario. Segue che nel parallelogramma Q' di vertici o, n, $n\varepsilon$, $-n\varepsilon^2$ non vi sono punti equivalenti per una traslazione $z' = z + nb$ (Fig. 3).

Infatti le traslazioni $z' = z + n\varepsilon^\rho$, $\rho = 0, 1, 2$, inducono in un punto una traslazione equipollente al vettore $\pm n\varepsilon^\rho$ e portano pertanto un punto interno a Q' in un punto esterno; le traslazioni $z' = z \pm n(1-\varepsilon)\varepsilon^\rho$, $\rho = 0, 1, 2$ indu-

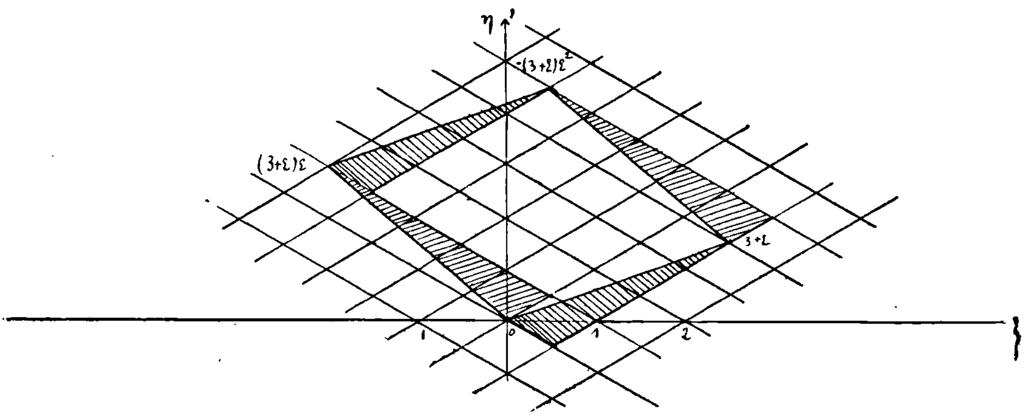

Fig. 3.

cono in un punto una traslazione di ampiezza uguale alla diagonale di Q' che unisce i vertici n, $n\varepsilon$ e per esse i punti interni a Q' sono portati in punti esterni; ogni altra traslazione $z' = z + nb$ è di ampiezza maggiore della diagonale maggiore di Q', quindi in Q' non vi sono punti equivalenti per le traslazioni considerate.

Consideriamo ora il prisma formato dai 4 piani normali al piano limite che segnano su di esso il parallelogrammo Q'; i punti interni a questo prisma non sono equivalenti per le sostituzioni di Γ che lasciano fisso V_∞. Con cambiamenti leciti, a questo prisma possiamo sostituire un insieme I di celle di Σ che non sono equivalenti rispetto a $\Gamma_{\mu(n)}$ e tali che ogni altra cella di Σ di vertice V_∞ sia equivalente ad una cella di I per una traslazione di $\Gamma_{\mu(n)}$.

Le celle di I sono in numero uguale al rapporto tra l'area del parallelogrammo Q' che è $N(n)\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e l'area del parallelogrammo limitato dai 4 piani $\xi \pm \eta\sqrt{3} = 0$, $\xi \pm \eta\sqrt{3} = 1$, che è $\dfrac{1}{6}\sqrt{3}$, cioè sono $3(n_1^2 + n_2^2 - n_1 n_2)$, (v. Fig. 3, caso $n = 3 + \varepsilon$).

(continua)

Ne segue allora [10] che si può costruire un poliedro fondamentale $P_{\mu(n)}$ di $\Gamma_{\mu(n)}$ composto di $\mu(n)$ celle congruenti a P tale che ogni cella ne abbia aderente un' altra almeno per un vertice, e che attorno ad ogni suo vertice improprio vi siano $3N(n)$ celle di Σ e quindi con $\mu(n):3N(n)$ vertici improprii, e perciò questo numero è il minor numero di vertici impropri del poliedro fondamentale di $\Gamma_{\mu(n)}$.

4. È ancora facile provare che supposto il modulo n intero razionale pari, e diverso da 2, ampliando il gruppo $\Gamma_{\mu(n)}$ con la rotazione $z'=-z$ e la riflessione $z'=z_0$ si ha un gruppo $\Gamma^0{}_{\mu(n)}$ di cui il poliedro fondamentale non può limitarsi con un numero finito di facce e sfere di riflessione del gruppo stesso. Infatti la riflessione di $\overline{\Gamma}^0{}_{\mu(n)}$ sono:

$$z'=\frac{(1+na_1+na_2\varepsilon)z_0+nib_1\sqrt{3}}{nic_1\sqrt{3}z_0+(1+na_1+na_2\varepsilon^2)},\quad z'=\frac{(1+na_1+na_2\varepsilon)z_0+nb_1}{nc_1z_0-(1+na_1+na_2\varepsilon^2)},$$

essendo rispettivamente

$$(1+na_1+na_2)^2-3na_2(1+na_1)+3n^2b_1c_1=1,$$
$$(1+na_1+na_2)^2-3na_2(1+na_1)+n^2b_1c_1=1,$$

e per $c_1 \neq 0$ le corrispondenti sfere di riflessione hanno per equazione:

$$\left(\xi-\frac{a_2}{2c_1}\right)^2+\left(\eta+\frac{2(1+na_1)-na_2}{2nc_1\sqrt{3}}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{3n^2c_1^2},$$
$$\left(\xi-\frac{2(1+na_1)-na_2}{2nc_1}\right)^2+\left(\eta-\frac{a_2\sqrt{3}}{2c_1}\right)^2+\zeta^2=\frac{1}{n^2c_1^2}.$$

mentre per $c_1=0$, avendo supposto $n\neq 2$, si ha $a_2=a_1=0$ e i corrispondenti piani di riflessione hanno per equazione $\xi=\frac{n}{2}b$, $\eta=\frac{n}{2}b\sqrt{3}$, con b intero qualunque.

Proviamo che il punto di coordinate $\left(\frac{q}{n}, \frac{q\sqrt{3}}{n}, 0\right)$, con q primo con n non solo non è sull' intersezione di due piani di riflessione (evidente) ma non è nè interno nè su qualsiasi sfera di riflessione.

---

(10) Cfr. p. 287 (A).

Infatti $\left(\frac{q}{n}, \frac{q\sqrt{3}}{n}, 0\right)$ può essere interno o su una sfera di riflessione quando si abbia:

$$\left[\frac{q}{n} - \frac{a_2}{2c_1}\right]^2 + \left[\frac{q\sqrt{3}}{n} + \frac{2(1+na_1) - na_2}{2nc_1\sqrt{3}}\right]^2 \leq \frac{1}{3n^2c_1^2},$$

$$\left[\frac{q}{n} - \frac{2(1+na_1) - na_2}{2nc_1}\right]^2 + \left[\frac{q\sqrt{3}}{n} - \frac{a_2\sqrt{3}}{2c_1}\right]^2 \leq \frac{1}{n^2c_1^2},$$

ovvero

$$3(2c_1q - na_2)^2 + [6qc_1 + 2(1+na_1) - na_2]^2 \leq 4,$$

$$[2c_1q - 2(1+na_1) + na_2]^2 + 3(2c_1q - na_2)^2 \leq 4,$$

e per la parità di n, deve essere rispettivamente:

$$2c_1q - na_2 = 0, \quad 6c_1q + 2(1+na_1) - na_2 = 0,$$

$$2c_1q - 2(1+na_1) + na_2 = 0, \quad 2c_1q = na_2$$

dalle quali $-2c_1q = 1 + na_1$; $2c_1q = 1 + na_1$ le quali sono impossibili avendo supposto n pari.

Ne segue, come si era prima affermato, che il poliedro fondamentale di $\overline{\Gamma}^0{}_{\mu(n)}$ non può limitarsi con un numero finito di piani e sfere di riflessioni del gruppo.

§ 3. Relazioni fondamentali fra le sostituzioni generatrici del gruppo $\overline{\Gamma}$.

5. Nella Memoria citata del BIANCHI ([11]) è dimostrato che il gruppo $\overline{\Gamma}^0$ di sostituzioni di prima e seconda specie

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\gamma z_0 + \delta}, \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$$

α, β, γ, δ, interi del corpo $K(\varepsilon)$ ha per poliedro fondamentale il tetraedro T con un vertice improprio limitato dalle 4 facce:

$$\eta = 0, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \xi = \eta\sqrt{3}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1.$$

([11]) L. BIANCHI, loc. cit. ([3]), p. 365.

Il gruppo $\overline{\Gamma}^0$ si può quindi generare con le 4 riflessioni:

$$z' = z_0, \quad z' = -z_0 + 1, \quad z' = \frac{\varepsilon z_0}{-\varepsilon^2}, \quad z' = \frac{1}{z_0},$$

che indicheremo rispettivamente con A, B, C, D, si ha perciò

$$A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} z_0, \quad B = \begin{pmatrix} -1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} z_0, \quad C = \begin{pmatrix} \varepsilon, & 0 \\ 0, & -\varepsilon^2 \end{pmatrix} z_0, \quad D = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} z_0,$$

con

$$A^2 = 1, \quad B^2 = 1, \quad C^2 = 1, \quad D^2 = 1.$$

Avendosi poi

$$AD = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} z, \quad BD = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix} z, \quad DC = \begin{pmatrix} 0, & -\varepsilon \\ \varepsilon^2, & 0 \end{pmatrix} z,$$

quindi

$$(AD)^2 = 1, \quad (BD)^3 = 1, \quad (CD)^2 = 1, \quad DA = AD, \quad DB = (BD)^2, \quad DC = CD$$

segue che *le sostituzioni del gruppo* $\overline{\Gamma}$

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1,$$

(α, β, δ, γ interi del corpo $K(\varepsilon)$) *si generano con le 3 sostituzioni ellittiche:*

$$S = AD = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad T = BD = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 1 \end{pmatrix}, \quad U = CD = \begin{pmatrix} 1, & -\varepsilon \\ \varepsilon^2, & 0 \end{pmatrix},$$

con

$$S^2 = 1, \quad T^3 = 1, \quad U^2 = 1.$$

Vogliamo trovare tutte le relazioni indipendenti tra le S, T, U. Si consideri il tetraedro T' ottenuto associando a T il simmetrico rispetto al piano $\eta = 0$ cioè il tetraedro limitato dai 4 piani (Fig. 4):

$$\xi = \pm \eta\sqrt{3}, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

i cui vertici sono:

$$V_0 = (0,\ 0,\ 1), \quad V_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad V_2 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}\right), \quad V_3 = \infty$$

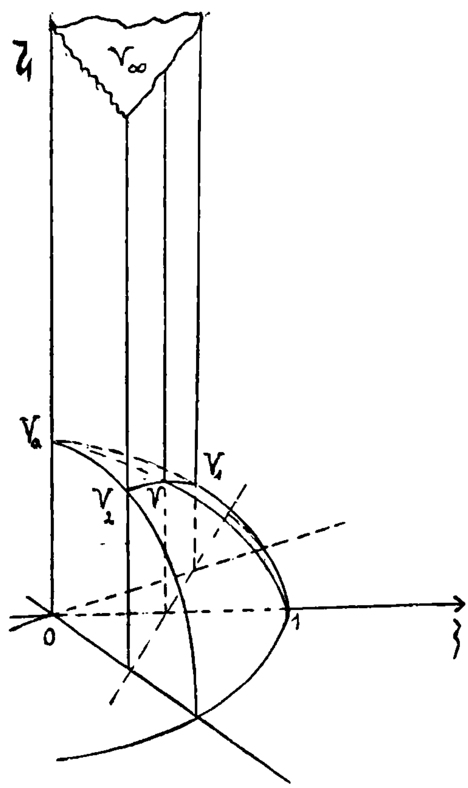

Fig. 4.

ed indichi $V = \left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ il punto medio dell' arco $\widehat{V_1 V_2}$. È facile provare ([12]) che ogni relazione fra le sostituzioni del gruppo $\overline{\Gamma}$ è un prodotto di un numero finito di trasformate delle rotazioni attorno agli spigoli

$$V_0V;\quad V_1V_2;\quad V_0V_1;\quad V_0V_2;$$
$$V_0V_\infty;\quad V_1V_\infty;\quad V_2V_\infty;\quad VV_\infty;$$

le quali hanno rispettivamente per espressione:

$$S^2,\quad T^3,\quad U^2,\quad S(U^2)S,\quad (SU)^6,$$
$$(TU)^3,\quad ST^2(TU)^3TS,\quad (ST^2)^2,$$

e di queste la quarta è conseguenza della terza, la settima della sesta, restano fra le S, T, U, le relazioni indipendenti:

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned} &S^2 = 1, \quad T^3 = 1, \quad U^2 = 1,\\ &(SU)^6 = 1, \quad (TU)^3 = 1, \quad (ST^2)^2 = 1. \end{aligned}$$

§ 4. Sulla indipendenza delle sostituzioni *S*, *T*, *U* considerate come sostituzioni generatrici del gruppo finito $G_{2\mu(n)}$, e sulle loro relazioni caratteristiche nel gruppo stesso.

6. Il gruppo $\Gamma_{\mu(n)}$ ha nel gruppo $\overline{\Gamma}$ l'indice $2\mu(n)$, e le $2\mu(n)$ sostituzioni a determinante ± 1 con le quali Γ si rappresenta per $\Gamma_{\mu(n)}$ formano un gruppo finito $G_{2\mu(n)}$ di ordine $2\mu(n)$, ove si considerino perciò come identiche due sostituzioni i cui elementi siano ordinatamente congrui (modulo n), oppure con gli elementi di una congrua ordinatamente agli elementi opposti dell'altra (modulo n). Se costruiamo i tre gruppi finiti di ordine 6, 12, 12 generati dalle operazioni T, S; S, U; U, T si verifica facilmente che qualunque sia il modulo n, non può una qualunque delle sostituzioni U, T, S esprimersi come un

([12]) Cfr. pag. 295 (A).

prodotto formato con le altre due sostituzioni, ossia le S, T, U considerate come operazioni del gruppo $G_{2\mu(n)}$ sono indipendenti.

Per determinare delle altre relazioni fra le S, T, U oltre le (I), troviamo le sostituzioni di $\Gamma_{\mu(n)}$ che lasciano fisso V_∞. Escluso il caso $n = \pm(1-\varepsilon)\varepsilon^\rho$, $\rho = 0, 1, 2$ esse hanno la forma:

$$z' = \begin{pmatrix} 1, & nl \\ 0, & 1 \end{pmatrix} z \tag{4}$$

e posto

$$n = n_1 + n_2\varepsilon, \quad l = l_1 + l_2\varepsilon,$$

quindi

$$(n_1 + n_2\varepsilon)(l_1 + l_2\varepsilon) = l_1(n_1 + n_2\varepsilon) + l_2[-n_2 + (n_1 - n_2)\varepsilon]$$

le sostituzioni precedenti si compongono con le potenze delle traslazioni

$$\begin{pmatrix} 1, & n_1 + n_2\varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1, & n_1 - n_2 - n_2\varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$$

e per queste nel gruppo $G_{2\mu(n)}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} 1, & n_1 + n_2\varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = 1, \quad \begin{pmatrix} 1, & n_1 - n_2 - n_2\varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = 1.$$

Ma si ha:

$$\begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = (US)^2(TU)^2, \quad \begin{pmatrix} 1, & \varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = (SU)^2(TU)^2(SU)^2,$$

e le precedenti diventano:

$$\begin{aligned} &[(US)^2(TU)^2]^{n_1}[(SU)^2(TU)^2(SU)^2]^{n_2} = 1, \\ &[(US)^2(TU)^2]^{-n_2}[(SU)^2(TU)^2(SU)^2]^{n_1-n_2} = 1. \end{aligned} \tag{II}$$

Inversamente dalle (II) e (I) segue che ogni sostituzione $z' = \begin{pmatrix} 1, & nl \\ 0, & 1 \end{pmatrix} z$ nel gruppo $G_{2\mu(n)}$ si rappresenta con l'identità. Basterà provare per questo che le due sostituzioni $(US)^2(TU)^2$ e $(SU)^2(TU)^2(SU)^2$ sono permutabili, cioè basterà provare che:

$$(US)^2(TU)^2(SU)^2(TU)^2(SU)^2 = (SU)^2(TU)^2(SU)^2(US)^2(TU)^2$$

ovvero avendosi $(SU)^2(US)^2 = 1$ e $(TU)^3 = 1$, basterà provare che:

$$(US)^2(TU)^2(SU)^2(TU)^2(SU)^2 = (SU)^2 TU$$

e moltiplicando a sinistra per $(SU)^2$ e a destra per $(TU)^2(SU)^2$ occorre verificare che:

$$(TU)^2(SU)^2(TU)^2(SU)^2(TU)^2(SU)^2 = [(TU)^2(SU)^2]^3 = 1.$$

Ma è

$$(TU)^2(SU)^2 = UT^2(SU)^2 = USTUSU = US(TU)(US)^{-1}$$

perciò

$$[(TU)^2(SU)^2]^3 = [(US)(TU)(US)^{-1}]^3 = (US)(TU)^3(US)^{-1} = 1.$$

Notiamo infine che ogni sostituzione parabolica del gruppo $\Gamma_{\mu(n)}$ è una trasformata della (4) ([13]), segue che le (II) esprimono le relazioni fra le S, T, U che si hanno dalla condizione che le sostituzioni paraboliche del gruppo $\Gamma_{\mu(n)}$ si rappresentano nel gruppo con l'unità. Dimostreremo nel § seguente che le (I) e (II) rappresentano tutte le relazioni indipendenti tra le operazioni del gruppo $G_{2\mu(n)}$ quando il modulo n non è divisibile per 2^2, od $(1-\varepsilon)^3$ cioè ogni relazione fra le S, T, U in $G_{\mu(n)}$ è conseguenza delle (I) e (II), segue quindi il teorema: *Se i legami fra tre operazioni* S, T, U *sono espressi dalle relazioni:*

$$\text{(I)}^* \qquad S^2 = 1, \quad T^3 = 1, \quad U^2 = 1, \quad (SU)^6 = 1, \quad (TU)^3 = 1, \quad (ST^2)^2 = 1,$$

$$\text{(II)}^* \qquad \begin{aligned} &[(US)^2(TU)^2]^{n_1}[(SU)^2(TU)^2(SU)^2]^{n_2} = 1, \\ &[(US)^2(TU)^2]^{-n_2}[(SU)^2(TU)^2(SU)^2]^{n_1-n_2} = 1, \end{aligned}$$

(o da loro conseguenze) *e il numero* $\mathrm{n} = \mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2\varepsilon$ *non è divisibile per* 2^2 *e* $(1-\varepsilon)^3$, *ed esse sono atte a generare un gruppo finito, il gruppo da esse generato è isomorfo oloedricamente col gruppo modulare* $\mathrm{G}_{2\mu(n)}$ *di ordine*

$$\text{(III)}^* \qquad 2\mu(n) = \frac{2}{\lambda} N^3(n) \prod_i^{1\ldots h}\left(1 - \frac{1}{N^2(p_i)}\right).$$

prendendo $\lambda = 1$ *per* $\mathrm{n} \equiv \pm 2\varepsilon^\rho$, $(\rho = 0, 1, 2)$ *e* $\lambda = 2$ *negli altri casi, e il prodotto esteso a tutti i fattori primi essenzialmente distinti di* $\mathrm{n}_1 + \mathrm{n}_2\varepsilon$.

§ 5. Dimostrazione del teorema fondamentale sui gruppi $G_{2\mu(n)}$ nel caso di moduli primi con $2(1-\varepsilon)$.

7. Una sostituzione $\Omega = S^{\alpha_1}T^{\beta_1}U^{\gamma_1}S^{\alpha_2}T^{\beta_2}U^{\gamma_2}\ldots$ rappresenta nel gruppo $G_{2\mu(n)}$ l'identità quando si abbia $\Omega = 1$, oppure

$$\text{(5)} \qquad \Omega \equiv \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \qquad (\text{mod. } n).$$

([13]) Cfr. p. 304 (A).

Nel primo caso, come si è detto al § 3 la Ω è conseguenza delle (1), nel secondo caso, Ω ha la forma:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1+na, & nb \\ nc, & 1+nd \end{pmatrix} \tag{6}$$

e il teorema sarà dimostrato ove si provi che per n non divisibile per 2^2, $(1-\varepsilon)^3$ la (6) è il prodotto di un numero finito di trasformate della sostituzione parabolica $\begin{pmatrix} 1, & nk \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$. Seguiremo per questo la via già tenuta nella memoria citata ([14]) riconducendo il teorema a quello del DICK, (gruppo modulare con coefficienti del campo minimo di razionalità).

Premettiamo le seguenti osservazioni ([15]):

Osservazione 1ª. *Se la sostituzione unimodulare* $\begin{pmatrix} 1+na, & nb \\ nc, & 1+nd \end{pmatrix}$ *è un prodotto di sostituzioni paraboliche di* $\Gamma_{\mu(n)}$, *anche la sostituzione unimodulare* $\begin{pmatrix} 1+na, & nb' \\ nc, & 1+nd' \end{pmatrix}$ *è un prodotto di sostituzioni paraboliche di* $\Gamma_{\mu(n)}$.

Osservazione 2ª ([16]). *Se la sostituzione unimodulare* $\begin{pmatrix} 1+na, & nb \\ nc, & 1+nd \end{pmatrix}$ *è un prodotto di sostituzioni paraboliche di* $\Gamma_{\mu(n)}$ *anche la sostituzione* $\begin{pmatrix} 1+na, & \pm nb\varepsilon^{-\rho} \\ \pm nc\varepsilon^{\rho}, & 1+nd \end{pmatrix}$ *è un prodotto di sostituzioni paraboliche di* $\Gamma_{\mu(n)}$.

Seguono i soliti Lemmi, ci limiteremo però a dare quelle dimostrazioni che subiscono qualche modificazione.

Lemma 1°. *Data una sostituzione* $\Omega = \begin{pmatrix} 1+na, & nb \\ nc, & 1+nd \end{pmatrix}$ *esiste una sua trasformata, che moltiplicata per sostituzioni paraboliche di* $\Gamma_{\mu(n)}$ *assume la forma* $\begin{pmatrix} 1+N\alpha, & N\beta \\ N\gamma, & 1+N\delta \end{pmatrix}$ *con* N *multiplo arbitrario di* n.

Sia $N = nq$, e supponiamo dapprima che nella Ω sia c primo con q. Sia allora x radice della congruenza $a - cx \equiv 0 \pmod{q}$, la trasformata di Ω:

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 1, & x \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} 1, & -x \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+n(a-cx), & nb_1 \\ nc, & 1+nd_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+nqa_1, & nb_1 \\ nc, & 1+nd_1 \end{pmatrix}$$

ha già il primo coefficiente $\equiv 1$ modulo $nq = N$.

([14]) Cfr. § 10, p. 311 e seg. (A).
([15]) Cfr. loc. cit. ([2]), n. 2.
([16]) Cfr. loc. cit. ([2]), n. 2.

Sia ora $\dfrac{c \mid q}{r \;\; k}$, $\dfrac{b_1 \mid q}{s \;\; l}$ cioè $c = kq + r$, $b_1 = lq + s$ si ha:

$$\Omega_2 = \Omega_1 \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -nr, & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1, & -ns \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + nq\alpha, & nq\beta \\ nq\gamma, & 1 + nd_2 \end{pmatrix}$$

ed essendo Ω_2 unimodulare, è $d_2 \equiv 0$ (mod. q) cioè $d_2 = q\delta$ e quindi la Ω_2 ha la forma richiesta.

Quando nella Ω non sia c primo con q, se poniamo y uguale al prodotto di tutti i fattori primi di q non contenuti in c, nella sostituzione:

$$\Omega_3 = \Omega \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ ny, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + na, & nb \\ 1 + n[c + y(1 + na)], & 1 + nd_1 \end{pmatrix}$$

è $c + y(1 + na)$ primo con q e perciò possiamo operare sulla Ω_3 come si è operato prima sulla Ω.

Più in particolare ragionando come nel Lemma 1° del § 10 della Memoria citata (A) si ha:

Lemma 2°. *Data una sostituzione unimodulare* (6), *si può moltiplicarla a destra e a sinistra per opportune trasformate della sostituzione parabolica* $\begin{pmatrix} 1, & \mathrm{nk} \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ *in guisa che la sostituzione prodotta abbia la forma:*

$$\Omega' = \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha, & N\beta \\ N\gamma & 1 + N^2\delta \end{pmatrix} \tag{7}$$

con α, β, γ, δ *interi del corpo* K(ε), N *intero razionale*, (N *multiplo arbitrario non nullo di* n) *e quando ci occorra* N $\equiv 0$ (mod. 12).

Nel seguito N, ove non si avverta espressamente indica un numero intero razionale.

Lemma 3°. *Se una sostituzione* Ω *ha la forma* (7), *è lecito moltiplicarla per una sostituzione parabolica di* $\Gamma_{\mu(n)}$ *in guisa che la parte reale e il coefficiente di* ε *di* γ *siano primi tra loro.*

Si ha infatti:

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ Nx, & 1 \end{pmatrix} \Omega = \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha, & N\beta \\ N[\gamma + x(1 + N^2\delta)], & 1 + N^2\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha, & N\beta \\ N\pi, & 1 + N^2\delta \end{pmatrix}$$

con $\pi = \gamma + x(1 + N^2\delta)$. Supposto $1 + N^2\delta$ primo con 6, si può trovare un x_0 tale che sia

$$\gamma + x_0(1 + N^2\delta) \equiv 2 - \varepsilon \qquad \text{(mod. 6)}, \tag{8}$$

e posto $x = x_0 + 6t$ si ha allora:

$$\pi = \gamma + x_0(1 + N^2\delta) + 6(1 + N^2\delta)t.$$

Il numero $6(1 + N^2\delta)$ è per le ipotesi fatte primo con $\gamma + x_0(1 + N^2\delta)$, si può perciò assegnare all'indeterminata t ([17]) un valore per il quale π risulti primo complesso; esso è per la (8) di primo grado, e perciò ha la parte reale e il coefficiente di ε primi tra loro. Quando non sia $1 + N^2\delta$ primo con 6, posto h uguale al prodotto dei fattori primi di 6 non contenuti in $1 + N^2\delta$, la sostituzione

$$\Omega_1 = \Omega\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ Nh, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha, & N\beta \\ N\gamma_1, & 1 + N^2\delta_1 \end{pmatrix}$$

ha il quarto coefficiente primo con 6.

Lemma 4°. *Se nella sostituzione* $\Omega = \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{N}^2(\mathrm{a}_1 + \mathrm{a}_2\varepsilon), & \mathrm{N}(\mathrm{b}_1 + \mathrm{b}_2\varepsilon) \\ \mathrm{N}(\mathrm{c}_1 + \mathrm{c}_2\varepsilon), & 1 + \mathrm{N}^2(\mathrm{d}_1 + \mathrm{d}_2\varepsilon) \end{pmatrix}$, c_1 *e* c_2 *sono primi tra loro, ad essa, salvo moltiplicarla per sostituzioni paraboliche di* $\Gamma_{\mu(\mathrm{n})}$ *si può dare la forma:*

$$\begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha, & N(c_1 + c_2\varepsilon^2)\beta \\ N(c_1 + c_2\varepsilon), & 1 + N^2\delta \end{pmatrix},$$

con α, β, δ *interi razionali.*

Può evidentemente supporsi $c_1 - c_2 \neq 0$, perchè ove si abbia $c_1 - c_2 = 0$ cioè $c_1 = c_2$ per l'ipotesi fatta che c_1 e c_2 siano primi tra loro, si ha $c_1 = c_2 = \pm 1$ e perciò $c_1 + c_2\varepsilon = \pm \varepsilon^2$, e la trasformata della sostituzione Ω

$$\begin{pmatrix} 1, & \pm\alpha\varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} 1, & \mp\alpha\varepsilon \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & N\beta \\ \pm N\varepsilon^2, & 1 \mp N^2\beta\varepsilon^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & N\beta \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \pm N\varepsilon^2, & 1 \end{pmatrix}$$

è un prodotto di sostituzioni paraboliche.

Supposto allora c_1 e c_2 primi tra loro, $c_1 - c_2 \neq 0$, si possono determinare gli interi x_1 e x_2, y_1 e y_2 in guisa che si abbia rispettivamente:

$$(c_1 - c_2)x_2 + c_2 x_1 + d_2 = 0, \quad (c_1 - c_2)y_2 + c_2 y_1 + a_2 = 0$$

([17]) Quì facciamo uso del teorema di DIRICHLET sulla progressione aritmetica esteso da E. ECHE alle progressioni $a + bx$ con a e b interi di un corpo $K(\theta)$ e con a primo con l'ideale principale (b). Cfr. E. ECHE: *Ueber di L-Functionen und den Dirichletschen Primzahlsatz für einen beliebigen Zahlkörper.* (Nachrichten von der K. Gessellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math. phys. Klasse, 1917, pp. 299-318) p. 300.

e la sostituzione

$$\begin{pmatrix}1, & N(x_1 + x_2\varepsilon)\\ 0, & 1\end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix}1, & N(y_1 + y_2\varepsilon)\\ 0, & 1\end{pmatrix}$$

ha la forma richiesta.

Lemma 5°. *Se* Ω *è una sostituzione del gruppo* $\Gamma_{\mu(n)}$, *si possono determinare due prodotti di sostituzioni paraboliche* S_1, S_2 *di* $\Gamma_{\mu(n)}$ *tali che si abbia:*

$$S_1 \Omega S_2 = \begin{pmatrix}1 + N^2\alpha, & N(1 + N^2\gamma_0)\beta\\ N(1 + N^2\gamma), & 1 + N^2\delta\end{pmatrix}$$

con α, β, δ *interi razionali,* (γ, γ_0 *interi coniugati*).

Infatti per il Lemma precedente ad Ω può darsi la forma

$$\begin{pmatrix}1 + N^2\alpha, & N(c_1 + c_2\varepsilon^2)\beta\\ N(c_1 + c_2\varepsilon), & 1 + N^2\delta\end{pmatrix},$$

e supporre in essa $1 + N^2\alpha$ primo con 6.

Consideriamo il prodotto

$$\text{(9)} \qquad \begin{pmatrix}1 + N^2\alpha, & N(c_1 + c_2\varepsilon^2)\beta\\ N(c_1 + c_2\varepsilon), & 1 + N^2\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0\\ Nx, & 1\end{pmatrix} = \Omega_1$$

e indicando con x_0 un intero complesso radice della congruenza

$$\text{(10)} \qquad c_1 + c_2\varepsilon + (1 + N^2\alpha)x_0 \equiv 1 \pmod{N^2}$$

si scelga l'intero t in guisa che il numero:

$$\pi = c_1 + c_2\varepsilon + x_0(1 + N^2\alpha) + N^2(1 + N^2\alpha)t = 1 + N^2\gamma$$

sia un numero primo ([18]). Se π è di secondo grado (intero razionale), la Ω_1 per le osservazioni 1ª e 2ª è un prodotto di sostituzioni paraboliche; se π è di primo grado, perciò colla parte reale e il coefficiente di ε primi tra loro, nella (9), posto $x = x_0 + N^2t$, possiamo operare come abbiamo indicato nel lemma precedente e ne segue il lemma ora enunciato.

Lemma 6°. *Una sostituzione* $\Omega = \begin{pmatrix}1 + N^2cc_0\alpha, & Nc_0\beta\\ Nc\gamma, & 1 + N^2cc_0\delta\end{pmatrix}$ *con* α, β, γ, δ *interi razionali,* c *e* c_0 *interi coniugati è un prodotto di sostituzioni paraboliche di* $\Gamma_{\mu(n)}$ ([19]).

([18]) Cfr. ([17]).

([19]) Cfr. 10 (A), p. 315.

Corollario 1°. *Se una sostituzione (unimodulare)* $\Omega = \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha, & Nc_0\beta \\ Nc\gamma, & 1 + N^2\delta \end{pmatrix}$ *con* α, β, γ, δ *interi assoluti è un prodotto di sostituzioni paraboliche di* $\Gamma_{\mu(N)}$ *anche la sostituzione unimodulare* $\Omega_1 = \begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha, & Nc_0\beta_1 \\ Nc\gamma_1, & 1 + N^2\delta \end{pmatrix}$ *con* β_1 *e* γ_1 *interi assoluti* ($\beta_1\gamma_1 = \beta\gamma$) *è un prodotto di sostituzioni paraboliche di* $\Gamma_{\mu(N)}$ ([20]).

Corollario 2°. *Se la sostituzione* $\begin{pmatrix} 1 + na, & nc_0R_2 \\ ncR_1, & 1 + nd \end{pmatrix}$ *con* n, a, d, R_1, R_2 *interi assoluti è un prodotto di sostituzioni paraboliche di* $\Gamma_{\mu(n)}$, *anche la sostituzione* $\begin{pmatrix} 1 + na, & nc_0R'_2 \\ ncR'_1, & 1 + nd \end{pmatrix}$ *con* R'_1, R'_2 *interi assoluti,* $R'_1R'_2 = R_1R_2$ *è un prodotto di sostituzioni paraboliche di* $\Gamma_{\mu(n)}$ ([21]).

Lemma 7°. *Se* Ω *è una sostituzione del gruppo* $\Gamma_{\mu(N)}$, *la sostituzione* Ω^6 *è un prodotto di sostituzioni paraboliche di* $\Gamma_{\mu(N)}$.

Diremo che una sostituzione Ω appartiene all' esponente h, quando h è il più piccolo esponente positivo per il quale si abbia $\Omega^h = S$ con S prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(N)}$.

Si può dimostrare ([22]):

a) se una sostituzione appartiene all'esponente h, qualsiasi sua trasformata moltiplicata per un numero finito di sostituzioni paraboliche arbitrarie appartiene all'esponente h;

b) data una sostituzione Ω ad essa se ne può sostituire un'altra

$$\begin{pmatrix} 1 + N^2\alpha, & N(1 + N^2\gamma_0)\beta \\ N(1 + N^2\gamma), & 1 + N^2\delta \end{pmatrix}, \tag{11}$$

con α, β, δ interi razionali, che appartiene allo stesso esponente h, ed h deve risultare un divisore dell'indicatore di Gauss

$$L = \varphi\left[\{1 + N^2\gamma + (1 + N^2\alpha)(y_1 + y_2\varepsilon)\}\{1 + N^2\gamma_0 + (1 + N^2\alpha)(y_1 + y_2\varepsilon^2)\}\right]$$

essendo $1 + N^2\gamma + (1 + N^2\alpha)(y_1 + y_2\varepsilon)$ un numero colla parte reale e il coefficiente di ε primi tra loro, e $1 + y_1 + y_2\varepsilon$ primo con N.

Supponiamo come si è detto al lemma 1°, $N \equiv 0$ (mod. 12) e cominciamo dal provare che se h ha un divisore primo dispari p, esso deve essere uguale

([20]) Cfr. 10 (A), p. 315.
([21]) Cfr. loc. cit. ([2]), n. 2.
([22]) Cfr. 10 (A), p. 316.

a 3; per questo dimostriamo che preso un numero primo dispari $p \neq 3$ si possono determinare y_1 e y_2 in guisa che L non sia divisibile per p.

Si può supporre nella (11), $1 + N^2\alpha$ primo con p, ([23]), e siano x ed a due soluzioni delle congruenze

$$(12) \qquad \begin{cases} 1 + N^2\gamma + x(1 + N^2\alpha) \equiv 2 & (\text{mod. } 9p^2), \\ 1 + x + 9p^2 a \equiv 1 - \varepsilon & (\text{mod. } 8). \end{cases}$$

I numeri x e a esistono, essendo $9p^2$ primo con $1 + N^2\alpha$, ed 8 primo con $9p^2$. Essendo per le ipotesi fatte il numero $8 \times 9p^2(1 + N^2\alpha)$ primo con $1 + N^2\gamma + (x + 9p^2 a)(1 + N^2\alpha)$ si può scegliere l'indeterminata z in guisa che il numero

$$(13) \qquad \pi = 1 + N^2\gamma + (x + 9p^2 a)(1 + N^2\alpha) + 8 \times 9p^2(1 + N^2\alpha)z$$

sia primo ([24]) e poichè non può aversi insieme

$$\begin{cases} \pm 5\varepsilon^\rho \equiv 2 & (\text{mod. } 3) \\ \pm 5\varepsilon^\rho \equiv 1 - \varepsilon & (\text{mod. } 2) \end{cases}$$

segue che π è di primo grado, inoltre possiamo scegliere z in guisa che π sia in modulo maggiore di N^2 e perciò primo con N^2.

Si ha poi dalla (13) e dalla prima delle (12)

$$\pi\pi_0 \equiv 4 \qquad (\text{mod. } 9p^2)$$

e perciò

$$\pi\pi_0 - 1 \equiv 3 \qquad (\text{mod. } 9p^2)$$

ossia $L = \varphi(\pi\pi_0) = 3 + 9p^2 q$, che non è divisibile per p, supposto $p \neq 3$.

Si ha di più che la massima potenza di 3 che divide L è il numero 3 stesso, perciò h può contenere come divisore dispari al massimo 3.

Si osservi ancora che dalla (13) e dalla seconda della (12) segue:

$$\pi\pi_0 \equiv (1 - \varepsilon)(1 - \varepsilon^2) = 3 \qquad (\text{mod. } 8)$$

cioè $\pi\pi_0 - 1 = 8l + 2$ ovvero $L = 2(4l + 1)$ quindi se h è pari la massima potenza del 2 contenuto in esso è 2, cioè h è un divisore di 6 e perciò Ω può appartenere ad un esponente divisore di 6, ossia Ω^6 è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(N)}$.

([23]) Cfr. 10 (A), p. 318.
([24]) Cfr. ([17]).

Lemma 8. *Se nella sostituzione* $\Omega = \begin{pmatrix} 1+n^2a, & nb \\ nc, & 1+n^2d \end{pmatrix}$ *si ha*

$$\begin{cases} 1+n^2a \equiv \pm \varepsilon^\rho & (\text{mod. } c);\ \rho = 0, 1, 2; \\ c \equiv 1 & (\text{mod. } n^2), \end{cases}$$

la Ω *è un prodotto di sostituzioni paraboliche di* $\Gamma_{\mu(n)}$ ([25]).

8. Teorema. *La sostituzione* $\Omega = \begin{pmatrix} 1+na, & nb \\ nc, & 1+nd \end{pmatrix}$ *quando il modulo* n *è primo con* $2(1-\varepsilon)$ *è un prodotto di sostituzioni paraboliche di* $\Gamma_{\mu(n)}$.

Infatti applicando la trasformazione indicata nel Lemma 1° e 5°, la può assumere la forma:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1+N^2\alpha, & N(1+N^2\gamma_0)\beta \\ N(1+N^2\gamma), & 1+N^2\delta \end{pmatrix} \tag{14}$$

con N primo con $2(1-\varepsilon)$, α, β, δ interi razionali.

È lecito supporre $1+N^2\gamma$ numero primo, e

$$1+N^2\gamma \equiv 2+9\varepsilon \quad (\text{mod. } 36), \tag{15}$$

e perciò complesso di 1° grado. Ove ciò non sia si può trasformare la (14) in guisa che restino soddisfatte le condizioni ora dette. Infatti nella (14) possiamo supporre $1+N^2\alpha$ primo con $2(1-\varepsilon)$, [perchè in caso opposto nella sostituzione

$$\Omega\begin{pmatrix} 1, & N(1+N^2\gamma_0)x \\ & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+N^2\alpha+N^2(1+N^2\gamma)(1+N^2\gamma_0)x, & N\beta_1(1+N^2\gamma_0) \\ N(1+N^2\gamma) & 1+N^2\delta \end{pmatrix}$$

essendo $N(1+N^2\gamma)(1+N^2\gamma_0)$ primo con $1+N^2\alpha$, si può scegliere x in guisa che il primo coefficiente sia primo con $2(1-\varepsilon)$; basta porre x uguale al prodotto dei fattori (o al fattore) di $2(1-\varepsilon)$ non contenuti in $1+N^2\alpha$]. Esiste allora una radice x_0 della congruenza:

$$1+N^2\gamma+(1+N^2\alpha)N^2x_0 \equiv 2+9\varepsilon \quad (\text{mod. } 36), \tag{16}$$

(perchè $N^2(1+N^2\alpha)$ è primo con $2(1-\varepsilon)$) e si può ancora scegliere l'indeterminata t in guisa che il numero

$$\pi = 1+N^2\gamma+(1+N^2\alpha)N^2x_0+36\,(1+N^2\alpha)N^2t$$

sia primo complesso [perchè $36(1+N^2\alpha)N^2$ è primo con $1+N^2\gamma+(1+N^2\alpha)N^2x_0$] e di conseguenza di primo grado a causa della (16).

([25]) Cfr. 10 (A), p. 319.

Nella sostituzione

$$\Omega\begin{pmatrix}1, & 0\\ N^3(x_0+36t, & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+N^2\alpha, & N\beta_1\\ N\pi, & 1+N^2\delta_1\end{pmatrix}$$

il fattore primo π del 3° coefficiente soddisfa alle due condizioni

$$\pi\equiv 1, \qquad (\mathrm{mod.}\ N^2),$$
$$\pi\equiv 2+9\varepsilon \qquad (\mathrm{mod.}\ 36)$$

e col procedimento del Lemma 6° potremo formare la sostituzione

$$S_1\Omega S_2=\begin{pmatrix}1+N^2\alpha, & N\pi_0\beta'\\ N\beta & 1+N^2\delta'\end{pmatrix}$$

con S_1 e S_2 prodotti di sostituzioni paraboliche, α, β', δ' interi razionali. Supponiamo senz'altro che nella (14) sia $1+N^2\gamma$ primo di primo grado e sia soddisfatta la (15).

Dalla (15) segue

$$(1+N^2\gamma)(1+N^2\gamma_0)\equiv 67 \qquad (\mathrm{mod.}\ 36),$$

perciò $\frac{1}{6}\varphi[(1+N^2\gamma)(1+N^2\gamma_0)]=11+6q$, ossia il numero $\frac{1}{6}\varphi[(1+N^2\gamma)(1+N^2\gamma_0)]$ è primo con 6.

Dalla (14) si ha poi

$$\Omega^{\frac{1}{6}\varphi}=\begin{pmatrix}(1+N^2\alpha)^{\frac{1}{6}\varphi}+N^2(1+N^2\gamma)(1+N^2\gamma_0)\alpha_1, & N(1+N^2\gamma_0)\beta_1\\ N(1+N^2\gamma)\gamma_1, & (1+N^2\delta)^{\frac{1}{6}\varphi}+N^2(1+N^2\gamma)(1+N^2\gamma_0)\delta_1\end{pmatrix},$$

con α_1, β_1, γ_1, δ_1 interi razionali.

Ora avendosi

$$(1+N^2\alpha)^{\frac{1}{6}\varphi}\equiv\pm\varepsilon^\rho \qquad (\mathrm{mod.}\ 1+N^2\gamma)$$
$$1+N^2\gamma\equiv 1 \qquad (\mathrm{mod.}\ N^2)$$

per il Lemma 8° la sostituzione:

$$\begin{pmatrix}(1+N^2\alpha)^{\frac{1}{6}\varphi}+N^2(1+N^2\gamma)(1+N^2\gamma_0)\alpha_1, & N(1+N^2\gamma_0)\beta_1\gamma_1\\ N(1+N^2\gamma), & (1+N^2\delta)^{\frac{1}{6}\varphi}+N^2(1+N^2\gamma)(1+N^2\gamma_0)\delta_1\end{pmatrix}$$

è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(N)}$, e per il corollario 1° del

Lemma 6° anche la sostituzione $\Omega^{\frac{1}{6}\varphi} = \Omega^{11+6q}$ è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(N)}$, ossia Ω appartiene ad un esponente divisore di $11+6q$ e per il Lemma 7° all'esponente 1, e perciò la sostituzione $\Omega = \begin{pmatrix} 1+na, & nb \\ nc, & 1+nd \end{pmatrix}$ con n primo con $2(1-\varepsilon)$ è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(n)}$.

§ 6. Il teorema fondamentale per i moduli $m(1-\varepsilon)$, $3m$, $2m$, $2m(1-\varepsilon)$, $6m$.

9. Teorema 1°. *La sostituzione unimodulare* $\Omega = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{m}\alpha, & 2\mathrm{m}\beta \\ 2\mathrm{m}\gamma, & 1+2\mathrm{m}\delta \end{pmatrix}$ *con* m *dispari, ha il periodo* 1 *o* 3.

Possiamo supporre γ primo con 2, in caso opposto si può sostituire alla Ω l'altra sostituzione $\Omega \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 2m, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2m\alpha, & 2m\beta \\ 2m[\gamma+(1+2m\alpha)], & 1+2m\delta_1 \end{pmatrix}$ e il numero $\gamma+(1+2m\alpha)$ è primo con 2. Indichi ora x una soluzione della congruenza

$$1+2m\alpha+2m\gamma x \equiv 1+6\varepsilon \pmod{12}, \tag{17}$$

(x esiste perchè $2m\gamma$ e 12 hanno per massimo comune divisore $2(1-\varepsilon)^\lambda$ con $\lambda \leq 2$) e si prenda t in guisa che il numero $\pi = 1+2m\alpha+2m\gamma x+12m\gamma t$ sia primo (ciò è possibile perchè $12m\gamma$ è primo con $1+2m\alpha+2m\gamma x$) e perciò per la (17) di primo grado (è impossibile infatti la congruenza $\pm 5\varepsilon^\rho \equiv 1 \pmod{6}$); si avrà dalla (17) che il numero primo $p = \pi\pi_0$ ha la forma $4h+3$ cioè $p \equiv 3 \pmod{4}$, e quindi $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$ [26].

Ora si ha per la trasformata Ω_1 di Ω (che ha lo stesso periodo di Ω)

$$\Omega_1 = \begin{pmatrix} 1, & -(x+6t) \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \Omega \begin{pmatrix} 1, & x+6t \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi, & 2mb \\ 2m\gamma, & 1+2md \end{pmatrix}$$

e sono possibili due casi $\left[\frac{\gamma}{\pi}\right] = 1$, $\left[\frac{\gamma}{\pi}\right] = -1$ [27].

---

(26) Cfr. Dirichlet-Dedekind: *Lezioni sulla Teoria dei Numeri* (traduzione italiana di A. Faifofer) p. 86.

(27) Per il significato del simbolo $\left[\frac{\gamma}{\alpha}\right]$ relativo ai corpi quadratici in un corpo algebrico e la sua riduzione all'ordinario simbolo di Legendre. cfr. L. Bianchi, loc. cit. (6), p. 328 a 345. Per il teorema di reciprocità relativo a questi simboli, cfr. E. Eche: *Vorlesungen über*

1.° Caso. Sia $\left[\frac{\gamma}{\pi}\right] = 1$; esisterà (essendo π di primo grado), un intero razionale g per il quale si abbia $g^2 \equiv \gamma$ (mod. π); e sia ancora a un intero razionale tale che si abbia $1 + 2ma \equiv g^{-1}$ (mod. $\pi\pi_0$); si avrà

$$(1 + 2ma)^2\gamma \equiv 1 \qquad \text{(mod. } \pi),$$

ovvero

$$(1 + 2ma)^2\gamma = 1 + \pi q.$$

Considerando una sostituzione unimodulare $\Omega_2 = \begin{pmatrix} (1 + 2ma)^2, & 2mb_1 \\ 2mq & 1 + 2md_1 \end{pmatrix}$ si ha:

$$\Omega_2\Omega_1^{-1} = \begin{pmatrix} (1 + 2ma)^2, & 2mb_1 \\ 2mb, & 1 + 2md_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 + 2md, & -2mb \\ -2m\gamma, & \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2ma_2, & 2mb_2 \\ -2m, & 1 + 2md_2 \end{pmatrix}$$

ed essendo $\begin{pmatrix} 1 + 2ma_2, & 2mb_2 \\ -2m, & 1 + 2md_2 \end{pmatrix}$ un prodotto di sostituzioni paraboliche perchè si ha:

$$\begin{pmatrix} 1, & -a_2 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 + 2ma_2, & 2mb_2 \\ -2m, & 1 + 2md_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & a_2 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2mB \\ -2m, & 1 - 4mB \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1, & 2mB \\ 0, & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -2m, & 1 \end{pmatrix}$$

è $\Omega_2\Omega_1^{-1} = S^{-1}$ ove S^{-1} è un prodotto di sostituzioni paraboliche, ed infine $\Omega_1 = S\Omega_2$ *quindi* Ω_1 *(e perciò* Ω*) hanno lo stesso periodo di* Ω_2.

Consideriamo ora una sostituzione unimodulare $\Omega_3 = \begin{pmatrix} 1 + 2ma, & 2mq_0b_3 \\ 2mq & 1 + 2md_3 \end{pmatrix}$ con b_3 e d_3 interi razionali: è $\Omega_3^2 = \begin{pmatrix} (1 + 2ma)^2 + 4m^2qq_0a_4, & 2mq_0b_4 \\ 2mqc_4, & 1 + 2md_4 \end{pmatrix}$ ed essa ha il periodo 1 o 3; ha anche il periodo 1 o 3 la sostituzione

$$\Omega_4 = \begin{pmatrix} (1 + 2ma)^2 + 4m^2qq_0a_4, & 2mq_0b_4c_4 \\ 2mq, & 1 + 2md_4 \end{pmatrix}$$

---

die Theorie der algebraischen Zahlen. (Leipzig 1923, Akademische Verlagsgesellschaft) p. 242 a 249. Il teorema di reciprocità nei corpi quadratici immaginari ha la forma semplicissima: Fra due numeri dispari α, β di cui uno almeno sia primario (cioè congruente col quadrato di un numero del corpo rispetto al modulo 4) ha luogo la relazione $\left[\frac{\alpha}{\beta}\right] = \left[\frac{\beta}{\alpha}\right]$ (dal teor. 165, pag. 246). Se uno dei numeri è pari, si ha l'altro teorema: Se α è un numero dispari residuo quadratico del modulo 8, è $\left[\frac{2}{\alpha}\right] = 1$ (dal teorema 167, p. 249).

poichè il prodotto $\Omega_3^2\Omega_4^{-1}$ ha la forma

$$\begin{pmatrix} 1+4m^2qq_0A, & 2mq_0B \\ 2mqC, & 1+4m^2qq_0D \end{pmatrix} \qquad (A, B, C, D \text{ interi assoluti})$$

ed è quindi (per il Lemma 6°, § 5) un prodotto di sostituzioni paràboliche; ha ancora il periodo 1 o 3 la trasformata di Ω_4

$$\begin{pmatrix} 1, & 2mq_0a_4 \\ & 1 \end{pmatrix} \Omega_4 \begin{pmatrix} 1, & -2mq_0a_4 \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+2ma)^2, & 2mq_0B_1 \\ 2mq, & 1+2mD_1 \end{pmatrix}$$

e infine tenuto conto che questa differisce da Ω_2 per una sostituzione parabolica (perchè hanno il primo ed il terzo coefficiente eguali) anche la Ω_2 (e perciò la Ω) ha il periodo 1 o 3. c. d. d.

2.° Caso. Sia nella $\Omega_1 = \begin{pmatrix} \pi, & 2mq \\ 2m\gamma, & 1+2md \end{pmatrix}$, $\left(\frac{\gamma}{\pi}\right) = -1$. È anche

$$\left[\frac{-\gamma}{\pi}\right] = \left[\frac{-1}{\pi}\right]\left[\frac{\gamma}{\pi}\right] = -\left[\frac{-1}{\pi}\right] = -\left(\frac{-1}{\pi\pi_0}\right) = -\left(\frac{-1}{p}\right) = 1,$$

quindi la sostituzione $\begin{pmatrix} \pi, & -2mb \\ -2m\gamma, & 1+2md \end{pmatrix}$ per il caso precedente appartiene all'esponente 1 o 3; ed anche la Ω_1 (ragionando come all'osservazione 2ª, § 5), ed infine la Ω ha il periodo 1 o 3.

10. Teorema 2°. *Qualsiasi sostituzione* $\begin{pmatrix} 1+6\mathrm{m}\alpha, & 1+6\mathrm{m}\delta \\ 6\mathrm{m}\gamma & 6\mathrm{m}\beta \end{pmatrix}$ *con* m *primo con 6 si può esprimere con un prodotto di sostituzioni paraboliche di* $\Gamma_{\mu(6m)}$.

Possiamo supporre (Lemma 1°, § 5) m intero razionale dispari, primo con 3. Tenuto conto del teorema precedente e ragionando come nella seconda delle Memorie citate dall'A. ([28]) si prova poi:

a) La sostituzione $\begin{pmatrix} (1+6ma)^3, & 6mb \\ 6mc, & 1+6md \end{pmatrix}$ è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(6m)}$.

b) Indicando col simbolo $\left[\frac{c}{1+6ma}\right]_3$ il simbolo generalizzato di Jacobi sui

([28]) Cfr. nota ([2]).

residui cubici [29], si ha che la sostituzione: $\begin{pmatrix} 1+6ma, & 6mb \\ 6mc & 1+6md \end{pmatrix}$ con $1+6ma$ primo, di primo grado e $\left[\dfrac{c}{1+6ma}\right]_3 = 1$ è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(6m)}$ [30].

c) La sostituzione $\Omega = \begin{pmatrix} 1+6ma, & 6mb \\ 6mc, & 1+6md \end{pmatrix}$ *è un prodotto di sostituzioni paraboliche del gruppo* $\Gamma_{\mu(6m)}$.

Infatti possiamo alla Ω sostituire una sua trasformata, in cui sia $1+6ma$ primo, di primo grado, e inoltre $a \equiv \varepsilon$ (mod. 3). Ove questo non sia nella Ω

---

[29] Cfr. per i residui cubici, P. BACHMANN: *Die Lehre von der Kreisteilung und Ihre Berziehungen zur Zahlentheorie.* (Leipzig 1872), p. 185 a 199 e p. 224.

Abbiamo usato per i residui cubici il simbolo $\left[\dfrac{m}{n}\right]_3$ per distinguerlo da quello dei residui quadratici. Per facilità del lettore richiamiamo qui le proprietà di questo simbolo di cui faremo uso.

Se m è un numero primo, ed n è primo con m, si ha sempre $n^{\frac{N(m)-1}{3}} \equiv \varepsilon^{\rho}$ (mod. n), e si porrà per definizione $\left[\dfrac{n}{m}\right]_3 = \varepsilon^{\rho}$. La condizione necessaria e sufficiente perchè sia risolubile la congruenza $x^3 \equiv n$ (mod. m) è che si abbia $\left[\dfrac{n}{m}\right]_3 = 1$. Per i simboli $\left[\dfrac{n}{m}\right]_3$ valgono le seguenti proprietà:

a) $\left[\dfrac{n}{m}\right]_3 \left[\dfrac{n'}{m}\right]_3 = \left[\dfrac{nn'}{m}\right]_3$;

b) $\left[\dfrac{-1}{m}\right]_3 = 1, \quad \left[\dfrac{\varepsilon}{m}\right] = \varepsilon^{\frac{N(m)-1}{3}}$;

c) $\left[\dfrac{n}{q}\right] = 1$ per q primo intero razionale;

d) $\left[\dfrac{1-\varepsilon}{a+b\varepsilon}\right] = \varepsilon^{\frac{2}{3}(a+1)}$ supposto $a+b\varepsilon$ scritto sotto forma primaria, cioè con $a \equiv -1$ (mod. 3), $b \equiv 0$ (mod. 3).

e) Se m e n sono due numeri primi sotto forma primaria (diversi dall'unità) è $\left[\dfrac{n}{m}\right]_3 = \left[\dfrac{m}{n}\right]_3$ (teorema di reciprocità, valido anche quando uno dei due numeri m od n sia il 2). Al simbolo generalizzato di JACOBI $\left[\dfrac{m}{n}\right]_3$, con m e n primi tra loro daremo il solito significato; notiamo che si può provare, che se il numero α ha la forma primaria, si ha $\left[\dfrac{\varepsilon}{\alpha}\right]_3 = 1, \varepsilon, \varepsilon^2$ secondo che si abbia $\alpha\alpha_0 \equiv 1, 4, 7$ (mod. 9). Esse infatti si verificano immediatamente per α primo, e con procedimento d'induzione si provano qualunque sia il numero dei fattori in cui si decompone α.

[30] Cfr. per la dimostrazione il teorema precedente.

si può supporre sia c primo con 3, basterà in caso opposto considerare la sostituzione:

$$\Omega\begin{pmatrix}1, & 0\\ 6m, & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+6ma, & 6mb\\ 6m[c+(1+6ma)], & 1+6md\end{pmatrix}$$

e se x indica una soluzione della congruenza $a-cx\equiv\varepsilon \pmod 3$, ove si scelga t in guisa che sia il numero $\pi=1+6m(a-cx)+18mct$ primo (e perciò di primo grado) si ha che la trasformata Ω_1 di Ω

$$\Omega_1=\begin{pmatrix}1, & x-3t\\ 0, & 1\end{pmatrix}\Omega\begin{pmatrix}1, & -x+3t\\ 0, & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pi, & 6mb_1\\ 6mc, & 1+6md_1\end{pmatrix}$$

soddisfa alle condizioni richieste.

Ora se è $\left[\frac{c}{\pi}\right]_3=1$, Ω_1 e perciò Ω è un prodotto di sostituzioni paraboliche (caso b); se invece è $\left[\frac{c}{\pi}\right]_3=\varepsilon^\lambda$ avendosi

$$\pi\pi_0=(1+6m\varepsilon+9q)(1+6m\varepsilon^2+9q_0)=1-6m+9Q$$

è $\rho=\frac{1}{3}(\pi\pi_0-1)=-2m+3Q$ cioè ρ è primo con 3 e se ρ_1 indica una soluzione della congruenza $\rho\rho_1+\lambda\equiv 0 \pmod 3$ si ha:

$$\left[\frac{c\varepsilon^{\rho_1}}{\pi}\right]_3=\varepsilon^\lambda\left[\frac{\varepsilon}{\pi}\right]^{\rho_1}=\varepsilon^{\lambda+\rho\rho_1}=1,$$

onde la sostituzione $\begin{pmatrix}\pi, & 6mb_1\varepsilon^{-\rho_1}\\ 6mc\varepsilon^{\rho_1}, & 1+6md_1\end{pmatrix}$ è un prodotto di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(6m)}$, e quindi Ω_1 (per l'osservazione 2ª § 5) e perciò la Ω sono prodotti di sostituzioni paraboliche di $\Gamma_{\mu(6m)}$. c. d. d.

Tenuto conto del Lemma 1° si ha:

Corollario 1°. *Tutte le sostituzioni* $\begin{pmatrix}1+\mathrm{n}a, & \mathrm{n}b\\ \mathrm{n}c, & 1+\mathrm{n}d\end{pmatrix}$ *quando sia* $\mathrm{n}=2^\lambda(1-\varepsilon)^\mu \mathrm{m}$ *con* m *primo con* 6, $\lambda=0,1$; $\mu=0,1$ *sono prodotti di sostituzioni paraboliche di* $\Gamma_{\mu(n)}$.

Corollario 2°. *Il teorema enunciato al* § 4 *è vero per i moduli* $2^\lambda(1-\varepsilon)^\mu \mathrm{m}$ *con* m *primo con* 6, $\lambda=0,1$; $\mu=0,1$.

Proveremo nel paragrafo seguente che se il modulo n è multiplo di 4 o di $(1-\varepsilon)^3$ non è più vero il teorema enunciato nel § 4.

Quì come applicazione daremo l'interpretazione geometrica dei gruppi $G_{2\mu(1-\varepsilon)}$, $G_{2\mu(2)}$.

Quando sia $n = 1 - \varepsilon$ avendosi

$$(SU)^2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^2, & 0 \\ 0, & \varepsilon \end{pmatrix} \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 1 - \varepsilon)$$

le (I) del § 4 diventano:

$$(17) \qquad S^2 = 1, \quad T^3 = 1, \quad U^2 = 1, \quad (SU)^2 = 1, \quad (TU)^3 = 1, \quad (ST^2)^2 = 1,$$

e le (II) essendo ora $n_1 = 1$, $n_2 = -1$, $(TU)^2(TU)^{-2} = 1$, $(TU)^6 = 1$, ed esse sono soddisfatte per le (17).

Le (17) *caratterizzano il gruppo ampliato del tetraedro regolare,* (di ordine 24). Infatti indicando con V_1, V_2, V_3, V_4 i vertici di un tetraedro regolare, posto

$$S = (V_1, V_2), \quad T = (V_1, V_3, V_2), \quad U = (V_1, V_2)(V_3, V_4)$$

cioè S uguale alla riflessione sopra il piano che passa per lo spigolo V_3V_4 e il punto medio di V_1V_2; T uguale alla rotazione a periodo 3 attorno alla congiungente il vertice V_4 col centro della faccia $V_1V_2V_3$; U uguale al ribaltamento attorno alla retta congiungente i punti medi degli spigoli opposti V_1V_2, V_3V_4 i movimenti S, T, U soddisfano alle (17) e generano il gruppo ampliato del tetraedro regolare ([31]), come poteva prevedersi per i resultati del § 1.

Quando sia $n = 2$, le relazioni (I) e (II) del § 4 diventano:

$$S^2 = 1, \quad T^3 = 1, \quad U^2 = 1, \quad (SU)^6 = 1, \quad (TU)^3 = 1, \quad (ST^2)^2 = 1,$$
$$[(US)^2(TU)^2]^2 = 1, \quad [(SU)^2(TU)^2(SU)^2]^2 = 1.$$

L'ultima relazione scritta è conseguenza delle altre. Infatti essa può scriversi:

$$(SU)^2(TU)^2(SU)^2(SU)^2(TU)^2(SU)^2 = (SU)^2(TU)^2(US)^2(TU)^2(SU)^2 =$$
$$= (US)^2[(US)^2(TU)^2]^2(SU)^2 = 1,$$

([31]) Cfr. ad es. L. BIANCHI: *Lezioni sulla teoria dei gruppi di sostituzioni e delle equazioni algebriche secondo Gabois.* (Pisa, Spoerri 1899), p. 123, p. 129.

quindi le relazioni fra le S, T, U diventano

$$S^2 = 1, \quad T^3 = 1, \quad U^2 = 1,$$
$$(SU)^6 = 1, \quad (TU)^3 = 1, \quad (ST^2)^2 = 1, \quad [(US)^2(TU)^2]^2 = 1.$$

È facile vedere che il gruppo $G_{2\mu(2)}$ è isomorfo col gruppo ampliato dell'icosaedro regolare. Infatti indicando con ∞, 1, 2, 3, 4, 5 un vertice dell'icosaedro e ordinatamente i 5 vertici adiacenti, e con ∞', $1'$, $2'$, $3'$, $4'$, $5'$ i vertici opposti, posto:

$$\begin{aligned} T &= (0,\ 4,\ 2')(0',\ 4',\ 2)(1,\ 3,\ \infty')(1',\ 3',\ \infty) \\ U &= (0,\ \infty)(0',\ \infty')(1,\ 4)(1',\ 4')(2,\ 2')(3,\ 3'), \\ S &= (2,\ 4')(2',\ 4)(3,\ \infty')(3'\ \infty), \end{aligned}$$

le T e U rappresentano rispettivamente due rotazioni a periodo 3 e 2 del gruppo ampliato dell'icosaedro e generano un gruppo tetraedrale G_{12} che lascia fermo uno dei cinque ottaedri inscritti nell'icosaedro; S rappresenta una riflessione che trasforma l'ottaedro considerato in un altro ottaedro inscritto, e facilmente si verifica che le S, T, U generano l'intero gruppo dell'icosaedro (32).

Del resto la sostituzione $P = (UT^2)S(TU)S$ è un movimento a periodo 5 attorno ai vertici 1 e $1'$, e il gruppo ampliato G_{120} dell'icosaedro si rappresenta per G_{12} con gli indici:

$$1, \quad P, \quad P^2, \quad P^3, \quad P^4, \quad S, \quad SP, \quad SP^2, \quad SP^3, \quad SP^4.$$

§ 7. I moduli $4m$, $3(1-\varepsilon)m$ come moduli eccezionali.

11. Vogliamo ora provare che il teorema enunciato nel § 4 non sussiste quando il modulo n sia divisibile per il numero 4, o per il numero $(1-\varepsilon)^3$; basterà provare, nei due casi, che esistono delle sostituzioni unimodulari:

$$\begin{pmatrix} 1+4ma, & 4mb \\ 4mc, & 1+4md \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1+3m(1-\varepsilon)a, & 3m(1-\varepsilon^2)b \\ 3m(1-\varepsilon)c, & 1+3m(1-\varepsilon)d \end{pmatrix}$$

che non sono prodotti di sostituzioni paraboliche.

Per il lemma 1° del § 5 supponiamo che sia m intero razionale, e limitiamoci ora al primo caso. È fondamentale, in vista di quanto ci proponiamo

(32) Cfr. L. Bianchi, loc. cit. (31), p. 124, p. 129.

di provare, dimostrare il teorema: *Tutte le sostituzioni unimodulari,*

$$\begin{pmatrix} \alpha, & 4m\beta \\ 4m\gamma, & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha \equiv \delta \equiv 1 \pmod{4m}$$

per le quali sia $\left[\frac{\gamma}{\alpha}\right] = 1$ [33] *formano gruppo.*

Siano $\begin{pmatrix} \alpha, & 4m\beta \\ 4m\lambda\gamma, & \delta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a\lambda, & 4mb \\ 4mc, & d \end{pmatrix}$ due sostituzioni unimodulari del gruppo $\Gamma_{\mu(4m)}$ per le quali si abbia:

$$\left[\frac{\lambda\gamma}{\alpha}\right] = 1, \quad \left[\frac{c}{a\lambda}\right] = 1;$$

dove con λ abbiamo indicato il massimo comun divisore tra il terzo coefficiente della prima sostituzione e il primo della seconda, e dove potremo supporre a e λ scelti in guisa che si abbia contemporaneamente:

$$\begin{cases} a \equiv 1 \\ \lambda \equiv 1 \end{cases} \pmod{4}; \qquad \begin{cases} a \equiv 1 - \varepsilon \\ \lambda \equiv -(1-\varepsilon^2) \end{cases} \pmod{4}.$$

Sia ancora ω una radice della congruenza:

$$a\alpha\omega \equiv 1 \pmod{8} \tag{18}$$

e possiamo supporre sia ω primo e primo con γa (infatti se ω_0 è una radice della congruenza $a\alpha\omega_0 \equiv 1 \pmod{8}$, posto $\omega = \omega_0 + 8q$, si può scegliere q in guisa che il numero $\omega_0 + 8q$ sia primo e primo con γa).

Avendosi:

$$\begin{pmatrix} \alpha, & 4m\beta \\ 4m\lambda\gamma, & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a\lambda, & 4mb \\ 4mc, & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(a\alpha + 16m^2b\gamma), & 4m(\lambda a\beta + b\delta) \\ 4m(c\alpha + \lambda d\gamma), & d\delta + 16m^2c\beta \end{pmatrix}$$

è

$$\left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha + 16m^2b\gamma)}\right] = \left[\frac{c}{\lambda}\right]\left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]\left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{a\alpha + 16m^2b\gamma}\right] =$$

$$= \left[\frac{c}{\lambda}\right]\left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]\left[\frac{ac\alpha + \lambda ad\gamma}{a\alpha + 16m^2b\gamma}\right]\left[\frac{a}{a\alpha\omega + 16m^2b\gamma\omega}\right]\left[\frac{a}{\omega}\right]$$

od anche tenuto conto:

a) $\lambda ad = 1 + 16m^2bc$;

b) $\left[\frac{\gamma}{\alpha}\right] = \left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]$;

---

[33] Cfr. [27].

c) del teorema di reciprocità;

d) $a\alpha\omega \equiv 1 \pmod{8}$ e perciò $\left[\frac{2}{a\alpha\omega}\right]=1$:

$$\left[\frac{c\alpha+\lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha+16m^2b\gamma)}\right]=\left[\frac{c}{\lambda}\right]\left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]\left[\frac{\gamma}{a\alpha+16m^2b\gamma}\right]\left[\frac{b\gamma\omega}{a}\right]\left[\frac{a}{\omega}\right]=$$

$$=\left[\frac{c}{\lambda}\right]\left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]\left[\frac{\gamma}{a\alpha\omega+16m^2b\gamma\omega}\right]\left[\frac{\gamma}{\omega}\right]\left[\frac{b\gamma\omega}{a}\right]\left[\frac{a}{\omega}\right]=\left[\frac{c}{\lambda}\right]\left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]\left[\frac{a\alpha\omega}{\gamma}\right]\left[\frac{\gamma}{\omega}\right]\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{\gamma}{a}\right]\left[\frac{\omega}{a}\right]\left[\frac{a}{\omega}\right]=$$

$$=\left[\frac{c}{\lambda}\right]\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{a}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{a}\right]\left[\frac{a\alpha\omega}{\gamma}\right]\left[\frac{\gamma}{a\alpha\omega}\right]\left[\frac{\gamma}{\alpha}\right]\left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]=\left[\frac{c}{\lambda}\right]\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{a}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{a}\right]\left[\frac{\lambda}{\alpha}\right]\left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]=$$

$$=\left[\frac{c}{\lambda}\right]\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{a}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{a}\right].$$

Ma è

$$\left[\frac{bc}{a}\right]=\left[\frac{-1}{a}\right]=\left[\frac{-1}{a\alpha\omega}\right]\left[\frac{-1}{\alpha\omega}\right]=\left[\frac{-1}{\alpha\omega}\right]=\left[\frac{-1}{\omega}\right]\left[\frac{-1}{\alpha}\right]=\left[\frac{-1}{\omega}\right],$$

e perciò $\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{c}{a}\right]=\left[\frac{-1}{\omega}\right]$, ma è anche $\left[\frac{c}{a}\right]\left[\frac{c}{\lambda}\right]=1$, quindi $\left[\frac{b}{a}\right]\left[\frac{c}{\lambda}\right]=\left[\frac{-1}{\omega}\right]$, ed allora $\left[\frac{c\alpha+\lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha+16m^2b\gamma)}\right]=\left[\frac{-1}{\omega}\right]\left[\frac{a}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{a}\right]$.

Distinguiamo ora i due casi $a\equiv 1 \pmod{4}$, $a\equiv 1-\varepsilon \pmod{4}$:

a) $a\equiv 1 \pmod{4}$. È allora $\left[\frac{a}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{a}\right]=1$, ma è anche $\omega\equiv 1 \pmod{4}$ (cioè ω è primario) perciò $\left[\frac{-1}{\omega}\right]=1$ ossia $\left[\frac{c\alpha+\lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha+16m^2b\gamma)}\right]=1$.

b) $a\equiv 1-\varepsilon \pmod{4}$; essendo $\alpha\equiv 1 \pmod{4}$ è per la (18) $\omega\equiv-(1-\varepsilon^2)$ (mod. 4), e analogamente se ω' è un altro numero primo, radice della congruenza (18) è $\omega'\equiv-(1-\varepsilon^2) \pmod{4}$ perciò $a\omega'\equiv 1$, $\omega\omega'\equiv(1-\varepsilon^2)^2 \pmod{4}$ ossia $a\omega'$ e $\omega\omega'$ sono primari.

Si ha quindi:

$$\left[\frac{-1}{\omega}\right]\left[\frac{a}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{a}\right]=\left[\frac{-1}{\omega}\right]\left[\frac{\omega'}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{\omega'}\right]\left[\frac{a\omega'}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{a\omega'}\right]=\left[\frac{-1}{\omega}\right]\left[\frac{\omega'}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{\omega'}\right].$$

Ora se $\omega(\omega')$ è intero razionale, anche $\omega'=\omega+8q(\omega=\omega'+8q)$ si può supporre intero razionale, ed è

$$\left[\frac{-1}{\omega}\right]=\left(\frac{1}{\omega}\right)=1,\quad \left[\frac{\omega'}{\omega}\right]=\left(\frac{\omega'^2}{\omega}\right)=1,\quad \left[\frac{\omega}{\omega'}\right]=\left(\frac{\omega^2}{\omega'}\right)=1,$$

quindi $\left[\frac{-1}{\omega}\right]\left[\frac{\omega'}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{\omega'}\right]=1$ e perciò $\left[\frac{c\lambda+\lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha+16m^2b\gamma}\right]=1$.

Siano invece ω e ω' di 2° grado possiamo supporli primi con $1-\varepsilon$, e poichè $\omega(1-\varepsilon)$ e $\omega(-3-\varepsilon)$ sono primari si avrà:

a) $\left[\frac{-1}{\omega}\right]=\left(\frac{-1}{\omega\omega_0}\right)=-1$, (perchè $\omega\omega_0\equiv 3 \pmod{4}$);

b) $\left[\frac{-1}{\omega}\right]\left[\frac{\omega'}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{\omega'}\right]=-\left[\frac{\omega}{(1-\varepsilon)\omega'}\right]\left[\frac{\omega}{1-\varepsilon}\right]\left[\frac{1-\varepsilon}{\omega}\right]\left[\frac{(1-\varepsilon)\omega'}{\omega}\right]=-\left[\frac{\omega}{1-\varepsilon}\right]\left[\frac{1-\varepsilon}{\omega}\right]=$

$=-\left[\frac{\omega(-3-\varepsilon)}{1-\varepsilon}\right]\left[\frac{-(3+\varepsilon)}{1-\varepsilon}\right]\left[\frac{1-\varepsilon}{-\omega(3+\varepsilon)}\right]\left[\frac{1-\varepsilon}{-(3+\varepsilon)}\right]=-\left[\frac{-1}{1-\varepsilon}\right]\left[\frac{3+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]\left[\frac{1-\varepsilon}{3+\varepsilon}\right]$;

c) $\left[\frac{-1}{1-\varepsilon}\right]=\left(\frac{-1}{3}\right)=-1$, $\left[\frac{3+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]=\left[\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right]=1$, $\left[\frac{1-\varepsilon}{3+\varepsilon}\right]=1$; (perchè $(1-\varepsilon)^3\equiv 1$ $(\bmod.\ 3+\varepsilon)$); perciò $\left[\frac{-1}{\omega}\right]\left[\frac{\omega'}{\omega}\right]\left[\frac{\omega}{\omega'}\right]=1$ e quindi $\left[\frac{c\alpha+\lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha+16m^2b\gamma)}\right]=1$, c. d. d.

Corollario 1°. *Se una sostituzione unimodulare*

$$\Omega=\begin{pmatrix}\alpha, & 4m\beta\\ 4m\gamma, & \delta\end{pmatrix},\quad \alpha\equiv\delta\equiv 1 \qquad (\bmod.\ 4m)$$

è un prodotto di sostituzioni paraboliche del gruppo $\Gamma_{\mu(4m)}$ *è* $\left[\frac{\gamma}{\alpha}\right]=+1$.

Infatti una sostituzione parabolica ha la forma $\begin{pmatrix}1+4mkxy, & -4mky^2\\ 4mkx^2, & 1-4mkxy\end{pmatrix}$ ed è $\left[\frac{kx^2}{1+4mkxy}\right]=\left[\frac{k}{1+4mkxy}\right]$, ed osservando che se k è pari $1+4mkxy$ è congruo 1 modulo 8, è lecito applicare il teorema di reciprocità, e quindi $\left[\frac{kx^2}{1+4mkxy}\right]=1$.

Se poi la Ω è un prodotto di sostituzioni paraboliche, tenuto conto del teorema precedente, segue il nostro corollario.

Corollario 2°. *Qualunque sostituzione* $\Omega=\begin{pmatrix}1+4\mathrm{ma}, & 4\mathrm{mb}\\ 4\mathrm{mc}, & 1+4\mathrm{md}\end{pmatrix}$ *con* $\left[\frac{\mathrm{c}}{1+4\mathrm{ma}}\right]=-1$ *non può esprimersi come prodotto di sostituzioni paraboliche del gruppo* $\mu_{(4\mathrm{m})}$.

Dalle cose dette ed osservando che si possono costruire quante si vogliono sostituzioni unimodulari, per le quali si abbia $\left[\frac{c}{1+4ma}\right]=-1$ segue che il teorema del § 4, n.° 6 non sussiste per i moduli $4m$, qualunque sia m.

12. La via da seguire nel secondo caso, cioè per i moduli multipli di $(1-\varepsilon)^3$ è la medesima, salvo che ai simboli relativi ai residui quadratici sostituiremo i simboli relativi ai residui cubici.

Teorema. *Tutte le sostituzioni unimodulari*

$$\begin{pmatrix} \alpha, & 3m(1-\varepsilon^2)\beta \\ 3m(1-\varepsilon)\gamma, & \delta \end{pmatrix} \quad \alpha \equiv \delta \equiv 1 \qquad [\text{mod. } 3(1-\varepsilon)m],$$

per le quali sia $\left[\dfrac{\gamma}{\alpha}\right]_3 = 1$ ([34]) *formano gruppo.*

Siano infatti $\begin{pmatrix} \alpha, & 3m(1-\varepsilon^2)\beta \\ 3m(1-\varepsilon)\gamma, & \delta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a\gamma, & 3m(1-\varepsilon^2)b \\ 3m(1-\varepsilon)c, & d \end{pmatrix}$ due sostituzioni di $\Gamma_{\mu[3m(1-\varepsilon)]}$, cioè tali che si abbia:

$$\alpha \equiv \delta \equiv a\lambda \equiv d \equiv 1 \qquad [\text{mod. } 3(1-\varepsilon)]$$

e inoltre sia $\left[\dfrac{\gamma\lambda}{\alpha}\right]_3 = 1$, $\left[\dfrac{c}{a\lambda}\right]_3 = 1$.

Abbiamo indicato con λ il massimo comun divisore tra il terzo coefficiente della prima sostituzione ed il primo della seconda, quindi λ ed a sono primi tra loro, e supponiamo, come del resto è lecito $a \equiv \lambda \equiv 1$ (mod. 3).

Il prodotto delle due sostituzioni è

$$\begin{pmatrix} \lambda(a\alpha + 27m^2b\gamma), & 3m(1-\varepsilon^2)(a\lambda\beta + b\delta) \\ 3m(1-\varepsilon)(c\alpha + \lambda d\gamma), & d\delta + 27m^2c\beta \end{pmatrix},$$

e occorre provare che $\left[\dfrac{c\alpha + \lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha + 27m^2b\gamma)}\right]_3 = 1$.

Tenuto conto che $ac\alpha + \lambda ad\gamma = c(a\alpha + 27m^2b\gamma) + \gamma$ si ha:

$$\left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha + 27m^2b\gamma)}\right]_3 = \left[\frac{c}{\lambda}\right]_3 \left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]_3 \left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{a\alpha + 27m^2b\gamma}\right]_3 =$$
$$= \left[\frac{c}{\lambda}\right]_3 \left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]_3 \left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{a\alpha + 27m^2b\gamma}\right]_3 \left[\frac{a}{a\alpha + 27m^2b\gamma}\right]_3^3 =$$
$$= \left[\frac{c}{\lambda}\right]_3 \left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]_3 \left[\frac{\gamma}{a\alpha + 27m^2b\gamma}\right]_3 \left[\frac{a}{a\alpha + 27m^2b\gamma}\right]_3^2.$$

Poichè è a primo con $1-\varepsilon$, applicando all'ultimo fattore il teorema di reciprocità, si ha:

$$\left[\frac{c\alpha + \lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha + 27m^2b\gamma)}\right]_3 = \left[\frac{c}{\lambda}\right]_3 \left[\frac{\lambda}{\lambda}\right]_3 \left[\frac{\gamma}{a\alpha + 27m^2b\gamma}\right]_3 \left[\frac{m^2b\gamma}{a}\right]_3^2.$$

([34]) Cfr. ([29]).

Distingueremo ora i tre casi:

a) $a \equiv 1$ [mod. $3(1-\varepsilon)$];

b) $a \equiv 4$ [mod. $3(1-\varepsilon)$];

c) $a \equiv -2$ [mod. $3(1-\varepsilon)$].

Caso a). Sia $a \equiv$ [mod. $3(1-\varepsilon)$]; per qualunque γ è:

$$\left[\frac{\gamma}{a\alpha+27m^2b\gamma}\right]_3=\left[\frac{a\alpha}{\gamma}\right]_3=\left[\frac{a}{\gamma}\right]_3\left[\frac{\alpha}{\gamma}\right]_3,$$

quindi:

$$\left[\frac{c\alpha+\lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha+27m^2b)\gamma}\right]_3=\left[\frac{c}{\lambda}\right]_3\left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]_3\left[\frac{a}{\gamma}\right]_3\left[\frac{\alpha}{\gamma}\right]_3\left[\frac{m^2}{a}\right]_3^2\left[\frac{b}{a}\right]_3^2\left[\frac{\gamma}{a}\right]_3^2.$$

Ma avendosi $\left[\frac{\lambda\gamma}{\alpha}\right]_3=1$ e $\alpha\equiv 1$ [mod. $3(1-\varepsilon)$] è anche $\left[\frac{\alpha}{\lambda\gamma}\right]_3=\left[\frac{\alpha}{\lambda}\right]_3\left[\frac{\alpha}{\gamma}\right]_3=1$; da $\left[\frac{c}{a\lambda}\right]_3=1$ segue $\left[\frac{c}{\lambda}\right]_3=\left[\frac{c}{a}\right]_3^2$; infine è $\left[\frac{a}{\gamma}\right]_3=\left[\frac{\gamma}{a}\right]_3$ quindi

$$\left[\frac{c\alpha+\lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha+27m^2b\gamma)}\right]_3=\left[\frac{c}{\lambda}\right]_3\left[\frac{m^2}{a}\right]_3^2\left[\frac{b}{a}\right]_3^2=\left[\frac{c}{a}\right]_3^2\left[\frac{m^2}{a}\right]_3^2\left[\frac{b}{a}\right]_3^2=\left[\frac{m^2bc}{a}\right]_3^2=\left[\frac{-1}{a}\right]_3^2=1.$$

Caso b). Sia $a\equiv 4$ [mod. $3(1-\varepsilon)$] e quindi $\lambda\equiv 7$ [mod. $3(1-\varepsilon)$]; è di conseguenza $aa_0\equiv 7$ (mod. 9), $\lambda\lambda_0\equiv 4$ (mod. 9) ed infine

$$\left[\frac{\varepsilon}{a}\right]_3=\varepsilon^2,\quad \left[\frac{\varepsilon}{\lambda}\right]_3=\varepsilon \ (^{35}).$$

Posto $\gamma=\varepsilon^\rho\Pi(q)\Pi(\omega)$, $a\alpha+27m^2b\gamma=\Pi_1(q)\Pi_1(\omega)$ ove con q e ω abbiamo indicato rispettivamente i fattori primi (sotto forma primaria) di primo e secondo grado dei numeri γ e $a\alpha+27m^2b\gamma$, osservando che è

$$a\alpha+27m^2b\gamma\equiv 4 \qquad [\text{mod. } 3(1-\varepsilon)]$$

si ha:

$$\left[\frac{\gamma}{a\alpha+27m^2b\gamma}\right]_3=\left[\frac{\varepsilon}{a\alpha+27m^2b\gamma}\right]_3^\rho\left[\frac{\Pi(q)\Pi(\omega)}{\Pi_1(q)\Pi_1(\omega)}\right]_3=\varepsilon^{2\rho}\left[\frac{\Pi_1(q)\Pi_1(\omega)}{\Pi(q)\Pi(\omega)}\right]_3=$$

$$=\varepsilon^{2\rho}\left[\frac{a\alpha+27m^2b\gamma}{\gamma}\right]_3=\varepsilon^{2\rho}\left[\frac{a}{\gamma}\right]_3\left[\frac{\alpha}{\gamma}\right]_3=\varepsilon^{2\rho}\left[\frac{\alpha}{\gamma}\right]_3\left[\frac{a}{\varepsilon^\rho\Pi(q)\Pi(\omega)}\right]_3=\varepsilon^{2\rho}\left[\frac{\alpha}{\gamma}\right]_3\left[\frac{\Pi(q)\Pi(\omega)}{a}\right]_3=$$

$$=\varepsilon^{2\rho}\left[\frac{\alpha}{\gamma}\right]_3\left[\frac{\varepsilon^\rho\Pi(q)\Pi(\omega)}{a}\right]_3\left[\frac{\varepsilon}{a}\right]_3^{2\rho}=\varepsilon^{2\rho}\left[\frac{\alpha}{\gamma}\right]_3\left[\frac{\gamma}{a}\right]_3\varepsilon^{4\rho}=\left[\frac{\alpha}{\gamma}\right]_3\left[\frac{\gamma}{a}\right]_3;$$

e ancora come prima $\left[\frac{c\alpha+\lambda d\gamma}{\lambda(a\alpha+27m^2b\gamma)}\right]_3=1.$

---

(35) Cfr. (29).

