

École Polytechnique.

2^e Division :

1907-1908.

Cours
de Mécanique
et
Machines.

Monsieur Lainlé, Professeur.

Leçons préliminaires.

Rappel de quelques propositions cinématiques.

I. - Trièdre de référence. — Quand on sait mesurer les longueurs et les temps on peut mesurer la distance, à un instant t , de deux points matériels déterminés, par exemple des centres de deux sphères solides. Les deux points

]]

sont dits mobiles ou immobiles l'un par rapport à l'autre suivant que cette distance varie ou non avec l'instant considéré.

Considérons un corps solide S , c'est-à-dire un corps dont les différents points matériels restent à des distances invariables, et soit P un point matériel quelconque. Connaître le mouvement de P par rapport à S , c'est connaître à chaque instant t , le point Q invariablement lié à S avec lequel P coïncide. Si P coïncide constamment avec le même point Q , P est dit fixe (ou en équilibre) par rapport à S . Dans le cas contraire le lieu des points Q est la trajectoire de P par rapport à S .

Il est commode, mais c'est là un mode de référence qui n'a rien d'essentiel, de lier invariablement au solide S un trièdre $Oxyz$ et de définir la position de P à chaque instant t par ses coordonnées x, y, z . C'est ce que nous ferons par la suite et nous donnerons le nom de trièdre de référence au trièdre $Oxyz$.

Le mouvement du point P par rapport à S [ou encore le mouvement de P quand on regarde S comme fixe] est connu quand on connaît x, y, z en fonction de t , soit

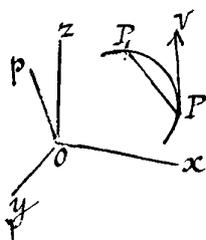
$$(1) \quad x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t).$$

La courbe C définie par les équations (1) est la trajectoire de P .

Remarque. - Au lieu d'un trièdre invariablement lié à un solide matériel S , on peut choisir un trièdre de référence animé d'un mouvement donné par rapport à un solide déterminé S . Par exemple, on peut rapporter les mouvements à des axes dont la position par rapport à l'écorce terrestre est connue à chaque instant t mais varie avec t .

]]. - Vitesse, Hodographe, accélération.

- Vitesse. - La vitesse moyenne de P entre les instants t et $t+h$ est ⁽¹⁾ le vecteur $\frac{PP_1}{h}$, P et P_1 désignant les positions du mobile h aux instants t et $t+h$. La vitesse de P à l'instant t est le



(1) voir pages 1 et 2 le rappel des notations vectorielles.

vecteur limite, quand h tend vers zéro, du vecteur $\overline{PP_1}$; soit \overline{PV} cette vitesse: le vecteur \overline{PV} a la direction et le sens h de la demi-tangente à la trajectoire menée dans le sens du mouvement, et sa longueur est $\frac{ds}{dt}$, s désignant l'arc de trajectoire, compté à partir d'un point fixe dans le sens du mouvement. Nous représenterons toujours par V la valeur absolue de la vitesse à l'instant t .

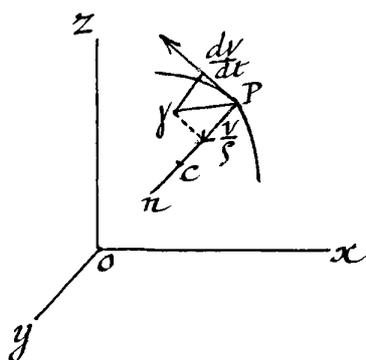
Les composantes de \overline{PV} suivant les trois axes sont $\frac{dx}{dt}$ ou x' , $\frac{dy}{dt}$ ou y' , $\frac{dz}{dt}$ ou z' , cela que les axes soient rectangulaires ou obliques.

Hodographe, accélération. - Construisons, à chaque instant t , avec O comme origine, le vecteur Op équipollent à \overline{PV} (c'est-à-dire ayant même direction, même sens et même longueur). Le lieu du point p est l'hodographe du point P , et la vitesse de p à l'instant t est l'accélération de P à cet instant.

Propriétés de l'accélération. - A chaque instant t , l'accélération $\overline{P'p}$ est contenue dans le plan osculateur à la trajectoire, et ses projections sur la demi-tangente Pt menée dans le sens du mouvement et sur la demi-normale principale Pn menée vers le centre de courbure C sont:

$$y_t = \frac{dV}{dt} \quad \text{et} \quad y_n = \frac{V^2}{\rho},$$

ρ désignant la longueur du rayon de courbure.



La projection y_n est donc toujours positive; y_t est toujours, par rapport à la tangente, du côté du centre de courbure. Quant à la projection y_t elle est positive ou négative suivant que la valeur absolue V de la vitesse est croissante ou décroissante.

L'accélération définit la variation infinitésimale (en grandeur, direction et sens) du vecteur vitesse entre les instants t et $t + dt$. Si la vitesse est constante en valeur absolue, l'accélération est constamment dirigée de P vers le centre de courbure et varie proportionnellement à

IV

la courbure. Si le mouvement est rectiligne, l'accélération est dirigée suivant la droite trajectoire, dans le sens du mouvement ou dans le sens inverse suivant que la vitesse croît ou décroît.

Quand v est nul à l'instant t , l'accélération (si elle n'est pas nulle) est tangente à la trajectoire et son sens est celui du mouvement, car $\frac{dv}{dt}$ est alors positif (ou nul).

Les composantes de l'accélération sont $\frac{d^2x}{dt^2}$ ou x'' , $\frac{d^2y}{dt^2}$ ou y'' , $\frac{d^2z}{dt^2}$ ou z'' , cela que les axes soient rectangulaires ou obliques.

Exemple. - Si P décrit une circonférence d'un mouvement uniforme, son accélération est constamment dirigée vers le centre de la circonférence et égale à $\frac{v^2}{l} = l\omega^2$, l désignant le rayon de la circonférence et ω la t vitesse angulaire de P , ($v = l\omega$).

Mouvement rectiligne et uniforme. - Quand le mouvement du mobile P est rectiligne et uniforme, 1^o sa vitesse est constante en grandeur, direction et sens, 2^o son accélération constamment est nulle. Réciproquement, si l'une des conditions 1^o ou 2^o est remplie le mouvement est rectiligne et uniforme.

Déviation. Soit P la position d'un mobile à l'instant t , P_1 la position qu'il occuperait à l'instant infiniment voisin $t + dt$ si sa vitesse restait constamment la même qu'à l'instant t (en grandeur, direction et sens), P' la position vraie du mobile à l'instant $t + dt$. Le vecteur $\overline{P'P_1}$ est dit déviation du mobile entre les instants t et $t + dt$; ce vecteur a la direction et le sens de l'accélération $\overline{P\ddot{y}}$ de P (à l'instant t) et est égal en valeur absolue à $P\ddot{y} \times \frac{dt^2}{2}$.

III. - Changement du trièdre de référence. - Tout ce qui précède suppose qu'on a choisi le trièdre de référence $oxyz$, ou si on veut le corps solide, auquel on rapporte le mouvement. Lorsqu'on introduit de nouveaux axes o

O, x, y, z , mobiles par rapport aux premiers, le mouvement du même élément matériel P , sa trajectoire, sa vitesse à l'instant t , sont en général entièrement différents suivant qu'on rapporte le mouvement à l'un ou à l'autre des deux trièdres.

Mais si aux axes $Oxyz$, on substitue d'autres axes fixes par rapport aux premiers, le solide de référence reste le même; le mouvement du point P , sa trajectoire, sa vitesse, etc. ne sont pas modifiés. Par exemple, rapportons les mouvements à l'écorce terrestre, et considérons un élém. matériel lancé dans l'air immobile: la trajectoire que le projectile trace dans l'air est la même quelle que soient les axes liés invariablement à l'écorce terrestre qu'il nous plaise d'adopter.

Qu'on point de vue cinématique et mécanique, nous ne regarderons donc pas comme distincts deux systèmes d'axes invariablement liés l'un à l'autre.

IV. - Qu mouvement relatif de deux points matériels l'un par rapport à l'autre.

Soit P et P_1 deux points matériels; la vitesse de chacun de ces points à l'instant t dépend du trièdre de référence adopté. Mais leur distance $P(t)$, la direction et le sens PP_1 , la dérivée $\frac{dP}{dt}$ sont indépendants du trièdre de référence. Appelons vitesse relative de P_1 par rapport à P le vecteur qui a P_1 comme origine, comme direction la direction PP_1 et dont la longueur comptée positivement dans le sens PP_1 est égale en grandeur et signe à $\frac{dP}{dt}$. Ce vecteur est le même (à l'instant t) quel que soit les axes auxquels on rapporte les mouvements.

Si P et P_1 coïncident en P_0 à l'instant t , soit P' et P_1' leurs positions à l'instant $t + dt$ par rapport aux axes choisis $Oxyz$; la valeur $\frac{P'P_1'}{dt}$ est indépendante du choix des axes, et par suite aussi son vecteur limite, soit $\overline{P_0Q}$, quand dt tend vers zéro. Ce vecteur $\overline{P_0Q}$ ou \overline{W} sera dit vitesse relative de P_1 par rapport à P (à l'instant t).

Or on a :

$$\overline{P'P_1'} = \overline{P'P_0} + \overline{P_0P_1'} = \overline{P_0P_1'} - \overline{P_0P'}$$

et en divisant par dt cette égalité géométrique et passant à la limite :

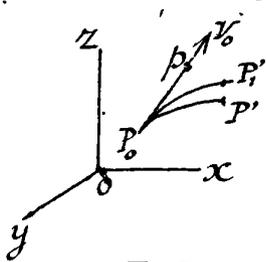
$$\bar{W} = \bar{P}_0 \bar{Q} = \bar{V}_1 - \bar{V}_0,$$

\bar{V}_1 et \bar{V}_0 désignant les vitesses de P_1 et P_0 à l'instant t par rapport aux axes $Oxyz$.

D'où ce théorème :

Théorème I. — Si deux mobiles P et P_1 coïncident à un instant t , la différence géométrique $\bar{V}_1 - \bar{V}$ de leurs vitesses \bar{V} et \bar{V}_1 à l'instant t , est indépendante des axes choisis ⁽¹⁾.

Admettons maintenant que P et P_1 aient, à l'instant t , non seulement même position mais même vitesse \mathcal{O} (en grandeur, direction et sens), par rapport aux axes $Oxyz$: cela signifie que $\bar{W} = \bar{V}_1 - \bar{V} = 0$, et cette condition est,



par suite vérifiée quels que soient les axes. Ceci posé, considérons encore les positions P, P_1 des mobiles P et P_1 à l'instant $t + dt$. Ce vecteur $\bar{P}'P'_1$ est indépendant du choix des axes, par suite le vecteur limite (pour $dt = 0$) du vecteur $\frac{\bar{P}'P'_1}{dt}$: soit $\bar{P}_0 \bar{R}$ ce vecteur limite. Je dis que $\frac{d^2}{dt^2} \bar{P}_0 \bar{R}$ est

égal à $\frac{\bar{J}_1 - \bar{J}}{2}$, \bar{J} et \bar{J}_1 désignant les accélérations de P et de P_1 à l'instant t .

En effet, soit p la position qu'occuperait un des mobiles à l'instant $t + dt$ s'il gardait constamment la même vitesse \bar{V}_0 qu'à l'instant t . On a (aux infiniment petits près d'ordre supérieur) :

$$\bar{p}P' = \frac{\bar{J}}{2} dt^2, \quad \bar{p}P'_1 = \frac{\bar{J}_1}{2} dt^2, \quad \bar{P}'P'_1 = \bar{p}P'_1 - \bar{p}P',$$

d'où :

$$\lim. \frac{\bar{P}'P'_1}{dt^2} = \frac{\bar{J}_1}{2} - \frac{\bar{J}}{2}.$$

Nous appellerons déviations du mobile P_1 par rapport au mobile P à l'instant t le vecteur $\frac{2\bar{P}'P'_1}{dt^2} = \bar{J}_1 - \bar{J}$.

Nous arrivons ainsi à ce théorème : dt^2

Théorème II. — Quand deux mobiles P et P_1 ont, à l'instant t , même position et même vitesse (en grandeur direction et sens) par rapport aux axes $Oxyz$, il en est

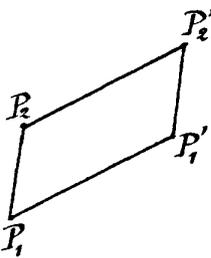
⁽¹⁾ En particulier, si les axes ont constamment comme origine le mobile P , la vitesse de P_1 à l'instant t coïncide avec \bar{W} et est indépendante de l'orientation des axes.

de même quels que soient les axes adoptés et la différence géométrique $\bar{y}'_1 - \bar{y}'_2$ des accélérations \bar{y}'_1 et \bar{y}'_2 de P_1 et P_2 à l'instant t est un vecteur absolu, (indépendant du choix des axes).

Ce théorème de cinématique joue un rôle capital en mécanique.

V. - Mouvements de translation. -

- Un système matériel Σ est animé par rapport à aux axes $Oxyz$ d'un mouvement de translation, si les déplacements $P_1P'_1$, $P_2P'_2$, entre deux instants quelconques t et $t+h$, de deux quelconques de ses points P_1 et P_2 sont équipollents. Comme dans le parallélogramme $P_1P_2P'_1P'_2$, P_1P_2 et $P'_1P'_2$ sont égaux, le système Σ se meut comme un solide. Si O, x, y, z sont des axes liés invariablement à Σ et parallèles aux axes $Oxyz$ pour $t=0$, ils restent constamment parallèles à ces axes. Le mouvement de translation le plus général est donc celui d'un solide Σ invariablement lié à des axes O, x, y, z , qui se déplacent en restant parallèles aux axes $Oxyz$ choisis comme axes fixes.



Dans un tel mouvement, à un instant t , les vitesses des divers points de Σ sont équipollentes, de même que les accélérations.

Trièdres de référence animés l'un par rapport à l'autre d'un mouvement de translation.

Soit O, x, y, z , des axes qui restent parallèles aux axes $Oxyz$, mais dont l'origine O_1 est animée par rapport à $Oxyz$ d'un mouvement donné. Regardons le trièdre $Oxyz$ comme fixe, le trièdre O, x, y, z , comme mobile; soit (à l'instant t) \bar{v} et \bar{y} la vitesse et l'accélération du point matériel P par rapport au trièdre O ; soit de même \bar{v}'_1 , \bar{y}'_1 la vitesse et l'accélération de P par rapport au trièdre O_1 ; enfin soit \bar{V} et $\bar{\Gamma}$ la vitesse et l'accélération de O_1 par rapport au trièdre O . On sait qu'on a :

$$(1) \quad \bar{v} = \bar{v}'_1 + \bar{V}, \quad \bar{y} = \bar{y}'_1 + \bar{\Gamma}.$$

VI. - Des mouvements de translation rectiligne et uniformes.

Quand l'origine O_1 des axes $O_1x_1y_1z_1$ (parallèles aux axes $Oxyz$) est animée par rapport au trièdre O d'un mouvement rectiligne et uniforme, tous les points liés invariablement au trièdre O_1 décrivent des droites parallèles avec des vitesses égales et de même sens, leurs vitesses sont équipollentes à un même vecteur invariable, leurs accélérations sont nulles.

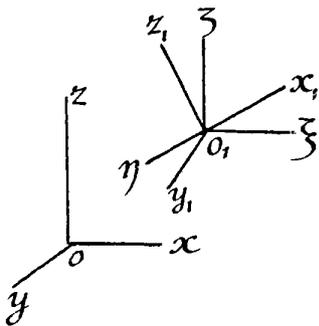
La seconde égalité (1) donne alors :

$$\vec{J} = \vec{J}_1.$$

Autrement dit, si deux trièdres $Oxyz$ et $O_1x_1y_1z_1$ sont animés l'un par rapport à l'autre d'une translation rectiligne et uniforme, l'accélération d'un point matériel P à un instant t est la même en grandeur, direction et sens, qu'on rapporte le mouvement à l'un ou à l'autre des deux trièdres.

En particulier, si P décrit une droite avec une vitesse constante par rapport au trièdre O , il décrit aussi une droite avec une vitesse constante (qui peut être nulle) par rapport au trièdre O_1 .

Réciproquement, admettons que deux trièdres quelconques⁽¹⁾ $Oxyz$ et $O_1x_1y_1z_1$ jouissent de la propriété que tout point matériel fixe par rapport au trièdre O_1 , décrit une droite avec une vitesse constante (qui peut être nulle) par rapport au trièdre O . Je dis que les deux trièdres sont animés l'un par rapport à l'autre d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme.



En effet, tout d'abord le point O_1 (fixe par rapport au trièdre $O_1x_1y_1z_1$) est animé par rapport au trièdre O d'un mouvement rectiligne et uniforme (dont la vitesse peut être nulle).

Les axes $O_1\xi_1\eta_1\zeta_1$ parallèles aux axes $Oxyz$ et dont l'origine coïncide constamment avec O_1 sont donc animés par rapport au trièdre $Oxyz$ d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme. Montrons que ce

(1) Les directions des axes $O_1x_1y_1z_1$ peuvent varier par rapport aux directions Ox, Oy, Oz .

axes sont liés invariablement aux axes O, x, y, z .

Par hypothèse tout point P lié invariablement aux axes O, x, y, z , décrit par rapport aux axes $Oxyz$ (donc aussi par rapport aux axes O, ξ, η, ζ) une droite avec une vitesse g constante. D'autre part, la distance O, P reste constante. Par rapport aux axes O, ξ, η, ζ , P doit donc se mouvoir à la fois sur une droite et sur une sphère (de centre O), ce qui exige qu'il reste immobile. Comme ceci s'applique notamment à trois points pris sur O, x, O, y, O, z , à une distance de O , égale à l'unité, les axes O, x, y, z , sont fixes par rapport aux axes O, ξ, η, ζ .

c. q. f. d.

Nous pouvons, en définitive, énoncer le théorème suivant.

Théorème III. — Pour que deux trièdres $Oxyz$ et O, x, y, z , jouissent de cette propriété : "Si l'accélération d'un mobile par rapport au trièdre O est constamment nulle, il en est de même de son accélération par rapport au trièdre O ", il faut et il suffit que les deux trièdres soient animés l'un par rapport à l'autre d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme.

Ces préliminaires cinématiques établis, passons à l'exposé des axiomes de la Mécanique.

La Mécanique à la surface de la terre

VII. — Lois de la chute des corps. — Considérons des corps voisins du sol et rapportons leurs mouvements à l'écorce terrestre. On constate qu'à un instant quelconque t_0 , un élément matériel peut être abandonné, dans le vide, en une position arbitraire, avec une vitesse de direction, sens et grandeur arbitraires, mais le mouvement ultérieur du point P est alors déterminé. Il décrit un arc de parabole qui peut se réduire à une droite, et l'expérience montre que son accélération, en un lieu de la terre, est constante en grandeur, direction et sens et la même pour tous les éléments matériels. Soit \bar{g} cette accélération, qui est dite accélération de la pesanteur : la direction de \bar{g} est, par définition, la verticale au lieu considéré, et le sens de \bar{g} le sens de la verticale descendante.

VIII. Déviation causées par les corps voisins de P

Dans certains cas toutefois, il arrive que le mouvement de l'élément P lancé dans le vide diffère du mouvement que définissent — les lois précédentes de la chute des corps. Mais il existe alors, dans le voisinage du point P, des corps [un pôle d'aimant par exemple] dont le déplacement influe sur le mouvement du point P, et il suffit d'écartier tous ces corps à grande distance pour que l'accélération de P coïncide avec \bar{g} . On se trouve toujours dans ce cas exceptionnel quand P, au lieu d'être lancé dans le vide, est en contact avec d'autres corps (air, eau, fil, solide, etc.).

Supposons donc qu'à l'instant t , l'accélération \bar{y} de P soit différente de \bar{g} , et appelons S l'ensemble des corps qu'il suffit d'écartier à longue distance pour que l'accélération de P coïncide avec \bar{g} . Nous appellerons le vecteur $\bar{y} - \bar{g}$ ou \bar{d} la déviation⁽¹⁾ de P causée à l'instant t par les corps S.

Nous convenons, dans ce qui suit, de dire que les conditions d'un élément matériel sont connues à l'instant t si cet élément (dans un état physique et chimique donné) occupe à l'instant t une position donnée avec une vitesse \bar{v} donnée. Si les conditions de P sont données à l'instant t ainsi que celles de tous les éléments des corps S, l'expérience montre alors que la déviation de P causée à l'instant t par S est bien déterminée (en grandeur, direction et sens) et la même quel que soit l'instant t considéré.

Supposons S décomposé en plusieurs parties, dont l'une est S_1 , et soit \bar{d}_1 la déviation de P que causerait S_1 à l'instant t , si à cet instant tous les corps autres que S_1 étaient écartés loin de P, rien n'étant changé d'ailleurs aux conditions de P et de S_1 à l'instant t ,

$\bar{d}_1 = \bar{y}_1 - \bar{g}$, \bar{y}_1 désignant ^{l'accélération} qu'aurait alors P à l'instant t . Nous convenons de dire que \bar{d}_1 est la déviation de P causée à l'instant t par la partie S_1 de S.

(1) A l'instant t , l'élément matériel occupe la position P avec la vitesse \bar{v} : s'il obéissait aux lois de la chute des corps, à l'instant $t + dt$, il occuperait la position P', tandis qu'en fait il occupe la position P₁. Le vecteur $\bar{P}'P_1$ est égal à $(\bar{y} - \bar{g}) \frac{dt^2}{2} = \delta x \frac{dt^2}{2}$.

IX. Axiômes de la Mécanique à la surface de la terre. - Cette terminologie admise, nous pouvons énoncer les principes suivants, vérifiés par l'expérience.

Axiôme I. - La déviation δ d'un élément matériel P causée à l'instant t par un ensemble S de corps formé de deux parties S_1 et S_2 , est la somme géométrique des déviations δ_1 et δ_2 de P causées respectivement, à l'instant t , par S_1 et par S_2 .

Axiôme II. - Soit δ la déviation de P causée à l'instant t par un autre élément matériel P_1 et δ_1 la déviation de P_1 causée au même instant t par P :

1° les deux déviations δ et δ_1 sont directement opposées;
 2° le rapport $\frac{\delta}{\delta_1}$ est une constante, soit m_1 , qui ne change pas quelles que soient les positions de P , P_1 , leurs vitesses, et quelles que soient les transformations subies par P et P_1 , pourvu qu'aucun des deux éléments ne perde ni n'acquière aucune parcelle de matière. On donne à cette constante m_1 le nom de masse relative de P_1 par rapport à P .

3° Soit P_2 un troisième élément. La masse relative de P_2 par rapport à P_1 , soit m_2 , est égale au quotient $\frac{m_2}{m_1}$, m_2 et m_1 désignant les masses relatives de P_2 et P_1 par rapport à P .

Axiôme III. - Si les éléments matériels P et P_1 sont dans un état physique et chimique donné, la déviation δ de P causée par P_1 à l'instant t ne dépend que de la position relative et de la vitesse relative de P_1 par rapport à P .

X. - Autre forme de l'axiôme II. - Force absolue. - Choisissons, une fois pour toute, un élément matériel, soit Q , assujetti à la seule condition de ne prendre ni d'acquérir aucune parcelle de matière, et que nous appellerons l'unité de masse. Convenons d'appeler masse absolue d'un élément matériel quelconque la masse de P relative à Q . Soit P_1 et P_2 deux éléments, m_1 et m_2 leurs masses absolues, δ_1 et δ_2 les déviations de P_1 et P_2 causées à l'instant respectivement par P_2 et P_1 . En vertu de l'axiôme II, on a : $\frac{\delta_2}{\delta_1} = \frac{m_1}{m_2}$, ou $m_1 \delta_1 = m_2 \delta_2$,

et par suite, puisque δ_1 et δ_2 sont directement opposés :

$$(1) \quad m_1 \bar{\delta}_1 = -m_2 \bar{\delta}_2 .$$

Appelons dorénavant force absolue exercée à l'instant t sur un élément P par des corps S le vecteur $m \bar{\delta}$, d'origine ⁽¹⁾ P $\bar{\delta}$ désignant la déviation de P causée à l'instant t par S .

L'égalité géométrique (1) signifie alors que la force absolue exercée par P_1 sur P_2 est égale et directement opposée à la force absolue exercée par P_2 sur P_1 .

On peut donc, si l'on veut, remplacer l'axiôme II par l'axiôme équivalent qui suit :

Axiôme II^{bis}. - A chaque élément matériel P on peut attacher, une fois pour toutes, un nombre qu'on appellera sa masse et qui jouit des propriétés suivantes :

1° Il ne change pas quelles que soient les transformations de l'élément pourvu qu'il ne perde ni n'acquière aucune parcelle de matière.

2° Si on appelle force absolue exercée à l'instant t sur P par des corps S le vecteur $m \bar{\delta}$, $\bar{\delta}$ désignant la déviation de P causée par S à l'instant t , les forces absolues qu'exercent l'un sur l'autre deux éléments matériels sont égales et directement opposées.

Cet axiôme est connu sous le nom de Principe de l'action et de la réaction.

XI. - Autre forme des axiômes I et III. - Les axiômes III et I peuvent dès lors être remplacé par les suivants :

- Axiôme III^{bis}. - Les deux éléments matériels P et P_1 étant dans un état physique et chimique donnés, la force absolue exercée par P_1 sur P ne dépend que de la position et de la vitesse relatives de P_1 par rapport à P .

- Axiôme I^{bis}. - La force absolue \bar{F} exercée sur P (à l'instant t) par un ensemble S de corps formé de deux parties S_1 et S_2 est la somme géométrique des forces absolues \bar{F}_1 et \bar{F}_2 exercées sur P (à l'instant t) par S_1 et par S_2 .

- Corollaire de l'axiôme I^{bis}. - La force absolue \bar{F} exercée sur P (à l'instant t) par les corps S formés des corps S_1 , des corps S_2 , ... des corps S_n , est la somme géométrique des forces absolues $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ exercées sur P (à l'instant t)

(1) L'élément P est dit point d'application de la force $m \bar{\delta}$.

respectivement par les corps S_1 , par les corps S_2, \dots et par les corps S_n .

En effet, le corollaire est vrai pour $n=2$. Admettons qu'il soit vrai pour $(n-1)$ et démontrons qu'il est vrai pour n .

Appelons \bar{F}' la force absolue exercée sur P (à l'instant t) par l'ensemble des corps S_1, \dots, S_{n-1} . En vertu de l'axiome II^{bis} , on a :

$$\bar{F} = \bar{F}' + \bar{F}_n .$$

Mais le corollaire étant vrai pour $n-1$, on a :

$$\bar{F}' = \bar{F}_1 + \dots + \bar{F}_{n-1} ; \quad \text{d'où}$$

$$\bar{F} = \bar{F}_1 + \dots + \bar{F}_n$$

C. q. f. d.

XII - Corollaire de l'addition des masses.

Les trois axiomes I^{bis} , II^{bis} , III^{bis} entraînent une propriété fondamentale de la masse qui s'énonce ainsi :

Si un élément matériel P est formé de deux parties P_1, P_2 , la masse m de P est la somme des masses m_1 et m_2 des éléments P_1 et P_2 .

En effet, supposons P lancé dans le vide et voisin d'un seul élément matériel qui influe sur son mouvement soit P' . Soit $\bar{F}, \bar{F}_1, \bar{F}_2$ la force absolue que P' exerce (à l'instant t) respectivement sur P, P_1, P_2 ; chaque élément P_1 et P_2 exerce inversement sur P' la force absolue \bar{F}'_1 et \bar{F}'_2 égale et directement opposée à \bar{F}_1 et à \bar{F}_2 (axiome II^{bis}), et l'élément P' formé de P_1 et P_2 , exerce sur P' la force $\bar{F} = \bar{F}'_1 + \bar{F}'_2 = -(\bar{F}_1 + \bar{F}_2)$, (Axiome I^{bis}). Mais en vertu de l'axiome II^{bis} , \bar{F} est égale et directement opposée à \bar{F} .

D'où :

$$(1) \quad \bar{F} = -\bar{F}' = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 .$$

D'autre part, soit \bar{y} l'accélération de P (à l'instant t), qui est aussi l'accélération de P_1 et de P_2 : Soit $\bar{\Phi}$ et $-\bar{\Phi}$ la force absolue exercée par P_2 sur P_1 et par P_1 sur P_2 . Le vecteur $m(\bar{y} - \bar{g})$ est la force absolue exercée sur P par P' (à l'instant t); le vecteur $m_1(\bar{y} - \bar{g})$ est la force absolue exercée sur P_1 par P' et P_2 , et le vecteur $m_2(\bar{y} - \bar{g})$ est la force absolue exercée sur P_2 par P' et P_1 . On a donc :

$$(2) \quad \begin{cases} m(\bar{y} - \bar{g}) = \bar{F} \\ m_1(\bar{y} - \bar{g}) = \bar{F}_1 + \bar{\Phi} \\ m_2(\bar{y} - \bar{g}) = \bar{F}_2 - \bar{\Phi} \end{cases},$$

Ajoutons membre à membre les deux dernières égalités géométriques et retranchons de la première; il vient, en tenant compte de (1):

$$(-m - m_1 - m_2) (\bar{y} - \bar{g}) = 0,$$

d'où $m = m_1 + m_2$.

C. q. f. d.

Remarquons que la démonstration précédente suppose les lois de la chute des corps.

XIII. - Masse d'un corps quelconque. - Si l'élément P est décomposé, non pas en deux, mais en n éléments P_1, \dots, P_n , sa masse m est la somme des masses m_1, \dots, m_n des éléments P_1, \dots, P_n .

En effet, la proposition est vraie pour $n=2$. Si on l'admet pour $(n-1)$, on voit aussitôt qu'elle est vraie pour n en regardant P comme formé des deux parties P' et P_n , P' comprenant P_1, \dots, P_{n-1} .

On est amené ainsi à définir la masse d'un corps de dimensions quelconques comme la somme des masses de ses éléments. Cette somme d'après ce qui précède est indépendante de la manière dont on partage le corps en éléments.

D'après cette définition, la masse d'un corps ne change pas, quelque transformation qu'il subisse, pourvu qu'il ne perde ni ne gagne aucune parcelle de matière. La masse d'un corps formé de plusieurs parties est la somme des masses de ses parties ⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Si l'univers était formé d'atomes identiques, la masse d'un corps serait, d'après cela, proportionnelle au nombre d'atomes qu'il renferme, [égale à ce nombre quand on prendrait la masse de l'atome pour unité]. C'est pourquoi on lui donnait jadis le nom de quantité de matière.

XIV. - Forces relatives aux axes terrestres; poids d'un corps. - Appelons pour abrégé, axes terrestres tout système d'axes liés invariablement à l'écorce terrestre, et soit \bar{y} l'accélération, à l'instant t , par rapport à de tels axes, d'un élément matériel P de masse m . Nous donnerons au vecteur $m\bar{y}$ ou \bar{F}_p le nom de force relative aux axes terrestres s'exerçant sur P à l'instant t .

Si P se meut dans le vide conformément aux lois de la chute des corps, \bar{y} coïncide avec \bar{g} , et la force relative $\bar{F}_p = m\bar{g}$ est dite poids de l'élément P .

Si, au contraire, \bar{y} diffère de \bar{g} , la différence géométrique $\bar{F}_p - m\bar{g}$ représente la force absolue, soit \bar{F}' , exercée sur P , à l'instant t , par les corps voisins qui influent sensiblement sur le mouvement de P . Si l'ensemble S de ces corps se compose des corps S_1 , des corps S_2, \dots et des corps S_n , exerçant respectivement sur P les forces absolues $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$, on a :

$$\bar{F}' = \bar{F}_1 + \dots + \bar{F}_n, \text{ d'où}$$

$$(1) \quad m\bar{y} = \bar{F}_p \equiv m\bar{g} + \bar{F}_1 + \dots + \bar{F}_n.$$

Par exemple, si le point P est mobile dans l'air, au voisinage d'un aimant qui le repousse et tiré par un fil, on aura :

$$m\bar{y} = \bar{F}_p \equiv m\bar{g} + \bar{R} + \bar{p} + \bar{T},$$

\bar{R} étant la force absolue (résistance et poussée de l'air) exercée par l'air sur P , \bar{p} la répulsion de l'aimant, \bar{T} la force absolue (traction) exercée sur P par le fil.

- Equilibre à la surface de la terre. - Si notamment P est en équilibre, par rapport à l'écorce terrestre, \bar{y} est nul, et on a :

$$(2) \quad 0 = m\bar{g} + \bar{F}_1 + \dots + \bar{F}_n$$

Autrement dit, le poids de l'élément et les forces absolues qui s'exercent sur P en outre de la pesanteur (force relative) ont une résultante nulle.

XV. - Mesure des masses à l'aide de la balance. - Nous allons montrer maintenant que la définition théorique

de la masse donnée plus haut coïncide avec la mesure vulgaire de la masse à l'aide de la balance.

Soit Σ un système matériel quelconque, comprenant notamment un solide mobile autour d'un axe fixe non vertical AB : par exemple, une balance dont les plateaux portent des vases renfermant de l'eau. Nous supposons essentiellement que : 1° l'axe AB n'exerce pas de forces à distance sur Σ , 2° aucun autre corps voisin n'influe sur le mouvement de Σ (mobile dans le vide).

Si le système Σ est en équilibre, pour chaque élément P de Σ nous pouvons écrire l'égalité (2), c'est-à-dire :

$$(3) \quad -m\bar{g} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n.$$

Construisons le vecteur $m\bar{g}$ ou \overline{PQ} d'origine P : en vertu des égalités (2) le moment résultant⁽¹⁾ de tous les vecteurs PQ par rapport à la droite AB est égal, en valeur absolue, au moment résultant de toutes les forces absolues qui s'exercent sur Σ (en outre de la pesanteur).

Or ces forces sont ici :

les forces absolues s'exerçant entre éléments du système [forces intérieures], forces deux à deux égales et directement opposées et dont le moment résultant par rapport à AB est nul ;

les forces absolues exercées par les éléments de l'axe AB sur les éléments de Σ immédiatement en contact avec eux (réactions de l'axe) : ces forces rencontrant AB ont un moment nul par rapport à AB ..

Le moment résultant par rapport à AB des vecteurs $m\bar{g} = \overline{PQ}$ est donc nul si Σ est en équilibre.

Imaginons maintenant qu'au point P , de masse m , non situé dans le plan vertical contenant AB , on substitue⁽²⁾ un autre point P' de masse m' , et que l'équilibre ait encore lieu dans la même position de Σ . Jedis que $m = m'$.

En effet, le moment résultant par rapport à AB des vecteurs \overline{PQ} reste nul quand on substitue au vecteur \overline{PQ} , le vecteur $\overline{P'Q} = m'g$. Les moments par rapport à AB et \overline{PQ} et de $\overline{P'Q}$ doivent donc coïncider : or en valeur absolue,

(1) Voir le N° 4, p. 5

(2) Ses conditions 1° et 2° restant vérifiées.

ces moments sont égaux respectivement à $m_1 g d \sin \theta$ et $m_1' g d' \sin \theta$, d désignant la plus courte distance de AB et de la verticale de P_1 , et θ l'angle de ces deux droites. Comme d et $\sin \theta$ sont différents de zéro par hypothèse, l'égalité $m_1 g d \sin \theta = m_1' g d' \sin \theta$ entraîne $m_1 = m_1'$. C. q. f. d.

On voit que l'égalité de deux masses peut être ainsi vérifiée par la méthode classique de la double pesée.

XVI. - Corps continus; corps homogènes; densité. -

Un corps matériel continu est dit homogène si deux volumes de ce corps sont nécessairement même masse quand ils sont égaux. Si, à l'instant considéré t , un corps Σ est homogène, la masse m d'un volume V de ce corps est proportionnelle⁽¹⁾ à V : le rapport $\frac{m}{V}$ est appelé la densité du corps homogène. Si une masse donnée d'un corps Σ reste homogène, mais se dilate ou se contracte quand le temps varie, la densité du corps, est bien déterminée à chaque instant t mais varie avec t .

Considérons, par exemple, de l'eau pure, aux conditions dites normales, c'est-à-dire à la température de son maximum de densité et à la pression atmosphérique normale. Il est facile de vérifier, par la méthode de la double pesée, que deux volumes égaux de ce liquide ont même masse, et que 1^{cm.c.} de ce liquide a même masse qu'un certain corps solide toujours le même. Le liquide en question est donc homogène et de densité constante.

Prenons provisoirement, comme unité de masse, la masse de 1^{cm.c.} d'eau pure aux conditions normales (l'unité de volume étant le centimètre cube). La masse d'un élément matériel quelconque P sera égale au volume d'eau pure (aux conditions normales) qui peut être substituée à P dans le plateau d'une balance en équilibre dans

⁽¹⁾ En effet, prenons comme unité de volume le centimètre cube, et soit μ la masse d'un centimètre cube de Σ . La masse de p centimètres cubes de Σ est $p\mu$, [N. XII]; D'autre part, μ est égal à q fois la masse m_1 de $\frac{1}{q}$ de centimètre cube de Σ . La masse d'un volume de Σ égal à $\frac{p}{q}$ est donc $\frac{p}{q}\mu$. Si le volume V est compris entre $\frac{p+1}{q}$ et $\frac{p}{q}$, sa masse est comprise entre $\frac{p+1}{q}\mu$ et $\frac{p}{q}\mu$, cela si grand que soit q . D'où la proposition.

XVIII.

le vide sans que l'équilibre soit rompu.

La définition théorique de la masse coïncide donc avec la notion vulgaire de la masse mesurée par la balance. Le poids d'un corps quelconque sera le vecteur Mg , M désignant la masse totale du corps.

- Corps hétérogènes. - Quand un corps n'est pas homogène, considérons (à un instant t) un point géométrique P à l'intérieur de ce corps, et un petit volume V de ce corps passant par P . Soit m la masse de ce volume V du corps quand V tend à se réduire au point P , m tend vers une limite (du moins nous l'admettons) et cette limite est, par définition, la densité du corps en P à l'instant t .

XVII - Vérification des principes de la Méca. 7^e Unités de mesure. Système C.G.S.

Les longueurs et les temps tant mesurés la façon vulgaire, à l'aide du mètre et de l'horloge sidérale et les masses à l'aide de la balance, on peut vérifier mentalement les axiomes énoncés plus haut.

Par exemple. Soient P et P_1 deux éléments matériels, de masse connue, électrisés et lancés dans le vide. On enregistre leur mouvement, et mesure en suite leurs accélérations \bar{y} et \bar{y}_1 à un instant. La force absolue exercée par P_1 sur P à cet instant est $m \bar{y} - g$ et vérifiera qu'on a :

$$m(\bar{y} - \bar{g}) = -m_1(\bar{y}_1 - \bar{g}).$$

(axiome II bis)

De même, si l'élément P est attiré par un pôle aimanté Q , on constatera que la déviation de P causée par Q est dirigée selon la droite PQ , et bien déterminée en grandeur et sens pour une distance PQ donnée [axiome III]. Si P est attiré par deux pôles d'aimant Q et Q_1 , on constatera que la déviation de P causée par Q et Q_1 est la somme géométrique des deux déviations causées par Q et par Q_1 [axiome I], etc.

En fait, ce n'est pas par des expériences directes qu'on a été conduit aux axiomes énoncés plus haut, mais bien par certaines conceptions et certains raisonnements a priori, appuyés d'observations tant astronomiques

que terrestres Les axiomes ainsi énoncés ont été ensuite vérifiés si parfaitement dans des conséquences si multiples et si lointaines qu'une telle vérification est supérieure à toutes les vérifications directes.

Unités C. G. S. - Toutes les grandeurs purement mé-
caniques [où n'interviennent ni la chaleur, ni la tempé-
rature, etc.] peuvent être ramenées à la mesure de longueurs,
de durées et de masses, et par conséquent peuvent être
mesurées une fois choisies les trois unités fondamentales
de longueur, de temps et de masse.

L'unité de longueur adoptée dans le système C. G. S.
est le centimètre, centième partie du mètre-étalon en
platine déposé aux archives et reproduit par le Bureau
International des Poids et Mesures - un certain nombre
d'exemplaires, - L'unité d'aire et l'unité de volume sont,
par définition l'aire du carré et le volume du cube cons-
truits sur l'unité de longueur. L'unité d'angle est le
radian.

L'unité de temps est la seconde sexagésimale du
jour solaire moyen, un peu plus longue que la seconde
sidérale⁽¹⁾, [égale environ à $1^{\text{sec. sidérale}} 0027$].

L'unité de masse adoptée par la Convention était
la masse du centimètre cube d'eau pure aux conditions
normales [N.° XVI]. Cette définition suppose qu'on connaît
l'unité matérielle de longueur [le C. M.], et qu'on sait réa-
liser de l'eau pure et la placer dans les conditions norma-
les de température et de pression. Il est préférable d'adopter
comme unité la masse d'un corps déterminé, assujetti
seulement à ne perdre ni n'acquérir aucune parcelle de
matière, car une telle unité est indépendante de toutes
autres unités ou mesures. Dans le système C. G. S., on
adopte comme unité de masse le gramme c'est-à-dire
la millième partie de la masse du kilogramme-étalon
en platine-iridié, reproduit à un certain nombre d'exem-
plaires par le Bureau international des poids et mesures.

Ce kilogramme-étalon a été réalisé de façon que sa
masse fût égale à celle d'un décimètre cube d'eau pure aux

(1) Le jour sidéral moyen est dans un rapport constant avec le jour si-
déral, mais plus long de 4 minutes environ.

conditions normales. Mais malgré le soin apporté à cette réalisation, la coïncidence entre les deux masses n'est pas parfaite : la première surpasse la seconde d'environ $\frac{1}{20.000}^e$. Le gramme du système C. G. S. est donc égal au gramme g de la convention multiplié par $(1 + \frac{1}{20.000}^e)$. En commettant une erreur relative de $\frac{1}{20000}^e$ dans la mesure des masses, on peut confondre les deux unités.

Unités de forces. - Soit P un élément dont la masse est égale à 1 gramme, et supposons qu'à l'instant t , la déviation de P causée par un corps S soit égale à 1 cm : la force absolue \vec{F} exercée par S sur P à l'instant t est égale à l'unité dans le système C. G. S. Cette force \vec{F} est dite une dyne.

Dans le système C. G. S., le poids d'un gramme est égal à g . À Paris, $g = 981$ au niveau de la mer; au niveau moyen du sol, $\bar{g} = 980,8$. À l'équateur $g = 978,1$; au pôle $g = 983,1$. Le poids d'un gramme à Paris, au niveau du sol, est donc $980,8$.

Si on prend comme unité de force le poids de gramme à Paris au niveau du sol, - les nouveaux nombres qui mesurent les forces sont égaux aux nombres C. G. S. correspondants divisés par $980,8$. En particulier, le poids d'un corps au même lieu est mesuré par le même nombre que sa masse et se confond avec le poids vulgaire donné par la balance.

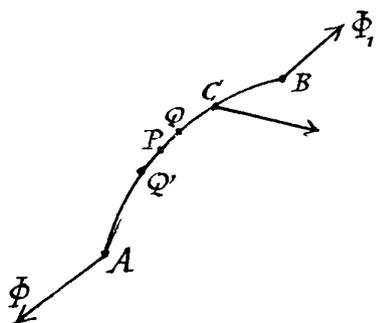
XVIII. - Mesure statique des forces. - Emploi des fils de masse négligeable.

On peut, d'après ce qui précède, déterminer par des mesures cinématiques et par la balance la force absolue qu'un corps S exerce à un instant t sur un élément P . Indiquons rapidement une méthode de mesure statique des forces. Cette méthode montrera en même temps la corrélation qui existe entre la force absolue telle que nous l'avons définie et la notion vulgaire d'effort car ces deux notions concordent, comme concordent la masse théorique et la masse vulgaire.

Fils. Je dirai d'abord quelques mots des propriétés des

Propriétés des fils de masse négligeable. — Parmi les systèmes matériels continus, il en est qu'on peut regarder approximativement comme n'ayant qu'une dimension. Ces systèmes, que nous appellerons linéaires, dessinent sensiblement une courbe dans l'espace, et la section du système par un plan normal à la courbe a des dimensions négligeables.

Considérons un tel système AB ou Σ , et admettons que ces éléments n'exercent pas les uns sur les autres de forces à distance. Les forces de contact que des éléments contigus PQ et PQ' de Σ exercent l'un sur l'autre peuvent être regardées comme appliquées sensiblement au point P , du moment que la section du système est assez petite.



Supposons maintenant que le système soit en équilibre dans le vide, les extrémités A et B de Σ étant en contact avec des corps matériels S et S' , qui pas plus que les autres corps voisins n'exercent sur les éléments de Σ de forces à distance.

J'appelle Φ la force absolue exercée en A sur l'élément extrême de Σ par l'élément de S en contact avec lui; soit Φ_1 la force analogue appliquée à l'extrémité B . Enfin, C étant un point quelconque de Σ , soit T la force absolue de contact exercée en P sur l'élément extrême de AC par l'élément contigu de CB . La force T est dite tension du fil en C .

Le système AC étant en équilibre, on peut écrire, pour chaque élément PQ (de masse m) de AC , l'égalité (2) du N° XIV. Construisons le vecteur $m\bar{g} = PH$ et tous les vecteurs analogues; la somme géométrique de ces vecteurs est $M\bar{g}$, (M masse totale de AC), et leur moment résultant par rapport au point A est un certain vecteur AK dont la longueur est inférieure (1) à Mgs , (si $s = \text{arc } AC$). En raisonnant comme dans le cas de la balance (N° XV) et en tenant toujours compte du fait que la somme géométrique des forces intérieures [deux à deux égales et directement

(1) En effet, le moment de PH par rapport à A est au plus égal à $PH \times AP$, donc à $mg \times s$, et le résultant est moindre que Mgs .

opposées] est nulle ainsi que leur moment résultant par rapport à A , on trouve aussitôt :

$$(1) \quad -M\bar{g} = \bar{\Phi} + \bar{T}, \quad -A\bar{K} = \text{mom}^t \text{ de } \bar{T} \text{ par rapport à } A.$$

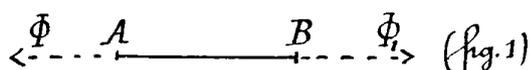
— Admettons dans ce qui suit que le poids total Π de Σ soit négligeable devant Φ . Je dis que \bar{T} et $\bar{\Phi}$ sont sensiblement égaux et directement opposés.

En effet, on peut toujours choisir l'unité de force de façon que $\Phi = 1$; Π est alors très petit, et Mg inférieur à Π . La première équation (1) montre donc que \bar{T} coïncide sensiblement avec $-\bar{\Phi}$. La seconde égalité (1) montre

(r désignant la distance de A à \bar{T}) que $T r$ est moindre que Πr , et par suite que r est négligeable. Les deux vecteurs \bar{T} et $\bar{\Phi}$ sont sensiblement égaux et directement opposés.

Il suit de là que tout point C de Σ est sur la droite qui contient $\bar{\Phi}$. La forme de Σ est donc nécessairement rectiligne. Comme ce raisonnement précédent est encore vrai quand C coïncide avec B , on arrive à la conclusion suivante :

Si le système linéaire AB (dont le poids est négligeable devant Φ), est en équilibre, la forme du système est rectiligne et les deux forces $\bar{\Phi}$ et $\bar{\Phi}'$ sont égales et directement opposées.



A priori, les forces $\bar{\Phi}$ et $\bar{\Phi}'$ peuvent avoir la disposition 1 ou la disposition 2. Mais parmi les corps linéaires, les fils sont caractérisés par la propriété de s'écraser sur eux-mêmes

dans le second cas. Si donc Σ est un fil, l'équilibre n'aura lieu que dans le cas 1.

Remarques. — Nous avons supposé le système Σ en équilibre dans le vide; mais les conclusions subsistent si Σ est plongé dans l'air par exemple. Il suffit dans les raisonnements précédents, de diminuer g de la poussée de l'air.

Si le fil AB ou Σ , au lieu d'être en équilibre, est animé d'un mouvement quelconque, les mêmes conclusions subsistent encore, pourvu que $M\Gamma$ soit, à chaque instant t , négligeable devant Φ , (M désigne nt la masse totale

du fil et Γ l'accélération maxima de ses éléments à l'instant t .⁽¹⁾

En effet, on peut toujours écrire pour chaque élément PQ de Σ l'équation (1) du N.º XIV, et répéter le raisonnement précédent à condition de remplacer⁽²⁾ partout $m\bar{g}$ par $m(\bar{g}-\gamma)$. Nous reviendrons d'ailleurs longuement, dans ce cours, sur les systèmes, et notamment les fils, de masse négligeable.

Exemple du fil à plomb. - Considérons un fil ayant une extrémité attachée à un point fixe O et l'autre extrémité à un point matériel mobile P dont la masse m est très grande devant celle du fil. Si le système est en équilibre dans le vide, soit \bar{T} la force absolue exercée par le fil sur P , on a :

$$m\bar{g} + \bar{T} = 0, \text{ ou } \bar{T} = -m\bar{g}.$$

D'après ce qui précède, le fil doit être disposé suivant la verticale, et comme la force $-\bar{T}$ exercée par P sur l'élément extrême du fil doit être de sens OP ; \overline{OP} a le sens $m\bar{g}$, c.à.d. est dirigé selon la verticale descendante. Le poids de P [force relative] est un vecteur qui coïncide en grandeur, direction et sens avec la force absolue exercée par P sur le fil.

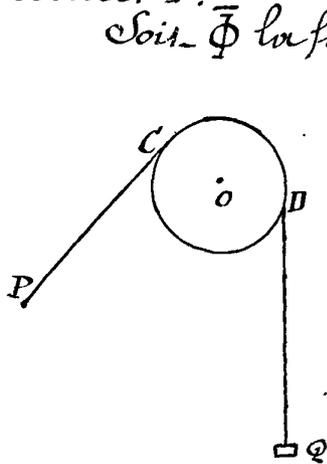
Donnons à P une légère secousse; le fil à plomb oscillera dans le voisinage de la verticale, en restant sensiblement rectiligne; le point P se déplacera sensiblement sur une sphère de centre O ; la tension, comme nous le verrons, reste sensiblement égale à mg .

Mesure statique des forces. - Appliquons les propriétés des fils à la mesure statique des forces. Imaginons une poulie homogène qui tourne autour d'un axe horizontal OZ , et dans le plan de cette poulie un fil (de poids total négligeable) enroulé partiellement sur la poulie et attaché d'une part à un point pesant Q de masse m_1 , d'autre part à un point P de masse m , également pesant mais soumis en outre à une force absolue inconnue \bar{F} . Le

(1) La condition imposée à Γ est remplie si Γ reste inférieur ou comparable à g .

(2) Voir les N.ºs 38 et 39.

Systeme étant en équilibre dans le vide, je dis qu'on peut calculer \bar{F} .



Soit $\bar{\Phi}$ la force absolue exercée par le fil sur P. Soit CD la portion du fil en contact avec la poulie, PC et DQ les portions libres du fil. Le fil PC, de poids négligeable, et soumis à deux forces extérieures appliquées à ses extrémités est rectiligne, à la direction et le sens de $\bar{\Phi}$. La force exercée par P sur le fil est $-\bar{\Phi}$. De même, le fil DQ est rectiligne, vertical, et la force que Q exerce sur le fil est $+m_1\bar{g}$.

Considérons maintenant le système Σ formé par la poulie et le fil PCDQ [les deux éléments matériels P et Q non compris]. Ce système étant en équilibre, on voit, comme dans le cas de la balance, (N°XV), que le moment résultant par rapport à OZ, soit N, des poids des divers éléments de Σ est égal, au signe près, au moment des forces $\bar{\Phi}$ et $m_1\bar{g}$ qu'exercent P et Q sur les deux éléments extrêmes du fil. Or N est nul parce que le poids du fil est négligeable et que l'axe OZ contient le centre de gravité O de la poulie, les réactions de l'axe ont également un moment nul par rapport à OZ. Le moment de $-\bar{\Phi}$ (vecteur dirigé selon CP) est donc égal et de signe contraire au moment du vecteur $m_1\bar{g}$ dirigé selon DQ. Les deux moments, en valeur absolue, sont égaux respectivement à $\bar{\Phi}l$ et à m_1gl [l'rayon de la poulie]. On a donc: $\bar{\Phi} = m_1g$.

D'autre part, l'élément P étant en équilibre, on a:

$$0 = m_1\bar{g} + \bar{F} + \bar{\Phi}$$

D'où:

$$\bar{F} = -m_1\bar{g} - \bar{\Phi}$$

Le vecteur $\bar{\Phi}$ a le sens PC, la longueur m_1g . La force \bar{F} est donc déterminée.

Si le poids de P est négligeable devant \bar{F} , on a sensiblement $\bar{F} = -\bar{\Phi}$, c'est-à-dire que F a le sens CP et est égal à m_1g .

On pourrait encore mesurer la force absolue \bar{F} exercée par un corps S sur un élément P immobile, de la façon suivante: écarter S très loin et le remplacer par

un fil attaché au point P et tendu sur une poulie par un poids Q , de telle façon que l'élément P reste en équilibre, rien n'étant changé d'ailleurs à l'état de P ni des corps voisins autres que S . Si $PC \parallel Q$ est le fil en question, m , la masse de Q , la force \vec{F} a le sens PC et est égale à m, g .

Lorsque les expériences se passent en un lieu déterminé de la terre et qu'on prend pour unité de force le gramme poids en ce lieu, le poids de Q est son poids vulgaire mesuré à la balance [nombre qui coïncide avec la masse m , de Q mesurée en grammes], et la valeur absolue de la force F est égale à m . On a ainsi un procédé statique pour mesurer les forces absolues en grammes-poids en un lieu de la terre, sans connaître l'accélération de la pesanteur en ce lieu.⁽¹⁾

XIX. - Remarque sur les forces de contact: principe des dynamomètres.

Considérons un corps continu S en équilibre et dont chaque élément est dans un état physique et chimique donné, c'est-à-dire a un volume, une forme, une température, etc donnés.

Les forces qu'exercent entre eux les divers éléments de S sont alors bien déterminées. Supposons qu'en outre de la pesanteur, S soit soumis à des forces de contact, exercées par des corps étrangers, et notamment à la force $\vec{\Phi}$ exercée sur un de ses éléments Q par un certain élément P , seul élément étranger en contact avec Q .

Je dis que la force $\vec{\Phi}$ est la même quel que soit P , du moment que rien n'est changé à l'état du corps S .⁽²⁾

En effet, soit m' la masse de l'élément Q ; et $\vec{\Phi}_1$ la

⁽¹⁾ De là un moyen de construire la statique terrestre sans introduire aucun élément cinématique, les forces étant mesurées statiquement en grammes-poids. C'est ainsi que les Anciens, et notamment Archimède, sans recourir au calcul infinitésimal et sans introduire la notion d'accélération, ont fondé une statique exacte des solides et des liquides qui suffit aux applications les plus usuelles de l'art de l'ingénieur et de l'architecte.

⁽²⁾ Il faut bien se garder d'étendre la même proposition aux forces à distance; par exemple, l'attraction newtonienne exercée par S sur P est proportionnelle à la masse de P .

somme géométrique des forces exercées sur Q par les autres éléments de S ; on a :

$$m'\bar{g} + \bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi} = 0 ;$$

Le vecteur $\bar{\Phi}$ est parfaitement déterminé et indépendant du point P ; il en est donc de même de $\bar{\Phi}_1$.

C. q. f. d.

Remarques. — Si ρ désigne la quantité Q , et V son volume, on a: $m' = \rho V$. Or on peut choisir Q (dans le corps continu S) de volume (sans changer la surface de contact avec P) aussi petit qu'on veut. De sorte que $\bar{\Phi}$ coïncide avec $-\bar{\Phi}_1$ pour V négligeable.

Supposons que S , au lieu d'être en équilibre, soit en mouvement, chacun de ses éléments ayant à l'instant t un état physique et chimique, une position et une vitesse donnés. Le raisonnement précédent subsiste à condition de remplacer g par $\bar{g} - \bar{f}$, \bar{f} désignant l'accélération de Q à l'instant t . Comme m' est supposé négligeable, $\bar{\Phi}$ coïncide encore avec le vecteur $-\bar{\Phi}_1$ qui est le même quel que soit P .

Cette remarque bien simple est le principe de tous les Dynamomètres.

Dynamomètre schématique. — Considérons un fil de masse négligeable qui peut s'allonger ou se raccourcir, mais qui dans toutes les transformations que nous lui faisons subir répond à la condition suivante: lorsqu'il est rectiligne et immobile et qu'il a une longueur donnée, son état est parfaitement déterminé. C'est le cas d'un fil extensible mais qui reste homogène et dont la température demeure constante dans ses transformations⁽¹⁾ Pour une longueur donnée du fil AB , la force que le fil rectiligne et immobile exerce sur un élément matériel P attaché en A est bien déterminée, et la même quel que soit P ; sa direction et son sens sont la direction et le sens AB du fil; l'expérience montre qu'elle est d'autant plus grande que le fil est plus allongé.

⁽¹⁾ Pourvu toutefois que le fil ne subisse pas des tractions trop nombreuses ou trop considérables. Autrement, quand le fil reprend la même longueur, il n'est plus dans le même état moléculaire que primitivement et sa tension est moindre. On dit alors que le fil a subi une déformation permanente.

D'après cela, on pourra graduer le fil et l'employer à mesurer les forces. Par exemple, on attache l'extrémité B du fil à un point fixe O et on suspend à l'autre extrémité ^{un élément} H de poids $M\bar{g}$: le système étant en équilibre, le fil est vertical et sa tension est égale à $M\bar{g}$; notons alors la longueur l du fil. A chaque tension donnée, correspond une longueur connue du fil, qui devient ainsi un dynamomètre gradué.

Employons le pour mesurer la force absolue \bar{F} qu'exerce sur un élément P (de masse m) un corps S, en nous plaçant dans le cas le plus fréquent où on sait que cette force ne dépend que de la position relative de S et de P et non de leurs vitesses relatives. Le point P occupant par rapport à S la position donnée, maintenons P en équilibre en l'attachant à l'extrémité A du fil gradué et en donnant à ce fil un sens AB et un allongement convenables ; la force \bar{F}' exercée par le fil sur P est connue, car elle a le sens AB et est égale à la tension T du fil qui est donnée par la longueur l du fil ⁽¹⁾. D'autre part, la force totale [relative aux axes terrestres] qui s'exerce sur P est :

$$\bar{F} + \bar{F}' + m\bar{g},$$

et comme cette force est nulle puisque P est en équilibre, on a :

$$\bar{F} = -\bar{F}' - m\bar{g},$$

égalité qui détermine la force inconnue \bar{F} . Si notamment $m\bar{g}$ est négligeable devant \bar{F}' , $F = -F'$ sensiblement.

On peut même employer ce procédé (comme aussi le procédé du N° XVIII pour mesurer des forces qui dépendent des vitesses relatives de P et de S).

Par exemple, proposons-nous de mesurer la force (absolue) exercée par l'air immobile sur un élément P (de masse m) lancé avec la vitesse \bar{v} . Cette force \bar{F} est la même que si le point P était immobile [par rapport à la terre] dans un courant d'air de vitesse $-\bar{v}$. Maintenons donc l'élément P en équilibre dans un tel courant d'air, à l'aide d'un fil gradué tendu dans un sens convenable PB

(1) Pour vérifier que le fil n'a pas subi de déformation permanente et que la graduation reste valable, il faut la recommencer de temps à autres. Si on constate, pour le même poids, un allongement plus grand du fil (en équilibre vertical), la graduation est à refaire.

et ayant un allongement convenable. On a, comme plus haut :

$$\bar{F} = -m\bar{g} - \bar{F}' ,$$

\bar{F}' désignant toujours la force égale à la tension (connue) du fil et de sens PB. On constate ainsi que \bar{F} est directement opposée à la vitesse du point P par rapport à l'air [au moins dès que cette vitesse est notable] et croît très rapidement avec la vitesse : cette force est dite la résistance de l'air.

Un dynamomètre tel que le précédent, constitué d'un fil, serait peu pratique, parce que des mesures répétées ou des forces un peu considérables lui feraient subir très vite des déformations permanentes. Aussi remplace-t-on, dans la réalité, le fil par un ressort d'acier, mais le principe du dynamomètre reste le même ; la flexion plus ou moins grande du ressort mesure l'intensité de la force inconnue, comme tout à l'heure l'allongement du fil.

Un dynamomètre à ressort est toujours un instrument grossier qui ne convient qu'à la mesure des forces un peu considérables. Pour mesurer les forces, et notamment les petites forces, avec précision, on emploie en Physique la balance de torsion, instrument sur lequel nous reviendrons et qui repose justement sur ce fait que la section d'un fil ne se réduit jamais à un point, ainsi que nous l'avons admis plus haut approximativement.

Remarquons enfin que la mesure des forces par la dernière méthode ou par celle du N° XVIII met en évidence la concordance entre la définition théorique de la force absolue et la notion vulgaire de force ou d'effort.

Un muscle contracté peut remplacer dans les raisonnements précédents le fil tendu ou le ressort d'acier ; s'il est en contact en un certain point avec un élément matériel, il exerce sur cet élément une force absolue qui est la même quel que soit l'élément (du moment que ce muscle reste dans le même état). Si nous tirons sur un corps avec un fil extensible, nous estimons que notre effort est dirigé dans le sens du fil et d'autant plus grand que notre effort est plus considérable. Si nous maintenons un poids immobile à l'aide d'un fil passant sur une poulie, notre effort est d'autant plus considérable que le poids est plus grand.

La Mécanique absolue ou universelle.

XX. — Les axiomes de la Mécanique énoncés plus haut supposent les mouvements rapportés à l'écorce terrestre. Ces axiomes, joints aux lois de la chute des corps, permettent de constituer une Mécanique des mouvements à la surface de la terre qui suffit aux applications les plus usuelles. Mais une telle Mécanique aurait un caractère essentiellement empirique et local. Elle ne rendrait aucun compte des phénomènes astronomiques (mouvements apparents des étoiles, du soleil et des planètes, forme des planètes, etc.). Que serait, par exemple, la Mécanique à la surface de Mars ou de Jupiter? Nous n'en aurons aucune idée. Bien plus, la Mécanique terrestre n'expliquerait pas une foule de circonstances ou phénomènes purement terrestres; elle n'expliquerait ni la forme aplatie de la terre, ni les variations de g le long d'un méridien, ni le phénomène grandiose des marées, ni les expériences saisissantes du pendule et du gyroscope de Foucault.

Mais il suffit d'ajouter aux axiomes précédents un nouvel axiome, l'axiome de l'inertie, pour constituer une Mécanique qui embrasse tous les phénomènes de l'univers et dans laquelle la Mécanique terrestre rentre comme cas particulier.

XXI. — Nouvelle forme des axiomes I, II et III.

Montrons d'abord qu'on peut donner aux axiomes I, II et III une forme qui est vraie quels que soient les axes auxquels on rapporte le mouvement.

Soit d'abord $Oxyz$ un trièdre lié invariablement à l'écorce terrestre, et P un élément matériel sur le mouvement duquel influe un certain ensemble de corps formé des corps S et des corps S_1 ; soit \bar{y} l'accélération de P à l'instant t , \bar{y}_1 l'accélération qu'il aurait à cet instant si les corps S étaient écartés très loin de P [rien n'étant changé d'ailleurs aux conditions de P et des autres corps voisins à cet instant]; soit enfin \bar{D} et \bar{D}_1 les déviations de P causées à l'instant t par S et par S_1 . On a (axiome I):

$$\bar{y} = \bar{g} + \bar{D} + \bar{D}_1, \quad \bar{y}_1 = \bar{g} + \bar{D}_1, \quad \text{d'où :}$$

$$\bar{y} - \bar{y}_1 = \bar{D}.$$

La déviation de P causée à l'instant t par un certain ensemble de corps S coïncide donc avec la différence géométrique $\bar{y} - \bar{y}'$, \bar{y} désignant l'accélération de P à l'instant t , \bar{y}' l'accélération qu'il aurait au même instant si les corps S étant écartés à l'infini [rien n'étant changé aux conditions de P ni des ^{autres} corps voisins à l'instant t].

Au point de vue cinématique, $\bar{y} - \bar{y}'$ est la différence géométrique des accélérations de deux mobiles qui à l'instant considéré ont même position et même vitesse. Elle est donc indépendante du choix des axes [N. IV]: elle reste la même si on choisit des axes $Oxyz$ animés d'un mouvement quelconque par rapport à l'écorce terrestre.

Ces remarques faites adoptons les définitions suivantes:

Définitions. - Les axes $Oxyz$ étant choisis arbitrairement, nous dirons que les conditions d'un élément matériel S par rapport aux axes $Oxyz$ sont connues à l'instant t , si, à l'instant t , l'état physique et chimique de cet élément est connu, ainsi que sa position et sa vitesse relativement aux axes $Oxyz$.

Nous appellerons déviation absolue d'un élément matériel P causée (à l'instant t) par un ensemble S de corps la différence géométrique $\bar{y} - \bar{y}'$, \bar{y} désignant l'accélération de P à l'instant t , et \bar{y}' l'accélération qu'il aurait à cet instant si S était écarté à l'infini [rien n'étant changé aux conditions de P et des autres corps voisins, à l'instant t].

La déviation ainsi définie est indépendante du choix des axes, c'est pourquoi nous la qualifions d'absolue. D'autre part, nous savons qu'elle coïncide avec la déviation définie au N. VIII.

Nous pouvons dès lors énoncer le principe suivant:

Principe I. - Si à l'instant t , les conditions de l'élément P et des ^{éléments} des corps S sont données par rapport aux axes $Oxyz$, la déviation absolue de P causée à l'instant t par l'ensemble des corps S est bien déterminée, c'est-à-dire a une longueur et (par rapport aux axes $Oxyz$) une direction et un sens θ bien déterminés, les mêmes quel que soit l'instant t considéré⁽¹⁾.

Je dis que ce principe est une conséquence des axiomes

⁽¹⁾ Voir cette note page suivante.

I et III. En effet, la déviation absolue coïncide avec la déviation \bar{d} définie au N° XXII, et si P_1, \dots, P_n désignent les éléments de S , $\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n$ les déviations de P causées à l'instant t par P_1, \dots, P_n , la déviation \bar{d} de P causée (à l'instant t) par S est (Axiôme I): $\bar{d}_1 + \dots + \bar{d}_n$. D'autre part, d'après l'axiôme III, \bar{d}_j ne dépend que de la position et de la vitesse relative de P par rapport à P_j , qui par hypothèse sont connues à l'instant t puisqu'on connaît la position et la vitesse de P et de P_j par rapport à $Oxyz$. C. q. f. d.

Inversement, le principe I entraîne les axiômes I et III. — En effet, supposons S formé de deux parties S_1 et S_2 , et soit \bar{d}_1 et \bar{d}_2 les déviations de P causées à l'instant t par S_1 et par S_2 . Pour déduire l'axiôme I du Principe I, il me suffit de montrer que $\bar{d} = \bar{d}_1 + \bar{d}_2$.

Or appelons \bar{y} l'accélération de P à l'instant t , y_1 l'accélération qu'il aurait si S_1 était écarté indéfiniment et y_2 l'accélération qu'il aurait si S_1 et S_2 étaient écartés indéfiniment (rien n'étant changé d'ailleurs aux conditions de P à l'instant t ni à celles des corps qui ne sont pas très éloignés de P). On a :

$$\bar{y} - y_1 = \bar{d}_1, \quad y_1 - y_2 = d_2, \quad \bar{y} - y_2 = \bar{d};$$

d'où on tire aussitôt: $\bar{d} = \bar{d}_1 + \bar{d}_2$ C. q. f. d.

Pour déduire l'axiôme III du principe I, supposons que S ne comprenne qu'un élément matériel P_1 . Choisissons des axes $Oxyz$ ayant constamment P comme origine, et PP_1 comme axe Ox . La vitesse de P est nulle à l'instant t , la vitesse de P_1 est dirigée selon Ox et égale en grandeur et signe à $\frac{dP}{dt}$ [$P = PP_1$]; si donc on connaît, à l'instant t , le vecteur PP_1 et $\frac{dP}{dt}$ [en outre de l'état physique et chimique de P et de P_1], la déviation \bar{d} de P causée à l'instant t par P_1 est bien déterminée⁽²⁾, en vertu du Principe I. Or c'est là précisément l'axiôme III.

(1) Note de la page précédente.

Cette déviation \bar{d} est, d'après cela, indépendante des autres corps qui peuvent être voisins de P en même temps que les corps S , et indépendante de la direction dans laquelle les corps S sont écartés à l'infini, c. à d. se sont très loin. La déviation absolue de P causée par un corps infiniment éloigné de P est nulle, d'après cette définition.

(2) Il est évident, d'après cela, que \bar{d} est nécessairement dirigé selon Ox dans un sens ou dans l'autre.

Nous pouvons donc remplacer les axiomes I et III par le Principe I qui leur est équivalent. Adjoignons au Principe I, l'axiome II, en y remplaçant le mot déviation par déviation absolue. Le Principe I et l'axiome II constituent un corps d'axiomes indépendant des axes auxquels on rapporte le mouvement.

Masse absolue; force absolue. — La masse absolue se définira⁽¹⁾ comme au n° X à l'aide de l'axiome II. La force absolue exercée (à l'instant t) par un (ou des) corps S sur un élément P de masse m sera $m\bar{d} = P\bar{Q}$, \bar{d} désignant la déviation absolue de P causée [à l'instant t] par S . Le point matériel P sera dit point d'application de cette force $P\bar{Q}$ ou \bar{F} . Si S compose de plusieurs parties S_1, \dots, S_n , soit $\bar{F}, \bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$ les forces absolues exercées [à l'instant t] sur P par S, S_1, \dots, S_n , on a: $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_n$ [Principe de la composition des forces absolues].

Une fois définie la force absolue, l'axiome II peut recevoir la forme IIbis (Principe de l'action et de la réaction)

Force relative. — Les axes $Oxyz$ ayant été choisis arbitrairement, soit \bar{y}_p l'accélération, à l'instant t , par rapport à ces axes, d'un élément P de masse m ; le vecteur $m\bar{y}_p$ ou $P\bar{R}$ sera dit la force relative aux axes $Oxyz$ s'exerçant à t sur P .

Soit S un certain ensemble de corps voisins de P , et soit \bar{y}'_p l'accélération qu'aurait P à l'instant t , si S était écarté très loin de P , [rien n'étant changé d'ailleurs aux conditions de P à l'instant t non plus qu'à celles des autres corps voisins de P]; la force relative aux axes $Oxyz$ qui, dans ce dernier cas, s'exercerait sur P à l'instant t , serait $m\bar{y}'_p = \bar{F}'_p$.

Or on a: $\bar{y}_p - \bar{y}'_p = \bar{d}$, [\bar{d} déviation de P causée par S à l'instant t],
d'où:

(1) Mais on ne peut déduire du Principe I et de l'axiome II le principe de l'addition des masses [$m = m_1 + m_2$ si P est formé de P_1 et P_2 , et si m, m_1, m_2 sont les masses de P, P_1, P_2]; car la démonstration de ce dernier Principe donnée au n° XII suppose les lois de la chute des corps (voir plus loin le n° XXVII).

$$m\bar{y}_p = m\bar{y}'_p + m\bar{d}' ,$$

c'est-à-dire

$$\bar{F}_p = \bar{F}'_p + \bar{F} ,$$

\bar{F} désignant la force absolue exercée par S sur P à l'instant t .
 En particulier, si les corps S comprennent tous les corps qui ne sont pas très éloignés de P , \bar{y} est l'accélération qu'aurait à l'instant t l'élément P , placé dans les conditions données, s'il était infiniment⁽¹⁾ éloigné de tous les autres corps matériels. La force relative aux axes $OXYZ$ qui s'exerce sur un élément P (à l'instant t) est donc la somme géométrique : 1° de la force relative, soit \bar{F}'_p , qui s'exercerait sur P à l'instant t si tous les autres corps matériels étaient infiniment éloignés de P ; 2° de la force absolue exercée sur P (à l'instant t) par tous les corps non infiniment éloignés de P .

XXII. - Axes absolus. - Convenons d'appeler axes absolus tout système d'axes (s'il en existe), qui jouit de la propriété suivante : "Tout élément matériel infiniment éloigné des autres décrit, par rapport à ces axes, une droite avec une vitesse constante, ou, si on veut, a une accélération constamment nulle."

Admettons qu'il existe un tel système d'axes, soit $Oxyz$:: tout trièdre animé par rapport au trièdre $Oxyz$ d'un mouvement rectiligne et uniforme constitue aussi un système d'axes absolus et il n'en existe pas d'autres [N° VI].

Quel que soit celui de ces trièdres qu'on adopte comme trièdre d'axes, l'accélération de P par rapport à ce trièdre, soit \bar{y}_a , est la même, à un instant t : nous donnerons à ce vecteur \bar{y}_a bien défini à chaque instant t , le nom d'accélération absolue de l'élément P .

Appliquons à des axes absolus $Oxyz$ la remarque qui termine le paragraphe précédent : la force \bar{F}'_p , relative à ces axes, qui s'exerce sur un élément matériel P infiniment éloigné de tous les autres est nulle. Si S désigne l'ensemble des corps qui ne sont pas infiniment éloignés de P , et \bar{F} la force absolue exercée sur P par S à l'instant t , on a :

$$\bar{F}_p = m\bar{y}_a = \bar{F} .$$

⁽¹⁾ C'est-à-dire au fait très éloigné.

La force relative à des axes absolus qui s'exerce à l'instant t sur un élément matériel P se confond avec la force absolue qu'exercent sur P [à l'instant t] tous les corps non infiniment éloignés de P ; l'accélération absolue de P coïncide avec la déviation absolue de P causée par ces corps.

Inversement, si un système d'axes $Oxyz$ jouit de cette propriété, l'égalité

$$\bar{F}_r = \bar{\Phi}_r + \bar{F}$$

montre que $\bar{\Phi}_r = 0$ (quels que soient l'instant considéré, la position et la vitesse de P à cet instant); par rapport aux axes $Oxyz$, l'accélération d'un élément infiniment éloigné de tous les autres est constamment nulle. Les axes $Oxyz$ sont donc des axes absolus.

XXIII. - Existence d'axes absolus. - Considérons des axes $Oxyz$ ayant comme origine le centre apparent du soleil et de directions fixes par rapport aux étoiles. Par rapport à ces axes, les centres des planètes décrivent sensiblement des cercles avec une vitesse constante (système de Copernic): pour les planètes éloignées, leur mouvement, pendant une période assez longue, est sensiblement rectiligne et uniforme. De là l'hypothèse que les axes $Oxyz$ possèdent sensiblement la propriété qui définit les axes absolus.

Les observations astronomiques précises permettent de justifier cette hypothèse de la façon la plus satisfaisante. Ces observations, combinées avec les expériences terrestres, ont conduit, comme on sait, au principe de la gravitation universelle: la force absolue qui s'exerce sur une planète P de masse m [assimilée à un point matériel⁽¹⁾] est la somme géométrique des attractions newtoniennes exercées sur P par le soleil et les autres planètes, soit mA cette attraction. Pour établir que les axes $Oxyz$ sont des axes absolus, il suffit de vérifier que l'accélération \bar{F}_r de la planète [par rapport à $Oxyz$] coïncide avec \bar{A} . Or c'est ce qui se vérifie avec une extrême précision, à condition toutefois de donner aux axes, comme origine, non le centre du soleil, mais un certain point G bien déterminé à chaque

⁽¹⁾ Nous verrons, plus loin, à propos du théorème du mouvement du centre de gravité, pourquoi cette assimilation n'entraîne qu'une erreur inappréciable.

instant t et qu'on appelle centre de gravité du système solaire. Ses axes $Gxyz$, de directions fixes par rapport aux étoiles, vérifient donc, dans la limite de nos mesures, la propriété qui définit les axes absolus.

Un trièdre animé par rapport à ces axes $Gxyz$ d'un mouvement rectiligne et uniforme, constituera aussi un trièdre d'axes absolus.

Nous adjoindrons donc au Principe I et à l'axiôme II ce nouveau principe (Principe de l'Inertie): "Il existe des axes absolus."

Énoncé définitif des axiômes de la Mécanique absolue.

XXIV. - Remarque sur les changements d'unités.

Nous sommes maintenant en état de donner l'énoncé définitif des axiômes de la Mécanique. Auparavant je ferai quelques remarques sur les changements d'unités.

Quand on remplace l'unité de longueur (ou de temps, ou de masse) par une nouvelle unité qui est, avec la première, dans un rapport constant (par exemple si on prend comme unité de longueur le mètre, comme unité de temps le jour sidéral, comme unité de masse le kilogramme-étalon), il est clair que tous les axiômes et principes énoncés plus haut subsistent. Nous disons, dans ce cas, qu'on change d'unités dans le même système de mesures.

Mais supposons qu'on change le système même de mesures: par exemple, mesurons les longueurs à l'aide d'une tige qui s'allonge par rapport au mètre quand le temps varie. Quand deux éléments P et P_1 seront placés, à deux instants différents, dans le même état à une distance égale à l'unité et sans vitesse relative, la force absolue que P exerce sur P_1 ne sera pas la même dans les deux cas, car leur distance, mesurée en mètres, aura varié. L'axiôme III (ou le Principe I) ne serait plus vérifié.

D'une manière générale, si on remplace le mètre par une tige dont la longueur varie sensiblement par rapport au mètre quand le temps varie ou quand on déplace la tige; ou si on mesure le temps à l'aide d'une horloge qui s'accélère ou se ralentit sensiblement par rapport à l'horloge sidéral - ou enfin si on remplace le

kilogramme-étalon par un corps qui s'évapore ou condense au contraire de l'humidité, aucun des axiomes de la Mécanique ne sera plus vérifié.

XXV. - Les axiomes de la géométrie Euclidienne

Une autre remarque importante est relative à la géométrie Euclidienne : nous avons admis implicitement que, les longueurs étant mesurées en mètres à la façon vulgaire, la géométrie Euclidienne était vraie. Que faut-il entendre exactement par là ?

Convenons d'appeler solide tout corps matériel tel que les distances mutuelles de ces divers éléments (mesurées à l'aide du mètre) restent constantes. Dire que la géométrie euclidienne est vraie, c'est dire que les solides réels possèdent toutes les propriétés attribuées par Euclide aux figures invariables.

Par exemple, le sol étant regardé comme fixe, soit S un solide réel dont nous fixons deux points. Nous constatons que S peut occuper une infinité de positions et que, dans ce déplacement de S , un certain ensemble σ continu de ses éléments reste immobile [Exemple, porte tournant autour d'une charnière]. Appelons droite matérielle passant par A et B cet ensemble d'éléments. Nous pouvons ainsi réaliser une droite ou des droites matérielles⁽¹⁾, et constater que ces droites possèdent toutes les propriétés de la droite Euclidienne (deux droites matérielles peuvent glisser l'une sur l'autre, postulatum d'Euclide, etc.)

Ces remarques faites, énonçons sous leur forme définitive, les axiomes que nous inscrivons en tête de la Mécanique universelle.

XXVI. - Axiomes de la Mécanique absolue.

Il est possible d'adopter, une fois pour toutes, une mesure des distances, du temps et un système d'axes

(1) C'est d'après cette définition que nous construisons et vérifions une règle. Si la règle est juste, chacune de ces quatre arêtes doit être une droite. Pour le vérifier, nous fixons les extrémités A, B d'une arête et nous faisons faire à la règle une demi-révolution. Si la position AB de l'arête n'a pas sensiblement changé, la règle est juste.

(que nous appellerons axes absolus) tels que les principes suivants soient vérifiés toujours et partout.

Premier principe. - Principe de l'inertie ou principe de Képler⁽¹⁾.

Un élément⁽²⁾ matériel, infiniment⁽³⁾ éloigné de tous les autres, décrit une droite avec une vitesse constante.

Second principe. - Principe de l'action et de la réaction.

Si deux éléments matériels P et P_1 sont infiniment éloignés de tous les autres,

1° leurs accélérations \bar{y} et \bar{y}_1 sont directement opposées;
2° le rapport $\frac{y}{y_1}$ est une constante, soit m_1 , qui ne change pas quelles que soient les transformations subies par P et P_1 , pourvu qu'aucun des deux éléments ne perde ni ne gagne aucune parcelle de matière. On donnera à cette constante m_1 le nom de masse relative de P_1 par rapport à P .

3° Soit P_2 un troisième élément matériel. La masse relative de P_2 par rapport à P_1 , est égale au quotient $\frac{m_2}{m_1}$, m_2 et m_1 désignant les masses relative de P_2 et P_1 par rapport à P .

Troisième principe. - Principe des conditions initiales.

Si deux éléments matériels donnés dans un état physique et chimique donné, sont infiniment éloignés de tous les autres, leurs accélérations [directement opposées en vertu du second principe] sont bien déterminées en grandeur, direction et sens, à l'instant t ,

(1) En réalité, Képler avait reçu ce principe des Coperniciens, sans bien en pénétrer le sens.

(2) Par élément matériel, j'entends une parcelle de matière dont les dimensions sont et restent assez petites pour que les positions, les vitesses et les accélérations de deux points quelconques de l'élément puissent être sensiblement confondus. Le principe de l'inertie n'interdit nullement à un tel élément de faire explosion: dans ce cas, comme nous le verrons, le centre de gravité des éclats poursuit le mouvement rectiligne et uniforme qu'avait l'élément avant l'explosion.

(3) Le mot infiniment signifie que le principe est d'autant mieux vérifié que l'élément P est plus éloigné de tous les autres corps.

quand on connaît, à cet instant, la distance de deux éléments et leur vitesse relative.

Quatrième principe. - Règle du parallélogramme.
 Soit P un élément matériel, S l'ensemble des corps non infiniment éloignés de P : si S est formé de deux parties S_1 et S_2 , l'accélération $\underline{\quad}$ de P , à l'instant t est égale à $\underline{\vec{a}}_1 + \underline{\vec{a}}_2$, $\underline{\vec{a}}_1$ (ou $\underline{\vec{a}}_2$) désignant l'accélération qu'il y a à l'instant t si S_2 (ou S_1) était écarté indéfiniment de P , rien n'étant changé d'ailleurs aux conditions initiales⁽¹⁾ de P et de S_1 (ou de S_2) à l'instant t .

Ces sont les axiomes fondamentaux de la Mécanique.⁽²⁾ Insistons sur ce fait que dans les quatre énoncés précédents n'interviennent que des grandeurs mesurables, c'est-à-dire des grandeurs qu'on sait traduire en nombre, du moment qu'on sait mesurer les longueurs, le temps, et qu'on a choisi le trièdre de référence.

En fait, les principes précédents sont vérifiés dans les limites d'exactitude de nos expériences si on mesure les longueurs à l'aide du mètre, le temps à l'aide de l'horloge sidérale, et si on adopte comme axes des axes ayant comme origine le centre de gravité du système solaire et des directions fixes par rapport aux étoiles.

XXVII. - Conséquences des axiomes précédents.

Soit $Oxyz$ un système d'axes absolus, c'est-à-dire par rapport auquel les mouvements satisfont aux quatre principes énoncés plus haut: tout trièdre O, x, y, z , immobile ou animé par rapport à $Oxyz$ d'une translation rectiligne et uniforme, constitue encore un système d'axes absolus, et réciproquement, il n'en existe pas d'autres. En un mot, les axes absolus ne sont définis qu'à une translation près rectiligne et uniforme.

Appelons accélération absolue d'un mobile P son accélération par rapport à des axes absolus. Ce vecteur, à un instant t , est le même [Ch. VI] quel que soit, parmi les systèmes d'axes absolus, celui qu'on adopte. Autrement

⁽¹⁾ C'est-à-dire rien n'étant changé aux positions et vitesses initiales [à l'instant t] de P et des éléments de S (ou S_2), non plus qu'à leur état physique et chimique.

⁽²⁾ Le corps d'axiomes constitué par les quatre principes précédents est évidemment équivalent à celui qu'on obtient en adjoignant au Principe de l'inertie le Principe I et l'axiome II du N.º XXI, mais la forme définitivement adoptée est la meilleure.

dit, l'indétermination qui subsiste dans le choix des axes dits absolus n'entraîne aucune indétermination quant à l'accélération absolue.

Masse absolue. — Ces remarques faites, la masse absolue d'un élément se définit comme au N° X. On choisit comme unité de masse un élément matériel, soit Q , assujéti à la seule condition de ne perdre ni d'acquérir aucune parcelle de matière: la masse absolue d'un élément P est sa masse relative à Q (second Principe). Si on remplace Q par un autre élément Q' (assujéti à la même condition); les nombres qui mesurent les masses absolues sont tous multipliés par un même facteur (masse relative de Q par rapport à Q').

Force absolue. — La force absolue qui à un instant t s'exerce sur un élément P de masse m [ou qui est appliquée à cet élément] est, par définition, le vecteur $m\vec{a}$, d'origine P , \vec{a} désignant l'accélération absolue de P à l'instant t . L'élément P est le point d'application de la force.

Soit S un corps (ou un ensemble de corps) quelconque voisin de P en même temps que d'autres corps: la force absolue \vec{F} exercée par S sur P à l'instant t est la force absolue qui s'exercerait sur P à l'instant t si tous les corps autres que S étaient écartés indéfiniment (rien n'étant changé d'ailleurs aux conditions de P et de S à l'instant t). Si S est formé de plusieurs parties S_1, \dots, S_n , et si $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ sont les forces absolues exercées sur P à l'instant t par S_1, S_2, \dots, S_n , on a, en vertu du quatrième principe (voir le N° XI)

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$$

(Principe de la composition des forces).

Ces définitions admises, le second Principe entraîne (N° X) ce Corollaire (forme la plus usuelle du Principe de l'action et de la réaction):

Les forces absolues que deux éléments matériels exercent l'un sur l'autre sont égales et directement opposées.

Principe de l'addition des masses. — Masse d'un corps quelconque. — La masse absolue ou masse d'un

XI

élément matériel, telle que nous l'avons définie, ne change pas (voir le second principe) quelles que transformations qu'il subisse, pourvu qu'il n'acquière ni ne perde aucune parcelle de matière. Elle jouit en outre de cette propriété fondamentale :

Si un élément P est formé de deux éléments P_1 et P_2 , sa masse est la somme des masses de ses deux parties P_1 et P_2 .

Pour le montrer, supposons P voisin d'un seul élément matériel P' et infiniment éloigné de tous les autres, et raisonnons⁽¹⁾ comme au N° XII, l'accélération \bar{y} de P étant ici son accélération absolue. La notation étant la même qu'au N° XII, on a :

$$m\bar{y} = \bar{F}, \quad m_1\bar{y} = \bar{F}_1 + \bar{\Phi}, \quad m_2\bar{y} = \bar{F}_2 - \bar{\Phi},$$

avec $\bar{F} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2$, d'où : $m = m_1 + m_2$.

C. q. f. d.

Il suit de là que la masse d'un élément formé de n parties est égale à la somme des masses de ces n parties [N° XII].

Par définition, la masse d'un corps quelconque sera la somme de masses de ses éléments. D'après ce qui précède, cette somme est indépendante du mode de décomposition du corps en éléments. Elle ne change pas quelles que transformations que subisse le corps pourvu qu'il ne perde ni n'acquière aucune parcelle de matière. La masse d'un corps formé de n parties est égale à la somme des masses de ses parties. D'où le nom de quantité de matière donnée à la masse.

De l'homogénéité, la densité d'un corps continu quelconque se définissent dès lors comme au N° XVI.

XXVIII. — La Mécanique absolue et la Mécanique relative.

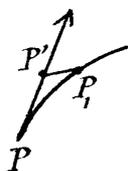
Les quatre principes de la Mécanique absolue entraînent le principe I et l'axiome II du N° XXI, qui sont indépendants des axes choisis. Si les axes choisis sont liés invariablement à l'écorce terrestre, et si par surcroît

⁽¹⁾ Le principe de l'inertie remplace, dans ce raisonnement la loi de la chute des corps. Ses égalités sont celles du N° XII où en fait $g=0$.

on admet les lois de la chute des corps, les quatre principes entraînent les axiomes I, II et III de la Mécanique terrestre. Les masses, les forces absolues définies dans la Mécanique absolue coïncident avec les masses et forces absolues définies dans la Mécanique terrestre (N^{os} IX, X et XI). La masse théorique des corps qui sont à notre portée se confond donc avec leur masse vulgaire mesurée par la balance.

La définition théorique de la force absolue déduite de l'accélération absolue peut se justifier de la façon suivante:

Si l'élément matériel considéré P (de masse m) était infiniment éloigné de tous les autres, il serait animé d'un mouvement rectiligne et uniforme



[Principe de l'inertie] et serait en P' à l'instant $t + dt$ tandis qu'en fait il est en P₁. L'influence des corps S non infiniment éloignés de P a donc fait dévier P de P' en P₁; or

$$2 \frac{\overline{P'P_1}}{dt^2} = \bar{y}_a$$

La force absolue exercée par S sur P à l'instant t est, d'après notre définition, $m\bar{y}_a$: autrement dit, elle a la direction et le sens de la déviation P₁ de P causée par S entre les instants t et $t + dt$, et elle est proportionnelle à la fois à la grandeur de cette déviation et à la quantité de matière déviée.

En particulier, si la vitesse de P est nulle à l'instant t , P se met en mouvement dans le sens de la force absolue qui s'exerce sur lui. Si le mouvement absolu de P est rectiligne et uniformément accéléré, la force absolue qui s'exerce sur lui est constante en grandeur et direction; si de plus la vitesse de P au bout de 1^{sec.} est de 1^{cm.} et si la masse de P est un gramme, la force est égale à une dyne.

Puisque la définition précédente de la force absolue coïncide avec la définition donnée dans la Mécanique terrestre, les forces absolues appliquées aux éléments matériels qui nous sont accessibles peuvent être mesurées à l'aide des procédés indiqués aux N^{os} XVIII et XIX, et ces procédés font ressortir, comme nous l'avons remarqué, qu'elles correspondent bien à notre notion de force ou d'effort.

Forces relatives. - Soit O, x, y, z , des axes absolus, et Ox, yz des axes arbitrairement choisis animés d'un mouvement donné par rapport aux premiers. Soit P un élém^t

matériel de masse m , dont nous rapportons le mouvement aux axes mobiles $Oxyz$. Si \bar{f}_r est l'accélération de P à l'instant t , le vecteur $m\bar{f}_r$ (d'origine P) est par définition, la force relative aux axes $Oxyz$, qui s'exerce sur P à l'instant t .

En particulier, si P est infiniment éloigné de tous les autres corps matériels, \bar{f}_r est un certain vecteur bien déterminé quand on connaît, à l'instant t , la position et la vitesse \bar{v}_r de P (par rapport aux axes $Oxyz$). En effet, on connaît aussi⁽¹⁾ à l'instant t , la position et la vitesse \bar{v}_a de P par rapport aux axes O, x, y, z ; par rapport à ces axes, le mouvement de P , qui est rectiligne et uniforme, est par suite, connu; donc aussi le mouvement de P par rapport aux axes $Oxyz$ et en particulier \bar{f}_r à l'instant t . La force relative aux axes choisis $Oxyz$ qui s'exerce sur un élément P infiniment éloigné de tous est au es e donc un certain vecteur $m\bar{A}$ bien déterminé à un instant t par la position et la vitesse relatives \bar{v}_r et \bar{v}_a et par rapport on vel à la masse de l'élément⁽²⁾.

Composition des forces dans le mouvement relatif

Supposons maintenant qu'existe des corps non infiniment éloignés de P et soit S l'ensemble de ces corps. Soit F^a la force absolue exercée (à l'instant t) par S sur P . on a (N° XXII).

$$m\bar{f}_r = \bar{F}^r = m\bar{A} + \bar{F}^a$$

Si S est formée des parties S_1, S_2, \dots, S_n qui exercent respectivement sur P les forces absolues F_1^a, \dots, F_n^a , on a

$$(1) \quad m\bar{f}_r = \bar{F}^r = m\bar{A} + \bar{F}_1^a + \bar{F}_2^a + \dots + \bar{F}_n^a.$$

(1) Par hypothèse, on connaît, à chaque instant t , la position du trièdre O par rapport au trièdre O_1 ; \bar{v}_a est alors donnée par la formule classique $\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_c$.

[\bar{v}_c vitesse absolue du point lié invariablement au trièdre O et coïncidant avec P à l'instant t].

(2) Par exemple, si les axes O, x, y, z ont des directions fixes par rapport aux étoiles et si leur origine coïncide constamment avec le centre de la terre, ils sont animés d'un mouvement de translation par rapport aux axes absolus, et \bar{A} coïncide, quels que soit l'élément P , sa position et sa vitesse avec l'accélération absolue du centre de la terre.

D'autre part, si à l'instant t , tous les corps autres que S_1 étaient écartés indéfiniment de P (rien n'étant changé d'ailleurs aux conditions de P à l'instant t ni à celles des éléments de S_1), la force relative aux axes $Oxyz$ qui s'exercent sur P à l'instant t serait :

$$\bar{F}_1^r = m\bar{A} + \bar{F}_1^a .$$

L'égalité géométrique (1) peut donc s'écrire :

$$m\bar{y}_r = \bar{F}_r = \bar{F}_1^r + \bar{F}_2^r + \dots + \bar{F}_n^a .$$

La force relative exercée par S sur P est donc la somme géométrique de la force relative exercée par une des parties, soit S_1 , de S et des forces absolues exercées par les autres parties.

Dans toutes ces leçons, quels que soient les axes choisis, quand nous disons que plusieurs forces s'exercent sur un élément matériel, il sera toujours sous-entendu (à moins que nous n'ayons spécifié expressément le contraire) qu'une de ces forces est relative aux axes choisis et que toutes les autres sont des forces absolues. Moyennant cette convention, le principe de l'addition des forces est le même (quels que soient les axes) que si les axes étaient absolus.

Exemple. - Si les axes $Oxyz$ sont liés invariablement à l'écorce terrestre, et si l'élément P considéré est voisin du sol, son poids $m\bar{g}$ est une force relative aux axes choisis. La force totale relative à ces axes qui s'exerce sur P est la somme géométrique du poids de l'élément P (force relative) et des forces absolues qui s'exercent sur P en outre de la pesanteur [N° XIV].

Quand nous parlerons, par la suite, d'un corps pesant, il sera toujours sous-entendu (à moins que nous n'ayons spécifié expressément le contraire) qu'il s'agit d'un corps voisin du sol et dont le mouvement est rapporté au sol. Tout se passe comme si des axes liés au sol étaient des axes absolus et le poids $m\bar{g}$ de chaque élément une force absolue⁽¹⁾.

(1) Nous verrons plus tard que l'accélération \bar{g} d'un élément matériel P lancé dans un grand espace vide, n'est pas un vecteur constant en un lieu de la terre, mais qu'il est de la forme : $\bar{g} = \bar{g}_0 + \varepsilon + \bar{\eta}$, \bar{g}_0 étant un

XXIX. - Historique des principes de la Mécanique.

L'exposé que nous avons donné des principes de la Mécanique est purement expérimental. Mais c'est par une voie toute différente qu'ils ont été découverts. Indiquons en quelques mots l'histoire de ces principes.

La Statique à la surface terrestre a été constituée, en partie, par les Anciens. C'est à Archimède qu'on doit une théorie irréprochable de l'équilibre du levier et l'hydrostatique. Au contraire la Dynamique (ou étude des mouvements d'après leurs causes, c'est-à-dire d'après les forces qui les produisent) est une science toute moderne. Il y a un peu plus de trois siècles que les Coperniciens en ont aperçu les premiers principes : il a fallu un siècle à leurs successeurs, Galilée, Képler, Newton, Huyghens, pour compléter leur œuvre et la mettre hors de conteste. Ces indications suffisent à montrer que ces principes ne sont nullement évidents.

C'est en partant des notions de temps, de longueur et de mouvement absolues et de quelques propriétés fondamentales attachées à ces notions, que par l'école Copernicienne est parvenue aux axiomes de la Mécanique, en se laissant guider toutefois par quelques observations relatives à la chute des corps et par les observations astronomiques. Les axiomes, une fois admis, ont été vérifiés par l'expérience dans leurs conséquences multiples et lointaines.

L'idée fondamentale qui dirige les Coperniciens, c'est que les mouvements absolus obéissent, comme tous les phénomènes réels, au principe de causalité. Ce principe s'énonce ainsi :

“ Si à deux instants les mêmes conditions sont réalisées en deux lieux différents de l'espace, les mêmes

(suite)

vecteur invariable en un lieu de la terre [pesanteur vulgaire], $\bar{\epsilon}$ et $\bar{\eta}$ deux vecteurs très petits qui dépendent le premier de la vitesse de P , le second de la position de la lune et du soleil par rapport à la terre à l'instant considéré. C'est le terme $\bar{\eta}$ qui explique les marées, et c'est le terme $\bar{\epsilon}$ qui explique la déviation des corps pesants vers l'est et le penault de Foucault. Mais, dans la plupart des applications, l'influence de ces termes $\bar{\epsilon}$ et $\bar{\eta}$ est inappréciable, et on peut confondre \bar{g} et \bar{g}_0 . C'est ce que nous ferons, sauf dans le chapitre spécial où nous étudierons l'influence de $\bar{\epsilon}$ et de $\bar{\eta}$.

“phénomènes se produisent (transportés seulement dans l'espace et le temps)”.

Par exemple, quand on met un gramme de fer dans un litre d'acide sulfurique, un jour quelconque, à Paris ou à Versailles, les conditions de température et de pression étant les mêmes, le gramme de fer mettra le même temps à se dissoudre et donnera le même sel.

Dans toutes les applications du Principe de causalité, il est sous-entendu qu'un corps donné influe d'autant moins sur les mouvements et transformations d'un autre corps qu'il en est plus éloigné, en sorte qu'on peut négliger les corps extrêmement éloignés du lieu du phénomène que l'on observe.

Ces remarques faites, pour bien comprendre comment les Coperniciens appliquaient le Principe de causalité aux phénomènes du mouvement, plaçons-nous dans l'hypothèse simpliste où l'univers serait formé d'éléments dont chacun reste identique à soi-même: ces éléments ne peuvent alors subir que des déplacements. Soit S un système matériel infiniment éloigné de tous les autres: qu'appellera-t-on conditions initiales de ce système à l'instant t ? C'est ici que les Coperniciens faisaient appel, plus ou moins consciemment, aux observations de la chute des corps. Ils entendent par conditions initiales de S la position et la vitesse \vec{V} de chaque élément de S à l'instant t . Cette définition admise, le principe de causalité exprime que les conditions initiales de S à l'instant t_0 définissent son mouvement (absolu) ultérieur. Si ces conditions initiales présentent une symétrie (par rapport à un plan, un axe ou un point), le mouvement ultérieur de S présente la même symétrie⁽¹⁾

Par exemple, si S se compose d'un seul élément P , les conditions initiales à l'instant t_0 sont la position P_0 et la vitesse \vec{V}_0 de P à cet instant: le point P décrira donc nécessairement, d'après ce qui précède, la droite $P_0 V_0$; si $V_0 = 0$ il restera immobile. D'où ce premier axiôme: “Un élément matériel

(1) Ce corollaire du principe de Causalité, qu'on peut appeler le corollaire de la symétrie, exprime (sous sa forme la plus générale) que la symétrie des causes se retrouve dans les effets. Ses applications de ce dernier principe sont fréquentes en physique (notamment dans les travaux de Curie sur les cristaux.)

infiniment éloigné de tous les autres) reste au repos si sa vitesse initiale est nulle, et décrit une droite dans le cas contraire?. Les Coperniciens admettaient en outre (pour certaines raisons a priori appuyées d'observations astronomiques) que ce mouvement rectiligne est uniforme.

De même, considérons deux éléments identiques P et P_1 , infiniment éloignés de tous les autres et dont les vitesses à l'instant t_0 sont ou nulles ou égales et directement opposées: par raison de symétrie, les deux points se meuvent sur la droite qui contient leurs positions initiales P^0 et P_1^0 et restent symétriques par rapport au milieu O de $P^0 P_1^0$: En particulier, leurs accélérations absolues sont égales et directement opposées à chaque instant. Ce sont des considérations de ce genre qui ont conduit au Principe de l'action et de la réaction.

Les adversaires des Coperniciens, les Scholastiques, disciples d'Aristote, partent exactement des mêmes notions a priori, mais se séparent des Coperniciens sur un point capital: pour eux les conditions initiales du système S sont définies par la position de chaque élément de S sans que les vitesses interviennent. Ils arrivent dès lors forcément à cette conclusion qu'un élément matériel infiniment éloigné de tous les autres reste toujours nécessairement immobile. Cette divergence suffit à créer un abîme entre les deux Mécaniques.

Le mouvement dont parlent les Coperniciens (comme d'ailleurs les Scholastiques), c'est le mouvement absolu. Or, que les notions de longueur; de temps et de mouvement absolus aient un sens ou non, un fait certain c'est que nous ne pouvons que comparer entre elles des longueurs, des durées, des positions d'éléments. Cela, les Coperniciens le savaient aussi bien que les philosophes modernes. Quelle est donc la signification positive de leurs axiomes? C'est évidemment la suivante:

“ Il est possible, une fois pour toutes, de définir une mesure des longueurs, une mesure du temps et un repérage des mouvements tels que le principe de Causalité soit vrai toujours et partout et qu'en particulier les quatre principes énoncés au N° XXVI soient vérifiées. ”

En un mot, la notion du mouvement absolu a conduit les fondateurs de la Dynamique à affirmer d'avance

qu'il existe des axes possédant toutes les propriétés des axes dits absolus. Pour les esprits qui admettent la notion de mouvement absolu, le fait n'a rien de surprenant ; mais pour ceux qui la nient, c'est là une extraordinaire coïncidence dont ils n'apportent aucune explication.

Quand on admet la notion de mouvement absolu, les systèmes d'axes que nous avons appelés absolus sont ou absolument fixes ou animés d'un mouvement absolu de translation rectiligne et uniforme. La terre est animée d'un mouvement absolu qui consiste en une rotation de la terre sur elle-même accompagnée d'une translation de son centre. ⁽¹⁾

Parmi les axes absolus, en est-il qu'il y ait lieu (pour des raisons expérimentales) de regarder comme absolument fixes? C'est là une question dont nous dirons quelques mots plus tard.

Homogénéité en Mécanique.

XXX. - Systèmes de mesures I. M. T.

On appelle système de mesures I. M. T. tout système de mesures où les unités fondamentales adoptées sont les unités de longueur, de temps et de masse.

Dans tout système I, M, T, il est sous-entendu que l'unité d'aire est l'aire du carré et l'unité de volume le volume du cube construit sur l'unité de longueur ; que l'unité d'angle est le radian [angle au centre qui intercepte sur la circonférence un arc de longueur égale au rayon] ⁽²⁾.

Quand on change d'unités dans le même système de mesures I, M, T, c'est-à-dire quand on remplace les unités choisies I, M, T, par les unités _____

(1) Pour les scholastiques, au contraire, la terre était absolument fixe. Leur Mécanique ne rendait compte ni des phénomènes astronomiques, ni de la chute des corps, etc.

(2) Si s est la longueur interceptée par un angle au centre sur une circonférence de rayon R , l'angle est mesuré (en radians) par $\frac{s}{R}$, quantités de dimensions nulles ; les lignes trigonométriques de l'angle sont également de dimensions nulles.

XLVIII

$L' = \frac{L}{\lambda}$, $M' = \frac{M}{\mu}$, $T' = \frac{T}{\tau}$, (λ, μ, τ constantes) les grandeurs qui interviennent en Mécanique sont multipliées respectivement par un certain facteur constant de la forme $\lambda^\alpha \mu^\beta \tau^\gamma$, [α, β, γ étant des quantités numériques, attachées à la grandeur considérée]. On dit que la grandeur considérée est de dimension α par rapport aux longueurs, de dimension β par rapport aux masses, de dimension γ par rapport aux temps, ou simplement que ses dimensions sont $L^\alpha M^\beta T^\gamma$.

Dimensions des grandeurs usuelles. (1)

Aire	L^2	Accélération	MT^{-2}
Volume	L^3	Force (absolue ou relative)	$LM T^{-2}$
Angle	dimensions nulles	Quantité de mouvement	$L T^{-1}$
Vitesse	LT^{-1}	Moment d'une quantité	
Vitesse angulaire	T^{-1}	de mouvement	$L^2 M T^{-1}$
Vitesse aréolaire	$L^2 T^{-1}$	Moment du force	T^{-2}

XXXI. - Systèmes de mesures L. F. T

Il arrive souvent qu'à l'unité de masse on substitue l'unité de force comme unité fondamentale. Nous présentons par système L. F. T. un tel système de mesures.

Les dimensions des grandeurs qui se déduisent de longueurs et de temps ne sont pas modifiées par ce changement de système. Mais il en est tout autrement pour les dimensions des grandeurs qui dépendent de l'unité de masse [ou de force]. Si $L^\alpha, F^\beta, T^\gamma$ sont les dimensions d'une certaine grandeur, les dimensions $L^\alpha M^\beta T^\gamma$ de cette grandeur dans le système L. M. T. sont évidemment [en remarquant que les dimensions de F sont $LM T^{-2}$]:

$$L^\alpha (MLT^{-2})^\beta T^\gamma = L^{\alpha+\beta} M^\beta T^{\gamma-2\beta}$$

On a donc:

$$\alpha = \alpha' + \beta', \quad \beta = \beta', \quad \gamma = \gamma' - 2\beta'$$

On adopte, en général, comme unité de force, le gramme poids ou le kilogramme poids. Mais il est indispensable d'indiquer alors le lieu de la terre où on considère

(1) Certaines de ces grandeurs (vitesse aréolaire, etc) ne sont définies que plus loin.

le poids du gramme (ou du kilogramme). Si l'unité de force adoptée est le kilogramme poids à Paris au niveau de la mer, les nombres qui mesurent les forces sont 981.000 fois plus petits que les nombres correspondants dans le système C. G. S., car le kilogramme poids vaut 981.000 dynes (presque un million de dynes).

XXXI. - Homogénéité. - Lorsqu'un phénomène mécanique se traduit par une relation [ou par plusieurs relations] à coefficients purement numériques ⁽¹⁾ entre plusieurs grandeurs a, b, c, d, \dots , une remarquable propriété d'homogénéité est toujours vérifiée.

En effet, résolvons la relation considérée par rapport à une des grandeurs, soit a ; il vient :

$$(1) \quad a = \varphi(b, c, \dots);$$

soit $L^{\alpha} M^{\beta} N^{\gamma}$ les dimensions de a ; quand on remplace L, M, N par $L' = \frac{L}{\lambda}, M' = \frac{M}{\mu}, N' = \frac{N}{\nu}$, le premier membre de (1) est multiplié par $\lambda^{\alpha} \mu^{\beta} \nu^{\gamma}$, il en est donc de même du second membre, puisque la relation (1) [à coefficients numériques] est encore vérifiée. La fonction φ , dans ce changement d'unités, se reproduit donc multipliée par $\lambda^{\alpha} \mu^{\beta} \nu^{\gamma}$.

Par exemple, la durée t d'une oscillation infiniment petite d'un pendule simple est donnée par la formule:

$$(2) \quad t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Les dimensions de $\frac{l}{g}$ sont $\frac{L}{L T^{-2}} = T^2$; celles de $\sqrt{\frac{l}{g}}$ sont T [dimensions du 1^{er} membre]. $\frac{L}{L T^{-2}}$ On vérifie bien ainsi que la formule (2) est homogène.

XXXIII. - Remarque sur la densité. - Les dimensions d'une densité [quotient ρ d'une masse par un volume] soit $L^3 M$. En physique, on définit souvent la densité moyenne d'un corps comme le rapport ρ entre la masse de ce corps

(1) J'entends par là que ces coefficients ne changent pas quand on remplace les unités fondamentales adoptées par d'autres unités qui sont avec les premières dans un rapport constant.

L

et celle d'un égal volume d'eau pure (aux conditions normales): cette nouvelle définition est évidemment différente de la première, puisque la densité ρ est en grandeur sans dimensions. Pour que les deux nombres ρ et ρ_1 coïncident, il faut et il suffit que l'unité de masse adoptée dans le système I. M. T soit la masse d'un volume 1 d'eau pure (aux conditions normales). Le nombre qui mesure ρ dans le système C. G. S coïncide donc avec la quantité ρ venant numérique ρ_1 , si on admet que le gramme coïncide avec la masse d'un cent mètre cube d'eau pure (aux conditions normales); cette coïncidence n'est vraie qu'à une erreur près de $\frac{1}{20\ 000}$ e de gramme.

Si on convient une fois pour toutes, dans tout système I, M, T, d'adopter comme unité de masse la masse du volume 1 d'un corps homogène déterminé, toujours le même, toute quantité de dimensions $\frac{M}{L^3}$ (et en particulier la densité ρ) garde la même valeur $\frac{M}{L^3}$ numérique, quelles que soient les unités I, T.

Livre I.

Théorèmes généraux de la Dynamique
du point matériel et des systèmes: Théorème
du mouvement du centre de gravité, théorème
des moments des quantités de mouvement, théo-
rème des forces-vives.

Chapitre I.

Retour sur la théorie des vecteurs.

1. - Rappel de quelques définitions et notations.

Nous représentons⁽¹⁾ par le symbole \overline{AB} ou \overline{F} le vecteur F dont l'origine est A et l'extrémité B ; nous représentons par AB ou F sa longueur absolue. La droite dont fait partie le vecteur est dite sa ligne d'action.

Si m désigne un nombre positif, le symbole $m\overline{AB}$ ou $m\overline{F}$ représente, par définition, le vecteur qui a même origine, même direction et même sens que \overline{AB} et qui a comme longueur mAB . Si m est négatif, soit $m = -\mu$, le vecteur $m\overline{AB}$ ou $m\overline{F}$ a encore A comme origine, mais est égal et directement opposé au vecteur $\mu\overline{AB}$. En particulier, $-\overline{F}$ est égal et directement opposé à \overline{F} .

Vecteurs équipollents. - Soit \overline{AB} ou \overline{F} et $\overline{A_1B_1}$ ou $\overline{F_1}$ deux vecteurs; l'égalité:

$$\overline{AB} = \overline{A_1B_1},$$

ou encore

$$\overline{F} = \overline{F_1},$$

signifie que F et F_1 sont équipollents, c'est-à-dire qu'ils ont même direction, même sens et même longueur. Si \overline{F} et $\overline{F_1}$

⁽¹⁾ On représente souvent aussi le vecteur AB par le symbole (A, B) .

ont même origine, l'égalité précédente entraîne leur coïncidence.

Résultante de n vecteurs qui ont même origine.

Par définition, la résultante de deux vecteurs $\overline{AB}_1, \overline{AB}_2$, qui ont même origine A , est la diagonale du parallélogramme construit sur les deux vecteurs. La résultante de n vecteurs $\overline{AB}_1, \overline{AB}_2, \dots, \overline{AB}_n$ s'obtient en prenant d'abord la résultante \overline{AC}_1 de $\overline{AB}_1, \overline{AB}_2$ puis la résultante de \overline{AC}_1 et de \overline{AB}_3 , etc. La résultante finale ainsi obtenue est indépendante de l'ordre dans lequel sont rangés les vecteurs.

Somme géométrique d'un système de vecteurs

Étant donné un système quelconque de vecteurs concourants ou non, soit $\overline{A_1B_1}$ ou $\overline{F_1}, \dots, \overline{A_nB_n}$ ou $\overline{F_n}$, on appelle somme géométrique de ces n vecteurs la résultante des n vecteurs équipollents construits avec une origine communément choisie: la somme géométrique d'un système de vecteurs n'est donc définie qu'à une translation près dans l'espace. Je représenterai cette somme géométrique par

$$\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \dots + \overline{A_nB_n}$$

ou encore par

$$\overline{F_1} + \overline{F_2} + \dots + \overline{F_n}.$$

Plus généralement, l'égalité géométrique

$$(1) \quad m\overline{F} = m_1\overline{F_1} + m_2\overline{F_2} + \dots + m_n\overline{F_n}$$

où m, m_1, \dots, m_n sont des quantités positives ou négatives, signifie que le vecteur $m\overline{F}$ est la somme géométrique des vecteurs $m_1\overline{F_1}, m_2\overline{F_2}, \dots, m_n\overline{F_n}$ ⁽¹⁾. Au sujet des égalités géométriques telles que (1), faisons immédiatement la remarque suivante: on peut ajouter ou retrancher membre à membre des égalités géométriques, faire passer des termes d'un membre à l'autre, multiplier les deux membres par un même facteur numérique (positif ou négatif), exactement comme si les égalités géométriques étaient des égalités arithmétiques ou algébriques.

(1) En particulier, la différence géométrique $\overline{F_1} - \overline{F_2}$ est la somme géométrique des vecteurs $\overline{F_1}$ et $-\overline{F_2}$.

Axes - Composantes d'un vecteur. - Soit $OXYZ$ un système d'axes rectangulaires ou obliques; étant donné un vecteur quelconque \vec{AB} ou \vec{F} , on peut toujours construire trois vecteurs $\vec{AB}_1, \vec{AB}_2, \vec{AB}_3$, parallèles respectivement aux axes Ox, Oy, Oz et dont la résultante est \vec{AB} ; ces trois vecteurs s'appellent les trois composantes de \vec{F} (suivant les axes).

D'autre part, soit X, Y, Z les coordonnées de l'extrémité B' du vecteur \vec{OB}' équipollent à \vec{AB} . Le nombre (positif ou négatif) X définit la composante \vec{AB}_1 [une fois son origine A donnée], de même Y définit \vec{AB}_2 et Z définit \vec{AB}_3 . Quand les axes sont rectangulaires, X, Y, Z représentent les projections de \vec{AB} sur les axes.

Si X_1, Y_1, Z_1 sont les composantes de $\vec{F}_1, \dots, X_n, Y_n, Z_n$ celles de \vec{F}_n , les composantes X, Y, Z de la somme géométrique \vec{F} de $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ sont :

$$X = X_1 + X_2 + \dots + X_n, \quad Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n, \quad Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n.$$

Plus généralement, l'égalité géométrique (1) se traduit par les trois égalités algébriques :

$$mX = m_1X_1 + \dots + m_nX_n, \quad mY = m_1Y_1 + \dots + m_nY_n, \quad mZ = m_1Z_1 + \dots + m_nZ_n,$$

cela que les axes soient rectangulaires ou obliques.

2 - Les moments par rapport à un point ou une droite.

Sens positif des rotations. - Nous adopterons, systématiquement, dans ce cours, comme sens positif des rotations autour d'une demi-droite Oz , le sens de gauche à droite ou dextrosum⁽¹⁾ pour un observateur placé les pieds en O , la tête en Z .

Orientation mutuelle de deux demi-droites. - Soit maintenant deux demi-droites Oz et Pn , non situées dans un même plan: si Pn est orientée de gauche à droite par rapport à Oz [c'est-à-dire pour un observateur placé les pieds en O , la tête en Z et qui regarde P], inversement Oz est orienté de gauche à droite par rapport à Pn . On dit, dans ce cas, que l'orientation mutuelle des deux demi-droites est dextrosum ou positive. Dans le cas contraire, elle est sinistrosum ou négative.