Caso c). In modo analogo al caso *b)* si esamina l'ultimo caso:

$$a \equiv -2 \qquad [\text{mod. } 3\,(1-\varepsilon)].$$

Corollario 1°. *Se una sostituzione unimodulare*

$$\Omega = \begin{pmatrix} \alpha, & 3m(1-\varepsilon^2)\beta \\ 3m(1-\varepsilon)\gamma, & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha \equiv \delta \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 4)$$

è un prodotto di sostituzioni paraboliche del gruppo $\Gamma_{\mu[3m(1-\varepsilon)]}$, *è* $\begin{bmatrix}\gamma \\ \alpha\end{bmatrix}_3 = 1$.

Infatti se Ω è una sostituzione parabolica, ha la forma

$$\begin{pmatrix} 1 + 3m(1-\varepsilon)kxy, & -3m(1-\varepsilon)ky^2 \\ 3m(1-\varepsilon)kx^2, & 1 - 3m(1-\varepsilon)kxy \end{pmatrix}$$

e per essa si ha:

$$\left[\frac{kx^2}{1+3m(1-\varepsilon)kxy}\right]_3 = \left[\frac{k}{1+3m(1-\varepsilon)kxy}\right]_3 \left[\frac{x}{1+3m(1-\varepsilon)kxy}\right]_3^2 .$$

Posto $k = \varepsilon^\rho \Pi(q)\Pi(\omega)$, tenuto conto che

$$[1+3m(1-\varepsilon)kxy][1+3m(1-\varepsilon^2)k_0x_0y_0] \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 9)$$

si ha:

$$\left[\frac{k}{1+3m(1-\varepsilon)kxy}\right]_3 = \left[\frac{\varepsilon}{1+3m(1-\varepsilon)kxy}\right]_3^\rho \left[\frac{1+3m(1-\varepsilon)kxy}{\Pi(q)\Pi(\omega)}\right]_3 =$$

$$= \left[\frac{1+3m(1-\varepsilon)kxy}{k}\right]_3 = 1,$$

analogamente $\left[\dfrac{x}{1+3m(1-\varepsilon)kxy}\right]_3 = 1$ e perciò $\left[\dfrac{kx^2}{1+3m(1-\varepsilon)kxy}\right]_3 = 1$.

Se poi la Ω è un prodotto di sostituzioni paraboliche, tenuto conto del teorema precedente segue il nostro corollario.

Corollario 2°. *Qualunque sostituzione* $\begin{pmatrix} 1+3\mathrm{m}(1-\varepsilon)\mathrm{a}, & 3\mathrm{m}(1-\varepsilon^2)\mathrm{b} \\ 3\mathrm{m}(1-\varepsilon)\mathrm{c}, & 1+3\mathrm{m}(1-\varepsilon)\mathrm{d} \end{pmatrix}$ *nella quale sia* $\left[\dfrac{\mathrm{c}}{1+3\mathrm{m}(1-\varepsilon)\mathrm{a}}\right]_3 = -1$ *non può esprimersi come prodotto di sostituzioni paraboliche del gruppo* $\Gamma_{\mu[3m(1-\varepsilon)]}$.

Dalle cose dette segue che il teorema del § 4, n.° 6, non sussiste per i moduli $3(1-\varepsilon)m$, qualunque sia m ([36]).

Firenze, giugno 1924.

([36]) In altra nota ci proponiamo di trovare le ulteriori condizioni che caratterizzano i gruppi $G_{2\mu(4m)}$, $G_{2\mu[3m(1-\varepsilon)]}$, così come abbiamo fatto nel nostro lavoro: *Le relazioni fondamentali del gruppo modulare finito con coefficiente nel campo di Gauss*, (loc. cit. ([2])).

Sui sistemi regolari di integrali abeliani riducibili e sulle reti di corrispondenze ad essi associate.

Memoria di CARLO ROSATI (a Pisa).

La teoria degli integrali abeliani riducibili ha fatto in questi ultimi anni progressi notevoli, specialmente dovuti a lavori di geometri italiani. Per non citare che i principali, ricordo l'elegante procedimento, con cui SEVERI (1), applicando per primo i metodi della geometria iperspaziale a questo genere di studi, ha dimostrato e generalizzato alcuni teoremi classici di PICARD e POINCARÉ, e gli importanti contributi che allo studio di detti integrali ha portato lo SCORZA con le sue belle ricerche sulle *matrici di Riemann* (2), nelle quali i risultati noti e numerosi altri nuovi sono inquadrati in una teoria di notevole semplicità ed eleganza.

Nelle mie ricerche sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica, ho visto che la presenza su questa di sistemi regolari d'integrali riducibili è legata all'esistenza di classi particolari di corrispondenze singolari, che ho chiamato corrispondenze *speciali,* onde le proprietà di quei sistemi si traducono in proprietà di queste corrispondenze. Si presenta quindi l'opportunità, nel caso particolare di integrali appartenenti ad una curva, ed anche in vista di eventuali ulteriori sviluppi dello studio delle corrispondenze, di dare alla teoria degli integrali riducibili uno svolgimento che abbia con quella delle corrispondenze una relazione più intima di quella che non sia nella trattazione di SCORZA, nella quale i procedimenti si riferiscono generalmente a varietà algebriche qualunque, dotate di integrali semplici di 1ª specie.

(1) SEVERI: *Sugli integrali abeliani riducibili.* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, (5), vol. XXIII, 1° sem. 1914).

(2) Cfr. le Memorie di SCORZA: a) *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni,* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLI, 1916). b) *Le algebre di ordine qualunque e le matrici di Riemann,* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLV, 1921). Con questa seconda Memoria lo SCORZA ha dato allo studio delle matrici di RIEMANN un impulso vigoroso, mercè l'applicazione della teoria delle algebre associative. Vedasi a tal proposito l'opera fondamentale dello SCORZA: *Corpi numerici e algebre.* (Messina, Principato, 1921).

È questo lo scopo che mi sono prefisso in questa Memoria, nella quale, oltre a ritrovare per altra via alcuni dei risultati di SCORZA, altri se ne aggiungono che mi sembra debbano presentare un qualche interesse.

§ I. Le reti di corrispondenze associate a un sistema regolare riducibile.

1. Si abbia sopra una curva Γ, di genere $p > 1$, un sistema regolare riducibile A, ∞^{q-1}, e sia $R_{2(p-q)-1}$ il suo *asse* (3). Diremo che una corrispondenza speciale X fra i punti di Γ *appartiene* ad A quando la somma dei valori di un integrale di 1ª specie qualsiasi della curva nei punti del gruppo omologo per X di un punto variabile è un integrale di A; diremo che una corrispondenza speciale Y è *di livello costante* per A quando ogni integrale di A dà somma costante nel gruppo omologo per Y di un punto variabile. Le corrispondenze X appartenenti ad A sono quelle aventi per immagine omografie singolari col 1° asse passante per $R_{2(p-q)-1}$ e formano una *rete*; essa si dirà *rete di 1ª specie* associata ad A, ovvero all'asse $R_{2(p-q)-1}$, e si indicherà con M_{l-1}, essendo $l \geq 1$ il numero delle corrispondenze indipendenti in essa contenute. Le corrispondenze Y di livello costante per A sono quelle aventi per immagine omografie singolari col 2° asse contenuto in $R_{2(p-q)-1}$ e formano pure una rete, che si dirà *rete di 2ª specie* associata ad A o all'asse $R_{2(p-q)-1}$ e si indicherà con N_{m-1}, essendo $m-1$ $(m \geq 1)$ la sua dimensione. Ai numeri l, m daremo il nome di *indici* (*1º* e *2º*) del sistema A o dell'asse $R_{2(p-q)-1}$. Si avverta che in M_{l-1} esistono certo corrispondenze il cui 1° asse coincide con $R_{2(p-q)-1}$, e che in N_{m-1} esistono corrispondenze il cui 2° asse coincide con $R_{2(p-q)-1}$. Se U è una corrispondenza (di N_{m-1}) avente $R_{2(p-q)-1}$ per 2° asse, e V è una corrispondenza (di M_{l-1}) avente $R_{2(p-q)-1}$ come 1° asse, le reti M_{l-1} N_{m-1} sono generate rispettivamente dalle corrispondenze X Y tali che

$$UX \equiv 0, \quad YV \equiv 0. \tag{1}$$

(3) Per le nozioni, di cui faremo largo uso, di *asse di un sistema regolare*, di *spazi d'incidenza di un asse*, di *omografia immagine di una corrispondenza*, di *sistema nullo fondamentale*, di *rete di corrispondenze*, ecc. vegganai le mie Memorie: a) *Sugli integrali abeliani riducibili*, (Atti della R. Accademia di Torino, vol. L, 1915); b) *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e, in particolare, fra i punti di una curva di genere due*, (Annali di Matematica, serie III, tomo XXV, 1915); c) *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di due curve algebriche*, (Annali di Matematica, serie III, tomo XXVIII, 1918); d) *Nuove ricerche sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica*, (Annali di Matematica, serie III, tomo XXXI, 1921).

Sia α il sistema regolare ∞^{p-q-1}, complementare di A, avente per asse l'R_{2q-1} polare di $R_{2(p-q)-1}$ nel *sistema nullo fondamentale* Λ. I sistemi A ed α, come pure i loro assi, si diranno *coniugati*. Ricordando che le corrispondenze U^{-1} V^{-1}, inverse di U V, hanno per immagini omografie singolari per le quali R_{2q-1} è rispettivamente il 1° e 2° asse, e poichè dalle (1) si deducono le relazioni

$$X^{-1}U^{-1} \equiv 0, \quad V^{-1}Y^{-1} \equiv 0,$$

mentre da queste si deducono le (1), si ha la proprietà:

Le corrispondenze contenute nelle reti di 1ª e di 2ª specie associate ad un asse sono le inverse delle corrispondenze contenute nelle reti di 2ª e di 1ª specie associate all'asse coniugato.

Due assi coniugati hanno dunque, salvo l'ordine, i medesimi indici; e se M'_{m-1} N'_{l-1} indicano le due reti associate all'asse R_{2q-1}, la proprietà dimostrata può rappresentarsi simbolicamente con

$$M'_{m-1} = (N_{m-1})^{-1}, \quad N'_{l-1} = (M_{l-1})^{-1}.$$

2. Occorre ora riprendere una rappresentazione, da me altrove considerata ([1]), delle corrispondenze della curva Γ sui punti razionali di uno spazio lineare.

Sia μ il numero base per la totalità delle corrispondenze di Γ e $(T_1 T_2 \ldots T_\mu)$ una base minima per le corrispondenze medesime, in guisa che per ogni corrispondenza T si abbia l'equivalenza

$$T \equiv \lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2 + \ldots + \lambda_\mu T_\mu,$$

in cui $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\mu$ sono numeri interi. Se in uno spazio $S_{\mu-1}$ si stabilisce un sistema di coordinate omogenee, e chiamiamo *immagine* di T il punto di $S_{\mu-1}$ di coordinate $(\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\mu)$, l'insieme delle corrispondenze di Γ viene assimilato alla totalità dei punti razionali di $S_{\mu-1}$, un punto essendo immagine di infinite corrispondenze due a due dipendenti; e le reti associate ad un sistema regolare avranno per immagini spazi razionali subordinati in $S_{\mu-1}$. Indicheremo tali spazi con gli stessi simboli con cui si denotano le reti.

Siano ora A A' due sistemi regolari complementari qualsiansi ∞^{q-1} ∞^{p-q-1}, $R_{2(p-q)-1}$ R_{2q-1} i loro assi, M_{l-1} N_{m-1} le reti associate ad A, M'_{r-1} N'_{s-1} quelle associate ad A'.

([1]) Rosati: *Sulle corrispondenze algebriche fra i punti di una curva algebrica.* Note I e II, (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXII, 2° sem. 1913).

Se T è una corrispondenza speciale avente R_{2q-1} $R_{2(p-q)-1}$ rispettivamente come 1° e 2° asse ed X è una corrispondenza variabile, ponendo $TX \equiv X'$, i punti di $S_{\mu-1}$ immagini di X X' sono omologhi in una omografia razionale τ, che diremo *indotta in $S_{\mu-1}$ dalla T come moltiplicatrice a sinistra.* Poichè le immagini di corrispondenze X tali che $TX \equiv 0$ sono tutti e soli i punti razionali di $S_{\mu-1}$ che hanno in τ l'omologo indeterminato, si deduce che τ è singolare ed ha come 1° spazio singolare l'immagine M_{l-1} della rete di 1ª specie associata all'asse $R_{2(p-q)-1}$. Proviamo ora che l'$S_{\mu-1-l}$, 2° spazio singolare di τ, è indipendente da M_{l-1}. Invero, nell'ipotesi opposta, la τ^2, indotta da T^2, avrebbe come 1° spazio singolare uno spazio contenente M_{l-1} e più ampio di questo. Indicando allora con X una corrispondenza avente per immagine un punto contenuto nel 1° spazio singolare di τ^2 ma non in qnello di τ, sarebbe $TX \not\equiv 0$ e $T^2X \equiv 0$. Il 1° asse di X conterrebbe perciò il 2° asse di T^2 ma non quello di T, e quindi il 2° asse di T^2 sarebbe meno ampio di quello di T; ciò porta che i due assi $R_{2(p-q)-1}$ R_{2q-1} dovrebbero incontrarsi, contro l'ipotesi. Osservando poi che una corrispondenza avente l'immagine in $S_{\mu-1-l}$ ha il 1° asse passante per R_{2q-1}, si deduce che $S_{\mu-1-l}$ è contenuto o coincide con l'immagine della rete di 1ª specie associata a R_{2q-1}; ma poichè d'altra parte le reti di 1ª specie associate agli assi complementari $R_{2(p-q)-1}$ R_{2q-1} sono indipendenti (perchè una corrispondenza avente il 1° asse passante per gli assi suddetti è a valenza zero), si conclude che $S_{\mu-1-l}$ coincide con l'immagine M'_{r-1} della rete di 1ª specie associata a R_{2q-1}, e si avrà $l + r = \mu$.

Analoga deduzione può farsi per le reti di 2ª specie N_{m-1} N'_{s-1}, considerando l'omografia τ_1 indotta in $S_{\mu-1}$ dalla T *come moltiplicatrice a destra.* Ma più rapidamente si giunge al risultato osservando che $(N_{m-1})^{-1}$ $(N'_{s-1})^{-1}$ sono le reti di 1ª specie associate ai sistemi regolari α α' coniugati di A A', i quali sono pure complementari. Ne segue $m + s = \mu$ e che le reti $(N_{m-1})^{-1}$ $(N'_{s-1})^{-1}$, e quindi anche le reti N_{m-1} N'_{s-1}, sono indipendenti. Si ha dunque:

Le reti di 1ª specie (o di 2ª specie) associate a due sistemi regolari complementari A A' hanno per immagine due spazi indipendenti e appartenenti a $S_{\mu-1}$.

Supponendo in particolare che gli assi $R_{2(p-q)-1}$ R_{2q-1} siano coniugati, le reti N_{m-1} M'_{r-1} sono l'una inversa dell'altra, onde sarà $m = r$. Ma allora dall'uguaglianza $l + r = \mu$ si deduce l'altra $l + m = \mu$, cioè:

La somma degl'indici di un sistema regolare uguaglia il numero base delle corrispondenze.

Ritornando all'ipotesi che $R_{2(p-q)-1}$ R_{2q-1} siano due assi complementari qualsiansi, dalle uguaglianze $l+m=\mu$, $l+r=\mu$ si deduce $r=m$ e quindi $s=l$; dunque:

Gl'indici di un sistema regolare A coincidono, salvo l'ordine, con quelli di un qualsiasi sistema complementare A'.

3. Siano A e B due sistemi regolari riducibili, C il sistema congiungente e D quello intersezione. È chiaro che gli assi di C, D sono rispettivamente l'intersezione e l'asse congiungente gli assi di A e di B. Indichiamo con l m r s i primi indici dei sistemi A B C D e con $M^{(a)}$ $M^{(b)}$ $M^{(c)}$ $M^{(d)}$ le reti di 1ª specie associate ad essi. Una corrispondenza comune alle due reti $M^{(a)}$ $M^{(b)}$ deve avere il 1° asse passante per gli assi di A e di B e quindi per l'asse di D, e inversamente; dunque la rete $M^{(d)}$ è l'intersezione delle reti $M^{(a)}$ $M^{(b)}$, e perciò le immagini di $M^{(a)}$ $M^{(b)}$ appartengono ad un $S_{l+m-s-1}$. Poichè una corrispondenza che sia combinazione lineare di quelle appartenenti ad $M^{(a)}$ $M^{(b)}$ deve avere il 1° asse passante per l'asse di C, si deduce che $S_{l+m-s-1}$ è contenuto o coincide con l'immagine di $M^{(c)}$; sarà dunque $l+m-s-1\leq r-1$, cioè $l+m\leq r+s$. Si considerino ora i sistemi α β γ δ coniugati di A B C D; γ sarà l'intersezione e δ il sistema congiungente i due sistemi α β. Poichè i primi indici di α β γ δ sono $\mu-l$, $\mu-m$, $\mu-r$, $\mu-s$, per la proprietà ora dimostrata sarà $(\mu-l)+(\mu-m)\leq\leq(\mu-r)+(\mu-s)$, cioè $l+m\geq r+s$. Si conclude pertanto che $l+m=r+s$ e che $S_{l+m-s-1}$ coincide con l'immagine di $M^{(c)}$; dunque:

Le reti di 1ª specie associate al sistema intersezione e al sistema congiungente due sistemi regolari sono rispettivamente la rete intersezione e quella congiungente le reti di 1ª specie associate ai sistemi dati.

Siano ora $N^{(a)}$ $N^{(b)}$ $N^{(c)}$ $N^{(d)}$ le reti di 2ª specie associate ai sistemi A B C D. Poichè $(N^{(a)})^{-1}$ $(N^{(b)})^{-1}$ $(N^{(c)})^{-1}$ $(N^{(d)})^{-1}$ sono le reti di 1ª specie relativi ai sistemi coniugati α β γ δ, $(N^{(c)})^{-1}$ sarà l'intersezione ed $(N^{(d)})^{-1}$ sarà la rete congiungente le due reti $(N^{(a)})^{-1}$ $(N^{(b)})^{-1}$. Ne segue che $N^{(c)}$ è l intersezione ed $N^{(d)}$ è la rete congiungente le due reti $N^{(a)}$ $N^{(b)}$; dunque:

Le reti di 2ª specie associate al sistema intersezione e al sistema congiungente due sistemi regolari sono rispettivamente la rete congiungente e quella intersezione delle reti di 2ª specie associate ai sistemi dati.

Osservazione. Le proprietà ora dimostrate contengono come casi particolari quelle del n.° 2, quando si consideri il sistema ∞^{p-1} di tutti gli integrali della curva come un sistema regolare di indici $(0, \mu)$. Esse dicono inoltre che alle operazioni di proiezione e sezione eseguite fra gli assi di più sistemi regolari, rispondono nelle reti di 1ª specie operazioni di sezione e proiezione, e nelle reti di 2ª specie operazioni di proiezione e sezione.

4. Per le considerazioni che dovremo fare in seguito, occorre richiamare alcune proprietà della rappresentazione accennata al n.° 2. Ricordiamo perciò che due corrispondenze U, V di indici $(\alpha\ \beta)$ $(\alpha'\ \beta')$ con ν coppie comuni si dicono coniugate quando è $\alpha\beta' + \alpha'\beta - \nu = 0$; si dicono invece *anticoniugate* quando l'una è coniugata dell'inversa dell'altra, cioè quando è $\alpha\alpha' + \beta\beta' - \bar{\nu} = 0$, essendo $\bar{\nu}$ il numero delle coppie comuni a U e a V^{-1}; ed è chiaro che ν, $\bar{\nu}$ sono rispettivamente i numeri di coincidenze delle corrispondenze UV^{-1}, UV.

Ciò posto, si prenda una base minima $(T_1\ T_2 \ldots T_\mu)$, e, indicati con $(\alpha_i\ \beta_i)$ gl'indici di T_i, con ν_{ik} il numero delle coppie comuni a T_i, T_k (per $i = k$ il grado virtuale di T_i), e con $\bar{\nu}_{ik}$ il numero delle coppie comuni a $T_i\ T_k^{-1}$, si ponga

$$\omega_{ik} = \alpha_i\beta_k + \alpha_k\beta_i - \nu_{ik}, \quad \bar{\omega}_{ik} = \alpha_i\alpha_k + \beta_i\beta_k - \bar{\nu}_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots \mu)$$

e si considerino in $S_{\mu-1}$ le due quadriche

$$\Omega = \sum_{ik}^{1\ldots\mu} \omega_{ik}x_ix_k = 0, \quad K = \sum_{ik}^{1\ldots\mu} \bar{\omega}_{ik}x_ix_k = 0.$$

Vedemmo che due corrispondenze sono coniugate o anticoniugate quando e solo quando hanno per immagini punti coniugati rispetto alla quadrica Ω o rispetto alla quadrica K; inoltre al fascio (ΩK) appartengono le due quadriche specializzate $\Omega - K = 0$, $\Omega + K = 0$ aventi come spazi doppi un S_{μ_1-1} e un S_{μ_2-1} razionali indipendenti $(\mu_1 + \mu_2 = \mu)$ i quali rappresentano con gl'insiemi dei loro punti razionali le totalità delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche della curva. Le polarità Ω, K sono permutabili e il loro prodotto è l'omografia involutoria J avente per spazi fondamentali S_{μ_1-1} ed S_{μ_2-1}, e le coppie di punti omologhi in J sono immagini di due corrispondenze l'una inversa dell'altra. Osservammo inoltre che Ω non contiene alcun punto reale; aggiungiamo ora che, supposto $\mu_2 \geq 1$, *K è a punti reali e che la dimensione dei suoi spazi reali massimi uguaglia il minore dei numeri* $\mu_1 - 1$, $\mu_2 - 1$.

Che la quadrica K contiene punti reali si deduce subito osservando che i due punti in cui essa è segata da una retta reale appoggiata ai due spazi S_{μ_1-1} S_{μ_2-1} in due punti A e B costituiscono la coppia comune all'involuzione iperbolica avente A e B per elementi doppi e all'involuzione ellittica dei punti coniugati rispetto ad Ω, coppia notoriamente reale. Inoltre le sezioni di K con gli spazi S_{μ_1-1} S_{μ_2-1}, coincidendo con quelle di Ω, sono quadriche non contenenti alcun punto reale. Ne segue che una trasformazione reale di coordinate, in cui la nuova piramide fondamentale è una μ^{pla} polare con μ_1 vertici in S_{μ_1-1} e μ_2 vertici in S_{μ_2-1}, riduce l'equazione di K a forma canonica con μ_1 coefficienti di un segno e μ_2 di segno contrario, il che prova quanto sopra si è asserito.

Ciò premesso, dalla proprietà osservata al n.° 1 si deduce che:

L'involuzione J trasforma le immagini delle reti di 1ª e di 2ª specie relative ad un asse nelle immagini delle reti di 2ª e di 1ª specie relative all'asse coniugato.

Siano ora M_{l-1} N_{m-1} $(l+m=\mu)$ le reti di 1ª e di 2ª specie associate all'asse $R_{2(p-q)-1}$. Se X è una corrispondenza qualsiasi della prima ed Y una qualsiasi della seconda, dal fatto che il 2° asse di Y è contenuto nel 1° asse di X si deduce che $YX\equiv 0$. Ed allora indicando con $(\alpha\ \beta)$ gl'indici di Y, con $(\alpha'\ \beta')$ quelli di X e con ν il numero delle coincidenze della corrispondenza YX, poichè questa è a valenza zero, si avrà l'uguaglianza $\alpha\alpha'+\beta\beta'-\nu=0$, la quale dice che le corrispondenze Y, X sono anticoniugate. Le immagini delle reti M_{l-1} N_{m-1} sono dunque spazi polari rispetto a K, cioè:

La polarità rispetto alla quadrica K trasforma l'una nell'altra le immagini delle due reti associate ad uno stesso asse.

Infine, essendo $\Omega=JK$, si avrà:

La polarità rispetto ad Ω trasforma le immagini delle reti di 1ª e di 2ª specie relative ad un asse in quelle delle reti di 1ª e di 2ª specie relative all'asse coniugato.

§ II. **Coefficiente d'immersione di un sistema regolare. Sistemi isolati.**

5. Nella formula

$$T\equiv\lambda_1 T_1+\lambda_2 T_2+\ldots+\lambda_\mu T_\mu \tag{2}$$

con la quale una qualsiasi corrispondenza T viene espressa mediante una base minima, supponiamo che i simboli T T_1 $T_2\ldots T_\mu$, oltre che rappresentare corrispondenze, indichino pure le omografie che ne sono le immagini. Dando allora ai parametri λ_1 $\lambda_2\ldots\lambda_\mu$ tutti i possibili valori reali e complessi si viene a generare un sistema lineare $\infty^{\mu-1}$ di omografie, costituenti un gruppo G, riferito proiettivamente allo spazio $S_{\mu-1}$, i punti razionali di $S_{\mu-1}$

rappresentando omografie immagini di corrispondenze, e gli spazi subordinati di $S_{\mu-1}$ sistemi lineari subordinati di G ([5]).

Si considerino ora le due reti M_{l-1} N_{m-1} $(l+m=\mu)$ associate ad un sistema regolare A di asse $R_{2(p-q)-1}$ e supponiamo dapprima che le due immagini si intersechino in un $S_{\lambda-1}$ $(\lambda>0)$ e quindi appartengano ad un $S_{\mu-1-\lambda}$. Gli spazi $S_{\lambda-1}$ $S_{\mu-1-\lambda}$ sono razionali e il numero λ, manifestamente inferiore ad l e ad m, rappresenta il numero delle corrispondenze indipendenti che al tempo stesso appartengono ad A e sono di livello costante per A. Si ha ora la seguente proprietà fondamentale:

Lo spazio $S_{\mu-1-\lambda}$ congiungente le immagini delle reti di 1ª e di 2ª specie associate ad un asse $R_{2(p-q)-1}$ rappresenta il sistema lineare di omografie del gruppo G che trasformano in sè l'asse medesimo.

Dal fatto che l'asse $R_{2(p-q)-1}$ è uno spazio razionale, discende che il sistema lineare delle omografie di G trasformanti in sè $R_{2(p-q)-1}$ ha per immagine in $S_{\mu-1}$ uno spazio razionale. Sarà dunque dimostrato l'asserto, quando si sia provato che i punti razionali di $S_{\mu-1-\lambda}$ sono tutti e soli immagini di omografie razionali di G trasformanti in sè $R_{2(p-q)-1}$.

Sia P un punto razionale di $S_{\mu-1-\lambda}$ ed H l'omografia di G ad esso corrispondente. Se P giace in M_{l-1}, ovvero in N_{m-1}, può dirsi che H muta in sè $R_{2(p-q)-1}$, giacchè nel 1° caso l'omologo in H di ogni punto di $R_{2(p-q)-1}$ è indeterminato, nel 2° caso, quando non è indeterminato, giace in $R_{2(p-q)-1}$. Supposto che P non appartenga nè ad M_{l-1} nè ad N_{m-1}, si conduca per P un S_1 razionale appoggiato a questi spazi in due punti distinti P_1 P_2 e siano H_1 H_2 le omografie di G che hanno i punti stessi per immagini. L'omografia H appartiene al fascio individuato da H_1, H_2; e poichè un

---

([5]) Le immagini delle reti associate ai sistemi regolari sono spazi razionali giacenti sulla ipersuperficie Φ i cui punti corrispondono alle omografie singolari del sistema lineare (2). L'ordine di Φ (priva di parti ripetute) è il grado dell'equazione minima dell'omografia generica del sistema. Osserviamo, per quanto ciò non occorra nel seguito, che l'equazione minima dell'omografia generica T, di coordinate $(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_\mu)$ si può subito scrivere, quando siano note l'equazione $\varphi(\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_\mu)=0$ della ipersuperficie Φ e le coordinate $(k_1k_2\ldots k_\mu)$ dell'identità. Essa è infatti $\varphi(\lambda_1-zk_1,\ \lambda_2-zk_2,\ \lambda_\mu-zk_\mu)=0$, cioè

$$z^n-\binom{n}{1}\frac{1}{\varphi(k_i)}\,\Delta_k^{(n-1)}\varphi(\lambda_i)z^{n-1}+\binom{n}{2}\frac{1}{\varphi(k_i)}\,\Delta_k^{(n-2)}\varphi(\lambda_i)z^{n-2}+\ldots+(-1)^n\frac{1}{\varphi(k_i)}\,\varphi(\lambda_i)=0$$

dove $\Delta^{(s)}$ è il noto simbolo di polarizzazione

$$\Delta_k^{(s)}\varphi(\lambda_i)=\frac{1}{(n-s+1)\ldots n}\left(k_1\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1}+\ldots+k_\mu\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_\mu}\right)^{(s)}.$$

punto qualsiasi di $R_{2(p-q)-1}$ ha in H_1 l'omologo indeterminato, tale punto avrà in H e in H_2 lo stesso omologo, il quale dovrà dunque appartenere a $R_{2(p-q)-1}$.

Inversamente sia H un'omografia razionale di G trasformante in sè $R_{2(p-q)-1}$ e proviamo che il punto P, corrispondente ad H, appartiene ad $S_{\mu-1-\lambda}$.

Si consideri perciò un asse R_{2q-1} complementare di $R_{2(p-q)-1}$ e l'omografia razionale di G che ammette R_{2q-1}, $R_{2(p-q)-1}$ come 1° e 2° spazio singolare e che induce in $R_{2(p-q)-1}$ l'identità. Se T è una corrispondenza speciale avente per immagine questa omografia, la T, come moltiplicatrice a sinistra, induce in $S_{\mu-1}$ un'omografia τ che ammette come 1° spazio singolare M_{l-1} e come 2° spazio singolare l'immagine M'_{m-1} della rete di 1ª specie relativa a R_{2q-1}, e i due spazi M_{l-1} M'_{m-1} sono indipendenti (n.° 2). Poichè, per l'ipotesi fatta su T, le corrispondenze T^2 e T sono dipendenti, l'omografia τ^2, indotta da T^2 deve coincidere con τ, e quindi τ deve indurre in M'_{m-1} l'identità. Si ponga ora $TH \equiv H_1$. Se fosse $H_1 \equiv 0$, il punto P appartiene ad M_{l-1} e la proprietà è dimostrata; supposto $H_1 \not\equiv 0$, il punto P è esterno ad M_{l-1} ed ha per omologo in τ il punto P_1 proiezione di P fatta da M_{l-1} su M'_{m-1}. Ma per l'ipotesi fatta su H, la corrispondenza H_1 ha per 2° asse $R_{2(p-q)-1}$ o un asse contenuto in $R_{2(p-q)-1}$; dunque P_1 appartiene ad N_{m-1}, e l'$S_l \equiv (M_{l-1}\ P_1)$ giace in $S_{\mu-1-l}$. E poichè P è contenuto in detto S_l, anche P appartiene ad $S_{\mu-1-l}$.

Osservazione. Nello spazio $S_{\mu-1-\lambda}$ è contenuto il punto cui corrisponde in G l'identità; infatti questo punto ha per omologo in τ l'immagine di T, che è un punto di N_{m-1}. Ciò poteva anche dedursi dal fatto che $S_{\mu-1-\lambda}$ è immagine di un sistema lineare di omografie, che è anche un sottogruppo di G.

6. Si indichi con G_1 il sottogruppo di G che ha per immagine l'$S_{\mu-1-\lambda} \equiv \equiv (M_{l-1}\ N_{m-1})$ e con Σ un sistema lineare ∞^λ contenuto in G e corrispondente ad un S_λ razionale generico di $S_{\mu-1}$. Sia P un punto di questo S_λ ed U l'omografia di Σ che ha P per immagine. Se P non giace nella sezione di S_λ con la ipersuperficie Φ (vedasi la nota ([5])), la U è una omografia non singolare e muta l'asse $R_{2(p-q)-1}$ in un $S_{2(p-q)-1}$ incidente agli spazi dei periodi. Se P appartiene alla detta sezione, la U è singolare; pensando allora P come posizione limite di un punto P^* che si muove sopra una linea tracciata in S_λ genericamente per P, la U risulta limite di una omografia non singolare U^* variabile nel sistema Σ. Associeremo allora a P lo spazio $S_{2(p-q)-1}$ limite dell'$S^*_{2(p-q)-1}$ in cui $R_{2(p-q)-1}$ è mutato dall'omografia variabile U^*.

In tal modo ad ogni punto di S_λ viene a corrispondere un $S_{2(p-q)-1}$ incidente agli spazi dei periodi; in particolare al punto comune ad S_λ e ad $S_{\mu-1-\lambda} = (M_{l-1}\ N_{m-1})$ corrisponde l'asse $R_{2(p-q)-1}$. Indichiamo con V la varietà costituita da questi spazi, concepiti come elementi. Vogliamo provare che:

a) *La V ha la dimensione λ, cioè contiene ∞^λ $S_{2(p-q)-1}$.*

b) *La V è generata dagli spazi $S_{2(p-q)-1}$ ottenuti applicando all'asse $R_{2(p-q)-1}$ le omografie del gruppo G.*

La proprietà *a*) deriva subito dal fatto che l'$S_{2(p-q)-1}$ generico di V ha per corrispondente un solo punto di S_λ. Infatti ciò avviene in particolare per l'asse $R_{2(p-q)-1}$ cui corrisponde l'unico punto comune a S_λ e ad $S_{\mu-1-\lambda}$.

Per stabilire la proprietà *b*), occorre provare che lo spazio $S_{2(p-q)-1}$ in cui è mutato $R_{2(p-q)-1}$ dall'omografia generica T di G è un elemento di G. Infatti $R_{2(p-q)-1}$ è mutato in $S_{2(p-q)-1}$ da tutte e sole le omografie del sistema lineare $\infty^{\mu-1-\lambda} G_1 T$, il quale ha per immagine l'$S'_{\mu-1-\lambda}$ corrispondente dell'$S_{\mu-1-\lambda} = (M_{l-1}\ N_{m-1})$ nell'omografia τ indotta in $S_{\mu-1}$ dalla T come moltiplicatrice a destra; e il punto che $S'_{\mu-1-\lambda}$ ha comune con S_λ è immagine di un'omografia del sistema lineare Σ, la quale muta $R_{2(p-q)-1}$ in $S_{2(p-q)-1}$.

Il ragionamento fatto prova inoltre che la varietà V, i cui elementi sono in corrispondenza biunivoca coi punti di S_λ *è irriducibile e razionale.* E poichè ai punti razionali di S_λ corrispondono elementi razionali, si deduce che *V contiene infiniti assi di dimensione $2(p-q)-1$, i quali costituiscono, nel continuo degli elementi reali, un insieme ovunque denso.*

È anche da osservare che lo spazio cui appartiene V, ove non sia l'S_{2p-1} rappresentativo, *è un asse mutato in sè da tutte le omografie del gruppo G.* Infatti detto spazio è quello stesso cui appartengono gli assi in cui è mutato $R_{2(p-q)-1}$ da $\lambda+1$ omografie razionali indipendenti del sistema lineare Σ, spazio manifestamente razionale, e mutato in sè da ogni omografia di G, perchè tale omografia trasforma in sè la varietà V.

Notiamo infine la seguente proprietà, che avrà nel seguito larga applicazione:

Se $R_{2(p-q)-1}$ è un asse qualsiasi di V ed $\overline{R}_{2(p-q)-1}$ è un altro asse della curva che abbia comune col primo un complementare R_{2q-1}, anche $\overline{R}_{2(p-q)-1}$ è contenuto in V.

Infatti l'omografia del gruppo G che ammette R_{2q-1} ed $\overline{R}_{2(p-q)-1}$ come 1° e 2° spazio singolare e che induce in quest'ultimo l'identità, muta $R_{2(p-q)-1}$ in $\overline{R}_{2(p-q)-1}$, ogni punto di $R_{2(p-q)-1}$ avendo per corrispondente in essa la sua proiezione fatta da R_{2q-1} sopra $\overline{R}_{2(p-q)-1}$.

In particolare un asse della curva che sia infinitamente vicino ad un asse di V appartiene a V.

Il numero λ dicesi *coefficiente d'immersione* dell'asse $R_{2(p-q)-1}$ e del relativo sistema regolare.

Se $\lambda = 0$, l'asse $R_{2(p-q)-1}$ è mutato in sè da tutte le omografie del gruppo G e la varietà V riducesi all'asse medesimo. In tal caso l'asse e il sistema regolare diconsi *isolati* (⁶).

7. È facile vedere che, nell'ipotesi $\lambda > 0$, *tutti gli assi di V hanno comuni gl'indici e il coefficiente d'immersione.*

Che il coefficiente d'immersione è il medesimo per tutti gli assi di V, segue subito dal fatto che applicando ad un asse qualsiasi di V le omografie del gruppo G si ottiene la stessa V. Se poi si osserva che due assi qualunque di V possono pensarsi come primo ed ultimo di una catena tale che due assi consecutivi di essa abbiano comune un complementare, si deduce, in base alla proprietà stabilita al n.° 2, che tutti gli assi di V hanno i medesimi indici.

8. Si indichino con Γ_1 Γ_2 i gruppi (discontinui) di omografie razionali indotte in $S_{\mu-1}$ dalle corrispondenze della curva come moltiplicatrici a destra e a sinistra. Poichè le formule (1) del n.° 1 continuano a sussistere quando si moltiplicano i primi membri, a destra e a sinistra rispettivamente, per una corrispondenza qualsiasi, si deduce che Γ_1 muta in sè l'immagine di ogni rete di 1ª specie e che Γ_2 muta in sè l'immagine di ogni rete di 2ª specie.

Siano ora R R' due assi complentari, e indichino λ λ' i loro coefficienti d'immersione, M_{l-1} N_{m-1} le reti associate ad R, M'_{m-1} N'_{l-1} quelle associate ad $R'(l+m=\mu)$. Se T è una corrispondenza che ammette R ed R' rispettivamente come 1° e 2° asse, le omografie di Γ_1 e di Γ_2 rispondenti a T sono singolari ed hanno rispettivamente (N, N') ed (M', M) per spazi singolari (n.° 2); segue allora dalla precedente proprietà che N N' congiungono due spazi contenuti in M M', e che M M' congiungono due spazi contenuti

(⁶) La nozione di coefficiente d'immersione λ di un asse A, fondamentale nella teoria degli integrali riducibili, è dovuta a SCORZA, il quale l'ha introdotta come *carattere simultaneo* di A e di un qualsiasi asse complementare. Egli ha pure stabilito il significato geometrico di λ, come dimensione della varietà minima algebrica contenente tutti gli assi aventi comune con A un complementare. (Cfr. SCORZA, loc. cit. (²), *a*), 1ª Parte, n.° 41; *b*) 2ª Parte, n.° 26). La via da noi tenuta si discosta da quella di SCORZA.

in N N'. Se dunque nel quadro

(3)

	M_{l-1}	M'_{m-1}
N_{m-1}	$S_{\lambda-1}$	$S_{h'-1}$
N'_{l-1}	S_{h-1}	$S_{\lambda'-1}$

indichiamo le intersezioni di due qualunque delle quattro reti (di specie diversa), si avrà $\lambda + h = l$, $\lambda' + h = l$, e quindi $\lambda = \lambda'$, cioè:

Due assi complementari hanno lo stesso coefficiente d'immersione.

Le varietà V V' definite da R R' hanno dunque la stessa dimensione λ. Proviamo ora che *esse sono trasformate l'una nell'altra dal sistema nullo* fondamentale Λ.

Sia infatti V^* la trasformata di V mediante Λ, e anzitutto si osservi che l'asse R^* di V^*, che è coniugato di R, come complementare di R, appartiene anche a V'. Sia ora $\overline{R}^*$ un altro asse qualsiasi di V^*. Poichè gli assi di V^* formano un insieme ovunque denso, gli assi R^* $\overline{R}^*$ possono pensarsi come primo ed ultimo di una catena contenuta in V^* e tale che due consecutivi di essa abbiano uno stesso complementare. Ne segue che $\overline{R}^*$ è pure un asse di V', cioè ogni asse di V^* è contenuto in V'. Deriva di qui che V' coincide con V^*, perchè altrimenti tutti gli assi di V^* e di conseguenza quelli di V apparterrebbero a una varietà algebrica di dimensione $< \lambda$.

Osservazione. Dalla proprietà ora osservata si deduce che le due varietà V V' sono determinate appena è noto un asse qualsiasi di una di esse, cioè che i complementari di ogni asse dell'una sono contenuti nell'altra. Deriva inoltre che un asse ha il coefficiente d'immersione nullo o positivo secondochè ammette uno o infiniti assi complementari.

9. Si indichino con e t i numeri delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche indipendenti contenute nella rete di 1ª specie M_{l-1} associata all'asse generico R di V, e con e' t' i numeri analoghi per la rete di 2ª specie N_{m-1}; cioè sieno S_{e-1} S_{t-1} le intersezioni di M_{l-1} con gli spazi fondamentali S_{μ_1-1} S_{μ_2-1} dell'involuzione J, $S_{e'-1}$ $S_{t'-1}$ quelle degli spazi medesimi con N_{m-1}. Se nel quadro (3) supponiamo che le reti M'_{m-1} N'_{l-1} si riferiscano all'asse coniugato di R, gli spazi N'_{l-1} M'_{m-1} sono corrispondenti nella J di M_{l-1} N_{m-1} (n.° 1), onde si avrà $h = e + t$, $h' = e' + t'$; ma allora, essendo $l = \lambda + h$, $m = \lambda + h'$, si ottengono le uguaglianze

$$(4) \qquad l = e + t + \lambda, \quad m = e' + t' + \lambda$$

le quali provano che al variare dell'asse R entro V i numeri $(e\ t)$ $(e'\ t')$ non variano.

Passando invece dagli assi di V a quelli di V' si scambiano gl'indici $l\ m$ e le coppie $(e\ t)$ $(e'\ t')$. Infine, applicando le (4) e la proprietà che $M_{l-1}\ N_{m-1}$ sono spazi polari rispetto alla quadrica K, si ottengono le formule (7)

$$(5) \qquad \mu_1 = e + e' + \lambda, \quad \mu_2 = t + t' + \lambda.$$

Osservazione. Poichè nelle reti di 1ª e di 2ª specie sono certo contenute corrispondenze simmetriche, nelle (5) sarà $e \geq 1$ $e' \geq 1$ $t \geq 0$ $t' \geq 0$; e quindi: *Il coefficiente d'immersione di un asse non supera il minore dei numeri* $\mu_1 - 2$, μ_2.

10. Quando è $\lambda = 0$, la varietà V si riduce all'asse R e la V' all'asse coniugato R^*, e dalle (4) si ottiene $l = e + t$, $m = e' + t'$. Le reti di 1ª e di 2ª specie per l'asse R hanno per immagini spazi indipendenti, uniti nell'involuzione J e polari l'uno dell'altro rispetto alle quadriche K ed Ω; esse dunque coincidono con le reti di 2ª e di 1ª specie relative all'asse R^* (n.° 4).

Inversamente se una delle reti associate ad un asse ha per immagine uno spazio unito nella J, dovrà essere $\lambda = 0$; dunque:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un asse sia isolato è che una qualsiasi delle reti ad esso associate contenga insieme ad ogni sua corrispondenza, anche l'inversa.

Vedemmo (n.° 4) che se $X\ Y$ sono due corrispondenze appartenenti alle reti di 1ª e di 2ª specie di un asse R, si ha $YX \equiv 0$. Se R è isolato, le medesime reti sono ancora di 2ª e di 1ª specie per l'asse coniugato R^*; si avrà dunque ancora $XY \equiv 0$, cioè le corrispondenze X, Y sono permutabili. Supponiamo inversamente che le corrispondenze appartenenti alle reti $M_{l-1}\ N_{m-1}$ associate ad R siano permutabili. Se X è una qualsiasi corrispondenza di M_{l-1} ed Y una corrispondenza di N_{m-1} avente R come 2° asse e come 1° asse il coniugato R^*, per l'ipotesi si ha $XY \equiv 0$, e quindi X deve avere il 2° asse

(7) Le formule (5) equivalgono a quelle di SCORZA, con cui si esprimono gl'indici di singolarità e di moltiplicabilità di una matrice *impura* per mezzo degl'indici di singolarità e di moltiplicabilità di due suoi assi complementari. (SCORZA, loc. cit. (2), *a*), 1ª Parte, n.° 41).

contenuto in R^*. Ne segue che X^{-1} ha il 1° asse passante per R, cioè X^{-1} appartiene ad M_{l-1}. La rete M_{l-1} contiene dunque l'inversa di ogni sua corrispondenza, e l'asse R è isolato. Si ha pertanto:

Condizione necessaria e sufficiente perchè un asse sia isolato e che due corrispondenze qualsiansi delle due reti associate ad esso diano per prodotto una corrispondenza a valenza zero, qualunque sia l'ordine in cui si moltiplicano.

§ III. La configurazione degli assi e delle reti di corrispondenze ad essi associate. Coefficiente d'immersione di un asse qualsiasi. Suo limite superiore.

11. Lo studio della configurazione dei sistemi regolari che può possedere una curva è stato compiuto da SCORZA [8], il quale ha determinato i vari aspetti che può presentare una *matrice di Riemann impura*; ma, per ragioni di chiarezza e per le considerazioni che dovremo fare in seguito, occorre che noi lo riprendiamo, dal punto di vista di questa Memoria. Perciò è opportuno partire dai sistemi *ad assi puri*, cioè dai sistemi i cui assi non ne contengono altri di dimensione minore. Tali sistemi sono gli *elementi* coi quali si ottengono tutti i rimanenti sistemi regolari; sulla varietà di JACOBI relativa alla curva i sistemi medesimi dànno luogo a congruenze abeliane con le quali si compongono le rimanenti congruenze.

Sia $R_{2(p-q_1)-1}$ un asse puro avente il coefficiente d'immersione λ_1, e V_1 indichi la varietà, di dimensione λ_1, definita dall'asse medesimo. Tutti gli assi di V_1, trasformati di questo mediante omografie razionali del gruppo G, sono manifestamente puri. Prendendo in V_1 successivamente degli assi $R\ R'\ R''$... con la condizione che ciascuno non sia contenuto e quindi sia indipendente dallo spazio che congiunge i precedenti, si giungerà a costruire un gruppo $R\ R'$... $R^{(k_1)}$ di k_1+1 assi indipendenti di V_1 tale che lo spazio congiungente contenga ogni altro asse di V_1 e quindi l'intera varietà V_1 [9]. Posto $(k_1+1)(p-q_1)=Q_1$ $(Q_1 \leq p)$, la V_1 appartiene ad un R_{2Q_1-1}, il quale, nell'ipotesi $Q_1 < p$, è un asse isolato. Proviamo ora che se è $Q_1=p$ non

(8) SCORZA, loc. cit. (2), *a*), 1ª Parte, pag. 41.

(9) Una varietà algebrica W (in particolare uno spazio lineare) che contenga ogni asse di V_1, contiene l'intera V_1, giacchè altrimenti nell'S_{λ_1} razionale in cui è rappresentata V_1 esisterebbe una varietà algebrica di dimensione $< \lambda_1$ contenente tutti i punti razionali di S_{λ_1}, il che è assurdo.

esistono altri assi puri fuori di V_1, se è $Q_1 < p$, ogni altro asse puro è contenuto nell'asse coniugato di R_{2Q_1-1}. Basta perciò dimostrare che un asse puro $\overline{R}$ non appartenente a V_1 è contenuto nel coniugato di un qualsiasi asse di V_1. Sia dunque $R_{2(p-q_1)-1}$ un asse di V_1 ed R_{2q_1-1} il suo coniugato. Se $\overline{R}$ non giacesse in R_{2q_1-1} dovrebbe essere indipendente da questo asse ed avere perciò la dimensione minore od uguale a $2(p-q_1)-1$; ora entrambe le alternative sono da escludersi perchè, nel 1° caso, proiettando $\overline{R}$ da R_{2q_1-1} su $R_{2(p-q_1)-1}$ si avrebbe in questo un asse di dimensione $< 2(p-q_1)-1$, nel 2° caso $\overline{R}$, come complementare di R_{2q_1-1}, dovrebbe appartenere a V_1. Supponiamo $Q_1 < p$ e che nell'asse $R_{2(p-Q_1)-1}$, coniugato di R_{2Q_1-1}, esista un asse puro $R_{2(p-q_2)-1}$ di coefficiente d'immersione λ_2. Indichi V_2 la varietà definita da questo asse, e k_2+1 il massimo numero di assi indipendenti che essa contiene. Posto $(k_2+1)(p-q_2)=Q_2$, la V_2 appartiene a un asse isolato R_{2Q_2-1}, essendo $Q_2 \leq p - Q_1$. Se $Q_2 = p - Q_1$, non esisteranno altri assi puri fuori di V_1 e di V_2; se è $Q_2 < p - Q_1$, ogni ulteriore asse puro è contenuto nell'asse $R_{2(p-Q_1-Q_2)-1}$ coniugato di quello congiungente R_{2Q_1-1}, R_{2Q_2-1}. Così continuando, si giunge a costruire t assi isolati indipendenti

$$R_{2Q_1-1},\quad R_{2Q_2-1},\ldots\quad R_{2Q_t-1} \qquad (Q_1+Q_2+\ldots+Q_t=p)$$

contenenti rispettivamente delle varietà $V_1\ V_2 \ldots V_t$ di dimensioni $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_t$ definite da assi puri; e si avrà $Q_i=(k_i+1)(p-q_i)$, essendo k_i+1 $(k_i \leq \lambda_i)$ il massimo numero di assi indipendenti contenuti in V_i e $2(p-q_i)-1$ la loro dimensione. Se è $k_i=0$ e quindi $\lambda_i=0$, la V_i si riduce all'asse R_{2Q_i-1} che risulta puro; se è $t=1$ la curva è priva di assi isolati. Un asse qualsiasi R^* non contenuto in alcuna V_i dovrà essere impuro; e poichè, com'è manifesto, si può costruire in esso un sistema di assi puri ad esso appartenenti, R^* si otterrà congiungendo r_1+1 assi indipendenti di V_1, con r_2+1 assi indipendenti di V_2, ecc., essendo $-1 \leq r_i \leq k_i$ $(i=1, 2, \ldots t)$. Gli assi R_{2Q_i-1} $(i=1, 2, \ldots t)$ e quelli congiungenti i medesimi a due a due, a tre a tre, ecc., essendo mutati in sè dal gruppo G sono isolati, e sono i soli aventi questa proprietà, perchè un asse isolato che contenga un asse di V_i deve contenere V_i e quindi il suo spazio di appartenenza R_{2Q_i-1}.

12. Vogliamo ora studiare più da vicino le varietà definite dagli assi puri, per trarre alcune notevoli conseguenze non osservate da altri.

Consideriamo perciò la varietà V_i, di dimensione $\lambda_i > 0$, e, detti $R\ \overline{R}$ due suoi assi qualsiansi, cerchiamo anzitutto il numero delle omografie razionali indipendenti che intercedono fra gli assi medesimi e che mutano gli uni negli altri i loro spazi d'incidenza. Una di queste, che diremo U, si costruisce facilmente, pensando R ed $\overline{R}$ come primo ed ultimo di una catena di assi appartenente a V_i tale che due consecutivi di essa ammettano uno stesso complementare, e riferendo ogni coppia di assi consecutivi prospettivamente alla stella che ha per centro il comune asse complementare. Ed allora le omografie razionali fra R ed $\overline{R}$ della specie suddetta si ottengono tutte moltiplicando per U le omografie razionali dell'asse R in sè che mutano pure in sè i suoi spazi d'incidenza. Ora il numero di queste che sono indipendenti uguaglia il numero delle omografie razionali indipendenti del gruppo G che sono singolari ed hanno per 2° asse R e per 1° asse un asse R' complementare di R. Indicando con m_i il 2° indice di R, poichè la rete di 2ª specie N_{m_i-1} di R e la rete di 1ª specie M'_{m_i-1} di R' s'incontrano in un $S_{m_i-\lambda_i-1}$ (n.° 8), si conclude che il numero richiesto è $m_i - \lambda_i$. Le omografie razionali fra R ed $\overline{R}$ della specie su indicata appartengono dunque a un sistema lineare $\infty^{m_i-\lambda_i-1}$ e il loro insieme è assimilabile all'insieme dei punti razionali di un $S_{m_i-\lambda_i-1}$, razionale.

Ciò posto, sia $R\ R' \dots R^{(k_i)}$ un gruppo di k_i+1 assi indipendenti di V_i ed $\omega_1\ \omega_2 \dots \omega_{k_i}$ siano k_i omografie razionali fra l'asse R e gli assi $R', R'', \dots R^{(k_i)}$ dei rispettivi sistemi lineari $\infty^{m_i-\lambda_i-1}$, omografie certo non singolari, per essere i detti assi puri. Le dette omografie generano una *varietà di Segre* Σ contenente due schiere di spazi: quelli di una schiera sono gli S_{k_i} congiungenti i gruppi di k_i+1 punti omologhi, quelli dell'altra sono degli $S_{2(p-q_i)-1}$ incidenti agli spazi dei periodi. E poichè, preso un S_{k_i} razionale della 1ª schiera, gli spazi della 2ª che escono dai punti razionali di quello sono razionali, si deduce che la 2ª schiera contiene infiniti assi il cui insieme è assimilabile alla totalità dei punti razionali di un S_{k_i}. È facile ora dimostrare che la varietà Σ è contenuta in V_i, cioè che gli spazi della 2ª schiera di Σ sono elementi di V_i; basta infatti provare la cosa per ogni asse $\overline{R}$ di detta schiera; e ciò si verifica subito, pensando $\overline{R}$ come ultimo di una catena di assi contenuta in Σ, di cui il primo sia ad es. l'asse R appartenente a V_i, e tale che due consecutivi di essa abbiano uno stesso complementare.

Si lasci ora cadere l'ipotesi che $\omega_1\ \omega_2 \dots \omega_k$ siano razionali, e si supponga invece che siano omografie generiche variabili nei rispettivi sistemi lineari. Dico che *la varietà W descritta da Σ al variare di $\omega_1\ \omega_2 \dots \omega_k$ coincide con V_i*. Anzitutto si provi che W è contenuta in V_i. Poichè ogni varietà Σ è individuata dalle omografie $\omega_1\ \omega_2 \dots \omega_k$ variabili in sistemi lineari $\infty^{m_i-\lambda_i-1}$, la totalità delle varietà Σ, considerata ciascuna come elemento, può porsi in corrispondenza biunivoca con la varietà dei gruppi di k_i punti tolti da k_i

spazi $S_{m_i-\lambda_i-1}$ e, per quanto si è sopra osservato, ogni Σ corrispondente a gruppi di punti razionali è contenuta in V_i. Se dunque W non fosse contenuta in V_i, nella suddetta varietà di gruppi di k_i punti esisterebbe una varietà algebrica di dimensione $< k_i(m_i - \lambda_i - 1)$ contenente tutti i gruppi di k_i punti razionali, e ciò è assurdo. Per concludere che W coincide con V_i, è sufficiente provare che ogni asse $\overline{R}$ di V_i appartiene a W. Se $\overline{R}$ è indipendente dagli spazi congiungenti k_i qualsiansi degli assi $R\ R' \dots R^{(k_i)}$, la cosa è manifesta, perchè gli assi $R\ R'\ R'' \dots R^{(k_i)}\ \overline{R}$ definiscono una varietà di Segre di quelle sopra costruite. Ammettiamo che $\overline{R}$ sia contenuto nello spazio congiungente $h+1<k_i+1$ degli assi suddetti, ma non in quello congiungente un numero di assi minore. Se, com'è lecito supporre, quegli assi sono $R\ R' \dots R^{(h)}$, mediante gli S_h uscenti dai punti di $\overline{R}$ e appoggiati in un punto a ciascuno dei precedenti vengono a stabilirsi fra l'asse R e gli assi $R'\ R'' \dots R^{(h)}$ delle omografie razionali $\omega_1\ \omega_2 \dots \omega_h$. Le infinite varietà di Segre che si ottengono tenendo fisse $\omega_1\ \omega_2 \dots \omega_h$ e variando $\omega_{h+1} \dots \omega_{k_i}$ nei rispettivi sistemi lineari, contengono tutte l'asse $\overline{R}$.

Dalle considerazioni fatte discende una conseguenza notevole. Osservando che le varietà di Segre con cui è generata la V_i sono $\infty^{k_i(m_i-\lambda_i-1)}$, che in ciascuna gli spazi della 2ª schiera sono ∞^{k_i}, e che per lo spazio generico di V_i passa una sola delle dette varietà, si deduce che la dimensione di V_i è $k_i(m_i - \lambda_i)$, e quindi $k_i = \dfrac{\lambda_i}{m_i - \lambda_i}$. Si ha dunque il risultato:

Se λ_i ed m_i sono il coefficiente d'immersione ed il 2° indice di un asse puro, λ_i è multiplo di $m_i - \lambda_i$, ed il quoziente aumentato di 1 rappresenta il massimo numero di assi indipendenti che appartengono alla varietà definita dal suddetto asse puro.

Si vede inoltre che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la varietà definita da un asse puro sia una varietà di Segre, è che fra il coefficiente d'immersione λ_i ed il suo 2° indice m_i sussista la relazione $m_i - \lambda_i = 1$.

13. Se nell'uguaglianza

$$(k_1 + 1)(p - q_1) + (k_2 + 1)(p - q_2) + \dots + (k_t + 1)(p - q_t) = p$$

si pone $k_i + 1 = \dfrac{m_i}{m_i - \lambda_i}$ $(i = 1, 2, \dots t)$, si ottiene la relazione

$$\frac{m_1}{m_1 - \lambda_1}(p - q_1) + \frac{m_2}{m_2 - \lambda_2}(p - q_2) + \dots + \frac{m_t}{m_t - \lambda_t}(p - q_t) = p.$$

Questa, quando si riferisca alle varietà V'_i definite dagli assi complementari di quelli delle varietà V_i, lega fra loro le dimensioni $p - q_i - 1$ dei *sistemi regolari puri* della curva, i loro primi indici m_i e i loro coefficienti d'immersione λ_i.

Si considerino ora in $S_{\mu-1}$ le immagini N_{m_i-1} delle reti di 2ª specie per gli assi di V_i. Dal fatto che ad assi dipendenti e indipendenti sono associate reti di 2ª specie dipendenti e indipendenti (n.° 3), facilmente può dedursi che il minimo continuo contenente le dette immagini è una varietà algebrica (N_i) cui può assegnarsi una generazione in tutto simile a quella di V_i, salvo la dimensione dello spazio generatore. La (N_i) appartiene ad uno spazio razionale di dimensione $(k_i + 1)m_i - 1$, che è l'immagine della rete di 2ª specie per l'asse isolato R_{2Q_i-1}, e gli spazi cui appartengono (N_1) $(N_2) \ldots (N_t)$ saranno indipendenti e appartenenti ad $S_{\mu-1}$, onde si avrà:

$$(k_1 + 1)m_1 + (k_2 + 1)m_2 + \ldots + (k_t + 1)m_t = \mu\,;$$

da cui si deduce

$$\frac{m_1^2}{m_1 - \lambda_1} + \frac{m_2^2}{m_2 - \lambda_2} + \ldots + \frac{m_t^2}{m_t - \lambda_t} = \mu. \tag{6}$$

Trasformando (N_i) mediante la polarità K, si ottiene la varietà (M_i) contenente le immagini delle reti di 1ª specie per gli assi di V_i, e le trasformate di (N_i) (M_i) mediante l'involuzione J sono le varietà (M'_i) (N'_i) associate alla varietà V'_i definita dagli assi complementari di quelli di V_i.

14. La configurazione delle varietà associate a V_i V'_i assume un aspetto singolarmente semplice nel caso $m_i - \lambda_i = 1$, in cui V_i è una schiera ∞^{m_i-1} appartenente ad una varietà di SEGRE (n.° 12). La varietà (N_i) contenente le immagini N_{m_i-1} delle reti di 2ª specie per gli assi di V_i è pure una schiera ∞^{m_i-1} di una varietà di SEGRE; e poichè le immagini M'_{m_i-1} delle reti di 1ª specie per gli assi di V'_i hanno con un N_{m_i-1} generico un punto comune (n.° 8), ne segue che le dette immagini sono spazi dell'altra schiera, cioè (N_i) (M'_i) *sono le due schiere* ∞^{m_i-1} *di un'unica varietà di Segre* Σ. Tale varietà appartiene ad un $S_{m_i^2-1}$ immagine della rete di 2ª specie per l'asse isolato R_{2Q_i-1}. È noto che in Σ si hanno due schiere ∞^{m_i-1}, correlative di (N_i) (M'_i), di spazi secanti $S_{m_i(m_i-1)-1}$, ottenuti congiungendo $m_i - 1$ spazi indipendenti di ciascuna delle schiere primitive. Proiettando tali schiere di spazi secanti dallo spazio polare di $S_{m_i^2-1}$ rispetto alla quadrica K (o alla quadrica Ω) si generano le varietà (N'_i) ed (M_i).

Se inoltre e' t' indicano i numeri delle corrispondenze simmetriche ed emisimmetriche indipendenti contenute nelle reti N_{m_i-1}, dalle formule (4) del n.° 9 si deduce $e'=1$, $t'=0$, cioè una tal rete contiene una corrispondenza simmetrica e nessuna emisimmetrica. L'immagine della corrispondenza simmetrica è il punto di S_{μ_1-1} in cui lo spazio N_{m_i-1} di una schiera incontra lo spazio M'_{m_i-1} dell'altra che gli corrisponde nell'involuzione J; il luogo di questo punto è allora una varietà di VERONESE ([10]) W, di dimensione m_i-1, di ordine 2^{m_i-1}, appartenente ad un $S_{\frac{(m_i-1)(m_i+2)}{2}}$. Tale spazio è l'intersezione di $S_{m_i^2-1}$ con S_{μ_1-1} ([11]) ed allora l'intersezione di $S_{m_i^2-1}$ con S_{μ_2-1} sarà un $S_{\frac{(m_i+1)(m_i-2)}{2}}$.

15. Sia R^* un asse qualsiasi della curva, λ^* il suo coefficiente d'immersione e V^* la varietà da esso individuata.

Un sistema di assi puri indipendenti appartenenti a R^* sarà costituito da r_1+1 assi indipendenti di V_1, r_2+1 assi indipendenti di $V_2,\ldots$, r_t+1 assi

---

([10]) Dimostriamo la proprietà: *Se in una varietà di Segre ad indici uguali le due schiere di spazi sono riferite proiettivamente, il luogo del punto comune a due spazi corrispondenti è una varietà di Veronese.*

Infatti se la varietà di SEGRE rappresenta le coppie di punti di due spazi $S_r\equiv(x_i)$, $S'_r\equiv(y_i)$, $(i=0,\,1,\ldots\,r)$, le sue equazioni parametriche in $S_{(r+1)^2-1}$ saranno $X_{ik}\equiv x_iy_k$, $(i,\,k=0,\,1,\ldots\,r)$. E poichè una omografia fra S_r ed S'_r, cioè fra le due schiere, può rappresentarsi con $x_i\equiv y_i$, $(i=0,\,1,\ldots\,r)$, il luogo del punto comune a due spazi corrispondenti è rappresentato dalle equazioni $X_{ik}\equiv x_ix_k$, $(1=0,\,1,\ldots\,r)$; esso è dunque una varietà di VERONESE $W_r^{2^r}$ appartenente all'$S_{\frac{r(r+3)}{2}}$ intersezione degli iperpiani $X_{ik}=X_{ki}$, $(i,\,k=1,\ldots\,r)$.

([11]) Per giustificare quest'asserzione, occorre dimostrare che ogni corrispondenza simmetrica speciale T avente il 2° asse contenuto in R_{2Q_i-1} ha per immagine un punto dello spazio $S_{\frac{(m_i-1)(m_i+2)}{2}}$ cui appartiene la varietà di VERONESE W. Sia $\overline{R}$ il 2° asse di T ed $\overline{R}^*$ il suo 1° asse, coniugato di $\overline{R}$. L'asse $\overline{R}$ congiungerà $l\,(\geq 1)$ assi indipendenti $R'\,R''\ldots R^{(l)}$ di V_i ed è chiaro che un tal gruppo si può scegliere in guisa che il coniugato di un qualsivoglia asse del gruppo contenga i rimanenti. Siano $T_1\,T_2\ldots T_l$ le corrispondenze simmetriche speciali aventi per secondi assi $R'\,R''\ldots R^{(l)}$ e indichiamo con $\Sigma\,H_1\,H_2\ldots H_l$ i *sistemi nulli immagini* di $T\,T_1\,T_2\ldots T_l$, aventi come spazi singolari gli assi coniugati di $\overline{R}\,R'\,R''\ldots R^{(l)}$. Poichè i sistemi nulli del fascio (ΣH_1) hanno tutti per spazio singolare l'asse $\overline{R}^*$ e segano R' nel medesimo sistema nullo, dovrà esistere nel fascio un sistema nullo Σ_1 avente per spazio singolare l'asse $(\overline{R}^*\,R')$ congiungente $\overline{R}^*$ con R'. Analogamente nel fascio $(\Sigma_1 H_2)$ esisterà un sistema nullo Σ_2 avente per spazio singolare $(\overline{R}^*\,R'\,R'')$, e, così continuando, si giungerà ad un fascio $(\Sigma_{l-2}H_{l-1})$ contenente un sistema nullo Σ_{l-1} con lo spazio singolare $(\overline{R}^*\,R'\,R''\ldots R^{(l-1)})$. Sarà dunque $\Sigma_{l-1}=H_l$, e Σ apparterrà al sistema lineare individuato da $H_1\,H_2\ldots H_l$; donde segue che la corrispondenza T è una combinazione lineare delle $T_1\,T_2\ldots T_l$ che hanno per immagini punti della varietà di VERONESE W.

indipendenti di V_t, essendo $-1 \leq r_i \leq k_i$. È facile ora dimostrare che la varietà V^* coincide con la varietà W generata dagli spazi congiungenti r_1+1 spazi indipendenti di V_1, con r_2+1 spazi indipendenti di V_2,... con r_t+1 spazi indipendenti di V_t; basta perciò provare che gli assi appartenenti all'una sono pure contenuti nell'altra. Che un asse R di V^* è contenuto in W si deduce da ciò che, essendo R trasformato di R^* mediante un'omografia razionale non singolare che muta gli uni negli altri gli spazi d'incidenza (n.° 12), R dovrà contenere r_1+1 assi indipendenti di V_1, r_2+1 di V_2,... r_t+1 di V_t. Che un asse $\bar{R}$ di W appartiene a V^* si vede pensando R^* ed $\bar{R}$ come primo ed ultimo di una catena contenuta in W, tale che due assi consecutivi di essa abbiano uno stesso complementare. Ciò posto, si determini la dimensione λ^* di V^*.

I gruppi di r_i+1 spazi indipendenti di V_i sono $\infty^{(r_i+1)\lambda_i}$. Ma, ragionando come al n.° 12, si vede che nello spazio congiungente r_i+1 assi indipendenti di V_i sono contenuti $\infty^{r_i(m_i-\lambda_i)}$ spazi di V_i con cui possono formarsi $\infty^{r_i(r_i+1)(m_i-\lambda_i)}$ gruppi di r_i+1 spazi indipendenti. Ne segue che la varietà generata dagli spazi congiungenti r_i+1 spazi indipendenti di V_i ha la dimensione $(r_i+1)\,[\lambda_i - r_i(m_i-\lambda_i)] = (r_i+1)(k_i-r_i)(m_i-\lambda_i)$, onde si avrà la formula

$$\begin{aligned}\lambda^* &= (r_1+1)(k_1-r_1)(m_1-\lambda_1)+ \\ &+ (r_2+1)(k_2-r_2)(m_2-\lambda_2)+\ldots+(r_t+1)(k_t-r_t)(m_t-\lambda_t),\end{aligned} \tag{7}$$

la quale *fornisce il coefficiente d'immersione di ogni asse della curva, quando siano noti i secondi indici e i coefficienti d'immersione degli assi puri.*

Osservazione. Poichè è $(r_i+1)(k_i-r_i) \leq \frac{1}{4}(k_i+1)^2$, dalla (7) si deduce

$$\lambda^* \leq \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{i=t}(k_i+1)^2(m_i-\lambda_i),$$

da cui, tenendo conto che $k_i = \dfrac{\lambda_i}{m_i-\lambda_i}$, si ottiene

$$\lambda^* \leq \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{i=t}\frac{m_i^2}{m_i-\lambda_i}.$$

Infine, osservando la (6), si avrà la disuguaglianza

$$\lambda^* \leq \frac{\mu}{4}$$

la quale assegna un limite superiore per i coefficienti d'immersione degli assi appartenenti alla curva. Perchè tale limite possa esser raggiunto da un asse R^*, occorre che per quest'asse si abbia $r_i + 1 = k_i - r_i = \frac{1}{2}(k_i + 1) (i = 1, 2, \dots t)$; i numeri $k_i + 1$ dovranno esser tutti pari e la varietà V^* definita da R^* coincide con quella definita da un qualsiasi asse complementare. Inversamente se i numeri $k_i + 1$ sono pari, l'asse R^* per cui è $r_i + 1 = \frac{1}{2}(k_i + 1)$ ha il cofficiente d'immersione $\lambda^* = \frac{\mu}{4}$; dunque:

Il valore massimo $\frac{\mu}{4}$ del coefficiente d'immersione può esser raggiunto dagli assi di una varietà V^* la quale contiene insieme ad un suo asse ogni suo complementare.

È chiaro che una tale varietà, quando esiste, è unica, e che può esistere soltanto sulle curve di genere pari.

§ IV. Sistemi regolari provenienti da una involuzione irrazionale. Involuzioni ellittiche.

16. Sopra una curva Γ del genere $p > 1$ si abbia una involuzione T del genere $q (0 < q < p)$ e dell'ordine n, e T indichi pure la corrispondenza (speciale) nella quale un punto ha per omologo il gruppo dell'involuzione uscente da esso. È noto che l'omografia immagine di T ammette come spazi fondamentali due assi coniugati $R_{2(p-q)-1}$ R_{2q-1}, corrispondenti alle radici 0, n della sua equazione caratteristica. Allora, poichè $R_{2(p-q)-1}$ è 1° asse di T e 2° asse di $T - nI$ (I rappresentando l'identità), la rete di 1ª specie per l'asse $R_{2(p-q)-1}$ è generata dalle corrispondenze X tali che $(T - nI)X \equiv 0$, e quella di 2ª specie dalle corrispondenze Y tali che $YT \equiv 0$. Ne segue che:

Il coefficiente d'immersione dei sistemi regolari provenienti da una involuzione irrazionale T di ordine n è il numero delle corrispondenze indipendenti che sono soluzioni delle equazioni

$$TX \equiv nX, \quad XT \equiv 0. \tag{8}$$

I sistemi medesimi saranno dunque isolati o no secondochè non esistono ovvero esistono corrispondenze soddisfacenti alle (8).

Dal primo dei teoremi enunciati al n.° 10 si deduce inoltre che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè ciascuno dei sistemi regolari provenienti da una involuzione irrazionale T faccia parte di una infinità discontinua è che esista almeno una corrispondenza X tale che $XT \equiv 0$, $X^{-1}T \equiv\mid\equiv 0$; cioè che detti G G^{-1} i gruppi omologhi di un punto variabile per la corrispondenza X e per la sua inversa X^{-1}, dei due gruppi formati dai gruppi di T uscenti dai punti di G e di G^{-1}, uno solo si muova entro una serie lineare.

17. Supponiamo $q=1$, cioè T sia l'involuzione proveniente da un integrale ellittico u. Poichè il numero e delle corrispondenze simmetriche indipendenti appartenenti all'asse R_{2p-3} è 1, e quello t delle emisimmetriche è 0 o 1 secondochè l'integrale u non è ovvero è a moltiplicazione complessa, dalle formule (4) del n.° 9 si deduce che il 1° indice dell'asse medesimo è nel 1° caso $l=1+\lambda$ e nel 2° caso $l=2+\lambda$, essendo λ il suo coefficiente d'immersione.

Ammettiamo dapprima che l'integrale u sia isolato e non a moltiplicazione complessa ($\lambda=0$, $t=0$). Le reti di 1ª e di 2ª specie associate all'asse R_{2p-3} hanno allora per immagini un punto M_0 ed un iperpiano $N_{\mu-2}$ polari rispetto alle quadriche K ed Ω e uniti nell'involuzione J.

E poichè M_0 appartiene ad S_{μ_1-1}, l'iperpiano $N_{\mu-2}$, nell'ipotesi $\mu_2>0$, passerà per S_{μ_2-1}; dunque:

Se una curva possiede un integrale ellittico isolato che non sia a moltiplicazione complessa, o non ammette corrispondenze emisimmetriche, ovvero le corrispondenze emisimmetriche sono tutte speciali e di livello costante per il detto integrale.

Reciprocamente, se una curva possiede un integrale ellittico e si verificano le proprietà espresse dalla tesi, l'integrale è isolato e non a moltiplicazione complessa. Infatti dalla formula $\mu_2=t+t'+\lambda$, in cui t' è il numero delle corrispondenze emisimmetriche col 2° asse contenuto in R_{2p-3}, essendo $\mu_2=t'$, si deduce $\lambda=t=0$.

Se l'integrale u è isolato e a moltiplicazione complessa ($\lambda=0$, $t=1$), sarà $\mu_2>0$ e le reti di 1ª e di 2ª specie associate ad u hanno per immagini rispettivamente un M_1 appoggiato ad S_{μ_1-1} S_{μ_2-1} e l'$N_{\mu-3}$ polare di M_1 rispetto alle quadriche K ed Ω.

Sia ora $\lambda>0$ $t=0$, cioè l'integrale u sia non isolato e non a moltiplicazione complessa. L'asse R_1 coniugato di R_{2p-3} ha per 2° indice l e per coefficiente d'immersione λ; e poichè è un asse puro e sussiste la relazione $l - \lambda = 1$, la varietà V' da esso definita è una schiera ∞^λ appartenente ad una varietà di SEGRE (n.° 12). La V' appartiene ad un asse isolato $R_{2\lambda+1}$ i cui spazi d'incidenza S_λ $\overline{S}_\lambda$ sono spazi dell'altra schiera, e la varietà V definita dall'asse R_{2p-3} si ottiene trasformando V' mediante il sistema nullo fondamentale Λ. Le reti di 2ª specie per gli assi di V' e quelli di 1ª specie per gli assi di V hanno per immagini rispettivamente degli spazi N'_λ M_λ contenuti nelle due schiere di un'unica varietà di SEGRE Σ appartenenti ad un $S_{(\lambda+1)^2-1}$, immagine della rete di 2ª specie per l'asse isolato $R_{2\lambda+1}$ e di 1ª specie per l'asse coniugato. L'involuzione J riferisce proiettivamente le due schiere di Σ e il luogo del punto comune a due spazi corrispondenti è una varietà di VERONESE $W_\lambda^{2^\lambda}$ appartenente ad un $S_{\frac{\lambda(\lambda+3)}{2}}$ contenuto in S_{μ_1-1} (n.° 14). Lo spazio $S_{(\lambda+1)^2-1}$, unito nell'involuzione J incontra S_{μ_1-1} nel detto spazio $S_{\frac{\lambda(\lambda+3)}{2}}$ ed S_{μ_2-1} in un $S_{\frac{(\lambda-1)(\lambda+2)}{2}}$, e si avranno perciò le disuguaglianze

$$\mu_1 \geq \frac{1}{2}(\lambda+1)(\lambda+2), \quad \mu_2 \geq \frac{1}{2}\lambda(\lambda+1), \quad \lambda \leq p-1,$$

La T fa parte di una infinità discontinua di involuzioni ellittiche che hanno per immagini i punti razionali della varietà $W_\lambda^{2^\lambda}$; essa è di livello costante per il sistema regolare $\infty^{p-2-\lambda}$ di asse $R_{2\lambda+1}$. Nell'ipotesi $\lambda = p-1$ la varietà Σ appartiene ad S_μ, e si avrà

$$\mu_1 = \frac{p(p+1)}{2}, \quad \mu_2 = \frac{p(p-1)}{2}. \tag{9}$$

Ammettiamo infine che sia $\lambda > 0$, $t = 1$, cioè l'integrale u sia non isolato e a moltiplicazione complessa. Poichè è $k = \frac{\lambda}{l-\lambda} = \frac{\lambda}{2}$, la varietà V' definita da R_1 contiene $\frac{\lambda}{2}+1$ assi indipendenti; essa appartiene dunque a un asse isolato $R_{\lambda+1}$ con gli spazi d'incidenza $S_{\frac{\lambda}{2}}$ $\overline{S}_{\frac{\lambda}{2}}$, onde è generata dagli S_1 congiungenti due punti qualunque degli spazi medesimi. Le reti di 2ª specie per gli assi di V' hanno per immagini degli spazi $N'_{\lambda+1}$ di una varietà (N') contenente $\frac{\lambda}{2}+1$ spazi indipendenti. Ne segue che (N') appartiene ad un $S_{\frac{1}{2}(\lambda+2)^2-1}$ immagine della rete di 2ª specie per l'asse $R_{\lambda+1}$ e di 1ª specie per l'asse coniugato. Si può ora dimostrare che questo spazio incontra S_{μ_1-1} S_{μ_2-1} in spazi di ugual dimensione ([12]), onde si avrà

$$\mu_1 \geq \frac{1}{4}(\lambda+2)^2, \quad \mu_2 \geq \frac{1}{4}(\lambda+2)^2, \quad \lambda \leq 2(p-1).$$

Supposto $\lambda = 2(p-1)$, cioè che non esista alcun integrale per cui l'infinità discontinua di involuzioni ellittiche cui appartiene T sia di livello costante, lo spazio $S_{\frac{1}{2}(\lambda+2)^2-1}$ coincide con $S_{\mu-1}$, onde si avrà

$$\mu_1 = \mu_2 = p^2, \tag{10}$$

e la curva è a indici massimi.

Da ciò che precede discende che se una curva di genere $p > 1$ è priva di sistemi regolari isolati e possiede una involuzione ellittica, ne possiede infinite e i suoi numeri base μ_1 μ_2 non possono presentare che i due casi espressi dalle formule (9) (10) ([13]).

Pisa, maggio 1925.

([12]) Diamo un cenno di dimostrazione. L'omografia singolare avente per 2° spazio singolare $R_{\lambda+1}$ e per 1° l'asse coniugato e che induce in $R_{\lambda+1}$ l'omografia involutoria i cui spazi fondamentali sono $S_{\frac{\lambda}{2}}$, $\bar{S}_{\frac{\lambda}{2}}$ è razionale e immagine di una corrispondenza emisimmetrica E. L'omografia di $S_{\mu-1}$ indotta da E come moltiplicatrice a destra ammette come 2° spazio singolare $S_{\frac{1}{2}(\lambda+2)^2-1}$ e come 1° il suo polare rispetto ad Ω; inoltre in $S_{\frac{1}{2}(\lambda+2)^2-1}$ induce un'omografia non singolare nella quale si corrispondono gli spazi d'intersezione con S_{μ_1-1} ed S_{μ_2-1}. Questi spazi hanno dunque la stessa dimensione.

([13]) Questo risultato è stato, con altre considerazioni, stabilito da SCORZA. (Cfr. SCORZA, loc. cit. ([2]) *a*), 1ª Parte, n.° 54).

Il principio di reciprocità nella Fisica.

Memoria di MARCELLO LELLI (a Bologna).

1. Negli ultimi decenni sono apparsi numerosi lavori riferentisi a particolari forme del cosidetto *principio di reciprocità*, principio che esercita sui Fisici, a quel che sembra, una particolare attrattiva, giustificata del resto dalle varie applicazioni pratiche delle quali, in qualche caso, esso principio è capace.

Tutte queste forme di uno stesso principio sono evidentemente legate da una certa analogia, da alcuni Autori, come il DONATI e il PUPPINI, ripetute volte posta in luce, la quale risulta dall'essere ognuno di tali principi fondato sulla proporzionalità intercedente fra due elementi caratteristici di uno stesso fatto fisico.

Il prof. BURGATTI, nelle sue *Lezioni sulla teoria dell' elasticità* dettate all' Università di Bologna e in nota a una recensione (1) sul volume del prof. COLONNETTI *Principi di statica dei solidi elastici*, fece inoltre notare che tali principi provengono da un' unica formula generale, indicata nell' *Analyse vectorielle générale* di BURALI-FORTI e MARCOLONGO, e che si verificano quando sia soddisfatta una certa condizione, che Egli chiamò *di reciprocità*.

Credo utile riprendere questo importante argomento, con l'intento di indicare altre due condizioni di reciprocità le quali, unitamente a quella del BURGATTI, costituiscono i capisaldi di ogni principio di reciprocità.

2. Siano $\alpha(P)$, $\boldsymbol{u}(P)$ un' omografia e un vettore, variabili entro uno spazio S a tre dimensioni, funzioni finite, continue e monodrome, insieme alle loro derivate prime.

In ogni punto di S vale la relazione:

$$\operatorname{div}(\alpha \boldsymbol{u}) = I_1\left(\alpha \frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\right) + \operatorname{grad} K\alpha \times \boldsymbol{u},$$

(1) Bollettino del prof. LORIA.

e ancora, considerando l'omografia coniugata $K\alpha$:

$$\operatorname{div}(K\alpha u) = I_1\left(K\alpha \cdot \frac{du}{dP}\right) + \operatorname{grad} \alpha \times u,$$

dalla quale, integrando e applicando il teorema della divergenza, si ha:

$$(1) \qquad \int_S \operatorname{grad} \alpha \times u dS + \int_\sigma u \times \alpha n d\sigma + \int_S I_1\left(K\alpha \cdot \frac{du}{dP}\right) dS = 0,$$

dove σ è il complesso delle superficie che limitano S.