(1) Rien ne serait changé aux théorèmes qui vont suivre si on adoptait comme sens positif des rotations le sens de droite à gauche. Il faudrait seulement remplacer les mots de gauche à droite ou dextrosum par de droite à gauche ou sinistrosum.

Moment d'un vecteur par rapport à un point. - On sait que le moment d'un vecteur \overline{AB} par rapport à un point O est un vecteur \overline{OK} perpendiculaire au plan AB , à l'axe du double de l'aire du triangle OAB et tel que l'orientation mutuelle des deux demi-droites OK, AB soit positive. On représente le vecteur \overline{OK} par le symbole (AB, O) . Ce vecteur n'est nul que si \overline{AB} est nul ou si la ligne d'action de AB passe par O .

Moment d'un vecteur par rapport à une droite. - Le moment d'un vecteur \overline{AB} par rapport à une droite \mathbb{D} est la projection sur \mathbb{D} du vecteur (AB, O) , O désignant un point arbitraire de \mathbb{D} ; cette projection reste la même quel que soit le point O choisi sur \mathbb{D} : elle coïncide avec le moment (a, b, o) , si ab désigne la projection de \overline{AB} sur un plan perpendiculaire à \mathbb{D} et passant par O .

Le moment d'un vecteur \overline{AB} par rapport à une droite \mathbb{D} n'est donc déterminé qu'à une translation près le long de \mathbb{D} . Si on a choisi sur \mathbb{D} un sens positif, soit OZ , ce moment est représenté par un nombre positif ou négatif, à savoir le nombre $\varepsilon AB, d \sin \theta$, d désignant la plus courte distance des droites AB et \mathbb{D} , θ l'angle (compris entre 0 et π) de ces deux droites, et ε étant égal à $+1$ ou à -1 suivant que l'orientation des deux demi-droites AB et OZ est positive ou négative. On représente souvent ce nombre par le symbole (AB, OZ) . Pour qu'il soit nul, il faut que \overline{AB} soit nul, ou dans un même plan avec \mathbb{D} .

Moment réciproque de deux vecteurs. - On appelle moment de deux vecteurs $\overline{AB}, \overline{C'D'}$, l'un par rapport à l'autre, le nombre (positif ou négatif) $\varepsilon AB, C'D', d \sin \theta$, d désignant la plus courte distance des droites AB et $C'D'$, θ l'angle (compris entre 0 et π) de ces deux droites, et ε étant égal à $+1$ ou à -1 suivant que l'orientation mutuelle des deux demi-droites $AB, C'D'$ est positive ou négative. Pour que ce moment soit nul, il faut que \overline{AB} ou $\overline{C'D'}$ soit nul, ou que les deux vecteurs soient dans un même plan. Le produit de AB et du moment de $\overline{C'D'}$ par rapport à la demi-droite AB , le produit de $\overline{C'D'}$ et du moment de \overline{AB} par rapport à la demi-droite $C'D'$, enfin le moment réciproque de $\overline{AB}, \overline{C'D'}$ coïncident.

3. - Rappel des propriétés des moments.

Le moment d'un vecteur \overline{AB} par rapport à un point

(ou à une droite ou à un autre vecteur) ne change pas quand on fait glisser AB le long de sa ligne d'action.

Inversement quand on connaît : 1° un vecteur \overline{OR} équipollent au vecteur \overline{AB} ; 2° le moment ⁽¹⁾ $\overline{OR} = (AB, O)$ de AB par rapport au point O , le vecteur \overline{AB} est bien déterminé à un glissement près le long de sa ligne d'action.

Théorème I. - Soit O et O_1 deux points quelconques: le moment du vecteur AB par rapport au point O_1 est la somme géométrique du moment de AB par rapport au point O , et du moment de OC par rapport au point O_1 , CC désignant le vecteur équipollent à AB d'origine O .

Autrement dit, on a :

$$(2) \quad (AB, O_1) = (AB, O) + (OC, O_1).$$

Théorème II. - Le moment par rapport au point O de la résultante AC de n vecteurs AB_1, AB_2, \dots, AB_n ayant même origine A , est la résultante des moments des n vecteurs par rapport au point O .

Autrement dit, on a :

$$(3) \quad (AC, O) = (AB_1, O) + (AB_2, O) + \dots + (AB_n, O).$$

Ces théorèmes entraînent deux énoncés analogues sur les moments relatifs à une droite OZ (ou à deux droites parallèles OZ et O_1Z_1). Il suffit de remplacer O par OZ et O_1 par O_1Z_1 dans les égalités géométriques (2) et (3) qui deviennent alors algébriques.

A. - Moment résultant d'un système de vecteurs.

Le moment résultant, par rapport à un point O , d'un système quelconque S de vecteurs est, par définition, la résultante des moments, par rapport à O , de ces divers vecteurs. Nous représenterons ce moment résultant par le symbole (\overline{S}, O) .

Une définition analogue s'applique au moment résultant d'un système S de vecteurs par rapport à une droite D . Quand on a choisi sur D un sens positif OZ , le moment résultant de S par rapport à OZ est un nombre (positif ou négatif), comme algébrique des

⁽¹⁾ Le vecteur \overline{OR} est nécessairement perpendiculaire à \overline{AB} , donc à \overline{OR} .

nombres $(A_1 B_1, OZ)$, $(A_2 B_2, OZ)$, ... si $A_1 B_1, A_2 B_2$, etc sont les vecteurs de S . Nous représenterons ce nombre par le symbole (\bar{S}, OZ) . On peut dire encore que le moment résultant, par rapport à une droite Π d'un système de vecteurs, est la projection sur Π du moment résultant de S par rapport à un point O de Π arbitrairement choisi.

Théorème III. - Soit O et O_1 deux points quelconques, OR la somme géométrique du système S de vecteurs, construite avec O comme origine. On a :

$$(\bar{S}, O_1) = (\bar{S}, O) + (OR, O_1).$$

Corollaire. - Pour que le vecteur (\bar{S}, O) reste équipollent à lui-même quand O varie arbitrairement, il faut et il suffit que la somme géométrique de S soit nulle.

Couples. - Axe d'un couple. - On appelle couple un système de deux vecteurs égaux, parallèles et de sens contraire. En vertu du corollaire précédent, le moment résultant d'un couple par rapport à un point O reste équipollent à lui-même quand O varie ; on donne à ce vecteur OR le nom d'axe du couple. L'axe d'un couple n'est défini qu'à un transport près dans l'espace ; autrement dit, il est bien défini en grandeur direction et sens.

Le moment résultant de plusieurs couples par rapport à un point O est la somme géométrique des axes de ces couples.

Systèmes de vecteurs équivalents.

5. - Définition et propriétés des systèmes de vecteurs équivalents.

On convient de dire que deux systèmes de vecteurs S et S' sont géométriquement équivalents ou équivalents, s'ils satisfont aux deux conditions suivantes :

1° Ils ont même somme géométrique ;

2° Ils ont même moment résultant par rapport à tout point O .

L'équivalence de deux systèmes S et S' de vecteurs se traduit par l'égalité.

$$(\bar{S}) = (\bar{S}').$$

En particulier, un système de vecteurs est équivalent à un système de vecteurs nuls, si sa somme géométrique est nulle, ainsi que son moment résultant par rapport à tout point O . Cette propriété se traduit par l'égalité : $(\vec{S}) = 0$.

Théorème IV. - Pour que deux systèmes de vecteurs soient équivalents il faut et il suffit qu'ils aient : 1° même somme géométrique, 2° même moment résultant par rapport à un point donné O .

Corollaire. - Pour que deux couples soient équivalents, il faut et il suffit que leurs axes soient équipollents.

Théorème V. - Pour que deux systèmes de vecteurs soient équivalents, il faut et il suffit qu'ils aient même moment résultant par rapport à trois points non en ligne droite.

Théorème VI. - Tout système S de vecteurs est équivalent à un système S_1 formé d'un vecteur et d'un couple.

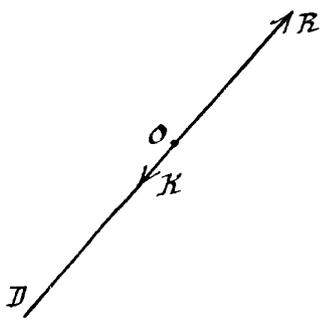
On donne à un tel système S_1 formé d'un vecteur, soit \vec{OR} , et d'un couple (soit un couple d'axe \vec{OK}), le nom de système réduit équivalent à S . Le vecteur \vec{OR} et l'axe \vec{OK} sont bien déterminés⁽¹⁾ quand on se donne l'origine O du vecteur \vec{OR} : le vecteur \vec{OR} est la somme géométrique de S et l'axe \vec{OK} coïncide avec le vecteur (\vec{S}, O) , moment résultant de S par rapport à O . Le vecteur \vec{OR} et l'axe \vec{OK} sont dits éléments de réduction du système S , attachés au point O . Quand O varie, le vecteur \vec{OR} reste équipollent à lui-même, et la projection de \vec{OK} sur OR ne change pas.

6. - Torseurs.

On appelle torseur un système de vecteurs formé d'un couple et d'un vecteur qui a même ligne d'action que l'axe du couple. Si le vecteur est nul, le torseur se réduit à un couple : écartons ce cas.

⁽¹⁾ Il ne faut pas oublier que OK ne définit pas un couple unique, mais laisse le choix entre une infinité de couples équivalents.

Soit \mathbb{D} la ligne d'action commune du vecteur \overline{OR} [non nul] et de l'axe \overline{OK} du couple. Si on fait glisser la figure KOR le long de \mathbb{D} , le nouveau torseur ainsi obtenu est équivalent au premier, et on obtient ainsi tous les torseurs équivalents au torseur donné.



Théorème VII. - Tout système S de vecteurs est équivalent à un torseur

Corollaire. - La ligne d'action \mathbb{D} du torseur équivalent à S est bien déterminée, on l'appelle axe central du système S de vecteurs. Les éléments du torseur \overline{OR} et OK sont bien déterminés à un glissement près le long de l'axe central.

Il n'y a d'exception que si la somme géométrique de S est nulle, auquel cas S équivaut à un couple, dont l'axe n'est défini qu'à une translation près dans l'espace.

Cas particuliers. - Pour qu'un système donné S de vecteurs soit équivalent à un couple, il faut et il suffit que la somme géométrique soit nulle.

Quand un système de vecteurs est équivalent à un système formé d'un seul vecteur, soit \overline{CR} , on dit qu'il admet une résultante géométrique, ou simplement une résultante. Pour qu'un système donné S de vecteurs admette une résultante, il faut et il suffit que, pour un point particulier O (arbitrairement choisi), le vecteur (S, O) soit ou nul ou perpendiculaire à la somme géométrique \overline{OR} de S , cette dernière n'étant pas nulle. La résultante \overline{CR} est alors bien déterminée à un glissement près le long de sa ligne d'action, laquelle n'est autre, dans ce cas particulier, que l'axe central de S . La résultante est équipollente à \overline{OR} .

Pour qu'un système S de vecteurs soit équipollent à un système de vecteurs nuls [voir le n° 5], c'est-à-dire pour que $(S) = 0$, il faut et il suffit que \overline{OR} soit nul et que le vecteur (S, C) soit nul, O désignant un point particulier (arbitrairement choisi). On dit aussi, dans ce cas, que S admet une résultante nulle.

Applications. - Un système de vecteurs dont les

lignes d'action passent toutes par un même point O , admet toujours une résultante dont la ligne d'action passe par ce point. Cette résultante peut être nulle.

Un système de vecteurs distribués dans un même plan ou bien admet une résultante située dans ce plan (résultante qui peut être nulle) ou bien est équivalent à un couple dont l'axe est perpendiculaire au plan. En effet, si O est un point du plan, (\bar{S}, O) est perpendiculaire au plan (ou nul), donc perpendiculaire à OR , (si $OR \neq 0$).

7- Théorème VIII. - Tout système de vecteurs est équivalent à un système formé de deux vecteurs. - On peut choisir arbitrairement la ligne d'action \mathbb{D} d'un de ces deux vecteurs, pourvu toutefois : 1° qu'elle ne soit pas parallèle à la somme géométrique OR de S ; 2° que, O étant un point de \mathbb{D} , le vecteur (\bar{S}, O) ne soit pas ⁽¹⁾ perpendiculaire à \mathbb{D} . Cette ligne d'action \mathbb{D} choisie, les deux vecteurs sont bien déterminés à un glissement près le long de leur ligne d'action. Ceci suppose toutefois ⁽²⁾ $OR \neq 0$.

Cas particuliers. - La réduction géométrique d'un système S de vecteurs à un système de deux vecteurs, soit \overline{CD} , \overline{EF} , étant opérée d'une façon quelconque,

1° pour que le système S' soit équivalent à un couple, il faut et il suffit que \overline{CD} et \overline{EF} soient égaux, parallèles et de sens contraires ;

2° pour que le système S admette une résultante, il faut et il suffit que \overline{CD} et \overline{EF} soient dans un même plan, sans former un couple.

3° pour que $(\bar{S}) = 0$, il faut et il suffit que \overline{CD} et \overline{EF} soient égaux et directement opposés.

(1) Quand (\bar{S}, O) est perpendiculaire à \mathbb{D} pour une certaine position de O sur \mathbb{D} , il en est de même quel que soit le point O pris sur \mathbb{D} . Si on appelle droite exceptionnelle toute droite qui jouit de cette propriété, les droites exceptionnelles passant par un point O donné sont les droites perpendiculaires au vecteur $\overline{OR} = (\bar{S}, O)$; elles forment donc un plan. L'ensemble de ces droites dans l'espace constitue ce qu'on appelle un complexe linéaire.

(2) Si $OR = 0$, S équivaut à un couple et on peut se donner arbitrairement un des deux vecteurs, pourvu qu'il soit perpendiculaire à l'axe du couple.

Corollaire. - Le système S étant formé de trois vecteurs, pour que $(S) = 0$, il faut et il suffit que ces trois vecteurs soient dans un même plan, que deux de ces vecteurs ne forment pas un couple, et que le troisième soit égal et directement opposé à leur résultante.

8. - Remarques sur les systèmes équivalents

I. - Un système de vecteurs S reste équivalent à lui-même 1° quand on fait glisser un des vecteurs le long de sa ligne d'action; 2° quand on adjoint à S deux vecteurs égaux et directement opposés; 3° quand on retire un certain nombre de vecteurs qui ont une origine commune A par leur résultante vulgaire \overline{AR} , ou au contraire quand on remplace un des vecteurs, soit \overline{AR} , par des vecteurs ayant A comme origine et \overline{AR} comme résultante; 4° quand on effectue sur S un certain nombre de fois les opérations précédentes, dites opérations élémentaires, sur les vecteurs.

II. - Un système de vecteurs reste équivalent à lui-même quand on remplace un certain ensemble S_1 de ses vecteurs par un système de vecteurs S'_1 équivalents à S_1 .

III. - Quand deux systèmes de vecteurs S et S' sont équivalents, si on remplace chaque vecteur $\overline{A_k B_k}$ de l'un et de l'autre système par le vecteur $m \overline{A_k B_k}$, m désignant un nombre donné (positif ou négatif), les deux nouveaux systèmes de vecteurs ainsi obtenus, soit S_1 et S'_1 , sont encore équivalents. En particulier, si le système des vecteurs $\overline{A_1 B_1}, \dots, \overline{A_n B_n}$ admet une résultante, soit \overline{CD} , le système des vecteurs $m \overline{A_1 B_1}, \dots, m \overline{A_n B_n}$ admet la résultante $m \overline{CD}$.

IV. - S et S' étant deux systèmes de vecteurs donnés, déplaçons l'ensemble de tous ces vecteurs comme un système solide: si S et S' étaient équivalents, ils restent équivalents après le déplacement. En particulier, le système des vecteurs $\overline{A_1 B_1}, \dots, \overline{A_n B_n}$ admettant une résultante \overline{CD} , déplaçons l'ensemble S de ces vecteurs comme un corps solide: le nouveau système de vecteurs ainsi défini admet encore une résultante qui n'est autre que le vecteur \overline{CD} invariablement lié à S et déplacé avec lui.

9. - Systèmes de vecteurs parallèles. - Considérons un système de vecteurs $\overline{A_1 B_1}, \overline{A_2 B_2}, \dots$, tous parallèles et de même sens. Ce système admet toujours

une résultante, qui est parallèle aux vecteurs donnés, de même sens, et dont la longueur est égale à la somme de leurs longueurs. Quand les vecteurs pivotent chacun autour de son origine, en restant parallèles, de même sens et en gardant leurs longueurs, la ligne d'action de leur résultante pivote autour d'un point fixe, qu'on appelle centre de vecteurs parallèles donnés, et qu'on peut prendre constamment comme origine de la résultante.

Quand les vecteurs sont parallèles, mais non tous de même sens, soit Φ_1 la somme des longueurs des vecteurs d'un certain sens, Φ_2 la somme des longueurs des vecteurs de sens contraire : si $\Phi_1 = \Phi_2$ le système de vecteurs équivaut à un couple (dont l'axe peut être nul); si $\Phi_1 \neq \Phi_2$, soit $\Phi_1 > \Phi_2$, le système admet une résultante dirigée dans le sens des premiers vecteurs, égale en longueur à $\Phi_1 - \Phi_2$, et dont la ligne d'action pivote autour d'un point fixe, quand les vecteurs pivotent autour de leurs origines en gardant leurs longueurs et en restant parallèles, ceux de même sens restant de même sens, ceux de sens contraire restant de sens contraire.

Quand les vecteurs sont tous de même sens, si on trace une surface fermée convexe renfermant à son intérieur toutes les origines A_1, \dots, A_n des vecteurs, le centre C des vecteurs est intérieur à cette surface. En particulier, si les points A_1, \dots, A_n sont dans un même plan, le point C est dans ce plan et intérieur à toute courbe fermée convexe du plan qui comprend les points A_1, \dots, A_n à son intérieur. Si les points A_1, \dots, A_n sont en ligne droite, le point C est sur la droite qui les contient et compris entre les deux points extrêmes.

10. - Centre de gravité ou centre d'inertie (Euler) d'un système de masses.

Considérons un système matériel dont les éléments P_1, P_2, \dots, P_n ont chacun une masse donnée m_1, \dots, m_n et occupent une position donnée. Si on construit, avec P_1, \dots, P_n comme origines, des vecteurs $P_1 Q_1, \dots, P_n Q_n$ tous parallèles, de même sens, et proportionnels à m_1, \dots, m_n , ce système de vecteurs admet une résultante qui pivote autour d'un point fixe G, quand on fait varier la direction commune des vecteurs. Ce

pour G est parfaitement déterminé (à l'instant t) quand on connaît (à cet instant) la position et la masse de chaque élément du système matériel considéré. Si on déplace le système matériel comme un solide, ce point reste invariablement lié au système. On donne communément au point G le nom de centre de gravité du système, à cause du rôle qu'il joue dans la théorie de l'équilibre des corps graves (ou pesants). Mais c'est là une mauvaise terminologie et qui prête aux plus fâcheuses confusions. La définition du point G est tout-à-fait indépendante de la pesanteur, et n'est-il point regrettable d'avoir à parler, par exemple, du centre de gravité du système solaire, qui n'est point grave! Euler avait proposé de donner au point G le nom de centre d'inertie du système. Nous emploierons dans ces leçons le nom de centre d'inertie, quand nous étudierons un système, tel que le système solaire, non situé au voisinage du sol.

Si le système matériel S est formé de plusieurs parties S_1, \dots, S_p , soit G_1 le centre des masses de S_1 et M_1 sa masse totale, ..., soit G_p le centre des masses de S_p et M_p sa masse totale: le centre des masses de S coïncide avec le centre des masses M_1, \dots, M_p placées respectivement en G_1, \dots, G_p . Cela résulte évidemment du fait que, dans la réduction d'un système de vecteurs on peut remplacer plusieurs vecteurs admettant une résultante unique par cette résultante.

Enfin, on peut répéter sur la position du point G les remarques qui terminent le N° 9: le point G est intérieur à toute surface fermée convexe comprenant à son intérieur tous les points P_1, P_2, \dots, P_n ; etc.

Formules analytiques.

11. - Trièdres positifs. - Considérons un trièdre trirectangle $Oxyz$, et imaginons que dans le plan xoy la demi-droite Ox tourne autour du point O de façon à venir coïncider avec Oy en décrivant un angle égal à un angle droit (en valeur absolue). Si un observateur placé les pieds en O , la tête en Z , voit cette rotation s'effectuer de sa gauche à sa droite, on dit que le trièdre est dextrogon

ou positif : dans le cas contraire, il est sinistrorsum ou mégatif. Un trièdre dextrorsum (ou sinistrorsum) reste dextrorsum (ou sinistrorsum) quand on permute circulairement les arêtes Ox, Oy, Oz .

Dans toutes ces leçons, à moins que nous n'ayons spécifié expressément le contraire, le trièdre des axes sera choisi trirectangle et positif.

12. - Formules relatives aux moments. - Soit $Oxyz$ le trièdre des axes [trirectangle et positif], soit (x, y, z) les coordonnées de l'origine A d'un vecteur \overline{AB} , (X, Y, Z) ses projections sur les trois axes : le moment $L(\overline{AB}, O)$ du vecteur \overline{AB} par rapport à l'origine O a pour projections sur Ox, Oy, Oz :

$$yZ - zY, \quad zX - xZ, \quad xY - yX.$$

Ces trois expressions représentent respectivement le moment de \overline{AB} par rapport à Ox, Oy, Oz .

Le moment de \overline{AB} par rapport au point M [de coordonnées a, b, c] a pour projections sur les trois axes :

$$(y-b)Z - (z-c)Y, \quad (z-c)X - (x-a)Z, \quad (x-a)Y - (y-b)X.$$

Le moment de \overline{AB} par rapport à une droite quelconque qui passe par le point M ou (a, b, c) et qui a pour cosinus directeurs (α, β, γ) est égal à l'expression :

$$\alpha [(y-b)Z - (z-c)X] + \beta [(z-c)X - (x-a)Z] + \gamma [(x-a)Y - (y-b)X].$$

Le moment réciproque de deux vecteurs \overline{AB} et $\overline{A_1B_1}$ a pour valeur :

$$X_1 [(y-y_1)Z - (z-z_1)X] + Y_1 [(z-z_1)X - (x-x_1)Z] + Z_1 [(x-x_1)Y - (y-y_1)X],$$

si \overline{AB} a pour origine (x, y, z) et pour projections (X, Y, Z) , et si $\overline{A_1B_1}$ a pour origine (x_1, y_1, z_1) et pour projections (X_1, Y_1, Z_1) .

Cette expression peut s'écrire :

$$(x-x_1)[YZ - ZY_1] + (y-y_1)[ZX - XZ_1] + (z-z_1)[XY - YX_1]$$

forme qui met bien en évidence le rôle réciproque des deux vecteurs.

13. - Formules relatives aux systèmes de vecteurs.

Soit $\overline{A_1B_1}, \dots, \overline{A_nB_n}$ les vecteurs qui composent le système S ,

soit (x_1, y_1, z_1) l'origine et (X_1, Y_1, Z_1) les projections de $\overline{A_1 B_1}$, ...
 (x_n, y_n, z_n) l'origine et (X_n, Y_n, Z_n) les projections de $\overline{A_n B_n}$

Les éléments de réduction de S attachés à l'origine O des axes sont :

1° un vecteur \overline{OR} qui a pour projections

$$(1) \quad X = \sum_{k=1}^{k=n} X_k, \quad Y = \sum_{k=1}^{k=n} Y_k, \quad Z = \sum_{k=1}^{k=n} Z_k;$$

2° Un couple dont l'axe \overline{OK} a pour projections

$$(2) \quad L = \sum_{k=1}^{k=n} (y_k Z_k - z_k Y_k), \quad M = \sum_{k=1}^{k=n} (z_k X_k - x_k Z_k), \quad N = \sum_{k=1}^{k=n} (x_k Y_k - y_k X_k)$$

L'expression $LX + MY + NZ$, égale au produit de \overline{OR} par la projection de \overline{OK} sur \overline{OR} , est un invariant de même que $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$: leur valeur est indépendante du choix des axes [trirectangles et positifs].

Axe central. - Soit $X^2 + Y^2 + Z^2 \neq 0$; les équations de l'axe central sont (x, y, z) désignant les coordonnées courantes):

$$(3) \quad \frac{L + zY - yZ}{X} = \frac{M + xZ - zX}{Y} = \frac{N + yX - xY}{Z}$$

Équivalence de deux systèmes de vecteurs S et S'. - Soit (X, Y, Z) les composantes de \overline{OR} et (L, M, N) les composantes de \overline{OK} (éléments de réduction de S attachés au point O); soit de même (X', Y', Z') et (L', M', N') les quantités analogues relatives à S'; pour que S et S' soient équivalents, il faut et il suffit qu'on ait :

$$(4) \quad X = X', \quad Y = Y', \quad Z = Z', \quad L = L', \quad M = M', \quad N = N', \quad (6 \text{ conditions})$$

14. - Cas particuliers. - Pour qu'un système de vecteurs soit équivalent à un couple, il faut et il suffit qu'on ait: $X = Y = Z = 0$.

Pour qu'il admette une résultante non nulle, il faut et il suffit qu'on ait:

$$(5) \quad LX + MY + NZ = 0, \quad \text{avec } X^2 + Y^2 + Z^2 \neq 0$$

Dans ce cas les équations de l'axe central (ligne d'action de la résultante) peuvent s'écrire:

(6) $L+zY-yZ=0$, $M+xZ-zX=0$, $N+yX-xY=0$,
une de ces équations étant conséquence des deux autres en
vertu de la condition $LX+MY+NZ=0$.

Pour qu'un système de vecteurs soit équivalent à un
système de vecteurs nuls, il faut et il suffit qu'on ait :

$$(7) \quad X=0, Y=0, Z=0, \quad L=0, M=0, N=0, \text{ (6 conditions).}$$

15. - Centre des vecteurs parallèles.

Soit D une demi-droite parallèle à la direction commune
des vecteurs $\vec{A}_k \vec{B}_k$, soit F_k la longueur absolue du vecteur $\vec{A}_k \vec{B}_k$
précédée du signe + ou - suivant que $\vec{A}_k \vec{B}_k$ est de sens D ou de
sens contraire. Si la somme $\sum F_k$ est nulle, le système de vec-
teurs équivaut à un couple; si

$\sum F_k \neq 0$, le centre C des vecteurs parallèles a pour coordonnées:

$$(8) \quad \xi = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} x_k F_k}{\sum_{k=1}^{k=n} F_k}, \quad \eta = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} y_k F_k}{\sum_{k=1}^{k=n} F_k}, \quad \zeta = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} z_k F_k}{\sum_{k=1}^{k=n} F_k},$$

et le système admet une résultante ayant C pour origine,
parallèle à D et qui, comptée positivement dans le sens D ,
est égale à $\sum_{k=1}^{k=n} F_k$.

Les formules (8) qui donnent ξ, η, ζ sont vraies quels
que soient les axes, rectangulaires ou obliques.

16. - Centre de gravité d'un système matériel.

Soit P_1 un élément matériel de masse m_1 et (x_1, y_1, z_1) ses
coordonnées, ... P_n un élément matériel de masse m_n ,
et (x_n, y_n, z_n) ses coordonnées; le centre des masses
 P_1, \dots, P_n , soit G , a pour coordonnées :

$$(9) \quad \xi = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} m_k x_k}{\sum m_k}, \quad \eta = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} m_k y_k}{\sum_{k=1}^{k=n} m_k}, \quad \zeta = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} m_k z_k}{\sum_{k=1}^{k=n} m_k}$$

Interprétation géométrique des formules (9) - Soit M la masse totale du système; les formules (9) peuvent s'écrire :

$$(10) \quad M\xi = \sum m_k x_k, \quad M\eta = \sum m_k y_k, \quad M\zeta = \sum m_k z_k.$$

Or considérons le vecteur $m_k \overline{OP_k}$: ses composantes sont $m_k x_k, m_k y_k, m_k z_k$. Il suit de là que les formules (10) expriment que la résultante des vecteurs $m_k \overline{OP_k}$ est le vecteur $M \overline{O'}$.

Ce théorème géométrique est vrai quel que soit le point O . Il résulte de ce théorème que les formules (9) sont vraies, même si les axes sont obliques.

Remarques sur la symétrie d'un système de masses
Si un système de masses admet un plan de symétrie⁽¹⁾ [ou un axe ou un centre de symétrie], le centre des masses est dans ce plan, ou sur cet axe, ou coïncide avec ce centre de symétrie.

Si le système admet un plan diamétral Π conjugué d'une certaine direction \mathbb{D} ⁽²⁾, le centre des masses est dans ce plan diamétral.

Si le système admet un diamètre $O\mathbb{D}$ conjugué d'une certaine direction de plan Π ⁽³⁾, le centre des masses est sur le diamètre $O\mathbb{D}$.

17 - Centre des masses d'un système continu.

Considérons un corps continu (à trois dimensions), et soit $\rho(x, y, z)$ sa densité en un point P , intérieur à sa surface limitée. La masse totale M du corps, ainsi que les trois coordonnées (ξ, η, ζ) du centre des masses, seront données

⁽¹⁾ Il faut entendre par là qu'à tout point P_k de masse m_k du système correspond un autre point du système, de même masse, et symétrique de P_k par rapport au plan.

⁽²⁾ Il faut entendre par là que, si P_k est un élément du système de masse m_k , il existe un autre élément P'_k du système, de même masse, et tel que le segment $P_k P'_k$ soit parallèle à \mathbb{D} et coupé par le plan Π en son milieu.

⁽³⁾ Il faut entendre par là que, si P_k est un élément du système, il existe un autre élément P'_k de même masse et tel que le segment $P_k P'_k$ soit parallèle au plan Π et rencontré en son milieu par la droite $O\mathbb{D}$.

par des intégrales triples étendues à tout son volume V , par exemple on aura :

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad M\bar{x} = \iiint_V x\rho dx dy dz, \text{ etc.}$$

en tout quatre intégrales triples à calculer.

Des considérations de symétrie facilitent souvent le calcul de M et de $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$.

Quand le système matériel admet un plan (ou un axe, ou un centre) de symétrie géométrique et mécanique,⁽¹⁾ le centre des masses G est dans ce plan, ou sur cet axe, ou coïncide avec ce centre de symétrie.

Quand le corps présente un plan diamétral Π conjugué d'une direction D [tant au point de vue géométrique que mécanique], le point G est dans le plan Π . Quand le corps présente un diamètre OD conjugué d'une certaine direction de plan⁽²⁾ Π , le point G est sur OD .

18. Corps continus à deux ou à une dimension.

On considère souvent des corps continus dont une dimension est négligeable par rapport aux deux autres [Exemples: plaques et membranes] ou dont deux dimensions sont négligeables par rapport à la troisième [Exemple: fils].

Dans le premier cas, soit P un point du corps infiniment mince, $d\sigma$ un petit élément de surface comprenant P , m la masse de cet élément du corps: le rapport $\frac{m}{d\sigma}$, quand $d\sigma$ tend à se réduire au point P , tend vers une limite [du moins nous l'admettons] qui est la densité superficielle, ou simplement la densité du corps⁽³⁾ au point P .

La masse totale d'un corps infiniment mince et les coordonnées du centre des masses sont données par quatre intégrales doubles étendues à l'aire totale [plane ou gauche] du corps.

De même, si le corps n'a qu'une dimension, soit P

(1) Il faut entendre par là que le corps présente la symétrie géométrique en question, et qu'en deux points correspondants la densité est la même.

(2) Cela signifie que le corps, en outre de la symétrie (oblique) géométrique indiquée par l'énoncé, possède la propriété que la densité en deux points correspondants est la même.

(3) Quand le corps se déforme en se dilatant ou se contractant, la densité est bien déterminée, à un instant t , au point P , mais varie avec l'instant considéré.

un point du corps, ds un élément d'arc dont P fait partie, m la masse de l'élément ds du corps : quand ds tend à se réduire au point P , le rapport $\frac{m}{ds}$ tend vers une limite qui est la densité linéaire [ou simplement la densité] du corps⁽¹⁾ au point P .

La masse totale d'un corps linéaire et les coordonnées du centre des masses sont données par quatre intégrales simples étendues à tout l'arc de courbe dessiné par le corps

Des considérations de symétrie facilitent souvent le calcul de M, ξ, η, ζ . Quel que corps ait deux ou une dimensions, s'il admet un plan [ou un axe, ou un centre] de symétrie géométrique et mécanique⁽²⁾, le centre G des masses est dans ce plan, ou sur cet axe, ou coïncide avec ce centre de symétrie.

Si le corps est une plaque qui admet, dans son plan, un diamètre OII conjugué d'une direction Δ , au point de vue tant géométrique que mécanique, le point G est sur le diamètre⁽³⁾ OII .

19 - Quelques exemples de détermination du centre des masses.

Sans revenir sur les exemples élémentaires, remarquons que les propositions précédentes permettent dans un grand nombre de cas, de déterminer aisément le centre des masses d'un corps continu.

Par exemple, si le corps est un corps homogène compris

(1) Voir la note 3 de la page précédente.

(2) Voir la note 1 de la page précédente.

(3) Ceci n'est vrai que si le corps est une aire plane. - Autrement, de la symétrie oblique on ne peut rien conclure quant à la position du centre des masses d'un corps à deux ou une dimensions. Par exemple, soit S une surface gauche homogène, — qui admet un plan diamétral π conjugué d'une direction Δ : le point G n'est pas en général dans le plan π , parce que deux éléments d'aire correspondants de la surface S ne sont pas égaux en général (quand la droite Δ est oblique sur le plan π). De même, si le corps est une ligne homogène constituée par une demi-ellipse limitée par les extrémités d'un diamètre Δ dont OII est le diamètre conjugué, le centre de gravité de cette ligne n'est pas sur OII , à moins que OII ne soit un des axes. Au contraire, l'aire plane comprise entre la demi-ellipse et Δ a (si elle est homogène) son centre de gravité sur OII .

entre une quadrique et deux plans parallèles le centre des masses est sur le diamètre conjugué des deux plans.

Si le corps est un cylindre oblique homogène limité par deux plans parallèles, le centre des masses G est le même que celui de l'aire (supposée homogène) de la section du cylindre par le plan équidistant des deux bases. Quand le cylindre est elliptique, cette section est une ellipse, dont le centre est le point G .

Si le corps est un volume de révolution limité par deux plans perpendiculaires à l'axe de révolution, et si la densité ρ est constante à l'intérieur de chaque parallèle, le centre de gravité est sur l'axe, et la détermination de M et de G se ramène au calcul de deux intégrales simples. Soit OZ l'axe de révolution, $x = \varphi(z)$ l'équation de la méridienne dans le plan zOx , $\rho(z)$ la densité $z = a$ et $z = b$ les deux parallèles limites; on a :

$$M = \pi \int_a^b \rho(z) x^2(z) dz, \quad \text{et} \quad \zeta = \pi \int_a^b \rho(z) x^2(z) z dz.$$

Si le corps est une surface de révolution, autour de OZ par exemple, limitée par les plans $z = a$, $z = b$, et dont la densité ρ est constante le long de tout parallèle, le point G est encore sur OZ , et on a :

$$M = 2\pi \int_a^b \rho(z) \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} dz, \quad \text{et} \quad \zeta = 2\pi \int_a^b \rho(z) z \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dz}\right)^2} dz.$$

Chapitre II.

Chapitre II.

Quelques théorèmes de la géométrie infinitésimal des vecteurs.

20. - Dérivée géométrique. — Soit \overline{OA} un vecteur dont l'origine est fixe et dont l'extrémité A est bien déterminée à chaque instant t mais varie avec t : à l'instant $t+h$, ce vecteur est $\overline{OA'}$. Par définition la dérivée géométrique (ou la dérivée) du vecteur \overline{OA} par rapport à t est le vecteur limite du vecteur $\overline{AA'}$ quand h tend vers zéro, soit \overline{AV} , ou tout vecteur équipollent à \overline{AV} . On voit que ce vecteur \overline{AV} ne diffère pas de la vitesse du point A .

Soit maintenant \overline{AB} un vecteur bien déterminé à chaque instant t , mais dont l'origine et l'extrémité peuvent varier avec t . Par définition, la dérivée géométrique (par rapport à t) du vecteur \overline{AB} est la dérivée géométrique du vecteur \overline{OC} équipollent à \overline{AB} et construit (à chaque instant t) avec l'origine fixe O arbitrairement choisie. Je représenterai cette dérivée par le symbole $\frac{d\overline{AB}}{dt}$.

Pour pouvoir appliquer la définition précédente, et on voit qu'il suffit de connaître (à chaque instant t) le vecteur \overline{AB} en grandeur direction et sens: soit \overline{CD} sa dérivée, on peut calculer la dérivée géométrique de \overline{CD} (par rapport à t), soit \overline{EF} ; ce nouveau vecteur sera, par définition, la dérivée géométrique seconde de \overline{AB} par rapport à t ou $\frac{d^2\overline{AB}}{dt^2}$, et ainsi de suite.

En particulier, soit P un mobile, O un point fixe: la vitesse de P est la dérivée géométrique du vecteur \overline{OP} , l'accélération de P est la dérivée géométrique seconde de \overline{OP} , (comme on le voit aussitôt en construisant l'hodographe)

21. Théorème. — La dérivée (par rapport au temps) de la somme géométrique \overline{OR} d'un système de vecteurs $\overline{A}, \overline{B}, \dots, \overline{A}_n, \overline{B}_n$ (bien déterminés à chaque instant t), est la somme géométrique

des dérivées de ces vecteurs $A_1 B_1, \dots, A_n B_n$.

Autrement dit, si on a (quel que soit t):

$$(1) \quad \overline{OR} = \overline{A_1 B_1} + \dots + \overline{A_n B_n},$$

on a:

$$(2) \quad \frac{d.\overline{OR}}{dt} = \frac{d.\overline{A_1 B_1}}{dt} + \dots + \frac{d.\overline{A_n B_n}}{dt}.$$

Plus généralement, soit m, m_1, \dots, m_n des quantités constantes positives ou négatives; si on a (quel que soit t)

$$(3) \quad m\overline{OR} = m_1\overline{A_1 B_1} + \dots + m_n\overline{A_n B_n},$$

on a:

$$(4) \quad m \frac{d.\overline{OR}}{dt} = m_1 \frac{d.\overline{A_1 B_1}}{dt} + \dots + m_n \frac{d.\overline{A_n B_n}}{dt}$$

En effet, soit $\overline{OR'}, \overline{A_1 B_1'}, \dots, \overline{A_n B_n'}$ ce que deviennent les vecteurs $\overline{OR}, \overline{A_1 B_1}, \dots, \overline{A_n B_n}$ à l'instant $t+h$;

$$(5) \quad m\overline{OR'} = m_1\overline{A_1 B_1'} + \dots + m_n\overline{A_n B_n'};$$

retranchons membre à membre (N° 1) ces deux égalités géométriques et divisons par dt ; il vient:

$$m \frac{\overline{OR'} - \overline{OR}}{dt} = m_1 \frac{\overline{A_1 B_1'} - \overline{A_1 B_1}}{dt} + \dots + m_n \frac{\overline{A_n B_n'} - \overline{A_n B_n}}{dt}$$

d'où, en faisant tendre dt vers zéro, l'égalité (4).

C. q. f. d.

22. - Représentons par $\overline{\alpha_1 \beta_1}, \dots, \overline{\alpha_n \beta_n}$ les dérivées géométriques de $\overline{A_1 B_1}, \dots, \overline{A_n B_n}$ à l'instant t , par \overline{OP} la somme géométrique de ces nouveaux vecteurs; l'égalité (4) peut s'écrire:

$$m\overline{OP} = m_1\overline{\alpha_1 \beta_1} + \dots + m_n\overline{\alpha_n \beta_n},$$

et cette égalité, en vertu du théorème précédent, entraîne la conséquence:

$$m \frac{d.\overline{OP}}{dt} = m_1 \frac{d.\overline{\alpha_1 \beta_1}}{dt} + \dots + m_n \frac{d.\overline{\alpha_n \beta_n}}{dt},$$

c'est-à-dire

$$m \frac{d^2.\overline{OR}}{dt^2} = m_1 \frac{d^2.\overline{A_1 B_1}}{dt^2} + \dots + m_n \frac{d^2.\overline{A_n B_n}}{dt^2}$$

Il est évident que le résultat s'étend à une dérivation

d'ordre quelconque. On peut donc énoncer ce théorème :
L'égalité (3) peut être dérivée (géométriquement) par rapport à t , une fois, deux fois, trois fois, etc.

23. - Application à la quantité de mouvement d'un système.

Soit P un élément matériel de masse m , V sa vitesse; on appelle quantité de mouvement du point P le vecteur mV (construit avec P comme origine).

Considérons maintenant un système matériel quelconque formé de n éléments P_1, \dots, P_n de masse m_1, \dots, m_n , et soit G le centre d'inertie du système. On appelle quantité de mouvement totale (ou simplement quantité de mouvement) du système, la somme géométrique des quantités de mouvements des divers éléments P_1, \dots, P_n , construit avec le point G comme origine. A chaque instant t , la quantité de mouvement d'un système matériel est donc un vecteur parfaitement déterminé, une fois choisis les axes auxquels on rapporte le mouvement.

Théorème. - La quantité de mouvement d'un système matériel S est la même (à chaque instant) que si toute la masse du système était concentrée constamment au centre d'inertie G de S .

En effet, on a constamment, M désignant la masse totale du système [N° 16] :

$$(6) \quad M \cdot \overline{OG} = m_1 \overline{OP_1} + \dots + m_n \overline{OP_n} ,$$

et par suite [N° 21] :

$$M \cdot \frac{d \cdot \overline{OG}}{dt} = m_1 \frac{d \cdot \overline{OP_1}}{dt} + \dots + m_n \frac{d \cdot \overline{OP_n}}{dt} ,$$

ou encore, en remarquant $\frac{d \cdot \overline{OG}}{dt}$ ne diffère pas de la vitesse \overline{V} de G [N° 20] et que $\frac{d \cdot \overline{OP_k}}{dt}$ ne diffère pas de la vitesse \overline{v}_k de P_k

$$(7) \quad M \cdot \overline{V} = m_1 \overline{v}_1 + \dots + m_n \overline{v}_n ,$$

autrement dit, la somme géométrique des quantités de mouvement des éléments du système ne diffère pas de la quantité de mouvement d'un élément matériel de masse M qui coïnciderait constamment avec G et dont la vitesse serait, par suite, \overline{V} .

Théorème sur l'accélération du centre de gravité.
Soit $\bar{\Gamma}$ l'accélération de G , \bar{f}_K celle du point P_K (à l'instant t); en dérivant une seconde fois l'égalité géométrique (6), on trouve de même

$$(8) \quad M \bar{\Gamma} = m_1 \bar{f}_1 + \dots + m_n \bar{f}_n .$$

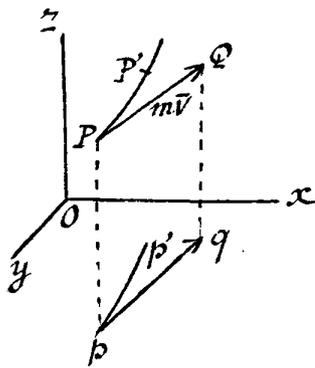
Or la force totale \bar{F}_K (relative aux axes $Oxyz$) qui s'exerce sur P_K est $m_K \bar{f}_K$; l'égalité précédente peut donc s'écrire:

$$M \bar{\Gamma} = \bar{F}_1 + \dots + \bar{F}_n$$

D'où ce théorème:

L'accélération du centre de gravité d'un système est la même, à chaque instant, que si, toute la masse du système étant concentrée en ce point, toutes les forces qui s'exercent sur le système lui étaient appliquées.

24. - Moment d'une quantité de mouvement (ou moment cinétique d'un point matériel) par rapport à un point ou une droite.



Soit $m\bar{V}$ ou $\overline{P'Q}$ la quantité de mouvement d'un point matériel P , de masse m ; le moment de ce vecteur par rapport à un point fixe O [ou par rapport à une droite fixe OZ] s'appellera, par définition, le moment cinétique de l'élément P par rapport au point O (ou à la droite OZ).

Supposons désormais que le trièdre des axes soit birectangle et positif: le vecteur PQ a pour composantes $m\bar{x}'$, $m\bar{y}'$, $m\bar{z}'$; par rapport au point O [supposé origine des axes] a pour projections sur ox , oy , oz :

$$m(yz' - zy'), \quad m(zx' - xz'), \quad m(xy' - yx').$$

Ces trois expressions représentent les moments de \overline{PQ} par rapport aux trois axes. Si p est la projection de P sur le plan xoy , le moment cinétique par rapport à O ou OZ du mobile p (supposée de masse m) coïncide avec le moment cinétique de P par rapport à OZ , et est égal à $m(xy' - yx')$.

En valeur absolue, le vecteur $(PQ, 0)$ est égal au produit de PQ par la distance OH de O à la droite PQ ; or soit P' la position de P à l'instant $t+dt$, le vecteur \vec{V} est la limite du vecteur $\frac{\overline{PP'}}{dt}$; OH est la limite de la distance OH' de O à la droite PP' . Si donc \mathcal{A} désigne l'aire conique balayée par le vecteur OP entre l'instant initial et l'instant t , on voit que le moment par rapport à O de la quantité de mouvement du point P est égal (en valeur absolue) à $2m \frac{d\mathcal{A}}{dt}$. La dérivée (essentiellement positive) $\frac{d\mathcal{A}}{dt}$ s'appelle vitesse aréolaire du rayon vecteur OP dans l'espace.

Appliquons cette définition au mouvement du mobile p (supposé de masse m), et désignons par r, θ ses coordonnées polaires. Soit \mathcal{A}_{xy} l'aire balayée par le rayon vecteur Op dans le plan xoy , cette aire étant comptée positivement dans le sens des θ croissants: d'après ce qui précède, $2m \frac{d\mathcal{A}_{xy}}{dt}$ est égal, au signe près, au moment cinétique de p par rapport à Oz ; or $d\mathcal{A}_{xy}$ est positif si θ croît avec t , c'est-à-dire si la vitesse de p est orientée positivement \mathcal{Q} par rapport à Oz . Cette dernière condition est également celle pour que le moment cinétique de p par rapport à Oz soit positif; on a donc en grandeur et signe:

$$2m \frac{d\mathcal{A}_{xy}}{dt} = m(xy' - yx').$$

Comme $d\mathcal{A}_{xy} = \frac{r^2 d\theta}{2}$, l'égalité précédente⁽¹⁾ entraîne:

$$(1) \quad r^2 d\theta = xdy - ydx.$$

Appelons vitesse aréolaire de P autour de la demi-droite Oz la dérivée (positive ou négative), $\frac{d\mathcal{A}_{xy}}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \theta'$.

Le moment cinétique de P par rapport à la demi-droite Oz est égal (en grandeur et signe) à $2mr^2\theta'$, c'est-à-dire au double du produit de la masse m de P par sa vitesse aréolaire autour de Oz .

(1) On peut démontrer la même égalité de la façon suivante:

Le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & y & 1 \\ x+dx & y+dy & 1 \end{vmatrix} = xdy - ydx$ représente le double de l'aire pop' précédée du signe + ou - suivant que l'angle $p\hat{O}p'$ est positif ou négatif. On a donc: $x dy - y dx = r^2 d\theta$, d'où l'égalité (1).

Remarque. - Si \vec{v} désigne la vitesse de p , le moment cinétique de p rapporté à O ou OZ est égal, en valeur absolue, à $m\vec{v}d$, d étant la distance du vecteur \vec{v} à l'origine; on a donc:

$$(2) \quad m(xy' - yx') = \epsilon m v d,$$

ϵ étant égal à $+1$ ou à -1 suivant que \vec{v} est dirigé (par rapport à la droite op) du côté des angles θ croissants ou décroissants.

25. Dérivée géométrique du moment de la quantité de mouvement

Soit \vec{v} la vitesse, \vec{y} l'accélération du point matériel P à l'instant t ; soit $m\vec{v}$ ou \vec{PQ} sa quantité de mouvement, et soit $\vec{F} = m\vec{y}$ ou \vec{PR} la force (relative aux axes choisis) qui s'exerce sur P . Le point O étant un point fixe arbitrairement choisi, construisons (à chaque instant t) le moment par rapport à O de la quantité de mouvement de P : soit $\vec{OK} = (PQ, O)$. Je dis que la dérivée géométrique $\frac{d\vec{OK}}{dt}$ est équipollente au moment par rapport au point O du vecteur \vec{F} .

En effet, soit P' la position P à l'instant $t+dt$, $m\vec{v}'$ ou $\vec{P'Q'}$ sa quantité de mouvement, $\vec{P'Q''}$ le vecteur équipollent à $\vec{P'Q'}$, construit avec P comme origine; soit enfin $\vec{OK}' = (P'Q', O)$. En vertu du théorème I du N° 3, on a:

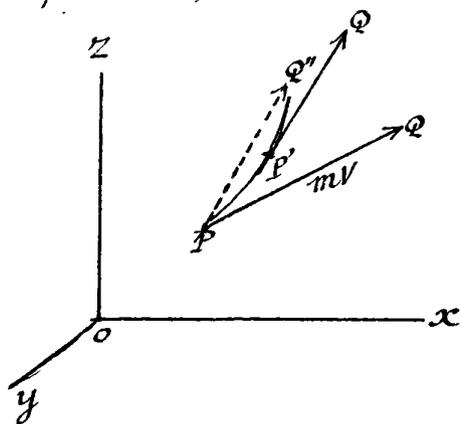
$$(P'Q', O) = (P'Q', P) + (PQ'', O),$$

et par suite:

$$(3) \quad \frac{\vec{OK}' - \vec{OK}}{dt} = \frac{(P'Q', P)}{dt} + \frac{(PQ'', O) - (PQ, O)}{dt}.$$

Or la longueur du vecteur $(P'Q', P)$ est égale à $P'Q' \times PH$, si PH est la perpendiculaire abaissée de P sur $P'Q'$; comme la droite $P'Q'$ est tangente en P à la trajectoire du point P , la distance PH est d'ordre infiniésimal, supérieur au premier par rapport à l'arc $PP' = vdt$, donc par rapport à dt . Par suite, le vecteur $\frac{(P'Q', P)}{dt}$ tend vers zéro avec dt .

D'autre part, le vecteur $(PQ'', O) - (PQ, O)$ est égal au moment (par rapport à O) de la différence géométrique



On a donc :
$$PQ'' - PQ = m\bar{v}' - m\bar{v} = m(\bar{v}' - \bar{v}) = m\bar{y}dt = \overline{PR} dt^{(1)}$$

$$\frac{(PQ'', 0) - (PQ, 0)}{dt} = \frac{(\overline{PR} dt, 0)}{dt} = (PR, 0).$$

Si on fait tendre dt vers zéro, l'égalité (3) donne en définitive : ⁽²⁾

$$(4) \quad \frac{d\overline{OK}}{dt} = (PR, 0).$$

C. q. f. d.

26. - L'égalité géométrique (4) se traduit par les trois égalités :

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} m(yz' - zy') = m(yZ - zY) \\ \frac{d}{dt} m(zx' - xz') = m(zX - xZ) \\ \frac{d}{dt} m(xy' - yx') = m(xY - yX), \end{cases}$$

X, Y, Z désignant les composantes de $F = m\bar{y} = \overline{PR}$.

La première de ces égalités exprime que le moment de la quantité de mouvement par rapport à une demi-droite fixe quelconque, soit ox , a comme dérivée par rapport au temps le moment par rapport à ox du vecteur $F = m\bar{y} = \overline{PR}$.

Inversement les trois égalités (5) entraînent l'égalité géométrique (4). Or ces égalités (5) se vérifient immédiatement on a par exemple :

$$\frac{d}{dt} m(yz' - zy') = m[yz'' + y'z' - zy'' - z'y'] = m(yz'' - zy'') = m(yZ - zY).$$

Cette vérification fournit une démonstration analytique du théorème du N° 25.

27. - Moment résultant des quantités de mouvement (ou moment cinétique) d'un système matériel, par rapport à un point ou une droite.

(1) En négligeant les grandeurs d'ordre supérieur à l'unité par rapport à dt .

(2) Si on fait $m=1$, le théorème prend une forme purement cinématique et exprime que la dérivée géométrique $\frac{d\overline{OK}}{dt}$ du moment \overline{OK} de la vitesse \bar{v} par rapport au point fixe O est équipollente au moment de \bar{y} par rapport à O .

Considérons un système matériel S formé de n éléments P_1, \dots, P_n , de masse m_1, \dots, m_n . Le moment résultant des quantités de mouvement de S par rapport à un point O est la somme géométrique, soit \overline{OK} , des moments (par rapport à O) des quantités de mouvement des divers éléments du système. soit $\overline{OK}_1, \dots, \overline{OK}_n$ ces divers moments. Nous appellerons ce vecteur $\overline{OK} = \overline{OK}_1 + \dots + \overline{OK}_n$ le moment cinétique du système S par rapport au point O . Le moment cinétique de S par rapport à une droite se définit d'une façon analogue.

Si O est l'origine des axes fixes $Oxyz$ (trirectangles et positifs), les projections de \overline{OK} sur les axes Ox, Oy, Oz sont

$$\sum m_k (y_k z'_k - z_k y'_k), \quad \sum m_k (z_k x'_k - x_k z'_k), \quad \sum m_k (x_k y'_k - y_k x'_k).$$

Ces trois expressions représentent respectivement le moment résultant des quantités de mouvement (ou moment cinétique) du système par rapport aux demi-droites Ox, Oy, Oz .

Si r_k et θ_k sont les coordonnées polaires du point p , projection de P_k sur le plan xoy , [O étant le pôle, Ox l'axe polaire, et θ étant compté positivement dans le sens xoy], le moment cinétique de S par rapport à Oz peut recevoir la forme :

$$\sum m_k (x_k y'_k - y_k x'_k) = \sum m_k r_k^2 \theta'_k.$$

Considérons l'aire A_{xy} balayée par Op et comptée positivement dans le sens des θ croissants, et appelons aire balayée par le système autour de la demi-droite Oz l'expression $\mathcal{A}_{xy} = \frac{\sum m_k \mathcal{A}_{xy}}{M}$; appelons vitesse angulaire du système autour de Oz la dérivée (positive ou négative) $\frac{d\mathcal{A}_{xy}}{dt} = \frac{\sum m r^2 \theta'}{2M}$.
Le moment cinétique du système par rapport à Oz est égal à $2M \frac{d\mathcal{A}_{xy}}{dt}$.

28. - Théorème. - Soit O un point fixe quelconque, et soit (à un instant t quelconque), \overline{OK} le moment cinétique, par rapport à O , du système matériel S . Sa dérivée géométrique $\frac{d\overline{OK}}{dt}$ est équipollente au moment résultant, par rapport à O , des forces qui s'exercent sur le système (à l'instant t).

(1) M désigne $\sum m$.

En effet, soit $\vec{F}_K = m_K \vec{y}_K = P_K R_K$ la force qui s'exerce sur P_K .
On a (N° 25):

$$\frac{d.\overline{OK}_1}{dt} = (P_1 R_1, 0), \dots \quad \frac{d.\overline{OK}_n}{dt} = (P_n R_n, 0),$$

d'autre part, l'égalité:

$$\overline{OK} = \overline{OK}_1 + \dots + \overline{OK}_n$$

entraîne:

$$\frac{d.\overline{OK}}{dt} = \frac{d.\overline{OK}_1}{dt} + \dots + \frac{d.\overline{OK}_n}{dt},$$

d'où:

$$(6) \quad \frac{d.\overline{OK}}{dt} = (P_1 R_1, 0) + \dots + (P_n R_n, 0) \quad \text{C. q. f. d.}$$

29. - Cette égalité géométrique se traduit par trois égalités algébriques:

$$(7) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} \sum m_K (y_K z'_K - z_K y'_K) = \sum m_K (y_K Z_K - z_K Y_K), \\ \frac{d}{dt} \sum m_K (z_K x'_K - x_K z'_K) = \sum m_K (z_K X_K - x_K Z_K), \\ \frac{d}{dt} \sum m_K (x_K y'_K - y_K x'_K) = \sum m_K (x_K Y_K - y_K X_K), \end{cases}$$

où X_K, Y_K, Z_K désignent les composantes de la force $\vec{F}_K = m_K \vec{y}_K = P_K R_K$.

La première égalité (7) signifie que le moment cinétique du système par rapport à une demi-droite fixe quelconque, soit Ox , a comme dérivée (par rapport au temps) la somme (algébrique) des moments des forces \vec{F}_K — par rapport à Ox .

Ces égalités (7) se déduisent aussitôt (par addition) des égalités (5) écrites pour chaque élément P_K de S . D'où une démonstration analytique du théorème du N° 28.

Quelques cas particuliers du mouvement d'un point matériel.

30. - Théorème I. - Quand l'accélération d'un mobile P reste constamment perpendiculaire à une droite fixe, soit Ox , la projection du point P sur Ox a une vitesse constante.

En effet, on a $x'' = 0$, d'où $\frac{d}{dt} x' = 0$, d'où $x' = C^te$.

Théorème II. - Quand l'accélération d'un mobile P est constamment perpendiculaire à un plan fixe, soit xoy , la projection du point P sur le plan xoy décrit une droite avec une vitesse constante. La trajectoire de P, est par suite, dans un plan parallèle à Oz .

Si, de plus à un instant t_0 , la vitesse de P est parallèle à Oz , le point P décrit un parallèle à Oz .

En effet, on a (en vertu du théorème I), $x' = a$, $y' = b$, d'où :

$$x = at + c, \quad y = bt + d, \quad (a, b, c, d \text{ Ctes}).$$

Si de plus, à un instant t_0 , x' et y' sont nuls, a et b sont nuls, et on a : $x = c$, $y = d$.

Soit $\vec{F} = m\vec{j}$ la force (relative aux axes $Oxyz$) qui s'exerce sur P. Les théorèmes précédents peuvent s'énoncer :

Si la force \vec{F} qui s'exerce sur P est constamment perpendiculaire à une droite fixe, la projection de P sur cette droite est animée d'un mouvement uniforme.

Si la force \vec{F} qui s'exerce sur P est constamment perpendiculaire à un plan fixe, la projection de P sur le plan est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme.

31 - Théorème III. - Quand l'accélération \vec{j} d'un mobile P [ou la force \vec{F} qui s'exerce sur P] est constamment dans un même plan avec une droite fixe, soit Oz , la vitesse aréolaire de P autour de la demi-droite Oz est constante.

En effet, le moment du vecteur $m\vec{j} = \vec{PR}$ par rapport à Oz étant constamment nul, le moment du vecteur $m\vec{v} = \vec{PQ}$ par rapport à Oz est constant, (puisque sa dérivée par rapport à t est identiquement nulle), et on a :

$$(8) \quad m \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) = Cte$$

ou encore

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = Cte.$$

Réciproquement si la vitesse aréolaire du rayon vecteur Op de la projection p d'un mobile P sur un plan fixe, soit xoy , est constante, l'accélération de P est constamment dans un même plan avec Oz (ou nulle). En effet, l'équation (8) dérivée entraîne : $xy'' - yx'' = 0$ ou $\frac{x''}{x} = \frac{y''}{y}$.

32 - Théorème IV. - Quand l'accélération \vec{j} d'un mobile P [ou la force \vec{F} qui s'exerce sur P] passe constamment par un point fixe O , la trajectoire est dans un plan qui contient le point O . De plus, les aires balayées par le rayon vecteur OP sont proportionnelles aux temps employés à les parcourir. Enfin, si, à un instant t_0 , la vitesse de P est nulle ou passe par O , le point P décrit une droite passant par O .

Construisons, en effet, le vecteur $\vec{OK} = (\vec{FQ}, O)$, moment du vecteur $m\vec{v} = \vec{PQ}$ par rapport à O . La dérivée géométrique $\frac{d\vec{OK}}{dt}$ est constamment nulle [N° 25], puisque le vecteur $m\vec{y} = \vec{PK}$, qui passe constamment par O , a un moment nul par rapport à O . Autrement dit, la vitesse du point K est constamment nulle, K est fixe. Or le vecteur \vec{PQ} est constamment dans le plan π perpendiculaire en O au vecteur (invariable) OK ; le point P se meut donc dans ce plan fixe π . Si on prend ce plan comme plan des xy , on peut appliquer l'égalité du théorème précédent $1^\circ \theta' = C$, ce qui montre que l'aire AO balayée par le vecteur OP entre l'instant $t=0$ et l'instant t est égale⁽¹⁾ à $\frac{C}{2}t$.

Le raisonnement n'est en défaut que si le vecteur invariable \vec{OK} est nul. C'est qu'alors la vitesse \vec{v} de P passe constamment par O (ou est nulle). La trajectoire du point P est nécessairement⁽²⁾ une droite passant par O .

Réciproque du théorème précédent.

Quand un mobile P décrit une courbe plane de telle façon que, O désignant un certain point du plan π de la trajectoire, la vitesse aréolaire du rayon vecteur OP soit constante, on dit que le mouvement vérifie la loi des aires par rapport au point O .

Soit alors $\frac{C}{2}$ la vitesse aréolaire [prise en valeur absolue]: portons sur la perpendiculaire en O au plan π le segment OK égal à C , dans un sens tel que le rayon OP tourné de gauche à droite pour un observateur placé les pieds en O , la tête en K : ce vecteur invariable \vec{OK} est le moment, par rapport à O , de la vitesse \vec{v} de P , et puisque la dérivée géométrique $\frac{d\vec{OK}}{dt}$ est nulle, c'est que le moment par rapport à O , du vecteur \vec{y} est nul, autrement dit que \vec{y} passe constamment par O (ou est nul).

D'où ce théorème, réciproque du précédent :

(1) La valeur absolue de C est égale à $\frac{OK}{m}$.

(2) En effet, on a: $-\frac{z'}{z} = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z''}{z}$; d'où $y = Cx$, $z = C_1x$.

Quand un point P décrit une courbe plane en vérifiant la loi des aires par un certain point fixe O du plan de la trajectoire, l'accélération du mobile passe constamment par O (ou est nulle).

33 - Démonstration analytique du théorème IV.

Le théorème IV peut se démontrer analytiquement ainsi :

L'accélération rencontrant constamment chacun des trois axes, on a [N.º 26] :

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = C$$

et les deux égalités analogues qui s'en déduisent par permutation :

$$y \frac{dz}{dt} - z \frac{dy}{dt} = C_1$$

$$z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} = C_2$$

Or multiplions la première des 3 équations précédentes par z , la seconde par x , la troisième par y , et ajoutons membre à membre : les termes se détruisent deux à deux dans le premier membre, et il vient :

$$0 = Cz + C_1x + C_2y.$$

La trajectoire est donc dans un plan qui passe par l'origine. C. q. f. d.

Le raisonnement n'est en défaut que si $C = C_1 = C_2 = 0$. Dans ce cas, on a :

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} ;$$

Chapitre III.

Les forces extérieures et les forces intérieures d'un système.

34. Définitions. — Soit S un système matériel formé des éléments P_1, P_2, \dots ; étudions d'abord son mouvement \mathcal{D} absolu. La force absolue \vec{F} qui s'exerce sur l'élément P (de masse m) est la résultante : 1° de la force exercée sur P par les corps extérieurs au système [force extérieure]; 2° des forces exercées sur P par les autres éléments du système [forces intérieures].

Soit \vec{F}_{jk} la force exercée par P_k sur P_j ; les deux forces \vec{F}_{jk} et \vec{F}_{kj} sont égales et directement opposées. L'ensemble de toutes les forces intérieures du système constitue donc un ensemble de vecteurs deux à deux égaux et directement opposés; par suite équivalent à un système de vecteurs nuls. La somme géométrique des forces intérieures et leur moment résultant par rapport à un point ou à une droite sont donc nuls.

Supposons maintenant que le trièdre de référence $Oxyz$ soit quelconque. Appelons encore forces intérieures les forces intérieures absolues, et convenons, une fois pour toutes, d'appeler force extérieure (totale) appliquée à P la force relative aux axes $Oxyz$ qu'exercent sur P les corps extérieurs au système; soit \vec{F}^e cette force extérieure, \vec{F}^i la résultante des forces intérieures qui s'exercent sur P , \vec{F} la force totale [relative aux axes $Oxyz$] qui s'exerce sur P , enfin $\vec{\gamma}$ l'accélération de P [par rapport aux mêmes axes] on a :

$$(1) \quad m\vec{\gamma} = \vec{F} = \vec{F}^e + \vec{F}^i.$$

Toutes les hypothèses faites sur les forces intérieures sont vraies quels que soient les axes, puisque ces forces sont des forces absolues ⁽¹⁾

(1) L'ensemble des vecteurs \vec{F}_i est équivalent à l'ensemble des vecteurs \vec{F}_{jk} , donc équivalent à un système de vecteurs nuls.

Au contraire, la force extérieure totale qui s'exerce à l'instant t sur chaque élément P du système dépend des axes choisis. Par exemple, au trièdre $Oxyz$ substituons le trièdre de référence $O_1\xi\eta\zeta$ animé par rapport au premier d'un mouvement de translation donné: soit $\bar{\Phi}^e$ la nouvelle force extérieure qui s'exerce à l'instant t sur l'élément P ; $\bar{\Phi}^e$ est donnée par l'égalité:
$$\bar{\Phi}^e = \bar{F}^e - m\bar{A}$$

\bar{A} désignant l'accélération du point O_1 par rapport aux axes $Oxyz$ (à l'instant).

35. - Quand la force extérieure \bar{F}^e qui s'exerce sur un élément P du système est décomposée en plusieurs autres, nous sous-entendons que toutes ces composantes sont des forces absolues, sauf une seule qui est relative aux axes choisis. En un mot, il est convenu, une fois pour toutes, que toutes les forces qui s'exercent sur le système sont des forces absolues, sauf (pour chaque élément du système) une force extérieu re et une seule [qui est relative aux axes choisis].

Par exemple, si les axes choisis $Oxyz$ sont invariablement liés à l'écorce terrestre, et si le système est voisin du $s l$, chaque élément du système est soumis à la pesanteur $m\bar{g}$ [force relative à $Oxyz$] qui est une force extérieure. Toutes les autres forces [intérieures ou extérieures] appliquées aux éléments du système seront des forces absolues.

Substituons aux axes terrestres $Oxyz$ de nouveaux axes $O_1\xi\eta\zeta$ animés par rapport aux premiers d'un mouvement de translation rectiligne et uniformément accéléré [donc l'accélération est \bar{a}]: comment obtiendra-t-on les forces relatives aux nouveaux axes? On remplacera, pour chaque élément P (de masse m) du système, le poids $m\bar{g}$ par la nouvelle force extérieure relative $m\bar{g} - m\bar{a}$; on ne changera rien aux autres forces (extérieures ou intérieures) qui sont des forces absolues.

36. - Les six conditions nécessaires d'équilibre d'un système quelconque.

Quels que soient les axes $Oxyz$, nous avons [N° 34] pour les différents éléments de S :

$$(1) \quad m\bar{y} = \bar{F} = \bar{F}^e + \bar{F}^i.$$

Si le système est en équilibre par rapport aux axes choisis, γ est nul, et pour chaque élément P de S , on a :

$$\bar{F}^e = -\bar{F}^i.$$

Mais l'ensemble des vecteurs \bar{F}^i est équivalent à un système de vecteurs nuls; il en est donc de même de l'ensemble des vecteurs \bar{F}^e . D'où ce théorème :

Quand un système est en équilibre [par rapport aux axes choisis $Oxyz$], la somme géométrique des forces extérieures appliquées au système et leur moment résultant par rapport à un point quelconque, sont nuls.

Ce théorème se traduit par six égalités distinctes qui peuvent s'écrire, en appelant X^e, Y^e, Z^e les composantes de \bar{F}^e , (x, y, z) les coordonnées de P , et en prenant les moments par rapport au point O , origine des axes :

$$(2) \quad \Sigma X^e = 0 \quad \Sigma Y^e = 0 \quad \Sigma Z^e = 0$$

$$(3) \quad \Sigma (yZ^e - zY^e) = 0, \quad \Sigma (zX^e - xZ^e) = 0, \quad \Sigma (xY^e - yX^e) = 0.$$

Nous appellerons ces six égalités les six conditions nécessaires d'équilibre d'un système quelconque, ou conditions universelles d'équilibre.

Remarque. - Quand un système S est en équilibre, les conditions précédentes sont remplies par toute partie S' du système, si petite qu'elle soit, à condition bien entendu de ranger parmi les corps extérieurs les autres parties S'' de S ; il faut donc compter parmi les forces extérieures les forces exercées par S' sur les éléments de S .

37. Équivalence des deux systèmes de vecteurs \bar{F} et \bar{F}^e .

Revenons au cas général où le système n'est pas en équilibre, et partons encore de l'égalité (1). En vertu de cette égalité, si je considère d'une part l'ensemble des vecteurs \bar{F} , d'autre part l'ensemble des vecteurs \bar{F}^e et \bar{F}^i , ces deux ensembles sont équivalents; mais l'ensemble des vecteurs \bar{F}^i est équivalent à un système de vecteurs nuls. D'où ce théorème :

Les axes $Oxyz$ étant quelconques, si, pour chaque élément P d'un système matériel S , on considère la force

totale \vec{F} et la force extérieure F^e [relatives aux axes $Oxyz$] qui s'exercent sur P , l'ensemble de tous les vecteurs \vec{F} et l'ensemble de tous les vecteurs F^e sont équivalents.

Si on veut encore : à chaque instant t ,

1° la somme géométrique des forces totales \vec{F} appliquées aux éléments d'un système est équipollente à la somme géométrique des forces extérieures appliquées au système ; 2° le moment par rapport à un point O des forces totales \vec{F} appliquées aux éléments d'un système coïncide avec le moment (par rapport au même point O) des forces extérieures appliquées au système.

38. Force d'inertie. — L'élément P de S [de masse m] ayant à l'instant t , l'accélération \vec{y} , construisons le vecteur $-m\vec{y}$ qui a P comme origine. Ce vecteur $P\vec{I}$ est appelé, d'après d'Alembert, force d'inertie. Il est égal et directement opposé à la force totale $\vec{F} = m\vec{y}$ [relative aux axes choisis] qui s'exerce sur P au même instant.

Supposons construites (à l'instant t), pour les différents éléments P de S , ces forces d'inertie $P\vec{I}$. Le théorème du c 8° précédent exprime que l'ensemble de tous les vecteurs $P\vec{I}$ et F^e équivaut à un système de vecteurs nuls, ou encore, si on veut, qu'à chaque instant les forces d'inertie et les forces extérieures satisfont aux six conditions nécessaires d'équilibre d'un système quelconque.

39. Vérification analytique. — Écrivons les 6 équations qui traduisent le théorème précédent. Les composantes de $P\vec{I}$ sont $-mx''$, $-my''$, $-mz''$. Il vient donc

$$(4) \quad \sum X^e - \sum mx'' = 0, \quad \sum Y^e - \sum my'' = 0, \quad \sum Z^e - \sum mz'' = 0$$

$$\sum (yZ^e - zY^e) - \sum m (yz'' - zy'') = 0$$

$$(5) \quad \sum (zX^e - xZ^e) - \sum m (zx'' - xz'') = 0$$

$$\sum (xY^e - yX^e) - \sum m (xy'' - yx'') = 0,$$

les sommes \sum étant étendues à tous les éléments du système et à toutes les forces extérieures.

Ces égalités pourraient se déduire aussitôt des équations du mouvement :

(6) $mx'' = X = X^e + X^i$, $my'' = Y = Y^e + Y^i$, $mz'' = Z = Z^e + Z^i$
en tenant compte des six conditions que vérifient les forces intérieures :

$$(7) \begin{cases} \sum X^i = 0, & \sum Y^i = 0, & \sum Z^i = 0 \\ \sum (yZ^i - zY^i) = 0, & \sum (zX^i - xZ^i) = 0, & \sum (xY^i - yX^i) = 0. \end{cases}$$

En effet, écrivons la première équation (6) pour chaque élément du système et ajoutons membre à membre; il vient :

$$\sum mx'' = \sum X^e + \sum X^i = \sum X.$$

D'autre part, multiplions la première équation (6) par $-y$, la seconde par x , et ajoutons, il vient :

$m(xy'' - yx'') = xY^e - yX^e + xY^i - yX^i$;
écrivons cette égalité pour tous les éléments du système et ajoutons membre à membre; il vient :

$$\sum m(xy'' - yx'') = \sum (xY^e - yX^e) + \sum (xY^i - yX^i) = \sum (xY^e - yX^e).$$

Quels que soient les axes choisis, quel que soit le système matériel considéré, qu'il soit au repos ou en mouvement, les six égalités (4) et (5), indépendantes des forces intérieures, sont vérifiées. Nous appellerons pour abréger ces six équations, les six équations universelles du mouvement d'un système. Si dans un système matériel quelconque S , on considère à part une partie s , de dimensions aussi petites qu'on veut, les six équations fondamentales sont vraies pour le système s , à condition de compter parmi les forces extérieures les forces exercées sur s par les autres parties de S .

Nous allons donner maintenant une interprétation remarquable des équations (4) d'une part, des équations (5) d'autre part.

Théorème du mouvement du centre de gravité (ou d'inertie).

H0. Interprétation des équations (4). - Les équations (4) peuvent s'écrire :

$$(4^{bis}) \quad \frac{d}{dt} \sum mx' = \sum X^e, \quad \frac{d}{dt} \sum my' = \sum Y^e, \quad \frac{d}{dt} \sum mz' = \sum Z^e.$$

Les quantités $\sum mx'$, $\sum my'$, $\sum mz'$ ne sont autres que les composantes de la quantité de mouvement du système [N:23]. Les égalités (4) traduisent donc ce théorème :

La dérivée géométrique (par rapport au temps) de la quantité de mouvement de S est équivalente à chaque instant t à la somme géométrique de toutes les forces extérieures.

Ce théorème entraîne aussitôt ce corollaire :

La dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement du système projetée sur une droite fixe est égale à la somme des projections (sur cet axe) des forces extérieures⁽¹⁾.

D'autre part, soit M la masse totale du système, (ξ, η, ζ) les coordonnées de son centre d'inertie à un instant quelconque t , nous savons qu'on a :

$$\begin{aligned} M\xi &= \sum mx, & M\eta &= \sum my, & M\zeta &= \sum mz, \\ \text{d'où : } M\xi' &= \sum mx', & M\eta' &= \sum my', & M\zeta' &= \sum mz', \\ M\xi'' &= \sum mx'', & M\eta'' &= \sum my'', & M\zeta'' &= \sum mz''. \end{aligned}$$

Les équations (4^{bis}) peuvent donc s'écrire :

$$(4^{ter}) \quad M\xi'' = \sum X^e, \quad M\eta'' = \sum Y^e, \quad M\zeta'' = \sum Z^e.$$

À chaque instant t , pendant le mouvement du système, la somme géométrique des forces extérieures appliquées au système est un certain vecteur bien déterminé Φ , dont les composantes sont $\Phi_x(t)$, $\Phi_y(t)$, $\Phi_z(t)$.

Le mouvement du point G satisfait aux équations différentielles :

$$(8) \quad M\xi'' = \Phi_x(t), \quad M\eta'' = \Phi_y(t), \quad M\zeta'' = \Phi_z(t),$$

⁽¹⁾ La première équation (4^{bis}) traduit ce corollaire pour la droite fixe ox .

équations qui définissent ξ, η, ζ en fonction de t , si on connaît, pour $t = t_0$, (ξ_0, η_0, ζ_0) et $(\xi'_0, \eta'_0, \zeta'_0)$. Imaginons un élément matériel G' de masse M qui ait (à l'instant initial t_0) même position G_0 et même vitesse \vec{V}_0 que G , et qui soit soumis (à chaque instant t) à la force $\Phi(t)$. Ce point G' , dont le mouvement vérifie les équations (8) et qui satisfait aux mêmes conditions initiales que G , coïnciderait constamment avec G . On peut donc énoncer ce théorème :

Le mouvement du centre d'inertie d'un système est le même que celui d'un point qui aurait comme masse la masse du système et auquel toutes les forces extérieures seraient appliquées à chaque instant.

41. - Démonstration géométrique. - Le théorème du mouvement du centre d'inertie pourrait être établi géométriquement, d'une façon très simple, en portant des résultats du N° 23. Nous avons vu en effet : 1° que la quantité de mouvement du système coïncide avec la quantité de mouvement $M \cdot \vec{V}$ qu'aurait (à chaque instant) un point de masse M , qui coïnciderait constamment avec G ; 2° que la dérivée géométrique $\frac{d}{dt} M \cdot \vec{V}$, à savoir le vecteur $M \cdot \vec{\Gamma}$, [$\vec{\Gamma}$ désignant l'accélération du point G], était équipollente à la somme géométrique $\Sigma \vec{F}$.

Or on a :

$$\Sigma \vec{F} = \Sigma \vec{F}^e + \Sigma \vec{F}^i = \Sigma \vec{F}^e$$

d'où :

$$(9) \quad M \vec{\Gamma} = \Sigma \vec{F}^e,$$

ou encore

$$(9^{bis}) \quad \frac{d}{dt} M \vec{V} = \frac{d}{dt} \Sigma m \vec{v} = \Sigma \vec{F}^e,$$

égalité géométrique qui équivaut au théorème du N° précédent et qui traduit, sous la forme (9) les équations (4ter), et sous la forme (9^{bis}) les équations (4bis).

42. - Applications du théorème du mouvement du centre d'inertie.

Indiquons immédiatement quelques applications très simples du théorème.

1° Étudions le mouvement absolu d'un système matériel S

lancé dans le vide et infiniment éloigné de tous les autres. Ses forces extérieures [forces absolues exercées par des corps infiniment éloignés] sont toutes nulles; ⁽¹⁾ leur somme géométrique est donc constamment nulle. L'accélération absolue du centre de gravité G du système est constamment nulle: le mouvement absolu du point G est donc rectiligne et uniforme.

Ceci s'applique notamment au système solaire, aux systèmes formés d'étoiles doubles ou triples, aux étoiles isolées, etc.

_____ Lorsque le système est formé d'un seul corps qu'on peut regarder comme sensiblement solide, le centre d'inertie de S est un point déterminé dans ce solide, et le mouvement absolu de ce point est rectiligne et uniforme: si, à un certain instant, le corps éclate, le centre de gravité des éclats [c'est-à-dire du système formé par tous les produits de l'explosion] poursuit la même trajectoire rectiligne avec la même vitesse.

2°. Étudions le mouvement, dans le vide, par rapport à la terre, d'un système quelconque voisin du sol ⁽²⁾.

La force extérieure totale \vec{F}^e [relative aux axes terrestres] qui s'exerce sur un élément P du système, se réduit à son poids $m\vec{g}$. Le centre de gravité G du système se meut comme un point de masse M , soumis à chaque instant à la force $\sum m\vec{g} = M\vec{g}$, c'est-à-dire comme un point pesant dans le vide. Il décrit donc (par rapport à la terre) une parabole d'axe vertical, et sa projection sur un plan horizontal a un mouvement rectiligne et uniforme. Quand le système est sensiblement solide, le centre de gravité est un point fixe G dans le solide: si, à un instant t , le corps éclate, le centre de gravité des éclats poursuit la même parabole, d'après la même loi.

(1) Si on étudiait le mouvement du même système S par rapport à des axes O, x, y, z , animés eux-mêmes d'un mouvement absolu quelconque, la force extérieure (force relative aux axes O, x, y, z) qui s'exercerait sur un élément P du système ne serait plus nulle (en général).

(2) Il est sous-entendu que les dimensions et que les déplacements du système matériel considéré S sont extrêmement petits comparés au rayon de la terre, de sorte que \vec{g} peut être regardé comme constant en grandeur direction et sens pour les divers éléments de S , dans leurs diverses positions.

3° Les axes choisis $Oxyz$ étant quelconques, quand toutes les forces extérieures sont perpendiculaires à un plan fixe Π , la projection sur ce plan du centre d'inertie G du système est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme. Si notamment la vitesse initiale de G est perpendiculaire au plan Π , le point G décrit une droite perpendiculaire à Π .

En particulier les axes $Oxyz$ étant liés à l'écorce terrestre, imaginons un système [un animal par exemple] qui glisse sur un plan horizontal Π parfaitement lisse⁽¹⁾. La projection (sur le plan Π) du centre de gravité G du système décrira une droite d'un mouvement uniforme; en particulier, si la vitesse initiale de G est nulle ou verticale, le point G ne pourra que se mouvoir verticalement quels que soient les efforts de l'animal. La marche (en partant du repos) sur un plan horizontal parfaitement lisse, serait impossible.

Considérons encore un système formé d'un canon et d'un projectile, le canon reposant sur un plan horizontal parfaitement lisse, et supposons qu'au moment du tir le système soit immobile, l'âme du canon horizontale. Soit m la masse du projectile, \vec{v} la vitesse (horizontale) de son centre de gravité après l'explosion, M la masse du canon⁽²⁾, \vec{V} la vitesse de son centre de gravité, [vitesse qui est horizontale]. Pendant l'explosion, les seules forces extérieures [pesanteur et réactions du sol] sont verticales; le centre de gravité du système étant immobile au début, sa vitesse horizontale reste nulle, et on a: $m\vec{v} + M\vec{V} = 0$; autrement dit, la vitesse de recul du canon est directement opposée à la vitesse de sortie \vec{v} du projectile, et égale en valeur absolue à $\frac{m}{M}\vec{v}$.

4° Les axes $Oxyz$ étant quelconques, soit S un système dont un élément quelconque P de masse m est soumis à une force extérieure totale $\vec{F}^e = m\vec{f}$, \vec{f} désignant un vecteur qui peut varier avec l'instant considéré mais qui est le même (à chaque instant) pour tous les éléments de S :

(1) On entend par là que les réactions de Π sur le système [forces absolues exercées par le plan Π sur les éléments du système en contact avec lui] sont normales au plan.

(2) Nous négligeons la masse de la charge de poudre devant les masses du projectile et du canon. Nous négligeons aussi la résistance de l'air sur le projectile et le canon.

Le mouvement de S par rapport aux axes Gx, y, z , parallèles aux axes choisis [G centre d'inertie de S] est le même que si les axes Gx, y, z étaient des axes absolus et que si le système S était infiniment éloigné de tous les autres corps matériels.

En effet, on a, pour chaque élément P de S :

$$m\bar{y} = \bar{F} = \bar{F}^e + \bar{F}^i = m\bar{f} + \bar{F}^i.$$

D'autre part, l'accélération $\bar{\Gamma}$ de G est donnée par :

$$M\bar{\Gamma} = \sum m\bar{f} = M\bar{f}$$

ou

$$\bar{\Gamma} = \bar{f}.$$

Les axes Gx, y, z , sont animés par rapport aux premiers d'un mouvement de translation dont l'accélération (à chaque instant t) est $\bar{\Gamma} = \bar{f}$. Si \bar{y} est l'accélération de P par rapport à Gx, y, z , on a :

$$m\bar{y} = m\bar{y} - m\bar{\Gamma} = m\bar{y} - m\bar{f} = \bar{F}^i$$

égalité géométrique qui équivaut aux trois équations algébriques :

$$m\bar{x}^i = X^i, \quad m\bar{y}^i = Y^i, \quad m\bar{z}^i = Z^i.$$

Or ces dernières équations, écrites pour les divers éléments du système, ne sont autres que les équations que vérifierait le mouvement de S, si les axes Gx, y, z , étaient absolument fixes, et S un système infiniment éloigné de tous les autres corps.

Les axes choisis $Oxyz$ étant quelconques, on appelle souvent mouvement du système autour de son centre de gravité le mouvement du système par rapport aux axes Gx, y, z , parallèles aux axes choisis⁽¹⁾. Cette terminologie admise, on peut traduire le théorème précédent ainsi :

Quand les forces extérieures répondent à la condition énoncée, le mouvement du système autour de son centre de gravité est le même que si les axes Gx, y, z , étaient absolus et S isolé ; - ou encore, la force totale relative aux axes Gx, y, z , qui s'exerce sur un élément du système est la

⁽¹⁾ Il convient de remarquer que si on substitue aux axes choisis $Oxyz$ d'autres axes $W\xi\eta\zeta$ dont la direction varie par rapport aux premiers, le mouvement du système autour de son centre d'inertie ne reste pas le même.

résultante des seules forces intérieures.

Ce théorème s'applique en particulier à un système pesant tombant dans le vide et dont on rapporte le mouvement à des axes Gx, y, z , ayant des directions fixes par rapport à l'écorce terrestre.

5° Considérons deux sphères solides S et S' , homogènes (ou formées de couches concentriques homogènes) dont les éléments s'attirent suivant les lois de Newton. On sait que la somme géométrique des attractions exercées par S' sur S est la même que si les masses respectives m et m' des deux sphères étaient concentrées en leurs centres C et C' .

Si donc on étudie le mouvement absolu des deux sphères infiniment éloignées des autres corps, on voit que le mouvement des centres C et C' satisfait aux mêmes équations que si les deux sphères étaient réduites à ces deux points (en gardant leurs masses).

La même conclusion subsiste évidemment si, au lieu de deux sphères, on considère n sphères solides homogènes (ou formées de couches concentriques homogènes). Le mouvement absolu des centres est le même que si les sphères, gardant leurs masses, étaient réduites à leurs centres respectifs. Il n'est même pas indispensable de supposer les sphères solides; il suffit d'admettre qu'elles restent formées de couches concentriques homogènes.

En particulier, on peut admettre que cette condition est remplie sensiblement pour le soleil et les planètes du système solaire⁽¹⁾. Quand on étudie le mouvement absolu des centres de ces astres, il est donc loisible de supposer chacun de ces astres réduit à son centre, mais gardant sa masse.

43 - Mouvement absolu de deux éléments matériels.

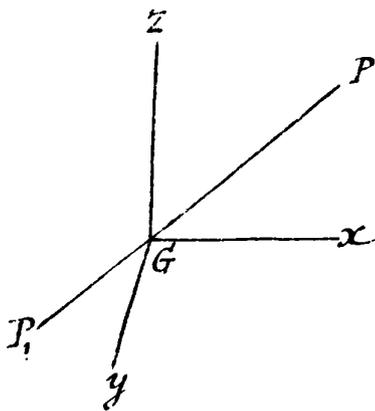
Comme dernière application, étudions le mouvement absolu de deux éléments matériels isolés P et P_1 .

La force \vec{F} que P_1 exerce sur P et la force \vec{F}_1 que P exerce sur P_1 sont égales et directement opposées: les deux forces sont attractives ou répulsives suivant que \vec{F} a le sens PP_1 ou

(1) C'est du moins une approximation, qui n'entraîne qu'une erreur extrêmement faible.

le sens contraire. Convenons d'appeler F leur valeur absolue commune, précédée du signe $-$ ou $+$ suivant que les deux forces sont attractives ou répulsives.

Le centre d'inertie G des deux éléments [point situé sur le vecteur SP , en une position telle que $m \cdot GP = m_1 \cdot GP_1$] décrit une droite d'un mouvement uniforme; les axes



$Gxyz$ de directions absolument fixes sont des axes absolus. La force absolue \vec{F} qui s'exerce sur P passe constamment par G , donc l'accélération $\vec{y} = \frac{\vec{F}}{m}$ de P .

Le point P décrit donc par rapport à aux axes $Gxyz$ une courbe plane [N. 32] en vérifiant la loi des aires relativement au point G du plan de la courbe. Il en est de même pour le point P_1 .

Si r désigne la distance PP_1 , et si F est une simple fonction de r , soit $F = \varphi(r)$, on a en posant $GP = \rho = \frac{m_1}{m+m_1} r$,

$$F = \varphi(r) = \varphi \left[\left(1 + \frac{m}{m_1} \right) \rho \right]$$

Le point P se meut donc par rapport aux axes $Gxyz$ comme s'il était attiré (ou repoussé) par le point fixe G suivant une loi fonction de la seule distance $\rho = GP$, à savoir

$$F = \varphi \left[\left(1 + \frac{m}{m_1} \right) \rho \right].$$

41 - Comparons ce mouvement au mouvement de P par rapport à des axes $P_1x_1y_1z_1$ de directions parallèles aux premiers. Les nouveaux axes sont animés d'un mouvement absolu de translation, dont l'accélération P est celle de P_1 , c'est-à-dire $\vec{y}_1 = -\frac{\vec{F}}{m_1}$; la force relative aux nouveaux axes, qui s'exerce sur P , soit \vec{F}^r , est (d'après une formule connue)

$$\vec{F}^r = \vec{F} - m_1 \vec{y}_1 = \vec{F} + \frac{m}{m_1} \vec{F} = \left(1 + \frac{m}{m_1} \right) \vec{F}.$$

Le point P se meut donc par rapport aux axes $P_1x_1y_1z_1$

(1) C'est du moins une approximation, qui n'entraîne qu'une erreur extrêmement faible.

comme si [les axes $P_1 x, y, z$, étant absolument fixes] il était soumis à l'attraction ou répulsion $(1 + \frac{m}{m_1})F$ issue du point fixe P_1 . Dans son mouvement rapporté à ces axes, son accélération passe constamment par P_1 ; P décrit donc une courbe dont le plan contient P_1 , et vérifie la loi des aires par rapport à P_1 .

Quand m_1 est considérable par rapport à m, P , et G se confondent sensiblement, par suite les deux trièdres $Gxyz$ et $P_1 x, y, z$, ainsi que f et f' . Le mouvement de P par rapport aux axes $P_1 x, y, z$, est sensiblement le même que si les axes étaient absolus.

Théorème des moments cinétiques.

45 - Interprétation des équations 5 - Interprétons maintenant les trois dernières des six équations universelles du mouvement d'un système [équations (5) du N° 39] La première de ces équations peut s'écrire :

$$\sum m(yz'' - zy'') = \sum (yZ^e - zY^e),$$

ou encore

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \sum m(yz' - zy') = \sum (yZ^e - zY^e)$$

les deux autres s'écrivent de même :

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \sum m(zx' - xz') = \sum (zX^e - xZ^e)$$

$$\frac{d}{dt} \sum m(xy' - yx') = \sum (xY^e - yX^e).$$

Le moment cinétique \overline{OK} du système par rapport au point O [moment résultant des quantités de mouvement par rapport à O] a comme projections sur Ox, Oy, Oz [N° 27] :

$$\sum m(yz' - zy'), \quad \sum m(zx' - xz'), \quad \sum m(xy' - yx').$$

Les trois égalités précédentes traduisent donc ce théorème :

Théorème. - La dérivée géométrique $\frac{d\overline{OK}}{dt}$ du moment cinétique du système par rapport à un point fixe O , est

équipollente (à chaque instant) au moment résultant par rapport à 0 de toutes les forces extérieures [ces forces ayant respectivement comme origines les éléments matériels auxquels elles sont appliquées].

Corollaire. - La dérivée (par rapport au temps) du moment cinétique du système par rapport à une demi-droite fixe est égale (à chaque instant) au moment résultant par rapport à cette demi-droite de toutes les forces extérieures.

S'égalité (1) traduit ce corollaire pour la demi-droite fixe ox .

46. Démonstration géométrique. - Le théorème précédent pouvait être déduit immédiatement de la proposition cinématique du N° 28: "La dérivée géométrique $\frac{d\vec{OK}}{dt}$ du vecteur \vec{OK} est équipollente au moment résultant par rapport au point 0 des forces F qui s'exercent sur le système."

Il suffit, en effet de remarquer que ce dernier moment coïncide avec le moment résultant, par rapport à 0, des seules forces extérieures.

47. Théorème des aires.

Soit r, θ, z les coordonnées semi-polaires d'un élément P du système. L'équation (3) du N° 45 peut s'écrire [N° 24]

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \sum m r^2 \frac{d\theta}{dt} = \sum (xY^e - yX^e).$$

Représentons [N° 24] par d l'aire balayée par le rayon vecteur Op , projection de OP sur le plan xoy , à partir de l'instant initial, cette aire étant comptée positivement ou négativement suivant que θ croît ou décroît. L'équation (4) peut s'écrire:

$$\frac{d}{dt} \sum 2m \frac{dA}{dt} = \sum (xY^e - yX^e),$$

ou encore, en posant

$$MA = \sum m d, \quad [M = \sum m]:$$

$$(5) \quad 2M \frac{dA}{dt^2} = \sum (xY^e - yX^e).$$

Nous avons appelé [N° 27] la quantité A l'aire balayée

par le système autour de la demi-droite OZ , et vitesse aréolaire, accélération aréolaire du système autour de cette demi-droite, les dérivées $\frac{dA}{dt}$, $\frac{d^2A}{dt^2}$. L'égalité (5) exprime que cette accélération aréolaire multipliée par $2M$ est égale au moment des forces extérieures par rapport à OZ .

Quand un système est animé d'une rotation d'ensemble autour d'une demi-droite OZ , θ' à la même valeur ω pour tous les points P et le moment cinétique du système par rapport à OZ est

$$\omega \sum m p^2.$$

La quantité $\sum m p^2$ est dite moment d'inertie du système par rapport à OZ .

48 - Cas particuliers. - Si toutes les forces extérieures sont nulles, ou passent par un point fixe O , ou enfin ont constamment un moment résultant nul par rapport à un point fixe O , le vecteur \overline{OK} [dont la dérivée géométrique est constamment nulle] est fixe en grandeur direction et sens. La vitesse aréolaire du système autour d'une demi-droite quelconque OZ est constante, et égale à la projection de \overline{OK} sur OZ . Elle est maxima (en valeur absolue) quand la demi-droite considérée OZ se confond avec OK ; le plan perpendiculaire à OK est dit plan du maximum des aires.

Quand toutes les forces extérieures rencontrent une droite fixe, soit OZ , ou lui sont parallèles, le moment cinétique du système par rapport à cette droite est constant; la vitesse aréolaire du système autour de OZ est constante.

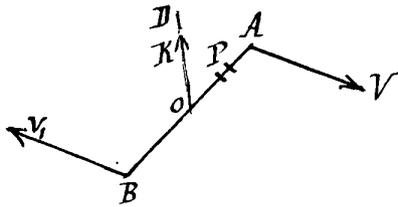
49 - Exemples. - 1° Étudions le mouvement absolu d'un système infinitement éloigné de tous les autres, par exemple du système solaire⁽¹⁾.

Les forces extérieures sont nulles. - Le moment cinétique \overline{OK} du système par rapport à un point fixe O est

⁽¹⁾ On peut prendre comme axes des axes ayant comme origine O le centre d'inertie du système solaire et des directions fixes par rapport aux toiles. Le moment cinétique \overline{OK} du système par rapport à O est invariable; le plan perpendiculaire en O à OK est appelé plan invariable du système du monde.

invariable.

2° Soit AB une barre solide et homogène dont nous étudions le mouvement par rapport à la terre, la barre AB étant placée dans le vide au voisinage du sol et fixée par son milieu O .



Les seules forces extérieures qui s'exercent sur AB sont la pesanteur et la réaction de l'appui O . Le moment de cette dernière force par rapport à O est nul. Les poids des éléments de AB forment un ensemble de vecteurs qui admettent une

résultante passant par O (centre de gravité de AB), et leur moment résultant par rapport à O est nul. Le moment cinétique \vec{OK} de AB par rapport au point O est donc invariable. Calculons \vec{OK} .

Soit $2l$ la longueur de la barre, $V = l\omega$ la vitesse absolue de l'extrémité A de AB , vitesse dont la direction est perpendiculaire à OA ; la vitesse d'un élément P quelconque de AB est égale à $\lambda\omega$ [si $\lambda = OP$], et à la direction de V et le même sens* O et B . Soit OD la demi-droite perpendiculaire au plan OAV , et orientée positivement par rapport à AV . Le moment cinétique de l'élément P par rapport à O a, dans tous les cas, la direction et le sens OD , et sa valeur absolue est:

$$\rho d\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda\omega = \rho\omega\lambda^2 d\lambda, \quad [\rho \text{ densité linéaire de } AB, d\lambda \text{ longueur de l'élément } P \text{ de } AB].$$

Le vecteur \vec{OK} a donc la direction et le sens OD , et sa longueur est $\omega \int \rho\lambda^2 d\lambda = 2\omega\rho \int_0^l \lambda^2 d\lambda = 2\omega\rho \frac{l^3}{3} = M \frac{l^2}{3} \omega$, si on appelle M la masse totale ($M = 2\rho l$) de la barre.

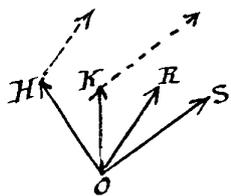
La barre AB , perpendiculaire à la droite fixe OK , tourne donc dans un plan fixe, et avec une vitesse angulaire ω qui est constante puisque $\frac{Ml^2}{3}\omega$ est constant.

Le raisonnement n'est en défaut que si la vitesse V de A est constamment nulle; mais la barre reste alors immobile. C'est ce qui se produit si la vitesse initiale de A est nulle.

Nous arrêterons là pour le moment les applications du théorème des moments cinétiques. Nous allons le compléter tout à l'heure en l'étendant au mouvement d'un système autour de son centre de gravité

* ou le sens contraire suivant que P est situé entre O et A ou entre

50. - Sur une autre forme du théorème du mou' ment du centre d'inertie et du théorème des moments cinétiques.



Considérons, à chaque instant, en prenant le point fixe O comme origine, 1° la somme g de toutes les forces extérieures appliquées au système; 2° la quantité de mouvement totale OH du système et son moment cinétique OK par rapport à O .

Le théorème du mouvement du centre de gravité exprime que la vitesse du point H est équipollente à OK et le théorème des moments cinétiques exprime que la vitesse du point K est équipollente à OS .

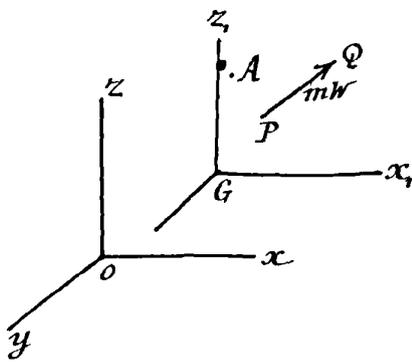
Théorèmes sur le mouvement d'un système autour de son centre de gravité.

51. - Mouvement d'un système autour de son centre de gravité. - Soit $Oxyz$ des axes choisis comme axes fixes, et Gx, y, z , des axes parallèles aux premiers, et qui ont constamment comme origine le centre de gravité G du système matériel S considéré. Le mouvement de S par rapport aux axes Ox, y, z , est, par définition, le mouvement du système autour de son centre de gravité (ou autour de G) (voir p 41)

Ce mouvement est bien déterminé si on se donne les directions des axes fixes, sans se donner leur origine. Mais ce mouvement change si on remplace les axes choisis par de nouveaux axes dont les directions varient par rapport aux premiers.

Théorème. - Dans le mouvement relatif d'un système autour de G , le moment cinétique du système par rapport à un point A est indépendant du point A choisi.

En effet, soit A et B deux points quelconques; montrons que le moment cinétique est le même en grandeur, direction et sens, qu'on le prenne par rapport à A ou à B . Soit \vec{W} la vitesse d'un élément P du système par rapport aux axes Gx, y, z , et PQ ou $m\vec{W}$ la quantité de mouvement de ce point. Le moment cinétique en question est la



somme géométrique $\Sigma(m\bar{w}, A)$ ou $\Sigma(PQ, A)$. Or en vertu d'une proposition élémentaire de la théorie des moments (page 6, théorème 3), on a

$$\Sigma(PQ, B) = \Sigma(PQ, A) + (AR, B)$$

\overline{AR} désignant la somme géométrique des vecteurs PQ construite avec A comme origine, c'est-à-dire ici $\Sigma m\bar{w}$. Or $\Sigma m\bar{w}$ est identiquement nul [N° 23] puisque l'origine G des axes ox, y, z , est le centre de gravité du système. On a donc :

$$\Sigma(PQ, A) = \Sigma(PQ, B).$$

C. q. f. d.

Nous appellerons moment cinétique du système autour de son centre de gravité [ou autour de G] le moment cinétique du système par rapport à un point quelconque dans son mouvement autour de G . Pour un système matériel donné, ce moment cinétique est un vecteur bien déterminé à chaque instant en grandeur, direction et sens une fois choisis les directions des axes fixes. Pour calculer ce moment, il est commode en général de le prendre par rapport au point G lui-même, c'est-à-dire de calculer la somme $\Sigma(m\bar{w}, G)$, c'est ce que nous ferons toujours par la suite.

52. - Extension du théorème des moments cinétiques au mouvement d'un système autour de son centre de gravité.

Pour appliquer le théorème des moments cinétiques, il est loisible de choisir arbitrairement les axes $oxyz$ qu'on regarde comme fixes. Mais si P est un des éléments matériels du système, \vec{F}_e la force extérieure totale appliquée au point P , il est entendu, une fois pour toutes, [N° 34] que \vec{F}_e est la force extérieure relative aux axes choisis qui s'exerce sur lui. Quand on remplace les axes pour de nouveaux axes qui sont mobiles par rapport aux premiers, le théorème des moments cinétiques s'applique au nouveau mouvement, mais les forces extérieures, soit \vec{F}_e' , relatives aux nouveaux axes, diffèrent en général des anciennes.

Ceci posé, substituons aux axes choisis $Oxyz$ les axes parallèles Gx, y, z . Soit \vec{A} l'accélération (à l'instant t) du point G par rapport aux axes $Oxyz$; si \vec{F}^p est la nouvelle force extérieure qui s'exerce sur l'élément P de masse m , on a :

$$\vec{F}^p = \vec{F}_e - m\vec{A}.$$

Considérons le moment cinétique (par rapport à G) du système dans son mouvement autour de G . La dérivée géométrique (par rapport au temps) de ce moment est équivalente au moment résultant, par rapport à G , des forces \vec{F}_e . Mais les forces $-m\vec{A}$, parallèles, de même sens et proportionnelles aux masses de leurs points d'application, forment un ensemble de vecteurs qui admet une résultante géométrique passant par G : le moment résultant de ces forces par rapport à G est donc nul. D'où ce théorème, dont l'importance est considérable :

Théorème. — La dérivée géométrique (par rapport au temps) du moment cinétique d'un système autour de son centre de gravité est équivalente au moment résultant par rapport à G des forces extérieures.

On donne souvent à ce théorème la forme abrégée suivante :

On peut appliquer le théorème des moments cinétiques au mouvement autour du centre de gravité G sans changer de forces extérieures.

En particulier, si les axes $Oxyz$ ont des axes absolus, la dérivée géométrique (par rapport au temps) du moment cinétique du système autour de G est équivalente au moment par rapport à G des forces extérieures absolues.

53. — Théorème de Koenig. — Une autre proposition importante de la théorie des moments cinétiques est la suivante :

À chaque instant t , le moment cinétique d'un système par rapport à un point O est la somme géométrique :

- 1° du moment cinétique du système autour de G ;
- 2° du moment cinétique du centre de gravité où toute la masse M du système serait concentrée.

En effet, soit \vec{v} la vitesse par rapport aux axes fixes $Oxyz$ de l'élément P du système, de masse m , et soit $\vec{PK} = m\vec{v}$. Soit V la vitesse de G ; enfin, soit, comme plus haut, \vec{w} la vitesse de P par rapport aux axes Gx, y, z , et soit $\vec{PQ} = m\vec{w}$. On a :

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{V}$$

et par suite :

$$\Sigma(m\vec{v}, 0) = \Sigma(m\vec{w}, 0) + \Sigma(m\vec{V}, 0)$$

chaque vecteur $m\vec{v}$, $m\vec{w}$, $m\vec{V}$ étant construit avec P comme origine.

Or $\Sigma(m\vec{w}, 0)$ est le moment cinétique du système autour de G , qui est indépendant de O et égal notamment à $\Sigma(m\vec{w}, G)$. D'autre part, $\Sigma(m\vec{V}, 0) = (M\vec{V}, 0)$, le vecteur $M\vec{V}$ étant construit avec G comme origine. On a donc :

$$\Sigma(m\vec{v}, 0) = \Sigma(m\vec{w}, G) + (M\vec{V}, 0)$$

égalité géométrique qui traduit le théorème énoncé.

54. - Le théorème de Kœnig entraîne une nouvelle démonstration du théorème des moments cinétiques dans le mouvement relatif autour de G , démonstration qui met en évidence le fait important que ce dernier théorème est une conséquence du premier théorème des moments cinétiques et du théorème du mouvement du centre de gravité.

Le premier théorème des moments cinétiques se traduit (N° 46) par l'égalité géométrique :

$$\frac{d}{dt} \Sigma(m\vec{v}, 0) = \Sigma(\vec{F}_e, 0),$$

ou d'après le théorème de Kœnig :

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \Sigma(m\vec{w}, 0) + \frac{d}{dt} (M\vec{V}, 0) = \Sigma(\vec{F}_e, 0) = \Sigma(\vec{F}_e, G) + (G\vec{R}, 0),$$

avec

$$G\vec{R} = \Sigma\vec{F}_e.$$

Or le point G se meut comme un point matériel de masse M auquel serait appliquée constamment la force $G\vec{R}$, et le théorème des moments cinétiques appliqué à ce point matériel fictif donne :

$$(2) \quad \frac{d}{dt} (M \cdot \bar{V}, 0) = (\bar{G}R, 0).$$

Si on tient compte de (2) et de l'égalité géométrique $\Sigma(m\bar{w}, 0) = \Sigma(m\bar{w}, \bar{G})$, l'égalité (1) donne :

$$\frac{d}{dt} \Sigma(m\bar{w}, \bar{G}) = \Sigma(\bar{F}_e, \bar{G}).$$

C. q. f. d.

55. - Application du théorème précédent. -

Donnons immédiatement quelques applications simples du théorème précédent.

Considérons d'abord une barre solide homogène pesante AB , lancée dans le vide. Le centre de gravité G de la barre (milieu de la barre) se meut comme un point pesant libre. Étudions le mouvement de AB autour de G : les forces extérieures [pesanteur] ont un moment résultant nul par rapport à G . Le moment cinétique de AB autour de G est donc constant; le raisonnement du N° 49 montre alors que AB tourne autour de G dans un plan de direction fixe avec une vitesse angulaire constante ou bien garde une direction fixe. - La conclusion est analogue si la barre n'est pas homogène.

Considérons maintenant un disque plan solide pesant, lancé dans le vide, la position et les vitesses initiales du disque étant continues dans un certain plan vertical xoy . Par raison de symétrie, le disque va rester dans ce plan; son centre de gravité G décrit une parabole dans ce plan; son moment cinétique autour de G reste constant. Or soit ω la vitesse angulaire du disque à l'instant t : son moment cinétique autour de G est égale (en valeur absolue) à $\omega \Sigma m r^2$ (N° 27), m étant la masse d'un élément P du disque et r la distance GP . Le disque tourne donc autour de G avec une vitesse angulaire constante qui est nulle si sa rotation initiale autour de G est nulle : dans ce dernier cas, son mouvement est un mouvement de translation.

Dans ces deux exemples, le mouvement du système est bien déterminée par les théorèmes du mouvement du centre de gravité et des moments cinétiques, quand on connaît les conditions initiales.

56. Remarque sur les six équations universelles du mouvement d'un système.

Le théorème du mouvement du centre de gravité et le théorème des moments cinétiques [le théorème des moments cinétiques autour de G n'en étant qu'un corollaire] se traduisent par six équations indépendantes des forces intérieures. Ces six équations sont d'ailleurs les seules relations indépendantes des forces intérieures qu'on puisse écrire sans rien savoir sur les forces intérieures si ce n'est qu'elles satisfont en principe de l'action et de la réaction.

Remarquons que, pour appliquer les deux théorèmes précédents ou leurs corollaires [et notamment pour écrire les six conditions nécessaires d'équilibre], il est loisible de remplacer les forces extérieures par n'importe quel autre système de forces, assujéti à la seule condition que les deux ensembles de vecteurs formés d'une part par les premières forces extérieures, d'autre part par les nouvelles, soient géométriquement équivalents: en un mot, on peut faire subir aux forces extérieures les mêmes opérations que dans la statique du solide ..

En particulier, si le système matériel considéré S est solide, sa position dépend de six paramètres. On prévoit donc que les six équations fondamentales doivent définir le mouvement du solide quand on connaît à chaque instant la somme géométrique et le moment résultant par rapport à un point de toutes les forces extérieures appliquées au solide, et en outre ses conditions initiales⁽¹⁾. C'est ce que nous vérifierons rigoureusement plus tard. Il suit de là qu'on ne modifie pas le mouvement d'un solide en remplaçant, à chaque instant t , les forces extérieures appliquées au solide par d'autres forces extérieures géométriquement équivalentes appliquées aux mêmes éléments ou à d'autres éléments du solide. Par exemple, si les forces extérieures admettent constamment une résultante PQ [variable avec t], il est loisible de remplacer ces forces par la force unique PQ appliquée (à chaque instant) au point invariablement lié au solide qui occupe la position P . Si le solide est un corps pesant, on peut remplacer les poids des divers éléments par une

⁽¹⁾ Il en est bien ainsi dans les deux exemples du N° précédent.

force unique, le poids total du corps, appliquée au centre de gravité du solide. En un mot, dans la Dynamique du solide, il est loisible d'effectuer sur les forces extérieures \mathcal{O} appliquées à un solide les mêmes opérations que dans la statique du solide.

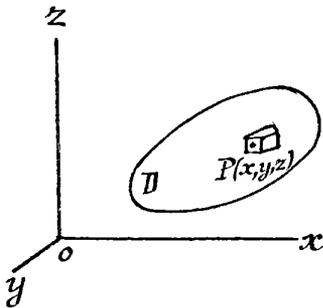
Mais il faut bien se garder de croire qu'il en aille de même quand le système matériel S n'est pas solide. Les six équations fondamentales s'appliquent bien encore, mais elles ne suffisent pas à déterminer le mouvement du système, et on modifierait complètement (en général) ce mouvement en remplaçant les forces extérieures qui s'exercent sur S par un système de forces géométriquement équivalent. Par exemple, considérons deux éléments matériels libres P et P_1 qui n'exercent aucune force l'un sur l'autre et qui à chaque instant sont soumis respectivement, le 1^{er} à la force \vec{F} , le 2^e à la force $\vec{F}_1 = -\vec{F}$. Les forces extérieures \vec{F} et \vec{F}_1 forment un système de deux vecteurs qui, à chaque instant, a une résultante géométrique nulle. Or si on supprime \vec{F} et \vec{F}_1 , il est évident que le mouvement de P et de P_1 ne reste pas le même, puisqu'il devient rectiligne et uniforme.

57. - Les systèmes matériels continus. - Dans ce qui précède, nous avons admis que le système matériel considéré était formé d'un nombre fini d'éléments matériels distincts. Or ce n'est pas ainsi que les corps se présentent à nous en général, mais bien sous l'aspect de corps continus (à trois dimensions). Comment étendre à de tels systèmes les deux théorèmes précédents?

Décomposons les corps continus du système en éléments P de très petites dimensions, que nous assimilons à des points matériels. Écrivons, pour le système ainsi obtenu [qui est formé d'un nombre fini d'éléments], une quelconque des six équations fondamentales; cette égalité est une égalité approchée, d'autant plus exacte que les dimensions des éléments P sont plus petites. Étendons vers zéro les dimensions de chacun de ces éléments: l'égalité limite à laquelle nous parvenons ainsi est vérifiée exactement par le mouvement du système. Dans cette égalité, les sommes Σ (qui figurent dans l'égalité approchée) sont devenues des intégrales triples étendues aux volumes

des différents corps du système⁽¹⁾.

Par exemple, le moment cinétique par rapport à OZ d'un solide, à savoir $\Sigma m(xy' - yx')$, est donné (à l'instant t) par l'intégrale triple :



$$\iiint_D \rho (xy' - yx') dx dy dz,$$

ρ désignant la densité du corps (à l'instant t) au point P ou (x, y, z) ; x', y', z' les composantes de la vitesse de l'élément P du corps, D l'espace occupé par le corps ; ρ, x', y', z'

sont des fonctions bien déterminées (à l'instant t) de x, y, z dans le domaine D , mais qui peuvent varier avec t ainsi que le domaine D lui-même.

De même, soit F^e les forces extérieures. Le moment résultant des forces F^e par rapport à OZ est $\Sigma (xY^e - yX^e)$

Ici, il importe de remarquer que les forces extérieures appliquées à un corps continu (à trois dimensions) peuvent rentrer dans 4 catégories :

1° Les forces extérieures appliquées à tous les éléments de volume dv ou $dx dy dz$ du corps ; ces forces sont de la forme⁽²⁾ $\bar{\Phi} dv$, [Exemple, pesanteur].

2° Les forces extérieures appliquées le long d'une ou plusieurs surfaces, telles que σ . Si P est un élément du corps qui intercepte sur σ la petite aire $d\sigma$, la force considérée appliquée à P est de la forme⁽²⁾ $\bar{\Phi} d\sigma$. [Exemple, pression d'un liquide sur la surface d'un solide qui y est immergé].

3° Les forces extérieures appliquées le long d'une ou plusieurs lignes, telles que λ . Si P est un élément du corps qui intercepte sur λ le petit arc $d\lambda$, la force considérée appliquée à P est la forme⁽²⁾ $\bar{\Phi} d\lambda$. [Exemple, réactions d'un anneau circulaire sur une sphère solide qui repose sur l'anneau].

4° Les forces finies appliquées en certains points du

(1) Si un des corps continus est à 2 ou 1 dimension, les sommes Σ correspondantes sont des intégrales doubles ou simples.

(2) $\bar{\Phi}$ désignant un vecteur fini ou nul.

corps. [Exemple, traction exercée sur un solide à l'aide d'un fil].

Les forces des 3 premières catégories introduisent dans le moment $\Sigma(xY^e - yX^e)$ des intégrales triples, doubles et simples étendues aux domaines [volumes, surfaces ou lignes] définis par les points d'application de ces forces. Les forces de la dernière catégorie introduisent une somme algébrique d'un nombre fini de termes.

58. - Il importe, au sujet de ces diverses espèces de forces extérieures, de faire la remarque suivante. Soit P un élément du corps continu, de masse ρdv , dv étant le petit volume de l'élément; la force totale \bar{F} qui s'exerce sur P est $\rho \bar{y} dv$, si \bar{y} désigne l'accélération de P ; elle est donc de l'ordre de dv (ou nulle, si $\bar{y} = 0$). Mais la force extérieure qui s'exerce sur P peut, d'après ce qui précède, être infiniment grande par rapport à dv . Par exemple, si l'élément P est pesant, et de plus tiré par un fil, on a:

$$\bar{F}^e = \rho \bar{g} dv + \bar{T},$$

\bar{g} désignant l'accélération de la pesanteur, et \bar{T} la tension $[\neq 0]$ du fil; la force \bar{F}^e est d'autant plus voisine de \bar{T} que dv est plus petit. D'autre part, on a:

$$\bar{F} = \rho \bar{y} dv = \bar{F}^e + \bar{F}^i = \rho \bar{g} dv + \bar{T} + \bar{F}^i.$$

On voit donc que, dans ce cas, la force \bar{F}^i exercée sur P par les autres éléments du corps est elle-même une force finie, qui est sensiblement égale et directement opposée à \bar{T} . On a:

$$\bar{F}^i = -\bar{T} + \rho dv [\bar{y} - \bar{g}].$$

Chapitre IV.