La (1) può dirsi *il teorema di Green generalizzato.*

Analogamente, considerando un'altra omografia $\beta P)$ e un altro vettore $v(P)$ definiti entro S. si avrà:

$$(2) \qquad \int_S \operatorname{grad} \beta \times v dS + \int_\sigma v \times \beta n d\sigma + \int_S I_1\left(K\beta \cdot \frac{dv}{dP}\right) dS = 0.$$

Pertanto, qualunque significato fisico possano avere le omografie α, β e i vettori u, v, risulta che sempre *identicamente* sono eguali fra di loro, ed eguali a zero, i primi membri delle (1), (2); si ha cioè:

$$(3) \qquad \int_S \operatorname{grad} \alpha \times u dS + \int_\sigma u \times \alpha n d\sigma + \int_S I_1\left(K\alpha \cdot \frac{du}{dP}\right) dS =$$
$$= \int_S \operatorname{grad} \beta \times v dS + \int_\sigma v \times \beta n d\sigma + \int_S I_1\left(K\beta \cdot \frac{dv}{dP}\right) dS.$$

Questa eguaglianza diremo *relazione identica di reciprocità.*

Supponiamo ora che sia verificata una almeno delle tre condizioni:

$$(4) \qquad \int_S I_1\left(K\alpha \cdot \frac{du}{dP}\right) dS = \int_S I_1\left(K\beta \cdot \frac{dv}{dP}\right) dS,$$

$$(5) \qquad \int_S \operatorname{grad} \alpha \times u dS = \int_S \operatorname{grad} \beta \times v dS,$$

$$(6) \qquad \int_\sigma u \times \alpha n d\sigma = \int_\sigma v \times \beta n d\sigma,$$

che chiameremo *condizioni di reciprocità* [1].

---

[1] La (4), anzi più particolarmente: $I_1\left(K\alpha \cdot \frac{du}{dP}\right) = I_1\left(K\beta \cdot \frac{dv}{dP}\right)$, è la *condizione di reciprocità* indicata dal Burgatti.

Corrispondentemente la *relazione identica* (3) assume sei diverse forme, a ognuna delle quali spetta la denominazione di *principio di reciprocità.*

Ne ommetto qui gli evidenti enunciati per venire immediatamente alle applicazioni.

*
* *

3. Il secondo teorema di Green. — Siano:

$$\alpha = \frac{dv}{dP}; \quad \beta = \frac{du}{dP}.$$

È facile verificare che la *condizione di reciprocità* (4) è soddisfatta. Infatti, se i vettori unitari $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ costituiscono la terna cartesiana di riferimento, si ha:

$$\left(K\frac{dv}{dP}\cdot\frac{du}{dP}\boldsymbol{i}\right)\times\boldsymbol{i} = \frac{du}{dP}\boldsymbol{i}\times\frac{dv}{dP}\boldsymbol{i}, \quad \text{ecc.}$$

dove i secondi membri sono simmetrici in $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$.

Sommando i primi membri risulta $I_1\left(K\alpha\cdot\frac{du}{dP}\right)$, e, scambiando α con β e $\boldsymbol{u}$ con $\boldsymbol{v}$, $I_1\left(K\beta\cdot\frac{dv}{dP}\right)$.

Tali espressioni sono dunque eguali e la (3) assume pertanto la forma:

$$\int_S (\Delta' \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{u} - \Delta'\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\,dS = -\int_\sigma \left(\boldsymbol{u}\times\frac{d\boldsymbol{v}}{dP}\boldsymbol{n} - \boldsymbol{v}\times\frac{d\boldsymbol{u}}{dP}\boldsymbol{n}\right)d\sigma, \tag{7}$$

espressione vettoriale di quello che si suole chiamare il secondo teorema di GREEN, o il lemma di GREEN.

Volendone l'enunciato scalare basta porre:

$$\boldsymbol{u} = \varphi\boldsymbol{a}; \quad \boldsymbol{v} = \psi\boldsymbol{a},$$

dove φ, ψ sono omotetie, cioè funzioni scalari, e $\boldsymbol{a}$ è un vettore costante in tutto S. Si ottiene:

$$\int_S (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)\,dS = -\int_\sigma \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma. \tag{7'}$$

*
* *

4. Il teorema di Betti. — Sia lo spazio S occupato da un solido elastico, non necessariamente isotropo, e siano β, $\boldsymbol{s}$; β', $\boldsymbol{s}'$ due sistemi di omografie delle tensioni e di spostamenti provocati da due diversi sistemi di forze $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_\sigma$; $\boldsymbol{F}'$, $\boldsymbol{F}'_\sigma$ agenti nell'interno e sulla superficie σ che limita lo spazio S.

Ponendo nella (4) β, β' al posto di α, β ed $\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}'$ al posto di $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, si riscontra che essa è verificata.

Infatti, chiamando α, α' le omografie $\dfrac{d\boldsymbol{s}}{dP}$, $\dfrac{d\boldsymbol{s}'}{dP}$ delle deformazioni, si ha:

$$I_1(\beta D\alpha') = I_1(\beta' D\alpha),$$

per essere (come risulta dall'ammettere l'esistenza di un potenziale elastico, funzione quadratica omogenea delle sole deformazioni) ciascun membro simmetrico nelle componenti di $D\alpha$ e $D\alpha'$.

E poichè:

$$I_1(\beta D\alpha') = I_1(\beta\alpha'); \quad I_1(\beta' D\alpha) = I_1(\beta'\alpha),$$

è verificata anche l'eguaglianza:

$$I_1(\beta\alpha') = I_1(\beta'\alpha),$$

in ogni punto di S, cioè la (4).

Pertanto la (3), se si tien conto delle equazioni dell'equilibrio:

$$\begin{cases} \rho \boldsymbol{F} = \operatorname{grad} \beta, & \rho \boldsymbol{F}' = \operatorname{grad} \beta' \\ \boldsymbol{F}_\sigma = \beta \boldsymbol{n}, & \boldsymbol{F}'_\sigma = \beta' \boldsymbol{n} \end{cases}$$

(ρ densità, $\boldsymbol{n}$ normale interna), assume la nota forma:

$$\int_S \rho \boldsymbol{F} \times \boldsymbol{s}' dS + \int_\sigma \boldsymbol{F}_\sigma \times \boldsymbol{s}' d\sigma = \int_S \rho \boldsymbol{F}' \times \boldsymbol{s}\, dS + \int_\sigma \boldsymbol{F}'_\sigma \times \boldsymbol{s}\, d\sigma. \tag{8}$$

5. Il secondo principio di reciprocità. — Anche il cosidetto *secondo principio di reciprocità*, enunciato la prima volta dal Land [1] nel 1887 e di cui in seguito il Colonnetti [2] ha dato due diverse dimostrazioni, può dedursi dalla (3) o ancora dalla (1).

---

[1] Wochenblatt f. Baukunde, gennaio 1887, pag. 25. Cfr. anche G. Albenga: *Sul teorema di reciprocità del Land*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, 1915.

[2] *Sul principio di reciprocità*, Rendiconti della R. Acc. dei Lincei, 1912, pag. 393. G. Colonnetti: *Principi di statica dei solidi elastici*. E. Spoerri, 1916.

Come è noto, per dedurre tale principio, si immagina che in un corpo elastico, in equilibrio sotto l'azione di date forze, sia effettuato un taglio σ_1, e che nel tempo stesso siano applicati sulle due facce del taglio due sistemi di forze distribuite, equivalenti alle tensioni interne che prima agivano attraverso σ_1. Supposto poi che alle due facce di σ_1 venga impresso un moto relativo di corpo rigido, tale cioè che l'una faccia compia rispetto all'altra una traslazione ed una rotazione, si scrive l'espressione del teorema dei lavori virtuali.

Orbene è precisamente la formula (1) quella che qui conviene. Infatti, se indichiamo con:

$\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_\sigma$, $\boldsymbol{F}_{\sigma_1}$ le forze di massa, in superficie e quelle ora applicate su una delle due facce del taglio σ_1 (sull'altra saranno eguali ed opposte);

$\boldsymbol{s}$, β gli spostamenti dei punti del corpo seguiti all'applicazione delle forze $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_\sigma$ e la relativa omografia delle tensioni;

$\delta\boldsymbol{s}$ gli ulteriori spostamenti dovuti al moto di corpo rigido impresso alle facce di σ_1 (sopra ciascuna di queste ultime li indicheremo con $\delta\boldsymbol{s}'$, $\delta\boldsymbol{s}''$ rispettivamente);

β' la nuova omografia delle tensioni,

la (1), ove si pongano in essa

$$\alpha = \beta; \quad \boldsymbol{u} = \delta\boldsymbol{s},$$

diviene:

$$\int_S \rho \boldsymbol{F} \times \delta\boldsymbol{s} dS + \int_\sigma \boldsymbol{F}_\sigma \times \delta\boldsymbol{s} d\sigma + \int_{\sigma_1} \boldsymbol{F}_{\sigma_1} \times (\delta\boldsymbol{s}' - \delta\boldsymbol{s}'') d\sigma_1 + \\ + \int_S I_1 \left\{ K\beta \cdot \frac{d\delta\boldsymbol{s}}{dP} \right\} dS = 0. \tag{9}$$

Ma $K\beta = \beta$, e inoltre:

$$\int_S I_1 \left\{ \beta \frac{d\delta\boldsymbol{s}}{dP} \right\} dS = 0,$$

per il teorema di Menabrea [1].

Pertanto potrà scriversi

$$\int_S \rho \boldsymbol{F} \times \delta\boldsymbol{s} dS + \int_\sigma \boldsymbol{F}_\sigma \times \delta\boldsymbol{s} d\sigma + \int_{\sigma_1} \boldsymbol{F}_{\sigma_1} \times (\delta\boldsymbol{s}' - \delta\boldsymbol{s}'') d\sigma_1 = 0. \tag{10}$$

---

[1] Tale espressione, variazione del lavoro di deformazione, è poi evidentemente nulla quando la natura dei vincoli che legano il corpo, il taglio σ_1, e il moto di corpo rigido impresso siano tali da non importare alcuna deformazione elastica del corpo.

Volendo ricavare la stessa espressione mediante la più recente delle dimostrazioni date dal COLONNETTI, senza cioè ricorrere al teorema di MENABREA, basta valersi della (3) invece che della (1).

Posto in essa

$$\alpha = \beta, \quad \boldsymbol{u} = \delta \boldsymbol{s}; \quad \beta = \beta' - \beta, \quad \boldsymbol{v} - \boldsymbol{s},$$

si ha infatti

$$(11) \quad \int_S \rho \boldsymbol{F} \times \delta \boldsymbol{s} dS + \int_\sigma \boldsymbol{F}_\sigma \times \delta \boldsymbol{s} d\sigma + \int_{\sigma_1} \boldsymbol{F}_{\sigma_1} \times (\delta \boldsymbol{s}' - \delta \boldsymbol{s}'') d\sigma_1 + \int_S I_1 \left\{ K\beta \cdot \frac{d\delta \boldsymbol{s}}{dP} \right\} dS =$$

$$= \int_S I_1 \left\{ K(\beta' - \beta) \cdot \frac{d\boldsymbol{s}}{dP} \right\} dS.$$

poichè è $\operatorname{grad} \beta = \operatorname{grad} \beta'$ ovunque, e $\beta \boldsymbol{n} = \beta' \boldsymbol{n}$ sopra σ e σ_1.

Ma, in base alle stesse considerazioni accennate al numero precedente, si ha:

$$I_1 \left\{ \beta \frac{d\delta \boldsymbol{s}}{dP} \right\} = I_1 \left\{ (\beta' - \beta) \frac{d\boldsymbol{s}}{dP} \right\},$$

corrispondendo le omografie delle deformazioni $\frac{d\delta \boldsymbol{s}}{dP}$, $\frac{d\boldsymbol{s}}{dP}$ rispettivamente a quelle delle tensioni $\beta' - \beta$ e β.

Pertanto la (11) dà ancora luogo alla (10).

Se si pone ora in quest' ultima, secondo fa il COLONNETTI nella prima delle Opere citate,

$$(12) \qquad \delta \boldsymbol{s}' - \delta \boldsymbol{s}'' = \varepsilon \boldsymbol{K} + \omega \boldsymbol{K} \wedge (P - 0),$$

dove:

ε, ω sono due numeri dell' ordine di $|\delta \boldsymbol{s}|$;

$\boldsymbol{K}$ è un vettore unitario individuante l' asse del moto elicoidale risultante della traslazione e della rotazione relative impresse alle facce di σ_1;

0 è un punto dell' asse suddetto;

P è un punto generico;

si ha infine:

$$(13) \qquad \int_S \rho \boldsymbol{F} \times \delta \boldsymbol{s} dS + \int_\sigma \boldsymbol{F}_\sigma \times \delta \boldsymbol{s} d\sigma + \varepsilon \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{R} + \omega \boldsymbol{K} \times \boldsymbol{M} = 0,$$

espressione generale del *secondo principio di reciprocità*, nella quale per brevità si è posto:

$$(12') \qquad \int_S \boldsymbol{F}_{\sigma_1} d\sigma_1 = \boldsymbol{R}; \quad \int_{\sigma_1} (P - 0 \wedge \boldsymbol{F}_{\sigma_1} d\sigma_1 - \boldsymbol{M}.$$

6. Il principio del Volterra. — Nel campo dell'elasticità ha infine somma importanza, benchè meno adatto alle applicazioni che interessano gli ingegneri, il principio enunciato dal Volterra fra *caratteristiche di distorsioni* e sforzi da essa generati [1], e che presenta con quello di cui s'è fatto menzione nel precedente paragrafo una notevole analogia.

Si consideri uno spazio S, multiplamente connesso, occupato da un solido elastico non soggetto all'azione di alcuna forza di massa o in superficie, ma eventualmente sottoposto a un certo sistema di sforzi interni, rappresentati da un'omografia β (funzione finita, continua, monodroma dei punti di S), dovuti a una deformazione ovunque continua e derivabile, rappresentata dall'omografia α.

Se m è l'ordine di connessione dello spazio, si suppongano eseguiti n tagli ($n < m$) indipendenti, tali cioè che ognuno diminuisca di un'unità l'ordine di connessione di S.

Ove non si applicassero in corrispondenza delle due facce di ciascuna delle superficie σ, costituenti i tagli, delle forze $\boldsymbol{F}_\sigma$ distribuite, equivalenti a quelle che prima dei tagli stessi si trasmettevano attraverso σ, le due facce subirebbero, come il Volterra dimostra, un moto relativo di corpo rigido.

Applichiamo dunque a coteste facce le forze $\boldsymbol{F}_\sigma$, non solo; ma, ottenuta così la immobilità del sistema, imprimiamo noi ora un moto relativo di corpo rigido alle n coppie di superficie σ.

In virtù di queste n *distorsioni* l'omografia β delle tensioni preesistenti all'esecuzione dei tagli subirà un incremento $\delta\beta$; in particolare gli sforzi $\boldsymbol{F}_\sigma$ subiranno gli incrementi $\delta\beta\boldsymbol{n}$ ($\boldsymbol{n}$ normale interna a ciascuna faccia delle σ); queste ultime sono pertanto le forze distribuite da applicarsi al termine delle n distorsioni al fine di mantenere l'equilibrio.

Posto poi che sia $\delta\alpha$ l'incremento dell'omografia α delle deformazioni, associando al precedente un secondo sistema di incrementi $\delta\beta'$, $\delta\alpha'$ dipendente da un secondo gruppo di n distorsioni, risulta verificata la (4), ove si faccia in essa:

$$\alpha = \delta\beta, \quad \beta = \delta\beta'$$
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{s}', \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{s}$$

($\boldsymbol{s}$, $\boldsymbol{s}'$ sono gli incrementi dello spostamento) poichè si ha:

$$I_1 \left\{ \delta\beta \frac{d\boldsymbol{s}'}{dP} \right\} = I_1(\delta\beta\delta\alpha') = I_1(\delta\beta'\delta\alpha) = I_1 \left\{ \delta\beta' \frac{d\boldsymbol{s}}{dP} \right\} \ (^2).$$

(1) V. Volterra: *Annales de l'École Normale Supérieure*, 1907, pag. 433.

(2) Il principio della sovrapposizione degli effetti, qui valevole, permette di trattare il solido elastico come se fosse inizialmente libero da tensioni interne.

Perciò la (3), tenuto conto dell'assenza di forze di massa e sulle superficie non costituenti i tagli, diviene:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\sigma_i} (s'_1 - s'_2) \times \delta\beta n \, d\sigma_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{\sigma_i} (s_1 - s_2) \times \delta\beta' n \, d\sigma_i,$$

nella quale gli indici 1, 2 si riferiscono a ciascuna delle due facce di ogni taglio.

Specificando la natura della discontinuità degli spostamenti impressi (1) e introducendo la risultante e il momento risultante delle forze $\delta\beta n$, e $\delta\beta' n$ (*caratteristiche delle distorsioni*), così come s'è fatto nel numero precedente con le posizioni (12), (12'), si ha:

$$\sum_{i=1}^{n} K' \times (\varepsilon' R + \omega' M) = \sum_{i=1}^{n} K \times (\varepsilon R' + \omega M'),$$

espressione del principio enunciato dal Volterra.

*
* *

7. I principî di Volterra e di Donati nella Elettrodinamica. — Mostrerò in questo e in alcuni dei seguenti paragrafi come si possano dedurre in modo simile anche i principî di reciprocità relativi ai fenomeni elettrici, e poichè i fatti fisici che qui prenderemo in esame si svolgono generalmente in uno spazio avente una dimensione predominante sulle altre due, premetterò alcune opportune modificazioni delle formule (3), (4), (5), (6).

8. Si consideri, entro lo spazio S, una superficie σ aperta, limitata dal contorno l e in ogni suo punto si conduca la normale.

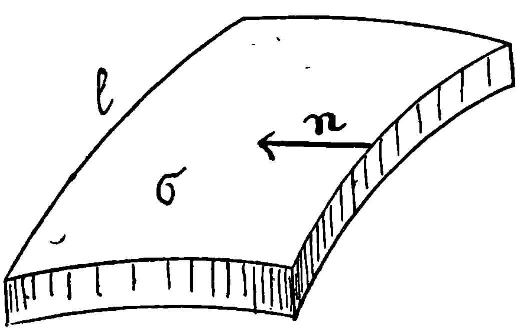

Fig. 1.

Se sopra ognuna di queste normali si prende, a partire da σ e sempre dalla stessa parte, uno stesso segmento ε, il luogo degli estremi dei segmenti così costruiti sarà una superficie σ' che, insieme a σ e alla superficie laterale che si appoggia al contorno l (fig. 1), limita un certo spazio al quale possono applicarsi le relazioni (3)... (6).

(1) Non è evidentemente necessario, al fine di ottenere una reciprocità, che la discontinuità in questione consista in un moto relativo di corpo rigido. Ove ciò non fosse risulterebbero allora discontinue sopra le σ le deformazioni $\delta\alpha$, $\delta\alpha'$.

Passando al limite per $\varepsilon = 0$, risultano: *la relazione identica di reciprocità:*

$$(3')\qquad \int_\sigma \operatorname{grad}\alpha \times \boldsymbol{u}\,d\sigma + \int_\sigma I_1 \left\{ K\alpha \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \right\} d\sigma + \int_l \boldsymbol{u} \times \alpha \boldsymbol{n}\,dl =$$

$$= \int_\sigma \operatorname{grad}\beta \times \boldsymbol{v}\,d\sigma + \int_\sigma I_1 \left\{ K\beta \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \right\} d\sigma + \int_l \boldsymbol{v} \times \beta \boldsymbol{n}\,dl = 0,$$

e le tre *condizioni di reciprocità*:

$$(4')\qquad \int_\sigma I_1 \left\{ K\alpha \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \right\} d\sigma = \int_\sigma I_1 \left\{ K\beta \cdot \frac{d\boldsymbol{v}}{dP} \right\} d\sigma,$$

$$(5')\qquad \int_\sigma \operatorname{grad}\alpha \times \boldsymbol{u}\,d\sigma = \int_\sigma \operatorname{grad}\beta \times \boldsymbol{v}\,d\sigma,$$

$$(6')\qquad \int_l \boldsymbol{u} \times \alpha \boldsymbol{n}\,dl = \int_l \boldsymbol{v} \times \beta \boldsymbol{n}\,dl,$$

nelle quali $\boldsymbol{n}$ indica la normale ad l che è tangente a σ, rivolta verso l'interno.

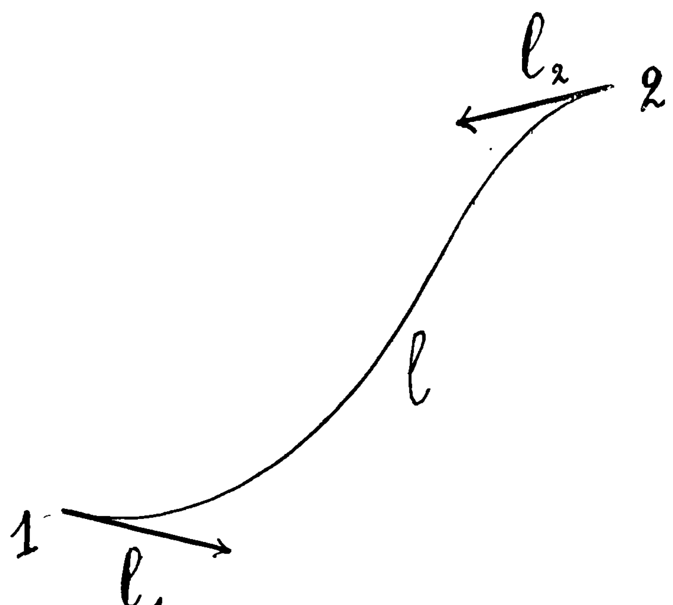

Fig. 2.

Con identico ragionamento, considerando una linea aperta l, di estremi 1, 2

(Fig. 2), si ottengono le relazioni:

$$(3'') \quad \int_l \operatorname{grad} \alpha \times u dl + \int_l I_1 \left\{ K\alpha \cdot \frac{du}{dP} \right\} dl + u_1 \times \alpha l_1 + u_2 \times \alpha l_2 =$$

$$= \int_l \operatorname{grad} \beta \times v dl + \int_l I_1 \left\{ K\beta \cdot \frac{dv}{dP} \right\} dl + v_1 \times \beta l_1 + v_2 \times \beta l_2 = 0,$$

$$(4'') \quad \int_l I_1 \left\{ K\alpha \cdot \frac{du}{dP} \right\} = \int_l I_1 \left\{ K\beta \cdot \frac{dv}{dP} \right\} dl,$$

$$(5'') \quad \int_l \operatorname{grad} \alpha \times u dl = \int_l \operatorname{grad} \beta \times v dl,$$

$$(6'') \quad u_1 \times \alpha l_1 + u_2 \times \alpha l_2 = v_1 \times \beta l_1 + v_2 \times \beta l_2,$$

nelle quali l_1, l_2 sono due vettori unitari tangenti alla curva l negli estremi 1, 2.

9. Tutto ciò premesso, abbiasi dapprima una distribuzione a tre dimensioni di correnti.

Lo spazio S occupato dal conduttore sia limitato dalla superficie σ, attraverso alcune zone (il cui insieme chiameremo σ_1) della quale esso è in comunicazione con l'esterno.

Entro S sia definita la funzione scalare φ, *potenziale elettrico*, derivabile, con derivate continue, ma eventualmente discontinua lungo alcune superficie che indicheremo complessivamente con σ_2, sedi di *forze elettromotrici*, che risulteranno chiuse e totalmente comprese entro S, oppure aperte, ma appoggiate al contorno σ di S.

Per tal modo lo spazio S può intendersi suddiviso, mediante le σ_2, in un certo numero di parti minori, entro le quali sarà lecito ritenere φ continua, derivabile e con derivate continue.

Insieme alla φ sia definita ancora la funzione vettoriale $\boldsymbol{i}$, *intensità della corrente* che attraversa l'unità di superficie equipotenziale (se il conduttore è isotropo), anch'essa funzione derivabile, con derivata continua.

Le quantità φ, $\boldsymbol{i}$ sono in ciascun punto dello spazio legate dalla legge di OHM, che assume l'espressione:

$$(14) \quad \boldsymbol{i} = -\frac{1}{R} \operatorname{grad} \varphi,$$

dove R è la resistenza offerta dall'unità di volume del conduttore.

Sarà R costante se il conduttore è omogeneo, dipendente dalle coordinate dello spazio se esso è isotropo, sarà infine un' omografia dipendente dalle coordinate dello spazio, se esso è anisotropo e non omogeneo [1].

Si considerino ora due regimi elettrici (che supporremo permanenti) $\boldsymbol{i}$, φ, E; $\boldsymbol{i}'$, φ', E' (E, E' sono le forze elettromotrici unitarie distribuite sulle superficie σ_2), e nelle (3), (4) si pongano:

$$\alpha = \varphi \quad \beta = \varphi'$$
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i}' \quad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{i}.$$

La (4) risulta subito verificata, poichè, ad esempio, si ha:

$$I_1 \left\{ K\alpha \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \right\} = I_1 \left(\varphi \cdot \frac{d\boldsymbol{i}'}{dP} \right) = \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{i}' = 0,$$

per la permanenza del secondo regime.

Pertanto la (3) diviene:

$$\begin{aligned} (15) \qquad & \int_{\sigma_1} \varphi \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E\boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma_2 - \int_S R\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}' dS = \\ & = \int_{\sigma_1} \varphi' \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E'\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n} d\sigma_2 - \int_S R\boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{i} dS. \end{aligned}$$

Quando, come generalmente accade, il conduttore sia isotropo, risulta verificata anche la (5), e si ha:

$$(16) \qquad \int_{\sigma_1} \varphi \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E\boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma_2 = \int_{\sigma_1} \varphi' \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E'\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n} d\sigma_2 .$$

È questo il *principio di reciprocità di Donati* esteso alle distribuzioni a tre dimensioni. Ove il sistema conduttore non sia in comunicazione con l'esterno, tale principio assume la semplice forma:

$$(17) \qquad \int_{\sigma_2} E\boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma_2 = \int_{\sigma_2} E'\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n} d\sigma_2 .$$

---

(1) Può dirsi ancora che l'omografia $\frac{1}{R}$ caratterizza la conducibilità specifica del conduttore.

Quando invece manchino le discontinuità E e la corrente sia totalmente dovuta a sorgenti esterne, esso diviene

$$\int_{\sigma_1} \varphi \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma_1 = \int_{\sigma_1} \varphi' \boldsymbol{i} \times \cdot\, d\sigma_1 \quad (18)$$ [1].

Giova osservare che la *isotropia* del mezzo, condizione sufficiente perchè valgano le (16), (17), (18), quando si confrontino due regimi permanenti, non è affatto necessaria.

Infatti a che sia verificata la condizione (5), cioè perchè sia

$$\int_S R\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}' dS = \int_S R\boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{i} dS \quad (5)$$

basta assai meno; è sufficiente infatti che, pur essendo anisotropo il conduttore, sia ad esso applicabile la legge di OHM generalizzata e che si abbia

$$R\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}' = KR\boldsymbol{i} \times \boldsymbol{i}'$$

per qualsiasi coppia ($\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{i}'$), dove KR è l'omografia coniugata di R; che è quanto dire

$$R = KR. \quad (5)'''$$

Dunque: *perchè sia verificata la condizione* (5) *non è necessaria la isotropia del mezzo, bastando a tal fine ammettere la legge di Ohm per mezzi anisotropi e che l'omografia* K *sia una dilatazione* [2].

Se si vuole che la relazione (5) e i principi di reciprocità che ne discendono valgano per un qualsiasi spazio S considerato entro il conduttore, la condizione (5)''' diventa anche necessaria.

10. La trasformazione che le precedenti espressioni subiscono quando due od una delle dimensioni del conduttore predominino sulle altre, è immediata.

Basta premettere che in un conduttore filiforme percorso da corrente

---

[1] Questa espressione il PUPPINI ebbe già l'occasione di presentare, riferendosi a conduttori elettrolitici, in una Memoria: (*Modelli elettrici per lo studio delle acque filtranti*, « Il Monitore Tecnico », 1922, n. 18; *Verifica sperimentale ecc.*... « Il Monitore Tecnico », 1922, n. 35) nella quale propone di ricondurre lo studio del funzionamento idrodinamico di una falda artesiana a quello elettrodinamico di un modello elettrico di egual forma.

[2] Cfr. O. LAZZARINO: Atti della R. Accad. dei Lincei, 1917, I Semestre, Fasc. II, *Sulla estendibilità del teorema di reciprocità del prof. V. Volterra*...

chiamasi *sezione* in un punto la superficie Ω, normale alle linee di corrente, passante per quel punto, limitata dal contorno del conduttore, e *intensità di corrente* in quella sezione il vettore risultante $\int_{\Omega} i d\Omega$, che comunemente si indica ancora con $\boldsymbol{i}$.

Ma quando interessi, come nei fenomeni di induzione, la posizione geometrica del conduttore rispetto ai corpi circostanti, un conduttore filiforme verrà approssimativamente trattato come un tubo di flusso a sezione infinitesima; ciò che verrà fatto nel seguito.

Analogamente, una distribuzione superficiale, cioè una lamina piana o curva percorsa da correnti, si intenderà il luogo di una semplice infinità di linee di flusso, mentre l'intensità avrà un significato del tutto corrispondente a quello sopra definito per una distribuzione filiforme.

Ciò che invece importa rilevare si è che la funzione potenziale elettrico deve ritenersi, secondo l'esperienza, una funzione che non subisce discontinuità nel passare dalla superficie dei conduttori al coibente circostante, e che risulta nulla la derivata di tale funzione secondo una qualsiasi direzione normale a dette superficie. È dunque possibile, e in modo semplice, completare entro lo spazio coibente vicino a un conduttore filiforme o laminare, la definizione (puramente fittizia, ma fatta in maniera da conservare la continuità) delle funzioni che figurano nelle (3')... (6'), (3'')... (6''), che sono state dedotte dalle (3)... (6) precisamente operando, mediante una trasformazione continua dello spazio S, sopra funzioni definite in uno spazio a tre dimensioni. Potranno cioè applicarsi le (3')... (6') alle distribuzioni superficiali, e le (3'')... (6'') a quelle filiformi.

Ciò premesso, abbiasi una rete di conduttori filiformi, in comunicazione con l'esterno.

Anche in questo caso, posto che in qualche ramo abbiano sede delle forze elettromotrici, intenderemo che i punti corrispondenti (punti di discontinuità della funzione φ) suddividano la rete (cfr. Fig. 3) in un certo numero r di campi lineari l separati, in ciascuno dei quali perciò il potenziale elettrico risulterà continuo.

Pertanto se con $\boldsymbol{i}$ indichiamo la corrente totale che attraversa una sezione generica Ω, e consideriamo ancora due regimi permanenti, le (4''), (5'') risultano senz'altro verificate, e la (3'') (cfr. n. 8) diviene:

$$\sum_1^r \boldsymbol{i}'_1 \times \varphi \boldsymbol{l}_1 + \sum_1^r \boldsymbol{i}'_2 \times \varphi \boldsymbol{l}_2 = \sum_1^r \boldsymbol{i}_1 \times \varphi' \boldsymbol{l}_1 + \sum_1^r \boldsymbol{i}_2 \times \varphi' \boldsymbol{l}_2 .$$

Se poi indichiamo con n il numero degli estremi della rete, attraverso i quali essa comunica con l'esterno, e con m [1] il numero delle discontinuità E del potenziale elettrico, e separiamo dai primi i $2m$ estremi costituenti due

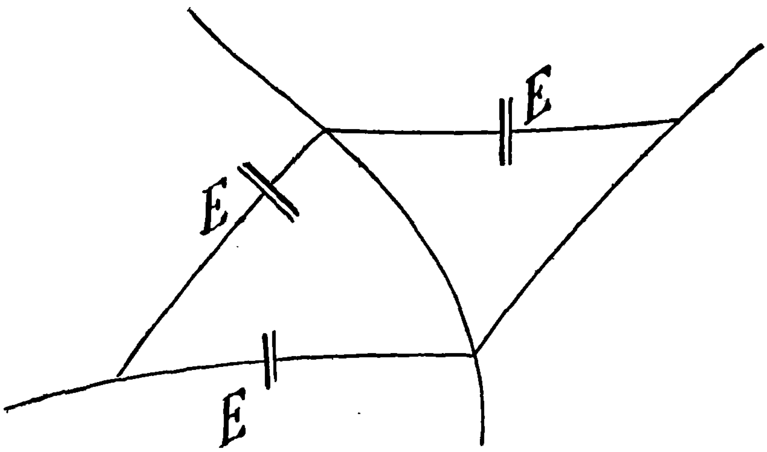

Fig. 3.

a due le forze elettromotrici E, la relazione ora scritta, ove si tenga conto anche del fatto che i vettori unitari l_1, l_2 sono diretti, salvo il senso, come i ed i', assume la nota forma:

$$\sum_1^n i'\varphi + \sum_1^m i'E = \sum_1^n i\varphi' + \sum_1^m iE', \tag{19}$$

data dal Donati al suo principio [2].

Corrispondentemente ai casi che danno luogo nelle distribuzioni di spazio alle relazioni (17), (18), valgano qui le seguenti:

$$\sum_1^m i'E = \sum_1^m iE' \tag{20}$$

$$\sum_1^n i'\varphi = \sum_1^n i\varphi'. \tag{21}$$

---

[1] m è il numero delle località ove, o nel primo o nel secondo regime o in tutti e due, trovansi situate le forze elettromotrici.

[2] Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Bologna. Novembre 1899, febbraio 1900, maggio 1910.

11. Del principio ora dimostrato il DONATI, nella seconda delle citate Memorie, ha dato un particolare enunciato atto a importanti applicazioni.

Si scriva la (21) relativamente al caso in cui i due regimi elettrici siano dovuti all'immissione di corrente, dapprima a mezzo di una coppia di elettrodi (a, b), poi a mezzo della coppia (c, d). Si ottiene:

$$i_{ab}(\varphi'_a - \varphi'_b) = i'_{cd}(\varphi_c - \varphi_d): \tag{22}$$

per cui, se R_{ab}, R_{cd} sono le resistenze, in virtù della legge di OHM risulta ancora:

$$\frac{\varphi'_a - \varphi'_b}{\varphi'_c - \varphi'_d} \cdot \frac{1}{R_{ab}} = \frac{\varphi_c - \varphi_d}{\varphi_a - \varphi_b} \cdot \frac{1}{R_{cd}},$$

espressione che il DONATI applica alla risoluzione di alcuni quesiti di elettrodinamica.

La legge (22) va posta, per la verità, in relazione con altra, perfettamente analoga, data dal VOLTERRA nel 1882 ([1]), relativa a distribuzioni di spazio.

Essa si deduce dalla (18), cioè ammettendo che sia ovunque continuo il potenziale elettrico e che siano verificate le condizioni (4) e (5).

Considerati quattro punti A, B, C, D interni o sulla superficie del conduttore e tracciate, facendo centro in essi, quattro piccole sfere di raggio ε, si supponga che in un primo regime, permanente, un flusso I di corrente esca dalla sfera di centro A ed entri attraverso quella di centro B, e che successivamente durante un secondo regime, anch'esso permanente, un flusso I' esca dalla sfera di centro C e vada a quella di centro D.

La formula (18), indicando con σ_A, σ_B, σ_C, σ_D le superficie delle quattro sfere, diventa allora

$$\int_{\sigma_A+\sigma_B+\sigma_C+\sigma_D} \varphi \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma = \int_{\sigma_A+\sigma_B+\sigma_C+\sigma_D} \varphi' \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n} d\sigma,$$

essendo φ, $\boldsymbol{i}$ il potenziale e l'intensità di corrente relative al primo regime, φ' ed $\boldsymbol{i}'$ le analoghe quantità relative al secondo.

Questa relazione risulta verificata per qualunque valore di ε; in parti-

---

([1]) « Il Nuovo Cimento », 1882, Terza serie, Tomo XI: *Sopra una legge di reciprocità nella distribuzione delle temperature e delle correnti galvaniche costanti in un corpo qualunque.*

colare quando si passi al limite per $\varepsilon = 0$. Ma in tal caso si ha:

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\sigma_A} \varphi i' \times n d\sigma = \varphi_A i'_A \times \int_{\sigma_A} n d\sigma = 0$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\sigma_B} \varphi i' \times n d\sigma = \varphi_B i'_B \times \int_{\sigma_B} n d\sigma = 0$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\sigma_C} \varphi i' \times n = \varphi_C \int_{\sigma_C} i' \times n d\sigma = \varphi_C I'$$

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\sigma_D} \varphi i' \times n = \varphi_D \int_{\sigma_D} i' \times n d\sigma = -\varphi_D I',$$

e così dicasi dei limiti dei quattro integrali del secondo membro, i cui valori sono $\varphi'_A I$, $-\varphi'_B I$, 0, 0 rispettivamente.

Avremo dunque:

$$(\varphi_C - \varphi_D) I' = (\varphi'_A - \varphi'_B) I,$$

identica alla (22); e, se si suppone $I' = I$:

$$\varphi_C - \varphi_D = \varphi'_A - \varphi'_B, \tag{22'}$$

cioè: *se in un conduttore a tre dimensioni di cui la conducibilità varia da punto a punto si fa passare una corrente di intensità* I *da un punto* A *a un punto* B, *e in due punti* C *e* D *si ha una differenza di potenziale, otterremo la stessa differenza fra i potenziali dei punti* A *e* B *quando si faccia entrare da* C *ed escire da* D *la stessa corrente di intensità* I.

È questo il teorema di VOLTERRA, valevole evidentemente anche quando i valori φ_A, φ_B, φ'_C, φ'_D non sono finiti, purchè il loro ordine di infinito sia inferiore a quello di $\frac{1}{\varepsilon^2}$.

Una estensione del suo teorema fu data in seguito dal VOLTERRA nel 1915 (Rend. Accad. dei Lincei; 1° sem., pag. 231, 542) al caso di una distribuzione superficiale [1] soggetta all'azione di un campo magnetico, con la condizione che il campo agente in un regime sia eguale ed opposto a quello agente nell'altro.

---

[1] Converrebbe in questo caso valersi delle formule (3')... (6').

L'enunciato non differisce da quello sopra riportato e può senz'altro ritenersi valido anche per conduttori a tre dimensioni, non omogenei ed anisotropi [1], ma sotto particolari condizioni.

Ammesso, in tal caso, che la variazione subita dall'intensità $\boldsymbol{i}$ per effetto del campo magnetico dipenda da una certa omografia M e precisamente che questa variazione sia rappresentata dal vettore $-\frac{1}{M}\operatorname{grad}\varphi$, si assumerà come intensità di corrente l'espressione

$$\boldsymbol{i} = -\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{M}\right)\operatorname{grad}\varphi;$$

e conseguentemente varrà la (18), o, in particolare, la (22'), quando i regimi posti a confronto siano permanenti, e quando sia verificata la condizione (5), cioè si abbia:

$$\int_S \left(\frac{1}{R}+\frac{1}{M}\right)^{-1}\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}'dS = \int_S \left(\frac{1}{R}-\frac{1}{M}\right)^{-1}\boldsymbol{i}'\times\boldsymbol{i}dS.$$

Ora a questa condizione, per qualunque spazio S, si soddisfa, e solamente, supponendo

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{M} = K\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{M}\right),$$

K essendo il simbolo della omografia coniugata, cioè quando sia

$$\frac{1}{R} = K\frac{1}{R}; \quad \frac{1}{M} = -K\frac{1}{M}.$$

Le omografie $\frac{1}{R}$ e $\frac{1}{M}$ (quindi anche le loro inverse R ed M) devono dunque essere: l'una una *dilatazione*, l'altra un'*omografia assiale* [2].

12. Si osservi come finora si siano posti a confronto due regimi permanenti, il che importa il verificarsi della (4) o della (4''), a seconda che ci si riferisce a una distribuzione di spazio, o a conduttori filiformi.

---

(1) Cfr. E. FREDA: Rend. Acc. dei Lincei; 2° sem. 1916, pag. 28. Cfr. anche O. LAZZARINO: id. id., 1917, 1° sem., pag. 596.

(2) Cfr. O. LAZZARINO: Rend. Accad. dei Lincei; 1925, Vol. II, n. 3, 4: *Sulle condizioni di esistenza del teorema di reciprocità del Volterra.*

Orbene è importante ricordare che, ove si confrontino elementi istantanei, corrispondenti a due diversi istanti, di un regime vario, la divergenza della corrente non è generalmente nulla ([1]).

Pertanto, avremo che la (16), quando si tratti di conduttori isotropi o ad anisotropia soddisfacente alla condizione (5)''', diviene:

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
&\int_{\sigma_1} \varphi \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E \boldsymbol{i}' \times \boldsymbol{n} d\sigma_2 + \int_S \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{i}' dS = \\
&= \int_{\sigma_1} \varphi' \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E' \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{n} d\sigma_2 + \int_S \varphi' \operatorname{div} \boldsymbol{i} dS;
\end{aligned}
$$

e la (19):

$$
(24)\qquad \sum_1^n \varphi i' + \sum_1^m E i' + \sum_1^r \int_l \varphi \operatorname{div} \boldsymbol{i}' dl = \sum_1^n \varphi' i + \sum_1^m E' i + \sum_1^r \int_l \varphi' \operatorname{div} \boldsymbol{i} dl.
$$

Praticamente però la dipendenza dal tempo degli elementi della corrente è tale che, in confronto con la corrente *di conduzione* $\boldsymbol{i}$, quella *di spostamento* $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ è trascurabile ([2]).

Pertanto le (16), (19) saranno applicabili ancora ai valori istantanei di una corrente non permanente, purchè, come osserva il DONATI, per forze elettromotrici si intendano le risultanti di quelle impresse e delle forze elettromotrici sviluppate per induzione.

([1]) Indicando con $\boldsymbol{u}$ la *corrente totale* del MAXWEL, e con $\boldsymbol{D}$ lo *spostamento*, si ha: $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial l}$, dove la sola corrente $\boldsymbol{u}$ è solenoidale; per cui sarà solenoidale $\boldsymbol{i}$ solamente quando sia tale $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$.

([2]) Indicando con $\boldsymbol{E}$ la forza elettrica, K la costante dielettrica del conduttore, λ la sua conducibilità specifica, si ha:

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \frac{K}{4\pi} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{i} = \lambda \boldsymbol{E}.$$

Perciò nel caso delle correnti alternate la condizione di trascurabilità di $\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$ di fronte ad $\boldsymbol{i}$, indicando con ω la pulsazione, si traduce in quella che sia trascurabile di fronte alla unità il rapporto:

$$\frac{\frac{K}{4\pi} \frac{\partial E}{\partial t}}{\lambda E} = \frac{K\omega}{4\pi\lambda}.$$

condizione che nella pratica può ritenersi sempre verificata.

Il DONATI ha fatto in proposito un'applicazione del suo principio al caso in cui la rete dei conduttori considerata al numero 10 sia attivata da forze elettromotrici alternative sinussoidali a pulsazione costante (1).

Ma non entreremo in tale questione che richiederebbe ulteriori modificazioni delle formule fondamentali, poichè nell'enunciato compaiono elementi che dipendono da variabili complesse.

Piuttosto ci proporremo di specificare la forma assunta dalle (16), (19) quando si pongano a confronto non le cosidette *caratteristiche*, ma i valori istantanei della corrente e degli altri elementi che la distinguono.

13. A tale scopo rammentiamo anzitutto che il campo elettrico, in ogni punto di uno spazio sede di fenomeni elettromagnetici, ha il valore:

$$E = -\operatorname{grad}\varphi - A\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{25}$$

dove φ è il potenziale, A la costante elettromagnetica, e U è il *potenziale vettore*, definito in una distribuzione filiforme, alla quale per semplicità intendiamo per ora di riferirci, dalla relazione:

$$U = \Sigma\int_l j\frac{dl}{r}, \tag{26}$$

essendo j il modulo dell'intensità istantanea della corrente che attraversa l'elemento lineare dl, r la distanza di questo elemento dal punto nel quale si calcola il potenziale vettore.

Allora se scriviamo la legge di OHM nella forma:

$$j = \lambda E, \qquad \left(\lambda = \frac{1}{R}\right)$$

avremo, tenendo conto della (25):

$$\operatorname{grad}\varphi = -\frac{1}{\lambda}j - A\frac{\partial U}{\partial t}, \tag{27}$$

relazione che tornerà utile nel seguito.

Ciò posto, ammettendo che la (4″) sia verificata, il che sempre accade in pratica, quando si pongano in essa:

$$\begin{cases} \alpha = \varphi & \beta = \varphi' \\ u = j' & v = j, \end{cases}$$

(1) Rendiconti della R. Accademia delle Scienze di Bologna, 28 marzo 1917.

la (3″) assume la forma:

$$\sum_1^n j'\varphi + \sum_1^m j'E + \sum_1^r \int_l \operatorname{grad}\varphi \times j' = \sum_1^n j\varphi' + \sum_1^m jE' + \sum_1^r \int_l \operatorname{grad}\varphi' \times j dl.$$

Questa relazione può intendersi l'enunciato di un principio di reciprocità che lega i valori istantanei j, φ, E; j', φ', E' relativi a due diversi istanti di un regime *non stazionario*, qualora non sia soddisfatta la relazione (5″).

Ma essa, tenuto conto della (27), può anche scriversi:

$$(28) \qquad \sum_1^n j'\varphi + \sum_1^m j'E - A\sum_1^r \int_l \frac{\partial U}{\partial t} \times j' dl = \sum_1^n j\varphi' + \sum_1^m jE' - A\sum_1^r \int_l \frac{\partial U'}{\partial t} \times j dl,$$

giacchè in ogni punto della rete si ha:

$$\frac{1}{\lambda} j \times j' = \frac{1}{\lambda} j' \times j;$$

mentre la condizione (5″) diviene:

$$(29) \qquad \sum_1^r \int_l \frac{\partial U}{\partial t} \times j' dl = \sum_1^r \int_l \frac{\partial U'}{\partial t} \times j dl \ \text{[1]}.$$

Esaminiamo questa condizione.

Il primo membro, per la (26), può scriversi:

$$\sum_1^r \int_l \left[\sum_1^r \int_l \frac{\partial j}{\partial t} \frac{dl}{r} \right] \times j' dl,$$

e poichè la corrente che circola e la sua derivata rispetto al tempo sono le stesse in tutti i punti di uno stesso ramo, esso primo membro risulterà di termini del tipo

$$\int_{l_h} \left[\int_{l_k} \frac{\partial j_k}{\partial t} \frac{dl}{r} \right] \times j_h' dl = j_h' \frac{\partial j_k}{\partial t} \int_{l_h} dl \times \int_{l_k} \frac{dl}{r} = M_{hk} j_h' \frac{\partial j_k}{\partial t},$$

dove con h, k si indicano due rami generici.

Perciò la (29) assume la forma:

$$(30) \qquad \sum_{h=1}^r \sum_{k=1}^r M_{hk} j_h' \frac{\partial j_k}{\partial t} = \sum_{h=1}^r \sum_{k=1}^r M_{hk} j_h \frac{\partial j_k'}{\partial t}.$$

[1] Con r si indica qui il numero dei singoli rami, numero generalmente diverso da quello dei campi lineari nei quali si è detto di intendere suddivisa la rete al principio del § 10.

In questa i coefficienti M_{hk} dipendono solamente dalla forma e dalla posizione geometrica dei rami h, k.

Ove questi siano chiusi tali coefficienti prendono notoriamente la denominazione di *coefficienti d'induzione mutua*.

Quando la (30) sia verificata, il principio (28) si riduce alla solita relazione:

$$\sum_1^n j'\varphi + \sum_1^m j'E = \sum_1^n j\varphi' + \sum_1^m jE'. \tag{31}$$

14. Giova osservare che la condizione (30) è senza dubbio verificata quando in ogni ramo sia:

$$j'\frac{\partial j}{\partial t} = j\frac{\partial j'}{\partial t}. \tag{32}$$

Questa condizione sufficiente, ammesso che le intensità siano grandezze alternative a pulsazione costante, può trasformarsi nel modo seguente.

Valendosi del noto schema secondo il quale il valore istantaneo di tali grandezze alternative risulta la proiezione sull'asse reale di un vettore che ruota con velocità angolare costante ω mantenendo un estremo nell'origine, e indicando fra parentesi quadre le proiezioni suddette, si ha:

$$j = [\bar{j}e^{i\omega t}] = j_m \cos(\varphi + \omega t),$$

dove

$$\bar{j} = j_m e^{i\varphi}$$

è la *caratteristica* di j, cioè il vettore ruotante (di grandezza j_m) al tempo $t = 0$, e φ è la fase.

Derivando rispetto al tempo, risulta:

$$\frac{\partial j}{\partial t} = [i\omega\bar{j}e^{i\omega t}] = \omega j_m \cos\left(\varphi + \omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Analogamente può scriversi:

$$j' = j'_m \cos(\omega' + \omega' t')$$
$$\frac{\partial j'}{\partial t} = \omega' j'_m \cos\left(\varphi' + \omega' t' + \frac{\pi}{2}\right),$$

quando si considerino gli elementi relativi a una seconda corrente, di pulsazione ω' e fase φ'.

La (32) diviene allora:

$$\omega \cos(\varphi' + \omega' t')\cos\left(\varphi + \omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \omega' \cos(\varphi + \omega t)\cos\left(\varphi' + \omega' t' + \frac{\pi}{2}\right), \tag{32'}$$

per soddisfare alla quale è sufficiente che sia

$$\left\{\begin{array}{l} \omega' = \omega \\ \varphi + \omega t = \varphi' + \omega' t' + k\pi. \end{array}\right. \tag{33}$$

Perciò, quando si confrontino gli elementi di due correnti sinussoidali, il verificarsi della (32') o, in particolare, delle (33), assicura la validità del principio (31).

15. Quanto si è detto al n. 13 può ripetersi nei riguardi delle distribuzioni di correnti non stazionarie in uno spazio a tre dimensioni.

Ricordando che il potenziale vettore è in tal caso definito dalla

$$U = \int j \frac{dS}{r},$$

dove j indica l'intensità della corrente che attraversa l'unità di superficie equipotenziale, se il conduttore è isotropo, e valendosi dei soliti simboli, si trova, in luogo della (28):

$$\begin{aligned} &\int_{\sigma_1} \varphi j' \times n d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E j' \times n d\sigma_2 - A \int_S \frac{\partial U}{\partial t} \times j' dS = \\ &= \int_{\sigma_1} \varphi' j \times n d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E' j \times n d\sigma_2 - A \int_S \frac{\partial U'}{\partial t} \times j dS. \end{aligned} \tag{34}$$

Questa relazione è vincolata all'isotropia del conduttore o quanto a meno alla condizione meno restrittiva indicata al termine del n. 9, essendosi eliminati gli integrali estesi ad S delle funzioni $\frac{1}{\lambda} j \times j'$ e $\frac{1}{\lambda} j' \times j$.

Non vi è luogo qui a semplificazione alcuna nei riguardi della condizione

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial t} \times j' dS = \int_S \frac{\partial U'}{\partial t} \times j dS,$$

poichè i tubi di flusso relativi a una distribuzione possono differire da quelli relativi all'altra.

Da quanto finora si è visto circa le correnti variabili può dedursi che generalmente un principio di reciprocità semplice come quello (16) o il (19) non vale, e che una tal forma si conserva solo ove si considerino degli istanti particolari; la qual cosa aveva trovato anche il DONATI che enunciò, come s'è detto, un principio che lega le *caratteristiche,* cioè le grandezze degli elementi in un particolare tempo: quello iniziale.

16. Un caso particolare della legge (28) si ha quando la rete risulti costituita di uno o più circuiti chiusi, nei quali il potenziale sia ovunque continuo e quindi la corrente dovuta a fenomeni di induzione generati da variazioni del campo elettromagnetico circostante.

In tal caso la condizione (29) è forzatamente verificata, in virtù della (28), e costituisce essa stessa un particolare principio di reciprocità [1].

Ponendo fuori del segno d'integrazione l'intensità della corrente, la qual cosa risulta lecita in pratica in virtù della proprietà solenoidale ricordata al n. 12, si ha:

$$\sum_1^r j' \int_l \frac{\partial U}{\partial t} \times dl = \sum_1^r j \int_l \frac{\partial U'}{\partial t} \times dl, \tag{35}$$

dove r indica il numero dei circuiti.

Potendosi scrivere

$$\sum_1^r j' \frac{\partial}{\partial t} \int_l U \times dl = \sum_1^r j \frac{\partial}{\partial t} \int_l U' \times dl,$$

e notando che gli integrali soprascritti valgono i flussi (che chiameremo Φ, Φ') dell'induzione magnetica abbracciati dai circuiti, risulta infine:

$$\sum_1^r j' \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \sum_1^r j \frac{\partial \Phi'}{\partial t}; \tag{36}$$

legge che non ha peraltro carattere di novità, essendo una immediata conseguenza dalla nota relazione:

$$j = -\frac{A}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \text{ [2]},$$

nella quale j, corrente indotta nel circuito, ha senso solamente quando, come nel caso presente, essa sia solenoidale.

17. Nei numeri 9 e 15 i principi relativi a distribuzioni di spazio sono stati enunciati in base all'ipotesi che il mezzo conduttore sia isotropo, o a quelle meno restrittive indicate al termine del n. 9.

---

[1] Cfr. V. GORI: *Su una reciprocità fra variazioni di flusso d'induzione magnetica e correnti indotte in circuiti elettrici*; « Bollettino dell'Unione Matem. Ital., Anno II, n. 5.

[2] Cfr. A. ROITI: *Elementi di Fisica*, II, § 462, 469.

Ove tali ipotesi non siano verificate comparirà al solito in ciascun membro di ogni eguaglianza un termine in più.

Così la (16) diverrà:

$$\begin{aligned}(16')\qquad &\int_{\sigma_1} \varphi i' \times n d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E i' \times n d\sigma_2 - \int_S R i \times i' dS = \\ &= \int_{\sigma_1} \varphi' i \times n d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E' i \times n d\sigma_2 - \int_S R i' \times i dS,\end{aligned}$$

e la (34), ricordando che l'omografia $\frac{1}{\lambda}$ si è già indicata con R:

$$\begin{aligned}(34')\qquad &\int_{\sigma_1} \varphi j' \times n d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E j' \times n d\sigma_2 - \int_S R j \times j' dS - A\int_S \frac{\partial U}{\partial t} \times j' dS = \\ &= \int_{\sigma_1} \varphi' j \times n d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} E' j \times n d\sigma_2 - \int_S R j' \times j dS - A\int_S \frac{\partial U'}{\partial t} \times j dS.\end{aligned}$$

19. Dopo esposte le reciprocità più importanti che valgono nella Elettrodinamica, terminerò ricordando quella stabilita da GAUSS nell'Elettrostatica.

Tale principio non è qui fuor di luogo, in quanto occupa nel campo dei fenomeni elettrici lo stesso posto che occupa il principio di VOLTERRA nella statica dei solidi elastici.

Si consideri un sistema di conduttori isolati e si suppongano assegnati loro due diversi sistemi di cariche, q, q'.

Il potenziale di ciascun conduttore assumerà corrispondentemente i valori φ, φ', e la forza elettrica in ciascun punto del campo i valori E, E'.

Chiamando σ la superficie che limita ciascun conduttore, ed Ω quella di una sfera sufficientemente grande perchè possa contenerli tutti, si applichino le (3), (4), (5) allo spazio S compreso fra la Ω e le σ, dopo aver posto:

$$\begin{cases} \alpha = \varphi \\ u = KE' \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta = \varphi' \\ v = KE \end{cases} \qquad (K \text{ costante dielettrica}).$$

Risulta subito che le (4), (5) sono verificate.

Infatti è:

$$\int_S I_1 \left\{ K\alpha \cdot \frac{du}{dP} \right\} dS = \int_S \varphi \operatorname{div}(KE) dS = 0,$$

poichè KE, a meno del coefficiente $\frac{1}{4\pi}$, è, secondo l'immagine del MAXWEL, lo spostamento di un fluido incompressibile. Ed è ancora, quando si supponga isotropo il dielettrico, o ad anisotropia caratterizzata da una dilatazione:

$$\int_S \operatorname{grad} \alpha \times u dS = -\int_S E \times KE' dS = -\int_S E' \times KE dS = \int_S \operatorname{grad} \beta \times v dS,$$

in virtù della relazione:

$$E = -\operatorname{grad} \varphi.$$

Pertanto la (3) diviene:

$$\Sigma \int_\sigma \varphi KE' \times n d\sigma + \int_\Omega \varphi KE' \times n d\Omega = \Sigma \int_\sigma \varphi' KE \times n d\sigma + \int_\Omega \varphi' KE \times n d\Omega.$$

Se ora si fa crescere indefinitivamente il raggio della sfera, la relazione soprascritta si semplifica nella

$$\Sigma \int_\sigma \varphi KE' \times n d\sigma = \Sigma \int_\sigma \varphi' KE \times n d\sigma,$$

giacchè il modulo di φKE diviene, quando il raggio tende all'infinito, un infinitesimo di terzo ordine rispetto all'inversa di questo raggio.

Infine, per essere

$$\int_\sigma KE \times n d\sigma = 4\pi q; \quad \int_\sigma KE' \times n d\sigma = 4\pi q',$$

e φ costante su ciascuna sfera, risulta:

$$\Sigma \varphi q' = \Sigma \varphi' q. \tag{37}$$

***

20. Il principio di Puppini. — Si consideri un ammasso poroso occupato in una certa sua regione S totalmente da acqua (o da un qualsiasi altro liquido) in movimento. Lo spazio S risulti limitato da un complesso σ di superficie, parte permeabili, parte impermeabili.

Indicando con z la quota di un punto generico di S sopra un piano orizzontale di riferimento, con p la pressione unitaria nell'intorno del punto, con ω

il peso specifico del liquido (che si suppone omogeneo), e posto

(38) $$z + \frac{p}{\omega} = h \quad (\textit{carico piezometrico}),$$

(39) $$f = -\operatorname{grad} h \quad (\textit{pendenza motrice}),$$

si ha notoriamente:

(40) $$q = \mu f,$$

espressione della legge Darcy-Ritter, dove q è il vettore *portata* per unità di superficie di egual carico piezometrico, se il mezzo è isotropo, e μ è il coefficiente di filtrazione [1].

Ciò posto, se h, f, q; h', f', q' sono due diversi sistemi di carichi, pendenze motrici e portate corrispondenti a due diversi regimi idrodinamici (non necessariamente permanenti), si ponga nelle (3), (4), (5):

(41) $$\begin{cases} \alpha = h & \beta = h' \\ u = q' & v = q. \end{cases}$$

Con ciò la (4) è senz'altro verificata, per essere ad esempio:

$$I_1 \left\{ K\alpha \cdot \frac{du}{dP} \right\} = I_1 \left(h \frac{dq'}{dP} \right) = h \operatorname{div} q' = 0,$$

per la continuità del moto e per la incompressibilità del fluido.

Pertanto la (3) assume la forma:

(42) $$-\int_S f \times \mu f' dS + \int_\sigma h q' \times n d\sigma = -\int_S f' \times \mu f dS + \int_\sigma h' q \times n d\sigma,$$

ove si è tenuto conto delle:

$$\begin{cases} \operatorname{grad} h = -f \\ q = \mu f \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{grad} h' = -f' \\ q' = \mu f'. \end{cases}$$

Supponiamo ora che la funzione μ sia in ciascun punto dell'ammasso indipendente dalla direzione del moto, cioè che l'ammasso sia idraulicamente isotropo, oppure che, mancando l'isotropia, l'omografia μ sia una *dilatazione*.

In tal caso è allora verificata anche la (5), e la (42) si semplifica nella:

(43) $$\int_\sigma h q' \times n d\sigma = \int_\sigma h' q \times n d\sigma.$$

---

[1] Nei riguardi di questo coefficiente può farsi anche qui l'ipotesi che sia un'*omotetia* per ammassi porosi isotropi, che sia un'*omografia* quando venga a mancare l'isotropia.

È questo il principio di reciprocità dovuto al PUPPINI [1]. Esso risulta come conseguenza di tre ipotesi: il verificarsi della legge DARCY-RITTER, la incompressibilità del liquido e l'isotropia del mezzo (o, più generalmente, la anisotropia individuata da una dilatazione).

Ma condizione essenziale a che possa enunciarsi un principio di reciprocità è solamente il verificarsi della prima unitamente ad una delle due rimanenti.

Quando ad esempio sia μ indipendente dalla direzione del moto, ma, per essere il moto vario, si voglia tener conto della lieve compressibilità del liquido e non valga quindi più la (4), si ha:

$$(44) \qquad \int_S h \operatorname{div} q' dS + \int_\sigma h q' \times n \, d\sigma = \int_S h' \operatorname{div} q \, dS + \int_\sigma h' q \times n \, d\sigma.$$

Le (42), (44) rappresentano pertanto due espressioni più generali della (43), corrispondenti al non verificarsi di una delle due ultime ipotesi necessarie alla validità della (43) stessa.

Praticamente quest'ultima sarà accettabile ove si pongano a confronto due regimi permanenti, nel qual caso scompare l'effetto della piccola compressibilità del liquido, e quando l'ammasso poroso sia costituito, o da piccoli elementi sferici di grandezza variabile con continuità da punto a punto, o da elementi di tal forma che risulti una dilatazione l'omografia μ che caratterizza la permeabilità del mezzo, il che importa il verificarsi della (40) e della (5) [2].

21. Anche l'estensione data dal PUPPINI al teorema (43) in base al principio della sovrapposizione degli effetti risulta immediata, mentre lo stesso principio di sovrapposizione è sostituito qui dalla proprietà lineare degli operatori *grad* ed I_1.

Si considerino infatti tre sistemi di carichi, pendenze motrici e portate h, f, q; h', f', q'; h'', f'', q'', corrispondenti a tre diversi regimi di deflusso attraverso S; il primo preesistente all'attivazione mediante pozzi di una certa zona σ_1 del contorno σ, zona che in questo primo regime è dunque in riposo; gli altri due regimi dovuti a due diversi modi di erogare acqua attraverso σ_1; e si ponga nelle (3), (4):

$$(45) \qquad \begin{cases} \alpha = h' - h & \beta = h'' - h \\ u = q'' - q & v = q' - q. \end{cases}$$

---

[1] U. PUPPINI: « Il Monitore Tecnico », novembre 1911.

[2] Di questo principio ha avuto occasione di occuparsi anche lo scrivente in una nota apparsa sul « Monitore Tecnico, nn. 30-32 dell'anno 1923; n. 21 del 1924.

Si riscontra subito che, ammessa la incompressibilità dell'acqua, o la permanenza del moto, la (4) è verificata, perchè si ha ad esempio:

$$I_1 \left\{ K\alpha \cdot \frac{du}{dP} \right\} = (h' - h)(\operatorname{div} \boldsymbol{q}'' - \operatorname{div} \boldsymbol{q}) = 0.$$

Perciò la (3), ove si indichi con σ_2 la parte di σ residua dopo σ_1, e si tengano presenti le (39), (40), (45) assume la forma:

$$\begin{aligned} & -\int_S (\boldsymbol{f}' - \boldsymbol{f}) \times \mu(\boldsymbol{f}'' - \boldsymbol{f}) dS + \int_{\sigma_1 + \sigma_2} (h' - h)(\boldsymbol{q}'' - \boldsymbol{q}) \times \boldsymbol{n} d\sigma = \\ & = -\int_S (\boldsymbol{f}'' - \boldsymbol{f}) \times \mu(\boldsymbol{f}' - \boldsymbol{f})\, dS + \int_{\sigma_1 + \sigma_2} (h'' - h)(\boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q}) \times \boldsymbol{n} d\sigma. \end{aligned} \tag{46}$$

E se si suppone isotropo il mezzo, oppure che sia μ una dilatazione, con che anche la (5) risulta verificata:

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma_1} (h' - h)\boldsymbol{q}'' \times \boldsymbol{n} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} (h' - h)(\boldsymbol{q}'' - \boldsymbol{q}) \times \boldsymbol{n} d\sigma_2 = \\ & = \int_{\sigma_1} (h'' - h)\boldsymbol{q}' \times \boldsymbol{n} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} (h'' - h)(\boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q}) \times \boldsymbol{n} d\sigma_2, \end{aligned} \tag{47}$$

poichè $\boldsymbol{q}$ è nullo su σ_1.

A questo punto, tenendo conto delle reali condizioni nelle quali si presentano le falde artesiane ([1]) in natura, pare lecita l'ipotesi che sia trascurabile il secondo termine di ognuno dei due membri della (47), in quanto le *depressioni* $(h' - h)$, $(h'' - h)$ prodotte nelle lontane zone permeabili della superficie σ_2 attraverso le quali la falda comunica con serbatoi naturali o con sorgenti (quando lo spazio S considerato si estenda sino a quelle) possono ritenersi assai piccole in confronto con quelle provocate su σ_1, mentre d'altra parte, per la continuità, il contributo totale delle portate unitarie $\boldsymbol{q}'$ su σ_1 e $(\boldsymbol{q}' - \boldsymbol{q})$ su σ_2 (e rispettivamente $\boldsymbol{q}''$ su σ_1 e $(\boldsymbol{q}'' - \boldsymbol{q})$ su σ_2) risulta invariato.

Sotto quest'ultima condizione potrà dunque scriversi:

$$\int_{\sigma_1} (h' - h)\boldsymbol{q}'' \times \boldsymbol{n} d\sigma_1 = \int_{\sigma_1} (h'' - h)\boldsymbol{q}' \times \boldsymbol{n} d\sigma_1, \tag{48}$$

([1]) Alle falde freatiche occorre applicare senz'altro la (47), poichè fanno necessariamente parte della zona permeabile di σ_2 alcune superficie che devono allacciarsi a σ_1 e che sono quindi a distanza finita.

che è il noto terzo enunciato dato dal PUPPINI nel 1914, nel quale gli integrali sono estesi alle sole superficie attraverso le quali i pozzi comunicano con la falda.

In merito a questa espressione, atta ad interessanti applicazioni, dovrà pertanto avanzarsi una riserva in più oltre alle tre, della validità della legge DARCY-RITTER, dell'incompressibilità del liquido (quando il moto è vario) e dell'isotropia (o della anisotropia corrispondente a una dilatazione): quella della effettiva trascurabilità delle depressioni $(h' - h)$ e $(h'' - h)$.

Quando ciò non fosse la (48) risulta solo l'espressione approssimata di una legge rigorosamente espressa dalla (47).

Si è detto poco sopra che le depressioni $(h' - h)$, $(h'' - h)$ da ritenersi trascurabili sono quelle corrispondenti alle lontane superficie σ_2 delle sorgenti (quando S si estenda sino a quelle); ma effettivamente, perchè valga la (48), non occorre che S si estenda a tutta la parte della falda permeabile occupata dall'acqua, ognuna delle relazioni soprascritte potendo essere riferita anche a una piccola parte dell'ammasso, purchè della sua superficie limite faccia parte la σ_1.

In tal caso le depressioni $(h' - h)$, $(h'' - h)$ non sarebbero più trascurabili; ma è facile riconoscere che possono allora, e in ogni caso, elidersi, per essere eguali, i secondi termini della (47), solamente quando la parte permeabile della superficie σ_2 può con deformazione continua portarsi a distanza infinita, senza uscire, s'intende, dallo spazio occupato dall'acqua.

Infatti, scrivendo la (47) nella forma abbreviata

$$\int_{\sigma_1} + \int_{\sigma_2} = \int_{\sigma_1}' + \int_{\sigma_2}', \tag{47}$$

e facendo variare di posizione la σ_2, si scorge facilmente che gli integrali $\int_{\sigma_2}$, $\int_{\sigma_2}'$ subiscono eguali incrementi.

Supponiamo allora che σ_2 possa portarsi a distanza infinita. Corrispondentemente andranno a zero $\int_{\sigma_2}$ e $\int_{\sigma_2}'$; dunque questi integrali erano eguali anche prima della deformazione di σ_2 e possono togliersi dalla (47).

Reciprocamente: se per una qualsiasi coppia di regimi idraulici si ha

$$\int_{\sigma_2} = \int_{\sigma_2}',$$

lo spazio S deve essere infinito. Poichè basta supporre che σ_2 sia una superficie di egual carico in ciascuno dei tre regimi (preesistente e di attivazione dei pozzi) e che sia ivi $h' = h''$.

Risulta allora che, comunque si emungano i pozzi attraverso σ_1, sempre deve essere:

$$(h' - h)\int_{\sigma_2}(q'' - q) \times n d\sigma_2 = (h'' - h)\int_{\sigma_2}(q' - q) \times n d\sigma_2,$$

dove è $h' - h = h'' - h$ in ogni punto di σ_2.

Orbene queste due differenze devono anche essere nulle e quindi deve σ_2 trovarsi a distanza infinita da σ_1, altrimenti ne seguirebbe l'assurdo chè sono eguali le portate affluenti ai pozzi nei due sistemi di erogazione, portate che sono invece del tutto arbitrarie.

Dalle considerazioni esposte risulta dunque che, a rigore, a nessuna falda artesiana [1] è applicabile la legge (48), laddove nella pratica potrà questa relazione applicarsi con tutta tranquillità alle falde occupate dall'acqua per una notevole estensione.

22. Terminerò l'esposizione delle leggi di reciprocità che si riferiscono alla filtrazione, osservando che potrebbe in tale campo enunciarsi anche un teorema identico a quello che il VOLTERRA ha dato nella elettrodinamica, sia valendosi della formula (43), sia ricorrendo alla (48).

Se non che sotto ciascuna delle due forme esso teorema perde molta parte dell'interesse che gli è stato riconosciuto nel caso di una corrente elettrica o di un flusso di calore.

Infatti, riferendosi dapprima alla (43), va posto in rilievo che sono necessariamente incluse, nel complesso σ delle superficie che racchiudono la falda permeabile, anche le lontane superficie σ_a di alimentazione e di erogazione attraverso le quali la falda comunica con l'esterno.

Pertanto in ciascuno dei due regimi posti a confronto, le superficie di immissione (σ_A, σ_O, secondo le notazioni usate al n. 11) dovrebbero necessariamente coincidere con σ_a, mentre σ_B e σ_D potrebbero effettivamente rappresentare quelle relative a due pozzi distinti B e D. Inoltre converrebbe immaginare che in un regime si erogasse acqua dal solo pozzo B, e che nell'altro si ponesse in azione il solo pozzo D; infine la falda permeabile

---

[1] Alle falde freatiche, ripetiamo, non può in alcun caso convenire la (48), poichè a far parte della zona permeabile di σ_2 sono anche necessariamente le superficie che si collegano a σ_1.

dovrebbe supporsi inizialmente in riposo, se si vuole che la portata erogata da ciascun pozzo eguagli quella entrante attraverso la superficie σ_a.

Ciò posto, essendo sensibilmente invariabile durante qualsiasi erogazione il carico sulla lontana superficie σ_a, risulta, detto h il carico preesistente ai due regimi della falda in riposo:

$$(h - h''_B)Q'_B = (h - h'_D)Q''_D$$

dove h'_D, Q'_B sono il carico piezometrico e la portata relativi a un regime, h''_B, Q''_D le analoghe quantità relative all'altro.

Se poi si suppone $Q''_D = Q'_B$, si ha:

$$h - h''_B = h - h'_D$$

relazione che è evidentemente contenuta nella (48).

Ove ci si valga, invece, della stessa relazione (48) e si considerino quattro pozzi distinti, si ottiene sì una legge nuova, di cui è immediato l'enunciato, ma non presenta questa un notevole interesse pratico, giacchè bisognerebbe supporre che durante ciascun regime l'acqua che si attinge da un pozzo fosse contemporaneamente versata in un altro.

23. Il principio di Lorentz. — Ripeterò qui, per essere completo, un teorema di reciprocità, dovuto al LORENTZ ed esposto dal BURALI-FORTI e dal MARCOLONGO nel secondo volume dell'*Analyse vectorielle générale*, relativo ai moti vorticosi dei liquidi viscosi.

Osservando che le equazioui dell'equilibrio sono in tal caso:

$$(49) \qquad \begin{cases} \operatorname{grad} \beta = \rho\left(\boldsymbol{F} - \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}\right) \\ \beta \boldsymbol{n} = \boldsymbol{F}_\sigma \end{cases},$$

dove $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{F}_\sigma$ sono le forze agenti sull'unità di massa e in superficie, $\boldsymbol{v}$ è la velocità, e β è l'omografia delle pressioni, se ne deduce che alla massa liquida occupante uno spazio S limitato dalla superficie σ, sono applicabili i risultati ottenuti nei riguardi dei solidi elastici, purchè alle forze di massa si sostituiscano le *forze perdute* $\boldsymbol{F} - \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$, e alla omografia delle deformazioni quella $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dP}$ delle velocità di deformazione.

Fatta pertanto l'ipotesi dell'incompressibilità, risulta verificata la (4), ove si ponga in essa:

$$\begin{cases} \alpha = \beta & \beta = \beta' \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}' & \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}, \end{cases}$$

essendo β, v; β', v' due sistemi di omografie delle pressioni e le velocità corrispondenti a due diversi sistemi di forze F, F_σ; F', F'_σ; mentre la (3) diviene:

$$(50)\qquad \int_S \rho\left(F - \frac{dv}{dt}\right)\times v'dS + \int_\sigma F_\sigma \times v'd\sigma = \int_S \rho\left(F' - \frac{dv'}{dt}\right)\times v dS + \int_\sigma F'_\sigma \times v d\sigma.$$

Nel caso di moti lenti e stazionari si ha:

$$(51)\qquad \int_S \rho F \times v'dS + \int_\sigma F_\sigma \times v'd\sigma = \int_S \rho F' \times v dS + \int_\sigma F'_\sigma \times v d\sigma,$$

relazione perfettamente rispondente al teorema di BETTI.

In merito a questo principio giova osservare che, mentre nel caso di un solido elastico non muta, da un sistema di sollecitazioni ad un altro, la individualità delle particelle cimentate, qui la natura stessa del fatto fisico importa che gli elementi fluidi, i quali in un certo regime occupavano lo spazio S, vengano in un secondo regime sostituiti con altri diversi dai primi.

Ma subito si riconosce che anche un corpo elastico potrebbe essere sostituito con altro, purchè di egual forma geometrica. Solamente, affinchè per i due, sottoposti ciascuno a un proprio sistema di forze, valga tuttavia il teorema di BETTI, occorre e basta che nei punti geometricamente corrispondenti sia la stessa la funzione *potenziale elastico*, cioè siano gli stessi i 21 moduli di elasticità.

Pertanto nel caso presente il liquido in moto dovrà, nei riguardi dinamici, essere omogeneo, poichè ogni particella della massa liquida che trovasi in un regime o andrà poi a trovarsi in un secondo regime entro lo spazio S, può trasportarsi in un punto qualunque di S; dovrà cioè essere lo stesso ovunque il coefficiente di viscosità.

*
* *

24. I principi di Volterra e Puppini nella Termodinamica (1). — Si consideri un corpo conduttore (solido o liquido o gassoso indifferentemente) occupante lo spazio S, e limitato dalla superficie σ attraverso la quale avvengono

(1) « Il Nuovo Cimento »; 1882, Serie III, Tomo XI; « Il Monitore Tecnico », 1916, n. 8.

scambi di calore; e si supponga, per rimanere in un caso più generale, che la massa conduttrice possegga eventuali sorgenti interne di calore.

Chiamando T la temperatura ed

$$\boldsymbol{F} = -\operatorname{grad} T$$

il vettore *caduta di temperatura*, vale notoriamente la legge:

$$\boldsymbol{Q} = K\boldsymbol{F}, \tag{52}$$

dove $\boldsymbol{Q}$ è il vettore *flusso di calore* per unità d'area di una isoterma (se il conduttore è isotropo) e per unità di tempo, e K è un'omografia che, nel caso di un conduttore isotropo, prende il nome di *coefficiente di conducibilità termica.*

Se T, $\boldsymbol{F}$, $\boldsymbol{Q}$; T', $\boldsymbol{F}'$, $\boldsymbol{Q}'$ sono gli elementi relativi a due diversi regimi termodinamici, potrà scriversi un principio di reciprocità ove si ammetta, oltre la legge (52), una almeno delle due seguenti proprietà: l'isotropia termica del mezzo o la solenoidalità di $\boldsymbol{Q}$. Corrispondentemente sarà verificata la condizione (5) ovvero la (4), quando si ponga in esse:

$$\begin{cases} \alpha = T & \beta = T' \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{Q}' & \boldsymbol{v} = \boldsymbol{Q}. \end{cases}$$

Se si ammette l'isotropia oppure che, essendo anisotropo il conduttore, sia una *dilatazione* [1] l'omografia K, è verificata la (5); si ha cioè:

$$-\int_S \boldsymbol{F} \times K\boldsymbol{F}' dS = -\int_S \boldsymbol{F}' \times K\boldsymbol{F} dS;$$

mentre la (3) diviene:

$$\int_S T \operatorname{div} \boldsymbol{Q}' dS + \int_\sigma T\boldsymbol{Q}' \times \boldsymbol{n} d\sigma = \int_S T' \operatorname{div} \boldsymbol{Q} dS + \int_\sigma T'\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{n} d\sigma, \tag{53}$$

nella quale:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{Q} = c \frac{\partial T}{\partial t} + \varphi,$$

[1] Cfr. n. 9 di questa Nota.

essendo c il calore specifico, t il tempo, φ l'eventuale contributo interno per unità di tempo e di volume.

Se invece si suppone $\operatorname{div} \boldsymbol{Q} = \operatorname{div} \boldsymbol{Q'} = 0$, come nel caso di due regimi permanenti e quando sia φ nullo ovunque, vale la (4), avendosi ad esempio:

$$I_1 \left\{ K\alpha \cdot \frac{d\boldsymbol{u}}{dP} \right\} = T \operatorname{div} \boldsymbol{Q'} = 0 ;$$

mentre la (3) assume la forma:

$$-\int_S \boldsymbol{F} \times K\boldsymbol{F'} dS + \int_\sigma T\boldsymbol{Q'} \times \boldsymbol{n} d\sigma = -\int_S \boldsymbol{F'} \times K\boldsymbol{F} dS + \int_\sigma T'\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{n} d\sigma. \tag{54}$$

Quando infine fossero verificate entrambe le ipotesi, si avrebbe:

$$\int_\sigma T\boldsymbol{Q'} \times \boldsymbol{n} d\sigma = \int_\sigma T'\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{n} d\sigma, \tag{55}$$

espressione formalmente identica alla (43).

Quest'ultima e la (53) sono gli enunciati dati dal Puppini.

Una forma particolare della (55) è la legge esposta dal Volterra nel 1882 unitamente all'identica legge relativa alle correnti elettriche, di cui s'è già data la dimostrazione nel n. 11 di questa nota, e che qui va identicamente ripetuta.

Fatto centro in quattro punti A, B, C, D situati entro lo spazio S occupato dal conduttore (isotropo o ad anisotropia soddisfacente alla condizione del Lazzarino), si traccino quattro sfere σ_A, σ_B, σ_C, σ_D, di raggio ε, e si supponga poi che in un primo regime termico un certo flusso Φ di calore, avente carattere solenoidale se il regime è permanente, entri per σ_A ed esca per σ_B, mentre in un secondo regime, anch'esso permanente, un diverso flusso Φ' di calore entri per σ_C ed esca per σ_D.

La formula (55), poichè attraverso il contorno σ dello spazio S occupato dal conduttore non c'è movimento di calore, assume allora la forma:

$$\int_{\sigma_A+\sigma_B+\sigma_C+\sigma_D} T\boldsymbol{Q'} \times \boldsymbol{n} d\sigma = \int_{\sigma_A+\sigma_B+\sigma_C+\sigma_D} T'\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{n} d\sigma. \tag{55'}$$

Passando al limite per $\varepsilon = 0$, risulta:

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\sigma_A} TQ' \times n d\sigma = T_A Q'_A \times \int_{\sigma_A} n d\sigma = 0$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\sigma_B} TQ' \times n d\sigma = T_B Q'_B \times \int_{\sigma_B} n d\sigma = 0$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\sigma_C} TQ' \times n d\sigma = T_C \int_{\sigma_C} Q' \times n d\sigma = T_C \Phi'$$

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{\sigma_D} TQ' \times n d\sigma = T_D \int_{\sigma_D} Q' \times n d\sigma = - T_D \Phi'$$

e lo stesso dicasi degli integrali estesi a σ_A, σ_B, σ_C, σ_D del secondo membro della (55'), i quali assumono rispettivamente i valori $T'_A \Phi$, $- T''_B \Phi$, 0, 0.

Perciò si ottiene:

$$\Phi'(T_C - T_D) = \Phi(T'_A - T'_B),$$

e, supponendo infine che sia $\Phi' = \Phi$,

$$T_C - T_D = T'_A - T'_B\,;$$

cioè: *il dislivello termico determinato nei punti* C, D *da un flusso qualsiasi di calore entrante per* A *e uscente per* B *è eguale a quello provocato nei punti* A, B *da un medesimo flusso entrante per* C *e uscente per* D.

*
* *

25. In tutti gli esempi fin quì presentati non si è tenuto conto alcuno della condizione (6).

Tale ommissione è stata fatta con intenzione, poichè in pratica i teoremi più semplici e più importanti sono generalmente quelli nei quali i termini della relazione (3) che rimangono a costituire il principio di reciprocità sono precisamente gli integrali di superficie della condizione (6) medesima.

Pertanto sono generalmente da ritenersi privi di interesse pratico quei principi, dedotti dalla condizione (6), o dalla (6) associata a una delle altre due, nei quali i termini che si dimostrano eguali sono tutti integrali di spazio.

Ciò non di meno, in ordine alle applicazioni del metodo che siamo venuti esponendo, sono da considerare anche tutti gli enunciati, per brevità ommessi, che discendono dalla suddetta condizione, dei quali alcuni potrebbero tornare utili nel campo delle ricerche prettamente scientifiche.

26. Da quanto si è esposto nei precedenti numeri sorge anzitutto la grande semplicità del metodo vettoriale nei confronti con qualsiasi altro. Infatti, mediante la relazione identica (3), associata alle condizioni (4), (5) [e ci si potrebbe valere anche della (6)], è stato possibile dimostrare speditamente i più importanti principi di reciprocità che valgono nella Fisica, e si sono ottenuti risultati, se non nuovi nell'argomento cui si riferiscono, certamente assai più generali.

A questo metodo potrà opporsi che esso è proficuo solamente in quanto la quasi totalità dei teoremi esposti era conosciuta e che solo tale conoscenza ci ha guidati nella scelta delle opportune omografie α, β e dei vettori $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ da sostituire nelle (3), (4), (5); mentre la fonte diretta alla quale tuttora converrebbe rivolgersi in una nuova indagine rimarrebbe ancora quella di carattere energetico cui attinsero alcuni degli Autori di tali ricerche.

Ma è facile riconoscere che la relazione fondamentale (3) [o la (1), il che è equivalente] è suscettibile di una espressiva interpretazione fisica e che perciò non è affidata al caso la scelta delle omografie e dei vettori più opportuni.

Basta, ad esempio, pensare al significato della (1) nella teoria dell'elasticità.

Posto che α sia l'omografia delle tensioni interne e $\boldsymbol{u}$ il vettore spostamento, la (1) è l'espressione del *principio della conservazione dell'energia* quando α corrisponde ad $\boldsymbol{u}$, è il *teorema dei lavori virtuali* nel caso opposto, purchè $\boldsymbol{u}$ sia un sistema *possibile* di spostamenti, ad esempio sia dovuto a un'altra omografia β delle tensioni.

Orbene questa interpretazione della (1) si conserva in tutte le altre applicazioni, anche se le dimensioni vengono a mutare per il mutato significato dei simboli.

Dunque il metodo esposto risulta in diretto rapporto coi principi fondamentali della Meccanica, ai quali ha dovuto pure ricorrere anche chi, come il DONATI, seguito poi dal PUPPINI, si è riferito inoltre al *principio del massimo dell'entropia.*

Un particolare cenno su questo punto chiarirà questo asserto.

Mi riferisco al principio di reciprocità valevole in una rete di fili conduttori, e precisamente alla seconda dimostrazione data dal Donati nei Rendiconti della R. Accademia delle Scienze in Bologna, Novembre, Dicembre 1899.

Ivi il problema è ricondotto alla ricerca di un *estremo condizionato* della funzione calore svolto per effetto Joule, la condizione essendo rappresentata dal principio della conservazione dell'energia.

Seguendo un noto procedimento si è così condotti ad annullare la variazione prima di una certa funzione (somma di quella che esprime il calore svolto con la condizione moltiplicata per una costante di immediata determinazione), quando si assegnino alle variabili intensità della corrente degli incrementi *compatibili coi vincoli* (nel caso specifico *solenoidali*); quando, ad esempio, si assegnino degli incrementi dati dalle intensità corrispondenti a un secondo regime, alterate mediante uno stesso fattore numerico infinitamente piccolo, che sia lo stesso in tutti i punti della rete.

Ora, la relazione che così il Donati ricava per nulla differisce da quella che immediatamente risulta dal *teorema dei lavori virtuali* [1], teorema che è ancora rappresentato in tutta la sua generalità dalla (1), quando α ed u siano funzioni che non corrispondono a uno stesso regime.

Pertanto alla (1) e quindi alla (3) spetta nella Fisica un'importanza che non si limita solamente al suo carattere analitico.

Dalle osservazioni sovraesposte risulta poi ancora che *ogni principio di reciprocità è una conseguenza del teorema dei lavori virtuali.*

27. Concludendo: ogni qualvolta in un campo, che sia sede di fenomeni fisici, esistono un'omografia α (che può anche ridursi a un'omotetia) e un vettore u, può subito scriversi la relazione identica (3), mentre la condizione di proporzionalità, cui usualmente si fa appello, si traduce quì nel fatto che esiste un elemento fisico, che potrebbe anche essere rappresentato dallo stesso vettore u, proporzionale a grad α, o che risulta il trasformato di grad α secondo un'altra omografia.

Ma la (3), di per sè sola, non dice nulla. Perchè possa scriversi un principio di reciprocità occorre verificare se, in virtù del significato fisico di α e u, è soddisfatta una almeno delle condizioni (4), (5), (6). In dipendenza di tali condizioni varrà dunque un principio anzichè un altro.

Consideriamo infine queste condizioni.

---

[1] Un'espressione in tutto corrispondente è quella che regola l'equilibrio dei fili flessibili. Cfr. P. Burgatti: *Meccanica Razionale*; 1ª edizione, pag. 188 (1).

La (4)

$$\int_S I_1 \left\{ K\alpha \cdot \frac{du}{dP} \right\} dS = \int_S I_1 \left\{ K\beta \cdot \frac{dv}{dP} \right\} dS,$$

quando α, β non siano delle omografie particolari, come nell'Elasticità, esprime l'eguaglianza dei *lavori virtuali interni*, che nel caso ricordato risulta da una nota proprietà delle forme quadratiche omogenee.

Quando α, β si riducono invece a delle omotetie, come negli esempi che interessano l'Elettrologia, l'Idraulica, la Termodinamica, la (4) è verificata (condizione sufficiente, ma non necessaria) ove siano $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *solenoidali*, il che accade (se $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ rappresentano velocità) quando il moto sia permanente, oppure quando, essendo vario il moto, è *incompressibile* il fluido in movimento.

La condizione (5):

$$\int_S \operatorname{grad} \alpha \times \boldsymbol{u} dS = \int_S \operatorname{grad} \beta \times \boldsymbol{v} dS,$$

esprime l'eguaglianza dei *lavori esterni di massa.*

Con riferimento ai campi della Fisica nei quali abbiamo avuto occasione di usarla e conformemente a quanto ha dimostrato il Prof. LAZZARINO, diremo: condizione sufficiente [1] affinchè essa sia verificata è che l'omografia (α e β) caratterizzante le proprietà specifiche del mezzo sia una *dilatazione* se questo è anisotropo, un'*omotetia* se questo è isotropo.

Da ultimo la (6):

$$\int_\sigma \alpha \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{u} d\sigma = \int_\sigma \beta \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v} d\sigma,$$

esprime l'eguaglianza dei *lavori virtuali in superficie.*

Si è già rilevato in proposito che ben raramente potrà dirsi a priori che essa è verificata, poichè generalmente costituisce piuttosto essa stessa il più suggestivo principio di reciprocità che si tende a dimostrare, anzichè una condizione la cui evidenza risulti immediata.

Bologna, Scuola Ingegneri, ottobre 1924.

[1] In tutte le applicazioni esposte le condizioni (4), (5), (6) sono risultate sostituite da quelle più restrittive, sufficienti, ma non necessarie, nelle quali l'eguaglianza corre fra le funzioni da integrarsi, anzichè fra i loro integrali, così come fu già fatto dal BURGATTI. Ciò non di meno nel corso di questo lavoro si è conservata la forma integrale alle tre condizioni, poichè non è detto a priori che non esistano fatti fisici pei quali, comunque varino le grandezze degli elementi posti a confronto, entro *prefissati* campi σ ed S, l'eguaglianza degli integrali sia quella sola che è sempre verificata.

Rappresentazione geodetico-proiettiva fra due superficie.

Memoria di ENRICO BOMPIANI (a Bologna).

I. Premessa.

Data una superficie dello spazio ordinario s' indichino con $x_i(u, v)$ $(i = 1,.., 4)$ le coordinate proiettive omogenee dei suoi punti e con $\xi_i(u, v)$ quelle dei suoi piani tangenti; con X_i e Ξ_i quelle di punto e piano generico dello spazio.

Fissato un sistema di riferimento (rispetto al quale si sian calcolate quelle coordinate) rimane arbitrario un fattore nelle coordinate di punto ed uno in quelle di piano; scelto il primo ad arbitrio si fissi il secondo in modo che

$$(1) \qquad |x, x_u, x_v, X| : \sum_1^4{}_i \xi_i X_i = |\xi, \xi_u, \xi_v, \Xi| : \sum_1^4{}_i x_i \Xi_i \text{ (1)}.$$

Se si pone $u_1 = u$, $u_2 = v$

$$(2) \qquad F_2 = -\sum_1^4{}_i dx_i d\xi_i = \sum_1^2{}_{ik} a_{ik} du_i du_k$$

$$(3) \qquad F_3 = \frac{1}{2} \sum_1^4{}_i (dx_i d^2\xi_i - d\xi_i d^2 x_i) = \sum_1^2{}_{ikl} a_{ikl} du_i du_k du_l$$

e si moltiplicano le x per un fattore ρ, F_2 ed F_3 vengono moltiplicate per ρ^2.

$F_2 = 0$ rappresenta le *asintotiche*, $F_3 = 0$ le *linee di* DARBOUX della superficie; la forma frazionaria, invariante per omografie ed anche per applicabilità proiettive, F_3/F_2 è l' *elemento lineare proiettivo* della superficie [2].

[1] I simboli a numeratore indicano determinanti (le cui righe si ottengono da quelle scritte apponendo gl' indici 1,... 4 alle coordinate); gli indici u e v significano derivazioni parziali rispetto ad u e v.

[2] I risultati qui accennati sono dovuti a G. FUBINI; all' elenco dei suoi numerosi lavori sostituisco la citazione delle *Lezioni di Geometria Proiettiva Differenziale* redatte insieme ad E. CECH (di prossima pubblicazione presso la Ditta N. Zanichelli). Il modo ricordato d'introdurre F_3 ed F_2 è del CECH: *I fondamenti della geometria proiettivo-differenziale secondo il metodo di Fubini.* (Annali di Matematica, 31 (3), 1923, pp. 251-278); *Étude analytique de*

Si chiamano *geodetiche proiettive* o *ipergeodetiche* o *pangeodetiche* (FUBINI) della superficie le estremali del seguente problema di variazione

(4) $$\delta \int F_3/F_2 = 0$$ (3).

Relativamente ad esse mi sono proposto il problema analogo a quello di BELTRAMI-DINI: ricercare quando è possibile porre due superficie in corrispondenza geodetico-proiettiva, cioè tale che si corrispondano dette estremali.

Si ha la soluzione banale del problema quando gli elementi lineari proiettivi sono uguali o differiscono per un fattore costante. Ma esistono anche qui dei « casi di LIOUVILLE »; essi si presentano per le superficie a linee canoniche indeterminate e per un tipo di superficie rigate; di queste superficie eccezionali do l'effettiva costruzione di modelli.

II. Le geodetiche proiettive.

Prima d'iniziare a trattare il problema della corrispondenza geodetico-proiettiva ci conviene trovare l'equazione delle geodetiche proiettive nel caso in cui si assumano come linee coordinate le linee asintotiche della superficie; escludiamo in tutto il lavoro dalle nostre considerazioni le super-

l'élément linéaire projectif d'une surface. (Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Brno, 1924, pp. 1-24).

Per applicabilità (o deformazione) proiettiva di una superficie s'intende una trasformazione puntuale tale che a curve della superficie data i cui piani osculatori in un punto formino fascio corrispondano sempre sulle trasformate curve dotate della stessa proprietà. La nozione di applicabilità proiettiva è dovuta pure al FUBINI, la definizione qui riportata al CECH.

(3) Queste geodetiche sono state considerate quasi contemporaneamente dal FUBINI: *Alcuni risultati di geometria proiettiva differenziale*, § 10 (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, s. 5, vol. XXXII (1923_2), pp. 273-279 e 321-326), dal CECH: *Sur les géodesiques projectives* (Rendic. della R. Accademia dei Lincei, s. 5, vol. XXXIII (1924_1), pp. 15-16) e da me: *Nozioni di geometria proiettivo-differenziale relative ad una superficie dello spazio ordinario* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, s. 5, vol. XXXIII (1924_1), pp. 85-90); io ho mostrato come da essa si possa ricavare in modo geometrico semplice la *normale proiettiva* di FUBINI. Il significato geometrico di F_3/F_2 è stato trovato in vari modi dal CECH: *Sur la géométrie d'une surface et sur le facteur arbitraire des coordonnées homogènes* (Rendic. della R. Accademia dei Lincei, s. 5, vol. XXXI (1922_2), pp. 475-478) e da me: *Determinazioni proiettivo-differenziali relative ad una superficie dello spazio ordinario* (Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LIX (1924_1), pp. 409-429); e *Le forme di Fubini nella teoria proiettiva delle superficie* (Rendic. del R. Istituto Lombardo, vol. LVII (1924_2), pp. 677-683).

ficie sviluppabili, ed in questo paragrafo anche le rigate (è noto che in quest' ultimo caso F_2 ed F_3 hanno un fattore lineare comune; se poi la superficie è una quadrica $F_3 \equiv 0$).

Le due forme F_2 ed F_3 non sono qualsiansi ma son legate dalle *relazioni di apolarità*

$$(5) \qquad \begin{cases} a_{22}a_{111} - 2a_{12}a_{112} + a_{11}a_{122} = 0 \\ a_{22}a_{112} - 2a_{12}a_{122} + a_{11}a_{222} = 0 \end{cases}$$

e se la superficie è riferita alle sue linee asintotiche ($a_{11} = a_{22} = 0$, $a_{12} \neq 0$) è $a_{112} = a_{122} = 0$ e l'elemento lineare proiettivo può mettersi sotto la forma

$$(6) \qquad F_3/F_2 = \frac{\beta du^3 + \gamma dv^3}{2dudv} = f(u,\ v,\ v')du \qquad (\beta\gamma \neq 0).$$

L'equazione differenziale di EULERO per le estremali di $\delta\int f du = 0$

$$(7) \qquad \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v'} - \frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v'} v' - \frac{\partial^2 f}{\partial v'^2} v'' = 0$$

nel caso attuale si scrive

$$(8) \qquad \begin{aligned} &2(dud^2v - dvd^2u)(\beta du^3 + \gamma dv^3) = \\ &= \left(\frac{\partial \log \beta}{\partial u} du - \frac{\partial \log \gamma}{\partial v} dv\right)(\beta du^3 + \gamma dv^3)dudv + \\ &+ \left(\beta \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} du^2 - \gamma \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} dv^2\right)du^2dv^2 \end{aligned}$$

(e questa mostra che le asintotiche son sempre geodetiche proiettive).

Ci domandiamo ora come si comportano le linee di DARBOUX rispetto a questa equazione e più precisamente: quand'è che *uno* dei fattori di F_3 divide tutta l'equazione (8). Affinchè ciò accada occorre che

$$\beta \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} du^2 - \gamma \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} dv^2 \quad \text{e} \quad \beta du^3 + \gamma dv^3$$

abbiano un fattore comune; e perciò dev'essere ([4])

$$(9) \qquad \beta^{1/3} \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} = \gamma^{1/3} \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u}.$$

([4]) La determinazione di $(\beta/\gamma)^{1/3}$ è ben fissata dal sistema di linee di DARBOUX che si suppone composto di geodetiche proiettive.

Per interpretare questa condizione basta ricordare l'equazione differenziale delle *linee canoniche* della superficie ([5])

$$\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} du = \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} dv \tag{10}$$

o in forza della condizione (9)

$$\beta^{1/3} du + \gamma^{1/3} dv \tag{11}$$

cioè

$$\beta du^3 - \gamma dv^3 = 0. \tag{12}$$

Ma quest'equazione rappresenta le linee di SEGRE ([6]), sicchè:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè un sistema di linee di Darboux sia costituito di geodetiche proiettive (cioè l'equazione (8) *sia divisibile per il fattore di* F_3 *che lo rappresenta) è che le linee canoniche costituiscano il sistema di linee di Segre coniugato al precedente* ([7]).

Nel caso poi che più di un sistema di linee di DARBOUX sia costituito di geodetiche proiettive (nel senso sopra dichiarato) tutt'e tre i sistemi di linee di DARBOUX sono tali e si ha

$$\frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} = \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} = 0 \tag{13}$$

cioè la superficie è a linee canoniche indeterminate.

([5]) In ogni punto della superficie è definito (in modo invariante rispetto alle applicabilità proiettive) un *fascio canonico* di rette (FUBINI: *Alcuni risultati*, ecc.; già citato in ([3])) al quale appartengono la normale proiettiva di FUBINI, una direttrice di WILCZYNSKI, uno spigolo di GREEN, ed altre rette notevoli. Il piano canonico e il piano tangente relativi ad un punto si tagliano lungo la *tangente canonica* definita appunto dalla (10). Se le x_i sono le coordinate *normali* di FUBINI le rette del fascio canonico congiungono il punto x al punto $x_{uv} + \lambda\left(\frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial v} x_u + \frac{\partial \log \beta\gamma^2}{\partial u} x_v\right)$ al variare di λ.

([6]) Cioè inviluppate dalle tangenti di SEGRE; queste sono coniugate armoniche di quelle di DARBOUX rispetto alle tangenti asintotiche.

([7]) Le superficie ora incontrate, soddisfacenti alla (9), godono di altre proprietà. *Esse sono caratterizzate dal fatto che un sistema di linee di Segre è costituito di geodetiche proiettive.* Ma di più: *Se, e solo se, in un punto una linea di Segre e la geodetica proiettiva tangente si osculano vale la* (9); *cioè la tangente comune è la tangente canonica ed il piano osculatore è proprio il piano canonico.*

Per dimostrare la prima parte basta confrontare, in una direzione di SEGRE, la (8) e l'equazione ottenuta differenziando la $\beta - \gamma v'^3 = 0$

$$\beta_u + \beta_v v' - \gamma_u v'^3 - \gamma_v v'^4 - 3\gamma v'^2 v'' = 0. \tag{1}$$

Per la seconda parte si ricordi che, posto $T = |X, x, x_u, x_v|$, $N_1 = |X, x, x_u, x_{uv}|$, Queste superficie sono state in più modi caratterizzate ([8]); p. es. col fatto che le linee di DARBOUX sono geodetiche della forma quadratica normale di FUBINI $\varphi_2 = 2\beta\gamma du dv$. Qui conviene caratterizzarle (in vista del seguito) in quest' altro modo:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè le geodetiche di F_3/F_2 *coincidano con le geodetiche di* $\sqrt{\varphi_2}$ *è che la superficie sia a linee canoniche indeterminate.*

Infatti l'equazione delle geodetiche di $\sqrt{\varphi_2}$ è

$$v'' + \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} v'^2 - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} v' = 0\,; \tag{14}$$

a questa, o alla forma equivalente per le (13),

$$v'' + \frac{1}{2}\frac{\partial \log \gamma}{\partial v} v'^2 - \frac{\partial \log \beta}{\partial u} v' = 0 \tag{15}$$

si riduce la (8) se valgono le (13); e viceversa se la (8) dev' essere equivalente alla (14) dev' essere divisibile per $\beta du^3 + \gamma dv^3$, cioè valgono le (13) e tanto basta per la desiderata equivalenza.

All' ultima condizione, notando che φ_2 è a curvatura nulla, (e si può fare $\beta = \gamma = 1$), si può dare la forma:

Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie sia a linee canoniche indeterminate è ch' essa si possa rappresentare sul piano in modo che alle sue geodetiche proiettive corrispondano le rette del piano.

$N_2 = | X, x, x_v, x_{uv} |$, l'equazione del piano osculatore alla linea $v = v(u)$ è

$$T\left\{\beta - \gamma v'^3 - \left(\frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial u} - \frac{\partial \log \beta\gamma}{\partial v} v'\right) v' + v''\right\} + 2(N_1 + N_2 v')\, v' = 0 \tag{2}$$

e si calcoli il coefficiente di T in una direzione di SEGRE, tenendo conto della (9); esso risulta nullo.

L'ultimo enunciato vale ancora se al posto della geodetica proiettiva si considera un'estremale di $\int \sqrt[3]{\varphi_3}$ ove $\varphi_3 = \beta\gamma(\beta du^3 + \gamma dv^3)$ è la forma cubica normale di FUBINI.

Qualunque sia la superficie, anche non soddisfacente la (9), valgono i teoremi seguenti: *I piani osculatori alle tre geodetiche proiettive uscenti da un punto della superficie nelle direzioni di Segre formano fascio intorno ad una retta del piano canonico, caratterizzata da* $\lambda = -3/8$ (λ ha il significato dato nella nota ([5])). *I piani osculatori alle tre estremali di* $\int \sqrt[3]{\varphi_3}$ *tangenti in un punto alle linee di Segre passano per la direttrice di Wilczynski* ($\lambda = -1/2$).

([8]) Nella mia Nota: *Contributo alla geometria proiettivo-differenziale di una superficie* (Bollettino dell' Unione Matematica Italiana, a. III (1924), n. 2, 3; pp. 49-56, 97-100); n. 7, 9, 10, 14.

III. La corrispondenza geodetico-proiettiva.

La forma dell' equazione (8), in cui a coefficiente dei differenziali secondi, o di v'', figura la forma F_3 ci fa presumere che, almeno in generale, le due forme F_3 relative a due superficie in corrispondenza geodetico-proiettiva siano fra loro proporzionali, cioè si corrispondano su di esse le linee di DARBOUX e, in conseguenza delle relazioni di apolarità, le linee asintotiche; se ciò fosse, riferendosi alla (8) e all' analoga per la superficie trasformata, si troverebbe subito il caso banale già segnalato.

Ma con ciò si perderebbero i casi eccezionali, gli unici interessanti, e si escluderebbero le rigate (scartate nel paragrafo precedente).

Occorre quindi come nel caso classico di BELTRAMI-DINI procurarsi l' equazione differenziale delle geodetiche proiettive rispetto a parametri qualsiansi u, v (la corrispondenza fra le due superficie è definita dall' uguaglianza in punti corrispondenti delle coppie di valori di u, v); l' equivalenza fra le equazioni relative alle due superficie ci darà le condizioni richieste.

Fortunatamente non c' è bisogno di eseguire tutt' i calcoli indicati e il ragionamento fatto in principio di questo paragrafo e i risultati del precedente permettono di arrivare a fondo abbastanza rapidamente.

La $f(u, v, v')$ da sostituire nella (7) è

$$f(u,\ v,\ v')=\frac{a_{111}+3a_{112}v'+3a_{122}v'^2+a_{222}v'^3}{a_{11}+2a_{12}v'+a_{22}v'^2}. \tag{16}$$

Indicatone il denominatore con f_2 si ha per essa:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v'}=\frac{1}{f_2^2}\{\, & a_{22}a_{222}v'^4+4a_{12}a_{222}v'^3+3(a_{11}a_{222}+2a_{12}a_{122}-a_{22}a_{112})v'^2+\\ & +2(3a_{11}a_{122}-a_{22}a_{111})v'+(3a_{11}a_{112}-2a_{12}a_{111})\}\end{aligned}$$

e, utilizzando la $(5)_2$ per semplificare il coefficiente di v'^2

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v'}=\frac{1}{f_2^2}\{\, & a_{22}a_{222}v'^4+4a_{12}a_{222}v'^3+6a_{11}a_{222}v'^2+\\ & +2(3a_{11}a_{122}-a_{22}a_{111})v'+3(a_{11}a_{112}-2a_{12}a_{111})\}\end{aligned} \tag{17}$$

In seguito

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial v'^2}=\frac{1}{f_2^3}\{ & [4a_{22}a_{222}v'^3+12a_{12}a_{222}v'^2+12a_{11}a_{222}v'+2(3a_{11}a_{122}-a_{22}a_{111})]f_2-\\ & -4[a_{22}a_{222}v'^4+4a_{12}a_{222}v'^3+6a_{11}a_{222}v'^2+2(3a_{11}a_{122}-a_{22}a_{111})v'+\\ & +(3a_{11}a_{112}-2a_{12}a_{111})](a_{12}+a_{22}v')\}.\end{aligned} \tag{18}$$

Calcoliamo i coefficienti delle potenze di v' entro la $\{\ \}$. Sono nulli quelli di v'^5 e di v'^4; gli altri valgono:

Coefficiente di v'^3

$$8(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})a_{222}.$$

Coefficiente di v'^2

$$6(2a_{11}a_{12}a_{222} - 2a_{11}a_{22}a_{122} + a_{22}^2 a_{111}) = 24(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})a_{122}.$$

Coefficiente di v'

$$12(a_{11}^2 a_{222} - a_{11}a_{12}a_{122} - a_{11}a_{22}a_{112} + a_{12}a_{22}a_{111}) = 24(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})a_{112}.$$

Coefficiente di v'^0

$$6a_{11}^2 a_{122} - 2a_{11}a_{22}a_{111} - 12a_{11}a_{12}a_{112} + 8a_{12}^2 a_{111} = 8(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})a_{111}$$

ove è da osservare che le ultime espressioni scritte si sono ottenute in forza delle relazioni di apolarità *senza* operare per divisione (sicchè valgono anche se alcuni dei coefficienti delle due forme F_2, F_3 si annullano).

Poichè la superficie non è sviluppabile $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} \neq 0$; se s'immagina moltiplicata tutta la (7) per $f_2^3/(a_{12}^2 - a_{11}a_{22})$ essa diviene intera in v' e il coefficiente di v'' vale $8F_3$. Ora potranno confrontarsi i coefficienti dei termini simili nelle equazioni, che diremo E ed E', delle geodetiche proiettive delle due superficie (indicando con apici quanto si riferisce alla seconda di esse).

Nel *caso generale* nessuna delle due equazioni sarà divisibile per F_3 (o per F'_3) o per un suo fattore. Esauriamo questo caso.

Per semplificare i calcoli osserviamo quanto segue. La corrispondenza fra le due superficie potrà conservare (almeno *a priori* può supporsi): 1°) un doppio sistema coniugato; o 2°) un solo sistema di asintotiche; o infine 3°) i due sistemi di asintotiche.

Nel 1° caso scelto il doppio sistema coniugato permanente come sistema di linee u, v, $a_{12} = a'_{12} = 0$, $a_{11}a_{22}a'_{11}a'_{22} \neq 0$ si ha, per la proporzionalità di F_3 e di F'_3 proporzionalità fra le a_{ikl} e le a'_{ikl}; dalle relazioni di apolarità

$$\begin{cases} a_{22}a_{111} + a_{11}a_{122} = 0 \\ a_{22}a_{112} + a_{11}a_{222} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a'_{22}a'_{111} + a'_{11}a'_{122} = 0 \\ a'_{22}a'_{112} + a'_{11}a'_{222} = 0 \end{cases}$$

si ha poi $a'_{11}/a_{11} = a'_{22}/a_{22}$ (se così non fosse dovrebbero essere tutte le $a_{ikl} = a'_{ikl} = 0$, cioè le superficie sarebbero quadriche; ma per queste ogni curva è geodetica proiettiva). Sulle due superficie si corrispondono quindi linee di DARBOUX ed asintotiche.

Nel 2° caso, $a_{11} = a'_{11} = 0$, $a_{12}a_{22}a'_{12}a'_{22} \neq 0$ si ha sempre proporzionalità fra le a_{ikl} e le a'_{ikl} e le relazioni di apolarità sono

$$\begin{cases} a_{22}a_{111} = 2a_{12}a_{112} \\ a_{22}a_{112} = 2a_{12}a_{122} \end{cases} \qquad \begin{cases} a'_{22}a'_{111} = 2a'_{12}a'_{112} \\ a'_{22}a'_{112} = 2a'_{12}a'_{122} \end{cases}$$

da queste si ha ancora in generale $a'_{12}/a_{12} = a'_{22}/a_{22}$, cioè si corrispondono linee di DARBOUX ed asintotiche; a meno che sia p. es. $a_{111} = a'_{111} = 0$ e di conseguenza (per le ipotesi fatte) $a_{112} = a_{122} = a'_{112} = a'_{122} = 0$ nel qual caso i due elementi lineari proiettivi si riducono al tipo

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{a_{222}dv^2}{2a_{12}du + a_{22}dv}; \quad \frac{F_3'}{F_2'} = \frac{a'_{222}dv^2}{2a'_{12}du + a'_{22}dv} \tag{19}$$

cioè le due superficie sono rigate.

Nel 3° caso infine corrispondendosi, oltre alle linee di DARBOUX, le asintotiche (per ipotesi; ed a questo caso abbiam visto che si riducono tutti i precedenti, a meno che tutt' e due le superficie siano rigate), posti i due elementi lineari sotto la forma (6) si ha $\beta' = \rho\beta$ e $\gamma' = \rho\gamma$, quindi dalla (8) e dall'analoga (8') risulta $\rho =$ costante.

Si ottiene così (escluse le rigate) il caso banale $F'_3/F'_2 =$ cost. F_3/F_2 (9).

IV. Il caso d'eccezione per superficie non rigate: superficie a linee canoniche indeterminate.

Riserviamo al seguito lo studio delle rigate ed occupiamoci dei possibili casi d'eccezione. Essi si presentano se le equazioni E ed E' sono divisibili per uno o più fattori di F_3 o risp. di F'_3.

Si noti però subito che il caso in cui E ed F_3 p. es. abbiano uno o più fattori comuni ma non accada altrettanto per E' ed F'_3 non fa eccezione a quanto si è detto sopra, perchè vanno confrontate E ed E' (e non E privata del fattore comune ad F_3 con E' che risulterebbero di grado differente in v'); sicchè possono aversi eccezioni solo quando E ed E' presentino lo stesso caso di divisibilità rispetto ad F_3 e ad F'_3 rispettivamente.

(9) In sostanza il ragionamento fatto in principio del paragrafo va bene, eccettuato il caso che le due superficie siano rigate; sarebbe rimasto dubbio il caso in cui una sola delle due superficie sia rigata, il che, come ora risulta, non può accadere. Ciò poteva dedursi anche dal fatto che se una superficie è rigata, tutti i sistemi di linee di DARBOUX coincidono (nelle generatrici) e quindi altrettanto deve accadere per l'altra superficie.

Supponiamo quindi che E ed E' abbiano ciascuna un solo fattore comune con la rispettiva forma cubica.

Se ciò avviene confrontando i coefficienti di v'' (dopo eseguita la divisione di E e di E' per quei fattori) si deduce, come nel caso generale, che sono proporzionali i fattori residui di F_3 ed F'_3, cioè che si corrispondono sulle due superficie *due* sistemi di linee di DARBOUX.

Assunti questi due sistemi come coordinati le due forme F_3 ed F'_3 si riducono al tipo

$$(a_{112}du + a_{122}dv)dudv; \quad (a'_{112}du + a'_{122}dv)dudv$$

sicchè il problema di variazione $\delta\int f du = 0$ va trattato per

$$f(u,\ v,\ v') = \frac{a_{112}v' + a_{122}v'^2}{a_{11} + 2a_{12}v' + a_{22}v'^2}. \tag{20}$$

Le relazioni di apolarità danno

$$\begin{cases} 2a_{12}a_{112} = a_{11}a_{122} \\ 2a_{12}a_{122} = a_{22}a_{112} \end{cases} \tag{21}$$

quindi necessariamente $4a_{12}^2 = a_{11}a_{22}$ (altrimenti $a_{112} = a_{122} = 0$) e poichè si sono escluse le sviluppabili è certo $a_{11}a_{12}a_{22} \neq 0$; per le (21) la f si scrive

$$f = \rho(u,\ v)\frac{2a_{12}v' + a_{22}v'^2}{a_{11} + 2a_{12}v' + a_{22}v'^2} \qquad (\rho \neq 0)$$

o anche, fatto come si può $a_{11} = 1$, $a_{12} = b(\neq 0)$, $a_{22} = 4b^2$

$$f = \rho - \frac{\rho}{1 + 2bv' + 4b^2v'^2}. \tag{22}$$

Posto $f_2 = 1 + 2bv' + 4b^2v'^2$ si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{2\rho b}{f_2^3} v' \left\{ 32b^5 \frac{\partial \log \rho}{\partial v} v'^5 + 48b^4 \frac{\partial \log \rho}{\partial v} v'^4 + 8b^3 \frac{\partial \log \rho^5 b^2}{\partial v} v'^3 + \right.$$
$$\left. + 4b^2 \frac{\partial \log \rho^5 b^3}{\partial v} v'^2 + 6b \frac{\partial \log \rho b}{\partial v} v' + \frac{\partial \log \rho b}{\partial v} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v'^2} = \frac{2\rho b}{f_2^3} 24b^2 v'(1 + 2bv')$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v'} = \frac{2\rho b}{f_2^3} \left\{ 16b^3 \frac{\partial \log \rho/b^2}{\partial u} v'^3 + 12b^2 \frac{\partial \log \rho/b}{\partial u} v'^2 + 6b \frac{\partial \log \rho b}{\partial u} v' + \frac{\partial \log \rho b}{\partial u} \right\}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v'} = \frac{2\rho b}{f_2^3} \left\{ 16b^3 \frac{\partial \log \rho/b^2}{\partial v} v'^3 + 12b^2 \frac{\partial \log \rho/b}{\partial v} v'^2 + 6b \frac{\partial \log \rho b}{\partial v} v' + \frac{\partial \log \rho b}{\partial v} \right\}.$$

L'equazione differenziale delle geodetiche proiettive è perciò:

$$
\begin{aligned}
&24b^2v'(1+2bv')v'' = \\
&= -32b^5\frac{\partial\log\rho}{\partial v}v'^6 - 48b^4\frac{\partial\log\rho}{\partial v}v'^5 - 24b^3\frac{\partial\log\rho b^2}{\partial v}v'^4 - \\
&- 8b^2\left(\frac{\partial\log\rho b^3}{\partial v} - 2b\frac{\partial\log\rho b^2}{\partial u}\right)v'^3 + 12b^2\frac{\partial\log\rho b}{\partial u}v'^2 + \\
&+ 6b\frac{\partial\log\rho b}{\partial u}v' + \frac{\partial\log\rho b}{\partial u} \text{ (}^{10}\text{)}.
\end{aligned} \tag{23}
$$

Poichè le linee di DARBOUX sono rappresentate sulla nostra superficie da $du=0$, $dv=0$, $1+2bv'=0$, bisogna scrivere, per metterci nell'ipotesi adottata, che il 2° membro della (23) è divisibile per $1+2bv'$.

La condizione di divisibilità è

$$
\frac{\partial\log\rho}{\partial v} = 2b\frac{\partial\log\rho b}{\partial u} \tag{24}
$$

e a divisione eseguita in luogo della (23) si ha

$$
\begin{aligned}
&24b^2v'v'' = \\
&= -16b^4\frac{\partial\log\rho}{\partial v}v'^5 - 16b^2\frac{\partial\log\rho}{\partial v}v'^4 - 4b^2\frac{\partial\log\rho b^6}{\partial v}v'^3 + \\
&+ 4b^2\frac{\partial\log\rho/b^5}{\partial u}v'^2 + 4b\frac{\partial\log\rho b}{\partial u}v' + \frac{\partial\log\rho b}{\partial u}.
\end{aligned} \tag{25}
$$

Per la corrispondenza fra le due superficie dev'essere intanto

$$
\left\{
\begin{aligned}
b^2\frac{\partial\log\rho}{\partial v} &= b'^2\frac{\partial\log\rho'}{\partial v} \\
b\frac{\partial\log\rho}{\partial v} &= b'\frac{\partial\log\rho'}{\partial v}
\end{aligned}
\right. \tag{26}
$$

da cui risulta (essendo b e $b'\neq 0$) che se $\frac{\partial\rho}{\partial v}\neq 0$ anche $\frac{\partial\rho'}{\partial v}\neq 0$ e perciò $b=b'$, $\frac{\partial\log\rho}{\partial v}=\frac{\partial\log\rho'}{\partial v}$ e poi $\frac{\partial\log\rho}{\partial u}=\frac{\partial\log\rho'}{\partial u}$, cioè i due elementi lineari proiettivi differiscono solo per una costante moltiplicativa.

---

(10) Questa equazione mostra che se un fattore di F_3 divide l'equazione E delle geodetiche proiettive, le corrispondenti linee di DARBOUX soddisfano anche all'equazione ottenuta dividendo E per quel fattore.

Ma se $\frac{\partial \rho}{\partial v} = \frac{\partial \rho'}{\partial v} = 0$ anche $\frac{\partial \rho b}{\partial u} = \frac{\partial \rho' b'}{\partial u} = 0$, per la (24), e la (25) si riduce a

$$v'' = -\frac{\partial \log b}{\partial v} v'^2 - \frac{\partial \log b}{\partial u} v' \tag{27}$$

da cui $b' = \text{cost.}\, b$ (11).

D'altronde nell'ipotesi attuale

$$\rho b = \mu(v), \quad \rho = \varphi(u) \quad \text{quindi} \quad b = \mu(v)/\varphi(u) \tag{28}$$

e perciò

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{\{\varphi du + 2\mu dv\}\, \varphi du \cdot 2\mu dv}{\varphi^2 du^2 + 2\varphi\mu du dv + 4\mu^2 dv^2}. \tag{29}$$

cioè posti $dU = \varphi(u) du$, $dV = 2\mu(v) dv$

$$\frac{F_3}{F_2} = \frac{(dU + dV) dU dV}{dU^2 + dU dV + dV^2} \tag{30}$$

e l'elemento lineare trasformato può scriversi

$$\frac{F'_3}{F'_2} = \frac{hk(h dU + k dV) dU dV}{h^2 dU^2 + hk dU dV + k^2 dV^2} \tag{31}$$

con h e k costanti (una sola di esse è essenziale).

Su queste due superficie *non* si corrispondono le linee asintotiche, nè i sistemi residui di linee di DARBOUX (diversi da $dU = 0$ e $dV = 0$); anzi i tre sistemi di linee di DARBOUX sopra una superficie e l'immagine sulla stessa del terzo sistema di linee di DARBOUX dell'altra formano in ogni punto birapporto costante; così le linee asintotiche di una superficie e le immagini di quelle dell'altra.

Tutto ciò riesce del resto evidente se si osserva che i due elementi lineari precedenti si riducono (a meno di una costante moltiplicativa inessenziale) al tipo $(du^3 + dv^3)/du dv$, cioè sono a linee canoniche indeterminate

(11) Si può controllare l'impossibilità, affermata in principio del paragrafo, di rappresentare nel modo voluto una superficie la cui equazione E sia divisibile per un fattore di F_3 sopra un'altra la cui equazione E' non abbia fattori comuni con F'_3. Infatti, confrontando la (25) moltiplicata per $1 + 2b'v'$ con l'analoga (23') della (23) per la seconda superficie, si ricavano ancora le (26) e perciò la stessa conclusione se $\frac{\partial \rho}{\partial v} \neq 0$ e $\frac{\partial \rho'}{\partial v} \neq 0$. Se invece $\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0$, quindi anche $\frac{\partial \rho'}{\partial v} = 0$, la (27) moltiplicata per $v'(1 + 2b'v')$ confrontata alla (23') dà $\frac{\partial \log \rho' b'}{\partial u} = 0$ cioè anche la seconda superficie soddisfa alla (24), contro l'ipotesi fatta.

(proiettivamente applicabili sulla sfera proiettiva $xyz=1$) e si tien conto del fatto già provato (in fine al capitolo II) che queste superficie sono rappresentabili sul piano in modo che alle loro geodetiche proiettive corrispondano le rette del piano.

Siamo così condotti ad esaminare l'ultimo caso di eccezione (che come si vedrà comprende il precedente) in cui E sia divisibile per F_3 ed E' per F'_3.

Per il risultato ora ricordato le due superficie sono a linee canoniche indeterminate e si possono rappresentare sul piano nel modo ora detto.

La più generale corrispondenza geodetico-proiettiva fra le due superficie si ottiene riferendo omograficamente i due piani che le rappresentano.

Il caso precedente si ottiene come immagine delle affinità con centro nell'origine del piano cartesiano (u, v).

In conclusione:

Se due superficie non rigate sono in corrispondenza geodetico-proiettiva o i loro elementi lineari differiscono (al più) per un fattore costante, oppure tutt' e due le superficie sono a linee canoniche indeterminate. In tal caso le due superficie possono rappresentarsi (per punti) su due piani in modo che alle loro geodetiche corrispondano le rette dei due piani; le corrispondenze geodetico-proiettive fra le due superficie hanno per immagini le omografie fra i piani rappresentativi.

Non esistono rappresentazioni geodetico-proiettive di una superficie rigata sopra una non rigata.

V. Il caso d'eccezione delle superficie rigate.

Riprendiamo ora a considerare gli elementi lineari (19). Siccome $a_{222} \neq 0$ e $a'_{222} \neq 0$ (essendosi escluse le quadriche per le quali il problema non si pone) possiamo porre la $f(u, v, v')$ relativa al nostro problema nella forma

$$f = \frac{v'^2}{2a + bv'} \tag{32}$$

a (e così a') è $\neq 0$ essendosi escluse le sviluppabili. Si ha:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{v'^2}{(bv' + 2a)^2}(b_v v' + 2a_v); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial v'^2} = \frac{8a^2}{(bv' + 2a)^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v'} = -\frac{v'}{(bv' + 2a)^3}(bb_u v'^2 + 6ab_u v' + 8aa_u)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial v \partial v'} = -\frac{v'}{(bv' + 2a)^3}(bb_v v'^2 + 6ab_v v' + 8aa_v)$$

quindi l'equazione delle geodetiche proiettive si scrive:

$$(33)\qquad v'' = \left[\frac{1}{2}\frac{b}{a}\left(\frac{b_v}{b} - \frac{1}{2}\frac{a_v}{a}\right) + \frac{1}{8}\frac{b^2}{a^2}\frac{b_u}{b}\right] v'^3 + \frac{1}{4}\left(3\frac{b}{a}\frac{b_u}{b} + 2\frac{a_v}{a}\right) v'^2 + \frac{a_u}{a} v'.$$

Disponiamo ora delle linee $v(du = 0)$, la cui scelta è ancora arbitraria, prendendole come il sistema di asintotiche curvilinee sopra una delle due superficie, per es. sulla seconda sicchè $b' = 0$.

Se ad esse corrispondono le asintotiche curvilinee sull'altra si ha $b = 0$ e si ha il solito caso banale.

Nell'ipotesi opposta (che *non* si corrispondano le asintotiche curvilinee) poniamo l'elemento lineare della seconda superficie nella forma

$$(34)\qquad \frac{v'^2}{\rho} du\,;$$

l'equazione delle sue geodetiche proiettive è

$$(35)\qquad v'' = \frac{1}{2}\frac{\rho_v}{\rho} v'^2 + \frac{\rho_u}{\rho} v'$$

Dal confronto fra (33) e (35) segue (essendo $b \neq 0$):

$$(36)\qquad \frac{\partial \log a}{\partial u} = \frac{\partial \log \rho}{\partial u}$$

$$(37)\qquad \frac{3}{2}\frac{b}{a}\frac{\partial \log b}{\partial u} + \frac{\partial \log (a/\rho)}{\partial v} = 0$$

$$(38)\qquad \frac{\partial \log b}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log a}{\partial v} + \frac{1}{4}\frac{b}{a}\frac{\partial \log b}{\partial u} = 0.$$

Con integrazioni immediate si ha

$$(39)\qquad a = \rho e^{3\mu}, \quad b = \sqrt{\rho}\, e^{2\mu+\theta}$$

ove $\theta = \theta(u)$, $\mu = \mu(v)$ sono legate a ρ dall'equazione

$$(40)\qquad \frac{1}{2}\frac{e^{\theta-\mu}}{\sqrt{\rho}}\left(\frac{\partial \log \sqrt{\rho}}{\partial u} + \theta'\right) = -\mu'$$

ovvero, posto $\theta(u) = \log h(u)$

$$(41)\qquad h^2 \frac{\partial \log h\sqrt{\rho}}{\partial u} = -2h\sqrt{\rho}\,\frac{de^{\mu}}{dv}$$

ossia, posto ancora $2h\sqrt{\rho}\dfrac{de^{\mu}}{dv}=\sigma$

$$\frac{h^2}{\sigma}\frac{\partial \log\sigma}{\partial u}=-1. \tag{42}$$

Questa s' integra subito e se ne trae

$$\frac{1}{2h\sqrt{\rho}}=\frac{de^{\mu}}{dv}\int\frac{du}{h^2(u)}+\nu(v) \tag{43}$$

ove ν è simbolo di funzione arbitraria.

Cambiamo ora i parametri u e v in modo da ottenere espressioni più semplici. Posto

$$dU=du/h^2(u) \tag{44}$$

vediamo come si alterano ρ, a, b. Indicandone con $\bar\rho$, $\bar a$, $\bar b$ le nuove espressioni deve aversi

$$\frac{dv^2}{\rho du}=\frac{dv^2}{\bar\rho dU};\quad \frac{dv^2}{2adu+bdv}=\frac{dv^2}{2\bar a dU+bdv}. \tag{45}$$

da cui $\bar\rho=h^2\rho$, $\bar a=h^2a$, $\bar b=b$, sicchè

$$\begin{cases} \bar a=\bar\rho e^{3\mu}; \quad \bar b=\sqrt{\bar\rho}\,e^{2\mu} \\ \dfrac{1}{2\sqrt{\bar\rho}}=U\dfrac{de^{\mu}}{dv}+\nu(v). \end{cases} \tag{46}$$

Cambiamo poi v in $V=e^{\mu(v)}$; $dV=\dfrac{de^{\mu}}{dv}dv=\lambda dv$. Indicate con R, A, B le nuove espressioni di $\bar\rho$, $\bar a$, $\bar b$ deve aversi

$$\frac{dv^2}{\bar\rho dU}=\frac{dV^2}{RdU};\quad \frac{dv^2}{2\bar a dU+\bar b dv}=\frac{dV^2}{2AdU+BdV}$$

da cui $R=\lambda^2\bar\rho$, $A=\lambda^2\bar a$, $B=\lambda\bar b$, cioè per le (46)

$$\begin{cases} A=RV^3, \quad B=\sqrt{R}V^2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{R}}=U+\dfrac{1}{2}M(V) \end{cases} \tag{47}$$

ove $M(V)$ è simbolo di funzione arbitraria. Gli elementi lineari proiettivi corrispondenti sono (ritornando a scrivere u, v)

$$[2u + M(v)]^2 v'^2 du; \quad \frac{[2u + M(v)]^2 v'^2 du}{2v^3 + [2u + M(v)] v^2 v'}$$

ovvero

$$[u + N(v)]^2 v'^2 du; \quad \frac{[u + N(v)]^2 v'^2 du}{v^3 + [u + N(v)] v^2 v'} \tag{48}$$

ove $N(v)$ indica funzione arbitraria della sola v.

Le linee $dv = 0$ sono per tutt' e due le superficie le generatrici rettilinee (nelle quali si raccolgono i tre sistemi di linee di Darboux); le asintotiche curvilinee sono per il primo degli elementi (48) le linee $du = 0$ e per il secondo le linee integrali di $v'(u + N) + v = 0$, rappresentate da

$$uv + F(v) = \text{cost.} \tag{40}$$

ove $F(v)$ è una qualunque primitiva di $N(v)(dF = Ndv)$.

Le geodetiche proiettive, integrali di

$$(u + N)v'' + N'v'^2 + 2v' = 0 \tag{50}$$

sono rappresentate in termini finiti da

$$uv + F(v) = au + b \tag{51}$$

(a e b costanti); di esse fan parte sia le generatrici rettilinee sia le asintotiche curvilinee delle due superficie (cioè, considerando tutto sopra una sola superficie, le sue asintotiche e le immagini delle asintotiche dell' altra).

Nel piano cartesiano rappresentativo (u, v) esse si ottengono tutte imprimendo alle immagini delle asintotiche (49) una traslazione parallela all' asse u.

Dalla (50) o dalla (51) segue che: *le geodetiche proiettive di una qualsiasi delle superficie in esame uscenti da un punto tagliano due generatrici rettilinee qualsiansi della superficie in punteggiate proiettive.*

VI. **Costruzione di modelli per i casi eccezionali.**

Proponiamoci ora l' effettiva costruzione di superficie che presentino le circostanze eccezionali segnalate relativamente alla rappresentazione geodetico-proiettiva. Una di queste superficie si dirà un modello del caso a cui si riferisce.

Se la superficie non è rigata, essendo necessariamente a linee canoniche indeterminate, il modello è già noto: esso è la superficie cubica $xyz = 1$

sulla quale tutte le altre superficie corrispondenti a questo caso sono proiettivamente applicabili ([12]).

Diversamente vanno le cose per le rigate eccezionali di elemento lineare

$$[u + N(v)]^2 v'^2 du. \tag{52}$$

Per costruirne un modello occorre partire dalle equazioni differenziali alle quali soddisfano le coordinate proiettive omogenee x_i dei punti della rigata (omettendo l'indice i delle x)

$$\begin{aligned} x_{uu} &= Ax_u + Bx \\ x_{vv} &= Cx_u + Dx_v + Ex \end{aligned} \tag{53}$$

(A,... E sono funzioni di u, v indipendenti da i); esse esprimono che le linee $u(dv = 0)$ sono generatrici rettilinee e le $v(du = 0)$ sono le asintotiche curvilinee della rigata.

Le equazioni (53) si potrebbero rendere più semplici con una scelta opportuna dei parametri u, v; ma non sappiamo a priori se ciò sia lecito, perchè la scelta di tali parametri è già stata fatta in modo ben determinato (a meno di costanti additive) per ridurre l'elemento lineare proiettivo alla forma (52).

Se poniamo per brevità $\Delta = | x, x_u, x_v, x_{uv} |$ e inoltre (con FUBINI)

$$\begin{aligned} F_2 &= x, x_u, x_v, d^2x | \\ F_3 &= | x, x_u, x_v, d^3x | - \frac{3}{2} dF_2 + \frac{3}{4} d \log \Delta \end{aligned} \tag{54}$$

si ha per le (53)

$$F_2 = 2\Delta du dv; \quad F_3 = \Delta C dv; \quad F_3/F_2 = \frac{C}{2} v'^2 du; \tag{55}$$

quindi per avere una rigata con l'elemento lineare assegnato si possono scegliere arbitrariamente A, B, D, E col solo vincolo di soddisfare alle condizioni d'integrabilità delle (53).

Intanto può farsi $A = B = 0$ e con ciò

$$x_i(u, v) = \alpha_i(v) + u\beta_i(v); \tag{56}$$

può prendersi inoltre $D = 0$ e dal confronto fra (52) e (55) risulta

$$C = 2[u + N(v)]^2 \tag{57}$$

([12]) Cfr. la mia Nota: *Contributo alla geometria* ecc., già citata in ([8]), n. 10.

mentre E dev'esser tale da soddisfare alle condizioni d'integrabilità

$$E_{uu}=0; \quad C_{uu}+2E_u=0 \tag{58}$$

da cui

$$E=-2[u+H(v)] \tag{59}$$

ove $H(v)$ è ancora simbolo di funzione arbitraria.

Notiamo esplicitamente che qualunque sia $H(v)$ tutte le rigate soddisfacenti al sistema

$$\begin{cases} x_{uu}=0 \\ x_{vv}=2[u+N(v)]^2 x_u-2[u+H(v)]x \end{cases} \tag{60}$$

hanno lo stesso elemento lineare proiettivo (52); alterando i coefficienti di x_u e di x per uno stesso fattore costante anche l'elemento lineare viene alterato per lo stesso fattore.

Sicchè se vogliamo costruire un modello delle nostre rigate possiamo senza restrizione prendere $H(v)=N(v)$. Con questa posizione, portando le (56) in $(60)_2$ ed omettendo l'indice i delle α_i e β_i si ha

$$\begin{cases} \alpha''=2N(N\beta-\alpha) \\ \beta''=2(N\beta-\alpha). \end{cases} \tag{61}$$

L'integrazione di questo sistema, data $N(v)$, fornisce le α_i e β_i da sostituire nelle (56) per avere le equazioni parametriche del modello. Al sistema (61) può sostituirsi l'unica equazione

$$\beta^{\text{IV}}-4N'\beta'-2N''\beta=0 \tag{62}$$

integrata la quale si calcola $\alpha=N\beta-\beta''/2$. Sicchè:

La costruzione del modello cercato dipende dall'integrazione di una equazione differenziale ordinaria (62) *del quart' ordine.*

Ancora qualche rilievo. Il significato geometrico di $N(v)$ risulta dal fatto che $u+N(v)=0$ rappresenta la *linea flecnodale* della rigata. Quanto al significato di v (quello di u è evidente) esso risulta da ciò che la forma intrinseca F_5 ([13]) dell'asintotica $u=\infty$ (cioè descritta dal punto $x_i=\beta_i$) è identicamente nulla (come risulta dalla (62)); fatta questa scelta di v il significato geometrico del sistema (61) è il seguente: si consideri una generatrice della rigata e di ogni suo punto si prenda il derivato secondo rispetto al-

([13]) Cfr. le *Lezioni*, già citate in ([2]), di FUBINI e CECH, cap. I, § 6, *C*). Un altro significato di $N(v)$ si avrebbe introducendo l'*arco proiettivo* della asintotica $u=\infty$; cfr. ibidem, § 7.

l'asintotica che vi passa (cioè il punto x_{vv}); tutti questi punti coincidono nel flecnodo della generatrice. In altri termini:

Il luogo dei punti derivati secondi di quelli della rigata rispetto alle asintotiche curvilinee è la linea flecnodale della rigata.

Particolarmente semplice è il caso $N =$ costante. Si può anzi (spostando l'origine delle u) come mostra la (52) supporre in tal caso $N = 0$; allora $\beta^{IV} = 0$ ed $\alpha = -\beta''/2$. Disponendo di un'omografia si possono prendere

$$\beta_1 = v^3,\ \beta_2 = v^2,\ \beta_3 = 1,\ \beta_4 = v; \quad \alpha_1 = -3v,\ \alpha_2 = -1,\ \alpha_3 = 0,\ \alpha_4 = 0;$$

le equazioni parametriche della superficie sono

$$\begin{aligned} x &= -3v + uv^3 \\ y &= -1 + uv^2 \\ z &= u \\ t &= uv \end{aligned}$$

o, in coordinate non omogenee ($t = 1$), $(xz - 3y)z + 2 = 0$.

Tutte le asintotiche sono cubiche sghembe, ad eccezione della $u = 0$ tangente ad esse nello stesso punto; esse risultano punteggiate proiettivamente se si fanno corrispondere su di esse i punti nei quali i piani osculatori vanno a passare per uno stesso punto della direttrice rettilinea.

Le geodetiche proiettive sono pure cubiche sghembe rappresentate sulla rigata dalla (51), $uv = au + b$, quindi nello spazio dalle equazioni parametriche

$$\begin{aligned} x &= v^2 - 3(v - a)/b \\ y &= v - (v - a)/vb \\ z &= 1/v. \end{aligned}$$

Esse appartengono perciò ai coni di equazione $(by - az + 1)z = b$, dei quali è visibile il significato geometrico. Sicchè la costruzione della rigata ([14]) e delle sue geodetiche proiettive può farsi così:

Data una cubica sghemba C *ed un suo punto* O *con la tangente* t, *per avere la rigata basta congiungere un punto* P *variabile su* C *col punto ove il piano osculatore in* P *incontra* t*; le geodetiche proiettive sono segate sulla superficie dai coni quadrici osculatori lungo* t *al cono che da* O *proietta* C.

([14]) Che è necessariamente la rigata cubica di CAYLEY perchè fra le asintotiche $u =$ cost. non v'è che la $u = 0$ che sia rettilinea.

Ricerche sopra il numero delle classi di forme aritmetiche di Hermite.

Memoria 1ª di A. M. BEDARIDA (a Genova).

SOMMARIO — Introduzione — Parte I. *Forme dèfinite ed indefinite di Hermite* - § 1. Equivalenza delle sostituzioni aritmetiche a modulo indecomponibile - § 2. Il sistema completo normale di sostituzioni applicato alle forme di Hermite - § 3. Continuazione - § 4. Osservazione fondamentale — Parte II. *Forme definite di Hermite* - § 5. Le forme definite di Hermite nello spazio non euclideo - § 6. I gruppi automorfi aritmetici delle forme definite di Hermite — Parte III. *Relazioni sopra il numero delle classi di forme definite di Hermite* - § 7. I valori del numero n per le forme definite di Hermite - § 8. Forme definite di Hermite primitive di prima specie - § 9. Forme definite di Hermite primitive di seconda specie.

INTRODUZIONE

1. Cenni storici. — GAUSS, nelle sue mirabili scoperte sopra le forme binarie quadratiche a coefficienti e variabili interi ordinari, pose la ricerca della determinazione del numero delle classi, in cui si distribuiscono tali forme, aventi il medesimo determinante. Soltanto con la pubblicazione delle sue opere postume si vide che egli aveva esaurito completamente questa ricerca, per una via del tutto analoga a quella seguita da DIRICHLET, che fu il primo a renderla nota.

Questi profondi studi sono stati sviluppati coi mezzi che offre l'Aritmetica analitica, cioè di quel ramo dell'alta Teoria dei Numeri che procede con le teorie dell'Algebra ed in generale, dell'Analisi.

I procedimenti di Aritmetica pura non sono sufficienti, almeno fino ad oggi, per affrontare tale ricerca. Con questi mezzi, infatti, si giunge fino a determinare le relazioni tra i numeri delle classi, quando i determinanti differiscono per un fattore quadrato; e, precisamente, GAUSS le stabilì ricorrendo alla teoria di composizione delle forme quadratiche; il LIPSCHITZ (1), invece,

(1) LIPSCHITZ: *Einige Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen.* Crelle's Journal, 53 Bd.

le stabili, con procedimenti totalmente diversi, che poi estese (²) alle forme binarie quadratiche a coefficienti e variabili interi del corpo $K(\sqrt{-1})$ (campo di GAUSS), ossia alle forme dette di DIRICHLET. Le considerazioni del LIPSCHITZ sono fondate sopra la proprietà che trasformando una forma quadratica con una sostituzione lineare intera ed omogenea a modulo m, il determinante della nuova forma è il prodotto di m^2, per il determinante della prima forma.

Noi ci siamo proposti di applicare i procedimenti del LIPSCHITZ alle forme di HERMITE, cioè alle forme del tipo (forme a variabili coniugate):

$$f \equiv (a,\ b,\ c) \equiv axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0 \tag{1}$$

in cui a e c sono interi razionali; b e b_0 interi coniugati in un corpo quadratico immaginario; x, y le variabili, x_0, y_0 le loro coniugate in tale corpo (³). In due Note preventive (⁴) noi abbiamo già fatto conoscere i risultati nel caso che le forme (1) appartengano al corpo $K(\sqrt{-1})$.

2. Generalità. — L'espressione $\Delta = bb_0 - ac$ è il determinante delle forme (1): se $\Delta < 0$ è detta *definita* (positiva o negativa); se $\Delta > 0$ la forma è detta invece *indefinita.*

Se $K(\sqrt{-d})$ è il corpo quadratico immaginario che consideriamo (d intero, razionale, positivo, privo di fattori quadrati), il coefficiente b delle forme (1) sarà $b = b_1 + b_2\sqrt{-d}$ se $d \not\equiv -1 \pmod 4$; se $d \equiv -1 \pmod 4$ potrà anche essere $b = b_1 + b_2 \dfrac{1+\sqrt{-d}}{2}$, essendo b_1 e b_2 interi razionali ed in quest'ultimo caso, con $b_2 \equiv 1 \pmod 2$.

Le forme che consideriamo sono *primitive,* cioè gli interi razionali a, b_1, b_2 e c saranno primi tra loro. Occorrerà distinguere le forme primitive in: *primitive di prima specie,* se anche gli interi a, $2b_1$, $2b_2$, c sono primi tra loro: in *primitive di seconda specie,* se questi numeri non sono primi tra loro (quindi come massimo comun divisore hanno il numero 2).

Le forme primitive di prima specie esistono qualunque sia il valore del determinante Δ; ad es. si ha la forma principale $(1, 0, -\Delta)$. Notiamo le condizioni sotto le quali esistono le forme primitive di seconda specie. Gli

---

(²) LIPSCHITZ: *Zür Theorie der quadratischen Formen.* Crelle's Journal, 54 Bd.

(³) HERMITE: *Oeuvres,* tome I, pag. 235 e segg.

(⁴) BEDARIDA: *Sopra il numero delle classi di forme aritmetiche definite di Hermite.* Rend. Acc. Lincei, 1921, 2° semestre.

interi razionali b_1 e b_2 non possono essere entrambi pari e:

sia $d \equiv 1 \pmod{4}$ deve aversi $\Delta \equiv 1, 2, \pmod{4}$

» $d \equiv 2 \pmod{4}$ » » $\Delta \equiv 1, 2, 3 \pmod{4}$

» $d \equiv 3 \pmod{4}$ se $b = b_1 + b_2 \sqrt{-d}$ deve aversi $\Delta \equiv 0, 1, 3 \pmod{4}$ e se $b = b_1 + b_2 \dfrac{1+\sqrt{-d}}{2}$, ($b_2 \equiv 1 \pmod{2}$) oltre ai valori di Δ che si hanno per b della forma precedente, deve aversi $\Delta \equiv 2 \pmod{4}$ nell'ipotesi che sia anche $d \equiv -1 \pmod{16}$.

Viceversa: se $\Delta \equiv 1 \pmod{4}$, qualunque sia il numero d, si ha ad es. la forma primitiva di seconda specie a determinante $\Delta : f_1 \equiv \left(2, 1, \dfrac{1-\Delta}{2}\right)$; sia $d \equiv 1 \pmod{4}$ e $\Delta \equiv 2 \pmod{4}$, si ha ad es. $f_2 \equiv \left(2, 1+\sqrt{-d}, \dfrac{1+d-\Delta}{2}\right)$; sia $d \equiv 2 \pmod{4}$ e $\Delta \equiv 2, 3 \pmod{4}$, si hanno rispettivamente ad es. $f_3 \equiv \left(2, +\sqrt{d}, \dfrac{d-\Delta}{2}\right)$ ed f_2; sia $d \equiv 3 \pmod{4}$, se $\Delta \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$ (notando che $\Delta \equiv 2 \pmod{4}$ quando sia $d \equiv -1 \pmod{16}$), si hanno, rispettivamente, ad es.: f_2, f_1, $f_4 \equiv$ $\equiv \left(2, 1+\dfrac{1+\sqrt{-d}}{2}, 1+\dfrac{1+d}{8}-\dfrac{\Delta}{2}\right)$ ed f_3. Concludendo: *Le forme di Hermite, appartenenti ad un corpo quadratico immaginario* $\mathrm{K}(\sqrt{-\mathrm{d}})$, *primitive di prima specie, esistono qualunque sia il valore del determinante* Δ; *altrettanto accade per le forme primitive di seconda specie se* $\mathrm{d} \equiv -1 \pmod{16}$; *se* $\mathrm{d} \equiv 3 \pmod{4}$ *e* $\mathrm{d} \not\equiv -1 \pmod{16}$, *queste forme esistono soltanto se* $\Delta \equiv 0, 1, 3 \pmod{4}$; *se* $\mathrm{d} \equiv 1 \pmod{4}$, *queste forme esistono soltanto se* $\Delta \equiv 1, 2 \pmod{4}$; *se* $\mathrm{d} \equiv 2 \pmod{4}$, *queste forme esistono, escluso il caso* $\Delta \equiv 0 \pmod{4}$.

Nel presente lavoro, i corpi quadratici immaginari a cui appartengono le forme di HERMITE, saranno privi di ideali secondari, cioè in essi vi è identità tra numero indecomponibile e numero primo.

È diviso in tre parti: nella prima le considerazioni svolte valgono tanto per le forme definite, quanto per le forme indefinite ed il corpo $K(\sqrt{-d})$ è generico; nella seconda e nella terza i nostri sviluppi si riferiscono esclusivamente alle forme definite, e il corpo $K(\sqrt{-d})$ è ancora, fin dove è possibile, generico e poi deve essere fissato e le ulteriori considerazioni sono relative ai corpi $K(\sqrt{-1})$ (campo di Gauss), $K(\sqrt{-2})$ e $K(\sqrt{-3})$ (campo di Jacobi-Eisenstein).

Come è noto, per le forme di Gauss e di Dirichlet, si è trovato che, quando i determinanti differiscono per un fattore quadrato, uno dei due numeri delle classi è sempre un divisore dell'altro; si ha cioè un'espressione monomia per il numero delle classi.

Per le forme definite di Hermite, appartenenti ai corpi $K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-2})$ e $K(\sqrt{-3})$ non si giunge alla medesima conclusione osservata per tali forme, ma, precisamente, indicando con $\Delta' = \Delta\mu\mu_0$ ove μ è un numero indecomponibile, se si tratta di forme definite di Hermite, *primitive di prima specie, il numero delle classi delle forme a determinante Δ' è una combinazione lineare, intera, omogenea, a coefficienti interi razionali, di due, oppure di tre, numeri delle classi di due, oppure di tre, ben determinati insiemi di classi di forme a determinante Δ, secondo che le forme appartengono ai corpi* $K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-2})$, *oppure al corpo* $K(\sqrt{-3})$; se si tratta invece di forme definite di Hermite, *primitive di seconda specie, si ha, in tutti e tre i corpi considerati, per il numero delle classi di forme a determinante Δ', la medesima (dal punto di vista algebrico) combinazione* osservata per le forme definite primitive di prima specie nel corpo $K(\sqrt{-3})$ (§§ 8, 9).

Queste relazioni si possono estendere al caso di un intero composto e si deducono da quelle relative ai numeri indecomponibili fattori di questo intero, ma sono meno semplici e di più perdono quell'omogeneità ora notata.

La ragione delle differenze di risultati tra le forme di Gauss, di Dirichlet e le forme di Hermite, riposa sul fatto che i procedimenti del Lipschitz sono intimamente legati alla considerazione del gruppo automorfo aritmetico delle forme, gruppo che per le forme di Gauss e di Dirichlet è perfettamente determinato dal determinante delle forme, mentre per le forme (definite) di Hermite, il determinante non definisce completamente il tipo del gruppo automorfo aritmetico.

Si noti che in questi nostri risultati, nuovi ed inattesi, si ha il punto in cui la Teoria delle forme di Hermite, si scosta di più dalla Teoria delle forme di Gauss e di Dirichlet.

Si è detto di una differenza di forma nei risultati tra le forme definite di Hermite, primitive di prima specie, appartenenti ai corpi $K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-2})$ e quelle della stessa specie, appartenenti al corpo $K(\sqrt{-3})$: questo fatto non è limitato a questi casi, ma assume, per le forme definite, primitive di prima specie, un carattere generale (§ 7 e § 9, *Osservazione*), precisamente, avviene come per i corpi $K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-2})$ (espressione binomia per il numero delle classi) in corpi $K(\sqrt{-d})$, ove $d \not\equiv -1 \pmod{4}$; come per il corpo $K(\sqrt{-3})$ (espressione trinomia per il numero delle classi) in corpi $K(\sqrt{-d})$, ove $d \equiv -1$ (mod. 4) ([5]). Per le forme definite di HERMITE, primitive di seconda specie, l'espressione algebrica (trinomia) si mantiene in altri corpi (§§ 7, 8, 9).

Naturalmente, entrando in campo la considerazione del gruppo automorfo aritmetico, bisognerà supporre che il corpo $K(\sqrt{-d})$ ove si considerano le forme, sia uno di quelli in cui è stato determinato, oppure è possibile determinare, il poliedro fondamentale del relativo gruppo di BIANCHI ([6]) (§§ 5, 6).

L'equivalenza delle forme di HERMITE, sarà in tutti questi studi, l'equivalenza aritmetica propria; cioè, quella rispetto al gruppo di sostituzioni: $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$ ove α, β, γ e δ sono interi del corpo $K(\sqrt{-d})$ che si considera, tali che $\alpha\delta - \beta\gamma = +1$.

La presente Memoria contiene una prima parte delle mie ricerche sopra le forme di HERMITE; il seguito, in parte già sviluppato, comprenderà altri lavori.

PARTE PRIMA

FORME DEFINITE ED INDEFINITE DI HERMITE

§ 1. Equivalenza delle sostituzioni aritmetiche a modulo indecomponibile.

Consideriamo un corpo quadratico immaginario $K(\sqrt{-d})$, privo di ideali secondari ([7]) (d intero, razionale, positivo e senza fattori, quadrati). Si assumerà sempre, nel seguito di queste ricerche, come base degli interi del corpo, quella formata da $[1, \theta]$, ove è

$$\theta = \sqrt{-d} \qquad \text{per} \quad d \not\equiv -1 \qquad (\text{mod. } 4)$$

$$\theta = \frac{1+\sqrt{-d}}{2} \qquad \text{»} \quad d \equiv -1 \qquad (\text{mod. } 4).$$

([5]) BIANCHI: *Geometrische Darstellung der Gruppen Linearer substitutionen mit ganzen complexen Coefficienten nebst Anwendungen auf die Zahlentheorie.* Math. Ann., 38 Bd.

([6]) BIANCHI: *Sui gruppi di sostituzioni lineari con coefficienti appartenenti a corpi quadratici immaginari.* Math. Ann., 40 Bd.

([7]) Quest'ipotesi sarà tacitamente mantenuta in tutto il presente lavoro. Noteremo che si dirà numero indecomponibile anzichè numero primo, quantunque, nei corpi che consideriamo, i due concetti coincidono: ciò viene fatto per uniformarci ad un lavoro successivo, in cui vengono considerati i corpi che hanno anche gli ideali secondari. (Cfr. Intr.).

Siano ora le sostituzioni lineari intere ed omogenee:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \alpha x' + \beta y' \\ y = \gamma x' + \delta y' \end{array}\right. \tag{1}$$

in cui α, β, γ e δ (primo, secondo, terzo e quarto coefficiente delle sostituzioni (1)) sono interi del corpo $K(\sqrt{-d})$, tali che $\alpha\delta - \beta\gamma = \mu$ ove μ è un intero indecomponibile in detto corpo. L'ideale (principale) (p) sarà primo.

Indicheremo le (1), simbolicamente, così:

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}.$$

Date due sostituzioni del tipo (1), che diremo *sostituzioni aritmetiche a modulo* μ:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}, \quad \Sigma_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ \gamma_1, & \delta_1 \end{pmatrix},$$

si dirà che Σ_1 è *equivalente* a Σ, quando esiste una sostituzione aritmetica a modulo $+1$:

$$\Sigma' = \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix}$$

per cui si abbia:

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 = \alpha\alpha' + \beta\gamma', & \beta_1 = \alpha\beta' + \beta\delta' \\ \gamma_1 = \gamma\alpha' + \delta\gamma', & \delta_1 = \gamma\beta' + \delta\delta'. \end{array} \tag{2}$$

Si scriverà:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ \gamma_1, & \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta' \end{pmatrix}. \tag{3}$$

L'equivalenza così definita delle sostituzioni (1) è reciproca e transitiva. Segue, che le infinite sostituzioni aritmetiche a modulo μ, si possono ripartire in tanti classi, ponendo in una medesima classe due sostituzioni allora ed allora soltanto che siano equivalenti tra di loro. Per le nostre ricerche è di fondamentale importanza il determinare il numero di questi classi.

A tal fine permettiamo il seguente teorema, al quale dovremo ricorrere anche in seguito.

Perchè due sostituzioni a modulo indecomponibile $\mu : \Sigma = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ *e* $\Sigma_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1, & \beta_1 \\ \gamma_1, & \delta_1 \end{pmatrix}$ *con i primi e terzi coefficienti primi tra loro, in* $K(\sqrt{-d})$, *siano equivalenti, occorre e basta che sia verificata la congruenza:*

$$\alpha\gamma_1 - \alpha_1\gamma \equiv 0 \pmod{\mu}. \tag{4}$$

Infatti: se Σ e Σ_1 sono equivalenti, il numero:

$$\gamma' = \frac{-\gamma\alpha_1 + \alpha\gamma_1}{\mu}$$

deve essere un intero, e quindi la (4) è verificata. Inversamente, da questa risulta γ' intero; inoltre lo è pure:

$$\alpha' = \frac{\delta\alpha_1 - \beta\gamma_1}{\mu},$$

poichè dalla $\alpha\delta - \beta\gamma \equiv 0$ (mod. μ) e dalla (4) si ha:

$$\alpha(\delta\alpha_1 - \beta\gamma_1) \equiv 0 \pmod{\mu},$$
$$\gamma(\delta\alpha_1 - \beta\gamma_1) \equiv 0 \pmod{\mu},$$

da cui, essendo primi tra loro gli ideali principali (α) e (γ), risulta $\delta\alpha_1 - \beta\gamma_1 \equiv 0$ (mod. μ). Così dall'ipotesi di α e γ primi tra loro, risultano interi β' e δ'; c. d. d.

Segue che due tali sostituzioni, con i medesimi primi e terzi coefficienti, sono equivalenti.

Ora, in ogni classe si potranno sempre considerare sostituzioni col primo e terzo coefficiente primi tra loro, poichè se in $\Sigma = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$, α e γ non sono tali, il loro massimo comun divisore non può essere che un ideale principale e avendosi $\alpha\delta - \beta\gamma = \mu$, il suo numero generatore è μ e perciò β e δ sono primi tra loro. Allora la sostituzione

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta, & -\alpha \\ \delta, & -\gamma \end{pmatrix}$$

è della classe di Σ ed ha il primo e terzo coefficiente primi tra di loro.

Sia dunque Σ una tale sostituzione: se $\gamma \equiv 0$ (mod. μ), nella sua classe esiste, per quanto si è detto, la sostituzione $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & \mu \end{pmatrix}$; se $\gamma \not\equiv 0$ (mod. μ), si potrà sempre trovare un numero t ed uno solo (mod. μ), tale che si abbia $\gamma t \equiv \alpha$ (mod. μ), ed allora nella classe di Σ esiste la sostituzione $\begin{pmatrix} t, & -\mu \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$.

Da quanto precede si può dunque concludere:

Il numero delle sostituzioni aritmetiche a modulo μ, *indecomponibile nel corpo* $K(\sqrt{-d})$, *è sempre finito ed ha per valore* $N(\mu)+1$ ([8]). *Si ha un sistema di rappresentanti della totalità di tali classi nelle* $N(\mu)+1$ *sostituzioni dei due tipi:*

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & \mu \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} t, & -\mu \\ 1, & 0 \end{pmatrix},$$

ove in S_2 *il coefficiente* t *percorre i* $N(\mu)$ *valori di un sistema completo di resti* (mod. μ).

Nel seguito s'intenderà che questo sistema di resti (mod. μ) sia fissato una volta per tutte.

Le sostituzioni S_1 ed S_2 si diranno *sostituzioni normali* ed il loro insieme si dirà: *il sistema completo normale di sostituzioni.*

Osserviamo, infine, che le due sostituzioni aritmetiche a modulo μ: $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -\alpha, & -\beta \\ -\gamma, & -\delta \end{pmatrix}$ sono sempre equivalenti, poichè si ha:

$$\begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha, & -\beta \\ -\gamma, & -\delta \end{pmatrix}.$$

§ 2. Il sistema completo normale di sostituzioni applicato alle forme di Hermite.

Se si applica ad una forma di HERMITE, appartenente ad un corpo $K(\sqrt{-d})$,

$$f \equiv axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0,$$

a determinante $\Delta = bb_0 - ac$, una sostituzione aritmetica a modulo m (m intero qualunque in $K(\sqrt{-d})$):

$$\begin{cases} x = \alpha x' + \beta y' \\ y = \gamma x' + \delta y, \end{cases}$$

si ottiene una nuova forma di HERMITE, appartenente al medesimo corpo,

$$f' \equiv a'x'x'_0 + b'x'y'_0 + b'_0x'_0y' + c'y'y'_0 \tag{1}$$

([8]) Con $N(\mu)$ si indica la norma del numero μ.

ove:

$$(2)\quad \begin{cases} a' = a\alpha\alpha_0 + b\alpha\gamma_0 + b_0\alpha_0\gamma + c\gamma\gamma_0 \\ b' = a\alpha\beta_0 + b\alpha\delta_0 + b_0\beta_0\gamma + c\gamma\delta_0 \\ b'_0 = a\alpha_0\beta + b_0\alpha_0\delta + b\beta\gamma_0 + c\gamma_0\delta \\ c' = a\beta\beta_0 + b\beta\delta_0 + b_0\beta_0\delta + c\delta\delta_0 \end{cases}$$

il cui determinante $\Delta' = b'b'_0 - a'c'$ vale: $\Delta' = \Delta m m_0$.

Si ha subito che: *applicando ad* f *sostituzioni aritmetiche equivalenti, si ottengono forme aritmeticamente equivalenti (cioè forme della medesima classe).*

Infatti, se si ha la (3) del paragrafo precedente, si potrà scrivere:

$$(3)\quad f\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1\\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha', \beta'\\ \gamma', \delta'\end{pmatrix}$$

e ponendo:

$$f\begin{pmatrix}\alpha, \beta\\ \gamma, \delta\end{pmatrix} = f_1 \quad \text{e} \quad f\begin{pmatrix}\alpha_1, \beta_1\\ \gamma_1, \delta_1\end{pmatrix} = f_2$$

la (3) offre:

$$f_2 = f_1\begin{pmatrix}\alpha', \beta'\\ \gamma', \delta'\end{pmatrix}.$$

C. v. d.

Sia la forma $f \equiv (a, b, c)$ *primitiva di prima* o *di seconda specie* (9), e consideriamo le inverse delle (2); si ha:

$$\begin{cases} N(m)a = a'\delta\delta_0 - b'\gamma_0\delta - b'_0\gamma\delta_0 + c'\gamma\gamma_0 \\ N(m)b = -a'\delta\beta_0 + b'\delta\alpha_0 + b'_0\beta_0\gamma - c'\gamma\alpha_0 \\ N(m)b_0 = -a'\delta_0\beta + b'\beta\gamma_0 + b'_0\delta_0\alpha - c'\alpha\gamma_0 \\ N(m)c = -a'\beta\beta_0 - b'\beta\alpha_0 - b'_0\beta\alpha_0 + c'\alpha\alpha_0. \end{cases}$$

Da queste relazioni risulta che il divisore di $f' \equiv (a', b', c')$, cioè il massimo comun divisore razionale degli interi razionali a', b'_1, b'_2, c', deve dividere $N(m)a$, $N(m)b$, $N(m)c$ e poichè f è primitiva, esso non potrà essere che un divisore di $N(m)$. Se f' è primitiva, essa sarà di prima o di seconda specie, se tale è la forma considerata f.

Sia K una classe di forme aritmetiche di Hermite, a determinante Δ e primitive di prima o di seconda specie e sia ancora $f \equiv (a, b, c)$ una sua forma.

(9) Nel seguito, quando, considereremo le forme primitive di seconda specie, intenderemo tacitamente che siano verificate le condizioni necessarie e sufficienti per la loro esistenza. (Cfr. Intr.).

Applichiamo ora ad f la totalità delle sostituzioni aritmetiche a modulo μ, essendo μ un intero indecomponibile in $K(\sqrt{-d})$: la totalità delle forme risultanti, corrispondentemente alle classi in cui si distribuiscono queste sostituzioni, saranno, per quanto si è veduto, ordinate nelle classi:

$$k'_1, \quad k'_2, \ldots \quad k'_{N(\mu)+1} \tag{4}$$

distinte oppure no e le cui forme hanno il determinante $\Delta' = \Delta\mu\mu_0$.

Ora, trasformando la f successivamente con le sostituzioni S_1 e S_2 del sistema completo normale a modulo μ (§ 1), si ottengono $N(\mu)+1$ forme f', che costituiscono un sistema di *rappresentanti* di tutte e sole le classi (4). L'equivalenza, oppure, la non equivalenza di alcune di queste forme, coincide col fatto che le (4) non sono tutte, oppure sono tutte distinte tra di loro.

Si tratta ora di studiare queste nuove forme f'.

I loro coefficienti a', b' e c' saranno dati, ordinatamente, dalle seguenti relazioni:

$$\alpha)\ \begin{cases} a' = a \\ b' = b\mu_0 \\ b'_0 = b_0\mu \\ c' = a\mu\mu_0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \beta)\ \begin{cases} a' = att_0 + bt + b_0t_0 + c \\ b' = -(at + b_0)\mu_0 \\ b'_0 = -(at_0 + b)\mu \\ c' = a\mu\mu_0 ; \end{cases}$$

ove t percorre il fissato sistema completo di resti (mod. μ).

Se la forma f è primitiva di prima specie, si potrà supporre, come è lecito, a primo con $N(\mu)$ ([10]); se è primitiva di seconda specie, si supporrà che $N(\mu)$

([10]) Si ha il teorema: *In ogni classe di forme di Hermite, appartenenti ad un corpo* $K(\sqrt{-d})$, *primitive di prima specie, esistono forme il cui primo coefficiente non appartiene ad un ideale primo* P, *fissato ad arbitrio (anche secondario).*

Noi ci limitiamo ad esporre la dimostrazione per il caso che l'ideale P sia principale, bastando questo per gli studi del presente lavoro. Osserviamo però che le considerazioni che seguono valgono e si estendono subito al caso che P sia un ideale secondario.

Indichiamo con p il numero primo coordinato all'ideale P: se $f \equiv (a, b, c)$ è una forma in cui sia $a \equiv 0$ (mod. p), ma $c \not\equiv 0$ (mod. p), applicandovi la sostituzione $\begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$ si ottiene l'equivalente $(c, -b_0, a)$ che soddisfa all'enunciato. Ora se $p = 2$ sarà necessariamente $c \not\equiv 0$ (mod. 2); se invece p è un altro numero primo e se anche $c \equiv 0$ (mod. p), si potrà trovare un intero α_1, per cui si abbia:

$$b\alpha_1 + b_0\alpha_{10} \not\equiv 0 \ (\text{mod. } p),$$

perchè, diversamente la forma f non sarebbe primitiva. Di qui segue subito il teorema.

sia dispari e poi ancora, come è lecito, a primo con $N(\mu)$ ([11]). Segue che gli ideali (a) e (μ) saranno primi tra loro.

La forma del tipo α) sarà allora sempre primitiva e di prima o di seconda specie, secondo che è tale la forma f.

Per esaminare le forme del tipo β), occorre distinguere i due casi secondo che l'intero indecomponibile p è razionale, oppure è complesso.

I). *Sia l'intero indecomponibile* μ, *razionale.*

Si ponga $\mu = p$, che supporremo per semplicità $\neq 2$. Notiamo che sarà $\left(\frac{-d}{p}\right) = -1$, perchè diversamente l'ideale principale (p) non sarebbe primo.

Il divisore delle forme del tipo β) non potrà essere, per quanto si è veduto in principio del paragrafo, che 1, p oppure p^2 e quindi affinchè queste forme siano primitive occorre e basta che t non soddisfi alla congruenza:

$$aa' = (at + b_0)(at_0 + b) - \Delta \equiv 0 \pmod{p}. \tag{5}$$

1°) Se $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0$, la (5) si riduce:

$$(at + b_0)(at_0 + b) \equiv 0 \pmod{p}, \tag{6}$$

e poichè l'ideale (p) è primo, da questa si ottiene la congruenza lineare:

$$at + b_0 \equiv 0 \pmod{p} \tag{7}$$

che ammette, nel corpo $K(\sqrt{-d})$, una ed una sola soluzione (mod. p). Viceversa, se t è la soluzione della (7), tale soluzione verifica pure la (6). Si ha dunque: *la congruenza* (5), *se* $\left(\frac{\Delta}{\mathrm{p}}\right) = 0$, *ammette una ed una sola soluzione* (*mod.* p).

2°) Se $\left(\frac{\Delta}{p}\right) \neq 0$, consideriamo la congruenza:

$$XX_0 \equiv \Delta \pmod{p}, \tag{8}$$

([11]) Sarà $N(\mu)$ un numero primo razionale e se è il numero 2, nel caso che f sia primitivo di seconda specie, conduce a svolgere particolari considerazioni in questo paragrafo e nel seguito che per ragioni di brevità omettiamo. Si ha il teorema che si dimostra come il precedente: *In ogni classe di forme di Hermite, appartenenti ad un corpo* $\mathrm{K}(\sqrt{-\mathrm{d}})$, *primitivi di seconda specie, esistono forme il cui primo coefficiente non appartenga ad un ideale primo assegnato ad arbitrio (anche secondario), il cui numero primo razionale coordinato sia diverso dal numero* 2.

che in $K(\sqrt{-d})$ ha $p+1$ soluzioni incongrue ([12]) (mod. p). Ad una soluzione della (8) corrisponde uno ed un sol valore di t (mod. p), soluzione della congruenza:

(9) $$at+b_0 \equiv X \quad (\text{mod. } p)$$

che verifica la (5). Così, la verifica il valore di t (mod. p), soluzione di quest' altra:

(10) $$at+b_0 \equiv X_0 \quad (\text{mod. } p).$$

Inversamente dalla (9) e (10) si hanno, per la (5), soluzioni per la (8).