Le Théorème des forces vives.

Les forces à distance et les forces de contact.

59. — Les forces de contact. — Considérons un élément matériel P , de masse m , et soit \bar{R} la force absolue exercée sur P à l'instant t par les éléments matériels M immédiatement en contact avec lui : on donne à \bar{R} le nom de force de contact exercée sur P par les éléments M . Si M se compose des éléments matériels M_1, \dots, M_p , la force \bar{R} est la résultante des forces de contact exercées sur P par M_1, M_2, \dots, M_p .

Soit maintenant \bar{F}_a la force absolue qui s'exerce sur P à l'instant t , \bar{F}'_a la force absolue exercée sur P par les éléments matériels qui ne sont pas en contact immédiat avec P . On a :

$$\bar{F}_a = \bar{F}'_a + \bar{R}.$$

Une égalité analogue a lieu si, le trièdre de référence $Oxyz$ ayant été arbitrairement choisi, on appelle F la force relative des axes $Oxyz$ qui s'exerce (à l'instant t) sur P et F' la force (relative aux mêmes axes) qu'exercent sur P les éléments non en contact avec lui. On a encore :

$$\bar{F} = \bar{F}' + \bar{R}$$

Nous convenons d'appeler force à distance s'exerçant sur P la force F' , force relative aux axes choisis, qu'exercent sur P les éléments matériels, non en contact avec lui. La force [relative] totale \bar{F} est ainsi décomposée en deux forces : une force à distance [force relative] \bar{F}' et une force de contact absolue \bar{R} .

On donne souvent le nom de réactions aux forces de contact, surtout quand un au moins des deux éléments en contact est solide. Le mot de réaction est justifié par ce fait que deux corps qui viennent en contact n'exercent l'un sur l'autre de forces de contact qu'après

s'être déformés mutuellement soit par un choc, soit sous l'action des forces à distance. Par opposition, on donne souvent le nom de forces actives aux forces à distance.

60. - Réactions intérieures et extérieures. - Considérons maintenant, au lieu d'un seul élément, un système d'éléments matériels, et soit P un de ces éléments: parmi les éléments matériels en contact avec P les uns font partie du système, les autres sont extérieurs au système; les forces de contact que les premiers exercent sur P sont des forces intérieures, celles qu'exercent les seconds sont des forces (absolues) extérieures.

De même, la force à distance (totale) \vec{F} qui s'exerce sur P , peut être décomposée: 1° en une force intérieure \vec{F}^i [force absolue exercée sur P par les éléments du système et non en contact avec P]; 2° en une force (relative) extérieure \vec{F}^e [force relative aux axes choisis exercée sur P par les éléments matériels extérieurs au système et non en contact avec P].

En définitive; d'après ces conventions, toutes les forces de contact (ou réactions), tant intérieures qu'extérieures, sont des forces absolues, de même que les forces intérieures à distance [ou forces actives intérieures]. Au contraire, la force active extérieure \vec{F}^e qui s'exerce sur chaque élément P en une force relative aux axes choisis. Par exemple, quand on remplace le trièdre de référence adopté $Oxyz$ par un autre trièdre O, x, y, z , animé par rapport au premier d'un mouvement de translation, \vec{F}^e doit être remplacée (pour chaque élément P) par $\vec{F}^e + m(\vec{A})$, \vec{A} désignant l'accélération (à l'instant t) de O , par rapport au trièdre O .

Si l'élément P est soumis à plusieurs forces actives extérieures, il est sous entendu qu'une de ces forces et une seule est relative aux axes choisis, les autres sont des forces absolues; \vec{F}^e est alors la somme géométrique de ces diverses forces.

En résumé, les forces qui s'exercent sur les éléments du système étant décomposées en réactions extérieures et intérieures et en forces actives extérieures et intérieures, nous faisons, une fois pour toutes, la convention

suivante : les forces que nous disons appliquées à un élément P du système sont toutes des forces absolues, sauf une (et une seule) des forces extérieures actives, laquelle est relative aux axes choisis.⁽¹⁾ Lorsque les axes $Oxyz$ sont invariablement liés à l'écorce terrestre et que le système considéré est voisin du sol, la force que nous avons appelée pesanteur est une force extérieure active relative aux axes choisis. Lorsque nous parlerons de forces autres que la pesanteur appliquées aux divers éléments du système, il est donc entendu que toutes ces forces (réactions, forces actives extérieures, etc) sont des forces absolues. Moyennant cette convention, tout se passe comme si, les axes terrestres étant absolument fixes, la pesanteur était une force absolue.

Remarque. - Toutes les hypothèses faites sur les réactions d'un système tant intérieures qu'extérieures sont évidemment indépendantes du choix des axes, puisque ces forces sont des forces absolues.

61. Les solides naturels et les solides indéformables.
 Considérons un solide naturel S et supposons qu'à un instant t , ce corps soit, par exemple, en équilibre, chacun de ses éléments se trouvant dans un état donné [c'est-à-dire ayant une forme, un état physique et chimique donné]. Les forces intérieures qui s'exercent entre les éléments sont alors bien déterminées, et par suite aussi les réactions qu'exercent les éléments superficiels du solide sur les corps extérieurs en contact avec eux [N° XIX].

D'après cela, supposons qu'à l'élément P de S soit attaché un fil sur lequel nous exerçons une traction plus ou moins forte : il est impossible que le corps reste dans le même état quand la traction varie. Si dans les conditions données, les seuls phénomènes qui puissent se passer dans le corps sont des déformations, le corps se déformera nécessairement. Mais il peut se faire que ces déformations soient inappréciables, même pour des variations considérables de la traction. Dans ce cas, le solide nous apparaîtra comme invariable, et les moyens dont nous disposons pour examiner la forme de ses éléments ne seront pas assez précis pour que cette forme nous

⁽¹⁾ Cela pour chaque élément du système.

fasse connaître les réactions extérieures que le corps subit⁽¹⁾.

Il ne peut donc pas exister de solides rigoureusement invariables mais il existe des corps sensiblement indéformables, à savoir les solides naturels très rigides dont la température demeure à peu près constante. A de tels corps s'applique approximativement la Mécanique des solides parfaits. Nous ne savons plus rien sur les forces intérieures de tels solides, si ce n'est qu'elles satisfont au principe de l'action et de la réaction. Mais d'autre part la Mécanique de ces solides est singulièrement simplifiée par ce fait que le mouvement solide se réduit au déplacement d'une figure invariable. C'est pourquoi il arrive souvent qu'on sait calculer le mouvement d'un solide sans pouvoir calculer exactement ses réactions externes et internes. Ces réactions dépendent alors de la matière qui compose le corps: on ne peut les calculer sans tenir compte des déformations du solide et de son élasticité, c'est-à-dire de la correspondance qui existe entre ses réactions et ses déformations.

Théorème des forces vives pour un élément matériel. — Potentiel.

62. — Travail d'une force. — On sait que le travail élémentaire [entre les instants t et $t + dt$] d'une force \vec{F} appliquée à un élément matériel P est égal à l'expression

$$(1) \quad FV \cos(\vec{F}, \vec{V}) dt,$$

F et V désignant les valeurs à l'instant t de la force \vec{F} et de

⁽¹⁾ Ce qui précède peut se répéter pour les fils et les surfaces inextensibles. Considérons, par exemple, comme au N° XIX, p. XXVI, un fil de très petite masse qui, dans les transformations que nous lui faisons subir, satisfait à la condition suivante: lorsqu'il est rectiligne, immobile, et a une longueur donnée, son état est bien déterminé. A chaque longueur du fil correspond une tension donnée et réciproquement. Mais si la variation de longueur est presque insensible pour des variations considérables de la tension, le fil nous apparaîtra comme inextensible et comme exerçant sur un élément attaché à une de ses extrémités des forces très différentes pour une même longueur du fil. Ce fil constituerait un très mauvais dynamomètre et un très bon pendule (la longueur du pendule devant être invariable).

la vitesse \vec{V} de P , et $\cos(F, v)$ le cosinus [positif ou négatif] de l'angle des deux demi-droites \vec{F} et \vec{V} .

Il importe de remarquer que le travail d'une force donnée appliquée à un élément P donné, entre les instants t et $t+dt$, n'est déterminé qu'une fois choisis les axes auxquels on rapporte le mouvement: car, à un instant t , pour le même élément P , la vitesse \vec{V} dépend des axes choisis.

On peut prendre comme infiniment petit principal, au lieu de dt , le déplacement même PP' du point P . Le travail élémentaire de F dans le déplacement $PP' = ds$ de P est alors:

$$(2) \quad F ds \cos(F, ds).$$

Je rappelle deux propriétés [d'ailleurs presque évidentes] du travail:

1° Le travail élémentaire entre les instants t et $t+dt$ [ou dans le déplacement PP'] de la résultante de plusieurs forces appliquées à P , est la somme algébrique des travaux de ces forces;

2° Le travail élémentaire d'une force dans le déplacement résultant de plusieurs déplacements composants est la somme algébrique des travaux de cette force dans ces déplacements composants.

Les axes choisis $Oxyz$ étant rectangulaires, soit (à l'instant t) X, Y, Z les composantes de \vec{F} , (x', y', z' celles de \vec{V}), le travail élémentaire de F entre les instants t et $t+dt$ est égal à:

$$(Xx' + Yy' + Zz') dt.$$

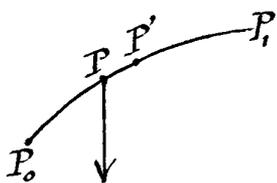
De même, si dx, dy, dz sont les composantes du déplacement infinitésimal PP' , le travail de \vec{F} dans ce déplacement est:

$$Xdx + Ydy + Zdz.$$

Travail fini d'une force. - Soit maintenant t_0, t_1 deux instants quelconques, et \vec{F} une force (bien déterminée à chaque instant t) appliquée à l'élément P . Le travail de F entre les instants t_0 et t_1 est la somme des travaux élémentaires de \vec{F} pendant chaque intervalle de temps dt compris entre t_0 et t_1 . Ce travail \mathcal{E} est représenté par l'intégrale

$$\mathcal{E} = \int_{t_0}^{t_1} F v \cos(F, v) dt = \int_{t_0}^{t_1} (Xx' + Yy' + Zz') dt.$$

Au lieu de prendre t comme variable indépendante, on peut prendre l'arc s parcouru par P à partir d'une position initiale: à chaque valeur de t correspond une valeur de s , et réciproquement. Il suit de là qu'à chaque valeur de s correspond une force \vec{F} bien déterminée, et le travail de \vec{F} quand P parcourt l'arc $P_0 P_1$ est:



$$\mathcal{E} = \int_{s_0}^{s_1} F \cos(F, \nu) ds = \int_{s_0}^{s_1} X dx + Y dy + Z dz$$

63. - Théorème des forces vives.

Soit \vec{F} (ou X, Y, Z) la force totale [relative aux axes choisis] qui, à un instant arbitraire t s'exerce sur un élément matériel P . Des équations du mouvement

$$m x'' = X, \quad m y'' = Y, \quad m z'' = Z,$$

on déduit aussitôt la combinaison,

$$(1) \quad m(x'x'' + y'y'' + z'z'') = Xx' + Yy' + Zz'$$

c'est-à-dire:

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \frac{m}{2} (x'^2 + y'^2 + z'^2) = \frac{d}{dt} \frac{mv^2}{2} = Xx' + Yy' + Zz'.$$

L'expression mv^2 est dite la force vive de P , et l'équat^{on} (2) est l'équation des forces-vives. En intégrant cette équation terme à terme entre t_0 et t_1 , il vient:

$$\frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \int_{t_0}^{t_1} (Xx' + Yy' + Zz') dt = \mathcal{E}$$

Autrement dit, la variation de la demi-force vive de P entre les instants t_0 et t_1 est égale entre ces deux instants au travail de la force totale \vec{F} appliquée à P .

64. Fonction de force ou potentiel pour un élément matériel.

Supposons que la force \vec{F} [relative aux axes choisis] qui s'exerce sur l'élément P soit connue à un instant quelconque t , si on connaît à cet instant, la position (x, y, z) et la vitesse (x', y', z') de P . Autrement dit X, Y, Z sont des fonctions données de x, y, z, x', y', z', t .

Pour calculer le travail \mathcal{E} de \vec{F} entre les instants t_0 et

t_1 , c'est-à-dire pour calculer l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} (Xx' + Yy' + Zz') dt,$$

il faut en général connaître x, y, z [et par suite x', y', z'] en fonction de t .

Sous une autre forme, soit s l'arc de trajectoire, P_0 et P_1 deux positions de P correspondant aux valeurs, t_0 et t_1 du temps, s_0 et s_1 de l'arc; on peut écrire :

$$\frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \int_{s_0}^{s_1} \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds.$$

Pour calculer le second membre, il faut connaître en général x, y, z, v et t en fonction de s . Si X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z indépendantes de x', y', z' , il suffit de connaître x, y, z en fonction de s ; mais il ne suffit pas en général de connaître les deux positions extrêmes P_0, P_1 de P . Quand les fonctions X, Y, Z de (x, y, z) sont quelconques, l'intégrale curviligne

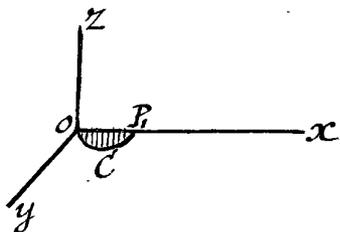
$$\int_{P_0}^{P_1} X(x, y, z) dx + Y(x, y, z) dy + Z(x, y, z) dz$$

change avec le chemin suivi entre P_0 et P_1 .

Si P décrit un contour fermé C dans un certain sens, le travail correspondant de \vec{F} est une quantité bien déterminée indépendante du point de départ P_0 de P sur le contour, mais qui, en général, est différente de zéro. Si P décrit C dans le sens inverse, le travail change de signe.

Par exemple, soit :

$$X \equiv 0, \quad Y \equiv y, \quad Z \equiv 0;$$



si P_0 est l'origine, P_1 le point $x=1$ de Ox , et si la trajectoire de P se projette sur le plan xOy suivant le chemin C , le travail de la force est égal à $\int_0^1 y dx$, c'est-à-dire à l'aire comprise entre Ox et C .

65. Fonction de force pour un point matériel.

Il est un cas toutefois où le travail d'une force \vec{F} appliquée à un élément P est déterminé par les positions extrêmes de P et indépendant du chemin suivi par P .

entre ces positions : c'est le cas où X, Y, Z sont des fonctions de (x, y, z) telles que l'expression

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

soit une différentielle totale exacte. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que les dérivées premières de X, Y, Z [supposées fonctions continues de x, y, z sauf pour des valeurs exceptionnelles] satisfassent aux trois conditions

$$(1) \quad \frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}, \quad \frac{\partial Y}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial y}, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}.$$

Quand ces conditions sont remplies, il existe une fonction $U(x, y, z)$ dont X, Y, Z sont les dérivées premières :

$$(2) \quad X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

On dit alors que la force \vec{F} admet une fonction de force, ou encore qu'elle dérive d'un potentiel $V = -U$.

Soit \mathcal{D} un domaine de l'espace où la fonction $U(x, y, z)$ a une détermination unique, et P_0 ou (x_0, y_0, z_0) , P_1 ou (x_1, y_1, z_1) , deux points intérieurs à \mathcal{D} . Quel que soit le chemin suivi par P dans \mathcal{D} , entre P_0 et P_1 , le travail de \vec{F} est égal à $U_{P_1} - U_{P_0}$, en désignant par U_P la valeur de $U(x, y, z)$ au point P ou (x, y, z) .

En effet, soit une courbe quelconque intérieure à \mathcal{D} et passant par P_0 et P_1 ; soit s l'arc de l compté à partir d'une certaine origine, s_0 et s_1 les valeurs de s correspondant aux points P_0 et P_1 ; soit enfin $u(s) = U[x(s), y(s), z(s)]$.

On a :

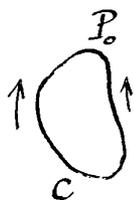
$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{s_1} \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) ds &= \int_{s_0}^{s_1} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{ds} \right) ds \\ &= \int_{s_0}^{s_1} \frac{du}{ds} = u(s_1) - u(s_0) = U(x_1, y_1, z_1) - U(x_0, y_0, z_0). \end{aligned}$$

En particulier, quand P décrit à l'intérieur de \mathcal{D} , un circuit qui part de P_0 et y revient, U_P est égal à U_{P_0} , et le travail de \vec{F} correspondant à ce circuit est nul.

66. - Cas où la fonction de forces a plusieurs déterminations. - Quand la fonction $U(x, y, z)$ n'a qu'une détermination quels que soient x, y, z , ce qui précède s'applique à tout l'espace

[Exemples $U = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, ou $U = \log \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, etc.]

Quand la fonction U a plusieurs déterminations U_1, U_2, U_3 etc, deux quelconques de ces déterminations, soit U_1 et U_2 , ne diffère que par une constante d'addition, car U_1 et U_2 ont identiquement mêmes dérivées par rapport à x , à y , et à z . Posons: $U_2 = U_1 + h$, $U_3 = U_1 + h_1$, etc. Pour calculer le travail de F quand P se déplace à partir de P_0 , on adopte en P_0 une branche arbitraire, soit U_1 , de U et on suit cette branche par continuité pendant le déplacement de P . En particulier, quand P revient au point de départ P_0 , le travail de F est nul ou non suivant qu'on revient en P avec la détermination initiale U_1 de U ou avec une détermination différente, soit $U_2 = U_1 + h$: dans ce dernier cas, le travail de F est égal à h .



Soit C un circuit quelconque qui part de P_0 et y revient, dans le sens de la flèche, définissons ce contour d'une façon continue en évitant les points de l'espace où X, Y, Z cessent d'être continus. Le travail de F donné par l'intégrale curviligne

$\int_C (Xdx + Ydy + Zdz)$ étendue au contour C dans le sens de la flèche, varie évidemment d'une façon continue. Mais d'autre part, il est égal à une des constantes h, h_1, \dots , et puisqu'il ne peut sauter brusquement de h à h_1 , par exemple, il reste constant. En particulier, si on peut réduire d'une façon continue, le contour C à un point sans rencontrer de points où X, Y, Z sont discontinus, le travail de F dans le parcours total de C est nul.

On peut donc énoncer ce théorème:

Théorème. - Les conditions (1) étant remplies, soit \mathcal{E} le travail de F quand P décrit entièrement un circuit fermé C dans un certain sens: ce travail \mathcal{E} ne change pas si on déforme le circuit C d'une façon continue, sans rencontrer de points où X, Y, Z soient discontinus; ce travail est nul, si on peut, par une telle déformation, réduire le contour C à un point.

Exemple. - Soit

$$X = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad Y = \frac{x}{x^2+y^2} \quad Z = g$$

On constate sans peine que les conditions (1) sont remplies; X et Y deviennent discontinus pour $x=0, y=0$, c'est-à-dire pour les points de OZ . D'après cela, soit C un contour fermé: si on peut le réduire à un point par une déformation continue sans rencontrer OZ le travail correspondant de \vec{F} est nul.

La vérification de ce résultat immédiate; soit r, θ, z les coordonnées semi-polaires d'un point P . On sait que $-ydx + xdy = r^2 d\theta$ [N. 24]; on a donc

$$\frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} + gdz = d\theta + gdz = d[\theta + gz]$$

La fonction de forces est ici: $U = \theta + gz$, fonction qui admet une infinité de branches différant entre elles d'un multiple d'un multiple de 2π ; ces branches se permutent quand le point P revient à son point de départ en tournant autour de OZ , c'est-à-dire quand la projection de P sur xOy décrit un angle $2m\pi$ autour de O . Le travail de \vec{F} correspondant au contour fermé C parcouru dans le sens donné est donc égal à $2m\pi$, angle dont θ s'accroît quand P décrit le contour. Ce angle ne change pas quand on déforme C d'une façon continue sans rencontrer OZ ; il est nul si on peut réduire C à un point par une déformation continue sans rencontrer OZ .

La règle générale est donc bien vérifiée sur cet exemple particulier.

Remarque. - Quand les fonctions X, Y, Z de (x, y, z) ne sont discontinues qu'en des points isolés, le travail de \vec{F} correspondant à un contour fermé quelconque est nul.

En effet, on peut toujours réduire ce contour à un point en le déformant d'une façon continue sans rencontrer de discontinuités de \vec{F} .

[Exemple: $X = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, Y = \frac{y}{x^2+y^2+z^2}, Z = \frac{z}{x^2+y^2+z^2}$; l'origine est seul point de discontinuité]

67. - Surfaces de niveau. - Les surfaces de niveau sont les surfaces $U(x, y, z) = C^{\text{te}}$.

Que la fonction U ait une seule ou plusieurs déterminations, il passe par un point P_0 arbitraire une surface de niveau et une seule. Car soit U_1 et U_2 deux branches de U ; on sait que $U_2 \equiv U_1 + h$. Or les deux surfaces

$$U_1(x, y, z) = U_1(x_0, y_0, z_0) \text{ et}$$

$$U_2(x, y, z) = U_1(x_0, y_0, z_0) + h$$

coïncident évidemment.

Par exemple, si

$$X = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Y = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad Z = 0,$$

les surfaces de niveau sont :

$$\theta = C^{\text{te}}, \text{ c'est-à-dire : } \text{arctg} \frac{y}{x} = C^{\text{te}}.$$

Ce sont les plans passant par oz .

En chaque point P ou (x, y, z) , la force F est normale à la surface de niveau passant par P [en vertu des égal.^s (2)]. De plus, soit PP_1 une demi-droite quelconque issue de P ; la limite pour $PP_1 = 0$ du quotient $\frac{U_{P_1} - U_P}{PP_1}$ est, par définition, la dérivée de U (en P) suivant la demi-droite PP_1 . Je dis que cette dérivée coïncide avec la projection de F suivant la demi-droite PP_1 .

En effet, soit (α, β, γ) les cosinus directeurs de $\overline{PP_1}$, l la longueur PP_1 ; on a :

$$U_{P_1} - U_P = U(x + \alpha l, y + \beta l, z + \gamma l) - U(x, y, z),$$

et

$$\lim_{PP_1} \frac{U_{P_1} - U_P}{PP_1} = \frac{\partial U}{\partial x} \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \gamma = \alpha X + \beta Y + \gamma Z,$$

égalité analytique qui traduit la proposition énoncée.

En particulier, si la demi-droite PP_1 est la demi-normale Pn à la surface de niveau menée dans le sens des U croissants, $U_{P_1} - U_P$ est positif; la dérivée de U suivant la demi-droite Pn , soit $\frac{dU}{dn}$, est positive; d'autre part, elle coïncide avec la projection de la force \vec{F} sur Pn , et comme F est normale à la surface, on voit que la force F

est dirigée dans le sens Pn , c'est-à-dire du côté des U croissants, et égale à $\frac{dU}{dn}$.

Soit enfin $U = U_0$ ou S , et $U = U_0 + \varepsilon$ ou $S' (\varepsilon > 0)$ deux surfaces de niveau infiniment voisines. Soit P un point quelconque de S , PP' la normale en P à S menée jusqu'à sa rencontre en P' avec S' . Le quotient $\frac{U_{P'} - U_P}{PP'} = \frac{\varepsilon}{PP'}$ diffère infiniment peu de $\frac{dU}{dn}$, c'est-à-dire de F . D'où ce théorème :

En tout point P d'une surface de niveau S ou $U = U_0$, la force normale à la surface, dirigée vers la surface infiniment voisine S' ou $U = U_0 + \varepsilon (\varepsilon > 0)$, et inversement proportionnelle à la distance PP' de P à S' .

68. - Réciproque du théorème précédent. - Démontrons la réciproque du théorème précédent, c'est-à-dire établissons ce théorème :⁽¹⁾

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que la force $\vec{F}(x, y, z)$ dérive d'une fonction de forces sont qu'il existe une famille de surfaces, soit les surfaces S , jouissant des propriétés suivantes :

1° Par chaque point de l'espace, il en passe une et une seule;

2° La surface S qui passe par le point (x, y, z) est normale en ce point à la force $\vec{F}(x, y, z)$.

3° Quand (x, y, z) parcourt une surface S , la valeur absolue de $\vec{F}(x, y, z)$ varie en raison inverse de la distance du point (x, y, z) à une surface S infiniment voisine.

Ces conditions sont nécessaires [n.º 67]. Démontrons qu'elles sont suffisantes.

L'équation des surfaces S peut toujours s'écrire :

$$\bar{V}(x, y, z) = C^te$$

(1) Quand $\vec{F}(x, y, z)$ dérive d'une fonction de forces, cette propriété subsiste si on substitue aux axes $Oxyz$ d'autres axes rectangulaires (qui leur sont liés invariablement). Or les conditions (1) semblent dépendre du choix des axes. Les nouvelles conditions énoncées dans ce c. 8º sont, au contraire, géométriques.

Soit P et P' deux points infiniment voisins, h ou dV la variation de V quand le point (x, y, z) varie de P à P' . Si $V = C$ est la surface S qui passe par P , $V = C + h$ est la surface infiniment voisine S' qui passe par P' . D'après l'hypothèse 2°, $\vec{F}(x, y, z)$ est normale au point x, y, z à S ; si le point (x, y, z) parcourt S , soit l la distance du point à la surface S' ; posons $F = \frac{\lambda |h|}{l}$, λ désignant une certaine fonction positive de x, y, z . D'après l'hypothèse 3°, λ est constant quand (x, y, z) parcourt S , c'est-à-dire quand V est constant; λ est donc une simple fonction de V , soit $\lambda = \varphi(V)$.

Calculons maintenant le travail de \vec{F} dans le déplacement PP' en décomposant ce déplacement ainsi: soit P_1 le point de S infiniment voisin de P et tel que P_1P' soit normal en P_1 à S ; on a: $\overline{PP'} = \overline{PP_1} + \overline{P_1P'}$. Or, dans le déplacement PP_1 (normal à \vec{F}), le travail de \vec{F} est nul; dans le déplacement P_1P' il est égal à $\pm F \times P_1P' = \pm F l = \pm \lambda h = \pm \lambda(V) dV$.

Admettons pour fixer les idées⁽¹⁾, que \vec{F} soit dirigé du côté des V croissants: P_1P' a le sens de \vec{F} ou le sens contraire suivant que h est positif ou négatif, et le travail de \vec{F} est égal, dans les deux cas, en grandeur et signe, à $\lambda(V) dV$.

La force \vec{F} dérive donc de la fonction de force

$$U(x, y, z) = \int_{V_0}^V \lambda(V) dV. \quad \text{C. q. f. d.}$$

69. - Sur les forces normales à une famille de surfaces. - Considérons une famille de surfaces, soit les surfaces Σ , telles que pour un point il en passe une et une seule, famille dont l'équation peut toujours s'écrire:

$$V(x, y, z) = C^{\text{te}}$$

Soit $\vec{F}(x, y, z)$ une force qui dérive d'une fonction de force U : Supposons qu'en chaque point (x, y, z) la surface Σ qui passe par ce point soit normale à $\vec{F}(x, y, z)$.

Je dis que les surfaces Σ sont les surfaces de niveau et que U est une simple fonction de V , soit $U = \varphi(V)$.

En effet, on a:

$$\frac{X}{\frac{\partial V}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial V}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial V}{\partial z}} = \lambda,$$

λ étant une certaine fonction de x, y, z . Par suite,

⁽¹⁾ Sinon, on pourrait changer V en $-V$.

$$dU = Xdx + Ydy + Zdz = \lambda \left(\frac{dV}{dx} dx + \frac{dV}{dy} dy + \frac{dV}{dz} dz \right) = \lambda dV.$$

Si on fait varier x, y, z de façon que V soit constant, U est constant; U est une simple fonction de V et la famille de surfaces $V = C^{\text{te}}$ se confond avec la famille de surfaces $U = C^{\text{te}}$.

Corollaire. - Toutes les lois de forces $\vec{F}(x, y, z)$ qui dérivent d'une fonction de forces et qui correspondent à aux mêmes surfaces de niveau s'obtiennent en prenant $U = \varphi(V)$, $V(x, y, z)$ étant une des fonctions de force qui répond à la question.

Applications. - I. - Soit $\vec{F}(x, y, z)$ une force perpendiculaire à un plan fixe, par ex., au plan xoy : pour qu'elle dérive d'une fonction de forces, il faut et il suffit que son intensité dépende seulement de la distance de (x, y, z) au plan fixe.

En effet, les plans $z = C^{\text{te}}$ sont normaux au point o (x, y, z) à la force $\vec{F}(x, y, z)$; ces plans sont donc les surfaces de niveau; la distance de deux plans $z = C$, $z = C+h$, infiniment voisins, est constante; pour que \vec{F} dérive d'une fonction de forces, il faut donc et il suffit que F soit constant sur chaque plan $z = C^{\text{te}}$, c'est-à-dire soit une simple fonction de z . - La fonction de forces doit être aussi une simple fonction de z ; c'est ce qu'on vérifie aussi; car on a: $X=0$, $Y=0$, $Z=\varphi(z)$, et le travail élémentaire de \vec{F} est $\varphi(z)dz$, différentielle de $U(z) = \int \varphi(z) dz$.

II. - Forces centrales. - Soit $\vec{F}(x, y, z)$ une force passant par un point fixe o . Pour que \vec{F} dérive d'une fonction de force, il faut et il suffit que sa valeur absolue soit une simple fonction de la distance ρ du point o au point x, y, z . Pour le voir, il suffit de considérer les sphères $\rho = C^{\text{te}}$ et de raisonner sur ces sphères comme sur les plans $z = C^{\text{te}}$ dans l'exemple I.

Soit F la valeur absolue de la force précédée du signe $+$ ou $-$ suivant qu'elle est répulsive ou attractive: d'après le résultat du N° 68, le travail de \vec{F} est $F d\rho$ en grandeur et signe⁽¹⁾. La fonction de forces est $U(\rho) = \int_{\rho_0}^{\rho} F(\rho) d\rho$.

(1) C'est d'ailleurs un résultat élémentaire bien connue.

Supposons, pour fixer les idées, la force répulsive, donc $F > 0$. Soit PP' un

III. - Soit $\vec{F}(x, y, z)$ une force perpendiculaire à une droite fixe, OZ par ex., qu'elle rencontre constamment. Pour qu'elle dérive d'une fonction de forces, il faut et il suffit que sa valeur absolue soit fonction seulement de la distance r du point (x, y, z) à OZ .

Pour le voir, il suffit de raisonner sur les cylindres de révolution autour de OZ , $r = C^{te}$, comme tout à l'heure sur les sphères $r = C^{te}$. Si F désigne la valeur absolue de \vec{F} précédée du signe $-$ ou $+$ suivant qu'elle est dirigée vers l'axe OZ ou en sens contraire, le travail élémentaire de \vec{F} est (en grandeur et signe) $F dr$, et la fonction de forces est $U = \int_{r_0}^r F(r) dr$.

70. - Remarque. - La résultante \vec{F} de plusieurs forces $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$ dont chacune dérive d'une fonction de forces dérive elle-même d'un potentiel, somme algébrique des potentiels U_1, \dots, U_n des forces $\vec{F}_1, \dots, \vec{F}_n$.

Par exemple, si l'élément P est soumis simultanément à des forces de l'espèce I, II, III (dérivant d'un potentiel), la résultante dérive d'un potentiel.

Le théorème des forces vives dans le cas d'un potentiel.

71. - Quand la force \vec{F} appliquée à l'élément P de masse m dérive d'une fonction de forces U , le théorème des forces vives peut s'écrire :

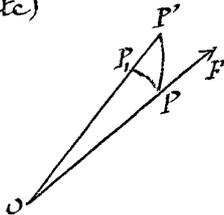
$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m v^2 = Xx' + Yy' + Zz' = \frac{\partial U}{\partial x} x' + \frac{\partial U}{\partial y} y' + \frac{\partial U}{\partial z} z' = \frac{dU}{dt},$$

d'où :

$$(3) \quad \frac{1}{2} m v^2 = U(x, y, z) + h,$$

égalité qui est vraie que U soit une fonction à une branche

(suite)



déplacement infinitésimal du point d'application. Décomposons ce déplacement en un déplacement PP_1 sur la sphère de centre O et de rayon OP (déplacement qui amène le mobile sur le rayon OP_1) et en un déplacement $P_1P' = dr$ ($dr > 0$ ou < 0). Dans le déplacement PP_1 (normal à F) le travail de \vec{F} nul ; dans le déplacement P_1P' , il est égal en grandeur et signe à $F dr$. Le résultat subsiste évidemment si la force est attractive, à condition d'appeler F la valeur absolue de \vec{F} précédée du signe $-$.

ou à plusieurs branches.

Si U est une fonction à une seule branche, la force vive reprend la même valeur chaque fois que P repasse par la même position, ou simplement par la même surface de niveau.

Si U est une fonction à plusieurs branches, il n'en est plus ainsi nécessairement. Soit C le contour fermé décrit par P (contour qui part de P_0 pour y revenir), \vec{V}_0 et \vec{V}_1 la vitesse de P à l'instant où il part de P_0 et à l'instant où il revient; soit enfin \mathcal{E} le travail de F quand P parcourt C dans le sens du mouvement. On a:

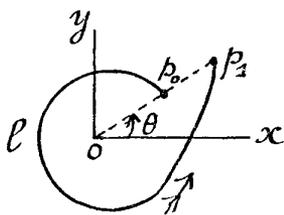
$$\frac{1}{2} mV_1^2 - \frac{1}{2} mV_0^2 = \mathcal{E}.$$

Quand on peut réduire C à un point en le déformant d'une façon continue sans rencontrer de points où F est discontinu, \mathcal{E} est nul, $V_1 = V_0$. Quand il n'en est pas ainsi, \mathcal{E} peut avoir une valeur différente de zéro, soit h , h étant la différence (constante) de deux branches de U .

Par exemple⁽¹⁾, soit:

$$X = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad Y = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad Z = 0,$$

$$\text{d'où } U = \theta = \arctg \frac{y}{x},$$



θ désignant l'angle polaire xOp de la projection p du point P sur le plan xoy . Quand P repasse deux fois par le même plan $\frac{y}{x} = Cte$, la vitesse reprend-elle la même valeur?

Soit p_0 p_1 le chemin décrit par p ; p_0 et p_1 sont sur le même rayon vecteur: Si θ reprend en p la même valeur qu'en p_0 , V_1 et V_0 (valeurs de V pour les positions P_1 et P_0) coïncident. Dans le cas de la figure, on a: $\frac{1}{2} mV_1^2 = \frac{1}{2} mV_0^2 + 2\pi$.

72. - Énergie cinétique et énergie potentielle.

On sait qu'on appelle énergie cinétique de l'élément P sa demi-force vive $\frac{1}{2} mV^2$, et énergie potentielle⁽²⁾ de P la fonction $W(x, y, z)$ égale à la fonction de force U changée

(1) On rencontre de telles fonctions de forces en électrodynamique par exemple.

(2) L'énergie potentielle n'est définie qu'à une constante d'addition près.

de signe. L'intégrale des forces vives peut s'écrire :

$$(1) \quad \frac{1}{2}mv^2 + W(x, y, z) = C^{te}.$$

Quand la fonction W n'a qu'une branche dans tout l'espace, l'énergie potentielle de P est bien déterminée par la position de P : à condition toutefois qu'on se soit donné la valeur de W pour une position déterminée de P [l'origine par exemple]. Si on veut encore, la variation d'énergie potentielle de P est bien déterminée quand on connaît la position initiale et la position finale de P . L'égalité (1) exprime que l'énergie totale de P est constante, ou encore que la variation d'énergie cinétique de P est égale et de signe contraire à la variation d'énergie potentielle.

- Remarque. - L'énergie cinétique dépend des axes choisis, de même que la force totale \vec{F} appliquée à P . Quand on remplace les axes choisis $Oxyz$ par d'autres axes animés par rapport aux premiers d'un mouvement donné, la force totale relative aux nouveaux axes, soit \vec{F}' , diffère de \vec{F} ; et en général, si \vec{F} dérive d'un potentiel, il n'en est plus de même de \vec{F}' .

Théorème des forces vives pour un système.

73. - Equation générale des forces vives. - Les axes $Oxyz$ étant arbitrairement choisis, soit S un système matériel, P un élément du système (de masse m), \vec{F} la force totale [relative aux axes $Oxyz$] qui s'exerce sur P , \vec{F}^e et \vec{F}^i les forces extérieure et intérieure [totales] qui s'exercent sur P . On a

$$\vec{F} = \vec{F}^e + \vec{F}^i$$

Ecrivons pour chaque élément P de S l'égalité de la force vive et ajoutons membre à membre; il vient:

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \sum \frac{1}{2}mv^2 = \sum (Xx' + Yy' + Zz'),$$

ou encore

$$(2) \quad d \sum \frac{1}{2}mv^2 = \sum Xdx + Ydy + Zdz.$$

On appelle force-vive du système S la somme Σmv^2 , et énergie cinétique de S sa demi-force vive T. L'égalité (2) exprime que la variation de l'énergie cinétique T de S pendant un déplacement élémentaire de S est égale au travail élémentaire de toutes les forces tant intérieures qu'extérieures appliquées à S.

En intégrant l'équation (1) membre à membre entre les instants t_0 et t_1 , on trouve :

$$\Delta T \equiv \Sigma \frac{1}{2} mv_1^2 - \Sigma \frac{1}{2} mv_0^2 = \mathcal{E},$$

\mathcal{E} désignant le travail total, entre les instants t_0 et t_1 , les diverses forces appliquées aux éléments du système.

74 - Fonction de forces pour un système. - Supposons que les forces totales $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ qui exercent sur les éléments P_1, P_2, \dots du système S ne dépendent que de la position de S; autrement dit, que les composantes $(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), \dots$ de $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$ soient des fonctions déterminées des coordonnées $x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n$ des éléments P_1, P_2, \dots, P_n de S. Pour calculer le travail \mathcal{E} de ces forces il ne suffit pas de connaître la position initiale et finale de S_0 et S_1 ; \mathcal{E} dépend en général de la suite des positions intermédiaires occupées par S entre S_0 et S_1 . Il est un cas toutefois où \mathcal{E} est déterminé quand on connaît S_0 et S_1 : c'est le cas où l'expression

$$X_1(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n) dx_1 + Y_1(\dots) dy_1 + Z_1(\dots) dz_1 + X_2(\dots) dx_2 + \dots + Z_n(\dots) dz_n$$

est la différentielle totale exacte d'une certaine fonction $U(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n)$. On dit alors que les forces appliquées à S admettent une fonction de forces U, ou dérivent d'un potentiel $W = -U$.

L'égalité des forces-vives (1) s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} \Sigma \frac{1}{2} mv^2 = \frac{\partial U}{\partial x_1} x'_1 + \frac{\partial U}{\partial y_1} y'_1 + \frac{\partial U}{\partial z_1} z'_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} x'_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial z_n} z'_n$$

et peut se remplacer par l'intégrale des forces vives :

$$(3) \quad \sum \frac{1}{2} m v^2 = U(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n) + C^{te}$$

Quand U est une fonction à une seule branche⁽¹⁾, soit U_S la valeur de U correspondant à la position S ou $(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, z_n)$ du système. Si S_0 et S_1 sont les positions du système aux instants t_0 et t_1 , on a :

$$(4) \quad \sum \frac{1}{2} m v_1^2 - \sum \frac{1}{2} m v_0^2 = U_{S_1} - U_{S_0}.$$

En particulier, si S repasse deux fois par la même position S_0 , sa force vive reprend la même valeur.

Quand U est une fonction à plusieurs déterminations soit U_1, U_2, \dots , les différences $U_2 - U_1, U_3 - U_1$, etc. sont des constantes h, h_1, \dots . On peut toujours écrire l'égalité (3), U désignant une des branches arbitrairement choisie de la fonction de force. Quand le système repasse par sa position première S_0 , il peut se faire que U reprenne sa valeur première, soit U_1 , ou au contraire coïncide avec une autre branche de U , soit U_2 ; on a alors :

$$\Delta T \equiv \sum \frac{1}{2} m v_1^2 - \sum \frac{1}{2} m v_0^2 = h.$$

75. Énergie

(1) La fonction U est bien définie à une constante d'addition près; car si U et U_1 sont deux fonctions de forces, U et U_1 ont identiquement mêmes dérivées premières, et par suite $U - U_1$ est une constante.

75. Énergie cinétique et énergie potentielle. -

Plaçons-nous dans l'hypothèse où il existe une fonction de forces à une seule branche. L'énergie potentielle de S est, par définition, la fonction $W = -U$; cette énergie est bien définie par la position de S , une fois choisie la valeur de U pour une position déterminée de S . Si on veut encore, la variation de l'énergie potentielle de S est bien déterminée quand on se donne les positions initiale et finale de S . L'égalité (3) peut s'écrire

$$(5) \quad \sum \frac{1}{2} m v^2 + W(x, y, z, x_1, \dots, z_{n-1}) = C^{te}$$

Elle exprime que l'énergie totale de S [tout cinétique que potentielle] reste constante.

76. Travail des forces intérieures. - Le travail des forces \vec{F} [entre les instants t_0 et t_1] est la somme 1° du travail, soit E^e , des forces extérieures \vec{F}^e , 2° du travail, soit E^i , des forces intérieures \vec{F}^i .

Je dis que ce dernier travail est indépendant du choix des axes.

Soit \vec{F}_{jk} la force (absolute) exercée par l'élément P_k de S sur l'élément P_j ; on sait que $\vec{F}_{jk} = -\vec{F}_{kj}$. Je vais montrer que le travail des deux forces \vec{F}_{jk} , \vec{F}_{kj} est indépendant du choix des axes.

Supposons d'abord P_j et P_k non en contact. Représentons par F_{kj} la valeur absolue de la force exercée par P_j sur P_k , précédée du signe + ou - suivant qu'elle est de sens $P_j P_k$ [force répulsive] ou de sens $P_k P_j$ (force attractive). Soit $r_{kj} = r_{jk}$ la valeur absolue de la distance $P_j P_k$. Je dis que dans tout déplacement élémentaire de P_j , P_k , le travail des deux forces \vec{F}_{kj} , \vec{F}_{jk} est égal à $F_{kj} dr_{jk}$ (1).

(1) Il est facile de le vérifier par le calcul. Ses composantes de \vec{F}_{kj} sont

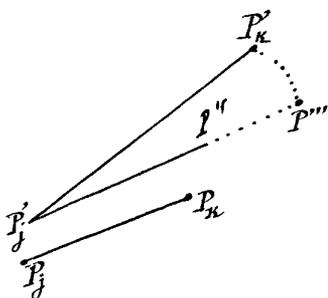
$$F_{kj} \frac{x_k - x_j}{r_{kj}}, \quad F_{kj} \frac{y_k - y_j}{r_{kj}}, \quad F_{kj} \frac{z_k - z_j}{r_{kj}};$$

Le travail de \vec{F}_{kj} dans le déplacement dx_k, dy_k, dz_k de P_k est :

Celui de \vec{F}_{jk} se déduit du précédent en permutant j et k , et le travail des deux forces est

$$\frac{F_{kj}}{r_{jk}} \left\{ (x_k - x_j) (dx_k - dx_j) + (y_k - y_j) (dy_k - dy_j) + (z_k - z_j) (dz_k - dz_j) \right\}.$$

En effet, soit P_j, P_k une position des deux éléments, P'_j, P'_k une position infiniment voisine, ds_{jk}^2 la variation de s_{jk}^2 . On peut décomposer le déplacement des deux éléments en deux autres :



- 1° une translation élémentaire qui amène P_j en P'_j et P_k en P''_k , [$\overline{P_j P_k} = \overline{P'_j P''_k}$]
- 2° un déplacement P''_k de P''_k en P'_k , (P_j restant immobile en P'_j).

Dans le déplacement 1°, les deux déplacements de P_j et de P_k sont équipollents, et comme $\overline{F_{jk}} = -\overline{F_{kj}}$, le travail des deux forces est nul.

Deux forces est nul.

Dans le déplacement 2°, le travail de $\overline{F_{jk}}$ est nul, puisque P_j est fixe; le travail de $\overline{F_{kj}}$ est égal, d'après une propriété des forces centrales [N.° 69], à $\int_{kj} \overline{F_{kj}} ds_{kj}^2$.

Le travail total des deux forces $\overline{F_{jk}}, \overline{F_{kj}}$ dans le déplacement élémentaire $\overline{P_j P'_j}, \overline{P_k P'_k}$ des deux éléments P_j et P_k , est donc bien égal à $\int_{kj} \overline{F_{kj}} ds_{kj}^2$. C. q. f. d.

77. — Quand les deux éléments P_j, P_k sont en contact soit \vec{V} et \vec{V}_i leurs vitesses respectives à l'instant t ; le travail élémentaire de $\overline{F_{jk}}$ est (F désignant la valeur absolue de $\overline{F_{jk}}$ et $\overline{F_{kj}}$):

$$F dt \times (\text{proj. } \vec{V} \text{ sur } \overline{F_{jk}});$$

celui de $\overline{F_{kj}}$ est :

$$F dt (\text{proj. } \vec{V}_i \text{ sur } \overline{F_{kj}});$$

la somme des deux travaux peut s'écrire :

$$F dt \times [\text{proj. } (\vec{V} - \vec{V}_i) \text{ sur } \overline{F_{jk}}] = F dt \times (\text{proj. } \vec{W} \text{ sur } \overline{F_{jk}})$$

\vec{W} représentant la vitesse relative $\vec{V} - \vec{V}_i$ de P_j par rapport à P_k , vecteur indépendant du choix des axes.

Il suit de là immédiatement que le travail élémentaire total des forces intérieures à distance est indépendant

(Suite) Or on a :

$$r_{kj}^2 = (x_k - x_j)^2 + (y_k - y_j)^2 + (z_k - z_j)^2,$$

d'où :

$$r_{kj} dr_{kj} = (x_k - x_j)(dx_k - dx_j) + (y_k - y_j)(dy_k - dy_j) + (z_k - z_j)(dz_k - dz_j)$$

Le travail des deux forces $\overline{F_{jk}}, \overline{F_{kj}}$ est donc :

$$\int_{kj} \overline{F_{kj}} dr_{kj}$$

C. q. f. d.

du choix des axes, de même que celui des forces intérieures de contact. Par suite, il en est de même du travail total de ces forces dans un déplacement fini du système. Le travail de toutes les forces intérieures est donc une quantité absolue, qui a un sens vraiment physique.

Toute hypothèse faite sur ce travail est indépendante des axes adoptés.

Si le système S est un solide indéformable, le travail est nul.

78. - L'énergie cinétique et le travail des forces extérieures. - Soit T la demi-force vive ou énergie cinétique du système, ΔT la variation de T entre deux instants t_0 et t_1 , \mathcal{E}^e et \mathcal{E}^i les travaux des forces extérieures et des forces intérieures dans le même intervalle de temps. L'égalité des forces vives peut s'écrire :

$$(6) \quad \Delta T - \mathcal{E}^e = \mathcal{E}^i.$$

L'énergie cinétique $\sum \frac{1}{2} mV^2$ dépend des axes choisis. Il en est de même du travail des forces extérieures et cela pour deux raisons : d'abord parce que la force extérieure totale \vec{F}^e appliquée à un élément P du système ne reste pas la même en général quand on change d'axes ; ensuite parce que la vitesse \vec{V} de P change également⁽¹⁾.

Mais l'équation (6) met en évidence ce fait remarquable : la variation de l'énergie cinétique ΔT et le travail des forces extérieures ont une différence qui est absolue [j'entends indépendante du choix des axes], bien que ces deux grandeurs soient toutes deux relatives aux axes choisis. Cette différence $\Delta T - \mathcal{E}^e$ coïncide avec le travail des forces intérieures.

En particulier, si T reprend la même valeur aux instants t_0 et t_1 , \mathcal{E}^e est égal à $-\mathcal{E}^i$. Ceci s'applique notamment au cas où T reste très faible et peut être négligé. Dans ce dernier cas, si les forces extérieures dérivent d'un potentiel à détermination unique soit V , le travail \mathcal{E}^i des forces intérieures est égal à $V_{S_1} - V_{S_0}$, S_1 et S_0 désignant

⁽¹⁾ Si on remplace les axes choisis $Oxyz$ par des axes animés par rapport aux premiers d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme, de vitesse \vec{u} , les forces \vec{F}^e ne sont pas modifiées, mais leur travail élémentaire ne reste pas le même ; il est diminué, pour chaque force F^e , de la quantité $F^e \cdot u \cdot \cos(F^e, \vec{u}) dt$ [quantité positive ou négative].

les positions initiale et finale de S ; le travail E^i est donc alors déterminé quand on connaît seulement S_0 et S_1 .

Par exemple, imaginons un homme en équilibre sur le sol et qui soulève très lentement un poids mg ; les réactions du sol ont un travail nul; le travail des forces extérieures se réduit au travail de la pesanteur. Or considérons le système formé par le poids et l'homme qui le soulève et soit M la masse de ce système, ζ le z de son centre de gravité, (Oz étant la verticale ascendante); la pesanteur appliquée au système admet la fonction de force $U = -\sum mgz = -Mg\zeta$, et si h est la hauteur dont s'accroît ζ le travail de la pesanteur est $-Mgh$. Le travail des forces intérieures (travail des muscles de l'homme), quantité absolue, est donc égal ici à Mgh . La même conclusion subsiste rigoureusement, si rapidement que le poids soit soulevé, pourvu qu'au début et à la fin les vitesses du système soient nulles.

79. - Systèmes conservatifs. - Supposons que les forces intérieures d'un système matériel soient fonctions seulement de la distance des éléments qui agissent l'un sur l'autre. Autrement dit, supposons que F_{jk} soit une simple fonction de r_{jk} , F_{jk} désignant comme nous l'avons dit (N° 77), la force exercée par l'élément P_j sur l'élément P_k , et F_{jk} la valeur absolue de F_{jk} , précédée du signe + au - suivant qu'elle est répulsive ou négative. Le travail élémentaire des deux forces F_{jk} et F_{kj} est alors (N° 77).

$$F_{jk} (r_{jk}) dr_{jk},$$

et le travail total des forces intérieures dérive de la fonction de forces $U(r_{12}, r_{13}, \dots, r_{jk}, \dots) = \sum_{jk} U_{jk}(r_{jk})$, [U_{jk} primitive de $F_{jk}(r_{jk})$]. Comme la fonction F_{jk} de r_{jk} est une fonction bien déterminée de r_{jk} (c'est-à-dire à une seule branche), il en est de même de sa primitive, et la fonction de force U est une fonction à une branche des distances r_{jk} . Si on veut encore, quand on connaît la configuration C du système S [c'est-à-dire par définition les distances mutuelles r_{jk} des éléments de S], la valeur de U est bien déterminée. (1) Quand S passe de la configuration C_0 à

(1) Cette fonction U n'est définie qu'à une constante d'addition près, qu'on fixe en adoptant arbitrairement la valeur de U pour une configuration donnée du système.

la configuration C_1 , le travail des forces intérieures est indépendant des configurations intermédiaires, et égal à la différence $U_{C_1} - U_{C_0}$.

D'une manière générale, on dit qu'un système S est conservatif quand les forces intérieures dérivent d'une fonction de forces bien déterminée par les distances mutuelles des éléments de S . Si U est la fonction de forces, et si S passe de la configuration C_0 à la configuration C_1 , le travail des forces intérieures est la quantité bien déterminée $U_{C_1} - U_{C_0}$.

Quand le système S est conservatif, la variation d'énergie cinétique ΔT , diminuée du travail \mathcal{E}^e des forces extérieures, ne dépend que de la configuration initiale C_0 et de la configuration finale C_1 du système, et non des configurations intermédiaires. On a :

$$\Delta T - \mathcal{E}^e = U_{C_1} - U_{C_0}.$$

On donne le nom de potentiel interne ou d'énergie potentielle interne, à la fonction $W = -U$. L'égalité des forces vives peut alors s'écrire :

$$\Delta [T + W] = \mathcal{E}^e$$

autrement dit, la variation d'énergie interne totale (tant cinétique que potentielle interne) du système est égale au travail des forces extérieures.

Considérons un système dont chaque élément garde le même état physique et chimique.

Quand toutes les forces intérieures sont des forces à distance, on admet en physique que le système S est conservatif. Si le système S est infiniment éloigné de tous les autres corps matériels et si les axes choisis sont des axes absolus, les forces extérieures appliquées au système sont nulles, par suite leur travail. L'énergie totale $T + W$ du système est alors constante.

Quand les forces intérieures comprennent des forces de contact ou quand par exemple l'état électrique des éléments de S varie, les choses sont beaucoup plus complexes. Nous revenons plus loin sur ce sujet.

80. - Unité de travail et d'énergie. - Les dimensions d'un travail (produit d'une force par une longueur) sont $L^2 MT^{-2}$, comme celles d'une force-vive. Si donc deux nombres

qui mesurent d'une part un certain travail, ou une variation d'énergie potentielle, d'autre part une énergie cinétique (ou une variation d'énergie cinétique) sont égaux dans un système d'unités (par exemple dans le système C. G. S.), ils restent égaux dans tout système d'unités; plus généralement, leur rapport est une quantité purement numérique, indépendante des unités adoptées. D'après cela, on convient de dire qu'une variation quelconque d'énergie cinétique est égale à un certain travail, si les deux quantités sont mesurées par le même nombre. En vertu du théorème des forces vives, à toute quantité d'énergie cinétique qui disparaît correspond un travail (négatif) égal des forces tant intérieures qu'extérieures appliquées au système; à toute quantité d'énergie cinétique qui apparaît, correspond un travail (positif) égal de ces forces.

Dans le système C. G. S., l'unité de travail est le travail d'une dyne dans un déplacement de 1 cm qui a le sens de la force. Cette unité s'appelle l'erg. A cause de sa petitesse, on la remplace en général par le Joule égal à 10^7 ergs, ou par le kilogrammètre [travail d'un kilogr.-poids (à Paris) quand son point d'application décrit un mètre dans le sens de la pesanteur], le kilogrammètre est égal à $981 \cdot 10^5$ ergs, ou à 9,81 Joules [presque 10 Joules].

Pour qu'une masse d'un gramme ait une énergie cinétique égale à 1 Joule par exemple, il faut qu'on ait $\frac{V^2}{2} = 10^7$ (V étant mesuré en centimètres); d'où $V = 44$ mètres à la seconde.

Le théorème des forces-vives et le mouvement autour du centre de gravité G .

81. - Extension du théorème des forces vives au mouvement autour de G . - On peut étendre le théorème des forces vives, comme le théorème des moments cinétiques, au mouvement d'un système autour de son centre de gravité, cela sans changer les forces.

Je m'appuierai sur le lemme suivant.

Lemme. - Soit m la masse d'un élément P du système S , et $m\mathbf{f}$ une force appliquée (à l'instant t) à cet élément, le

vecteur \vec{f} étant le même pour tous les éléments. Le travail élémentaire de toutes ces forces $m\vec{f}$ est le même que celui d'une force $M\vec{f}$ qui serait appliquée à un élément coïncidant constamment avec G , [$M = \Sigma m$].

En effet, il est loisible de supposer que l'axe fixe Oz est parallèle à \vec{f} (à l'instant t). Le travail élémentaire des forces $m\vec{f}$ est alors :

$$\Sigma m f dz = f \Sigma m dz = f M dz,$$

z désignant le z de G .

Ceci posé, soit $Oxyz$ les axes choisis, \vec{F} la force totale relative aux axes $Oxyz$ qui s'exerce sur l'élément P ou (x, y, z) du système, de masse m . Si $2T$ désigne la force-vive du système, on a :

$$dT = \Sigma (X dx + Y dy + Z dz).$$

Remplaçons les axes $Oxyz$ par de nouveaux axes O, x, y, z , animés d'un mouvement quelconque par rapport aux premiers; si \vec{F}^r est la nouvelle force [relative aux axes O, x, y, z] qui s'exerce sur P , $2T_1$ la nouvelle force-vive, on a :

$$dT_1 = \Sigma (X^r dx + Y^r dy + Z^r dz).$$

Ceci posé, nous allons montrer qu'on peut appliquer le théorème des forces vives au mouvement autour de G sans changer les forces.

En effet, soit Gx, y, z , des axes parallèles aux axes fixes, \vec{A} l'accélération du point G [à l'instant t] par rapport aux axes $Oxyz$; on a :

$$\vec{F}^r = \vec{F} - m\vec{A}.$$

La force-vive du système dans son mouvement autour de G étant représentée par $2T_1$, la variation élémentaire dT_1 de T_1 est égale au travail des forces \vec{F} et $-m\vec{A}$ dans le déplacement élémentaire du système par rapport au trièdre Gx, y, z . Or, d'après le lemme, le travail des forces $-m\vec{A}$, est égal au travail qu'effectuerait la force $-M\vec{A}$ si elle était appliquée à un élément coïncidant constamment avec le point G ; mais par rapport aux axes Gx, y, z , G est immobile, et ce dernier travail est nul. On a donc :

$$dT_1 = \Sigma (X dx + Y dy + Z dz).$$

Remarque. — Le travail des forces \vec{F} entre les instants t et $t+dt$ n'est pas le même suivant qu'on étudie le mouvement par rapport aux axes $Oxyz$ ou par rapport aux axes $Gx_1y_1z_1$. Si ξ, η, ζ sont les coordonnées de G par rapport à $Oxyz$, on a :

$$\begin{aligned} \Sigma (Xdx + Ydy + Zdz) &= \Sigma \{ X(d\xi + dx_1) + Y(d\eta + dy_1) + Z(d\zeta + dz_1) \} \\ &= d\xi \Sigma X + d\eta \Sigma Y + d\zeta \Sigma Z + \Sigma (Xdx_1 + Ydy_1 + Zdz_1). \end{aligned}$$

Les deux travaux diffèrent donc de la quantité $(d\xi \Sigma X + d\eta \Sigma Y + d\zeta \Sigma Z)$.

§2. — Théorème de Koenig. — Ce théorème est l'analogue, pour les forces vives, du théorème du N° 53 sur les moments cinétiques. Il s'énonce ainsi :

La force vive d'un système est la somme 1° de la force vive du système dans son mouvement autour de G ; 2° de la force vive de G où toute la masse serait concentrée.

On a en effet :

$$\begin{aligned} (1) \quad 2T &= \Sigma m(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = \Sigma m \{ (x_1 + \xi)^2 + (y_1 + \eta)^2 + (z_1 + \zeta)^2 \} \\ &= \Sigma m(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) + 2\xi \Sigma mx_1 + 2\eta \Sigma my_1 + 2\zeta \Sigma mz_1 \\ &\quad + (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \Sigma m. \end{aligned}$$

Or on a :

$$\Sigma mx_1 = \Sigma my_1 = \Sigma mz_1 = 0,$$

d'où

$$\Sigma mx_1' = \Sigma my_1' = \Sigma mz_1' = 0,$$

et si M est la masse totale du système, V la vitesse de G , l'égalité (1) s'écrit : $2T = \Sigma m(x_1'^2 + y_1'^2 + z_1'^2) + MV^2 = 2T_1 + MV^2$, ce qui démontre le théorème.

§3. — Nouvelle démonstration du théorème N° 81.
Déduisons du théorème de Koenig le théorème des forces vives appliqué au mouvement autour de G .

Le théorème des forces vives donne :

$dT = \Sigma X dx + Y dy + Z dz$,
ou bien, en vertu du théorème de Kœnig,

$$(2) \quad dT_1 + d \frac{1}{2} M V^2 = \Sigma \{ X(d\xi + dx_i) + Y(d\eta + dy_i) + Z(d\zeta + dz_i) \}$$

$$= \Sigma (X dx_i + Y dy_i + Z dz_i) + d\xi \Sigma X + d\eta \Sigma Y + d\zeta \Sigma Z.$$

Mais le point G se meut comme un point de masse M soumis à chaque instant, à la force ΣF . Le théorème des forces vives appliqué à ce point fictif donne :

$$(3) \quad d \frac{1}{2} M V^2 = d\xi \Sigma X + d\eta \Sigma Y + d\zeta \Sigma Z,$$

et l'équation (2) où on tient compte de (3) devient

$$dT_1 = \Sigma (X dx_i + Y dy_i + Z dz_i)$$

C. q. f. d.

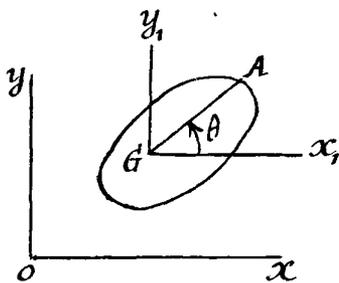
Cette démonstration met en évidence ce fait important que le théorème des forces vives dans le mouvement autour de G est un corollaire du théorème ordinaire des forces vives et du théorème du mouvement du centre de gravité.

84. — Le théorème des forces vives et les six équations universelles du mouvement. — Le théorème des forces vives ajoute aux six équations universelles du mouvement une 7^e équation en général distincte des six autres, et où figurent les forces intérieures.

Il est un cas toutefois où les forces intérieures n'interviennent pas, c'est le cas où le système considéré est un solide indéformable, car leur travail est alors nul (N° 77). D'autre part, nous avons dit (N° 56) que les six équations universelles suffisent à déterminer le mouvement d'un solide, quand on connaît, à chaque instant, la somme géométrique et le moment résultant par rapport à un

point O des forces extérieures appliquées au solide. Le théorème des forces vives, qui relie le mouvement du système aux seules forces extérieures, doit donc être une conséquence des six équations universelles. Bornons-nous pour le moment, à le vérifier dans le cas où le solide est un disque plan mobile dans un plan fixe.

85. - Application au mouvement d'un disque plan dans un plan.



Considérons un disque solide S de masse M qui se meut dans le plan xoy , et soit ξ, η les coordonnées du centre de gravité, θ l'angle x_1GA que fait avec Ox la demi-droite GA fixe dans le disque. Le théorème du mouvement du centre de gravité donne aussitôt :

$$(1) \quad M\xi'' = \sum X^e, \quad M\eta'' = \sum Y^e;$$

le théorème des moments cinétiques dans le mouvement autour de G donne :

$$\sum mr^2\theta'' = \sum (x_1Y^e - y_1X^e),$$

ou encore :

$$(2) \quad MK^2\theta'' = \sum (x_1Y^e - y_1X^e), \quad (MK^2 = \sum mr^2).$$

Si, à chaque instant t , on connaît $\sum X^e, \sum Y^e, \sum (x_1Y^e - y_1X^e)$, les équations (1) et (2), dont les seconds membres sont des fonctions données de t , définiront ξ, η, θ en fonction de t connaissant, à l'instant t_0 , la position ξ_0, η_0, θ_0 et les vitesses $\xi'_0, \eta'_0, \theta'_0$ du disque.

Écrivons maintenant le théorème des forces vives dans le mouvement de S autour de G . Ce mouvement est, à l'instant t , une rotation de vitesse angulaire θ' ; la force vive du solide autour de G est $\sum mr^2\theta'^2 = MK^2\theta'^2$. Dans la rotation $d\theta$ autour de G , les coordonnées x_1, y_1 d'un élément P du disque subissent les variations

$$dx_1 = -y_1 d\theta, \quad dy_1 = x_1 d\theta$$

et le travail des forces \bar{F} appliquées à S est :

$$d\theta \sum (x_1Y^e - y_1X^e).$$

L'égalité des forces vives dans le mouvement autour de G s'écrit donc

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} m K^2 \theta'^2 = \theta' \Sigma (x_i Y_i^e - y_i X_i^e)$$

ou encore

$$M K^2 \theta'' = \Sigma (x_i Y_i^e - y_i X_i^e);$$

elle coïncide avec l'équation (3).

Nous vérifions bien ainsi : 1° que le théorème des forces vives est, dans ce cas, une conséquence du théorème du mouvement du centre de gravité et du théorème des moments cinétiques ; 2° que, par suite, le travail des forces appliquées à S est bien déterminé quand on connaît, à chaque instant t , la somme géométrique et le moment résultant (par rapport à un point donné) des forces extérieures appliquées à S .

Par exemple, si les éléments P du disque sont attirés par l'origine O proportionnellement à leur masse et à la distance OP , l'égalité :

$$M \cdot \overline{OG} = \Sigma m \overline{OP}$$

montre que ces attractions admettent une résultante géométrique qui est la même que si toute la masse M de S était concentrée en son centre de gravité. Pour calculer le travail élémentaire des forces F_i^e , on peut remplacer à chaque instant ces forces par cette résultante appliquée au point G de S (invariablement lié à S). Dans le mouvement autour de G , le travail de cette résultante est nul ; T est donc constant. — On voit aussitôt que G décrit une ellipse du centre O et que $\theta' = \theta_0$.

86. — Remarque sur les systèmes de forces géométriquement équivalents. — Si le système S n'est pas un solide, il faut bien se garder de croire qu'on ait le droit, dans l'évaluation de leur travail, de remplacer les forces extérieures par d'autres forces géométriquement équivalentes, appliquées à d'autres éléments du système.

Par exemple, considérons encore un disque plan S mais déformable donc les éléments P sont attirés par O proportionnellement à la masse et à la distance $OP = r$.

Supposons que S se déforme de façon que G coïncide

constamment avec le même élément matériel de S . Le travail élémentaire des attractions de O dans le mouvement rapporté aux axes xoy , est la différentielle de $f \sum \frac{m\rho^2}{2}$, f désignant le coefficient d'attraction. Or on a [la notation étant celle du N° 82] :

$$\begin{aligned} \sum m\rho^2 &= \sum m(x^2+y^2) = \sum m(x_1^2+y_1^2) + 2m\xi \sum x_1 + 2m\eta \sum y_1 \\ &\quad + M(\xi^2+\eta^2) \\ &= Mx \overline{OG}^2 + \sum m\rho^2, \quad (\rho = GP). \end{aligned}$$

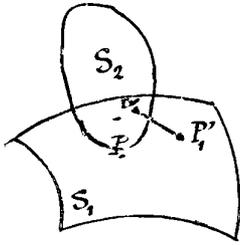
Le travail de ces attractions dans le mouvement autour de G est (remarque N° 82) : $f d \sum \frac{m\rho^2}{2} = f d \frac{M \cdot \overline{OG}^2}{2} = f d \sum \frac{m\rho^2}{2}$.

Si on remplace ces attractions par leur résultante géométrique (attraction unique appliquée à l'élément G), le travail de cette résultante est nul dans le déplacement autour de G . Le résultat est donc erroné, à moins que $\sum m\rho^2$ ne soit constant, ce qui n'a pas lieu en général quand S se déforme.

Application du théorème des forces-vives aux systèmes formés de solides invariables.

87. - Théorèmes cinématiques sur le glissement de deux solides l'un sur l'autre. — Soit S_1 et S_2 deux surfaces solides assujetties à rester en contact, et soit, à l'instant t , P_1 et P_2 l'élément de S_1 et l'élément de S_2 qui sont en contact en un certain point géométrique P ; soit \vec{V}_1 et \vec{V}_2 les vitesses de P_1 et de P_2 à cet instant. Par définition, la vitesse de glissement de S_2 sur S_1 (à l'instant t) est le vecteur $\vec{V}_2 - \vec{V}_1$. Sa vitesse de glissement de S_1 sur S_2 à savoir $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$, est égale et directement opposée à la précédente. Le vecteur $\vec{V}_2 - \vec{V}_1$ est indépendant du choix des axes auxquels sont rapportés les mouvements [N° V], puisque P_1 et P_2 coïncident en P à l'instant t .

Je dis que ce vecteur est ou nul ou tangent en P aux deux surfaces S_1, S_2 . En effet, nous pourrions toujours choisir les axes $Oxyz$ invariablement liés au solide S_1 ; V_1



est nul, et tout revient à démontrer que \vec{V}_2 (s'il n'est pas nul) est tangent en P à deux surfaces. Or considérons l'élément de S_1 et l'élément de S_2 qui seront en contact à l'instant $t + dt$, et soit P_1, P_2 leur position à l'instant t . Entre les instants t et $t + dt$, l'élément P_2 de S_2 passe de la

position P_1 ; la vitesse de cet élément à l'instant t diffère donc très peu du vecteur $\frac{P_2 P_1}{dt}$, et d'autre part elle diffère très peu de \vec{V}_2 . On a donc: ~~et~~

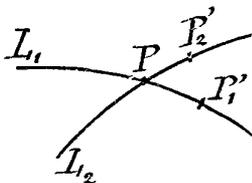
$$\vec{V}_2 = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P_2 P_1}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\overline{P P_1}}{dt} - \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{P P_2}{dt} = \vec{W}_1 - \vec{W}_2,$$

\vec{W}_1 et \vec{W}_2 désignant (à l'instant t) la vitesse de déplacement du point de contact sur S_1 et sur S_2 . Comme ces deux vecteurs sont ou nuls ou tangents en P le premier à S_1 , le second à S_2 , le vecteur \vec{V}_2 est tangent en P aux deux surfaces. C. q. f. d.

Corollaire. - Si les deux surfaces restent tangentes en plusieurs points ou le long d'une ligne, le théorème précédent s'applique à tous les points de contact.

Cas particuliers. - Quand une des surfaces se réduit à une ligne solide ou à un point, (Exemple, S_1 est un cerceau, ou une toupie terminée par une pointe, etc.), le théorème précédent subsiste. Si notamment S_2 glisse sur une pointe fixe O , à l'instant t la vitesse de l'élément de S_2 en contact avec O est tangente en O à S_2 (ou nulle).

Si les deux surfaces se réduisent à deux lignes solides I_1 et I_2 (deux barres par exemple) qui s'appuient constamment l'une sur l'autre,



soit P_1 et P_2 les éléments de I_1 et I_2 qui coïncident en P à l'instant t :

$\vec{V}_2 - \vec{V}_1$ (vitesse de glissement de I_2 sur I_1) est située dans le plan tangent en P aux deux courbes I_1 et I_2 . Il suffit pour le voir, de considérer encore les posi-

tions P_1, P_2 , à l'instant t , des éléments des deux lignes qui coïncident à l'instant $t + dt$, et de raisonner comme tout à l'heure.

88. Roulement et pivotement sans glissement de deux solides l'un sur l'autre. - On dit que deux surfaces solides S_1 et S_2 roulent et pivotent sans glisser l'une sur l'autre si la vitesse de glissement d'un solide sur l'autre est constamment nulle. Quand les solides sont en contact par plusieurs points, pour qu'il y ait roulement et pivotement sans glissement, il faut que la vitesse de glissement soit nulle en tous les points de contact.

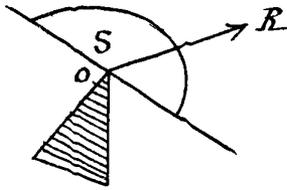
Nous reviendrons plus tard sur ce mode de mouvement et sur la signification des mots roulement et pivotement. Nous nous bornons pour l'instant à ces définitions.

Travail des réactions d'un système de solides.

89. - Sur le calcul ^{du travail} de forces appliquées à un corps continu. - Quand un système matériel S est formé d'un nombre fini de points matériels séparés, le calcul du travail des forces appliquées à ce système ne saurait donner lieu à aucune difficulté. Soit, en effet, \vec{F} une force appliquée au point matériel P ; le travail de \vec{F} entre les instants t et $(t+dt)$ est égal à $FV \cos(\vec{V}, \vec{F}) dt$, V désignant la vitesse du point P .

Quand le système est continu, pour appliquer correctement la définition du travail, il faut considérer l'élément matériel P du système auquel la force est appliquée à l'instant t , la vitesse V de cet élément et former l'expression $FV \cos(\vec{F}, \vec{V}) dt$. De même, dans la formule $F ds (\cos \vec{F}, \vec{ds})$, ds désigne le déplacement infinitésimal de l'élément matériel P du système auquel \vec{F} est appliquée à l'instant t . Mais l'emploi de l'une ou l'autre de ces deux formules n'est pas sans soulever parfois certaines difficultés, sur lesquelles les deux exemples suivants suffisent à attirer l'attention.

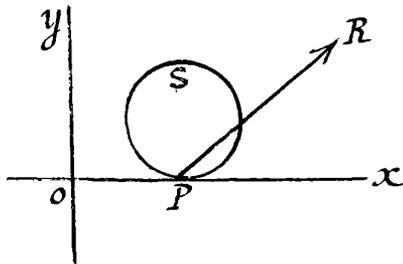
1^{er} Exemple. - Considérons un solide S glissant \mathcal{O} avec frottement sur un appui fixe O ; soit \vec{R} la réaction exercée par l'appui O sur S , réaction qui est oblique sur la surface limite de S . Calculons son travail dans \mathcal{O} l'intervalle de temps t à $t+dt$. Si V désigne la vitesse (à l'instant t) de l'élément matériel P de S qui (à cet instant) est en contact avec O , le travail cherché est égal



à $R \cdot V \cos(R, V) dt$. La vitesse \vec{V} , tangente en O (comme on sait) à la surface limite de S, est oblique sur \vec{R} . Si donc V est $\neq 0$, le travail de \vec{R} n'est pas nul.

L'erreur qu'on peut commettre, consiste à raisonner ainsi: "Le point (géométrique) d'application de la force \vec{R} coïncide constamment avec O; il est donc fixe et le travail de \vec{R} est nul."

2^e Exemple. - Soit un disque plan S qui se meut dans un plan fixe xOy et qui est assujéti à rouler sans glisser sur une droite fixe Ox . Soit \vec{R} la réaction, oblique en général sur Ox , exercée par Ox sur le disque. Calculons le travail de \vec{R} dans l'intervalle de temps t à $t+dt$.



Puisqu'il y a roulement sans glissement, à l'instant t , la vitesse \vec{V} de l'élément matériel P de S en contact avec Ox , est nulle. Le travail $RV \cos(R, V) dt$ de la force \vec{R} qui est appliquée à cet élément est donc nul.

L'erreur eût consisté à dire: "Le point (géométrique) d'application de la force \vec{R} décrit la droite Ox avec une certaine vitesse égale à W à l'instant t . Le travail de \vec{R} est donc égal à $RW \cos(R, W) dt$, quantité différente de "zéro en général".

90. - Travail des réactions des deux solides en contact. - Soit S_1 et S_2 deux solides dont les surfaces restent en contact. Le travail des réactions intérieures de chaque solide est nul (ainsi d'ailleurs que le travail des forces intérieures à distance). Calculons le travail des réactions des deux solides l'un sur l'autre.

Soit P_1 et P_2 les deux éléments de S_1 et de S_2 qui sont en contact en P à l'instant t , \vec{R} la réaction de P_2 sur P_1 et $-\vec{R}$ la réaction de P_1 sur P_2 . Le travail des deux forces \vec{R} et $-\vec{R}$ dans un déplacement élémentaire de S et S_1 est (N^o 27):

$$R \times (\text{proj. } W \text{ sur } R) dt = RW \cos(W, R) dt$$

W désignant la vitesse relative de P_1 par rapport à P_2 , c. à d.

la vitesse de glissement de S_1 sur S_2 vitesse qui est tangente commune en P à S_1 et à S_2 .

On convient de dire que les deux surfaces en contact sont parfaitement lisses, ou encore qu'elles glissent sans frottement l'une sur l'autre, si la réaction \bar{R} de S_2 sur S_1 est toujours normale aux deux surfaces. Quand il en est ainsi, le travail des deux réactions \bar{R} et $-\bar{R}$ est nul, puisque $\cos(W, R)$ est nul.

Si la réaction \bar{R} n'est pas normale à S_1 et S_2 , soit R_T sa projection sur le plan tangent commun en P à S_1 et S_2 [réaction tangentielle ou force de frottement] et R_n sa projection sur la normale à S_1 et S_2 (réaction normale).

L'expérience montre ⁽¹⁾ que R_T est directement opposée à la vitesse de glissement W de S_1 sur S_2 . Le travail fini des deux forces \bar{R} , $-\bar{R}$ est donc essentiellement négatif ou nul; car leur travail élémentaire est

$$-R_T W dt.$$

Pour que le travail fini de \bar{R} et $-\bar{R}$ soit nul, il faut donc et il suffit ou que R_T soit constamment nul [c. à d. que S_1 et S_2 soient parfaitement lisses]; ou que W soit constamment nul, c'est-à-dire que les surfaces S_1 et S_2 roulent et pivotent sans glisser l'une sur l'autre.

Dans la réalité \bar{R} n'est jamais rigoureusement normale à S_1 et S_2 : si donc il y a glissement, le travail de \bar{R} et $-\bar{R}$ est essentiellement négatif et différent de zéro. Si

(1) On admet de plus que R_T est proportionnelle à R_n , soit $R_T = f R_n$, la constante f dépendant de la nature des deux éléments en contact P_1, P_2 . Mais cette dernière loi n'est qu'une grossière approximation.

Le glissement est théoriquement nul, les réactions de S_1 ou S_2 ont pourtant un faible travail (négatif): en effet les deux surfaces matérielles S_1 et S_2 sont en contact non pas par un point géométrique mais par une petite aire désignée A . Or ce qui précède s'applique à chacun des éléments en contact: supposons, pour fixer les idées, que S_1 roule et pivote sans glisser sur S_2 immobile; cela signifie que la vitesse d'un certain point P de S_1 appartenant à l'aire A est nulle, mais les points voisins P' de S_1 ont une vitesse différente de zéro, très petite il est vrai: d'où un travail très faible, mais essentiellement négatif, des réactions mutuelles de S_1 et S_2 .

En définitive, le travail des réactions mutuelles de S_1 et de S_2 est essentiellement négatif; il est très faible si les deux surfaces sont presque parfaitement lisses, ou si les deux surfaces (lisses ou rugueuses) roulent et pivotent sans glisser l'un sur l'autre.

Il est un cas enfin qu'il convient de signaler dès maintenant: c'est le cas où les deux surfaces S_1 et S_2 viennent se heurter. [Exemple - Une balle qui vient rebondir sur un mur ou s'incruster dans ce mur]. Les deux surfaces exercent alors l'une sur l'autre, pendant un temps très court t_0, t_1 , des réactions considérables, qui, entre les instants t_0, t_1 , produisent une modification finie des vitesses. On dit, dans ce cas, qu'il y a choc ou percussion. Les chocs et percussions seront étudiés plus tard. Nous indiquons dès maintenant ce résultat de l'expérience: Dans un choc entre deux solides le travail total des réactions intérieures est toujours négatif.

91. - Combinaisons de la liaison précédente. - Quelques types de liaisons.

Toutes les liaisons où n'interviennent que des solides invariables [solides du système ou obstacles solides] rentrent dans l'étude précédente, car elles se réduisent toujours à une combinaison de contacts entre les solides du système ou entre ces solides et les solides extérieurs. Voici quelques types de liaisons simples obtenues par de telles combinaisons.

I. - Deux solides S' et S'' sont articulés autour d'un point O , autrement dit, l'élément O fixe dans S' est fixe aussi dans S'' ; si S'' est immobile, S' ne peut que pivoter autour de O .

Imaginons d'abord qu'on ait réalisé cette liaison sans que S' et S'' aient d'autres contacts qu'au point O . Le travail des deux réactions \vec{R}_1, \vec{R}_2 que S' et S'' exercent l'un sur l'autre en O est rigoureusement nul dans tout déplacement virtuel du système; car l'élément matériel auquel chacune d'elle est appliquée a même déplacement infinitésimal $d\vec{s}$ et les deux réactions ont un travail égal et de signe contraire.

Mais il est impossible, en fait, de réaliser la liaison à l'aide d'un seul contact en O . On ne saurait la réaliser que par une combinaison de contacts qui pourront être voisins de O , mais qui ne coïncideront pas avec O , (par exemple à l'aide d'une suspension à la Cardan), et le travail virtuel des réactions ne sera nul qu'autant que ces contacts auront lieu sans frottement.

Réalisons pour fixer les idées la liaison de la façon suivante: une sphère solide invariablement liée à S' glisse sur une coupelle de révolution immobile [crapaudine]; le centre O de la sphère est alors immobile, et le solide S' pivote autour d'un point fixe, mais la liaison n'est sans frottement que si la sphère et la crapaudine sont parfaitement lisses.



On peut également réaliser la liaison en emboîtant une sphère invariablement liée à un des solides dans une autre sphère creuse, de rayon sensiblement égal, liée invariablement à l'autre solide, la sphère creuse présentant une ouverture suffisante pour laisser passer une tige liée à la première sphère et qui guide le premier solide. C'est pourquoi on appelle souvent articulation sphérique l'articulation de deux solides autour d'un point.

II. Deux solides S', S'' sont articulés autour d'un axe OO_1 .

Cette liaison est une combinaison de la précédente et prête aux mêmes remarques: les deux corps sont articulés autour de deux points O et O_1 ou de plusieurs points en ligne droite. Si la liaison était réalisable sans qu'il y eût de contact entre S' et S'' ailleurs que sur l'axe OO_1 , le travail virtuel des réactions serait rigoureusement nul. Mais on ne peut assujettir un solide à tourner autour

d'un axe fixe OO_1 qu'en lui imposant des contacts qui peuvent être voisins de l'axe mais qui ne sont pas sur l'axe⁽¹⁾; le travail virtuel des réactions n'est donc nul qu'autant que ces contacts sont sans frottement.

Une telle articulation est souvent dite articulation cylindrique parce qu'on peut la réaliser en emboîtant un cylindre de révolution lié au premier corps dans un cylindre de révolution creux et sensiblement de même rayon lié au second solide, des épaulements convenables empêchant le glissement parallèle aux génératrices [Exemple: gonds d'une porte].

III. - Une des surfaces solides en contact se réduit sensiblement à une ligne ou à un point.

Dans certaines applications, une des surfaces en contact, soit S_2 , peut être sensiblement assimilée soit à une ligne solide (Exemple: le corps S_2 se termine par une arête vive en contact avec S_1), soit à un point (Exemple: S_2 est une toupie terminée par une pointe qui glisse sur S_1). Si la liaison a lieu sans frottement, c'est-à-dire si la réaction de S_2 sur S_1 est normale à S_1 au point de contact le travail des deux réactions de contact est nul.

Quand les deux surfaces S_1 et S_2 peuvent être assimilées à deux lignes solides I_1 et I_2 qui s'appuient l'une sur l'autre [Exemple: deux barres dont l'une s'appuie sur l'autre], par définition la liaison est dite sans frottement (ou encore les deux corps I_1 et I_2 sont dits parfaitement lisses) si la réaction \vec{R} de I_2 sur I_1 en leur point commun P est normale au plan Π tangent en P aux deux courbes I_1, I_2 . Quand il en est ainsi, le travail des deux réactions est nul. Quand il en est autrement, soit \vec{R}_T la projection de \vec{R} sur le plan Π : l'expérience montre que \vec{R}_T est toujours directement opposé à la vitesse de glissement \vec{v}_1, \vec{v}_2 de I_1 sur I_2 , par suite le travail de deux réactions de contact est essentiellement négatif, (ou nul si $\vec{v}_1 = \vec{v}_2$).

Enfin, si S_2 se réduit sensiblement à une ligne I_2 et S_1 à un point P [Exemple: un élément matériel P , ou une pointe de toupie glissant sur une courbe fixe], la liaison imposée aux deux corps se traduit par deux équations [et

(1) Nous reviendrons dans ce cours sur la réalisation de cette liaison.

non plus par une seule]. Elle est dite sans frottement si la réaction \vec{R} de I_2 sur S_1 est normale à I_2 ; le travail des deux réactions $\vec{R}_1, -\vec{R}$ est alors nul. Sinon, soit R_t la projection de \vec{R} sur la tangente à I_2 ; l'expérience montre qu'elle est toujours dirigée en sens inverse de la vitesse de glissement⁽¹⁾ $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$ de P_1 sur I_2 ; son travail est donc essentiellement négatif (ou nul si $V_1 = V_2$).

Remarquons qu'en fait les contacts ont toujours lieu entre deux surfaces, et c'est par une approximation simplificatrice qu'on regarde, dans certains cas, ces surfaces comme réduites à une ligne ou à un point.

92 - Application du théorème des forces vives à un système de solides invariables parfaitement lisses.

Considérons maintenant un système quelconque de solides invariables, dont tous les contacts sont sans frottement.

Le travail des forces intérieures de chaque solide est nul; de même le travail des forces de contact entre les divers solides (tant qu'il ne se produit pas de chocs entre ces solides). Le travail des forces qui s'exercent à distance entre ces solides dérive, par hypothèse, d'un potentiel W . Le théorème des forces vives donne donc ici:

$$\Delta(T+W) = \mathcal{E}^e,$$

comme s'il n'y avait pas de forces de contact intérieures. Supposons que certains des solides S du système glissent sans frottement sur d'autres solides fixes σ extérieurs au système: comme le travail des réactions appliquées aux appuis fixes σ est nul, le travail des réactions mutuelles qui s'exercent entre les solides S et les appuis fixes σ [travail que nous savons nul] se confond avec le travail des réactions exercées par les appuis σ sur les solides S ; par suite; ce dernier travail est également nul. Le travail \mathcal{E}^e se réduit donc au travail des forces extérieures autres que les réactions des appuis fixes sur le système. En particulier si ces forces extérieures dérivent d'un potentiel W^e , on a:

(1) Cette vitesse est toujours tangente en P_1 à I_2 , comme on le voit aussitôt en prenant des axes liés invariablement à I_2 .

$$(1) \quad T + W + W^e = C^te$$

Lorsque le système est infiniment éloigné de tous les autres corps matériels et qu'on étudie son mouvement absolu, les forces extérieures sont nulles, et on a :

$$(2) \quad T + W = C^te$$

Ces égalités (1) ou (2) ne sont vraies que pendant les périodes du mouvement où aucun choc ne se produit et soit entre les solides du système soit entre ces solides et les obstacles fixes.

Celui-ci qui précède s'applique encore si certains des corps du système ou des obstacles fixes ne sont pas parfaitement lisses, mais si tous les contacts entre ces corps imparfaitement lisses ont lieu sans glissement.

En particulier, les conclusions ci-dessus sont vraies quand il n'y a aucun contact entre les solides du système. Par exemple, étudions le mouvement absolu de n sphères solides homogènes dont les éléments s'attirent suivant les lois de Newton. Soit M_j, M_k les masses de deux des sphères, C_j et C_k leurs centres, R_{jk} la distance $C_j C_k$; la fonction de forces des attractions newtonienne des deux sphères l'une sur l'autre est égale, comme on sait à $f \frac{M_j M_k}{R_{jk}^2}$. L'égalité des forces vives s'écrit donc ici :

$$T - f \sum \frac{M_j M_k}{R_{jk}^2} = C^te$$

Si la distance R_{jk} de deux des centres devient très petite, l'énergie cinétique T devient très grande.

93 - Systèmes de solides imparfaitement lisses.

En réalité, dès qu'il y a des contacts entre les solides (invariables) du système, nous savons (N° 90) que le travail des forces de contact n'est pas nul, mais négligé. Soit $-P$ le travail (entre les instants t_0 et t_1) des réactions intérieures \vec{R} qui s'exercent entre les solides du système en contact; on a :

$$(I) \quad \Delta(T + W) - E^e = -P \quad (P > 0).$$

Parmi les forces extérieures, les réactions des obstacles fixes ont un travail essentiellement négatif, soit $-P^e$. Si les

du mouvement est celle du mouvement d'un pendule simple de longueur $\frac{2l}{3}$.

On aurait pu être tenté de raisonner ainsi : dans le mouvement autour de G , la force-vive $2T$, de la barre est $\frac{Ml^2}{3} \theta'^2$; le travail de la pesanteur (les axes étant x, Gy) est nul; le travail des réactions des droites Ox et Oy sur AB est nul, puisque AB glisse sur elles sans frottement. Donc T est une constante, par suite $\theta' = C^{te}$. L'erreur provient de ce que, par rapport aux axes x, Gy , les obstacles Ox et Oy ne sont pas fixes; le travail de leur réaction n'est pas nul!⁽¹⁾

Applications des théorèmes généraux de la Dynamique des solides.

95. - Paramètres définissant la position d'un système.

Quand un système est formé d'un certain nombre n de solides invariables, libres ou assujettis à des liaisons, sa position se laisse déterminer à l'aide d'un nombre fini de paramètres au plus égal à $6n$. Il faut avant tout chercher le nombre de paramètres indépendants dont dépend la position du système. Soit K ce nombre. Quand $K=1$, le système est dit à liaisons complètes. Il faut ensuite, en se servant des théorèmes fondamentaux [théorème du mouvement de centre de gravité, - théorème des moments cinétiques, théorème des forces-vives], former (si possible) K équations indépendantes des réactions inconnues. Ces K équations définissent le mouvement: dans les applications simples, ces K équations, ou certaines d'entre elles, si on les choisit convenablement, donneront des intégrales premières.

96. - Systèmes à liaisons complètes. - Considérons, en particulier, un système S à liaisons complètes formé de solides parfaitement lisses, en contact avec des obstacles fixes parfaitement lisses. Si toutes les forces autres que les réactions intérieures et les réactions de ces obstacles sont données, le théorème des forces-vives suffit à déterminer le

(1) Si Y_1 est la réaction (parallèle à Ox) de Ox sur AB et X_2 celle de Oy , le travail élémentaire de ces deux réactions est:

$$l d\theta (Y_1 \sin \theta - X_2 \cos \theta).$$

mouvement, car le travail des forces appliquées aux divers éléments du système se réduit au travail des forces données.

Exemple - Mouvement d'une vis mobile sans frottement dans son écrou. - Dans ce mouvement, tous les points de la vis décrivent des hélices circulaires de même pas h . Soit OZ l'axe de la vis : si r, θ, z sont les coordonnées semi-polaires d'un élément P de la vis, dans le mouvement de P , r reste constant et z varie de $\frac{h}{2\pi} \Delta\theta$, quand θ varie de $\Delta\theta$. Le carré de la vitesse de P est $\frac{1}{4\pi^2} (r^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}) \theta'^2$, et la force vive de la vis est égale à

$$\theta'^2 \sum m r^2 + \theta'^2 \frac{h^2}{4\pi^2} M, \quad (M \text{ masse totale de la vis}).$$

Si on représente par MK^2 le moment d'inertie $\sum m r^2$ de la vis autour de l'axe, on a en définitive :

$$2T = M \left(K^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \right) \omega^2.$$

Preons comme axe des z l'axe de la vis, le trièdre $Oxyz$ étant choisi dextrorsum. La quantité h est positive ou négative suivant que la vis est dextrorsum ou sinistrorsum. Soit Z la projection sur OZ de la somme géométrique et N le moment résultant, par rapport à OZ , des forces extérieures données appliquées à la vis. Le travail de ces forces dans la variation $d\theta$ de θ c'est-à-dire dans le déplacement

$$\begin{aligned} dx &= -y d\theta, & dy &= x d\theta, \\ dz &= \frac{h}{2\pi} d\theta \end{aligned}$$

des éléments P de la vis est :

$$d\theta \sum (xY^e - yX^e) + \frac{h}{2\pi} d\theta \sum Z^e$$

ou bien :

$$N d\theta + \frac{h}{2\pi} Z d\theta = \left(N + \frac{h}{2\pi} Z \right) d\theta.$$

L'équation du mouvement est donc :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ M \left(K^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \right) \theta'^2 \right\} = \left(N + \frac{h}{2\pi} Z \right) \theta',$$

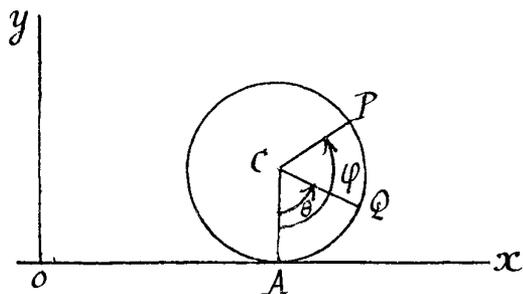
ou encore :

$$M \left(K^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \right) \theta'' = N + \frac{h}{2\pi} Z.$$

Si $N + \frac{h}{2\pi} Z$ est constant, θ'' est constant : la tête de la vis avance (ou recule) sur OZ d'un mouvement uniformément accéléré ou retardé. Si $N + \frac{h}{2\pi} Z = 0$, le mouvement de la vis est uniforme ; dans ce dernier cas, quand la vitesse initiale est nulle, la vis reste en équilibre.

97. - Exercice où le nombre des paramètres est supérieur à l'unité.

Un tube solide, homogène, pesant, ayant la forme d'un tore de très petite section, est assujéti à glisser sans frottement⁽¹⁾ sur un plan horizontal. A l'intérieur du tube glisse sans frottement un point pesant P de masse égale à celle du tube. Étudier le mouvement en supposant qu'à l'instant initial le système est abandonné dans un plan vertical Π sans vitesse ou avec des vitesses données dans ce plan.



Il est évident par raison de symétrie, que le mouvement aura lieu dans le plan Π . Prenons ce plan comme plan des xy , l'axe des x étant l'horizontale sur laquelle glisse le tube, et Oy une verticale ascendante. De combien de pa-

ramètre dépend la position du système?

Le centre du tube est défini par son abscisse x ; la position du tube autour de son centre est définie par l'angle $\theta = \angle ACQ$ que fait avec la verticale un rayon CQ lié invariablement au tube. Enfin la position du tube étant connue, la position de P sur le tube est définie par l'angle $\varphi = \angle ACP$ que fait CP avec la verticale.

Pour déterminer le mouvement, nous avons besoin de trois équations, où ne figurent que les forces données à l'exclusion des réactions. - Le théorème des forces vives nous en donnera une; - cherchons-en deux autres.

Les seules forces extérieures appliquées au système sont la pesanteur et la réaction de Ox sur le tube, laquelle est normale à Ox . Les forces extérieures n'ont donc pas de composantes suivant Ox : Soit $2M$ la masse totale du système, ξ l'abscisse du centre de gravité; on a:

$$2M \xi'' = 0 \text{ d'où } \xi = at + b.$$

(1) On entend par là que le tube est assujéti à rester en contact avec le plan horizontal, et que la réaction de ce plan sur le tube est normale au plan. Le disque est libre sur le plan.

Pour trouver une troisième équation remarquons que le tube considéré comme un système, est soumis à des forces extérieures (pesanteur, réaction de Ox , réaction de P normale au tube) qui passent toutes par son centre de gravité. Appliquons le théorème des moments cinétiques au mouvement du tube autour de son centre de gravité: le tube, dans ce mouvement, est animé d'une rotation autour de l'axe CZ perpendiculaire au plan xoy , rotation dont la vitesse angulaire ω est égale à $|\frac{d\theta}{dt}|$; le moment cinétique du tube par rapport à CZ est égal (N° 55) en valeur absolue, à: $\omega \sum mr^2 = \omega M l^2$ [M désignant la masse du tube circulaire, et l le rayon du cercle]. Par conséquent, ω est constant, $\theta' = \theta'_0$; le tube tourne d'un mouvement uniforme autour de son centre.

Nous possédons ainsi assez d'équations pour définir le mouvement du système. Écrivons explicitement ces équations.

Écrivons d'abord l'équation des forces vives. Les forces données se réduisent ici à la pesanteur, dont le travail est la différentielle de la fonction $-2Mg\eta$, η désignant l'ordonnée du centre de gravité G du système, milieu de CP ; $\eta = l(2 - \cos\varphi)$; on a donc, en appelant T la demi-force vive du système:

$$T = -2Mg\eta + C^t = 2Mgl\cos\varphi + C^t$$

Calculons T , en remarquant qu'il importe peu, dans l'égalité précédente, de la diminuer d'une constante.

Cette force vive est la somme: 1° de la force vive $2T'$ du point G où la masse $2M$ serait concentrée; 2° de la force vive $2T''$ du système dans son mouvement rapporté aux axes $G'x, y$ (parallèles aux axes Oxy).

1° La force vive $2T'$ est égale à $2M(\xi^2 + \eta^2)$ et, comme $\xi = \xi_0$, on ne la diminue que d'une constante en la réduisant à $2M\eta^2 = 2Ml^2 \sin^2\varphi$.

2° La force-vive relative $2T''$ est la somme des forces-vives de P et du tube dans le mouvement autour de G . Dans ce mouvement, P reste à la distance l de G et sa force vive est égale à: $Ml^2\varphi^2$. Quant à la force vive du tube, elle s'obtient en ajoutant à la force vive de son centre de gravité G (supposé de masse M), c'est-à-dire à $Ml^2\varphi^2$, la force-vive du

tube dans son mouvement autour de C , c'est-à-dire
 $4ML^2\dot{\theta}^2 = 4ML^2\dot{\theta}_0^2$.

En définitive, à une constante d'addition près,
 $2T$ se réduit à :

$$2ML^2\dot{\varphi}^2[\sin^2\varphi+1];$$

le théorème des forces vives donne donc ici, en divisant les deux membres par ML :

$$l\dot{\varphi}^2[1+\sin^2\varphi]=2g(\cos\varphi+h),$$

Ecrivons enfin l'équation : $\xi = at + b$.

On a : $\xi = x + l\sin\varphi$,

d'où :

$$x = at + b - l\sin\varphi.$$

Toute la difficulté est donc de calculer φ en fonction de t , d'après la quadrature

$$dt = d\varphi \sqrt{\frac{l(1+\sin^2\varphi)}{2g(\cos\varphi+h)}}.$$

Nous discuterons plus tard ce genre de relations.

Influence des frottements. - Principe de l'équivalence et principe de Carnot.

98. - Travail des forces de frottement. - Soit S un système formé de solides invariables (qui peuvent avoir de très petites dimensions). Si certains des solides mobiles du système sont en contact avec des obstacles fixes, il est loisible (et c'est ce que nous ferons) de comprendre ces obstacles dans le système, en sorte que les obstacles fixes ne soient plus en contact qu'avec des corps fixes du système⁽¹⁾. Le travail des réactions des obstacles fixes sur le système est alors nul (puisqu'elles sont appliquées à des éléments

(1) Par exemple, si le système considéré est un solide pesant qui glisse sur une planche fixe, (ou qui tourne autour d'un axe fixe, etc.) il est loisible de faire rentrer la planche [ou les pivots de l'axe] dans le système.

matériels fixes). Soit $-P$ le travail (essentiellement négatif) des forces de contact intérieures. Admettons d'après l'expérience que les forces intérieures à distance dérivent d'un potentiel W . Représentons par E^e le travail des forces extérieures. Le théorème des forces vives donne :

$$\Delta (T+W) - E^e = -P$$

Par exemple, les axes $Oxyz$ étant liés invariablement à l'écorce terrestre, supposons que les forces extérieures appliquées au système soient la pesanteur et les réactions des appuis fixes sur certains corps fixes du système. Admettons de plus que les forces à distance qui s'exercent entre les solides du système soient négligeables. L'équation (1) devient (en supposant que Oz soit la verticale ascendante)

$$T + \sum mgz = T_0 + \sum mgz_0 - P,$$

ou encore, en appelant M la masse totale du système et ζ le z de son centre de gravité,

$$T + Mg\zeta = T_0 + Mg\zeta_0 - P.$$

Si dans les diverses positions du système, ζ reste supérieur à une certaine limite qu'il est loisible de supposer nulle, on a :

$$T < T_0 + Mg\zeta_0 - P.$$

La quantité P croît constamment avec t ; au bout d'un certain temps, T est nul ou inappréciable; le système s'est arrêté sous l'influence des forces de frottement.

Mais on constate alors que les mouvements du système s'accompagnent toujours de phénomènes thermiques et souvent aussi d'autres phénomènes [électriques, etc.]. Admettons pour plus de clarté, qu'on se trouve dans un cas où les seuls phénomènes concomitants sont des phénomènes thermiques. Si chaque élément du système est resté identique à soi-même, (abstraction faite de sa position dans l'espace) l'expérience montre que le système a cédé à l'extérieur une certaine quantité de chaleur qui est dans un rapport constant avec le travail des forces intérieures de contact.

Insistons sur ce fait dont l'importance est considérable.

99 - Principe de l'équivalence. - Considérons un solide glissant avec frottement sur un plan fixe horizontal, et soumis (en oubliant de la pesanteur) à une force horizontale qui lui imprime un mouvement de translation alternatif. Soit V la vitesse de translation (en valeur absolue), Mg le poids du corps, f le coefficient de frottement; le travail élémentaire des réactions qui s'exercent entre le solide et le plan est comme on le voit aisément $-fMgVdt$; leur travail fini, entre les instants t_0 et t_1 , est $-fMgl$, où l est le chemin total parcouru par un élément du solide.

D'autre part, enfermons le système S formé du solide mobile et du plan fixe dans un calorimètre (soit en a fait le vide⁽¹⁾) entouré de glace fondante, de façon à maintenir constamment S à 0° , et mesurons la masse de glace fondue entre les instants t_0 et t_1 . On constate que cette quantité de glace, soit μ , est proportionnelle à $fMgl$, c'est-à-dire au travail des forces intérieures du système. D'une façon précise, soit q le nombre de petites calories nécessaire pour fondre la masse μ de glace; le travail $-fMgl = -\mu$ étant mesuré en unités C. G. S [c'est-à-dire en ergs], on trouve que q est égal $4,211 \times 10^7$. L'équivalent mécanique de la petite calorie⁽²⁾ est donc $4,211 \times 10^7$ ergs = 4,211 Joules. L'équivalent mécanique de la grande calorie est 4211 Joules = 421,4 kilogrammètres.

Quel que soit le système choisi d'unités mécaniques (I. M. T.), on peut adopter une unité de chaleur telle qu'une quantité de chaleur soit mesurée par le même nombre que le travail mécanique équivalent. Cette unité sera dite unité mécanique de chaleur. Dans le système C. G. S, il faut adopter comme unité de chaleur $\frac{1 \text{ petite calorie}}{4,211 \times 10^7}$.

Les quantités de chaleur étant mesurées en unités mécaniques de chaleur, on voit qu'on peut énoncer le théorème suivant :

Quand un système est formé de solides invariables et n'a de contacts extérieurs qu'avec des appuis fixes et par des corps fixes, le travail total des forces intérieures

(1) En fait, les réactions de l'air ne joueraient qu'un rôle insignifiant.

(2) On sait que la petite calorie est la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 0° centigrade à 1° centigrade la température d'un gramme d'eau à la pression normale. La grande calorie = 1000 petites calories.

de contact changé de signe est égal à la quantité de chaleur totale cédée par le système à l'intérieur, quantité qui est toujours positive.

L'égalité entre le travail (changé de signe) des forces intérieures de contact et la quantité de chaleur Q cédée par le système à l'extérieur constitue, pour les systèmes matériels du type précédent, le principe de l'équivalence.

Ce principe se traduit par l'égalité :

$$(1) \quad \Delta(T+W) + Q = \mathcal{E}^e.$$

Se fait que, pour les mêmes systèmes, le travail des forces intérieures de contact est toujours négalif et par suite que les systèmes considérés cèdent toujours de la chaleur à l'extérieur et ne lui en empruntent jamais, équivaut pour ces systèmes au célèbre principe de Carnot sur lequel nous revenons dans un instant.

100. Le principe de l'équivalence pour les systèmes quelconques.

Dans les deux paragraphes précédents, nous avons considéré exclusivement des systèmes formés de solides invariables. Ces solides, peuvent être d'ailleurs comme nous l'avons dit, de dimensions aussi petites qu'on veut. Les conclusions des N^{os} 98 et 99 s'appliquent donc à tous les systèmes formés d'éléments dont chacun reste identique à soi-même pendant le mouvement étudié: pour de tels systèmes, le travail des forces intérieures de contact est essentiellement négatif.

Nous verrons plus tard qu'on peut assimiler à de tels systèmes les fluides dont aucun élément ne se dilate ni ne se contracte. Considérons, par exemple, un sac de sable dont les grains très fins glissent sans frottement les uns sur les autres; si chaque élément garde la même température (et par suite reste identique à soi-même) le travail des réactions intérieures est nul; à un tel système sont assimilables les fluides incompressibles, et parfaits (c'est-à-dire sans frottements intérieurs). Si les grains de sables frottent les uns sur les autres, le travail des réactions intérieures est négalif; à un tel système sont assimilables les fluides incompressibles affectés de frottements intérieurs ou de viscosité.

Le travail des réactions intérieures d'un fluide dont chaque élément garde une densité constante est donc essentiellement négatif. Par suite, un fluide incompressible dont chaque élément garde la même température, cède toujours de la chaleur à l'extérieur. Cette chaleur est négligeable si le fluide est parfait c'est-à-dire sensiblement dénué de viscosité, et s'il ne subit aucun choc.

101. - Mais il faut bien se garder d'étendre les conclusions précédentes à un système dont les éléments se dilatent ou se contractent, notamment aux fils extensibles, aux fluides compressibles, etc. Laissons, par exemple, un gaz comprimé se détendre dans un tuyau horizontal: le travail de la pesanteur est négligeable, ainsi que le travail (d'ailleurs négatif) des réactions du tuyau sur le gaz; les forces intérieures se réduisent sensiblement aux forces de contact⁽¹⁾. Or, au début de la détente, l'énergie cinétique est nulle; à la fin de la détente, elle est considérable, et on a:

$$T = E^i,$$

E^i désignant le travail des réactions intérieures qui est ici positif et très grand.

102. - Comment s'énonce pour un système quelconque le principe de l'équivalence? Pour les systèmes particuliers considérés aux N^{os} 99-100, on pouvait écrire:

$$(2) \quad \Delta T - E^e + Q = -\Delta W,$$

Q désignant la quantité de chaleur cédée à l'extérieur, et W une fonction bien déterminée des P_i^k .

Il suit de là que si à deux instants t_0 et t_1 , le système reprend la même configuration, W reprend la même valeur, et on a:

$$\Delta T - E^e + Q = 0.$$

Convenons de dire qu'un système matériel quelconque S reprend le même état à deux instants t_0 et t_1 , si à ces deux instants chaque élément P_i du système est dans le même état physique et chimique, et si de plus la configuration du système est la même. Dans le cas où des phénomènes thermiques accompagnent seuls les déformations et déplacements du système, l'expérience conduit à admettre le principe

(1) Les autres forces intérieures (telles que les attractions newtoniennes) sont négligeables.

général suivant :

Si à deux instants t_0 et t_1 , un système matériel S reprend le même état, on a :

$$\Delta T + Q = \mathcal{E}^e,$$

ΔT désignant la variation d'énergie cinétique, Q la chaleur [-positive ou négative] cédée à l'extérieur, \mathcal{E}^e le travail des forces extérieures, quand t varie de t_0 à t_1 .

Si on veut encore, entre deux instants quelconques, on peut écrire l'égalité (2), mais W représente alors une quantité bien déterminée (à une constante d'addition près) pour un état déterminé du système. D'une façon précise, soit W^d le potentiel des forces intérieures à distance. On a :

$W = W^d + W^c$, W^c désignant une somme de termes dont chacun ne dépend que de l'état d'un seul élément [c'est-à-dire de sa température, de son volume, de sa forme, etc.] mais non de sa position et de sa vitesse. W^d , au contraire, est une somme de termes dont chacun ne dépend que de la distance mutuelle de deux éléments. On donne à la fonction totale W le nom d'énergie potentielle interne du système, et à la partie W^c le nom d'énergie calorifique interne.

D'après le théorème des forces vives on a :

$$(3) \quad \Delta T - \mathcal{E}^e + \Delta W^d = -\rho,$$

si $-\rho$ désigne encore le travail des réactions intérieures. Mais l'égalité (2) s'écrit :

$$(4) \quad \Delta T - \mathcal{E}^e + Q = -\Delta W^d - \Delta W^c,$$

d'où en comparant (3) et (4) :

$$\Delta W^c + Q = \rho,$$

ou

$$\Delta W^c = \rho - Q.$$

La variation de W^c est donc égale à la somme, changée de signe, du travail des forces de contact intérieures et de la quantité de chaleur [-positive ou négative] Q cédée par le système à l'extérieur. Quand chaque élément reste identique à soi-même [hypothèse des N^{os} 99-100], ΔW^c est nul, et Q est égal, au travail [changé de signe] des forces de contact intérieur.

Dans la détente adiabatique d'un gaz très comprimé (détente où chaque élément n'absorbe ni ne cède aucune quantité de chaleur), Q est nul, p est négatif, ΔW^c est négatif et grand (en valeur absolue).

Lorsque les forces intérieures à distance sont négligeables [et c'est le cas pour les fluides dans la plupart des applications], W se réduit à l'énergie calorifique interne W^c .

Il importe de remarquer que dans tout ce qui précède, la quantité W , W^d , W^c , Q , p , $(\Delta T - E^c)$, sont des quantités absolues, indépendantes du choix des axes. Seules les quantités T , ΔT et E^c dépendent du choix des axes, bien que la différence $\Delta T - E^c$ soit absolue.

Quand le système considéré est infiniment éloigné des autres corps matériels et quand il ne perd ni ne gagne par rayonnement aucune quantité de chaleur, le mouvement rapporté à des axes absolus vérifie l'égalité :

$$T + W^d + W^c = C^te$$

c'est-à-dire que l'énergie interne totale du système reste constante.

Enfin, nous nous sommes limités exclusivement au cas où des phénomènes thermiques accompagnent seuls les déformations et déplacements du système. Quand il en est autrement, par exemple quand les phénomènes électrodynamiques se produisent, il faut tenir compte de l'énergie qui correspond aux nouveaux phénomènes comme on a tenu compte de l'énergie calorifique.

103. Application. - Soit S un solide de masse M animé d'un mouvement de translation de vitesse V , qui vient heurter un appui fixe S_1 , dans le vide, à l'intérieur d'un calorimètre entouré de glace fondante. On suppose que l'appui S_1 (très rigide) reste fixe pendant le choc, qu'après le choc S demeure immobile, et enfin que les deux corps S et S_1 , qui étaient à 0° avant le choc, reprennent (après s'être échauffés) le même état rigoureusement (abstraction faite de la position de S et de ses vitesses).⁽¹⁾ Considérons le système formé par les deux solides S , S_1 : le travail des forces extérieures appliquées

⁽¹⁾ Si les deux corps restaient déformés par le choc, il faudrait tenir compte de la variation d'énergie potentielle interne correspondant à cette déformation.

à ce système est négligeable, car le travail de la pesanteur est négligeable pendant le choc, nul après; le travail des réactions extérieures sur l'appui fixe S_1 est nul. Appelons T_1 l'énergie cinétique du système immédiatement avant le choc: $T = \frac{MV^2}{2}$. Quand S et S_1 sont revenus au même état qu'avant le choc, T est nul; les formules (3) et (4) donnent ici

$$\frac{MV^2}{2} = -\Delta T = p = Q,$$

c'est-à-dire que la quantité de chaleur Q cédée par le système à l'extérieur (ici, au calorimètre) est égale à $\frac{MV^2}{2}$. C'est ce que l'expérience vérifie.

104. - Le principe de Carnot. - Considérons un système matériel S formé de solides rigides, de dimensions aussi petites qu'on veut, qui se déplacent dans une enceinte maintenue à température constante et gardent eux-mêmes sensiblement cette température. Les solides se meuvent alors comme des solides invariables: le travail des forces intérieures de contact⁽¹⁾ est essentiellement négatif [N.º 99] soit $-p$ ce travail. En vertu du principe de l'équivalence, la quantité de chaleur cédée par S à l'extérieur est égale à p (si on adopte l'unité mécanique de chaleur), donc essentiellement positive. En un mot le système S cède toujours de la chaleur à l'extérieur.

Cette conclusion n'est qu'un cas particulier, du célèbre Principe de Carnot. Rappelons l'énoncé de ce principe.

Considérons un système qui subit des modifications quelconques. Convenons de dire que, entre les instants t_0 et t_1 , ce système S a parcouru un cycle, si à ces deux instants chaque élément du système est dans le même état [abstraction faite de sa position et de sa vitesse], c.à.d. a même volume, même forme, même température, même état électrique et chimique, etc.

Ceci posé, soit Σ la surface limite⁽²⁾ du système S . Admettons d'abord qu'à chaque instant t , la température absolue Θ soit partout la même sur la surface Σ : appelons

(1) Nous supposons toujours que les obstacles extérieurs fixes ne sont en contact qu'avec des corps fixes du système (N.º 98).

(2) Cette surface peut se composer de plusieurs surfaces séparées. On peut

$dq = q'(t) dt$ la quantité de chaleur qui pénètre dans S par la surface Σ . ($dq > 0$ ou < 0), et considérons l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{q'(t) dt}{\Theta(t)}$$

Le principe de Carnot exprime que cette expression est toujours négative (dans le cas particulier considéré) cette expression est toujours négative si entre les instants t_0 et t_1 le système parcourt un cycle.

Supposons maintenant que la température absolue Θ varie (à chaque instant t) sur la surface Σ . Soit $d\sigma$ un élément d'aire de Σ , et soit $\mathcal{K} d\sigma dt$ la quantité de chaleur (positive ou négative) qui pénètre par $d\sigma$ dans S entre les instants t et $t+dt$. A chaque instant t , \mathcal{K} et Θ ont une valeur bien déterminée en chaque point de Σ ; posons

$$K(t) = \iint_{\Sigma} \frac{\mathcal{K}}{\Theta} d\sigma,$$

et considérons l'intégrale

$$(1) \quad \int_{t_0}^{t_1} K(t) dt.$$

Le principe de Carnot, sous sa forme la plus générale, exprime que l'expression (1) est toujours négative si entre les instants t_0 et t_1 le système S parcourt un cycle. Elle n'est nulle que si le cycle de phénomènes parcouru par S est réversible.

En particulier, considérons un système de solides invariables dont la température absolue Θ est la même et constante. Entre deux instants t_0 , t_1 , quelconques, chaque élément reste dans le même état, et le système peut être regardé comme ayant parcouru un cycle. On a donc, entre deux instants t_0 , t_1 quelconques

$$\frac{1}{\Theta} \int_{t_0}^{t_1} q'(t) dt < 0,$$

c'est-à-dire $q < 0$, si q désigne la quantité de chaleur cédée au

(suite)

remplacer Σ par n'importe quelle surface enveloppant tous les corps de S , à condition de faire rentrer dans le système toute la matière intérieure à Σ . Si S est mobile dans une enceinte vide, on peut prendre comme surface Σ toute surface intérieure à l'enceinte et enveloppant S .

systeme par l'exterieur. Autrement dit, entre deux instants quelconques, le systeme cede toujours de la chaleur à l'exterieur. Or c'est precisement la propriete que nous avons rappelee au debut de ce N°.

La chaleur cede n'est nulle que si tous les glissements ont lieu sans frottements. Par exemple, soit P un element materiel pesant qui glisse sur une droite inclinee fixe, soit Ox , dans un calorimetre maintenu à 0° . Si la droite est parfaitement lisse, la chaleur cede par le systeme à l'exterieur est nulle; mais dans ce cas le phenomene est reversible; car soit $x(t)$ le mouvement de P , t_1 un instant quelconque, P_1 la position de P pour $t = t_1$; renversons à cet instant le sens de la vitesse de P ; le nouveau mouvement se deduit du premier en changeant $(t - t_1)$ en $-(t - t_1)$; le point P reprend en sens inverse toutes ses anciennes positions, telles que P' , et dans les deux mouvements emploie le même temps à parcourir le chemin $P_1 P'$ (ou $P' P_1$).

Au contraire, si la droite Ox est rugueuse, le systeme cede de la chaleur à l'exterieur. Quand on renverse, à l'instant t_1 , le sens de la vitesse de P , le nouveau mouvement ne se deduit plus du premier en changeant $(t - t_1)$ en $-(t - t_1)$; le temps employé à parcourir le chemin $P_1 P'$ (ou $P' P_1$) est plus long dans le second mouvement que dans le premier. Le phenomene est irreversible.

En un mot, une fois admis le principe de l'equivalence, le principe de Carnot applique aux systemes de solides invariables exprime simplement le caractere essentiellement negatif des forces de frottement.

Dynamique —

Dynamique du point matériel.

105. - Equations du mouvement d'un point matériel soumis à des forces données.

Soit $Oxyz$ le trièdre de référence choisi, P un élément matériel de masse m , et \vec{F} la force totale (relative aux axes $Oxyz$) qui s'exerce sur P . La force \vec{F} est dite donnée si elle est bien déterminée, à un instant quelconque t , quand on connaît (à cet instant) la position (x, y, z) et la vitesse (x', y', z') de P : autrement dit, X, Y, Z sont des fonctions données de x, y, z, x', y', z', t .

La Dynamique du point matériel a pour principal objet, [connaissant ces fonctions X, Y, Z de (x, y, z, x', y', z', t)], de calculer le mouvement de P placé à l'instant t_0 dans une position P_0 ou (x_0, y_0, z_0) donnée, avec une vitesse \vec{v}_0 ou (x'_0, y'_0, z'_0) donnée.

Le mouvement du point P satisfait aux trois équations différentielles:

$$(1) \quad \begin{cases} mx'' = X(x, y, z, x', y', z', t) \\ my'' = Y(x, y, z, x', y', z', t) \\ mz'' = Z(x, y, z, x', y', z', t) \end{cases}$$

et d'après un théorème fondamental de Cauchy, il existe un système de fonctions $x(t), y(t), z(t)$ et un seul qui vérifie les équations (1) et satisfait aux conditions initiales données, qui sont:

$$(2) \quad \begin{cases} x(t_0) = x_0, & y(t_0) = y_0, & z(t_0) = z_0, \\ x'(t_0) = x'_0, & y'(t_0) = y'_0, & z'(t_0) = z'_0. \end{cases}$$

Nous appellerons solution des équations (1) tout système de fonctions $x(t), y(t), z(t)$ vérifiant identiquement les équations (1): le théorème de Cauchy exprime donc qu'il existe une solution et une seule des équations (1) qui répond aux conditions initiales.

Pour être exact, le théorème de Cauchy exige toutefois certaines conditions de continuité que doivent remplir les fonctions X, Y, Z des 7 variables x, y, z, x', y', z', t regardées

comme variables indépendantes. Si les fonctions X, Y, Z de ces sept variables sont bien déterminées et continues ainsi que leurs dérivées premières ⁽¹⁾ pour les valeurs initiales $x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0, t_0$ et pour les valeurs voisines des variables, le théorème de Cauchy n'est jamais en défaut. Mais quand les conditions de continuité énoncées ne sont pas remplies, le théorème de Cauchy peut n'être plus vrai.

Par exemple, supposons que l'élément P soit repoussé par le point fixe O proportionnellement à la racine cubique de la distance; les composantes de la répulsion sont

$$X = \mu \mu r^{1/3} \frac{x}{r}, \quad Y = \mu \mu r^{1/3} \frac{y}{r}, \quad Z = \mu \mu r^{1/3} \frac{z}{r},$$

$$(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \mu C^{te} > 0),$$

et comme $|\frac{x}{r}|, |\frac{y}{r}|, |\frac{z}{r}|$ sont < 1 , X, Y, Z sont des fonctions continues de x, y, z dans tout l'espace, et notamment à l'origine [où elles s'annulent mais où les dérivées ^{1^{ère}} sont discontinues]. Or abandonnons le point P sans vitesse à l'origine à l'instant $t = 0$: comme X, Y, Z sont nuls pour $x = 0, y = 0, z = 0$, les équations du mouvement sont vérifiées si on y fait $x \equiv y \equiv z \equiv 0$, c'est-à-dire si P reste en équilibre. Mais d'autre part, considérons le mouvement

$$x = + \left(\frac{\mu}{6}\right)^{1/2} t^3, \quad y = 0, \quad z = 0;$$

ce mouvement vérifie les équations du mouvement, [dont la première peut alors s'écrire: $x'' = \mu x^{1/3}$, puisque ici $r = x$]; il satisfait de plus aux conditions initiales. Il en est de même du mouvement:

$$\left. \begin{array}{l} x \equiv 0 \text{ pour } t \leq t_1 \\ x = + \left(\frac{\mu}{6}\right)^{1/2} (t - t_1)^3 \text{ pour } t > t_1 \end{array} \right\} y \equiv 0, \quad z \equiv 0,$$

t_1 étant une quantité positive arbitraire. Comme la demi-droite Ox est une demi-droite quelconque issue de O , on voit qu'il existe (en outre de l'équilibre) une infinité de mouvements rectilignes satisfaisant aux équations différentielles du mouvement et aux conditions initiales:

(1) Il suffit même que les dérivées premières de X, Y, Z par rapport aux six variables (x, y, z, x', y', z' , soient continues pour les valeurs initiales de x, y, z, x', y', z', t et les valeurs voisines.

ces mouvements sont dirigés suivant une demi-droite arbitraire issue de $O^{(1)}$.

Quand les restrictions de continuité de Cauchy sont remplies pour les conditions initiales données de P , nous convenons de dire que ces conditions initiales sont régulières; sinon, elles sont dites irrégulières. Dans tout ce qui va suivre, nous supposons, une fois pour toutes, que les conditions initiales données sont régulières, et par suite définissent un mouvement et un seul de P .

106. - Postulat de la statique du point matériel. - Dans l'exemple cité plus haut, la force qui à l'instant t s'exerce sur l'élément P placé à cet instant en O sans vitesse, est nulle, et néanmoins l'équilibre n'est pas la seule solution des équations du mouvement qui réponde aux conditions initiales.

En tête de la statique du point matériel, on admet le postulat suivant, qui, d'après ce qui précède, n'est point une conséquence nécessaire des axiomes de la Mécanique:⁽²⁾

Soit P_0 une position telle que, l'élément P étant placé sans vitesse en P_0 à l'instant t , la force \vec{F} qui s'exerce sur P à cet instant soit nulle, (cela quel que soit l'instant t considéré). La position P_0 est une position d'équilibre de P .

Il est évident d'autre part que toute position d'équilibre de P , soit P' , est une position P_0 , puisque $\vec{F} = m \cdot 0$ quel que soit t , pour P placé sans vitesse en P' .

107. - Intégrale générale et intégrales premières des équations du mouvement.

Considérons le mouvement du système défini par les équations (1) et par les conditions initiales de P à l'instant $t=0$ par exemple; soit

⁽¹⁾ Les équations de la Mécanique laissent donc alors le choix entre une infinité de mouvements possibles répondant aux conditions initiales: autrement dit, elles ne permettent plus de prévoir sans ambiguïté le mouvement bien déterminé qui dans la réalité, sera le mouvement de P placé dans les conditions données.

⁽²⁾ Le postulat est inutile si la position considérée P_0 est régulière. Dans ce cas, pour que P_0 ou (x_0, y_0, z_0) soit position d'équilibre, il faut, et il suffit, qu'on ait:

$$X(x_0, y_0, z_0, 0, 0, 0, t) = 0, \quad Y(x_0, y_0, z_0, 0, 0, 0, t) = 0, \quad Z(x_0, y_0, z_0, 0, 0, 0, t) = 0$$

qq soit t .

$$(2) \quad \begin{cases} x = \varphi(t, x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0) \\ y = \psi(\text{---}) \\ z = \chi(\text{---}) \end{cases}$$

ce mouvement. Quand on fait varier les constantes $x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$, les équations représentent une solution quelconque de (2), c'est-à-dire, par définition, l'intégrale générale de (2). On voit que cette intégrale générale dépend, en outre de la variable indépendante t , de six constantes arbitraires $x_0, y_0, z_0, x'_0, y'_0, z'_0$, qu'il est loisible d'ailleurs de remplacer par d'autres, soit C_1, \dots, C_6 [en posant: $x_0 = f(C_1, \dots, C_6)$, etc.]

Inversement, les trois équations :

$$(3) \quad \begin{cases} x = \varphi(t, C_1, C_2, \dots, C_6) \\ y = \psi(t, C_1, C_2, \dots, C_6) \\ z = \chi(t, C_1, C_2, \dots, C_6) \end{cases}$$

et les trois équations dérivées :

$$x' = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, C_1, C_2, \dots, C_6)$$

$$y' = \frac{\partial \psi}{\partial t}(t, C_1, C_2, \dots, C_6)$$

$$z' = \frac{\partial \chi}{\partial t}(t, C_1, C_2, \dots, C_6)$$

peuvent être résolues par rapport à C_1, C_2, \dots, C_3 , et on a par exemple :

$$(5) \quad C_1 = \Phi(x, y, z, x', y', z', t).$$

Par définition, on appelle intégrale première des équations (1) toute relation de la forme

$$\Phi(x, y, z, x', y', z', t) = C^te$$

qui est vérifiée par n'importe quelle solution $x(t), y(t), z(t)$ de (1), c'est-à-dire par n'importe quel mouvement du point P. Lorsqu'on prend au hasard une fonction Φ de (x, y, z, x', y', z', t) et qu'on y remplace x, y, z par une solution quelconque $x(t), y(t), z(t)$ de (1) et x', y', z' par les dérivées de $x(t), y(t), z(t)$, le résultat ainsi obtenu est une certaine fonction $\Phi(t)$: pour que Φ définisse une intégrale première, il faut et il suffit que $\Phi_1(t)$ se réduise à une

constante, et cela quelle que soit la solution choisie $x(t), y(t), z(t)$ de (1).

Par exemple, si la force \vec{F} est constamment parallèle à un plan fixe, soit le plan $x=0$, la première équation (1) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \text{d'où} \quad & \frac{d}{dt} m\dot{x} = 0, \\ & \dot{x} = \dot{x}_0, \end{aligned}$$

intégrale première.

De même si \vec{F} dérive d'un potentiel $W(x, y, z)$ l'égalité des forces vives

$$\frac{1}{2} mV^2 + W(x, y, z) = C^te$$

est une intégrale première.

108. - Quelques conséquences des équations du mouvement (1).

Lorsque les fonctions X, Y, Z de $(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$ sont quelconques, l'intégration du système différentiel (1) [du 6^e ordre] n'est pas possible à l'aide des fonctions élémentaires ou de quadratures; on ne peut déterminer les fonctions $x(t), y(t), z(t)$ répondant aux conditions initiales que par des approximations indéfinies, ou des séries, etc. Mais dans un grand nombre de cas particuliers, on aperçoit aisément des intégrales premières, ce qui simplifie notablement la question. Nous allons mettre en évidence sur les équations (1), transformées ou non, les plus importants de ces cas particuliers.

Eou d'abord, [N^o 30], si la force \vec{F} est perpendiculaire à une droite fixe, soit ox , la projection de P sur cette droite est animée d'un mouvement uniforme. Quand la vitesse de P est perpendiculaire à ox , la trajectoire est dans un plan perpendiculaire à ox .

Si \vec{F} est perpendiculaire à un plan fixe, la projection de P sur ce plan décrit une droite avec une vitesse constante. Quand la vitesse initiale de P est perpendiculaire au plan fixe, la trajectoire de P est une droite perpendiculaire à ce plan.

Théorème. - Quand la force totale F qui s'exerce sur P est la résultante d'une force Φ parallèle à une droite fixe, soit OZ , et d'une résistance R directement opposée à

la vitesse de P, la trajectoire de P est plane et son plan est parallèle à oz . Si la vitesse initiale de P est parallèle à oz , le point P décrit une droite parallèle à oz .

En effet, R désignant la valeur absolue de la résistance, les deux premières équations du mouvement sont :

$$(6) \quad mx'' = -R \frac{x'}{V}, \quad my'' = -R \frac{y'}{V} \quad [V = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}];$$

puisque $\frac{x''}{x'}$ est toujours négatif, x' décroît ou croît selon qu'il est positif ou négatif, autrement dit, $|x'|$ ne peut que décroître; si donc $x'_0 = 0$, x' reste nul, et une remarque analogue s'applique à y' . Il suit de là que si, la vitesse initiale de P est parallèle à oz ou nulle, P décrit une droite parallèle à oz .

Soit maintenant $x'_0 \neq 0$ par exemple. Les équations (6) entraînent :

$$\frac{y''}{y'} = \frac{x''}{x'}, \quad \text{ou } \log y' = \log x' + \log c,$$

ou enfin

$$y' = cx', \quad y = cx + D.$$

La trajectoire est donc dans un plan parallèle à oz , et comme ce plan renferme aussi la vitesse initiale, il est bien déterminé.

109. - Équations intrinsèques du mouvement.

Les équations du mouvement (1) traduisent l'égalité géométrique :

$$(7) \quad m\bar{y} = \bar{F},$$

\bar{y} désignant l'accélération de P à l'instant t . Mais nous savons, d'autre part, que les projections de \bar{y} sur les demi-droites Pt, Pn et Pb sont respectivement $\frac{dV}{dt}$, $\frac{V^2}{\rho}$ et 0

V désignant la valeur absolue de la vitesse,

Pt — " — la demi-tangente à la trajectoire menée dans le sens du mouvement,

Pn — " — la demi-normale à la trajectoire menée vers le centre de courbure, et ρ le rayon de courbure de la trajectoire ($\rho > 0$).

Pb — " — la binormale à la trajectoire.

L'égalité géométrique (7) peut donc encore se traduire ainsi :

A chaque instant, la force est dans le plan osculateur à la trajectoire, et ses projections F_t, F_n sur les deux demi-droites Fl, Pn sont respectivement $m \frac{dV}{dt}, m \frac{V^2}{\rho}$

Autrement dit, on peut écrire:

$$(8) \quad m \frac{dV}{dt} = F_t, \quad m \frac{V^2}{\rho} = F_n, \quad \rho = \frac{F_n}{F_t}$$

Ces équations sont les équations intrinsèques du mouvement.

Remarque. - Lorsque la force \vec{F} est constamment normale à la vitesse de P , cette vitesse est constante. La vitesse absolue de P croît ou décroît suivant que la force \vec{F} fait avec \vec{V} un angle aigu ou obtus.

La force F , dans le plan osculateur est toujours du même côté de la tangente que le centre de courbure. Si la trajectoire est plane, la force est toujours dirigée du côté de la concavité de la courbe.

Quand, à l'instant t_0 , la vitesse de P est nulle, F_n est nul, et $\frac{dV}{dt}$ [donc F_t] est $\gg 0$ (puisque $V \gg 0$): la trajectoire est tangente à la force, et la demi-tangente menée dans le sens du mouvement a le sens de \vec{F} . Autrement dit, P se met en mouvement dans le sens de la force.

La première équation intrinsèque ne diffère pas d'ailleurs de l'égalité des forces vives; car elle peut s'écrire:

$$mV \frac{dV}{dt} = VF_t, \quad \text{ou encore} \quad \frac{d}{dt} \frac{mV^2}{2} = VF \cos(F, V).$$

110. - Équation des forces vives.

L'équation des forces vives peut s'écrire:

$$(9) \quad \frac{d}{dt} \frac{mV^2}{2} = Xx' + Yy' + Zz'.$$

Elle fournit [N° 71] une intégrale première quand X, Y, Z coïncident avec les dérivées d'une fonction $U(x, y, z)$, dite alors fonction de force. On a:

$$(10) \quad m \frac{V^2}{2} - U(x, y, z) = h$$

Nous avons indiqué [N° 70] quelques types de forces dérivant d'un potentiel et qu'on rencontre fréquemment.

dans les applications : forces centrales fonctions de la seule distance, forces perpendiculaires à un plan fixe et fonctions de la seule distance du point matériel P au plan fixe ; forces perpendiculaires à une droite fixe qu'elles rencontrent et fonctions de la seule distance du point P à la droite.

Si la force \vec{F} qui s'exerce sur P est la résultante d'un nombre quelconque de forces rentrant dans ces trois catégories, le théorème des forces vives fournit une intégrale première.

111. — Sur un cas où l'intégrale des forces-vives s'applique, bien que la force \vec{F} dépende de la vitesse.

Pour que l'intégrale des forces vives :

$$(10) \quad \frac{1}{2} m v^2 = U(x, y, z) + h$$

s'applique, il faut et il suffit que l'on ait identiquement [c'est-à-dire quels que soient x, y, z, x', y', z', t]:

$$(11) \quad Xx' + Yy' + Zz' \equiv \frac{\partial U}{\partial x} x' + \frac{\partial U}{\partial y} y' + \frac{\partial U}{\partial z} z'.$$

Quand X, Y, Z sont des fonctions de x, y, z seulement, cette condition exige que X, Y, Z coïncident respectivement avec $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$. Mais elle peut être remplie alors que X, Y, Z dépendent (en outre de x, y, z) de x', y', z', t . Posons en effet :

$$X = \frac{\partial U}{\partial x} + X_1(x, y, z, x', y', z', t)$$

$$Y = \frac{\partial U}{\partial y} + Y_1(\text{---})$$

$$Z = \frac{\partial U}{\partial z} + Z_1(\text{---})$$

Pour que l'identité (11) soit vérifiée, il faut et il suffit qu'on ait

$$X_1 x' + Y_1 y' + Z_1 z' = 0,$$

c'est-à-dire que la force (X_1, Y_1, Z_1) soit constamment normale à la vitesse. L'intégrale des forces vives s'applique donc quand la force totale \vec{F} appliquée à P est la résultante d'une force dérivant d'un potentiel et d'une force constamment perpendiculaire à la vitesse de P .

Cette remarque trouvera son application dans l'étude des mouvements relatifs.

112. - Théorème des moments cinétiques. - Puisque les équations (1) expriment que $\vec{F} = m\vec{y}$, les deux vecteurs $\overline{PR} = m\vec{y}$ et $\overline{PS} = \vec{F}$ coïncident, et par suite aussi leurs moments par rapport à un même point O . Les équations (1) entraînent donc les égalités

$$(12) \quad \begin{cases} m(yz'' - zy'') = yZ - zY \\ m(zx'' - xz'') = zX - xZ \\ m(xy'' - yx'') = xY - yX. \end{cases}$$

Mais ces trois équations se réduisent à deux équations distinctes : Elles expriment en effet que les deux vecteurs (\overline{PR}, O) , (\overline{PS}, O) coïncident ; or ces deux vecteurs sont tous deux perpendiculaires à OP , et leur coïncidence se traduit par deux conditions. On le vérifie aussitôt en multipliant la première équation (2°) par x , la 2° par y , la 3° par z , et ajoutant ; les deux membres de la nouvelle équation ainsi obtenue sont identiquement nuls.

On ne peut donc remplacer les équations (1) par les équations (12) ; mais on peut remplacer les équations (1) par les équations (12) [qui se réduisent à deux] et l'équation des forces vives par exemple.

Nous savons que les équations (12) peuvent s'écrire

$$(13) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} m(yz' - zy') = yZ - zY \\ \frac{d}{dt} m(zx' - xz') = zX - xZ \\ \frac{d}{dt} m(xy' - yx') = xY - yX \end{cases}$$

et exprimant que la dérivée géométrique par rapport à t du moment cinétique de P par rapport à un point fixe O est équipollente au moment de \vec{F} par rapport à O .

Soit r, θ, z les coordonnées semi-polaires de P ; la dernière équation peut s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \left(mr^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = xY - yX.$$

Applications. - Si notamment \vec{F} est toujours dans un même plan avec la droite fixe oz , cette égalité fournit l'intégrale première $r^2\theta' = C^{te}$ [N° 31]. Si \vec{F} passe constamment par un point

fixe O , la trajectoire est plane [N° 33] et son plan comprend le point O . Complétons ce dernier théorème en étudiant le cas où \vec{F} est la résultante d'une force centrale et d'une résistance opposée à la vitesse.

113. - Théorème. - Quand la force appliquée à un élément matériel P est la résultante d'une force centrale issue d'un point fixe O et d'une résistance directement opposée à la vitesse de P , la trajectoire de P est plane et son plan contient le point O ; si la vitesse initiale de P passe par O , P décrit une droite passant par O .

En effet, écrivons les équations du mouvement en prenant O comme origine des axes :

$$(14) \quad mx'' = \frac{F}{r} \frac{x}{r} - R \frac{x'}{v}, \quad my'' = \frac{F}{r} \frac{y}{r} - R \frac{y'}{v}, \quad mz'' = \frac{F}{r} \frac{z}{r} - R \frac{z'}{v},$$

$$\left[r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad v = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} \right],$$

où F désigne l'intensité de la force centrale (comptée positivement ou négativement suivant qu'elle est répulsive ou négative) et R la valeur absolue de la résistance. Il est loisible d'admettre qu'on a choisi comme plan xoy le plan qui contient la position initiale (x_0, y_0, z_0) et la vitesse initiale (x'_0, y'_0, z'_0) de P , on a alors $z_0 = z'_0 = 0$. Or faisons $z \equiv 0$ dans les équations (14); la 3^e équation est vérifiée identiquement; les deux premières [où $z \equiv 0$] admettent une solution $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ et une seule répondant aux conditions initiales :

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad x'(t_0) = x'_0, \quad y'(t_0) = y'_0.$$

La solution $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z \equiv 0$ des équations (1) répond donc aux conditions initiales données, et comme ces conditions initiales définissent une solution unique de (14), la solution précédente représente le mouvement cherché de P , qui par suite a lieu dans le plan xoy .

Quand la vitesse initiale de P ^{est nulle ou} passe par O , et notamment quand x'_0, y'_0, z'_0 sont nuls, on prend comme axe des x la droite qui contient à la fois O, P_0 et la vitesse initiale; les équations (1) admettent alors une solution

$$x = \varphi(t), \quad y \equiv 0, \quad z \equiv 0$$

répondant aux conditions initiales, et par suite le mouvement a lieu sur ox . C. q. f. d.

114. - Nous venons d'énumérer un certain nombre de cas où la trajectoire de P est plane ou rectiligne. Ce sont ces cas que l'on rencontre dans les applications les plus fréquentes. Nous allons en approfondir l'étude, en considérant d'abord le cas du mouvement rectiligne, le plus simple de tous. C'est le mouvement d'un point P soumis simultanément à une force centrale ou de direction constante \vec{F}_1 , et à une résistance (qui peut être nulle), lorsque sa vitesse initiale passe par le centre de la force \vec{F}_1 ou est parallèle à la direction fixe de \vec{F}_1 .

Mouvement rectiligne d'un point matériel.

115. - Equation du mouvement rectiligne.

Prenons comme axe des x la trajectoire rectiligne du point P ; lorsque P est placé (à l'instant t) en un point arbitraire x de Ox , avec une vitesse quelconque x' , la force F qui s'exerce sur P est, par hypothèse, dirigée selon Ox . Soit $X(x, x', t)$ sa valeur absolue précédée du signe $+$ ou $-$ suivant qu'elle a le sens Ox ou le sens contraire. Le mouvement de P vérifie l'équation

$$(1) \quad mx'' = X(x, x', t)$$

L'équation (1) est une équation différentielle du 2^e ordre, de l'espèce la plus générale si on ne fait aucune hypothèse sur la fonction X de (x, x', t) . A chaque type connu d'équation du 2^e ordre qu'on sait intégrer, correspond un problème de mouvement rectiligne intégrable. Les cas particuliers les plus remarquables sont ceux où X ne dépend que d'une seule des trois variables t, x, x' .

116. - La force X est une simple fonction de t .

L'équation (1) s'intègre immédiatement; on a:

$$x' - x'_0 = \int_{t_0}^t X(t) dt = \Phi(t), \text{ ou } x' = x'_0 + \Phi(t)$$

$$x - x_0 = x'_0(t - t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t) dt.$$

Le mouvement répondant aux conditions initiales est ainsi défini par deux quadratures successives.⁽¹⁾

Mais un cas bien plus important est celui où X ne dépend que de la position de P .

Cas où X ne dépend que de la position x de P .

117. - Intégration de l'équation du mouvement.

Multiplications⁽²⁾ les deux membres de l'équation (1) par x' : elle peut s'écrire:

$$\frac{d}{dt} \frac{m x'^2}{2} = X(x) x', \text{ ou encore: } d \frac{m x'^2}{2} = X(x) dx,$$

ou enfin:

$$\frac{m x'^2}{2} = \int X(x) dx + C^te$$

c'est-à-dire:

$$(2) \quad x'^2 = \psi(x) + h, \text{ si } \psi'(x) \equiv \frac{2}{m} X(x),$$

équation qui n'est autre que celle des forces vives dans ce cas particulier.

Mettons l'équation (2) sous la forme

$$(3) \quad dt = \frac{dx}{\sqrt{\psi(x) + h}};$$

t et x' sont exprimés en fonction de x , et par suite le mouvement est déterminé, moyennant les deux quadratures

$$\int X(x) dx \text{ et } \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \int X(x) dx + h}}.$$

118. - Discussion des conditions initiales .-

Soit t_0, x_0, x'_0 les conditions initiales de P ; la constante h est donnée par l'équation:

$$(4) \quad h = x_0'^2 - \psi(x_0)$$

(1) On peut remarquer que

$$\int \Phi(t) dt = t\Phi - \int t\Phi' dt = t \int X(t) dt - \int tX(t) dt.$$

(2) Puisque t ne figure pas explicitement dans l'équation (1), le procédé d'intégration indiqué en analyse consiste à prendre x comme variable et $x' = \frac{dx}{dt}$ comme fonction; on a alors: $x'' = \frac{dx'}{dt} = \frac{dx'}{dx} \times x' = \frac{1}{2} \frac{dx'^2}{dx}$; d'où l'équation:

$$\frac{m}{2} \frac{dx'^2}{dx} = X(x) \text{ ou } d. \frac{m}{2} x'^2 = X(x) dx.$$

D'autre part, on a, d'après (3):

$$x' = \pm \sqrt{\Psi(x) + h}$$

Comment choisir le signe qu'il faut adopter devant le radical? Pour $t = t_0$, on doit avoir:

$$x'_0 = \pm \sqrt{\Psi(x_0) + h};$$

si donc $x'_0 > 0$, on prendra le signe + devant le radical; si $x'_0 < 0$, on prendra le signe -, et on gardera le même signe à pu $\sqrt{\Psi(x) + h}$, dans le mouvement, restera continu et différent de zéro. Le temps t est alors donné par l'intégrale:

$$(5) \quad t - t_0 = \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\Psi(x) + h}}$$

où le radical a un signe bien déterminé.

Reste à traiter le cas particulier où x'_0 est nul. L'équation (2) peut alors s'écrire:

$$(6) \quad x'^2 = \Psi(x) - \Psi(x_0);$$

cette équation est vérifiée si on y fait $x \equiv x_0$. Mais cette solution $x \equiv x_0$ ne vérifie pas l'équation⁽¹⁾ du mouvement, sauf dans le cas où $X(x_0)$ est nul, c'est-à-dire où x_0 est une position d'équilibre de P . Si $X(x_0) \neq 0$, la solution $x = x_0$ de l'équation (6) est une solution étrangère qui s'est introduite parce qu'on a multiplié les deux membres de (1) par x' .

Cette remarque faite, si $X(x_0) > 0$, le point P se met en mouvement dans le sens ox (sens de la force); x' est d'abord positif, et il faut adopter le signe + comme signe initial du radical. Si $X(x_0) < 0$, on voit de même qu'il faut adopter le signe - devant le radical. Si $X(x_0) = 0$, la solution $x \equiv x_0$ de l'équation (1) répond aux conditions initiales, et elle est la seule [en vertu du théorème de Cauchy], pourvu que les conditions initiales soient régulières, c.à d. pourvu que $X(x)$ et $X'(x)$ soient continus dans le voisinage de x_0 .

Vérifions directement ce dernier résultat et nous imposer à $X(x)$ d'autres conditions que d'être continu dans le voisinage de x_0 et d'admettre pour $x = x_0$ une dérivée $X'(x_0) = X'_0$.

(1) Toutes les fois qu'on remplace une des équations du mouvement par la combinaison des forces vives, on introduit des solutions étrangères analogues à la précédente.

La fonction $\Psi(x) - \Psi(x_0)$ a comme dérivée $\frac{2}{m} X$, et comme dérivée seconde $\frac{2}{m} X'$; elle admet donc $x = x_0$ comme racine double [ou d'ordre supérieur] et dans le voisinage de x_0 , on a

$$\Psi(x) - \Psi(x_0) = (x - x_0)^2 \frac{2}{m} [X'_0 + \varepsilon(x)] \langle A^2 (x - x_0)^2,$$

ε tendant vers zéro avec $x - x_0$, et A étant une certaine constante positive. Ceci posé, le point P étant placé en x_0 à l'instant t_0 avec une vitesse nulle, admettons qu'il se mette en mouvement; il est loisible d'admettre que le mouvement commence dans le sens des x croissants [puisqu'on a pu choisir arbitrairement le sens de dx]; on aurait donc

$$x^2 \langle A^2 (x - x_0)^2, \quad \text{d'où}$$

$$x' \langle A (x - x_0), \quad (x' > 0, x > x_0),$$

et

$$A dt \rangle \frac{dx}{x - x_0},$$

d'où

$$(7) \quad A(t - t_1) \rangle \int_{x_1}^x \frac{dx}{x - x_0}, \quad t_1 \text{ désignant un instant}$$

compris entre t_0 et t et x_1 la valeur correspondante de x .

Si on fait décroître t_1 vers t_0 , le premier membre de (7) reste inférieur à $A(t - t_0)$, le second tend vers $+\infty$, résultat absurde. Le point P reste donc nécessairement immobile.

En définitive, les conditions initiales définissent sans ambiguïté, le mouvement de P et le signe initial qu'il faut prendre devant le radical:

ce signe est celui de x'_0 si $x'_0 \neq 0$;

de $X(x_0)$ si $x'_0 = 0$ et $X(x_0) \neq 0$;

le point P reste immobile si $x'_0 = 0$ et $X(x_0) = 0$.

119. — Remarquons que le dernier raisonnement employé démontre ce théorème qui nous sera utile dans un instant:

Si le point P tend vers une position⁽¹⁾ d'équilibre x_0 avec une vitesse qui tend vers zéro en même temps que $x - x_0$, il ne peut atteindre la position x_0 en un temps fini.

En effet, la constante h de l'équation (2) est égale à $-\Psi(x_0)$; le mouvement étudié vérifie donc l'équation (6), et si on ^{sup-}pose

(1) Voir cette note page suivante.

que x tende vers x_0 en décroissant, le temps t employé par P pour aller de x à x_1 , [$x > x_1 > x_0$], est :

$$t = \int_{x_1}^x \frac{dx}{\sqrt{\Psi'(x) - \Psi'(x_0)}} > \frac{1}{A} \int_{x_1}^x \frac{dx}{x - x_0} ;$$

quand x_1 tend vers x_0 , le second membre de l'inégalité tend vers $+\infty$ l'infini; t tend donc vers l'infini. C. q. f. d.

120. - Discussion du mouvement lorsque t croît indéfiniment.

La discussion précédente définit le mouvement sans ambiguïté quand t croît à partir de t_0 et cela tant que $\sqrt{\Psi(x) + h}$ ou x' reste continu et différent de zéro. Nous allons discuter le mouvement lorsque t croît indéfiniment, sans faire sur $X(x)$ d'autres hypothèses que les suivantes. $X(x)$ est continue quel que soit x et admet une dérivée $X'(x)$ pour toutes les valeurs $x = \alpha$ qui annulent X .

Le cas de l'équilibre écarté, il est loisible d'admettre que x'_0 est > 0 [en choisissant convenablement le sens des ox et en remplaçant t_0 par $t_0 + \varepsilon$, si la vitesse initiale est nulle]. Deux hypothèses sont alors possibles : ou bien $\Psi(x) + h$ (égal à $x_0'^2$ pour $x = x_0$) ne s'annule pas pour $x > x_0$; ou bien il existe une racine $x = \alpha > x_0$ de $\Psi(x) + h$.

1^{ère} Hypothèse : $\Psi(x) + h > 0$ pour $x > x_0$, quand x croît indéfiniment. L'intégrale (5) qui donne t croît constamment, et reste finie tant que x reste fini. Dans les applications

(1) Note de la page précédente.

Il convient de ne pas oublier que la démonstration suppose l'existence de $X'(x_0)$. Par exemple, soit $X(x) = 6x^{2/3}$; la position $x = 0$ est une position d'équilibre, mais les conditions initiales $t_0, x_0 = 0, x'_0 = 0$ sont irrégulières; l'équation du mouvement admet (en outre de la solution $x \equiv 0$) les solutions [N° 105] $x = \pm (t - t_0)^3$. Le point P peut atteindre l'origine avec une vitesse nulle, en un temps fini. D'une manière générale, la loi de force $X(x)$ étant quelconque, soit $x = \alpha$ un zéro de $X(x)$ d'ordre α ; la fonction $\sqrt{\Psi(x) - \Psi(\alpha)}$ admet $x = \alpha$ comme zéro d'ordre $\frac{1+\alpha}{2}$, et l'intégrale $\int_x^a \frac{dx}{\sqrt{\Psi(x) - \Psi(\alpha)}}$ est finie ou infinie selon que $\frac{1+\alpha}{2} < 1$ ou que $\frac{1+\alpha}{2} > 1$.

Si donc $\alpha < 1$, le point P peut atteindre la position d'équilibre $x = \alpha$ avec une vitesse nulle, en un temps fini.

naturelles, t croît indéfiniment avec $x^{(1)}$; mais si la loi de force était, par exemple, $X = X^2$, l'intégrale $\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} \frac{x^3}{3} + h}}$ tendrait vers une limite finie quand x tend vers $+\infty$; le point P s'éloignerait donc indéfiniment en un temps fini. Dans tous les cas, quand t croît à partir de t_0 , x croît constamment jusqu'à $+\infty$.

2^e Hypothèse: $\Psi(x) + h = 0$ pour $x = a > x_0$.

Lorsque x croît à partir de x_0 sans atteindre $x = a$, t croît constamment et reste fini; le point P atteint donc toute position x_1 , entre x_0 et a , en un temps fini. Lorsque x tend vers a , x' tend vers zéro, mais deux cas sont à distinguer suivant que $x = a$ est ou non position d'équilibre.

I. $X(a) = 0$ (Cas exceptionnel). — Le point P tend vers la position d'équilibre a avec une vitesse qui tend vers zéro; il ne peut donc atteindre⁽²⁾ le point a en un temps fini [J° 19] et tend constamment vers a sans jamais l'atteindre lorsque t croît indéfiniment. Ce cas ne saurait se présenter que pour des valeurs exceptionnelles de la constante h , à savoir pour les valeurs h telles que l'équation $\Psi(x) + h = 0$ ait une racine double.

II. $X(a) \neq 0$. — Dans le voisinage de $x = a$, on a:

$$\Psi(x) + h = \Psi(x) - \Psi(a) = (x-a)[\Psi'(a) + \varepsilon] = (a-x)\left[\frac{-2}{m}X(a) - \varepsilon\right],$$

et le temps employé par P pour aller de x_0 à a est donné par l'intégrale $\int_{x_0}^a \frac{dx}{\sqrt{(a-x)\left[-\frac{2}{m}X(a) - \varepsilon\right]}}$, intégrale qui est finie puisque le coefficient de dx est infini d'ordre $\frac{1}{2} < 1$ par rapport à $\frac{1}{a-x}$.

Quand t croît de t_0 jusqu'à un certain instant t_1 , x croît de x_0 jusqu'à a . — Le point P occupe, à l'instant t_1 , la

⁽¹⁾ Si la fonction $X(x)$ est d'ordre x^α pour $x = \infty$ ($\alpha > 0$), $\Psi(x)$ est d'ordre $1 + \alpha$, et $\sqrt{\Psi(x) + h}$ est d'ordre $\frac{1+\alpha}{2}$. Pour que l'intégrale qui donne t reste finie pour $x = \infty$, il faut et il suffit que $\frac{1+\alpha}{2} > 1$. Dans les applications naturelles, α est ≤ 1 . Si $X(x)$ tend vers zéro pour $x = \infty$ t croît indéfiniment avec x .

⁽²⁾ C'est ici qu'intervient la restriction que $X'(a)$ existe pour les valeurs $x = a$ qui annulent X .

position a , avec une vitesse nulle. Or nous savons discuter ces nouvelles conditions initiales : P ne peut rester en a , qui n'est pas position d'équilibre; il va se mettre en mouvement dans le sens donné par le signe de $X(a)$ - signe qui, d'après ce qui précède, est négatif. Le point P rétrograde donc quand t croît à partir de t_1 . Il est d'ailleurs évident que x ne pouvait continuer à croître: en effet, quand x traverse la valeur a , la fonction $\psi(x)+h$ s'annule et change de signe; positive pour $x < a$, elle est donc négative pour $x > a$; et comme $\psi(x)+h = \dot{x}^2$, il est impossible que x dépasse a dans le mouvement.

À partir de l'instant t_1 , on peut recommencer exactement la même discussion qu'à partir de l'instant t_0 . Si $\psi(x)+h > 0$ pour $-\infty < x < a$, le point P s'éloignera indéfiniment du côté des x négatifs lorsque t croîtra à partir de t_1 . Si $\psi(x)+h$ s'annule pour une valeur $b < a$, deux cas sont à distinguer selon que b est ou non position d'équilibre; dans le premier (cas exceptionnel), x tend en décroissant vers b sans jamais l'atteindre, lorsque t croît indéfiniment; dans le second cas, x atteint b en un temps fini, puis rétrograde, revient en a , rétrograde à nouveau, etc.

On voit que, si on laisse de côté certains mouvements qui correspondent à des valeurs exceptionnelles de b , le point P ou bien s'éloignera indéfiniment sur Ox dans un sens ou dans l'autre, ou bien oscillera constamment entre deux positions a, b .

121. - Remarque. - Soit t_1 un des instants pour lesquels P rétrograde; je dis que la fonction $x(t)$ est une fonction paire de $(t-t_1)$.

En effet, soit $x = a$ la position de P à l'instant t_1 , et supposons, par exemple, que x soit $< a$ pour $t > t_1$, et pour $t < t_1$. Aux instants t_1+h et t_1-h , P occupe la même position x ; le temps h employé par P pour aller de a en x est donné par l'intégrale:

$$\int_a^x \frac{dx}{-\sqrt{\psi(x)-\psi(a)}} = \int_x^a \frac{dx}{+\sqrt{\psi(x)-\psi(a)}};$$
 le temps h employé par P pour aller de x en a est donné par l'intégrale $\int_x^a \frac{dx}{+\sqrt{\psi(x)-\psi(a)}}$. On a donc $h = h$, c'est-à-dire que $x(t)$ prend la même valeur pour $t = t_1+h$ et $t = t_1-h$; si on pose $t = t_1 + \tau$, x est une fonction paire de τ . C. q. f. d.

Il suit de là que pour des valeurs du temps équidistantes de t_1 , le point P occupe la même position, avec des vitesses égales et de sens contraires.

122. Sur le cas où le mouvement rectiligne est oscillatoire.

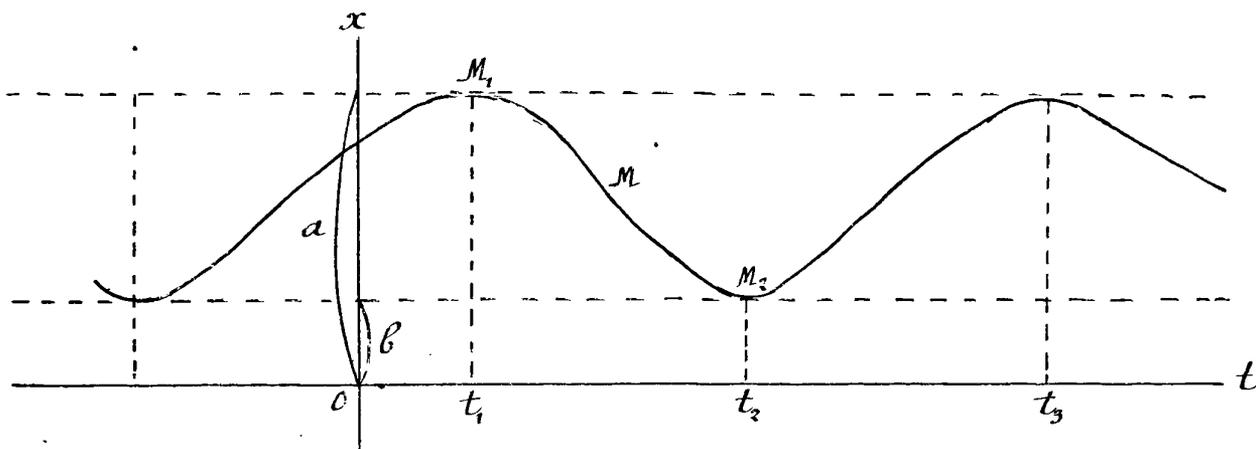
Insistons sur le cas important où P oscille entre deux positions a, b . C'est le cas où $\psi(x) + h$ admet deux racines consécutives simples a, b qui comprennent x_0 .

Soit $x = \varphi(t)$ le mouvement de P ; t_1 et t_2 deux instants consécutifs où P rétrograde, le premier correspondant à la position a de P , le second à la position b [$b < a$]. L'intervalle de temps $T = t_2 - t_1$ est donné par l'intégrale définie:

$$T = \int_a^b \frac{dx}{-\sqrt{\psi(x) + h}} = \int_b^a \frac{dx}{\sqrt{\psi(x) + h}}$$

$$[h = -\psi(a) = -\psi(b)].$$

La fonction $x = \varphi(t)$ est une fonction paire de $(t - t_1)$ et de $(t - t_2)$. Représentons-la par une courbe en portant les t en abscisses, les x en ordonnées; la courbe ainsi tracée admet comme axes de symétrie les droites $t_1 M_1, t_2 M_2$; il suffit donc de connaître la portion de courbe $M_1 M M_2$ [c'est-à-dire la fonction $\varphi(t)$ dans l'intervalle $t_1 < t < t_2$] pour



construire toute la courbe par symétries successives; et il résulte de la construction même que la fonction $\varphi(t)$ admet la période $2T$.

Le mouvement de P est donc un mouvement périodique oscillatoire de période $2T$.

Si on prend comme origine des temps l'instant t_1 , et si on pose $\tau = \pi \frac{t}{T}$, la fonction $x = \varphi\left(\frac{T}{\pi}\tau\right) = \varphi_1(\tau)$ est une fonction paire de τ admettant la période 2π , et qui par suite se laisse développer en une série de Fourier ne renfer-

que des cos :

$$x = A_0 + A_1 \cos \tau + A_2 \cos 2\tau + \dots + A_n \cos n\tau + \dots,$$

$$[t_1 = 0, \quad \tau = \frac{\pi t}{T}]$$

Un cas remarquable est celui où $X(x)$ est une fonction impaire de x , et par suite $\varphi(x)$ fonction paire de x , et où la plus petite racine positive a de $\varphi(x) + k$ est simple et supérieure à $|x_0|$. Les deux valeurs a, b sont alors a et $-a$. Si on compte les temps à partir d'un des instants où x est nul et $x' > 0$, on a :

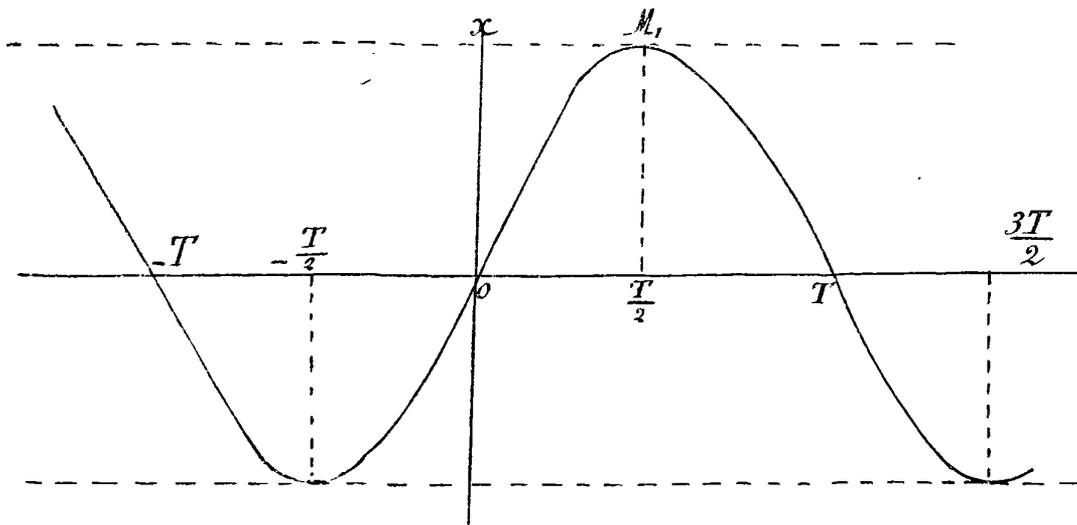
$$(7) \quad dt = \frac{dx}{\pm \sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}}$$

équation qui ne change pas (non plus que les conditions initiales $t_0 = 0, x_0 = 0, x'_0 > 0$) quand on change à la fois t en $-t$ et x en $-x$. Il suit de là que la fonction $x(t)$, définie par l'équation (7) et par les conditions initiales $t_0 = 0, x_0 = 0$ change de signe avec t .

D'autre part, $T = 2 \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}}$; la fonction $x(t)$ est donc une fonction impaire de t et une fonction paire de $(t - \frac{T}{2})$.

Elle est représentée graphiquement par la courbe ci-contre qui admet comme centres les points de l'axe des t d'abscisse kT (k entier > 0 ou < 0), comme axes de symétrie les droites $t = (2k+1) \frac{T}{2}$.

Il suffit donc de connaître la portion OM_1 de la courbe pour savoir la construire tout entière. La fonction $x = \varphi(t)$ admet la période $2T$, et si on pose $t = \tau \frac{T}{\pi}$, la fonction $x = \varphi(\frac{T}{\pi} \tau) = \varphi_1(\tau)$ est, au point de vue des propriétés de



périodicité, d'imparité, de parité, etc., tout à fait analogue à la fonction $\sin \tau$. Elle est développable en série de Fourier de la forme:

$$(8) \quad \varphi_1(\tau) = A_1 \sin \tau + A_3 \sin 3\tau + A_5 \sin 5\tau + \dots$$

En effet, puisqu'elle est impaire, on sait que sa série de Fourier est une série de sinus:

$$A_1 \sin \tau + A_2 \sin 2\tau + A_3 \sin 3\tau + \dots$$

d'autre part, $\varphi_1(\tau)$ est une fonction paire de $\tau - \frac{\pi}{2}$, [puisque $\varphi(t)$ est une fonction paire de $(t - \frac{T}{2})$]; si on pose $\tau = \frac{\pi}{2} + t_1$, la série

$$\text{ou} \quad A_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} + t_1\right) + A_2 \sin(\pi + 2t_1) + A_3 \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 3t_1\right) + \dots \\ + A_1 \cos t_1 - A_2 \sin 2t_1 - A_3 \cos 3t_1 + A_4 \sin 4t_1 + \dots$$

qui représente une fonction paire de t_1 , ne doit plus renfermer de terme en sinus, c'est-à-dire que A_2, A_4, A_6, \dots sont nuls; la fonction $\varphi\left(\frac{T}{2} + \tau\right)$ est donc bien développable sous la forme (8).

C. q. f. d.

J'ai beaucoup insisté sur la discussion générale du mouvement rectiligne dans le cas où X est une simple fonction de x , parce que ce mode de discussion se représente dans la plupart des problèmes de Mécanique qu'on sait ramener aux quadratures. Ses cas signalés dans les deux derniers numéros se retrouveront constamment dans la suite de ces leçons.

123. - Application. - Le point P est attiré par l'origine O proportionnellement à la distance.

Soit $m k^2 r$ la valeur absolue de la force [$r = OP$]; que x soit positif ou négatif, on a: $X = -m k^2 x$.

L'intégrale des forces vives donne:

$$x^2 = -k^2 x^2 + h, \quad h = x_0^2 + k^2 x_0^2 > 0.$$

Posons $h = a^2 k^2$, $a > |x_0|$, il vient:

$$x^2 = k^2 (a^2 - x^2), \quad -a \leq x_0 \leq a;$$

le mouvement sera donc un mouvement oscillatoire périodique, où x variera entre $-a$ et $+a$, et si on compte le temps à partir d'un des instants où $x=0$ et où x' est positif, on a:

$$(9) \quad kt = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

tant que x n'atteint pas la valeur a . La fonction $x(t)$ est une fonction impaire de t , une fonction paire de $t - t_1$ (si $t_1 = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2k}$), une fonction paire de $t - t_2$ (si $t_2 = \frac{3\pi}{2k}$); elle admet la période $\frac{2\pi}{k}$. C'est ce qu'on vérifie aussitôt sur l'égalité (9) qui intégrée k donne :

$$(10) \quad x = a \sin kt.$$

La série de Fourier (8) est ici limitée à son premier terme.

On pouvait arriver immédiatement à la formule (3) en intégrant directement l'équation du mouvement

$$x'' = -k^2 x, \text{ ou } x'' + k^2 x = 0,$$

qui donne :

$$x = A \cos kt + k \sin kt;$$

et pour $t=0$, $x_0=0$, $x'_0 > 0$, on a : $x = \frac{x'_0}{k} \sin kt = a \sin kt$.

Remarque. - Les oscillations de P ont une durée $\frac{\pi}{k}$ indépendante de leur amplitude; elles sont tautochrones.

Si à l'instant $t=0$ on abandonne le point P sans vitesse ou une position a , on a :

$$x = a \cos kt;$$

le point P atteint l'origine en un temps $\frac{\pi}{k}$ indépendant de la distance a . Inversement proposons-nous de trouver toutes les lois de force $X(x)$ qui jouissent de cette dernière propriété, c'est-à-dire telles que le point P abandonné sans vitesse dans une position arbitraire atteigne l'origine en un temps toujours le même. On démontre en analyse que la loi de force $X = -mk^2 x$ (attraction proportionnelle à la distance) répond seule à la question.

124. - Le point P est repoussé par l'origine proportionnellement à la distance.

Il faut dans les calculs du N° précédent, remplacer $-k^2$ par k^2 ; l'intégrale des forces vives donne :

$$x'^2 = k^2 x^2 + h, \quad h = x_0'^2 - k^2 x_0^2.$$

Nous supposons (comme c'est loisible) $x_0 > 0$.

Soit $x_0' > 0$; comme x croît, $k^2 x^2 + h$ reste positif; x tend vers l'infini (quand t croît indéfini).

ment⁽¹⁾ avec une vitesse indéfiniment croissante.

Soit $x_0 < 0$. Si $h > 0$, x décroît indéfiniment quand t tend vers ∞ , $|x|$ est minimum quand $x = 0$. - Si $h < 0$, posons $h = -k^2 a^2$ ($a < x_0$), on a: $x^2 = k^2 (x_0^2 - a^2)$; x décroît jusqu'à $+a$, rétrograde et s'éloigne indéfiniment du côté des x positifs pour $t = \infty$. - Enfin, si $h = 0$, t croît indéfiniment quand x tend vers zéro; ce cas exige que $x_0^2 = k^2 x_0^2$, c'est-à-dire (puisque x_0 est > 0 et $x_0' < 0$), que $x_0' = -k x_0$. Si P est lancé vers l'origine avec une vitesse initiale égale en valeur absolue à $k x_0$ (x_0 distance initiale de O et de P), le point P tend vers O sans jamais l'atteindre quand t croît indéfiniment.

On serait arrivé aux mêmes conclusions en intégrant directement l'équation du mouvement:

$$x'' - k^2 x = 0,$$

dont l'intégrale générale est:

$$x = A e^{kt} + B e^{-kt}.$$

Si on détermine les constantes A et B par les conditions initiales $t = 0$, x_0 , x_0' , il vient:

$$2x = \left(x_0 + \frac{x_0'}{k}\right) e^{kt} + \left(x_0 - \frac{x_0'}{k}\right) e^{-kt}.$$

Soit $x_0' = -k x_0$; l'équation précédente donne:

$$x = x_0 e^{-kt}$$

équation qui montre bien que P tend vers O quand t tend vers ∞ .

125. - Dans les deux exemples précédents, que la force soit attractive ou répulsive, la position $x = 0$ est une position d'équilibre. Mais cette position est une position d'équilibre stable si la force est attractive; instable si la force est répulsive. En effet, plaçons le point dans le voisinage de O avec une faible vitesse (qui peut être nulle): $|x_0|$ et $|x_0'|$ étant petits la quantité $a^2 = \frac{x_0'^2}{k^2} + x_0^2$ est petite, et le

(1) L'intégrale $\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{k^2 x^2 + h}} = t$ croît indéfiniment avec x parce que le coefficient de dx est de l'ordre de $\frac{1}{x}$ pour $x = \infty$.

point P oscille entre $+a$ et $-a$ c'est-à-dire au voisinage de 0 , avec une vitesse inférieure à ah ; l'équilibre est donc stable. Au contraire, quand la force est répulsive, le point P s'éloigne indéfiniment si petits que soient x_0 et x'_0 , à moins qu'on ait exactement: $x'_0 = -kx_0$, auquel cas P tend vers 0 lorsque t croît indéfiniment.

126. Cas où la force $X(x)$ devient discontinue. Nous avons admis, dans la discussion générale des N° 118-123 que la fonction $X(x)$ est continue quel que soit x et de plus admet une dérivée $X'(x)$ pour les zéros $x = x_0$ de $X(x)$. Dans un grand nombre d'applications, $X(x)$ devient infinie pour certaines valeurs de x , par exemple: pour $x = 0$. Quand il en est ainsi, la marche de la discussion est toujours la même que celle que nous avons suivie plus haut: mais aux valeurs $x = a$ qui annulent $\Psi(x) + h$, il faut joindre, comme valeurs remarquables de x , les valeurs $x = b$ pour lesquelles $X(x)$ est discontinue. Car, que x n'atteint pas a , dans son mouvement, une des valeurs b , rien n'est changé à la discussion du N° 120; mais si x tend vers b quand t croît, il faut discuter le mouvement pour x voisin de b . Si $\Psi(x)$ devient infini $\Psi(x)$ est infini positif pour $x = b + \varepsilon$; cette condition remplie, x atteint b en un temps fini avec une vitesse infinie. Si $\Psi(x)$ reste finie pour $x = b$, x atteint b en un temps fini avec une vitesse finie. Mais dans les deux cas, le problème physique cesse d'avoir un sens dès que P atteint la position b .

127. Remarque sur les forces d'attraction et de répulsion.

Supposons P attiré (ou repoussé) par l'origine O suivant une loi fonction de la seule distance $r = OP$. On a:

$$\left. \begin{array}{l} X < 0 \text{ si } x > 0 \\ X > 0 \text{ si } x < 0 \end{array} \right\} \text{ dans le cas d'une attraction,}$$

$$\left. \begin{array}{l} X > 0 \text{ si } x > 0 \\ X < 0 \text{ si } x < 0 \end{array} \right\} \text{ dans le cas d'une répulsion.}$$

Soit μr^n la valeur absolue de la force (μ coefficient > 0 ,

n constante de signe quelconque). Comme $P = |x|$, on peut écrire :

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour } x > 0 \quad X = -\mu |x|^n = -\mu x^n \\ \text{pour } x < 0 \quad X = +\mu |x|^n = +\mu (-x)^n \end{array} \right\} \text{ dans le cas d'une attraction;}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour } x > 0, \quad X = \mu |x|^n = \mu x^n \\ \text{pour } x < 0 \quad X = -\mu |x|^n = -\mu (-x)^n \end{array} \right\} \text{ dans le cas d'une répulsion.}$$

Si n est un entier impair, on aura, quel que soit le signe de x :

$$X = -\mu x^n \text{ dans le cas d'une attraction}$$

$$X = \mu x^n \text{ dans le cas d'une répulsion.}$$

Si n est un entier pair, on aura dans le cas d'une attraction :

$$X = -\mu x^2, \text{ si } x > 0, \quad X = \mu x^2, \text{ si } x < 0;$$

X sera donc défini par deux expressions analytiques différentes suivant que x est positif ou négatif. Pour $x > 0$, l'équation du mouvement sera : $m x'' = -\mu x^2$, et pour $x < 0$ elle sera : $m x'' = \mu x^2$.

Remarquons enfin que $X(x)$, dans tous les cas, sera une quantité bien déterminée pour une valeur arbitraire de x ; mais cette fonction X pour être représentée par une branche (définie sans ambiguïté) d'une fonction à plusieurs branches. Supposons, par exemple, que la force \vec{F} soit une attraction proportionnelle à la racine carrée de la distance; on aura :

$$X = -\mu \sqrt{x} \text{ pour } x > 0, \text{ et } X = +\mu \sqrt{-x} \text{ pour } x < 0.$$

(μC^{te} positive).

128. Application. - Le point P est attiré par l'origine en raison inverse du carré de la distance.

Soit $x_0 > 0$; pour $x > 0$, l'équation du mouvement est :

$$m x'' = -\frac{\mu}{x^2} = -\frac{mk^2}{x^2}$$

et l'intégrale des forces vives est :

$$x^2 = \frac{2k^2}{x} + h, \quad h = x_0^2 - \frac{2k^2}{x_0}$$

1° Si $x_0 \leq 0$ x décroît et atteint 0 en un temps fini

$$t_1 = - \int_{x_0}^0 \frac{dx}{\sqrt{\frac{2k^2}{x} + h}} = \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{x}{hx + 2k^2}} dx,$$

avec une vitesse infinie: la discussion ne peut être poursuivie⁽¹⁾

2° Si $x_0 > 0$, deux cas sont à distinguer suivant que h est > 0 ou < 0 . Quand $h > 0$, l'expression $\frac{2k^2}{x} + h$ reste finie et positive quand x croît indéfiniment, et P s'éloigne indéfiniment dans le sens ox , avec une vitesse qui tend vers \sqrt{h} . Quand $h < 0$, x croît jusqu'à la valeur $x_1 = -\frac{2k^2}{h}$, rétrograde et atteint 0 avec une vitesse infinie en un temps fini.

129. - Si, dans l'exemple précédent, la force est répulsive au lieu d'être attractive, il faut changer $-k^2$ en k^2 ; l'intégrale des forces vives donne alors (pour $x > 0$)

$$x^2 = -\frac{2k^2}{x} + h, \quad \left(h = x_0^2 + \frac{2k^2}{x_0} > 0 \text{ puisque } x_0 > 0 \right).$$

Si $x_0 > 0$, P s'éloigne indéfiniment sur ox avec une vitesse qui tend vers \sqrt{h} ; si $x_0 < 0$, x décroît jusqu'à la valeur $\alpha = \frac{2k^2}{h}$, puis rétrograde et s'éloigne indéfiniment sur ox .

Remarque. - Que la force soit répulsive ou attractive, on peut intégrer le problème jusqu'au bout, en rendant rationnelle la quadrature à effectuer par le changement de variables $\pm \frac{2k^2}{x} + h = u^2$.

Exemple à traiter. - Étudier le mouvement rectiligne de P attiré (ou repoussé) par deux points fixes O et O_1 , le point P étant placé initialement sur le segment OO_1 avec une vitesse dirigée selon ce segment. Montrer qu'il existe une position d'équilibre entre O et O_1 , stable ou instable selon que O et O_1 repoussent ou attirent P .

⁽¹⁾ Dans la réalité, il y aurait eu un choc entre l'élément P et le corps O attirant, avant que la vitesse de P fût devenue infinie.

Cas où la force X , ne dépend que de la vitesse P .

190. - Intégration de l'équation du mouvement.
L'équation du mouvement est alors

$$(1) \quad mx'' = X(x');$$

posons $x' = u$; on peut écrire:

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad m \frac{du}{dt} = X(u); \quad \text{d'où}$$

$$(2) \quad dt = \frac{m du}{X(u)}, \quad t - t_0 = \int_{u_0}^u \frac{m du}{X(u)}$$

et

$$(3) \quad dx = u dt = \frac{m u du}{X(u)}, \quad x - x_0 = \int_{u_0}^u \frac{m u du}{X(u)};$$

x et t se trouvent ainsi exprimés, moyennant deux quadratures, en fonction d'un paramètre u (qui n'est autre que la vitesse, au signe près).

131. - Sois de la résistance de l'air. - Considérons un fluide (gaz ou liquide) immobile par rapport à la terre et ayant partout la même température et la même densité: Si une sphère solide S est placée sans vitesse dans ce fluide, on sait (principe d'Archimède) que les réactions du fluide sur S ont une somme géométrique égale et directement opposée au poids $\mu \bar{g}$ du fluide déplacé, (le vecteur $\mu \bar{g}$ étant construit avec le centre de la sphère comme origine). Quand la sphère se meut très lentement dans le fluide, le principe d'Archimède s'applique encore sensiblement; mais dès que la vitesse de S devient appréciable, l'expérience montre qu'il faut ajouter à la poussée $-\mu \bar{g}$ d'Archimède une force R égale et directement opposée à la vitesse \bar{V} du centre C de S : autrement dit, la somme géométrique des réactions du fluide sur la sphère S est la résultante de la poussée du fluide et d'une résistance R opposée à \bar{V} . On admet⁽¹⁾ que (pour une température et une

(1) Nous reviendrons plus loin sur les lois de la résistance de l'air. Nous considérons ici une sphère et non un élément matériel quelconque, parce que la résistance de l'air dépend de la face que l'élément présente à l'air. Si l'élément est un projectile ogival, la résistance (à vitesse égale) est moindre si le projectile se meut dans le sens de la pointe que s'il s'offre à l'air par sa base ou par sa surface latérale.

densité donnée du fluide), R est une fonction déterminée de V qui croît constamment et rapidement avec V . Ces lois ne constituent d'ailleurs qu'une grossière approximation: en réalité, le mouvement de S dans un fluide constitue un problème d'hydrodynamique très compliqué qui ne saurait répondre à aucune loi simple.

Pour un rayon donné de la sphère, les formules empiriques adoptées pour représenter R en fonction de V sont différentes suivant les limites entre lesquelles varie V . C'est ainsi que, V variant entre certaines limites, on admet que $R = a + bV$; pour des valeurs plus grandes de V , on admet que $R = cV^2$; pour des valeurs plus grandes encore, que $R = dV^3$, etc, [a, b, c, d désignant des constantes déterminées, que dépendent du fluide considéré, de sa température, de sa densité]. Quand le fluide est l'air aux conditions normales, une formule qui représente assez bien R pour des vitesses inférieures à 140 mètres par seconde est la suivante:

$$R = AV^2 \times \frac{11}{10^5}, \quad \text{en C. G. S.}$$

A désignant la surface totale de la sphère. Lorsqu'on prend comme unité de force le kilogramme-poids (à Paris), comme unité de longueur le mètre, l'unité de temps restant la seconde, la formule devient (R_1, A_1, V_1 désignant les nouveaux nombres qui mesurent R, A, V):

$$R_1 = A_1 V_1^2 \times \frac{11}{10^5} \times \frac{10^8}{981.000} = A_1 V_1^2 0,0112.$$

Si la sphère S est homogène, pesante et de masse m , son centre C [qui est son centre de gravité] se meut, par rapport à la terre, comme un point libre de masse m qui serait soumis à la force:

$$F = m\bar{g} - \mu\bar{g} - \bar{R}(V) = (m - \mu)\bar{g} + \bar{R}(V)$$

\bar{V} désignant la vitesse de C , et \bar{R} étant directement opposée à \bar{V} . Étudions ce mouvement.

Si D est la densité de S et d celle du fluide, $\frac{\mu}{m}$ est égal à $\frac{D}{d}$, et on peut écrire:

$$F = m\left(1 - \frac{d}{D}\right)\bar{g} + \bar{R}(V) = m\bar{g} + \bar{R}(V).$$

Si la sphère est très dense par rapport au fluide, on peut négliger

$\frac{d}{dt}$ et confondre sensiblement \bar{g} et \bar{g} . Mais si $\frac{d}{dt}$ est notable, \bar{g} , \bar{D} diffère notablement de \bar{g} ; son sens est \bar{D} contraire à celui de \bar{g} si le fluide est plus dense que la sphère. Lorsque $g=0$, le point C décrit une droite avec une vitesse décroissante, cela quelle que soit la direction de sa vitesse initiale: en effet $F_n = \frac{mV^2}{r} = 0$; la courbure $\frac{1}{r}$ de la trajectoire est donc nulle en chaque point. Ce cas écarté, C décrit une verticale si sa vitesse initiale est verticale [N° 108]. Pour fixer les idées, je supposerai que \bar{g} se confond sensiblement avec \bar{g} . [Exemple, sphère de fonte dans l'air, $\frac{d}{dt} = \frac{1}{7000}$]. Mais rien n'est changé à la discussion qui va suivre quand \bar{g} diffère notablement de \bar{g} mais a le même sens: il suffit de remplacer g par \bar{g} . Quand \bar{g} est de sens contraire à \bar{g} , il faut dans ce qui va suivre, remplacer g par \bar{g} et permuter les mots ascendants et descendants.

132 - Mouvement vertical d'un point pesant dans un milieu résistant.

Mouvement descendant. - Si la vitesse initiale est nulle ou descendante, prenons comme axe Ox la verticale descendante. L'équation du mouvement est:

$$(3) \quad mx'' = mg - \varphi(V), \quad \text{ou (comme } x' > 0)$$

$$\frac{dx}{dt} = V, \quad \frac{dV}{dt} = g - \frac{\varphi(V)}{m}.$$

La fonction $\varphi(V)$ par hypothèse, est nulle pour $V=0$ et croît constamment et indéfiniment avec m ; il existe donc une valeur V_1 et une seule de V par laquelle $g - \frac{\varphi(V)}{m}$ s'annule. On a:

$$(4) \quad g - \frac{\varphi(V)}{m} > 0 \text{ pour } V < V_1, \quad g - \frac{\varphi(V)}{m} < 0 \text{ pour } V > V_1.$$

Si donc, à l'instant t_0 , V_0 est supérieur à V_1 , V commence à décroître, et décroît tant que V n'atteint pas la valeur V_1 ; or on a:

$$(5) \quad t = \int_{V_0}^V \frac{dV}{g - \frac{\varphi(V)}{m}} = \int_V^{V_0} \frac{dV}{(V - V_1) [\varphi'(V_1) + \varepsilon]}$$

lorsque V tend vers V_1 , le dernier membre de l'égalité (5) tend vers l'infini. On voit donc que, si $V_0 > V_1$, V décroît constamment et tend vers V_1 quand t croît indéfiniment.

Si $V_0 < V_1$, le même raisonnement montre que V croît constamment et tend vers V_1 quand t croît indéfiniment.

Enfin si $V_0 = V_1$, V reste constamment égal à V_1 . Le mouvement tend donc à devenir sensiblement uniforme au bout d'un temps très long ⁽¹⁾.

Si on ne néglige pas $\frac{d}{H}$, la vitesse limite V_1 est donnée par :

$$\varphi(V_1) = mg = mg \left| 1 - \frac{d}{H} \right| = g |m - \mu|,$$

où μ est la masse du fluide déplacé.

133. - Comparaison de la chute de deux sphères.

À l'instant $t=0$, abandonnons sans vitesse deux sphères homogènes de rayon égal mais de masses m et m' différentes ($m > m'$), et soit V_1, W_1 les deux vitesses limites correspondantes; on a

$$\varphi(V_1) = g(m - \mu), \quad \varphi(W_1) = g(m' - \mu)$$

[en supposant $m' > \mu$]. Puisque $\varphi(V)$ croît avec V , et que $m > m'$, on voit que V_1 est $> W_1$.

D'autre part, je dis que la vitesse V de la première sphère est constamment supérieure à la vitesse W de la seconde. En effet, on a :

$$(6) \quad \frac{dV}{dt} - \frac{dW}{dt} = \frac{d(V-W)}{dt} = \mu g \left[\frac{1}{m'} - \frac{1}{m} \right] + \frac{\varphi(W)}{m'} - \frac{\varphi(V)}{m}.$$

Si $V=W$ à l'instant t , le second membre de (6) est positif, $V-W$ croît donc à l'instant t . Pour $t=0$, on a : $V=W=0$; $V-W$ commence donc par croître à partir de zéro; il reste ensuite indéfiniment positif; car soit t la première valeur de t pour laquelle il s'annulerait: pour $t = t_1$, $V-W$ est croissant, dont il est négatif pour $t = t_1 - \varepsilon$, ce qui est contre l'hypothèse.

⁽¹⁾ Le raisonnement suppose que $\varphi(V_1)$ existe. Si on admet seulement que $\varphi(V)$ croît constamment et croît de 0 à $+\infty$ quand V croît de 0 à $+\infty$, les inégalités (H) montrent encore que V décroît jusqu'à V_1 (mais ne peut décroître au-delà) si $V_0 < V_1$; que V croît jusqu'à V_1 mais ne peut croître au-delà si $V_0 < V_1$; enfin que, $V \equiv V_1$ si $V_0 = V_1$. Mais V peut atteindre alors sa limite V_1 en un temps fini: par ex., c'est ce qui arrive si $g - \frac{\varphi(V)}{m}$ est égal à $-A(V-V_1)^2$ pour $V > V_1$ et à $+A(V_1-V)^2$ pour $V < V_1$. Au bout d'un temps fini, le mouvement, dans ce dernier cas, est un mouvement uniforme de vitesse V_1 .

En définitive, V est constamment supérieur à W , et tend vers une limite V_1 supérieure à la limite W_1 de W .

$$\text{Si } \varphi(V) = \alpha V^n, \text{ on a: } \frac{V_1}{W_1} = \left(\frac{m-\mu}{m'-\mu} \right)^{\frac{1}{n}}$$

133. - Mouvement vertical ascendant. - Prenons comme axe la verticale ascendante. On a alors:

$$\frac{dx}{dt} = V, \quad \frac{dV}{dt} = -g - \varphi(V).$$

La vitesse décroît et s'annule au bout d'un temps t_1 plus court que s'il n'y avait pas de résistance. On a:

$$t_1 = \int_0^{V_0} \frac{dV}{g + \varphi(V)} < \frac{V_0}{g}.$$

134. - Application. - Soit $\varphi(V) = \alpha V^2$.

Dans le mouvement descendant, on a:

$$\frac{dV}{dt} = g - \frac{\alpha V^2}{m} \equiv K(\alpha^2 - V^2), \text{ en posant } K = \frac{a}{m}$$

$$\text{et } \alpha = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}} = \sqrt{\frac{g}{K}};$$

D'où

$$(7) \quad K dt = \frac{dV}{\alpha^2 - V^2}, \quad K dx = \frac{V dV}{\alpha^2 - V^2}$$

Intégrant la première équation (7); il vient

$$K dt = \frac{dV}{\alpha^2 - V^2} = \frac{1}{2\alpha} \left[\frac{dV}{\alpha + V} + \frac{dV}{\alpha - V} \right],$$

ou

$$Kt = \frac{1}{2\alpha} \log \left(\frac{\alpha + V}{\alpha - V} \right) - \log C,$$

ou enfin:

$$(8) \quad \frac{\alpha + V}{\alpha - V} = C e^{2\alpha K t}, \left[C = \frac{\alpha + V_0}{\alpha - V_0}, \text{ si } V = V_0 \text{ pour } t = 0 \right].$$

Résolvons l'équation (8) par rapport à V ; on trouve

$$(9) \quad V = \frac{dx}{dt} = \alpha \frac{[C e^{\alpha K t} - e^{-\alpha K t}]}{C e^{\alpha K t} + e^{-\alpha K t}}$$

Pour obtenir x , au lieu d'employer la seconde équation (7), on peut intégrer directement l'équation (9); le numérateur est la dérivée [divisée par K] du dénominateur; on a donc:

$$Kx = \log [C e^{\alpha Kt} + e^{-\alpha Kt}] + \log B,$$

ou encore:

$$(10) \quad Kx = \log [A e^{\alpha Kt} + B e^{-\alpha Kt}]$$

A et B désignant deux constantes arbitraires définies par les conditions initiales.

En particulier, soit $t=0$, $x_0 = x'_0 = 0$: l'équation (10) dérivée donne pour $t=0$

$$x'_0 = \alpha(A - B) = 0,$$

d'où $A=B$. De plus, la condition

$$Kx_0 = \log(A+B) = 0$$

donne $A+B=1$. On a donc: $A=B=\frac{1}{2}$, et

$$(11) \quad Kx = \log \frac{e^{\alpha Kt} + e^{-\alpha Kt}}{2} = \log \cos. \text{ hyp. } (\alpha Kt).$$

Vérification. - Quand la résistance est nulle, c. à. d. quand K est nul, le mouvement correspondant aux mêmes conditions initiales est: $x = \frac{gt^2}{2}$. Remplaçons, dans (11), α par $\sqrt{\frac{g}{K}}$, faisons tendre K vers zéro et vérifions que $x(t)$ tend vers $\frac{gt^2}{2}$. On a:

$$(12) \quad Kx = \log \frac{e^{\sqrt{gK}t} + e^{-\sqrt{gK}t}}{2} = \log \left[1 + \frac{gKt^2}{2} + \dots \right] = \frac{gKt^2}{2} + \dots,$$

les termes non écrits renfermant K^2 en facteur; on peut donc écrire:

$$x = \frac{gt^2}{2} + K(\dots)$$

et quand K tend vers zéro, la fonction limite de $x(t)$ est $\frac{gt^2}{2}$.

C. q. f. d.

Dans le mouvement descendant, on a:

$$\begin{aligned} dt &= \frac{-dV}{g + KV^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{Kg}} \frac{\sqrt{\frac{K}{g}}}{1 + \frac{K}{g} V^2} \end{aligned}$$

d'où:

$$\sqrt{gK} t = -\operatorname{artg} V \sqrt{\frac{K}{g}} + h, \quad [h = \operatorname{artg} V_0 \sqrt{\frac{K}{g}}],$$

et enfin:

$$\frac{dx}{dt} \sqrt{\frac{K}{g}} = V \sqrt{\frac{K}{g}} = \operatorname{tg} [h - t \sqrt{gK}].$$

Intégrons encore une fois :

$$x \sqrt{\frac{K}{g}} = \frac{1}{\sqrt{Kg}} \log \cos [h - t \sqrt{Kg}] + C^{\text{te}}$$

$$Kx = \log \left[\frac{\cos(h - t \sqrt{Kg})}{\cos h} \right].$$

Il serait facile de vérifier comme plus haut que, si on fait tendre K vers zéro, $x(t)$ tend vers la fonction $V_0 t - \frac{gt^2}{2}$ qui représente le mouvement ascendant dans le vide correspondant aux mêmes conditions initiales.

135. - Exemples numériques. - 1° Corps plus lourd que l'air. - Considérons une sphère de fonte homogène de densité 7, de rayon égal à 1^{cm} lancée dans l'air immobile, et admettons la formule du n° 131.

$$R = AV^2 \frac{11}{10^5} \quad (\text{C. G. S}).$$

Confondons g et g_1 ; la vitesse limite V_1 est donnée par l'égalité: $R = mg$, c'est-à-dire :

$$4\pi V^2 \frac{11}{10^5} = \frac{4}{3} \pi \times 7 \times 981, \quad \text{ou bien}$$

$$V = 100 \times \sqrt{\frac{70 \times 981}{33}} = 4561 \quad (\text{C. G. S}),$$

la vitesse limite V_1 est une vitesse de 45^{mètres} 61 à la seconde.

Si on adopte la notation du n° précédent, on a de plus :

$$R = mKV^2, \text{ d'où } K = 4\pi \times \frac{11}{10^5} \times \frac{1}{\frac{4}{3}\pi \times 7} = \frac{33}{7 \times 10^5} = \frac{47}{10^6}$$

$$\alpha = V_1 = \sqrt{\frac{g}{K}} = 4561 ;$$

l'équation du mouvement est donc

$$\frac{dV}{dt} = \frac{47}{10^6} [(4561)^2 - V^2]$$

La sphère étant abandonnée sans vitesse à l'instant $t=0$, pour calculer le temps au bout duquel la vitesse a une

valeur donnée V (V_1), il suffit d'employer la formule [N° 134]:

$$Kt = \frac{1}{2\alpha} \log \frac{\alpha + V}{\alpha - V} \quad \left[\begin{array}{l} \text{le signe log désignant les logarithmes} \\ \text{népériens} \end{array} \right]$$

Pour $V = 4000 \text{ cm}$, on a:

$$0,427 t_1 = \log 15,2 ; \quad t_1 = 6 \text{ secondes, } 5 \text{ environ}$$

Pour $V = 4500 \text{ cm}$, on trouve

$$0,427 t_2 = \log 148, \quad t_2 = 11 \text{ secondes, } 8 \text{ environ.}$$

Au bout de 6 secondes, 5, la vitesse de chute est donc de 40 mètres, tandis qu'elle serait de 63 mètres γ dans le vide; au bout de 11 secondes, 8, elle est de 45 mètres, tandis qu'elle serait de 115 mètres γ dans le vide. Pour $t \gamma 11$ secondes, 8, V croît très lentement et d'une quantité qui reste moindre que 0 mètre, 61. (1)

2° Corps plus légers que l'air. - Soit une bulle de savon de 1 cm. de rayon gonflée d'hydrogène et dont la masse est égale au tiers de la masse du même volume d'air. La densité de l'air étant prise égale à 0,0013, la masse m de la bulle est: $\frac{4\pi}{3} \times \frac{0,0013}{3}$.

Ici \bar{g}_1 est de sens contraire à \bar{g} et égal à 2g en valeur absolue. La vitesse limit V_1 de V est

$$\sqrt{\frac{mg_1}{4\pi \times 0,00011}} = \sqrt{\frac{2 \times 981 \times 130}{9 \times 11}} = \sqrt{2576} = 50,77 \text{ cm}$$

L'équation du mouvement est:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{9 \times 11}{130} [(50,77)^2 - V^2] = 0,76 [(50,77)^2 - V^2];$$

Si $V=0$ pour $t=0$, on a:

$$77,2 \times t = \log \left[\frac{50,77 + V}{50,77 - V} \right].$$

Pour $V = 50 \text{ cm}$, on trouve $t = \frac{1}{15}$ environ; au bout d'un 15^e

(1) Si Π est la densité d'une sphère homogène (densité très grande par rapport à celle de l'air), et r le rayon de la sphère, on a:

$$\frac{R}{mg} = \frac{0,00033V^2}{981 \cdot r \cdot \Pi g}$$

L'influence de la résistance est donc inversement proportionnelle au produit $r\Pi$ c.à.d. d'autant plus faible que la sphère est plus grosse et plus dense.

de seconde, V a donc atteint une valeur 50 cm très voisine de sa vitesse limite, et ne croît plus ensuite que d'une quantité moindre que 0^{cm} , 77.

136. - Cas où X est une fonction de x' et de x . - Lorsque X est une fonction de x' et de x , indépendante de t , l'équat^{on} du mouvement

$$(1) \quad mx'' = X(x', x)$$

se ramène à une équation du 1^{er} ordre, en prenant x' comme fonction et x comme variable. Posons : $x' = u$; on a :

$$x'' = \frac{du}{dt} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} = u \frac{du}{dx},$$

et l'équation du mouvement peut se remplacer par les suivantes :

$$(2) \quad \frac{dx}{dt} = u$$

$$m \frac{du}{dx} = \frac{X(u, x)}{u};$$

une fois intégrée l'équation (2), soit $u = \varphi(x, C)$, on a t par la quadrature : $dt = \frac{dx}{u}$. A chaque cas d'intégration de l'équation du 1^{er} ordre correspond donc un problème intégrable de l'espèce considérée.

Un cas qui se présente très fréquemment dans les applications est celui où l'équation (1) est de la forme :

$$(3) \quad mx'' = A(x)x'^2 + B(x).$$

En l'écrivant : $\frac{m}{2} \frac{dx^2}{dx} = A|x|x'^2 + B|x|$, on voit que $U = x^2$ vérifie l'équation :

$$\frac{m}{2} \frac{dU}{dx} = A(x)U + B(x)$$

d'où :

$$U = e^{\frac{2}{m} \int A(x) dx} \left[C + \frac{2}{m} \int dx B e^{-\frac{2}{m} \int A(x) dx} \right] = \varphi(x) [C + \psi(x)],$$

φ et ψ étant donnés par deux quadratures. On a ensuite :

$$dt = \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x) [C + \psi(x)]}},$$

et la discussion du mouvement se fait comme aux N^{os} 118-122.

137. Application. — Supposons que P, placé à l'instant t en un point arbitraire x de OX avec une vitesse x' arbitraire [dirigée selon OX], soit soumis à une force dirigée selon OX et fonction seulement de x , et en outre à une résistance proportionnelle au carré de la vitesse $R = mav^2$; on a

$$X(x) = -\varepsilon m a x'^2 + B(x) \quad \left(\begin{array}{l} \varepsilon = +1 \text{ si } x' > 0 \\ \varepsilon = -1 \text{ si } x' < 0 \end{array} \right)$$

Si $x'_0 > 0$, on a :

$$x' = + \sqrt{e^{-2ax} \left[C + \frac{2}{m} \int B(x) e^{2ax} \right]}$$

tant que x' ne s'annule pas.

Quand $B(x)$ est une attraction proportionnelle à la distance, on a, quel que soit le signe de x ,

$$B = -\mu x = -mk^2 x, \text{ et } \frac{2}{m} \int B(x) e^{2ax} = -2k^2 \int x e^{2ax} = \frac{k^2}{a} e^{2ax} \left(\frac{1}{2a} - x \right)$$

D'où :

$$x' = + \sqrt{C e^{2ax} + \frac{k^2}{2a^2} - \frac{k^2 x}{a}}, \text{ tant que le radical ne s'annule pas.}$$

138. — Mouvement rectiligne d'un point P attiré par O proportionnellement à la distance et soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse.

On a :

$$X = -mk^2 x - 2m\mu x' \quad (k > 0, \mu > 0),$$

cela quels que soient les signes de x et de x' .

L'équation du mouvement est donc

$$(4) \quad x'' + 2\mu x' + k^2 x = 0.$$

On sait qu'elle admet deux solutions de la forme e^{rt} , r désignant une racine de l'équation :

$$r^2 + 2\mu r + k^2 = 0;$$

r a donc une des deux valeurs :

$$r = -\mu \pm \sqrt{\mu^2 - k^2}.$$

Si $\mu^2 < k^2$, comme il arrive dans la plupart des applications, posons : $k^2 - \mu^2 = \nu^2$. L'intégrale générale de (4) est :

$$x = e^{-\mu t} [A e^{i\nu t} + B e^{-i\nu t}]$$

et pour que $x(t)$ soit réel, il faut et il suffit que les constantes A et B soient imaginaires conjuguées; x peut alors se mettre sous la forme

(5) $x = e^{-\mu t} [a \cos vt + b \sin vt]$,
 a et b désignant deux constantes réelles.

De (5) on déduit:

(6) $x' = e^{-\mu t} [(b\nu - a\mu) \cos vt - (b\mu + a\nu) \sin vt]$

Soit, pour $t=0$, $x=x_0$, $x'=x'_0$; on doit avoir:

$x_0 = a$, $x'_0 = b\nu - a\mu = b\nu - x_0\mu$;

d'où

(7) $x = e^{-\mu t} [x_0 \cos vt + \frac{x'_0 + \mu x_0}{\nu} \sin vt]$.

L'équation (6) montre que x' s'annule et change de signe pour toutes les valeurs t_i de t telles que

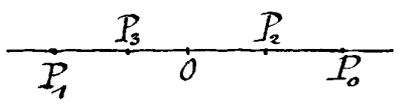
$$\operatorname{tg} vt_i = \frac{b\nu - a\mu}{b\mu + a\nu} = \frac{\nu x'_0}{\mu x'_0 + x_0(\mu^2 + \nu^2)}$$

Il est loisible de prendre pour origine du temps un de ces instants t_i : on a alors $x=x_0$, $x'_0=0$, pour $t=0$, et

$$x = e^{-\mu t} x_0 [\cos vt + \frac{\mu}{\nu} \sin vt]$$

$$x' = -e^{-\mu t} \frac{x_0}{\nu} (\mu^2 + \nu^2) \sin vt$$

La fonction $x(t)$ décroît d'abord, s'annule pour la valeur t' comprise entre $\frac{\pi}{2\nu}$ et $\frac{\pi}{\nu}$ telle que $\operatorname{tg} vt' = -\frac{\nu}{\mu}$, et décroît jusqu'à la valeur $x_1 = -x_0 e^{-\frac{\mu\pi}{\nu}}$ quand t croît de zéro à $\frac{\pi}{\nu}$; x croît ensuite jusqu'à la valeur $x_2 = -x_1 e^{-\frac{\mu\pi}{\nu}} = x_0 e^{-2\frac{\mu\pi}{\nu}}$, quand t croît de $\frac{\pi}{\nu}$ à $\frac{2\pi}{\nu}$, etc. On voit que le mouvement est un mouvement alternatif isochrone; si $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$ sont les positions [alternativement à droite et à gauche de 0] où x' s'annule aux instants $t=0$, $t=\frac{\pi}{\nu}$, $t=\frac{2\pi}{\nu}$, etc, les valeurs absolues des distances OP_0, OP_1, OP_2, \dots décroissent en progression géométrique et tendent vers zéro. Les oscillations sont isochrones mais amorties, leur amplitude tend vers zéro quand t croît indéfiniment.



Remarquons que le temps t' employé par P pour aller de P_0 à l'origine, [$\operatorname{tg} vt' = -\frac{\nu}{\mu}$] est plus grand que $\frac{\pi}{2\nu}$, donc plus grand que le temps $\frac{\pi}{\nu} - t'$ employé par P pour aller de 0 à P_1 .

Mouvement d'un point sous l'action d'une force parallèle à une droite fixe.

139. - Equations du mouvement. - La trajectoire est plane et son plan est le plan⁽¹⁾ parallèle à la direction fixe de la force qui contient la position et la vitesse initiales du point matériel P. Prenons ce plan comme plan xoy , oy étant la direction fixe de la force; les équations du mouvement sont:

$$(1) \quad mx'' = 0, \quad my'' = Y(x, y, x', y', t).$$

La première donne: $x = x_0 t + x_0$; la seconde peut donc s'écrire:

$$(2) \quad my'' = Y(x_0 t + x_0, y, x_0 y', t) = Y_1(y, y', t).$$

On est ramené au même problème que dans le cas du mouvement rectiligne: intégrer l'équation du second ordre⁽²⁾. Tout ce qui a été dit plus haut au sujet du mouvement rectiligne peut se répéter sans modification; en particulier, quand Y_1 est une simple fonction soit de t , soit de y , soit de y' , le problème s'intègre par deux quadratures. Si notamment Y ne dépend que de y , la discussion du mouvement de la projection de P sur Oy est exactement la même que celle des N^{os} 118-122.

140. - Mouvement d'un point pesant dans le vide.

Si le point P est pesant, l'axe Oy étant la verticale ascendante, on a: $X = 0$, $Y = -mg$. On sait que la trajectoire est une parabole, dont je vais rappeler brièvement les propriétés.

Prenons comme origine des axes la position initiale de P, et menons Ox dans le sens de la projection horizontale de la vitesse initiale \vec{v}_0 . Soit α_0 l'angle de \vec{v}_0 et de

Ox $[-\frac{\pi}{2} < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}]$. En intégrant les équations du mouvement on trouve aussitôt:

⁽¹⁾ Ce plan est bien déterminé, sauf dans le cas où la vitesse initiale est soit nulle soit parallèle à la direction fixe de la force. Mais la trajectoire est alors rectiligne.

$$x = tV_0 \cos \alpha, \quad y = -\frac{gt^2}{2} + tV_0 \sin \alpha,$$

et en éliminant t

$$y = -g \frac{x^2}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} + x \operatorname{tg} \alpha.$$

La trajectoire est une parabole d'axe vertical, tournant sa concavité vers le bas; le paramètre p de la parabole est $p = \frac{V_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$; son sommet est

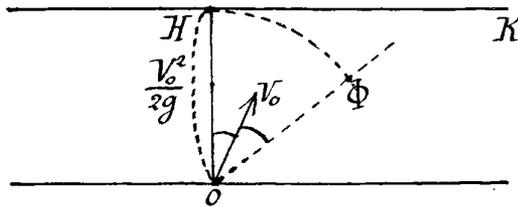
$$x_1 = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{2g}, \quad y_1 = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g};$$

sa directrice est

$$y = y_1 + \frac{p}{2} = \frac{V_0^2}{2g}.$$

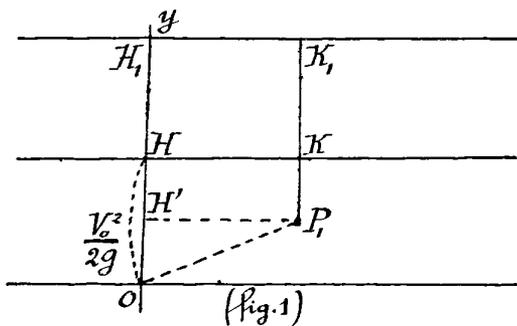
D'où ce théorème: Si la vitesse initiale V_0 est donnée en valeur absolue, toutes les paraboles obtenues en faisant varier la direction de V_0 ont même directrice $y = \frac{V_0^2}{2g}$ ou HK

Il est dès lors très facile de construire le foyer de la parabole connaissant V_0 et α_0 .



Il suffit de construire l'angle $HO\Phi$ dont OV_0 est la bissectrice et de prendre sur $O\Phi$ une longueur $O\Phi$ égale à OH . La parabole trajectoire est ainsi définie par son foyer et sa directrice.

Parabole de sûreté. - La valeur absolue de la vitesse V_0 étant donnée, peut-on atteindre un point P , donné du plan xoy ?



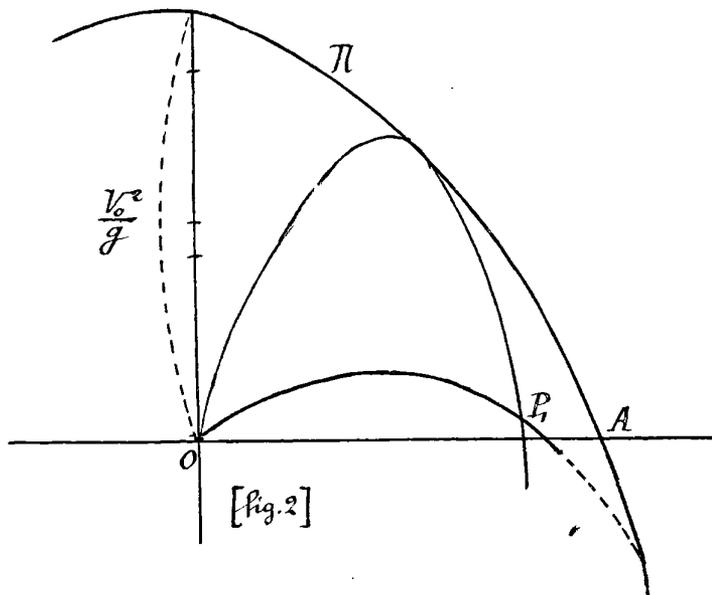
Le foyer de la parabole qui passe par O et P , se trouve sur le cercle C décrit de O comme centre avec OH comme rayon, et sur le cercle C_1 décrit de P , comme centre avec P_1K comme rayon (P_1K distance de P à HK). Pour que la parabole existe, il faut et il suffit que les deux

cercles se coupent, c'est-à-dire qu'on ait (fig.1):

$$(1) \quad OH + P_1K \gg OP \gg |OH - P_1K|$$

La dernière inégalité exprime que OP_1 est $\gg OH'$ [OH' projection de OP_1 sur Oy], condition toujours remplie. Soit H, K_1 une parallèle à Ox telle que H soit le milieu de OH_1 ; la première inégalité (1) exprime que $P_1 K_1$ est $\gg OP_1$. Considérons la parabole $P_1 K_1 = OP_1$ (de foyer O et de directrice $H_1 K_1$) dite parabole de sûreté π : pour qu'on puisse atteindre P_1 , il faut et il suffit que P_1 soit du même côté que O par rapport à π . Si cette condition est remplie, deux paraboles passent par le point P_1 : le temps $t = \frac{x_1}{v_0 \cos \alpha_0}$ employé par P pour aller de O à P_1 est plus court sur la parabole inférieure que sur la parabole supérieure [car α_0 est plus grand pour la première que pour la seconde].

Quand P_1 est sur la parabole π , les deux cercles C et C_1



se touchent, les deux paraboles se confondent en une parabole Γ , qui est tangente en P_1 à π . En effet, le foyer Φ de Γ est sur OP_1 [fig. 1], la tangente en P_1 à Γ est bissectrice de l'angle $\Phi P_1 K_1$, c'est-à-dire de l'angle $OP_1 K_1$; mais il en est de même de la tangente en P_1 à π ; les deux courbes sont donc tangentes en P_1 . La parabole de sûreté est l'enveloppe des paraboles qui cor-

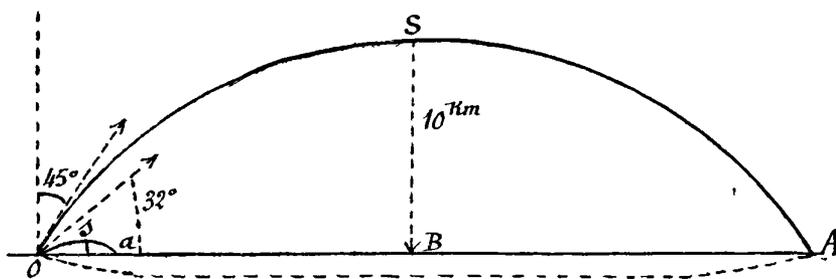
respondent à la même valeur absolue de v_0 .

Pour qu'on puisse atteindre un point P_1 de Ox , il faut et il suffit que P_1 soit situé entre O et le second point A où π rencontre Ox , c'est-à-dire que x_1 soit $\leq \frac{v_0^2}{g}$. Si P_1 coïncide avec A , le foyer Φ de la parabole trajectoire Γ est sur Ox ; la tangente en O à la trajectoire [c'est-à-dire v_0] est bissectrice de xoy . Si P_1 est compris entre O et A , les deux cercles C et C_1 se coupent en deux points Φ et Φ_1 , symétriques par rapport à Ox , les bissectrices des angles ΦOH et $\Phi_1 OH$ sont donc symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle xoy . Les deux paraboles qui vont de O à P_1 correspondent à deux inclinaisons de la vitesse de

la forme $\frac{\pi}{4} + \beta_0$ et $\frac{\pi}{4} - \beta_0$.

Remarque. - Tout ce qui précède s'applique au mouvement dans le vide du centre de gravité d'un système quelconque solide ou non, par exemple d'un obus avant et après l'explosion [N.º 42]

141. - Comparaison avec la réalité. - Dans la réalité, le projectile est généralement lancé dans l'air, et la résistance de l'air modifie complètement le mouvement. Par exemple, les fusils de guerre moderne communiquent au projectile une vitesse initiale d'environ 625 mètres à la seconde: si on néglige la résistance de l'air, la portée horizontale maxima de l'arme correspond à une inclinaison de 45° de la vitesse initiale, cette portée est égale à $\frac{V_0^2}{g} = 40^{\text{km}}$ environ; la hauteur maxima du projectile (hauteur du sommet de la parabole) est $\frac{V_0^2 \sin^2 \frac{\pi}{4}}{2g} = \frac{V_0^2}{4g} = 10^{\text{km}}$ environ. Or les expériences montrent que la portée horizontale maxima $0a$ ne dépasse pas 4^{km} environ, qu'elle correspond à un angle de tir égal à 32° (et non à 45°), que la hauteur maxima du projectile ne dépasse pas un $\frac{1}{2}$ kilomètre, enfin que la verticale du sommet S de la trajectoire n'est pas un axe de symétrie de la trajectoire, mais qu'elle est à une



distance de 0 égale à 2^{km} , 2 et à une distance de a égale à $1^{\text{km}},8$.

Il est donc indispensable de tenir compte de la résistance de l'air. C'est ce que nous allons faire en admettant que le projectile est sphérique homogène et que la somme géométrique des résistances de l'air est directement opposée à la vitesse V du centre de gravité du projectile, et fonction donnée de V . Nous poserons $R(V) = mg\varphi(V)$, la fonction $\varphi(V)$ croissant constamment de zéro à $+\infty$. Le mouvement du centre P de la sphère est la même que celui d'un point de masse m [masse de la sphère] qui

serait soumis⁽¹⁾ à la force $m\bar{g} + \bar{R}(V)$.

142. - Influence de la forme des projectiles - Les projectiles modernes ne sont pas sphériques, ce sont des cylindres de révolution terminés par une pointe ogivale A , et leur centre de gravité P est sur l'axe de révolution PA . Si un tel solide S est animé d'un mouvement de translation la pointe en avant (dans l'air immobile), la résistance de l'air au mouvement du centre de gravité (c'est-à-dire la somme géométrique des résistances de l'air) est beaucoup plus faible que s'il se terminait par un bout arrondi ou que s'il offrait à la résistance de l'air sa base ou son flanc. La même remarque subsiste si S est, en outre, animé d'une rotation autour de son axe de révolution PA , rotation qui ne modifie pas sensiblement la somme géométrique des résistances de l'air. Or donnons initialement au projectile une vitesse de rotation assez grande autour de PA en même temps qu'une vitesse de translation de sens PA , conditions initiales que réalisent les armes rayées : l'axe PA de S , pendant la durée de la chute, fera un très petit angle avec la vitesse du centre de gravité, et le mouvement instantané de S restera sensiblement une translation parallèle à chaque instant à l'axe du corps accompagnée d'une rotation autour de cet axe. C'est ce que nous démontrons prochainement en nous appuyant sur les propriétés gyroscopiques des solides de révolution. Ceci admis, la somme géométrique \bar{R} des résistances de l'air sera sensiblement dirigée en sens inverse de la vitesse de P , vitesse dont la direction se confond avec PA , et fonction croissante de cette vitesse⁽²⁾, soit $\bar{R} = mg\varphi(V)$. Cette fonction sera beaucoup plus faible que si S se terminait par une demi-sphère : d'où l'avantage de la forme adoptée du projectile pour accroître la portée. On voit que cet avantage n'existe qu'à condition d'assurer la coïncidence sensible de l'axe PA du projectile et de la vitesse de P à l'aide d'une rotation rapide imprimée initialement au corps autour de PA .

(1). En négligeant la poussée de l'air. Sinon, il faudrait remplacer $m\bar{g}$ par $m\bar{g}_1$ (N. 131).

(2) Cette fonction $\bar{R}(V) = mg\varphi(V)$ est la même que si on laissait tomber verticalement le projectile, en l'abandonnant sans vitesse, l'axe vertical, et la pointe vers le bas.

Dans ces conditions, le mouvement de P est sensiblement le même que celui d'un point matériel pesant de masse m [masse du projectile] soumis à une résistance directement opposée à la vitesse et égale à $mg\varphi(V)$. C'est ce mouvement que nous allons étudier.

Mouvement d'un point pesant dans un milieu résistant.

143 - Equations du mouvement. - La force totale qui s'exerce sur le point P de masse m est

$$\vec{F} = m\vec{g} + \vec{R}$$

\vec{R} désignant un vecteur directement opposé à la vitesse \vec{V} de P, et qui en abso est égale à $mg\varphi(V)$, $\varphi(V)$ désignant une fonction continue de V (pour $V > 0$), et elle pour $V=0$, et qui croît constamment et indéfiniment quand V croît de zéro à l'infini.

Si la vitesse initiale est nulle ou verticale, nous savons [N° 108] que le point décrit une verticale, et que sa vitesse [N° 132] tend vers une limite V_1 définie par l'égalité.

$$R(V_1) = mg, \text{ c'est-à-dire } \varphi(V_1) = 1.$$

Ce cas écarté, la trajectoire de P est une courbe plane [N° 108], donc le plan est vertical et renferme la position et la vitesse initiales de P. Comme au N° 140, prenons ce plan pour plan xoy , pour origine O la position initiale de P, pour axe Oy la verticale ascendante, et menons Ox dans le sens de la projection horizontale de \vec{V}_0 .

Soit \vec{V} la vitesse de P à l'instant t , V sa valeur absolue, α l'angle de Ox avec \vec{V} . On a :

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = V \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = V \sin \alpha.$$

Si on remplace x' et y' par ces valeurs dans les équations du mouvement : $m \frac{dx'}{dt} = X$, $m \frac{dy'}{dt} = Y$, on obtient deux équations qu'on peut résoudre par rapport à $\frac{dx}{dt}$ et à $\frac{dy}{dt}$; mais on arrive plus rapidement à ce résultat en employant les équations intrinsèques. On a ici :

$$F_t = -mg \frac{y'}{V} - R = -mg [\sin \alpha + \varphi(V)],$$

$$F_n = mg |\cos \alpha|, \quad \text{car } F_n > 0;$$

d'où les équations :

$$m \frac{dV}{dt} = -mg [\sin \alpha + \varphi(V)], \quad \frac{mV^2}{\rho} = mg |\cos \alpha|,$$

mais la courbure $\frac{1}{\rho}$ de la trajectoire est égale à $|\frac{d\alpha}{ds}|$;

$$\text{d'où } \frac{V}{\rho} = \left| \frac{d\alpha}{dt} \right|$$

$$\text{et } V \left| \frac{d\alpha}{dt} \right| = g |\cos \alpha|$$

Comme la trajectoire tourne sa concavité vers la force, et par suite ici vers les y négatifs, $\frac{d\alpha}{ds}$ est < 0 , et $\frac{d\alpha}{dt} = x' \frac{d\alpha}{dx}$ est négatif, si x' est positif (c.à.d. si $\frac{dx}{ds} \cos \alpha > 0$) et positif si $\cos \alpha < 0$. Les équations intrinsèques donnent donc en définitive :

$$(2) \quad \frac{dV}{dt} = -g [\sin \alpha + \varphi(V)], \quad V \frac{d\alpha}{dt} = -g \cos \alpha.$$

En divisant les deux équations membre à membre, on élimine dt et on obtient une équation différentielle du premier ordre pour déterminer V en fonction de α :

$$(3) \quad \frac{dV}{d\alpha} = \frac{V \sin \alpha + \varphi(V)}{\cos \alpha}.$$

Toute la difficulté du problème revient à intégrer l'équation (3). Une fois connue l'intégrale générale de cette équation, soit $V = f(\alpha, C)$, le problème s'achève par quadratures; on a :

$$(4) \quad dt = -\frac{1}{g} \frac{V d\alpha}{\cos \alpha}, \quad dx = V \cos \alpha dt = -\frac{1}{g} V^2 d\alpha, \quad dy = -\frac{1}{g} V^2 \operatorname{tg} \alpha d\alpha.$$

144. - On ne peut intégrer l'équation (3) que pour des formes très particulières de $\varphi(V)$. Mais on peut, dans tous cas, discuter d'une façon très précise la forme des trajectoires, en admettant seulement, comme nous l'avons dit, que $\varphi(V)$ est une fonction continue de V pour $V > 0$, qui s'annule avec V et qui croît constamment et indéfiniment avec V .

Pour $t = 0$, on a : $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; la seconde équation (2)

montre que d commence par décroître lorsque t croît et décroît tant qu'il n'atteint pas la valeur $-\frac{\pi}{2}$. Nous allons démontrer que, t croissant indéfiniment à partir de zéro, 1° d décroît constamment et tend vers $-\frac{\pi}{2}$; 2° V tend vers la même limite V_1 que dans la chute verticale, 3° x tend vers une limite finie, 4° y tend vers $-\infty$.

A cet effet, soit $V=f(d)$ la solution de l'équation (3) définie par les conditions initiales V_0, d_0 , $[V_0 > 0, -\frac{\pi}{2} < d_0 < \frac{\pi}{2}]$:

Nous allons étudier cette fonction de d lorsque d , regardé provisoirement comme variable indépendante, décroît de d_0 à $-\frac{\pi}{2}$.

145. - Propriétés de l'équation (3). - J'établirai d'abord deux propriétés de l'équation (3)

Lemme I. - La fonction $V=f(d)$ ne peut s'annuler entre d_0 et $-\frac{\pi}{2}$.

En effet, soit d_1 une valeur comprise entre d_0 et $-\frac{\pi}{2}$; admettons que $f(d)$, supérieure à zéro pour d compris entre d_0 et d_1 , tende vers zéro lorsque d décroît jusqu'à d_1 . On peut mettre l'équation (3) sous la forme

$$\frac{dV}{V} = dd \frac{\sin d + \varphi(V)}{\cos d} = H(d) dd,$$

la fonction $H(d)$ obtenue en remplaçant V par $f(d)$ dans le coefficient de dd , étant continue et tendant vers $\operatorname{tg} d$, lorsque d décroît vers d_1 . On aurait donc

$$(5) \quad \log V - \log V_0 = \int_{d_0}^{d_1} H(d) dd;$$

quand d tend vers d_1 , V tend vers zéro par hypothèse, le 2^e membre de (6) reste fini tandis que le premier devient infini, résultat absurde.

Lemme II. - Si la fonction $V=f(d)$ tend vers une limite $W > 0$ lorsque d tend en décroissant vers $-\frac{\pi}{2}$, W coïncide nécessairement avec la racine V_1 de l'équation $\varphi(V_1)=1$.

En effet, soit $W \neq V_1$; écrivons l'équation (3) ainsi:

$$\frac{dV}{dd} = \frac{V[\sin d + \varphi(V)]}{\cos d} dd = \frac{K(d)}{\cos d} dd,$$

$K(\alpha)$ restant continu lorsque α décroît vers $-\frac{\pi}{2}$, et tendant vers $W[-1 + \varphi(W)]$, quantité différente de zéro, si $W-1$ est égal ni à zéro ni à V_1 . On aurait donc :

$$(6) \quad V - V_0 = \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{K(\alpha)}{\cos \alpha} d\alpha,$$

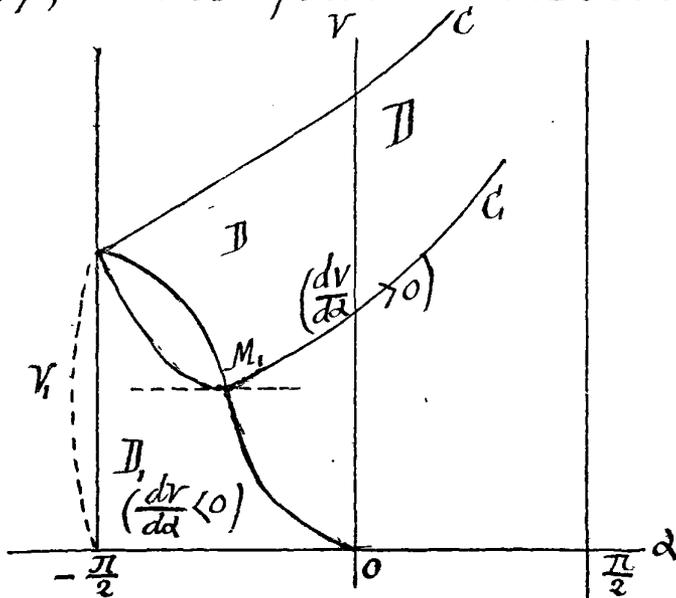
le coefficient de $d\alpha$ sous le signe \int devient infini d'ordre 1 pour $\alpha = -\frac{\pi}{2}$. Si α décroît vers $-\frac{\pi}{2}$, le second membre de (6) tend vers l'infini, le premier tend vers $W - V_0$, résultat absurde. Si W est > 0 , il faut donc que $W = V_1$. C. q. f. d.

146. - Discussion de la fonction $V = f(\alpha)$ - Pour étudier la fonction $V = f(\alpha)$, représentons-la graphiquement en portant les α en abscisses sur un axe horizontal, les V en ordonnées. Appelons M le point représentatif de coordonnées α et V , C la courbe décrite par M lorsque α décroît à partir de α_0 . Considérons l'équation :

$$\sin \alpha + \varphi(V) = 0;$$

pour α compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ cette équation en V n'a pas de racine positive, pour α compris entre 0 et $-\frac{\pi}{2}$ cette équation a une racine positive et une seule, si il $V = \lambda(\alpha)$, qui croît constamment de zéro à V_1 lorsque α décroît de zéro à $-\frac{\pi}{2}$. Appelons Γ la courbe qui représente cette fonction

$V = \lambda(\alpha)$, $(0 > \alpha > -\frac{\pi}{2})$; Γ est rencontrée en un point et un seul par toute horizontale dont l'ordonnée est comprise entre 0 et V_1 . Si on considère le domaine $\frac{\pi}{2} > \alpha > -\frac{\pi}{2}$, $V > 0$, la courbe Γ sépare ce domaine en deux parties : une aire finie D_1 et une aire illimitée D_2 ; en tout point M de D_2 , $\frac{dV}{d\alpha}$ est positif. Si pour une valeur α_1 de $\alpha > -\frac{\pi}{2}$, le point M de C est en M_1 sur la courbe Γ , C pénètre sûrement dans le domaine D_1 quand α décroît à partir de α_1 ; en effet, dans l'hypothèse contraire, $V(\alpha)$ décroîtrait



une valeur α_1 de $\alpha > -\frac{\pi}{2}$, le point M de C est en M_1 sur la courbe Γ , C pénètre sûrement dans le domaine D_1 quand α décroît à partir de α_1 ; en effet, dans l'hypothèse contraire, $V(\alpha)$ décroîtrait

avec d et le point M serait pour $d = \alpha_1 - \varepsilon$ au-dessous de l'horizontale de M_1 et en même temps au-dessus de Γ , ce qui est absurde. Il suit de là que, quand d décroît de α_0 à $-\frac{\pi}{2}$, le point M ne peut jamais passer du domaine II dans le 2^e domaine II . La fonction $V = f(d)$ ne peut présenter de maximum; elle est minima quand M est sur Γ .

147. — Il est dès lors aisé de préciser les formes possibles de la courbe C , en distinguant les cas suivants :

1^{er} Cas. — $0 > \alpha_0 > -\frac{\pi}{2}$, $\lambda(\alpha_0) > V_0 > 0$. — Le point M_0 fait partie du domaine II , (où y pénètre immédiatement quand d décroît); V commence donc par croître et croît constamment lorsque d décroît de α_0 à $-\frac{\pi}{2}$ (puisque M ne peut sortir de II); comme V reste inférieure à V_1 , il tend vers une limite $W > 0$ quand d décroît vers $-\frac{\pi}{2}$, et d'après le lemme 2, W coïncide nécessairement avec V_1 .

2^e Cas. — $0 > \alpha_0 > -\frac{\pi}{2}$, $V_0 > \lambda(\alpha_0)$.

Le point M_0 fait partie du domaine II ; V commence donc par décroître avec d . Si M ne traverse pas Γ , V décroît constamment avec d et tend vers une limite $W > V_1$ et qui coïncide nécessairement avec V_1 (lemme 2). Si M traverse Γ pour une certaine valeur d_1 , V décroît quand d décroît de α_0 à d_1 , puis croît et tend vers V_1 lorsque d décroît de d_1 à $-\frac{\pi}{2}$: c'est ce qui a lieu nécessairement si $V_0 \leq V_1$.

3^e Cas. — $0 < \alpha_0 \leq \frac{\pi}{2}$.

Le point M fait partie de II ; V décroît avec d tant que d reste positif, et tend vers une certaine limite nécessairement positive (lemme 1) quand d tend vers zéro. On se trouve alors ramené au second cas où $\alpha_0 = 0$, $V_0 > 0$, c'est-à-dire, puisque $\lambda(\alpha_0) = 0$, $V_0 > \lambda(\alpha_0)$.

148. — Variations de t , de x et de y avec d .

Étudions maintenant la manière dont varie t lorsque d décroît de α_0 à $\frac{\pi}{2}$. La 1^{ère} équation (4):

$$dt = -\frac{1}{g} \frac{V dd}{\cos^2 d}, \quad \text{ou } t = -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{V dd}{\cos^2 d}$$

montre que t croît constamment, et tend vers $+\infty$ quand

α décroît vers $-\frac{\pi}{2}$; en effet si on remplace V par $f(\alpha)$ sous le signe \int , V tend vers $V_1 \neq 0$ quand α tend vers $-\frac{\pi}{2}$, et le coefficient de $d\alpha$ est infini d'ordre 1 pour $\alpha = -\frac{\pi}{2}$.

D'autre part, les deux dernières équations (4)

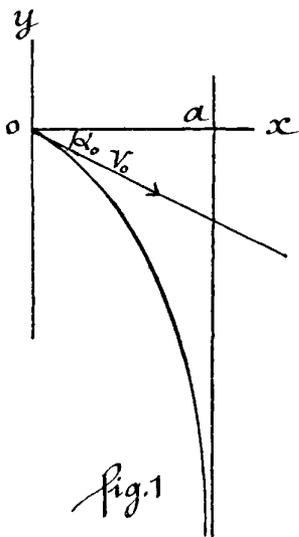
$$dx = -\frac{1}{g} V^2 d\alpha, \quad dy = -\frac{1}{g} V^2 \operatorname{tg} \alpha d\alpha$$

montre que x tend vers une limite finie quand α tend vers $-\frac{\pi}{2}$, car $V = f(\alpha)$ tend vers $V_1 \neq 0$; au contraire, dans l'expression qui donne dy , le coefficient de $d\alpha$ est infini positif du premier ordre pour $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, [sa partie principale est $\frac{V_1^2}{g} \frac{1}{(\frac{\pi}{2} + \alpha)}$], et y tend vers $-\infty$ quand α tend vers $-\frac{\pi}{2}$.

En définitive, quand t croît de 0 à $+\infty$, α décroît constamment de α_0 à $-\frac{\pi}{2}$, x tend vers une limite finie, soit a , avec une vitesse x' constamment positive et décroissante; y tend vers $-\infty$.⁽¹⁾

La vitesse V tend vers la même limite V_1 que dans le cas de la chute verticale, soit en décroissant constamment, soit en décroissant d'abord et en croissant ensuite, soit en croissant constamment. Quand P est lancé vers le bas ou horizontalement, on est sûrement dans le 3^e cas si $V_0 \leq \lambda(\alpha_0)$; on est sûrement dans le 2^e cas, si $V_0 > \lambda(\alpha_0)$. Quand P est lancé vers le haut, on est sûrement dans le 2^e cas si $V_0 \leq V_1$.

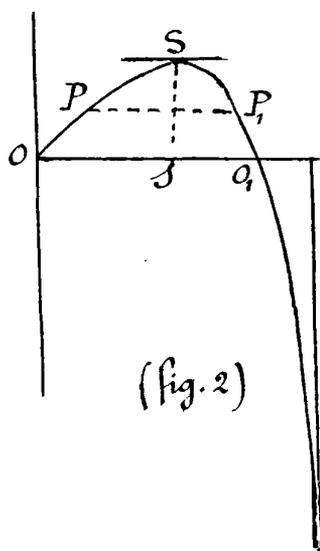
149. Forme de la courbe balistique. - 1^o Si $\alpha_0 \leq 0$, α est constamment négatif (et décroissant); y décroît constamment; la trajectoire est tout entière au-dessous de ox et admet une asymptote verticale $x = a$, (fig. 1).