Ora, le (9) e (10) offrono lo stesso valore di t (mod. p) quando sia $X \equiv X_0$ (mod. p), cioè quando X soddisfi alla congruenza quadratica:

(11) $$x^2 \equiv \Delta \quad (\text{mod. } p)$$

che, nel corpo $K(\sqrt{-d})$, è sempre possibile, con due soluzioni incongrue (mod. p) ([13]).

Se X è una soluzione della (11), sarà $X \equiv X_0$ (mod. p) oppure $X \equiv -X_0$ (mod. p) secondo che è $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1$ oppure $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1$. Si ha dunque: *la congruenza* (5), *se* $\left(\frac{\Delta}{p}\right) \neq 0$, *ha* 2p *oppure* $2p+2$ *soluzioni incongrue* (*mod.* p) *secondo che è* $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1$ *oppure* $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1$.

Alle soluzioni della (5) corrispondono altrettante forme del tipo β) non primitive e cioè, precisamente, come si deduce osservando le relazioni β): tutte a divisore p, escluso il caso di $\Delta \equiv 0$ (mod. p^2) in cui se ne ha una sola ed a divisore p^2.

Abbiamo dunque il risultato:

Per $\left(\frac{-d}{p}\right) = -1$ ([14]), *delle* p^2+1 *forme che si ottengono dalla forma* f, *applicandovi le sostituzioni del sistema completo normale a modulo* p*;*

([12]) Cfr. HERMITE: op. cit., pag. 248 e seg.

([13]) Cfr. BIANCHI: *Lezioni sulla teoria dei numeri algebrici*, pag. 335-336.

([14]) I casi $\left(\frac{-d}{p}\right) = +1$, $\left(\frac{-d}{p}\right) = 0$ verranno considerati in un successivo lavoro: nel presente, poichè i corpi $K(\sqrt{-d})$ a cui appartengono le forme di HERMITE non posseggono ideali secondari, e p è indecomponibile in $K(\sqrt{-d})$, non può aversi che $\left(\frac{-d}{p}\right) = -1$.

se $\left(\frac{\Delta}{\mathrm{p}}\right) = 0$, *una è a divisore* p *oppure* p^2, *secondo che è* $\Delta \not\equiv 0$ (mod. p^2) *oppure* $\Delta \equiv 0$ (mod. p^2) *e le rimanenti* p^2 *sono primitive di prima o di seconda specie, se tale è la forma* f*;*

se $\left(\frac{\Delta}{\mathrm{p}}\right) = +1$, *se ne hanno* 2p *a divisore* p *e le rimanenti* $(\mathrm{p}-1)^2$ *sono primitive di prima o di seconda specie, se tale è la forma* f*;*

se $\left(\frac{\Delta}{\mathrm{p}}\right) = -1$, *se ne hanno* $2\mathrm{p}+2$ *a divisore* p *e le rimanenti* $(\mathrm{p}-1)^2-2$, *sono primitive di prima o di seconda specie, se tale è la forma* f.

II). *Sia l'intero indecomponibile* μ, *complesso.*

Si ponga $\mu = \pi$ e $N(\pi) = q$, sarà q un numero primo razionale.

Il divisore delle forme del tipo β) sarà 1 oppure q. Ora, perchè una di queste forme non sia primitiva, occorre che b' sia divisibile per q, quindi deve essere:

$$at + b_0 \equiv 0 \qquad \text{(mod. } \pi).$$

Sia t la soluzione di questa congruenza, che si può ritenere razionale; è allora:

$$at + b \equiv 0 \qquad \text{(mod. } \pi_0),$$

quindi b'_0 è pure divisibile per q. Basterà ora vedere se $a' \equiv 0$ (mod. q), ossia se è:

$$aa' = (at + b_0)(at + b) - \Delta \equiv 0 \qquad \text{(mod. } q).$$

Per questo occorre a basta che sia $\Delta \equiv 0$ (mod. q). Si conclude dunque col risultato:

Se π *è un numero indecomponibile, in* $\mathrm{K}(\sqrt{-\mathrm{d}})$, *le* $\mathrm{q}+1$ $(\mathrm{N}(\pi) = \mathrm{q})$ *forme che si ottengono, applicando alla forma* f, *le* $\mathrm{q}+1$ *sostituzioni del sistema completo normale a modulo* π, *sono tutte primitive di prima o di seconda specie, se tale è la forma* f, *tranne quando sia* $\Delta \equiv 0$ (mod. q), *nel qual caso,* q *sono primitive di prima o di seconda specie, se tale è la forma* f, *ed una è a divisore* q.

§ 3. **Continuazione.**

Trasformando una forma $f \equiv (a, b, c)$ di HERMITE, appartenente al corpo $K(\sqrt{-d})$, a determinante Δ, primitiva di prima o di seconda specie, con le sostituzioni del sistema completo normale a modulo μ considerato, si ottengono $N(\mu)+1$ forme di HERMITE, a determinante $\Delta' = \Delta\mu\mu_0$. Di queste, consideriamo quelle primitive, di prima o di seconda specie, se tale è la forma f, e siano:

(1) $$f'_1, \; f'_2, \dots, \; f'_m.$$

I diversi valori del numero m sono stati determinati nel paragrafo precedente, e notiamo, in modo esplicito, che tali valori *non dipendono che dal determinante* Δ *e dal numero indecomponibile* μ.

Andiamo ora a determinare il numero delle forme (1) non equivalenti tra di loro, ossia il numero delle classi in cui queste forme si distribuiscono. Indicheremo tale numero con n e sarà $n \leq m$.

Se

$$f'_j V = f'_i, \quad i \neq j,$$

ove V è una sostituzione aritmetica unimodulare e se

(2) $$fS_i = f'_i \quad \text{e} \quad fS_j = f'_j,$$

indicando S_i e S_j due sostituzioni normali a modulo μ (di classi diverse), si avrà:

$$f(S_j V) = f'_i$$

cioè, esiste una sostituzione aritmetica a modulo μ di classe diversa della classe della sostituzione S_i, che applicata ad f produce la forma f'_i.

Viceversa, se una sostituzione a modulo μ, Σ, non della classe di S_i è tale che:

(3) $$f\Sigma = f'_i,$$

allora esiste una forma f'_j fra le (1), equivalente ad f'_i, perchè ponendo $\Sigma = S_j U$, ove S_j è la sostituzione normale della classe di Σ ed U è una sostituzione aritmetica unimodulare, sarà appunto:

$$f(S_j U) = f'_j U = f'_i.$$

Si deduce intanto: *il numero delle forme* (1), *equivalenti ad una medesima forma* f'_i, *coincide col numero delle diverse classi di sostituzioni aritmetiche a modulo* μ, *contenenti sostituzioni aritmetiche, che applicate alla forma* f *producono la forma* f'_i.

Sia ora T una sostituzione del gruppo automorfo aritmetico della forma f: se vale la prima delle (2), si ha pure:

$$f(TS_i) = f'_i.$$

Viceversa, se si ha la (3), si potrà porre:

$$\Sigma = TS_i$$

ove T è una sostituzione del gruppo automorfo aritmetico di f. Infatti dalla

$$fS_i = f\Sigma$$

si deduce

$$f(S_i\Sigma^{-1}) = f,$$

ossia, la sostituzione $T = S_i\Sigma^{-1}$, unimodulare, applicata ad f, la riproduce.

Ora dico che essa è *aritmetica*, cioè a coefficienti interi del corpo $K(\sqrt{-d})$. Consideriamo i due tipi della sostituzione normale S_i: $\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & \mu\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}t, & -\mu\\ 1, & 0\end{pmatrix}$ e ponendo $\Sigma = \begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$, sarà rispettivamente

$$T \equiv \begin{pmatrix}\frac{\delta}{\mu}, & -\frac{\beta}{\mu}\\ -\gamma, & \alpha\end{pmatrix}$$

oppure

$$T \equiv \begin{pmatrix}t\frac{\delta}{\mu} + \gamma, & -t\frac{\beta}{\mu} = \alpha\\ \frac{\delta}{\mu}, & -\frac{\beta}{\mu}\end{pmatrix}$$

in cui è $\beta \equiv 0 \pmod{\mu}$ e $\delta \equiv 0 \pmod{\mu}$. Invero, se $f'_i \equiv (a', b', c')$, la (3) offre note relazioni, che si possono scrivere:

$$\begin{aligned}
a' &= (a\alpha_0 + b\gamma_0)\alpha + (b_0\alpha_0 + c\gamma_0)\gamma\\
b' &= (a\beta_0 + b\delta_0)\alpha + (b_0\beta_0 + c\delta_0)\gamma\\
b'_0 &= (a\alpha_0 + b\gamma_0)\beta + (b_0\alpha_0 + c\gamma_0)\delta\\
c' &= (a\beta_0 + b\delta_0)\beta + (b_0\beta_0 + c\delta_0)\delta
\end{aligned}$$

da cui: dalla prima e terza:

$$\text{(4)} \qquad \left\{\begin{aligned}
a\alpha_0 + b\gamma_0 &= \frac{a'\delta}{\mu} - \frac{b'_0\gamma}{\mu}\\
b_0\alpha_0 + c\gamma_0 &= \frac{b'_0\alpha}{\mu} - \frac{a'\beta}{\mu}
\end{aligned}\right.$$

e dalla seconda e quarta:

$$(5) \qquad \begin{cases} a\beta_0 + b\delta_0 = \dfrac{b'\delta}{\mu} - \dfrac{c'\gamma}{\mu} \\ b_0\beta_0 + c\delta_0 = \dfrac{c'\alpha}{\mu} - \dfrac{b'\beta}{\mu}. \end{cases}$$

Ora i coefficienti a', b' e c' hanno i valori dati dai sistemi α) e β) del paragrafo precedente, secondo il tipo della sostituzione normale S_i. Se μ è razionale $=p$, gli ideali principali (a') e (p) devono essere primi tra di loro, perchè, diversamente, sarebbe $a' \equiv 0 \pmod{p}$, e per le relazioni β) del paragrafo precedente, risulterebbe che la forma f' non è primitiva, contrariamente a quanto si suppone; onde dalle (4), essendo $b'_0 \equiv 0 \pmod{p}$, risulta che è $\beta \equiv 0 \pmod{p}$ e $\delta \equiv 0 \pmod{p}$. Se μ è complesso $=\pi$, si ha subito dalla (4), essendo $b'_0 \equiv 0 \pmod{\pi}$, la medesima conclusione se gli ideali (a') e (π) sono primi tra loro. Se questi due ideali non sono primi tra di loro, devono esserlo gli ideali (b') e (π), perchè diversamente, dalle relazioni β), risulterebbe che la forma f' non è primitiva; allora dalle (5), essendo $c' \equiv 0 \pmod{\pi}$, risulta $\beta \equiv 0 \pmod{\pi}$ e $\delta \equiv 0 \pmod{\pi}$. È quindi provato che la sostituzione T appartiene al gruppo automorfo aritmetico della forma f.

Si può dunque concludere con il seguente risultato che applicheremo in seguito:

Il numero delle forme (1), *equivalenti ad una medesima forma* f', *coincide col numero delle diverse classi in cui si distribuiscono le sostituzioni aritmetiche a modulo* μ *del tipo* $\mathrm{TS_i}$, *ove* T *percorre le sostituzioni del gruppo automorfo aritmetico della forma* f *ed* $\mathrm{S_i}$ *è la sostituzione normale che applicata ad* f, *produce la forma considerata* $\mathrm{f'_i}$.

Le considerazioni precedenti ci conducono all'esame del gruppo automorfo aritmetico di una forma di Hermite, appartenente ad un corpo quadratico immaginario generale $K(\sqrt{-d})$.

È noto [15], che le forme definite hanno un gruppo automorfo aritmetico finito e quelle indefinite, un gruppo infinito. Occorrerà dunque scindere il caso delle forme definite dal caso delle forme indefinite, ciò che noi faremo appunto, dopo il paragrafo seguente.

---

[15] Cfr. Bianchi: op. cit., Math. Ann.

§ 4. Osservazione fondamentale.

Dimostriamo ora la seguente proposizione:

Data una forma di Hermite, f' ≡ (a', b', c') *appartenente ad un corpo quadratico immaginario* $K(\sqrt{-d})$, *a determinante* $\Delta\mu\mu_0$, *ove* μ *è un numero indecomponibile in* $K(\sqrt{-d})$, *primitiva di prima o di seconda specie, esistono sempre delle forme di Hermite, appartenenti al medesimo corpo, a determinante* Δ, *rispettivamente primitive di prima o di seconda specie, che con sostituzioni aritmetiche a modulo* μ, *si trasformano nella forma considerata* f'. *Tali forme costituiscono una ed una sola classe.*

Per fissare le idee, supponiamo che si tratti di forme primitive di prima specie e che μ sia un numero primo razionale $= p$: negli altri casi si procede analogamente.

Applichiamo alla forma f' le sostituzioni del sistema completo normale a modulo p: si otterranno (§ 2) p^2+1 forme a determinante Δp^4, delle quali una sola è a divisore p^2 e quindi, applicando ad f' la totalità delle sostituzioni aritmetiche a modulo p, pensate ordinate in classi, si ha, corrispondentemente, una totalità di forme a determinante Δp^4, ordinate in classi, delle quali una sola è tale che le sue forme siano a divisore p^2. Sia $f \equiv (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ una forma di essa; si potrà scrivere:

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
\bar{a} &= a'\alpha\alpha_0 + b'\alpha\gamma_0 + b'_0\alpha_0\gamma + c\gamma\gamma_0 \\
\bar{b} &= a'\alpha\beta_0 + b'\alpha\delta_0 + b'_0\beta_0\gamma + c'\gamma\delta_0 \\
\bar{b}_0 &= a'\alpha_0\beta + b'_0\alpha_0\delta + b'_0\beta\gamma_0 + c'\gamma_0\delta \\
\bar{c} &= a'\beta\beta_0 + b'\beta\delta_0 + b'_0\beta_0\delta + c'\delta\delta
\end{aligned}
$$

ove α, β, γ e δ sono i coefficienti di una conveniente sostituzione aritmetica a modulo p: $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$.

Poniamo allora:

$$
a = \frac{\bar{a}}{p^2}, \quad b = \frac{\bar{b}}{p^2}, \quad b_0 = \frac{\bar{b}_0}{p^2}, \quad c = \frac{\bar{c}}{p^2}.
$$

La forma $f \equiv (a, b, c)$ sarà primitiva di prima specie ed a determinante Δ. Segue subito dalle (1) che la sostituzione aritmetica a modulo p, $\begin{pmatrix}\delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha\end{pmatrix}$ trasformerà f in f'.

Ora, tutte le forme della classe di f soddisfano alla proposizione enunciata, perchè se $f_1 \equiv (a_1, b_1, c_1)$ è una di queste, si deve avere:

$$(a_1, b_1, c_1)\begin{pmatrix}\alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix} = (a, b, c),$$

ove $\begin{pmatrix}\alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}$ è una sostituzione aritmetica unimodulare e quindi:

$$(a_1, b_1, c_1)\begin{pmatrix}\alpha', & \beta' \\ \gamma', & \delta'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta, & -\beta \\ -\gamma, & \alpha\end{pmatrix} = (a', b', c').$$

Inversamente se $f_1 \equiv (a_1, b_1, c_1)$ è una forma richiesta, cioè tale che sia:

$$(a_1, b_1, c_1)\begin{pmatrix}\alpha_1, & \beta_1 \\ \gamma_1, & \delta_1\end{pmatrix} = (a', b', c'),$$

indicando $\begin{pmatrix}\alpha_1, & \beta_1 \\ \gamma_1, & \delta_1\end{pmatrix}$ una sostituzione aritmetica il modulo p, conveniente, sarà:

$$(a', b', c')\begin{pmatrix}\delta_1, & -\beta_1 \\ -\gamma_1, & \alpha_1\end{pmatrix} = (p^2a, p^2b, p^2c)$$

e quest' ultima, a divisore p^2 ed a determinante Δp^4, è necessariamente equivalente alla forma $(a, \bar{b}, c)$, cioè alla forma (p^2a, p^2b, p^2c) e quindi sono tali le due forme (a_1, b_1, c_1) e (a, b, c), cioè la forma (a_1, b_1, c_1) è della classe di (a, b, c). Con ciò la proposizione enunciata è dimostrata pienamente.

Facciamo ora seguire l' osservazione seguente, che per le nostre ricerche, è di fondamentale importanza.

Indichiamo con $h(\Delta)$ e $h'(\Delta)$ il numero delle classi di forme di HERMITE a determinante Δ, rispettivamente primitive di prima e di seconda specie, e siano:

(2) $$K_1, \quad K_2, \quad K_3, \dots, K_r \qquad (r = h(\Delta),\ r = h'(\Delta)).$$

In ciascuna di esse si scelga una forma (qualunque) ed a questa applichiamo il sistema completo normale a modulo μ. Delle forme risultanti, a determinante $\Delta\mu\mu_0$, consideriamo rispettivamente quelle primitive di prima o di seconda specie, e non equivalenti tra di loro: *esse costituiscono un sistema completo di rappresentanti della totalità di classi di forme di Hermite, a determinante $\Delta\mu\mu_0$, rispettivamente primitive di prima o di seconda specie:*

(3) $$K_1', \quad K_2', \quad K_3', \dots, K'_{r'} \qquad (r' = h(\Delta\mu\mu_0),\ r' = h'(\Delta\mu\mu_0)).$$

Invero, se ciò non fosse, consideriamo nelle (3) una classe K'_i, che non abbia il rappresentante nelle classi considerate e sia f'_i una sua forma. Ora, per la proposizione dimostrata più sopra, esistono forme di una determinata classe, tra le classi (2), dalle quali, con sostituzioni aritmetiche a modulo μ, si ottiene appunto la forma f'_i.

Dunque, effettivamente, il sistema di forme ottenuto nel modo detto, costituisce un sistema completo di rappresentanti delle classi (3).

PARTE SECONDA

FORME DEFINITE DI HERMITE

§ 5. **Le forme definite di Hermite nello spazio non euclideo.**

Nel seguito del presente lavoro considereremo il caso delle forme di Hermite *definite* (il determinante $\Delta < 0$); che, per fissare le idee, saranno sempre *positive.*

Come si è veduto, le osservazioni finali del § 3 ci conducono a determinare il gruppo automorfo aritmetico di una forma definita di Hermite, in un corpo quadratico immaginario $K(\sqrt{-d})$.

Per questo, dovremo premettere alcune considerazioni geometriche intorno a queste forme, ed è quanto noi faremo in questo paragrafo ([16]).

Siano:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \tag{1}$$

le sostituzioni lineari sopra la variabile complessa z, ove i coefficienti α, β, γ, δ sono complessi tali che $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Indicheremo le (1), simbolicamente: $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$.

Ai due assi cartesiani ortogonali 0ξ, 0η del piano $\xi\eta$, ove immaginiamo distesi i valori $z = \xi + i\eta$, associamo un terzo asse 0ζ, ad essi ortogonale; e,

([16]) Cfr. Bianchi: op. cit., Math. Ann., 38, 40 Bd.

ad una sostituzione (1) facciamo corrispondere la trasformazione definita dalle relazioni [17]:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} z' &= \frac{\rho^2\alpha\gamma_0 + z\alpha\delta_0 + z_0\beta\gamma_0 + \beta\delta_0}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\gamma_0\delta + \delta\delta_0} \\ z'_0 &= \frac{\rho^2\alpha_0\gamma + z_0\alpha_0\delta + z\beta_0\gamma + \beta_0\delta}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\gamma_0\delta + \delta\delta_0} \\ \rho'^2 &= \frac{\rho^2\alpha\alpha_0 + z\alpha\beta_0 + z_0\alpha_0\beta + \beta\beta_0}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\gamma_0\delta + \delta\delta_0} \\ \zeta' &= \frac{\zeta}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\gamma_0\delta + \delta\delta_0} \end{aligned}\right.$$

ove: $\rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ e $\rho'^2 = \xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2$.

Le (2) trasportano le affinità piane circolari di Möbius (1) in trasformazioni conformi dello spazio in sè, e costituiscono un gruppo continuo. Per i punti del piano $\xi\eta$, le (2) si riducono alle (1); trasformano quindi questo piano in sè medesimo. Le trasformazioni (2), nel semispazio $\zeta > 0$, rappresentano i movimenti della ben nota metrica non euclidea a tre dimensioni.

Consideriamo ora nelle (1) i coefficienti α, β, γ e δ interi appartenenti al corpo $K(\sqrt{-d})$: il gruppo, discontinuo, corrispondente, sarà detto: *gruppo di Bianchi*, se $d \neq 1$; *gruppo di Picard*, se $d = 1$; e, sarà indicato con $G^{(d)}$.

Due punti del semispazio $\zeta > 0$ (spazio non euclideo), si diranno *equivalenti* rispetto ad un gruppo $G^{(d)}$, quando esiste, nel gruppo, una trasformazione che trasporti un punto nell'altro.

Sia una forma definita di Hermite, appartenente al corpo $K(\sqrt{-d})$:

$$f \equiv axx_0 + bxy_0 + b_0x_0y + cyy_0, \quad \Delta = bb_0 - ac < 0:$$

il punto (proprio) dello spazio non euclideo, avente per coordinate:

$$\xi = -\frac{b + b_0}{2a}, \quad \eta = \frac{b - b_0}{2ia}, \quad \zeta = \frac{\sqrt{-\Delta}}{a},$$

sarà detto *indice* della forma.

L'equivalenza aritmetica di tali forme è riportata con ciò all'equivalenza dei corrispondenti indici, rispetto al gruppo $G^{(d)}$ ed inversamente, in modo che:

---

(17) Cfr. Poincaré: *Mémoire sur les groupes Kleiniens*. Acta Math., T. 3.

se $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}$ è una sostituzione aritmetica unimodulare che trasforma una forma nell'altra, il movimento non euclideo, definito dalla sostituzione lineare $\begin{pmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{pmatrix}^{-1}$, trasforma l'indice della prima forma nell'indice dell'altra, ed inversamente.

§ 6. **I gruppi automorfi aritmetici delle forme definite di Hermite.**

Come conseguenza della considerazione finale del paragrafo precedente, risulta, che la ricerca del gruppo automorfo aritmetico di una forma definita di HERMITE, in un corpo $K(\sqrt{-d})$, viene condotta alla determinazione delle trasformazioni di POINCARÉ con α, β, γ e δ interi del corpo considerato, che lasciano fisso il corrispondente indice della forma.

Segue subito di qui, e da note proprietà dei gruppi di BIANCHI ([18]), che il gruppo automorfo aritmetico delle forme definite di HERMITE è sempre un gruppo finito.

Intanto si osservi che: *se l'indice di una forma definita, appartenente ad un corpo* $K(\sqrt{-d})$, *ove* $d \neq 1,\ \neq 3$, *è tale che sia* $\zeta > 1$, *il suo gruppo automorfo aritmetico è costituito unicamente dalle due sostituzioni:* (identità)

$$\begin{pmatrix}\pm 1, & 0 \\ 0, & \pm 1\end{pmatrix}.$$

Infatti, l'ultima delle trasformazioni (2) del paragrafo precedente, ponendo $\zeta' = \zeta$, ci offre:

$$\gamma\gamma_0 + \frac{1}{\zeta^2}(\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0) = \frac{1}{\zeta^2} < 1,$$

da cui, essendo γ intero, non potrà aversi che $\gamma = 0$. Allora risulta $\alpha\delta = 1$, e poichè il corpo $K(\sqrt{-d})$, per l'ipotesi fatta, non possiede altre unità oltre ± 1, sarà $\alpha = \delta = \pm 1$. Corrispondentemente dalla prima delle trasformazioni suddette, dovendo essere $z' = z$, sarà $\beta = 0$. C. d. d.

Per potere ora completare la ricerca del nostro gruppo bisognerà supporre che il corpo $K(\sqrt{-d})$ sia uno di quelli cui è stato determinato, oppure è pos-

([18]) Cfr. BIANCHI: op. cit., Math. Ann., 40 Bd., pag. 335-336.

sibile determinare, il poliedro fondamentale del gruppo di BIANCHI corrispondente $G^{(d)}$ (19).

Si potrà supporre, senza fare limitazioni, che l'indice della forma appartenga al poliedro fondamentale, cioè la forma sia *ridotta*.

Abbiamo subito: I) *se l'indice della forma è interno al poliedro fondamentale, il suo gruppo automorfo aritmetico è unicamente costituito dalle due sostituzioni: (identità)*

$$\begin{pmatrix} \pm 1, & 0 \\ 0, & \pm 1 \end{pmatrix}.$$

Potrà quindi aversi un gruppo automorfo più ampio soltanto quando l'indice della forma appartenga al contorno del poliedro fondamentale. E, per quanto si è ora veduto, se $d \neq 1$, $\neq 3$, dovrà inoltre essere situato non al disopra del piano $\zeta = 1$.

Un punto del contorno fisso, è necessariamente un punto di un asse di un movimento ellittico del gruppo $G^{(d)}$. L'asse è una retta od un circolo, ortogonale al piano limite $\zeta = 0$: se $d \neq 1$, $\neq 3$, non potrà essere che un circolo.

La ricerca del nostro gruppo automorfo aritmetico è quindi condotta alla determinazione dei movimenti ellittici del gruppo $G^{(d)}$, che portano il poliedro fondamentale in uno aderente della rete poliedrica in cui viene diviso lo spazio non euclideo. Ogni tale movimento darà una sostituzione per il gruppo automorfo, e le sostituzioni che nascono da questa con le successive potenze (20), daranno altrettante sostituzioni per tale gruppo.

Le considerazioni svolte in questa parte valgono anche se il corpo $K(\sqrt{-d})$ possiede anche ideali secondari. Per procedere innanzi, dovremo ora fissare il corpo a cui appartengono le nostre forme e quindi, nel seguito, il corpo $K(\sqrt{-d})$ sarà privo di ideali secondari e per il quale sia *noto* il poliedro fondamentale del gruppo $G^{(d)}$. Secondo le osservazioni del BIANCHI (21), il gruppo $G^{(d)}$, dopo l'ampliamento per riflessione, non avrà nessun *vertice singolare* sul piano $\zeta = 0$.

I corpi nei quali noi svilupperemo le ulteriori ricerche saranno: $K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-2})$ e $K(\sqrt{-3})$, che si trovano nelle condizioni ora specificate; notando però che, basandoci sopra i nostri sviluppi, nei quali non viene fissato il numero d, si potranno avere i risultati, oggetto dell'attuale studio, anche negli altri corpi che si trovino nelle condizioni suddette.

---

(19) Cfr. BIANCHI: op. cit., Math. Ann., 40 Bd., pag. 384 e seg.

(20) Ogni sostituzione ellittica di $G^{(d)}$ ha un periodo finito; cfr. BIANCHI: op. cit., Math. Ann., 40 Bd., pag. 353-354.

(21) Cfr. BIANCHI: op. cit., Math. Ann., 40 Bd., pag. 333.

Notiamo però, in generale, che nei vari casi studiati dal BIANCHI, si hanno le sostituzioni ellettiche:

$\begin{pmatrix} 0, & +1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}$ a periodo 2; il cui asse è l'intersezione tra la sfera di riflessione $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ ed il piano di riflessione $\xi = 0$;

$\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ +1, & +1 \end{pmatrix}$ a periodo 3, il cui asse è l'intersezione tra questa sfera ed il piano di riflessione $\xi = -\frac{1}{2}$;

$\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ +1, & -1 \end{pmatrix}$ a periodo 3, il cui asse è l'intersezione tra questa sfera ed il piano di riflessione $\xi = \frac{1}{2}$.

Si hanno, corrispondentemente, i casi seguenti per il gruppo automorfo aritmetico:

II) *se l'indice della forma è sull'arco intersezione tra la sfera* $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ *ed il piano* $\xi = 0$ *il gruppo è costituito dalle quattro sostituzioni:*

$$\begin{pmatrix} \pm 1, & 0, \\ 0, & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & \pm 1 \\ \mp 1, & 0 \end{pmatrix};$$

III) *se l'indice della forma è sull'arco intersezione tra la sfera* $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ *ed il piano* $\xi = -\frac{1}{2}$, *il gruppo è costituito dalle sei sostituzioni:*

$$\begin{pmatrix} \pm 1, & 0 \\ 0, & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 1, & \mp 1 \\ \mp 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & \pm 1 \\ \mp 1, & \mp 1 \end{pmatrix};$$

IV) *se l'indice della forma è sull'arco intersezione tra la sfera* $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ *ed il piano* $\xi = \frac{1}{2}$, *il gruppo è costituito dalle sei sostituzioni:*

$$\begin{pmatrix} \pm 1, & 0 \\ 0, & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mp 1, & \pm 1 \\ \mp 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1, & \mp 1 \end{pmatrix}.$$

Nel seguito, quando tratteremo delle forme definite da HERMITE, aventi questi gruppi automorfi aritmetici, non faremo alcuna ipotesi sopra il valore del numero d; soltanto, che il relativo corpo $K(\sqrt{-d})$, sia, come si è detto, privo di ideali secondari.

Consideriamo ora i tre corpi: $K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-2})$, $K(\sqrt{-3})$.

$K(\sqrt{-1})$.

Il poliedro fondamentale del gruppo di PICARD [22] è la regione dello spazio non euclideo esterno alla sfera di riflessione:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

e compresa tra i quattro piani di riflessione:

$$\xi = 0, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = -\frac{1}{2}, \quad \eta = +\frac{1}{2}.$$

I movimenti ellittici (i cui assi potranno essere qui anche delle rette perpendicolari al piano $\zeta = 0$), che fanno passare questa piramide in una aderente danno luogo ai seguenti casi per il gruppo automorfo aritmetico, oltre ai casi già notati precedentemente I), II) e IV):

1°) se l'indice della forma è sopra la retta $\xi = \eta = 0$, il gruppo è costituito dalle sostituzioni:

$$\begin{pmatrix} \pm 1, & 0 \\ 0, & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm i, & 0 \\ 0, & \mp i \end{pmatrix};$$

2°) se l'indice della forma è sopra la retta $\xi = \frac{1}{2}$, $\eta = 0$:

$$\begin{pmatrix} \pm 1, & 0 \\ 0, & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mp i, & \pm i \\ 0, & \pm i \end{pmatrix};$$

3°) se l'indice è sulla retta $\xi = 0$, $\eta = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} \pm 1, & 0 \\ 0, & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mp i, & \pm 1 \\ 0, & \pm i \end{pmatrix};$$

4°) se l'indice è sulla retta $\xi = \frac{1}{2}$, $\eta = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} \pm 1, & 0 \\ 0, & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mp i, & \pm 1 \pm i \\ 0, & \pm i \end{pmatrix};$$

---

[22] Cfr. BIANCHI: Math. Ann., 38 Bd., pag. 318.

5°) se l'indice è sulla retta $\xi = \eta = \frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} \pm 1, & 0 \\ 0, & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mp i, & \mp 1 \pm i \\ 0, & \pm i \end{pmatrix};$$

6°) se l'indice è sulla retta $\xi = 0$, $\eta = \frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} \pm 1, & 0 \\ 0, & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mp i, & \mp 1 \\ 0, & \pm i \end{pmatrix};$$

7°) se l'indice è sull'arco $\eta = -\frac{1}{2}$, $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} \pm 1, & 0 \\ 0, & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & \mp i \\ \mp i, & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mp 1, & \mp i \\ \mp i, & 0 \end{pmatrix};$$

8°) se l'indice è sull'arco $\eta = \frac{1}{2}$, $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} \pm 1, & 0 \\ 0, & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & \mp i \\ \mp i, & \mp 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \pm 1, & \mp i \\ \mp i, & 0 \end{pmatrix};$$

9°) se l'indice è sull'arco $\eta = 0$, $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$:

$$\begin{pmatrix} \pm 1, & 0 \\ 0, & \pm 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & \mp i \\ \mp i, & 0 \end{pmatrix}.$$

$K(\sqrt{-2})$.

Il poliedro fondamentale del gruppo di BIANCHI [23] corrispondente è la regione dello spazio non euclideo esterna alla sfera di riflessione:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

e compresa tra i quattro piani di riflessione:

$$\xi = -\frac{1}{2}, \quad \xi = \frac{1}{2}, \quad \eta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \eta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

Nel caso attuale, tenendo presente le osservazioni esposte in principio del

[23] Cfr. BIANCHI: Math. Ann., 40 Bd., pag. 363-364.

paragrafo, si vede subito, che per il gruppo automorfo aritmetico non vi sono altri casi oltre a: I), II), III) e IV).

$$K(\sqrt{-3}).$$

Il poliedro fondamentale del gruppo di BIANCHI $G^{(3)}$ è la regione dello spazio non euclideo costituita della piramide a base triangolare equilatera:

$$\xi=\frac{1}{2}, \quad \xi-\eta\sqrt{3}=0, \quad \xi+\eta\sqrt{3}=0,$$

dalla sua simmetrica rispetto alla retta $\xi-\eta\sqrt{3}=0$ ed esterno alla sfera di riflessione

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1 \text{ (24)}.$$

I movimenti ellittici in $G^{(3)}$ (i cui assi potranno essere anche delle rette ortogonali al piano $\zeta=0$) che fanno passare questo poliedro in uno aderente, danno luogo ai seguenti casi per il gruppo automorfo aritmetico, oltre ai casi I), II) e IV) già notati: $\left(\varepsilon \text{ rappresenta l'unità } \frac{1+\sqrt{-3}}{2}\right)$:

1°) se l'indice è situato sopra la retta $\xi=\eta=0$:

$$\begin{pmatrix}\pm 1, & 0\\ 0, & \pm 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\pm \varepsilon, & 0\\ 0, & \mp \varepsilon^2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\pm \varepsilon^2, & 0\\ 0, & \mp \varepsilon\end{pmatrix};$$

2°) se l'indice è situato sopra la retta $\xi=\frac{1}{2}$, $\eta=\frac{\sqrt{3}}{6}$:

$$\begin{pmatrix}\pm 1, & 0\\ 0, & \pm 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\pm \varepsilon^2, & \mp \varepsilon^2\\ 0, & \mp \varepsilon\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\mp \varepsilon, & \pm \varepsilon^2\\ 0, & \pm \varepsilon^2\end{pmatrix};$$

3°) se l'indice è situato sopra la retta $\xi=\frac{1}{2}$, $\eta=-\frac{\sqrt{3}}{6}$:

$$\begin{pmatrix}\pm 1, & 0\\ 0, & \pm 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\pm \varepsilon^2, & \mp \varepsilon\\ 0, & \mp \varepsilon\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\mp \varepsilon, & \pm \varepsilon\\ 0, & \pm \varepsilon^2\end{pmatrix};$$

---

(24) Cfr. BIANCHI: Math. Ann., 38 Bd., pag. 322-324.

4°) se l'indice è situato sopra la retta $\xi=0,\ \eta=\frac{\sqrt{3}}{3}$:

$$\begin{pmatrix}\pm 1, & 0\\ 0, & \pm 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\pm \varepsilon^2, & \pm 1\\ 0, & \mp \varepsilon\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\pm \varepsilon, & \pm 1\\ 0, & \mp \varepsilon^2\end{pmatrix};$$

5°) se l'indice è situato sopra l'arco $\xi+\eta\sqrt{3}=0,\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$:

$$\begin{pmatrix}\pm 1, & 0\\ 0, & \mp 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0, & \pm \varepsilon^2\\ \pm \varepsilon, & 0\end{pmatrix},$$

6°) se l'indice è situato sopra l'arco $\xi-\eta\sqrt{3}=0,\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$:

$$\begin{pmatrix}\pm 1, & 0\\ 0, & \mp 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0, & \mp \varepsilon\\ \mp \varepsilon^2 & 0\end{pmatrix}$$

7°) se l'indice è situato sopra l'arco $\xi+\eta\sqrt{3}-1=0,\ \xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$

$$\begin{pmatrix}\pm 1, & 0\\ 0, & \pm 1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\pm 1, & \pm \varepsilon^2\\ \mp \varepsilon, & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0, & \pm \varepsilon^2\\ \pm \varepsilon, & \mp 1\end{pmatrix}.$$

Quanto precede ci permette la seguente conclusione:

Le forme aritmetiche definite di HERMITE, *nei corpi* $K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-2})$ *e* $K(\sqrt{-3})$ *hanno (escluse particolari forme)* (25) *per gruppo automorfo aritmetico, gruppi (ciclici) degli ordini 2, 4 e 6. Nei corpi* $K(\sqrt{-1})$ *e* $K(\sqrt{-2})$, *quelle primitive di prima specie non possono avere gruppi più ampi di quelli di ordine 2 e 4; quelle primitive di seconda specie possono avere gruppi automorfi aritmetici anche di ordine 6.*

NOTA. — I risultati ottenuti nel presente paragrafo, coll'osservazione che sulla retta $\xi=\eta=0$ si trovano gli indici delle forme definite di HERMITE del tipo (a, o, c), ci permettono di enunciare il teorema:

L'ordine del gruppo automorfo aritmetico delle forme definite di HERMITE, *del tipo* axx_0+cyy_0, *con* $ac\neq 1$, *coincide col numero delle unità del corpo quadratico immaginario* $K(\sqrt{-d})$, *in cui queste forme si considerano* (senza alcuna limitazione per il numero d).

(25) La considerazione di queste particolari forme è inutile per le attuali ricerche. Nella mia Nota: *Sopra le forme definite di Hermite* (Atti della Società Ligustica di Scienze e Lettere, vol. IV (1925)) vengono considerati questi casi, ciò che conduce ad ottenere, in casi particolari, il numero effettivo delle classi. (Cfr. Intr.).

PARTE TERZA

RELAZIONI SOPRA IL NUMERO DELLE CLASSI DI FORME DEFINITE DI HERMITE

§ 7. I valori del numero n per le forme definite primitive di Hermite.

Esaurito lo studio sopra i gruppi automorfi aritmetici delle forme definite di HERMITE, che occorreva per le nostre ricerche, riprendiamo le considerazioni del § 3, coll'andare a determinare il *numero* n delle forme f' definite, a determinante $\Delta' = \Delta\mu\mu_0$ (μ indecomponibile in $K(\sqrt{-d})$), primitive di prima o di seconda specie, non equivalenti tra di loro, che si ottengono applicando alla forma $f \equiv (a, b, c)$ definita, a determinante Δ, primitiva, rispettivamente di prima o di seconda specie, le sostituzioni del sistema completo normale a modulo μ.

Si vedrà che i valori del numero n dipendono, unicamente, dal determinante Δ, dal numero μ e dall'ordine del gruppo automorfo aritmetico della forma f.

Come si è veduto, per il risultato finale del § 3, per questa ricerca basterà calcolare il numero delle classi di sostituzioni in cui si distribuiscono le composizioni TS, ove la sostituzione T percorre le sostituzioni del gruppo automorfo aritmetico della forma f ed S è la sostituzione normale $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & \mu \end{pmatrix}$ oppure $\begin{pmatrix} t, & -\mu \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$, in cui t *percorre quei* m -1 *valori del sistema completo di resti* (mod. μ) *fissato* (§ 1), *che rendono primitive* le forme risultanti dall'applicazione delle sostituzioni $\begin{pmatrix} t, & -\mu \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ alla forma f (§ 2).

Notiamo che nelle composizioni TS basterà tenere conto di uno solo dei due segni dei coefficienti delle sostituzioni T.

Occorrerà, nelle considerazioni che seguono, distinguere i vari casi, corrispondenti dell'ordine del gruppo automorfo aritmetico della forma f, primitiva (di prima o di seconda specie).

I) *La forma* f *sia a gruppo automorfo aritmetico* G_2:

Le composizioni TS danno una sola classe e quindi (§ 3) è $n = m$: specificando (§ 2), abbiamo la seguente tabella:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{per } \mu = p & \text{se } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0 & \text{è} & n = p^2 \\
 & \text{»} \left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1 & \text{»} & n = (p-1)^2 - 2 \\
\left(\frac{-d}{p}\right) = -1 & \text{»} \left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1 & \text{»} & n = (p-1)^2 \quad ; \\
\text{per } \mu = \pi & \text{se } \left(\frac{\Delta}{q}\right) = 0 & \text{è} & n = q \\
(N(\pi) = q) & \text{»} \left(\frac{\Delta}{q}\right) \neq 0 & \text{»} & n = q + 1.
\end{array}
$$

II) *La forma* f *sia a gruppo automorfo aritmetico* G_4, con l'indice sopra l'arco intersezione tra la sfera $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ ed il piano $\xi = 0$.

La forma sarà perciò del tipo $f \equiv (a,\ b\sqrt{-d},\ a)$, con a e b interi razionali, primi tra di loro, a dispari o pari secondo che f è primitiva di prima oppure di seconda specie, e tali che $\Delta = b^2 d - a^2$.

Inoltre supporremo $a \not\equiv 0 \pmod{\mu}$ ([26]).

Le composizioni TS che qui si devono esaminare sono, secondo il tipo delle sostituzioni normale S:

$$
\begin{pmatrix} +1, & 0 \\ 0, & +1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} +1, & 0 \\ 0, & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1, & 0 \\ 0, & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & +1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} +1, & 0 \\ 0, & \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & \mu \\ -1, & 0 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{pmatrix} +1, & 0 \\ 0, & +1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t, & -\mu \\ +1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t, & -\mu \\ +1, & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0, & +1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t, & -\mu \\ +1, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1, & 0 \\ -t, & \mu \end{pmatrix}.
$$

([26]) Quest'ipotesi non è una limitazione. Nei corpi $K(\sqrt{-1})$, $R(\sqrt{-2})$ e $R(\sqrt{-3})$, ove coi risultati a pag. 225-228 si completano le considerazioni generali che andiamo ora svolgendo, ciò è possibile ottenersi.

Infatti basta ricordare (§ 2) che in ogni classe di forme primitive, esistono forme col primo coefficiente non divisibile per μ e poi, unitamente ai risultati ora accennati, pensare che qui le forme sono a gruppo automorfo aritmetico G_4 e la riduzione a forme ridotte si compie quindi unicamente con sostituzioni che lasciano inalterato il primo coefficiente delle forme (cfr. Bianchi: Math. Ann., 38, 40 Bd.). Questa circostanza può osservarsi anche quando le forme appartengono ad altri corpi quadratici immaginari.

Per brevità si escluderà il caso particolare di $N(\mu) = q = 2$, ora ed in tutto quel che segue.

Ricordando ora la congruenza (4) del § 1, si ha subito: *le composizioni* TS *si distribuiscono in due classi distinte se* S *è del tipo* $\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & \mu \end{pmatrix}$, *oppure è del tipo* $\begin{pmatrix} t, & -\mu \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ *e* t *non è soluzione della congruenza:*

$$(1) \qquad t^2 \equiv -1 \qquad (\text{mod. } \mu);$$

si distribuiscono invece in una sola classe, se t *soddisfa a questa congruenza.*

Consideriamo la congruenza (1) nel corpo $K(\sqrt{-d})$. *Sia* μ *razionale* $=$ p [27]: la (1) è sempre possibile con due soluzione incongrue [28] (mod. μ). Indicando con $t_1 + t_2\sqrt{-d}$ una di queste (t_1 e t_2 interi razionali), la (1), nel corpo dei numeri razionali, ci offre le due congruenze:

$$(2) \qquad t_1^2 - t_2^2 d \equiv -1 \qquad (\text{mod. } \mu)$$

$$(3) \qquad t_1 t_2 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } \mu);$$

dalle quali risulta che è $t_1 \equiv 0$ (mod. p) oppure $t_2 \equiv 0$ (mod. p) e non contemporaneamente. Poichè è $\left(\frac{-d}{p}\right) = -1$, osservando le (2) e (3), risulta subito che le due soluzioni della (1) si possono assumere razionali se $p \equiv 1$ (mod. 4), puramente complesse se $p \equiv 3$ (mod. 4). Lo stesso risulta se le radici hanno la forma $t_1 + t_2 \frac{1 + \sqrt{-d}}{2}$, quando fosse $d \equiv -1$ (mod. 4), con $t_2 \equiv 1$ (mod. 2). *Sia* μ *complesso* $= \pi$: $N(\pi) = q$. La (1) sarà solubile od insolubile, secondo che è $q \equiv 1$ (mod. 4), oppure $q \equiv 3$ (mod. 4) [29]: nel caso della solubilità le soluzioni sono due e si possono assumere razionali.

Ciò posto, ritorniamo allo studio delle composizioni TS, ove $S = \begin{pmatrix} t, & -\mu \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$, per vedere se e quando *dei valori che può avere* t, possono essere soluzioni della congruenza (1), nel caso che sia solubile.

Distinguiamo i soliti casi.

Sia μ *razionale* $=$ p.

1°) Sia $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0$. Poichè è $b^2 d \equiv a^2$ (mod. p) risulterà $\left(\frac{-1}{p}\right) = -1$, quindi $p \equiv 3$ (mod. 4). Abbiamo allora:

---

(27) Per brevità supporremo ora e nel seguito $p \neq 2$.

(28) Cfr. BIANCHI: *Lezioni sulla Teoria dei Numeri algebrici*, pag. 335-336.

(29) Cfr. BIANCHI: *Lezioni ecc.*, pag. 341.

Una delle due soluzioni che ammette la (1), *offre una sostituzione normale che applicata alla forma* f, *produce una forma primitiva; l'altra offre una sostituzione normale che applicata ad* f *produce una forma non primitiva.* Infatti, per quanto si è veduto più sopra le soluzioni della (1) si possono assumere puramente complesse, cioè $t \equiv \pm t_2 \sqrt{-d}$ (mod. p). Si consideri ora la congruenza:

$$(at - b\sqrt{-d})(at_0 + b\sqrt{-d}) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p),$$

che ha una sola soluzione (mod. p) (§ 2, I, 1°). Essa è soddisfatta da uno dei due valori $\pm t_2 \sqrt{-d}$, perchè da $b^2 d \equiv a^2$ (mod. p), tenendo conto della (2) risulta appunto $at_2 \equiv \pm b$ (mod. p): di qui si ha l'enunciato.

Segue allora:

Le composizioni TS, *ove* $S = \begin{pmatrix} t, & -p \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ *si distribuiscono in due classi distinte per* $m-2$ *valori di* t *ed in una sola classe per uno solo valore di* t.

Si può dunque concludere: *Se* μ *è razionale* $=$ p *e* $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0$, *quindi necessariamente* $p \equiv 3$ (mod. 4) *si ha:*

$$n = \frac{m-1}{2} + 1 = \frac{m+1}{2}. \tag{4}$$

2°) Sia $\left(\frac{\Delta}{p}\right) \neq 0$. Abbiamo:

Se $p \equiv 1$ (mod. 4), *le due soluzioni della* (1) *offrono due sostituzioni normali, che applicate alla forma* f *producono due forme non primitive; se* $p \equiv 3$ (mod. 4) *tali soluzioni offrono due sostituzioni normali, che applicate alla forma* f *producono due forme primitive.* Infatti: se $p \equiv 1$ (mod. 4) le soluzioni della (1) si possono assumere razionali: sia t_1 una di esse e si ponga:

$$X \equiv at_1 - b\sqrt{-d} \qquad (\text{mod. } p)$$

sarà

$$X_0 = at + b\sqrt{-d} \qquad (\text{mod. } p)$$

e quindi:

$$XX_0 \equiv a^2 t_1^2 + b^2 d \equiv -a^2 + b^2 d = \Delta \qquad (\text{mod. } p).$$

Perciò (§ 2) è provata la prima parte dell'enunciato. Per la seconda, si osservi che le soluzioni della (1) si possono assumere puramente complesse: $t \equiv \pm t_2 \sqrt{-d}$ (mod. p) e, se una di esse, per es. $t_2\sqrt{-d}$ offrisse una sostituzione normale che applicata ad f producesse una forma non primitiva, si dovrebbe avere (§ 2):

$$(4)\qquad at_2\sqrt{-d} - b\sqrt{-d} \equiv X \pmod{p}$$

ove X è una delle soluzioni della congruenza $XX_0 \equiv \Delta \pmod{p}$. Allora dalla (4) risulterebbe:

$$at_2 \equiv b \pmod{p}$$

e per la (2): $a^2 \equiv b^2 d \pmod{p}$, cioè $\Delta \equiv 0 \pmod{p}$, contro l'ipotesi. C. v. d.

Segue allora il risultato:

Le composizioni TS, *ove* $S = \begin{pmatrix} t, & -p \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$, *si distribuiscono: se* $p \equiv 1 \pmod{4}$, *in due classi distinte, per tutti i valori che può assumere* t; *se* $p \equiv 3 \pmod{4}$ *in due classi distinte per* m — 3 *valori di* t *ed in una sola classe per due valori di* t.

Si potrà dunque concludere:

Se μ *é razionale* $= p$ *e* $\left(\frac{\Delta}{p}\right) \neq 0$ *si ha:*

$$(5)\qquad \text{per } p \equiv 1 \pmod{4}, \quad n = \frac{m}{2}$$

$$(6)\qquad \text{per } p \equiv 3 \pmod{4}, \quad n = \frac{m}{2} + 1.$$

Sia μ *complesso* $= \pi : N(\pi) = q$.

1°) Sia $\left(\frac{\Delta}{q}\right) = 0$. Da $b^2 d \equiv a^2 \pmod{q}$ risulta $\left(\frac{-1}{q}\right) = +1$, avendosi $\left(\frac{-d}{q}\right) = +1$, perciò deve essere $q \equiv 1 \pmod{4}$ [30], quindi in questo caso la (1) è solubile. Si hanno qui gli stessi risultati osservati per μ razionale $= p$ divisore di Δ; e perciò si conclude subito:

Se μ *è complesso* $= \pi$, $N(\pi) = q$, *e* $\left(\frac{\Delta}{q}\right) = 0$, *quindi necessariamente* $q \equiv 1$ (mod. 4), *si ha:*

$$n = \frac{m+1}{2}.$$

---

[30] Si noti che q non può essere in questo caso un numero primo critico, cioè tale che $\left(\frac{-d}{q}\right) = 0$, perchè diversamente sarebbe $a \equiv 0 \pmod{q}$ contro l'ipotesi. Può invece essere tale nel caso successivo.

2°) Sia $\left(\frac{\Delta}{q}\right) \neq 0$. Allora, ricordando (§ 2) che tutti i valori che può assumere t offrono sostituzioni normali, che applicate alla forma f, producono forme primitive, e tenendo presente quanto si disse sopra la congruenza (1), abbiamo i risultati:

Se μ *è complesso* $= \pi$, $N(\pi) = q$, *e* $\left(\frac{\Delta}{p}\right) \neq 0$, *si ha:*

$$\text{per } q \equiv 1 \pmod{4}, \quad n = \frac{m-2}{2} + 2 = \frac{m}{2} + 1 \tag{7}$$

$$\text{per } q \equiv 3 \pmod{4}, \quad n = \frac{m}{2}. \tag{8}$$

Raccogliendo le formule (4), (5), (6), (7) ed (8) e specificando i vari valori del numero m (§ 2), si ha la tabella:

$$\begin{array}{ll}
\begin{array}{l} \text{per } \mu = p \\[3em] \left(\frac{-d}{p}\right) = -1 \end{array} &
\left\{\begin{array}{lll}
\text{se } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0 & (p \equiv 3 \pmod{4}) \text{ è} & n = \frac{p^2+1}{2} \\
\text{»} \left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1 & \left\{\begin{array}{l} \text{e } p \equiv 1 \pmod{4} \text{ »} \\ \text{» } p \equiv 3 \pmod{4} \text{ »} \end{array}\right. & \begin{array}{l} n = \frac{(p-1)^2}{2} - 1 \\ n = \frac{(p-1)^2}{2} \end{array} \\
\text{»} \left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1 & \left\{\begin{array}{l} \text{» } p \equiv 1 \pmod{4} \text{ »} \\ \text{» } p \equiv 3 \pmod{4} \text{ »} \end{array}\right. & \begin{array}{l} n = \frac{(p-1)^2}{2} \\ n = \frac{(p-1)^2}{2} + 1 \end{array}
\end{array}\right. \\[4em]
\begin{array}{l} \text{per } \mu = \pi \\[2em] (N(p) = q) \end{array} &
\left\{\begin{array}{lll}
\text{se } \left(\frac{\Delta}{q}\right) = 0 & (q \equiv 1 \pmod{4}) \text{ è} & n = \frac{q+1}{2} \\
\text{»} \left(\frac{\Delta}{q}\right) \neq 0 & \left\{\begin{array}{l} \text{e } q \equiv 1 \pmod{4} \text{ »} \\ \text{» } q \equiv 3 \pmod{4} \text{ »} \end{array}\right. & \begin{array}{l} n = \frac{q+1}{2} + 1 \\ n = \frac{q+1}{2}. \end{array}
\end{array}\right.
\end{array}$$

III) *La forma* f *sia a gruppo automorfo aritmetico* G_6, con l'indice sopra l'arco intersezione tra la sfera $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ ed il piano $\xi = \frac{1}{2}$.

La forma sarà del tipo $f \equiv \left(a, \; -\frac{a}{2} + b\sqrt{-d}, \; a\right)$, ove a e b sono interi razionali, primi tra di loro, $a \equiv 0 \pmod{2}$ con $\Delta = b^2 d - \frac{3}{4} a^2$: la forma sarà primitiva di seconda specie; oppure, nel caso di $d \equiv -1 \pmod{4}$, può essere anche del tipo $f \equiv \left(a, \ -\frac{a+b}{2} + b\frac{1+\sqrt{-d}}{2}, \ a\right)$ ove a e b sono interi razionali, primi tra loro, entrambi dispari, con $\Delta = \frac{b^2 d - 3a^2}{4}$, e la forma sarà primitiva di prima specie. Ci limiteremo alla considerazione del primo tipo della forma f, poichè per il secondo si ottengono, per la medesima via, gli stessi risultati.

Si supporrà $a \not\equiv 0 \pmod{\mu}$ [31].

Esaminiamo le composizioni TS: esse sono le seguenti, corrispondentemente al tipo della sostituzione normale S:

$$\begin{pmatrix}+1, & 0\\ 0, & +1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}+1, & 0\\ 0, & \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}+1, & 0\\ 0, & \mu\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0, & +1\\ -1, & +1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0, & \mu\\ -1, & \mu\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}-1, & +1\\ -1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & \mu\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1, & \mu\\ -1, & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}+1, & 0\\ 0, & +1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t, & -\mu\\ 1, & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}t, & -\mu\\ 1, & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}0, & +1\\ -1, & +1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t, & -\mu\\ 1, & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t+1, & \mu\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}-1, & +1\\ -1, & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t, & -\mu\\ 1, & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-t+1, & \mu\\ -t, & \mu\end{pmatrix}.$$

Si ha subito (§ 1): *le sostituzioni* TS *si distribuiscono in tre classi distinte se* S *è del tipo* $\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & \mu\end{pmatrix}$ *oppure è del tipo* $\begin{pmatrix}t, & -\mu\\ 1, & 0\end{pmatrix}$ *e* t *non soddisfa alla congruenza:*

$$t^2 - t + 1 \equiv 0 \pmod{\mu}; \tag{9}$$

si distribuiscono invece in una sola classe, se t *soddisfa a questa congruenza.*

Occorrerà esaminare la (9) nel corpo $K(\sqrt{-d})$: un semplice calcolo e ponendo:

$$y \equiv 2t + 1 \pmod{\mu}, \tag{10}$$

essa si riduce a

$$y^2 \equiv -3 \pmod{\mu}. \tag{11}$$

Se la (9) è solubile, per la (10), è pure solubile la (11) ed inversamente. *Sia* μ *razionale* $= p \neq 3$: la (11) è sempre solubile con due soluzioni incongrue (mod. p) ed altrettanto accadrà per la (9).

[31] Cfr. nota a pag. 217.

Indicando con $t_1 + t_2\sqrt{-d}$ una delle soluzioni della (9), nel campo razionale si avrà:

$$t_1^2 - t_1 - t_2^2 d + 1 \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p) \tag{12}$$

$$t_2(2t_1 - 1) \equiv 0 \qquad (\text{mod. } p). \tag{13}$$

Ora dalla (13) risulta $t_2 \equiv 0$ (mod. p) oppure $2t_1 \equiv 1$ (mod. p), ma non simultaneamente, perchè allora dalla (12) si avrebbe $t_1 \equiv 0$ (mod. p) oppure $t_1 \equiv -1$ (mod. p), il che non può essere. Segue allora, che se $p \equiv 1$ (mod. 3) è $t_2 \equiv 0$ (mod. p) e $2t_1 \not\equiv 1$ (mod. p); se $p \equiv 2$ (mod. 3) è $t_2 \not\equiv 0$ (mod. p) e $2t_1 \equiv 1$ (mod. p). Se invece, quando fosse $d \equiv 1$ (mod. 4), la radice considerata della (1), è della forma $t_1 + t_2 \frac{1 + \sqrt{-d}}{2}$ ($t_2 \equiv 1$ (mod. 2)), allora si ottiene che se $p \equiv 1$ (mod. 3) è $t_2 \equiv 0$ (mod. p) e $2t_1 \not\equiv 1$ (mod. p); se $p \equiv 2$ (mod. 3) è $t_2 \not\equiv 0$ (mod. p) e $t_2 + 2t_1 - 1 \equiv 0$ (mod. p). Se $p = 3$ la (9) ha una sola soluzione. *Sia* μ *complesso* $= \pi$ *e* $\mathrm{N}(\pi) = \mathrm{q} \neq 3$: si ha subito, che la (11), e quindi la (9), è solubile, con due soluzioni incongrue (mod. π), che si potranno assumere razionali, od insolubili secondo che è $q \equiv 1$ (mod. 3) oppure è $q \equiv 2$ (mod. 3). Se $q = 3$ si ha lo stesso risultato di $p = 3$ ([32]).

Ritorniamo allo studio delle sostituzioni TS ove $S = \begin{pmatrix} t, & -\mu \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$.

Sia μ *razionale* $= \mathrm{p}$.

1°) Sia $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0$. Avendosi $4b^2 d \equiv 3a^2$ (mod. p), si ha $\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-d}{p}\right) = -1$ e perciò $p \equiv 2$ (mod. 3). Abbiamo allora:

Una delle due soluzioni della congruenza (9) *offre una sostituzione normale, che applicata alla forma* f, *produce una forma primitiva; l'altra offre una sostituzione normale, che applicata alla forma* f, *produce una forma non primitiva.* Questa proposizione si dimostra come la corrispondenti del caso II), tenendo però conto di quanto si è veduto sopra la congruenza (9).

Segue il risultato:

Le composizioni TS, *ove* $\mathrm{S} = \begin{pmatrix} \mathrm{t}, & -\mathrm{p} \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ *si distribuiscono in tre classi distinte per* m $-$ 2 *valori di* t *ed in una sola per un valore di* t.

([32]) Nel seguito si supporrà che tanto p quanto q siano $\neq 3$; i risultati relativi sono semplicissimi.

Si può dunque concludere:

Se μ *è razionale* $=p$ *ed è* $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=0$, *quindi necessariamente* $p\equiv 2$ (mod. 3), *si ha:*

$$n=\frac{m-1}{3}+1=\frac{m+2}{3}. \tag{14}$$

2°) Sia $\left(\frac{\Delta}{p}\right)\neq 0$. Abbiamo:

Se $p\equiv 1$ (mod. 3), *le due soluzioni della congruenza* (9) *offrono due sostituzioni normali che applicate alla forma* f *producono due forme non primitive; se* $p\equiv 2$ (mod. 3) *tali soluzioni offrono due forme normali che applicate alla forma* f *producono due forme primitive.* Anche questa proposizione si dimostra come la corrispondente nel caso II), tenendo sempre conto dei risultati sopra la (9).

Segue allora:

Le composizioni TS, *ove* $S=\begin{pmatrix} t, & -p \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ *si distribuiscono: se* $p\equiv 1$ (mod. 3), *in tre classi distinte per tutti i valori che può assumere* t; *se* $p\equiv 2$ (mod. 3), *in tre classi distinte per* $m-3$ *valori di* t *ed in una sola classe per due valori di* t.

Si può dunque concludere:

Se μ *è razionale* $=p$ *ed è* $\left(\frac{\Delta}{p}\right)\neq 0$, *si ha:*

$$\text{per } p\equiv 1 \text{ (mod. 3)}, \quad n=\frac{m}{3} \tag{15}$$

$$\text{per } p\equiv 2 \text{ (mod. 3)}, \quad n=\frac{m-2}{3}+2=\frac{m+1}{3}+1. \tag{16}$$

Sia μ *complesso* $=\pi$: $N(\pi)=q$.

1°) Sia $\left(\frac{\Delta}{q}\right)=0$. Da $4b^2d\equiv 3a^2$ (mod. q) [33] risulta $\left(\frac{-3}{q}\right)=\left(\frac{-d}{q}\right)=+1$ e perciò $q\equiv 1$ (mod. 3). La (9) è sempre solubile e come nel caso corrispondente di μ razionale $=p$, abbiamo:

Se μ *è complesso* $=\pi$, $N(\pi)=q$, e $\left(\frac{\Delta}{q}\right)=0$, *quindi necessariamente* $q\equiv 1$ (mod. 3), *si ha:*

$$n=\frac{m+2}{3}.$$

[33] Cfr. nota a pag. 220.

2°) Sia $\left(\frac{\Delta}{q}\right) \neq 0$. Si ha analogamente nel caso corrispondente in II):

Se μ *è complesso* $= \pi$, $N(\pi) = q$, *e* $\left(\frac{\Delta}{q}\right) \neq 0$, *si ha:*

$$\text{per } q \equiv 1 \pmod{3} \quad \text{è} \quad n = \frac{m+1}{3} + 1 \tag{17}$$

$$\text{per } q \equiv 2 \pmod{3} \quad \text{è} \quad n = \frac{m}{3}. \tag{18}$$

Raccogliendo le formule (14), (15), (16), (17) e (18) e specificando i valori del numero m (§ 2), si ha la tabella:

$$\begin{array}{l} \text{per } \mu = p \\ \left(\frac{-d}{p}\right) = -1 \end{array} \left\{ \begin{array}{llll} \text{se } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0 & (p \equiv 2 \pmod{3}) & \text{è} & n = \frac{p^2+2}{3} \\ \text{se } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1 & (p \equiv 2 \pmod{3}) & \text{è} & n = \frac{(p-1)^2-1}{3} + 1 \\ \text{se } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1 & (p \equiv 1 \pmod{4}) & \text{è} & n = \frac{(p-1)^2}{3} \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} \text{per } \mu = \pi \\ (N(\pi) = q) \end{array} \left\{ \begin{array}{lll} \text{se } \left(\frac{\Delta}{q}\right) = 0 \quad (q \equiv 1 \pmod{3}) & \text{è} & n = \frac{q+2}{3} \\ \text{se } \left(\frac{\Delta}{q}\right) \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{e} \quad q \equiv 1 \pmod{3}) \\ \text{e} \quad q \equiv 2 \pmod{3}) \end{array} \right. & \begin{array}{l} \text{è} \\ \text{è} \end{array} & \begin{array}{l} n = \frac{q+2}{3} + 1 \\ n = \frac{q+1}{3}. \end{array} \end{array} \right.$$

A questi medesimi risultati si perviene se, essendo la f a gruppo automorfo aritmetico G_6, l'indice giace sopra l'intersezione della sfera $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ ed il piano $\xi = -\frac{1}{2}$.

Notiamo, esplicitamente, che nei casi I) e II) la forma f, primitiva, può essere di prima o di seconda specie, nel caso III) può essere soltanto di seconda specie se $d \not\equiv -1 \pmod{4}$; invece, se $d \equiv -1 \pmod{4}$, può essere anche di prima specie $\left(\text{è tale se } b \text{ è della forma } b_1 + b_2 \frac{1+\sqrt{-d}}{2},\ b_2 \equiv 1 \pmod{2}\right)$.

Svolte le considerazioni generali precedenti, che servono per tutti quei corpi $K(\sqrt{-d})$ che si trovino nelle condizioni specificate nel § 6, riprendiamo i corpi $K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-2})$ e $K(\sqrt{-3})$ per completare la ricerca del numero n, quando le forme appartengano a questi corpi.

$K(\sqrt{-2})$.

Esaminando i risultati del § 6, concludiamo subito, che quando le forme definite di Hermite appartengono al corpo $K(\sqrt{-2})$, la ricerca del numero n è già esaurita con le considerazioni generali precedenti.

$K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-3})$.

Si ha il teorema:

Se la forma f *appartiene ai corpi* $\mathrm{K}(\sqrt{-1})$ *o* $\mathrm{K}(\sqrt{-3})$, *primitiva, è a gruppo automorfo aritmetico* G_4 *oppure* G_6, *i valori del numero* n, *sono invarianti, rispetto alla posizione dell'indice della forma sul contorno del poliedro fondamentale del gruppo di Picard oppure del gruppo di Bianchi* G[(3)].

Occorrerà dunque provare che se l'indice della forma f giace sopra le rette od archi osservati a pag. 212 e 213 ed a pag. 214 e 215, si ottengono per n gli stessi valori ottenuti nella tabella di II) e di III). Notiamo che nel corpo $K(\sqrt{-1})$ non può aversi che $p \equiv 3 \pmod{4}$ e $q \equiv 1 \pmod{4}$ e nel corpo $K(\sqrt{-3})$ non può aversi che $p \equiv 2 \pmod{3}$ e $q \equiv 1 \pmod{3}$.

La forma f appartenga al corpo $K(\sqrt{-1})$, sia a gruppo automorfo aritmetico G_4 e il suo indice sia sulla retta $\xi = \eta = \frac{1}{2}$ del poliedro fondamentale del gruppo di Picard (§ 6): le considerazioni che seguono si riferiscono a questo caso, però in ogni altro, le cose procedono similmente.

La forma sarà quindi del tipo $f \equiv \left(a, -\frac{a}{2}(1-i), c\right)$ con a, c interi razionali, primi tra loro, $a \equiv 0 \pmod{2}$, $a < c$, $\Delta = \frac{a^2}{2} - ac$ ed inoltre si potrà ritenere $a \not\equiv 0 \pmod{\mu}$. Consideriamo le relative composizioni TS: si ha:

$$\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & \mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & \mu\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}i, & 1-i\\ 0, & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & \mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i, & (1-i)\mu\\ 0, & -i\mu\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t, & -\mu\\ 1, & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}t, & -\mu\\ 1, & 0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}i, & 1-i\\ 0, & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t, & -\mu\\ 1, & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i(t-1)+1, & -i\mu\\ -, & 0\end{pmatrix}.$$

Risulta (§ 1): le composizioni TS si distribuiscono in una sola classe se S è del tipo $\begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & \mu\end{pmatrix}$ oppure è del tipo $\begin{pmatrix}t, & -\mu\\ 1, & 0\end{pmatrix}$, con t soluzione della congruenza:

$$2t \equiv 1 + i \pmod{\mu}, \tag{19}$$

si distribuiscono invece in due classi distinte in ogni altro caso.

Vediamo se e quando tra i valori che ha t nelle sostituzioni normali, vi è la soluzione della congruenza (19).

Sia $\Delta \equiv 0 \pmod{\mu}$: la soluzione della (19) offre una sostituzione normale, che applicata alla forma f, produce una forma non primitiva. Infatti, la soluzione della congruenza (§ 2):

$$at \equiv \frac{a}{2}(1+i) \qquad \pmod{\mu}$$

è quel valore che corrisponde alla sostituzione normale che applicata ad f produce una forma non primitiva e questo valore coincide (mod. μ) con la soluzione della (19). Segue che le composizioni TS ove $S = \begin{pmatrix} t, & -\mu \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$ appartengono a due classi per gli $m-1$ valori che assume t. Allora si ha subito, secondo la natura aritmetica di μ:

$$n = \frac{p^2+1}{2}, \quad n = \frac{q+1}{2}.$$

Sia $\left(\frac{\Delta}{p}\right) \neq 0$; abbiamo: la soluzione della congruenza (19) è un valore di t che offre una sostituzione normale, che applicata ad f produce una forma primitiva. Infatti, se ciò non fosse, dovrebbe essere soluzione della congruenza (§ 2):

$$at - \frac{a}{2}(1+i) \equiv X \qquad \pmod{p} \tag{20}$$

ove X è una soluzione della congruenza $XX_0 \equiv \Delta \pmod{p}$. La (20) si può scrivere:

$$a[2t-(1+i)] \equiv 2X \qquad \pmod{p},$$

onde la soluzione della (19) renderebbe $X \equiv 0 \pmod{p}$ e quindi $\Delta \equiv 0 \pmod{p}$ contro l'ipotesi. Segue che le composizioni TS, ove $S = \begin{pmatrix} t, & -p \\ 1, & 0 \end{pmatrix}$, appartengano a due classi distinte per $m-2$ valori di t e sono della medesima classe per un solo valore di t. Si ha dunque:

$$\text{se} \quad \left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1 \quad \text{è} \quad n = \frac{(p-1)^2}{2}$$

$$\text{»} \quad \left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1 \quad \text{»} \quad n = \frac{(p-1)^2}{2} + 1.$$

Sia $\left(\frac{\Delta}{q}\right) \neq 0$: si ha subito (II), 2°)

$$n = \frac{q+1}{2} + 1.$$

Con ciò il teorema enunciato è provato completamente.

§ 8. **Forme definite di Hermite primitive di prima specie.**

Andiamo ora a stabilire, per le forme definite di HERMITE (positive), a determinante Δ, primitive di prima specie, le relazioni sopra il numero delle classi che formano l'oggetto degli attuali studi.

Tali forme appartengono ai corpi $K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-2})$ e $K(\sqrt{-3})$. I relativi gruppi automorfi aritmetici non possono essere (§ 6) che un G_2 ed un G_4, se si tratta dei corpi $K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-2})$; potranno essere anche un G_6, se si tratta del corpo $K(\sqrt{-3})$.

Sia il corpo $K(\sqrt{-1})$. Esistono forme definite (positive) a determinante Δ, primitive di prima specie, a gruppo G_2, quando esistono forme definite a determinante Δ, primitive di prima specie, ridotte il cui indice è interno al poliedro fondamentale del gruppo di PICARD; ossia quando Δ è rappresentabile dalla forma quadratica quaternaria:

$$\varphi_1 = x^2 + y^2 - zt,$$

con x, y, z e t interi ordinari, primi tra di loro e z, t positivi e non nulli, di cui uno almeno dispari e sia $z < t$ ed inoltre $z > 2|x|$, $z > 2|y|$. Invece, forme definite primitive di prima specie a gruppo G_4, ne esistono sempre; ad es. la principale $(1, 0, -\Delta)$.

Sia il corpo $K(\sqrt{-2})$. Esistono sempre delle forme definite (positive) a determinante Δ, primitive di prima specie, a gruppo G_2; ad es. la principale $(1, 0, -\Delta)$. Invece, esistono forme definite (positive), a determinante Δ, primitive di prima specie a gruppo G_4, quando Δ è rappresentabile propriamente dalla forma indefinita di GAUSS, a determinante 2:

$$\varphi_2 = 2x^2 - y^2,$$

con $y \equiv 1 \pmod{2}$.

Sia il corpo $K(\sqrt{-3})$. Esistono forme definite (positive) a determinante Δ, primitive di prima specie, quando esistono forme definite a determinante Δ, primitive di prima specie ridotte il cui indice è interno al poliedro fondamentale del relativo gruppo di BIANCHI; ossia quando Δ è rappresentabile almeno da una delle due forme quadratiche quaternarie:

$$\varphi_3 = x^2 + 3y^2 - zt$$
$$\varphi_4 = x^2 + xy + y^2 - zt,$$

con x, y, z e t interi ordinari, primi tra loro e z, t positivi e non nulli, di cui uno almeno dispari e sia $z < t$ ed inoltre, se si tratta della forma φ_3, $z > 2\,|x|$, $z > 3\,y$ e $x - 3y < 0$; se si tratta della forma φ_4, $z > |2x + y|$, $z > \frac{3}{2}|y|$ e $x - 4y < 0$.

Esistono forme definite (positive) a determinante Δ, primitive di prima specie a gruppo G_4, quando Δ è rappresentabile propriamente dalla forma indefinita di GAUSS a determinante 3:

$$\varphi_5 = 3x^2 - y^2$$

con $y \equiv 1$ (mod. 2). Le forme definite, primitive di prima specie, a gruppo G_6 esistono sempre; ad es. la principale $(1, 0, -\Delta)$.

Con questo è specificato quanto occorreva sopra l'esistenza dei vari ordini dei gruppi automorfi aritmetici delle forme definite primitive di prima specie, nei corpi che consideriamo.

Si noti che il tipo di questo gruppo è comune a tutte le forme di una classe.

Sia ora $h(\Delta)$ il numero delle classi di forme definite positive di HERMITE, a determinante Δ, primitive di prima specie, appartenenti ad uno qualunque dei tre corpi $K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-2})$, $K(\sqrt{-3})$. Siano $h_1(\Delta)$ e $h_2(\Delta)$ i numeri delle classi di forme definite positive di HERMITE, a determinante Δ appartenenti al corpo fissato, primitive di prima specie, rispettivamente a gruppo automorfo aritmetico G_2 e G_4; e, se si tratta del corpo $K(\sqrt{-3})$, sia inoltre $h_3(\Delta)$ il numero delle classi delle forme definite (positive) di HERMITE, a determinante Δ, primitive di prima specie, a gruppo automorfo aritmetico G_6.

Si ha, manifestamente: per i corpi $K(\sqrt{-1})$ e $K(\sqrt{-2})$:

$$h(\Delta) = h_1(\Delta) + h_2(\Delta), \tag{1}$$

in cui: nel corpo $K(\sqrt{-1})$, sarà $h_1(\Delta) = 0$ se Δ non è rappresentabile nel modo detto dalla forma φ_1; nel corpo $K(\sqrt{-2})$, sarà $h_2(\Delta) = 0$ se Δ non è rappresentabile, nel modo detto, dalla forma φ_2; per il corpo $K(\sqrt{-3})$:

$$h(\Delta) = h_1(\Delta) + h_2(\Delta) + h_3(\Delta), \tag{1'}$$

in cui sarà uno dei due numeri $h_1(\Delta)$ e $h_2(\Delta)$ o tutti e due saranno nulli, secondo che Δ non è rappresentabile, nel modo specificato, da una o da tutte due, delle forme φ_3 e φ_4.

Come si è veduto nel § 7, i valori del numero n, fissato il corpo a cui appartengono le forme che si considerano, non dipendono che dal determinante Δ, dal numero indecomponibile μ, dall'ordine del gruppo automorfo aritmetico della forma f e non dalla particolare forma che si considera.

Indichiamo ora con n_1 ed n_2 rispettivamente i valori del numero n per le classi le cui forme sono a gruppo automorfo G_2 e G_4; e, se si tratta del corpo $K(\sqrt{-3})$, con n_3 i valori del numero n per le classi le cui forme sono a gruppo automorfo G_6.

Consideriamo i numeri $n_1 h_1(\Delta)$, $n_2 h_2(\Delta)$ ed $n_3 h_3(\Delta)$: l'osservazione fondamentale esposta alla fine del § 4, ci permette di scrivere le relazioni: per i corpi $K(\sqrt{-1})$ e $K(\sqrt{-2})$:

$$h(\Delta\mu\mu_0) = n_1 h_1(\Delta) + n_2 h_2(\Delta), \tag{2}$$

e per il corpo $K(\sqrt{-3})$:

$$h(\Delta\mu\mu_0) = n_1 h_1(\Delta) + n_2 h_2(\Delta) + n_3 h_3(\Delta). \tag{2'}$$

Alle (2) e (2') associeremo, rispettivamente, le (1) e (1').

Specifichiamo ora il corpo a cui appartengono le forme: le relazioni stabilite, dando ai numeri n_1, n_2 ed n_3, i loro vari valori (§ 7), ci offrono i seguenti risultati finali, per le forme definite (positive) di HERMITE, primitive di prima specie:

$$K(\sqrt{-1}).$$

Siano $\mathrm{h}(\Delta)$ *ed* $\mathrm{h}(\Delta\mu\mu_0)$ *i numeri delle classi di forme definite (positive) di Hermite, appartenenti al corpo* $\mathrm{K}(\sqrt{-1})$, *rispettivamente a determinante* Δ *e* $\Delta\mu\mu_0$, *ove* μ *è un numero primo nel corpo e primitive di prima specie; siano inoltre,* $\mathrm{h}_1(\Delta)$ *ed* $\mathrm{h}_2(\Delta)$ *i numeri delle classi di forme definite (positive) di Hermite, appartenenti allo stesso corpo, a determinante* Δ, *primitive di prima specie, rispettivamente a gruppo automorfo aritmetico* G_2 *e* G_4. *Secondo la natura aritmetica del numero primo* μ, *nel corpo, si hanno le seguenti relazioni:*

sia μ *un numero primo razionale* p (p $\equiv 3 \pmod{4}$), *sarà:*

se $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0,$

$$h(\Delta p^2) = p^2 h_1(\Delta) + \frac{p^2+1}{2} h_2(\Delta);$$

se $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1,$

$$h(\Delta p^2) = [(p-1)^2 - 2] h_1(\Delta) + \frac{(p-1)^2}{2} h_2(\Delta);$$

se $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1,$

$$h(\Delta p^2) = (p-1)^2 h_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} + 1\right] h_2(\Delta);$$

sia μ *un numero primo complesso* π, $N(\pi) = q$, ($q \equiv 1 \pmod{4}$), *sarà:*

se $\left(\frac{\Delta}{q}\right) = 0,$

$$h(\Delta q) = q h_1(\Delta) + \frac{q+1}{2} h_2(\Delta);$$

se $\left(\frac{\Delta}{q}\right) \neq 0,$

$$h(\Delta q) = (q+1) h_1(\Delta) + \left[\frac{q+1}{2} + 1\right] h_2(\Delta);$$

ed inoltre:

$$h(\Delta) = h_1(\Delta) + h_2(\Delta).$$

$K(\sqrt{-2})$.

Siano h(Δ) *ed* h($\Delta\mu\mu_0$) *i numeri delle classi di forme definite (positive) di Hermite, appartenenti al corpo* K($\sqrt{-2}$), *rispettivamente a determinante* Δ *e* $\Delta\mu\mu_0$, *ove* μ *è un numero primo nel corpo e primitive di prima specie; siano inoltre* $h_1(\Delta)$ *ed* $h_2(\Delta)$, *i numeri delle classi di forme definite (positive) di Hermite, appartenenti allo stesso corpo, a determinante* Δ, *primitive di prima specie, rispettivamente a gruppo automorfo aritmetico* G_2 *e* G_4. *Secondo la natura aritmetica del numero primo* μ *nel corpo, si hanno le seguenti relazioni:*

sia μ *un numero primo razionale* p, *sarà:*

se $\left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0$ ($p \equiv 3 \pmod{4}$),

$$h(\Delta p^2) = p^2 h_1(\Delta) + \frac{p^2+1}{2} h_2(\Delta);$$

$$\text{se } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = -1 \left\{ \begin{array}{l} \text{e } p \equiv 1 \pmod{4} \\ h(\Delta p^2) = [(p-1)^2 - 2]\, h_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} - 1\right] h_2(\Delta), \\ \text{e } p \equiv 3 \pmod{4} \\ h(\Delta p^2) = [(p-1)^2 - 2]\, h_1(\Delta) + \frac{(p-1)^2}{2}\, h_2(\Delta); \end{array} \right.$$

$$\text{se } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = +1 \left\{ \begin{array}{l} \text{e } p \equiv 1 \pmod{4} \\ h(\Delta p^2) = (p-1)^2 h_1(\Delta) + \frac{(p-1)^2}{2}\, h_2(\Delta), \\ \text{e } p \equiv 3 \pmod{4} \\ h(\Delta p^2) = (p-1)^2 h_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} + 1\right] h_2(\Delta); \end{array} \right.$$

sia μ *un numero primo complesso* $= \pi$, $N(\pi) = q$, *sarà:*

se $\left(\frac{\Delta}{q}\right) = 0$ $(q \equiv 1 \pmod{4})$,

$$h(\Delta q) = q h_1(\Delta) + \frac{q+1}{2}\, h_2(\Delta);$$

$$\text{se } \left(\frac{\Delta}{q}\right) \neq 0 \left\{ \begin{array}{l} \text{e } q \equiv 1 \pmod{4} \\ h(\Delta q) = (q+1) h_1(\Delta) + \left[\frac{q+1}{2} + 1\right] h_2(\Delta), \\ \text{e } q \equiv 3 \pmod{4} \\ h(\Delta q) = (q+1) h_1(\Delta) + \frac{q+1}{2}\, h_2(\Delta); \end{array} \right.$$

ed inoltre:

$$h(\Delta) = h_1(\Delta) + h_2(\Delta).$$

$$K(\sqrt{-3}).$$

Siano $\mathrm{h}(\Delta)$ *ed* $\mathrm{h}(\Delta\mu\mu_0)$ *i numeri delle classi di forme definite (positive) di Hermite, appartenenti al corpo* $\mathrm{K}(\sqrt{-3})$, *rispettivamente a determinante* Δ *e* $\Delta\mu\mu_0$, *ove* μ *è un numero primo nel corpo e primitive di prima specie; siano inoltre* $\mathrm{h}_1(\Delta)$, $\mathrm{h}_2(\Delta)$ *ed* $\mathrm{h}_3(\Delta)$, *i numeri delle classi di forme definite (positive) di Hermite, appartenenti allo stesso corpo, a determinante* Δ, *primitive di prima specie, rispettivamente a gruppo automorfo aritmetico* G_2, G_4 *e* G_6.