2^o Si $\alpha_0 > 0$, α décroît et s'annule à un certain instant t_1 ; y croît pour $t > t_1$ et décroît pour $t < t_1$; le point S (position de P à l'instant t_1 , où la tangente à la trajectoire est horizontale), est le sommet de la courbe. Pour $t > t_1$, α est négatif et décroissant, et on est ramené au cas 1^o.

La trajectoire a la forme ci-dessous, (Fig. 2)

(1) Si on regarde V et α comme les coordonnées polaires d'un point, la courbe $V = f(\alpha)$ est l'hodographe du mouvement qu'il est facile de construire en forme d'après ce qui précède.



(fig. 2)

Comparons les deux branches OS et SO_1 de la trajectoire. Montrons d'abord que la tangente en O_1 a une pente plus grande que la tangente en O ; c'est-à-dire que $|\alpha_1|$ est $> \alpha_0$.

Soit P et P_1 deux points de OS et de O_1S_1 situés à la même hauteur y , et soit $V(y)$ et $V_1(y)$ la vitesse du mobile quand il est en P et quand il est en P_1 . On a :

$$-g \frac{dy}{V^2} = \operatorname{tg} \alpha \, d\alpha,$$

d'où (si h désigne la hauteur de S):

$$g \int_0^h \frac{dy}{V^2(y)} = -\log \cos \alpha_0.$$

Le même calcul appliqué à l'arc SO_1 donne :

$$g \int_0^h \frac{dy}{V_1^2(y)} = -\log \cos \alpha_1;$$

mais nous savons que $\frac{1}{2} m(V^2 - V_0^2) = -gy - E$, si E désigne le travail de la résistance. Comme E est plus grand dans le parcours de l'arc OP_1 que dans le parcours de l'arc OP , on voit que $V_1^2(y)$ est $< V^2(y)$; d'où il suit

$$-\log \cos \alpha_1 < -\log \cos \alpha_0,$$

$$\text{ou } \log \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_0} < 0, \text{ ou } \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_0} < 1, \quad |\alpha_1| > \alpha_0.$$

Comme O et O_1 sont deux points arbitraires de même hauteur pris sur la trajectoire, on voit que, P et P_1 désignant deux points quelconques des arcs OS et OS_1 pris à la même hauteur, la tangente en P_1 est plus inclinée sur l'horizon que la tangente en P .

Démontrons maintenant que la projection horizontale s du sommet S est plus voisine de O_1 que de O .

Soit $\beta(y)$ le module de l'angle α en un point quelconque P_1 de SO_1 ; on a : $\beta(y) > \alpha(y)$, d'où

$$\cotg \beta(y) < \cotg \alpha(y)$$

Or $dx = \cotg \alpha \, dy$; par suite

$$OS = \int_0^h \cotg \alpha \, dy, \quad SO_1 = \int_0^h \cotg \beta \, dy,$$

donc

$$OS > SO_1.$$

Le même théorème est évidemment vrai si on remplace O et O_1 par deux points P et P_1 de OS et de S_1O_1 qui aient même hauteur.

En définitive, si on prend comme origine des axes le point S , on a, en appelant ξ et ξ_1 les nouvelles abscisses de P et de P_1 :

$$\xi(y) > \xi_1(y), \quad \frac{d\xi}{dy}(y) > \frac{d\xi_1}{dy}(y)$$

La forme de la courbe $OS O_1$ est celle qu'indique la figure.

Or c'est bien là la forme de la trajectoire observée expérimentalement [N.° 141].

150. - Projectiles de même forme et de même densité, mais de dimensions différentes

Admettons que pour deux projectiles S et S_1 de forme extérieure semblable (lancés parallèlement à leur axe de révolution, la pointe en avant, avec la même vitesse), la résistance R soit proportionnelle à l'aire de chacun des deux projectiles, c'est-à-dire au carré de leurs dimensions homologues⁽¹⁾. Soit k le rapport de similitude de S par rapport à S_1 ; R et R_1 la résistance qui s'exerce sur S et S_1 , m et m_1 les masses de S et de S_1 ; on a:

$$R(V) = k^2 R_1(V).$$

Si les deux corps ont même densité, m est égal à $m_1 k^3$, et on a:

$$\frac{R(V)}{m} = \frac{k^2 R_1(V)}{k^3 m_1} = \frac{R_1(V)}{m_1 k},$$

et comme on a posé:

$$\varphi(V) = \frac{R(V)}{mg}, \quad \varphi_1(V) = \frac{R_1(V)}{m_1 g},$$

$$\varphi_1(V) = k\varphi(V) = \left(\frac{m}{m_1}\right)^{\frac{1}{3}} \varphi(V).$$

On voit que pour des projectiles de même forme et de même matière, lancés initialement dans le même sens avec la même vitesse, la modification de la trajectoire causée par la résistance de l'air sera d'autant plus faible que la masse (c'est-à-dire les dimensions) du projectile seront plus considérables.

150. - Exemple. - Nous avons indiqué plus haut [N° 141] quelle était la trajectoire enregistrée d'une balle Sebel lancée dans l'air avec une vitesse initiale de 620 mètres, l'angle de tir étant de 32° . La trajectoire d'un obus à peu près semblable tiré, sous un angle de 30° , par un canon⁽¹⁾ de 305^{mm} avec une vitesse initiale de 800 mètres, est la suivante d'après les tables de tir : le projectile retombe, au bout du temps $T = 52^s,86$, à une distance a égale à 18^{km},013 ; le sommet S de la trajectoire a pour hauteur $y = 3^{\text{km}},685$ et pour abscisse $x_1 = 10^{\text{km}},327$, et P atteint ce sommet au bout du temps $t_1 = 23^s,90$; à cet instant la vitesse V_1 du projectile n'est plus que de 313 mètres ; au point de chute, elle est un peu plus grande (319 mètres²), et l'inclinaison de la vitesse est de $46^\circ,58'$.

Il est intéressant de remarquer que la projection horizontale du sommet S est plus rapprochée du point de chute que de l'origine, [conformément à la discussion du N° 148], mais que le temps employé par P pour aller de O en S est plus court que le temps employé pour aller de S au point de chute, bien que le second chemin soit plus court que le 1^{er}.

Dans le vide, on aurait eu :

$$\begin{aligned} a &= 58^{\text{km}}, [\text{au lieu de } 18^{\text{km}}] & T &= 81^{\text{sec}},5 (\text{au lieu de } 52^{\text{sec}},86) \\ x_1 &= 29^{\text{km}}, [\text{au lieu de } 10^{\text{km}},3] & t_1 &= 40^{\text{sec}},7 (\text{au lieu de } 23^{\text{sec}},9) \\ y_1 &= 8^{\text{km}} [\text{au lieu de } 3^{\text{km}},6]. \end{aligned}$$

Enfin la vitesse finale serait égale à 800 mètres [au lieu de 319^m] comme la vitesse initiale, la tangente finale serait inclinée de 30° [au lieu de $46^\circ,58'$] ; la vitesse au sommet serait 694 mètres [au lieu de 313].

La trajectoire bien que très différente de la parabole théorique, s'en écarte pourtant beaucoup moins que dans le cas de la balle de fusil.

151. - Cas où la loi de résistance est de la forme⁽²⁾
 $\varphi(V) = a + bV^n, (a < 1)$.

(1) L'obus du canon de 305^{mm} (pièce de marine) a une masse de 292 kilogr. ; pour une vitesse de sortie de 800^m à la seconde, l'obus est animé d'une rotation sur lui-même de 50 tours à la seconde (3000 tours à la minute)

(2) Cette forme ne convient que si V dans le mouvement est compris entre certaines limites $W_1 < V < W_2$. Si $a = 0$ et $n = 2$, cette forme convient pour des valeurs de V inférieures à une certaine limite.

L'équation qui définit $V(\alpha)$ est alors [N°148]:

$$\frac{dV}{d\alpha} = V \left[\operatorname{tg} \alpha + \frac{a}{\cos \alpha} \right] + \frac{bV^{n+1}}{\cos \alpha}.$$

C'est une équation de Bernoulli; divisons par V^{n+1} et posons $\frac{1}{V^n} = W$; il vient:

$$\frac{dW}{d\alpha} + nW \left[\operatorname{tg} \alpha + \frac{a}{\cos \alpha} \right] = -\frac{nb}{\cos \alpha},$$

équation linéaire du 1^{er} ordre, que nous intégrons en posant $W = uV$ et en annulant le terme en V dans la nouvelle équation. Il vient:

$$\frac{du}{d\alpha} = -nu \left[\operatorname{tg} \alpha + \frac{u}{\cos \alpha} \right], \text{ et}$$

$$\frac{dV}{d\alpha} = -\frac{nb}{u \cos \alpha}; \text{ d'où:}$$

$$u = \cos^n \alpha \operatorname{tg} \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right]^{-an}$$

et

$$W = \frac{1}{V^n} = u \left[h - nb \int \frac{d\alpha}{u \cos \alpha} \right].$$

Le problème est dès lors ramené aux quadratures. Si a et n sont quelconques ($a < 1$), on ne peut effectuer, à l'aide de fonctions élémentaires, la quadrature qui donne W , non plus que celles qui donnent t , x et y . On peut du moins vérifier⁽¹⁾ que $V(\alpha)$ tend vers $V_1 = \left(\frac{1-a}{b} \right)^{\frac{1}{n}}$ quand α décroît vers $-\frac{\pi}{2}$. En effet, il suffit de montrer que W tend vers $-\frac{\pi}{2}$. Posons $\alpha = -\frac{\pi}{2} + \beta$; $\cos \alpha$ et $\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$ renferment β en facteur au premier degré et u est de l'ordre de $\beta^{n(1-a)}$ pour $\beta=0$; il tend donc vers zéro avec β . La limite de W (quand α décroît avec $-\frac{\pi}{2}$) est indépendante de h et coïncide avec la limite² de l'expression

$$-nbu \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{u \cos \alpha} = \frac{-nb \int \frac{d\alpha}{u \cos \alpha}}{\frac{1}{u}};$$

les deux termes de la dernière fraction tendent vers l'infini quand α décroît vers $-\frac{\pi}{2}$; appliquons la règle de l'Hôpital.

(1) Si a était plus grand que 1, la résistance R serait supérieure à $m\bar{g}$ pendant tout le mouvement, V s'annulerait au bout d'un temps fini, et R dépasserait $m\bar{g}$ si faible que fut la vitesse V . En fait, la formule qui donne R devrait être modifiée quand V serait suffisamment petit. Dans les applications, a est

Il faut chercher la limite du rapport des dérivées des deux termes par rapport à α , c'est-à-dire la limite (pour $\alpha = -\frac{\pi}{2}$) du rapport:

$$\frac{-\frac{nb}{u \cos \alpha}}{-\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\alpha}} = \frac{\frac{nb}{\cos \alpha}}{\frac{1}{u} \frac{du}{d\alpha}} = \frac{nb}{-n \left(\operatorname{tg} \alpha + \frac{a}{\cos \alpha} \right) \cos \alpha} = \frac{b}{-\sin \alpha - a};$$

quand α tend vers $-\frac{\pi}{2}$, ce dernier rapport tend vers $\frac{b}{1-a}$.

C. q. f. d.

Remarque. - Si on pose $\rho = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$, d'où

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{2\rho}{1+\rho^2} \\ \frac{d\rho}{\rho} = \frac{d\alpha}{\cos \alpha} \end{cases}$$

on a:

$$dW = \frac{-nb}{\rho^n} d\rho = \frac{-nb}{2^n} \frac{(1+\rho^2)^n}{\rho^{n(1-a)+1}} d\rho = \frac{-nb}{2^n} \frac{(1+\rho^2)^n}{\rho^{n+1}} d\rho, \quad [n' = n(1-a)].$$

Si la quantité n est un entier positif, on peut calculer W explicitement, donc V^n , en fonction de $\rho = \operatorname{tg} \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$.

- Exercice. - Calculer explicitement le mouvement quand la résistance est proportionnelle à la vitesse: $\varphi = bV$. - Les équations différentielles du mouvement sont linéaires, à coefficients constants et s'intègrent immédiatement.

Forces centrales.

152. - Forces centrales et résistance de milieu.

Quand un point matériel P est soumis à une force issue d'un point fixe O , et en outre d'une résistance directement opposée à sa vitesse et fonction croissante de cette vitesse, la trajectoire est plane. Elle est rectiligne si la vitesse initiale est nulle ou passe par O , en particulier si la position initiale de P coïncide avec O .

Prenons comme plan xoy le plan de la trajectoire; si ρ est la valeur absolue de la résistance, on a:

$$mx'' = F \frac{x}{r} - \rho \frac{x'}{V}, \quad my'' = F \frac{y}{r} - \rho \frac{y'}{V},$$

d'où en multipliant la première équation par $-y$, la seconde par $-x$ et ajoutant :

$$\frac{d}{dt} m(xy' - yx') \equiv \frac{d}{dt} m r^2 \theta' = -(xy' - yx') \frac{p}{V},$$

c'est-à-dire :

$$m \frac{d}{dt} \log r^2 \theta' = \frac{-p}{V}.$$

À chaque instant t , dans le mouvement vrai de P , p et V ont une valeur positive déterminée, et on a :

$$r^2 \theta' = r_0^2 \theta'_0 e^{-\int_{t_0}^t \frac{p}{V} dt}.$$

L'intégrale $\int_{t_0}^t \frac{p}{V} dt$ croît indéfiniment avec t (à moins que V ne tende vers zéro).

La vitesse aréolaire $\frac{r^2 \theta'}{t}$ du point P tend donc vers zéro avec $\frac{1}{t}$, par suite r ou θ' tend vers zéro. Quand t croît indéfiniment, ou bien P tend vers O ou bien le mouvement tend à devenir rectiligne.

153. — Forces centrales fonctions de la seule distance.

Quand il n'y a pas de résistance de milieu et quand la force centrale ne dépend que de la distance, l'intégrales des aires et celle des forces vives ramène le problème aux quadratures.

On a en effet :

$$r^2 \theta' = C, \quad m(r'^2 + r^2 \theta'^2) = 2 \int_{r_0}^r F(r) dr + C^2 = U(r) + h,$$

d'où r' et θ' en fonction de r , c'est-à-dire t et θ en fonction de r par deux quadratures portant sur un radical. La discussion des fonctions $r(t)$ et $r(\theta)$ s'effectue suivant la méthode indiquée aux N°s 120-122. Nous nous bornerons, cette année, à ces indications sur le mouvement des forces centrales.

Mouvement d'un point sur une courbe fixe

154. - Cas où la courbe est parfaitement lisse.

Soit P un élément matériel et C une courbe fixe (relativement aux axes choisis $Oxyz$) sur laquelle P est assujéti à se mouvoir. Soit \bar{F} la force totale s'exerçant sur P , (à l'instant t), \bar{R} la réaction (ou force absolue de contact) exercée par C sur P , \bar{F}' la force (relative aux axes $Oxyz$) exercée sur P par les corps matériels autres que l'élément de C en contact avec P . On a :

$$\bar{F} = \bar{F}' + \bar{R}$$

Nous supposons que la force \bar{F}' est donnée, c'est-à-dire connue en fonction de x, y, z, x', y', z', t .

Par définition, dire que C est parfaitement lisse, c'est dire que \bar{R} est toujours normal à C . On a donc :

$$(1) \quad \begin{cases} m \frac{dV}{dt} = F_t = F'_t, & \text{puisque } R_t = 0, \\ m \frac{V^2}{\rho} = F'_n + R_n, \\ 0 = F'_b + R_b, \end{cases}$$

V désigne la vitesse absolue de P , ρ le rayon de courbure de C ; les demi-directions t, n, b sont la tangente à C menée dans le sens du mouvement, la normale principale à C menée vers le centre de courbure, et la bi-normale.

Calcul de la réaction. - La première équation définit le mouvement; les deux dernières donnent la réaction, \bar{R} . Remarquons que \bar{R} , en général, n'est point égale et directement opposée à la composante de \bar{F}' , soit \bar{F}'_n , normale à C ; pour que $\bar{R} = -\bar{F}'_n$, il faut et il suffit que $\frac{V^2}{\rho}$ soit nul. Si P ne reste pas immobile et si la condition $\frac{V^2}{\rho}$ est remplie pendant tout le mouvement, $\frac{1}{\rho}$ est identiquement nul, la courbe C est une droite.

155. Condition d'équilibre. - Pour que P_0 soit position d'équilibre sur C , il faut et il suffit (N° 106) que, P étant placé sans vitesse en P_0 à un instant t arbitraire, \vec{F} soit nul à cet instant, c'est-à-dire que $\vec{F}' + \vec{R} = 0$.

Il faut donc que \vec{F}' soit normal à C . Inversement cette condition est suffisante; car si elle est remplie, \vec{F} est nécessairement nul; autrement, \vec{F} ou $\vec{F}' + \vec{R}$ serait normal à C et le point P se mettrait en mouvement dans le sens de \vec{F} , c'est-à-dire normalement à C , ce qui est absurde.

156. Equation du mouvement. - Soit maintenant s l'arc de la courbe C compté à partir d'une certaine origine. Si l'arc est compté dans le sens du mouvement, V est égal à $+\frac{ds}{dt}$, les cosinus directeurs de Pt sont $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$, et la 1^{ère} équation (1) s'écrit :

$$(2) \quad m \frac{d^2s}{dt^2} = X' \frac{dx}{ds} + Y' \frac{dy}{ds} + Z' \frac{dz}{ds};$$

X', Y', Z' sont des fonctions de x, y, z, x', y', z', t qui deviennent des fonctions de s, s', t quand on y remplace x, y, z en s . Le second membre de (2) est donc une fonction donnée de s, s', t . - Si au lieu d'être compté dans le sens du mouvement, s est compté dans le sens inverse, V est égal à $-\frac{ds}{dt}$, les cosinus directeurs de Pt sont $-\frac{dx}{ds}, -\frac{dy}{ds}, -\frac{dz}{ds}$; les deux membres de l'équation (2) changent de signe. L'équation (2) est donc vraie quel que soit le sens positif des arcs choisi sur C .

Cette équation (2) est de la forme :

$$(3) \quad m s'' = H(s, s', t)$$

Le problème est donc le même que l'étude du mouvement sur Ox d'un point de masse m et d'abscisse x , soumis à la force $X = H(x, x', t)$. Tout ce qui a été dit sur le mouvement rectiligne [N° 115-140] peut se répéter ici.

Si \vec{F}' ne dépend que de la position (x, y, z) de P , H est une fonction donnée de s , et la discussion du mouvement rectiligne dans le cas où X est une simple fonction de x [N° 117-125] s'applique sans modification.

157. - Mouvement d'un point pesant mobile sans frottement sur une courbe fixe.

Soit oz la verticale descendante; l'équation des forces vives donne :

$$(4) \quad V^2 = 2gz + C^{te},$$

ou encore

$$(5) \quad \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g[z(s) + \alpha], \quad \alpha = \frac{V_0^2}{2g} - z_0.$$

ou enfin

$$t = \int_{s_0}^s \frac{ds}{\sqrt{2g[z(s) + \alpha]}}, \quad (t=0 \text{ instant initial}).$$

Le signe à prendre tout d'abord devant le radical est celui de s'_0 , si $s'_0 \neq 0$, et celui de $\frac{dz}{ds}(s_0)$ si $s'_0 = 0$.

Si s'_0 et $\left(\frac{dz}{ds}\right)$ sont nuls, le mobile reste en équilibre.

Supposons que s croisse d'abord: ou bien C prolongée à partir de P_0 dans le sens des arcs croissants reste constamment au-dessous du plan $z = -\alpha$; dans ce cas, s croît indéfiniment avec t ;

ou bien C traverse le plan $z = -\alpha$ (sans lui être tangente) en un point P_1 ; P atteint la position P_1 en un temps fini, rétrograde et s est une fonction paire de $t - t_1$;

ou enfin C vient toucher le plan $z = -\alpha$ en un certain point P_1 ; $s = s_1$ est racine double de $z(s) + \alpha$; P tend vers P_1 quand t croît indéfiniment.

Si notamment le plan $z = -\alpha$ coupe la courbe C en deux points P_1, P_2 de part et d'autre de P_0 , le mouvement de P est un mouvement oscillatoire et périodique dans lequel P parcourt l'arc $P_1 P_0 P_2$ (situé au-dessous du plan $z = -\alpha$) alternativement dans un sens et dans l'autre. Le temps T d'une oscillation simple (temps employé par P pour aller une fois de P_1 en P_2) est donné par l'intégrale

$$T = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{2g[z(s) + \alpha]}};$$

la période du mouvement est égal à $2T$; aux deux instants t et $t + T$, le point P occupe la même position avec des vitesses égales et de signes contraires.

Petites oscillations du point P.

Considérons un point de la courbe qui est plus bas que tous les points voisins. Ce point (où la tangente est horizontale) est une position d'équilibre de P. Montrons que l'équilibre y est stable⁽¹⁾. Prenons ce point comme origine des axes et des arcs : de part et d'autre de O , $z(s)$ est négatif, soit Q_1, Q_2 deux points où le plan $z = -\beta$ coupe C de part et d'autre de O (β étant une quantité positive, choisie aussi petite qu'on veut); l'arc $Q_1 O Q_2$ est très petit avec β .

Si $s_0 = s'_0 = 0$, P reste en équilibre; soit maintenant P_0 compris entre Q_1 et Q_2 et s_0 assez voisin de zéro ainsi que s'_0 pour que $\frac{v_0^2}{g} - z_0$ ou a soit $\ll \beta$. Dans le mouvement défini par ces conditions initiales, le point P reste compris entre Q_1 et Q_2 , car pour $z = -\beta$, la quantité $a + z = a - \beta$ est négative. On voit qu'une petite modification quelconque aux conditions initiales change l'équilibre en un petit mouvement oscillatoire, dans lequel P reste voisin de O ; en vertu de l'équation (5), (où a et z sont très petits), la vitesse V reste également très petite.

Étudions de plus près ces petites oscillations de P. Au lieu de l'intégrale des forces vives, écrivons l'équation (2)

$$(6) \quad m s'' = mg \frac{dz}{ds}.$$

Pour les petites valeurs de s , on a, si ρ désigne le rayon de courbure de C en O , et $-\gamma$ le cos de l'angle (obtus) de oz avec la normale principale :

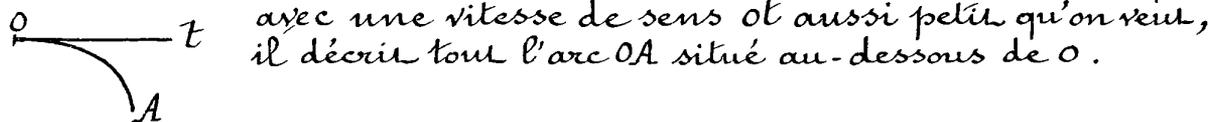
$$z(s) = -\frac{s^2}{2} \left[\frac{\gamma_1}{\rho} + \dots \right]$$

les termes non écrits s'annulent avec 0 ; l'équation (6) peut donc s'écrire :

$$s'' = -gs \left[\frac{\gamma_1}{\rho} + \dots \right]$$

et si on néglige dans le second membre les termes du

(1) Si la tangente à C en un point O est horizontale, mais si, dans le voisinage de O , la courbe C reste au-dessous de O au moins d'un certain côté de O , l'équilibre est instable. En effet, le point P étant lancé en O



2^e ordre en s , on voit que le mouvement est défini par l'équation:

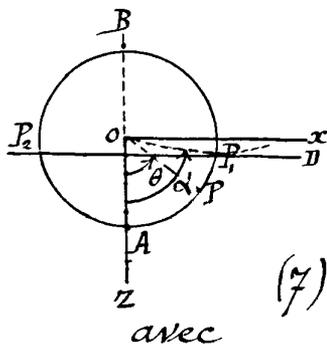
$$s'' + k^2 s = 0, \quad k^2 = \frac{gk_1}{\rho} > 0;$$

le mouvement est donc un mouvement oscillatoire [N:123]; la durée T d'une oscillation simple est $\pi \sqrt{\frac{\rho}{gk_1}}$; la période du mouvement est $2\pi \sqrt{\frac{\rho}{gk_1}}$.

Les petites oscillations de P sont isochrones. - Si la courbe est un cercle de rayon l dont le plan fait un angle φ avec la verticale ($0 \leq \varphi < \frac{\pi}{2}$), T est égal $\pi \sqrt{\frac{l}{g \cos \varphi}}$; si le plan du cercle est vertical, T est égal à $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$.

Pendule circulaire.

158. - Mouvement d'un point pesant mobile sans frottement sur un cercle fixe dont le plan est vertical.



Soit A le point le plus bas et B le point le plus haut de la circonférence; soit θ l'angle AOP compté positivement dans le sens zOx ; l désignant le rayon du cercle, on a: $s = l\theta$ (si on convient de compter les arcs à partir de A dans le sens zOx). L'équation (5) est donc ici:

$$V^2 = l^2 \theta'^2 = 2g[a+z] = 2g[a+l \cos \theta]$$

$$a = \frac{V_0^2}{2g} - z_0, \quad [a \geq -z_0].$$

La droite $z = -a$ ou D ou bien coupe C en P_1, P_2 , ou bien est au-dessus de C , ou enfin (cas intermédiaire) est tangente à C en B .⁽¹⁾ Dans le premier cas, le mouvement de P est un mouvement oscillatoire et périodique, où P parcourt l'arc $P_1 A P_2$ alternativement dans un sens et dans l'autre. Dans le second cas, P décrit le cercle entier toujours dans le même sens; sa vitesse est maxima en A et minima en B ; la période du mouvement est le temps employé par P à parcourir tout

(1) Nous laissons de côté le cas où D serait tangente à C en A , car où P coïncide nécessairement avec A . [On a, dans ce cas: $z_0 = l$, $V_0 = 0$].

le cercle une fois. Dans le 3^e cas, P tend vers B sans jamais l'atteindre quand t croît indéfiniment; toutefois si P_0 coïncide avec B , V_0 étant nul, P reste en équilibre en B .

Dans tous les cas, ^(sauf dans ce dernier) les points du cercle que P atteint lorsque t varie de $-\infty$ à $+\infty$ comprennent A . Supposons P en A pour $t=0$, et cherchons pour quelles valeurs de V_0 on sera dans l'un ou l'autre des trois cas précédents. On a: $\alpha = \frac{V_0^2}{2g} - l$; si α est inférieur à l , c'est-à-dire si $V_0 < 2\sqrt{gl}$, la droite $z = -\alpha$ coupe C ; on est dans le premier cas. Si α est supérieur à l , c'est-à-dire si $V_0 > 2\sqrt{gl}$, on est dans le 2^e cas. Si $\alpha = l$, c'est-à-dire si $V_0 = 2\sqrt{gl}$, on est dans le 3^e cas.

159. - Calcul de θ en fonction de t .

L'équation (7) donne t en fonction de θ par une quadrature qu'on ne sait effectuer à l'aide des fonctions élémentaires que dans le cas exceptionnel où $\alpha = l$ (3^e cas). On a alors:

$$l^2 \theta'^2 = 2gl(1 + \cos \theta) = 4gl \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

c'est-à-dire:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} dt = \pm \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}};$$

si, pour $t=0$, $\theta_0 = 0$, $\theta'_0 > 0$, on a:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} t = \int_0^\theta \frac{d\frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \log. \operatorname{tg} \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{4} \right]; \text{ d'où:}$$

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{4} \right) = e^{\sqrt{\frac{g}{l}} t};$$

quand t croît indéfiniment, $\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{4} \right)$ croît de 1 à l'infini, θ croît de zéro à π ; P tend vers B sans jamais l'atteindre conformément à la discussion du N^o précédent.

Étudions maintenant θ en fonction de t dans le cas où le mouvement est oscillatoire; soit α et $-\alpha$ les valeurs de θ aux points P_1 et P_2 où la droite $z = -\alpha$ coupe C , $[0 < \alpha < \pi]$; on a:

$$\alpha = -l \cos \alpha, \quad \text{d'où:}$$

$$l\theta'^2 = 2g[\cos \theta - \cos \alpha] = 4g \left[\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right],$$

c'est-à-dire:

$$\sqrt{\frac{g}{l}} dt = \frac{d\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}};$$

posons : $\sin \frac{\theta}{2} = u \sin \frac{\alpha}{2}$, et par suite :

$$\cos \frac{\theta}{2} d \frac{\theta}{2} = du \sin \frac{\alpha}{2}, \quad d \frac{\theta}{2} = \frac{du \sin \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1-u^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}};$$

l'équation (7) devient, après avoir divisé haut et bas par $\sin \frac{\alpha}{2}$:

$$(8) \quad \sqrt{\frac{g}{l}} dt = \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}, \quad k^2 = \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Si, pour $t=0$, $\theta_0=0$, $\theta'_0 > 0$, on a : $u_0=0$, $u'_0 > 0$, et l'égalité (8) donne :

$$(9) \quad \sqrt{\frac{g}{l}} t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}},$$

le signe du radical restant positif tant que le radical ne s'annule pas, c'est-à-dire tant que u reste plus petit que 1. Soit t_1 l'instant pour lequel il est égal à 1 :

$$\sqrt{\frac{g}{l}} t_1 = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}} = K;$$

la fonction $u(t)$, fonction impaire de t (page 130) est une fonction paire de $(t-t_1)$; la durée T d'une oscillation simple est $2t_1$; la période du mouvement est $4t_1$. Si on pose : $t = \frac{2t_1}{\pi} \tau$, la période $u(\frac{2t_1}{\pi} \tau) \equiv u_1(\tau)$ est développable en série \mathcal{T} de Fourier de la forme :

$$A_1 \sin \tau + A_3 \sin 3\tau + A_5 \sin 5\tau + \dots;$$

au point de vue de la parité, de l'imparité, de la périodicité, etc. la fonction $u_1(\tau)$ est tout à fait comparable⁽¹⁾ à $\sin \tau$.

160. - Calcul de la durée d'une oscillation. - Calculons K approximativement; t_1 sera alors donné par $t_1 = \sqrt{\frac{l}{g}} K$. A cet effet, développons $(1-k^2 u^2)^{-\frac{1}{2}}$ par la formule du binôme. Dans cette formule

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1} x + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots,$$

(1) Dans le cours d'Analyse de 2^e année, on verra que la fonction $u(t)$ définie par l'éq. (9) est une fonction elliptique de t [à savoir la fonction $\operatorname{sn} \sqrt{\frac{g}{l}} t$], c. à. d. une fonction qui, en outre de sa période réelle, admet dans champs complexe de la variable t une période imaginaire, et qui est représentable par le quotient de deux séries entières convergentes et très rapidement convergentes pour t quelconque.

faisons $m = -\frac{1}{2}$, $x = -k^2 u^2$, il vient

$$(10) \quad (1 - k^2 u^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} k^2 u^2 + \frac{1.3}{2.4} k^4 u^4 + \dots + \frac{1.3 \dots (2n-1) k^{2n} u^{2n}}{2.4 \dots 2n} + \dots$$

cette série converge uniformément pour $0 \leq u \leq 1$, puisque $k^2 < 1$; multiplions les deux membres de (10) par $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ et intégrons terme à terme de 0 à 1; il vient:

$$K = J_0 + \frac{1}{2} k^2 J_1 + \frac{1.3}{2.4} k^4 J_2 + \dots + \frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n} k^{2n} J_n + \dots,$$

si

$$J_n = \int_0^1 \frac{u^{2n} du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Cette dernière intégrale est calculable élémentairement, le procédé de calcul le plus simple consiste à former une relation récurrente entre J_n et J_{n-1} ; une intégration par partie donne aussitôt:

$$J_n = \frac{2n-1}{2n} J_{n-1};$$

écrivons les égalités analogues en diminuant n de 1, de 2, etc., jusqu'à $J_0 = \frac{\pi}{2}$, et multiplions membre à membre toutes les égalités ainsi obtenues; on trouve:

$$J_n = \frac{1.3 \dots (2n-1) \pi}{2.4 \dots 2n} \frac{\pi}{2}.$$

La valeur de K est donc représentée par la série:

$$K = \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \dots + \left(\frac{1.3 \dots (2n-1)}{2.4 \dots 2n}\right)^2 k^{2n} + \dots \right],$$

d'où:

$$T: 2\sqrt{\frac{\ell}{g}} K = \pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{2} \sin \frac{\alpha}{2}\right)^4 + \left(\frac{1.3}{2.4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \dots \right\}$$

Cette dernière série est très rapidement convergente; si α est assez petit pour que α^2 soit négligeable devant l'unité, on a: $T = \pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$, [formule du π : 157]; si α^2 n'est pas négligeable, mais si α^4 est négligeable devant l'unité, on a:

$$T = \pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \pi \sqrt{\frac{\ell}{g}} \left[1 + \frac{\alpha^2}{16} \right],$$

formule usuelle (1).

(1) Quand α est $\gamma \ell$, on ramène la quadrature qui donne t en fonction de θ à la forme (8) en posant: $u = \sin \frac{\theta}{2}$. Il vient alors

$$\lambda t = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}, \quad \text{où } k^2 = \frac{2\ell}{\alpha + \ell}, \quad \lambda = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2g(\alpha + \ell)}}{\ell}.$$

Lorsque θ varie de 0 à 2π , u varie de 0 à 1; la période, soit $2T$, du mouvement est donc égale ici à $\frac{2K}{\lambda}$, K étant défini comme ci-dessus. Quand t augmente de $2T$, $u = \sin \frac{\theta}{2}$ change de signe.

161. - Calcul de la réaction. - La réaction est donnée par les deux dernières équations intrinsèques du mouvement :

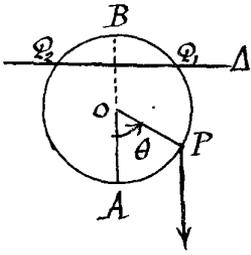
$$\frac{mV^2}{\rho} = F'_n + R_n, \quad 0 = F'_t + R_t$$

Ici $F'_t = 0$, donc $R_t = 0$, ce qui était évident par raison de symétrie. D'autre part, $\rho = l$; la demi-direction Pn est celle de P vers O ; $F'_n = -mg \cos \theta = -\frac{mgz}{l}$. Si R est la réaction normale comptée positivement dans le sens PO , on a (en grandeur et signes)

$$R = \frac{m}{l} [V^2 + gz]$$

On voit que R est toujours positif sur la demi-circonférence inférieure. Si on remplace V^2 par $2g(z+a)$, il vient

$$R = \frac{mg}{l} [3z + 2a]$$



Pour que R s'annule, il faut donc et il suffit que la droite $z = -\frac{2a}{3}$ ou Δ soit située au-dessous de la droite Π [ou $z = -a$] et coupe le cercle. Ceci n'a lieu que si $a > 0$ et $a < \frac{3l}{2}$; la droite Δ coupe alors C en deux points Q_1 et Q_2 situés au-dessous de la droite Π , R s'annule et change de signe chaque fois que P passe par Q_1 ou Q_2 ; R est négatif quand P est au-dessus de Δ .

Si à l'instant $t=0$, P est en A avec la vitesse V_0 , a est égal à $\frac{V_0^2}{2g} - l$, et les conditions $a > 0$ et $a < \frac{3l}{2}$ signifient :

$$\sqrt{2gl} < V_0 < \sqrt{5gl}$$

Si on rapproche ce résultat de ceux du N° 158, on peut former le tableau suivant :

1°	$V_0 < \sqrt{2gl}$	mouvement oscillatoire;	$R > 0$
2°	$V_0 = \sqrt{2gl}$	mouvement oscillatoire embrassant la demi-circonférence inférieure;	$R > 0$ s'annule aux deux extrémités du diamètre horizontal.
3°	$\sqrt{2gl} < V_0 < 2\sqrt{gl}$;	mouvement oscillatoire embrassant l'arc $PA_2 > \pi$;	$R < 0$ le long de P_1Q_1 et de P_2Q_2 .
4°	$V_0 = 2\sqrt{gl}$;	P tend vers B quand t tend vers $+\infty$;	$R < 0$ au-dessus de Q_1, Q_2 .
5°	$\sqrt{gl} < V_0 < \sqrt{5gl}$;	P décrit le cercle entier;	$R < 0$ le long de l'arc Q_1BQ_2 .
6°	$V_0 = \sqrt{5gl}$	id	$R > 0$ s'annule en B ;
7°	$V_0 > \sqrt{5gl}$	id	$R > 0$.

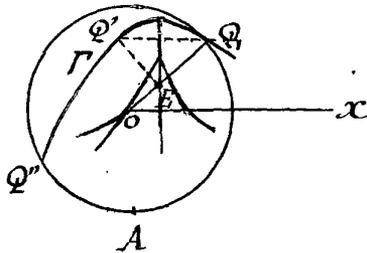
162. - Cas où le point P est relié au centre O par un fil.

Si P est relié au point O par un fil inextensible, parfaitement flexible, de masse négligeable, P décrit le cercle C de centre O et de rayon l [l longueur du fil] quand le fil est tendu, mais la réaction du fil est alors nécessairement dirigée de P vers O ($R > 0$); si le fil est détendu, P peut pénétrer à l'intérieur du cercle C. En un mot, ou bien P décrit C et R est positif, ou bien P se meut à l'intérieur de C. Supposons le point P lancé en A avec la vitesse V_0 ; P reste d'abord sur la circonférence, et cela tant que R ne s'annule pas; si pour la valeur V_0 donnée, R n'est jamais négatif [N.° 161], P ne quitte pas C; mais si R s'annule et change de signe quand P atteint (à un certain instant t_1) la position Q_1 , P abandonne la circonférence pour $t > t_1$ et décrit à l'intérieur un arc Γ de parabole comme un point pesant libre.

Remarquons que l'arc Γ de parabole admet C comme cercle osculateur en Q_1 . En effet, la force totale F qui s'exerce sur P est $m\vec{g} + \vec{R}$ pour $t < t_1$, et $m\vec{g}$ pour $t > t_1$; comme $R = 0$ pour $t = t_1$, on voit que F varie d'une manière continue quand t croît de $t_1 - \epsilon$ à $t_1 + \epsilon$. Il suit dès lors des équations intrinsèques du mouvement, que la vitesse de P, le plan osculateur et la courbure de sa trajectoire varient d'une façon continue quand t varie de $t_1 - \epsilon$ à $t_1 + \epsilon$; la courbe formée par l'arc AQ_1 de C et par Γ a donc en Q_1 une tangente et un cercle osculateur; lequel n'est autre que C.

Il est aisé de vérifier que l'arc Γ de la parabole décrit par P pénètre bien à l'intérieur de C⁽¹⁾. En effet, traçons la développée de Γ que le rayon Q_1O touche en O; soit Q' le symétrique de Q_1 par rapport à l'axe de la parabole et E le point où Q_1O rencontre cet axe. On a:

$Q'O < Q'E + EO$ ou (comme $Q'E = Q_1E$) $Q'O < Q_1O$; Q' est donc intérieur à C. Le point P



(1) Lorsque P est placé à l'instant t_0 en un point P_0 quelconque de C avec une vitesse V_0 tangente à C, admettons qu'il se meuve comme un point libre pour $t > t_0$. On voit aussitôt que l'arc de parabole qu'il décrit est intérieur ou extérieur à C suivant que $[V_0^2 + g z_0]$ est négatif ou positif. On vérifie bien ainsi que P ne peut quitter C tant que R est > 0 .

décrit à l'intérieur de C un arc de parabole plus grand que l'arc $Q_1 Q_2$, atteint C en un certain point Q'' ; à cet instant le fil est brusquement tendu, la vitesse de P change brusquement; il y a un choc.

163. Pendule cycloïdal.

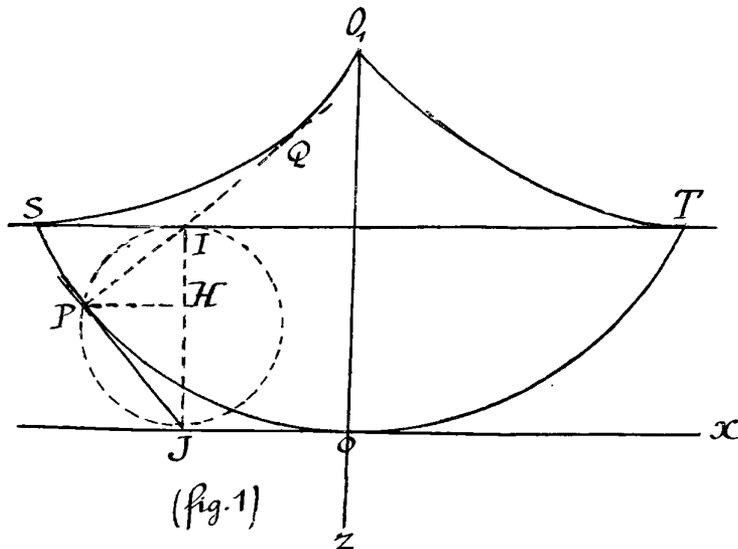
Soit C une cycloïde située dans un plan vertical, de base horizontale et dont la concavité est tournée vers le haut. Étudions le mouvement du point pesant P mobile sans frottement sur C .

Preons comme origine des axes et des arcs le

point le plus bas (sommet) de la cycloïde, comme axe Oz la verticale descendante. Pour écrire l'équation:

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g \frac{dz}{ds},$$

calculons z en fonction de s . Soit J le point de contact avec Ox du cercle générateur quand le point générateur est en P : on sait que JP est tangent à la cycloïde et que l'arc OP est égal



à $2JP$. Mais dans le triangle rectangle IPJ on a, PH désignant la hauteur issue de P , et a le rayon du cercle générateur:

$$PJ^2 = JH \times JI = -2az,$$

d'où

$$z = \frac{-s^2}{8a}.$$

L'équation du mouvement est donc:

$$s'' + k^2 s = 0, \quad \text{avec } k^2 = \frac{g}{4a},$$

elle coïncide avec celle du mouvement sur Ox d'un point attiré par O proportionnellement à la distance [N° 123]. Le mouvement est un mouvement oscillatoire, périodique, de période $2\pi \sqrt{\frac{4a}{g}}$. Toutes les oscillations sont isochrones quelle que soit leur amplitude. De plus, si P est abandonné

sans vitesse en P_0 , le temps employé par P pour aller de P_0 en O , à savoir $\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$, est indépendant de la position de P_0 sur la courbe. C'est ce qu'on traduit en disant que la cycloïde C est tautochrone par rapport à la pesanteur.

Courbes tautochrones. - Soit C une courbe quelconque, O un point fixe sur C , P un point matériel pesant glissant sans frottement sur C . Si P abandonné sans vitesse en un point P_0 de C atteint le point O en un temps toujours le même quel que soit la position de P_0 sur C , la courbe C est dite tautochrone par rapport à la pesanteur.

Proposons-nous de déterminer toutes les courbes situées dans un plan vertical qui sont tautochrones par rapport à la pesanteur. On démontrera, dans le cours d'Analyse de 2^e année, qu'une telle courbe est nécessairement une cycloïde, disposée comme plus haut, c'est-à-dire de base horizontale et tournant sa concavité vers le haut.

Brachystochrones. - La cycloïde possède en outre la propriété suivante que je me borne à indiquer :

Soit A et B deux points donnés, (A plus élevé que B), et soit C une courbe joignant AB . Un point P glissant sans frottement sur C et abandonné sans vitesse en A atteint B en un certain temps. Parmi toutes les courbes C , il en est une pour laquelle ce temps est minimum et qu'on appelle la brachystochrone (relativement à la pesanteur).

On démontre que cette courbe est la cycloïde passant par A, B , qui admet A comme point de rebroussement, dont la base est horizontale et qui tourne sa concavité vers le haut.

164. - Réalisation⁽¹⁾ du pendule cycloïdal.

On peut réaliser le pendule cycloïdal de la façon suivante : on sait que le développé C' de la cycloïde C se compose de deux demi-boucles de cycloïdes égales à la première, dont le point de rebroussement O_1 est situé sur la verticale de O , à la hauteur $4a$ au-dessus de O ; la tangente de rebroussement est O_1O [fig. 1]. Réalisons cette développée

¹⁾ Une réalisation analogue est possible si on remplace la cycloïde par une courbe C quelconque. Il suffit de considérer la développée de C .

SO, T, et relient P à O, par un fil parfaitement flexible et inextensible de longueur $4a$ et de masse négligeable. Dans une position quelconque le fil est tendu sur C' le long d'un certain arc O, Q, et la longueur (PQ + arc QO) est égale à $4a$; P décrit donc la développante de C' qui passe par O, c'est-à-dire la cycloïde C.

Point mobile sur une courbe dans un milieu résistant.

165. - Pendule cycloïdal soumis à une résistance proportionnelle à une vitesse.

Supposons que le point pesant P glisse sans frottement sur la cycloïde C mais dans un milieu résistant dont la résistance soit proportionnelle à la vitesse de P.

Soit $2m\mu v$ la valeur absolue de la résistance; l'équation $m \frac{dv}{dt} = F_t$ donne ici:

$$s'' = -2\mu s' - \frac{gs}{4a}, \quad \text{si } \frac{ds}{dt} > 0,$$

et

$$-s'' = +2\mu s' + \frac{gs}{4a} \quad \text{si } \frac{ds}{dt} < 0.$$

Le mouvement, quel que soit le signe de s' , vérifie donc l'équation

$$s'' + 2\mu s' + k^2 s = 0, \quad \text{où } k^2 = \frac{g}{4a}.$$

Cette équation est la même que celle du mouvement sur OX du point P attiré par O proportionnellement à la distance et soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse [N° 138]. Tout ce qui a été dit sur ce dernier mouvement peut donc se répéter ici. Ses oscillations sont toujours isochrones, mais s'amortissent, c'est-à-dire que leur amplitude décroît constamment; elle décroît en progression géométrique et tend vers zéro quand t croît indéfiniment.

166. - Petites oscillations d'un point pesant mobile sur une courbe quelconque et soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse.

L'équation du mouvement (que $\frac{ds}{dt}$ soit positif ou négatif)

sera, les axes étant choisis comme au N°157

$$s'' = -2\mu s' + g \frac{dz}{ds},$$

équation qu'on ne sait pas intégrer quand $z(s)$ est quelconque.

Mais si on se restreint aux petites oscillations⁽¹⁾ du point P au voisinage d'un point O de la courbe plus bas que les points voisins, on a sensiblement [page 168].

$$s'' = -2\mu s' - \frac{gk_1}{\rho} s, \quad \text{ou bien}$$

$$s'' + 2\mu s' + k^2 s = 0, \quad \text{avec } k^2 = \frac{gk_1}{\rho}.$$

Les petites oscillations jouissent donc, quelle que soit la courbe C , des mêmes propriétés que les oscillations finies du pendule cycloïdal. Elles sont isochrones, et leur amplitude s'amortit en progression géométrique.

Ceci s'applique en particulier au pendule circulaire [N°158]; il suffit de remplacer $\frac{gk_1}{\rho}$ par $\frac{g}{\rho}$. Si on introduit l'angle θ employé plus haut, on a⁽²⁾:

$$\theta'' + 2\mu\theta' + \frac{g}{\rho}\theta = 0.$$

167. - Résistance proportionnelle au carré de la vitesse. -

La courbe fixe C étant de forme quelconque, mais parfaitement lisse, supposons que P soit soumis à une force donnée, fonction seulement de la position de P , et à une résistance proportionnelle au carré de la vitesse de P . Le mouvement est défini par l'équation:

$$m \frac{dV}{dt} = \Phi_t - m\mu V^2 \quad (\mu \text{ C}^{\text{te}} \text{ positive});$$

si on compte les arcs dans le sens du mouvement, cette équation s'écrit:

$$ms'' = P_t(s) - m\mu s'^2$$

équation qui rentre dans un type signalé au N°136 et qu'on intègre par deux quadratures en prenant s'^2 comme fonction et s comme variable.

(1) Si la résistance du milieu ne peut que diminuer l'amplitude des déplacements de P .

(2) Pour les oscillations finies, l'équation est:

$$\theta'' + 2\mu\theta' + \frac{g}{\rho} \sin\theta = 0,$$

équation non intégrable.

Mouvement d'un point sur une courbe fixe dépolie.

168. - Lois du frottement de glissement d'un point sur une courbe.

Lorsque la courbe fixe C sur laquelle glisse P n'est pas parfaitement lisse, l'expérience montre que la projection R_t de la réaction \bar{R} sur la tangente à la courbe [réaction tangentielle] est toujours de sens contraire à la vitesse de P . On admet qu'en valeur absolue cette réaction tangentielle est proportionnelle à la composante normale à C , (soit R_n), de \bar{R} [réaction normale]; autrement dit,

$$|R_t| = f |R_n| ;$$

le coefficient f , qui ne dépend que de la nature superficielle des deux éléments matériels en contact, est dit coefficient de frottement de P sur C . Il peut varier avec l'élément de C en contact avec P ; mais dans les applications, il est en général constant le long de C .

Ces lois dites de Coulomb, ne sont d'ailleurs qu'une grossière approximation de la réalité, les phénomènes du frottement étant au fond très complexes.

Admettons ces lois et étudions le mouvement de P sur C , connaissant la force donnée F' et le coefficient de frottement f . Les équations intrinsèques donnent ici :

$$(1) \quad \begin{cases} m \frac{dv}{dt} = F'_t - f |R_n| \\ m \frac{v^2}{\rho} = F'_n + R_n \\ 0 = F'_p + R_p \end{cases}$$

On voit que si, à l'instant t , on connaît la position et la vitesse de P sur C , et par suite F'_t , F'_n et F'_p , on connaît R_n et R_p à cet instant, donc R_n , et que cette réaction normale ainsi calculée est indépendante de f ; elle est la même que si la courbe était parfaitement lisse. La valeur absolue de R_n est donnée par

$$R_n^2 = \left(m \frac{v^2}{\rho} - F'_n \right)^2 + F_p'^2 ,$$

et le mouvement est défini par l'équation :

$$(2) \quad m \frac{dv}{dt} = F'_t - f \sqrt{\left(\frac{mv^2}{\rho} - F'_n \right)^2 + F_p'^2} :$$

169. - Lois du frottement au repos et au départ.

Ses lois précédentes supposent que la vitesse v de P n'est pas nulle. Soit maintenant $v=0$ à l'instant t_0 . Le point P va-t-il se mettre en mouvement? Si oui, dans l'intervalle de temps t_0, t_0+h , les lois du frottement de glissement s'appliquent, l'équation (2) est vérifiée, et pour l'instant t_0 en particulier, on a :

$$m \frac{dv}{dt} = F_t' - f \sqrt{F_n'^2 + F_b'^2} = F_t' - f F_N'$$

Puisque $v > 0$ et puisque $v_0 = 0$, $\frac{dv}{dt}$ est nécessairement positif ou nul pour $t = t_0$; il faut donc que $F_t' - f F_N'$ soit positif ou nul, et comme $F_N' > 0$, il faut que F_t' soit positif, c'est-à-dire que le mouvement commence dans le sens de la composante tangentielle de F' , et qu'en outre $F_t' > f F_N'$. Si donc la composante tangentielle, soit F_T' , de F' est inférieure à $f F_N'$, P reste nécessairement immobile. En réalité l'expérience montre que l'équilibre subsiste dans des cas un peu plus étendus; le point P ne se met en mouvement que si on a :

$$F_T' > f_0 F_N'$$

f_0 désignant un certain coefficient $> f$, dit coefficient de frottement au repos ou au départ.

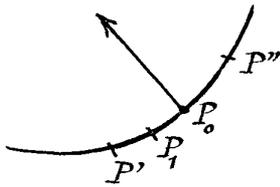
En définitive, P reste immobile si on a :

$$F_T' \leq f_0 F_N'$$

si $F_T' > f_0 F_N'$, P se met en mouvement dans le sens de F_T' et les lois du frottement de glissement s'appliquent.

170. - De l'équilibre en tenant compte du frottement.

Lorsque la courbe C est parfaitement lisse, pour que P_0 soit une position d'équilibre, il faut que la force donnée qui s'exerce sur P placé en P_0 sans vitesse soit normale à C (quel que soit l'instant considéré t). Quand cette condition est remplie, P_0 est, a fortiori, position d'équilibre s'il y a frottement; mais cette condition n'est plus nécessaire: pour que P placé sans vitesse en P_0 reste en équilibre, il faut et il suffit que l'angle (aigu) de F' avec le plan normal ait une tangente au plus égale à f . D'après cela, toute position telle que P_0 [position d'équilibre en supposant C parfaitement lisse] fait, en général, partie d'un arc $P'P''$ de C



donc tous les points sont positions d'équilibre. En effet, en P_0 , $F_T'' = 0$; pour une position P_1 voisine de P_0 où P est placé sans vitesse, F_T'' est très petit et moindre par suite que $f F''$; le long d'un arc fini $P'P''$ de C , on aura donc: $F_T'' \leq f F''$. Serait-il autrement n'est en défaut que si F_T'' est nul en P_0 , c'est-à-dire si P_0 est position d'équilibre du point P libre

171. - Cas où la courbe C est plane. - Lorsque la courbe C est plane et que la force donnée est située dans son plan, l'équation (2) se simplifie notablement. On a, en effet,

$$(3) \quad m \frac{dV}{dt} = F_t'' - f' \left| \frac{mV^2}{\rho} - F_n'' \right|.$$

Si la force F'' est la résultante d'une force Φ qui ne dépend que de la position de P et d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse [résistance qui peut être nulle], l'équation (3) devient:

$$(4) \quad m \frac{dV}{dt} = \Phi_t(s) - m\mu V^2 - f \left| \frac{mV^2}{\rho(s)} - \Phi_n(s) \right|,$$

équation qui s'intègre par deux quadratures en prenant V^2 comme fonction et s comme variable [N.° 136].

Exemples à traiter. - Mouvement d'un point pesant mobile avec frottement sur un cercle vertical et soumis à une résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

Mouvement d'un point pesant mobile avec frottement dans un tube horizontal, et soumis à une résistance d'un milieu proportionnelle à la vitesse.

Mouvement d'un point pesant mobile avec frottement sur une hélice circulaire tracée sur un cylindre de révolution d'axe vertical.

Nous ne traiterons pas cette année du mouvement d'un point sur une surface, qui sera étudié dans le cours de seconde année.

Chapitre II.

Cinématique du solide. - Composition des mouvements.

172. - Translation instantanée. - Quand un système est animé d'un mouvement de translation, les vitesses de tous ses points à un instant t sont équipollentes. Inversement, si cette dernière condition est remplie à un certain instant t , on dit que le système est animé (à l'instant t) d'une translation instantanée. Cette translation est définie par le vecteur \vec{V} qui représente la vitesse à l'instant t d'un élément quelconque, ou encore par le déplacement infinitésimal PP_1 , entre les instants t et $t + dt$, d'un des éléments du système.

Si, à chaque instant, le système est animé d'une translation instantanée, son mouvement quand t varie entre t_0 et t_1 est un mouvement de translation.

En effet, soit P_1 et P_2 deux éléments quelconques du système, on a :

$$x'_1 = x'_2, \quad y'_1 = y'_2, \quad z'_1 = z'_2 \quad \text{quel que soit } t;$$

d'où :

$$x_1 - x_1^0 = x_2 - x_2^0, \quad y_1 - y_1^0 = y_2 - y_2^0, \quad z_1 - z_1^0 = z_2 - z_2^0;$$

autrement dit, les déplacements de P_1 et P_2 entre deux instants t_0 et t sont équipollents.

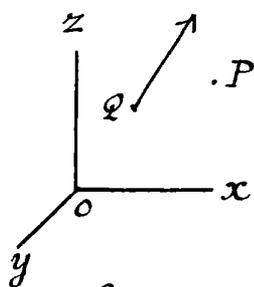
C. q. f. d.

173. - Rotation instantanée. - Considérons un solide qui a deux points fixes A, B et qui tourne autour de l'axe AB avec une vitesse angulaire égale (à l'instant t) à ω en valeur absolue. Portons sur l'axe AB , à partir d'un point Q quelconque, le vecteur $\vec{\omega}$, dans un sens OZ tel qu'un observateur placé les pieds en O la tête en Z voit la rotation du solide s'effectuer dans le sens positif. Soit \vec{QP} le vecteur ainsi obtenu. La vitesse d'un point P du solide est perpendiculaire au plan QP , égal en valeur absolue au produit $P\omega$, (P distance de P à Q); enfin elle est orientée positivement.

par rapport à QW . En un mot, \vec{V} coïncide avec le moment (QW, P) du vecteur QW par rapport à P . Le vecteur QW est dit "segment de rotation instantanée" ou simplement rotation instantanée du solide.

Quand, à un instant t , les vitesses d'un système matériel S sont les mêmes que s'il tournait d'ensemble autour d'un certain axe avec une certaine vitesse angulaire, on dit que le système est animé (à l'instant t) d'une rotation instantanée; les vitesses des éléments de S sont alors bien déterminées à l'instant t si on connaît le segment de rotation instantanée QW .

Quant, à chaque instant t , le système est animé d'une rotation instantanée dont l'axe est fixe, on voit aisément que le système se meut comme un solide fixé par deux points. Si le vecteur QW est invariable, le mouvement est une rotation uniforme autour d'un axe fixe dans l'espace et dans le corps.



Soit $Oxyz$ les axes fixes (trirectangles et positifs), (a, b, c) les coordonnées de Q , (p, q, r) les composantes de QW , (x, y, z) les coordonnées de P . La vitesse de P , à l'instant t , coïncidant avec (QW, P) , ses composantes sont:

$$(b-y)r - (c-z)q, \quad (c-z)p - (a-x)r, \quad (a-x)q - (b-y)p;$$

Si Q coïncide avec O , elle deviennent:

$$qz - ry, \quad rx - pz, \quad py - qx.$$

174. - Composition des mouvements. - Soit Σ un solide auquel nous pouvons toujours lier invariablement un trièdre $Oxyz$, et que nous regardons comme fixe. Soit Σ_1 un second solide (auquel est lié le trièdre $O_1x_1y_1z_1$) et qui est animé d'un mouvement donné par rapport au premier. Soit enfin P un élément matériel dont le mouvement est donné par rapport à S_1 (c'est-à-dire par rapport au trièdre O_1). Composer les deux mouvements, c'est calculer le mouvement de P par rapport au solide S (ou au trièdre O).

Considérons deux instants infiniment voisins t et $t+dt$ et supposons qu'on connaisse le déplacement infinitésimal

(1) Ce vecteur est bien déterminé à un glissement près le long de sa ligne d'action.

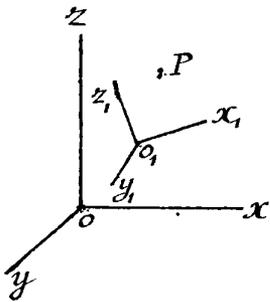
du trièdre O_1 par rapport au trièdre O , et le déplacement relatif de P par rapport au trièdre O_1 (entre les instants t et $t+dt$). Composer les deux mouvements infinitésimaux (ou instantanés), c'est calculer le déplacement infinitésimal de P par rapport au trièdre O .

Pour abréger, nous appellerons mouvement absolu le mouvement de P rapporté au trièdre O , et mouvement relatif le mouvement de P par rapport au trièdre O_1 .

Si, au lieu d'un seul élément P , on considère un système matériel, un solide par exemple, les définitions précédentes s'appliquent à chacun des éléments du système.

175. - Théorème fondamental sur les vitesses.

Soit, à l'instant t , \bar{V}_a la vitesse de P par rapport aux axes $Oxyz$ [qui sera dite absolue], \bar{V}_p la vitesse de P par rapport aux axes $O_1x_1y_1z_1$ [qui sera dite vitesse relative] \bar{V}_c la vitesse absolue du point π invariablement lié au trièdre $Oxyz$, qui coïncide avec P à l'instant t [vitesse du point coïncidant].



On a :

$$(1) \quad \bar{V}_a = \bar{V}_p + \bar{V}_c.$$

Considérons maintenant $(n+1)$ trièdres $Oxyz, O_1x_1y_1z_1, \dots, O_nx_ny_nz_n$, le premier fixe, les autres animés chacun d'un mouvement infinitésimal donné par rapport au précédent (entre les instants t et $t+dt$). Soit P un mobile dont le déplacement infinitésimal est donné par rapport au trièdre Ox . Composer ces n mouvements infinitésimaux ; c'est calculer le déplacement absolu de P entre les instants t et $t+dt$.

Cette composition est donnée par la règle suivante :

(1) Si on écrit cette égalité :

$$\bar{V}_a - \bar{V}_c = \bar{V}_p$$

on voit qu'elle exprime que la différence géométrique des vitesses des deux points coïncidants P et π est indépendante du trièdre de référence adopté [théorème démontré au N° IV, p. V].

— Plus généralement, soit à l'instant t ,
 \bar{V}_a la vitesse de P par rapport au trièdre $Oxyz$,
 \bar{V}_r la vitesse de P par rapport au trièdre $O_n x_n y_n z_n$,
 \bar{V}_n la vitesse par rapport à $O_{n-1} x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}$ du point π_n
 invariablement lié à $O_n x_n y_n z_n$, qui coïncide avec P
 (à l'instant t),
 \bar{V}_{n-1} la vitesse par rapport à $O_{n-2} x_{n-2} y_{n-2} z_{n-2}$ du point
 π_{n-1} , invariablement lié à $O_{n-1} x_{n-1} y_{n-1} z_{n-1}$, qui coïn-
 cide avec P (à l'instant t),

 \bar{V}_1 la vitesse par rapport aux axes $Oxyz$ du point
 π_1 , invariablement lié à $O_1 x_1 y_1 z_1$, qui coïncide
 avec P (à l'instant t); on a: (1)

$$(2) \quad \bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \dots + \bar{V}_n$$

Remarquons que, dans cette formule, on peut per-
 muter le rôle des vecteurs $\bar{V}_r, \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_n$ sans que \bar{V}_a change.
 Si au lieu d'un mobile P , on considère un système
 de points mobiles [par exemple un solide mobile],
 l'égalité (2) vaut pour chaque point du système.

176 - Corollaire. - Soit Σ et Σ_1 deux solides mobiles l'un
 par rapport à l'autre [N° 174], M un point géométrique, \bar{V} la
 vitesse à l'instant t par rapport à Σ_1 du point P lié invaria-
 blement à Σ qui est en M à cet instant, et \bar{V}_1 la vitesse au
 même instant par rapport à Σ du point P_1 lié invariable-
 ment à Σ_1 qui est en M . Je dis qu'on a :

En effet, appliquons la formule (1) à l'élément P de Σ ;
 \bar{V}_a est nul, $\bar{V} = \bar{V}_r$, $\bar{V}_1 = \bar{V}_c$; d'où

$$\bar{V} + \bar{V}_1 = 0 \quad \text{c. q. f. d.}$$

(1) Cette formule est vraie pour $n=1$. Admettons qu'elle est vraie pour $(n-1)$ et démontrons-
 la pour n . Soit \bar{V}_c la vitesse par rapport à $Oxyz$ du point π_n (invariablement
 lié à $O_n x_n y_n z_n$ et qui coïncide avec P , à l'instant t): la formule (1) s'applique.
 Mais si la formule (2) est vraie pour $(n-1)$, on a évidemment [π_n jouant le
 rôle de P et \bar{V}_n le rôle de \bar{V}_r]: $\bar{V}_c = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \dots + \bar{V}_n$. D'où la formule (2).

Compositions des rotations et des translations instantanées.

177. - Composition de deux rotations. - Soit Σ_1 (ou O, x, y, z_1) un solide animé à l'instant t par rapport au solide Σ (ou $Oxyz$) d'une rotation instantanée définie par le vecteur \overline{AB} ou $\overline{\omega}$. Soit, d'autre part, S un solide animé au même instant par rapport à Σ_1 d'une rotation instantanée définie par $\overline{A_1 B_1}$ ou $\overline{\omega_1}$. Composer les deux rotations instantanées \overline{AB} et $\overline{A_1 B_1}$, c'est calculer les vitesses des points P de S par rapport au solide Σ (ou $Oxyz$).

La formule (1) du N° 175 donne :

$$(3) \quad \overline{V}_a = \overline{V}_p + \overline{V}_c = (A_1 B_1, P) + (A_2 B_2, P).$$

Autrement dit, la vitesse du point P de S à l'instant t coïncide avec le moment résultant par rapport à P du système de vecteurs $\overline{A_1 B_1}$ et $\overline{A_2 B_2}$.

Remarquons qu'on peut, sans changer le mouvement infinitésimal résultant, intervertir le rôle des deux rotations $\overline{\omega}$ et $\overline{\omega_1}$, c'est-à-dire supposer que la rotation instantanée de Σ_1 par rapport à Σ est $\overline{\omega_1}$ tandis que celle de S par rapport à Σ_1 est $\overline{\omega}$.

178. - Composition d'une rotation et d'une translation. - Remplaçons, dans ce qui précède, la rotation instantanée $\overline{\omega}$ par une translation instantanée. Autrement dit, supposons qu'à l'instant t , Σ_1 soit animé par rapport à Σ d'une translation instantanée, de vitesse \overline{V} . Alors, la formule (3) devient :

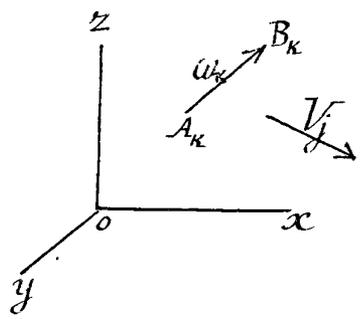
$$(4) \quad \overline{V}_a = \overline{V} + (A_1 B_1, P).$$

Considérons le système de vecteurs E formé des vecteurs $A_1 B_1$ et d'un couple d'axe \overline{V} : \overline{V}_a coïncide avec le moment résultant de E par rapport à P .

Là encore on peut, sans changer \overline{V}_a , permuter le rôle de \overline{V} et de $\overline{\omega_1}$: autrement dit, peut supposer qu'à l'instant t , Σ_1 est animé par rapport à Σ , de la rotation instantanée $\overline{A_1 B_1}$, et S par rapport à Σ_1 de la translation instantanée \overline{V} .

179. - Composition d'un nombre quelconque de translations et rotations instantanées.

Considérons n trièdres $O, x, y, z, \dots, O_n, x_n, y_n, z_n$, et supposons qu'à l'instant t , le déplacement infinitésimal de chacun des trièdres O_1, \dots, O_n par rapport au précédent O, O_1, \dots ou O_{n-1} soit ou une translation ou une rotation instantanée. Composer ces rotations et translations instantanées, c'est calculer la vitesse absolue (c'est-à-dire par rapport au trièdre O) de tout point P lié invariablement au trièdre O_n, x_n, y_n, z_n .



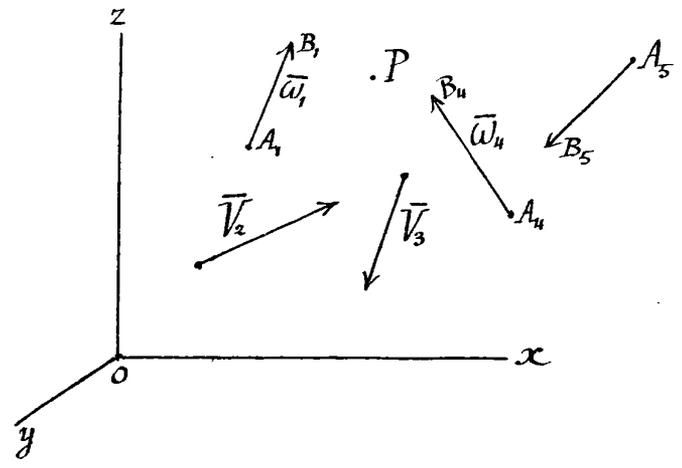
Chacune des rotations instantanées données est définie par un vecteur, soit $\bar{\omega}_k$ ou $\overline{A_k B_k}$ un de ces vecteurs; chacune des translations instantanées données est définie par un vecteur \bar{V}_j [qui, lui, n'est déterminé qu'en grandeur, direction et sens].

Considérons le système Σ de vecteurs formé : 1° de tous les vecteurs $\overline{A_k B_k}$ ou $\bar{\omega}_k$; 2° de couples ayant res-

pectivement pour axes les divers vecteurs \bar{V}_j . La vitesse absolue V_a du point P (à l'instant t) est le moment résultant du système de vecteurs Σ par rapport au point P .

En effet admettons, pour fixer les idées, que n soit égal à 5, et que les mouvements infinitésimaux à composer soient les suivants :

Le mouvement du trièdre O_1 par rapport au trièdre O est la rotation instantanée $\overline{A_1 B_1}$	O_1 — translation — \bar{V}_1
_____ O_2 _____ O_2 — translation — \bar{V}_2	
_____ O_3 _____ O_3 — rotation — $\overline{A_3 B_3}$	
_____ O_4 _____ O_4 — translation — \bar{V}_4	
_____ O_5 _____ O_5 — rotation — $\overline{A_5 B_5}$	



Appliquons la formule (?) du N° 175.

$$\bar{V}_a = \bar{V}_1 + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 + \bar{V}_4 + \bar{V}_5$$

Ici, $\bar{V}_1, \bar{V}_4, \bar{V}_5$ sont respectivement les vecteurs $(A_1 B_1, P), (A_4 B_4, P), (A_5 B_5, P)$

et les vitesses \bar{V}_2, \bar{V}_3 sont \bar{V}_2 et \bar{V}_3 .

On a donc :

$$\bar{V}_a = (A_1 B_1, P) + \bar{V}_2 + \bar{V}_3 + (A_4 B_4, P) + (A_5 B_5, P) = (\bar{\Sigma}, P),$$

Σ désignant le système formé par les vecteurs $A_1 B_1, A_4 B_4, A_5 B_5$ et par deux couples ayant respectivement pour axes \bar{V}_2 et \bar{V}_3 . C. q. f. d.

Remarquons que pour calculer la vitesse du point P (dont on connaît la position à l'instant considéré, il suffit de connaître les vecteurs rotations en grandeur, direction et sens, et les vecteurs translations en grandeur, direction et sens : l'ordre dans lequel ils sont supposés rangés est indifférent!) Nous dirons, dans ce cas, que l'ensemble des rotations et translations instantanées est donné.

180. - Conséquences de la règle générale de composition des translations et rotations instantanées.

Appelons système de vecteurs E correspondant à un ensemble donné de translations et rotations instantanées, le système de vecteurs formé : 1° des vecteurs rotations $A_k B_k$; 2° de couples ayant respectivement pour axes les vitesses de translation \bar{V}_j .

Deux ensembles donnés de translations et rotations instantanées seront dits équivalents si la vitesse qu'ils communiquent respectivement à un même point P est la même, cela quelle que soit la position de P .

Ces définitions admises, la théorie des vecteurs [N° 5-9] permet immédiatement, en vertu de la règle du N° précédent, d'énoncer les propositions suivantes.

I. - Pour que deux ensembles de translations et rotations instantanées soient équivalents, il faut et il suffit que les deux systèmes de vecteurs correspondants soient eux-mêmes équivalents.

II. - Tout ensemble de translations et rotations

(1) Ce dernier résultat était évident en vertu de la symétrie du rôle des vecteurs $\bar{V}_1, \bar{V}_2, \dots, \bar{V}_n, \bar{V}_p$ dans la formule (2) du N° 175.

instantanées (défini par le système de vecteurs E) est équivalent à la combinaison d'une translation, soit V et d'une rotation, soit \overline{AB} .

L'origine A du vecteur rotation \overline{AB} peut être choisie arbitrairement; \overline{AB} est équipollent à la somme géométrique de E , donc invariable en grandeur direction et sens. Le vecteur V est le moment résultant, par rapport à A , du système E ; la projection de la vitesse de translation V sur l'axe de rotation \overline{AB} est invariable en grandeur et sens.

III. - Tout ensemble de translations et rotations instantanées peut se remplacer par une rotation et par une translation parallèle à l'axe de rotation, c'est-à-dire par un mouvement hélicoïdal⁽¹⁾ instantané. L'axe du mouvement hélicoïdal coïncide avec l'axe central du système de vecteurs E . Cet axe est déterminé sans ambiguïté, sauf dans le cas où la somme géométrique de E est nulle: le mouvement résultant se réduit alors à une translation instantanée.

IV. - Tout ensemble de translations et rotations instantanées peut se remplacer par deux rotations, qui sont bien déterminées quand on se donne l'axe d'une des deux rotations. Cet axe peut d'ailleurs être choisi arbitrairement sous la seule condition de ne pas être parallèle à la somme géométrique de E ni perpendiculaire au moment (E, O) de E pris par rapport à un point O de l'axe.

Cas particuliers.

V. - Pour qu'un ensemble de translations et rotations instantanées puisse se remplacer.

1° par une translation unique: il faut et il suffit que la somme géométrique de E soit nulle;

2° par une rotation unique: il faut et il suffit que, la somme géométrique de E étant différente de zéro, sa

(1) Quand un solide tourne autour d'un axe fixe, soit OZ , avec une certaine vitesse ω angulaire constante et glisse en même temps le long de OP avec une vitesse de translation constante, on dit qu'il est animé d'un mouvement hélicoïdal dont l'axe est OZ . Un mouvement hélicoïdal instantané se décompose en une rotation instantanée arbitraire et une translation instantanée quelconque parallèle à l'axe de rotation.

direction soit perpendiculaire au vecteur (\vec{E}, O) , O désignant un point arbitrairement choisi. La rotation unique est alors la résultante géométrique de E .

VI. - Pour que la vitesse d'un point P résultant d'une combinaison donnée de translations et rotations instantanées soit nulle quelle que soit la position de P , il faut et il suffit que la somme géométrique de E soit nulle, ainsi le vecteur (\vec{E}, O) , O désignant un point arbitrairement choisi.

VII. - Composition de translations.

Toute combinaison de translations instantanées peut être remplacée par une translation unique dont la vitesse est la somme géométrique des vitesses de translation o données.

Réciproquement, toute translation instantanée \vec{V} peut être décomposée en trois translations instantanées dont les vitesses sont parallèles à trois directions données non dans un même plan: ces trois vitesses ne sont autres que les composantes, suivant les trois directions, du vecteur \vec{V} .

VIII. - Composition de rotations d'axes concourants.

Toute combinaison de rotations instantanées $\overline{A}_k \overline{B}_k$, dont les axes passent par le même point C , peut être remplacée par une rotation unique dont l'axe passe par C : le vecteur $\overline{C\overline{D}}$ qui définit cette rotation est la somme géométrique des rotations données $\overline{A}_k \overline{B}_k$.

Réciproquement, toute rotation instantanée $\overline{C\overline{D}}$ peut être décomposée en trois rotations $\overline{C\overline{D}}_1, \overline{C\overline{D}}_2, \overline{C\overline{D}}_3$, dont les axes sont parallèles à trois directions données, non dans un même plan: les vecteurs $\overline{C\overline{D}}_1, \overline{C\overline{D}}_2, \overline{C\overline{D}}_3$ ne sont autres que les composantes du vecteur $\overline{C\overline{D}}$ suivant les trois directions données.

IX. - Composition de rotations d'axes parallèles.

Toute combinaison de rotations instantanées $\overline{A}_k \overline{B}_k$ dont les axes sont parallèles peut être remplacée par une rotation unique autour d'un axe parallèle aux axes donnés, sauf dans le cas où la somme géométrique des vecteurs $\overline{A}_k \overline{B}_k$ est nulle, auquel cas la combinaison

donnée équivalant à une translation.

D'une façon plus précise, adoptons sur la direction commune des axes de rotation donnés un sens positif, soit OZ , et appelons ω_k la longueur $A_k B_k$ précédée du signe $+$ ou du signe $-$ suivant que $A_k B_k$ a le sens OZ ou le sens contraire: si $\omega_1 + \dots + \omega_n$ est nul, la combinaison donnée de rotations équivalant à une translation perpendiculaire à OZ (qui peut être nulle); si $\omega_1 + \dots + \omega_n \neq 0$, elle équivalant à une rotation unique autour d'un axe CZ parallèle à OZ et dont la vitesse angulaire comptée positivement autour de la demi-droite CZ est égale à $\omega_1 + \dots + \omega_n$.

Toute rotation \overline{AB} instantanée peut être décomposée en trois rotations autour d'axes donnés parallèles à AB non dans un même plan. Ces trois composantes sont de même sens si l'intersection de AB par un plan n'est pas extérieure au triangle formé par les intersections des trois axes donnés et du plan.

X. - Toute combinaison de rotations instantanées dont les axes sont dans un même plan, équivalant soit à une translation perpendiculaire au plan, soit à une rotation unique autour d'un axe situé dans le plan.

XI. - Pour que deux rotations instantanées $\overline{A_1 B_1}, \overline{A_2 B_2}$ équivalent à une rotation unique, il faut et il suffit que les vecteurs $\overline{A_1 B_1}, \overline{A_2 B_2}$ soient dans un même plan, sans former un couple. Pour qu'elles équivalent à une translation il faut et il suffit que $\overline{A_1 B_1}$ et $\overline{A_2 B_2}$ forment un couple; la vitesse de translation est alors l'axe du couple. Pour que cette translation soit elle-même nulle, il faut et il suffit que $\overline{A_1 B_1}$ et $\overline{A_2 B_2}$ soient égaux et directement opposés.

181. - Remarque sur les déplacements finis. Toutes les propositions précédentes (Nos 176-180) ne s'appliquent qu'aux déplacements infinitésimaux. Dans le cas où les mouvements qu'on compose sont des translations, mais dans ce cas seulement, elles s'étendent sans peine aux déplacements finis.

Par exemple, si les trièdres $O_1 x_1 y_1 z_1$ et $O_2 x_2 y_2 z_2$ sont animés le premier par rapport au trièdre $Oxyz$, le second par rapport au trièdre $O_1 x_1 y_1 z_1$ d'un mouvement de translation,

soit $\overline{O, O'}$ le déplacement de O_1 par rapport à $Oxyz$ et $O_2 O_2'$ le déplacement de O_2 par rapport au t' cadre $O_2 x_2 y_2 z_2$ entre les instants t_0 et t_1 ; le déplacement par rapport à $Oxyz$ d'un point P lié invariablement à $O_2 x_2 y_2 z_2$ est (entre les instants) $\overline{O, O_1'} + \overline{O_2 O_2'}$. On peut intervertir le rôle des deux translations, etc.

Mouvement infinitésimal d'un solide.

182. - Déplacement infinitésimal d'un solide qui a un point fixe.

Soit S un solide fixé par un de ses points O , et trois points A, B, C liés invariablement à S , dont le plan ne passe pas par O et dont la distance au point O est égale à l'unité. Les points A, B, C se meuvent sur la sphère Σ de centre O et de rayon 1; si on joint ces trois points par trois arcs de grands cercles, le triangle sphérique ABC est une figure invariable, liée invariablement à S et dont la position détermine celle de S .

Soient t et $t+h$ deux instants très voisins, S et S' les positions correspondantes du solide et $ABC, A'B'C'$ celles du triangle sphérique: je dis qu'on peut passer de la position S' par une rotation convenable autour d'un certain axe.

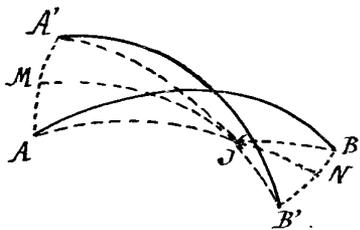
En effet, menons les plans ρ perpendiculaires aux droites AA', BB' en leur milieu, et soit OJ leur intersection.

Joignons J à A, A', B, B' par des arcs de grands cercles sur Σ .

Les deux triangles sphériques JAB et $JA'B'$ ont leurs côtés égaux

chacun à chacun; si j'amène JA en JA' par une rotation de l'angle $A'JA$ autour de OJ , la nouvelle position B' de B coïncide avec B' ou avec le symétrique B_1 de B' par rapport au plan $JA'O$. Mais B'' est sûrement très voisin de B' , B ne peut coïncider qu'avec B' (et non avec B_1 qui en est à une distance finie.)

La rotation précédente qui amène A et B en A' et B' amène C en C'' ; C'' coïncide avec C' ou avec le symétrique C_1 de C' par rapport au plan OAB ; mais C'' étant sûrement très



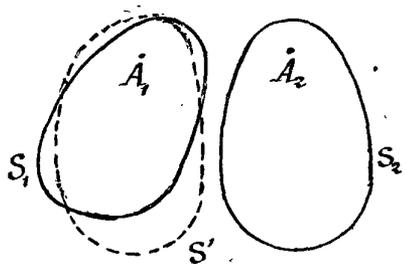
voisin de C' ne peut coïncider qu'avec C' .

On peut donc passer de la position ABC à la position $A'B'C'$ par une rotation d'un certain angle positif α autour d'une demi droite OJ .

Les vitesses moyennes des solides S entre les instants t et $t+h$ sont donc les mêmes que si le solide tournait autour OJ avec la vitesse angulaire constante $\frac{\alpha}{h}$. Si h tend vers zéro, OJ tend vers une certaine demi droite OI , $\frac{\alpha}{h}$ tend vers une quantité positive ou nulle ω . Les vitesses du solide à l'instant t sont les mêmes que si le solide tournait autour de la demi-droite OI avec la vitesse angulaire ω . La droite OI est l'axe instantané de rotation, et le vecteur OI (de longueur égale à ω) construit sur la demi-droite OI définit la rotation instantanée du solide.

On peut dire encore que le déplacement infinitésimal de S entre les instants t et $t+dt$ est une rotation d'un angle ωdt autour de OI .

183. - Déplacement infinitésimal d'un solide libre.



Considérons deux positions infiniment voisines, soit S_1 et S_2 , d'un solide S , et soit A_1 et A_2 les positions correspondantes du même élément matériel A de S . Transportons le solide S à partir de S_2 parallèlement à lui-même de façon que l'élément A vienne de A_2 en A_1 , et soit S' la position de S ainsi obtenue. Pour

transporter S de S_1 en S_2 , on peut le faire passer d'abord de S_1 en S' (l'élément A restant fixe en A_1), puis le transporter parallèlement à lui-même de S' en S_2 . Le premier déplacement peut s'effectuer par une certaine rotation positive (soit $d\theta$) autour d'une certaine demi-droite A_1I ; le second déplacement est une translation.

Le déplacement infinitésimal le plus général d'un solide peut donc toujours se décomposer en une rotation (effectuée autour d'un point A invariablement lié à S et arbitrairement choisi) et une translation (définie par le déplacement de l'élément A).

Si le déplacement considéré s'est effectué entre les

instants t et $t+dt$, soit $\omega = \frac{d\theta}{dt}$, et $\overline{A_1\omega}$ le segment égal à ω et porté à partir de A_1 sur la demi-droite $A_1\omega$. La vitesse (à l'instant t) d'un élément P du solide est la résultante :
 1° de la vitesse (A_1, ω, P) engendrée par la rotation instantanée A_1, ω ; 2° de la vitesse de translation A_1, A_2 .

Il est évident que le vecteur $\overline{O_1\omega}$ (à un instant t) est le même en grandeur, direction et sens quel que soit l'élément A choisi dans le solide. Ce vecteur est dit la rotation instantanée de S à l'instant t .

184. - Au lieu de décomposer le déplacement infinitésimal d'un solide, en deux mouvements successifs, on peut le regarder comme la combinaison d'une rotation et d'une translation simultanées.

Considérons en effet deux trièdres $Oxyz$ et $O_1x_1y_1z_1$, l'un fixe, l'autre lié invariablement au solide S . A chaque instant t , menons en O_1 des parallèles O_1X, O_1Y, O_1Z aux demi-droites Ox, Oy, Oz .

A un instant t , le trièdre $O_1x_1y_1z_1$ est animé par rapport au trièdre O_1XYZ d'une rotation instantanée, soit ω , et le trièdre O_1XYZ est animé par rapport aux axes fixes $Oxyz$ d'une translation; donc la vitesse \overline{V} est celle de l'élément O_1 du solide. Si on applique la formule (n° 175):

$$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_c, \text{ on trouve aussitôt :}$$

$$\overline{V}_a = (O_1, \omega, P) + \overline{V}$$

résultat qui coïncide avec celui du n° précédent.

On aurait pu considérer aussi des axes $ox'y'z'$ d'origine O et constamment parallèles aux axes mobiles $O_1x_1y_1z_1$; ces axes $x'y'z'$ sont animés à l'instant t (par rapport aux axes fixes) d'une rotation instantanée, et S est animé, par rapport au trièdre $ox'y'z'$ d'une translation.

185. - Conséquences des théorèmes précédents.

Soit toujours $Oxyz$ le trièdre fixe, P un élément matériel du solide considéré S , \overline{V} la vitesse de P à l'instant t : le mouvement infinitésimal du solide se décompose en une translation instantanée de vitesse \overline{V} et une rotation

instantanée, soit \overline{PW} , autour d'un axe passant par P .

Soit E le système de vecteurs formé: 1° du vecteur \overline{PW} , 2° d'un couple d'axe \overline{V} . Si, au lieu du point P , on choisit un autre élément P_1 du corps solide, le mouvement instantané du solide (au même instant t) sera défini par un autre système de vecteurs, soit E_1 . Les deux systèmes de vecteurs E et E_1 sont équivalents [N°180].

Il suit de là que le vecteur rotation \overline{PW} est le même (comme nous le savons déjà) en grandeur, direction et sens (à l'instant t) quel que soit le point P choisi dans le solide. De plus, la projection de \overline{V} sur \overline{PW} est constante en grandeur et sens.

Le déplacement élémentaire de S le plus général est un mouvement hélicoïdal instantané [N°180, Théorème III]. L'axe de ce mouvement hélicoïdal est déterminé sans ambiguïté (à chaque instant t): il n'y a d'exception que si le déplacement élémentaire de S se réduit à une translation instantanée.

Pour que le déplacement élémentaire de S se réduise à une rotation instantanée, il faut et il suffit que le point P ayant été choisi arbitrairement dans S , le vecteur \overline{V} soit perpendiculaire au vecteur \overline{PW} [différent de zéro].

Le déplacement instantané le plus général d'un solide peut se décomposer en deux rotations instantanées - Un des deux axes de rotation peut être arbitrairement choisi, à condition de ne pas être parallèle à la rotation, ni perpendiculaire à la vitesse des points liés invariablement au solide et situés sur cet axe.⁽¹⁾

Le déplacement instantané le plus général d'un solide peut se décomposer [N°180] en trois translations parallèles à trois directions [non dans un même plan] données et en trois rotations dont les axes sont concurrents et parallèles aux trois directions données.

186. - Composantes des vitesses d'un solide. - Analytiquement, soit $oxyz$ un trièdre trirectangle et positif, soit V_x, V_y, V_z la vitesse du point invariablement lié au solide qui coïncide (à l'instant t) avec le point O ; soit p, q, r les composantes de la rotation instantanée. La vitesse du point P du solide S qui, à l'instant t , occupe la position x, y, z a pour

(1) Si cette dernière condition exceptionnelle est remplie pour un point de l'axe, elle l'est pour tous.

composantes :

$$v_x = V_x + qz - ry, \quad v_y = V_y + rx - pz, \quad v_z = V_z + py - qx.$$

Le déplacement infinitésimal de P , entre les instants t et $t + dt$, a pour composantes :

$$dx = (V_x + qz - ry) dt, \quad dy = (V_y + rx - pz) dt, \quad dz = (V_z + py - qx) dt,$$

ou encore, en appelant da, db, dc le déplacement infinitésimal du point de S qui, à l'instant t , coïncide avec O , et (α, β, γ) les cosinus directeurs de la rotation instantanée $d\omega$, enfin $d\theta$ l'angle dont tourne le solide dans le temps dt :

$$dx = da + (\beta z - \gamma y) d\theta, \quad dy = db + (\gamma z - \alpha x) d\theta, \quad dz = dc + (\alpha y - \beta x) d\theta,$$

$$[\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1].$$

Le déplacement infinitésimal le plus général d'un solide dépend donc de six indéterminées: $da, db, dc, \alpha d\theta, \beta d\theta, \gamma d\theta$. La chose était évidente a priori: en effet, la position d'un solide dans l'espace dépend de six paramètres, et le déplacement infinitésimal le plus général s'obtiendra en donnant à ces six paramètres six accroissements différentiels.

187. Cas particuliers. - Quand, à un instant t , la vitesse d'un point P d'un solide S est nulle, le mouvement instantané est une rotation dont l'axe passe par P . - Quand deux points P et P' de S ont une vitesse nulle (à un instant t), le mouvement instantané est une rotation autour de la droite PP' dont tous les points, par suite, ont une vitesse nulle. Quand trois points de S non en ligne droite ont une vitesse nulle (à l'instant t), tous les points de S ont une vitesse nulle.

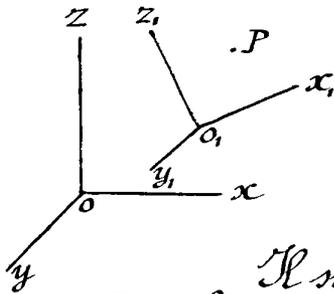
Mouvement parallèle à un plan fixe. - Quand, à un instant t , toutes les vitesses d'un corps solide S sont parallèles à un plan fixe Π , le mouvement instantané est soit une translation, soit une rotation dont l'axe est perpendiculaire au plan Π .

En effet, soit P un point de S , \vec{v} sa vitesse. Le mouvement instantané de S est décomposable en une translation de vitesse \vec{v} et une rotation $P\omega$ autour de P . Soit d'autre part, P_1 un point arbitraire de S ; la vitesse \vec{v}_1 de P_1

est la somme géométrique $\bar{V} + (P\bar{W}, P_1)$. Si toutes les différences géométriques $\bar{V}_1 - \bar{V}$ sont nulles, le mouvement instantané est une translation. Si $\bar{V}_1 - \bar{V} \neq 0$, ce vecteur est parallèle au plan π , et d'autre part il ne diffère pas du vecteur $(P\bar{W}, P_1)$; il est donc perpendiculaire à $P\bar{W}$. Soit de même P_2 un autre point de S pris en dehors du plan qui renferme $P\bar{W}$ et P_1 ; le vecteur $\bar{V}_2 - \bar{V} = (P\bar{W}, P_2)$ est parallèle au plan π , sans être parallèle au vecteur $(P\bar{W}, P_1)$ et l'axe de rotation $P\bar{W}$, perpendiculaire à deux directions distinctes du plan π est perpendiculaire à ce plan, donc à la vitesse \bar{V} . La translation \bar{V} et la rotation $P\bar{W}$ équivalent alors à une rotation unique $P\bar{W}'$, $P\bar{W}'$ désignant un certain vecteur équipollent à $P\bar{W}$.

188. - Mouvement réciproque de deux solides.

Soit S (ou $oxyz$) et S_1 (ou $o_1x_1y_1z_1$) deux solides ou figures invariables, dont on étudie le mouvement l'un par rapport à l'autre. Soit π le point invariablement lié au premier solide et π_1 le point invariablement lié au second qui, à l'instant t , coïncident en la position P ; soit \bar{V} la vitesse de π , par rapport à S et soit \bar{V}_1 celle de π_1 par rapport à S_1 ; nous savons [N° 175] que \bar{V} et \bar{V}_1 sont égaux et directement opposés.

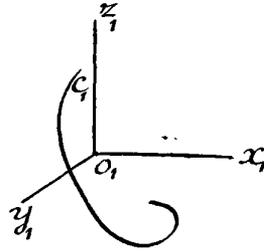
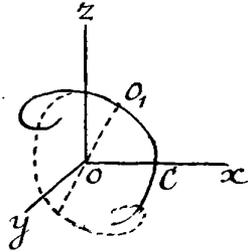
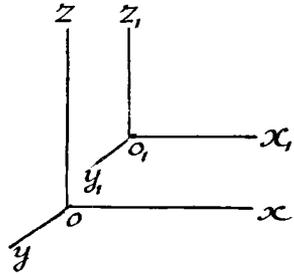


Il suit de là immédiatement que si la translation \bar{V} et la rotation $P\bar{W}$ définissent à l'instant t , le mouvement instantané de S_1 par rapport à S , la translation $-\bar{V}$ et la rotation $-P\bar{W}$ définissent un même instant) le mouvement instantané inverse (mouvement de S par rapport à S_1).

189. - Translation de deux solides l'un par rapport à l'autre. - Supposons, en particulier que les deux solides S et S_1 soient animés l'un par rapport à l'autre d'un mouvement de translation. Soit à l'instant t , \bar{V} la vitesse de translation de S_1 par rapport à S , et \bar{W} celle de S par rapport à S_1 ; on a, quel que soit t , $\bar{V} = -\bar{W}$.

Il est loisible, dans ce cas d'admettre que les trièdres $oxyz$ et $o_1x_1y_1z_1$ ont leurs axes correspondants parallèles: soit C la trajectoire par rapport au trièdre O du point O_1 de S_1 : toutes les trajectoires des points π_1 de S_1 sont des courbes

égales à C et qui s'en déduisent par une simple translation; de même les trajectoires des points M de S par rapport à O, x, y, z , sont égales à celle du point O , et s'en déduisent par une simple translation. Or si (a, b, c) sont les coordonnées de O , par rapport au trièdre $Oxyz$, les coordonnées de O par rapport au trièdre $O_1x_1y_1z_1$, sont $(-a, -b, -c)$. Soit donc C la trajectoire de O , par rapport à $Oxyz$: prenons la courbe symétrique de C par rapport

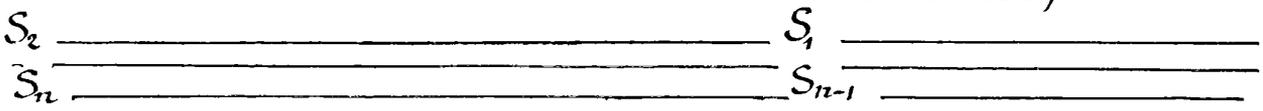


à O , affectons les axes de l'indice 1, nous obtenons ainsi la courbe C_1 trajectoire de O par rapport à $O_1x_1y_1z_1$.

Exemple. - Par rapport à des axes $Txyz$ ayant comme origine le centre de la terre et dont les directions sont \mathcal{O} fixes relativement aux étoiles, ⁽¹⁾ le centre apparent S du soleil décrit une ellipse E , ayant T comme foyer et en vérifiant la loi des aires par rapport au point T . Soit $Sx_1y_1z_1$ des axes parallèles aux premiers et ayant S pour origine: par rapport au trièdre $Sx_1y_1z_1$, le centre de la terre décrit une ellipse égale à E , de foyer S , et vérifie la loi des aires par rapport à S .

190. - Composition d'un nombre quelconque de déplacements élémentaires simultanés d'un solide.

Soit S un solide que nous regardons comme fixe S_1 , un solide animé par rapport à S d'un mouvement instantané donné (à l'instant t)



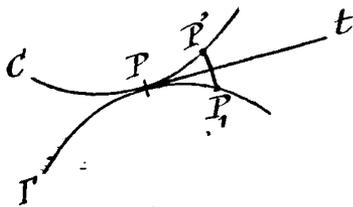
⁽¹⁾ Remarquons que le mouvement du soleil par rapport à la terre n'est défini que si on se donne la direction des axes $Txyz$. Par exemple, si le trièdre $Txyz$ était invariablement lié à l'écorce terrestre, la trajectoire de S par rapport à $Txyz$ serait, comme on sait, entièrement différente d'une ellipse. C'est pour abréger qu'on convient d'appeler mouvement du soleil par rapport à la terre le mouvement-rapporté à des axes $Txyz$ de directions fixes par rapport aux étoiles.

Composer ces mouvements instantanés donnés, c'est déterminer le mouvement instantané de S_n par rapport à S . Ce mouvement résultant doit évidemment se réduire à un mouvement hélicoïdal instantané, puisqu'il est le mouvement instantané d'un solide par rapport à un solide. La règle de composition des rotations et translations [N° 179] conduit d'ailleurs à la même conclusion, et permet de calculer très simplement le mouvement résultant.

En effet, le déplacement élémentaire de S_1 par rapport à S se décompose une certaine translation de vitesse V_1 , et une certaine rotation définie par le vecteur $\overline{A_1 B_1}$. Appliquons la même remarque aux autres déplacements élémentaires donnés; nous sommes amenés ainsi à composer un certain nombre de translations et rotations instantanées données, d'après la règle du N° 179. Toutes les remarques faites (N° 180) au sujet de cette composition s'appliquent ici.

Déplacements finis d'un solide.

191. - Rappel de quelques lemmes géométriques.



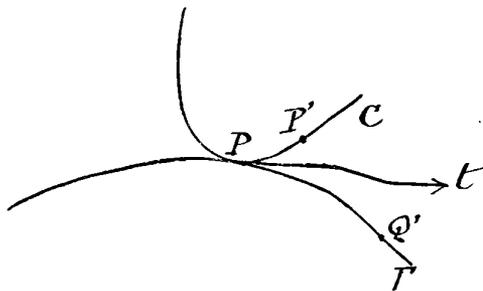
Soit C et Γ deux courbes (planes ou gauches) tangentes en P , et soit PP' et PP_1 deux arcs infiniment petits égaux et de même sens pris sur C et Γ .

La distance $P'P_1$ est infiniment petite par rapport à l'arc $PP' = PP_1$.

Inversement, supposons que C et Γ aient un point commun P , et qu'à un point arbitraire P' de C on puisse associer un point P_1 de Γ tel que $P'P_1$ soit infiniment petit par rapport à l'arc infinitésimal PP' : les deux courbes C et Γ sont tangentes en P , et les deux arcs infiniment petits PP' et PP_1 sont égaux⁽¹⁾ et de même sens.

192. - Glissement de deux courbes solides l'une sur l'autre. - Soit C et Γ deux courbes solides (planes ou gauches)

(1) C'est-à-dire qu'ils ont même partie principale.



qui restent constamment tangentes; soit P_1 l'élément de C et P_2 l'élément de Γ qui sont en contact en P à l'instant t , soit \bar{V}_1 la vitesse de P_1 , \bar{V}_2 celle de P_2 (à cet instant). La différence géométrique $\bar{V}_1 - \bar{V}_2$ est dite vitesse de glissement de C sur Γ (N° 87).

Le vecteur $\bar{V}_1 - \bar{V}_2$ est indépendant du

choix des axes. Je dis qu'il est tangent en P aux deux courbes C et Γ (ou nul).

Choisissons des axes liés invariablement à Γ ; \bar{V}_2 est alors nul. Montrons que \bar{V}_1 est tangent à C et Γ .

Soit P' l'élément de C et Q' l'élément de Γ qui à l'instant $t + dt$ seront en contact; entre les instants t et $t + dt$, le point P' de C passe de la position P' de la figure à la position Q' ; sa vitesse (à l'instant t), par suite \bar{V}_1 (vitesse de P_1), diffère donc très $\frac{\overline{P'Q'}}{dt}$. Or $\overline{P'Q'} = \overline{PQ'} - \overline{PP'}$; on a donc :

$$\bar{V}_1 = \lim \frac{\overline{P'Q'}}{dt} = \lim \frac{\overline{PQ'}}{dt} - \lim \frac{\overline{PP'}}{dt}$$

Comme les deux vecteurs qui figurent dans le dernier membre sont tangents en P à C et Γ (ou nuls), \bar{V}_1 est tangent lui-même en P à C et Γ (ou nul).

Menons en P une demi-tangente Pt aux deux courbes, appelons s et σ les arcs AP , BP de C et Γ comptés positivement dans le sens Pt à partir des points A et B fixes sur C et Γ . Appelons W la vitesse de glissement de C sur Γ comptée positivement dans le sens Pt , W_1 et W_2 les vitesses du point — de contact P_1 , P_2 sur les deux courbes, vitesses comptées positivement dans le sens des arcs croissants, [$W_1 = \frac{ds}{dt}$, $W_2 = \frac{d\sigma}{dt}$].

On a, en grandeur et signe,

$$(1) \quad W = W_2 - W_1 = \frac{ds}{dt} - \frac{d\sigma}{dt}$$

193. — Roulement sans glissement de deux courbes l'une sur l'autre.

Convenons de dire que C et Γ roulent sans glisser l'une sur l'autre si la vitesse de glissement de C sur Γ est constamment nulle: Dans ce cas, l'égalité montre que la différence $s - \sigma$ est une constante: autrement dit, les arcs parcourus par le point de contact sur les deux courbes entre deux instants quelconques t_0 et t sont égaux et de même sens.

Inversement, si cette dernière condition est remplie, W est nul, constamment d'après (1).

Il est donc indifférent de définir le roulement sans glissement de deux courbes solides l'une sur l'autre, par l'une ou l'autre des deux conditions suivantes :

Les deux courbes sont constamment tangentes et les arcs parcourus sur les deux courbes par le point de contact entre deux instants quelconques sont égaux et de même sens.

Ou bien :

Les deux courbes sont constamment tangentes et leur vitesse de glissement est constamment nulle.

On peut même donner à cette dernière définition une forme plus générale à l'aide du théorème suivant :

Théorème - Si deux courbes C et Γ de forme invariable ont constamment un point commun⁽¹⁾, et si quel que soit t la vitesse relative des points P_1, P_2 de C et de Γ qui coïncident à l'instant t est nulle à cet instant, les deux courbes sont constamment tangentes et roulent sans glisser l'une sur l'autre, à moins toutefois que P ne soit fixe sur les deux courbes, auq. cas elles se meuvent comme si elles étaient articulées autour de P .

En effet, choisissons des axes liés invariablement à Γ ; par hypothèse, la vitesse \vec{v}_1 du point P_1 de C qui est en P à l'instant t est alors nulle, et le déplacement infinitésimal de C entre les instants t et $t+dt$ est une rotation ω autour d'une certaine droite $P\Pi$; soit P' et Q' les points de C et Γ qui coïncident à l'instant $t+dt$; la rotation précédente amène P' de la position de la figure à la position Q' entre les instants t et $t+dt$; la distance $P'Q'$ est donc inférieure à $PP' \times \omega dt$, c'est-à-dire infinitésimale par rapport à PP' , et par suite

(lemme 1) les deux courbes sont tangentes; d'autre part, d'après l'hypothèse, leur vitesse de glissement l'une sur

(1) C'est-à-dire si les deux courbes solides s'appuient constamment l'une sur l'autre dans l'espace.

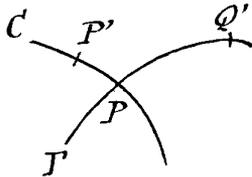
l'autre est constamment nulle. C. q. f. d.

Le raisonnement montre directement que $IP' = PQ'$, mais il suppose que leur valeur commune n'est pas nulle. S'il en est autrement, quel que soit t , c'est que les vitesses de P sur C et sur Γ sont constamment nulles; P est alors fixe sur C et sur Γ . Il ne peut être fixe sur une des courbes sans l'être sur l'autre.

194. - Mouvement d'une surface solide sur une surface fixe. - Soit S une surface solide qui reste constamment tangente à une surface fixe Σ . La vitesse de glissement de S sur Σ (N° 87), c'est-à-dire ici la vitesse \vec{v} de l'élément P de S en contact avec Σ est tangente à Σ ou nulle.

Glissement, roulement et pivotement. - Le déplacement infinitésimal de S se décompose: 1° en une translation parallèle au plan tangent commun en P à S et Σ ; 2° en une rotation PW autour de P (rotation qui peut être quelconque)⁽¹⁾. Si PW est nul à l'instant t , le mouvement instantané est un glissement simple; si la vitesse de glissement est nulle, le mouvement est un pivotement simple quand PW est normal à S et Σ , et un roulement simple quand PW est tangent à S et Σ . Dans le cas général, soit PW_1 et PW_2 les composantes de PW normale et tangente à S et Σ : tout déplacement élémentaire de S est décomposable: 1° en un glissement simple; 2° en un pivotement PW_1 ; en un roulement PW_2 .

Cas particuliers. - Si la surface Σ se réduit à une courbe ou à un point, rien n'est changé aux résultats précédents: non plus que si Σ étant une surface, S se réduit à une courbe ou à un point. Si S et Σ se réduisent à deux courbes (p. 88) la vitesse \vec{v} de P est dans le plan tangent en P aux deux courbes C et Γ .



(1) La vitesse de glissement [parallèle à un plan connu] dépend de deux paramètres; la rotation PW dépend de 3 paramètres. Le déplacement infinitésimal dépend de cinq paramètres, comme il était évident d'avance, puisque la liaison se traduit par une relation entre les six paramètres qui déterminent la position de S .

195. - Roulement et pivotement sans glissement d'une surface solide sur une surface fixe.

Quand une surface solide S reste constamment tangente à une surface fixe Σ et quand, de plus, à chaque instant, la vitesse de l'élément P de S en contact avec Σ est nulle, on dit que S roule et pivote sans glisser sur Σ . Le mouvement infinitésimal de S se réduit alors à une rotation autour du point de contact P de S et Σ .

Considérons le lieu C des points de contact sur la surface S , et le lieu Γ des points de contact sur la surface Σ . La courbe C est une courbe invariable (liée à S) qui, à chaque instant, a un élément P sur la courbe fixe Γ . De plus, la vitesse V de P est constamment nulle. D'après un théorème du N° 109 (p. 201), les deux courbes C et Γ sont constamment tangentes ⁽¹⁾ et C roule sans glisser sur Γ , à moins que le point P ne soit fixe et sur C et sur Γ , c'est-à-dire sur S et Σ . Dans ce dernier cas, le solide S tourne autour d'un point fixe dans le corps et dans l'espace. Les arcs parcourus par le point de contact sur S et sur Σ sont égaux, dans tous les cas, en valeur absolue.

Quand S roule et pivote sans glisser sur plusieurs surfaces fixes (ou sur la même surface qu'il touche en plusieurs points ⁽²⁾), les points P, P_1, \dots de S qui sont en contact, à l'instant t , avec la ou les surfaces fixes, ont tous une vitesse nulle; ce qui exige que le déplacement instantané du solide se réduise à une rotation dont l'axe contient tous les points de contact P, P_1, \dots . En particulier, si S a constamment une ligne de contact ⁽³⁾ avec la surface fixe Σ , cette ligne est nécessairement une droite, axe instantané de rotation de S à l'instant t : considérons un quelconque des points de contact, soit P , qui varie avec t d'une manière continue (et notamment peut rester fixe); ce point décrit une courbe Γ sur Σ , une courbe C sur S , et C roule sans glisser sur Γ ; si le

(1) Quand S glisse sur Σ , C s'appuie constamment sur Γ sans lui être tangente en général, et si elle lui est constamment tangente, les arcs parcourus par le point de contact sur les deux courbes ne sont pas égaux.

(2) Si glissement étant nul pour chaque point de contact.

(3) _____ id _____

point P est fixe sur une des surfaces S ou Σ , il est fixe sur l'autre.

196. - Glissement de deux surfaces (solides) mobiles l'une sur l'autre. - Si les deux surfaces solides S et Σ , constamment tangentes, sont toutes deux mobiles, la vitesse de glissement de S sur Σ (à l'instant t) est (N.º 87) la vitesse relative $\vec{V}_1 - \vec{V}_2$ de P_1 par rapport à P_2 [P_1 et P_2 désignant les éléments de S et Σ en contact en P à l'instant t]; cette vitesse, qui n'est autre que la vitesse de P dans le mouvement de S par rapport à Σ , est tangente en P à S et Σ .

Le mouvement infinitésimal des deux surfaces par rapport aux axes $Oxyz$ est un glissement simple, - ou un roulement simple, - ou un pivotement simple si le mouvement [infinitésimal] relatif d'une des surfaces l'une par rapport à l'autre est un glissement - ou un roulement, - ou un pivotement simple.

Les deux surfaces roulent et pivotent sans glisser l'une sur l'autre si la vitesse de glissement est constamment nulle: les arcs parcourus par le point de contact sur les deux surfaces sont alors constamment égaux.

197. - Mouvement continu d'un solide parallèlement à un plan fixe.

Quand un solide S se meut parallèlement à un plan fixe, ses vitesses sont toujours parallèles à ce plan: à un instant quelconque [N.º 187], son mouvement instantané est donc soit une translation autour d'un axe perpendiculaire au plan fixe Π .

Écartons le cas où le mouvement continu serait un mouvement de translation: le mouvement instantané du solide, à un instant t non exceptionnel, est une rotation autour d'un certain axe IW perpendiculaire au plan Π . Il suffit d'étudier le mouvement dans le plan Π d'une figure, soit \mathcal{D} , invariablement liée au solide S : le pied I' dans le plan Π de l'axe instantané IW est dit centre instantané de rotation de la figure \mathcal{D} .

Soit Γ la courbe que décrit le point I par rapport aux axes fixes xoy (base). Soit d'autre part M le point du disque solide \mathcal{D} qui coïncide avec I à l'instant t ; quand t varie, M décrit dans \mathcal{D} une certaine courbe C . Cette courbe C

(invariablement liée à Π) est dite roulette.

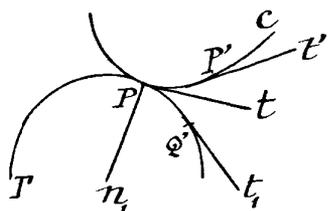
Je dis que, pendant le mouvement de Π , C roule sans glisser sur Γ .

En effet, à chaque instant t , la courbe fixe Γ et la courbe mobile C ont un point commun I , et la vitesse du point M de C qui est en I est nulle (à l'instant t). Les deux courbes sont donc tangentes et roulent sans glisser l'une sur l'autre (p. 201).

Le mouvement le plus général d'une figure plane invariable Π dans son plan peut donc se représenter par le roulement sans glissement d'une courbe invariable liée à Π sur une courbe fixe⁽¹⁾.

Si P est un point quelconque de Π ; la normale en P à sa trajectoire (à l'instant t) est la droite IP . Quand on connaît les trajectoires de deux éléments P et P' , et la position de ces deux éléments à l'instant t , le centre instantané de rotation (à l'instant t) est l'intersection des normales à ces deux trajectoires menées en P et P' . Le point I est ainsi déterminé, à moins que les deux normales ne se confondent.

Réciproquement, si une courbe plane C solide roule sans glisser dans son plan sur une courbe fixe, le centre instantané de rotation de la figure C à chaque instant t est le point de contact de C et de Γ .



Formule de Chasles. - Soit Pt la tangente en P à Γ et C , menée dans le sens du déplacement de P sur Γ , et soit $V = \frac{PQ'}{dt} = \frac{PP'}{dt}$ la vitesse de ce déplacement, (P et Q' désignant toujours les points de C et Γ qui seront en contact à l'instant $t+dt$). La rotation ωdt de C autour de P amène la tangente $P't'$ en $Q't'$; on a donc :

(1) Il n'y a d'exception que si Π est animé d'un mouvement de translation. - Si, pour des valeurs exceptionnelles de t , le mouvement instantané de Π est une translation, la position correspondante de I est rejetée à l'infini dans une direction normale à la vitesse de translation; la base et la roulette ont alors des branches infinies.

$$\begin{aligned}\omega dt &= (\widehat{P't', Q't'}) = (\widehat{P't', Pt}) + (\widehat{Pt, Q't'}) \\ &= \frac{PP'}{\rho} + \frac{QQ'}{\rho'} = PP' \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right),\end{aligned}$$

ρ et ρ' désignant les rayons de courbure de C et Γ pris avec le signe + dans le cas de la figure.

D'où l'égalité :

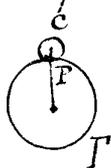
$$(1) \quad \omega = V \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right),$$

cette égalité est vraie dans tous les cas de figure si on prend comme sens positif des rotations dans le plan le sens tPn , (Pn , normale à Γ menée vers le centre de courbure) et si ρ est pris avec le signe + ou - suivant qu'il est de sens contraire à ρ' ou de même sens.

Mouvement inverse. - Soit O, x, y , des axes liés invariablement à la courbe mobile : étudions le mouvement des axes Oxy par rapport aux axes O, x, y . A chaque instant t , le point I est le même que dans le premier mouvement, mais la rotation instantanée est $-\omega$. Le nouveau mouvement est représenté par le roulement sans glissement de Γ sur C .

Cas où I est fixe dans le corps ou l'espace. - Dans tous les cas, les arcs parcourus par I soit par rapport \mathcal{C} aux axes Oxy soit par rapport aux axes O, x, y , sont égaux. Si donc I est fixe dans un des solides Oxy ou O, x, y , il est fixe dans l'autre, et le mouvement se réduit à une rotation \mathcal{C} autour d'un axe (perpendiculaire au plan) fixe dans le corps et dans l'espace.

Remarque. - Quand une des courbes C ou Γ tend à se réduire à un point, il ne faut pas conclure de la proposition précédente ou il en est de même de l'autre.



Considérons par exemple un cercle fixe de rayon ρ et un cercle mobile de rayon ρ' , qui roule extérieurement sans glisser sur Γ et dont la vitesse de rotation autour de son centre est constamment égale à 1; on a :

$$(2) \quad 1 = V \left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} \right).$$

Si, laissant ρ invariable, on fait tendre ρ vers zéro, la roulette tend à se réduire à un point, I est à peu près immobile dans le solide mobile, mais la base reste un cercle invariable. Seulement l'égalité⁽²⁾ montre que V tend vers zéro avec ρ ; le chemin parcouru sur Γ (entre deux instants donnés t_0, t_1) par le point de contact tend vers zéro avec ρ .

Cylindre base et cylindre roulette. - Considérons le cylindre fixe dont la section droite est la courbe base Γ , et le cylindre mobile [lié invariablement au solide S] dont la section droite est la courbe roulette C . Le second roule sans pivoter ni glisser sur le premier, en lui restant constamment tangent le long d'une génératrice qui est l'axe instantané de rotation de S .

Mouvement continu d'un solide autour d'un point fixe O .

198. - A chaque instant, l'axe instantané de rotation occupe une position bien déterminée OI dans l'espace et dans le corps. Le lieu de ces positions dans le corps forme un cône K invariablement lié au solide et appelé cône roulette; le lieu des droites OI dans l'espace forme le cône base R . Les deux cônes ont, à chaque instant, une génératrice commune OI ; je dis qu'ils sont tangents le long de OI et que K roule, sans glisser ni pivoter sur R .

En effet, traçons la sphère de centre O et de rayon 1 , et soit Γ et C' l'intersection de cette sphère avec le cône R et avec le cône K dans une de ses positions. A chaque instant t , la courbe mobile C et la courbe fixe Γ ont un point commun I , et la vitesse de l'élément P_t de C qui est en I est nulle. Les deux courbes sont donc tangentes et roulent sans glisser l'une sur l'autre. Les deux cônes sont, par suite, tangents le long de OI , et comme le mouvement instantané du cône roulette K est une rotation autour de OI , ce cône K roule sans glisser ni pivoter sur le cône R auquel il est constamment tangent le long d'une génératrice.