Secondo la natura aritmetica del numero primo μ, *nel corpo, si hanno le relazioni seguenti:*

sia μ *un numero primo razionale* p $(\mathrm{p} \equiv -1 \pmod{6})$ *sarà:*

$$\text{se } \left(\frac{\Delta}{p}\right) = 0, \quad (p \equiv 3 \pmod{4}), \quad p \equiv 2 \pmod{3})$$

$$h(\Delta p^2) = p^2 h_1(\Delta) + \frac{p^2+1}{2}\, h_2(\Delta) + \frac{p^2+2}{3}\, h_3(\Delta);$$

$$\text{se } \left(\frac{\Delta}{p}\right) \neq 0 (p \equiv 2 \pmod 3) \left\{ \begin{array}{l} \text{e } p \equiv 1 \pmod 4 \\ h(\Delta p^2) = [p-1)^2 - 2] h_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} - 1\right] h_2(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2-1}{3} + 1\right] h_3(\Delta), \\ \text{e } p \equiv 3 \pmod 4 \\ h(\Delta p^2) = [(p-1)^2 - 2] h_1(\Delta) + \frac{(p-1)^2}{2} h_2(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2-1}{3} + 1\right] h_3(\Delta); \end{array} \right.$$

sia μ *un numero primo complesso* π, $N(\pi) = q$, $q \equiv 1 \pmod 6$, *sarà*:

se $\left(\frac{\Delta}{q}\right) = 0$, $(q \equiv 1 \pmod 4)$, $q \equiv 1 \pmod 3)$)

$$h(\Delta q) = q h_1(\Delta) + \frac{q+1}{2} h_2(\Delta) + \frac{q+2}{3} h_3(\Delta);$$

$$\text{se } \left(\frac{\Delta}{q}\right) \neq 0 (q \equiv 1 \pmod 3) \left\{ \begin{array}{l} \text{e } q \equiv 1 \pmod 4 \\ h(\Delta q) = (q+1) h_1(\Delta) + \left[\frac{q+1}{2} + 1\right] h_2(\Delta) + \left[\frac{q+2}{3} + 1\right] h_3(\Delta) \\ \text{e } q \equiv 3 \pmod 4 \\ h(\Delta q) = (q+1) h_1(\Delta) + \frac{q+1}{2} h_2(\Delta) + \left[\frac{q+2}{3} + 1\right] h_3(\Delta), \end{array} \right.$$

ed inoltre:

$$h(\Delta) = h_1(\Delta) + h_2(\Delta) + h_3(\Delta).$$

Stabilite così le formule relative ad un numero indecomponibile, non è difficile scrivere quelle relative ad un intero composto, poichè basta comporre fra loro le formule relative ai fattori indecomponibili di questo numero. Si ottengono formule poco semplici e di più perdono l'omogeneità rispetto ai numeri $h_i(\Delta)$; perciò tralasceremo di scriverle ([34]).

§ 9. **Forme definite di Hermite primitive di seconda specie.**

Andiamo ora a stabilire anche per le forme definite (positive) di Hermite, a determinante Δ, primitive di seconda specie, le relazioni sopra il numero delle classi, oggetto della attuale Memoria.

([34]) Nelle relazioni ora scritte, nei casi che uno dei numeri $h_i(\Delta)$ sia nullo, due nel corpo $K(\sqrt{-3})$, ciò che viene precisato da quanto è esposto in principio del paragrafo, si ha che $h(\Delta)$ è divisore di $h(\Delta\mu\mu_0)$, come è stato trovato per le forme di Gauss e di Dirichlet. Analogamente si dica per le relazioni che si stabiliscono nel § 9.

Tali forme appartengono ai corpi $K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-2})$, $K(\sqrt{-3})$ e, per Δ, siano verificate le condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza delle forme primitive di seconda specie ([35]).

I relativi gruppi automorfi aritmetici potranno essere un G_2, un G_4, ed un G_6 (§. 6).

Sia il corpo $K(\sqrt{-1})$. Esistono forme definite (positive), a determinante Δ, primitive di seconda specie a gruppo automorfo G_2 se Δ è rappresentabile dalla forma φ_1, del § precedente, nel modo ivi specificato, però con z e t entrambi pari. Invece, forme definite, primitive di seconda specie, a gruppo G_4 ne esistono sempre; infatti: se $\Delta \equiv 1 \pmod{4}$, si ha la forma $\left(2,\ 1,\ \frac{1-\Delta}{2}\right)$, il cui indice cade sopra la retta $\xi = \frac{1}{2}$, $\eta = 0$ del poliedro fondamentale del gruppo di PICARD; se $\Delta \equiv 2 \pmod{4}$, si ha la forma $\left(2,\ 1+i,\ 1-\frac{\Delta}{2}\right)$, il cui indice cade sopra la retta $\xi = \eta = \frac{1}{2}$ del detto poliedro (§ 6).

Sia il corpo $K(\sqrt{-2})$. È subito visto che esistono sempre delle forme definite (positive) di HERMITE a determinante Δ, primitive di seconda specie a gruppo automorfo G_2; quelle a gruppo automorfo G_4 esistono se Δ è rappresentabile dalla forma φ_2, del paragrafo precedente, nel modo ivi detto, però con $y \equiv 0 \pmod{2}$.

Sia il corpo $K(\sqrt{-3})$. Esistono forme definite (positive) a determinante Δ, primitive di seconda specie, a gruppo automorfo G_2, se Δ è rappresentabile da una almeno delle due forme φ_3 e φ_4, del paragrafo precedente, nel modo ivi detto, però con z e t entrambi pari. Similmente, quelle a gruppo G_4 esistono se Δ è rappresentabile dalla somma φ_5, del paragrafo precedente, nel modo detto, con $y \equiv 0 \pmod{2}$; similmente può stabilirsi dell'esistenza delle forme a gruppo G_6.

Indichiamo con $h'(\Delta)$, il numero delle classi di forme definite positive di HERMITE, a determinante Δ, primitive di seconda specie, appartenenti ad uno qualunque dei tre corpi; indichiamo con $h'_1(\Delta)$, $h'_2(\Delta)$ e $h'_3(\Delta)$ i numeri delle classi di forme di HERMITE appartenenti al corpo fissato, a determinante Δ, primitive di seconda specie, rispettivamente a gruppo automorfo aritmetico G_2, G_4 e G_6. Qualcuno dei numeri $h'_i(\Delta)$ potrà essere nullo, come è stato veduto e precisato ora.

([35]) Cfr. Introduzione.

Similmente a quanto si è esposto nel paragrafo precedente, si giunge, per le forme definite primitive di seconda specie nei corpi $K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-2})$ e $K(\sqrt{-3})$, alle relazioni seguenti:

$$h'(\Delta\mu\mu_0) = n_1 h'_1(\Delta) + n_2 h'_2(\Delta) + n_3 h'_3(\Delta),$$

e

$$h'(\Delta) = h'_1(\Delta) + h'_2(\Delta) + h'_3(\Delta).$$

Specificando ora il corpo a cui appartengono le nostre forme dando ad n i numeri n_1, n_2 ed n_3 i loro vari valori (§ 7), queste relazioni ci offrono i risultati finali, per le forme definite (positive) di HERMITE primitive di seconda specie:

$$K(\sqrt{-1}).$$

Siano $\mathrm{h}'(\Delta)$ *ed* $\mathrm{h}'(\Delta\mu\mu_0)$, *i numeri delle classi di forme definite (positive) di Hermite, appartenenti al corpo* $\mathrm{K}(\sqrt{-1})$, *rispettivamente a determinante* Δ *e* $\Delta\mu\mu_0$, *ove* μ *è un numero primo nel corpo, e primitive di seconda specie; siano inoltre* $\mathrm{h}'_1(\Delta)$, $\mathrm{h}'_2(\Delta)$ *ed* $\mathrm{h}'_3(\Delta)$ *i numeri delle classi di forme definite (positive) di Hermite, appartenenti allo stesso corpo, a determinante* Δ, *primitive di seconda specie, rispettivamente a gruppo automorfo aritmetico* G_2, G_4 *e* G_6. *Secondo la natura del numero* μ, *nel corpo, si hanno le seguenti relazioni:*

sia μ *un numero primo razionale* p ($\mathrm{p} \equiv 3$) (mod. 4)), *sarà:*

se $\left(\dfrac{\Delta}{p}\right) = 0$,

$$h'(\Delta p^2) = p^2 h'_1(\Delta) + \frac{p^2+1}{2} h'_2(\Delta) + \frac{p^2+2}{3} h'_3(\Delta);$$

se $\left(\dfrac{\Delta}{p}\right) = -1$ ($p \equiv 2$ (mod. 3))

$$h'(\Delta p^2) = [(p-1)^2 - 2] h'_1(\Delta) + \frac{(p-1)^2}{2} h'_2(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2-1}{3} + 1\right] h'_3(\Delta);$$

se $\left(\dfrac{\Delta}{p}\right) = +1$ ($p \equiv 1$ (mod. 3))

$$h'(\Delta p^2) = (p-1)^2 h'_1(\Delta) + \left[\frac{(p-1)^2}{2} + 1\right] h'_2(\Delta) + \frac{(p-1)^2}{3} h'_3(\Delta);$$

sia μ *un numero primo complesso* π, $N(\pi)=q$, ($q\equiv 1 \pmod 4$), *sarà:*

se $\left(\frac{\Delta}{q}\right)=0$

$$h'(\Delta q)=qh'_1(\Delta)+\frac{q+1}{2}h'_2(\Delta)+\frac{q+2}{3}h'_3(\Delta),$$

$$\text{se } \left(\frac{\Delta}{q}\right)\neq 0 \begin{cases} \text{e } q\equiv 1 \pmod 3 \\ h'(\Delta q)=(q+1)h'_1(\Delta)+\left[\frac{q+1}{2}+1\right]h'_2(\Delta)+\left[\frac{q+2}{3}+1\right]h'_3(\Delta), \\ \text{e } q\equiv 2 \pmod 3 \\ h'(\Delta q)=(q+1)h'_1(\Delta)+\left[\frac{q+1}{2}+1\right]h'_2(\Delta)+\frac{q+1}{3}h'_3(\Delta); \end{cases}$$

ed inoltre:

$$h'(\Delta)=h'_1(\Delta)+h'_2(\Delta)+h'_3(\Delta).$$

$$K(\sqrt{-2}).$$

Siano $h'(\Delta)$ *e* $h'(\Delta\mu\mu_0)$ *i numeri delle classi di forme definite (positive) di Hermite, appartenenti al corpo* $K(\sqrt{-2})$, *rispettivamente a determinante* Δ *e* $\Delta\mu\mu_0$, *ove* μ *è un numero primo nel corpo, e primitive di seconda specie, sieno inoltre* $h'_1(\Delta)$, $h'_2(\Delta)$ ed $h'_3(\Delta)$ *i numeri delle classi di forme definite (positive) di Hermite, appartenenti allo stesso corpo, a determinante* Δ, *primitive di seconda specie, rispettivamente a gruppo automorfo aritmetico* G_2, G_4, *e* G_6. *Secondo la natura aritmetica del numero* μ, *nel corpo si hanno le relazioni seguenti:*

Sia μ *un numero primo razionale* p, *sarà:*

se $\left(\frac{\Delta}{p}\right)=0$ ($p\equiv 3 \pmod 4$, $p\equiv 2 \bmod 3$)

$$h'(\Delta p^2)=p^2h'_1(\Delta)+\frac{p^2+1}{2}h'_2(\Delta)+\frac{p^2+2}{3}h'_3(\Delta);$$

$$\text{se } \left(\frac{\Delta}{p}\right)\neq 0 \begin{cases} p\equiv 2 \pmod 3 \begin{cases} \text{e } p\equiv 1 \pmod 4 \\ h'(\Delta p^2)=[(p-1)^2-2]h'_1(\Delta)+\left[\frac{(p-1)^2}{2}-1\right]h'_2(\Delta)+\left[\frac{(p-1)^2-1}{3}+2\right]h'_3(\Delta), \\ \text{e } p\equiv 3 \pmod 4 \\ h'(\Delta p^2)=[(p-1)^2-2]h'_1(\Delta)+\frac{(p-1)^2}{2}h'_2(\Delta)+\left[\frac{(p-1)^2}{3}+1\right]h'_3(\Delta): \end{cases} \\ p\equiv 1 \pmod 3 \begin{cases} \text{e } p\equiv 1 \pmod 4 \\ h'(\Delta p^2)=(p-1)^2h'_1(\Delta)+\frac{(p-1)^2}{2}h'_2(\Delta)+\frac{(p-1)^2}{3}h'_3(\Delta), \\ \text{e } p\equiv 3 \pmod 4 \\ h'(\Delta p^2)=(p-1)^2h'_1(\Delta)+\left[\frac{(p-1)^2}{2}+1\right]h'_2(\Delta)+\frac{(p-1)^2}{3}h'_3(\Delta); \end{cases} \end{cases}$$

sia μ *un numero primo complesso* π, $N(\pi) = q$, *sarà:*

se $\left(\frac{\Delta}{q}\right) = 0\, (q \equiv 1 \pmod{4},\ q \equiv 1 \pmod{3})$

$$h'(\Delta q) = q h'_1(\Delta) + \frac{q+1}{2} h'_2(\Delta) + \frac{q'+2}{3} h'_3(\Delta);$$

$$\text{se } \left(\frac{\Delta}{q}\right) \neq 0 \begin{cases} q \equiv 1 \pmod{3} \begin{cases} \text{e } q \equiv 1 \pmod{4} \\ h'(\Delta q) = (q+1) h'_1(\Delta) + \left[\frac{q+1}{2} + 1\right] h'_2(\Delta) + \left[\frac{q+2}{3} + 1\right] h'_3(\Delta), \\ \text{e } q \equiv 3 \pmod{4} \\ h'(\Delta q) = (q+1) h'_1(\Delta) + \frac{q+1}{2} h'_2(\Delta) + \frac{q+2}{3} h'_3(\Delta); \end{cases} \\ q \equiv 2 \pmod{3} \begin{cases} \text{e } q \equiv 1 \pmod{4} \\ h'(\Delta q) = (q+1) h'_1(\Delta) + \left[\frac{q+1}{2} + 1\right] h'_2(\Delta) + \frac{q+1}{3} h'_3(\Delta), \\ \text{e } q \equiv 3 \pmod{4} \\ h'(\Delta q) = (q+1) h'_1(\Delta) + \frac{q+1}{2} h'_2(\Delta) + \frac{q+1}{3} h'_3(\Delta); \end{cases} \end{cases}$$

ed inoltre:

$$h'(\Delta) = h'_1(\Delta) + h'_2(\Delta) + h'_3(\Delta).$$

$K(\sqrt{-3})$.

Se le forme definite (positive) di Hermite, primitive di seconda specie, appartengono a questo corpo $K(\sqrt{-3})$, *si ha il sistema di relazioni* che si è trovato per le forme definite (positive) di Hermite, *primitive di prima specie*, appartenenti a tale corpo.

Anche per le forme primitive di seconda specie, le formule relative ai numeri composti, si possono ottenere da quelle relative ai numeri indecomponibili e, per queste formule, si può dire quanto già si è detto alla fine del paragrafo precedente.

Osservazione. Si è notato (§ 8), nelle relazioni stabilite per le forme definite, primitive di prima specie, una differenza algebrica, secondo che le forme appartengono ai corpi $K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-2})$ oppure al corpo $K(\sqrt{-3})$; precisamente: per il primo caso il numero $h(\Delta\mu\mu_0)$ ha un'espressione binomia; per il secondo, un'espressione trinomia. Le considerazioni svolte nella prima parte del § 7, ci permettono di asserire che questo fatto non è limitato a questi casi, ma assume un carattere generale, per le forme definite primitive di prima specie; cioè: avviene come nei corpi $K(\sqrt{-1})$, $K(\sqrt{-2})$, in corpi $K(\sqrt{-d})$, ove $d \not\equiv -1 \pmod{4}$; avviene come nel corpo $K(\sqrt{-3})$, in corpi $K(\sqrt{-d})$, ove $d \equiv -1 \pmod{4}$

Invece, per le forme definite, primitive di seconda specie, la forma algebrica (forma trinomia per il numero $h'(\Delta\mu\mu_0)$) si mantiene inalterata e questa forma è quella del numero $h(\Delta\mu\mu_0)$ per le forme definite, primitive di prima specie, in corpi $K(\sqrt{-d})$, ove $d \equiv -1 \pmod{4}$.

Lettera del prof. G. A. Miller al prof. Luigi Bianchi.

UNIVERSITY OF ILLINOIS

October 17, 1925.

My dear Professor Bianchi,

In the *Annali di Matematica*, August 1925, volume 2, page 321, Pacifico Mazzoni published an article entitled « Sui gruppi transitivi. Totalità delle sostituzioni permutabili con tutte quelle di un dato gruppo ». The main theorem on page 323 is not new. It was first proved by one of my students and is commonly known as *Kuhn's theorem.* Cf. *Theory and Applications of Finite Groups*, Miller, Blichfeldt, Dickson, 1916, page 37.

The last part of the theorem on page 324 is not true. That is, K is not always holoedrically isomorphic with some subgroup of the entire transitive group G. This may be proved by extending the direct product of two quaternion groups by means of an operator of order 2 which interchanges these quaternion groups. If the group of order 128 thus obtained is represented as a transitive substitution group of degree 64 with respect to a subgroup of order 2 contained in one of these quaternion groups the group K of order 32, which is composed of all the subtitutions on the letters of this transitive group G which are commutative with every one of its substitutions is not holoedrically isomorphic with a subgroup of G.

A proof of this interesting fact results directly if it is noted that K contains an abelian subgroup of order 8 and of type (1, 1, 1) while G does not contain such a subgroup. In fact, the subgroup of order 64 which is the direct product of two quaternion groups involves only one non-cyclic subgroup of order 4 and two of the substitutions of order 2 which are contained in this subgroup are not commutative with any of the other substitutions contained in G. It therefore follows that this transitive group of degree 64 and of order 128 does not contain a subgroup which is holoedrically isomorphic with the group of order 32 composed of all the substitutions on the letters of this transitive group which are commutative with every substitution of this transitive group. Hence the last part of the theorem in questiòn is not correct, and the rest of the theorem is not new.

Very respectfully yours G. A. MILLER

P. S. - In view of the delay in writing I would say that yon have my permission to publish the above letter in order to avoid the spreading of these errors. G. A. MILLER

Il 5 gennaio 1926 moriva in Milano, nell' età di 80 anni, il

PROF. GIUSEPPE JUNG

Laureato in matematiche a Napoli nel 1867, fu dei primi collaboratori di F. Brioschi nella istituzione del R. Istituto Tecnico Superiore di Milano, e vi tenne per lunghi anni, con lode, l'insegnamento della Geometria Proiettiva e Descrittiva. Fu membro effettivo del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, aggregato del R. Istituto Veneto; collaboratore della « Encyclopädie der Math. Wissenschaften », ecc. Ma gli « Annali di Matematica » ne compiangono in modo particolare la perdita e tengono a ricordarne con speciale menzione il nome, poichè Egli fu membro della Direzione degli « Annali » dal 1897 fino al 1923, cioè per tutta la durata della terza serie, e come membro residente a Milano dove si pubblicava il periodico, curò la pubblicazione stessa con rara intelligenza, con cura indefessa e con grande abnegazione; e all' opera di Lui, costante, difficile e da molti ignorata, si deve se, in momenti difficili, il nostro glorioso periodico potè perseverare nell' opera intrapresa a vantaggio della scienza.

Alla Sua memoria vada il saluto riverente della Direzione degli « Annali ».

Felice Klein (1849-1925).

Cenno commemorativo di GUIDO CASTELNUOVO (a Roma).

Il giudizio che spesso pronunziamo intorno ai grandi uomini scomparsi limitandoci a leggerne le opere è unilaterale e dà una immagine sbiadita del pensatore a cui rivolgiamo la nostra attenzione. Spetta ai contemporanei che hanno vissuto sotto il fascino di lui e ne hanno seguito le molteplici attività, di fornire tutti gli elementi che occorrono per renderne compiuto il ritratto.

Per quanto grande possa parere l' opera matematica di FELICE KLEIN, credo che l' uomo sia stato superiore all' opera. Se esaminiamo con minuziosa critica la novità o la perfezione di alcuni suoi risultati, non riusciamo a renderci ragione dell' influenza che egli ha avuto sulla matematica dell' ultimo cinquantennio. Discorrendo di lui dobbiamo por mente al pensiero filosofico che ispira tutti i suoi scritti, all' importanza dei problemi che egli ha proposto e che hanno provocato le indagini di altri matematici insigni, all' efficacia del suo insegnamento, che ha dominato quasi tutti i campi della nostra scienza ed ha portato luce e rivelato legami imprevisti in svariate teorie; dobbiamo ricordarci delle sue eccezionali facoltà organizzatrici che hanno suscitato tante alte iniziative.

Il KLEIN fu un grande animatore e per dar vita alle sue idee ebbe la risorsa di eminenti qualità artistiche. Riconosciamo in lui una dote che spetta agli artisti sommi: la facoltà di scolpire in forma definitiva immagini che ad altri erano apparse annebbiate e senza rilievo. Chi confronti quella larva che è la geometria metrica-proiettiva di CAYLEY (pur così ricca di idee) col solido organismo della geometria non-euclidea di KLEIN non troverà esagerate le nostre parole.

Alcuni suoi scritti e in particolar modo il suo insegnamento diffuso in tutto il mondo ebbero una influenza così grande sopra una parte dei matematici contemporanei che spesso, quasi inconsciamente, pensiamo secondo le sue vedute e adoperiamo il suo linguaggio.

FELICE KLEIN, laureatosi a Bonn nel 1868, fu colà assistente del PLÜCKER dal 1866 fino alla morte (1868) di questo grande matematico e fisico. E dal suo maestro portò quell'amore per la geometria e per la fisica che egli sentì fino agli ultimi giorni. Del fascino che la fisica esercitava su di lui parla più volte il KLEIN in quei preziosi commenti ai suoi scritti coi quali ha voluto arricchirne la raccolta. A provarlo basterebbe il modo come egli concepisce la ricerca matematica: l'interesse rivolto più al risultato che alla dimostrazione, il bisogno di rendersi ragione di proprietà riposte mediante procedimenti grafici o sperimentali, la intuizione visiva e le geniali osservazioni sui rapporti tra gli enti geometrici astratti e le immagini grossolane con cui li raffiguriamo.

Pure all'influenza del PLÜCKER sono dovuti i primi lavori di KLEIN sulla geometria della retta, che lo condussero a riguardare la retta come un punto di una varietà quadratica di uno spazio a cinque dimensioni e ad applicare a questo campo di ricerche risultati classici della teoria delle forme quadratiche.

Nuovi orizzonti aprono al KLEIN le conversazioni con SOPHUS LIE (che egli conobbe nel 1869 ed ebbe compagno a Parigi nella primavera nel 1870) e lo scambio di idee coi maggiori maestri francesi di allora, in particolare col DARBOUX e col JORDAN. Videro allora quei due giovani matematici tutta l'importanza che il concetto di gruppo di operazioni ha nella scienza e si proposero di approfondirne la teoria.

Per la mente filosofica del KLEIN la stessa classificazione degli indirizzi geometrici è legata colla nozione di gruppo. Proprietà geometrica di una figura non è un carattere della figura considerata isolatamente, ma è un carattere comune ad essa e a tutte le figure che da quella si ottengono trasformandola mediante un gruppo di operazioni che comprenda il gruppo dei movimenti o coincida con esso. Ad ogni gruppo siffatto corrisponde un ramo di geometria, i cui caratteri salienti dipendono dall'indole del gruppo. Ad es. la geometria euclidea ed i due tipi di geometrie non-euclidee in senso stretto (geometria di LOBATCHEFSKI e geometria di RIEMANN) sono caratterizzate da gruppi di omografie a sei parametri (movimenti) che lasciano invariata una quadrica, degenere o no.

Questa concezione grandiosa, che raggruppa sotto un unico punto di vista svariatissime ricerche geometriche, può esser estesa anche ad altri rami dello scibile. Il KLEIN stesso aveva fatto notare fino dal 1902 come quel principio di classificazione potesse applicarsi nella meccanica. E pochi anni dopo ebbe il compiacimento di veder ricondotto, attraverso la teoria della relatività, lo studio fisico dell'universo allo studio di un gruppo di operazioni, che anzi, nel caso della relatività ristretta, è l'estensione di uno di quei tipi che egli aveva incontrato nella geometria non euclidea.

Nel programma di lavoro che il KLEIN e il LIE avevano formulato durante le loro conversazioni giovanili, il primo si era proposto lo studio dei gruppi discontinui di operazioni. Il legame che il GALOIS aveva scoperto fra il problema della risoluzione di un'equazione algebrica e lo studio di un gruppo di sostituzioni sulle sue radici suggerisce al KLEIN, in uno dei suoi primi lavori (1875), una ricerca che nelle sue mani e in quelle di colleghi e discepoli ha preso poi un ampio sviluppo. Si tratta di caratterizzare i gruppi composti di un numero finito di trasformazioni lineari di una variabile e di sfruttare il più interessante di quelli per lo studio della equazione di quinto grado. Il KLEIN (quasi contemporaneamente allo SCHWARZ che mirava ad altri scopi) si accorge che i gruppi cercati equivalgono ai gruppi di rotazioni intorno ad un punto capaci di sovrapporre a sè stesso un poliedro regolare avente ivi il centro; donde la determinazione immediata dei detti gruppi. In particolare, i dodici vertici di un icosaedro, considerati (sulla sfera circoscritta) come indici dei valori di una variabile complessa, sono radici di una equazione del dodicesimo grado, le cui risolventi compariscono anche nelle ricerche di BRIOSCHI, HERMITE e KRONECKER intorno alla risoluzione dell'equazione di 5° grado. Di qui un legame che ha permesso al KLEIN di illuminare e perfezionare, con considerazioni geometriche, la teoria di questa equazione e della sua risoluzione mediante funzioni modulari ellittiche.

Il KLEIN vien così condotto allo studio di queste ultime funzioni e del gruppo (infinito, discontinuo) di trasformazioni lineari sulla variabile che le lasciano inalterate. Nella costruzione della funzione, dato il gruppo e la corrispondente divisione del piano della variabile complessa, si risente la influenza che il genio di RIEMANN ha esercitato sullo spirito di KLEIN. Egli aveva voluto, in quell'epoca (1881) rendersi ragione per via intuitiva di quel mirabile e riposto risultato di RIEMANN che afferma l'esistenza, sopra una superficie connessa, di funzioni di una variabile complessa aventi i caratteri degli integrali di funzioni algebriche. Staccandosi dalle consuete superficie di RIEMANN a più fogli sovrapposti, ma convinto di interpretar il pensiero di quel grande, il KLEIN parte da una superficie chiusa di forma qualsiasi. La suppone formata da una lamina conduttrice e mediante una esperienza facilmente concepibile fa percorrere la lamina da una corrente elettrica stazionaria. Il potenziale che si determina nei singoli punti fornisce un *integrale abeliano*, le cui singolarità dipendono dai punti ove la superficie è a contatto coi fili conduttori. Le principali proprietà dei detti integrali riescono conseguenze quasi immediate di questa generazione. Il KLEIN non pretende naturalmente di dare una dimostrazione matematica dei fatti che ritrova, ma solo di indicare una via euristica che egli ha creduto un momento potesse esser quella stessa percorsa da RIEMANN nelle sue scoperte.

Nello stesso tempo il KLEIN, proseguendo il programma delle sue ricerche, iniziò lo studio delle più generali funzioni uniformi di una variabile complessa che si riproducono per un gruppo discontinuo di trasformazioni lineari su questa. Lo stesso soggetto stava allora trattando un giovane matematico francese che, con quegli scritti, rivelò al mondo scientifico le sue doti eccezionali: ENRICO POINCARÉ. La corrispondenza che i due matematici si scambiarono per un anno al fine di comunicarsi le loro scoperte e le vie con cui vi erano pervenuti, è un documento di grande interesse per la storia dell'Analisi di quel periodo. KLEIN lavora sulla traccia di RIEMANN; POINCARÉ, che all'inizio delle sue ricerche non sembra avesse studiato l'opera del sommo matematico di Gottinga, procede colla rappresentazione analitica familiare alla scuola francese. Analogie e differenze tra le mentalità dei due giovani matematici si rivelano in quelle lettere. Assistiamo colà allo sviluppo della nuova teoria, alla quale entrambi hanno portato contributi essenziali.

Dovrei discorrere degli altri campi di ricerche del KLEIN, riguardanti le equazioni differenziali lineari, la forma delle curve e superficie algebriche reali, argomenti vari di meccanica e fisica matematica. Ma non voglio entrare in particolari.

Tra i lavori originali possono anche esser considerati i corsi di lezioni che, prima in litografia, poi a stampa, si son diffusi in tutto il mondo; originali, se non per i soggetti, per la forma nuova colla quale quei soggetti sono esposti. Questioni che pur avevano dato luogo in memorie o trattati classici a discussioni penose, sono da lui presentate sotto aspetto impreveduto ed attraente. Egli sa ovunque mettere in luce il lato essenziale, lasciando in ombra gli sviluppi formali che rappresentano solo uno dei mezzi per arrivare alla verità. Convinto che occorra combattere l'eccessivo specialismo, egli si sforza di dimostrare come l'aiuto scambievole di rami diversi della matematica permetta spesso di risolvere agevolmente problemi che, trattati da un unico punto di vista, presenterebbero difficoltà non lievi.

Molte iniziative egli promosse e tradusse in atto colla convincente eloquenza, colla tenacia, coll'abilità organizzatrice. Sostenne, insieme al DARBOUX, l'opportunità che l'insegnamento della matematica nelle Scuole medie venisse rinnovato coll'introduzione dei primi concetti del Calcolo infinitesimale, e curò la preparazione degli insegnanti svolgendo egli stesso dei corsi appositi. Nominato, nel Congresso matematico di Roma del 1908, Presidente della Commissione internazionale dell'insegnamento matematico, diresse la inchiesta intorno alle condizioni che son fatte al detto insegnamento nelle diverse nazioni. Propugnò un più intimo legame fra la scienza pura e le applicazioni e creò nella Università di Gottinga una scuola per dare una coltura matematica superiore ad ingegneri aspiranti a perfezionare la tecnica. Fu l'iniziatore e l'anima della grande Enciclopedia delle matematiche, la quale rende utili servigi, e maggiori ne renderebbe se qualche collaboratore, meglio interpretando il pensiero del maestro, avesse dato una forma più sintetica e meno particolarista all'articolo affidatogli.

Il KLEIN fu sempre prodigo di consigli, di incoraggiamenti e di aiuti ai suoi numerosissimi discepoli ed anche a coloro che da lontano a lui si rivolgevano. Apprezzò le nuove conquiste del pensiero da qualunque parte venissero e fu spesso il primo a segnalare, colla sua autorità indiscussa, lavori di giovani che si affacciavano alla scienza. Anche per questo la sua morte destò un così largo tributo di rimpianto e di stima. Ad esso partecipa con speciale fervore chi ebbe la fortuna di avvicinare questa forte tempra di matematico, di filosofo e di animatore.

On tensor geometry.

P. DIENES (at Swansea).

CHAPTER I. Tensor geometry at a point.

1. Space has two different kinds of properties:

a) *local* properties manifested in the character of geometrical constructions in the neighbourhood of a point;

b) *connective* properties manifested in relations between constructions in the neighbourhood of different points. A prominent property of the second kind is correspondence of parallel directions.

Thus e. g. in Riemannian geometry it was LEVI-CIVITA's definition of parallelism that opened the way to the systematic construction of the theory. On the other hand WEYL and EDDINGTON showed that physical applications require a generalisation of the idea of Riemannian geometry.

In this paper we are going to examine a twofold extension of the usual conception of that geometry. First of all, we do not suppose that the connective properties are deduced from local though infinitesimal properties. In that way we shall survey a large class of connections independent or not of the local character of space. Secondly we do not suppose that the network of relations in M_n constituting geometry is necessarily established by a quadratic form or by any element of distance. We replace it by the following conception.

Denote by $M_n(T, x_0)$ the manifold of tensors of all possible ranks and types (tensors of 0 rank invariant, of the first rank vectors, etc. covariant, contravariant and mixed) attached to the same point $x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n$. We denote the set of $M_n(T, x)$ for all the points $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ of M_n by $M_n(T)$ and call it: the n-dimensional (mathematical) tensor manifold. Finally a network of relations between tensor manifolds at different points constitutes a tensor space $S_n(T)$.

2. Local operations on tensors. — For the usual operations like addition, multiplication and contraction of tensors attached to the same point we refer to our paper in the Journal de Mathématiques [1]. We notice however that we denote contraction in the following way: If e. g. $A = A^k_{oij} e_k e^i e^j$, i. e. the tensor with the components A^k_{oij}, we have

$$\vdash A \dashv_{(1,3)} = A^j_{oij} e^i.$$

The symbol of a mixed tensor of rank ω is

$$A = A^{.k_\nu.}_{.i_\nu.}(x^1,\ldots, x^n) e^{i_\nu} e_{k_\nu}(x^1,\ldots, x^n)$$

where $.i_\nu. \equiv i_1, i_2,\ldots, i_\omega$, $.k_\nu. \equiv k_1, k_2,\ldots, k_\omega$ and $e^{i_\nu} e_{k_\nu}(x^1,\ldots, x^n)$ stands for

$$\prod_{\nu=1}^{\omega} e^{i_\nu}(x^1,\ldots, x^n) e_{k_\nu}(x^1,\ldots, x^n)$$

either i_ν or k_ν being zero for the same ν and $e^0 = e_0 \equiv 1$. We generally do not exclude from our considerations non-homogeneous tensors such as

$$A_0 + A^i e_i + A_{ij} e^i e^j + \ldots$$

With regard to differentiation of tensors, we remark that *the difference* $A(x + \Delta x) - A(x)$ *is so far meaningless*, for addition and substraction of tensors attached to different points x and $x + \Delta x$ have not yet been defined. This difference aquires a meaning only when we replace $A(x + \Delta x)$ by a tensor $B(x)$ « equivalent » to it. And the example of forces acting on rigid bodies shows that it is not always opportune to move a vector from its axis. Anyhow, differentiation of tensors must be preceded by a definition of « equivalence » of tensors attached to different points.

On the other hand a finite combination of the four elementary operations on tensors (division being supplanted by contraction) gives us a sufficiently concrete idea of tensor functions i. e. mathematical passage from one tensor to another, like

$$Y = \vdash AX \dashv_{(1,3)} \quad \text{with} \quad A = A^k_{oi} e_k e^i, \quad X = X_i e^i, \quad Y = Y_i e_i.$$

Similarly the notion of limit extends to tensor sequences, $\lim_{n\,\infty} \underset{(n)}{A}$ being equivalent to as many separate limits as there are components in the thensors $\underset{(n)}{A}$.

[1] P. DIENES, *Sur la structure mathématique du Calcul Tensoriel*. Premier Chapitre. Journal de Mathématiques, 1924, p. 79. We keep here to the notation of that paper.

If the tensors of the sequence are not of the same type (and generally not homogeneous) the number of separate limits may increase even to infinity.

3. Definition of length. — The physical application of the Tensor Calculus must be preceded by a geometrical interpretation, i. e. by the definition of length and direction.

Usually the length $|A|$ of a contravariant tensor $A^i e_i$ is defined by the formula

(3-1) $$|A|^2 = A^i A^j g_{ij}$$

where the metrical parameters $g_{ij}(x^1, x^2,..., x^n)$, are arbitrarily given functions. We define similarly the length $|A|$ of a covariant tensor $A = A_i e^i$ by the formula

$$|A|^2 = A_i A_j g^{ij}$$

where the functions $g^{ij}(x^1,..., x^n)$ are in general independent of g_{ij}.

Transforming the Calculus by changing the variables, we can easily see that the parameters g_{ij} (and g^{ij}) are transformed as the components of a covariant (contravariant) tensor of the second rank.

Hence we define length by introducing two « norm-tensors »

$$N = g_{ij} e^i e^j, \quad \bar{N} = g^{ij} e_i e_j$$

and by putting for the contravariant tensors of the first rank

$$|A|^2 = |\text{-} AN \text{-}|_{(1,3)(2,4)}$$

and for the covariant tensors of the first rank

$$|A|^2 = |\text{-} A\bar{N} \text{-}|_{(1,3)(2,4)}.$$

By means of that definition, at every point $(x^1, x^2,..., x^n)$ of the n-dimensional mathematical manifold there is a special way of attributing a length to tensors of the first rank.

4. Metrical contraction. — To be able to extend these definitions to homogeneous tensors of any type and rank, we are going to extend the definition of contraction to two suffixes of the same kind. We put

(4-1) $$|\text{-} e^i e^j \text{-}| = g^{ij}, \quad |\text{-} e_i e_j \text{-}| = g_{ij}$$

or more generally

$$|\text{-}\, \Pi e^{i_\nu} e_{k_\nu} \text{-}|_{(i_\alpha,\, i_\beta)} = g^{i_\alpha i_\beta} \underset{(i_\alpha,\, i_\beta)}{\Pi} e^{i_\nu} e_{k_\nu} \tag{4-2}$$

$$|\text{-}\, \Pi e^{i_\nu} e_{k_\nu} \text{-}|_{(k_\alpha,\, k_\beta)} = g_{k_\alpha k_\beta} \underset{(k_\alpha,\, k_\beta)}{\Pi} e^{i_\nu} e_{k_\nu} \tag{4-3}$$

where the suffixes under Π indicate that the corresponding factors in Π are suppressed, and

$$|\text{-}\, A + B \text{-}| = |\text{-}\, A \text{-}| + |\text{-}\, B \text{-}|. \tag{4-4}$$

In order to distinguish this operation from the contraction of opposite suffixes we call it « metrical ». These two operations being sufficiently distinguished by the suffixes we indicate both operations by the same symbol.

Thus we can define length by putting

$$|A|^2 = |\text{-}\, A \text{-}|_{(a_1,\, a'_1)(a_2,\, a'_2)\dots(a_\omega,\, a'_\omega)}$$

where $a_\nu = i_\nu + k_\nu$, $a'_\nu = j_\nu + l_\nu$ (i. e. a_ν is a non-zero suffix and is equal to i_ν or to k_ν).

As in our case i and j are zero or not at the same time the contraction in question is metrical.

5. The angle of two tensors. — Take two tensors, of the same rank ω,

$$A = A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot} e^{i_\nu} e_{k_\nu}, \quad B = B^{\cdot l_\nu \cdot}_{\cdot j_\nu \cdot} e^{j_\nu} e_{l_\nu}$$

and put

$$|A|\,|B| \cos(A, B) = |\text{-}\, AB \text{-}|_{(a_1,\, b_1)\dots(a_\omega,\, b_\omega)} \tag{5-1}$$

where $a_\nu = i_\nu + k_\nu$, $b_\nu = j_\nu + l_\nu$; this defines the angle between A and B if neither of them is a « nil-tensor », i. e. if $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$. We see immediately that

$$\cos(A, A) = 1 \tag{5-2}$$

i. e. that the angle between A and A is zero. In the same way

$$\cos(A, B) = \cos(B, A) \tag{5-3}$$

if g_{ij} and g^{ij} are symmetrical. Finally, by (5-1), $\cos(A, B)$ is either real or imaginary, so that the angle α between A and B is either real or $\alpha = 2k\pi + i\beta$ or $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + i\beta$.

We give here some geometrical formulae resulting from our definition of angle:

$$(5\text{-}4)\qquad \cos(\overset{(1)}{A}+\ldots+\overset{(\omega)}{A},\ \overset{(1)}{B}+\ldots+\overset{(\omega')}{B})=\frac{\sum\limits_{\substack{i=1,\ldots,\omega\\ k=1,\ldots,\omega'}}|\overset{(i)}{A}||\overset{(k)}{B}|\cos(\overset{(i)}{A},\overset{(k)}{B})}{\sqrt{\sum\limits_{i,k=1,\ldots,\omega}|\overset{(i)}{A}||\overset{(k)}{A}|\cos(\overset{(i)}{A},\overset{(k)}{A})\sum\limits_{i,k=1,\ldots,\omega'}|\overset{(i)}{B}||\overset{(k)}{B}|\cos(\overset{(i)}{B},\overset{(k)}{B})}}$$

$$(5\text{-}5)\qquad \sin(\overset{(1)}{A}+\ldots+\overset{(\omega)}{A},\ \overset{(1)}{B}+\ldots+\overset{(\omega')}{B})=\frac{\begin{vmatrix}\sum\limits_{i,k=1,\ldots,\omega}|\overset{(i)}{A}||\overset{(k)}{A}|\cos(\overset{(i)}{A},\overset{(k)}{A}), & \sum\limits_{\substack{k=1,\ldots,\omega'\\ i=1,\ldots,\omega}}|\overset{(i)}{A}||\overset{(k)}{B}|\cos(\overset{(i)}{A},\overset{(k)}{B})\\ \sum\limits_{\substack{i=1,\ldots,\omega\\ k=1,\ldots,\omega'}}|\overset{(i)}{A}||\overset{(k)}{B}|\cos(\overset{(i)}{A},\overset{(k)}{B}), & \sum\limits_{i,k=1,\ldots,\omega'}|\overset{(i)}{B}||\overset{(k)}{B}|\cos(\overset{(i)}{B},\overset{(k)}{B})\end{vmatrix}}{\sqrt{\sum\limits_{i,k=1,\ldots,\omega}|\overset{(i)}{A}||\overset{(k)}{A}|\cos(\overset{(i)}{A},\overset{(k)}{A})\sum\limits_{i,k=1,\ldots,\omega'}|\overset{(i)}{B}||\overset{(k)}{B}|\cos(\overset{(i)}{B},\overset{(k)}{B})}}$$

$$(5\text{-}6)\qquad \cos(AB-BA,\ CD-DC)=\frac{\cos(A,C)\cos(B,D)-\cos(A,D)\cos(B,C)}{\sin(A,B)\sin(D,C)}$$

$$(5\text{-}7)\qquad \sin(A,A+B)=\frac{|B|}{|A+B|}\sin(A,B).$$

6. Geometrical determination of tensors. — Consider the tensor $A=A^i e_i$, $|A|\neq 0$. As $|\cdot A e^k\cdot|=A^k$ and $|e^k|^2=g^{kk}$, the direction cosines of A with respect to $e^1, e^2, \ldots, e^n$ are

$$(6\text{-}1)\qquad \cos(A,e^k)=\frac{A^k}{|A|\sqrt{g^{kk}}}.$$

We suppose that $g^{kk}\neq 0$, $g_{kk}\neq 0$.

Conversely if the cosines, $\cos(A,e^k)$, and the length of a contravariant tensor of the first rank A are given, equation (6-1) determines the tensor components A^k, i. e. the tensor A. Thus the tensor A seems to be determined by its direction and its length.

The same holds for a tensor $B=B_i e^i$. We have

$$(6\text{-}2)\qquad \cos(B,e^k)=\frac{B_i g^{ik}}{|B|\sqrt{g^{kk}}}.$$

Suppose now that $|A| = |B|$ and that $\cos(A, e^k) = \cos(B, e^k)$. Geometrically there is no difference what-so-ever between the two tensors: they have same length and same direction. Yet are they identical? Certainly not, one being contravariant and the other covariant, i. e. they transform differently. We might introduce, however, the principle of geometrical determination of tensors by the convention that *two tensors having the same length and the same direction are considered as identical.* Hence

$$A^k = B_i g^{ik} \tag{6-3}$$

which establishes a relation between covariant and contravariant tensors of the first rank. In the general Tensor Calculus contraction is the only link between tensors of different types. The geometry of tensors introduces an other by the above postulate.

The same principle applied to covariant tensors gives $B_i g^{ik} e_k = B_i e^i$. We say that the functions $B_i g^{ik}$ are the contravariant components of the covariant tensor $B_i e^i$. The distinction between covariant and contravariant tensors disappears. The tensor is neither covariant nor contravariant but has covariant *components* as well as contravariant ones.

Similarly $A = A^{ij} e_i e_j$ is uniquely determined by its length and its direction cosines

$$\cos(A, e^r e^s) = \frac{A^{rs}}{|A| \sqrt{g^{rr} g^{ss}}}. \tag{6-4}$$

We notice, however, that the two angles $(A, e^r e^s)$ and $(A, e^s e^r)$ are different unless $A^{ij} = A^{ji}$.

If $B = B_i^{\cdot j} e^i e_j$ has the same length and direction cosines as A, we have $A^{ij} = B_s^{\cdot j} g^{si}$. This leads to the process of raising and lowering of the suffixes.

The condition of reciprocity $A^k g_{kj} = A_j = A_i g^{ik} g_{kj}$ requires that

$$g^{ik} g_{kj} = \begin{cases} 1 & \text{if } j = i \\ 0 & \text{if } j \neq i \end{cases} \qquad \text{(no summation w. r. to } i\text{)}. \tag{6-5}$$

We suppose as usual that g^{ik} and thus also g_{ik} are symmetrical and that the determinant of g_{ik} and thus that of g^{ik} does not vanish.

7. If A and B are two tensors of the same type and rank, the *tensors* $\lambda A + \mu B$ *form a plane* in the sense that angles in a tensor plane are additive, i. e. if $\overset{(1)}{A}, \overset{(2)}{A}, \overset{(3)}{A}$ are three tensors of the family, we have

$$(\overset{(1)}{A}, \overset{(3)}{A}) = (\overset{(1)}{A}, \overset{(2)}{A}) + (\overset{(2)}{A}, \overset{(3)}{A})$$

i. e.

$$\cos(\overset{(1)}{A}, \overset{(3)}{A}) = \cos(\overset{(1)}{A}, \overset{(2)}{A}) \cos(\overset{(2)}{A}, \overset{(3)}{A}) - \sin(\overset{(1)}{A}, \overset{(2)}{A}) \sin(\overset{(2)}{A}, \overset{(3)}{A}).$$

Proof. We can always represent the tensors $\lambda A + \mu B$ by orthogonal A and B. In fact if $|\!-AB-\!| \neq 0$, we can choose λ_0, $\mu_0 \neq 0$ such that

$$|\!-A, \lambda_0 A + \mu_0 B-\!| = \lambda_0 |\!-AA-\!| + \mu_0 |\!-AB-\!| = 0$$

then, for given λ, μ, there are values α, β such that

$$\lambda A + \mu B = \alpha A + \beta(\lambda_0 A + \mu_0 B)$$

namely $\lambda = \alpha + \lambda_0\beta$, $\mu = \beta\mu_0$, i. e. every tensor $\lambda A + \mu B$ figures in

$$\alpha A + \beta(\lambda_0 A + \mu_0 B)$$

and vice versa.

Put now $|\!-AA-\!| = a$, $|\!-BB-\!| = b$. We have $\overset{(i)}{A} = \lambda_i A + \mu_i B$ and

$$\cos(\overset{(1)}{A}, \overset{(2)}{A}) = \frac{\lambda_1\lambda_2 a + \mu_1\mu_2 b}{|\overset{(1)}{A}||\overset{(2)}{A}|},$$

$$\sin^2(\overset{(1)}{A}, \overset{(2)}{A}) = \frac{(\lambda_1^2 a + \mu_1^2 b)(\lambda_2^2 a + \mu_2^2 b) - (\lambda_1\lambda_2 a + \mu_1\mu_2 b)^2}{|\overset{(1)}{A}|^2|\overset{(2)}{A}|^2} = \frac{ab(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)^2}{|\overset{(1)}{A}|^2|\overset{(2)}{A}|^2}.$$

Hence

$$\cos(\overset{(1)}{A}, \overset{(2)}{A}) \cos(\overset{(2)}{A}, \overset{(3)}{A}) - \sin(\overset{(1)}{A}, \overset{(2)}{A}) \sin(\overset{(2)}{A}, \overset{(3)}{A}) =$$

$$= \frac{1}{|\overset{(1)}{A}||\overset{(2)}{A}|^2|\overset{(3)}{A}|} (\lambda_1\lambda_2 a + \mu_1\mu_2 b)(\lambda_2\lambda_3 a + \mu_2\mu_3 b) - ab(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)(\lambda_2\mu_3 - \lambda_3\mu_2)] =$$

$$= \frac{1}{|\overset{(1)}{A}||\overset{(2)}{A}|^2|\overset{(3)}{A}|} [\lambda_1\lambda_2^2\lambda_3 a^2 + \mu_1\mu_2^2\mu_3 b^2 + (\lambda_1\lambda_3\mu_2^2 + \lambda_2^2\mu_1\mu_3)ab] =$$

$$= \frac{(\lambda_2^2 a + \mu_2^2 b))(\lambda_1\lambda_3 a + \mu_1\mu_3 b)}{|\overset{(1)}{A}||\overset{(2)}{A}|^2|\overset{(3)}{A}|} = \frac{\lambda_1\lambda_3 a + \mu_1\mu_3 b}{|\overset{(1)}{A}||\overset{(3)}{A}|} = \cos(\overset{(1)}{A}, \overset{(3)}{A}).$$

Which was to be proved.

We call the star of tensors $\lambda A + \mu B$ a bi-plane or a two-tensor. Similarly we call the star of tensors $\sum_{i=1,\ldots,p} \lambda_i \overset{(i)}{A}$ where the coefficients λ_i assume every real value, a p-plane or a p-tensor if the tensors $\overset{(i)}{A}$ are independent, i. e. if there is no homogeneous linear relation between them.

8. Tensor determinants ([1]). — In order to simplify the descriptions of angular relations of tensor planes, we introduce a purely tensorial representation of these planes. We put accordingly

$$(8\text{-}1) \qquad \begin{vmatrix} A, A \\ B, B \end{vmatrix} = AB - BA, \begin{vmatrix} A, A, A \\ B, B, B \\ C, C, C \end{vmatrix} = A \begin{vmatrix} B, B \\ C, C \end{vmatrix} - B \begin{vmatrix} A, A \\ C, C \end{vmatrix} + C \begin{vmatrix} A, A \\ B, B \end{vmatrix}.$$

More generally we make the convention of expanding a tensor determinant

$$(8\text{-}2) \qquad \begin{vmatrix} \overset{(1,1)}{A}, & \overset{(1,2)}{A}, \ldots, & \overset{(1,p)}{A} \\ \overset{(2,1)}{A}, & \overset{(2,2)}{A}, \ldots, & \overset{(2,p)}{A} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{(p,1)}{A}, & \overset{(p,2)}{A}, \ldots, & \overset{(p,p)}{A} \end{vmatrix}$$

always with respect to its first column.

Some obvious properties of tensor determinants are the following. If two rows are interchanged, the determinant changes its sign. In particular if two rows are identical, the determinant vanishes. But two identical columns do not make the determinant vanish. In geometrical applications we mostly meet determinants with identical columns.

The determinant is not changed when we add to the elements of a row the corresponding elements of another row multiplied by the same function. The similar theorem for columns does not hold.

More generally

$$(8\text{-}3) \qquad \begin{vmatrix} \overset{(1,1)}{A} + \overset{(1)}{B}, & \overset{(1,2)}{A} + \overset{(2)}{B}, \ldots, & \overset{(1,p)}{A} + \overset{(p)}{B} \\ \overset{(2,1)}{A}, & \overset{(2,2)}{A}, \ldots, & \overset{(2,p)}{A} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{(p,1)}{A}, & \overset{(p,2)}{A}, \ldots, & \overset{(p,p)}{A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overset{(1,1)}{A}, & \overset{(1,2)}{A}, \ldots, & \overset{(1,p)}{A} \\ \overset{(2,1)}{A}, & \overset{(2,2)}{A}, \ldots, & \overset{(2,p)}{A} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{(p,1)}{A}, & \overset{(p,2)}{A}, \ldots, & \overset{(p,p)}{A} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overset{(1)}{B}, & \overset{(2)}{B}, \ldots, & \overset{(p)}{B} \\ \overset{(2,1)}{A}, & \overset{(2,2)}{A}, \ldots, & \overset{(2,p)}{A} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{(p,1)}{A}, & \overset{(p,2)}{A}, \ldots, & \overset{(p,p)}{A} \end{vmatrix}.$$

([1]) See P. DIENES, *Déterminants tensoriels et la géométrie des tenseurs.* Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 1924. Premier semestre, p. 682-685.

This follows from the distributive and associative character of tensor multiplication.

The multiplication of tensor determinants is complicated. We have, however,

$$(8\text{-}4)\qquad \begin{vmatrix} \lambda_{1,1},\dots,\lambda_{1,p} \\ \cdots\cdots \\ \lambda_{p,1},\dots,\lambda_{p,p} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \overset{(1,1)}{A},\dots,\overset{(1,p)}{A} \\ \cdots\cdots \\ \overset{(p,1)}{A},\dots,\overset{(p,p)}{A} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_i \lambda_{1,i}\overset{(i,1)}{A},\dots,\sum_i \lambda_{1,i}\overset{(i,p)}{A} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \sum_i \lambda_{p,i}\overset{(i,1)}{A},\dots,\sum_i \lambda_{p,i}\overset{(i,p)}{A} \end{vmatrix}$$

where $\lambda_{i,k}$ are any numbers or functions.

9. The equation of a tensor plane. — All the tensors of the p-plane $\sum_{i=1} \lambda_i \overset{(i)}{A}$ satisfy the equation

$$(9\text{-}1)\qquad \begin{vmatrix} \overset{(1)}{A}, & \overset{(1)}{A},\dots, & \overset{(1)}{A} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{(p)}{A}, & \overset{(p)}{A},\dots, & \overset{(p)}{A} \\ X, & X,\dots, & X \end{vmatrix} = 0 \quad \text{or} \quad \left\{\overset{(1)}{A}, \overset{(2)}{A},\dots, \overset{(p)}{A}\right\} X = 0$$

as it is readily proved by (8-3).

Conversely if X satisfies (9-1), i. e. if, for every combination $(i_1, i_2,\dots, i_{p+1})$ of the integers 1, 2,..., n, we have

$$(9\text{-}2)\qquad \begin{vmatrix} \overset{(1)}{A}{}^{i_1}, & \overset{(1)}{A}{}^{i_2},\dots, & \overset{(1)}{A}{}^{i_{p+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{(p)}{A}{}^{i_1}, & \overset{(p)}{A}{}^{i_2},\dots, & \overset{(p)}{A}{}^{i_{p+1}} \\ X^{i_1}, & X^{i_2},\dots, & X^{i_{p+1}} \end{vmatrix} = 0,$$

there is a linear homogeneous relation between X^{i_1}, $\overset{(1)}{A}{}^{i_1}$, $\overset{(2)}{A}{}^{i_1},\dots,\overset{(p)}{A}{}^{i_1}$ with coefficients independent of i_1. To prove it we have only to expand the determinant (9-2) with respect to its first column. Hence, X is a tensor of the p-plane in question and thus (9-1) completely characterises the p-plane. We call equation (9-1) the equation of the p-plane.

We can formulate the same mathematical fact in a slightly different way by remarking that in virtue of a known theorem of SILVESTER'S [1], we have

$$
(9\text{-}3)\quad
\begin{vmatrix} \overset{(1)}{A}{}^{i_1},\ldots, & \overset{(1)}{A}{}^{i_{p-1}} \\ \cdots & \cdots \\ \overset{(p-1)}{A}{}^{i_1},\ldots, & \overset{(p-1)}{A}{}^{i_{p-1}} \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} \overset{(1)}{A}{}^{i_1},\ldots, & \overset{(1)}{A}{}^{i_p} \\ \cdots & \cdots \\ \overset{(p)}{A}{}^{i_1},\ldots, & \overset{(p)}{A}{}^{i_p} \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} \overset{(1)}{A}{}^{i_1},\ldots, & \overset{(1)}{A}{}^{i_p} \\ \cdots & \cdots \\ \overset{(p)}{A}{}^{i_1},\ldots, & \overset{(p)}{A}{}^{i_p} \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} \overset{(1)}{A}{}^{i_1},\ldots, & \overset{(1)}{A}{}^{i_{p-1}}, & \overset{(1)}{A}{}^{i_{p+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{(p-1)}{A}{}^{i_1},\ldots, & \overset{(p-1)}{A}{}^{i_{p-1}}, & \overset{(p-1)}{A}{}^{i_{p+1}} \\ X^{i_1},\ldots, & X^{i_{p-1}}, & X^{i_{p+1}} \end{vmatrix}
-
$$

$$
-\begin{vmatrix} \overset{(1)}{A}{}^{i_1},\ldots, & \overset{(1)}{A}{}^{i_{p-1}}, & \overset{(1)}{A}{}^{i_p} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{(p-1)}{A}{}^{i_1},\ldots, & \overset{(p-1)}{A}{}^{i_{p-1}}, & \overset{(p-1)}{A}{}^{i_p} \\ X^{i_1},\ldots, & X^{i_{p-1}}, & X^{i_p} \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} \overset{(1)}{A}{}^{i_1},\ldots, & \overset{(1)}{A}{}^{i_{p-1}}, & \overset{(1)}{A}{}^{i_{p+1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \overset{(p-1)}{A}{}^{i_1},\ldots, & \overset{(p-1)}{A}{}^{i_{p-1}}, & \overset{(p-1)}{A}{}^{i_{p+1}} \\ \overset{(p)}{A}{}^{i_1},\ldots, & \overset{(p)}{A}{}^{i_{p-1}}, & \overset{(p)}{A}{}^{i_{p+1}} \end{vmatrix}
$$

i. e. we can write (9-1) in the form

$$
(9\text{-}4)\qquad \cdot\!\left(\overset{(1)}{A}, \overset{(2)}{A},\ldots, \overset{(p)}{A}\right)\!\cdot \cdot\!\left(\overset{(1)}{A},\ldots, \overset{(p-1)}{A}, X\right)\!\cdot - \cdot\!\left(\overset{(1)}{A},\ldots, \overset{(p-1)}{A}, X\right)\!\cdot \cdot\!\left(\overset{(1)}{A},\ldots, \overset{(p)}{A}\right)\!\cdot = 0.
$$

It follows from the last equation that

$$
\cdot\!\left(\overset{(1)}{A},\ldots, \overset{(p)}{A}\right)\!\cdot^{i_1\ldots i_p} \cdot\!\left(\overset{(1)}{A},\ldots, \overset{(p-1)}{A}, X\right)\!\cdot^{j_1\ldots j_p} - \cdot\!\left(\overset{(1)}{A},\ldots, \overset{(p-1)}{A}, X\right)\!\cdot^{i_1\ldots i_p} \cdot\!\left(\overset{(1)}{A},\ldots, \overset{(p)}{A}\right)\!\cdot^{j_1\ldots j_p} = 0
$$

i. e.

$$
(9\text{-}5)\qquad \cdot\!\left(\overset{(1)}{A},\ldots, \overset{(p-1)}{A}, X\right)\!\cdot^{j_1,\ldots,j_p} = \lambda \cdot\!\left(\overset{(1)}{A},\ldots, \overset{(p)}{A}\right)\!\cdot^{j_1,\ldots,j_p}
$$

with the same λ for any permutation of the suffixes $j_1,\ldots,j_p$. Thus we have for every tensor of the p-plane of $\overset{(1)}{A},\ldots, \overset{(p)}{A}$

$$
(9\text{-}6)\qquad \left(\overset{(1)}{A},\ldots, \overset{(p-1)}{A}, X\right)\!\cdot = \lambda \cdot\!\left(\overset{(1)}{A},\ldots, \overset{(p)}{A}\right)\!\cdot \quad , \quad \lambda \neq 0.
$$

Hence this equation characterises the p-plane as well as the equation (9-1).

10. Orthogonal and normed tensor planes. — We are going to show that any p-plane can be represented by orthogonal and normed tensors $\overset{(i)}{A}$, i. e. by tensors $\overset{(i)}{A}$ satisfying the conditions

$$
(10\text{-}1)\qquad |\cdot\overset{(i)}{A}\,\overset{(k)}{A}\cdot| = 0 \quad \text{if } i \neq k \quad \text{and} \quad |\cdot\overset{(i)}{A}\,\overset{(i)}{A}\cdot| = \delta_i (= \pm 1).
$$

[1] See G. KOWALEWSKI, *Determinantentheorie*. Leipzig, 1909, p. 83.

Suppose the result to be true for the m-plane of $\overset{(1)}{A},\dots,\overset{(m)}{A}$. We shall prove that in that case it is true also for the $m+1$—plane of $\overset{(1)}{A},\dots,\overset{(m)}{A},\overset{(m+1)}{A}$. Consider for that purpose the $m+1$—plane

$$\lambda'_1\overset{(1)}{A}+\dots+\lambda'_m\overset{(m)}{A}+\lambda'_{m+1}B \tag{10-2}$$

with

$$B=\overset{(m+1)}{A}+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\overset{(i)}{A} \tag{10-3}$$

where α_i are determined by the conditions

$$|\cdot\overset{(i)}{A},\ \overset{(m+1)}{A}+\alpha_i\overset{(i)}{A}\cdot|=0 \quad , \quad \text{(no summation w. r. to } i). \tag{10-4}$$

The last equations show that the tensors $\overset{(1)}{A},\dots,\overset{(m)}{A}, B$ are mutually orthogonal.

But the $m+1$—plane of $\overset{(1)}{A},\dots,\overset{(m)}{A}, B$ is identical with that of $\overset{(1)}{A},\dots,\overset{(m)}{A},\overset{(m+1)}{A}$ because for arbitrary $\lambda_1,\dots,\lambda_{m+1}$ the equation

$$\lambda_1\overset{(1)}{A}+\dots+\lambda_{m+1}\overset{(m+1)}{A}=\lambda'_1\overset{(1)}{A}+\dots+\lambda'_m\overset{(m)}{A}+\lambda'_{m+1}B$$

is satisfied if we determine $\lambda'_1,\dots,\lambda'_{m+1}$ by the equations

$$\lambda_1=\lambda'_1+\alpha\lambda'_{m+1},\dots,\quad \lambda_m=\lambda'_m+\alpha_m\lambda'_{m+1},\quad \lambda_{m+1}=\lambda'_{m+1}.$$

Similarly if $\lambda'_1,\dots,\lambda'_{m+1}$ are given.

If $|\cdot BB\cdot|$ is not $+1$ or -1, we replace it by $C=\dfrac{B}{|B|}$ which does not affect orthogonality.

11. We can orthogonalise and norm the representation of any p-plane by SCHMIDT'S method [1]. Put

$$\begin{aligned}
\overset{(1)}{B}&=c_{11}\overset{(1)}{A}\\
\overset{(2)}{B}&=c_{21}\overset{(1)}{A}+c_{22}\overset{(2)}{A}\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\overset{(p)}{B}&=c_{p1}\overset{(1)}{A}+\dots+c_{pp}\overset{(p)}{A}
\end{aligned}$$

[1] E. SCHMIDT, *Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1908.

and

$$\overset{(\alpha)}{U}=\begin{vmatrix} |\!-\overset{(1)}{A}, \overset{(1)}{A}-\!|, \ldots, |\!-\overset{(1)}{A}, \overset{(\alpha-1)}{A}-\!|, & \overset{(1)}{A} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdot \\ |\!-\overset{(\alpha)}{A}, \overset{(1)}{A}-\!|, \ldots, |\!-\overset{(\alpha)}{A}, \overset{(\alpha-1)}{A}-\!|, & \overset{(\alpha)}{A} \end{vmatrix},$$

$$C_\alpha=\begin{vmatrix} c_{11}, & 0, & 0, \ldots, & 0 \\ c_{21}, & c_{22}, & 0, \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{\alpha 1}, & c_{\alpha 2}, \ldots, & & c_{\alpha\alpha} \end{vmatrix},$$

The multiplication (row of C_α into column of $\overset{(\alpha)}{U}$) gives

$$C_\alpha\overset{(\alpha)}{U}=\begin{vmatrix} |\!-\overset{(1)}{B}\overset{(1)}{A}-\!|, \ldots, |\!-\overset{(1)}{B}\overset{(\alpha-1)}{A}-\!|, & \overset{(1)}{B} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdot \\ |\!-\overset{(\alpha)}{B}\overset{(1)}{A}-\!|, \ldots, |\!-\overset{(\alpha)}{B}\overset{(\alpha-1)}{A}-\!|, & \overset{(\alpha)}{B} \end{vmatrix},$$

and (row into row)

$$C_{\alpha-1}C_\alpha\overset{(\alpha)}{U}=\begin{vmatrix} |\!-\overset{(1)}{B}\overset{(1)}{B}-\!|, \ldots, |\!-\overset{(1)}{B}\overset{(\alpha-1)}{B}-\!|, & \overset{(1)}{B} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdot \\ |\!-\overset{(\alpha)}{B}\overset{(1)}{B}-\!|, \ldots, |\!-\overset{(\alpha)}{B}\overset{(\alpha-1)}{B}-\!|, & \overset{(\alpha)}{B} \end{vmatrix}=\overset{(1)}{l}\ldots\overset{(\alpha-1)}{l}\,\overset{(\alpha)}{B}$$

where $\overset{(i)}{l}=|\!-\overset{(i)}{B}\overset{(i)}{B}-\!|$, and the tensors $\overset{(i)}{B}$ are supposed to be orthogonal.

On the other hand

$$\begin{vmatrix} |\!-\overset{(1)}{A}\overset{(1)}{A}-\!|, \ldots, |\!-\overset{(1)}{A}\overset{(\alpha)}{A}-\!| \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ |\!-\overset{(\alpha)}{A}\overset{(1)}{A}-\!|, \ldots, |\!-\overset{(\alpha)}{A}\overset{(\alpha)}{A}-\!| \end{vmatrix} C_\alpha C_\alpha=\begin{vmatrix} |\!-\overset{(1)}{B}\overset{(1)}{B}-\!|, \ldots, |\!-\overset{(1)}{B}\overset{(\alpha)}{B}-\!| \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ |\!-\overset{(\alpha)}{B}\overset{(1)}{B}-\!|, \ldots, |\!-\overset{(\alpha)}{B}\overset{(\alpha)}{B}-\!| \end{vmatrix}=\overset{(1)}{l}\ldots\overset{(\alpha)}{l}.$$

Hence *the tensors*

$$\overset{(\alpha)}{B}=\frac{\sqrt{\overset{(\alpha)}{l}}\,\overset{(\alpha)}{U}}{\sqrt{D_{\alpha-1}D_\alpha}}=\frac{\sqrt{\overset{(\alpha)}{l}}\,\sum\limits_{k=1}^{\alpha} D_\alpha^{(k)}\overset{(k)}{A}}{\sqrt{D_{\alpha-1}D_\alpha}}, \qquad (\alpha=1, 2, \ldots, p)$$

with

$$D_\alpha=\begin{vmatrix} |\!-\overset{(1)}{A}\overset{(1)}{A}-\!|, \ldots, |\!-\overset{(1)}{A}\overset{(\alpha)}{A}-\!| \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ |\!-\overset{(\alpha)}{A}\overset{(1)}{A}-\!|, \ldots, |\!-\overset{(\alpha)}{A}\overset{(\alpha)}{A}-\!| \end{vmatrix}$$

are mutually orthogonal and normed. $D_{\alpha}^{(k)}$ is the minor of D_{α} pertaining to the k^{th} element of the last column with a convenient sign.

12. Orthogonal transformations. — Consider the p-plane of orthogonal and normed tensors $\overset{(1)}{A},\ldots,\overset{(p)}{A}$ as well as that of the orthogonal and normed tensors

(12-1)
$$\overset{(k)}{C}=\sum_{i=1}^{p}\lambda_{ki}\overset{(i)}{A}, \qquad (k=1,2,\ldots,p).$$

By hypothesis

(12-2)
$$|\!\cdot\overset{(i)}{A}\,\overset{(k)}{A}\cdot\!|=\delta_{ik}$$

(12-3)
$$|\!\cdot\overset{(i)}{C}\,\overset{(k)}{C}\cdot\!|=\delta_{ik}$$

where $\delta_{ik}=0$ if $k\neq i$ and $\delta_{ii}=\pm 1$.

By (12-1) and (12-3), we have

$$\delta_{kl}=\sum_{i,j=1}^{p}|\!\cdot\lambda_{ki}\lambda_{lj}\overset{(i)}{A}\,\overset{(j)}{A}\cdot\!|=\sum_{i,j=1}^{p}\lambda_{ki}\lambda_{lj}\delta_{ij}$$

i. e.

(12-4)
$$\sum_{i=1}^{p}\delta_{ii}\lambda_{ki}\lambda_{li}=\delta_{kl}.$$

On the other hand by putting

$$\overset{(i)}{A}=\sum_{k=1}^{p}\mu_{ki}\overset{(k)}{C}$$

the identities

$$\overset{(l)}{C}=\sum_{i=1}^{p}\lambda_{li}\overset{(i)}{A}=\sum_{i,k=1}^{p}\mu_{ki}\overset{(k)}{C}\lambda_{li} \quad\text{and}\quad \overset{(j)}{A}=\sum_{k=1}^{p}\mu_{kj}\overset{(k)}{C}=\sum_{i,k=1}^{p}\mu_{kj}\lambda_{ki}\overset{(i)}{A}$$

give

$$\sum_{i=1}^{p}\mu_{ki}\lambda_{li}=|\delta_{kl}|,\quad \sum_{k=1}^{p}\mu_{kj}\lambda_{ki}=|\delta_{ij}|.$$

Multiply the second group of equations by $\delta_{ii}\lambda_{pi}$ and add them. We find, by (12-4),

$$\sum_{i,k=1}^{p}\mu_{kj}\lambda_{ki}\delta_{ii}\lambda_{pi}=|\delta_{ij}|$$

i. e.

$$\mu_{pj}\delta_{pp}=\delta_{jj}\lambda_{pj}$$

where

$$\mu_{pj}=\delta_{pp}\delta_{jj}\lambda_{pj}.$$

Consequently

$$\overset{(i)}{A} = \sum_{k=1}^{p} \mu_{ki} \overset{(k)}{C} = \sum_{k=1}^{p} \delta_{kk}\delta_{ii}\lambda_{ki}\overset{(k)}{C}$$

and

$$|\text{-} \overset{(i)}{A}\overset{(j)}{A} \text{-}| = |\text{-} \sum_{k,l=1}^{p} \delta_{kk}\delta_{ii}\lambda_{ki}\overset{(k)}{C}\delta_{ll}\delta_{ii}\lambda_{li}\overset{(l)}{C} \text{-}| = \sum_{k\ 1}^{p} \delta_{kk}\delta_{ii}\lambda_{ki}\delta_{jj}\lambda_{kj}\delta_{kk} = \delta_{ij}.$$

Hence

$$\delta_{ii}\delta_{jj} \sum_{k=1}^{p} \delta_{kk}\lambda_{ki}\lambda_{kj} = \delta_{ij}$$

and

$$\sum_{k=1}^{p} \delta_{kk}\lambda_{ki}\lambda_{kj} = \delta_{ij}. \tag{12-5}$$

These relations (12-4) and (12-5) express the properties of local orthogonal transformations in a Riemannian space with a definite or indefinite fundamental quadratic form.

13. The angle between a p-plane and a tensor. — In general the angular relations of a p-plane and a q-plane are perfectly determined by the minima and maxima of the angle

$$\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overset{(i)}{A}, \quad \sum_{i=1}^{q} \mu_i \overset{(i)}{B}\right)\cdot$$

considered as a function of the parametres $\lambda_1,\ldots, \lambda_p$; $\mu_1,\ldots, \mu_q$ (1). We shall consider some particular cases to rely on it in the sequel.

The angle between $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overset{(i)}{A}$ *and* B. By definition

$$\cos\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overset{(i)}{A},\ B\right) = \frac{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i |\text{-} \overset{(i)}{A} B \text{-}|}{\sqrt{\sum_{i,k=1}^{p} \lambda_i\lambda_k |\text{-} \overset{(i)}{A}\overset{(k)}{A} \text{-}| \,.\, |\text{-} BB \text{-}|}}. \tag{13-1}$$

In order to determine the value of $\lambda_1,\ldots, \lambda_p$ for which this expression assumes an extreme value we may suppose that $\lambda_1,\ldots, \lambda_p$ satisfy the condition

$$\sum_{i,k=1}^{p} \lambda_i\lambda_k |\text{-} \overset{(i)}{A}\overset{(k)}{A} \text{-}| = \delta = \pm 1, \tag{13-2}$$

because it is a restriction on the length of the tensors but not on their directions.

(1) C. JORDAN, *Essai sur la géométrie à* n *dimensions*. Bulletin de la Société mathématique de France, t. 3, 1875, p. 103.

Thus, in the usual way, we are led to determine the extrema of

$$f(\lambda_1,\dots,\lambda_p)-\frac{\rho}{2}\varphi(\lambda_1,\dots,\lambda_p)$$

where

$$f(\lambda_1,\dots,\lambda_p)=\frac{1}{|\cdot BB\cdot|}\sum_{i=1}^{p}\lambda_p|\cdot\overset{(i)}{A}B\cdot|$$

$$\varphi(\lambda_1,\dots,\lambda_p)=\sum_{i,k=1}^{p}\lambda_i\lambda_k|\cdot\overset{(i)}{A}\overset{(k)}{A}\cdot|=\delta.$$

Hence

$$\rho\lambda_i=\frac{\begin{vmatrix}(1,1),\dots,(1,i-1), & |\cdot\overset{(1)}{A}B\cdot|, & (1,i+1),\dots,(1,p)\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ (p,1),\dots,(p,i-1), & |\cdot\overset{(p)}{A}B\cdot|, & (p,i+1),\dots,(p,p)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}(1,1),\dots,(1,p)\\ \cdots\\ (p,1),\dots,(p,p)\end{vmatrix}}=\frac{D_p^{(i)}(B)}{D_p}.$$

Since we want only the ratios of λ_i we can take

(13-4) $$\lambda_i=D_p^{(i)}(B)$$

i. e. *the extreme angle* α *between the tensors of* $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\overset{(i)}{A}$ *and* B *is that between* $\sum_{i=1}^{p}D_p^{(i)}\overset{(i)}{A}$ *and* B. Moreover

(13-5) $$\cos\alpha=\frac{\sum_{i=1}^{p}D_p^{(i)}|\cdot\overset{(i)}{A}B\cdot|}{\sqrt{\sum_{i,k=1}^{p}D_p^{(i)}D_p^{(k)}|\cdot\overset{(i)}{A}\overset{(k)}{A}\cdot|\,.\,|\cdot BB\cdot|}}\equiv\cos({}_pP,B).$$

If $\overset{(1)}{A},\dots,\overset{(p)}{A}$ are mutually orthogonal, we can take

(13-6) $$\lambda_i=\frac{|\cdot\overset{(i)}{A}B\cdot|}{|\cdot\overset{(i)}{A}\overset{(i)}{A}\cdot|}$$

and

(13-7) $$\cos\alpha=\frac{\sum_{i=1}^{p}|\cdot\overset{(i)}{A}B\cdot|^2\frac{1}{(i,i)}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{p}|\cdot\overset{(i)}{A}B\cdot|^2\frac{1}{(i,i)}|\cdot BB\cdot|}}=\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{p}|\cdot\overset{(i)}{A}B\cdot|^2\frac{1}{(i,i)}}}{\sqrt{|\cdot BB\cdot|}}.$$

If $\overset{(i)}{A},..., \overset{(p)}{A}$ are *also normal*, i. e. $(i, i)^2 = 1$, we have

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{p} \overset{(i)}{l} |\text{-} \overset{(i)}{A} B \text{-}|^2}}{|B|}. \tag{13-8}$$

$\cos^2\alpha$ *is an orthogonal invariant.* As $|\text{-} \overset{(i)}{A} B \text{-}| = \sqrt{\delta_{ii}\delta} \cos(\overset{(i)}{A}, B)$, this theorem is the generalisation of the projection theorem. Proof. If we represent the p-plane $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overset{(i)}{A}$ by another system of orthogonal and normed tensors $\overset{(i)}{C}$ we have

$$\overset{(i)}{A} = \sum_{j-1}^{p} \mu_j \overset{(j)}{C}$$

and the condition of orthogonality is

$$\sum_{i=1}^{p} \delta_{ii} |\text{-} \overset{(i)}{A} B \text{-}|^2 = \sum_{i-1}^{p} \delta_{ii} |\text{-} \overset{(i)}{C} B \text{-}|^2$$

which shows that $\cos^2\alpha$ is an orthogonal invariant.

We remark that if the angle between B and $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overset{(i)}{A}$ is the angle between B and $\overset{(1)}{A}$, then B is orthogonal to the tensors $\sum_{i=2}^{p} \lambda_i \overset{(i)}{A}$. In fact by hypothesis $\cos(B, \overset{(1)}{A})$ is the extremum of the expression

$$\cos\left(B, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overset{(i)}{A}\right) = \frac{|\text{-} B \overset{(1)}{A} \text{-}| + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i |\text{-} B, \overset{(i)}{A} \text{-}|}{\sqrt{|\text{-} BB \text{-}|} \sqrt{|\text{-} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overset{(i)}{A}, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \overset{(k)}{A} \text{-}|}}$$

where we can suppose that $|\text{-} \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overset{(i)}{A}, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \overset{(k)}{A} \text{-}| = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^2 \delta_{ii} = \pm 1$ and that $\lambda_1 = 1$.

If the quantities $|\text{-} B \overset{(i)}{A} \text{-}|$, $(i = 2,..., p)$ are not all zero, we can choose the $\lambda_2,..., \lambda_p$ such that $\cos(B, \overset{(1)}{A})$ is not the extremum of the expression in question. Which proves our remark.

14. The angles between $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overset{(i)}{A}$ and $\sum_{i-1}^{m} \mu_i \overset{(i)}{B}$. — We suppose that $m < p$ and that both system of tensors $\overset{(i)}{A}$ and $\overset{(i)}{B}$ respectively are orthogonal and normed and we are going to determine the values of λ_i, μ_i for which the expression

$$(14\text{-}1)\qquad \cos\left(\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\overset{(i)}{A},\ \sum_{i=1}^{m}\mu_i\overset{(i)}{B}\right)=\frac{\sum\limits_{i=1,\dots,p}^{k=1,\dots,m}\lambda_i\mu_k\,|\text{-}\overset{(i)}{A}\,\overset{(k)}{B}\text{-}|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i^2\,|\text{-}\overset{(i)}{A}\,\overset{(i)}{A}\text{-}|\,.\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i^2\,|\text{-}\overset{(i)}{B}\,\overset{(i)}{B}\text{-}|}}$$

assumes an extreme value. Since this expression is not changed when we replace λ_i and μ_i by $K\lambda_i$ and $L\mu_i$ respectively, we might suppose that

$$(14\text{-}2)\qquad \sum_{i=1}^{p}\lambda_i^2\,|\text{-}\overset{(i)}{A}\,\overset{(i)}{A}\text{-}|=\pm 1=\delta,\quad \sum_{i=1}^{m}\mu_i^2\,|\text{-}\overset{(i)}{B}\,\overset{(i)}{B}\text{-}|=\pm 1=\delta'.$$

Fix $\mu_1,\dots,\mu_m$. For $B=\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i\overset{(i)}{B}$, the square of the extreme value is given by

$$(14\text{-}3)\qquad \frac{\sum\limits_{i=1}^{p}|\text{-}\overset{(i)}{A}\,B\text{-}|^2\delta_i}{|\text{-}BB\text{-}|}=\delta'\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{m}\mu_k\,|\text{-}\overset{(i)}{A}\,\overset{(k)}{B}\text{-}|\right)^2\delta_i=$$
$$=\delta'\sum_{i=1}^{p}\sum_{j,k=1}^{m}\mu_j\mu_k\,|\text{-}\overset{(i)}{A}\,\overset{(j)}{B}\text{-}|\,|\text{-}\overset{(i)}{A}\,\overset{(k)}{B}\text{-}|\,\delta_i=\sum_{j,k=1}^{m}c_{jk}\mu_j\mu_k$$

with

$$(14\text{-}4)\qquad c_{jk}=\delta'\sum_{i=1}^{p}\delta_i\,|\text{-}\overset{(i)}{A}\,\overset{(j)}{B}\text{-}|\,|\text{-}\overset{(i)}{A}\,\overset{(k)}{B}\text{-}|,\qquad c_{kj}=c_{jk}.$$

Putting $f(\mu_1,\dots,\mu_m)=\sum\limits_{j,k=1}^{m}c_{jk}\mu_j\mu_k$ and $\varphi(\mu_1,\dots,\mu_m)=\sum\limits_{i=1}^{m}\mu_i^2\,|\text{-}\overset{(i)}{B}\,\overset{(i)}{B}\text{-}|=\delta'$, we have to determine the extrema of $f(\mu_1,\dots,\mu_m)-\rho\varphi(\mu_1,\dots,\mu_m)$, i. e. to solve the equations

$$\frac{\partial f}{\partial\mu_j}-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial\mu_j}=0$$

i. e.

$$(14\text{-}5)\qquad \sum_{k=1}^{m}c_{jk}\mu_k-\rho\mu_j=0.$$

This system of homogeneous linear equations is possible only if we take for ρ a root of the equation

$$(14\text{-}6)\qquad \begin{vmatrix} c_{11}-\rho, & c_{12},\dots, & c_{1m}\\ c_{21}, & c_{22}-\rho,\dots, & c_{2m}\\ \dots & \dots & \dots\\ c_{m1}, & c_{m2},\dots, & c_{mm}-\rho\end{vmatrix}=0.$$

To each root ρ_i of that equation corresponds a set of values $\overset{(i)}{\mu}_1,\dots,\overset{(i)}{\mu}_m$ making the expression (14-3), hence (14-1) with the corresponding $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ an extremum. We denote these extrema by $\cos({}_pP,\, {}_mQ)_i$, $i=1, 2,\dots, m$.

The tensors $\overset{(i)}{\mathrm{E}} = \sum\limits_{r=1}^{m} \overset{(i)}{\mu}_r \overset{(r)}{\mathrm{B}}$, $(i = 1,\dots, m)$ *are mutually orthogonal.* In fact

$$\cos(\overset{(i)}{E}, \overset{(j)}{E}) = \frac{\sum\limits_{r,s=1}^{m} \overset{(i)}{\mu}_r \overset{(j)}{\mu}_s |\cdot \overset{(r)}{B} \overset{(s)}{B} \cdot|}{|\overset{(i)}{E}|.|\overset{(j)}{E}|} = \frac{\sum\limits_{r=1}^{m} \overset{(i)}{\mu}_r \overset{(j)}{\mu}_r \delta'_r}{|\overset{(i)}{E}|.|\overset{(j)}{E}|}.$$

And, by (14-5),

$$\sum_{s=1}^{m} c_{rs} \overset{(i)}{\mu}_s - \rho_i \overset{(i)}{\mu}_r = 0, \qquad \text{i. e.} \qquad \sum_{r,s=1}^{m} c_{rs} \overset{(i)}{\mu}_s \overset{(j)}{\mu}_r = \rho_i \sum_{r=1}^{m} \overset{(i)}{\mu}_r \overset{(j)}{\mu}_r$$

and similarly

$$\sum_{r,s=1}^{m} c_{rs} \overset{(j)}{\mu}_s \overset{(i)}{\mu}_r = \rho_i \sum_{r=1}^{m} \overset{(i)}{\mu}_r \overset{(j)}{\mu}_r.$$

Hence if $j \neq i$,

$$\sum_{r=1}^{m} \overset{(i)}{\mu}_r \overset{(j)}{\mu}_r = 0$$

which proves the statement *if all the* $\overset{(i)}{\mathrm{B}}$ *are of the same type.*

On the other hand to every tensor $\overset{(i)}{E} = \sum\limits^{m} \overset{(i)}{\mu}_r \overset{(r)}{B}$ belongs, by (14-6), a tensor $\overset{(i)}{C} = \sum\limits^{p} \delta_r |\cdot \overset{(r)}{A} \overset{(i)}{E} \cdot| \overset{(r)}{A}$, (the angle between them being the angle between ${}_pP$ and $\overset{(i)}{E}$).