Mouvement inverse. - Soit $Oxyz$ les axes fixes, O, x, y, z , des axes liés invariablement au solide mobile: étudions le mouvement inverse du premier, c'est-à-dire le mouvement du trièdre $Oxyz$ par rapport au trièdre O, x, y, z . On voit (comme au N° 197) que ce mouvement peut être représenté par le roulement [sans pivotement ni glissement] du cône Σ (devenu roulette) sur le cône S devenu base: la génératrice de contact étant (à chaque instant) la même sur les deux cônes que dans le premier mouvement, et la vitesse de rotation instantanée ayant seulement changé de sens.

Cas où l'axe instantané est fixe dans le corps ou dans l'espace. - Soit I l'intersection de l'axe instantané et de la sphère de rayon 1; le point I décrit dans le corps et dans l'espace des chemins égaux. S'il est fixe par rapport à un des trièdres $Oxyz$ ou O, x, y, z , il est fixe par rapport à l'autre, et le mouvement est une rotation autour d'un axe fixe dans le corps et l'espace.

199. - Mouvement général d'un corps solide.

Soit $Oxyz$ les axes fixes, O, x, y, z , des axes liés invariablement au solide. A chaque instant, l'axe du mouvement hélicoïdal instantané du solide est ⁽¹⁾ une droite déterminée Π ; quand t varie, Π décrit dans l'espace $Oxyz$ une certaine surface Σ , et dans le corps une certaine surface S .

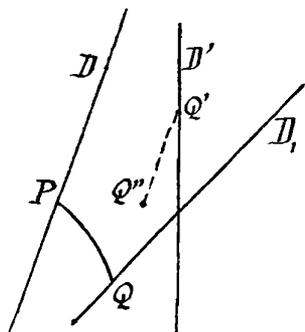
Je dis que la surface réglée S (liée invariablement au solide $Oxyz$) est constamment tangente à la surface réglée fixe Σ tout le long d'une génératrice.

En effet, à l'instant t , les deux surfaces ont en commun la génératrice Π . Traçons sur Σ une courbe PQ normale en P à Π et prenons sur cette courbe un point Q infiniment voisin de P : le plan $QP\Pi$ diffère très peu du plan tangent en P à Σ .

Soit Π' la génératrice de Σ qui passe par Q , et soit Π'' la génératrice de S qui, à instant voisin de t , est en Q , Q' le point de Π'' qui est alors en Q . Le plan $P\Pi''Q'$ diffère très peu du plan tangent en P à S . Si l'angle des deux plans $QP\Pi$, $P\Pi''Q'$ est infiniment petit, les deux surfaces sont tangentes en P .

(1) Il n'y a d'exception que si ce mouvement instantané est une translation. Quand il est ainsi quel que soit t , le mouvement fini est une translation.

Or la génératrice \mathbb{D}' de S passe de sa position actuelle à la position \mathbb{D} , par une translation parallèle à \mathbb{D} et une rotation $d\theta$ autour de $P\mathbb{D}$; dans la translation, Q' décrit un petit segment $Q'Q''$ parallèle à $P\mathbb{D}$; dans la rotation, il passe de Q'' en Q , et l'angle $Q'PQ$ est égal à la fois à $d\theta$ et à $d\theta \cos \alpha$ des deux plans $Q'P\mathbb{D}$ et $Q'P\mathbb{D}$ (aux infiniment petits près d'ordre supérieur. Ce dernier angle est donc infiniment petit. C. q. f. d.



La surface S est donc à chaque instant tangente à la surface fixe Σ tout le long d'une génératrice, elle roule et glisse sans pivoter sur Σ , l'axe du roulement instantané étant à chaque instant la génératrice de contact, et le glissement instantané ayant la direction de cette génératrice.

Celle est la représentation du mouvement le plus général d'un solide.

200. - Mouvement inverse. - Soit $Oxyz$ les axes fixes, O, x, y, z , des axes liés invariablement au solide. Étudions le mouvement du trièdre $OXYZ$ par rapport au trièdre O, x, y, z , [mouvement inverse du précédent]. On voit, comme au N^o 197, que ce mouvement peut être représenté par le glissement et roulement de la surface Σ sur la surface S : à chaque instant t , la génératrice de contact occupe sur S et Σ la même position que dans le premier mouvement, et les vitesses de translation et rotation instantanées sont seulement changées de sens.

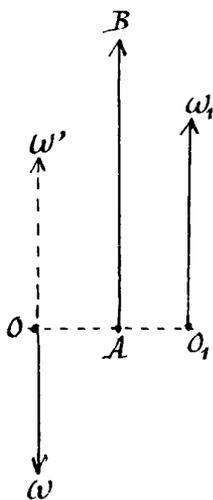
201. - Remarque. - Si une des surfaces S et Σ se réduit à une droite, il en est de même de l'autre. Autrement dit, si l'axe du mouvement hélicoïdal instantané est fixe rapport à un des deux trièdres $Oxyz$ et O, x, y, z , il est fixe par rapport à l'autre, et le solide ne peut que glisser le long d'une droite fixe dans le corps et dans l'espace, en tournant autour de cette droite.

En effet, il suffit [en vertu du rôle réciproque des surfaces S et Σ] d'envisager le cas où S se réduit à une droite \mathbb{D} ; à chaque instant, tous les points de \mathbb{D} [droite déterminée du solide] ont même vitesse en grandeur direction et sens,

à savoir la vitesse de glissement [dirigée selon \mathbb{D}]; la droite \mathbb{D} est donc animée d'un mouvement de translation; elle se meut parallèlement à elle-même. Soit Π un plan fixe perpendiculaire à \mathbb{D} ; la projection Q sur ce plan Π d'un point P de \mathbb{D} invariablement lié au solide a une vitesse constamment nulle; le point Q est donc fixe, d'où il suit que \mathbb{D} ne peut que glisser le long de la droite fixe $Q\Delta$ perpendiculaire à Π . D'autre part, le solide ne peut que tourner autour de \mathbb{D} . La proposition est donc démontrée.

Application à la théorie des engrenages.

202. — Engrenages cylindriques. — Considérons deux solides S et S_1 qui tournent respectivement avec des vitesses angulaires constantes autour de deux droites parallèles OZ et O_1Z_1 . Quel est le mouvement relatif de S_1 par rapport à S ?



Soit $\overline{O\omega}$ et $\overline{O_1\omega_1}$ les deux rotations instantanées; le mouvement instantané des axes fixes par rapport à S est la rotation $-\overline{O\omega} = \overline{O\omega'}$. Pour obtenir le mouvement instantané de S_1 par rapport à S , il suffit donc de composer les deux rotations instantanées $\overline{O_1\omega_1}$ et $-\overline{O\omega}$.

Ces deux rotations équivalent à une rotation unique définie par la résultante géométrique AB des vecteurs $\overline{O_1\omega_1}$ et $\overline{O\omega}$, à moins que les deux vecteurs ne forment un couple, c'est-à-dire à moins que $\overline{O\omega}$ et $\overline{O_1\omega_1}$ ne soient égaux et de même sens. Examinons ce

cas, où le mouvement relatif de S_1 par rapport à S serait une translation.

Le point A occupe sur OO_1 une position bien déterminée par les rotations ω et ω_1 ; ⁽¹⁾ AB est parallèle aux deux vecteurs $\overline{O_1\omega_1}$ et $\overline{O\omega}$ et a, dans tous les cas, le sens du plus grand.

⁽¹⁾ Si $\overline{O\omega}$ et $\overline{O_1\omega_1}$ sont de sens contraires, (cas de la figure), le point A est entre O et O_1 , à une distance de A et de B telle que $AO \times \omega = AO_1 \times \omega_1$. Si $\overline{O\omega}$ et $\overline{O_1\omega_1}$ sont de même sens, le point A est sur la droite OO_1 , en dehors du segment OO_1 .

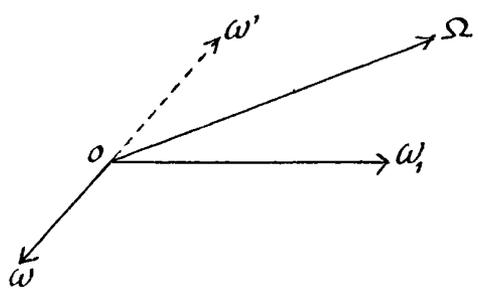
Dans le solide S , la droite AB (invariable par rapport aux axes fixes) décrit un cylindre de révolution Σ autour de OW ; elle décrit de même dans le solide S_1 un cylindre de révolution Σ_1 autour de O_1W_1 .

Le mouvement de S_1 par rapport à S est donc défini par le roulement sans glissement ni pivotement du cylindre Σ_1 sur le cylindre Σ .

Inversement, supposons réalisés deux cylindres de révolution Σ et Σ_1 dont les axes sont OW et O_1W_1 et dont les rayons sont OA et O_1A_1 . Les deux cylindres mobiles autour de leurs axes fixes le long duquel des épaulements les empêchent de glisser, sont constamment tangents. Supposons que la rugosité des deux cylindres soit suffisante pour les empêcher de glisser l'un sur l'autre : Quand on fera tourner Σ d'un mouvement uniforme autour de OW avec la vitesse ω , Σ_1 tournera autour de O_1W_1 avec la vitesse ω_1 .

Pour éviter tout glissement, on munit les cylindres de cannelures ou de dents. C'est le principe des engrenages cylindriques.

203. Engrenages coniques. - Considérons deux solides S et S_1 qui tournent uniformément autour de deux axes fixes concourants. Quel est le mouvement relatif de S_1 par rapport à S ?



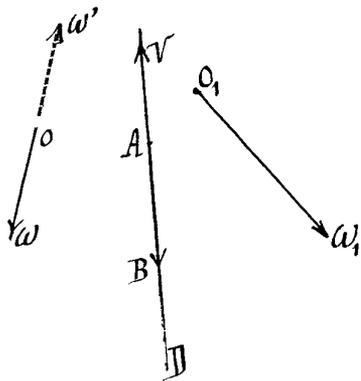
Soit \overrightarrow{OW} et $\overrightarrow{O_1W_1}$ les deux vecteurs qui définissent la rotation instantanée de S et celle de S_1 . Le mouvement instantané de S_1 par rapport à S s'obtient en combinant les deux rotations \overrightarrow{OW} et $-\overrightarrow{OW} = \overrightarrow{OW'}$; c'est donc une rotation instantanée $O\Omega$ définie par la résultante des deux vecteurs $\overrightarrow{OW'}$ et \overrightarrow{OW} . La droite $O\Omega$ décrit dans chacun des solides S et S_1 un cône de révolution Γ et Γ_1 autour de OW et de O_1W_1 respectivement. Ces deux cônes liés invariablement à S et à S_1 restent constamment tangents le long d'une génératrice et roulent sans glisser ni pivoter l'un sur l'autre. C'est le principe des engrenages coniques.

204. - Transformation d'une rotation uniforme en une rotation uniforme autour d'un axe quelconque.

Considérons deux solides S et S_1 qui tournent

uniformément autour de deux axes fixes quelconques. Quel est le mouvement relatif de S_1 par rapport à S ?

Soient OW et O_1W_1 les deux vecteurs qui définissent la rotation instantanée de S et celle de S_1 . Le mouvement instantané de S_1 par rapport à S s'obtient en combinant les deux rotations instantanées O_1W_1 et $-OW = OW'$. Soit Π l'axe⁽¹⁾ du mouvement hélicoïdal instantané défini par ces



deux rotations; cette droite est invariable par rapport aux axes fixes; elle décrit dans chaque solide S et S_1 dans un hyperboloïde de révolution Σ et Σ_1 d'axe OW et O_1W_1 . Ces deux hyperboloïdes sont constamment tangents le long d'une génératrice et roulent sans pivoter l'un sur l'autre; le glissement instantané de Σ_1 par rapport à Σ est parallèle à la génératrice de contact et le roulement

instantané est une rotation autour de cette génératrice.

Supposons réalisées les deux hyperboloïdes Σ et Σ_1 , de façon qu'ils soient mobiles autour de leurs axes et maintenus fixes OW et O_1W_1 , des épaulements convenables les empêchant de glisser le long de ces axes. S'ils sont parfaitement lisses, leurs rotations sur eux-mêmes seront indépendantes. Mais imaginons qu'on les empêche de glisser l'un sur l'autre dans un sens autre que celui de la génératrice de contact, à l'aide de stries disposées suivant ces génératrices. Si on imprime à Σ une rotation uniforme⁽²⁾ de vitesse angulaire ω , le mouvement commandera la rotation de Σ_1 , et, d'après ce qui précède, cette rotation sera une rotation uniforme de vitesse angulaire ω_1 autour O_1W_1 . C'est le principe des engrenages hyperboloidiques, mais ces engrenages ne sont pas usités dans la pratique.

(1) Cet axe est déterminé sans ambiguïté sauf dans le cas où O_1W_1 et OW sont équipollents.

(2) Si la vitesse angulaire de S (comptée positivement autour de la demi-droite OW) est $\lambda\omega$ (λ constante quelconque positive ou négative), la vitesse angulaire de S_1 est $\lambda\omega_1$ autour de la demi-droite O_1W_1 .

Chapitre III.

Statique et Dynamique du corps solide.

205. - Travail des forces appliquées à un solide.

Soit S un solide matériel, P un quelconque de ses éléments, \vec{F} une force appliquée à P . Proposons-nous de calculer le travail de toutes ces forces \vec{F} dans un déplacement élémentaire de S .

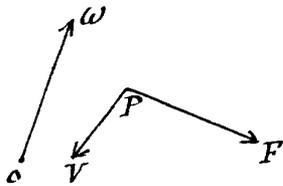
Je m'appuierai sur le lemme suivant:

Lemme. - Si P , à l'instant t , est animé d'une rotation définie par le vecteur $\vec{\omega}$, le travail élémentaire d'une force \vec{F} appliquée à P est égal à $\omega \times OH \times \cos(\vec{\omega}, \vec{OH}) dt$, \vec{OH} désignant le moment de \vec{F} par rapport à O ; si on veut encore, ce travail est $\omega \times h \times dt$, si h est le moment de \vec{F} par rapport à la demi-droite OH .

En effet, le travail élémentaire de \vec{F} est, si \vec{v} représente la vitesse de P :

$$(1) \quad v F \cos(\vec{F}, \vec{v}) dt.$$

Or $\vec{v} = (\vec{\omega}, P)$, et l'expression (1) par suite est (au facteur dt près), en grandeur et signe, le moment réciproque des deux vecteurs $\vec{\omega}$, \vec{PV} . Ce moment a aussi pour expression $\omega \times OH \cos(\vec{\omega}, \vec{OH})$, si \vec{OH} est le moment (PF, O) . c q. f. d.



206. - Ce lemme établi, soit (à l'instant t) $\vec{\Phi}$ la somme géométrique des forces \vec{F} considérées, appliquées aux éléments P du solide, et \vec{OK} leur moment résultant par rapport à un point O .

Si, à l'instant t , S est animé d'une rotation instantanée dont l'axe passe par O , soit $\vec{\omega}$, le travail élémentaire des forces \vec{F} est:

$$dt \sum \omega \times h = \omega dt \sum h = \omega \times k \times dt,$$

si k désigne le moment résultant des forces F par rapport à la demi-droite $O\omega$.

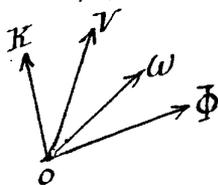
Sous une autre forme, soit \overline{OK} le moment résultant des forces F par rapport à O ; le travail élémentaire de ces forces est

$$\omega \times OK \times \cos(\overline{O\omega}, \overline{OK}) \times dt.$$

— D'autre part, si S est animé à l'instant t d'une translation instantanée de vitesse \vec{V} , le travail élémentaire des forces F est

$$dt \times \Phi \times V \times \cos(\overline{\Phi}, \overline{V}) = dt \times V \times \text{proj. de } \overline{\Phi} \text{ sur } \overline{V}.$$

— Supposons maintenant que S soit animé d'un mouvement quelconque; son mouvement instantané (à l'instant t) est décomposable en une rotation instantanée $\overline{O\omega}$ autour d'un de ses points O , et une translation instantanée dont la vitesse \vec{V} est la vitesse de O . Soit Φ la somme géométrique des forces F , et \overline{OK} leur moment résultant par rapport à O . Le travail élémentaire des forces F est, d'après ce qui précède:



$$(2) \quad dt \left\{ V \times \Phi \times \cos(\overline{OV}, \overline{O\Phi}) + \omega \times OK \times \cos(\overline{O\omega}, \overline{OK}) \right\}$$

Si on veut encore, soit S et S' deux positions infiniment voisines de S , $\overline{OO'}$ le déplacement infinitésimal du point O du solide, et $d\theta$ l'angle dont tourne le solide autour de $O\omega$ quand il passe de S en S' . Si f est la somme des projections des forces F sur la demi-droite OO' , et k leur moment résultant par rapport à la demi-droite $O\omega$, le travail élémentaire des forces F est:

$$OO' \times f + d\theta \times k = OO' \times \Phi \times \cos(\overline{OO'}, \overline{\Phi}) + d\theta \times OK \times \cos(\overline{O\omega}, \overline{OK})$$

Analytiquement, soit V_x, V_y, V_z les composantes de \vec{V} et p, q, r les composantes de $\overline{O\omega}$ suivant les trois axes fixes, le travail des forces F est, comme le montre aussitôt l'expression (2):

$$(3) \quad \left\{ (\Xi V_x + H V_y + \zeta V_z) + (Lp + Mq + Nr) \right\} dt,$$

Ξ, H, ζ désignant les composantes de Φ , et L, M, N celles de $\overline{O\omega}$.

On voit que le travail élémentaire des forces F est bien

déterminé si on connaît leur somme géométrique $\bar{\Phi}$ et leur moment résultant \overline{OK} par rapport à un point O .
 Pour calculer leur travail fini, il suffit donc de connaître $\bar{\Phi}$ et \overline{OK} à chaque instant.

Si les forces \bar{F} forment un système de vecteurs équivalents à un système nul, leur travail est nul. Cette condition est vérifiée notamment par l'ensemble des forces intérieures⁽¹⁾

207. - Conditions d'équilibre d'un solide. -

En tête de la statique des solides invariables, nous inscrivons ce postulat, analogue à celui que nous avons admis dans la statique du point matériel (N° 106).

Principe. - Soit S un système matériel formé de solides invariables et S_0 une position telle que S étant placé sans vitesses en S_0 à un instant t , la force totale qui s'exerce sur chaque élément de S à l'instant t soit nulle, (cela quel que soit l'instant considéré). - S_0 est position d'équilibre de S .

Il est évident, d'ailleurs, que réciproquement toute position d'équilibre de S est une position telle que S_0 .

Ce postulat admis, démontrons ce théorème:

Théorème. - Pour qu'un solide S reste en équilibre en S_0 , il faut et il suffit que les forces extérieures qui s'exercent à l'instant t sur S placé à cet instant sans vitesses en S_0 soient géométriquement équivalentes à un système de vecteurs nuls, (cela quel que soit l'instant t considéré,⁽²⁾

Nous savons que ces conditions sont nécessaires pour un système quelconque (N° 36); montrons qu'elles sont suffisantes si le système est un solide.

Il suffit (d'après le postulat ci-dessus) de montrer que la force totale \bar{F} qui s'exerce à l'instant t sur chaque élément P

(1) On peut développer toute la Statique et la Dynamique des solides sans admettre que les forces intérieures d'un solide satisfont au principe de l'action et de la réaction, mais en supposant seulement qu'elles équivalent à un système de vecteurs nuls.

(2) Quand les forces extérieures sont les mêmes quel que soit t , il suffit que la condition soit remplie pour $t = t_0$.

du système est nulle. Admettons qu'il en soit autrement, et montrons que l'hypothèse est absurde.

Soit P_1 un élément de S (de masse m_1) pour lequel la force totale, soit \vec{F}_1 , appliquée à P_1 à l'instant t , n'est pas nulle; entre les instants t et $t + dt$, P_1 subit un déplacement $P_1 P_1' = ds_1$, dans le sens de \vec{F}_1 , égale en valeur absolue à $\frac{F_1 dt^2}{2m_1}$.

Preons comme infiniment petit principal ds_1 ; le travail élémentaire, soit \mathcal{E} des forces \vec{F} est $\sum F ds$, somme de termes tous positifs ou nuls, et dont un au moins $F_1 ds_1$, n'est pas nul; le travail \mathcal{E} est donc une quantité positive du 1^{er} ordre.

D'autre part, le déplacement élémentaire de S se décompose, en une translation où P_1 passe en P_1' , et une rotation $d\theta$ autour d'une certaine demi-droite $P_1\omega$. Le travail \mathcal{E} est égal (N^o 206) à :

$$h \cdot P_1 P_1' + k d\theta,$$

h désignant la somme des projections sur $P_1 P_1'$ des forces extérieures, et k leur moment résultant par rapport à $P_1\omega$. Mais, d'après l'hypothèse, h et k , par suite \mathcal{E} , sont nuls. Il y a donc contradiction.

C. q. f. d.

Il suit de là qu'il est loisible dans la Statique du solide, de remplacer plusieurs des forces extérieures (ou toutes ces forces) par d'autres forces géométriquement équivalentes, appliquées aux mêmes éléments ou à d'autres éléments du solide.

208. — Equilibre d'un solide mobile autour d'un axe fixe. — Soit S un solide mobile autour d'un axe fixe OZ . Nous supposons la liaison réalisée de façon que toutes les réactions de l'axe fixe sur S rencontrent l'axe (page 93). Les forces extérieures autres que ces réactions qui s'exercent sur S sont supposées données, c'est-à-dire connues à un instant t quand on connaît à cet instant la position de S et ses vitesses.

Lémmème. — Pour que S_0 soit position d'équilibre de S , il suffit et il suffit que les forces extérieures données qui s'exercent à l'instant t sur S placé (à cet instant) sans vitesse en S_0 , aient un moment résultant nul par rapport à OZ , (cela quel que soit l'instant t considéré).⁽¹⁾

(1) Voir la note précédente.

Cout d'abord la condition est nécessaire, car le moment résultant par rapport à OZ de toutes les forces extérieures doit être nul (N° 207) et les réactions de l'axe ne donnent rien dans ce moment.

La condition est suffisante; en effet, admettons que, pour un élément au moins de S , la force totale qui s'exerce sur l'élément ne soit pas nulle, et prenons comme infiniment petit principal le déplacement de cet élément entre les instants t et $t+dt$. Le raisonnement du N° précédent montre que le travail élémentaire \mathcal{E} des forces F est un infiniment petit positif du premier ordre. D'autre part, le déplacement élémentaire de S est une rotation $d\theta$ (positive ou négative) autour de l'axe OZ et le travail \mathcal{E} (qui se réduit au travail des forces extérieures) est: $N d\theta$, si N désigne le moment par rapport à OZ de toutes les forces extérieures. Mais N , où les réactions de l'axe ne donnent rien, se confond avec le moment par rapport à OZ des forces données, et par suite est nul par hypothèse; il y a donc contradiction. C. q. f. d.

209. - Équilibre d'un solide S mobile autour d'un point fixe O . - Nous supposons la liaison réalisée de façon que les réactions des appuis qui maintiennent fixe le point O de S passent toutes par O (p. 92). Toutes les forces extérieures autres que ces réactions sont supposées données.⁽¹⁾

En raisonnant exactement comme dans le problème précédent, on établit le théorème:

Pour que S_0 soit position d'équilibre de S , il faut et il suffit que les forces extérieures données qui s'exercent à l'instant t sur S placé (à cet instant) en S_0 sans vitesse, aient un moment résultant nul par rapport au point O (cela quel que soit l'instant t considéré).⁽²⁾

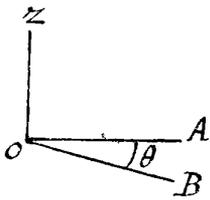
Le mode de raisonnement employé dans les trois derniers N°s est le même que celui qui nous permettra plus tard d'établir le Principe des travaux virtuels, où l'on peut faire rentrer tous les cas particuliers d'équilibre des solides.

(1) Le sens de ce mot est le même qu'au N° précédent.

(2) Voir la note 2 p. 215.

Dynamique du solide.

210. - Mouvement d'un solide autour d'un axe fixe. —



La position du solide S dépend d'un paramètre, soit l'angle \widehat{AOB} ou θ que font une demi-droite fixe OA perpendiculaire à l'axe fixe OZ , et une demi-droite OB invariablement liée à S et perpendiculaire à OZ .

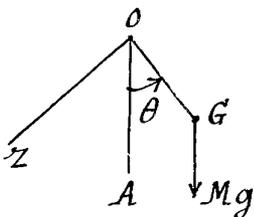
Pour déterminer le mouvement, il suffit d'une équation indépendante des réactions. Or le théorème des moments cinétiques appliqué à OZ nous fournit cette équation, puisque le moment résultant des réactions par rapport à cet axe est nul.

Soit MK^2 le moment d'inertie du solide autour de OZ , quantité invariable, si l'angle θ est compté positivement autour de la demi-droite OZ , le moment cinétique du système par rapport à OZ est (en grandeur et signe) $MK^2 \frac{d\theta}{dt}$ et on a :

$$(1) \quad MK^2 \theta'' = N,$$

N désignant le moment résultant par rapport à OZ des forces extérieures données. D'après les hypothèses faites, N est connu en fonction de t, θ, θ' . L'équation (1) est une équation différentielle du 2^e ordre qui définit θ en fonction de t , si on connaît (pour $t = t_0$) θ_0 et θ'_0 c'est-à-dire la position et les vitesses initiales de S .

211. - Pendule composé. — Supposons que OZ soit horizontal et que S soit un solide pesant mobile dans le vide. Le moment N est alors le moment par rapport à OZ d'un vecteur Mg ayant G (centre de gravité de S) comme origine. Il est possible de choisir comme



demi-droite OA la verticale descendante, et de choisir la demi-droite OB de façon qu'elle renferme G . On a alors :

$$N = -Mgl \sin \theta, \quad (l = OG)$$

et l'équation (2) s'écrit :

$$MK^2\theta'' = -Mgl \sin \theta,$$

ou encore

$$\theta'' = -\frac{g}{l_1} \sin \theta, \quad \text{avec } l_1 = \frac{K^2}{l}$$

équation du mouvement d'un pendule simple de longueur l_1 .

La droite OG se meut donc comme un pendule simple de longueur l_1 . On donne à ce pendule simple le nom de pendule synchrone du pendule composé constitué par le solide S .

Nous reviendrons plus loin sur les applications et les propriétés du pendule composé.

212. - Mouvement d'un solide autour d'un point fixe. - La position du solide S dépend de trois paramètres, par exemple les trois angles d'Euler qui définissent la position d'un trièdre lié invariablement au solide par rapport aux axes fixes. Il faut, pour calculer le mouvement, former trois équations indépendantes des réactions inconnues. Or le théorème des moments cinétiques appliqué au point fixe O nous donne trois telles équations. Nous étudierons ces équations dans le cours de l'an prochain: bornons-nous à indiquer ici que ces trois équations sont trois équations différentielles du 2^e ordre, qui définissent le mouvement du solide si on connaît sa position et ses vitesses à l'instant initial.

213. - Mouvement d'un solide libre.

Supposons que le solide S soit libre et que les forces extérieures qui lui sont appliquées soient données.⁽¹⁾

La position de S dépend de six paramètres, soit les coordonnées du centre de gravité G et les trois angles d'Euler qui définissent l'orientation de S autour de G .

Le théorème du mouvement du centre de gravité et le théorème des moments cinétiques autour de G fournissent six équations différentielles du 2^e ordre que nous étudierons l'an prochain. Ces équations définissent le mouvement de S , si on connaît sa position et ses vitesses initiales.

⁽¹⁾ Le sens de ce mot est toujours le même qu'au n^o 208.

Remarque. - Il suit de là que la somme géométrique et le moment résultant des forces extérieures interviennent seuls dans le calcul du mouvement. Dans la dynamique du solide, on peut donc faire sur les forces extérieures appliquées à un solide les mêmes opérations géométriques qu'en statique (N.º 207).

Le théorème des forces vives appliqué à un solide, doit d'après ce qui précède, être une conséquence des six équations du mouvement. Nous le vérifierons rigoureusement l'an prochain. Par suite, le travail des forces appliquées à S ne doit dépendre qu' de ur somme géométrique et de leur moment résultant. or c'est ce que nous avons vérifié (N.º 206).

214. - Mouvement d'un solide gêné. -

Quand un solide est assujéti à des liaisons, on peut toujours écrire les six équations précédentes à condition d'introduire, parmi les forces extérieures, les réactions extérieures qui sont inconnues. Mais d'autre part, par suite des liaisons, les six paramètres ne sont plus indépendants.

Considérons, par exemple, un solide pesant S glissant ^{roulant et pivotant} sans frottement sur un plan horizontal fixe xy .

La position de S ne dépend plus que de 5 paramètres indépendants, mais les seconds membres des six équations renferment une indéterminée, soit N , valeur de la réaction comptée positivement dans le sens Oz . Les six équations permettent de déterminer à la fois les cinq paramètres et N en fonction du temps, connaissant la position et les vitesses initiales de S .

215. - Sur le cas où la rotation initiale est nulle.

Le solide S étant fixé par un de ses points O , supposons que les forces extérieures données admettent toujours une résultante passant par O . Le moment cinétique de S par rapport à O est un vecteur invariable. Si la rotation initiale $\overline{O\omega}_0$ de S est nulle, $O\mathcal{K}_0$, et par suite $O\mathcal{K}$, est nul; je dis que S reste immobile⁽¹⁾. En effet, soit $\overline{O\omega}$ la rotation instantanée

(1) Il suffirait de remarquer que les conditions suffisantes d'équilibre de S sont remplies (N.º 209) mais la démonstration du texte ne suppose pas le postulat de la statique (N.º 207).

le S à l'instant t , le moment cinétique de S par rapport à (O, ω) est $MK^2\omega$, si MK^2 est le moment d'inertie de S par rapport à cette droite. Cette quantité (projection de OK sur OW), ne peut être nulle que si ω est nul. C. q. f. d.

Ne supposons plus S fixé par un point, mais admettons que les forces extérieures admettent toujours une résultante passant par son centre de gravité G : Si la rotation initiale de S est nulle, S est constamment animé d'un mouvement de translation. Il suffit en effet d'appliquer le théorème des moments cinétiques au mouvement autour de G , pour voir que l'orientation de S reste invariable.

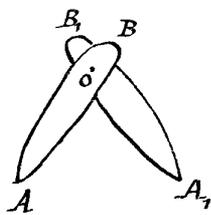
Par exemple si le solide pesant S est abandonné sans vitesse dans le vide, son centre de gravité tombe verticalement comme un point pesant libre, et S garde la même orientation par rapport à la terre.

216. - Remarque sur le théorème des aires et les systèmes déformables.

Considérons un système matériel pesant abandonné sans vitesses dans le vide. Est-il possible que le système reprenne à un autre instant sa configuration orientée différemment par rapport au sol? (Problème du chat qui retombe sur ses pattes).

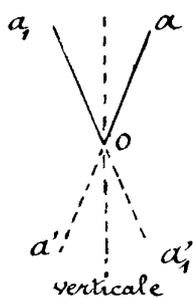
Si le système est solide, nous venons de voir que la réponse est négative. Mais il faut bien se garder d'étendre cette conclusion au cas où le système se déforme.

Considérons par exemple un compas formé de deux branches identiques A_0B_0 , A_1B_1 , articulées autour d'un axe OO_1 et légèrement décalées l'une par rapport à l'autre de façon à pouvoir tourner sans se rencontrer autour de l'axe OO_1 . Le



compas est pesant et nous l'abandonnons sans vitesses dans le vide, les pointes en l'air, dans une position a_0a_1 , où la verticale ascendante est bissectrice de l'angle a_0a_1 , formé par ces pointes.

Nous supposons que le centre de gravité G du compas est le milieu de OO_1 , et que les deux branches sont électrisées positivement de la même manière au début du mouvement, mais perdent très rapidement cette électricité.



Le segment OO_1 , étant très petit, nous confondons O, O_1 , et G . Par raison de symétrie, le mouvement a lieu dans le plan vertical qui contient initialement le compas, et la verticale reste la bissectrice de l'angle des deux pointes. Au début du mouvement les deux pointes se repoussent, l'angle aigu AOA_1 croît⁽¹⁾ et devient égal à π à un certain instant t_1 : nous admettons qu'à ce moment les deux branches sont déchargées. A partir de ce moment, les deux branches gardent leurs vitesses angulaires (égales et de sens contraires) autour de O , et à un certain instant t_2 , la branche OA est venue en OA' prolongement de OA , et la branche OA_1 en OA'_1 prolongement de OA'_1 . A cet instant t_2 , la configuration du système est la même que la configuration initiale, mais non son orientation car le compas qui avait les pointes en l'air à l'instant initial a les pointes en bas à l'instant t_2 . Le compas s'est ainsi retourné de 180° sous l'action des seules forces térieures, mais en se déformant dans l'intervalle.

Le théorème des moments cinétiques appliqué au mouvement du compas autour de son centre de gravité exprime simplement que le moment cinétique du compas par rapport à O reste nul, c'est-à-dire que les deux branches ont à chaque instants des vitesses de rotation égales et de sens contraires.

Remarquons qu'à l'instant t_2 les vitesses du système ne sont pas nulles (tandis qu'elles le sont à l'instant initial)

Nous ne développerons pas davantage, cette année, la Dynamique du solide dans le cas général. Nous allons nous limiter dans ce qui suit au cas où le solide est de révolution.

Dynamique du solide de révolution.

217. — Mouvement d'une sphère homogène.

Supposons tout d'abord que le solide S soit une sphère homogène ou formée de couches concentriques homogènes. Le centre de

(1) C'est ce que vérifierait l'application du théorème des moments cinétiques au mouvement de chaque branche AB et A_1B_1 autour de son centre de gravité O .

gravité G de la sphère est alors son centre géométrique. Soit \overline{GW} la rotation instantanée de la sphère à l'instant t dans son mouvement autour de G , le moment cinétique \overline{GR} de S à l'instant t est évidemment dirigé selon la droite \overline{GW} par raison de symétrie⁽¹⁾, et par suite se confond avec le moment cinétique de S par rapport à \overline{GW} . Ce dernier moment a le sens \overline{GW} et est égal à $I\omega$ si I désigne le moment d'inertie de S autour d'un quelconque de ses diamètres.

Ceci posé, supposons d'abord que la sphère soit fixée par son centre G et que les forces extérieures admettent une résultante passant par G . Le théorème des moments cinétiques exprime alors que \overline{GR} et par suite \overline{GW} est fixe; l'axe instantané de rotation de S est donc fixe dans l'espace, par suite fixe dans le corps (N° 198) et le mouvement se réduit à une rotation uniforme autour d'un axe fixe dans le corps et dans l'espace.

Si la sphère S est libre, pesante et lancée dans le vide, son centre G décrit une parabole comme un point pesant libre, et la sphère tourne sur elle-même d'un mouvement uniforme, autour d'un diamètre fixe dans le corps et fixe en direction dans l'espace. (Théorème des moments cinétiques autour de G).

Si la sphère pesante S glisse⁽²⁾ sans frottement sur un plan horizontal fixe xoy , les forces extérieures (pesanteur et réaction du plan) sont verticales et ont un moment nul par rapport à G . La projection de G sur xoy décrit donc une droite avec une vitesse constante; le mouvement de G est rectiligne et uniforme, et la sphère tourne uniformément sur elle-même autour d'un axe fixe dans le corps et de direction fixe dans l'espace.

Si le plan fixe parfaitement lisse xoy était incliné, les conclusions seraient analogues à cela près que G décrirait une parabole dans un plan parallèle au plan xoy , parabole dont l'axe serait une ligne de plus grande pente du plan.

(1) Si S est un corps quelconque, et si on fait tourner d'un angle quelconque autour de \overline{GW} la figure formée par S et \overline{GR} , après ce déplacement \overline{GR} est encore le moment cinétique de S correspondant à la rotation \overline{GW} . Si S est une sphère formée de couches concentriques homogènes, le déplacement n'a pas dû changer \overline{GR} , qui par suite, doit coïncider avec la direction \overline{GW} .

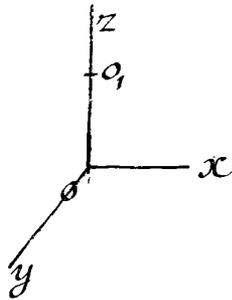
(2) En pivotant et roulant librement.

218. - Moment cinétique et force-rive d'un corps de révolution fixé par un point de son axe

Nous disons qu'un solide matériel est de révolution autour d'une droite OZ du corps, si la densité du corps est la même le long de toute circonférence (intérieure au corps) qui a son centre sur OZ et dont le plan est perpendiculaire à OZ . Quand il en est ainsi, la surface extérieure du corps est nécessairement de révolution autour de OZ , et la densité le long de chaque parallèle de cette surface est constante. En particulier un solide homogène limité par une surface de révolution rentre dans la définition précédente. Une sphère homogène est un solide matériel de révolution autour d'un quelconque de ses diamètres.

219. - Mouvement d'un solide de révolution S fixé par deux points O et O_1 de son axe.

A un instant t , la rotation instantanée de S est un segment $\overline{O\omega}$ de l'axe OO_1 . Le moment cinétique $\overline{O\mathcal{H}}$ de S par rapport à un point O est, par raison de symétrie⁽¹⁾ dirigé selon l'axe OO_1 de S , son sens est celui de $\overline{O\omega}$ et sa valeur absolue est $C\omega$, si C désigne le moment d'inertie de S par rapport à son axe.



Soit ox, oy, oz les axes fixes, ω la rotation instantanée comptée positivement autour de oz , h le z de O_1 , L, M et N les moments résultants par rapport à ox, oy et oz des forces extérieures données, X, Y et Z la somme des projections de ces forces sur ox, oy et oz ; soit enfin \bar{p} (ou p_x, p_y, p_z) et \bar{R} (ou R_x, R_y, R_z) les réactions de O_1 et de O sur S .

Le mouvement est donné par l'équation:

$$(1) \quad C \frac{d\omega}{dt} = N. \quad (\text{Théorème des moments cinétiques appliqué à } oz, \text{ n.º 211}).$$

Le théorème des moments cinétiques appliqué à ox et oy donne:

$$(2) \quad 0 = L - h p_y, \quad 0 = M + h p_x.$$

(1) Voir la note 1 page 223.

Le théorème du mouvement de centre de gravité donne (G étant ici un point fixe de OZ):

$$(3) \quad 0 = X + R_x + f_x, \quad 0 = Y + R_y + f_y, \quad 0 = Z + R_z + f_z.$$

Les équations (2) donnent f_x et f_y ; les deux premières équations (3) R_x et R_y . Mais la dernière donne seulement $R_z + f_z$. Autrement dit, les réactions \bar{R} et \bar{f} ne sont définies qu'à l'addition près de deux forces égales et directement opposées appliquées en O et O₁.

Cette indétermination provient du fait que les liaisons imposées à S sont surabondantes. En effet, supposons que l'élément O₁ de S soit assujéti à glisser sans frottement sur la droite fixe OZ, et qu'un autre élément de S soit fixé en O; la liaison résultante est que le solide S est mobile autour de l'axe fixe OO₁. Si la liaison est ainsi réalisée, f_z est nul, et R_z est connu. Si on permute, dans l'hypothèse précédente, le rôle de O et de O₁, c'est R_z qui est nul, et f_z qui est égal à $-Z$.

On voit que les réactions f_z, R_z dépendent de la manière dont la liaison est réalisée, des corps qui effectuent cette liaison, de leur élasticité et de celle de S, etc. Nous supposons la liaison réalisée de façon que $f_z = 0$.

Les équations (2) et (3) sont les mêmes que dans le cas de l'équilibre. Précisons ce résultat.

À chaque instant t , on peut remplacer les forces extérieures données par une force unique (X, Y, Z) ^{appliquée en O} et un couple I dont l'axe est parallèle à OZ et égal à N , un couple I_1 dont l'axe est perpendiculaire à OZ et a pour projections I_x et M sur OX et OY.

Imaginons qu'à l'instant t on supprime le couple I et qu'on annule la rotation de S: S restera en équilibre et les réactions R et f vérifieront les mêmes équations et seront par suite les mêmes, f^z étant nul que dans le mouvement vrai à l'instant t . Elles sont indépendantes des vitesses de S. Il en est tout autrement, comme nous le verrons, dans le cas d'un solide quelconque mobile autour d'un axe quelconque.

220. - Si toutes les forces extérieures données admettent constamment une résultante passant par O, f_x et f_y sont nuls, par suite \bar{f} . Le mouvement est donc le même que si

l'appui fixe O_1 n'existait pas. D'où ce théorème :

Si un corps solide de révolution fixé par un point O de son axe et soumis à des forces qui admettent comme résultante passant par O tourne initialement autour de son axe, il tourne indéfiniment avec une vitesse constante autour de cet axe qui reste fixe dans l'espace.

C'est le cas d'un solide de révolution pesant, suspendu dans le vide par son centre de gravité G , et tournant initialement autour de son axe.

Soit que le solide de révolution S est libre et que les forces antérieures qui lui sont appliquées sont nulles ou qu'elles admettent une résultante passant par G , si S tourne initialement autour de son axe, il tourne indéfiniment autour de cet axe fixe en direction dans l'espace.

On le voit aussitôt en appliquant le résultant précédent au mouvement de S autour de G .

Application au mouvement des planètes. — On admet que la terre et les planètes sont formées de couches homogènes de révolution autour de leur axe actuel de rotation; et que les attractions newtoniennes que chacune d'elles subit du soleil et des autres planètes admettent approximativement une résultante passant par le centre de gravité de la planète. La planète, dans ces conditions, doit tourner indéfiniment et uniformément autour de son axe de révolution, dont la direction reste fixe par rapport aux directions des étoiles.

En fait, il n'en est pas rigoureusement ainsi, et la direction de l'axe de la terre, par exemple, varie très lentement par rapport aux étoiles, parce que les attractions du soleil et de la lune équivalent à une force passant par le centre de gravité de la terre et à un couple dont l'influence petit à la longue n'est pas négligeable.

221. — Une autre remarque intéressante est relative au cas où S se contracte très lentement, tout en restant de révolution autour de la même droite GZ du corps. Pendant un nombre notable de révolution de S sur soi-même, S peut être regardé comme un solide invariable; ses vitesses à un instant sont très sensiblement les mêmes que si S était

un solide invariable ; si les forces extérieures admettent constamment une résultante passant par G , et si la rotation initiale a lieu autour de GZ , S tournera indéfiniment autour de la droite GZ de direction fixe dans l'espace, et on aura constamment : $\dot{\omega} = C\dot{\epsilon}$. Mais ici $\dot{\epsilon}$ décroîtra lentement, $|\omega|$ croîtra lentement, comme $\frac{h}{C}$. (1)

Dans l'hypothèse cosmogonique de Laplace, c'est ainsi qu'on explique que la rotation actuelle des planètes soit beaucoup plus rapide qu'au moment de leur formation.

Mouvement d'un solide de révolution S fixé par un point O de son axe.

222. - Moment cinétique et force vive du solide.

Soit (à l'instant) OZ la position de l'axe de révolution de S , $\overline{O\omega}$ la rotation instantanée de S et \overline{OK} son moment cinétique par rapport au point O .

Par raison de symétrie (2), les trois droites OZ , $O\omega$ et OK sont évidemment dans un même plan.

Appelons $\overline{O\omega'}$ la composante de $\overline{O\omega}$ normale à OZ , et ρ la projection de $O\omega$ sur OZ (le sens OZ ayant été choisi arbitrairement une fois pour toutes sur l'axe de révolution).

Quand les droites OZ et $O\omega$ coïncident, elles coïncident aussi avec OK ; OK a le sens de $O\omega$, est égal en valeur absolue à $C\omega$, et, si on le compte positivement dans le sens OZ , est égal en grandeur et signe à CP , (C moment d'inertie de S par rapport à OZ).

(1) C'est pour une raison analogue, et afin d'accroître leur vitesse de rotation sur eux mêmes, que les acrobates, au cours du saut périlleux, se contractent en rapprochant les genoux de la tête.

(2) Si deux vecteurs \overline{AB} , \overline{CD} sont symétriques par rapport à un plan, soit le plan $z\omega$, les moments de \overline{AB} et de $-\overline{CD}$ par rapport au point O sont symétriques par rapport à ce plan. Or considérons deux éléments P et P_1 de S symétriques par rapport au plan $z\omega$, éléments qui ont même volume, même densité, donc même masse. Ses vecteurs $\vec{V} = (O\omega, P)$ et $-\vec{V}_1 = -(O\omega, P_1)$ sont symétriques, donc aussi les vecteurs $m\vec{V}$ et $-m\vec{V}_1$ d'origine P et P_1 ; les moments cinétiques de P et de P_1 sont donc symétriques par rapport au plan $z\omega$. En associant tous les éléments de S par couples tels que P, P_1 , on voit que \overline{OK} est dans le plan $z\omega$.

Quand OW est normal à OZ (et se confond par suite avec OW_1), les droites OK et OW sont confondues. En effet, imaginons qu'on fasse tourner de 180° autour de OZ la figure formée par S et par OW_1 ; OW_1 vient en $-OW_1$, et le vecteur OK décrit un demi-cône de révolution autour de OZ . Mais d'autre part, OK doit coïncider, dans sa nouvelle position avec sa position primitive changée de sens. Il faut donc que l'angle ZOK soit droit, c'est-à-dire que la droite OK (qui est dans le plan ZOW_1) coïncide avec la droite OW_1 . Le vecteur OK se confond alors avec le moment cinétique de S par rapport à OW_1 ; il a donc le sens de OW_1 , et est égal à AW_1 , A désignant le moment d'inertie de S par rapport à une droite quelconque normale en O à OZ .

Enfin, quand OW a une direction quelconque, le moment cinétique de S par rapport à O est la somme géométrique des moments cinétiques définis respectivement par la rotation P autour de OZ et la rotation OW_1 ; car la vitesse de chaque point de S est la somme géométrique des vitesses engendrées par ces deux rotations. Le vecteur OK du plan ZOW a donc pour composantes suivant OZ et OW_1 , les quantités CP et AW_1 .

Force vive de S . - Soit \vec{v} la vitesse d'un de ses éléments P de S , \vec{w} et \vec{v}_1 les vitesses que lui communiqueraient respectivement la rotation P autour de OZ , et la rotation OW_1 . On a: $\vec{v} = \vec{w} + \vec{v}_1$, et

$$2T = \sum m v^2 = \sum m w^2 + \sum m v_1^2 + 2 \sum m w v_1 \cos(\widehat{w, v_1}).$$

Si on fait décrire à OW un demi-cône de révolution autour de OZ , la force vive correspondante ne change pas, w ne change pas, v_1 change de sens; le terme $2 \sum m w v_1 \cos(\widehat{w, v_1})$ change de signe: ce terme est donc nécessairement nul. D'où l'égalité:

$$2T = A\omega_1^2 + Cp^2.$$

Conclusion. - Soit OW la rotation instantanée de S ; P et OW_1 les projections de OW sur OZ et sur le plan perpendiculaire à OZ ; soit C et A les moments d'inertie de S autour de OZ et autour d'une droite quelconque ox perpendiculaire à OZ : le moment cinétique OK de S par rapport à O est situé dans le plan ZOW et ses projections sur OZ et OW_1 sont: CP et AW_1 . La force vive de S est $A\omega_1^2 + Cp^2$.

Corollaire. - Si $A = C$, les demi-droites OK et OW coïncident toujours, et $OK = A \times \omega$. C'est ce qui a lieu si S est une sphère formée de courbes concentriques homogènes. Si $A \neq C$, OK et OW ont des directions différentes à moins que ρ ou ω soit nul.

Remarque. - $\frac{A}{C}$ est au moins égal à $\frac{1}{2}$ quelle que soit la forme du corps de révolution. En effet, soit $Oxyz$ un trièdre trirectangle lié à S : On a:

$$C = \sum m(x^2 + y^2),$$

$$A = \sum m(y^2 + z^2) = \sum m(z^2 + x^2) = \frac{1}{2} \sum m(x^2 + y^2 + z^2) = \frac{C}{2} + \sum mz^2.$$

D'où $\frac{A}{C} \geq \frac{1}{2}$; $\frac{A}{C}$ n'est égal à $\frac{1}{2}$ que si S est un disque circulaire de centre O , par exemple une pièce de monnaie; dans ce dernier cas, Oz est la perpendiculaire en O au plan du disque.

Remarquons de plus que si M est la masse totale de S , et l la distance OG de O au centre de gravité G , on a: $A \geq Ml^2$. En effet, si S est animé d'une rotation OW_1 normale à Oz , soit A_1 le moment d'inertie de S autour d'une droite normale en G à Gz : $2T = A\omega_1^2 + A_1\omega_1^2$ (théorème de Koenig). D'où:

$$A = A_1 + Ml^2.$$

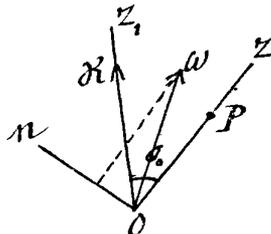
223. - Cas où les forces extérieures ont un moment nul par rapport à O .

Le moment résultant par rapport à O des forces extérieures étant nul, le moment cinétique OK de S est invariable en grandeur, direction et sens. Il est loisible de choisir comme axe fixe Oz_1 la direction et le sens OK . Les droites Oz , Oz , OW restent alors dans un même plan.

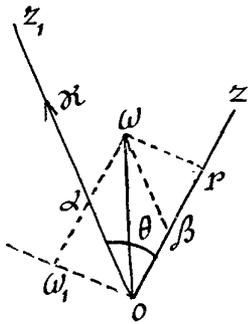
Je dis que Oz décrit autour de Oz_1 un cône de révolution d'un mouvement uniforme.

En effet, soit OP un segment égal à l'unité pris sur Oz ; le plan OWP est normal en P à la trajectoire du point P , donc normal au cône décrit par Oz ; mais ce plan passe constamment par la droite fixe Oz_1 . Le cône décrit par Oz est donc de révolution autour de Oz_1 .

Menons dans le plan z_1Oz la perpendiculaire On en O à Oz_1 ; puisque θ_0 est constant, les projections CP et AW_1 de OK sur Oz_1 et sur cette normale sont constantes; P



ω sont constants; l'angle de OW avec OZ_1 et avec OZ , est constant. Le lieu de l'axe instantané OW dans l'espace est donc un



cône de révolution autour de OZ_1 , soit Γ_1 ; le lieu de OW dans le solide est un cône de révolution autour de OZ , soit Γ . Dans le mouvement, ce dernier cône (cône roulette) roule uniformément sans glisser ni pivoter sur le premier (cône base).

Soit θ l'angle constant $Z_1 O Z$. Si on a choisi le sens OZ de façon que r soit p.o. i.t.f., cet angle est aigu:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{A\omega_1}{Cr}. \text{ Si } \frac{A}{C} > 1, OW \text{ est compris dans l'angle}$$

$Z_1 O Z$ les deux cônes Γ et Γ_1 sont extérieurs l'un à l'autre; si $\frac{A}{C} < 1$, OZ_1 est compris dans l'angle $W O Z$, le cône base est intérieur au cône roulette. ⁽¹⁾

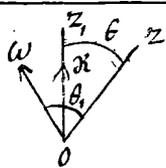
Décomposons la rotation OW en deux rotations autour de OZ_1 et de OZ ; soit $\overline{\omega\alpha}$ et $\overline{\omega\beta}$ ces deux rotations; α a toujours le sens OZ_1 et on a:

$$\omega_1 = \alpha \sin \theta, \quad r = \alpha \cos \theta + \beta, \quad \text{d'où}$$

$$\alpha = \frac{Cr}{A \cos \theta}, \quad \beta = r \left(1 - \frac{C}{A} \right).$$

La vitesse angulaire constante α est la vitesse avec laquelle OZ_1 tourne autour de la demi-droite OZ_1 (vitesse de précession). La vitesse angulaire β est celle avec laquelle le plan $Z_1 O Z$ ou $Z O W$ tourne dans le solide autour de la demi-droite OZ .

224. - Quand OW coïncide initialement avec OZ , la droite fixe OZ_1 coïncide aussi avec OZ ; ces trois droites sont constamment confondues. Si donc à l'instant initial le corps tourne autour de son axe de révolution, il tourne indéfiniment autour de cet axe, résultat déjà obtenu au N° 220. De plus, OZ est un axe stable de rotation: autrement si θ_0 [c'est-à-dire si $\frac{A\omega_1}{Cr}$] est très petit, les deux cônes Γ et Γ_1 ont



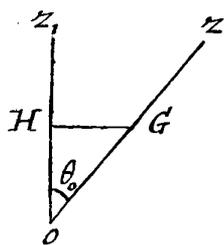
$$(1) \text{ Si } \theta_0 = \overline{ZOW}, \text{ on a: } \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{\omega_1}{r}, \quad \text{d'où } \operatorname{tg} \theta_0 \gg \frac{\operatorname{tg} \theta_0}{2}$$

$$\text{car } \frac{A}{C} \gg \frac{1}{2}.$$

des angles d'ouverture très petits, et les droites OZ et OW restent sensiblement confondus avec la droite fixe OZ_1 .

Si \overline{OW} coïncide avec OZ_1 , mais non avec OZ , c'est que P est nul (sauf dans le cas où $A = C$, N° 222). Quand S tourne initialement autour d'une droite perpendiculaire à OZ , l'axe instantané est alors fixe dans l'espace, donc aussi dans le corps. Le solide tourne uniformément autour d'une droite fixe et OZ décrit un plan perpendiculaire à cette droite. Mais l'axe OX n'est pas un axe stable de rotation : si P est petit, OW et OK font un angle très petit avec OW_1 , et par suite entre eux ; le cône base se réduit sensiblement à une droite ; mais l'angle ZOW diffère peu d'un droit et le cône roulette I se confond sensiblement avec le plan xoy perpendiculaire à OZ . Comme le plan ZOW tourne dans le solide autour de OZ avec la vitesse angulaire $-\beta_0 = -P_0 \left(1 - \frac{C}{A}\right)$, on voit que l'axe instantané balayera sensiblement dans le corps solide le plan xoy avec cette vitesse angulaire. Si P_0 est très petit, l'axe OW se déplacera très lentement dans le solide, mais il balayera à la longue tout le plan xoy ; si $P_0 = 0$, il sera immobile dans le solide.

Cas où $A = C$ - Lorsque $A = C$, OK et OW sont toujours confondus en direction et sens ; le mouvement de S , comme dans le cas d'une sphère homogène de centre O , est une rotation uniforme autour d'un axe fixe dans le corps et dans l'espace.



225. - Calcul de la réaction du point O . - Pour calculer la réaction du point O , il suffit d'appliquer le théorème du mouvement du centre de gravité G . Le point G décrit autour de OZ_1 un cercle avec une vitesse constante ; son accélération est dirigée selon GH , (H pied de la perpendiculaire abaissée de G sur OZ_1), et elle est égale à $\omega^2 GH$. La réaction \overline{OR} de O sur S est donc équipollente au vecteur : $M\omega^2 \overline{CH} - \overline{\Phi}$, si $\overline{\Phi}$ désigne la somme géométrique des forces extérieures, autres que la réaction de O , appliquées à S .

En particulier, quand les forces extérieures sont nulles,

on a : $\overline{OR} = \overline{M\dot{\alpha}}^2 \cdot \overline{GH}$; si, dans ce cas, G coïncide avec O ou si OZ coïncide avec OZ_1 , \overline{OR} est nul. Il suit de là que si le corps S , absolument libre, n'est soumis à aucune force extérieure et tourne initialement autour de GZ (ou d'une droite Gx perpendiculaire à GZ), il tourne uniformément autour de GZ (ou de Gx) fixe dans l'espace comme dans le corps (N° 220).

226. - Mouvement d'un corps de révolution autour de son centre que gravité G quand les forces extérieures admettent constamment une résultante passant par G .

Soit GK le moment cinétique de S dans son mouvement autour de G ; ce vecteur est invariable en grandeur, direction et sens, et par rapport aux axes Gx, y, z de directions fixes, GZ décrit uniformément un cône de révolution li m d'axe GK ou GZ_1 . Le mouvement instantané est, à chaque instant, la combinaison d'une rotation uniforme autour de GZ_1 , et d'une rotation uniforme autour de GZ . Le mouvement est représentable par le roulement d'un cône mobile de révolution d'axe GZ sur un cône fixe de révolution d'axe GZ_1 .

Si notamment le corps tourne initialement autour de GZ , il tourne indéfiniment et uniformément autour de GZ fixe en direction de l'espace : cela quel que soit le mouvement du centre de gravité G .

Gyroscope. - Le gyroscope est un solide de révolution fixé par son centre de gravité G , la suspension étant réalisée de façon que les réactions du pied du gyroscope sur le solide passent sensiblement par G .

Si on donne au solide une rotation autour de GZ , il tourne uniformément — indéfiniment — autour de cette droite qui reste fixe en direction par rapport au sol, cela qu'on laisse immobile le pied de l'appareil ou qu'on le transporte d'un mouvement quelconque dans l'espace.

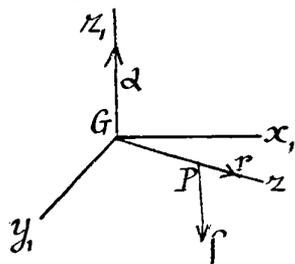
En fait, les réactions du pied sur le solide ne passent pas rigoureusement par G ; il y a des frottements [p. 23] qui diminuent lentement la rotation de S et perturbent la position de l'axe. Mais ces influences sont longtemps négligeables, si la rotation initiale de S est très rapide.

227. - Premier exemple du phénomène gyroscopique : pièces tournantes d'une automobile dans un virage.
Considérons un solide de révolution pesant mobile

dans le vide⁽¹⁾ et fixé par le point G et un autre point P de son axe; qu'il est loisible de supposer sur le demi-axe GZ . Le solide tourne uniformément autour de son axe; si nous supposons (N° 219) que la réaction \vec{P} de l'axe en P sur S est normale à OZ , \vec{P} est nul et R est égal à $-M\vec{g}$.

Admettons maintenant que l'axe GZ , au lieu d'être fixé par rapport au sol, soit lié invariablement à une automobile animée d'un mouvement quelconque de translation; il suffit d'étudier le mouvement de S autour de G pour voir que ce qui précède subsiste, à cela près que $\vec{R} = M(\vec{I} - \vec{g})$, (I accélération de la voiture).
Mais supposons que la voiture effectue un virage. Que va-t-il arriver?

Pour fixer les idées, plaçons-nous dans le cas où la voiture vire sur un plan horizontal et où l'axe GZ est lui-même horizontal. Soit Gx, y, z , des axes de directions fixes relativement au sol, Gz_1 désignent la verticale ascendante; par rapport à ces axes, GZ tourne autour de l'axe Gz_1 qui lui est perpendiculaire avec une vitesse angulaire (positive ou négative) que nous supposons uniforme et que nous désignons par α ; la rotation instantanée $\vec{\omega}$ de S est la



résultante de cette rotation α et d'une certaine rotation P autour de GZ . Le moment cinétique \vec{GK} de S (dans son mouvement par rapport aux axes Gx, y, z) est contenu, à chaque instant, dans le plan zGz_1 , et ses projections sur GZ et sur Gz_1 sont $C\dot{P}$ et $A\alpha$. La vitesse \vec{W} du point

K est équipollente au moment \vec{GH} de \vec{P} par rapport à G , moment qui est normal à GZ ; la vitesse de la projection K_1 de K sur le plan x, oy_1 est donc normale à GK ; K_1 décrit un cercle de centre G ; $C\dot{P}$, par suite P , est constant; $P = P_0$. Comme $A\alpha$ est aussi constant, K décrit lui-même un cercle horizontal de rayon $C\dot{P}$ autour de Gz_1 , avec une vitesse \vec{W} égale à $C|\dot{P}\alpha|$ en valeur absolue; comme $\vec{W} = \vec{GH} = (P\vec{P}, G)$, la force \vec{P} (normale à GZ) est nécessairement verticale et égale à $\frac{C|\dot{P}\alpha|}{l}$ en valeur absolue, ($l = GP$). Quant au sens de \vec{P} , il est facile de le déterminer: par exemple, supposons α et P positifs; si à l'instant t , GZ est dans le

⁽¹⁾ Ce qui va suivre s'applique s'il est mobile dans l'air, en regardant les résistances de l'air comme négligeables.

plan x, Gz_1, \bar{W} ou (P, G) a le sens de Gy_1 , et \bar{P} par suite a le sens descendant.

En définitive, si GZ tourne uniformément autour de Gz_1 avec la vitesse angulaire α , \bar{P} est aussi constant et la réaction f qui s'exerce en P sur S est verticale, constante, et égale à $-\frac{G\rho^2}{\ell}$, si on la compte positivement dans le sens Gz_1 .

— Par exemple, supposons que l'axe GZ porte un volant S qui tourne rapidement sur lui-même. Imaginons que l'automobile vire complètement, le point G décrivant \mathcal{C} uniformément un demi-cercle en un temps t_1 , et la direction GZ tournant de 180° par rapport au sol. La vitesse angulaire de GZ autour de G est $\frac{\pi}{t_1}$, et la réaction f que l'axe exerce sur S en P est, pendant le virage, égale en valeur absolue à $\frac{G}{\ell} |\rho| \frac{\pi}{t_1}$. Cette réaction peut être considérable si $|\rho|$ est grand: elle est indépendante du rayon du cercle parcouru par le point G de l'automobile et ne dépend que de l'angle et de la durée du virage.

228. — Dans l'exemple précédent, on peut supposer que l'élément P du solide n'est point fixé au corps de la voiture, à condition de lui appliquer à chaque instant la force constante \bar{P} .

D'autre part, tout ce qui précède s'applique si on suppose que G est maintenu fixé par rapport au sol, GZ tournant d'un mouvement uniforme autour d'un droite fixe Gz_1 , quelconque qui lui est perpendiculaire; d'où cette conclusion:

Si GZ est animé initialement de la rotation α autour de l'axe fixe Gz_1 qui lui est perpendiculaire (ρ ayant la valeur ρ_0) et si on applique à S en un point P de son axe de révolution GZ une force constante f parallèle à Gz_1 et égale en grandeur et signe à $-\frac{G\alpha\rho_0}{\ell}$, GZ tourne uniformément dans le plan x, Gy_1 perpendiculaire à Gz_1 , et ρ reste constant.

Il importe de remarquer que la force f est parallèle à Gz_1 et non pas perpendiculaire au plan z, Gz_1 ; elle est donc normale à chaque instant à la vitesse de l'élément P auquel elle est appliquée et par suite son travail est constamment nul.⁽¹⁾

(1) Si ρ_0 était nul, S garderait sa rotation autour de Gz_1 , aucune force ne lui étant appliquée en P .

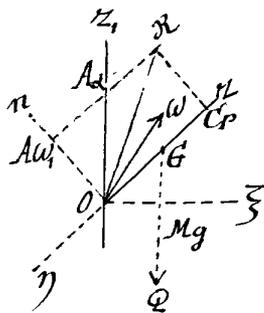
239. - Supposons maintenant que le corps S pesant soit fixé par un point quelconque O de son axe de révolution OZ ; soit G son centre de gravité, M sa masse et soit $l = OG$; prenons comme sens OZ le sens OG . Supposons que pour $t=0$ OZ soit horizontal et animé autour de la verticale ascendante OZ , d'une rotation α_0 égale à $\frac{Mgl}{I}$ (en grandeur et signe). Le point G décrira uniformément un cercle horizontal, P restant constant. Il suffit pour le voir d'appliquer le théorème des moments cinétiques par rapport à O : la démonstration est identiquement la même que ci-dessus.

Cette propriété rentre dans un cas plus général que nous allons indiquer.

230. - Sur un cas remarquable du mouvement d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe.

Ce cas est celui où l'axe OZ décrit uniformément un cône de révolution autour de la verticale ascendante de OZ , en même temps que S tourne uniformément autour de OZ : dans ce cas, la rotation instantanée \overline{OW} de S est à chaque instant la résultante de deux segments constants α et β (positifs ou négatifs) portés sur OZ , et sur OZ . Le mouvement est représenté par le roulement d'un cône de révolution d'axe OZ sur un cône de révolution fixe d'axe vertical.

Un tel mouvement est-il possible? Soit OR le moment



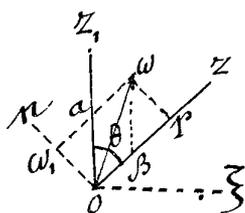
cinétique de S par rapport à O ; le vecteur OR est alors un vecteur invariable du plan Z, OZ , et la vitesse \overline{WR} de R est un certain vecteur constant perpendiculaire au plan Z, OZ . Si pour $t=0$, ce vecteur est équipollent au vecteur $(GQ, 0)$ ou \overline{OH} (GQ désignant le poids du corps), le théorème des moments cinétique est vérifié quel que soit t ; le mouvement supposé, répondant à la fois aux conditions

initiales et aux trois équations du mouvement, est le mouvement vrai.

Les deux vecteurs \overline{WR} et \overline{OH} sont perpendiculaires au plan Z, OZ . Exprimons qu'ils ont même sens et même longueur.

Dans le plan Z, OZ menons la demi droite ON perpendiculaire

à OZ et qui fait avec OZ_1 un plan aigu, et la droite $O\xi$ perpendiculaire à OZ_1 , qui fait avec la demi droite OZ (ou OG) un angle aigu; la droite $O\eta$ perpendiculaire au plan Z, OZ est choisie de façon que le trièdre $O\xi\eta Z$ soit positif. Soit θ l'angle Z, OZ compté entre 0 et π , et ω_1 la projection de OW sur $O\eta$, ($\omega_1 > 0$ ou < 0). On a (en grandeur et signe):



$$\omega_1 = \alpha \sin \theta, \quad r = \beta + \alpha \cos \theta.$$

Évaluons la projection λ de OR sur $O\xi$ en projetant sur $O\xi$ le segment CR porté sur OZ et le segment AW_1 porté sur $O\eta$, on trouve.

$$\lambda = CR \sin \theta - A \alpha \sin \theta \cos \theta;$$

la vitesse de R comptée positivement dans le sens $O\eta$ est $\lambda \alpha$, c'est-à-dire:

$$\alpha \sin \theta (CR - A \alpha \cos \theta).$$

D'autre part, le vecteur \overline{OH} ou $(GQ, 0)$ compté positivement dans le sens $G\eta$ est: $Mgl \sin \theta$, (si $l = OG$).

Pour que le mouvement considéré se produise il faut et il suffit qu'on ait:

$$\alpha (CR_0 - A \alpha \cos \theta_0) = Mgl,$$

ou bien:

$$(1) \quad A \alpha^2 \cos \theta_0 - CR_0 \alpha + Mgl = 0.$$

Si on remplace r_0 dans (1) par $\beta + \alpha \cos \theta_0$, on voit que les deux rotations initiales α et β autour de OZ , et OZ doivent vérifier la condition:

$$(2) \quad (A - C) \alpha^2 \cos \theta_0 - C \alpha \beta + Mgl = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

La position initiale de S étant arbitrairement choisie, OZ décrira uniformément un cône de révolution autour de la verticale OZ_1 , si la rotation initiale de S peut se décomposer en deux rotations α et β autour des demi-droites OZ , et OZ , la première α arbitraire (positive ou négative), la seconde β égale à: $(\frac{A}{C} - 1) \alpha \cos \theta_0 + \frac{Mgl}{C \alpha}$.

Réaction de l'appui. - Le théorème du mouvm^t du centre de gravité nous donne, si \bar{R} est la réaction de l'appui et $\bar{\Gamma}$ l'accélération de G :

$$M\bar{\Gamma} = M\bar{g} + \bar{R}$$

Or si G_1 est la projection de G sur OZ_1 , $\bar{\Gamma}$ a le sens G_1G , il est égal à $L^2 \times G_1G$; la composante horizontale de \bar{R} est donc dirigée en sens inverse de OZ_1 et égale à $L^2 l^2 \sin^2 \theta_0$; sa composante verticale est égale à Mg et dirigée de bas en haut.

Cas où $|P_0|$ est très grand. - Si on se donne arbitrairement θ_0 et P_0 , la condition (1) fournit deux valeurs de α pourvu que $C^2 P_0^2$ soit au moins égal à $4MglA \cos \theta_0$, condition toujours remplie si $\cos \theta_0 \leq 0$, c'est-à-dire si G_0 n'est pas au-dessus de O .

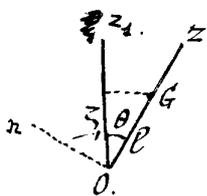
Si $|P_0|$ est très grand, une des deux valeurs de α , - à savoir la valeur $\alpha_1 = \frac{CP_0 \pm \sqrt{C^2 P_0^2 - 4MglA \cos \theta_0}}{2A \cos \theta_0}$ où le radical a le signe de P_0 , - est très grande en valeur absolue et sa partie principale est $\frac{CP_0}{A \cos \theta_0}$; l'autre valeur α_2 de α est très petite et sa partie principale est $\frac{Mgl}{A \cos \theta_0} \cdot \frac{1}{CP_0} = \frac{Mgl}{CP_0}$.

D'après cela, supposons que pour $t=0$, S soit animé d'une grande rotation autour d'un axe sensiblement confondu avec l'axe de révolution OZ : d'une façon précise, supposons $|P_0|$ très grand, et $\bar{\omega}_0$ très petit mais quelconque en direction [$\bar{\omega}_0$ désignant la composante de $O\bar{\omega}_0$ normale à OZ]. Tout d'abord, si $\bar{\omega}_0$ est situé dans le plan Σ, OZ et si sa projection sur OZ , est exactement égale à $\alpha_2 \sin \theta_0$, (c'est-à-dire sensiblement à $\frac{Mgl}{CP_0} \sin \theta_0$), OZ décrit rigoureusement un cône de révolution autour de $OZ_1^{(1)}$ et sa vitesse précessionnelle (vitesse angulaire du plan Σ, OZ autour de la demi-droite OZ_1) est égale à α_2 (c'est-à-dire sensiblement à $\frac{Mgl}{CP_0}$), donc constante, et de même sens que la rotation de S autour de la droite OG . Si maintenant, P_0 ayant la même valeur, nous supposons $\bar{\omega}_0$ de direction quelconque mais très petit, ces conditions diffèrent très peu des précédentes, et le mouvement, pendant un temps fini, différera très peu du précédent. Mais nous allons montrer en toute rigueur que si $|P_0|$ est très grand, OZ reste compris, quel que soit t , entre deux cônes de révolution très voisins d'axe OZ_1 .

(1) OZ , $O\bar{\omega}$ et $O\bar{R}$ sont sensiblement confondus. Le cône de révolution base du mouvement est sensiblement confondu avec le cône lieu de OZ ; le cône de révolution roulette se réduit sensiblement à OZ .

Mouvement général d'un corps pesant de révolution fixé par un point de son axe.

231. - Équations du mouvement. - Le théorème des moments cinétiques appliqué au point O fournit trois équations indépendantes de la réaction R de l'appui O , mais nous pouvons remplacer une de ces équations par la combinaison des forces vives : le travail de R étant nul, et la pesanteur dérivant de la fonction de force⁽¹⁾ $-Mg\xi = -Mgl \cos \theta$, on a :



$$(1) \quad 2T \equiv A\omega^2 + Cr^2 = -2Mgl \cos \theta + Cte.$$

D'autre part, la pesanteur ayant un moment nul par rapport à Oz , le moment cinétique de S par rapport à Oz , est constant, d'où l'équation :

$$(2) \quad A\omega \cos \tau + Cr \cos \theta = Cte,$$

τ désignant l'angle $z\hat{O}\omega$, à l'instant t et ω , la longueur absolue du vecteur $\hat{O}\omega$.

Enfin, soit OK le moment cinétique de S à l'instant t , \bar{W} la vitesse de K par rapport aux axes fixes Ox, y, z ; la projection W_z de \bar{W} sur Oz est égale au moment par rapport à Oz de la pesanteur, c'est-à-dire nulle. Calculons W_z .

Soit W^p la vitesse du point K par rapport au solide S , et W^c la vitesse (par rapport aux axes fixes) du point de S qui est en K à l'instant t ; on a :

$$\bar{W} = \bar{W}^p + \bar{W}^c.$$

Or $\bar{W}^c = (O\omega, K)$, et comme les trois droites $Oz, O\omega$ et OK sont dans un même plan, \bar{W}^c est perpendiculaire à Oz ; W_z coïncide donc avec la projection de \bar{W}^p sur Oz . Or par rapport aux axes $Oxyz$ liés invariablement à S , la coordonnée z du point K est Cr ; la projection sur Oz de \bar{W}^p est donc $C \frac{dr}{dt}$. D'où l'égalité :

$$(3) \quad W_z = C \frac{dr}{dt} = 0, \quad \text{ou} \\ r = r_0.$$

⁽¹⁾ Oz désigne toujours la verticale ascendante, et le sens OG est choisi comme sens oz ; θ est l'angle z, oz compté de 0 à π .

Celles sont les trois équations qui suffisent à déterminer le mouvement répondant à des conditions initiales quelconques⁽¹⁾. Nous verrons l'an prochain que ces équations permettent de ramener le problème aux quadratures. Nous nous bornerons, dans ce cours, à étudier le cas où $|\rho_0|$ est très grand.

232. - Cas où $|\rho_0|$ est très grand. -
Les équations (1), (2) et (3) peuvent toujours s'écrire :

$$(1) \quad A(\omega_1^2 - \gamma^2) = 2Mgl(\cos \theta_0 - \cos \theta), \text{ si } \gamma = \omega_1^0 > 0.$$

$$(2) \quad A(\omega_1 \cos \tau - \gamma \cos \tau_0) = C\rho_0(\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

$$(3) \quad \tau = \tau_0.$$

L'équation (2) montre aussitôt qu'on a :

$$(4) \quad |\cos \theta_0 - \cos \theta| \leq \frac{A(\omega_1 + \gamma)}{C\rho_0}, \text{ si } \rho_0 = |\rho_0|,$$

d'où en tenant compte de (1) :

$$A(\omega_1^2 - \gamma^2) \leq \frac{2MglA}{C\rho_0} (\omega_1 + \gamma), \text{ ou}$$

$$(5) \quad (\omega_1 - \gamma) < \frac{2Mgl}{C\rho_0}.$$

La rotation ω_1 reste donc toujours inférieure à $\gamma + \frac{2Mgl}{C\rho_0}$.

La tangente de l'angle $\widehat{Z\bar{O}\bar{\omega}}$ et celle de l'angle $\widehat{Z\bar{O}\bar{\omega}}$ restent donc en valeur absolue (inférieure respectivement à

$$\frac{\gamma}{\rho_0} + \frac{2Mgl}{C\rho_0^2} \text{ et à } \frac{A\gamma}{C\rho_0} + 2\frac{MgAl}{C^2\rho_0^2}.$$

De plus, l'inégalité (4) nous montre que $|\cos \theta_0 - \cos \theta|$ reste inférieur à $\frac{2A}{C\rho_0} (\gamma + \frac{Mgl}{C\rho_0})$.

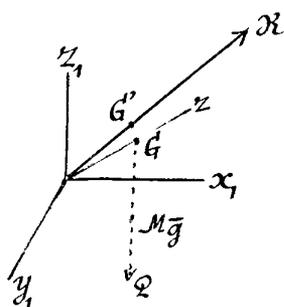
Supposons maintenant que ρ_0 soit assez grand pour que $\frac{A\gamma}{C\rho_0}$ et $\frac{2MgAl}{C^2\rho_0^2}$ soient inférieurs à ε , ε désignant une quantité positive que j'ai choisie très petite. Les quantités $\frac{\gamma}{\rho_0}$ et $\frac{2Mgl}{C\rho_0^2}$ sont plus petites que 2ε (puisque $C < 2A$, N° 222) :

Quel que soit t , les tangentes des angles $\widehat{Z\bar{O}\bar{\omega}}$ et $\widehat{Z\bar{O}\bar{\omega}}$ restent plus petites que 4ε , et $|\cos \theta - \cos \theta_0|$ reste plus petit

(1) L'équation (1) montre que $\theta \equiv \theta_0$, ω_1 est constant comme τ . Comme $\bar{O}\bar{\omega}$ est alors constamment dans le plan $\bar{z}\bar{O}\bar{z}$, on se trouve dans le cas particulier du N° 230.

que 3ε ; il reste donc compris entre $\theta_0 + \eta$, $\theta_0 - \eta$, η étant une quantité très petite avec ε .

Pour fixer les idées, supposons $I_0 > 0$. Les demi-droites OZ , OW , OX font constamment un angle très petit, \overline{OW} et \overline{OX} restent donc compris, comme OZ , entre deux cônes de révolution d'axe OZ_1 très voisins. De plus $\overline{OX}^2 = C^2 I_0^2 + A^2 \omega_1^2$, d'où $\overline{OX} = C I_0 (1 + \delta)$, δ étant de l'ordre de ε^2 . La vitesse du point R est éq uipollente à chaque instant au moment \overline{OH} du poids $\overline{GQ} = M\vec{g}$ de S par rapport à O . Prenons sur OR le segment CG'

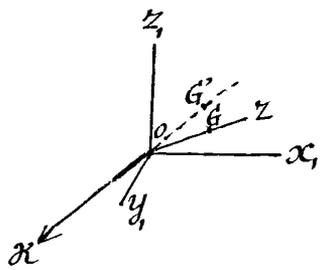


de longueur l ; le point G' reste très voisin de G ; il décrit sensiblement autour de OZ_1 un cercle horizontal ayant son centre sur OZ_1 , et sa vitesse à chaque instant est rigoureusement équipollente à $\overline{OH} \times \frac{l}{C I_0}$, c'est-à-dire sensiblement perpendiculaire au plan $z_0 G'$, orientée positivement⁽²⁾ autour de OZ_1 , et égale sensiblement à

$\frac{Mgl^2 \sin \theta}{C I_0^2}$. La vitesse angulaire du plan $z_0 OR$ autour de OZ_1 est

donc sensiblement constante, positive et égale à $\frac{Mgl}{C I_0^2}$.

D'autre part, G' restant toujours très voisin de G , on voit que OZ semblera décrire uniformément un cône de révolution d'axe OZ_1 , la vitesse angulaire du plan $z_0 OZ$ autour de OZ_1 étant positive et égale à $\frac{Mgl}{C I_0^2}$.



Si $I_0 < 0$, OR est sensiblement de sens opposé à OZ ; et le point G' pris sur la direction inverse de OR à la distance l de O est très voisin de G ; sa vitesse (à chaque instant) est $-\overline{OH} \times \frac{l}{C I_0^2}$; elle est orientée de droite à gauche autour de OZ_1 . Et ce changement de sens près, rien n'est modifié aux conclusions précédentes.

(1) Les deux plans $z_0 OR$ et $z_0 OZ_1$ coïncident sensiblement, pourvu que θ ne soit pas très voisin de 0 ou de π , c'est-à-dire, d'une façon précise, pourvu que $\sin \theta$ ne soit pas très petit, ce que nous supposons.

Voir pour le cas de $\sin \theta$ très petit, le N° 234.

(2) Si, à l'instant t , OZ est dans le demi-plan fixe $z_0 OX_1$, le moment \overline{OH} de \overline{GQ} par rapport à O est de sens OY_1 , et le vecteur équipollent construit avec G comme origine est orienté de gauche à droite autour de OZ_1 .

D'où ce théorème :

Théorème : Si les quotients $\frac{A\omega_1^0}{C^2 P_0^2}$ et $\frac{AMgl}{C^2 P_0^2}$ sont très petites, l'axe OZ de S semble décrire $C^2 P_0^2$ uniformément autour de la verticale ascendante OZ_1 , un cône de révolution ; la vitesse angulaire du plan $Z_1 OZ$ autour de OZ_1 (vitesse de précession) est sensiblement égale en grandeur et signe à $\frac{Mgl}{C^2 P_0^2}$; elle a le même sens que la rotation de S autour de la demi-droite OG .

Ce mouvement apparent se confond d'autant mieux avec le mouvement vrai que les quantités $\frac{A\omega_1^0}{C^2 P_0^2}$ et $\frac{AMgl}{C^2 P_0^2}$ sont plus petites.

Balance gyroscopique. - Le sens de la précession est mis en évidence par la balance gyroscopique : un corps homogène de révolution S étant fixé par un point O de son axe OZ et animé d'une rotation rapide autour de OZ , imaginons que pendant le mouvement on fasse glisser le long de OZ une masse (de révolution) du corps S de façon que la nouvelle position G , du centre de gravité de S soit de l'autre côté de O par rapport à la première position G_0 ; on voit la précession changer de sens.

233. - Cas où le solide tourne rigoureusement sur lui-même pour $t=0$.

Si pour $t=0$, ω est confondu en direction avec ω_0 c'est-à-dire si $\omega_1^0 = 0$, on a (page 239) :

$$|\operatorname{tg} \alpha_0 \alpha| < \frac{2AMgl}{C^2 P_0^2} \quad \text{et} \quad |\operatorname{tg} \alpha_0 \omega| < \frac{2Mgl}{C^2 P_0^2} ;$$

de plus, G ne peut que descendre en vertu de l'équation :

$$A\omega_1^2 = 2Mgl (\cos \theta_0 - \cos \theta)$$

et d'autre part il ne peut décrire un cercle horizontal⁽¹⁾ ; G commencera donc par descendre, mais il s'abaissera très peu, si ω_0 est grand et oscillera entre deux plans horizontaux très voisins.

Comparons ce mouvement au mouvement qui se produirait si la rotation initiale de S sur soi-même était

⁽¹⁾ Si G décrit un cercle horizontal, $\theta = \theta_0$, $\omega_1 = 0$, $P = P_0$, - les conditions du N.º 230 devraient être remplies, et elles ne le sont pas.

nulle, c'est-à-dire si ω^0 était nul : il est loisible d'admettre qu'à l'instant initial OZ est dans ~~le~~ ^{un} plan vertical ~~avec~~ ~~OZ~~ avec OZ . Les conditions du mouvement sont évidemment symétriques par rapport à ce plan : OZ se mouvra dans ce plan, S tournera autour de l'axe horizontal OY comme un pendule composé ; G descendra jusqu'à la position la plus basse, remontera, etc.

234. - Cas où $\sin \theta_0$ est petit ainsi que $\frac{1}{\Omega}$. - Gyroscope dormant.

Quand $\sin \theta_0$ est petit (de l'ordre de ϵ), les raisonnements précédents nous montrent seulement que $|\cos \theta_0 - \cos \theta|$ θ reste très petit ; l'axe OZ s'écarte très peu de la verticale ascendante si θ_0 est petit, de la verticale descendante si θ_0 est voisin de π .

Quand S tourne initialement autour de OZ vertical, OZ reste rigoureusement vertical et le mouvement de S est une rotation uniforme autour de cette verticale (gyroscope dormant). En effet, dans un tel mouvement OK est invariable, la vitesse de K est nulle ; le moment de la pesanteur par rapport à O est également nul. Le mouvement étudié satisfait donc à la fois aux conditions initiales données et aux trois équations du mouvement. Le théorème du mouvement du centre de gravité montre que la réaction R de O est égale à $-Mg$.

De plus, ces deux mouvements particuliers remarquables sont stables si la rotation initiale est grande. En effet, quand on modifie légèrement la position et les vitesses de S , $\sin \theta_0$ est petit, $|R_0|$ reste grand ; OZ s'écarte très peu de la verticale ; le mouvement reste sensiblement une rotation uniforme autour de l'axe OZ vertical.

Mais il convient de remarquer que la rotation autour de la verticale est toujours stable si G est au dessous de O ($\theta = \pi$), et instable pour les faibles rotations si G est au-dessus de O ($\theta = 0$).

En effet, dans le premier cas, si on modifie un peu les conditions initiales, $\cos \theta_0$ est voisin de -1 , ω_1^0 ou γ est petit, et on a (N° 232)

$$A(\omega_1^2 - \gamma^2) = 2Mgl(\cos \theta_0 - \cos \theta), \text{ ou}$$

$$\cos \theta = \cos \theta_0 + \frac{A\gamma^2}{2Mgl} - \frac{A\omega_1^2}{2Mgl} \leq \cos \theta_0 + \frac{A\gamma^2}{2Mgl};$$

$\cos \theta$ reste donc compris entre -1 et la quantité $\cos \theta_0 + \frac{A\gamma^2}{2Mgl}$ voisine de -1 , c'est-à-dire que OZ s'écarte très peu de la $2Mgl$ verticale descendante. Le mouvement est toujours stable.

Au contraire, si θ_0 est petit et la rotation initiale nulle, S se meut comme un pendule composé, G descend jusqu'à sa position la plus basse, cela si petit qu'on suppose $\frac{A}{C} > 0$. Le mouvement est instable, et il en est de même évidemment si la rotation initiale est, non pas nulle, mais petite. La rotation de S autour de l'axe OG vertical ascendant n'est donc stable que si la rotation initiale est suffisamment grande⁽¹⁾.

235. - Remarque sur le mouvement vrai du gyroscope - Considérons, comme plus haut, $OG' = l$ pris sur la direction OD dans le sens OD ou dans le sens contraire suivant que \mathcal{P}_0 est $>$ ou $<$ 0 . Les deux points G et G' restent très voisins si $|\mathcal{P}_0|$ est très grand; soit Γ et Γ' leurs trajectoires sur la sphère de centre O et de rayon l . La courbe Γ' s'écarte très peu d'un cercle horizontal Γ'' , mais nous savons quel que chose de plus; sa tangente en G' fait un très petit angle avec la tangente au cercle Γ'' en un point voisin de G' , et sa vitesse exacte est sensiblement constante.

Pour ce qui est du point G , nous savons que sa trajectoire Γ s'écarte peu de Γ'' , mais nous ne savons rien sur sa tangente: Γ peut présenter de petites sinuosités très rapprochées. Le calcul (comme nous le verrons l'an prochain) montre qu'il en est ainsi en général: l'angle θ subit des variations périodiques de très faible amplitude mais très rapides (nutations); leur période est sensiblement égale à $\frac{2\pi A}{C|\mathcal{P}_0|}$; en général la vitesse de G , au cours d'une période, change complètement de direction⁽²⁾. Mais le déplacement de G au bout d'une période est le même que si G avait tourné autour de OZ , avec la vitesse angulaire constante $\frac{Mgl}{C}$. Comme la durée d'une période est très petite avec $\frac{1}{\mathcal{P}_0}$, tout $C\mathcal{P}_0$

(1) Le calcul montre que le mouvement n'est stable que si $\mathcal{P}_0^2 > \frac{4AMgl}{C^2}$.

(2) La réaction \bar{R} de l'appui O sur S subit, elle aussi, des variations périodiques considérables: par exemple, la composante verticale de \bar{R} (comptée positivement dans le sens ascendant) peut varier dans certains cas, pendant la courte période $\frac{2\pi A}{C|\mathcal{P}_0|}$ entre $3Mg$ et $-Mg$, mais sa valeur moyenne est Mg .

se passe pour nos sens, quand $|\omega|$ est grand, comme si OZ tournait uniformément autour de OZ_1 . Le phénomène g, r s copique, avec les nutations faibles et rapides de l'axe OZ nous donne une idée des petites vibrations intérieures des solides naturels, dont nous percevons seulement les déplacements moyens et finis.

236. - Extension des conclusions précédentes au gyroscope dont un point de l'axe OZ est soumis à une force constante.

Considérons un gyroscope fixé par son centre de gravité, et supposons qu'en un point P de l'axe GZ soit appliquée une force Φ constante en grandeur direction et sens. Soit GZ_1 la parallèle à Φ de sens contraire: rien ne sera changé aux conclusions précédentes, si ce n'est que Φ remplacera Mg partout. D'où cette règle qui définit les apparences du mouvement:

Soit S un gyroscope fixé par le point G et animé d'une rotation très rapide autour d'un axe très peu différent de l'axe de révolution GZ ; quand on applique en un point donné P de GZ une force $\Phi = \overline{PQ}$ constante en grandeur, direction et sens, l'axe GP , au lieu de se mouvoir dans le sens de cette force, sort du plan GPO perpendiculairement à ce plan, et décrit lentement un cône de révolution autour d'une parallèle GZ_1 à Φ , cependant que S tourne uniformément autour de GP . Si GZ est de sens contraire à Φ , la rotation de GP autour de GZ , et la rotation de S autour de GP ont lieu dans le même sens; la vitesse angulaire de la première rotation est $(n l = GP) \frac{\Phi l}{Cl}$, celle de la seconde étant ω . Le point P décrit un cercle C_P autour de GZ_1 d'un mouvement sensiblement uniforme et le chemin ℓ parcouru par P dans le temps t est

$$\frac{\Phi \sin \theta l^2 t}{C |\omega|} = \frac{F l^2 t}{C |\omega|}, \quad F \text{ désignant la composante de } \Phi \text{ normale à } GZ_1.$$

La déviation $\widehat{P'GP}$ de GP dans un petit intervalle de temps h est $\frac{F l}{C \omega} h$; pour F et h donnés, elle est d'autant plus faible que ω est plus grand, que C est plus grand (c'est-à-dire que le corps est plus renflé) et enfin que l est plus petit.

Par exemple, attachons une ficelle en un point P de l'axe GZ et exerçons sur cette ficelle une traction de direction et d'intensité constantes. Pour que l'axe GP soit dévié

de GP en GP' [l'angle $PGP' = \varepsilon$ étant petit] dans un temps donné h , il faut que la traction Φ soit perpendiculaire à PP' , (et non de sens PP') et que la composante F de Φ normale à GP soit égal à $\frac{C\omega_0}{C} \frac{\varepsilon}{h}$; le sens de F doit être renversé si on change le sens de ω_0 autour de GP .

Le travail de la force Φ est nul ou négligeable pendant tout intervalle de temps si long qu'il soit.

237. - Mouvement du gyroscope fixé par un point O de son axe et soumis à des forces quelconques.

Soit \overline{OH} le moment résultant par rapport à O des forces appliquées au gyroscope S . Nous nous plaçons exclusivement dans le cas où \overline{OH} est constamment perpendiculaire à OZ . Quand il en est ainsi, on a (N^o 31): $C \frac{dP}{dt} = 0$, d'où $P \equiv P_0$.

On peut dans ce cas (et d'une infinité de manières) déterminer à chaque instant t une force Φ appliquée en un certain point P de OZ et dont le moment par rapport à O est \overline{OH} . Il est loisible de supposer que le sens OZ a été pris de façon que P_0 soit positif, que P a été choisi fixe sur la demi-droite OZ (soit $l = OP$) et que Φ est perpendiculaire à OZ .

Nous admettons que Φ reste inférieur à une certaine limite F , que $|P_0|$ est grand, enfin (restriction essentielle) que Φ varie assez lentement pour pouvoir être regardé comme constante en grandeur direction et sens pendant un nombre notable de tours du corps sur lui-même: d'une façon précise, t_1 désignant une durée petite mais telle que $\frac{A}{C} t_1$ soit grand, Φ reste sensiblement équipollent à soi-même pendant tout intervalle de temps inférieur à t_1 ⁽²⁾.

Quand il en est ainsi, je dis que OZ , OX et OW restent

(1) Dans le cas contraire, soit N la projection de \overline{OH} sur OZ ; tout ce qui va suivre peut être étendu à ce cas pourvu que $|N|$ restant inférieur à une certaine limite N_1 , $|P_0|$ soit suffisamment grand et ω_0 suffisamment petit. Mais P ne reste pas constant, car on a: $C \frac{dP}{dt} = N$.

(2) Le calcul montre qu'il suffit que Φ puisse être regardé comme invariable pendant tout intervalle de temps moindre que $\frac{2\pi A}{C}$. Quand cette dernière restriction n'est pas remplie, on peut $C P_0$ former des exemples où la théorie gyroscopique est absolument en défaut.

confondus sensiblement pendant un temps très long.

En effet, décomposons le temps à partir de l'instant initial $t=0$ en intervalles

$$0 \quad t_1 \quad 2t_1 \quad 3t_1 \quad 4t_1; \dots$$

Dans le premier intervalle de temps, on peut regarder $\bar{\Phi}$ comme équipollent à Φ_0 , d'où en appliquant les résultats du N° 232, p. 239:

$$(1) \quad \text{tg } z\bar{\omega}\alpha_1 \leq \text{tg } z\bar{\omega}\alpha_0 + 2 \frac{A\Phi_0 l}{C^2 r_0^2}$$

De plus $O\alpha$ tourne de gauche à droite autour de l'axe OZ parallèle à $\bar{\Phi}$ et de sens contraire, et l'angle α_1 dont il tourne dans le temps t_1 est $\frac{\Phi_0 l}{C} t_1$. En particulier, à l'instant t_1 les inégalités (1) donnent:

$$(2) \quad \text{tg } z\bar{\omega}\alpha_1 \leq \text{tg } z\bar{\omega}\alpha_0 + 2 \frac{A}{C} \frac{\alpha_1}{r_0 t_1},$$

de même à l'instant $t_2 = 2t_1$

$$(3) \quad \text{tg } z\bar{\omega}\alpha_2 \leq \text{tg } z\bar{\omega}\alpha_1 + 2 \frac{A}{C} \frac{\alpha_2}{r_0 t_1},$$

α_0 désignant la quantité $\frac{\Phi_0 l}{C r_0} t$; et ainsi de suite.

À l'instant $t = nt_1$ les inégalités (2), (3), ... ajoutées membre à membre, donnent, en appelant σ la somme

$$\frac{l t_1}{C r_0} (\Phi_0 + \Phi_1 + \dots + \Phi_{n-1}):$$

$$\text{tg } z\bar{\omega}\alpha_n \leq \text{tg } z\bar{\omega}\alpha_0 + 2 \frac{A}{C} \frac{\sigma}{r_0 t_1}$$

On a d'autre part:

$$\sigma \leq \frac{l F}{C r_0} n t_1$$

Prends n assez grand pour que nt_1 et $(n+1)t_1$ comprennent $\frac{2\pi C r_0}{l F}$; pendant cet intervalle de temps nt_1 (d'autant plus long que r_0 est plus grand), σ est inférieur à 2π ; la quantité $\frac{2A}{C} \frac{\sigma}{r_0 t_1}$, ~~$\frac{2\pi A}{r_0 t_1}$~~ inférieure à $\frac{4\pi A}{C} \frac{1}{r_0 t_1}$, est

très petite : OZ et OX (par suite OW) restent sensiblement confondus s'ils l'étaient initialement. Le mouvement a la même apparence que si OZ tournait à chaque instant autour de la demi-droite OZ parallèle à Φ avec une vitesse angulaire positive et égale à $\frac{\Phi l}{C I_3}$. Comme Φ est perpendiculaire à OZ , soit s l'arc parcouru par l'intersection de OX et de la sphère de rayon 1 et de centre O : on a $s = \int_0^t \frac{\Phi l}{C I_3} dt$.

- Remarque. - Soit

$$\varepsilon = \lg 20X^\circ = \frac{A\omega_1^\circ}{C I_3} \text{ et } \eta = \frac{2Al\Phi_0}{C^2 I_3^2};$$

si Φ peut être regardé comme invariable entre $t=0$ et $t=t_1$, nous venons de voir que dans cet intervalle, $\lg 20X$ reste inférieur à $\varepsilon + \eta$ et que OX tourne autour de la demi-droite OZ parallèle à Φ_0 d'un angle

$$X_1 \tilde{O}X = \alpha = \frac{\Phi_0 l t_1}{C I_3}. \text{ Si } \frac{\Phi_0 l t_1}{C I_3} \text{ est considérable par rap.}$$

port aux deux quantités $\frac{A\omega_1^\circ}{C I_3}$ et $\frac{2Al\Phi_0}{C^2 I_3^2}$, c'est-à-dire si t_1 est très grand par rapport à $\frac{A}{C I_3}$ et à $\frac{l\Phi_0}{C I_3}$, l'angle $X_1 \tilde{O}X$ est considérable par rapport à l'angle que font OZ et OX pour $t=0$ et $t=t_1$; l'axe OZ a tourné lui aussi sensiblement de l'angle α autour de Z .

238. - Sur une théorie élémentaire du phénomène gyroscopique. - Le phénomène gyroscopique est une conséquence évidente du théorème des moments cinétiques, une fois admis que pendant un temps très long OZ et OX coïncident sensiblement. Toute la difficulté de la théorie consiste, précisément, à démontrer cette coïncidence approchée.

On se borne souvent à dire :

“ Pour $t=0$, $|P|$ étant très grand, ω_1 nul ou fini, OZ et OX sont sensiblement confondus; il est évident qu'il en sera de même pendant un certain temps t , d'autant plus long que $|P_0|$ est plus grand.”

Précisons ce raisonnement : soit η une quantité positive très petite, et t_1 temps pendant lequel $\frac{A\omega_1}{C I_3}$ reste inférieur à η . Plaçons-nous pour plus de clarté, dans $C I_3$, l'hypothèse où le solide S est pesant et où OZ est horizontal pour $t=0$. Pendant le temps t_1 , OX tourne autour de la verticale de l'angle $\frac{Mgl t_1}{C I_3}$. Mais on ne peut tirer de là une indication

sur le mouvement de OZ que si cet angle est très grand par rapport à $\frac{\eta C |I_0^2|}{Mgl}$. Le raisonnement élémentaire n'a donc de sens que si l'on est certain que $\frac{t_1}{\eta}$ est très grand avec $|I_0^2|$, c'est-à-dire avec ω^0 .

Or la chose n'est nullement évidente. Pour bien le comprendre, supposons S fixé par son centre de gravité et animé d'une rotation initiale ω^0 très grande autour d'une droite OX du solide sensiblement perpendiculaire à OZ ; d'une façon précise, supposons $I_0^2 = 1$, et ω^0 très grand. Initialement, les droites $OX, O\omega, OX$ sont sensiblement confondues. Les angles $XO\omega$ et $XO\omega$ restent inférieurs à η pendant un temps t , qui, si le raisonnement élémentaire est vrai est d'autant plus grand que ω^0 est plus grand. Or nous savons [N° 223] que $O\omega$ décrit dans le solide autour de OZ un cercle sensiblement confondu avec le plan XOY , avec une vitesse angulaire égale en valeur absolue à $|1 - \frac{C}{A}|$, (puisque $I_0^2 = 1$), le temps t , pendant lequel l'angle $ZO\omega$ est inférieur à η est donc $\frac{\eta}{|1 - \frac{C}{A}|}$; il est très petit si grand que soit ω^0 et $\frac{t_1}{\eta}$ est égal à $\frac{A}{A-C} \cdot (1 - \frac{C}{A})$.

Le soi-disant raisonnement élémentaire ne prouve donc absolument rien. On ne doit le regarder que comme un procédé mnémotechnique définissant l'apparence du phénomène gyroscopique dans le cas où, et fait, les droites $O\omega$ et OZ coïncident sensiblement pendant un temps très long.

239. — Mouvement d'un corps de révolution libre.

Quand le corps de révolution S est libre et soumis à des forces qui rencontrent toute l'axe et ne varient pas très rapidement, toute la discussion précédente s'applique au mouvement de S autour de G ; I^2 est constant et si S est animé d'une grande rotation initiale autour d'un axe sensiblement confondu avec l'axe de révolution GZ , le mouvement de GZ a lieu sensiblement comme il a été décrit au N° 237. Plus généralement, il en est ainsi quand le moment résultant

(1) Si S , fixé par G , est soumis à une force Φ appliquée en un point déterminé P de son axe OZ , constante en grandeur et direction mais variant notablement pendant une durée $\frac{2\pi A}{C} \left| \frac{1}{I_0^2} \right|$, le mouvement peut différer complètement de celui qu'on calculerait en confondant OZ et $O\omega$.

par rapport à G , soit \overline{GH} , de toutes les forces extérieures est constamment perpendiculaire à OZ , et ne varie pas très rapidement avec t . Si \overline{GH} coïncide constamment avec le moment par rapport à G d'une force \overline{PQ} constante en grandeur, direction et sens, et appliquée en un point déterminé P de GZ , GZ décrit lentement et uniformément un cône de révolution dont l'axe GZ est parallèle à \overline{PQ} .

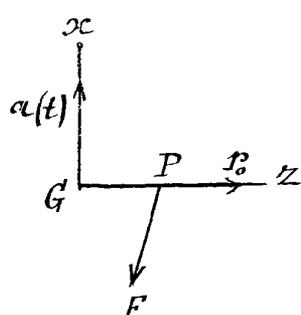
La théorie gyroscopique rend compte d'un grand nombre de phénomènes naturels, notamment de la précession des équinoxes. Ses attractions du soleil sur la terre admettent une résultante appliquée non à son centre de gravité G mais à un certain point P (variable avec la saison), de son axe GZ ; une remarque analogue s'applique aux attractions de la lune sur la terre. Dans le mouvement de la terre par rapport à des axes Gx, y, z , ayant des directions fixes relativement aux étoiles, les droites Gx, Gy, Gz restent sensiblement confondues, et la théorie gyroscopique convenablement appliquée montre que Gz doit décrire lentement un cône de révolution. Mais je n'insiste pas davantage sur cette application.

240. Inertie permanente de gyration due à la rotation d'un corps sur lui-même. — Considérons une sphère homogène S , lancée dans le vide et dont on étudie le mouvement absolu. Si elle est ^{immobile} pour $t=0$ et si on applique à son centre G une force \overline{F} constante en grandeur et direction pendant le temps t_1 , la sphère est animée d'un mouvement de translation rectiligne uniformément accéléré pour $t < t_1$; pour $t > t_1$, elle garde indéfiniment un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse $\overline{F}t_1$.

Si la force \overline{F} n'est pas appliquée au point G (ou ne passe pas constamment par G), la translation de G s'accompagne d'une rotation de la sphère sur elle-même. Supposons que nous voulions faire tourner la sphère sur elle-même avec une vitesse angulaire uniformément croissante, soit ω , autour d'une demi-droite de direction fixe Gx ; il suffit d'appliquer à S une force dont le moment par rapport à G soit un vecteur constant de sens Gx . Si par exemple S est traversé d'une aiguille GZ (de masse négligeable) perpendiculaire à Gx , et si \overline{F} est appliqué en un point déterminé P de GZ et toujours normale à GZ , la force \overline{F} devra être normale constamment

au plan zOx , orientée de gauche à droite autour de Ox et égale à $\frac{I\alpha_0}{\ell}$, α_0 désignant la valeur constante de $\frac{d\alpha}{dt}$, ℓ la longueur OP et I le moment d'inertie de S autour d'un de ses diamètres. Si, pour $t > t_1$, la force \vec{F} est supprimée, S continue à tourner indéfiniment autour de la direction fixe Gx avec la vitesse angulaire $\alpha_1 = \frac{I\ell}{I_0} \alpha_0$. La sphère S conserve indéfiniment sa vitesse de rotation une fois acquise, comme elle conserve sa vitesse de translation.

Mais supposons que S soit animée initialement d'une grande vitesse $\omega_0 > 0$ autour de l'aiguille Gz et qu'on veuille faire tourner Gz autour de la direction fixe Gx avec une vitesse angulaire uniformément croissante, en appliquant en P à S une force \vec{F} constamment normale à Gz .



Le théorème des moments cinétiques autour de G ^{montré} aussitôt que \vec{F} doit avoir une composante normale au plan zOx , soit \vec{F}_n , la même que si ω_0 était nulle, c'est-à-dire orientée positivement autour de Gx et égale à $\frac{I\alpha_0}{\ell}$; mais de plus, \vec{F} a une composante \vec{F}_x ℓ parallèle et de sens contraire à Gx et égale (à chaque instant) en valeur absolue à $\frac{I\omega_0}{\ell} = \frac{I\alpha_0 \omega_0 t}{\ell}$. L'angle de \vec{F} et du plan zGx , d'abord droit, diminue constamment et tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$. Si pour $t > t_1$, on supprime \vec{F} , il faut se garder de croire que Gz tourne indéfiniment autour de Gx avec la vitesse constante $\alpha_1 = \alpha_0 t_1$, comme dans le cas de $\omega_0 = 0$; si $\frac{\alpha_1}{\omega_0}$ est petit, Gz décrit un petit cône de révolution sensiblement réduit à une droite⁽¹⁾. Si on veut que Gz , pour $t > t_1$, tourne indéfiniment autour de Gx avec la vitesse α_1 , il faut supprimer \vec{F}_n , mais laisser à \vec{F}_x sa valeur $-\frac{I\alpha_0 \omega_0}{\ell}$. Pour $t > t_1$, le travail de \vec{F} est alors nul; pour $t < t_1$, il est égal à $\int_0^t \ell \vec{F}_n \alpha dt = I\alpha_0 \frac{t^2}{2}$ et le même que si ω_0 était nul.

Ainsi la rotation de S autour de Gz crée une résistance permanente à la gyration même commencée de Gz autour de Gx . Cette gyration ne peut être entretenu que

(1) L'axe de ce cône de révolution est la position de Gz à l'instant t_1 , position sensiblement confondue avec celle de Gz .

que par une force permanente, dont le travail d'ailleurs est nul.

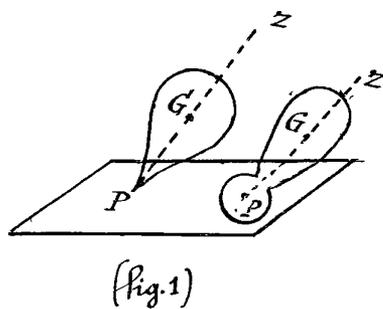
Imaginons un univers qui serait formé d'atomes sphériques animés d'une rotation très rapide sur eux-mêmes. En outre de l'inertie vulgaire, ces atomes présenteraient une inertie d'une autre nature, à savoir une résistance permanente à la gyration même commencée de leur axe de rotation. C'est à une conception de ce genre que se rattache la théorie gyrostatique de la lumière.

Ses remarques précédentes s'appliquent évidemment aussi à un solide de révolution S dont l'axe serait GZ . Elles subsistent encore évidemment si le corps S est pesant, suspendu par son centre de gravité, et si on étudie son mouvement par rapport au sol. Par exemple, considérons un gyroscope enfermé dans une boîte de façon que son axe de révolution coïncide avec une diagonale de la boîte. Si le gyroscope est animé d'une grande vitesse de rotation sur lui-même, et si nous essayons de changer l'orientation de la boîte, nous éprouvons une résistance permanente d'autant plus grande que la rotation du gyroscope est plus rapide; mais notre effort musculaire est un effort sans travail, comme dans le cas où nous supportons un poids immobile.

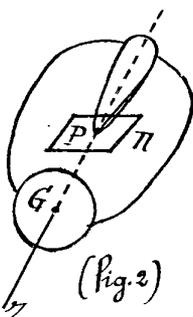
Mouvement de la toupie.

241. - Considérons un corps de révolution dont l'axe se termine par une pointe P aigue ou mousse (toupie).

Dans ce dernier cas, l'axe se termine par une petite sphère dont le centre P est sur l'axe. Nous choisissons sur l'axe comme sens Gz le sens PG ou QG .



(fig.1)



(fig.2)

La toupie est pesante, glisse sans frottement par sa pointe (aigue ou mousse) sur un plan horizontal fixe π . Nous allons étudier le mouvement de la toupie.

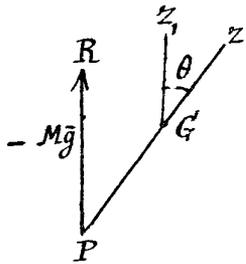
Nous appellerons θ l'angle (compris entre 0 et π) de Gz avec la verticale ascendante Gz . Quand la toupie est disposée de façon que G soit au-dessous de π , (fig.2), Gz est descendant et θ est obtus. Dans tous les cas, G descend quand θ croît.

242. Cas où l'inclinaison de la toupie reste constante.

Quand les conditions initiales sont convenablement choisies, l'axe Gz de la toupie décrit uniformément autour de la verticale GZ , un cône de révolution en même temps que S reste constant.

Pour qu'un tel mouvement soit possible, il faut qu'il satisfasse aux six équations du mouvement du solide (N° 213). Appliquons d'abord le théorème du mouvement du centre de gravité.

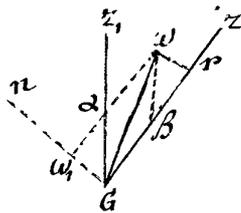
La pesanteur et la réaction du plan fixe Π étant verticales, la projection de G sur ce plan est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme. Si l'inclinaison de la toupie est constante, G se meut dans un plan horizontal. Dans le mouvement étudié, G décrit donc nécessairement une droite horizontale avec une vitesse constante. L'accélération de G étant nulle, la réaction \vec{R} de Π sur S est verticale,



ascendante et égale à $M\vec{g}$. Appliquons maintenant le théorème des moments cinétiques au mouvement autour de G ; le moment, par rapport à G , des forces extérieures se réduit au moment de \vec{R} .

Le raisonnement et les conclusions du N° 230 s'appliquent donc sans modification :

soit α la vitesse angulaire du plan z, Gz autour de la demi-droite Gz_1 ; le théorème des moments cinétiques est vérifié si on a⁽¹⁾ :



$$A \cos \theta \alpha^2 - C \rho \alpha + Mgl = 0 \quad (1)$$

l désignant la longueur GP . Si on décompose ω en deux rotations α, β autour de

Gz_1 et de Gz , la condition devient :

$$(2) \quad (A - C) \alpha^2 - C \beta \alpha + Mgl = 0.$$

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Si, pour $t=0$, S occupant une position quelconque, la rotation initiale ω de S est décomposable en une rotation α (positive ou négative) autour de Gz_1 et une rotation β autour

⁽¹⁾ La force \vec{R} est de même sens que Gz_1 et non de sens contraire ; GP est de sens contraire à Gz_1 ; ce double changement de sens laisse au terme Mgl de l'éq. (1) le même signe qu'au N° 230.

de Gz égale à $(\frac{A}{C} - 1) \alpha + \frac{Mgl}{C\Omega}$, la toupie garde quel que soit t une inclinaison constante; G décrit une droite horizontale avec une vitesse constante⁽¹⁾; Gz tourne uniformément autour de Gz ; la rotation instantanée $\overline{G\omega}$ est à chaque instant la résultante des rotations α et β autour de Gz , et de Gz .

En particulier, si $\theta = 0$ ou π et si la rotation initiale de la toupie a lieu autour de l'axe Gz (vertical), Gz reste infiniment vertical, la toupie tourne ^{uniformément} autour de Gz (toupie dormante). Si la vitesse initiale de G est nulle, G reste immobile; la toupie tourne indéfiniment autour de son axe fixe et vertical.

Si $|P_0|$ est très grand, une des valeurs de α données par (1) est petite et sa partie principale est $\frac{Mgl}{C\Omega}$. Dans le mouvement correspondant, l'axe Gz tourne autour de Gz , dans le même sens que le solide S autour de la demi-droite PG avec une vitesse angulaire très petite, sensiblement égale à $\frac{Mgl}{C\Omega}$.

Dans les conditions initiales précédentes, ω_0 est situé dans le plan zGz , et égal en valeur absolue à $\alpha \sin \theta$. Si on suppose maintenant ω_0 de direction quelconque et très petit, les conditions initiales sont très peu modifiées, et le mouvement pendant un temps très long diffère peu du mouvement que nous venons de décrire. Mais nous allons montrer d'une façon tout à fait rigoureuse que, si $|P_0|$ est très grand, l'inclinaison de la toupie reste sensiblement constante quel que soit t .

Remarque sur le cas où S est un corps de révolution de forme quelconque.

Soit Q le point de contact de S et du plan Π : l'angle θ est égal à l'angle de la normale

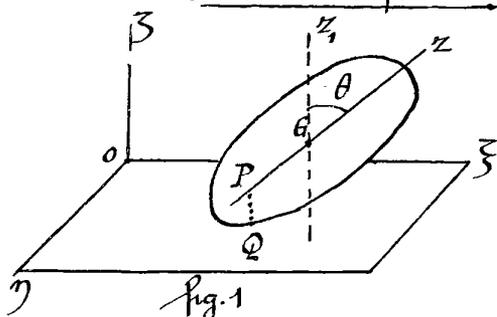


Fig. 1

que de la vitesse (horizontale) de P , et de la vitesse communiquée à G par la rotation $\overline{P\omega}$. Comme $\overline{P\omega}$ est dans le plan vertical zGz (pour $t=0$), cette dernière vitesse est aussi horizontale.

(1) La vitesse initiale de G est nécessairement horizontale dans le cas considéré. En effet, cette vitesse est la somme géométrique

en ϱ à S avec l'axe GZ de S . Quand θ reste constant, ϱ varie sur un parallèle de S , la distance ζ de G au plan π (plan tangent en ϱ) reste invariable ainsi que la distance GP de G au point d'intersection P de l'axe GZ et de la verticale de ϱ (normale en ϱ à S). Soit l la distance de G à P comptée positivement en sens inverse de GZ : l et ζ sont des fonctions ϱ connues de θ qui dépendent de la méridienne de S .

Quelle que soit la forme du corps, les conditions énoncées ci-dessus sont nécessaires et suffisantes pour que l'axe GZ décrive uniformément autour de GZ un cône de révolution, ρ restant constant. Mais dans la condition (1) [ou (2)], l est une fonction de θ représentant la distance positive ou négative GP .

Mouvement général de la toupie.

243. - Equations du mouvement.

Soit $O\xi\eta\zeta$ les axes fixes, choisis de façon que le plan $\xi O \eta$ coïncide avec le plan π et que $O\zeta$ soit la verticale ascendante. La position de la toupie dépend de cinq paramètres, car on a :

$$\zeta = l_1 + l \cos \theta,$$

l_1 désignant le rayon de la pointe mousse, qui est nul si la pointe est aigue.

Cherchons cinq équations indépendantes de la réaction du plan π .

Le théorème du mouvement du centre de gravité G (ou ξ, η, ζ) donne aussitôt :

$$\xi' = \xi_0', \quad \eta' = \eta_0';$$

la projection de G sur le plan π est animée d'un mouvement rectiligne et uniforme.

Le théorème des forces vives donne (d'après le théorème de Koenig) :

$$M(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + A\omega_1^2 + Cp^2 = 2Mgl \cos \theta + C\dot{\theta}^2$$

C et A désignant les moments d'inertie de S autour de GZ et autour d'une droite Gx normale à GZ .

Le théorème des moments cinétiques dans le mouvement autour de G donne, en projetant sur GZ :

$A\omega_1 \cos \tau + C \cos \theta = Cte$, ($\tilde{C} = z, \tilde{G}\omega_1$),
et en projetant sur Gz : $P = P_0$.

Ces cinq équations suffisent⁽¹⁾ à déterminer le mouvement connaissant les conditions initiales de S . Nous verrons l'an prochain que le problème s'achève par quadratures. Bornons-nous ici au cas où $|P_0|$ est très grand.

244. - Cas où $|P_0|$ est très grand.