The tensors $\overset{(i)}{\mathrm{C}}$ *are mutually orthogonal.* In fact

$$|\cdot \overset{(i)}{C} \overset{(j)}{C} \cdot| = \sum_{t=1}^{p} |\cdot \overset{(t)}{A} \overset{(i)}{E} \cdot| \, |\cdot \overset{(t)}{A} \overset{(j)}{E} \cdot| \delta_t = \sum \overset{(i)}{\mu}_r \overset{(j)}{\mu}_s |\cdot \overset{(t)}{A} \overset{(r)}{B} \cdot| \, |\cdot \overset{(t)}{A} \overset{(s)}{B} \cdot| = \delta' \sum \overset{(i)}{\mu}_r \overset{(j)}{\mu}_s c_{rs} = 0.$$

Consequently if we take $\overset{(1)}{E},\dots, \overset{(m)}{E}$ for the fundamental tensors of the m-plane ${}_mQ$ and $\overset{(1)}{C},\dots, \overset{(m)}{C}$ and $p - m$ other orthogonal tensors for the fundamental tensors of ${}_pP$, the $m(< p)$ angles between the planes ${}_pP$ and ${}_mQ$ are the angles between the corresponding fundamental tensors $\overset{(r)}{C}$ and $\overset{(r)}{E}$:

$$({}_pP,\, {}_mQ_r) = (\overset{(r)}{C},\, \overset{(r)}{E}), \qquad\qquad r = 1, 2,\dots, m.$$

The system $\overset{(1)}{C},\dots, \overset{(p)}{C}, \overset{(1)}{E},\dots, \overset{(m)}{E}$ is orthogonal and represents a $p + m$-plane. Consequently if $p + m > n$, ${}_pP$ and ${}_mQ$ have a common $p + m - n$-plane.

More generally, if ${}_pP$ and ${}_mQ$ have a common ρ plane, the number of the angles between them is diminished by ρ.

If $\overset{(1)}{A},\dots,\overset{(p)}{A}$ and $\overset{(1)}{B},\dots,\overset{(m)}{B}$ are not orthogonal and normed, we have

$$c_{jk}=\frac{\delta'}{\sqrt{D_{j-1}D_jD_{k-1}D_k}}\sum_{i=1}^{p}\frac{\delta_i}{D_{i-1}D_i}\left|\text{-}\begin{vmatrix}(1,1),\dots,(1,i-1),\overset{(1)}{A}\\ \cdots\cdots\cdots\\ (i,1),\dots,(i,i-1),\overset{(i)}{A}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}(1,1),\dots,(1,j-1),\overset{(1)}{B}\\ \cdots\cdots\cdots\\ (j,1),\dots,(j,j-1),\overset{(j)}{B}\end{vmatrix}\text{-}\right|\times$$

$$\times\left|\text{-}\begin{vmatrix}(1,1),\dots,(1,i-1),\overset{(1)}{A}\\ \cdots\cdots\cdots\\ (i,1),\dots,(i,i-1),\overset{(i)}{A}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}(1,1),\dots,(1,k-1),\overset{(1)}{B}\\ \cdots\cdots\cdots\\ (k,1),\dots,(k,k-1),\overset{(k)}{B}\end{vmatrix}\text{-}\right|,$$

i. e. if we denote by d_i^r the minors of D_i and by $\bar{d}_i^r$ those of $\bar{D}_i$, we have

$$c_{jk}=\frac{\delta'}{\sqrt{D_{j-1}D_jD_{k-1}D_k}}\sum_{i=1}^{p}\frac{\delta_i e_{ijk}}{D_{i-1}D_i}$$

with

$$e_{ijk}=\sum_{\substack{r,r'=1,\dots,i\\ s=1,\dots,j\\ s'=1,\dots,k}} d_i^r d_i^{r'}\bar{d}_j^s\bar{d}_k^{s'}\,|\text{-}\overset{(r)}{A}\overset{(s)}{B}\text{-}|\,|\text{-}\overset{(r')}{A}\overset{(s')}{B}\text{-}|.$$

15. We are going to apply the preceding result to the determination of the angle between the two p-planes $\sum\limits_{i=1}\lambda_i\overset{(i)}{A}$ and $\mu_1B+\sum\limits_{i=2}\mu_i\overset{(i)}{A}$. Fix the numbers $\mu_1,\dots,\mu_p$ and denote by C the tensor thus individualised. According to the preceding paragraph the angle between C and the p-plane $\sum\limits_{i=1}\lambda_i\overset{(i)}{A}$ is the angle between C and

$$A'=\sum_{i=1}^{p}\delta_i\,|\text{-}\overset{(i)}{A}C\text{-}|\,\overset{(i)}{A}=\sum_{i=2}^{p}\mu_i\overset{(i)}{A}+\mu_1\delta_1\,|\text{-}\overset{(1)}{A}B\text{-}|\,\overset{(1)}{A}.$$

Let $\bar{A}=\sum\limits_{i=2}^{p}\mu_i\overset{(i)}{A}$. The angle between $C=\mu_1B+\bar{A}$ and the p-plane $\sum\limits_{i=1}^{p}\lambda_i\overset{(i)}{A}$ is the angle between $\mu_1B+\bar{A}$ and $\mu_1\delta_1\,|\text{-}\overset{(i)}{A}B\text{-}|\,\overset{(1)}{A}+\bar{A}$ with the conditions

$$|\text{-}\bar{A}B\text{-}|=0,\quad |\text{-}\bar{A}\overset{(1)}{A}\text{-}|=0.$$

Consider now the two biplanes $\lambda_1\overset{(1)}{A}+\lambda_2\bar{A}$ and $\mu_1 B+\mu_2\bar{A}$ with the restrictions $|\lambda_1\overset{(1)}{A}+\lambda_2\bar{A}|^2=\pm 1$, $|\mu_1 B+\mu_2\bar{A}|^2=\pm 1$ and determine the extrema of angles between tensors of the two biplanes i. e. the extrema of the expression

$$(15\text{-}1)\qquad f(\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)=|\cos(\lambda_1\overset{(1)}{A}+\lambda_2\bar{A},\ \mu_1 B+\mu_2\bar{A})|=|\lambda_1\mu_1 \,|\text{-}\overset{(1)}{A}B\text{-}|\, \lambda_2\mu_2\bar{\delta}|$$

with the conditions

$$(15\text{-}2)\qquad \lambda_1^2\delta_1+\lambda_2^2\bar{\delta}=\pm 1,\quad \mu_1^2\delta_2+\mu_2^2\bar{\delta}=\pm 1.$$

We have

$$\frac{\partial f}{\partial\lambda_1}+\frac{\partial f}{\partial\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1}=\mu_1\,|\text{-}\overset{(1)}{A}B\text{-}|-\mu_2\bar{\delta}\,\frac{\lambda_1\delta_1}{\lambda_2\bar{\delta}}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial\mu_1}+\frac{\partial f}{\partial\mu_2}\frac{d\mu_2}{d\mu_1}=\lambda_1\,|\text{-}\overset{(1)}{A}B\text{-}|-\lambda_2\bar{\delta}\,\frac{\mu_1\delta_2}{\mu_1\bar{\delta}}=0.$$

Hence

$$(15\text{-}3)\qquad \lambda_1\mu_2\delta_1=\lambda_2\mu_1\,|\text{-}\overset{(1)}{A}B\text{-}|,\quad \lambda_2\mu_1\delta_2=\lambda_1\mu_2\,|\text{-}\overset{(1)}{A}B\text{-}|,$$

i. e. by multiplication

$$(15\text{-}4)\qquad \lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2\delta_1\delta_2=\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2\,|\text{-}\overset{(1)}{A}B\text{-}|^2.$$

If $|\text{-}\overset{(1)}{A}B\text{-}|^2=\delta_1\delta_2$, the tensors $\overset{(1)}{A}$ and B coincide, hence also the two bi-planes. Consequently if this is not the case, λ_1 or λ_2 or μ_1 or μ_2 vanishes. The cases $\lambda_1=0$, $\mu_1=0$; $\lambda_1=0$, $\mu_2=0$; $\lambda_2=0$, $\mu_1=0$ do not lead to anything new. The case $\lambda_2=0$, $\mu_2=0$ leads to the angle between $\overset{(1)}{A}$ and B. Thus *the angle between* $\overset{(1)}{\mathrm{A}}$ *and* B *is the angle between the two biplanes in question.* More generally since this angle is independent of $\bar{A}$, *the angle between* $\overset{(1)}{\mathrm{A}}$ *and* B *is the angle between the two* p*-planes* $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\overset{(1)}{\mathrm{A}}$ *and* $\mu_1\mathrm{B}+\sum_{i=2}^{p}\lambda_i\overset{(1)}{\mathrm{A}}$.

16. Suppose now that the two p-planes considered are not orthogonal and normed. According to No. 11 we have to replace $\sum_{i=1}^{p}\lambda'_i\overset{(i)}{A}$ by $\sum_{i=1}^{p}\lambda_i\overset{(i)}{G}$ and $\sum_{i=1}^{p-1}\mu'_i\overset{(i)}{A}+\mu'_pB$ by $\sum_{i=1}^{p}\mu_i\overset{(i)}{F}$ with

$$\overset{(\alpha)}{G}=\frac{\overset{(\alpha)}{U}}{|\sqrt{D_{\alpha-1}D_\alpha}|},\qquad \overset{(\alpha)}{F}=\frac{\overset{(\alpha)}{V}}{|\sqrt{D'_{\alpha-1}D'_\alpha}|}$$

where for $\alpha < p$

$$\overset{(\alpha)}{V} = \overset{(\alpha)}{U}, \qquad D'_\alpha = D_\alpha$$

and thus the angle φ between the two p-planes is the angle between $\overset{(p)}{G}$ and $\overset{(p)}{F}$.

Let us calculate now $\sin^2\varphi$. We have

$$\text{(16-1)} \qquad \begin{aligned} \sin^2\varphi = \sin^2(\overset{(p)}{G}, \overset{(p)}{F}) &= \pm\left(|\!-\overset{(p)}{G}\overset{(p)}{G}-\!|\,|\!-\overset{(p)}{F}\overset{(p)}{F}-\!| - |\!-\overset{(p)}{G}\overset{(p)}{F}-\!|^2\right) = \\ &= \pm\frac{|\!-\overset{(p)}{U}\overset{(p)}{U}-\!|\,|\!-\overset{(p)}{V}\overset{(p)}{V}-\!| - |\!-\overset{(p)}{U}\overset{(p)}{V}-\!|^2}{D^2_{p-1}\,|\,D''_p\,D_p\,|} \end{aligned}$$

with

$$\text{(16-2)} \qquad \overset{(p)}{V} = \begin{vmatrix} (1,1),\ldots,\ (1,p-1),\ \overset{(1)}{A} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (p-1,1),\ldots,\ (p-1,p-1),\ \overset{(p-1)}{A} \\ |\!-B\overset{(1)}{A}-\!|,\ldots,\ |\!-B\overset{(p-1)}{A}-\!|,\ B \end{vmatrix}, \qquad D''_p = \begin{vmatrix} (1,1),\ldots,\ (1,p-1),\ |\!-\overset{(1)}{A}B-\!| \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (p-1),\ldots,\ (p-1,p-1),\ |\!-\overset{(p-1)}{A}B-\!| \\ |\!-B\overset{(1)}{A}-\!|,\ldots,\ |\!-B\overset{(p-1)}{A}-\!|,\ |\!-BB-\!| \end{vmatrix}.$$

But it is readily seen that,

$$\text{(16-3)} \qquad |\!-\overset{(p)}{U}\overset{(p)}{U}-\!| = D_{p-1}D_p, \qquad |\!-\overset{(p)}{V}\overset{(p)}{V}-\!| = D_{p-1}D''_p.$$

On the other hand, denoting by A_{ik} and A''_{ik} the minors of D_p and of D''_p respectively pertaining to the i^{th} row and k^{th} column, we have

$$\overset{(p)}{U}\overset{(p)}{V} = \left[D_{p-1}\overset{(p)}{A} + \sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{p+i}A_{ip}\overset{(i)}{A}\right]\left[D_{p-1}B + \sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p+k}A''_{kp}\overset{(k)}{A}\right].$$

Consequently

$$\begin{aligned} |\!-\overset{(p)}{U}\overset{(p)}{V}-\!| &= D^2_{p-1}\,|\!-\overset{(p)}{A}B-\!| + D_{p-1}\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{p+i}A_{ip}\,|\!-\overset{(i)}{A}B-\!| + \\ &+ D_{p-1}\sum_{k=1}^{p-1}(-1)^{p+k}A''_{kp}\,|\!-\overset{(p)}{A}\overset{(k)}{A}-\!| + \sum_{i,k=1}^{p-1}(-1)^{i+k}A_{ik}A''_{kp}\,|\!-\overset{(i)}{A}\overset{(k)}{A}-\!|. \end{aligned}$$

But as $k \neq p$,

$$\sum_{i=1}^{p-1}(-1)^{i+p}\,|\!-\overset{(i)}{A}\overset{(k)}{A}-\!| = -D_{p-1}\,|\!-\overset{(p)}{A}\overset{(k)}{A}-\!|$$

i. e. the last two of the right hand side cancel each other. We have thus the equation

$$\text{(16-4)} \qquad |\!-\overset{(p)}{U}\overset{(p)}{V}-\!| = D_{p-1}D'_p$$

with

$$D'_p = \begin{vmatrix} (1,\,1),\ldots,\ (1,\,p-1), & \vdash \overset{(1)}{A} B \dashv \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ (p-1,\ 1),\ldots,\ (p-1,\ p-1), & \vdash \overset{(p-1)}{A} B \dashv \\ \vdash \overset{(p)}{A}\overset{(1)}{A}\dashv,\ldots,\ \vdash \overset{(p)}{A}\overset{(p-1)}{A}\dashv, & \overset{(p)}{A} B \dashv \end{vmatrix}$$

which leads to

$$\vdash \overset{(p)}{U}\overset{(p)}{U}\dashv \vdash \overset{(p)}{V}\overset{(p)}{V}\dashv - \vdash \overset{(p)}{U}\overset{(p)}{V}\dashv = D^2_{p-1}(D_p D''_p - D'^2_p).$$

But by SYLVESTER's theorem,

$$D_p D''_p - D'^2_p = D_{p-1} D_{p+1}$$

with

$$D_{p+1} = \begin{vmatrix} (1,\,1),\ldots,\ (1,\,p), & \vdash \overset{(1)}{A} B \dashv \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots \\ (p,\ 1),\ldots,\ (p,\,p), & \vdash \overset{(p)}{A} B \dashv \\ \vdash B \overset{(1)}{A}\dashv,\ldots,\ \vdash B \overset{(p)}{A}\dashv, & \vdash B B \dashv \end{vmatrix}$$

for D_{p-1} is symmetrical.

Hence the formula in question

$$\pm \sin^2 (\overset{(p)}{G},\ \overset{(p)}{F}) = \frac{D_{p-1} D_{p+1}}{D_p D''_p}. \tag{16-5}$$

Put finally $P = \cdot(\overset{(1)}{A},\ldots,\ \overset{(p)}{A})\cdot$, $Q = \cdot(\overset{(1)}{B},\ldots,\ \overset{(p)}{B})\cdot$.

It is readily seen that

$$\vdash P\,Q \dashv_{(1,\,p+1)\ldots(p,\,2p)} = p\,! \begin{vmatrix} \vdash \overset{(1)}{A}\overset{(1)}{B}\dashv,\ldots, & \vdash \overset{(1)}{A}\overset{(p)}{B}\dashv \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \vdash \overset{(p)}{A}\overset{(1)}{B}\dashv,\ldots, & \vdash \overset{(p)}{A}\overset{(p)}{B}\dashv \end{vmatrix}. \tag{16-6}$$

Hence if $\overline{P} = \cdot(\overset{(1)}{A},\ldots,\ \overset{(p-1)}{A},\ B)\cdot$, we have

$$\begin{aligned} \pm \sin^2 (P,\ \overline{P}) &= \frac{\vdash P P \dashv \vdash \overline{P}\,\overline{P} \dashv - \vdash P \overline{P} \dashv^2}{\vdash P P \dashv \vdash P \overline{P} \dashv} = \frac{D_p D''_p - D'^2_p}{D_p D''_p} = \\ &= \frac{D_{p-1} D_{p+1}}{D_p D''_p} = \sin^2 (\overset{(p)}{G},\ \overset{(p)}{F}). \end{aligned} \tag{16-7}$$

Thus the angle between the two p-planes P and $\overline{P}$ is equal to the angle between $\overset{(p)}{G}$ and $\overset{(p)}{F}$. This shows that the representation of the tensors $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overset{(i)}{A}$ by the tensor determinant -($\overset{(1)}{A},\dots, \overset{(p)}{A}$)- is fairly complete.

CHAPTER II. **Geometry of tensor spaces.**

17. In this chapter we are going to examine various kinds of correspondences between tensor pencils attached to different points i. e. we are going to construct various types of tensor spaces. As a rule, the passage from a tensor $A(p)$ at p to the corresponding tensor $B(q)$ at q is called parallel displacement or translation of $A(p)$ from p to q.

If we require that, once the path from p to q is given, the initial tensor $A(p)$ determines the corresponding tensor at q, the correspondence will be established by a system of equations of the type

$$\text{(17-1)} \qquad \begin{gathered} \frac{dA^\alpha}{dt} + f^\alpha(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots \mid A^*) = 0, \quad \frac{dA_\alpha}{dt} + f_\alpha(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots \mid A_*) = 0, \\ \frac{dA^{\alpha\beta}}{dt} + f^{\alpha\beta}(x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots \mid A^{**}) = 0 \text{ etc.} \end{gathered}$$

where $\dot{x}$ stands for $\frac{dx^1}{dt}, \dots, \frac{dx^n}{dt}$, A^* means that the suffix disappeared (¹) in a summation involved in f^α.

To every curve $x^\alpha(t)$ and to every tensor of any type and rank $\overset{0}{A}{}^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}$ attached to the point $x^\alpha(t_0)$ belongs a system of equations, and, provided f^α, f_α, $f^{\alpha\beta}, \dots$ satisfy very general mathematical conditions (²) in the neighbourhood of the point $x^\alpha(t_0)$, this system of equations determines $A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}(t)$ along a finite arc of the given curve so that $A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}(t_0) = \overset{0}{A}{}^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}$.

In order to distinguish the functions $A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}$, as defined by the corresponding system of equations of the type (17-1), from an arbitrarily given tensorfield along the same curve C, we denote the former by $A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}(C;\, t_0)(t)$ or in words: $\overset{0}{A}{}^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}$ transported along C from $x^\alpha(t_0)$ to $x^\alpha(t)$.

(¹) See T. LEVI-CIVITA, *Diferenciales segundas que se cumportan de mods invariantivs.* Revista Matemática Hispano-Americana, 1923, vol. V, pp. 165-176.

(²) See, for example, E. PICARD, *Traité d'Analyse*, tome II.

The tensormanifold $M_n(T)$ with the connexion thus defined will be denoted by $M_n(T;\, f^\alpha,\, f_\alpha,\, f^{\alpha\beta},\ldots)$ and called *lineally connected tensorspace* with the parameters of connexion $f^\alpha,\, f_\alpha,\, f^{\alpha\beta},\ldots$ (« lineally » meaning that the connexion is defined along lines). We remark that this idea of tensorspace is independent of metrical considerations though on the other hand it is a natural extension of LEVI-CIVITA's connexion (1) generalised by WEYL (2). We complete this scheme by defining the correspondence between scalars at different points by equations of the type

$$\frac{df}{dt} + \varphi(x,\, \dot{x},\, \ddot{x},\ldots \,|\, f) = 0$$

and remark that if $\dot{x} \equiv 0$, i. e. if we remain at the same point, all the tensors correspond to themselves. Hence

$$\frac{df}{dt} = 0, \quad \frac{dA^\alpha}{dt} = 0, \text{ etc.}$$

i. e.

$$\varphi(x,\, 0,\, 0,\ldots \,|\, f) \equiv 0, \quad f^\alpha(x,\, 0,\, 0,\ldots \,|\, A^*) \equiv 0, \quad f_\alpha(x,\, 0,\, 0,\ldots \,|\, A_*) \equiv 0, \text{ etc.}$$

We shall suppose in the sequel that $\varphi,\, f^\alpha,\, f_\alpha,\, f^{\alpha\beta},\ldots$ satisfy this condition.

18. Differentiation of tensors. — Now we are able to attribute a sense to the difference $A^\alpha(p+\Delta x) - A^\alpha(p)$ or more generally to $A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}(p+\Delta x) - A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}(p)$, i. e. to define differentiation of tensors along a line. For this purpose we replace $A^\alpha(p+\Delta x)$ by its equivalent at p along the given line, namely, by $A^\alpha(p+\Delta x)(p)$ or in the notation of the previous paragraph by $A^\alpha(t+\Delta t)(t)$ and we put

$$\frac{\Delta A^\alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{A^\alpha(t+\Delta t)(t) - A^\alpha(t)}{\Delta t}.$$

In order to calculate this limit we write the corresponding system (17-1) in integral form:

$$A^\alpha(t_0)(t) = A(t_0) - \int_{t_0}^{t} f^\alpha[x,\, \dot{x},\, \ddot{x},\ldots \,|\, A^*(t_0)(\tau)]d\tau$$

where x stands for $x^1(\tau),\ldots,\, x^n(\tau)$ and similarly $\dot{x}$ stands for $\dfrac{dx^1}{d\tau},\ldots,\, \dfrac{dx^n}{d\tau}$.

(1) T. LEVI-CIVITA, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana.* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XLII (1917), pp. 173-205].

(2) WEYL, *Raum, Zeit, Materie*, 1920, p. 169.

Hence

$$A^\alpha(t+\Delta t)(t) = A^\alpha(t+\Delta t) - \int_{t+\Delta t}^{t} f^\alpha[x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\ldots \mid A^*(t+\Delta t)(\tau)]d\tau$$

which readily leads to the result

$$\frac{\Delta A^\alpha}{\Delta t} = \frac{dA^\alpha}{dt} + f^\alpha(x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\ldots \mid A^*).$$

We notice that the value of the righthand side is the same for curves passing through $x^\alpha(t)$ with the same numerical values $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$,... .

Similarly we get

$$\frac{\Delta A_\alpha}{\Delta t} = \frac{dA_\alpha}{dt} + f_\alpha(x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\ldots \mid A_*)$$

$$\frac{\Delta A^{\alpha\beta}}{\Delta t} = \frac{dA^{\alpha\beta}}{dt} + f^{\alpha\beta}(x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\ldots \mid A^{**}),\ \text{etc.}$$

In the same way for a scalar f:

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{df}{dt} + \varphi(x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\ldots \mid f)$$

where, in general, φ varies with the weight of the scalar f.

We put finally

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\Delta A^\alpha}{\Delta t} e_\alpha, \quad \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\Delta A^{\alpha\beta}}{\Delta t} e_\alpha e_\beta,\ \text{etc.}$$

Hence the system of equations defining the translations of a tensor of any type and rank can be written in the symbolic form

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = 0,$$

for scalars

$$\frac{\Delta f}{\Delta t} = 0.$$

We remark that in spite of the intimate connexions between translation and differentiation of tensors, these two operations are essentially different in nature. In fact translation of tensors applies to individual tensors and the result of translation is a range of tensors along the given curve. The individual numerical tensors of a tensorfield are translated independently of one another. We notice finally that, according to the theory of PFAFFIAN systems, translation of a tensor, in general, cannot produce a continuous tensorfield of two or more dimensions.

On the other hand differentiation is defined only for tensorfields since it involves neighbouring values of the components. Furthermore tensor differentiation is a local operation, i. e. A and $\frac{\Delta A}{\Delta t}$ are attached to the same point whereas translation leads to tensors attached to different points.

19. For the examination of the general properties of tensor differentiation we introduce the following notations:

a) general tensor differentiation:

$$\frac{\Delta A^\alpha}{\Delta t} = \frac{dA^\alpha}{dt} + f^\alpha(x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\dots \mid A^*) \tag{19-1}$$

and

$$\frac{\Delta^{n+1} A^\alpha}{\Delta t^{n+1}} = \frac{d}{dt}\frac{\Delta^n A^\alpha}{\Delta t^n} + \frac{\dot{d}^n f^\alpha}{dt^n} \tag{19-2}$$

where

$$\frac{\dot{d}f^\alpha}{dt} = \frac{\partial f^\alpha}{\partial A^\beta}\frac{\Delta A^\beta}{\Delta t},\quad \frac{\dot{d}^2 f^\alpha}{dt^2} = \frac{\dot{d}}{dt}\left(\frac{\dot{d}f^\alpha}{dt}\right) = \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial A^\beta \partial A^\gamma}\frac{\Delta A^\beta}{\Delta t}\frac{\Delta A^\gamma}{\Delta t} + \frac{\partial f^\alpha}{\partial A^\beta}\frac{\Delta^2 A^\beta}{\Delta t^2}\ \text{etc.} \tag{19-3}$$

Similarly for covariant tensors and for tensors of higher ranks:

b) special kinds of tensor differentiation:

1°) f^α, f_α, $f^{\alpha\beta}$,... are homogeneous and of order one (but not necessarily linear) in the tensor components. In that case we shall use the notation

$$\frac{\Delta' A^\alpha}{\Delta t},\ \text{etc.}$$

2°) f^α, f_α, $f_{\alpha\beta}$,... are homogeneous and *linear* in the tensor components. We put

$$\begin{aligned} \frac{\delta A^\alpha}{\delta t} &= \frac{dA^\alpha}{dt} + f^\alpha_{or}(x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\dots)A^r, \\ \frac{\delta A_\alpha}{\delta t} &= \frac{dA_\alpha}{dt} + f^{or}_\alpha(x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\dots)A_r,\ \text{etc.} \end{aligned} \tag{19-4}$$

and in particular

$$\frac{\delta f}{\delta t} = \frac{df}{dt} + \varphi(x,\ \dot{x},\ \ddot{x},\dots)f. \tag{19-5}$$

3°) f^{α}_{or}, f^{or}_{α},... do not depend on $\ddot{x}$, $\dddot{x}$ etc., and are homogeneous and linear in $\dot{x}$. We put

$$\text{(19-6)} \qquad \begin{aligned} \frac{DA^{\alpha}}{Dt} &= \frac{dA^{\alpha}}{dt} + f^{\alpha}_{ors}(x)A^r\dot{x}^s \\ \frac{DA_{\alpha}}{Dt} &= \frac{dA_{\alpha}}{dt} + f^{or}_{\alpha os}(x)A_r\dot{x}^s, \text{ etc.} \end{aligned}$$

In particular

$$\text{(19-7)} \qquad \frac{Df}{Dt} = \frac{df}{dt} + \varphi_s(x)f\dot{x}^s.$$

In that case we can separate the terms containing $\dot{x}^s$ and put

$$\text{(19-8)} \qquad \frac{DA^{\alpha}}{Dx^s} = \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^s} + f^{\alpha}_{ors}A^r, \quad \frac{DA_{\alpha}}{Dx^s} = \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^s} + f^{or}_{\alpha os}A_r, \text{ etc.}$$

$$\text{(19-9)} \qquad \frac{Df}{Dx^s} = \frac{\partial f}{\partial x^s} + \varphi_s f.$$

The cases 1°) and 2°), in general, do not lead to partial differentiation ([1]).

The properties of tensorial differentiation. For the Δ and Δ' operations in general

$$\frac{\Delta t^k}{\Delta^k}\left(\frac{\Delta^i A}{\Delta t^i}\right) \mp \frac{\Delta^{i+k}A}{\Delta t^{i+k}}$$

where as for δ and D we have

$$\text{(19-10)} \qquad \begin{gathered} \frac{\delta^k}{\delta t^k}\left(\frac{\delta^i A}{\delta t^i}\right) = \frac{\delta^{k+i}A}{\delta t^{k+i}}, \quad \frac{D^k}{Dt^k}\left(\frac{D^i A}{Dt^i}\right) = \frac{D^{k+i}A}{Dt^{k+i}}, \\ \frac{\delta^k}{\delta t^k}\left(\frac{\delta^i f}{\delta t^i}\right) = \frac{\delta^{k+i}f}{\delta t^{k+i}}. \end{gathered}$$

Similarly for the sum of tensors: In general

$$\frac{\Delta(A^{\alpha} + B^{\alpha})}{\Delta t} \mp \frac{\Delta A^{\alpha}}{\Delta t} + \frac{\Delta B^{\alpha}}{\Delta t}.$$

But

$$\text{(19-11)} \qquad \frac{\delta(A^{\alpha} + B^{\alpha})}{\delta t} = \frac{\delta A^{\alpha}}{\delta t} + \frac{\delta B^{\alpha}}{\delta t}, \text{ etc.}$$

([1]) See P. DIENES, *Sur les différentielles secondes et la dérivation des tenseurs.* Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, 1924, vol. XXXIII, ser. 5, 1° sem., p. 265.

With regard to multiplication, the rule

$$\frac{\Delta(AB)}{\Delta t}=\frac{\Delta A}{\Delta t}B+A\frac{\Delta B}{\Delta t} \tag{19-12}$$

is, in general, *not* satisfied by any of the operations. In fact, this rule applied to two contravariant tensors means that

$$f^{\alpha\beta}(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots|AB)=f^{\alpha}(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots|A^*)B^{\beta}+f^{\beta}(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots|B^*)A^{\alpha} \tag{19-121}$$

which can be satisfied only if the differentiation of tensors of higher ranks is determined by that of vectors ($\equiv$ tensors of the first rank). In that case we call the tensor space *monodromic* and define differentiation of $A^{\alpha\beta}$ by (19-121). But even then rule (19-12) applies only to Δ', δ and D for in the general case $f^{\alpha}(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots|A^*B^{\beta})\neq f^{\alpha}(x,\dot{x},\ddot{x},\ldots|A^*)B^{\beta}$ and with the exception of tensorial differentiation of a scalar

$$\frac{(Df_1f_2)}{Dt}\neq\frac{Df_1}{Dt}f_2+f_1\frac{Df_2}{Dt}.$$

This equality is satisfied only if $\varphi\equiv 0$. We remark, however, that

$$\frac{\Delta'(fA)}{\Delta t}=f\frac{\Delta' A}{\Delta t}+\frac{\Delta' f}{\Delta t}A-\varphi(x,\dot{x},\ldots|f)A.$$

In this paper, unless the contrary is explicitely stated, we deal with monodromic spaces.

In general none of the differentiations is interchangeable with contraction. It is so for δ and D if, and only if

$$f^{\alpha}_{or}+f^{o\alpha}_{r}=C^{\alpha}_{or},\quad f^{\alpha}_{ors}+f^{o\alpha}_{ros}=0 \tag{19-13}$$

respectively. In any case the lefthand side is a tensor:

$$f^{\alpha}_{or}+f^{o\alpha}_{r}=C^{\alpha}_{or},\quad f^{\alpha}_{ors}+f^{o\alpha}_{ros}=C^{\alpha}_{ors}. \tag{19-14}$$

Similarly

$$f^{\alpha}_{ors}-f^{\alpha}_{osr}=S^{\alpha}_{ors},\quad f^{or}_{\alpha os}-f^{or}_{so\alpha}=S^{or}_{\alpha os} \tag{19-15}$$

are tensors [1].

---

[1] SCHOUTEN, *Ricci Kalkül*, Springer, Berlin, 1924, p. 66.

Contraction and differentiation are connected by the formula

$$(19\cdot16)\qquad \left|\frac{\Delta A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{\Delta t}\right|_{(i\mu,\, k\sigma)} = \frac{\Delta\left| A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}\right|_{(i\mu,\, k\sigma)}}{\Delta t} +$$

$$+ f_r\left(x, \dot{x}, \ddot{x},\dots \middle| A^{\cdot k_\nu \cdot [k\sigma = r]}_{\cdot i_\nu \cdot [i\mu = *]}\right) + f^r\left(x, \dot{x}, \ddot{x},\dots \middle| A^{\cdot k_\nu \cdot [k\sigma = *]}_{\cdot i_\nu \cdot [i\mu = r]}\right).$$

In particular

$$(19\cdot17)\qquad \left|\frac{\delta A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{\delta t}\right|_{(i\mu,\, k\sigma)} = \frac{\delta\left| A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}\right|_{(i\mu,\, k\sigma)}}{\delta t} + \sum_{s,\,\alpha} A^{\cdot k_\nu \cdot [k\sigma = \alpha]}_{\cdot i_\nu \cdot [i\mu = s]} C^{s}_{o\alpha}$$

and

$$(19\cdot18)\qquad \left|\frac{D A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}}{D x^\varepsilon}\right|_{(i\mu,\, k\sigma)} = \frac{D\left| A^{\cdot k_\nu \cdot}_{\cdot i_\nu \cdot}\right|_{(i\mu,\, k\sigma)}}{D x^\varepsilon} + \sum_{\alpha,\, s} A^{\cdot k_\nu \cdot [k\sigma = \alpha]}_{\cdot i_\nu \cdot [i\mu = s]} C^{s}_{o\alpha\varepsilon}.$$

At each successive contraction we get two new terms in f, i. e. two new sums in δ and D.

If the contraction leads to scalar, we have e. g.

$$(19\cdot19)\qquad \left|\frac{\delta A^{\alpha}_{o\beta}}{\delta t}\right| = \frac{dA^{\alpha}_{o\alpha}}{dt} + A^{r}_{os}\, C^{s}_{or}.$$

Remark 1. $\dfrac{\Delta A^\alpha}{\Delta t} = 0$ defines a transport of directions i. e.

$$(kA^\alpha)(t_0 \,\|\, t) = kA^\alpha(t_0 \,\|\, t)$$

only for Δ' (δ and D).

Remark 2. The transport of a multiplane $\sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i \overset{(i)}{A}$ is independent of the fundamental tensors $\overset{(i)}{A}$ only for δ (and D).

Remark 3. In the general case, $f^\alpha(x, \dot{x}, \ddot{x},\dots | 0)$ is a tensor, so is $f^\alpha(x, \dot{x}, \ddot{x},\dots | A^* + B^*) - f^\alpha(x, \dot{x}, \ddot{x},\dots | A^*) - f^\alpha(x, \dot{x}, \ddot{x},\dots | B^*)$ as well as $f^\alpha(x, \dot{x},\dots | \lambda A^* + \mu B^*) - \lambda f^\alpha(x, \dot{x},\dots | A^*) - \mu f^\alpha(x, \dot{x},\dots | B^*)$. In fact f^α is transformed by the formula

$$\varphi^r(\xi, \dot{\xi},\dots | \overline{A}^*) = t^r_k \tau^k_{\alpha\beta}\, \dot{\xi}^\alpha \overline{A}^\beta + t^r_k f^k(x, \dot{x},\dots | \overset{*}{\tau}_\alpha \overline{A}^\alpha)$$

and thus

$$\varphi^r(\xi, \dot{\xi},\dots | \lambda\overline{A}^* + \mu\overline{B}^*) - \lambda\varphi^r(\xi, \dot{\xi},\dots | \overline{A}^*) - \mu\varphi^r(\xi, \dot{\xi},\dots | \overline{B}^*) =$$

$$= t^r_k f^k[x, \dot{x},\dots | \overset{*}{\tau}_\alpha(\lambda\overline{A}^\alpha + \mu\overline{B}^\alpha)] - \lambda t^r_k f^k(x, \dot{x},\dots | \overset{*}{\tau}_\alpha \overline{A}^\alpha) - \mu t^r_k f^k(x, \dot{x},\dots | \overset{*}{\tau}_\alpha \overline{B}^\alpha)$$

which proves the last statement.

We notice that

$$\frac{\delta E^{\alpha}_{o\beta}}{\delta t} = C^{\alpha}_{o\beta}$$

where $E^{\alpha}_{o\beta} = 0$ if $\beta \neq \alpha$ and $= 1$ if $\beta = \alpha$.

20. Taylor formula for transported tensors [1]. — Take a tensor line $A^{\alpha}(t)$ along C; transport $A^{\alpha}(t)$ to $X^{\alpha}(t_0)$ by the equation

$$\frac{\Delta A^{\alpha}}{\Delta t} = 0 \tag{20-1}$$

and consider the one parameter (t) family of tensors $A^{\alpha}(t \| t_0)$ attached all to the same point $X^{\alpha}(t_0)$. We are going to expand $A(t \| t_0)$ as a function of t in Taylor series:

$$A^{\alpha}(t \| t^0) = A^{\alpha}(t \| t_0)_{t_0} + \left(\frac{dA^{\alpha}(t \| t_0)}{dt}\right)_{t_0}(t - t_0) + \left(\frac{d^2A^{\alpha}(t \| t_0)}{dt^2}\right)_{t_0}\frac{(t - t_0)^2}{2!} + \dots .$$

In order to calculate the coefficients of $t - t_0$, $\frac{(t-t_0)^2}{2}, \dots$ we write (20-1) in integral form

$$A^{\alpha}(t \| t_0) = -\int_t^{t_0} f^{\alpha}[x, \dot{x}, \dots | A^*(t \| \tau)]d\tau + A^{\alpha}(t), \quad \dot{x}^{\alpha} = \frac{dx^{\alpha}}{d\tau}. \tag{20-2}$$

First of all we see that $A^{\alpha}(t \| t_0)_{t_0} = A^{\alpha}(t_0)$. It follows that

$$\frac{dA^{\alpha}(t \| t_0)}{dt} = f^{\alpha}[x, \dot{x}, \dots | A^*(t)] - \int_t^{t_0} \frac{df^{\alpha}}{dt}d\tau + \frac{dA^{\alpha}}{dt} = \frac{\Delta A^{\alpha}}{\Delta t} - \int_t^{t_0} \frac{df^{\alpha}}{dt}d\tau.$$

Hence

$$\left(\frac{dA^{\alpha}(t \| t_0)}{dt}\right)_{t_0} = \left(\frac{\Delta A^{\alpha}}{\Delta t}\right)_{t_0}, \tag{20-3}$$

and

$$\lim_{t_0 \to t} \frac{dA^{\alpha}(t \| t_0)}{dt} = \frac{\Delta A^{\alpha}}{\Delta t}. \tag{20-4}$$

---

[1] I first proved this formula for δ operation in my paper: *Sur les différentielles secondes et la dérivation des tenseurs.* Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, vol. XXXIII, ser. 5, 1924, p. 265.

To calculate the second derivative we notice that under the integral sign, f^α depends on t only through the componants $A^*(t\,||\,\tau)$. Consequently

$$\frac{dA^\alpha(t\,||\,t_0)}{dt} = \frac{\Delta A^\alpha}{\Delta t} - \int_t^{t_0} \frac{\partial f}{\partial A^\beta} \frac{dA^\beta(t\,||\,\tau)}{dt} d\tau.$$

Hence, by (20-4)

$$\frac{d^2A^\alpha(t\,||\,t_0)}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{\Delta A^\alpha}{\Delta t} + \frac{\partial f^\alpha(t)}{\partial A^\beta}\frac{\Delta A^\beta}{\Delta t} - \int_t^{t_0} \frac{d^2 f^\alpha}{dt^2} d\tau$$

i. e.

$$\text{(20-5)} \qquad \left(\frac{d^2A^\alpha(t\,||\,t_0)}{dt^2}\right)_{t_0} = \left(\frac{\Delta^2 A^\alpha}{\Delta t^2}\right)_{t_0}, \quad \lim_{t_0 \to t} \frac{d^2A^\alpha(t\,||\,t_0)}{dt^2} = \frac{\Delta^2 A^\alpha}{\Delta t^2}$$

and so on.

In that way we find the formula

$$\text{(20-6)} \qquad \begin{aligned} A(t\,||\,t_0) &= A(t_0) + \left(\frac{\Delta A}{\Delta t}\right)_{t_0}(t-t_0) + \\ &+ \left(\frac{\Delta^2 A}{\Delta t^2}\right)_{t_0}\frac{(t-t_0)^2}{2!} + \dots + \left(\frac{\Delta^{n-1} A}{\Delta t^{n-1}}\right)_{t_0}\frac{(t-t_0)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n \end{aligned}$$

with

$$\text{(20-7)} \qquad R_n = \left\{ \left(\frac{\Delta^n A^\alpha}{\Delta t^n}\right)_{t'} - \int_{t'}^{t_0} \frac{d^n f^\alpha}{dt'^n} d\tau \right\} e_\alpha,$$

Analogous formula for scalar fields and tensor fields of any rank and type.

21. Curvatures of a tensor line. — The preceding result enables us to investigate a tensor line in the neighbourhood of a point.

Since we cannot compare two tensors attached to different points, we have to transport $A^\alpha(q)$ from q to p. But, by (20-3), at first approximation

$$A^\alpha(C;\, q\,||\,p) - A^\alpha(p) = \left(\frac{\Delta A^k}{\Delta t}\right)_p \Delta t.$$

Hence the limit plane of the tensors $A^\alpha(C;\, q\,||\,p)$ and $A^\alpha(p)$ when q approaches p is the plane of A and $\dot{A} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$. The osculating biplane of the tensor line is that of A and $\dot{A}$. Putting $A^{\alpha} = \dfrac{dx^{\alpha}}{dt}$ we see that the tangent plane to the curve at p is the plane of the tensors $\dfrac{dx^{\alpha}}{dt}$ and $\dfrac{\Delta t}{\Delta}\left(\dfrac{dx^{\alpha}}{dt}\right)$.

If α is the angle between $A(p)$ and $A(C;\, q \,\|\, p)$, the first curvature of the tensor line is, by definition, the limit of the quotient $\dfrac{\alpha}{\Delta t}$, i. e. that of $\dfrac{\sin\alpha}{\Delta t}$. But by (5-7)

$$\text{(21-1)} \qquad \sin(A,\, A + \dot{A}\Delta t) = \frac{|\dot{A}\Delta t|}{|A + \dot{A}\Delta t|} \sin(A,\, \dot{A}\Delta t) = \frac{|\dot{A}\Delta t|}{|A + \dot{A}\Delta t|} \sin(A,\, \dot{A}).$$

Hence

$$\text{(21-2)} \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin\alpha}{\Delta t} = \frac{|\dot{A}|}{|A|} \sin(A,\, \dot{A}) = \frac{\sqrt{|{\cdot}AA{\cdot}|\,|{\cdot}\dot{A}\dot{A}{\cdot}| - |{\cdot}A\dot{A}{\cdot}|^{2}}}{|{\cdot}AA{\cdot}|}.$$

The normed tensor $\overset{(2)}{N}$ in the biplane of A and $\dot{A}$, orthogonal to A, is called the *first normal* of the tensor line.

Similarly formula (20-6) shows that when q approaches p, $A^{\alpha}(C;\, q \,\|\, p)$ is a tensor of the $p+1$-plane of A, $\dot{A}, \ldots, \overset{[p]}{A}$. We call this $p+1$-plane the p^{th} osculating plane of the tensor line.

Consider the p-plane $P = \left(A,\, \dot{A}, \ldots, \overset{[p-1]}{A}\right)$. As the rule of differentiating determinants extends to tensor determinants, we have

$$\dot{P} = \left(\dot{A},\, \dot{A},\, \ddot{A}, \ldots, \overset{[p-1]}{A}\right) + \left(A,\, \ddot{A},\, \ddot{A},\, \dddot{A}, \ldots, \overset{[p-1]}{A}\right) + \ldots + \left(A,\, \dot{A}, \ldots, \overset{[p-2]}{A},\, \overset{[p]}{A}\right)$$

i. e.

$$\dot{P} = \left(A,\, \dot{A}, \ldots, \overset{[p-2]}{A}\, \overset{[p]}{A}\right).$$

Hence the tensors A, $\dot{A}, \ldots, \overset{[p-2]}{A}$ belong to P as well as to $\dot{P}$. Consequently they belong also to the p-plane $P(C;\, q \,\|\, p) = P + \dot{P}\Delta t$. Denote by α the angle between P and $P(C;\, q \,\|\, p)$. The limit of the quotient $\dfrac{\alpha}{\Delta t}$, or that of $\dfrac{\sin\alpha}{\Delta t}$, when $\Delta t \to 0$ *is called the* pth *curvature of the tensor line.*

But, by (5-7),

$$\sin(P,\, P + \dot{P}\Delta t) = \frac{|\dot{P}|\,\Delta t}{|P + \dot{P}\Delta t|} \sin(P,\, \dot{P}).$$

Hence

$$\text{(21-4)} \quad \gamma_p = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin(P, P + \dot{P}\Delta t)}{\Delta t} = \frac{|\dot{P}|}{|P|} \sin(P, \dot{P}) = \frac{\sqrt{|\text{-}PP\text{-}||\text{-}\dot{P}\dot{P}\text{-}| - |\text{-}P\dot{P}\text{-}|^2}}{|\text{-}PP\text{-}|}.$$

Finally (16-6) and (16-7) give

$$\text{(21-5)} \qquad \gamma_p^2 = \frac{D_{p-1}D_{p+1}}{D_p^2}$$

where

$$D_p = \begin{vmatrix} |\text{-}AA\text{-}|, & |\text{-}A\dot{A}\text{-}|, \ldots, & |\text{-}A\overset{[p-1]}{A}\text{-}| \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ |\text{-}\overset{[p-1]}{A}A\text{-}|, & |\text{-}\overset{[p-1]}{A}\dot{A}\text{-}|, \ldots, & |\text{-}\overset{[p-1]}{A}\overset{[p-1]}{A}\text{-}| \end{vmatrix}.$$

Putting $A^\alpha = \dfrac{dx^\alpha}{dt}$, we gen the successive curvatures of the curve.

The direction $\overset{(3)}{N}$ in the 3-plane of A, $\overset{(2)}{N}$, $\ddot{A}$ is called the *second normal* etc. A, $\overset{(2)}{N}, \ldots, \overset{(n)}{N}$ is called the *principal* n-*nuple*.

The final form (21-5) of the curvatures γ_p reproduces the KOWALEWSKY-BLASCHKE formulae [1] with the difference that our formulae apply also if the metrical quadratic form is not definite. But the real difference lies in the fact that we succeeded to define the successive curvatures in a purely geometrical way by following as closely as possible the usual procedure.

22. Consider the principal ennuple $\overset{(1)}{N}, \overset{(2)}{N}, \ldots, \overset{(n)}{N}$ (e. g. tangent and the $n-1$ principal normals) attached to every point of a given curve. We can easily verify that

$$\text{(22-1)} \qquad \overset{(i)}{N^\alpha} = \frac{1}{\sqrt{|D_{i-1}D_i|}} \begin{vmatrix} (0, 0), \ldots, & (0, i-2), & A^\alpha \\ (1, 0), \ldots, & (1, i-2), & \dot{A}^\alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (i-1, 0), \ldots, & (i-1, i-2), & \overset{[i-1]}{A^\alpha} \end{vmatrix}$$

where

$$(i, k) = \overset{[i]}{A^\alpha}\overset{[k]}{A^\beta} g_{\alpha\beta}, \quad (0, k) = A^\alpha \overset{[k]}{A^\beta} g_{\alpha\beta}$$

[1] W. BLASCHKE, *Frénet's Formeln für den Raum Riemann.* Mathematische Zeitschrift, vol. 6, 1920, p. 91-99. See also P. DIENES, *Déterminants tensoriels et la géométrie des tenseurs.* Comptes Rendus, Premier semestre 1924, p. 682-685.

and

$$D_i = \begin{vmatrix} (0, 0), \ldots, & (0, i-1) \\ \cdots & \cdots \\ (i-1, 0), \ldots, & (i-1, i-1) \end{vmatrix}.$$

In fact, if $i > k$

$$\overset{(i)}{N}{}^{\alpha}\overset{(k)}{N}{}^{\beta} g_{\alpha\beta} = \frac{1}{\left|\sqrt{D_{i-1}D_i D_k D_{k-1}}\right|} \begin{vmatrix} (0, 0), \ldots, & (0, i-2), & A^{\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (i-1, 0), \ldots, & (i-1, i-2), & \overset{[i-1]}{A^{\alpha}} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (0, 0), \ldots, & (0, k-2), & A_{\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (k-1, 0), \ldots, & (k-1, k-2), & \overset{[k-1]}{A_{\alpha}} \end{vmatrix}.$$

Write the second determinant in the form $a_0 A_\alpha + a_1 \dot{A} + \ldots + a_{k-1} \overset{[k-1]}{A_\alpha}$ and notice that, for $j < i$

$$\begin{vmatrix} (0, 0), \ldots, & (0, i-2), & A^{\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (i-1, 0), \ldots, & (i-1, i-2), & \overset{[i-1]}{A^{\alpha}} \end{vmatrix} \overset{[j-1]}{A_{\alpha}} = \begin{vmatrix} (0, 0), \ldots, & (0, i-2), & (0, j-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (i-1, 0), \ldots, & (i-1, i-2), & (i-1, j-1) \end{vmatrix} = 0.$$

We see thus that, if $i \neq k$,

$$\overset{[i]}{N}{}^{\alpha}\overset{[k]}{N}{}^{\beta} g_{\alpha\beta} = 0.$$

If $i = k$,

$$\overset{(i)}{N}{}^{\alpha}\overset{(i)}{N}{}^{\beta} g_{\alpha\beta} = \frac{1}{|D_{i-1}D_i|} \begin{vmatrix} (0, 0), \ldots, & (0, i-2), & A^{\alpha} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (i-1, 0), \ldots, & (i-1, i-2), & \overset{[i-1]}{A_{\alpha}} \end{vmatrix} (a_0 A_\alpha + a_1 \dot{A}_\alpha + \ldots + a_{i-2} \overset{[i-2]}{A_\alpha} + D_{i-1} \overset{[i-1]}{A_\alpha}) =$$

$$= \frac{D_{i-1}D_i}{|D_{i-1}D_i|} = \pm 1.$$

Consequently the system of tensors $\overset{(1)}{N}, \ldots, \overset{(n)}{N}$ is orthogonal and normed. On the other hand $\overset{(1)}{N}$ is parallel to A, and $\overset{(2)}{N}$ is in the plane of A and $\dot{A}$ and normal to A i. e. N is parallel to the first normal and so on.

We remark that if in (22-1) we replace $\left|\sqrt{D_{i-1}D_i}\right|$ by $\sqrt{D_{i-1}D_i}$, we introduce imaginary tensors (instead of negative tensors) but then the $\overset{(i)}{N}$ are not only orthogonal but $\overset{(i)}{N}{}^{\alpha}\overset{(i)}{N}{}^{\beta} g_{\alpha\beta} = +1$ for each of them.

23. As a preliminary to the introduction of rotation of tensor n-uples we are going to express the fundamental tensors in invariants [1]. Consider for that purpose an arbitrarily given continuous and differentiable tensorfield of orthogonal and normed n-nuples $\overset{(i)}{R}{}^{\alpha}$ called the reference n-uples. We shall denote as usual

$$\underset{(i)}{R}_{\alpha} = \overset{(i)}{R}{}^{\beta} g_{\beta\alpha}, \quad \overset{(i)}{R}{}^{\alpha} \underset{(j)}{R}_{\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq i. \\ \overset{(i)}{l} & \text{if } j = i. \end{cases} \tag{23-1}$$

Putting

$$X^{\beta_1,\dots,\beta_\omega}_{\alpha_1,\dots,\alpha_\omega} \overset{(k_1)}{R}{}^{\alpha_1} \underset{(i_1)}{R}_{\beta_1} \dots \overset{(k_\omega)}{R}{}^{\alpha_\omega} \underset{(i_\omega)}{R}_{\beta_\omega} = \overset{(i_1)}{l} \dots \overset{(i_\omega)}{l}\, a^{k_1 \dots k_\omega}_{i_1 \dots i_\omega}, \tag{23-2}$$

(we do not apply the summation convention t$_0$ $\overset{(i)}{\mathrm{l}}$ *in this paper)* it is readily seen that

$$X^{\beta_1,\dots,\beta_\omega}_{\alpha_1,\dots,\alpha_\omega} = a^{k_1 \dots k_\omega}_{i_1 \dots i_\omega} \underset{(k_1)}{R}_{\alpha_1} \overset{(i_1)}{R}{}^{\beta_1} \dots \underset{(k_\omega)}{R}_{\alpha_\omega} \overset{(i_\omega)}{R}{}^{\beta_\omega}. \tag{23-3}$$

Thus we see that every tensor can be expressed in the invariants $a^{k_1 \dots k_\omega}_{i_1 \dots i_\omega}$ and in the reference n-uple $\overset{(i)}{R}{}^{\alpha}$.

Applying it to the metrical tensor $g_{\alpha\beta}$, we get

$$g_{\alpha\beta} = b_{ij} \underset{(i)}{R}_{\alpha} \underset{(j)}{R}_{\beta} \tag{23-4}$$

with

$$\overset{(i)}{l}\,\overset{(j)}{l} \cdot b_{ij} = g_{\alpha\beta} \overset{(i)}{R}{}^{\alpha} \overset{(j)}{R}{}^{\beta} = \underset{(i)}{R}_{\beta} \overset{(j)}{R}{}^{\beta} = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq i \\ \overset{(i)}{l} & \text{if } j = i. \end{cases}$$

Hence

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{if } j \neq i \\ \overset{(i)}{l} & \text{if } j = i. \end{cases} \tag{23-5}$$

Similarly putting

$$\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta t} = \rho_{ij} \underset{(i)}{R}_{\alpha} \underset{(j)}{R}_{\beta}, \tag{23-6}$$

we get

$$\rho_{ij} = \overset{(i)}{l}\,\overset{(j)}{l} \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta t} \overset{(i)}{R}{}^{\alpha} \overset{(j)}{R}{}^{\beta} \tag{23-7}$$

[1] G. RICCI et T. LEVI-CIVITA, ***Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications.*** **Math. Annalen., Tom. 54, 1901, p. 125-201.**

with

(23-8) $$\rho_{ij}=\rho_{ji} \quad \text{if} \quad g_{\alpha\beta}=g_{\beta\alpha}.$$

Furthermore

(23-9) $$C^{\beta}_{o\alpha}=\sigma^{i}_{oj}\overset{(j)}{R}{}^{\beta}\underset{(i)}{R_{\alpha}}$$

with

(23-10) $$\sigma^{i}_{oj}=\overset{(i)}{l}\,\overset{(j)}{l}\,C^{\beta}_{o\alpha}\overset{(i)}{R}{}^{\alpha}\underset{(j)}{R_{\beta}}.$$

We put finally

(23-11) $$\frac{\delta\overset{(i)}{R}{}^{\alpha}}{\delta t}=\gamma^{ik}\overset{(k)}{R}{}^{\alpha},\qquad \frac{\delta\underset{(i)}{R_{\alpha}}}{\delta t}=\gamma_{ik}\underset{(k)}{R_{\alpha}}$$

with

(23-12) $$\gamma^{ik}=\overset{(k)}{l}\,\frac{\delta\overset{(i)}{R}{}^{\alpha}}{\delta t}\underset{(k)}{R_{\alpha}},\qquad \gamma_{ik}=\overset{(k)}{l}\,\frac{\delta\underset{(i)}{R_{\alpha}}}{\delta t}\overset{(k)}{R}{}^{\alpha}.$$

24. The interchange of differentiation and contraction [see rules (19-17), (19-18), (19-19)] leads to some relations between the invariants ρ, σ and γ.

First, by (19-19)

$$\left|\frac{\delta(\overset{(i)}{R}{}^{\alpha}\underset{(k)}{R_{\beta}})}{\delta t}\right|_{(\alpha,\beta)}=\frac{d(\overset{(i)}{R}{}^{\alpha}\underset{(k)}{R_{\beta}})}{dt}+\overset{(i)}{R}{}^{r}\underset{(k)}{R_{s}}C^{s}_{or}.$$

On the other hand, by (19-12)

$$\left|\frac{\delta(\overset{(i)}{R}{}^{\alpha}\underset{(k)}{R_{\beta}})}{\delta t}\right|_{(\alpha,\beta)}=\left|\frac{\delta\overset{(i)}{R}{}^{\alpha}}{\delta t}\underset{(k)}{R_{\beta}}\right|_{(\alpha,\beta)}+\left|\overset{(i)}{R}{}^{\alpha}\frac{\delta\underset{(k)}{R_{\beta}}}{\delta t}\right|_{(\alpha,\beta)}=$$

$$=\left|\gamma^{ij}\overset{(j)}{R}{}^{\alpha}\underset{(k)}{R_{\beta}}\right|_{(\alpha,\beta)}+\left|\overset{(i)}{R}{}^{\alpha}\gamma_{kj}\underset{(j)}{R_{\beta}}\right|_{(\alpha,\beta)}=\gamma^{ik}\cdot\overset{(k)}{l}+\gamma_{ki}\cdot\overset{(i)}{l}.$$

Hence

(24-1) $$\gamma^{ik}\cdot\overset{(k)}{l}+\gamma_{ki}\cdot\overset{(i)}{l}=\overset{(i)}{l}\,\overset{(k)}{l}\cdot\sigma^{i}_{ok}.$$

Similarly from

$$\frac{\delta\underset{(i)}{R_{\beta}}}{\delta t}=\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta t}\overset{(i)}{R}{}^{\alpha}+g_{\alpha\beta}\frac{\delta\overset{(i)}{R}{}^{\alpha}}{\delta t}-g_{s\beta}\overset{(i)}{R}{}^{r}C^{s}_{or}$$

we get

$$\gamma_{ik}\underset{(k)}{R_{\beta}}=\sigma_{lm}\underset{(l)}{R_{k}}\underset{(m)}{R_{\beta}}\overset{(i)}{R}{}^{\alpha}+g_{\alpha\beta}\sigma^{ik}\overset{(k)}{R_{\alpha}}-g_{s\beta}\overset{(i)}{R}{}^{r}\sigma^{j}_{ok}\overset{(k)}{R}{}^{s}\underset{(j)}{R_{r}},$$

i. e.

$$\underset{(k)}{R}_\beta[\sigma_{ik}\overset{(i)}{l} + \gamma^{ik} - \gamma_{ik} - \overset{(i)}{l}\sigma^{i}_{ok}] = 0.$$

Hence, since the tensors $\underset{(k)}{R}$ are mutually orthogonal,

$$\gamma^{ik} - \gamma_{ik} + \overset{(i)}{l}\rho^{ik} = \overset{(i)}{l}\sigma^{i}_{ok}. \tag{24-2}$$

Eliminating σ^{i}_{ok} from (23-13) and (23-14) we have

$$\gamma_{ik}\overset{(k)}{l} + \gamma_{ki}\overset{(i)}{l} = \overset{(i)}{l}\,\overset{(k)}{l}\sigma_{ik}. \tag{24-3}$$

Eliminating γ_{ik} we find

$$\gamma^{ik}\overset{(k)}{l} + \gamma^{ki}\overset{(i)}{l} + \overset{(i)}{l}\,\overset{(k)}{l}\sigma_{ik} = \overset{(i)}{l}\,\overset{(k)}{l}(\sigma^{i}_{ok} + \sigma^{k}_{oi}). \tag{24-4}$$

Express now an arbitrary n-uple $\overset{(i)}{A}{}^\alpha$ in terms of $\overset{(i)}{R}{}^\alpha$. We get

$$\begin{gathered}\overset{(i)}{A}{}^\alpha = a^{ik}\overset{(k)}{R}{}^\alpha, \quad \underset{(i)}{A}_\alpha = a_{ik}\underset{(k)}{R}_\alpha \\ a^{ij}\overset{(j)}{l} = \overset{(i)}{A}{}^\alpha\underset{(j)}{R}_\alpha, \quad a_{ij}\overset{(j)}{l} = \underset{(i)}{A}_\alpha\overset{(j)}{R}{}^\alpha.\end{gathered} \tag{24-5}$$

Hence

$$a^{ik}\overset{(k)}{R}{}^\alpha g_{\alpha\beta} = a_{ik}\underset{(k)}{R}_\beta,$$

i. e.

$$a^{ik}\underset{(k)}{R}_\beta = a_{ik}\underset{(k)}{R}_\beta$$

and multiplying by $\overset{(j)}{R}{}^\beta$ and summing: $a^{ij}\overset{(j)}{l} = a_{ij}\overset{(j)}{l}$, i. e. we have

$$a^{ij} = a_{ij}. \tag{24-6}$$

Putting

$$\frac{\delta\overset{(i)}{A}{}^\alpha}{\delta t} = e^{ik}\overset{(k)}{R}{}^\alpha, \quad \frac{\delta\underset{(i)}{A}_\alpha}{\delta t} = e_{ik}\underset{(k)}{R}_\alpha, \tag{24-7}$$

we get by (24-5)

$$\frac{da^{ik}}{dt}\overset{(k)}{R}{}^\alpha + a^{ik}\frac{\delta\overset{(k)}{R}{}^\alpha}{\delta t} = e^{ik}\overset{(k)}{R}{}^\alpha$$

i. e.

$$\dot{a}^{ik}\overset{(k)}{R}{}^\alpha + a^{ik}\gamma^{km}\overset{(m)}{R}{}^\alpha = e^{ik}\overset{(k)}{R}{}^\alpha.$$

Multiplying by $\underset{(j)}{R_\alpha}$ we have

(24-8) $$\dot{a}^{ij} + a^{ik}\gamma^{kj} = e^{ij} \quad \text{or} \quad \dot{a}_{ij} + a_{ik}\gamma^{kj} = e^{ij}.$$

Similarly

(24-9) $$\dot{a}_{ij} + a_{ik}\gamma_{kj} = e_{ij}.$$

The fact that both $\overset{(i)}{A^\alpha}$ and $\overset{(i)}{R^\alpha}$ form an orthogonal and normed n-uple is expressed by the relations

(24-10) $$\underset{(j)}{\Sigma} a_{kj} a_{ij} \overset{(j)}{l} = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad k \neq i \\ \overset{(i)}{l} & \text{if} \quad k = i \end{cases}$$

where we suppose that in the two systems $\overset{(i)}{A^\alpha}$ and $\overset{(i)}{R^\alpha}$ positive tensors correspond to positive and negative tensors correspond to negative tensors. I. e.

$$\underset{(i)}{A_\alpha}\overset{(k)}{A^\alpha} = \underset{(i)}{R_\alpha}\overset{(k)}{R^\alpha}.$$

Proof: By (24-5)

$$\overset{(k)}{A^\alpha}\underset{(i)}{A_\alpha} = a_{kj} a_{im} \overset{(j)}{R^\alpha} \underset{(m)}{R_\alpha}$$

which leads immediately to the result announcend.

Finally we notice that

(24-11) $$\frac{d(\overset{(i)}{A^\alpha}\underset{(j)}{A_\alpha})}{dt} + \overset{(i)}{A^r}\underset{(j)}{A_s} C^s_{\sigma r} = \underset{k}{\Sigma} e^{ik} a_{jk} \overset{(k)}{l} + \underset{k}{\Sigma} e_{jk} a^{ik} \overset{(k)}{l},$$

for the lefthand side is

$$\left| \frac{\delta(\overset{(i)}{A^\alpha}\underset{(j)}{A_\beta})}{\delta t} \right|_{(\alpha,\beta)}.$$

25. Rotation of n-uples. — The rotation of an orthogonal and normed n-uple *at a point* means a one-parameter family of orthogonal and normed n-uples all attached to one and the same point. But every one-parameter family of n-uples $\overset{(k)}{A^\alpha}(u)$ attached to the same point form the solution of the simultaneous equations

(25-1) $$\frac{d\overset{(k)}{A^\alpha}}{du} = p^{ik}\overset{(k)}{A^\alpha}$$

with conveniently chosen $p^{ik}(u)$.

In fact, by (25-1),

$$\frac{d\overset{(i)}{A}{}^{\alpha}}{du} A_\alpha = p^{ij}\overset{(j)}{l} \tag{25-2}$$

which determines p^{ij} when the functions $\overset{(i)}{A}{}^{\alpha}$ and thus also $\underset{(j)}{A_\alpha} = \overset{(j)}{A}{}^{\beta} g_{\alpha\beta}$ are given.

Since $\overset{(i)}{A}{}^{\alpha}$ form an orthogonal and normed n-uple for every value of u, we have

$$\frac{d(\overset{(i)}{A}{}^{\alpha}\underset{(k)}{A_\alpha})}{du} = 0$$

for $\overset{(i)}{A}{}^{\alpha}\underset{(k)}{A_\alpha}$ is either 0 (if $k \neq i$) or 1 (if $k = i$) for *every* value of u. Hence by (25-2)

$$p^{ij}\overset{(j)}{l} + p^{ji}\overset{(i)}{l} = 0. \tag{25-3}$$

Consequently we define *rotation* of a tensor n-uple $\underset{0}{\overset{(i)}{A}}{}^{\alpha}$ as *the solution* $\overset{(i)}{A}{}^{\alpha}(u)$ *of the equations* (25-1), *subjected to conditions* (25-3), *reducing to* $\underset{0}{\overset{(i)}{A}}{}^{\alpha}$ *for* $u = u_0$.

Since $g_{\alpha\beta}$ is independent of u (all the tensors considered being attached to the same point), we have

$$\frac{d\underset{(i)}{A_\alpha}}{du} = \frac{d\overset{(i)}{A}{}^{\beta}}{du} g_{\beta\alpha} = p^{ik}\overset{(k)}{A}{}^{\beta} g_{\beta\alpha} = p^{ik}\underset{(k)}{A_\alpha} \tag{25-4}$$

which shows that the rotation in covariant components is governed by the *same* set of equations as in contravariant components (the initial values being in general different). Therefore we do not nead to distinguish p^{ik} from p_{ik}.

To justify our definition we have to show that if the initial n-uple is orthogonal and normal, the whole family of n-uples defined by (25-1) is orthogonal and normal. But by (25-2) and (25-3)

$$\frac{d(\overset{(i)}{A}{}^{\alpha}\underset{(k)}{A_\alpha})}{du} = \frac{d\overset{(i)}{A}{}^{\alpha}}{du}\underset{(k)}{A_\alpha} + \overset{(i)}{A}{}_{\alpha}\frac{d\underset{(k)}{A_\alpha}}{du} = p^{ik}\overset{(k)}{l} + p^{ki}\overset{(i)}{l} = 0.$$

Thus the value of $\overset{(i)}{A}{}^{\alpha}\underset{(k)}{A}{}_{\alpha}$ does not change with u. Which proves the statement.

The rotation of n-uples corresponds to the rotation (= change of orientation) of rigid bodies. If $\overset{(j)}{A}$ and $\overset{(i)}{A}$ are both positive or both negative tensors, the relation (25-3) becomes the normal one $p^{ij} + p^{ji} = 0$.

The method proposed by us [1] for solving LEVI-CIVITA's equations applies without any modification to the system (25-1) and leads to the explicit form of the solution $\overset{(i)}{A}{}^{\alpha}(u)$:

$$\overset{(i)}{A}{}^{\alpha}(p^{\mu\nu};\, u_0 \| u) = \overset{(i)}{A}{}^{\alpha}(u_0) + \overset{(s)}{A}{}^{\alpha}(u_0) Z^{is}(p^{\mu\nu};\, u_0 \| u) \tag{25-5}$$

with

$$\begin{aligned} Z^{is}(p^{\mu\nu};\, u_0 \| u) = &\int_{u_0}^{u} p^{is} du + \int_{u_0}^{u} \left\{ \int_{u_0}^{v} p^{\sigma s} dv \right\} p^{i\sigma} du + \dots + \\ &\dots + \int_{u_0}^{u} \int_{u_0}^{v_1} \dots \int_{u_0}^{v_{\rho-1}} p^{i\sigma_1} dv_1 p^{\sigma_1\sigma_2} dv_2 \dots p^{\sigma_{\rho-1} s} dv_\rho + \dots \end{aligned} \tag{25-6}$$

and it is readily proved that series is absolutely and uniformly convergent in a finite interval (u_0, u) if the functions $p^{\mu\nu}$ are bounded and integrable.

26. Displacement. — We shall call a set of orthogonal and normed n-uples continuously distributed along C, a displacement of any of the n-uples in question along C. Every displacement of a contravariant n-uple along C can be represented as the solution $\overset{(i)}{A}{}^{\alpha}(C,\, p^{\mu\nu};\, t_0 \| t)$ of the equations

$$\frac{\delta \overset{(i)}{A}{}^{\alpha}}{\delta t} = p^{ik}(t) \overset{(k)}{A}{}^{\alpha} \tag{26-1}$$

corresponding to the initial values $\overset{(i)}{A}{}^{\alpha}(t_0)$.

---

[1] P. DIENES, *Sur la structure mathématique du Calcul Tensoriel*. Journal de Mathématiques pures et appliquées, 1924, p. 79.

In fact, from (26-1),

$$\frac{\delta \overset{(i)}{A^\alpha}}{\delta t} g_{\alpha\beta} \overset{(j)}{A^\beta} = p^{ij} \overset{(j)}{l} \tag{26-2}$$

which determines the *rotational coefficients* $p^{ij}(t)$ and thus proves the statement.

But these functions are subjected to a set of conditions resulting from the fact that the n-uples are orthogonal and normed at avery point of C. In fact

$$\left| \frac{\delta(\overset{(i)}{A^\alpha}\overset{(j)}{A^\beta} g_{\gamma\delta})}{\delta t} \right|_{(\alpha,\gamma)(\beta,\delta)} = \left| \frac{\delta(\overset{(i)}{A^\alpha}\overset{(j)}{A^\beta} g_{\alpha\delta})}{\delta t} + \overset{(i)}{A^r}\overset{(j)}{A^\beta} g_{s\delta} C^s_{or} \right|_{(\beta,\delta)} =$$

$$= \frac{d(\overset{(i)}{A^\alpha}\overset{(j)}{A^\beta} g_{\alpha\beta})}{dt} + \overset{(i)}{A^r}\overset{(j)}{A^\beta} g_{s\beta} C^s_{or} + \overset{(i)}{A^\alpha}\overset{(j)}{A^r} g_{\alpha s} C^s_{or} = \overset{(i)}{A^r}\overset{(j)}{A^\alpha}(g_{s\alpha} C^s_{or} + g_{rs} C^s_{o\alpha})$$

and on the other hand

$$\frac{\delta(\overset{(i)}{A^\alpha}\overset{(j)}{A^\beta} g_{\gamma\delta})}{\delta t} = \frac{\delta \overset{(i)}{A^\alpha}}{\delta t} \overset{(j)}{A^\beta} g_{\gamma\delta} + \overset{(i)}{A^\alpha} \frac{\delta \overset{(i)}{A^\beta}}{\delta t} g_{\gamma\delta} + \overset{(i)}{A^\alpha}\overset{(j)}{A^\beta} \frac{\delta g_{\gamma\delta}}{\delta t},$$

i. e., by (26-1),

$$= p^{ik} \overset{(k)}{A^\alpha}\overset{(j)}{A^\beta} g_{\gamma\delta} + \overset{(i)}{A^\alpha} p^{jk} \overset{(k)}{A^\beta} g_{\gamma\delta} + \overset{(i)}{A^\alpha}\overset{(j)}{A^\beta} \frac{\delta g_{\gamma\delta}}{\delta t},$$

i. e. by contracting and equating the two results

$$\overset{(i)}{A^r}\overset{(j)}{A^\alpha}(g_{s\alpha} C^s_{or} + g_{rs} C^s_{o\alpha}) = p^{ij} \overset{(j)}{l} + p^{ji} \overset{(i)}{l} + \overset{(i)}{A^\alpha}\overset{(j)}{A^\beta} \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta t}. \tag{26-3}$$

In Riemannian geometry $C^s_{or} = 0$, $\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta t} = 0$, so that in that case the condition reduces to its normal form:

$$p^{ij} \overset{(j)}{l} + p^{ji} \overset{(i)}{l} = 0. \tag{26-4}$$

Condition (26-3) is not independent of $\overset{(i)}{A^\alpha}$. Consequently if we give the rotational coefficients we cannot, in general, use them to define a displacement of n-uples by (26-1) because before solving the equations we do not know whether (26-3) will be satisfied or not i. e. whether we get a series of orthogonal and normed n-uples or not.

In the case, however, when

$$\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta t} = g_{s\alpha} C^s_{o\beta} + g_{\beta s} C^s_{o\alpha} \equiv C_{\alpha\beta} + C_{\beta\alpha} \tag{26-5}$$

the terms containing $\overset{(i)}{A^\alpha}$ cancel each other and we get the usual form of condition (26-4).

(26-5) expresses a property of the translation, i. e. it refers to the connective properties of the tensor space in question. *We shall call a space where local metrics and translation are connected by* (26-5) ***isotropical.*** *In an isotropic space every system of equation of type* (26-1), *with rotational coefficients* (26-4), *defines a one-parameter family of orthogonal and normed* n-*uples i. e. a displacement.*

We notice, however, that if, for given $p^{ij}(t)$ the function $\overset{(i)}{A^\alpha}(t)$ satisfy (26-1) and (26-3), it follows that

$$\frac{d(\overset{(i)}{A^\alpha}\overset{(j)}{A^\beta} g_{\alpha\beta})}{dt} = 0$$

i. e. if for a single value of t the n-uple $\overset{(i)}{A^\alpha}(t)$ is orthogonal and normed, it is so at every point of C.

27. Similarly for covariant n-uples. We put

$$\frac{\delta \underset{(i)}{B_\alpha}}{\delta t} = p_{ik}(t) \underset{(k)}{B_\alpha} \tag{27-1}$$

i. e.

$$\frac{\delta \underset{(i)}{B_\alpha}}{\delta t} g^{\alpha\beta} \underset{(j)}{B_\beta} = p_{ij} \underset{(j)}{l}. \tag{27-2}$$

The general condition (26-3) is replaced by

$$B_\beta B_\alpha (C^{\alpha\beta} + C^{\beta\alpha}) = p_{ij} \underset{(j)}{l} + p_{ji} \underset{(i)}{l} + \underset{(i)}{B_\alpha} \underset{(j)}{B_\beta} \frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta t}. \tag{27-3}$$

In Riemannian geometry

$$p_{ij} \underset{(j)}{l} + p_{ji} \underset{(i)}{l} = 0. \tag{27-4}$$

Condition (26-5) is replaced by

$$\frac{\delta g^{\alpha\beta}}{\delta t} = C^{\alpha\beta} + C^{\beta\alpha}. \tag{27-5}$$

A relation between covariant and contravariant rotational coefficients is deduced from (26-2) and (27-2). In fact it follows from those equations that

$$\underset{(j)}{B_\beta}\frac{\delta \overset{(i)}{A^\alpha}}{\delta t} + \overset{(i)}{A^\alpha}\frac{\delta \underset{(j)}{B_\beta}}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}(\overset{(i)}{A^\alpha}\underset{(j)}{B_\beta}) = p^{ik}\overset{(k)}{A^\alpha}\underset{(j)}{B_\beta} + p_{jk}\underset{(k)}{B_\beta}\overset{(i)}{A^\alpha}.$$

Hence by contraction

$$\frac{d}{dt}(\overset{(i)}{A^\alpha}\underset{(j)}{B_\alpha}) + \overset{(i)}{A^r}\underset{(j)}{B_s}C^s_{\cdot or} = p^{ik}\overset{(k)}{A^\alpha}\underset{(j)}{B_\alpha} + p_{jk}\underset{(k)}{B_\alpha}\overset{(i)}{A^\alpha}.$$

Thus taking $\underset{(j)}{B_\alpha} = \overset{(j)}{A^\beta}g_{\alpha\beta}$, we have

$$\overset{(i)}{A^r}\underset{(j)}{A_s}C^s_{\cdot or} = p^{ij}\overset{(j)}{l} + p_{ji}\overset{(i)}{l}. \tag{27-6}$$

Since $\overset{(i)}{A^\alpha}$ enters in this condition, there is no general relation i. e. independent of the specific line of n-uples considered, between the contravariant and covariant rotational coefficients of n-uples. In Riemannian geometry (27-6) reduces to

$$p^{ij}\overset{(j)}{l} + p_{ji}\overset{(i)}{l} = 0 \tag{27-7}$$

which leads, by (26-4) to

$$p_{ij} = p^{ij}. \tag{27-8}$$

In that case we can write

$$\frac{\delta \overset{(i)}{A}}{\delta t} = p^{ik}\overset{(k)}{A}. \tag{27-9}$$

In Riemannian geometry displacement and raising or lowering suffixes are interchangeable. In fact, from

$$\frac{\delta \overset{(i)}{A^\beta}}{\delta t} = p_{ik}\overset{(k)}{A^\beta},$$

we have

$$\frac{\delta \overset{(i)}{A^\beta}}{\delta t}g_{\beta\alpha} = \frac{\delta(\overset{(i)}{A}g_{\beta\alpha})}{\delta t} = p_{ik}\overset{(k)}{A}g_{\beta\alpha},$$

since $\frac{\delta g_{\beta\alpha}}{\delta t}=0$ and $C^{s}_{\sigma r}=0$. We see thus that the displacement of $(\overset{(i)}{A}{}^{\beta} g_{\beta\alpha})_0$ along C reproduces the line of n-uples $\overset{(i)}{A}{}^{\beta} g_{\beta\alpha}$ as deduced from $\overset{(i)}{A}{}^{\beta}$. Which proves the statement.

The same is true in the general case. In fact, by (26-1),

$$\frac{\delta \overset{(i)}{A}{}^{\beta}}{\delta t} g_{\beta\alpha} = p^{ik} \overset{(k)}{A}{}^{\beta} g_{\beta\alpha},$$

i. e.

$$\frac{\delta(\overset{(i)}{A}{}^{\beta} g_{\beta\alpha})}{\delta t} + \overset{(i)}{A}{}^{r} g_{s\alpha} C^{s}_{\sigma r} = p^{ik} \overset{(k)}{A}{}^{\beta} g_{\beta\alpha} + \overset{(i)}{A}{}^{\beta} \frac{\delta g_{\beta\alpha}}{\delta t},$$

i. e. by (26-3)

$$\overset{(j)}{A}{}^{\alpha} \frac{\delta(\overset{(i)}{A}{}^{\beta} g_{\beta\alpha})}{\delta t} + \overset{(j)}{A}{}^{\alpha} \overset{(i)}{A}{}^{r} C_{\alpha r} + p^{ji} \overset{(i)}{l} = \overset{(i)}{A}{}^{r} \overset{(j)}{A}{}^{\alpha} (C_{\alpha r} + C_{r\alpha}).$$

Hence, by (27-6),

$$\overset{(j)}{A}{}^{\alpha} \frac{\delta(\overset{(i)}{A}{}^{\beta} g_{\beta\alpha})}{\delta t} = p_{ij} \overset{(j)}{l} = p_{ik} \overset{(k)}{A}{}^{\beta} \overset{(j)}{A}{}^{\alpha} g_{\beta\alpha},$$

i. e.

$$\overset{(j)}{A}{}^{\alpha} \left[\frac{\delta(\overset{(i)}{A}{}^{\alpha} g_{\beta\alpha})}{\delta t} - p_{ik} \overset{(k)}{A}{}^{\beta} g_{\beta\alpha} \right] = 0.$$

Consequently

$$\frac{\delta(\overset{(i)}{A}{}^{\beta} g^{\beta\alpha})}{\delta t} = p_{ik} \overset{(k)}{A}{}^{\beta} g^{\beta\alpha}$$

which proves that *displacement and raising or lowering suffixes are interchangeable.*

28. We notice, however, that *translation as usually defined* and raising or lowering suffixes are, in general, *not* interchangeable.

Since translation is usually defined by the equations

$$\frac{\delta A^{\alpha}}{\delta t} = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\delta A_{\alpha}}{\delta t} = 0$$

i. e. by $p_{ij} = p^{ij} = 0$, condition (26-3) reduces to (26-5) and condition (27-6) to $C^{s}_{or} = 0$. It is only when both these conditions are satisfied $\left(\text{when it follows, like in Riemannian geometry that } \frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta t} = 0\right)$ that translation and raising or lowering suffixes are interchangeable. In WEYL'S geometry $C^{s}_{or} = 0$ but

(28-1) $$\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta t} = g_{\alpha\beta}\varphi_\gamma \dot{x}^\gamma$$

is different from naught. Hence in that case translation destroys the connection between covariant and contravariant component of a tensor.

This apparent contradiction between displacement and translation is removed by remarking that if we put $p^{ij} = 0$, we cannot, in general, put in the same time $p_{ij} = 0$ because according to (27-6)

$$p_{ij} = \overset{(j)}{l}\, \overset{(i)}{A_s}\, \overset{(j)}{A^r} C^{s}_{or},$$

i. e. in general different from zero. This remark shows also that in generalising Riemannian geometry (where $C^{s}_{or} = 0$) the natural way to proceed is to generalise displacement of n-uples and not translation of a single tensor. In that way the parameters $g_{\alpha\beta}(x',\ldots, x^n)$ of metric, and the parameters $f^{\alpha}_{o\beta}(x, \dot{x},\ldots)$, etc. [more particulary $f^{\alpha}_{o\beta\gamma}(x',\ldots, x^n)$, etc.] of translation are absolutely independent of each other without destroying the simplicity of the construction, in particular the correspondence between contravariant and covariant components of the same tensor. Displacement of n-uples seems to fit in more adequately into the structure of general tensor space than the translation of a single tensor.

For instance in WEYL'S geometry displacement of n-uples is a simpler notion than translation of a tensor. WEYL'S conception could be described also in saying that the translation of tensors of the second rank like $g_{\alpha\beta}$ (or this particular tensor anyhow) does not follow the usual rule derived from the translation of tensors of the first rank. In fact equation (28-1) can be written in the form

(28-2) $$\frac{dg_{\alpha\beta}}{dt} + h^{or}_{\alpha}\, g_{r\beta} + h^{or}_{\beta}\, g_{\alpha r} = 0$$

with

$$h^{\alpha}_{or} = f^{\alpha}_{or} \quad \text{if} \quad r \neq \alpha$$

and

$$h^{\alpha}_{o\alpha} = f^{\alpha}_{o\alpha} - \frac{1}{2}\varphi_i \dot{x}^i \qquad \text{(no summation w. r. to } \alpha)$$

i. e. *Weyl's geometry is not monodromic* (see No. 19).

If we stick to monodromic spaces, equation (28-1) can be interpreted in two different ways. Writing it in its original form (1)

$$\frac{Dg_{\alpha\beta}}{Dx^{\gamma}} = g_{\alpha\beta}\varphi_{\gamma} \tag{28-3}$$

it prescribes the value of the partial derivatives of $g_{\alpha\beta}$ if the parameters $f^{o\beta}_{\alpha o\gamma}$ of the translation are given. This interpretation is, in general not workable because a tensorfield is not, in general, a derivative of any tensorfield.

On the other hand, if we give the functions $g_{\alpha\beta}$, (28-3) or any equation of the type

$$\frac{Dg_{\alpha\beta}}{Dx^{\gamma}} = f_{\alpha\beta\gamma}(x, g_{\mu\nu}), \tag{28-4}$$

where f may depend or not on $g_{\mu\nu}$, determines the parameters of translation, provided they are symmetrical in α, γ. This is WEYL'S interpretation of equation (28-3) and it leads to a monodromic space where translation destroys the relation between the covariant and contravariant components of a tensor as well as that between length and tensor.

But (28-1) is not equivalent to (28-3). For arbitrarily prescribed translational parameters and local metrics, *equation* (28-1) *or any other equation of the type*

$$\frac{\delta g_{\alpha\beta}}{\delta t} = f_{\alpha\beta}(x, \dot{x}, \ldots | g_{**}) \tag{28-5}$$

determines $g_{\alpha\beta}(t_0 \| t)$ along C, i. e. *superposes on the manifold a metric issued from* $x^i(t_0)$ *as the analytic continuation of the local metric* $g_{\alpha\beta}(t_0)$ *at* $x^i(t_0)$. This metric superposed at $x^i(t)$ is independent of the prescribed local metrics at the points of C for it is determined by (28-5) and the initial values $g_{\alpha\beta}(t_0)$. On the other hand it depends on the path, C, between $x(t_0)$ and $x(t)$.

The idea of a local geometry imposing itself on the universe i. e. upon its surroundings is a natural outcome of the idea of relativity. In particular the equation (26-5) of isotropy is of the form (28-5).