Ecrivons les équations précédentes ainsi:

$$(1) \quad \zeta = \zeta_0, \quad \eta = \eta_0, \quad P = P_0,$$

$$(2) \quad A(\omega_1 \cos \tau - \gamma \cos \tau_0) = CP_0 (\cos \theta_0 - \cos \theta), \quad (\gamma = \omega_1^0)$$

$$(3) \quad M\zeta'^2 + A\omega_1^2 - M\zeta_0'^2 - A\gamma^2 = 2Mgl (\cos \theta_0 - \cos \theta).$$

L'équation (2) entraîne:

$$(4) \quad |\cos \theta_0 - \cos \theta| \ll \frac{A(\omega_1 + \gamma)}{CP_0}, \quad (P_0 = |P_0|),$$

et l'équation (3) entraîne:

$$(5) \quad A\omega_1^2 - A\gamma^2 - M\zeta_0'^2 \ll 2Mgl (\cos \theta_0 - \cos \theta),$$

d'où, d'après (4):

$$A\omega_1^2 - A\gamma^2 - M\zeta_0'^2 \ll 2 \frac{Mgl A(\omega_1 + \gamma)}{CP_0}$$

Mais $\zeta_0'^2$ est au plus égal⁽²⁾ à $l^2\gamma^2$; on a donc:

$$A\omega_1^2 \ll \frac{2Mgl A(\omega_1 + \gamma)}{CP_0} + \gamma^2 (A + Ml^2),$$

ou encore:

$$(6) \quad \omega_1^2 - 2c\omega_1 - 2cp - \gamma^2 \left(1 + \frac{Ml^2}{A}\right) \ll 0, \quad \text{avec } c = \frac{Mgl}{CP_0}.$$

Le premier membre de (6) a une racine négative et une racine positive, Ω_1 , et comme ω_1 est positif, l'inégalité (6) entraîne:

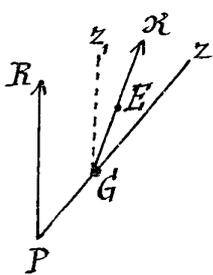
$$(7) \quad 0 \ll \omega_1 \ll c + \sqrt{(c + \gamma)^2 + \frac{Ml^2}{A}\gamma^2} = \Omega_1$$

(1) Si pendant le mouvement, $\theta \equiv \theta_0$, les équations précédentes montrent qu'on est nécessairement dans le cas particulier du n° précédent.

(2) La vitesse verticale de G est la composante verticale de la vitesse communiquée à G par la rotation $\overline{P}\omega$, vitesse qui est égale à $l\omega_1$; d'où $|\zeta_0'| \ll l\gamma$.

Si $|\rho|$ est assez grand pour que $\frac{A\Omega}{C|\rho|}$ soit inférieur à ε , $\text{tg } \angle G\bar{K}$ et $\text{tg } \angle G\bar{W}$ restent inférieurs⁽¹⁾ $\frac{\varepsilon}{C|\rho|}$ respectivement à ε et à 2ε ; l'inégalité (4) montre que $[\cos\theta - \cos\theta]$ reste inférieur à 2ε . Les droites $G\bar{Z}$, $G\bar{W}$, $G\bar{K}$ restent sensiblement confondues, quel que soit t et l'angle θ demeure compris entre deux limites très voisines de θ_0 et dont la différence tend vers zéro avec $\frac{1}{|\rho|}$.

D'autre part, la vitesse du point R est équipollente, à chaque instant t , au moment par rapport à G de la réaction \bar{R} du plan Π . Supposons pour fixer les idées $|\rho| > 0$, et prenons sur la demi-droite $G\bar{K}$ une longueur $G\bar{E}$ égale à l'unité; on voit immédiatement que la vitesse de E est orientée positivement autour de $G\bar{Z}$; à chaque instant t , elle est égale à $\frac{R \times l \sin\theta}{G\bar{K}}$, c'est-à-dire sensiblement à



$\frac{Rl \sin\theta}{C|\rho|}$; la vitesse angulaire du plan $z, G\bar{Z}$

autour de $G\bar{Z}$, est sensiblement égale à $\frac{Rl}{C|\rho|}$. D'autre part, comme \angle reste sensiblement constant, l'équation

$$M\ddot{\angle} = R - Mg$$

(où R est compté positivement dans le sens $G\bar{Z}$) nous montre que la valeur moyenne de R (pendant un intervalle de temps quelconque qui n'est pas trop petit) est sensiblement Mg .

Pour nos sens, la droite $G\bar{Z}$ décrit un cône de révolution⁽²⁾ autour de $G\bar{Z}$, un cône de révolution⁽²⁾; la vitesse angulaire du plan $z, G\bar{Z}$ autour de $G\bar{Z}$ est de sens contraire à la rotation du solide sur lui-même autour de GP et égale en valeur absolue à $\frac{Mgl}{C|\rho|}$.⁽³⁾

(1) $G\bar{K}$ désignant le moment cinétique de S dans son mouvement autour de G .

(2) Ceci suppose que $\sin\theta_0$ n'est pas très petit; dans ce dernier cas, $G\bar{Z}$ reste sensiblement vertical (Voir le N° 232, note).

(3) Le calcul montre (comme nous le verrons l'an prochain) que θ subit de petites variations périodiques très rapides (mutations), dont la période est sensiblement égale à $\frac{2\pi A \sqrt{1 + \frac{Ml\rho^2}{A} \sin^2\theta_0}}{C|\rho|}$ pour $|\rho|$ très grand.

La réaction \bar{R} subit des variations de même période qui peuvent être considérables. Les conditions pour qu'on puisse sûrement appliquer au mouvement de la toupie autour de G les conclusions du N° 232, ne sont donc pas remplies; néanmoins ces conclusions seraient ici exactes.

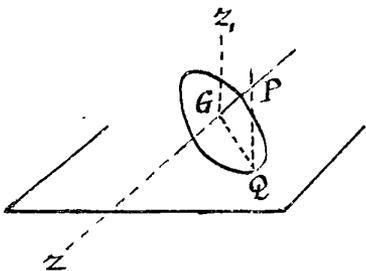
245. - Tous les cas particuliers signalés aux N^{os} 233-234 se retrouvent ici.

1^o Si $\sin \theta_0$ est très petit, GZ reste sensiblement vertical. La toupie dormante est donc stable, que θ soit nul ou θ égal à π , du moment que $|P_0|$ est grand. Mais, dans le cas de $\theta = \pi$ (G au dessous de Π), la toupie dormante est stable quel que soit P_0 . Dans le cas de $\theta = 0$ (G au-dessus de Π), la toupie dormante n'est stable que si $|P_0|$ dépasse une certaine limite. La démonstration est la même qu'au N^o 234.

2^o Si pour $t=0$, la toupie tourne rigoureusement sur elle-même [N^o 233], γ est nul et par suite ζ_0 ; l'inégalité (5) nous montre que $\cos \theta_0 - \cos \theta$ est nécessairement positif; la toupie commence par céder à l'action de la pesanteur son axe s'incline d'abord imperceptiblement; mais $\cos \theta_0 - \cos \theta$ reste moindre que $\frac{AMgI}{C^2 \rho^2}$.

246. - Extension au cas d'un corps de révolution de forme quelconque. - Tout ce qui précède subsiste avec des modifications insignifiantes quelle que soit la forme de la méridienne de S . Si $|P_0|$ est très grand, GZ décrit \mathcal{O} sensiblement autour de GZ , un cône de révolution, dans le sens inverse de la rotation de S sur lui-même autour de GP [fig. 1 de la page 253], et la vitesse angulaire du plan Z, GZ autour de GZ , est sensiblement $\frac{MgI(\theta_0)}{C\rho}$.

Par exemple, si S est une pièce de monnaie en contact par sa tranche avec le plan Π , on a: $GQ = \lambda \sin \theta$, (λ étant le rayon de la pièce), et le mouvement précessionnel de la pièce autour de GZ_1 a lieu dans le même sens que la rotation de la pièce autour de la demi-droite GZ perpendiculaire au plan du disque et menée vers le bas.



Influence du frottement. - Le frottement du plan Π sur la toupie modifie les apparences du mouvement: même si ce frottement est très faible, il éteint à la longue la rotation de la toupie qui finit par tomber sur le plan Π , mais, dans certains cas, il commence par la redresser. Nous ne dirons rien de plus, cette année, sur cette influence

du frottement dont l'étude est difficile.

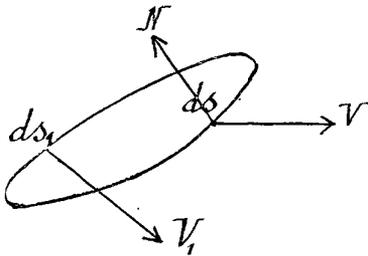
Le jeu du diabolo est une autre application du phénomène gyroscopique.

C'est ce phénomène qui rend compte également comme nous l'allons le voir, de la déviation des projectiles.

Détermination des projectiles.

247. - Lois de la résistance de l'air.

Considérons un solide S mobile dans l'air, et soit ds un élément de la surface du solide, V la vitesse relative (par rapport à l'air) de cet élément⁽¹⁾



L'élément ds éprouve de la part de l'air une résistance $\vec{f} ds$, qu'on peut décomposer en une force normale à l'élément ds , soit

$\vec{f}_n ds$, dite résistance normale, et une force tangente à ds ,

soit $\vec{f}_t ds$, dite force de frottement. La première, de beaucoup plus importante, n'existe que pour les éléments ds qui frappent l'air, c'est-à-dire tels que la vitesse V soit dirigée en dehors du solide (au voisinage de ds); dans le cas de la figure, elle n'existerait pas pour l'élément ds .

On admet que la résistance normale $\vec{f}_n ds$ est dirigée en sens inverse de la composante normale V_n de V et qu'elle est une fonction rapidement croissante de V_n ; on adopte souvent la formule:

$$f_n = \lambda V_n^2,$$

λ désignant un coefficient qui dépend du fluide considéré, de sa température et de sa pression. D'après un raisonnement grossier de Newton, dans un fluide incompressible on aurait

λ désignant la densité mécanique du fluide frappé par ds .

(1) Si l'air est immobile, V est la vitesse de l'élément ds ; si le solide et l'air sont mobiles, V est la différence géométrique entre la vitesse de ds et la vitesse de l'élément d'air en contact avec lui. Tout ce qui suit s'appliquerait au cas du mouvement de S dans un fluide quelconque.

Dans un fluide compressible, d'après Didon et Laplace, λ est supérieur à d ; dans l'air, on aurait :

$$\lambda = 1,35 d.$$

L'air étant aux conditions normales de température et de pression, cette loi donnerait :

$$\lambda = \frac{9}{10^4} \text{ (en C. G. S.)}.$$

Considérons un plan d'un mètre carré animé dans l'air immobile d'une vitesse de translation normale au plan et égale à 1^m par seconde : si on admet les lois précédentes, la résistance totale opposée par l'air au plan serait $\frac{90}{981}$ Kilogrammes-poids - $0^{kg} 09$ (coefficient vulgaire de résistance de l'air). D'autres anciennes mesures, ce nombre était compris entre 0,085 et 0,13. Mais si on adopte une telle valeur de ce coefficient, et si on applique les lois précédentes au vol des oiseaux et des aéroplanes, on arrive à cette conclusion que ni les oiseaux ni les aéroplanes ne devraient quitter le sol. Certains auteurs modernes ont proposé de tripler et même de quintupler le coefficient en question.

En fait, ce que prouvent les expériences récentes, c'est qu'il ne saurait exister une loi simple (même très grossièrement approchée) de la résistance de l'air. La résistance opposée par l'air à une demi-sphère creuse (de centre CP) animée d'une translation donnée parallèle à son axe CP est beaucoup plus grande si cette vitesse a le sens PC (fig. 1) que dans le cas contraire (fig. 2)

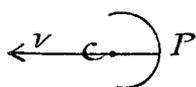


fig. 1

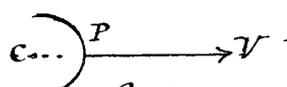


fig. 2

Bien plus, un plan rectangulaire d'aire donnée, animé d'une translation de vitesse donnée et normale au plan, rencontre une résistance toute différente suivant le rapport de ses dimensions.

Enfin, appliquons les lois énoncées à une surface plane d'aire A animée d'une vitesse de translation quelconque V faisant un angle i avec le plan : on trouve aussitôt que les résistances normales admettent une résultante égale à $\lambda A \cdot V^2 \sin^2 i$ et les résistances tangentielles une résultante $\mu S V^2 \sin^2 i$, appliquées toutes deux au centre

de gravité de l'aire S regardée comme homogène. Or il n'en est rien, et le point d'application de la première résultante, par exemple, varie notablement pour de faibles variations de i . C'est même là une difficulté sérieuse pour la stabilité des aéroplanes.

Le mouvement d'un solide dans un fluide constitue, au fond, un problème d'hydrodynamique d'une extrême complexité. Les lois empiriques de la résistance de l'air donnent néanmoins des indications qualitatives sur le phénomène, mais il faut bien se garder d'en tirer sans précaution des conséquences numériques.

248. - Influence de la forme du solide. - Corps semblables.

Admettons les lois énoncées et appliquons les à un corps de forme quelconque S animé d'une vitesse de translation V de direction donnée par rapport au corps: la somme géométrique \bar{R} des résistances et leur moment \overline{OH} par rapport à un point O doit être proportionnelle à V^2 ; de plus, si on compare plusieurs corps semblables, V étant toujours orientée de la même manière dans le corps, \bar{R} doit varier proportionnellement aux carrés des dimensions homologues. L'expérience vérifie assez bien ces conclusions, on peut écrire:

$$R = \nu l^2 V^2,$$

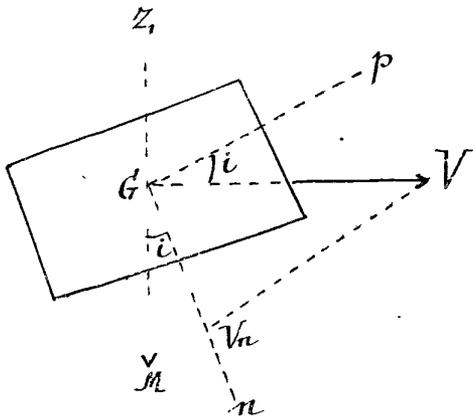
l étant une dimension déterminée de S et ν un coefficient qui dépend de la forme de S et de la direction de V dans S .

Si S tourne autour d'un axe fixe OZ avec la vitesse angulaire ω , la somme géométrique \bar{R} et le moment par rapport à O , soit \overline{OH} , des résistances de l'air sont proportionnelles à ω^2 . Si on considère un corps homothétique de S par rapport à O et tournant autour de OZ avec la même vitesse ω , soit λ le rapport d'homothétie: les nouveaux vecteurs \bar{R} et \overline{OH} se déduisent des précédents en les multipliant le premier par λ^4 et le second par λ^5 . L'expérience vérifie assez bien ces conclusions, pourvu que ω et λ ne varient pas dans de trop larges limites.

249. - Principe de l'aéroplane. -

Considérons une plaque solide S de forme quelconque d'aire A , animée à l'instant t dans l'air immobile d'une

vitesse de translation horizontale \bar{V} , qui fait avec le plan S un certain angle i (angle d'attaque). Pour plus de simplicité, nous supposons que cette vitesse se projette sur le plan S suivant une ligne de plus grande pente du plan (descendante), et se confond alors avec l'angle aigu de la verticale descendante et de la normale



GN au plan.

Cherchons la projection R_z sur la verticale ascendante de la somme géométrique des résistances de l'air. En appliquant les lois du N° 247, on trouve aussitôt :

$$R_z = AV^2 \sin i \cos i [\lambda \sin i - \mu \cos i].$$

Pour qu'elle fasse équilibre à la pesanteur, il faut qu'on ait :

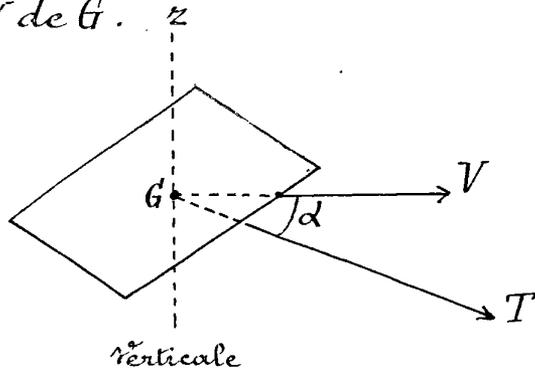
$$R_z = Mg.$$

Pour que ce résultat soit obtenu avec la vitesse V la plus petite possible, il faudra donner à l'inclinaison i la valeur qui rend maxima l'expression

$$\sin 2i (\lambda \sin i - \mu \cos i).$$

Si on néglige les frottements de l'air, c'est-à-dire μ , cette valeur est donnée par $\operatorname{tgi} = \sqrt{2}$

- Si on suppose la plaque homogène et d'épaisseur négligeable, son centre de gravité G coïncide avec le centre de gravité de l'aire A supposée homogène. Quand la plaque est animée d'une translation instantanée quelconque, la pesanteur et les résistances de l'air ont une résultante passant par G ; la plaque livrée à elle-même ^{sans rotation initiale} sera animée d'un mouvement de translation, et G se mouvra dans le plan vertical fixe contenant la position et la vitesse initiale \bar{V} de G .



Supposons qu'une ficelle soit attachée au point G et exerce sur la plaque une traction T constante en grandeur direction et sens, située dans le plan vertical GVZ et

peu inclinée sur \overline{GV} . Dans quel cas la plaque sera-t-elle animée d'une translation (horizontale) rectiligne et uniforme? Soit α l'angle TGV ; il faut et il suffit qu'on ait.

$$Mg + T \sin \alpha = AV^2 \sin i \cos i (\lambda \sin i - \mu \cos i)$$

$$T \cos \alpha = AV^2 \sin i \cos i (\lambda \cos i + \mu \sin i).$$

C'est le problème du cerf-volant. Il conviendra que la ficelle soit aussi horizontale que possible (d'où la nécessité de lâcher de la corde), que l'inclinaison du cerf-volant corresponde au maximum de l'expression $\sin 2i (\lambda \sin i - \mu \cos i)$; enfin si l'air est immobile il faudra courir très vite, la corde une fois tendue pour communiquer au cerf-volant une vitesse horizontale suffisante avant qu'il ne retombe à terre.

Si il y a du vent, il suffira d'opposer le cerf-volant au vent. Supposons uniforme la vitesse \overline{W} du vent et soit $X'Y'Z'$ des axes (de directions fixes par rapport au sol) et qui accompagnent le vent; ces axes, par rapport auxquels l'air est immobile et le cerf-volant animé initialement de la vitesse \overline{V} horizontale \overline{W} , sont animés d'une translation horizontale rectiligne et uniforme; tout ce qui précède s'applique donc sans modification au mouvement du cerf-volant rapporté à ces axes.

Le principe du cerf-volant est également celui de l'aéroplane, mais la ficelle est remplacée par un moteur qui faisant tourner dans l'air une hélice (hélice propulsive liée à S , entretient la vitesse horizontale de S).

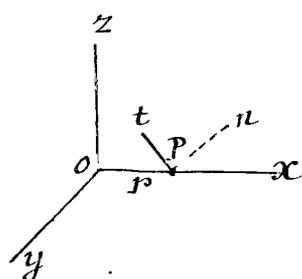
250. - Principe de l'hélicoptère.

Considérons une vis à filets carrés

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = a \theta,$$

et la portion de cette surface obtenue en faisant varier r de 0 à l et θ de zéro à $\frac{h}{a}$. Imaginons cette aire gauche S réalisée [hélice] et mobile dans l'air autour de l'axe fixe OZ (supposé vertical) avec la vitesse angulaire ω ; OZ étant la verticale ascendante, et les quantités a et l étant de même signe (positives par exemple), les résistances normales de l'air sur l'hélice ont une résultante soit \overline{R} , parallèle ⁽¹⁾ à OZ , et de

(1) On le voit aussitôt en considérant deux éléments d'aire de l'hélice symétriques par rapport à OZ .



sens oz ; les résistances tangentielle ont une résultante verticale descendante mais que nous négligeons. Calculons \mathcal{O} la résultante \bar{R} (force ascensionnelle de l'hélice)⁽¹⁾

En un point P de l'hélice située à la distance r de OZ , (sur ox par exemple), la normale Pn menée vers le haut fait avec la direction de la vitesse de P (perpendiculaire au plan ZOP) un angle obtus, dont la tangente en valeur absolue est $\frac{r}{a}$; la résistance normale de l'air sur un élément d'aire $ds = \sqrt{r^2 + a^2} dr d\theta$ de l'hélice est

$$\lambda r^2 \omega^2 \times \frac{1}{1 + \frac{r^2}{a^2}} \times \sqrt{r^2 + a^2} dr d\theta = \rho ds$$

pour avoir la projection sur OZ , il nous faut multiplier ρds par $\cos(PZ, OZ) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{r^2}}}$. D'où:⁽²⁾

$$\begin{aligned} (1) \quad R &= \lambda \omega^2 a^2 \iint_S \frac{r^3}{a^2 + r^2} dr d\theta = 2\lambda \omega^2 a h \int_0^l \frac{r^3 dr}{a^2 + r^2} \\ &= \lambda \omega^2 a h \left[l^2 - a^2 \log \left(1 + \frac{l^2}{a^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Pour les mêmes raisons de symétrie, le moment résultant par rapport à O des résistances de l'air est dirigé selon OZ , mais de sens contraire; sa valeur absolue \mathcal{N} est facile à calculer. Négligeons les frottements de l'air; le moment par rapport à OZ de $\bar{\rho} ds$ est $-r \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2}}} \times \rho ds$; d'où:

$$\begin{aligned} (2) \quad \mathcal{N} &= \iint_S \lambda r^2 \omega^2 \times \frac{1}{1 + \frac{r^2}{a^2}} \times \sqrt{r^2 + a^2} \times r \times \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{a^2}}} dr d\theta \\ &= a R. \end{aligned}$$

(1) Si a et ω étaient de signe contraire, \bar{R} serait une force verticale descendante.

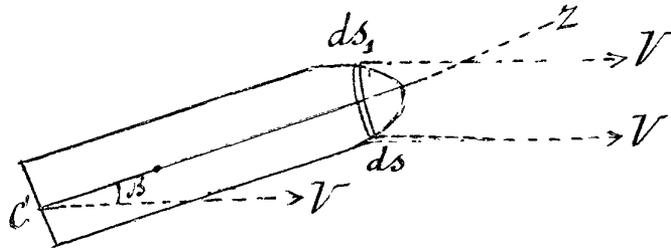
(2) L'aire A de S est: $h \left\{ l \sqrt{1 + \frac{l^2}{a^2}} + a \log \frac{l + \sqrt{1 + \frac{l^2}{a^2}}}{a} \right\}$; si $\frac{l}{a}$ est grand on a sensiblement: $A = \frac{h}{a} l^2$, et $R = \lambda \omega^2 a h l^2 = \lambda \omega^2 A a^2$.

Si on suppose l'hélice S tournant dans l'air immobile avec une vitesse angulaire ω autour de son axe libre et d'abord vertical, l'hélice s'élèvera verticalement si ω est assez grand pour que la valeur de R donnée par (1) soit supérieure au poids de l'hélice et si de plus le sens de ω autour de la verticale ascendante est positif ou négatif suivant que l'hélice est dextrogyre ou lévogyre.

C'est là le principe des hélicoptères (appareils plus lourds que l'air munis d'hélices, axe vertical ou hélices sustentatrices). Si l'appareil est muni d'une hélice à axe horizontal, les réactions de l'air sur cette hélice pousseront le corps parallèlement à l'axe de l'hélice (hélices propulsives). Une hélice dont l'axe n'est ni vertical ni horizontal est à la fois propulsive et sustentatrice (la rotation ayant un sens convenable)⁽¹⁾.

252. - Résistance opposée à un corps de révolution.

Considérons un corps de révolution convexe animé d'une translation V (qui fait un petit angle avec le sens Cz de l'axe de révolution) et d'une rotation quelconque sur lui-même. Soit ds un des éléments de la surface de S qui frappe l'air, et v_n la composante normale à ds de la vitesse de cet élément: v_n se réduit à la projection de V sur la normale. Soit Cz l'axe de révolution de S , $Cxyz$ un trièdre trirectangle, le plan Czx renfermant V . Chaque résistance \bar{p} ds rencontre Cz en un certain point, soit II , et peut être décomposée en trois forces parallèles à Cz , Cx et Cy . Pour raison de symétrie, les composantes parallèles à Cy se détruisent, les résistances parallèles à Cz admettent



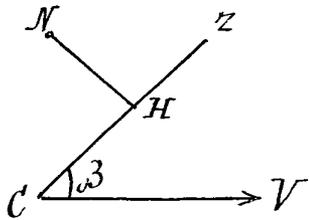
une résultante, soit \bar{R} , dirigée selon Cz en sens inverse de la projection de V sur Cz . Enfin les composantes parallèles à Cx admettent une

(1) Pour étudier rigoureusement les résistances de l'air, il faudrait tenir compte de la vitesse de déplacement de l'axe de l'hélice dans l'air, dès que cette vitesse devient appréciable devant ω .

Dans la pratique, on supprime la partie de l'hélice S voisine de l'axe dont le rôle est peu utile, et on la remplace par un cadre évidé et léger. Mais ces modifications ne changent point, dans leur esprit, les conclusions précédentes.

résultante de sens HN [c'est-à-dire dirigée par rapport à CZ du côté opposé à V].

En effet, soit ds et ds_1 deux éléments symétriques par rapport au plan zCy : l'élément ds_1 , situé par rapport à ce plan du côté opposé à CV , ou bien ne supporte aucune résistance normale ou bien fait avec V un angle plus petit que celui de ds avec V ; la résistance normale qui s'exerce sur ds est donc toujours supérieure à



celle qui s'exerce sur ds_1 , et comme les normales à ds et à ds_1 font le même angle avec Cz , la composante perpendiculaire à Cz de la résistance que supporte ds l'emporte toujours (en grandeur) sur la composante analogue relative à ds_1 .

Quant à la résistance tangentielle que subit un élément ds , elle est directement opposée à la projection sur ds de la vitesse \vec{v} de cet élément. Or \vec{v} est la résultante de V et de la vitesse W engendrée par la rotation de S sur lui-même; dans les applications W est petit devant V . De plus, V fait un petit angle avec Cz . Si la rotation était nulle et V de sens Cz , les résistances tangentielles auraient exactement une résultante opposée à V , soit R' , et qui ne ferait qu'accroître R d'une certaine quantité. La rotation du projectile sur lui-même et la faible inclinaison de V sur Cz ne font qu'ajouter à R' des forces négligeables.⁽¹⁾ En définitive toutes les résistances de l'air peuvent être remplacées par une force dirigée selon Cz , soit R , et par une force normale à Cz , appliquée en un certain point H de l'axe Cz , située dans le plan zCv , et dirigée par rapport à Cz du côté opposé à CV , soit la force N .

Soit β l'angle que fait V avec le sens Cz adopté sur l'axe de révolution. Si $\beta = 0$, les résistances admettent une résultante directement opposée à Cz ; $N = 0$.

Pour des valeurs données de β et de V , ces deux forces

(1) Si on en tenait compte, il faudrait ajouter à R : 1° une force N_1 normale à Cz , de sens contraire à N mais plus faible, appliquée en un certain point H_1 de Cz ; 2° un couple d'axe sensiblement dirigé selon Cz et retardant la rotation de S sur lui-même. Les forces N et N_1 ont une résultante N' perpendiculaire à Cz , du même sens que N et appliquée en un certain point H' de Cz .

et le point H sont bien déterminées; quand β tend vers zéro, H tend vers une certaine position H_0 qu'on appelle centre de résistance de $S^{(1)}$. La force HN tend vers zéro avec β et (pour V donné) peut être regardée comme proportionnelle à β , quand β reste petit.

203. - Par exemple, si le projectile est un cône de révolution limité par une section droite, le point H est (quelle que soit la direction de V) le point d'intersection de l'axe du cône par une normale au cône menée en un point M situé au tiers d'une génératrice à partir de la base. Il suffit, pour le voir, de considérer l'aire du cône comprise entre deux génératrices infiniment voisines; les résistances normales sur cette aire ont une résultante appliquée au centre de gravité de l'aire (regardée comme homogène); cette résultante rencontre l'axe au point H que nous venons de définir. Soit α le demi-angle au sommet du cône; on a:

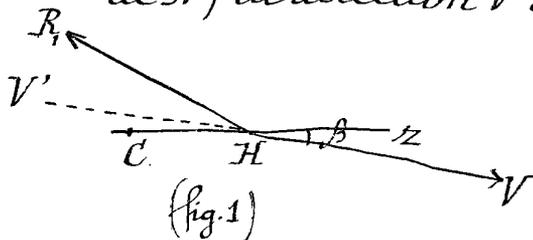
$$H = \frac{2}{3} \frac{PC}{\cos^2 \alpha}$$
 Quand le cône est homogène, H est entre G et P ou entre G et C suivant que $\sin \alpha$ est \lt ou $\gt \frac{1}{3}$.

Un calcul facile montrerait que (si on néglige les résistances tangentiellles), on a sensiblement pour les petites valeurs de β :

$$R = \lambda \sin^3 \alpha A_0 \times V^2, \quad (A_0 \text{ aire latérale du cône})$$

$$N = \lambda \cdot \beta \cdot \cos^2 \alpha \cdot \sin \alpha \cdot A_0 \times V^2,$$

d'où $\frac{N}{R} = \cot^2 \alpha \times \beta$. En fait, $\frac{N}{R}$ est notablement plus petit que cette valeur, parce que R s'accroît des résistances tangentiellles. Mais si $\tan \alpha$ est beaucoup plus petit que 1 (par exemple égal à $\frac{1}{8}$), $\frac{N}{R}$ est encore très supérieur à β . Si donc R_1 désigne la résultante des résistances de l'air (c'est-à-dire de R et de N) la direction V' opposée à V est comprise entre ϑ



⁽¹⁾ Si on prenait le sens opposé sur CZ , on obtiendrait un autre centre des résistances, mais dans les applications, S se termine par une pointe, et le sens choisi CZ va de la base à la pointe.

les demi-droites \bar{R}_1 et zC .

Comme les projectiles usuels ressemblent grossièrement à des cônes pour lesquels $\text{tg} \alpha$ est très inférieur à 1, la même conclusion doit s'appliquer à ces projectiles. De plus, H_0 doit se trouver entre G et la pointe du projectile.

Nous allons comparer ces résultats aux lois empiriques déduites des expériences de tir.

254. - Sois de la résistance pour les projectiles usuels.

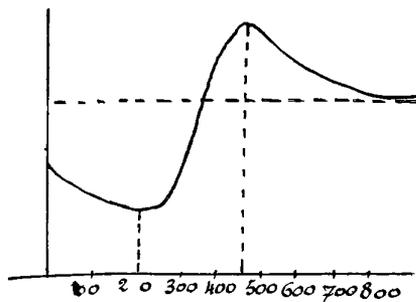
Le mouvement d'un projectile dans l'air peut être étudié très simplement quand ce projectile est sphérique et homogène⁽¹⁾. Si la sphère est animée initialement d'un mouvement de translation, il en est de même quel que soit t , et le mouvement du centre de la sphère peut être étudié comme celui d'un point libre (N^{os} 143-147).

Mais la résistance de l'air sur un tel projectile est considérable. Pour atténuer cette résistance, on a été conduit à allonger l'avant du projectile : les projectiles modernes communément employés ont la forme d'un long cylindre de révolution terminé par une pointe ogivale. Le projectile S est toujours formé de couches de révolution homogènes ; son centre de gravité G est sur l'axe de révolution. Dans ce qui suit, nous désignerons toujours par GZ l'axe de révolution du projectile mené du centre de gravité vers la pointe P .

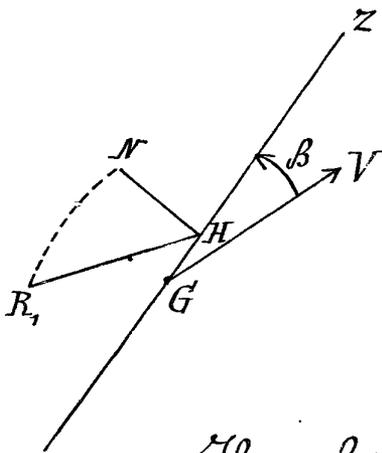
Si le projectile S est animé d'une vitesse de translation V de direction et de sens GZ , il est évident pour raison de symétrie que les résistances de l'air ont une résultante \bar{R}_0 directement opposée à GZ et qui est une certaine fonction croissante⁽²⁾ de la vitesse (nulle avec V), soit $\varphi(V)$, fonction

(1) Il suffit même que le centre de gravité coïncide avec le centre géométrique de la sphère.

(2) Pour les projectiles ogivaux de la marine, la loi $R = \varphi[V]$ déduite des expériences du polygone de Gâvre, est la suivante : $\frac{R}{M} = \lambda V^2 f[V]$, λ désignant un certain coefficient constant qui dépend des dimensions du projectile et de la densité de l'air, et $f[V]$ étant défini par la courbe ci-contre où les vitesses comptées en mètres à la seconde sont portées en abscisse. Le maximum de $f[V]$ correspond sensiblement à la vitesse du son dans l'air



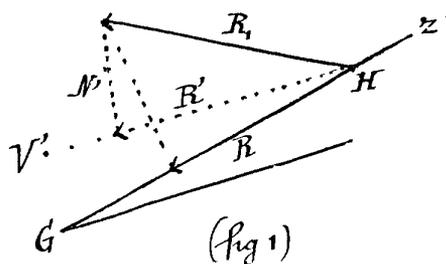
qui dépend de la forme du projectile. Si la vitesse de translation fait avec GZ un petit angle β , les résistances de l'air doivent encore par raison de symétrie admettre une résultante située dans le plan zGV , soit HR , H étant un certain point de GZ , et quand β tend vers zéro, H tend vers une position limite H_0 (centre de résistance du projectile). Si S est en outre animé d'une rotation sur lui-même qui ne donne aux points périphériques qu'une vitesse assez faible devant la vitesse de translation, l'expérience montre qu'il faut ajouter aux forces précédentes un petit couple d'axe GZ retardant la rotation et que nous négligeons dans ce qui suit. Pour les projectiles usuels, le point H_0 est à peu près à la moitié de l'ogive, donc entre le centre de gravité G et la pointe P . La force HN , composante de HR , normale à GZ , est dirigée, par rapport à GZ du côté opposé à GV . Quand β est petit, elle peut être regardée comme proportionnelle à β ou, si on veut, à $\sin \beta$, soit



$N = \mu(V) \sin \beta$, μ désignant une certaine fonction croissante de V , nulle avec V , et qui dépend de la forme du projectile. Quant à la projection R de HR sur GZ , elle se confond sensiblement avec H_0 quand β est petit, et sa valeur absolue est $\varphi(V)$.

Il est loisible de remplacer cette force HN par une force équipollente appliquée en G et un couple dont l'axe est défini par le moment de HN relatif à G (couple perturbateur): cet axe GL est normal au plan zGV , et égal à $l\mu(V) \sin \beta \equiv \lambda(V) \sin \beta$, si $l = GH$. Son sens (d'après ce qui précède) est tel qu'un observateur placé les pieds en G , la tête en L , voit s'effectuer de gauche à droite la petite rotation qui amène GV sur GZ . Par exemple, si GZ et V sont dans le plan x, GZ , [fig. 2], GV étant compris entre GX et GZ , et GZ entre GV et GZ , le vecteur GL est directement opposé à Gy .

Enfin, décomposons HR en une force R' de sens opposé à V et en une force N' normale à V . Pour les projectiles usuels, la demi-droite HV' de sens opposé à V est comprise (comme nous l'avons prévu) dans l'angle aigu formé par



Les deux demi-droites $\overline{R_1}$ et \overline{HG} [fig. 1]. La force \overline{R} est dite la force retardatrice, et la force $\overline{N'}$ la force déviatrice (1).

On a :

$$R' = R \cos \beta + N \sin \beta,$$

$$N' = N \cos \beta - R \sin \beta = \sin \beta [\mu \cos \beta - R].$$

ou, en remplaçant $\cos \beta$ par 1 :

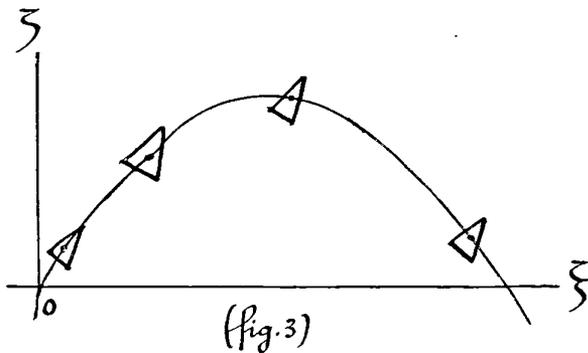
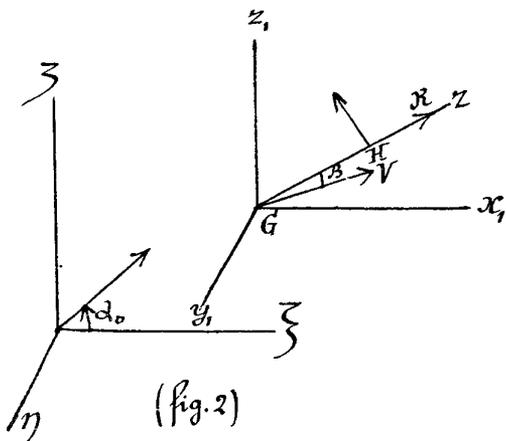
que $\mu \equiv \frac{1}{\rho}$. $N' = V(V) \sin \beta$, V étant positif et plus petit

255. - Mouvement d'un projectile lancé dans l'air sans rotation.

Soit $O\xi\eta\zeta$ des axes liés invariablement à la terre, O désignant la position initiale du centre de gravité G du projectile, $O\xi$ la verticale ascendante et $O\zeta$ le sens de la projection horizontale de la vitesse initiale V_0 de G : le plan $\xi O \zeta$ s'appelle le plan de tir [fig. 2].

Soit $Gx_1y_1z_1$ des axes parallèles aux premiers et ayant G comme origine. Pour $t=0$, les deux systèmes d'axes coïncident.

Si le projectile était lancé dans le vide (2), le point G décrirait dans le plan du tir une parabole, et l'axe Gz garderait une orientation fixe dans l'espace; le projectile tomberait donc la pointe en l'air, et la direction Gz serait avec



(1) Au point de vue de la disposition des forces, tout se passe comme dans l'exemple du cône de révolution traité plus haut (N° 253), ou $\sin \alpha < \frac{1}{3}$.

(2) Que le projectile ait, ou non, une rotation sur lui-même.

la vitesse finale de G un angle égal à $2\alpha_0$, si α_0 désigne l'angle avec le plan horizontal de la vitesse initiale.

Supposons maintenant le projectile lancé dans l'air, mais animé, au sortir de la pièce d'un simple mouvement de translation, dirigé selon l'axe de la pièce, et par suite selon l'axe GZ . Par raison de symétrie, le point G et l'axe GZ se mouvront dans le plan de tir. L'axe GI , du couple perturbateur sera perpendiculaire à ce plan: nul pour $t=0$, il ne deviendra appréciable que quand l'angle de GZ avec V sera lui-même sensible, et d'après ce que nous avons dit (N° 204) ce couple tendra à écarter GZ et GV , c. à d. accroîtra l'angle de GZ avec le plan horizontal. La résistance de l'air redresserait donc le projectile et accentuerait l'angle de son axe de figure avec la vitesse de G : le projectile prêterait le flanc de plus en plus à la résistance de l'air, et cette résistance deviendrait au moins aussi considérable que pour un boulet sphérique.

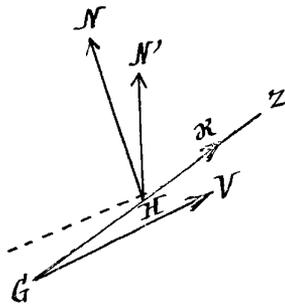
C'est pourquoi il est indispensable que le projectile soit animé d'une grande vitesse de rotation sur lui-même au sortir de la pièce. Cette rotation ne corrige pas seulement l'effet perturbateur que je viens de signaler: elle assure la stabilité du projectile sur sa trajectoire contre les causes perturbatrices accidentelles (vent, etc).

256. - Mouvement d'un projectile animé d'une rotation sur lui-même: discussion élémentaire.

La théorie de l'effet gyroscopique permet de se rendre compte de l'influence de cette rotation. La vitesse de rotation ω_0 du projectile autour de OZ étant très grande, et les forces qui s'exercent sur le projectile étant des forces linéaires qui ne varient pas très rapidement avec le temps, nous pouvons [N° 239] confondre (pendant la durée du mouvement) la direction de l'axe GZ et la direction GI du mouvement cinétique du solide autour de G . Si la rotation ω_0 était colossale, la déviation de l'axe GZ (qui est d'autant plus faible que ω_0 est plus grand) serait négligeable, et cet axe garderait sensiblement la même orientation dans l'espace. Mais dans la réalité, ω_0 n'est pas tellement grand que GZ ne subisse une déviation appréciable. Rendons-nous compte de son sens.

Supposons pour fixer les idées, que le projectile tourne de gauche à droite autour de la demi droite GZ . Le vecteur GK a, dans ce cas, le sens de GZ . Le moment, par rapport à G , des forces appliquées au projectile n'est autre que l'axe GI du couple perturbateur : ce couple n'exerce d'influence appréciable que quand l'angle β de GV et de GZ est lui-même sensible. A un instant t voisin de l'instant initial, le point G , sa vitesse et l'axe GZ sont encore sensiblement dans le plan de tir ; l'axe GZ (reste parallèle à lui-même) fait avec V un angle β égal sensiblement à $\alpha_0 - \alpha$. Dans le petit intervalle de temps suivant t à $t+h$, l'extrémité K de GK va subir une déviation dirigée selon GI , [c'est-à-dire (N° 254) directement opposée à Gy] ; la demi droite GZ va donc être déviée par rapport au plan de tir à la gauche⁽¹⁾ du tireur qui regarde s'éloigner le projectile ; autrement dit, la pointe du projectile est déviée à gauche du plan de tir.

Quand cette déviation est devenue appréciable la force déviatrice HN' [située dans le plan ZGV et dirigée normalement à V de l'autre côté de GZ par rapport à GV] a une petite composante normale au plan de tir et dirigée à gauche⁽²⁾ du plan de tir (puisque GZ est dévié à gauche). Or le point G se meut comme un point pesant de masse égale à la masse du corps, qui serait soumis à la force R' directement opposée à sa vitesse V et à la force N' . Cette dernière force (de sens opposé à Gy) fait donc sortir le point G du plan de tir à gauche du tireur ; l'écart entre G et le plan du tir s'appelle dérivation du projectile.



En outre, l'axe GI du couple perturbateur a une petite composante verticale et dirigée vers le bas : le point K dévie donc un peu vers le bas, l'axe GZ s'incline sur le plan hori-

(1) Si le projectile tourne de droite à gauche autour de la demi-droite GZ , le point K est sur la demi-droite opposée à GZ : la demi-droite GZ est donc déviée à droite du plan de tir.

(2) Si la rotation du projectile a lieu de droite à gauche autour de GZ , la demi-droite GZ est déviée à droite, et la composante de HN' normale au plan de tir est dirigée à droite : le projectile dérive à droite du tireur.

horizontal⁽¹⁾.

En définitive, voici l'aspect du mouvement quand le solide est animé d'une rotation rapide, de gauche à droite, autour de GZ .

Le point G se meut tout d'abord sensiblement dans le plan de tir, ainsi que la pointe du projectile; puis la pointe sort lentement du plan de tir sur la gauche du tireur; puis (en même temps que cette déviation s'accroît) le centre de gravité sort très lentement du plan de tir sur la gauche du tireur, et l'axe GZ du projectile s'incline très lentement sur le plan horizontal.

Si la rotation autour de GZ a lieu de droite à gauche, les mêmes conclusions subsistent avec cette modification que la pointe et le centre de gravité devient du plan de tir à droite du tireur; l'axe GZ s'incline, là encore, sur l'horizontal.

C'est l'aspect du mouvement au moins au début. Cette description convient pour une durée d'autant plus longue que ω_0 est plus grand. Elle s'appliquera notamment à la durée de la chute du projectile si ω_0 est suffisamment grand; mais si ω_0 est trop grand les déviations signalées sont insignifiantes.

Dans l'artillerie moderne, on imprime à l'obus une rotation progressive à l'aide de rayures hélicoïdales, à pas graduellement croissant⁽²⁾, pratiquées dans l'âme de la pièce: suivant que ces rayures hélicoïdales sont dextrorsum ou sinistrorsum, l'obus (à la sortie de la pièce) est animée autour de GZ d'une rotation dextrorsum ou sinistrorsum. Pour les pièces de marine, la rotation est dextrorsum; elle est sinistrorsum pour l'artillerie de terre. La pointe de l'obus et son centre de gravité dévient donc à gauche du plan de tir pour les pièces de marine; ils dévient à droite pour l'artillerie de terre.

(1) Si le projectile tourne de droite à gauche autour de GZ la composante verticale de G est ascendante, mais R est sur la demi droite opposée à GZ ; GZ s'incline donc encore sur le plan horizontal.

(2) La valeur h du pas à l'orifice de la pièce fait connaître le rapport $\frac{V}{\omega}$ par la formule: $\frac{h}{2\pi} = \frac{V}{\omega}$. Pour les gros projectiles modernes, la rotation est de 50 tours à la seconde (3000 tours à la minute). Ces projectiles ayant environ 300 mm de diamètre à la base, la vitesse due à la rotation est (en mètres) $2\pi \times 50 \times 0,15 = 47^m$ à la seconde, c'est-à-dire 17 fois plus faible que la vitesse de sortie (800 m).

Remarque. - Toute cette discussion suppose essentiellement que le projectile est un corps de révolution non seulement quant à la forme, mais quant à la répartition des masses. Imaginons, par exemple, que G soit sensiblement en dehors de l'axe de figure: en vertu de la rotation du projectile, le point G aurait, à la sortie du canon, une vitesse qui ne serait nullement dirigée selon l'axe de la pièce, et le projectile divaquerait en dehors du plan de tir.

257. - Étude analytique du mouvement.

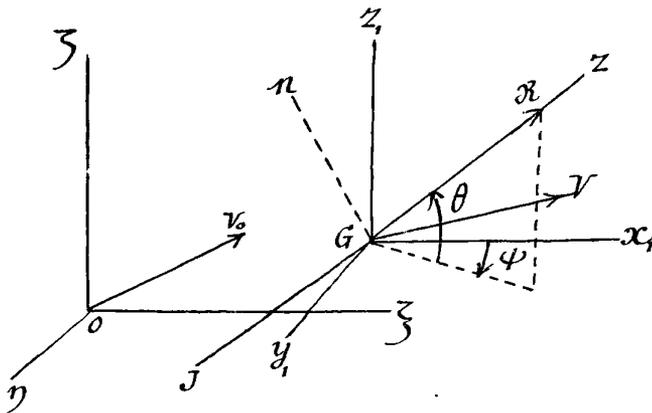
Nous supposerons que l'angle du tir est faible, en sorte que l'inclinaison de la vitesse V du point G sur le plan horizontal restera petite (en valeur absolue) pendant la chute du projectile. Soit Gx, y, z , des axes parallèles aux axes fixes ξ, η, ζ ($O\xi$ verticale ascendante); je définirais l'axe Gz du projectile par sa latitude (angle de Gz avec le plan horizontal compté entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$), soit θ , et sa longitude, soit ψ . Le projectile est animé initialement d'une vitesse de translation V_0 de sens Gz et d'une rotation autour de Gz ; je représente par ω_0 la vitesse angulaire de cette rotation, précédée du signe $+$ ou $-$ suivant qu'elle a lieu de gauche à droite ou de droite à gauche autour de Gz . Nous savons que la théorie gyroscopique s'applique si $|\omega_0|$ est suffisamment grand. Soit E un point pris sur Gz à la distance l de G , et W la vitesse de E par rapport aux axes Gx, y, z ; W est de l'ordre de $\frac{1}{\omega_0}$, et comme:

$$W^2 = \theta^2 + \cos^2 \theta \psi^2$$

$|\theta|$ et $|\psi|$ seront très petits avec $\frac{1}{\omega_0}$. Or θ_0 (angle du tir) est très petit par hypothèse; ψ_0 est nul, si on prend comme plan $O\xi\eta\zeta$ le plan de tir; par conséquent, $|\theta|$ et $|\psi|$ resteront petits pendant la chute du projectile si ω_0 est grand. D'autre part, la vitesse V de G ne fera qu'un petit angle avec le plan de tir: j'appelle α et ϵ la latitude et la longitude qui définissent la direction GV ; $|\alpha|$ et $|\epsilon|$ resteront petits. J'admets donc, pour simplifier les calculs, que pendant la chute du projectile, $|\theta|, |\psi|, |\alpha|, |\epsilon|$ restent assez petits pour qu'on puisse négliger leurs carrés et leurs produits devant l'unité: dans ces conditions, on peut confondre $\sin \theta$ avec θ , $\cos \theta$ avec 1 , etc.

Ceci posé, appliquons la théorie du phénomène gyroscopique.

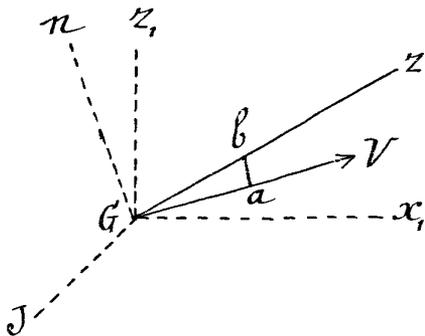
Equations du mouvement autour de G. — Soit GK le



moment cinétique du projectile S autour de G ; nous confondons la direction de GK et celle de l'axe Gz . Soit Gn la demi-perpendiculaire à Gz menée dans le plan z, Gz dans le sens des θ croissants, et GJ la demi-perpendiculaire au plan z, Gz qui fait avec Gx l'angle $\psi + \frac{\pi}{2}$: la vitesse de K par rapport aux axes Gx, y, z , a comme

projections (ω étant constant): $C\omega\theta$ sur Gn , et $C\omega\cos\theta\psi = C\omega\psi$ sur GJ . (C moment d'inertie du projectile autour de Gz).

Calculons maintenant le moment par rapport à Gn et à GJ des forces extérieures, c'est-à-dire ici du couple perturbateur. L'axe GJ de ce couple est perpendiculaire au plan zGV , égal à $\lambda \sin\beta$, et son sens est tel que le petit angle VGz compté autour de GJ est positif. Autrement dit soit Ga, Gb deux segments égaux à l'unité pris sur GJ et Gz , et soit GJ le moment par rapport à G du vecteur \overline{ab} ; GJ est égal à $\lambda(V)GJ$. Or on peut passer de la position Ga à la position Gb par une rotation $(\psi - \varepsilon)$ autour de Gz , suivie d'une rotation $(\theta - \alpha)$ autour de GJ .



Dans la première rotation, a décrit un petit arc de cercle qu'on peut confondre avec un chemin rectiligne parallèle à GJ et qui compté positivement dans le sens GJ est égal à $\cos\alpha(\psi - \varepsilon) = \psi - \varepsilon$. Dans la seconde, a décrit un petit chemin sensiblement parallèle à Gn

et qui compté positivement dans le sens Gn est égal à $\theta - \alpha$. La projection de \overline{ab} sur GJ est donc $\psi - \varepsilon$, et le moment de \overline{ab} par rapport à Gn est, par suite, $\psi - \varepsilon$ sensiblement (en grandeur et signe), de même la projection de \overline{ab} sur Gn est $\alpha - \theta$; le moment de \overline{ab} par rapport à GJ est $-(\alpha - \theta)$ ou $\theta - \alpha$ (sensiblement).

Les équations du mouvement gyroscopique donnent

donc ici :

$$(1) \quad C\omega_0\theta' = \lambda(V)(\psi - \varepsilon), \quad C\omega_0\psi' = \lambda(V)(\varepsilon - \alpha).$$

— Equations du mouvement du centre de gravité.

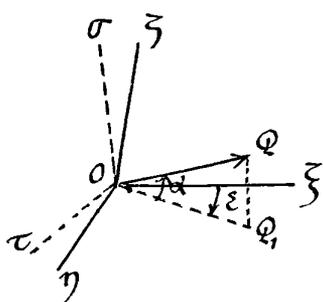
Ecrivons les équations du mouvement du centre de gravité. Soit OQ la quantité de mouvement $M \cdot \bar{V}$ du projectile, construite avec O comme origine : les coordonnées polaires de Q dans l'espace sont :

$M \cdot V$ (rayon vecteur) α (latitude), ε (longitude).

Soit OS la perpendiculaire à OQ menée dans le plan ζOQ du côté des α croissants et OT la perpendiculaire au plan ζOQ menée dans le sens des ε croissants : les projections de la vitesse de Q sur OQ , OS et OT sont

$$M \frac{dV}{dt}, \quad MV \frac{d\alpha}{dt}, \quad MV \frac{d\varepsilon}{dt}.$$

D'où les trois équations (qui traduisent le théorème du mouvement du centre de gravité projeté sur OQ , OS , OT) :



$$(2) \quad M \frac{dV}{dt} = -Mg \sin \alpha - R'(V)$$

$$(3) \quad MV \frac{d\alpha}{dt} = -Mg \cos \alpha + N' \cos \eta$$

$$(4) \quad MV \frac{d\varepsilon}{dt} = N' \sin \eta,$$

η désignant l'angle aigu des deux plans $V\bar{G}Z$ et VGZ , pris avec le signe + ou le signe - suivant que GZ est à droite ou à gauche du plan ZGV , c'est-à-dire suivant que $\psi - \varepsilon$ est positif ou négatif.

Dans l'équation (3), N' (nul avec β) est négligeable devant $Mg \cos \alpha$ (sensiblement égal à Mg), et cette équation peut être réduite à la suivante :

$$(3^{bis}) \quad MV \frac{d\alpha}{dt} = -Mg \cos \alpha.$$

Les équations (2) et (3)^{bis} sont les équations mêmes qui définissent le mouvement d'un point pesant (sphérique) dans un milieu résistant (N^{os} 143-150). — On voit immédiatement que, si on confond $\cos \varepsilon$ avec l'unité, les équations (2) et (3)^{bis} définissent la projection sur le plan de tir de la

trajectoire de G , (V et α désignant la valeur et l'inclinaison de la vitesse de la projection G_0 de G sur le plan de tir).

258. - Déviation de l'axe du projectile. - Étudions maintenant l'équation (4): en vertu de la théorie élémentaire, η est d'abord nul, car le plan $\mathcal{Z}GV$ reste d'abord confondu avec le plan de tir. La chose est évidente d'ailleurs d'après les équations (1), (3) et (4), car en vertu de ces équations, $\theta - \alpha$ est du 1^{er} ordre en t [$t=0$ étant l'instant initial] et $\psi - \varepsilon$ du second ordre. Le second membre $N' \sin \eta$ de (4) est donc le produit de deux quantités nulles pour $t=0$, et comme par surcroît V est très grand, on peut regarder $\frac{d\varepsilon}{dt}$, et par suite ε , comme nul du moins dans une première approximation⁽¹⁾. Faisons donc $\varepsilon \equiv 0$ dans les équations (1): V est une fonction du temps qui varie peu pendant la chute du projectile. Nous pouvons la regarder comme une constante⁽²⁾.

L'équation (5) donne ainsi :

$$(6) \quad \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{g}{V_0} = -n, \quad (n \text{ C}^{\text{te}} \text{ positive}).$$

Dans les équations (1), λ est une constante (valeur de λ correspondant à V_0); ces équations deviennent ainsi deux équations linéaires à coefficients constants et à second membre fonction de t . Pour les intégrer rapidement posons :

$$u = t \frac{\lambda}{c\omega}, \quad \theta - \alpha = \theta_1; \text{ il vient :}$$

$$\frac{d\theta}{du} + \frac{d\alpha}{du} = \psi, \quad \frac{d\psi}{du} = -\theta_1,$$

c'est-à-dire (comme $\frac{d\alpha}{du} = \frac{d\alpha}{dt} \frac{dt}{du} = -n \frac{c\omega}{\lambda}$) :

$$(7) \quad \frac{d\theta}{du} = \psi + n \frac{c\omega}{\lambda} \equiv \psi_1, \quad \frac{d\psi_1}{du} = -\theta_1.$$

Or les équations (7) admettent deux solutions évidentes :

(1) Voir le n° 259.

(2) Cette hypothèse ne sert qu'à simplifier les calculs; il serait bien facile d'achever la discussion en sachant seulement que V est une fonction positive de t . Ses variations de V sont données sensiblement par l'équation: $M \frac{dV}{dt} = -R'(V)$.

$$\theta_1 = \sin u, \quad \varphi_1 = \cos u$$

et

$$\theta_1 = \cos u, \quad \varphi_1 = -\sin u;$$

l'intégrale générale de (7) est donc :

$$\theta_1 = a \sin u + b \cos u, \quad \varphi_1 = a \cos u - b \sin u,$$

(a, b constantes arbitraires).

Pour $t=0$, c'est-à-dire pour $u=0$, on a :

$$\theta_1 = \theta_0 - \alpha_0 = 0, \quad \varphi_1 = \varphi_0 + n \frac{c\omega}{\lambda} = n \frac{c\omega}{\lambda};$$

d'où :

$$b=0, \quad a = n \frac{c\omega}{\lambda}.$$

Les angles θ et φ sont donc donnés par les valeurs :

$$(8) \quad \theta = \alpha + n \frac{c\omega}{\lambda} \sin \frac{\lambda t}{c\omega} = \alpha_0 - nt + n \frac{c\omega}{\lambda} \sin \left(\frac{\lambda t}{c\omega} \right)$$

$$(9) \quad \varphi = -n \frac{c\omega}{\lambda} \left[1 - \cos \frac{\lambda t}{c\omega} \right] = -\frac{2n c\omega}{\lambda} \sin^2 \frac{\lambda t}{2c\omega}.$$

Ces équations montrent que $\omega\varphi$ est toujours négatif; φ est donc positif si la rotation du projectile autour de GZ a lieu de droite à gauche, et négatif dans le cas contraire. De plus, θ va toujours en décroissant, car $\omega^2\theta'$ a le signe de $\omega\varphi < 0$; $\theta - \alpha$ commence par croître.

Si on développe les sin- qui figurent dans les 1^{ers} membres de (8) et (9), suivant les puissances de t , il vient :

$$(10) \quad \theta - \alpha_0 = \frac{x\lambda^2 t^3}{6c^2\omega^2} + \dots$$

$$(11) \quad \varphi = -\frac{n\lambda t^2}{2c\omega} \dots,$$

d'où, puisque $\alpha_0 = \theta_0$: $\theta - \theta_0 = -\varphi \times \frac{\lambda t}{3c\omega}$,

pour les petites valeurs de t . C'est donc φ qui prendra d'abord une valeur sensible [déviation de GZ à gauche à droite]; la variation de θ [inclinaison de GZ sur le plan horizontal] ne se manifestera qu'ensuite. Ce sont bien là les résultats de la discussion qualitative [n° 256].

Quand la durée t_f de la chute est telle que $\frac{\lambda^2 t_f^2}{20 \cdot c^2 \omega^2}$ soit négligeable devant l'unité, les formules (10) et (11)

où on néglige les termes non écrits sont suffisamment approchées.

Si on veut que le projectile pointe vers le bas à l'arrivée, il ne faut pas que ω soit trop considérable; autrement, la variation finale de θ serait très faible et inférieure à α_0 ⁽¹⁾. Il faut donc que d'une part, ω soit assez grand pour que la stabilité du projectile soit assurée, et d'autre part que, pour cette valeur de ω , la variation finale de θ dépasse α_0 . Mais, il convient de remarquer qu'en diminuant ω , si on diminue $\theta - \alpha$ on augmente ψ (au début tout au moins).

L'angle β de GZ et de GV est donné sensiblement par l'égalité :

$$\beta^2 = (\theta - \alpha)^2 + \psi^2 = \frac{C^2 \omega^2}{\lambda^2} n^2 \left[2 - 2 \cos \frac{\lambda t}{C\omega} \right] = 4n^2 \frac{C^2 \omega^2}{\lambda^2} \sin^2 \left[\frac{\lambda t}{2C\omega} \right];$$

d'où :

$$\beta = 2n \frac{C\omega}{\lambda} \sin \frac{\lambda t}{2C\omega},$$

comme on a : $\alpha_0 - \alpha = nt$, la valeur de β peut s'écrire :

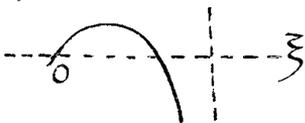
$$\beta = (\alpha_0 - \alpha) \frac{2C\omega}{\lambda t} \sin \frac{\lambda t}{2C\omega} = (\alpha_0 - \alpha) \frac{\sin t'}{t'}, \left[t' = \frac{\lambda t}{2C\omega} \right].$$

Le coefficient de $(\alpha_0 - \alpha)$, dans cette dernière expression, est égal à 1 pour $t' = 0$ et décroît avec t . Soit t_1 l'instant où le projectile atteint le but, α_1 la valeur de α pour $t = t_1$, $[\alpha_1 < -\alpha_0]$ ⁽²⁾ : si, pour $t' = \frac{\lambda t_1}{2C\omega}$, $\frac{\sin t'}{t'}$ est inférieur à $\frac{1}{2}$, l'angle final de GZ et de GV est inférieur à $\frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}$; par suite $(\theta_1 - \alpha_1)$ est inférieur à $\frac{\alpha_0 - \alpha_1}{2}$, d'où $\theta_1 < \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} < 0$; le projectile pointe donc vers le sol à l'arrivée.

259. - Dérivation du centre de gravité. - Nous avons dans cette première approximation regardé ε comme nul,

(1) La variation de θ pendant un intervalle de temps fini t_1 tend vers zéro avec $\frac{1}{\omega}$.

(2) On aurait $\alpha_1 = -\alpha_0$ si le projectile se mouvait dans le vide, et on sait que la résistance de l'air raccourcit en quelque sorte la branche de parabole décrite par G [N° 149].



c'est-à-dire négligé le second membre de (4). Pour en tenir compte, il suffit de calculer $\sin \eta$: pour cela, projetons sur OT le segment ab (p. 274) du plan VGZ (sensiblement perpendiculaire à GV); on a, au signe près:

$$ab \times \sin \eta = \Psi - \varepsilon,$$

d'où

$$\sin \eta = \frac{\Psi - \varepsilon}{nn\beta} \text{ en grandeur et signe,}$$

puisque $\sin \eta$ a le signe de $\Psi - \varepsilon$. D'autre part (N° 254),

$$N' = V(V) \sin \beta, \quad (V \text{ étant positif et moindre que } \frac{\lambda}{\ell}).$$

L'équation (4) s'écrit donc:

$$(8) \quad MV \frac{d\varepsilon}{dt} = V(V) (\Psi - \varepsilon)$$

Si on regarde V comme une constante, cette équation (8) jointe aux deux équations (1) (où $\alpha = \alpha_0 - nt$) constitue un système de trois équations linéaires aisément intégrable qui définit θ, Ψ et ε . On en déduit aussitôt:

$$\frac{\varepsilon}{\theta - \theta_0} = \frac{VC\omega_0}{MV_0\lambda} = \rho, \quad (\rho \text{ désignant une certaine constante});$$

$\frac{\varepsilon}{\theta - \theta_0}$ a donc le signe de $\theta - \theta_0$, lequel est négatif; la déviation de ω_0 de G a lieu à gauche du plan de tir si $\omega_0 > 0$ et à droite si $\omega_0 < 0$. De plus, en valeur absolue, ρ est moindre que

$\frac{C|\rho_0|}{MV_0\ell}$. Si d est le diamètre de la base du projectile, C est moindre que $M \frac{\ell^2}{8}$, et ρ que $\frac{d}{8\ell} \frac{d\omega_0}{V_0}$;

soit $d \leq 30 \text{ cm}$, $\ell = 50 \text{ cm}$, $\omega_0 = 2\pi \times 50$, $V_0 = 800 \text{ m}$; ρ est moindre que 0,09; ε est moindre en valeur absolue que $\frac{|\theta - \theta_0|}{100}$, mais $V\varepsilon$ (vitesse de déviation) est appréciable.

Chapitre IV.

Théorie générale des moments d'inertie et applications.

260. - Moments d'inertie d'un système matériel. -

Nous avons défini le moment d'inertie d'un système de masses par rapport à une droite. Le calcul de ces moments d'inertie qui interviennent à chaque instant en Dynamique, est souvent facilité, par la considération des moments d'inertie par rapport à un plan ou par rapport à un point.

Étant donné un système de masses qui, à un instant t , occupent des positions déterminées, on appelle (à cet instant) :

1° Moment d'inertie du système par rapport à un plan la somme des produits obtenus en multipliant chaque masse m par le carré de sa distance d au plan, soit $\sum md^2$;

2° Moment d'inertie du système par rapport à une droite ou un axe la somme des produits obtenus en multipliant chaque masse m par le carré de sa distance r à l'axe, soit $\sum mr^2$; on désigne d'ordinaire ce moment par MK^2 , où M est la masse totale du système, K est alors appelé rayon de gyration du système autour de l'axe considéré;

3° Moment d'inertie par rapport à un point la somme des produits obtenus en multipliant chaque masse par le carré de sa distance au point.

Par un point O , faisons passer trois axes rectangulaires x, y, z . Le moment d'inertie par rapport aux trois plans coordonnés sont :

$$\sum mx^2, \quad \sum my^2, \quad \sum mz^2 ;$$

les moments d'inertie par rapport aux axes sont

$$\sum m(y^2+z^2), \quad \sum m(z^2+x^2), \quad \sum m(x^2+y^2);$$

enfin le moment d'inertie par rapport au point O a

pour v leur

$$\sum m (x^2 + y^2 + z^2).$$

Des expressions ci-dessus résultent les théorèmes suivants :

I. - Le moment d'inertie par rapport à un axe est la somme des moments d'inertie par rapport à deux plans rectangulaires passant par cet axe.

II. - Le moment d'inertie par rapport à un point est égal à la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans rectangulaires passant par ce point ou à la demi-somme des moments d'inertie par rapport à trois droites rectangulaires passant par ce point.

Produits d'inertie. - On appelle souvent produits d'inertie les sommes $\sum myz$, $\sum mxz$, $\sum mxy$ qui se ramènent aussitôt aux moments d'inertie. Menons en effet les deux plans $x+y=0$, $x-y=0$, bissecteurs des dièdres formés par les plans zOx et zOy ; appelons δ et δ' les distances du point de masse m de coordonnées x, y, z à ces deux plans. Nous avons :

$$\delta^2 = \frac{1}{2}(x+y)^2, \quad \delta'^2 = \frac{1}{2}(x-y)^2,$$

$$\sum mxy = \frac{1}{2} \left(\sum m\delta^2 + \sum m\delta'^2 \right),$$

relation où les quantités qui figurent dans le second membre sont des moments d'inertie.

261. - Moments d'inertie d'un système continu. Exemples.

Les moments d'inertie d'un système continu sont donnés par des intégrales simples, doubles, ou triples suivant que le corps est à une, deux ou trois dimensions.

Nous avons déjà vu que le moment d'inertie d'une barre homogène par rapport à son milieu G ou par rapport à un axe Gx perpendiculaire à AB est égal à : $M \frac{l^2}{3}$.

Le moment d'inertie d'un cercle homogène par rapport à son centre O (ou par rapport à une droite Oz normale à ce plan) est égale à : $M \frac{l^2}{2}$ où l est le rayon du cercle; car en décomposant le cercle en anneaux concentriques,

on voit aussitôt que le moment d'inertie cherché est égal à l'intégrale $\int_0^l 2\pi r^3 dr$, [ρ densité superficielle du cercle]. Le rayon de gyration du cercle homogène autour de OZ est $\frac{l}{\sqrt{2}}$. Le rayon de gyration autour d'un diamètre est $\frac{l}{2}$; car le moment d'inertie a la même valeur MK^2 par rapport à un diamètre quelconque, ou un plan diamétral quelconque normal au plan du cercle; en faisant passer par OZ deux plans rectangulaires, on voit qu'on a $M \frac{l^2}{2} = 2MK^2$. C. q. f. d.

Moments d'inertie d'une sphère homogène. - Soit ρ la densité de la sphère, l son rayon. Cherchons d'abord le moment d'inertie μ de la sphère par rapport à son centre; décomposons la sphère en couches sphériques concentriques de rayon intérieur r et d'épaisseur dr ; le moment d'inertie d'une telle couche est: $4\pi\rho r^2 dr \times r^2$. Le moment d'inertie de la sphère par rapport au point O est donc: $4\pi\rho \frac{l^5}{5}$. Le moment d'inertie par rapport à un plan diamétral est égal à $\frac{1}{3}$ du précédent, c'est-à-dire à $\frac{4\pi\rho l^5}{15}$, puisque le moment d'inertie par rapport à tous les plans diamétraux est le même, et que le moment d'inertie par rapport au centre est la somme des moments d'inertie par rapport à trois plans diamétraux rectangulaires. Il suit de là que le moment d'inertie par rapport à un diamètre (somme des moments d'inertie par rapport à deux plans diamétraux rectangulaires) a pour valeur:

$$I = \frac{2}{3} \mu = \frac{8}{15} \pi \rho l^5 = M \frac{2}{5} l^2,$$

M désignant la masse totale $\frac{4}{3} \pi \rho l^3$. Le rayon de gyration de la sphère autour d'un diamètre est donc:

$$K = l \sqrt{\frac{2}{5}} = l \frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Moments d'inertie d'un ellipsoïde homogène.

Soit:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde. Son moment d'inertie par rapport au plan des xy est, en appelant ρ sa densité:

$$\Sigma m z^2 = \iiint \rho z^2 dx dy dz,$$

l'intégrale triple étant étendue à tout le volume de l'ellipsoïde, c'est-à-dire à tout l'espace défini par la condition

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$

Faisons le changement de variables :

$$x = ax', \quad y = by', \quad z = cz'.$$

On aura :

$$\Sigma m z^2 = abc^3 \iiint \rho z'^2 dx' dy' dz';$$

la nouvelle intégrale triple, étant étendue au volume de la sphère

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - 1 \leq 0,$$

représente le moment d'inertie de cette sphère de rayon 1, soit $\frac{4}{15} \pi \rho$. On a donc :

$$\Sigma m z^2 = \frac{4}{15} \pi \rho abc^3;$$

ou enfin :

$$\Sigma m z^2 = M \frac{c^2}{5}$$

M étant la masse $\frac{4}{3} \pi \rho abc$ de l'ellipsoïde.

On trouverait de même que les moments d'inertie de l'ellipsoïde sont respectivement, par rapport au plan des xy et par rapport au plan des yz , les quantités

$$M \frac{b^2}{5} \text{ et } M \frac{c^2}{5}.$$

Les moments d'inertie par rapport aux axes ox, oy, oz sont, par suite :

$$M \frac{b^2 + c^2}{5}, \quad M \frac{c^2 + a^2}{5}, \quad M \frac{a^2 + b^2}{5}$$

et par rapport au centre :

$$M \frac{a^2 + b^2 + c^2}{5}.$$

Je n'insiste pas davantage sur le calcul des moments d'inertie par des intégrales définies, me contentant de renvoyer sur ce point au cours du Calcul intégral.

262. Théorème. Le moment d'inertie par rapport à une droite Π est égal au moment d'inertie par rapport à la droite parallèle Π_1 passant par le centre de gravité, augmenté du produit de la masse totale M par le carré de la distance de G à Π .

En effet, imaginons que le système soit animé d'une rotation d'ensemble autour de Π , de vitesse angulaire ω ; la vitesse du point G est égale à $R\omega$ si R est la distance de G à Π ; et le théorème de Kœnig donne:

$$I\omega^2 = I_G\omega^2 + MP_G^2\omega^2,$$

I_G désignant le moment d'inertie de S par rapport à Π_1 .

D'où :

$$I = I_G + MR^2.$$

C. q. f. d.

Soit de même I' le moment d'inertie par rapport à une droite Π' parallèle à Π et située à une distance R' du centre de gravité; on a: $I' = I_G + MR'^2$; d'où, en retranchant:

$$I - I' = M(R^2 - R'^2).$$

Il résulte du théorème précédent que, de toutes les droites Π parallèles à une direction donnée, celle pour laquelle le moment d'inertie est minimum passe par le centre de gravité. Ses droites Π pour lesquelles ce moment a une même valeur forment un cylindre de révolution dont l'axe passe par le centre de gravité.

On démontre de même que:

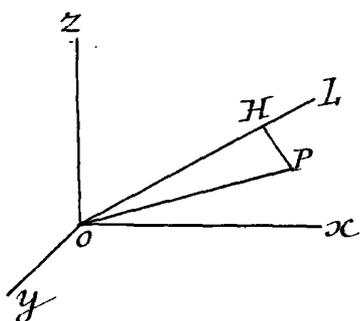
Le moment d'inertie d'un système par rapport à un plan est égal au moment d'inertie par rapport à un plan parallèle qui renferme le centre de gravité, augmenté du produit de la masse totale par le carré de la distance des deux plans.

Le moment d'inertie d'un système par rapport à un point O est égal au moment d'inertie par rapport au centre de gravité G , augmenté du produit de la masse totale par OG^2 .

263. Variations du moment d'inertie par rapport à des axes passant par un même point. — Ellipsoïde
d'inertie (Poinson).

Étudions maintenant les variations du moment

d'inertie par rapport aux diverses droites issues d'un point O . Prenons ce point comme origine, et soit α, β, γ les cosinus directeurs d'une droite OL . Le carré \overline{PH}^2 de la distance à OL , du point P de masse m et de coordonnées (x, y, z) est donné par :



Le carré \overline{PH}^2 de la distance à OL , du point P de masse m et de coordonnées (x, y, z) est donné par :

$$\begin{aligned}\overline{PH}^2 &= \overline{OP}^2 - \overline{OH}^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \\ &= \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(z^2 + x^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) \\ &\quad - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta xy.\end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}\sum m r^2 &= \sum m \cdot \overline{PH}^2 = \alpha^2 \sum m (y^2 + z^2) + \beta^2 \sum m (z^2 + x^2) + \gamma^2 \sum m (x^2 + y^2) \\ &\quad - 2\beta\gamma \sum m yz - 2\gamma\alpha \sum m zx - 2\alpha\beta \sum m xy.\end{aligned}$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$(1) \quad \sum m r^2 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta$$

les constantes A, B, C désignant les moments d'inertie par rapport aux axes coordonnés, et D, E, F les produits d'inertie.

Pour interpréter géométriquement le résultat auquel nous venons d'arriver, portons de part et d'autre de O , sur chaque droite OL , une longueur OS égale à

$\frac{1}{\sqrt{\sum m r^2}}$, et cherchons le lieu de ce point S ou (X, Y, Z) .

Nous avons $\alpha = \frac{X}{OS}$, $\beta = \frac{Y}{OS}$, $\gamma = \frac{Z}{OS}$, avec

$OS^2 = \frac{1}{\sum m r^2}$; en portant ces valeurs dans l'équation (1),

il vient :

$$(2) \quad 1 = AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2DYZ - 2EZX - 2FXY,$$

équation d'une quadrique. Cette quadrique, qui a l'origine comme centre, est nécessairement un ellipsoïde; le rayon vecteur OS est, en effet, toujours réel et fini, puisqu'il a pour valeur $\frac{1}{\sqrt{\sum m r^2}}$ et que le moment d'inertie est toujours positif. Il n'y aurait d'exception que dans le cas où tous les

points matériels du système seraient en ligne droite avec O : dans ce cas le moment d'inertie par rapport à cette droite OD serait nul; on voit aussitôt que l'ellipsoïde (2) se réduirait alors à un cylindre de révolution autour de OD .

L'ellipsoïde dont l'équation vient d'être établie a reçu le nom d'ellipsoïde d'inertie relatif au point O , ses plans et ses axes de symétrie se nomment plans principaux et axes principaux d'inertie relatifs au point O .

L'ellipsoïde relatif au centre de gravité est l'ellipsoïde central d'inertie et les axes de cet ellipsoïde sont les axes centraux d'inertie. En général, il n'y a donc que trois axes principaux d'inertie relatifs à un point; si l'ellipsoïde d'inertie relatif à un point est de révolution, il y en a une infinité qui sont les perpendiculaires OL à l'axe de révolution (en outre de cet axe); si c'est une sphère, toute droite passant par le point est axe principal d'inertie par ce point.

Une fois l'ellipsoïde d'inertie relatif au point O tracé, le moment d'inertie par rapport à un axe OL est $\frac{1}{OS^2}$, S désignant le point où la droite OL perce l'ellipsoïde. De toutes les droites menées par O , celle qui correspond au plus petit moment d'inertie est donc le grand axe de l'ellipsoïde.

264. - Conclusions sur le calcul des moments d'inertie.

Quand on connaît la masse totale M d'un système donné de masses, la position (ξ, η, ζ) du centre de gravité, et l'ellipsoïde d'inertie de ces masses relatif à un point O , les théorèmes des N.º 262 et 263 permettent de calculer immédiatement le moment d'inertie des masses par rapport à une droite quelconque, et l'ellipsoïde d'inertie relatif à un point quelconque.

Si le système donné de masses est un système continu à trois dimensions, le calcul des moments d'inertie de ces masses par rapport à une droite (ou un plan, ou un point) arbitraire, se ramènera donc au calcul 1.º des quatre intégrales triples qui déterminent M, ξ, η, ζ ; 2.º des six intégrales qui font connaître les moments d'inertie des masses par rapport à Ox, Oy, Oz et les trois produits d'inertie. On choisira le point O de façon que ce dernier calcul soit le plus simple possible. En particulier,

dans beaucoup d'applications, il y aura lieu de prendre le point G comme origine, c'est-à-dire de déterminer l'ellipsoïde central d'inertie.

Dans les cas simples, des considérations de symétrie simplifient notablement le calcul précédent. Par exemple, si le corps est une barre homogène de longueur $2l$ et de densité ρ , le centre de gravité de la barre est le milieu G de AB , sa masse est $2\rho l$, et la quadrique d'inertie relative à G est un cylindre de révolution autour de AB , de rayon $\frac{1}{\sqrt{M\rho^3}}$.

Si le corps est un cercle homogène de densité ρ et de rayon l , le centre de gravité G est le centre du cercle, sa masse est $\pi\rho l^2$, et l'ellipsoïde central d'inertie est un ellipsoïde de révolution aplati ayant comme axe de révolution la perpendiculaire GZ au plan du cercle, comme demi-axe de révolution $\sqrt{\frac{2}{M\rho^2}}$, comme rayon de l'équateur $\frac{2}{\sqrt{M\rho^2}}$.

Si le corps est un ellipsoïde homogène, dont les demi-axes sont a, b, c et la densité ρ , le centre de gravité est le centre de l'ellipsoïde, la masse totale est $\frac{4\pi\rho}{3}abc$; l'ellipsoïde central d'inertie a pour plans de symétrie les plans de symétrie de l'ellipsoïde et comme demi-axes $\sqrt{\frac{5}{M(b^2+c^2)}}$, $\sqrt{\frac{5}{M(c^2+a^2)}}$, $\sqrt{\frac{5}{M(a^2+b^2)}}$. Si l'ellipsoïde matériel est de révolution, l'ellipsoïde d'inertie est aussi de révolution. Si c'est une sphère, l'ellipsoïde d'inertie est une sphère.

Dans tous ces cas particuliers, on sait donc calculer bien aisément le moment d'inertie du corps par rapport à une droite quelconque. Il en serait de même si le corps était une circonférence homogène, ou une sphère creuse homogène, etc.

265. - Remarque sur les axes de l'ellipsoïde d'inertie.

Un ellipsoïde quelconque ne peut pas toujours être considéré comme un ellipsoïde d'inertie. Si l'on rapporte en effet à ses axes un ellipsoïde d'inertie, son équation devient :

$$AX^2 + BY^2 + CZ^2 = 1,$$

où A, B, C sont les moments d'inertie

$$(3) \quad A = \sum m(y^2 + z^2), \quad B = \sum m(z^2 + x^2), \quad C = \sum m(x^2 + y^2)$$

par rapport aux trois axes; il suit de ces formules que l'une quelconque des grandeurs A, B, C est au plus égale à la somme des deux autres. Si on veut encore, A, B, C satisfont aux inégalités qui expriment qu'on peut construire un triangle de côtés A, B, C . Par exemple, lorsque l'ellipsoïde de révolution est allongé, il peut être aussi allongé qu'on veut; car si OZ est l'axe de révolution, A, B, C sont alors astreints à la seule condition: $C < 2A$, condition toujours remplie si $\frac{1}{\sqrt{C}} > \frac{1}{\sqrt{A}}$; mais si l'ellipsoïde de révolution est aplatie, son aplatissement est au plus égal à $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$, car l'égalité $C < 2A$ entraîne: $C > \frac{a}{\sqrt{2}}$, ($a, b = a$; c désignant $\sqrt{2}$ les demi axes de l'ellipsoïde

Si le solide est une plaque d'épaisseur infiniment petite, située dans le plan xoy , l'un des axes principaux relatifs à O est OZ , par raison de symétrie; soient Ox et Oy les deux autres. Alors, z étant nul, les formules (3) montrent que:

$$C = A + B.$$

Exercice. - On verra, à titre d'exercice, que, pour que l'ellipsoïde d'inertie puisse en quelque point de l'espace se réduire à une sphère, il faut et il suffit que l'ellipsoïde central d'inertie soit un ellipsoïde de révolution aplati; il existe alors sur son axe de révolution deux points symétriques par rapport au centre de gravité pour lesquels la condition est satisfaite.

266. - Conditions pour qu'un axe OZ soit principal pour le point O .

Cherchons les conditions pour que l'un des axes de coordonnées, soit OZ , soit axe principal d'inertie pour le point O . Il faut et il suffit que l'équation de l'ellipsoïde d'inertie [éq. (2) du N° 263] ne renferme pas de termes du premier degré en z , c'est-à-dire que l'on ait:

$$D = 0, \quad E = 0,$$

ou bien

$$(4) \quad \sum myz = 0, \quad \sum mxz = 0.$$

Pour que OZ soit axe principal d'inertie pour un point O' de OZ (de côté $OO' = h$), il faut et il suffit que les équations obtenues en remplaçant dans (4) z par $z - h$ soient vérifiées;

d'où les conditions :

$$(5) \quad \sum myz - h \sum my = 0, \quad \sum mxz - h \sum mx = 0.$$

Pour que OZ soit axe principal d'inertie pour un certain de ses points, il faut donc et il suffit qu'on ait :

$$\frac{\sum myz}{\sum my} = \frac{\sum mxz}{\sum mx},$$

et la valeur commune de ces deux rapports donne la cote du point O' pour lequel OZ est axe principal d'inertie.

Pour que OZ soit axe principal d'inertie pour deux de ses points, il faut et il suffit que les quatre équations (4) et (5) soient vérifiées pour $h \neq 0$, ce qui entraîne :

$$\sum my = 0, \quad \sum mx = 0,$$

équations qui expriment que OZ renferme le centre de gravité G du corps. Si cette condition est remplie l'axe OZ est axe principal d'inertie pour un quelconque O' de ses points, du moment qu'il est principal pour un point O particulier. D'où ce théorème :

Théorème. — Pour qu'une droite soit axe principal d'inertie pour deux de ses points, il faut et il suffit qu'elle soit un axe central d'inertie; elle est alors axe principal d'inertie pour tous ses points.

Une droite qui passe par G ou bien n'est axe principal d'inertie pour aucun de ses points, ou bien l'est pour tous.

Quand un corps est symétrique (géométriquement et mécaniquement) par rapport à un plan, soit le plan xoy , ce plan est plan principal d'inertie pour chacun de ses points; autrement dit, toute perpendiculaire, soit OZ , au plan est axe principal d'inertie pour O . En effet, à tout point P ou (x', y', z') , de masse m , du corps correspond un point P' ou $(x, y, -z)$ de même masse, et les sommes

$$\sum myz, \quad \sum mxz$$

sont nulles. Le plan xoy est aussi plan central d'inertie.

267. - Détermination expérimentale des moments d'inertie. - Nous verrons plus loin comment la théorie du pendule composé permet de déterminer expérimentalement un moment d'inertie. Divers appareils ont été inventés par M. Brassine [comptes-rendus, tome XIV, p. 446], par M. Marcel Deprez [ibid. tome LXXIII, p. 785], par M. Jonkowski [Bulletin de l'Association française pour l'avancement des sciences, 1889, page 23], etc., pour effectuer expérimentalement cette détermination.

Les intégrateurs mécaniques permettent également d'évaluer les moments d'inertie (voir le Traité de Statique de M. Maurice Lévy).

268. - La force vive d'un solide et les moments d'inertie. Si un solide S est fixé par un de ses points O , soit OW sa rotation instantanée à l'instant t et MK^2 le moment d'inertie de S autour de la droite OW ; la force vive $2T$ de S est $MK^2\omega^2$. Or supposons réalisé l'ellipsoïde d'inertie de S par rapport à O , et considérons l'intersection P de cet ellipsoïde E (lié invariablement à S) avec OW ; on a :

$$MK^2 = \frac{1}{OP^2}, \quad \text{d'où} \quad 2T = \frac{\omega^2}{OP^2}.$$

Si Ox, Oy, Oz sont les axes de E , et p, q, r les projections de OW sur ces axes mobiles, on déduit de là aussitôt qu'on a : $2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2$.

En effet, par rapport aux axes $Gxyz$ l'équation de E est :

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1;$$

les équations de la droite OW sont :

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r}; \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{OP^2} = \frac{Ap^2 + Bq^2 + Cr^2}{\omega^2}$$

Si S est libre, soit V la vitesse de G , ω la rotation instantanée, $Gxyz$ le trièdre des axes centraux d'inertie, on a [théorème de Koenig]

$$2T = M.V^2 + Ap^2 + Bq^2 + Cr^2.$$

Si S est un corps de révolution, l'ellipsoïde d'inertie attaché à chaque point O de son axe est de révolution autour de Oz ; on a : $A = B$, $C \leq 2A$, et la force vive de S . Quand O est fixe est $A\omega_1^2 + Cr^2$, (ω_1 composante de ω normale à Oz). On vérifie ainsi le résultat du N.º 222.

Application de la théorie des moments d'inertie
au mouvement d'un corps solide autour d'un axe fixe OZ .

268. - Equation du mouvement.

La position du solide S ne dépend que d'un seul paramètre, soit l'angle θ positif ou négatif dont tourne le solide autour de la demi-droite OZ à partir d'une position donnée.

Le théorème des moments cinétiques par rapport à OZ donne (N.º 219) l'équation du mouvement: ⁽¹⁾

$$(1) \quad \mu K^2 \theta'' = N,$$

μ désignant la masse de S , μK^2 son moment d'inertie par rapport à OZ , et N le moment résultant des forces extérieures données par rapport à OZ .

269. - Réactions de l'axe.

Supposons que le solide soit fixé par deux de ses points O et O' . Soient \bar{R} et \bar{R}' les réactions des appuis sur les deux éléments O et O' du solide. Le théorème du mouvement^o du centre de gravité nous donne, (ξ, η, ζ) désignant les coordonnées du centre de gravité G du solide):

$$(2) \quad \begin{aligned} \mu \xi'' &= R_x + R'_x + \Sigma X, \\ \mu \eta'' &= R_y + R'_y + \Sigma Y, \\ 0 &= \mu \zeta'' = R_z + R'_z + \Sigma Z. \end{aligned}$$

Le théorème des moments des quantités de mouvement appliqué à Ox et à Oy donne (en appelant h le z du point O''), et I , et M les moments résultants par rapport à Ox et Oy des forces extérieures données:

$$(3) \quad \begin{cases} \Sigma m (yz'' - zy'') = -h R'_y + I, \\ \Sigma m (zx'' - xz'') = h R'_x + M \end{cases}$$

(1) Le théorème des forces vives conduit à la même équation, on a en effet (le travail des réactions de l'axe étant nul)

$$d \frac{1}{2} \mu K^2 \theta'^2 = N d\theta, \quad \text{ou encore:}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \mu K^2 \theta'^2 = N \theta', \quad \text{ou enfin:}$$

$$\mu K^2 \theta'' = N.$$

Ces dernières équations déterminent R'_y et R'_z ; les deux premières équations (2) déterminent R'_x et R'_y ; et la troisième détermine la somme $R'_z + R'_z$. Les deux réactions R et R' ne sont définies (comme nous l'avons déjà constaté N° 219 dans le cas particulier où S est de révolution autour de OZ) qu'à l'addition près de deux forces égales et directement opposées, appliquées respectivement en O et O' . Les liaisons matérielles sont ici surabondantes, et les valeurs de R_z et R'_z dépendent de la manière dont ces liaisons sont réalisées. Par exemple, il suffit pour assurer la fixité de l'axe de rotation du corps, d'astreindre l'élément O du solide à glisser sans frottement sur OZ , et de fixer le point O du solide; dans ces conditions, $R'_z = 0$, $R_z = -\Sigma Z$. Quand on permute le rôle de O et de O' ; c'est R_z qui est nul et $R'_z = -\Sigma Z$.

Explicitons les équations (2) et (3). Nous avons, si $\omega = \theta'$:

$$x' = -\omega y, \quad y' = \omega x, \quad z' = 0$$

$$x'' = -\omega^2 x - \omega' y, \quad y'' = -\omega^2 y + \omega' x, \quad z'' = 0.$$

Les équations (2) et (3) deviennent :

$$(H) \quad \begin{cases} -\omega^2 \mu \xi - \omega' \mu \eta = R_x + R'_x + \Sigma X \\ -\omega^2 \eta + \omega' \mu \xi = R_y + R'_y + \Sigma Y \\ 0 = R'_z + R'_z + \Sigma Z \end{cases}$$

$$\omega^2 \Sigma myz - \frac{d\omega}{dt} \Sigma mxz = -h R'_y + L$$

$$-\omega^2 \Sigma mxz - \frac{d\omega}{dt} \Sigma myz = h R'_x + M$$

Les sommes Σmxz , Σmyz varient avec le temps, ainsi d'ailleurs que ξ, η . Introduisons des axes (Ox, y, z) liés invariablement au solide, le plan zOx renfermant le point G et coïncidant avec zOx pour $t=0$. Si θ désigne l'angle x, Ox , on a : $\xi = l \cos \theta$, $\eta = l \sin \theta$ et les coordonnées x, y, z , d'un point P quelconque du solide sont :

$$x = x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta, \quad y = x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta, \quad z = z_1,$$

x_1, y_1, z_1 désignant des constantes, d'où on déduit :

$$\Sigma myz = \sin \theta \Sigma mx_1 z_1 + \cos \theta \Sigma my_1 z_1,$$

$$\Sigma mxz = \cos \theta \Sigma mx_1 z_1 - \sin \theta \Sigma my_1 z_1,$$

et les sommes qui entrent dans le second membre de ces dernières équations sont indépendantes du temps. (1)

270. - Cas particuliers.

Les formules précédentes se simplifient quand l'axe de rotation est axe central d'inertie, ce qui a lieu notamment quand S est de révolution autour de OZ . On a en effet, dans ce cas:

$$\Sigma mx = 0, \quad \Sigma my = 0, \quad \Sigma mxz = 0, \quad \Sigma myz = 0.$$

Les équations (4) et (5) deviennent:

$$R_x + R'_x + \Sigma X = 0, \quad R_y + R'_y + \Sigma Y = 0, \quad R_z + R'_z + \Sigma Z = 0$$

$$-hR'_y + I = 0, \quad hR'_x + M = 0,$$

équations qui coïncident avec celles qui donnent les réactions de l'axe dans le cas de l'équilibre. Ce résultat s'interprète mécaniquement comme au n° 219.

271. - Remarque sur les valeurs des réactions.

Les formules (4) et (5) montrent quel intérêt il y a dans une machine à ce que les pièces tournantes comme les volants, tournent autour d'un axe central d'inertie (axe principal par rapport au centre de gravité). Car s'il n'en est pas ainsi, le carré de la vitesse angulaire supposée constante figure dans les valeurs des réactions; si donc cette vitesse est grande, les pressions sur l'axe deviennent très grandes et peuvent amener les ruptures ou des arrachements de l'axe.

On peut calculer également la réaction intérieure totale qui s'exerce sur un élément quelconque P du solide. En effet, on connaît l'accélération \vec{y} de P à chaque instant, accélération qui a comme composantes:

$$-\omega^2 x - \omega' y, \quad -\omega^2 y + \omega' x, \quad 0$$

(1) Remarquons de plus qu'on peut remplacer ω dans les formules (4) et (5) par $\frac{V}{\mu R}$.

Si m est la masse du point, \vec{F} la force donnée appliquée au point, \vec{p} la réaction totale qui s'exerce sur P ; on a:

$$m\vec{y} = \vec{F} + \vec{p}$$

d'où la valeur de \vec{p} qui dépend en général du carré de ω ⁽¹⁾. Il faut donc se garder dans les applications, de donner à ω des valeurs telles que les réactions \vec{p} dépassent la limite de résistance des pièces qui tournent.

272... Axes permanents et axes naturels (ou spontanés) de rotation.

Revenons maintenant au cas où l'axe de rotation est quelconque et supposons d'abord que les forces données admettent une résultante géométrique passant par O . On a alors $I = M = N = 0$

et, d'après (1), $\frac{d\omega}{dt}$ est nul. Les équations (4) et (5) deviennent:

$$(6) \quad \begin{cases} -\omega^2 \mu \xi = R_x + R'_x + \sum X, \\ -\omega^2 \mu \eta = R_y + R'_y + \sum Y, \\ 0 = R_z + R'_z + \sum Z, \\ \omega^2 \sum myz = -h R'_y \\ -\omega^2 \sum mxz = h R'_x \end{cases}$$

Supposons la liaison réalisée de façon que $R'_z = 0$. Peut-il arriver, dans ces conditions, que la réaction de O' soit nulle? Il faut pour cela qu'on ait:

$$\sum myz = 0, \quad \sum mxz = 0,$$

c'est-à-dire que l'axe Oz soit axe principal d'inertie par rapport au point O . La réaction de O' est alors nulle.

Le mouvement est le même que si l'élément O de S n'était soumis à aucune liaison avec l'axe. D'où cette conclusion.

Si un solide, mobile autour d'un point fixe O , est soumis

⁽¹⁾ Quand P coïncide avec O ou O' , \vec{p} se compose de la réaction intérieure totale et de \vec{R} [ou de \vec{R}'].

à des forces extérieures qui admettent une résultante passant par ce point, et si ce corps tourne initialement autour d'une droite qui est axe principal d'inertie pour O, il continuera indéfiniment à tourner autour de cet axe, avec une vitesse angulaire constante.

C'est pour cette raison que les axes principaux d'inertie sont parfois appelés axes permanents de rotation.

Supposons maintenant qu'il n'y ait aucune force donnée appliquée au corps. Dans les équations (6), il faut faire :

$$\Sigma X = \Sigma Y = \Sigma Z = 0.$$

Peut-il arriver alors que la réaction du point O soit nulle en même temps que celle de O' ? Il faut pour cela, que les conditions :

$\Sigma mxz = 0$, $\Sigma myz = 0$, $\Sigma mx = 0$, $\Sigma my = 0$ soient remplies à la fois, c'est-à-dire que l'axe oz soit un axe central d'inertie. D'où ce théorème :

Si un corps solide entièrement libre et qui n'est soumis à aucune force extérieure tourne initialement autour d'un axe _____ central d'inertie, il tourne indéfiniment autour de cet axe avec une vitesse angulaire constante.

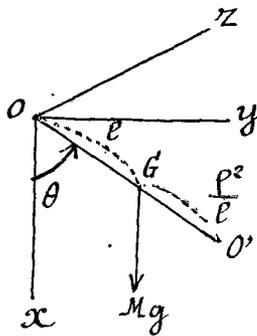
C'est pour cette raison qu'on donne souvent aux _____ axes centraux d'inertie le nom d'axes naturels ou axes spontanés de rotation. Quand un corps est de révolution, son axe de figure est un tel axe.

273. - Pendule composé.

Le pendule composé est constitué, comme nous l'avons dit déjà par un corps solide pesant assujéti à tourner autour d'un axe horizontal fixe.

Prenez (comme au N° 220) pour axe des z l'axe de suspension autour duquel peut tourner le corps, et pour plan des xy le plan vertical qui contient le cercle décrit par le centre de gravité G, l'axe ox étant la verticale descendante.

Soit, à l'instant t, θ l'angle xOG. L'équation du mouvement est (N° 220) :



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = - \frac{gl}{K^2} \sin\theta,$$

équation du mouvement d'un pendule simple dont la longueur l' serait $\frac{K^2}{l}$. Ce pendule simple est appelé pendule l' synchrone du pendule composé.

Si, sur la droite OG , on porte une longueur $OO' = l'$, le point O' du corps oscille comme s'il était détaché du corps et relié au point O par un fil sans masse. Désignons par p le rayon de gyration du corps par rapport à un axe passant par G et parallèle à Oz ; on a: [N. 262]:

$$MK^2 = Mp^2 + Ml^2,$$

donc

$$l' = \frac{K^2}{l} = l + \frac{p^2}{l}.$$

La distance OO' est donc toujours supérieure à OG , et les distances OG , $O'G$ qui ont respectivement pour valeurs l et $\frac{p^2}{l}$, sont liées par la relation:

$$(3) \quad OG \cdot O'G = p^2;$$

l'axe mené par O' parallèlement à l'axe de suspension se nomme axe d'oscillation. Tous les points de cet axe oscillent comme s'ils étaient séparés du corps et reliés à l'axe de suspension par des fils sans masse. La formule (3) montre que les deux axes d'oscillation et de suspension sont réciproques: si on suspend le corps par l'axe d'oscillation, le nouvel axe d'oscillation est l'ancien axe de suspension.

Ce théorème peut se traduire encore par le théorème suivant:

Théorème de Huyghens. - Si, dans un plan passant par le centre de gravité G , de part et d'autre de ce plan, on connaît deux axes de suspension parallèles, inégalement distants de G et pour lesquels la longueur du pendule synchrone est la même, cette longueur est précisément égale à la distance des deux axes. (1)

(1) Si la longueur du pendule synchrone est la même, la durée d'une oscillation d'amplitude donnée est la même dans les deux cas, et réciproquement.

Si, en effet, l et l_1 sont les distances du centre de gravité aux deux axes, et l' la longueur commune du pendule synchrone on a :

$$l' = l + \frac{p^2}{l} \text{ et } l' = l_1 + \frac{p^2}{l_1}, \text{ d'où :}$$

$$l + \frac{p^2}{l} = l_1 + \frac{p^2}{l_1}$$

équation du second degré en l_1 , qui a comme racines : $l_1 = l$ (à rejeter) et $l_1 = \frac{p^2}{l}$. La distance $l + l_1$ des deux axes est donc bien égale à la longueur $l + \frac{p^2}{l}$ du pendule synchrone; l'un des axes étant pris pour axe de suspension, l'autre est l'axe d'oscillation.

Remarque. - Si l'axe de suspension varie dans le corps parallèlement à lui-même, la formule : $l' = l + \frac{p^2}{l}$ montre que la longueur l' du pendule synchrone est le minima quand les deux termes l et $\frac{p^2}{l}$ sont égaux, c'est-à-dire quand l'axe de suspension est à une distance du centre de gravité égale à p ; cette valeur minima de l' est égale à $2p$. Si on se donne la longueur $l' (> 2p)$, il existe deux valeurs correspondantes de l ; les axes de suspension, parallèles à une direction donnée pour lesquels le pendule simple synchrone a la même longueur l' , engendrent donc deux cylindres de révolution dont l'axe passe par G, l'un de rayon plus petit que p , l'autre de rayon plus grand que p .

La considération de l'ellipsoïde d'inertie permettrait d'étudier bien aisément les variations de l' quand la direction de l'axe de suspension varie dans le corps.

274. - Applications du pendule composé.

La durée T d'une petite oscillation du pendule composé est donnée par : $T = \pi \sqrt{l'}$, ou plus exactement par : $\pi \sqrt{\frac{l'}{g}} \left[1 + \frac{\alpha^2}{16} \right]$, α désignant θ l'angle maximum d'écart avec la verticale.

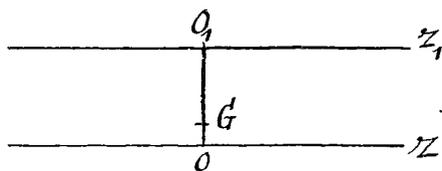
Si on connaît exactement l' , on peut donc, en faisant osciller un pendule composé⁽¹⁾ et en mesurant la durée

(1) Le pendule composé est réalisable; le pendule simple n'est qu'un cas idéal.

et l'amplitude des petites oscillations, calculer g en un point de la terre. C'est ainsi qu'à Paris l'accélération de la pesanteur au niveau moyen du sol⁽¹⁾, a été trouvée égale à $9^m,809$ (Expériences du Colonel Desforges).

Inversement, si on connaît g en un lieu de la terre, il suffit de faire osciller un solide autour d'un axe de suspension OZ et de mesurer T pour connaître la longueur l' celle longueur l' donne le moment d'inertie du solide par rapport à OZ , quand on connaît le centre de gravité du solide (et par suite l).

Pendule réversible de Kater. - En géodésie, on emploie le pendule composé pour mesurer g en un point quelconque de la terre; mais il faut connaître très exactement la longueur l' du pendule synchrone, longueur qui (il éme g pour un appareil donné) varie avec la température, les déformations permanentes, etc. - Aussi emploie-t-on souvent le pendule réversible de Kater qui repose sur le théorème de Huyghens. Ce pendule peut osciller autour de deux axes de suspension parallèles soit OZ et O_1Z_1 , dont le plan renferme le centre de gravité G du solide; en déplaçant une masse de plomb dans le solide, on fait coïncider G avec un point arbitraire du segment ni ⁽¹⁾, perpendiculaire aux deux axes de suspension. On amène par tâtonnement le point G dans une position inégalement dis-



tante des deux axes et telle que les petites oscillations du pendule autour de OZ et de O_1Z_1 aient même durée. En vertu du théorème de Huyghens, la distance des deux axes est

la longueur l' du pendule synchrone.

Chap. V

⁽¹⁾ Réduite au niveau de la mer, cette accélération est $9^m,81$.

Chapitre V.

Chocs et percussion. - Pendule balistique.

275. - Chocs et percussions. - Il peut arriver que les points d'un système matériel changent notablement de vitesses dans un temps extrêmement court, sans que le système change sensiblement de position. Le changement de vitesses nous apparaît alors comme instantané.

C'est ce qui arrive, par exemple, quand une balle élastique rebondit sur un mur : la position de la balle, dans le temps très court que dure son contact avec le mur, varie très peu, mais sa vitesse change brusquement, puisqu'elle se dirigeait vers le mur un instant avant le contact et s'en éloigne immédiatement après : à partir de ce moment, le mouvement de la balle se fait à nouveau sous l'action de la pesanteur, dont l'effet est négligeable pendant la durée du contact. On dit, dans ce cas, qu'il y a choc entre le mur et la balle, et que le mur exerce sur la balle une percussion.

De même, un projectile qui s'incruste dans un obstacle un ballon qu'on lance d'un coup de pied subissent une percussion.

276. - Impulsion d'une force. - Pour définir avec précision la percussion qui s'exerce sur un élément matériel (à un instant t_0), je définirai d'abord l'impulsion d'une force ordinaire dans un intervalle de temps t_0, t_1 .

Soit P un point matériel de masse m , X, Y, Z les composantes de la force \vec{F} qui s'exerce sur P dans son mouvement. A chaque instant t , ces composantes X, Y, Z sont bien déterminées, et on a :

$$(1) \quad mx'' = X(t), \quad my' = Y(t), \quad mz'' = Z(t).$$

D'où on déduit aussitôt, en désignant par (x', y', z') et (x'_0, y'_0, z'_0) les composantes de la vitesse aux instants t_0, t_1 :

$$(2) \quad \begin{cases} mx'_1 - mx'_0 = \int_{t_0}^{t_1} X(t) dt, \\ my'_1 - my'_0 = \int_{t_0}^{t_1} Y(t) dt, \\ mz'_1 - mz'_0 = \int_{t_0}^{t_1} Z(t) dt. \end{cases}$$

On appelle impulsion de la force (X, Y, Z) dans l'intervalle de temps t_0 à t_1 le vecteur dont les composantes sont les intégrales $a = \int_{t_0}^{t_1} X(t) dt$, $b = \int_{t_0}^{t_1} Y(t) dt$, $c = \int_{t_0}^{t_1} Z(t) dt$.

Les équations (2) expriment alors ce théorème :

« La variation géométrique de la quantité de mouvement du point P quand t varie de t_0 à t_1 est égale à l'impulsion (dans cet intervalle de temps) de la force appliquée au point. »

Si le point P est soumis à plusieurs forces, \vec{F}_1 ou $(X_1, Y_1, Z_1), \dots, \vec{F}_n$ ou (X_n, Y_n, Z_n) , on a, à chaque instant :

$$X = X_1 + \dots + X_n, \quad Y = Y_1 + \dots + Y_n, \quad Z = Z_1 + \dots + Z_n,$$

$$\text{D'où } a = \int_{t_0}^{t_1} X(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} X_1 dt + \dots + \int_{t_0}^{t_1} X_n dt = a_1 + \dots + a_n,$$

et de même

$$b = b_1 + \dots + b_n, \quad c = c_1 + \dots + c_n,$$

égalités qui expriment que l'impulsion de la résultante dans l'intervalle de temps t_0 à t_1 est égale à la somme géométrique des impulsions des composantes dans le même intervalle de temps.

277. - Percussions considérées comme les impulsions de forces considérables.

Supposons que l'intervalle de temps t_0 à t_1 soit très petit. Si la force (X, Y, Z) n'a pas dans cet intervalle de temps une intensité très grande, les seconds membres de (2) sont très petits, et par conséquent la vitesse du mobile varie très peu dans l'intervalle de temps t_0 à t_1 : c'est ce qui arrive pour le mouvement d'un point soumis à des forces ordinaires, telles que la pesanteur ou l'attraction.

newtonienne d'un centre fixe, etc. Mais si la force \bar{F} ou (X, Y, Z) a, dans l'intervalle t_0, t_1 , une intensité très grande de l'ordre de $\frac{1}{t_1 - t_0}$, les seconds membres de (2) donc l'impulsion, ont des valeurs finies, et la vitesse du point P subit une variation finie. D'ailleurs, le point se déplace très peu pendant ce même intervalle de temps, puisque sa vitesse reste finie dans tout l'intervalle: d'une façon précise, si on appelle V le maximum de la vitesse dans l'intervalle de temps considéré, le déplacement est moindre que $V(t_1 - t_0)$.

Quand l'intervalle de temps t_0, t_1 est inappréciable pour nos sens, nous constatons que le point subit brusquement une variation finie de vitesse sans que sa position change. Nous disons que le point P a subi une percussion, qui a comme direction, sens et intensité la direction, le sens et la longueur absolue de l'impulsion de la force (X, Y, Z) pendant la durée de la percussion.

En vertu de cette définition, quand un point P subit une percussion Φ ou (a, b, c) , sa quantité de mouvement subit une variation géométrique égale à Φ ; représentons par $\Delta\bar{V}$ la variation géométrique de \bar{V} et par $\Delta x', \Delta y', \Delta z'$ les variations de x', y', z' pendant la percussion, les égalités précédentes s'écrivent:

$$m. \Delta\bar{V} = \Phi,$$

$$\text{ou (3)} \quad m. \Delta x' = a, \quad m. \Delta y' = b, \quad m. \Delta z' = c.$$

278. — Composition des percussions.

Si le point P est soumis à plusieurs percussions simultanées, c. à. d. à plusieurs forces considérables de l'ordre de $\frac{1}{t_1 - t_0}$, l'impulsion de la résultante de ces forces est [N° 276] la somme géométrique des impulsions des composantes [dans l'intervalle du temps t_0, t_1 , de la percussion]. La percussion totale que subit le point P est donc la somme géométrique de toutes les percussions qui lui sont appliquées. Les percussions se composent comme des forces.

D'une manière générale, les percussions n'étant que des ^{impulsions de} forces très grandes, à chaque théorème sur les forces, va correspondre un théorème sur les percussions.

279. - Théorème des moments cinétiques pour un point. - Considérons le vecteur Φ d'origine P qui représente la percussion appliquée à P , et le vecteur $m\Delta V$ d'origine P . Ces deux vecteurs coïncident: leurs moments par rapport à un point O quelconque (ou par rapport à une droite OZ quelconque) coïncident donc. Or le moment de $m\Delta V$ par rapport au point O est l'excès géométrique du moment (mV, O) sur le moment (mV_0, O) . D'où ce théorème: La variation géométrique du moment cinétique de P par rapport à un point O , est équipollente, au moment - par rapport à O , de la percussion appliquée à P . Si le point P est soumis à plusieurs percussions, ce dernier moment est le moment résultant, par rapport à O , de toutes les percussions. Un théorème analogue s'applique aux moments par rapport à une droite.

L'égalité géométrique des moments se traduit par l'équation [égalité des moments pour OZ].

$$(4) \quad \Delta \cdot m(xy' - yx') = xb - ya$$

et deux équations analogues.

On pouvait déduire immédiatement l'équation (4) des équations (3), en multipliant la première équation (3) par $-y$, la seconde par x , et en ajoutant; il vient:

$$(5) \quad m(x\Delta y' - y\Delta x') = xb - ya$$

équation qui coïncide avec l'équation (4), si on tient compte de ce fait que x et y ne subissent aucune variation.⁽¹⁾

280. - Percussions et forces ordinaires. - Percussions dans le mouvement relatif.

Si un point matériel P est soumis, à l'instant t , à des forces ordinaires et à des percussions, l'effet des premières pendant la durée des percussions est négligeable.

D'après cela, étudions d'abord le mouvement absolu d'un point P , et supposons qu'entre les instants t_0 et t_1 très voisins, P soit soumis à plusieurs forces (absolues) F_1, \dots, F_n

(1) D'une manière générale, u désignant une fonction donnée de x, y, z, x', y', z', t , nous représentons par Δu la variation que subit u pendant la percussion. Il ne faut pas oublier, dans le calcul de Δu , que x, y, z, t ne subissent aucune variation.

de l'ordre de $\frac{1}{t_1 - t_0}$ dont les impulsions sont $\bar{\Phi}_1, \dots, \bar{\Phi}_n$. La percussion que subit le point est $\bar{\Phi}_1 + \dots + \bar{\Phi}_n$. Imaginons maintenant qu'on rapporte le mouvement de P à des axes animés d'un mouvement absolu quelconque, mais régulier; la force relative totale qui s'exerce sur P entre les instants t_0 et t_1 s'obtient en ajoutant à $\bar{\Phi}_1 + \dots + \bar{\Phi}_n$ le vecteur fini $m\bar{\Gamma}$, $\bar{\Gamma}$ représentant l'accélération qu'aurait P à l'instant t si son mouvement absolu était rectiligne et \mathcal{O} uniforme (N^o). La percussion que subit le point P dans ce mouvement relatif se confond donc avec la percussion absolue.

Ce résultat était évident d'après le théorème bien connu de cinématique: la différence géométrique $\bar{V}_1 - \bar{V}$ des vitesses de deux points qui coïncident à l'instant considéré est indépendante des axes auxquels on rapporte le mouvement.

Remarquons que ce dernier théorème exige toutefois que les trièdres de référence employés aient des vitesses continues l'un par rapport à l'autre.

D'une façon précise, soit $OXYZ$ et $O_1x_1y_1z_1$ deux trièdres animés l'un par rapport à l'autre d'un mouvement quelconque: la percussion que subit un point P à un instant t est la même qu'on rapporte le mouvement au premier ou au second trièdre cela sous la seule restriction que les vitesses d'un des trièdres par rapport à l'autre soient continues à l'instant t .

Il n'en va plus de même si, dans son mouvement par rapport au trièdre O , le trièdre O_1 change brusquement de vitesses. Par exemple, supposons que les axes $OXYZ$ soient liés à l'écorce terrestre, que les axes $O_1x_1y_1z_1$ soient parallèles aux premiers, et que leur origine O_1 soit un point matériel dont la ^{vitesse \bar{W}} par rapport à la terre varie brusquement de $\bar{\Delta W}$ à l'instant. Soit \bar{V} et \bar{V}' la vitesse de P par rapport au trièdre O et au trièdre O_1 , $\bar{\Phi}$ et $\bar{\Phi}'$ la percussion que subit P suivant qu'on rapporte son mouvement au premier ou au second trièdre; on a:

$$\bar{\Delta V} = \bar{\Delta V}' + \bar{\Delta W}, \quad \text{et} \quad \bar{\Phi} = \bar{\Phi}' + m\bar{\Delta W}.$$

Percussions appliquées à un système.

281. - Percussions extérieures et intérieures. -

Si deux forces sont à un instant égales et directement opposées, leurs impulsions sont évidemment égales et directement opposées. D'où ce principe :

En vertu du principe de l'action et de la réaction, les percussions intérieures⁽¹⁾ d'un système sont décomposables en percussions deux à deux égales et directement opposées.

282. - Théorème du mouvement du centre de gravité.

Entre deux instants t_0 , t_1 , la variation ΔV de la vitesse V du centre de gravité G du système S est la même que si (toute la masse M de S étant concentrée en ce point) toutes les forces extérieures lui étaient appliquées. D'où ce théorème.

La variation géométrique de la quantité de mouvement du système (ou, si on veut, la variation de la vitesse du centre de gravité G du système) est la même que si, toute la masse du système étant concentrée en ce point, toutes les percussions lui étaient appliquées.

Ce théorème se traduit par l'égalité (théorème du mouvement du centre de gravité projeté sur ox):

$$M \cdot \Delta \xi = \Delta \sum m x' = \sum \alpha^e, \quad (\xi \text{ abscisse de } G')$$

et deux égalités analogues,

ξ, η, ζ désignant les coordonnées du point G .

283. - Théorème des moments cinétiques.

Soit OR le moment cinétique du système S par rapport au point O ; la variation de OR est la somme géométrique des variations des moments cinétiques des divers éléments P de S . En vertu du théorème du N° 279, $\Delta \cdot OR$ est équivalent au moment résultant par rapport à O de toutes les percussions appliquées à S , donc au moment

(1) C'est-à-dire les impulsions des grandes forces intérieures du système.

résultant de toutes les percussions extérieures.

284. - Théorème des moments cinétiques dans le mouvement autour du centre de gravité.

Substituons aux axes choisis $Oxyz$ de nouveaux axes $O_1x_1y_1z_1$, parallèles aux premiers, et dont l'origine O_1 , à l'instant t de la percussion, subit elle-même un brusque changement de vitesse $\Delta\bar{W}$ (par rapport au trièdre O).⁽¹⁾ Soit $\bar{\Phi}$ et $\bar{\Phi}_1$ la percussion que subit l'élément P de S à l'instant t suivant qu'on rapporte son mouvement au trièdre O ou au trièdre O_1 ; nous savons qu'on a:

$$\bar{\Phi}_1 = \bar{\Phi} - m\Delta\bar{W}, \quad (m \text{ masse de } P).$$

Il suit que là qu'on peut appliquer le théorème des moments cinétiques au mouvement de S par rapport aux axes $O_1x_1y_1z_1$, à condition de diminuer pour chaque élément P , la percussion extérieure totale $\bar{\Phi}$ du vecteur $m\Delta\bar{W}$.