29. Decomposition of displacement into translation and rotation. — We prove first that *translation and rotation are interchangeable.*

(1) H. WEYL, *Raum, Zeit, Materie.* Third edition, p. 112, formula (48).

In fact we have [1]

$$A^{\alpha}(C;\, t_0 \| t) = A^{\alpha}(t_0) + A^{\rho}(t_0) s^{\alpha}_{o\rho}(C;\, t_0 \| t) \tag{29-1}$$

and

$$\frac{ds^{\alpha}_{o\rho}(C;\, t_0 \| t)}{dt} + f^{\alpha}_{o\rho} + f^{\alpha}_{o\sigma} s^{\sigma}_{o\alpha}(C;\, t_0 \| t) = 0. \tag{29-2}$$

Similarly, by (25-6)

$$\frac{dz^{ik}(p^{\mu\nu};\, u_0 \| u)}{du} = p^{ik} + p^{ir} z^{rk}. \tag{29-3}$$

By (29-1) and (25-5), we have

$$\overset{(i)}{A^{\alpha}}(p^{\mu\nu};\, u_0 \| u \| C;\, t_0 \| t) = \overset{(i)}{A}(p^{\mu\nu};\, u_0 \| u) + \overset{(i)}{A^{\sigma}}(p^{\mu\nu};\, u_0 \| u) s^{\alpha}_{o\sigma}(C;\, t_0 \| t) =$$

$$= \underset{0}{\overset{(i)}{A^{\alpha}}} + \underset{0}{\overset{(i)}{A^{\sigma}}} s^{\alpha}_{o\sigma} + \underset{0}{\overset{(\sigma)}{A^{\alpha}}} z^{i\sigma} + \underset{0}{\overset{(\sigma)}{A^{\tau}}} z^{i\sigma} s^{\alpha}_{o\tau} = \overset{(i)}{A^{\alpha}}(C;\, t_0 \| t) + \overset{(\sigma)}{A^{\sigma}}(C;\, t_0 \| t) z^{i\sigma} =$$

$$= \overset{(i)}{A^{\alpha}}(C;\, t_0 \| t \| p^{\mu\nu};\, u_0,\, u),$$

which proves that translation and rotation are interchangeable.

On the other hand, if we put $u = u(t)$, the function of t

$$\underset{0}{\overset{(i)}{A^{\alpha}}} + \underset{0}{\overset{(i)}{A^{\sigma}}} s^{\alpha}_{o\sigma} + \underset{0}{\overset{(\sigma)}{A^{\alpha}}} z^{i\sigma} + \underset{0}{\overset{(\sigma)}{A^{\tau}}} z^{i\sigma} s^{\alpha}_{o\tau} \tag{29-4}$$

satisfies the equation

$$\frac{\delta \overset{(i)}{X^{\alpha}}}{\delta t} = p^{ik}(u(t)) \frac{du}{dt} \overset{(k)}{X^{\alpha}} \tag{29-5}$$

as we can easily verify it by means of (29-2) and (29-3). This shows that in isotropic spaces the displacement of the n-uple as defined by (29-5) consists of a translation determined by the path and of a rotation determined by the given rotational parameters $p^{\mu\nu}$ and associated to the translation by the function $u(t)$. We usually put $u = t$.

Since, for a rotation at a point, (26-4) is satisfied, the reasoning does not apply to anisotropic spaces where (26-4) and (26-3) contradict each other. Consequently *every translation and rotation associated arbitrarily in an isotropic space give rise to a displacement*. Conversely, *every displacement in an*

---

[1] P. DIENES, loc. cit., p. 96, formula (52).

isotropic space can be decomposed into a translation and an associated rotation.

Weyl's geometry is anisotropic and thus in that space displacement does not possess this property of n-uples. Translation and rotation are interchangeable in quite general tensor spaces but only isotropic spaces are they equivalent to a displacement.

30. Frénet's formulae. — As an application of the notion of displacement we calculate the p^{ik} belonging to the principal n-uple of a tensor line in an isotropic tensor space. Since the length of the tensors $\overset{(i)}{N}$ in unity, they correspond exactly to the direction cosines of the principal trihedron.

Since $\overset{(i)}{N}$ are homogeneous linear forms of $A, \dot{A}, \ldots, \overset{[-1]}{A}$, we have

$$\frac{\delta \overset{(i)}{N}}{\delta t} = a_0 A + a_1 \dot{A} + \ldots + a_i \overset{[i]}{A}$$

with

$$a_i = \frac{D_{i-1}}{\sqrt{D_{i-1} D_{i-2}}}.$$

But $\overset{[i]}{A}$ is a homogeneous linear form of $\overset{(1)}{N}, \ldots, \overset{(i+1)}{N}$. Hence

$$\frac{\delta \overset{(i)}{N}}{\delta t} = \sum_{j=1}^{i+1} p_{ij} \overset{(i)}{N}$$

i. e.

(30-1) $$p^{i,\, i+k} = 0 \qquad \text{when } k > 1.$$

It follows, by (26-4), that in an isotropic space we have also

(30-2) $$p^{i+k,\, i} = 0 \qquad \text{when } k > 1$$

and

(30-3) $$p^{ii} = 0.$$

On the other hand, by (26-2) and (22-1), using imaginary tensors instead of negative ones,

$$p^{i,\, i+1} = \overset{(i+1)}{l} \, \overset{(i+1)}{N_\alpha} \frac{\delta \overset{(i)}{N^\alpha}}{\delta t} = \frac{\overset{(i+1)}{l}}{\sqrt{D_i D_{i+1}}} \begin{vmatrix} (0,0), \ldots, & (0, i-1), & A_\alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ (i,0), \ldots, & (i, i-1), & \overset{[i]}{A_\alpha} \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{D_{i-1} D_i}} (a_0 A + a_1 \dot{A} + \ldots + D_{i-1} \overset{[i]}{A}).$$

Hence, by (21-5),

(30-4)
$$p^{i,\,i+1} = \frac{\overset{(i+1)}{l}\sqrt{D_{i+1}D_{i-1}}}{D_i} = \frac{\overset{(i+1)}{l}}{\gamma_1}.$$

Thus we get FRENET's formulae for isotropic tensor spaces:

(30-5)
$$\begin{aligned}
\frac{\delta \overset{(1)}{N}}{\delta t} &= \frac{\overset{(2)}{l}}{\gamma_1}\overset{(2)}{N} \\
\frac{\delta \overset{(2)}{N}}{\delta t} &= \frac{\overset{(3)}{l}}{\gamma_2}\overset{(3)}{N} - \frac{\overset{(1)}{l}}{\gamma_1}\overset{(1)}{N} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{\delta \overset{(n-1)}{N}}{\delta t} &= \frac{\overset{(n)}{l}}{\gamma_{n-1}}\overset{(n)}{N} - \frac{\overset{(n-2)}{l}}{\gamma_{n-2}}\overset{(n-2)}{N} \\
\frac{\delta \overset{(n)}{N}}{\delta t} &= -\frac{\overset{(n-1)}{l}}{\gamma_{n-1}}\overset{(n-1)}{N}.
\end{aligned}$$

We see that the usual teory of curves $\left(\text{where } A^\alpha = \frac{dx^\alpha}{dt}\right)$, in particular, the method of moving trihedron extends without essential modifications to isotropic spaces. On the other hand, this result justifies our definition of rotation and displacement.

24-th Nov. 1924.

Sulle superficie deformabili al modo di Bonnet.

Memoria di Giovanni Sansone (a Firenze).

1. Le superficie a curvatura media costante possono deformarsi in guisa che tutte le famiglie di traiettorie isogonali alle linee di curvatura si possono cangiare (e in doppio modo) in linee di curvatura sulle deformate (¹) (deformazioni di Bonnet). Noi in questo lavoro ci siamo proposti la questione di trovare tutte le superficie che godono tale proprietà.

La proprietà appartiene evidentemente alla superficie sviluppabili e alle sferiche, le nostre ricerche provano che la proprietà è goduta ancora soltanto dalle superficie a curvatura media costante, abbiamo anzi dimostrato il teorema: *Se una superficie reale* S *può deformarsi in guisa:* 1°) *che le sue linee di curvatura restino linee di curvatura su una conveniente deformata di* S*;* 2°) *che tre famiglie distinte di traiettorie isogonali alle linee di curvatura si cangino in doppio modo in linee di curvatura sulle deformate di* S*; allora tutte le famiglie di traiettorie isogonali alla* S *possono cangiarsi e in doppio modo in linee di curvatura sulle deformate di* S *e, se la superficie non è sviluppabile, nè a curvatura totale costante, essa è a curvatura media costante.*

Per le superficie di rotazione abbiamo in particolare il teorema del Bianchi: *Se effettuando una deformazione di una superficie di rotazione, una famiglia di traiettorie isogonali ai meridiani, distinta dai meridiani e dai paralleli della superficie stessa, può cangiarsi nelle linee di curvatura della deformata, la stessa proprietà vale per ogni altra famiglia di traiettorie isogonali, e la superficie data o è sviluppabile, o a curvatura totale costante, o una superficie di Delaunay* (²).

Alle nostre conclusioni siamo pervenuti nel seguente modo. Il problema di determinare tutte le superficie in esame dipende dall'esistenza di una soluzione comune a due equazioni alle derivati parziali del primo ordine del

(¹) Cfr. L. Bianchi, *Lezioni di Geometria Differenziale*, II ediz., T. II, p. 440. Nel seguito ci riferiremo sempre a quest'opera con le notazioni T. I, T. II.

(²) Cfr. L. Bianchi, Annali R. Scuola Normale Superiore di Pisa, Vol. II, p. 228 e seg. [1879].

tipo di RICCATI con una funzione incognita [n.° 2, sistema (10)]. Se le condizioni di integrabilità sono identicamente soddisfatte la superficie è sviluppabile (n.° 3), in caso opposto la funzione incognita è determinata da un' equazione di secondo grado [n.° 3, equaz. (13)]. Il caso che una sola radice soddisfi il sistema porta alle superficie a curvatura totale costante (n.° 4), quando entrambe le radici soddisfano il sistema, quando cioè esistono due deformazioni che cangiano ogni famiglia di traiettorie isogonali in linee di curvatura sulle deformate della superficie, se la superficie data non è a curvatura totale costante, essa è a curvatura media costante (n.¹ 5, 6, 7). Nel caso particolare delle superficie di rotazione, dalla forma particolare del sistema che determina la deformazione risulta la proprietà prima enunciata (n.° 8).

I resultati nella prima parte, possono pensarsi in certo senso quasi prevedibili. Infatti con una sola funzione incognita si deve soddisfare un sistema di due equazioni alle derivate parziali del primo ordine [n.° 2, sistema (10)] con i coefficienti formati razionalmente con le derivate parziali prime dei coefficienti E, G del quadrato dell' elemento lineare della superficie, e con i raggi principali di curvatura della superficie stessa. Il sistema è possibile se la superficie è a curvatura media costante, e poichè la classe delle superficie a curvatura media costante dipende da un' equazione alle derivate parziali del secondo ordine, è da prevedersi e i ragionamenti fatti lo provano, che la classe tanto ampia delle superficie a curvatura media costante debba coincidere con l' aggiunta delle superficie sviluppabili e di quelle a curvatura totale costante con le classe delle superficie le quali godono la proprietà in esame.

2. Sia

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

il quadrato dell' elemento lineare di una superficie S riferita alle sue linee di curvatura $u = \text{cost.}$, $v = \text{cost.}$ ed r_1 e r_2 indichino i suoi raggi principali di curvatura corrispondenti rispettivamente alle linee u, v; si hanno allora le equazioni di CODAZZI

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2}\right) = 0, \quad \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1}\right) = 0,$$

e l' equazione di GAUSS

$$(2) \qquad \frac{1}{r_1 r_2} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\} \text{ [3]}.$$

[3] T. I, p. 273.

Consideriamo le traiettorie $u_1 = \text{cost.}$ isogonali secondo l'angolo σ alle $v = \text{cost}$, e le $v_1 = \text{cost.}$ ortogonali alle u_1. Posto

$$u_1 = \varphi(u, v), \quad v_1 = \psi(u, v)$$

si ha:

$$(3) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} = -\lambda_1 \sqrt{E} \operatorname{sen}\sigma \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} = \lambda_1 \sqrt{G} \cos\sigma, \end{cases} \qquad (3') \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial u} = -\lambda_2 \sqrt{E} \cos\sigma \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial v} = -\lambda_2 \sqrt{G} \operatorname{sen}\sigma, \end{cases}$$ [4]

dove λ_1 e λ_2 sono due fattori di proporzionalità legati dalle equazioni:

$$(4) \quad \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial(\lambda_1 \sqrt{E})}{\partial v} + \cos\sigma \frac{\partial(\lambda_1 \sqrt{G})}{\partial u} = 0, \quad -\cos\sigma \frac{\partial(\lambda_2 \sqrt{E})}{\partial v} + \operatorname{sen}\sigma \frac{\partial(\lambda_2 \sqrt{G})}{\partial u} = 0.$$

Il quadrato dell'elemento lineare della S riferito alle (u_1, v_1) assume la forma:

$$(5) \qquad ds^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} du_1^2 + \frac{1}{\lambda_2^2} dv_1^2$$

e perchè le linee (u_1, v_1) siano le linee di curvatura di una superficie S' deformata della S occorre e basta che si possano determinare due funzioni r_1', r_2' di u_1, v_1 le quali soddisfino le equazioni:

$$(1') \quad \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'}\right) \frac{\partial \log \lambda_1}{\partial v_1} + \frac{\partial}{\partial v_1}\left(\frac{1}{r_2'}\right) = 0, \quad \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'}\right) \frac{\partial \log \lambda_2}{\partial u_1} - \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{1}{r_1'}\right) = 0,$$

$$(2') \qquad \frac{1}{r_1' r_2'} = \frac{1}{r_1 r_2},$$

ove r_1', r_2' indicano i raggi principali di curvatura di S' corrispondenti rispettivamente alle sue linee di curvatura (u_1, v_1).

Dalle (4) dividendo rispettivamente per $\lambda_1 \sqrt{EG}$, $\lambda_2 \sqrt{EG}$ si ha:

$$(4') \quad \begin{cases} \dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \log \lambda_1}{\partial u} + \dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \log \lambda_1}{\partial v} + \dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} + \dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \log \lambda_2}{\partial u} - \dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \log \lambda_2}{\partial u} + \dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} - \dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

mentre le equazioni (1′), (2′), esprimendo le derivate per rispetto ad u e v,

---

[4] T. I. p. 90 e p. 94.

diventano:

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\left(\dfrac{1}{r_1'}-\dfrac{1}{r_2'}\right)\dfrac{\partial \log\lambda_1}{\partial u}+\dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G}}\left(\dfrac{1}{r_1'}-\dfrac{1}{r_2'}\right)\dfrac{\partial\log\lambda_1}{\partial v}+\dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{r_2'}\right)+\dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{r_2'}\right)=0,\\ \dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{E}}\left(\dfrac{1}{r_1'}-\dfrac{1}{r_2'}\right)\dfrac{\partial \log\lambda_2}{\partial u}-\dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\left(\dfrac{1}{r_1'}-\dfrac{1}{r_2'}\right)\dfrac{\partial\log\lambda_2}{\partial v}-\dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{r_1'}\right)+\dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{r_1'}\right)=0,\\ \dfrac{1}{r_1'r_2'}=\dfrac{1}{r_1r_2}. \end{cases}$$

Se per la deformata S' si avrà $\dfrac{1}{r_1'}-\dfrac{1}{r_2'}=0$ $(r_1'=r_2')$ la S' è una sfera, inversamente tutte le superficie applicabili su una sfera (a curvatura costante positiva) godono la proprietà in esame (su una sfera infatti tutte le linee sono linee di curvatura) [5].

Escluderemo d'ora in avanti sempre il caso sferico, supporremo cioè $\dfrac{1}{r_1'}-\dfrac{1}{r_2'}\neq 0.$

Dal confronto delle (4′) e delle (6) si ha:

$$(7)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{1}{r_1'}-\dfrac{1}{r_2'}\right)\left[\dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u}+\dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}\right]=\dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{r_2'}\right)+\dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{r_2'}\right),\\ \left(\dfrac{1}{r_1'}-\dfrac{1}{r_2'}\right)\left[\dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u}-\dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}\right]=-\dfrac{\operatorname{sen}\sigma}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{r_1'}\right)+\dfrac{\cos\sigma}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{1}{r_1'}\right),\\ \dfrac{1}{r_1'r_2'}=\dfrac{1}{r_1r_2}. \end{cases}$$

Inversamente dalle (7) e dalle (6) seguono le (4′) e perciò le (1′), (2′), quindi il nostro problema é ricondotto al seguente: *determinare le funzioni* E, G, r_1, r_2 [legate già dalle tre equazioni (1) e (2)] *in guisa che le tre equazioni* (7) *ammettano qualunque sia la costante* σ, *una soluzione* r_1', r_2'.

Indicando con ω_1, ω_2 le curvature principali, posto cioè

$$\frac{1}{r_1}=\omega_1,\quad \frac{1}{r_2}=\omega_2$$

(5) *Sulle superficie a curvatura costante positiva* cfr. L. BIANCHI, loc. cit. (1), T. II, cap. XXV, p. 435 e seg..

e quindi

$$\frac{1}{r_1'} = \theta^{\frac{1}{2}}\omega_1, \quad \frac{1}{r_2'} = \theta^{-\frac{1}{2}}\omega_2 \tag{8}$$

ove θ è una funzione incognita, le equazioni (1) diventano:

$$(\omega_1 - \omega_2)\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - \frac{\partial \omega_2}{\partial v} = 0, \quad (\omega_1 - \omega_2)\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial \omega_1}{\partial u} = 0, \tag{9}$$

e il sistema (7) si riduce alle due equazioni:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial u} + \operatorname{tg}\sigma\sqrt{\dfrac{E}{G}}\dfrac{\partial \theta}{\partial v} = 2\theta\dfrac{\partial \log \sqrt{G}\omega_2}{\partial u} - 2\theta^2\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\dfrac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} - 2\operatorname{tg}\sigma\dfrac{\omega_1}{\omega_2}\theta(\theta-1)\sqrt{\dfrac{E}{G}}\dfrac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}, \\ \operatorname{tg}\sigma\sqrt{\dfrac{G}{E}}\dfrac{\partial \theta}{\partial u} - \dfrac{\partial \theta}{\partial v} = 2\theta\dfrac{\partial \log \sqrt{E}\omega_1}{\partial u} - 2\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\dfrac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} - 2\operatorname{tg}\sigma\dfrac{\omega_2}{\omega_1}(\theta-1)\sqrt{\dfrac{G}{E}}\dfrac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}, \end{cases}$$

e da quest' ultime risolvendo rispetto a $\frac{\partial \theta}{\partial u}, \frac{\partial \theta}{\partial v}$ si hanno per θ le due equazioni di RICCATI:

$$\begin{aligned} &(\operatorname{tg}^2\sigma + 1)\frac{\partial \theta}{\partial u} = -2\frac{\omega_1}{\omega_2}\left[\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\operatorname{tg}\sigma + \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\right]\theta^2 + \\ &\quad + 2\left[-\frac{\omega_2}{\omega_1}\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\operatorname{tg}^2\sigma + \frac{\omega_1}{\omega_2}\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\operatorname{tg}\sigma + \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial \log \sqrt{E}\omega_1}{\partial v}\operatorname{tg}\sigma + \frac{\partial \log \sqrt{G}\omega_2}{\partial u}\right]\theta - \\ &\quad - 2\frac{\omega_2}{\omega_1}\left[-\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\operatorname{tg}^2\sigma + \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\operatorname{tg}\sigma\right], \\ &(\operatorname{tg}^2\sigma + 1)\frac{\partial \theta}{\partial v} = -2\frac{\omega_1}{\omega_2}\left[\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\operatorname{tg}^2\sigma + \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\operatorname{tg}\sigma\right]\theta^2 + \\ &\quad + 2\left[\frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\operatorname{tg}^2\sigma + \frac{\omega_2}{\omega_1}\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\operatorname{tg}\sigma + \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial \log \sqrt{G}\omega_2}{\partial u}\operatorname{tg}\sigma - \frac{\partial \log \sqrt{E}\omega_1}{\partial v}\right]\theta - \\ &\quad - 2\frac{\omega_2}{\omega_1}\left[\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\operatorname{tg}\sigma - \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Il nostro problema consiste quindi nel trovare come si debbono scegliere le funzioni E, G, ω_1, ω_2 [già legate dalle equazioni (2) e (9)] in guisa che il sistema delle due equazioni (10) ammetta qualunque sia σ una soluzione θ.

Facilmente si verifica:

a) Se il sistema (10) ha per σ la soluzione θ, per $\sigma + \frac{\pi}{2}$ ha la soluzione $\theta_1 = \frac{\omega_2^2}{\theta\omega_1^2}$.

b) Il sistema (10) per $\sigma = 0$ ha la soluzione $\theta = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}$, per $\sigma = \frac{\pi}{2}$ la soluzione $\theta = 1$.

c) Se nel sistema (10) supposto possibile, si cangia u con v, E con G, ω_1 con ω_2 e σ in $-\sigma$ e le derivate rispetto ad u nelle derivate rispetto a v, anche il nuovo sistema che corrisponde alla stessa superficie S è possibile e la soluzione θ del vecchio sistema si cangia nella soluzione $\frac{1}{\theta}$ del nuovo.

Queste proprietà si ricavano anche dal fatto che le linee u, v sono per ipotesi linee di curvatura, e che essendo le linee (u_1, v_1) ortogonali, se le $u_1 = \text{cost.}$ sono una famiglia di linee di curvatura su S', le $v_1 = \text{cost.}$ dànno l'altra famiglia di linee di curvatura di S'.

3. Occupiamoci della risolubilità del sistema (10). Posto per brevità:

$$(11)\quad \begin{cases} a = -2\frac{\omega_1}{\omega_2}\left[\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\operatorname{tg}\sigma + \frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\right], \quad c = -2\frac{\omega_2}{\omega_1}\left[\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\operatorname{tg}\sigma - \frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\right], \\ \frac{1}{2}b = -\frac{\omega_2}{\omega_1}\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\operatorname{tg}^2\sigma + \frac{\omega_1}{\omega_2}\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\operatorname{tg}\sigma + \sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial \log \sqrt{E}\omega_1}{\partial v}\operatorname{tg}\sigma + \frac{\partial \log \sqrt{G}\omega_2}{\partial u}, \\ \frac{1}{2}b' = \frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\operatorname{tg}^2\sigma + \frac{\omega_2}{\omega_1}\sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\operatorname{tg}\sigma + \sqrt{\frac{G}{E}}\frac{\partial \log \sqrt{G}\omega_2}{\partial u}\operatorname{tg}\sigma - \frac{\partial \log \sqrt{E}\omega_1}{\partial v}, \end{cases}$$

il sistema (10) può scriversi:

$$(12)\quad (\operatorname{tg}^2\sigma + 1)\frac{\partial\theta}{\partial u} = a\theta^2 + b\theta - c\sqrt{\frac{E}{G}}\operatorname{tg}\sigma; \quad (\operatorname{tg}^2\sigma + 1)\frac{\partial\theta}{\partial v} = \operatorname{tg}\sigma\sqrt{\frac{G}{E}}a\theta^2 + b'\theta + c,$$

e da questo derivando la prima equazione rispetto a v e la seconda rispetto ad u si ha per θ l'equazione di secondo grado:

$$(13)\qquad A\theta^2 + B\theta + C = 0,$$

ove abbiamo posto ora:

$$(13')\quad \begin{aligned} A = &-\operatorname{tg}^2\sigma\left[2\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial^2 \log \sqrt{E}\omega_2}{\partial u\,\partial v}\right] \\ &+\operatorname{tg}\sigma\left[-2\sqrt{\frac{G}{E}}\left(\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\right)^2 + 2\frac{\omega_1}{\omega_2}\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial \log \sqrt{E}\omega_1}{\partial v} + \right. \\ &\qquad\left. + \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\frac{\omega_1}{\omega_2}\right\} - \frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}\frac{\omega_1}{\omega_2}\right\}\right] \\ &+\left[2\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial^2 \log \sqrt{G}\omega_1}{\partial u\,\partial v}\right]\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}; \end{aligned}$$

$$
(13')\qquad
\begin{aligned}
B = {} & \operatorname{tg}^2\sigma\left[4\,\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}\,\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\partial^2\log K\sqrt{EG}}{\partial u\,\partial v}\right]\\
& +\operatorname{tg}\sigma\left[-4\sqrt{\frac{E}{G}}\left(\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}\right)^2+4\sqrt{\frac{G}{E}}\left(\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2-\right.\\
& \qquad\left.-\frac{\partial}{\partial u}\left\{\sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{\partial\log KG}{\partial u}\right\}+\frac{\partial}{\partial v}\left\{\sqrt{\frac{E}{G}}\,\frac{\partial\log KE}{\partial v}\right\}\right]\\
& -\left[4\,\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}\,\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\partial^2\log K\sqrt{EG}}{\partial u\,\partial v}\right];\\
C = {} & \operatorname{tg}^2\sigma\left[2\,\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}\,\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\partial^2\log\sqrt{G}\,\omega_1}{\partial u\,\partial v}\right]\\
& +\operatorname{tg}\sigma\left[-2\sqrt{\frac{G}{E}}\left(\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u}\right)^2+2\,\frac{\omega_1}{\omega_2}\sqrt{\frac{E}{G}}\,\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}\,\frac{\partial\log\sqrt{E}\,\omega_1}{\partial v}+\right.\\
& \qquad\left.+\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{\sqrt{E}}\,\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\,\frac{\omega_1}{\omega_2}\right\}-\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\,\frac{\omega_1}{\omega_2}\right\}\right]\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\\
& +\left[2\,\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}\,\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\partial^2\log\sqrt{E}\,\omega_2}{\partial u\,\partial v}\right]\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2};
\end{aligned}
$$

essendo K la curvatura totale della superficie.

I coefficienti A, B, C sono polinomi di secondo grado in $\operatorname{tg}\sigma$, e se essi sono identicamente nulli (rispetto a $\operatorname{tg}\sigma$), la (13) è identicamente soddisfatta, il sistema (12) è possibile e la funzione θ è determinata a meno di una costante arbitraria, la S ammette quindi una deformazione continua la quale cangia le traiettorie sotto l'angolo σ $\left(\text{i casi } \sigma=0,\ \sigma=\frac{\pi}{2} \text{ inclusi}\right)$ delle linee di curvatura della S in linee di curvatura della superficie deformata; la S è per un teorema di CODAZZI [6] una superficie modanata del MONGE a sviluppabile direttrice cilindrica. Il quadrato dell'elemento lineare di queste superficie è:

$$
(14)\qquad ds^2 = du^2 + \left(1+\frac{U}{R}\right)^2 dv^2,
$$

essendo $U = U(u)$, $R = R(v)$ [7], ed è anche

$$
\omega_1 = \frac{1}{r_1} = -\frac{\sqrt{1-U'^2}}{U+R}, \quad \omega_2 = \frac{1}{r_2} = \frac{U''}{\sqrt{1-U'^2}}.
$$

(6) T. II, p. 168.
(7) T. I, p. 168.

In A, B, C il coefficiente di $\operatorname{tg}^2 \sigma$ e i termini noti sono nulli, scrivendo che sono nulli in A (o ciò che è lo stesso in C) e in B il coefficiente di $\operatorname{tg} \sigma$ si hanno le equazioni:

$$(15) \qquad \begin{gathered} -2\sqrt{G}\left(\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}\frac{\omega_1}{\omega_2}\right\} = 0, \\ 4\sqrt{G}\left(\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}\right)^2 - \frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{\omega_2}{\omega_1}\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} + \sqrt{G}\frac{\partial \log \omega_2}{\partial u}\right\} = 0. \end{gathered}$$

Si osservi che se è $U'' = 0$ si avrà $K = 0$ e la superficie S è sviluppabile, per $U'' \neq 0$ dalla prima delle (15) si ha:

$$(16) \qquad \frac{U'}{U''(U+R)} = \frac{1}{c}$$

dalla quale si ottiene (essendo $U'' \neq 0$) $R(v) = \text{cost.}$.

Dalla (16) una prima integrazione dà:

$$(17) \qquad U' = c \log (U + R) + c_1$$

e moltiplicando la prima equazione (15) per 2 e sommando con la seconda, tenuto conto dell'equazione (17) si trova:

$$[-2(1 - U'^2) + cU' + c^2](U + R) - c^2 U' = -ac(U + R); \quad (a \text{ costante}).$$

Da questa, essendo $U + R \neq 0$, si avrà U' espressa algebricamente per $U + R$ (e le costanti a, c) e ciò non può aversi per la (17) che soltanto nel caso $c = 0$, $U'^2 = 1$ cioè per $K = 0$ e la superficie S è sviluppabile.

Ne segue che eccetto il caso delle superficie sviluppabili, l'equazione (13) non è identica. Aggiungiamo ora che nell'ipotesi che la superficie S non sia sviluppabile i coefficienti A e C non sono rispetto a σ identicamente nulli, perchè l'equazione (13) diventa in questo caso $B\theta = 0$, e poichè è $\theta \neq 0$ ne seguirebbe $B = 0$ identicamente (rispetto a σ) e perciò la (13) (contro l'ipotesi) sarebbe identica.

La forma dei coefficienti A e C ci dice poi che d'ora in avanti possiamo supporre che A e C non siano identicamente nulli.

4. Dalla equazione (13) nelle nostre ipotesi si ha:

$$(18) \qquad \theta = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2A} \quad \text{con} \quad \Delta = B^2 - 4AC$$

e di questi due valori di θ, perchè la superficie S ammetta la proprietà prefissata, uno almeno deve soddisfare il sistema (12).

Se non è Δ identicamente nullo (rispetto a σ) nel qual caso θ ha la forma $\frac{N}{D}$ con N e D polinomi di secondo grado in $\operatorname{tg}\sigma$, *se il sistema ammette una **sola** soluzione* θ, sostituendo uno dei valori (18) nel sistema (12) si ha che devono verificarsi identicamente rispetto a σ due relazioni ciascuna della forma:

$$M = \pm N\sqrt{\Delta}$$

con M ed N polinomi razionali interi in $\operatorname{tg}\sigma$, dove nel secondo membro dovrà prendersi soltanto o il segno $+$ o il segno $-$.

Ciò porta che N non è identicamente nullo (rispetto a σ) cioè $\sqrt{\Delta}$ si esprime razionalmente per $\operatorname{tg}\sigma$, e perciò se il sistema (12) ha una sola soluzione (includiamo quindi il caso che sia identicamente $\Delta = 0$) essa deve avere la forma:

$$\theta = \frac{a_1' \operatorname{tg}^2\sigma + a_2' \operatorname{tg}\sigma + a_3'}{a_1 \operatorname{tg}^2\sigma + a_2 \operatorname{tg}\sigma + a_3} \tag{19}$$

dove i coefficienti a_1, a_2, a_3, a_1', a_2', a_3' sono espressioni razionali in E, G, ω_1, ω_2 e le loro derivate prime e seconde rispetto ad u e v, ed essendo poi [cfr. n.° 2, *b*)] $\lim\limits_{\operatorname{tg}\sigma \to 0} \theta(\operatorname{tg}\sigma) = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \neq 0$, $\lim\limits_{\operatorname{tg}\sigma \to \infty} \theta(\operatorname{tg}\sigma) = 1$ ne segue che numeratore e denominatore sono polinomi rispetto a $\operatorname{tg}\sigma$ dello stesso grado.

a) Supponiamo in primo luogo che la soluzione θ *non dipenda da* σ, in questo caso r_1', r_2' sono per le (8) indipendenti da σ e dal sistema (7), che ammette una soluzione indipendente da σ, facendovi $\sigma = \frac{\pi}{2}$, $\sigma = 0$, si ha:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_1'}\right) + \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'}\right)\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{r_2'}\right) - \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'}\right)\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = 0, \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_1'}\right) + \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'}\right)\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{r_2'}\right) - \left(\frac{1}{r_1'} - \frac{1}{r_2'}\right)\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = 0, \end{aligned}\right.$$

e da queste sommando, e indicando con H' la curvatura media di S' si ha:

$$\frac{\partial H'}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial H'}{\partial v} = 0,$$

ossia $H' = \text{cost.}$. Ne segue che la S è la deformata di una superficie S' a curvatura media costante e le linee di curvatura di S corrispondono ad una famiglia di traiettorie isogonali delle linee di curvatura di S', ma allora [8]

[8] T. II, p. 438.

S deve ammettere due deformazioni distinte corrispondenti a valori distinti di θ e ciò è contro l'ipotesi che il sistema (12) abbia una sola soluzione. Escludiamo d'ora in avanti come si è prima detto il caso $r_1' = r_2'$, e più in generale il caso di una superficie a curvatura totale costante, applicabile quindi su una sfera di raggio reale (r_1' e r_2' reali) o puramente immaginario (r_1' e r_2' immaginari), rimandando ad una prossima Memoria lo studio di questi casi particolari in cui vogliamo che esista un'effettiva deformazione della sfera che' trasformi le famiglie di traiettorie isogonali in linee di curvatura sulle deformate.

b) Supponiamo in secondo luogo che *il secondo membro della* (19) *si riduca al quoziente di due funzioni lineari in* $\operatorname{tg}\sigma$:

$$\theta = \frac{a_2' \operatorname{tg}\sigma + a_3'}{a_2 \operatorname{tg}\sigma + a_3}.$$

Per $\sigma = 0$, è $\theta = \frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}$, per $\sigma = \frac{\pi}{2}$ è $\theta = 1$, [cfr. n.° 2, *b*)], ne segue che θ deve avere la forma:

$$\theta = \frac{\operatorname{tg}\sigma + a\omega_2^2}{\operatorname{tg}\sigma + a\omega_1^2}.$$

Abbiamo detto però che cangiando σ in $\frac{\pi}{2} + \sigma$, θ si cangia in $\frac{\omega_2^2}{\theta\omega_1^2}$ [n.° 2, *a*)], dovrà allora essere identicamente:

$$\frac{\omega_2^2}{\theta\omega_1^2} = \frac{-\operatorname{ctg}\sigma + a\omega_2^2}{-\operatorname{ctg}\sigma + a\omega_1^2} = \frac{a\omega_2^2 \operatorname{tg}\sigma - 1}{a\omega_1^2 \operatorname{tg}\sigma - 1},$$

e perciò deve essere identicamente:

$$\theta = \frac{a\omega_1^2\omega_2^2 \operatorname{tg}\sigma + a^2\omega_1^2\omega_2^4}{a\omega_1^2\omega_2^2 \operatorname{tg}\sigma + a^2\omega_1^4\omega_2^2} = \frac{a\omega_1^2\omega_2^2 \operatorname{tg}\sigma - \omega_2^2}{a\omega_1^2\omega_2^2 \operatorname{tg}\sigma - \omega_1^2},$$

e per l'irriducibilità delle due frazioni:

(20) $$a^2\omega_1^2\omega_2^2 = -1.$$

Da questa si ha $a = \frac{i^\rho}{\omega_1\omega_2}$, $\rho = 1, 3$ (i unità immaginaria), perciò θ ha l'espressione:

(21) $$\theta = \frac{\operatorname{tg}\sigma + i^\rho \frac{\omega_2}{\omega_1}}{\operatorname{tg}\sigma + i^\rho \frac{\omega_1}{\omega_2}}.$$

Scrivendo ora le condizioni che ci assicurano che θ è una soluzione del sistema (12), si ottengono per le funzioni E, G, r_1, r_2 oltre le equazioni (1) e (2) le altre $\left(K=\frac{1}{r_1 r_2}\right)$:

$$\frac{\partial K}{\partial u}+i^{\rho}\sqrt{\frac{E}{G}}\frac{\partial K}{\partial v}=0, \quad \frac{\partial^2 \log\sqrt{\frac{E}{G}}}{\partial u \partial v}=i^{\rho}K\sqrt{EG},$$

e perciò le superficie corrispondenti alle (21), se esistono, sono immaginarie. [In altra Memoria esamineremo questo caso particolare].

c) Supponiamo infine che il numeratore e il denominatore della frazione (19) *considerati come polinomi in* tg σ, *siano primi tra loro,* posto allora $\theta=\frac{N}{D}$ con N e D polinomi di secondo grado rispetto a tg σ, primi tra loro, e sostituendo nella (13) essa diventa:

$$AN^2+BND+CD^2=0.$$

Dovrà essere quindi N divisore di C, D divisore di A, e poichè A e C sono polinomi di secondo grado, dovrà essere

$$\theta=n\frac{C}{A}$$

dove n è una costante rispetto a σ (funzione però di u e v) che possiamo subito determinare.

Infatti poichè per $\sigma=0$ è $\theta(0)=\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}$ e per $\sigma=\frac{\pi}{2}$ è $\lim\limits_{\sigma\to\frac{\pi}{2}}\theta(\sigma)=n\lim\limits_{\sigma\to\frac{\pi}{2}}\frac{C}{A}=1$,

sarà:

$$(22)\qquad \begin{aligned} &n\frac{2\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\partial^2 \log\sqrt{E}\omega_2}{\partial u\partial v}}{2\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\partial^2 \log\sqrt{G}\omega_1}{\partial u\partial v}}=\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2},\\[2ex] &n\frac{2\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\partial^2 \log\sqrt{G}\omega_1}{\partial u\partial v}}{2\frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\partial^2 \log\sqrt{E}\omega_2}{\partial u\partial v}}=1,\end{aligned}$$

dalle quali moltiplicando si ha $n\varepsilon\frac{\omega_1}{\omega_2}=1$ con $\varepsilon=\pm 1$, e le (22) diventano:

$$(23)\quad 2\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\partial^2\log\sqrt{G}\omega_1}{\partial u\partial v}=\varepsilon\frac{\omega_2}{\omega_1}\left(2\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\partial^2\log\sqrt{E}\omega_2}{\partial u\partial v}\right).$$

Sarà allora $\theta=\varepsilon\frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{C}{A}$ e dividendo numeratore e denominatore della frazione $\frac{C}{A}$ per $2\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\partial^2\log\sqrt{E}\omega_2}{\partial u\partial v}$ si ha per θ l'espressione

$$(24)\qquad \theta(\sigma)=\frac{\operatorname{tg}^2\sigma+\alpha_1\varepsilon\frac{\omega_2}{\omega_1}\operatorname{tg}\sigma-\varepsilon\frac{\omega_2}{\omega_1}}{\operatorname{tg}^2\sigma+\alpha_1\operatorname{tg}\sigma-\varepsilon\frac{\omega_1}{\omega_2}},\qquad \varepsilon=\pm 1,$$

essendo α_1 una conveniente funzione di u e v.

Poniamo ancora $\theta=\frac{N}{D}$ (N e D polinomi di secondo grado in $\operatorname{tg}\sigma$ primi tra loro); la funzione θ soddisferà il sistema (12) ove si abbia

$$(26)\quad \begin{cases}(\operatorname{tg}^2\sigma+1)DN_u'-(\operatorname{tg}^2\sigma+1)ND_u'=aN^2+bND-\sqrt{\frac{E}{G}}\operatorname{tg}\sigma\, cD^2,\\[2mm] (\operatorname{tg}^2\sigma+1)DN_v'-(\operatorname{tg}^2\sigma+1)ND_v'=\operatorname{tg}\sigma\sqrt{\frac{G}{E}}aN^2+b'ND+cD^2.\end{cases}$$

Da queste segue che i due polinomi in $\operatorname{tg}\sigma$

$$(\operatorname{tg}^2\sigma+1)N_u'+\sqrt{\frac{E}{G}}\operatorname{tg}\sigma\, cD,\quad (\operatorname{tg}^2\sigma+1)N_v'-cD$$

debbono essere divisibili per N, quindi è divisibile per N il polinomio in $\operatorname{tg}\sigma$:

$$(\operatorname{tg}^2\sigma+1)\left[N_u'+\sqrt{\frac{E}{G}}\operatorname{tg}\sigma\, N_v'\right].$$

Possiamo supporre che N sia primo con $\operatorname{tg}^2\sigma+1$, perchè in caso opposto si avrebbe $\alpha_1=0$, $\varepsilon\frac{\omega_1}{\omega_2}=1$, quindi $\omega_1=\varepsilon\omega_2$ e secondochè sia $\varepsilon=\pm 1$ siamo nel caso noto delle superficie sferiche, o in quello noto delle superficie d'area minima ([9]); si ha perciò che deve essere $N_u'+\sqrt{\frac{E}{G}}\operatorname{tg}\sigma N_v'$ divisibile per N e ana-

([9]) T. II, p. 331.

logamente deve essere divisibile per D il polinomio in $\operatorname{tg}\sigma$, $D_u' \operatorname{tg}\sigma \sqrt{\frac{E}{G}} - D_v'$. Esprimendo queste due condizioni si ottengono per la funzione incognita α_1 le due equazioni:

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial u} = -\sqrt{\frac{E}{G}} \frac{\partial \log}{\partial v}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right), \quad \frac{\partial \alpha_1}{\partial v} = -\varepsilon \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) + \alpha_1 \frac{\partial \log}{\partial v}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right). \tag{27}$$

Scrivendo ancora che le (26) risultano identicamente soddisfatte rispetto a σ, si hanno per α_1 le altre due equazioni:

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1\omega_2}[2\omega_1 - \varepsilon\omega_1 + \omega_2]\frac{\partial \omega_1}{\partial u} + \frac{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_2 + \varepsilon\omega_1)}{\omega_2^2}\frac{\partial \omega_2}{\partial u} = -$$

$$- \alpha_1 \sqrt{\frac{E}{G}} \frac{1}{\omega_1\omega_2}\left[\omega_1(\omega_1 + \omega_2 - 2\varepsilon\omega_2)\frac{\partial \omega_2}{\partial v} + \omega_2(\omega_1 - \omega_2)\frac{\partial \omega_1}{\partial v}\right],$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1^2}[\omega_1 + \varepsilon\omega_2]\frac{\partial \omega_1}{\partial v} + \frac{(\omega_1 - \omega_2)(\omega_1 + 2\omega_2 - \varepsilon\omega_2)}{\omega_1\omega_2}\frac{\partial \omega_2}{\partial v} =$$

$$= \alpha_1 \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{1}{\omega_1^2}\left[\omega_2(2\omega_1 - \varepsilon\omega_1 - \varepsilon\omega_2)\frac{\partial \omega_1}{\partial u} + \varepsilon(\omega_1 - \omega_2)\omega_1 \frac{\partial \omega_2}{\partial u}\right].$$

Queste per $\varepsilon = +1$ diventano:

$$(\omega_1 + \omega_2)\frac{\partial K}{\partial u} = -\alpha_1 \sqrt{\frac{E}{G}}\,\omega_2 \frac{\partial K}{\partial v}, \quad (\omega_1 + \omega_2)\frac{\partial K}{\partial v} = \alpha_1 \sqrt{\frac{G}{E}}\,\omega_2 \frac{\partial K}{\partial u}. \tag{28}$$

In questo sistema omogeneo rispetto a $\frac{\partial K}{\partial u}$, $\frac{\partial K}{\partial v}$. supposto $\frac{\partial K}{\partial u} = 0$ segue $(\omega_1 + \omega_2)\frac{\partial K}{\partial v} = 0$, perciò o $\frac{\partial K}{\partial v} = 0$ quindi $K = \text{cost.}$, caso escluso, oppure $\omega_1 + \omega_2 = 0$ che è il caso noto delle superficie minime. Supposto allora $\frac{\partial K}{\partial u} \neq 0$, $\frac{\partial K}{\partial v} \neq 0$ il sistema (28) ci dà

$$(\omega_1 + \omega_2)^2 + \alpha_1^2\omega_2^2 = 0,$$

quindi

$$\alpha_1 = i^{\rho}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2} + 1\right), \qquad \rho = 1, 3$$

e la (24) diventa

$$\theta(\sigma) = \frac{\operatorname{tg}\sigma + i^{\rho}\frac{\omega_2}{\omega_1}}{\operatorname{tg}\sigma + i^{\rho}\frac{\omega_1}{\omega_2}}$$

contro l'ipotesi che il secondo membro della (24) sia una frazione irriducibile.

Analogamente supponiamo $\varepsilon = -1$, esse diventano:

$$\left\{\begin{aligned}&(\omega_1-\omega_2)\left[\omega_2(3\omega_1+\omega_2)\frac{\partial\omega_1}{\partial u}-\omega_1(\omega_1-\omega_2)\frac{\partial\omega_2}{\partial u}\right]=-\\&\qquad\qquad-\alpha_1\sqrt{\frac{E}{G}}\,\omega_2\left[(\omega_1+3\omega_2)\frac{\partial\omega_2}{\partial u}+(\omega_1-\omega_2)\omega_2\frac{\partial\omega_1}{\partial v}\right],\\&(\omega_1-\omega_2)\left[\omega_1(\omega_1+3\omega_2)\frac{\partial\omega_1}{\partial v}+\omega_2(\omega_1-\omega_2)\frac{\partial\omega_1}{\partial v}\right]=\\&\qquad\qquad=\alpha_1\sqrt{\frac{G}{E}}\,\omega_2\left[(3\omega_1+\omega_2)\omega_2\frac{\partial\omega_1}{\partial u}-(\omega_1-\omega_2)\omega_1\frac{\partial\omega_2}{\partial u}\right],\end{aligned}\right.$$

e ancora, a meno che non si abbia:

$$(29)\quad \omega_2(3\omega_1+\omega_2)\frac{\partial\omega_1}{\partial u}-\omega_1(\omega_1-\omega_2)\frac{\partial\omega_2}{\partial u}=0,\quad \omega_1(3\omega_2+\omega_1)\frac{\partial\omega_2}{\partial v}+\omega_2(\omega_1-\omega_2)\frac{\partial\omega_1}{\partial v}=0,$$

moltiplicando si ha

$$\alpha_1 = i^\rho\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}-1\right),\qquad \rho=1,3$$

e come prima

$$\theta=\frac{\operatorname{tg}\sigma+i^\rho\dfrac{\omega_2}{\omega_1}}{\operatorname{tg}\sigma+i^\rho\dfrac{\omega_1}{\omega_2}},$$

contro l'ipotesi che il secondo membro della (24) sia una frazione irriducibile.

Supposte invece verificate le (29), si ha anche

$$4\omega_1\omega_2\frac{\partial\omega_1}{\partial u}-(\omega_1-\omega_2)\frac{\partial\omega_1\omega_2}{\partial u}=0,\quad 4\omega_1\omega_2\frac{\partial\omega_2}{\partial v}+(\omega_1-\omega_2)\frac{\partial\omega_1\omega_2}{\partial v}=0,$$

od anche

$$4\frac{\partial\log\sqrt{G}}{\partial u}+\frac{\partial\log K}{\partial u}=0,\quad 4\frac{\partial\log\sqrt{E}}{\partial v}+\frac{\partial\log K}{\partial v}=0,$$

perciò

$$KG^2=\varphi(v),\quad KE^2=\psi(u),$$

e cambiando i parametri u e v nei parametri isometrici, possiamo supporre che per la superficie S riferita alle sue linee di curvatura si abbia $E=G$, $k=\dfrac{c}{E^2}$ con c costante. Quando sia c costante negativa, la superficie S è applicabile su una d'area minima con conservazione delle linee di curvatura [10]

[10] T. II, p. 330-331.

ma in questo caso le traiettorie isogonali alle linee di curvatura si possono cangiare in *doppio* modo in linee di curvatura su due deformate di S; il caso $c > 0$ è analiticamente identico, ma la corrispondente superficie S è immaginaria (si passa dall'uno all'altro caso con un'omotetia di rapporto i).

5. Ci resta da esaminare il caso che entrambe le soluzioni dell'equazione (13) soddisfano il sistema (12), cioè che *per ogni valore di σ esistano due deformazioni distinte di* S *le quali cangiano le traiettorie secondo l'angolo σ delle linee di curvatura di* S *in linee di curvatura sulle deformate.*

Però prima di esaminare il nostro problema in questo caso, proponiamoci di esprimere sotto forma analitica semplice, la condizione per la quale le linee di curvatura di una superficie S possono cangiarsi nelle linee di curvatura di una deformata della S [11].

Se indichiamo con ω_1', ω_2' le curvature principali della superficie deformata di S sulla quale le linee di curvatura (u, v) si conservano linee di curvatura, potremo porre

$$\omega_1' = \mu^{\frac{1}{2}}\omega_1, \quad \omega_2' = \mu^{-\frac{1}{2}}\omega_2$$

ove μ $(\mu > 0)$ è una funzione di u e v che dovrà soddisfare alle equazione ottenute da quelle di CODAZZI

$$(30) \qquad \frac{\omega_1}{\omega_2}\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial \log \sqrt{E}\omega_2}{\partial v}, \quad \frac{\omega_2}{\omega_1}\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{\partial \log \sqrt{G}\omega_1}{\partial u} \text{ [12]},$$

sostituendo ad ω_1 e ω_2 rispettivamente $\mu^{\frac{1}{2}}\omega_1$, $\mu^{-\frac{1}{2}}\omega_2$, e per questo dovrà essere:

$$\frac{\partial \log \sqrt{E}\omega_2\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \log \sqrt{G}\omega_1(\mu - 1)^{\frac{1}{2}}}{\partial u} = 0$$

per le quali cambiando convenientemente i parametri u, v dovrà aversi:

$$\sqrt{E}\omega_2 = \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad \sqrt{G}\omega_1 = (\mu - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

---

[11] Sappiamo che « tutte e sole le superficie, che hanno a comune con una superficie a curvatura costante positiva l'immagine sferica delle linee di curvatura, possono ricevere una deformazione finita che conserva le linee di curvatura ». T. II, p. 46.

[12] Cfr. equazioni (1).

od anche, posto

$$\mu = \text{ctgh}^2 \alpha \text{ [13]},$$

si avrà:

$$\sqrt{E}\omega_2 = \cosh \alpha, \quad \sqrt{G}\omega_1 = \text{senh}\, \alpha. \tag{31}$$

Le equazioni (30) e (2) diventano:

$$\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \tag{32}$$

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2} + \text{senh}\, \alpha \cosh \alpha = 0 \text{ [14]}. \tag{33}$$

Dalle (31) si ha: *se* $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$ *è il quadrato dell'elemento lineare di una superficie* S *per la quale le linee di curvatura* u, v *si possono cangiare nelle linee di curvatura di una deformata della* S, *indicando con* ω_1, ω_2 *le curvature principali della superficie, (cangiando al più i parametri* u, v) *dovrà essere:*

$$E\omega_2^2 - G\omega_1^2 = \pm 1.$$

Ciò premesso, domandiamoci quando una soluzione E, G, α del sistema (32) (33) è tale che le due radici dell'equazione (13)

$$A\theta^2 + B\theta + C = 0 \tag{13''}$$

soddisfino qualunque sia σ il sistema:

$$(\text{tg}^2 \sigma + 1)\frac{\partial \theta}{\partial u} = a\theta^2 + b\theta - c\sqrt{\frac{E}{G}}\,\text{tg}\, \sigma, \quad (\text{tg}^2 \sigma + 1)\frac{\partial \theta}{\partial v} = \text{tg}\, \sigma \sqrt{\frac{G}{E}}\, a\theta^2 + b'\theta + c. \tag{12}$$

Osserviamo che nelle espressioni (13') dei coefficienti A, B, C possiamo supporre *quando la superficie* S *non sia a curvatura media costante,* che uno almeno dei due coefficienti

$$2\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial^2 \log \sqrt{E}\omega_2}{\partial u \partial v}, \quad 2\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\partial^2 \log \sqrt{G}\omega_1}{\partial u \partial v} \tag{34}$$

sia diverso da 0. In caso opposto le due soluzioni θ dell'equazione (13'') sono indipendenti da σ, e come si è detto al n.° 4 *a)* le superficie deformate

---

[13] Supponiamo $\mu > 1$, cioè che è sempre lecito, basta cambiare in caso opposto le linee u con le v.

[14] Cfr. T. II, p. 46 e 436.

della S corrispondenti ad ogni valore di $\sigma \neq 0, \frac{\pi}{2}$ sono a curvatura media costante, anzi *la* S *stessa è a curvatura media costante.* Infatti se $\overline{S}$ è una superficie a curvatura media costante corrispondente all'angolo σ, le traiettorie sotto angolo $-\sigma$ di questa si possono deformare nelle linee di curvatura di due superficie a curvatura media costante S', S'', e poichè queste linee si deformano anche nelle linee di curvatura di S (non potendo essere le deformazioni in esame più di due) dovrà S coincidere con S' o con S'', cioè S è a curvatura media costante.

Escludiamo d'ora in avanti che la superficie S *di partenza sia a curvatura media costante, e proviamo allora che qualunque sia la soluzione* E, G, α *del sistema* (32), (33) *le due radici* θ *dell'equazione* (13″) *non possono soddisfare, qualunque sia* σ, *il sistema* (12′).

Poichè delle due espressioni (34) una almeno non è nulla, possiamo, (scambiando al più le linee u con le linee v) supporre sia

$$2\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\partial^2 \log \sqrt{E}\omega_2}{\partial u \partial v} \neq 0.$$

Dividendo l'equazione (13″) per $2\frac{\partial \log \sqrt{E}}{\partial v}\frac{\partial \log \sqrt{G}}{\partial u}-\frac{\partial^2 \log \sqrt{E}\omega_2}{\partial u \partial v}$ essa assume la forma

$$A_1\theta^2+B_1\theta+C_1=0 \tag{35}$$

con

$$\left\{\begin{aligned} A_1 &= -\operatorname{tg}^2\sigma+2m\operatorname{tg}\sigma+\frac{E}{G} \\ C_1 &= \operatorname{ctgh}^2\alpha\left[-\operatorname{tg}^2\sigma+2m\frac{G}{E}\operatorname{tg}\sigma+\frac{G}{E}\right]\end{aligned}\right. \qquad B_1=(1+\operatorname{ctgh}^2\alpha)[\operatorname{tg}^2\sigma-2m'\operatorname{tg}\sigma-1] \tag{36}$$

ove m e m' sono funzioni di u e v soltanto, e la determinazione delle nostre superficie è ricondotta al problema di determinare corrispondentemente ad una soluzione E, G, α del sistema (32), (33) due funzioni $m(u, v)$ $m'(u, v)$ in modo che le due radici θ dell'equazione (35) soddisfino il sistema (12′).

Derivando la (35) rispetto ad u e tenuto conto della prima equazione (12′) si ha:

$$\begin{aligned} &2aA_1\theta^3+\left[2bA_1+aB_1+\frac{\partial A_1}{\partial u}(\operatorname{tg}^2\sigma+1)\right]\theta^2+ \\ &+\left[-2\sqrt{\frac{E}{G}}\operatorname{tg}\sigma cA_1+bB_1+\frac{\partial B_1}{\partial u}(\operatorname{tg}_2\theta+1)\right]\theta+\left[-B_1\sqrt{\frac{E}{G}}\operatorname{tg}\sigma+\frac{\partial C_1}{\partial u}(\operatorname{tg}^2\sigma+1)\right]=0,\end{aligned} \tag{37}$$

la quale fissato u, v, σ deve ammettere le due radici dell'equazione (35), per questo occorre e basta che il suo primo membro considerato rispetto alla variabile θ sia divisibile per $A\theta^2 + B\theta + C$, esso dovrà avere quindi la forma:

$$\left[2a\theta + \frac{-B_1\sqrt{\frac{E}{G}}\,\mathrm{tg}\sigma\, c + \frac{\partial C_1}{\partial u}(\mathrm{tg}^2\sigma + 1)}{C_1}\right](A_1\theta^2 + B_1\theta + C_1)$$

e scrivendo ora che il primo membro della (37) è identicamente uguale a questa espressione si hanno le due relazioni:

$$(38)\quad \begin{cases} A_1\left[-B_1\sqrt{\frac{E}{G}}\,\mathrm{tg}\sigma\, c + \frac{\partial C_1}{\partial u}(\mathrm{tg}^2\sigma + 1)\right] = \left[2bA_1 - aB_1 + \frac{\partial A_1}{\partial u}(\mathrm{tg}^2\sigma + 1)\right]C_1 \\ B_1\left[-B_1\sqrt{\frac{E}{G}}\,\mathrm{tg}\sigma\, c + \frac{\partial C_1}{\partial u}(\mathrm{tg}^2\sigma + 1)\right] = \\ \qquad = \left[-2\sqrt{\frac{E}{G}}\,\mathrm{tg}\sigma\, cA_1 + bB_1 - 2aC_1 + \frac{\partial B_1}{\partial u}(\mathrm{tg}^2\sigma + 1)\right]C_1 . \end{cases}$$

E analogamente, derivando l'equazione (35) rispetto a v e confrontando con la seconda equazione (12') si avranno le altre due relazioni:

$$(38')\quad \begin{cases} A_1\left[cB_1 + \frac{\partial C_1}{\partial v}(\mathrm{tg}^2\sigma + 1)\right] = \left[2b'A_1 - a\,\mathrm{tg}\,\sigma\sqrt{\frac{G}{E}}B_1 + \frac{\partial A_1}{\partial v}(\mathrm{tg}^2\sigma + 1)\right]C_1 , \\ B_1\left[cB_1 + \frac{\partial C_1}{\partial v}(\mathrm{tg}^2\sigma + 1)\right] = \left[2cA_1 + b'B_1 - 2a\,\mathrm{tg}\,\sigma\sqrt{\frac{G}{E}}C_1 + \frac{\partial B_1}{\partial v}(\mathrm{tg}^2\sigma + 1)\right]C_1 , \end{cases}$$

ove le A_1, B_1, C_1 sono date dalle (36) e le a, b, b', c dalle (11).

Scrivendo ora che le equazioni (38), (38') debbono essere soddisfatte identicamente rispetto a σ, si trova che *se non è* $E = G$ fra E, G, α, m, m' debbono sussistere le nove equazioni:

$$(39)\quad \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = \frac{\partial\alpha}{\partial v}, \quad \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \frac{\partial\alpha}{\partial u}, \quad \frac{\partial^2\alpha}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial v^2} + \mathrm{senh}\,\alpha\cosh\alpha = 0, \\ \frac{\partial m}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{E}{G}}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(m\frac{G}{E}\right) = -\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{G}{E}}, \\ 2\left(\frac{E}{G} - 1\right)\mathrm{ctgh}\,2\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u} + 4(m - m')\sqrt{\frac{E}{G}}\,\mathrm{ctgh}\,2\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial v} + \\ \qquad + 2m\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{E}{G}} + \left(\sqrt{\frac{E}{G}} + \sqrt{\frac{G}{E}}\right)\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{E}{G}} = 0, \end{cases}$$

$$(39)\quad \left\{\begin{aligned} &4\sqrt{\frac{G}{E}}\left(-m\,\frac{G}{E}+m'\right)\operatorname{ctgh}2\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial u}+2\left(\frac{G}{E}-1\right)\operatorname{ctgh}2\alpha\frac{\partial\alpha}{\partial v}+\\ &\qquad +2m\left(\frac{G}{E}\right)^2\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{\frac{E}{G}}-\frac{G}{E}\left(\sqrt{\frac{E}{G}}+\sqrt{\frac{G}{E}}\right)\frac{\partial}{\partial v}\sqrt{\frac{G}{E}}=0,\\ &2(m-m')\frac{\partial\alpha}{\partial u}+\left(\sqrt{\frac{G}{E}}-\sqrt{\frac{E}{G}}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\operatorname{ctgh}2\alpha\,\frac{\partial m'}{\partial u}=0,\\ &2\left(m\,\frac{G}{E}-m'\right)\frac{\partial\alpha}{\partial v}+\left(\sqrt{\frac{G}{E}}-\sqrt{\frac{E}{G}}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial u}-\operatorname{ctgh}2\alpha\,\frac{\partial m'}{\partial v}=0. \end{aligned}\right.$$

Si ha perciò: *Tutte le superficie* S *per le quali una qualunque famiglia di traiettorie isogonali alle linee di curvatura* u = cost., v = cost. *può cangiarsi in doppio modo nelle linee di curvatura di due deformate della* S, *hanno l'elemento lineare della forma*

$$ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$$

con E *e* G *funzioni di* u, v *per le quali risulta possibile il sistema* (39), *oppure hanno l'elemento lineare della forma*

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2)$$

(E = G), *nel qual caso le due prime equazioni* (39) *dànno* $E = G = e^{2\alpha}$ *e come sappiamo, la corrispondente superficie è a curvatura media costante* ([15]).

Noi andremo a provare che *il sistema* (39) *con* $E \neq G$ *non ha soluzioni.*

6. *a)* Del sistema (39), supposto possibile, due integrali particolari si trovano con le seguenti considerazioni.

Abbiamo provato nel numero precedente che se le linee (u_1, v_1) si possono cangiare in doppio modo nelle linee di curvatura di dne deformate della superficie S, fra i raggi principali di curvatura $\theta^{\frac{1}{2}}\omega_1$, $\theta^{-\frac{1}{2}}\omega_2$, della superficie deformata e i coefficienti $E_1 = \frac{1}{\lambda_1^2}$, $G_1 = \frac{1}{\lambda_2^2}$ del quadrato del suo elemento lineare (con un cambiamento al più dei parametri u_1, v_1) debbono sussistere le relazioni:

$$(40)\qquad \frac{1}{\lambda_1^2}\theta_1{}^{-1}\omega_2^2-\frac{1}{\lambda_2^2}\theta_1\omega_1^2=-\varepsilon,\quad \frac{1}{\lambda_1^2}\theta_2{}^{-1}\omega_2^2-\frac{1}{\lambda_2^2}\theta_2\omega_1^2=\varepsilon,$$

([15]) T. II, p. 436.

ove è $\varepsilon = \pm 1$ e θ_1, θ_2 sono le radici dell'equazione:

$$A_1\theta^2 + B_1\theta + C_1 = 0. \tag{35}$$

Dalle (40) eliminando rispettivamente λ_2^2, λ_1^2 e non essendo $\theta_1 + \theta_2 = 0$, (perchè si avrebbe identicamente $B_1 = 0$ e perciò $1 + \mathrm{ctgh}^2\,\alpha = 0$, $\alpha = \mathrm{cost.}$, caso noto delle superficie sviluppabili) si ha:

$$\frac{\omega_1^2}{\lambda_2^2}(\theta_1 - \theta_2) = \varepsilon, \quad \frac{\omega_2^2}{\lambda_1^2}(\theta_1 - \theta_2)\frac{A}{C} = 0,$$

ovvero per la (35)

$$\frac{\omega_1^2}{\lambda_2^2}\frac{\sqrt{\Delta}}{A_1} = \varepsilon, \quad \frac{\omega_2^2}{\lambda_1^2}\frac{\sqrt{\Delta}}{C_1} = \varepsilon \quad \text{con} \quad \Delta = B_1^2 - 4A_1C_1.$$

Da queste dividendo si ha:

$$\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} = \frac{\frac{E}{G}\,\mathrm{tg}^2\,\sigma - 2m\,\mathrm{tg}\,\sigma - 1}{\mathrm{tg}^2\,\sigma - 2m\,\mathrm{tg}\,\sigma - \frac{E}{G}},$$

ed esprimendo λ_2^2 per λ_1^2 e sostituendo nel sistema (4') si ottengono per λ_1 le due equazioni:

$$e^{\omega}\frac{\partial \log \lambda_1}{\partial v} = -\frac{\partial \alpha}{\partial v} + \frac{e^{2\omega}\frac{\partial \omega}{\partial u}\,\mathrm{tg}\,\sigma - e^{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial v}}{e^{2\omega}\,\mathrm{tg}^2\,\sigma - 2m\,\mathrm{tg}\,\sigma - 1},$$

$$\frac{\partial \log \lambda_1}{\partial u} = -e^{\omega} - \frac{e^{2\omega}\frac{\partial \omega}{\partial u}\,\mathrm{tg}\,\sigma - e^{\omega}\frac{\partial \omega}{\partial u}}{e^{2\omega}\,\mathrm{tg}^2\,\sigma - 2m\,\mathrm{tg}\,\sigma - 1}\,\mathrm{tg}\,\sigma,$$

ove abbiamo posto

$$\sqrt{\frac{E}{G}} = e^{\omega}.$$

Scrivendo che la funzione $\lambda_1^2 = \varepsilon\dfrac{\omega_2^2\sqrt{\Delta}}{C_1}$ soddisfa quest'ultimo sistema si trovano per Δ le due equazioni:

$$\frac{\partial \Delta\,\mathrm{senh}^4\,\alpha}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial \Delta\,\mathrm{senh}^4\,\alpha}{\partial v} = 0,$$

cioè $\Delta\,\mathrm{senh}^4\,\alpha$ è costante rispetto ad u e v.

Posto per comodità:

$$\sqrt{\frac{E}{G}} = e^{\omega}, \quad 2\alpha = a, \quad m = Me^{\omega}, \quad m' = M' \tag{41}$$

e tenuto conto che Δ è il discriminante dell'equazione (35) si ha:

$$\Delta \operatorname{senh}^4 \alpha = \operatorname{tg}^4 \sigma - 4[M' \cosh^2 a - M \cosh \omega \operatorname{senh}^2 a](\operatorname{tg}^3 \sigma - \operatorname{tg} \sigma) +$$
$$+ 4[M'^2 \cosh^2 a - M^2 \operatorname{senh}^2 a + \cosh 2\omega \operatorname{senh}^2 a - \cosh^2 a] + 1$$

e dovendo essere qualunque sia σ, $\Delta \operatorname{senh}^4 \alpha$ costante rispetto ad u e v sarà:

$$\begin{cases} M^2 \cosh^2 a - M \cosh \omega \operatorname{senh}^2 a = c_1 \\ M'^2 \cosh^2 a - M^2 \operatorname{senh}^2 a + \cosh 2\omega \operatorname{senh}^2 a - \cosh^2 a = c_2 \end{cases} \tag{42}$$

con c_1 e c_2 costanti assolute.

Se trasformiamo il sistema delle ultime sei equazioni (39) con le posizioni (41) si ha che *per l'esistenza di una superficie* S *la quale abbia la proprietà in esame è necessario che il sistema:*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial M'}{\partial u} = (Me^{\omega} - M') \operatorname{tgh} a \frac{\partial a}{\partial u} - \operatorname{senh} \omega \operatorname{tgh} a \frac{\partial a}{\partial v}, \\
&\frac{\partial M'}{\partial v} = (Me^{-\omega} - M') \operatorname{tgh} a \frac{\partial a}{\partial v} - \operatorname{senh} \omega \operatorname{tgh} a \frac{\partial a}{\partial u}, \\
&(M^2 + \cosh^2 \omega) \frac{\partial \omega}{\partial u} = \operatorname{ctgh} a [- M + M' \cosh \omega] \frac{\partial a}{\partial v} + \\
&\qquad\qquad + \operatorname{ctgh} a \left[M^2 - MM'e^{\omega} - \frac{\operatorname{senh} 2\omega}{2}\right] \frac{\partial a}{\partial u}, \\
&(M^2 + \cosh^2 \omega) \frac{\partial \omega}{\partial v} = \operatorname{ctgh} a [- M + M' \cosh \omega] \frac{\partial a}{\partial u} - \\
&\qquad\qquad - \operatorname{ctgh} a \left[M^2 - MM'e^{-\omega} + \frac{\operatorname{senh} 2\omega}{2}\right] \frac{\partial a}{\partial v}, \\
&(M^2 + \cosh^2 \omega) \frac{\partial M}{\partial u} = \operatorname{ctgh} a[-M^3 + M^2M'e^{\omega} + M \operatorname{senh} \omega \cosh \omega - M + M' \cosh \omega] \frac{\partial a}{\partial u} - \\
&\qquad\qquad - \operatorname{ctgh} a [MM' \operatorname{senh} \omega + \operatorname{senh} \omega \cosh \omega] \frac{\partial a}{\partial v}, \\
&(M^2 + \cosh^2 \omega) \frac{\partial M}{\partial v} = \operatorname{ctgh} a [- MM' \operatorname{senh} \omega - \operatorname{senh} \omega \cosh \omega] \frac{\partial a}{\partial u} - \\
&\qquad\qquad - \operatorname{ctgh} a [M^3 - M^2M'e^{-\omega} + M \operatorname{senh} \omega \cosh \omega + M - M' \cosh \omega] \frac{\partial a}{\partial v}
\end{aligned} \tag{43}$$

ammetta due integrali particolari della forma (42).

b) È evidente ora il procedimento che dobbiamo seguire per determinare le condizioni di integrabilità del sistema (43).

Derivando le (42) rispetto ad u e v si hanno per le funzioni M, M', ω, a quattro equazioni lineari ed omogenee nelle derivate parziali prime di queste funzioni. Di queste, quelle che si ottengono derivando la prima delle equazioni (42) sono una conseguenza algebrica del sistema (43), mentre l'altra equazione derivata rispetto ad u e v ci dà le nuove condizioni:

$$\left[Me^{\omega}\frac{\partial a}{\partial u}-\cosh\omega\frac{\partial a}{\partial v}\right](M'\cosh\omega-M)\operatorname{senh}\omega=0,$$

$$\left[Me^{-\omega}\frac{\partial a}{\partial v}+\cosh\omega\frac{\partial a}{\partial u}\right](M'\cosh\omega-M)\operatorname{senh}\omega=0.$$

Da queste si ha

(44) $$M'\cosh\omega=M.$$

Infatti se fosse $\operatorname{senh}\omega=0$, sarebbe $\omega=0$, $\sqrt{\frac{E}{G}}=e^{\omega}=1$, $E=G$ cioè la S sarebbe, contro l'ipotesi, a curvatura media costante; nè può essere insieme

$$Me^{\omega}\frac{\partial a}{\partial u}-\cosh\omega\frac{\partial a}{\partial v}=0,\quad \cosh\omega\frac{\partial a}{\partial u}+Me^{-\omega}\frac{\partial a}{\partial v}=0,$$

perchè essendo M e $\cosh\omega$ reali è $M^2+\cosh^2\omega>0$, quindi $\frac{\partial a}{\partial u}=\frac{\partial a}{\partial v}=0$, e perciò $\alpha=\frac{1}{2}a=\text{cost.}$ e la S è sviluppabile.

Per la (44), la terza e la quarta equazione (43) diventano

$$(M'^2+1)\cosh\omega\frac{\partial\log\operatorname{senh}\omega\operatorname{senh}a}{\partial u}=0,\quad (M'^2+1)\cosh\omega\frac{\partial\log\operatorname{senh}\omega\operatorname{senh}a}{\partial v}=0,$$

e quindi

$$\operatorname{senh}\omega\operatorname{senh}a=c.$$

La prima equazione (42) dà ora

$$M'[1-\operatorname{senh}^2 a\operatorname{senh}^2\omega]=c,$$

e se è $\operatorname{senh}^2 a\operatorname{senh}^2\omega\neq 1$ si avrà $M'=\text{cost.}$ In questo caso la prima e seconda equazione (43) danno:

$$M'(e^{\omega}\cosh\omega-1)\operatorname{tgh}a\frac{\partial a}{\partial u}-\operatorname{senh}\omega\operatorname{tgh}a\frac{\partial a}{\partial v}=0,$$

$$-\operatorname{senh}\omega\operatorname{tgh}a\frac{\partial a}{\partial u}+M'(e^{-\omega}\cosh\omega-1)\frac{\partial a}{\partial v}=0,$$

e poichè è $\operatorname{tgh} a \neq 0$, $(M'^2+1)\operatorname{senh}^2\theta \neq 0$, ne segue $\dfrac{\partial a}{\partial u}=0$, $\dfrac{\partial a}{\partial v}=0$, cioè $\alpha=\dfrac{1}{2}a=\text{cost.}$ e la S è sviluppabile.

Dovrà essere quindi per la risolubilità del sistema (43)

$$M'\cosh\omega = M, \quad \operatorname{senh}^2 a \operatorname{senh}^2\omega = 1. \tag{45}$$

c) Abbiamo posto nelle (41) $\sqrt{\dfrac{E}{G}}=e^{\omega}$ e tenuto conto della seconda della (45) si ha che dovrà essere

$$\sqrt{\frac{E}{G}}=\pm\operatorname{ctgh}\alpha, \quad \sqrt{\frac{E}{G}}=\pm\operatorname{tgh}\alpha.$$

Quando si abbia $\sqrt{\dfrac{E}{G}}=\operatorname{ctgh}\alpha$, ovvero $\dfrac{\sqrt{E}}{\cosh\alpha}=\dfrac{\sqrt{G}}{\operatorname{senh}\alpha}$ è per le (31) $\omega_1=\omega_2$ che il caso noto della sfera.

Per $\sqrt{\dfrac{E}{G}}=-\operatorname{ctgh}\alpha$ si ha $\dfrac{\sqrt{E}}{\cosh\alpha}+\dfrac{\sqrt{G}}{\operatorname{senh}\alpha}=0$, $\omega_1+\omega_2=0$ che è il caso noto delle superficie d'area minima.

Per $\sqrt{\dfrac{E}{G}}=\operatorname{tgh}\alpha$, le due equazioni (32) danno $\dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\sqrt{E}}{\operatorname{senh}\alpha}=0$, $\dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\sqrt{G}}{\cosh\alpha}=0$, quindi $\dfrac{\sqrt{E}}{\operatorname{senh}\alpha}=\dfrac{\sqrt{G}}{\cosh\alpha}=c$ e perciò per le (31) $\omega_1\omega_2=c^2$ e la superficie S è a curvarura totale costante positiva, applicabile perciò sulla sfera.

Infine per $\sqrt{\dfrac{E}{G}}=-\operatorname{tgh}\alpha$, le (32) danno: $\dfrac{\partial(\sqrt{E}\operatorname{senh}\alpha)}{\partial v}=0$, $\dfrac{\partial(\sqrt{G}\cosh\alpha)}{\partial u}=0$, possiamo porre quindi:

$$\sqrt{E}\operatorname{senh}\alpha=-\varphi^2(u), \quad \sqrt{G}\cosh\alpha=\frac{1}{\psi^2(v)}$$

con φ e ψ funzioni rispettivamente di u e v. Si ha da queste [cambiando segno al più a $\varphi(u)$]:

$$\operatorname{tgh}\alpha=\varphi(u)\psi(v),$$

e l'equazione (33) diventa:

$$\left(\frac{\varphi''}{\varphi}+1\right)\frac{1}{\varphi^2}+\frac{1}{\varphi^2}\frac{\psi''}{\psi}=\left(2\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}+\frac{\varphi''}{\varphi}\right)\psi^2+\left(2\frac{\psi'^2}{\psi^2}+\frac{\psi''}{\psi}+1\right)\psi^2. \tag{46}$$

Proveremo che essa è possibile soltanto se $\varphi=\text{cost.}$, $\psi=\text{cost.}$. Cominciamo intanto col dimostrare che essa è possibile soltanto se $\varphi = \text{cost.}$, oppure $\psi = \text{cost.}$.

Infatti non sia ad es. $\varphi(u) = \text{cost.}$; derivando la (46) rispetto ad u successivamente due volte si trova che se non è

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{\varphi^2}\right)' & \left(2\frac{\varphi'^2}{\varphi^2} + \frac{\varphi''}{\varphi}\right)' \\ \left(\frac{1}{\varphi^2}\right)'' & \left(2\frac{\varphi'^2}{\varphi^2} + \frac{\varphi''}{\varphi}\right)'' \end{vmatrix} = 0, \tag{47}$$

si avrebbe che $\psi(v)$ (e ψ'') è funzione di u e perciò $\psi = \text{cost.}$. Se è verificata la (47), avendosi $\left(\frac{1}{\varphi^2}\right)' \neq 0$ esistono due costanti c e c_1 per le quali si ha:

$$\left(2\frac{\varphi'^2}{\varphi^2} + \frac{\varphi''}{\varphi}\right)' = c\left(\frac{1}{\varphi^2}\right)', \quad \left[\left(\frac{\varphi''}{\varphi} + 1\right)\frac{1}{\varphi^2}\right]' = c_1\left(\frac{1}{\varphi^2}\right)'$$

dalle quali integrando si ha:

$$2\frac{\varphi'^2}{\varphi^2} + \frac{\varphi''}{\varphi} = \frac{c}{\varphi^2} + c_2, \quad \left(\frac{\varphi''}{\varphi} + 1\right)\frac{1}{\varphi^2} = \frac{c_1}{\varphi^2} + c_3,$$

ovvero:

$$2\varphi'^2 = -c_3\varphi^4 + (c_2 - c_1 + 1)\varphi^2 + c, \quad \varphi'' = c_3\varphi^3 + (c_1 - 1)\varphi.$$

Derivando la prima di queste rispetto ad u e tenuto conto che è $\varphi' \neq 0$ si ha $\varphi'' = -c_3\varphi^3 + \frac{1}{2}(c_2 - c_1 + 1)\varphi$ ed essendo $\varphi'' = c_3\varphi^3 + (c_1 - 1)\varphi$, poichè φ non è costante, deve essere $c_3 = 0$, $c_2 = 3(c_1 - 1)$ e perciò $\varphi'^2 = (c_1 - 1)\varphi^2 + c$.

Sarà quindi nell'ipotesi che nè $\varphi(u)$ nè $\psi(v)$ siano costanti:

$$\varphi'^2 = (c_1 - 1)\varphi^2 + c, \quad \psi'^2 = (d_1 - 1)\psi^2 + d, \tag{48}$$

e l'equazione (46) diventa:

$$\frac{1}{\varphi^2}\left[c_1 + \frac{\psi''}{\psi} - c\psi^2\right] = \left(2\frac{\psi'^2}{\psi^2} + \frac{\psi''}{\psi} + 1\right)\psi^2 + 3(c_1 - 1)\psi^2,$$

e poichè φ non è costante, dovrà essere:

$$c_1 + \frac{\psi''}{\psi} - c\psi^2 = 0, \quad 2\frac{\psi'^2}{\psi^2} + \frac{\psi''}{\psi} + 1 + 3(c_1 - 1) = 0. \tag{49}$$

Dalla seconda (48) derivando si ha $\psi'' = (d_1 - 1)\psi$, e dalla prima (49) si ha subito $c = 0$, $c_1 + d_1 = 1$ e le (48) diventano (dovendo essere per simmetria $d = 0$)

$$\varphi'^2 = (c_1 - 1)\varphi^2, \quad \psi'^2 = -c_1\psi^2, \tag{48'}$$

abbiamo quindi $\frac{\psi'^2}{\psi^2} = -c_1$, $\frac{\psi''}{\psi} = -c_1$ e la seconda delle (49) è allora impossibile.

Segue quindi che è $\varphi(u)$ o $\psi(v)$ costante e perciò avendosi $\operatorname{tgh} \alpha = \varphi(u)\psi(v)$ è α funzione di u o di v soltanto.

Sia ad esempio $\psi(v) = \text{cost.}$, e perciò $a = 2\alpha$ funzione di u soltanto, il sistema delle due ultime equazioni (43) dà

$$\frac{\partial M}{\partial u} = M\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}, \quad \frac{\partial M}{\partial v} = \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)},$$

e poichè per la prima di queste è $M = C(v)\varphi(u)$ sostituendo nella seconda si ha $C'(v) = \frac{\varphi'(u)}{\varphi^2(u)}$, cioè $C'(v) = -c$, perciò $\frac{1}{\varphi(u)} = cu + c_1$ con c e c_1 costanti.

L'equazione (33) diventa $\left[\frac{1}{\psi^2}(cu + c_1)^2 - 1\right]\left[2c^2 + (cu + c_1)^2\right] = 2c^2$ e poichè si ha $\frac{1}{\psi^2} \neq 0$, ne segue $c = 0$ (in caso opposto si ha un'equazione finita per la variabile indipendente u) ma allora è $\varphi(u) = \frac{1}{c_1}$ e perciò $\operatorname{tgh} \alpha = \varphi(u)\psi(v) = \text{cost.}$, α è perciò costante e la superficie S è sviluppabile.

Dalle cose dette segue che *le deformazioni in esame sono ammesse, oltre che dalle superficie sviluppabili e dalle superficie a curvatura totale costante dalle superficie a curvatura media costante.*

7. Si osservi che le equazioni (38), (38') le quali esprimono che le traiettorie isogonali delle linee di curvatura di S si possono cangiare in doppio modo in linee di curvatura sulle deformate di S sono polinomi di sesto grado in $\operatorname{tg} \sigma$. Ne segue che se la proprietà geometrica in esame sussiste per sette famiglie di traiettorie isogonali corrispondenti a sette valori distinti di σ sussiste anche per ogni altro valore di σ, e poichè se la proprietà è valida per le linee di una famiglia è valida anche per le loro traiettorie ortogonali segue il teorema: *Se una superficie non sviluppabile, nè a curvatura totale costante può deformarsi in modo:* 1°) *che le sue linee di curvatura restino linee di curvatura su una conveniente deformata di* S; 2°) *che tre famiglie distinte di traiettorie isogonali, corrispondenti a tre valori distinti di* σ : σ_1, σ_2, σ_3, $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3 < \frac{\pi}{2}$ *si possono cangiare in doppio modo in linee di curvatura sulle deformate di* S, *allora tutte le famiglie di traiettorie isogonali della* S *possono deformarsi, e in doppio modo, in linee* *di curvatura sulle deformate di* S, *e la* S *è una superficie a curvatura media costante.*

8. Vogliamo terminare questa ricerca con un'interessante teorema del BIANCHI ([16]).

Su una superficie di rotazione di elemento lineare

$$ds^2 = du^2 + r^2(u)dv^2$$

una famiglia di traiettorie isogonali alle linee di curvatura corrispondente all'angolo σ, $0 < \sigma < \frac{\pi}{2}$ si possa cangiare nelle linee di curvatura di una deformata di S. Avendosi ora $\sqrt{E} = 1$, $\sqrt{G} = r(u)$, nei coefficienti A, B, C dell'equazione (13) la cui espressione è data dalle (13') si annullano i termini in $\operatorname{tg}^2 \sigma$ e i termini indipendenti da σ, perciò l'equazione (13) assume la forma

$$\operatorname{tg} \sigma(\alpha\theta^2 + \beta\theta + \gamma) = 0$$

con α, β, γ indipendenti da σ. Essendo $\operatorname{tg} \sigma \neq 0$, ne segue che questa equazione resterà soddisfatta qualunque sia σ, quindi tutte le famiglie di traiettorie isogonali alle linee di curvatura si possono cangiare in linee di curvatura sulle superficie deformate, e perciò se la S non è sviluppabile, nè applicabile sulla sfera, è una superficie di rotazione a curvatura media costante, cioè una superficie di DELAUNAY ([17]). Si ha quindi: *Se effettuando una deformazione di una superficie di rotazione, una famiglia di traiettorie isogonali ai meridiani, distinta dai meridiani e dai paralleli della superficie stessa, può cangiarsi nelle linee di curvatura della deformata, la stessa proprietà vale per ogni altra famiglia di traiettorie isogonali in meridiani, e la superficie data é o sviluppabile, o deformata della sfera, o una superficie di Delaunay.*

Firenze, aprile 1926.

([16]) Cfr. ([2]).
([17]) Cfr. E. CESARO, *Lezioni di Geometria intrinseca*, p. 181.

INDICE DEL TOMO III DELLA SERIE 4ª