Mais supposons que O_1 coïncide constamment avec G : le moment résultant par rapport à G des vecteurs $-m\Delta\bar{W}$ est nul (puisque ces vecteurs admettent une résultante géométrique passant par G). D'où ce théorème:

On peut appliquer le théorème des moments cinétiques au mouvement autour de G (et par rapport à G) sans changer les percussions extérieures.

Théorème qui s'énonce encore:

La variation du moment cinétique de S dans son mouvement autour de G est équipollente au moment résultant par rapport à G des percussions extérieures.

Supposons notamment que S soit un solide animé à l'instant t_0 d'un mouvement de translation et qu'on lui applique des percussions passant par G : le moment cinétique de S autour de G est encore nul après les percussions, et par suite aussi sa rotation instantanée (N° 215).

(1) Par exemple, S est un solide qui subit une percussion et O_1 un élément matériel déterminé de S .

Chapitre II.

Percussions appliquées à un solide.

285. - Percussions appliquées à un solide mobile autour d'un axe fixe.

Le solide S , fixé par deux points O, O' , étant en mouvement, on lui applique à l'instant t_0 des percussions extérieures $\bar{\Phi}_1, \dots, \bar{\Phi}_n$, qu'on suppose connues. - Pour calculer l'effet de ces percussions, prenons comme axe oz la droite OO' , et soit ω la vitesse angulaire de rotation du solide, comptée positivement de gauche à droite autour de oz . Les percussions données font passer brusquement ω de la valeur connue ω_0 à une certaine valeur ω , qu'il faut déterminer. Appelons x_i, y_i, z_i les coordonnées du point d'application d'une des percussions $\bar{\Phi}_i$ données, dont les composantes sont a_i, b_i, c_i . Le corps exercera des percussions sur les points fixes O et O' , et ceux-ci réagiront - en exerçant sur S des percussions inconnues π et π' , dont les composantes seront A, B, C et A', B', C' . Appelons MK^2 le moment d'inertie du solide par rapport à oz : le moment cinétique de S par rapport à OZ est $MK^2\omega$. Le théorème des moments cinétiques appliqué à OZ donne (N. 282)

$$(1) \quad MK^2(\omega - \omega_0) = MK^2 \Delta\omega = \sum (x_i b_i - y_i a_i),$$

les percussions π et π' n'intervenant pas puisque leurs moments sont nuls. Le problème est résolu par l'équal. (1).

Proposons-nous maintenant de déterminer les percussions de liaison π et π' . Le théorème des moments par rapport à ox et oy et le théorème du mouvement du centre de gravité donnent :

$$\Delta \sum m (yz' - zy') = \sum (y_i c_i - z_i b_i) - hB'$$

$$\Delta \sum m (zx' - xz') = \sum (z_i a_i - x_i c_i) + hA',$$

$$\Delta \sum mx' = \sum a_i + A + A',$$

$$\Delta \sum my' = \sum b_i + B + B',$$

$$\Delta \sum mz' = \sum c_i + C + C',$$

où h est le z de O' .

Mais dans une rotation angulaire ω autour de OZ , on a à chaque instant :

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \quad \frac{dy}{dt} = \omega x, \quad \frac{dz}{dt} = 0.$$

En remplaçant les dérivées par ces valeurs dans les équations ci-dessus et remarquant qu'on peut faire sortir des signes Δ les quantités telles que $\sum mxz$ qui dépendent seulement de la position du corps (puisque le corps est supposé immobile pendant la percussion), nous obtenons :

$$(2) \quad \begin{cases} -(\sum mxz) \Delta\omega = \sum (y c_i - z h_i) - h B', \\ -(\sum myz) \Delta\omega = \sum (z a_i - x c_i) + h A', \\ -(\sum my) \Delta\omega = \sum a_i + A + A', \\ (\sum mx) \Delta\omega = \sum b_i + B + B', \\ 0 = \sum c_i + C + C'. \end{cases}$$

Ces équations ne déterminent pas entièrement⁽¹⁾ les percussions Π et Π' elles nous donnent en effet A, B, A, B et seulement $C + C'$. La quantité $\Delta\omega$ qui entre dans les équations (2) est déterminée par l'équation (1)

286. - Cas d'une percussion unique. - Centre de percussion.

Supposons qu'il n'y ait qu'une percussion extérieure $\bar{\Phi}$ ou (a, b, c) , appliquée au point (x_1, y_1, z_1) , et cherchons si on peut disposer de cette percussion de façon que les appuis O et O_1 ne supportent aucune percussion, c'est-à-dire que A, B, C, A', B', C' soient nuls.

En introduisant ces fonctions dans la dernière des équations (2) on trouve :

$$0 = C$$

c'est-à-dire que la percussion donnée $\bar{\Phi}$ doit être perpendiculaire à l'axe de rotation. Supposons qu'on ait pris pour plan des xy , le plan $O_1x'y'$ perpendiculaire à OZ et

(1) Les liaisons matérielles sont ici surabondantes [N. 269]. On peut supposer la liaison réalisée de façon que C soit nul.

contenant cette percussion, et dans ce plan un axe des x perpendiculaire à Φ ; on aura alors :

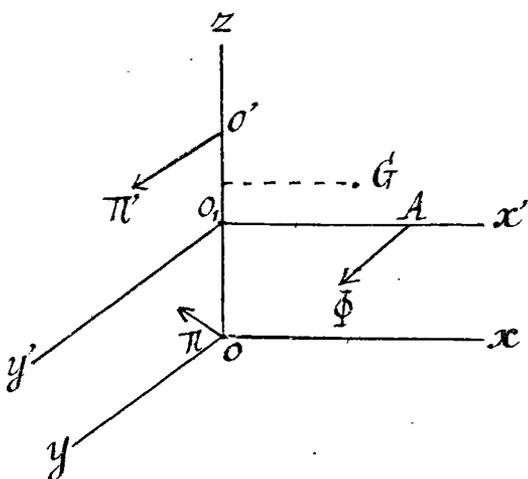
$$a=0, \quad c=0, \quad z_1=0$$

en sorte que les quatre premières équations (2) deviendront dans ce nouveau système d'axes, en appelant z' la nouvelle valeur de z :

$$(3) \begin{cases} \sum mxz' = 0, & \sum myz' = 0, & \sum my = 0 \\ \Delta\omega (\sum mx) = b. \end{cases}$$

$\Delta\omega$ est d'ailleurs donné par l'équation :

$$MK^2 \Delta\omega = x b.$$



Les deux premières équations (3) expriment que OZ est axe principal d'inertie de S pour O_1 ; la troisième exprime que le centre de gravité G du solide est situé dans le plan ZOX ; quant à la quatrième, si on y remplace $\Delta\omega$ par sa valeur $\frac{bx_1}{MK^2}$, et $\sum mx$ par son expression $M\xi$, (ξ abscisse de G), elle donne :

$$x_1 = \frac{K^2}{\xi}$$

En résumé :

Quand un corps solide est mobile autour d'un axe fixe OZ , pour qu'on puisse lui appliquer une percussion telle que l'axe ne supporte aucune percussion, il faut d'abord que l'axe de rotation OZ soit axe principal d'inertie du solide pour un de ses points O_1 . Cette condition étant remplie⁽¹⁾, la percussion (d'intensité arbitraire) doit : 1° être dans le plan perpendiculaire à OZ et passant par O_1 ; 2° être normale au plan GOZ ; 3° percer ce plan en un point P situé par rapport à l'axe du même côté que le centre de gravité, à une distance de l'axe égale

(1) Cette condition est toujours remplie si le solide admet un plan de symétrie perpendiculaire à OZ .

à $\frac{K^2}{\xi}$. La distance $\frac{K^2}{\xi}$ est la longueur du pendule synchrone du pendule composé formé par le corps S quand l'axe de suspension est horizontal. Le point d'application P ainsi déterminé se nomme le centre de percussion relatif à l'axe OZ . Remarquons de plus que ξ doit être différent de zéro.

287 - Cas d'une plaque - Supposons que le solide soit une plaque d'épaisseur négligeable assujettie à tourner autour d'un axe OZ de son plan. Quel que soit cet axe, (pourvu qu'il ne passe pas par le centre de gravité de la plaque) il est possible de déterminer une percussion perpendiculaire au plan de la plaque et telle que l'axe de rotation ne subisse aucun choc. Ceci tient à ce que OZ est toujours axe principal d'inertie pour un de ses points. En effet, le plan de la plaque étant pris pour plan des xz , transportons les axes $Oxyz$ en un point O_1 (ou $z=l$) de OZ . Pour que OZ soit axe principal par rapport à O_1 , il faut qu'on ait :

$$\sum myz_1 = 0 \quad \sum mxz_1 = 0 ;$$

la première condition est toujours remplie, puisque l'on a $y=0$ pour tous les points du corps; quant à la seconde, elle s'écrit puisque $z = z_1 + l$:

$$\sum mx(z-l) = 0 \quad \text{ou} \quad \sum mxz - l \sum mx = 0$$

et donne :

$$l = \frac{\sum mxz}{\sum mx}$$

Comme $M\xi$, ou $\sum mx$, est supposé différent à zéro, il existe sur OZ un point O_1 et un seul pour lequel cette droite est axe principal d'inertie. Pour qu'une percussion Φ appliquée à la plaque ne donne aucun choc à l'axe, il faut que cette percussion soit normale au plan de la plaque et rencontre la droite O_1x en un point A donc la distance O_1A à l'axe OZ est donnée par :

$$O_1A = x_1 = \frac{K^2}{\xi}$$

c'est-à-dire par

$$x_1 = \frac{\sum mx^2}{\sum mx}$$

Le point A est le centre de percussion de la plaque par rapport à OZ .

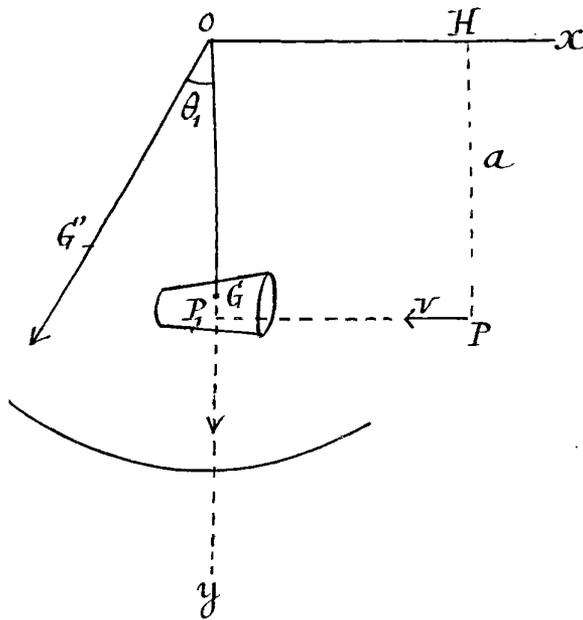
D'après ce qui précède, à chaque droite du plan correspond un centre de percussion. Si on pose $m' = mx$, les coordonnées du point A sont

$$x_1 = \frac{\sum m'x}{\sum m'} \quad z_1 = \frac{\sum m'z}{\sum m'} ;$$

le centre de percussion de la plaque relatif à un axe OZ de son plan qui ne le traverse pas coïncide avec la position qu'occuperait le centre de gravité si la masse de chaque élément était multipliée par sa distance à l'axe.

Par exemple, pour une porte rectangulaire, homogène, de longueur l , le centre de percussion est au milieu de la hauteur et à une distance de l'axe égale à $\frac{2}{3}l$.

288. - Pendule balistique. - Cet appareil est destiné



à mesurer la vitesse des projectiles. Il est constitué d'un solide, mobile autour d'un axe horizontal fixe OZ et qui admet un plan de symétrie perpendiculaire à cet axe, soit le plan xoy . Je représente par Mk^2 le moment d'inertie du solide \mathcal{D} autour de OZ . Le système comprend notamment un récepteur en fonte rempli de terre: lorsqu'il est en équilibre sous l'action de la pesanteur, la disposition schématisée de l'appareil est celle de la figure; le centre de gravité G du système est sur la verticale descendante

oy du point O . Un projectile P lancé horizontalement dans le plan xoy pénètre dans la terre qui remplit le récepteur et s'y fixe en un point P_1 que nous supposons ⁽¹⁾ sur la droite OG . Par suite du choc, le nouveau solide ainsi formé est dévié de la verticale, la droite OG' s'écarte de OZ d'un angle

(1) S'il en était autrement, la distance OP_1 serait un peu plus grande que la longueur $PH = a$, mais en différencierait très peu.

maximum $\theta = \angle GOG'$ qu'on mesure. C'est de cet angle qu'il faut déduire la vitesse du projectile.

Je désigne par m la masse du projectile, par V sa vitesse, par a la distance $OP = PH$, par l la distance OG . J'applique le théorème des moments cinétiques au système S formé par le pendule balistique et par le projectile. Pendant le choc des deux corps, les seules réactions extérieures appliquées à S sont les réactions de la suspension, donc le moment par rapport à l'axe OZ est nul. Le moment cinétique de S par rapport à OZ ne change donc pas pendant le choc. Or ce moment, avant le choc, est égal (en valeur absolue) à mVa , car P est le seul corps de S en mouvement; immédiatement après le choc, il est égal à

$$(mK^2 + ma^2) \omega_1,$$

ω_1 désignant la vitesse angulaire (après le choc) du système S (devenu solide). On a par suite :

$$mVa = (mK^2 + ma^2) \omega_1,$$

d'où

$$(1) \quad V = \frac{(MK^2 + ma^2) \omega_1}{ma}.$$

Cherchons maintenant la relation entre ω_1 et l'angle d'écart maximum θ du pendule. Nous pouvons appliquer au mouvement du solide S après le choc, le théorème des forces vives. La force-vive de S , à chaque instant t , est $(MK^2 + ma^2) \omega^2$, et on a :

$$(MK^2 + ma^2) \omega^2 = +2g [-M\eta + my] + C t^2$$

[η et y désignant l' y de G et de P]; or, soit θ l'angle d'écart à l'instant t ; η et y sont égaux respectivement à $l \cos \theta$ et à $l \sin \theta$; d'où l'équation :

$$(MK^2 + ma^2) \omega^2 = 2g(Ml + ma) \cos \theta + h;$$

pour $\theta = 0$, ω est égal à ω_1 ; pour $\theta = \theta_1$, ω est nul; d'où :

$$(MK^2 + ma^2) \omega_1^2 = 2g(Ml + ma)(1 - \cos \theta) = 4g(Ml + ma) \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

c'est-à-dire

$$\omega_1 = 2 \sin \frac{\theta}{2} \sqrt{\frac{g(Ml + ma)}{MK^2 + ma^2}},$$

ou enfin [d'après (1)] :

$$V = \frac{2}{ma} \sqrt{g(Ml + ma)(MK^2 + ma^2)} \sin \frac{\theta}{2}.$$

On voit que si la droite selon laquelle est lancé le projectile est toujours à la même distance de l'axe de suspension, le sinus du demi angle d'écart maximum est proportionnel à la vitesse du projectile.

Remarque sur les percussions de l'axe. — Il importe pour la conservation de l'appareil, de lancer le projectile à une distance de l'axe telle que cet axe ne subisse pas de percussion. Cela est possible, car l'appareil étant symétrique par rapport au plan vertical xOy , l'axe Oz est, pour le point O , axe principal d'inertie du solide. D'après les conditions du N° 286, la percussion exercée sur l'appareil doit être normale au plan ZOG , et percer ce plan en un point A situé 1° sur la perpendiculaire Oy à Oz mené dans le plan ZOG , 2° du même côté que G par rapport à Oz ; 3° à une distance $OA = \frac{K^2}{OG}$. Ces conditions sont donc remplies si on suppose P situé sur la demi-droite OG à une distance de O égale à $\frac{K^2}{OG}$, puisque la percussion exercée par P sur le pendule balistique est dirigée suivant sa vitesse V .⁽¹⁾

289. — Fusil-pendule et canon-pendule.

On peut déterminer la vitesse d'un projectile à la sortie d'une arme à feu par le recul que subit cette arme lorsqu'on lui permet d'osciller librement autour d'un axe horizontal, (soit Oz) : l'appareil ainsi constitué porte le nom de fusil-pendule ou de canon-pendule.

Soit m et V la masse et la vitesse du projectile, M la masse de l'arme et de son support, MK^2 son moment d'inertie par rapport à Oz , ω la vitesse d'oscillation de l'arme immédiatement après le tir. Soit enfin μ la masse d'un élément de la charge de poudre (gazéifiée

(1) En effet, cette percussion est directement opposée à la percussion mV que subit P : or la vitesse de P après le choc a le même sens qu'avant le choc et est seulement diminuée.

pendant l'explosion! et U sa vitesse au sortir de la bouche de l'arme. Pendant la durée de l'explosion, toutes les forces autres que les réactions de l'axe OZ sont des forces intérieures. Le moment cinétique, par rapport à OZ , du système arme-projectile-poudre reste donc nul. Nous supposons l'expérience faite dans les conditions de symétrie du N^o précédent: le plan xOy est plan de symétrie de l'arme, du projectile, et de la charge de poudre; le projectile est lancé horizontalement dans le plan xOy . Soit encore à la distance au point O de la vitesse du projectile, et par suite de la direction de l'axe de l'arme. En a (en tenant compte du sens des mouvements):

$$(3) \quad m a V + a \sum \mu u - M K^2 \omega_1 = 0.$$

On peut, en général, confondre $M K^2$ avec $M a^2$, la masse de l'arme étant considérable par rapport à celle des liens avec l'axe OZ ; la quantité $a \omega_1$, d'autre part, est la vitesse de recul W de l'arme; l'équation (3) peut donc encore s'écrire:

$$(4) \quad m V + \sum \mu u - M W = 0.$$

On ne connaît pas la quantité $\sum \mu u$: on admet souvent qu'elle a sensiblement la même valeur que si la vitesse de la masse $m' = \sum \mu$ de toute la charge était (après l'explosion) la moyenne arithmétique $\frac{V+W}{2}$ entre la vitesse V (vitesse du premier élément gazeux qui sort de l'arme derrière le projectile) et la vitesse $-W$ (vitesse du dernier élément gazeux qui reste dans l'arme). On a alors, entre V et W la relation:

$$V [2m + \sum \mu] = W [M + \sum \mu].$$

Quant à W ou ω_1 , il se déduit de l'angle d'écart maximum du pendule balistique formé par l'arme comme au N^o précédent.

Choc de deux solides.

290. - Choc direct de deux sphères identiques.

Considérons deux sphères solides S et S' homogènes et identiques, animées respectivement une translation dans laquelle les deux centres G et G' de S et S' sont lancés l'un vers l'autre avec des vitesses égales. À un certain instant t , les deux sphères viennent en contact, et il est impossible que leurs

(¹) En négligeant la masse des liens, et en confondant avec a la distance r de chaque élément de l'arme à l'axe, on a: $M K^2 = \sum m r^2 = M a^2$.

vitesse ne subissent pas alors une variation brusque, puisque autrement les deux corps se pénétreraient. Il y a choc entre S et S' à l'instant t_0 .

L'expérience montre que trois cas peuvent se présenter après le choc :

1° les vitesses de S et de S' sont renversées mais ont gardé leur valeur absolue ; tout se passe alors pour nos sens comme si les deux sphères s'étaient traversées ;

2° les deux sphères ont perdu toute vitesse ;

3° les vitesses de S et S' sont renversées, mais leur valeur absolue n'est qu'une fraction, soit e , de leur vitesse avant le choc.

Dans le premier cas, le système n'a point perdu de force-vive pendant le choc. Dans les deux autres cas, le choc a entraîné une perte de force-vive, qui est totale dans le second cas.

Comment concilier cette perte de force-vive avec le fait que les deux corps sont solides et parfaitement lisses [N° 92] ? C'est qu'en réalité, suivant une remarque déjà faite, il ne saurait exister de corps rigoureusement indéformables. Les deux sphères pendant le choc subissent une déformation, très légère si les deux corps sont très rigides, mais comme les réactions des deux corps l'un sur l'autre sont considérables, leur travail, pour une déformation légère des deux sphères, peut être fini, et non négligeable, et c'est ce qui a lieu en général.

On convient de dire, dans le premier cas, que les deux sphères sont parfaitement élastiques ; dans le second cas qu'elles sont parfaitement dénuées d'élasticité (ou encore parfaitement molles) ; dans le troisième cas (cas général) qu'elles sont imparfaitement élastiques et on appelle e leur coefficient d'élasticité ($0 < e < 1$).

Remarquons que les deux premiers cas sont des cas particuliers du troisième, correspondant à $e=1$ et à $e=0$.

291. - Théorème général du choc : corps parfaitement élastiques. - Soit S et S' deux solides qui viennent en contact à l'instant t_0 , P et P' les éléments de S et de S' qui sont en contact, \vec{v} et \vec{v}' les vitesses de P et de P' à l'instant t_0 , \vec{v}_p ou \vec{v}_n la vitesse relative de P par rapport à P' , enfin w la projection de \vec{v}_p sur la normale en P à S menée vers l'intérieur du solide S . À l'instant t_0 , la quantité w est

positive ; car autrement, les deux corps se seraient pénétrés à l'instant $t_0 - \epsilon$; appelons W la vitesse de pénétration des deux corps. En un temps très court t_0, t_1 , cette vitesse W doit devenir négative ou nulle : il y a donc nécessairement choc entre S et S' , sauf dans le cas où W est nul à l'instant t_0 , auquel cas les deux corps s'atteignent en glissant l'un sur l'autre.

L'expérience montre que si W_1 est la nouvelle valeur de W après le choc, on a :

$$W_1 = -eW \quad (0 \leq e \leq 1).$$

La fraction e est appelée, comme plus haut, le coefficient d'élasticité des deux corps, si $e=1$, les deux corps sont dits parfaitement élastiques ; si $e=0$, ils sont dits parfaitement dénués d'élasticité (ou parfaitement mous).

292. - Choc direct entre deux corps.

Considérons d'abord deux sphères homogènes S et S' , de masses m et m' , animées à l'instant où elles se rencontrent, d'un mouvement de translation dirigé suivant la ligne de leurs centres G, G' . Proposons-nous de calculer l'effet du choc, connaissant le coefficient e d'élasticité e des deux sphères supposées parfaitement lisses.

La percussion que chaque sphère reçoit de l'autre passe par son centre qui est en même temps son centre de gravité : la rotation instantanée, nulle avant le choc, reste nulle⁽¹⁾ après le choc (N° 284).

La percussion exercée par S' sur S ou par S sur S' est normale aux deux sphères ; par suite les composantes des vitesses de G et G' normales à GG' ne subissent non plus aucune variation ; elles restent nulles [N° 282]. D'autre part, appelons V la vitesse de G comptée positivement dans le sens GG' , et de même V' la vitesse de G' comptée positivement dans le sens GG' ; si N est la valeur absolue de la percussion que les deux sphères exercent l'une sur l'autre, on a [N° 282] :

(1) Si les deux sphères étaient animées d'une rotation quelconque, cette rotation ne serait pas modifiée par le choc et rien ne serait changé aux conclusions qui suivent sur le mouvement de G et de G' .

$$(1) \quad m(V_1 - V_0) = m'(V_1' - V_0') = \mathcal{N}.$$

De plus, d'après la définition du coefficient e ,

$$(2) \quad (V_1 + V_1') + e(V_0 + V_0') = 0.$$

D'où les valeurs de V_1 et V_1' .

Remarque sur la perte de force-vive. - Soit Γ le centre de gravité du système formé par les deux sphères; menons par Γ des axes $\Gamma x, y, z$, parallèles aux axes fixes pendant le choc, la vitesse du point Γ ne change pas (les percussions étant intérieures).⁽¹⁾

Il suit de là, d'après le théorème de Koenig, que la variation de forces vives causée par le choc est égale à la variation de forces vives dans le mouvement du système rapporté aux axes $\Gamma x, y, z$. Remplaçons les axes fixes par ces nouveaux axes en gardant la même notation: comme ces axes ne subissent par rapport aux premiers aucune variation brusque de vitesse, les équations (1) et (2) subsistent [N. 280], mais nous savons de plus (Γ étant le centre de gravité du système) qu'on a:

$$mV_1 = m'V_1', \quad mV_0 = m'V_0',$$

équations qui, combinées avec (2), donnent:

$$V_1 = eV_0, \quad V_1' = eV_0',$$

d'où

$$mV^2 - mV_0^2 + m'V_1'^2 - m'V_0'^2 = (e^2 - 1)[mV_0^2 + m'V_0'^2].$$

La force vive perdue par le choc est donc égale à la fraction $(1 - e^2)$ de la force-vive que possèdent les deux sphères avant le choc dans leur mouvement autour du centre de gravité Γ . On voit que cette force-vive perdue est nulle si $e = 1$, c'est-à-dire si les deux sphères sont parfaitement élastiques, elle est maxima si $e = 0$, c'est-à-dire si les deux corps sont parfaitement mous⁽²⁾.

On peut dire encore que la perte de force-vive est

(1) C'est là d'ailleurs le sens de l'équation (1).

(2) On serait arrivé à ce même résultat par un calcul tout élémentaire en tirant V_1 et V_1' des équations (1) et (2) et calculant la nouvelle force-vive.

Si $2T_0$ et $2T_0'$ sont les forces vives du système par rapport aux axes $Oxyz$ et $\Gamma x, y, z$, on a: $2T_0 = 2T_0' + \frac{(mV_0 - m'V_0')^2}{m+m'}$, (théorème de Koenig), les vitesses étant rapportées aux axes $Oxyz$. D'où $2T_0 = mV_0^2 + m'V_0'^2 - \frac{(mV_0 - m'V_0')^2}{m+m'} = \frac{mm'}{m+m'}(V_0 + V_0')^2 = \frac{mm'}{m+m'}W^2$. La force vive perdue est $(1 - e^2) \frac{mm'}{m+m'}W^2$.

la fraction $(1-e^2)$ de la force-vive qui disparaîtrait dans les mêmes conditions si les deux corps étaient parfaitement mous.

Le même calcul et les mêmes conclusions s'appliquent au choc de deux corps de forme quelconque parfaitement lisses, si la normale commune aux deux corps au point du choc passe par les deux centres de gravité et si, de plus, le mouvement de chacun des deux corps avant le choc est une simple translation parallèle à cette normale (choc direct de deux corps).

Nous étendrons d'ailleurs, l'an prochain, ces résultats, au cas général du choc de deux corps. Nous établirons notamment que la force vive perdue pendant le choc est égale à $\lambda W^2 (1-e^2)$, λ désignant un certain coefficient qui dépend de la forme et des masses des corps. Cette force-vive perdue est donc nulle si $e=1$, c'est-à-dire si les corps sont parfaitement élastiques, et seulement dans ce cas.

293. - Application : clou et marteau; battage des pieux de fondation. - Soit m la masse du marteau, m' celle du clou qu'on enfonce dans un mur à coups de marteau. On peut admettre que la normale commune au point du choc passe par le centre de gravité des deux corps: le choc communique au clou (qui était immobile) une certaine vitesse V_1' , qui, si les deux corps sont parfaitement dénués⁽¹⁾ d'élasticité, est égale à celle du marteau après le choc. Le clou, accompagné par le marteau s'enfonce ensuite dans le mur, et le système s'arrête. Dans cette dernière partie du mouvement, le théorème des forces vives donne:

$$(m+m') V_1'^2 + T = 0,$$

T désignant le travail des réactions du mur qui s'opposent à la pénétration du clou. Le clou s'enfoncera donc d'autant plus profondément que la force vive du système (clou-marteau) sera plus grande, c'est-à-dire qu'il y aura moins de force vive perdue dans le choc. La force-vive du

⁽¹⁾ En réalité, le marteau rebondit un peu sur le clou, puis retombe, etc., et le coup de marteau se décompose en une suite de chocs, mais ce qui va suivre s'applique après le dernier choc.

systeme avant le choc est mV_0^2 ; la force vive perdue (dans ce cas où $e=0$) est : $mV_0^2 \frac{m'}{m+m'}$. Le rapport de la force vive perdue à la force initiale est : $\frac{m'}{m+m'} = \frac{1}{\frac{m}{m'}+1}$. Seulement c'est-à-dire le rapport entre la force vive $\frac{m}{m'}$ dépensée utilement et la force vive donnée est : $1 - \frac{1}{\frac{m}{m'}+1} = \frac{\frac{m}{m'}}{1+\frac{m}{m'}}$: il est d'autant meilleur que $\frac{m}{m'}$ est plus grand. Pour une même force vive mV_0^2 imprimée au marteau, il y a donc avantage à prendre un marteau massif animé d'une faible vitesse, plutôt qu'un marteau léger animé d'une grande vitesse.

La même discussion s'applique sans modification au battage des pieux de fondation qu'on enfonce par la chute d'un mouton dans un sol peu résistant. Le pieu joue le rôle du clou, et le mouton celui du marteau.

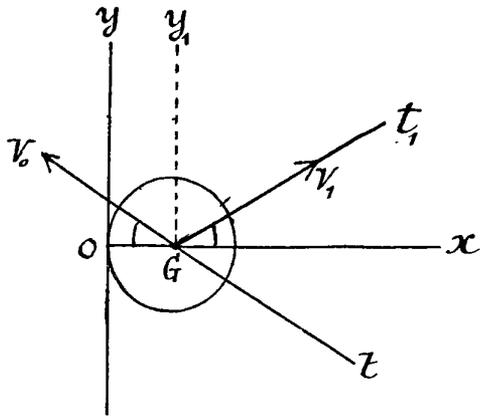
294. Problème du billard. Une sphère homogène et pesante glissant sur un plan horizontal vient heurter une bande verticale parfaitement élastique.

Calculer l'effet du choc.

Supposons d'abord la bande parfaitement lisse. La percussion exercée par la bande est normale à la bande et par suite horizontale; la percussion exercée par le plan horizontal est nulle, car la composante normale de la réaction R de ce plan est égale au poids Mg de la bille, et la composante tangentielle au plus égale à fMg (f coefficient de frottement); la réaction R restant finie, la percussion qu'elle engendre est nulle. La seule percussion que subit la bille passant par son centre de gravité G , son moment cinétique autour de G , donc sa rotation instantanée, ne sont modifiés en rien. La composante parallèle à la bande de la vitesse V de G ne subit, non plus, aucune variation: la composante de V normale à la bande change de sens en gardant la même valeur; car la vitesse du point de la bille en contact avec la bande a même composante normale à la bande que V .

Soit xoy le plan horizontal qui contient le centre G de la bille, oy la section de la bande par ce plan, Ox la perpendiculaire à la bande menée par le point de contact de la bille et de la bande. Les deux demi-droites

(1) Cette force-vive est employée à échauffer le clou et le marteau (N° 103).

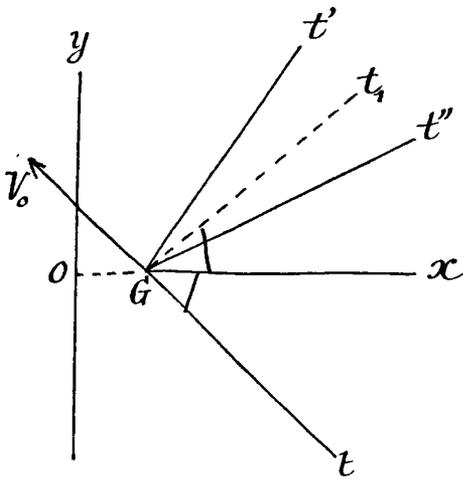


\bar{V}_0 et \bar{V}_1 ont comme bissectrice la droite Gy_1 parallèle à oy . La trajectoire de G est celle d'un rayon lumineux tGt_1 se réfléchissant sur le miroir Gy_1 suivant les lois classiques de la réflexion.

Admettons maintenant que la bande ne soit pas parfaitement lisse. Quel sera l'effet du choc dans le cas où la bille serait animée d'un

mouvement de translation en même temps que d'une rotation très rapide autour d'un axe vertical.

La force due au frottement (opposée à la vitesse de glissement de la bille sur la bande) sera d'abord horizontale, et on peut admettre par raison de symétrie que la vitesse de glissement et par suite la force de frottement resteront horizontales pendant la durée du choc.



Soit V_x, V_y les composantes de V suivant Ox et Oy ; il est loisible de supposer $V_y > 0$ avant le choc. Deux cas sont à distinguer : 1° ou bien la rotation ω de la bille a lieu dans le sens $yoxy$, ($\omega < 0$); pour le point P de la bille qui est en O , la vitesse due à la rotation s'ajoute à V_y , et la percussion de frottement est directement opposée à V_y ; 2° ou bien, au contraire; la rotation a lieu dans le sens

xoy ($\omega > 0$); la vitesse de P due à la rotation l'emporte sur la vitesse V_y de sens contraire et la percussion du frottement a le sens de V_y .

Si N et F sont les composantes de la percussion normale et tangente à la bande, on a : $F = \mu N$ (loi de Coulomb).

Soit, à l'instant du choc, $V_x^0 = -a$, $V_y^0 = b$.

On peut écrire dans tous les cas (M désignant la masse de la bille):

$2Ma = N$, car $V_x' = -V_x^0 = a$, quand la bille et la bande sont parfaitement élastiques. On a ensuite:

$M(V_y' - b) = F = fN = 2fMa$, dans le 2^e cas ($\omega > 0$);
c'est-à-dire :

$$V_y' = b + 2fa$$

et

$M(V_y' - b) = -F = -fN = -2fMa$ dans le 1^{er} cas ($\omega < 0$), c. à d.

$$V_y' = b - 2fa.$$

Dans le cas $\omega > 0$ la trajectoire de G est la ligne brisée tGt' qui s'écarte de Gx après le choc, par rapport à Gt_1 ; dans le cas $\omega < 0$, la trajectoire de G est tGt' est du même côté que Gx par rapport à la droite Gt_1 .⁽¹⁾

294. - Problème de l'escarpolette. - La théorie des percussions suppose essentiellement (et c'est là une condition qu'il ne faut jamais perdre de vue) que les points du système ne subissent, pendant la durée de la percussion, qu'un déplacement négligeable. Si notamment les forces appliquées au système entre les deux instants très voisins t_0, t_1 sont de l'ordre de $\frac{1}{(t_1 - t_0)^2}$, les vitesses deviennent elles-mêmes très grandes de l'ordre de $\frac{1}{t_1 - t_0}$ et le déplacement de S dans l'intervalle de temps t_0, t_1 est sensible; la théorie classique des percussions ne s'applique plus.

Le type des problèmes de ce genre est le problème de l'escarpolette. Imaginons un homme, debout sur la planchette de l'escarpolette et parallèle aux cordes de suspension; qui se baisse très brusquement. Considérons le système S formé par l'escarpolette et l'homme, et soit MK^2 le moment d'inertie de S (quand l'homme est debout) par rapport à l'axe de suspension horizontal OZ de l'escarpolette, MK_1^2 le même moment quand l'homme est baissé ($K^2 < K_1^2$); soit de même l et l_1 la distance à OZ du centre de gravité de S dans les deux

(1) Le raisonnement précédent suppose toutefois que, pendant le choc, la vitesse de glissement ne s'annule pas, condition qui sera toujours remplie si ω est suffisamment grand. Si la vitesse de glissement s'annulait pendant le choc, la discussion serait plus délicate.

cas ($l_1 < l_0$). Appelons ω_0 la vitesse angulaire de S à l'instant t_0 où l'homme est debout, et supposons que l'homme se baisse dans le très court intervalle t_0, t_1 ; pendant cet intervalle de temps, le moment cinétique de S par rapport à OZ ne change sensiblement pas (car le moment du poids de S par rapport à OZ est fini, et les réactions de l'axe OZ sur S rencontrent OZ). Si ω_1 est la vitesse angulaire de S à l'instant t_1 , on a :

$$MK^2\omega_0 = MK_1^2\omega_1, \text{ ou } K^2\omega_0 = K_1^2\omega_1.$$

Dans le cas où l'homme au contraire se relèverait brusquement entre les instants t_0 et t_1 , on aurait :

$$K_1^2\omega_0 = K^2\omega_1.$$

Si ω_0 est nul, ω_1 est nul aussi dans les deux cas.

Ceci posé, imaginons qu'à l'instant t_0 l'homme soit debout, l'escarpolette sans vitesse - les cordes de suspension faisant avec la verticale descendante l'angle θ_0 . A ce moment, l'homme se baisse brusquement : ω_1 est nul, puis S se meut comme un pendule composé, et quand G se trouve dans le plan vertical de OZ on a :

$$K_1^2\omega^2 = gl_1(1 - \cos\theta_0)$$

A cet instant t_1 , l'homme se relève brusquement; la vitesse angulaire de S devient $\omega_1 = \frac{K_1^2}{K^2}\omega$. Puis S se meut à nouveau comme un pendule composé, et à l'instant t_2 où sa vitesse s'annule, on a :

$$K^2\omega_1^2 = gl(1 - \cos\theta_1),$$

d'où :

$$l(1 - \cos\theta_1) = \frac{K_1^2}{K^2} K_1^2\omega^2 = \frac{K_1^2}{K^2} l_1(1 - \cos\theta_0),$$

c'est-à-dire :

$$(1 - \cos\theta_1) = \frac{K_1^2}{K^2} \frac{l_1}{l} (1 - \cos\theta_0) = (1 + \alpha)(1 - \cos\theta_0), \quad (\alpha > 0).$$

Si on appelle λ la longueur des cordes de suspension, h la hauteur de la planchette de l'escarpolette au-dessus de sa position la plus basse, on a, si h_0 et h_1 sont les valeurs de h aux instants t_0 et t_1 :

$$h_0 = \lambda(1 - \cos\theta_0), \quad h_1 = \lambda(1 - \cos\theta_1), \text{ d'où :}$$

$$h_1 = h_0(1 + \alpha).$$

À l'instant t_3 , l'homme se baisse brusquement et tout recommence comme après l'instant t_0 : après n demi oscillations telles que la précédente, on a:

$$h_n = h_0 (1 + a)^n.$$

Si initialement l'homme est debout sur l'escarpolette immobile dans le plan vertical ZOX de OZ , pour mettre l'escarpolette en mouvement l'homme se penche brusquement en arrière par exemple, les cordes viennent ensuite en avant⁽¹⁾. Au moment où leurs vitesses s'annulent, l'homme se replace brusquement en se baissant dans le plan des deux cordes; S revient en arrière et à partir de cet instant, la théorie précédente s'applique.

296. - Les percussions et le gyroscope. - Un autre cas où la théorie des percussions peut se trouver en défaut est celui où les vitesses de certains éléments du système sont considérables, en sorte que leurs déplacements pendant la percussion sont notables. Par exemple, si S est un gyroscope animé d'une grande rotation sur lui-même, et si la percussion a une durée $(t_1 - t_0)$, pour que la théorie des percussions soit applicable, il faut que R désignant la distance maxima d'un point de S à l'axe, la longueur $WR (t_1 - t_0)$ soit très petite, c'est-à-dire que la durée de la percussion soit très petite devant la durée d'un tour du corps sur lui-même.

Chap. VI

⁽¹⁾ En effet le centre de gravité de S est rejeté en arrière du plan ZOX par le recul de l'homme.

Chapitre VI.

Lois du frottement et applications.

297. - Lois du frottement de glissement. -

Soit S et S_1 deux solides qui, à l'instant t , sont en contact par les deux éléments matériels P et P_1 ; quand la réaction \vec{R} de S_1 sur S n'est pas normale aux deux surfaces en contact, on dit qu'il y a frottement et la composante R_T de \vec{R} , tangente aux deux surfaces, est dite force de frottement; la composante normale R_N de \vec{R} est dite souvent la pression. L'expérience montre [N° 90] que R_T est toujours directement opposée à la vitesse de glissement de S sur S_1 [vitesse relative de P par rapport à P_1 à l'instant t]; on admet qu'en valeur absolue elle est proportionnelle à la pression, soit

$$(1) \quad R_T = f R_N,$$

f désignant un coefficient numérique qui ne dépend que de la nature des deux surfaces en contact.

298. - Lois du frottement au repos ou au départ. -

Ceci suppose que la vitesse W n'est pas nulle: si elle est nulle⁽¹⁾ dans un certain intervalle de temps, l'expérience montre que R_T peut avoir un sens quelconque, mais satisfait à l'inégalité:

$$(2) \quad R_T \leq f_0 R_N,$$

f_0 désignant un coefficient numérique qui ne dépend que de la nature des surfaces en contact et qui est un peu plus grand que f .

D'après cela, si la vitesse de glissement W est nulle à l'instant t_0 , deux cas peuvent se présenter:

Ou bien W reste nulle (au moins un certain temps)

(1) Si $W \equiv 0$, S roule et pivote sans glisser sur S_1 . En particulier, si S_1 est fixe, et si S est en contact avec S_1 par une pointe, c'est-à-dire par un élément matériel toujours le même, l'égalité $W \equiv 0$ signifie que cette pointe reste fixe.

et la réaction satisfait à l'inégalité (2) ;

Ou bien le glissement commence immédiatement et les lois ordinaires du frottement glissement s'appliquent.

Quand la première hypothèse est possible [c'est-à-dire quand la réaction \bar{R} calculée de façon à annuler W satisfait à l'inégalité (2)], on admet (d'après l'expérience) que c'est elle qui se réalise effectivement.

En particulier, si le solide S est fixe pour que S abandonné sans vitesse, reste en équilibre, il faut et il suffit qu'on puisse calculer une réaction \bar{R} assurant l'équilibre et satisfaisant à l'inégalité (2).

Dans beaucoup d'applications, on confirme cette conclusion en montrant que, dans ces conditions, S ne saurait se mettre en mouvement. Mais cette démonstration n'est possible qu'en confondant f et f_0 . Lorsque \bar{R} , calculée de façon à maintenir W nul, est telle que $\frac{R_x}{R_y}$ soit compris entre f et f_0 , un glissement de S répondant $\frac{R_x}{R_y}$ aux lois du frottement est mathématiquement possible (1).

Angle de frottement. Posons : $\text{tg } \varphi = f_0$; les lois du frottement au repos expriment que la réaction \bar{R} fait avec la normale PN aux deux surfaces un angle au plus égal à φ , ou encore que \bar{R} n'est pas extérieure au cône de révolution décrit autour de PN par une droite qui fait avec PN l'angle φ . On donne à cet angle le nom d'angle de frottement.

Lorsque S peut s'écarter de S_1 du côté E de l'espace, il faut en outre que \bar{R} soit dirigée de ce côté t de l'espace ; autrement dit, la réaction de S_1 sur S doit faire un angle aigu au plus égal à φ avec la demi-normale PN à S_1 , menée du côté E de l'espace.

299. - Cas de plusieurs contacts.

Lorsqu'on a affaire à plusieurs solides qui ont entre eux ou avec des obstacles fixes un ou plusieurs contacts, on applique à chacun de ces contacts les lois précédentes.

Par exemple : considérons un solide pesant qui glisse d'un mouvement de translation par une base d'aire A sur un plan horizontal, le coefficient de frottement

(1) Il suffit pour s'en rendre compte, de se reporter à la discussion du frottement au repos dans le cas d'un point mobile sur une courbe (N° 169).

et ne le même entre tous les éléments du plan et de la base. Les forces appliquées sur le solide, autres que la pesanteur et les réactions du plan, sont horizontales, on a (après le théorème du centre de gravité dont l'ordonnée verticale est constante).

0 mg R_N , [m mass du corps], et $R_T = f R_N = f mg$ [f R_T et R_N sont les composantes horizontale et verticale de la somme vectorielle des réactions]. On voit que R_T dépend que du poids du corps et de f et non de l'étendue de l'aire de contact.

300. - Dans la réalité, deux solides, quand ils pressent l'un sur l'autre, se déforment et sont en contact non par un point géométrique mais par une petite aire σ , en sorte que les réactions de S_1 sur S_2 équivalent à une force appliquée en un point P de l'aire σ et à un couple d'axe très petit, [N° 90], couple qui s'oppose au roulement et au pivotement des deux corps l'un sur l'autre. Nous reviendrons plus loin sur ces frottements de roulement et de pivotement. Dans les applications qui vont suivre, nous ne tiendrons compte que du frottement du glissement.

301. - Remarques sur les lois du frottement.

Les lois du frottement énoncées aux N°s 298 et 299, admises depuis Coulomb et Morin, ne sont qu'une grossière approximation de la réalité. Les phénomènes du frottement sont très complexes, et il est impossible d'en tenir compte à la fois avec simplicité et rigueur. Les expériences modernes ont nettement distingué le cas du frottement immédiat [où les deux corps glissent à sec l'un sur l'autre] et le cas du frottement médiateur [où il y a un lubrifiant entre les deux corps]. Le dernier cas, qui est celui de la plupart des applications industrielles, n'obéit nullement aux lois de Coulomb: par exemple, Hirn, dans ses expériences, a trouvé que R_T est proportionnel à $\sqrt{R_N}$ et croît rapidement avec W . Le frottement à sec s'écarte moins franchement des lois de Coulomb: les expériences de la traction montrent toutefois que $\frac{R_T}{R_N}$ n'est pas constant mais croît lentement avec R_N et $\propto \sqrt{R_N}$.

décroit lentement avec $\frac{1}{W}$.

En résumé, les lois de Coulomb nous indiquent les tendances des phénomènes du frottement, mais il faut se garder de croire qu'elles les traduisent avec exactitude.

Quoiqu'il en soit, voici quelques unes des valeurs usuelles admises pour les coefficients de frottement f et f_0 entre certaines substances.

Valeurs empiriques de f et de f_0

	f	f_0
Bois sur bois à sec	0,36	0,50
_____ graissés	0,07	0,20
Bois et métaux à sec	0,42	0,60
_____ graissés	0,08	0,12
Métaux sur métaux à sec	0,19	0,19
_____ graissés	0,09	0,10
Corde mouillée sur bois	0,33	0,87
Cuir sur bois ou métal à sec	0,30	0,47
_____ graissé	0,20	"
Fer forgé sur pierre	0,45	"
Pierre sur bois	0,40	"
Pierre sur pierre	0,76	"

Nous allons indiquer maintenant plusieurs applications simples des lois du frottement.

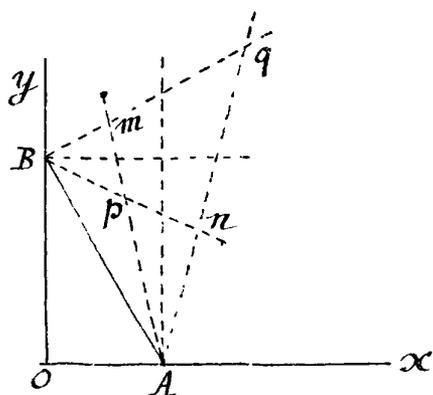
Applications des lois du frottement au repos.

302 - Équilibre de l'échelle.

Considérons dans un plan vertical, une échelle qui s'appuie sur un mur vertical et sur le sol horizontal.

Représentons par f et f_0 les coefficients de frottement (au repos) entre l'échelle et le sol et entre l'échelle et le mur. Soit G le centre de gravité de l'échelle AB [ou de l'échelle et de l'homme en équilibre sur l'échelle]. Si le système est en équilibre, le poids GP du système construit avec G comme origine, et les deux réactions R_1 et R_2 du sol et du mur se font équilibre; comme elles ne peuvent être toutes trois verticales, elles sont concourantes.

Ceci posé, dans le plan vertical OAB , traçons les deux demi-droites Am , An qui font avec la verticale ascendante



l'angle de frottement φ , [$\text{tg } \varphi = f$]; traçons de même les demi-droites Bp , Bq qui font avec la normale au mur l'angle φ , [$\text{tg } \varphi = f$]. Plaçons dans l'hypothèse où les 4 demi-droites se coupent deux à deux et forment par suite un quadrilatère $mpnq$ situé dans le quadrant xoy [cas de la figure]; pour que l'échelle soit en équilibre, il faut que la verticale du point G traverse ce quadrilatère, ou passe par un de ses sommets. Inversement, si cette condition est remplie, soit H un point de la verticale du point G qui soit situé à l'intérieur du quadrilatère $mpnq$ ou sur son périmètre; traçons BH et AH , et décomposons le poids du système en deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 dirigées selon HA et HB ; les réactions $-\vec{F}_1$ et $-\vec{F}_2$ issues de A et de B assurent l'équilibre et satisfont aux lois du frottement au repos.

En particulier, pour que l'échelle reste en équilibre quel que soit l'échelon sur lequel l'homme est debout, il faut que la condition précédente soit remplie lorsque l'homme est sur l'échelon le plus élevé.

Remarque. - Nous nous sommes placés dans le cas où les demi-droites Am , An , Bp , Bq forment un quadrilatère. D'une manière générale, la condition d'équilibre est que la verticale de G comprenne des points qui fassent partie à la fois de l'angle mAn et de l'angle pBq . Cette condition est toujours remplie si AB fait avec la verticale un angle inférieur à φ .

303. - Équilibre d'un solide pesant reposant par une base sur un plan incliné dépoli π .

Le coefficient de frottement au repos, soit f , est supposé le même entre tous les éléments du solide et du plan.

Les conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre sont les suivantes:

- 1° L'inclinaison i du plan sur le plan horizontal est au plus égale à l'angle de frottement φ ;
- 2° la verticale du centre de gravité coupe le plan π à l'intérieur de la base de sustentation⁽¹⁾ ou sur son contour.

(1) Joignons deux à deux tous les points de contact du plan π et du solide; l'aire minima du plan qui contient tous les segments ainsi tracés est la base de sustentation.

En effet, soit I le point d'intersection de la verticale de G et du plan Π : le moment par rapport à I des forces extérieures appliquées au solide est nul. Or ce moment se réduit à celui des réactions \bar{P} du plan Π : si on considère à part les forces de frottement R_T et les réactions normales R_N , le moment des pressions par rapport à I est vertical, le moment des cordes est horizontal; chacun de ces deux moments est donc nul séparément: les pressions R_N admettent donc une résultante passant par I , et, comme elles sont parallèles et de même sens, le point I est nécessairement situé à l'intérieur ou sur le contour de la base de sustentation.

D'autre part, soit \bar{P} la somme géométrique des réactions R_T et R_N ; les composantes verticale et horizontale de \bar{P} ; — puisque \bar{P} doit être égal et de sens contraire à $m\bar{g}$ [poids du corps], on a:

$$P_T = mg \sin i, \quad P_N = mg \cos i.$$

Mais chaque force R_T est au plus égale à fR_N ; par suite P_T est au plus égale ⁽¹⁾ à fP_N ; d'où la condition:

$$mg \sin i \leq f mg \cos i, \quad \text{ou } \operatorname{tg} i \leq f \text{ ou enfin } i \leq \varphi.$$

Les conditions énoncées sont donc nécessaires.

Inversement, si elles sont remplies, imaginons que le plan Π exerce en I sur le solide une réaction \bar{P} égale et directement opposée au poids du corps; on a: $P_T \leq f P_N$. Si le point I fait partie des points de sustentation, cette réaction est possible et assure l'équilibre; sinon soit P_1, P_2, P_3 trois points de sustentation dont le triangle comprend I à son intérieur; on peut toujours décomposer \bar{P} en trois forces $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$ parallèles et de même sens appliquées en P_1, P_2, P_3 . Il est possible ainsi de calculer des réactions conformes aux hypothèses et aux lois du frottement au repos, et assurant l'équilibre. L'équilibre a donc lieu.

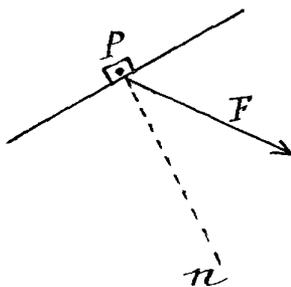
Remarque — Si le nombre des points de sustentation dépasse 3, on peut calculer une infinité de systèmes de réactions assurant l'équilibre.

(1) Elle n'atteint cette valeur que si toutes les forces de frottement R_T sont de même sens et égales respectivement à fR_N .

304. - De l'arc-boutement.

Dans un grand nombre d'applications, on dispose, pour mettre un corps en mouvement, d'une force donnée en direction et sens, mais dont l'intensité est arbitraire. Il arrive parfois que, si grande que soit la force, le mouvement est impossible en vertu des lois du frottement. On dit alors qu'il y a arc-boutement.

L'exemple d'arc-boutement le plus simple est celui d'un élément matériel placé sans vitesse sur un plan dépoli et qu'on essaie de mettre en mouvement en lui appliquant une force \vec{F} de sens donné, devant laquelle son poids est négligeable. Si \vec{F} fait avec la demi-normale Pn au plan menée au dessous du plan un angle θ inférieur à l'angle de frottement φ , il est impossible que P se mette en mouvement, cela quel que soit F .



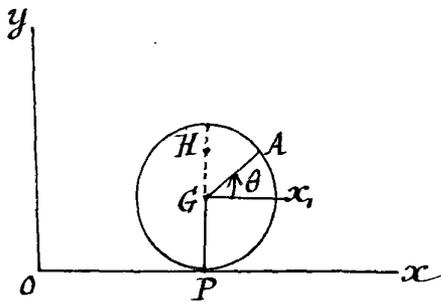
Nous rencontrerons plus loin, des exemples remarquables d'arc-boutement.

Application des lois du frottement de glissement.

305. - Mouvement d'un cerceau glissant avec frottement sur une droite horizontale.

Considérons un cerceau ou (plus généralement) un disque circulaire solide dont le centre de gravité G coïncide avec le centre géométrique : le disque est lancé sur un plan horizontal dépoli Π , sa position et ses vitesses initiales étant situées dans un plan vertical. Mouvement du disque.

Le mouvement a lieu dans le plan vertical initial xoy : soit oy la verticale ascendante, ox l'horizontale intersection du plan xoy et de Π . La position du cerceau dépend de deux paramètres, soit ξ (abscisse de G) et θ



$\theta = x, \widehat{GA}$, \widehat{GA} désignant un rayon déterminé du disque Gx , une parallèle à Ox).

La vitesse du glissement du disque sur Ox est dirigée selon Ox dans un sens ou dans l'autre et égale en grandeur et signe à :

$$\xi + l\theta' = u \quad (l \text{ rayon du disque})$$

si on la compte positivement dans le sens Ox . Quand, pour $t=0$, u n'est pas nul, il est loisible de supposer $u_0 > 0$ en choisissant convenablement le sens Ox .

Ceci posé, soit R_x, R_y les composantes de la réaction \bar{R} exercée par Ox sur le disque; soit MK^2 le moment d'inertie par rapport à G et M la masse totale du disque. Les équations du mouvement du disque sont :

$$(2) \quad \begin{cases} M\xi'' = R_x \\ 0 = M\eta'' = R_y - Mg, \quad (\eta = l) \\ MK^2\theta'' = lR_x; \end{cases}$$

d'où on déduit :

$$(3) \quad \frac{du}{dt} = \xi'' + l\theta'' = \frac{R_x}{M} \left[1 + \frac{l^2}{K^2} \right]$$

Soit d'abord $u_0 > 0$: R_x est négatif pour $t=0$ et reste négatif tant que u ne s'annule pas. On a donc :

$$R_x = -fR_y = -fMg,$$

et, par suite :

$$\xi'' = -fg, \quad K^2\theta'' = -fgl, \quad \frac{du}{dt} = -fg \left(1 + \frac{l^2}{K^2} \right).$$

Les accélérations ξ'', θ'' sont constantes, tant que u ne s'annule pas; u diminue proportionnellement au temps t et s'annule au bout du temps

$$t_1 = \frac{\xi_0 + l\theta_0'}{fg \left(1 + \frac{l^2}{K^2} \right)}$$

Nous sommes ainsi ramenés au cas où le glissement est nul à l'instant considéré.

Soit donc, pour $t = 0$, $u = 0$.

Je dis que u ne peut que rester nul; en effet, il résulte du raisonnement précédent que $|u|$, (du moment qu'il n'est pas nul), ne peut que décroître quand t croît; si donc à un instant $t > 0$, $|u|$ est égal à $h > 0$, $|u|$ est supérieur à h pour $t = 0$.

Puisque le disque roulera sans glisser sur OX , nous devons vérifier que l'inégalité⁽¹⁾

$$F \leq \mu N, \text{ c'est-à-dire } |R_x| \leq \mu Mg$$

est satisfaite. Or quelle doit être la valeur de R_x pour que u reste nul, c'est-à-dire pour qu'on ait: $\xi'' + l\theta'' = 0$?

D'après (3), il faut et il suffit que R_x soit nul.

L'inégalité $|R_x| \leq \mu Mg$ est donc vérifiée a fortiori.

En résumé, si le glissement est nul à un instant, il reste nul indéfiniment et le disque roule sans glisser sur OX , d'un mouvement uniforme (car R_x étant nul, ξ et θ sont constants).

Conclusion. - Quelles que soient les conditions initiales, le disque au bout d'un temps fini, roule sans glisser sur OX d'un mouvement uniforme.⁽²⁾

- Remarque sur une discontinuité du mouvement.

À l'instant t_1 où le disque cesse de glisser pour rouler sans glisser, les accélérations du système subissent une discontinuité, car ξ'' et θ'' passent brusquement de la valeur $-fg$ et $-fg \frac{l}{R^2}$ à la valeur zéro.

Une telle discontinuité se présente en général quand le frottement au repos succède au frottement de glissement.

Remarque sur la force vive perdue de par le frottement. - À partir de l'instant t_1 où le disque roule sans glisser sur OX , sa force vive reste constante; il est intéressant

(1) Dans ces applications, nous confondons pour simplifier f et f_0 ; dans cet exemple, les conclusions qui suivent subsisteraient a fortiori si on tenait compte du fait que f_0 est $> f$.

(2) En réalité il s'arrête au bout d'un temps fini à cause du frottement ou roulement que nous avons négligé et que nous introduisons plus loin.

de remarquer que la perte de force vive due au frottement de glissement est indépendante du coefficient f et ne dépend que des vitesses initiales du disque; mais plus le coefficient f est petit, plus le temps t_1 nécessaire pour annuler le glissement est grand.

On le voit aisément en remarquant que les équations (2) entraînent la conséquence :

$$\zeta'' - \frac{K^2}{\rho} \theta'' = 0, \quad \text{ou } \zeta' - \frac{K^2}{\rho} \theta' = a,$$

égalité qui est vraie pendant toute les périodes du mouvement, puisque les équations (2) ne supposent rien sur R_x . Cette égalité s'interprète aisément: soit H le point du disque situé sur la verticale ascendante de G , à la distance $\frac{K^2}{\rho}$ de G ; la vitesse de ce point H est la même quel que soit l'instant considéré.⁽¹⁾

En particulier, à l'instant t_1 , on a :

$$\zeta'_1 - \frac{K^2}{\rho} \theta'_1 = \zeta'_0 - \frac{K^2}{\rho} \theta'_0 = a,$$

en même temps que :

$$\zeta'_1 + \rho \theta'_1 = 0.$$

Ces égalités donnent aussitôt :

$$\zeta'_1 = \frac{a}{1 + \frac{K^2}{\rho^2}}, \quad \theta'_1 = -\frac{\zeta'_1}{\rho}.$$

La force vive $2T_1$ du disque à l'instant t ne dépend donc que de a , et non de f . La valeur explicite de $2T_1$ est :

$$2T_1 = M(\zeta_1'^2 + K^2 \theta_1'^2) = M \zeta_1'^2 \left[1 + \frac{K^2}{\rho^2} \right] = \frac{M a^2}{1 + \frac{K^2}{\rho^2}}$$

D'où :

$$\begin{aligned} 2T_0 - 2T_1 &= M \left[\zeta_0'^2 + K^2 \theta_0'^2 - \frac{(\zeta_0' - \frac{K^2}{\rho} \theta_0')^2}{1 + \frac{K^2}{\rho^2}} \right] \\ &= \frac{MK^2}{\rho^2 + K^2} (\zeta_0' + \rho \theta_0')^2 = \frac{MK^2}{\rho^2 + K^2} u_0^2. \end{aligned}$$

(1) Si le disque est un cerceau, $K^2 = \rho^2$, et le point H est le point le plus élevé du cerceau. Si le disque est plein et homogène, $K^2 = \frac{\rho^2}{2}$, et H est le milieu du rayon vertical ascendant.

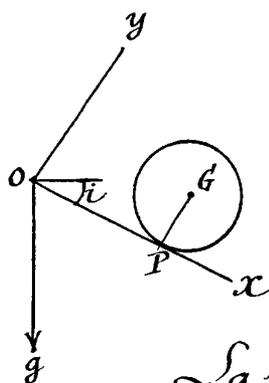
Celle est la valeur de la force vive perdue. En particulier, pour que le disque s'arrête, il faut que $l\xi = K^2\theta'$.

Remarquons encore que si ξ_0 est positif et θ'_0 positif et plus grand que $\frac{l\xi_0}{K^2}$, le centre du disque se meut d'abord dans le sens ox ; mais quand le cerceau roule, le centre G se meut dans le sens contraire, car α est négatif; par suite ξ ; le disque s'éloigne donc de sa position initiale dans le sens ox , puis revient en arrière. C'est ce qu'il est facile de réaliser en lançant le cerceau en avant après lui avoir imprimé un fort mouvement de rotation sur lui-même dans un sens convenable.

306. - Mouvement du cerceau sur une droite inclinée.

Le problème se traiterait sans plus de difficulté en supposant la droite ox non plus horizontale, mais inclinée. Bornons-nous à chercher les conditions nécessaires pour que le disque, abandonné sans vitesse dans le plan vertical xoy sur la droite ox roule sans glisser sur ox .

Ses équations (2) doivent ici être remplacées par les suivantes (où i désigne l'angle de la demi-droite fixe ox menée dans le sens descendant avec une horizontale du plan xoy):



$$\left. \begin{aligned} M\xi'' &= R_x + Mg \sin i \\ 0 &= M\eta'' = R_y - Mg \cos i \\ MK^2\theta'' &= lR_x \end{aligned} \right\} (4)$$

La vitesse de glissement, comptée positivement dans le sens ox , est égale encore à $\xi + l\theta' = u$.

Des équations (4) on déduit:

$$\frac{du}{dt} = \xi'' + l\theta'' = \frac{R_x}{M} \left(1 + \frac{l^2}{K^2}\right) + g \sin i.$$

Pour que u reste nul, il faut qu'on ait:

$$R_x = \frac{-Mg \sin i}{1 + \frac{l^2}{K^2}}.$$

L'inégalité (1) du frottement au repos exige qu'on ait:

$$\frac{Mg \sin i}{1 + \frac{l^2}{K^2}} \leq f Mg \cos i$$

c'est-à-dire :

$$(5) \quad \operatorname{tgi} \leq f \left(1 + \frac{l^2}{R^2} \right).$$

Si, par exemple, le disque est un cerceau, $\frac{l^2}{R^2}$ est égal à 1, et la condition précédente devient :

$$\operatorname{tgi} \leq 2f.$$

Si le disque est homogène, $\frac{l^2}{R^2} = \frac{1}{2}$, et on doit avoir :

$$\operatorname{tgi} \leq 3f.$$

Inversement, démontrons que quand l'inégalité (5) est remplie, le glissement est impossible. S'il y a glissement, les équations du mouvement sont :

$$(6) \quad \begin{cases} M \ddot{\xi} = \varepsilon f M g \cos i + M g \sin i = M g \cos i [\operatorname{tgi} + \varepsilon f] \\ M R^2 \ddot{\theta} = \varepsilon f M g l \cos i \\ (\varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon (\ddot{\xi} + l \ddot{\theta}) < 0) \end{cases}$$

Des équations (6) on tire :

$$(7) \quad \frac{du}{dt} = \ddot{\xi} + l \ddot{\theta} = g \cos i \left[\operatorname{tgi} + \varepsilon f \left(1 + \frac{l^2}{R^2} \right) \right],$$

et u doit être négatif ou nul.

Si $\varepsilon = +1$, u (nul pour $t=0$) est positif quand t croît, ce qui est absurde, puisque u doit être de signe contraire à ε . Il faut donc que ε soit égal à -1 et que u soit positif, donc que $\frac{du}{dt}$ soit positif ou nul pour $t=0$, ce qui donne :

$$\operatorname{tgi} \geq f \left(1 + \frac{l^2}{R^2} \right).$$

Si donc $\operatorname{tgi} < f \left(1 + \frac{l^2}{R^2} \right)$, le disque roule sans glisser sur ox ; si $\operatorname{tgi} > f \left(1 + \frac{l^2}{R^2} \right)$, le disque glisse sur ox , la vitesse de glissement a le sens ox et le mouvement est défini par les équations (6) ou $\varepsilon = -1$. Enfin, si $\operatorname{tgi} = f \left(1 + \frac{l^2}{R^2} \right)$, il y a roulement sans glissement : car la valeur de $\frac{du}{dt}$ donnée par l'équation (7) (où on fait $\varepsilon = -1$) est nulle⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Si on tient compte de ce fait que $f_0 > f$, la conclusion est que le disque roule sans glisser si $\operatorname{tgi} \leq f_0 \left(1 + \frac{l^2}{R^2} \right)$,

307. - Extension au mouvement d'un cylindre.

Le mouvement que nous venons d'étudier dans le N^o précédent est celui d'un disque placé ou lancé sur un plan matériel Π , dans un plan vertical xoy perpendiculaire à Π . Le mouvement du disque a lieu nécessairement dans le plan xoy .

Au lieu d'un disque, considérons un cylindre de révolution homogène lancé sur un plan horizontal fixe Π et animé à l'instant initial d'une translation horizontale perpendiculaire aux génératrices et d'une rotation autour de son axe de révolution. De plus, le plan matériel Π est symétrique par rapport au plan xoy , plan initial de la section droite moyenne du cylindre⁽¹⁾. Le plan xoy est un plan de symétrie du système, des forces et des conditions initiales. La section droite C du cylindre (cercle solide) se mouvra dans le plan xoy , et on voit immédiatement, en appliquant 1^o le théorème du centre de gravité; 2^o le théorème des moments par rapport à GZ (axe du cylindre), que les équations du mouvement de la section droite C sont celles du N^o 305.

Si le plan fixe Π , au lieu d'être horizontal, est incliné, les mêmes conclusions subsistent pourvu que [en sus des conditions précédentes] le plan xoy (plan initial de la section droite moyenne du cylindre) soit vertical. Si notamment le cylindre est abandonné sans vitesse, les conclusions du N^o 306 s'appliquent sans modification.

Application au démarrage d'une locomotive en palier.

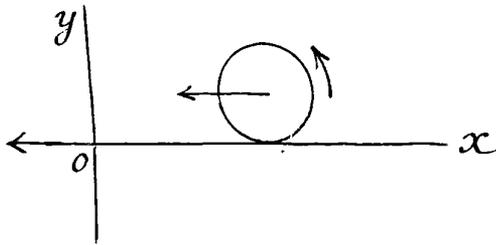
308. - Nous supposons toutes les roues de la locomotive liées entre elles, de façon qu'elles tournent d'ensemble. La locomotive part du repos sur deux rails horizontaux parallèles; sa position dépend de deux paramètres: son déplacement le long des rails, et l'angle dont tournent ses roues.

Je considère le système formé par la locomotive, la vapeur, la fumée qui s'échappe etc. Comme ces dernières masses sont négligeables devant celle de la locomotive; on peut

(1) Si le plan Π était inégalement rugueux de part et d'autre du plan xoy , le cylindre pivoterait sur le plan Π .

considère le centre de gravité G du système avec celui de la locomotive, lequel est sensiblement fixe par rapport à l'armature⁽¹⁾. Ceci posé j'admets qu'on dispose de la pression de la vapeur pour communiquer aux roues une rotation connue $\omega(t)$. Il s'agit d'étudier le mouvement de la machine.

Soit xOy le plan vertical parallèle aux rails dans lequel se meut le centre de gravité G , Ox désignant la projection des rails sur ce plan, et Oy la verticale ascendante. Je prends sur Ox un sens tel que le sens xOy soit celui de la rotation des roues⁽²⁾; la fonction $\omega(t)$ nulle pour $t=0$,



est donc une fonction croissante. Les seules forces extérieures qui s'exercent sur le système sont (sion néglige la résistance de l'air) la pesanteur et les réactions des rails. Je représente par R_i la réaction qui s'exerce sur une des roues, par N_i sa composante verticale (nécessairement dirigée vers le haut), par F_i sa composante horizontale (en valeur absolue); je représente par R la somme géométrique des quatre réactions R_i , par N sa composante verticale, par F sa composante horizontale. Si une des roues glisse dans un sens, les trois autres glissent dans le même sens, et on a: $F_i = fN_i$, et $F = \sum F_i = f \sum N_i = fN$; si une des roues roule sans glisser, il en est de même des trois autres, et on a: $F_i \leq fN_i$, et $F \leq fN$.

Plaçons-nous d'abord dans la seconde hypothèse: les quatre roues roulent sans glisser sur les rails. Soit ξ l'abscisse du centre de gravité G de la locomotive: la vitesse de translation de la machine est $\dot{\xi}$. La vitesse de glissement des roues sur les rails, comptée positivement dans le sens Ox , est $u = \dot{\xi} + l\omega$, (l rayon des roues); $\dot{\xi}$ est égal,

(1) Le centre de gravité des pièces mobiles (bielles, piston, roues, etc.) se déplace très peu dans la locomotive, et la masse de ces pièces est petite devant la masse de la locomotive.

(2) Dans ce qui suit, Gz désigne une demi-droite normale au plan xOy et telle que le sens des rotations positives autour de Gz soit le sens xOy .

si ce glissement est constamment nul, à $-\dot{\omega}(t)$; la machine se meut alors dans le sens opposé à ox . D'autre part d'après le théorème en mouvement du centre de gravité, on a (M désignant la masse totale du système):

$$\text{d'où: } M\ddot{\xi} = -Ml \frac{d\dot{\omega}}{dt} = R_x, \quad 0 = M\ddot{\eta} = -Mg + R_y,$$

$$N = R_y = Mg > 0, \quad R_x = -F = -Ml \frac{d\dot{\omega}}{dt} < 0.$$

Pour qu'il n'y ait pas glissement, il faut donc:

$$l \frac{d\dot{\omega}}{dt} \leq fg.$$

Faisons-nous maintenant dans l'hypothèse où les roues patinent, c'est-à-dire glissent sur les rails. Le glissement est sûrement de sens ox ; autrement dit, u est positif⁽¹⁾. Le glissement ayant lieu dans le sens ox , R_x est négatif, et on a:

$$\ddot{\xi} = -fg, \text{ et} \\ \frac{du}{dt} = \ddot{\xi} + l \frac{d\dot{\omega}}{dt} = -fg + l \frac{d\dot{\omega}}{dt};$$

puisque u (nul pour $t=0$) est positif par hypothèse pour t voisin de zéro, il faut qu'on ait:

$$fg < l \frac{d\dot{\omega}}{dt};$$

si $l \frac{d\dot{\omega}}{dt} = fg$, $\ddot{\xi} + l\dot{\omega}$ reste nul.

En définitive, pour qu'il y ait roulement sans glissement dans l'intervalle de temps $0, t$, il faut et il suffit que, dans cet intervalle, $\dot{\omega}(t)$ satisfasse à la condition

$$l \frac{d\dot{\omega}}{dt} \leq fg$$

Pour que la locomotive acquière sa vitesse normale dans le temps minimum et sans patiner, il faudra dépenser assez de vapeur pour qu'on ait

$$(1) \quad \frac{d\dot{\omega}}{dt} = f \frac{g}{l}, \quad \dot{\omega} = f \frac{g}{l} t$$

(1) Si u était négatif, R_x serait positif, par suite $\ddot{\xi}$, par suite $\ddot{\xi} + l \frac{d\dot{\omega}}{dt} = \frac{du}{dt}$, la quantité u , qui est nulle pour $t=0$, serait donc positive pour t voisin de zéro, ce qui est contraire à l'hypothèse.

la vitesse de translation, au bout du temps t , sera alors $\int g t$.
 Si on force la vapeur davantage, la machine atteindra la même vitesse de translation au bout du même temps t , et on fera patiner les roues : le frottement de glissement absorbera une quantité d'énergie égale à $\int \mu g \int v(t) dt$, énergie dépensée inutilement à échauffer les rails et les roues.

En définitive, la machine, au bout d'un temps t , ne peut acquérir une vitesse supérieure à $\int g t$; et pour qu'elle atteigne cette vitesse sans dépense de vapeur inutile, il faut et il suffit que W soit égal à chaque instant à $\int \frac{g}{e} t$ [régime optimum].⁽¹⁾

309. — Une fois que la locomotive a atteint la vitesse de translation voulue, supprimons la vapeur : on peut montrer que la locomotive garde indéfiniment sa vitesse de translation et les roues leur vitesse de rotation ; de plus, les réactions des rails sont verticales, comme s'ils s'étaient parfaitement lisses. La rugosité des rails n'est donc nécessaire que pour la mise en marche de la locomotive, et la mise en marche peut s'effectuer d'autant plus vite que cette rugosité est plus prononcée. Toutefois ces conclusions négligent les résistances de l'air, les résistances au roulement des roues sur les rails [voir le N° 316] et tous les frottements intérieurs des pièces de la locomotive. En fait, pour maintenir à la locomotive sa vitesse, il faut modérer, mais non supprimer la vapeur et la somme des composantes horizontales des réactions des rails est égale (et directement opposée) à la somme géométrique des résistances de l'air ; cette dernière croît grossièrement comme le carré de la vitesse de la locomotive.

310. — Démarrage et arrêt d'un train. — Erain Renard.
 Considérons une locomotive attelée à un train, et supposons

(1) Dans le régime optimum, le travail des réactions des rails est nul, la force-vive de la locomotive au bout du temps t est la même que si les rails étaient parfaitement lisses. La rugosité des rails transforme une partie de l'énergie cinétique de la locomotive en énergie de transformation, sans en absorber aucune partie.

que parmi les paires de roues les unes soient libres, et les autres soumises à une force motrice (roues motrices). Nous regardons comme négligeables les masses des roues et de leurs axes devant celles des wagons et locomotive; le train part du repos sur deux rails rectilignes horizontaux parallèles. Étudions le démarrage en supposant que le train admet le même plan de symétrie que les deux rails.

Le théorème des moments cinétiques autour du centre de gravité appliqué à chaque paire de roues libres et à leur axe, nous donne (en négligeant la masse des roues): $0 = lR_x$, si R_x est la composante suivant le rail de la réaction R exercée par le rail sur la roue. Les composantes R_x des réactions des rails sur les roues libres sont donc négligeables dans tous les cas ⁽¹⁾.

Appelons d'autre part N la somme des composantes verticales des réactions exercées par les rails sur les seules roues motrices, et F la somme géométrique de toutes les composantes horizontales de ces réactions; on a:

$$F \leq fN$$

La force motrice F ne peut donc jamais dépasser la fraction f de la pression totale N exercée sur les rails par les roues motrices.

Par exemple, si toutes les roues de la locomotive sont motrices, et toutes les roues des wagons libres, et si la locomotive est attelée au train par des liens horizontaux parallèles aux rails, le théorème du mouvement du centre de gravité appliqué à la locomotive montre que $N = mg$, (m masse de la locomotive). La force tractrice ne peut alors dépasser la fraction f du poids de la locomotive quelle que soit la dépense de vapeur. Dès que cette limite est atteinte, il est inutile, et même nuisible, de forcer la vapeur.

Soit M la masse totale du train (locomotive comprise): dans la réalité, à cause des résistances que nous avons négligées, le train ne démarre que si F dépasse ϵMg , (ϵ désignant un certain coefficient petit): si dans l'exemple précédent $\frac{M}{m}$ est plus grand que $\frac{f}{\epsilon}$, le train ne démarrera pas, quelle que soit la dépense de vapeur.

(1) Comme l'inégalité $|R_x| < f|R_y$ est vérifiée à moins que R_y ne soit négligeable, chaque roue libre tourne sans glisser à moins qu'elle n'exerce presque aucune pression sur le rail.

Si, au lieu d'être horizontal, le plan des rails est incliné d'un angle i sur le plan horizontal, le même raisonnement appliqué au même exemple montre que le train ne peut monter la pente que si $\operatorname{tg} i$ est sensiblement inférieur à $\frac{f}{m}$.

M Imaginons au contraire que toutes les roues du train soient motrices, et par exemple reliées toutes ensemble de façon à tourner avec la même vitesse angulaire [Extrait-Rénard]. Le raisonnement du N° 307 s'applique sans modification : la force tractrice peut atteindre la fraction f de tout le poids du train. Le train peut monter toute pente telle que $\operatorname{tg} i$ soit un peu inférieur à f .

311. - Des remarques analogues s'appliquent à l'arrêt d'un train. Supposons qu'on freine sur plusieurs roues, c'est-à-dire qu'on exerce sur ces roues par un procédé quelconque [renversement de la vapeur, serrage d'un frein, etc] des forces qui retardent leur rotation ; soit N la pression totale exercée par ces roues sur les rails ; la force retardatrice totale [somme géométrique des composantes horizontales des réactions des rails] peut atteindre, si le freinage est suffisamment énergique, mais ne peut dépasser fN . En particulier, si on freine sur toutes les roues, la force retardatrice peut atteindre la fraction f de tout le poids Mg du train.

- Une discussion analogue s'applique au démarrage et à l'arrêt d'une automobile et d'une bicyclette sur une route horizontale ou inclinée.

312. - Voiturage d'un fardeau. - Lorsqu'on transporte un fardeau S d'un mouvement de translation sur un plan horizontal en lui appliquant une force horizontale, les forces de frottement du plan ont une résultante égale à fMg , et leur travail essentiellement négatif est égal à $fMge$, e désignant le chemin parcouru : une fois que le fardeau a atteint la vitesse désirée, il faut lui appliquer constamment une force égale à fMg et ayant le sens du mouvement.

Supposons au contraire qu'on voiture le fardeau. Nous admettons que les paires de roues de la voiture sont libres et de masse négligeable, et que le système Σ formé par la voiture et le fardeau est symétrique par rapport à un plan xOy vertical parallèle à la route. Une force horizontale Φ ,

située dans ce plan est parallèle à la route; c'est-à-dire parallèle à Ox , est appliquée à la voiture.

On voit, comme au N^o précédent, que les réactions du sol sur les roues ont des composantes horizontales négligeables, et que les roues roulent sans glisser. Le mouvement du centre de gravité G de S est défini par l'égalité:

$(M+M_1) \bar{\xi}'' = \bar{\Phi}$, (M masse du fardeau, M_1 masse de la voiture seule). Quand la vitesse de G a atteint la valeur désirée V , on supprime $\bar{\Phi}$, et le mouvement se poursuit uniformément, les roues roulant uniformément et les réactions du sol sur les roues étant verticales. - Le travail dépensé (travail de $\bar{\Phi}$) est donc égal à $\frac{MV^2}{2}$, quelle que soit la longueur du transport. - En réalité, à cause des résistances au roulement, des frottements des essieux et de la résistance de l'air, $\bar{\Phi}$ doit conserver une certaine valeur, mais très inférieure à fMg , (si M n'est pas très petit devant M_1).

313. - Transport par rouleaux. - Au lieu de voiturier un fardeau, un madrier par exemple, on peut le transporter horizontalement sur une suite de rouleaux libres, dont les axes sont disposés perpendiculairement à la direction Ox du déplacement. On équarrit le fardeau de façon que ses points les plus bas forment une droite ou des droites parallèles à Ox ; par suite les contacts ont toujours lieu avec les points les plus élevés du rouleau. Nous admettons encore que le plan vertical xoy (oy verticale ascendante) est un plan de symétrie du système et que les rouleaux sont homogènes et de masse négligeable. La traction $\bar{\Phi}$ est de sens Ox .

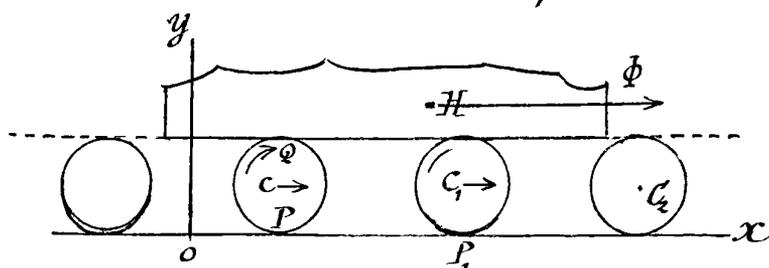
Les réactions qui s'exercent entre le fardeau S et un rouleau C ont une résultante \bar{P} située dans le plan xoy et appliquée en un point Q du rouleau; de même les réactions du sol sur le même rouleau ont une résultante \bar{R} située dans le plan xoy et appliquées en un point P ; Q et P sont les points le plus haut et le plus bas de la section du rouleau par le plan xoy . La masse du rouleau étant négligeable, les forces \bar{R} et \bar{P} appliquées au rouleau avec la pesanteur satisfont sensiblement aux conditions d'équilibre; elles sont donc sensiblement égales et directement opposées, ce qui montre que les composantes suivant

ox de f et de R sont négligeables. Le mouvement du fardeau est donc défini par l'égalité :

$$M\ddot{\xi} = \Phi,$$

et une fois que la vitesse de transport normale est atteinte, on supprime Φ , c'est-à-dire qu'en fait on lui donne la valeur très faible nécessaire pour surmonter les petites résistances négligées.

Une fois que le fardeau est entré franchement en contact avec un rouleau et pèse sur lui, il n'y a aucun glissement entre le rouleau et le fardeau non plus qu'entre le rouleau et le sol, car les conditions :



$$|P_x| \leq f|P_y| \quad |R_x| \leq f|R_y|$$

sont vérifiées. Soit V la vitesse du fardeau, v celle du centre C du rouleau, l le rayon et ω la vitesse de rotation du rouleau; la vitesses des éléments P et Q du rouleau sont $v - l\omega$ et $v + l\omega$; on a donc :

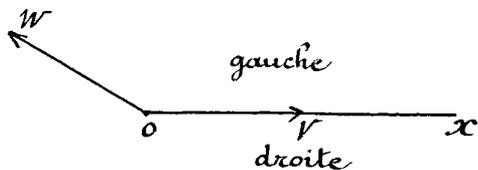
$$v - l\omega = 0 \quad \text{et} \quad V = v + l\omega,$$

d'où $V = 2v = 2l\omega$. La vitesse de transport est égale au double de la vitesse du centre d'un rouleau.

À l'instant t par exemple, S s'appuie sur les rouleaux C et C_1 ; au bout d'un certain temps, il abandonne C , mais il a pris en contact avec C_2 qu'il ébranle et fait rouler, etc.

314. - De la direction et du redressement d'une bicyclette par le frottement.

Considérons une bicyclette (verticale) roulant sur une route horizontale. Imaginons que le bicycliste tourne brusquement et légèrement le guidon à droite. Que va-t-il se passer? La vitesse du centre C de la roue libre est la vitesse de translation du centre de gravité de la machine, vitesse donc le sens est ox et la



valeur V ; la vitesse angulaire de rotation de la roue (de rayon l) est égale en valeur absolue à V , et de sens tel que la vitesse W communiquée par cette rotation au point le plus bas P de la roue soit opposée à V avant le coup de guidon; après le coup de guidon, cette vitesse W [égale à V] est dirigée du côté gauche de OX et fait un angle presque égal à 180° avec OX ; le point P de la roue libre a donc une vitesse dirigée suivant la bissectrice de l'angle $W\bar{O}V$, c'est-à-dire sensiblement normale à OX et dirigée vers la gauche; la réaction du sol sur la roue a donc une composante horizontale sensiblement perpendiculaire à OX , dirigée vers la droite de OX , et égale à fN , si N est la pression de la roue libre sur le sol et f le coefficient de frottement entre le pneu et le sol. Pour simplifier, nous supposons qu'à l'instant considéré la roue d'arrière se roue sur une partie glissante du sol, en sorte que la réaction du sol sur cette roue soit verticale. Le théorème du mouvement du centre de gravité G appliqué au système S formé par la bicyclette et le cavalier, montre aussitôt que G est dévié vers la droite de OX , car la somme géométrique des forces extérieures appliquées à S a une composante horizontale qui est F . La déviation de G sera d'autant plus rapide que F ou fN sera plus grand: pour dévier plus rapidement à droite, le cycliste devra donc se pencher sur la roue d'avant pour augmenter N .

Disons un mot maintenant de l'orientation de la bicyclette. Il nous faudrait appliquer au système le théorème des moments cinétiques autour de G : soit $G\xi$ la parallèle à OX menée par G et $G\eta$ la verticale de G . Si le système, dans son mouvement autour de G , ne pouvait que tourner autour de $G\xi$, comme le moment des réactions du sol par rapport à $G\xi$ se réduit au moment de F , on voit immédiatement que le système pencherait sur la gauche. Si le système ne pouvait que tourner autour de $G\eta$, on voit de même que la direction CC' du cadre C' centre de la roue d'arrière s'inclinerait vers la droite. Il est donc bien intuitif qu'en fait la bicyclette doit pencher sur la gauche en même temps que la direction CC' incline vers la droite. C'est ce que nous démontrerons rigoureusement l'an prochain.

Le même raisonnement fait comprendre que, si la

la bicyclette penche un peu à droite, il faut tourner rapidement et légèrement le guidon à droite pour le redresser.

315. - Mouvements louvoyants. - Signalons une conséquence intéressante des lois du frottementst: considérons un solide S de masse M qui repose par une base sur un plan horizontal rugueux. Si j'applique à S en son centre de gravité une force horizontale Φ , le solide ne se mettra en mouvement (et dans le sens de Φ) que si Φ surpasse $f_0 Mg$ [f_0 coefficient de frottement au départ]. Mais si le solide est animé d'un mouvement de translation de vitesse \vec{V} et si on lui applique en G une force horizontale et perpendiculaire à \vec{V} , le solide déviara dans le sens de Φ si petit que soit Φ . La force Φ surmonte la résistance au glissement en louvoyant en quelque sorte, comme un bateau qui évite le vent debout. De là le nom de mouvement louvoyant donné à l'effet dont il s'agit. Cette remarque prête à de nombreuses applications. Elle explique, par exemple, le dérapiage auquel sont exposés les véhicules circulants en courbe lorsqu'une roue est brusquement enrayée.

Frottements de roulement et de pivotement.

316. - Frottement de roulement dans le cas du cerceau.

Reprenons l'exemple du cerceau homogène glissant sur une droite horizontale [N° 308]. Au bout d'un temps fini, le cerceau, avons-nous dit, roule sans glisser. ou α d'un mouvement uniforme. En réalité, la force vive du cerceau diminue lentement et au bout d'un temps très long, le cerceau s'arrête. La raison en est que le cerceau et le plan horizontal fixe Π sont en contact, non par le point géométrique P , mais par un petit élément, et que les réactions du plan Π sur le cerceau doivent être remplacées non seulement par une force \vec{R} appliquée en P , mais en outre par un couple de très petits bras de levier qu'on appelle ouvert couple de frottement de roulement. Ce couple, par raison de symétrie, est évidemment situé dans le plan XOy ; l'expérience montre qu'il s'oppose toujours

à la rotation du cerceau (c'est-à-dire au roulement) et que l'axe Γ de ce couple est sensiblement proportionnel à la pression N [composante normale de R], soit

$$\Gamma = hN;$$

h est un coefficient linéaire (puisque Γ est le produit d'une force par une longueur), qui pour un rayon l donné du disque, ne dépend sensiblement que de la nature des deux substances en contact. On peut poser encore :

$$\Gamma = h_2 l N;$$

h_2 est alors un coefficient sans dimensions qui est très petit devant f . L'expérience montre que (pour deux substances données) h croît avec l , et que h_2 décroît quand l croît (1). Mais la loi précise de ces variations est fort mal déterminée. Pour des roues de bois de dimensions ordinaires roulant sur du bois dressé, la valeur de h (en mètres) est de l'ordre de $\frac{1}{1000}$; pour des roues de voiture roulant sur une chaussée empierrée bien entretenue, on admet que h a la valeur $0^m.015$.

Les lois précédentes supposent que la rotation du cerceau n'est pas nulle. Si elle est nulle dans un intervalle de temps t_0 à t_1 , l'expérience montre que le couple Γ (dont le sens peut d'ailleurs être quelconque) a son axe inférieur ou égal à $h_0 N$ [h_0 coefficient déterminé supérieur à h].

En définitive, soit N et F les composantes normale et tangentielle de R , et Γ la longueur de l'axe du couple de frottement de roulement précédée du signe + si le couple a le sens xoy , du signe - dans le sens contraire. Soit W la vitesse de glissement et ω la rotation instantanée du cerceau à l'instant t ; si W et ω sont tous deux différents de zéro, F est directement opposé à W et Γ est de signe contraire à ω ; on a de plus

$$(1) \quad F = fN, \quad |\Gamma| = hN.$$

Si les deux quantités W et ω sont nulles pendant un certain temps, c'est-à-dire si le cerceau reste immobile, le sens de F et le signe de Γ peuvent être quelconques, mais

(1) Si l était très petit, h_2 atteindrait les valeurs supérieures à f .

on a :

$$(2) \quad F \leq f_0 N, \quad |\Gamma| \leq h_0 N \quad \left(\begin{array}{l} f_0 > f \\ h_0 > h \end{array} \right).$$

Si une des quantités W ou ω est nulle, la grandeur correspondante F ou Γ peut avoir un sens quelconque et satisfait à l'inégalité (2) correspondante (et non à l'égalité (1)).

317. - Travail du frottement de roulement.

Le travail du frottement de roulement est toujours négatif, car son travail élémentaire est égal à $\Gamma \omega dt$, et Γ est toujours de signe contraire à ω . On sait, d'autre part, que le travail du frottement de glissement est aussi négatif. Pour que ce dernier travail soit nul, il faut que la vitesse de glissement soit constamment nulle. Pour que le travail du frottement de roulement soit nul, il faut que la rotation du cerceau soit constamment nulle. Pour que le travail total, essentiellement négatif, des forces de frottement soit nul, il faut donc et il suffit que le cerceau reste immobile. Ce résultat, établi dans le cas particulier du cerceau glissant et roulant sur une droite fixe, sera étendu au cas général du contact entre deux solides.

Le travail du frottement de roulement est très faible en général devant le travail du frottement de glissement ^(à moins que le glissement ne soit négligeable). Pour comparer ces deux travaux, faisons parcourir au centre du cerceau un chemin e d'abord en le faisant glisser sur OX d'un mouvement de translation, ensuite en le faisant rouler sur OX sans glisser, la pression normale étant dans les deux cas le poids du cerceau. Dans le premier mouvement, la vitesse de glissement est celle au centre; le travail élémentaire du frottement est $-fMg \omega dt$; le travail total est $-fMge$. Dans le second mouvement, le chemin parcouru e est égal en valeur absolue à: $l\omega t$ [t durée du mouvement]; le travail élémentaire du frottement est: $hN\omega dt$; le travail total est $hMge$; le rapport du second travail au premier est $\frac{h}{fl}$.

Si, par exemple, $f=0,3$, $l=0^m,33$; $h=0^m,001$,
le rapport $\frac{h}{fl}$ est sensiblement égal à $\frac{1}{100}$.

318. Mouvement d'un cerceau homogène pesant sur une droite inclinée, en tenant compte du frottement de roulement.

Le cerceau⁽¹⁾ est abandonné sans vitesse dans un plan vertical xOy normal au plan matériel fixe dépoli Π . Le mouvement a lieu évidemment dans ce plan xOy . Les équations du mouvement sont les mêmes qu'au N° 309, à cela près que dans la 3^e équation, il faut ajouter Γ au second membre. On a donc

$$(3) \quad \begin{cases} M\ddot{\xi} = R_x + Mg \sin i \\ 0 = M\ddot{\eta} = R_y - Mg \cos i ; \\ MK^2 \ddot{\theta} = lR_x + \Gamma \end{cases}$$

Quatre hypothèses sont possibles :

- 1° le cerceau reste immobile ; 2° il roule sans glisser ;
3° il glisse sans rouler ; 4° il glisse et roule. Discutons ces hypothèses, en confondant, pour simplifier h_0 avec h , f_0 avec f .

La même discussion peut se répéter si $\ddot{\xi}_0 + l\ddot{\theta}_0 = 0$ mais si $\ddot{\xi}_0 \neq 0$.

1^{re} Hypothèse. - On a : $\ddot{\xi} = \ddot{\theta} = 0$;

d'où :

$$R_x = -Mg \sin i, \quad R_y = Mg \cos i, \quad \Gamma = -lR_x,$$

et pour que l'hypothèse soit admissible, il faut :

$$|R_x| \leq fR_y, \quad \Gamma \leq hR_y, \quad \text{c'est-à-dire :}$$

$$\operatorname{tg} i \leq f, \quad \operatorname{tg} i \leq \frac{h}{l} = h_1.$$

Comme h_1 est toujours⁽²⁾ $< f$ ces conditions se réduisent à :

$$(4) \quad \operatorname{tg} i \leq h_1 < f.$$

(1) Tout ce qui suit suppose seulement que le disque est circulaire et que son centre de gravité coïncide avec son centre de figure.

(2) Il n'en serait autrement que si le rayon du disque était extrêmement petit.

2^e Hypothèse. — On a: $\xi'' + l\theta'' = 0$, $\neq \theta'' \neq 0$

d'où:

$$(5) \quad 0 = M(\xi'' + l\theta'') = R_x \left[1 + \frac{l^2}{K^2} \right] + \frac{l\Gamma}{K^2} + Mgl \sin i,$$

et

$$(6) \quad MK^2\theta'' = lR_x + \Gamma = \frac{\Gamma - Mgl \sin i}{1 + \frac{l^2}{K^2}}.$$

Pour $t = 0$, θ' est nul; pour t voisin de zéro, θ' a le signe de θ'' ; Γ doit être de signe contraire à θ' , donc de signe contraire à θ'' , par suite il faut que θ'' ait le signe de $-Mgl \sin i$, c'est-à-dire le signe $-$, et que Γ ait le signe $+$. Comme $\Gamma = hN = h_1 l Mg \cos i$, θ'' n'aura le signe $-$ que si

$$(7) \quad \operatorname{tgi} > h_1;$$

si $\operatorname{tgi} = h_1$, $\theta'' = 0$.

D'autre part, d'après (5), $R_x = \frac{-Mg}{\left(1 + \frac{l^2}{K^2}\right)} \left[\sin i + \frac{l^2}{K^2} h_1 \cos i \right]$; il faut que cette quantité soit, en valeur absolue, inférieure ou égale à $fN = fMg \cos i$,

d'où:

$$(8) \quad \operatorname{tgi} \leq f \left(1 + \frac{l^2}{K^2} \right) - h_1 \frac{l^2}{K^2}.$$

Remarquons que, dans cette hypothèse, la rotation du disque est toujours négative; le disque descend en roulant d'un mouvement uniformément accéléré; on a:

$$(9) \quad \xi'' = -l\theta'' = + \frac{gl^2 \cos i [\operatorname{tgi} - h_1]}{K^2 + l^2}.$$

3^e Hypothèse. — $\theta'' = 0$, $\xi'' + l\theta'' \neq 0$.

On a dans ce cas, $\theta'' = 0$, d'où: $\Gamma = -lR_x$, et $|R_x| = fMg \cos i$; d'où $|\Gamma| = fMlg \cos i$. La condition $|\Gamma| \leq h_1 l N$ exige donc: $fMlg \cos i \leq h_1 l Mg \cos i$, ou $f \leq h_1$, condition qui n'est jamais remplie dans les applications⁽¹⁾.

4^e Hypothèse. — $\theta'' \neq 0$, $\xi'' + l\theta'' \neq 0$.

Comme θ'' doit être de signe contraire à Γ , la 3^e équation (3) exige que lR_x soit de signe contraire à Γ et l'emporte (en

(1) Quand l est très petit, h_1 surpasse f . Le disque reste immobile si $\operatorname{tgi} \leq f/h_1$. Il glisse sans tourner si $\operatorname{tgi} > f$. On retombe ainsi sur la discussion du mouvement d'un élément passant sur un plan incliné rugueux.

valeur absolue) sur Γ ; cette dernière condition est toujours remplie, puisqu'on a :

$$|\Gamma| = h_1 \ell N, \quad \ell |R_x| = f \ell N, \quad \text{et } h_1 < f.$$

Mais, d'autre part, d'après (5) :

$$(10) \quad M(\ddot{\xi} + \ell \ddot{\theta}) = R_x \left[1 + \frac{\ell^2}{K^2} \right] + \ell \frac{\Gamma}{K^2} + Mg \sin i \\ = Mg \cos i \left[\operatorname{tgi} + \varepsilon \left\{ f \left(1 + \frac{\ell^2}{K^2} \right) - h_1 \frac{\ell^2}{K^2} \right\} \right];$$

dans cette égalité, ε est égal à +1 ou à -1 suivant que $\xi + \ell \theta'$ est négatif ou positif pour t voisin de zéro, c. à d. suivant que $\ddot{\xi} + \ell \ddot{\theta}$ est négatif ou positif. Comme le coefficient de ε dans le dernier membre de (10) est sûrement positif, il faut que $\ddot{\xi} + \ell \ddot{\theta}$ ait le signe de $Mg \sin i$, c. à d. le signe +, que ε soit égal à -1 et que, de plus l'inégalité :

$$\operatorname{tgi} > f \left(1 + \frac{\ell^2}{K^2} \right) - h_1 \frac{\ell^2}{K^2}$$

soit remplie. Si $\operatorname{tgi} = f \left(1 + \frac{\ell^2}{K^2} \right) - h_1 \frac{\ell^2}{K^2}$, le glissement est nul.⁽¹⁾

Conclusion. - En définitive,

Si $\operatorname{tgi} \leq h_1$, le disque reste immobile;

Si $h_1 < \operatorname{tgi} \leq f \left(1 + \frac{\ell^2}{K^2} \right) - h_1 \frac{\ell^2}{K^2}$, le disque descend en roulant sans glisser;

Si $\operatorname{tgi} > f \left(1 + \frac{\ell^2}{K^2} \right) - h_1 \frac{\ell^2}{K^2}$, le disque descend en glissant et roulant, et la vitesse de glissement est dirigée vers le bas.

319. - Mouvement sur une droite horizontale d'un disque homogène pesant, fixé par une force parallèle à la droite.

Imaginons que notre disque circulaire, au lieu de reposer sur une droite inclinée ox , repose sur une horizontale, et qu'on lui applique, en son centre C , une force Φ parallèle.

(1) La quantité $f \left(1 + \frac{\ell^2}{K^2} \right) - h_1 \frac{\ell^2}{K^2} = f + \frac{\ell^2}{K^2} (f - h_1)$ est plus grand que f , donc que h_1 .

à $0x$. Le problème est exactement le même que le précédent, à cela près que Φ remplace partout $Mg \sin i$, et que la pression N , au lieu d'être égale à $Mg \cos i$ est égale à Mg ; Φ remplace tgi . La discussion du N.º précédent conduit donc aux conclusions suivantes :

Si $\frac{\Phi}{Mg} \leq h_1$, le disque reste immobile ;

Si $h_1 < \frac{\Phi}{Mg} \leq f \left(1 + \frac{\ell^2}{K^2}\right) - h_1 \frac{\ell^2}{K^2}$, le disque roule sans glisser) dans le sens de Φ ;

Si $\frac{\Phi}{Mg} > f \left(1 + \frac{\ell^2}{K^2}\right) - h_1 \frac{\ell^2}{K^2}$, le disque glisse et roule.

Pour mettre le disque en mouvement le plus rapidement possible, sans perdre de travail à vaincre le frottement de glissement, on lui appliquera donc une force égale à

$$Mg \left[f \left(1 + \frac{\ell^2}{K^2}\right) - h_1 \frac{\ell^2}{K^2} \right] ;$$

la vitesse du centre du disque au bout du temps t sera alors [d'après (9)] :

$$\int_0^t \ddot{\xi} dt = \frac{\ell^2 [\Phi - h_1 N]}{M(K^2 + \ell^2)} t = g (f - h_1) t.$$

Quand le disque aura atteint la vitesse désirée, on n'exercera plus sur lui qu'une traction Φ égale à $h_1 Mg$, et le disque roulera d'un mouvement uniforme⁽¹⁾

320. — Extension au mouvement d'un rouleau.

Au lieu d'un disque plat, considérons un cylindre homogène de révolution limité par deux sections droites, et qui repose sans vitesse sur un plan horizontal partout le même. Au centre de gravité G du cylindre, appliquons une force horizontale Φ normale à l'axe du cylindre. Il est évident, par raison de symétrie, que la

(1) Quand le cerceau glisse, soit e le chemin parcouru entre deux instants par son centre, e_1 le chemin parcouru sur le cerceau par le point de contact avec le sol ($e_1 < e$). Le travail des réactions du sol (essentiellement négatif) est en valeur absolue $Mg \{ f(e - e_1) + h_1 e_1 \}$; cette quantité quand $e = e_1$ (roulement sans glissement) est égale à $Mg h_1 e$, et dans tous les autres cas elle surpasse $Mg h_1 e$ de $Mg (f - h_1)(e - e_1)$.

section moyenne du cylindre va se mouvoir dans son plan vertical initial, et toute la discussion précédente s'appliquera, M étant la masse totale du cylindre.

Il en serait de même si on appliquait à l'axe du cylindre des forces horizontales deux à deux symétriques par rapport au plan de section moyenne, à condition d'appeler Φ la somme géométrique de ces tractions.

Enfin, la discussion du N^o 318 s'applique au mouvement d'un rouleau homogène pesant abandonné sans vitesse sur un plan incliné, dans une position où les sections droites du cylindre sont verticales.

On discuterait aisément, en tenant compte du frottement de roulement, le démarrage d'une voiture ou d'une locomotive.

Frottements de glissement de roulement et de pivotement dans le cas général.

321. — Considérons maintenant deux solides S et Σ animés d'un mouvement quelconque et en contact par un point P . Supposons d'abord que Σ soit fixe: quand S reste en contact avec Σ , son mouvement infinitésimal se décompose en un glissement \bar{W} tangent à Σ [vitesse du point P de S en contact à l'instant t avec Σ], et en une rotation instantanée autour de P , soit $\bar{\Omega}$; j'appelle [N^o] $\bar{\Omega}_n$ la composante de $\bar{\Omega}$ normale à Σ [pivotement instantané] et $\bar{\Omega}_t$ la composante de $\bar{\Omega}$ tangente à Σ [roulement instantané].

Dans la réalité, les deux solides sont en contact non par un point géométrique P mais par une petite aire [N^o 92]. Soit \bar{R} la somme géométrique des réactions de Σ sur S (à l'instant t) et \bar{I} leur moment résultant⁽¹⁾ par rapport à P . On peut remplacer ces réactions par la force \bar{R} appliquée en P et un couple d'axe \bar{I} . Je représente par N et par T les composantes de \bar{R} normale et tangente à Σ , par I_n et I_t les composantes de \bar{I} normale et tangente à Σ . Le couple d'axe I_n est appelé couple de frottement de pivotement; le couple d'axe I_t est appelé couple de frottement de roulement.

(1) La longueur de \bar{I} est très petite avec les dimensions de l'aire de contact.

Nous savons que \vec{F} est directement opposé à \vec{W} . D'autre part, l'expérience montre que le vecteur Γ_n est toujours directement opposé au vecteur Ω_n et que Γ_t est toujours directement opposé à Ω_t ; autrement dit, le couple de frottement de pivotement et le couple de frottement de roulement s'opposent respectivement au pivotement et au roulement de S sur Σ . De plus, en valeur absolue, Γ_t est proportionnel à N , soit $\Gamma_t = hN$, h représentant un coefficient linéaire qui dépend de la substance des deux surfaces et de leur forme au voisinage du point de contact. Quant à Γ_n , sa valeur est une fonction plus compliquée de N ; si on pose

$$\Gamma_n = RN$$

R n'est pas un coefficient linéaire constant, mais une fonction croissante de N qui dépend de la nature et de la forme des deux surfaces en contact et sur laquelle nous revenons plus loin [N° 326].

Les lois précédentes supposent que ni W , ni Ω_t , ni Ω_n ne sont nuls. Si Ω_t est nul, par exemple, pendant un certain temps, Γ_t peut avoir une direction quelconque, mais sa valeur est inférieure ou égale à $h_0 N$, [h_0 coefficient déterminé supérieur à h]. De même, si $\Omega_n \equiv 0$, Γ_n peut avoir un sens quelconque, mais on a :

$$\Gamma_n \leq R_0 N,$$

R_0 étant une certaine fonction de N supérieure à R .

Enfin si $W \equiv 0$, on sait que \vec{F} peut avoir un sens quelconque, mais est au plus égal à fN , [$f_0 > f$].

Supposons notamment que le solide S pesant soit placé sans vitesse sur un plan horizontal. Quatre hypothèses sont possibles, car les trois quantités W [vitesse de glissement], Ω_t et Ω_n peuvent rester nulles, ou deux seulement, ou une seulement ou aucune. Si aucune des quantités W , Ω_t , Ω_n ne reste nulle le sens et la longueur des vecteurs F , Γ_t , Γ_n sont définis en fonction de N par les lois du frottement de mouvement; on a notamment :

$$(1) \quad F = fN, \quad \Gamma_t = hN, \quad \Gamma_n = RN.$$

Si au contraire les trois quantités W , Ω_t , Ω_n restent nulles, (c'est-à-dire si le solide S reste en équilibre), on sait seulement qu'on doit avoir :

$$(2) \quad F \leq f_c N, \quad I_t \leq h_0 N, \quad I_n = R_0 N \\ (f_0 > f, \quad h_0 > h, \quad R_0 > R).$$

Enfin, si une (ou deux) des quantités W , Ω_t , Ω_n restent nulles, le (ou les deux) vecteurs correspondants F , I_t , I_n ont un sens arbitraire et satisfont à l'inégalité (2) correspondante et non à l'égalité (1).

322. - Travail des forces de frottements.

Le travail de toutes les forces de frottement (réaction \bar{R} et couple \bar{I}), est toujours négatif. En effet, le travail élémentaire de \bar{R} est, comme nous le savons, $-F W dt$. Le travail du couple I_t est égal à $I_t \times \text{proj. } \Omega \times dt$, la projection de Ω étant faite sur la demi droite \bar{I}_t ; or cette projection a comme longueur Ω_t et est directement opposée à I_t ; le travail I_t est donc

$$-I_t \Omega_t dt.$$

Pour les mêmes raisons, le travail de I_n est $-I_n \Omega_n dt$, [Ω_n valeur absolue de Ω_n]. Le travail de la force R , celui du couple I_t , celui du couple I_n sont donc tous trois négatifs ou nuls. Si $N \neq 0$, pour que le premier soit nul, il faut que W soit nul, pour que le second soit nul, il faut que Ω_t soit nul; pour que le troisième soit nul, il faut que Ω_n soit nul. Il suit de là que si S n'est pas immobile, le travail des forces de frottement est essentiellement négatif (et non nul), à moins que S et Σ , n'exercent pas de forces de contact l'un sur l'autre.

323. - Cas où les deux corps en contact sont mobiles.

Nous avons supposé dans ce qui précède, que le solide Σ était immobile. Supposons maintenant que les deux solides en contact soient animés de mouvements quelconques et soumis à des liaisons quelconques. Soit P l'élément de S en contact avec Σ à l'instant t , \bar{v} sa vitesse, $\bar{\omega}$ la rotation instantanée de S . Soit P' l'élément de Σ en contact avec S à l'instant t , v' sa vitesse; $\bar{\omega}'$ la rotation instantanée de Σ . Étudions le mouvement de S par rapport à Σ , c'est-à-dire par rapport à des axes liés invariablement à Σ , et soit \bar{w} la vitesse

relative de P et $\bar{\Omega}$ la rotation instantanée de S par rapport à ces axes. Les vecteurs \bar{W} , $\bar{\Omega}_t$, $\bar{\Omega}_n$ sont les vitesses de glissement, de roulement et de pivotement de S sur Σ . D'autre part, $\bar{W} = \bar{V} - \bar{V}'$, $\bar{\Omega} = \bar{\omega} - \bar{\omega}'$ [N° 177 et 196]. Les lois du N° 321 s'appliquent sans modification, une fois entendu que les vecteurs \bar{W} et $\bar{\Omega}$ sont respectivement $\bar{V} - \bar{V}'$ et $\bar{\omega} - \bar{\omega}'$.

Le travail des réactions mutuelles de S et de Σ est toujours négatif: en effet, ce travail [travail des forces intérieures du système S et Σ] est indépendant du choix des axes, et si on adopte des axes liés invariablement à Σ l'expression de ce travail est celle du N° précédent.

324. - Des frottements de roulement et de pivotement.

Lorsqu'il y a glissement franc, c'est le travail du frottement de glissement qui l'emporte considérablement sur le travail des frottements de roulement et pivotement, à cause de la petitesse de \bar{f} . L'influence de ces derniers est noyée en quelque sorte dans celle du frottement de glissement, et comme les lois du frottement de glissement sont très grossièrement connues⁽¹⁾, il est inutile de tenir compte des deux autres frottements dont les effets sont inférieurs aux erreurs d'évaluation commises.

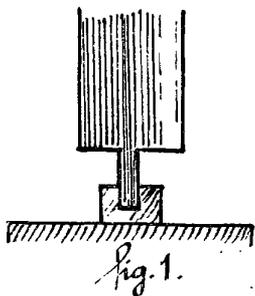
C'est seulement dans le cas où le glissement est nul ou négligeable que le faible travail des frottements de roulement et de pivotement devient prépondérant, et c'est dans ce cas seulement qu'on a étudié [tant par voie théorique que par voie expérimentale] les lois de ces frottements. Encore s'est-on limité à l'étude du roulement pur et du pivotement pur. Nous avons indiqué [N° 315] les lois du frottement de roulement d'une roue ou d'un rouleau sur un plan, quand le rouleau tourne sans pivoter ni glisser; le roulement pur de deux roues ou rouleaux l'un sur l'autre, a fait aussi l'objet de mesures expérimentales.

Disons maintenant quelques mots du pivotement pur et des lois du frottement correspondant, telles qu'elles ressortent des travaux de M. M. Hertz, Séanité et Lecornu.

Auparavant nous traiterons l'exemple du pivot sur crapaudine qui rend ces lois plus claires.

(1) Voir le N° 301. Quand les corps frottants sont lubrifiés, nous avons vu que les lois de Coulomb sont tout à fait inexactes.

325. - Pivot sur crapaudine. - Considérons un arbre de machine, que nous supposons vertical et fixé par ses deux extrémités. Pour réaliser la liaison, on fait souvent supporter l'extrémité inférieure de l'arbre par une crapaudine, boîte métallique cylindrique à parois très épaisse à l'intérieur de laquelle tourne l'extrémité de l'arbre [fig. 1]. L'extrémité supérieure peut être engagée dans une crapaudine analogue, mais c'est la crapaudine inférieure qui supportera



vraiment la pression de l'axe, si les forces données appliquées à l'arbre en outre de la pesanteur équivalent à un couple d'axe parallèle à l'axe de rotation OZ . Soit N la pression totale de l'arbre [poids de l'arbre] sur la base circulaire de la crapaudine, O le centre de cette base (situé sur l'axe OZ) et l son

rayon. Nous supposons N répartie uniformément entre tous les éléments de surface $d\sigma$ de cette base. Soit $d\sigma$ et $d\sigma_1$ deux éléments de la base symétriques par rapport à O ; les deux forces de frottement F et F_1 qui s'exercent sur les éléments de l'arbre en contact respectivement avec $d\sigma$ et $d\sigma_1$ sont égales à $f \frac{N d\sigma}{\pi l^2}$ et de sens contraire, car elles sont directement opposées aux vitesses de ces éléments, vitesses dues à la rotation ω de l'arbre et qui sont de sens contraire pour ces deux éléments. Les deux forces F et F_1 équivalent donc à un couple, et l'axe de ce couple est évidemment dirigé selon OZ en sens inverse de ω . Associons tous les éléments de surface $d\sigma$ compris entre les deux cercles de centre O et de rayon r et $r+dr$: le moment [en valeur absolue] des forces F par rapport à au point O est évidemment: $\frac{f N r^2}{\pi l^2} \times$ aire de la couronne

$$= \frac{f N r^2}{\pi l^2} 2\pi r dr = 2f \frac{N}{l^2} r^3 dr. \text{ L'axe du couple engendré par tous les frottements a donc comme valeur absolue:}$$

$$\frac{2f N}{l^2} \int_0^l r^3 dr = \frac{2}{3} f N l = f \frac{E N}{3\pi},$$

si E désigne la longueur du périmètre de la base.

On voit qu'il y a avantage, pour diminuer le frottement, à diminuer le rayon de base autant que le permet la résistance de l'arbre et du pivot, ce qui était d'ailleurs intuitif, puisqu'on se rapproche d'autant plus de la suspension idéale que les contacts imposés par la liaison sont plus voisins de l'axe géométrique.

Pivot sur épaulement.

Dans certains cas, l'arbre repose sur un épaulement [fig. 2], en sorte que la base qui supporte l'arbre est une couronne circulaire.

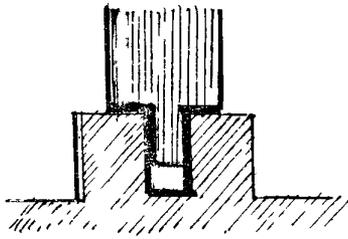


fig. 2

Rien n'est changé au calcul précédent, à cela près que r , au lieu de varier de 0 à l , varie de l' à l [$l' < l$].

L'aire de la base, au lieu d'être égale à πl^2 est égale à $\pi (l^2 - l'^2)$, on a donc, comme valeur de l'axe du couple engendré par tous les frottements :

$$\frac{2fN}{l^2 - l'^2} \int_{l'}^l r^2 dr = \frac{2fN}{3(l^2 - l'^2)} (l^3 - l'^3) = \frac{2fN}{3} \frac{(l^2 + ll' + l'^2)}{1 + l'}$$

Quand au travail (négatif) des forces de frottement on l'obtient immédiatement en multipliant la valeur que nous venons de calculer par l'angle dont a tourné l'arbre.

326. - Lois du frottement de pivotement d'un cas de pivotement pur. - Considérons deux solides contigus en contact par les mêmes éléments P et P_1 , et qui par suite tournent l'un par rapport à l'autre autour de leur normale commune fixée dans les deux corps. Ses deux corps se touchent, non par un point, mais par une petite aire qu'on démontre être sensiblement une ellipse, dont le périmètre dépend de la nature et de la forme géométrique des surfaces en contact : si E désigne la longueur de ce périmètre, l'axe Γ_n du couple de frottement de pivotement est donné par la formule :⁽¹⁾

⁽¹⁾ Cette formule est évidemment à rapprocher de celle du N.º précédent; dans les deux expressions $f \frac{EN}{3\pi}$ et $\frac{3}{32} fEN$, le coefficient de fEN diffère peu de $\frac{1}{10}$.

$$\Gamma_n = \frac{3}{32} f E N, \quad [f \text{ coefficient de Coulomb}].$$

327. — On admet que les lois du frottement de roulement pur et de pivotement pur sont encore vraies quand il y a à la fois roulement et pivotement. Comme E est d'autant plus grand (toutes choses égales d'ailleurs) que les deux surfaces sont plus écrasées l'une contre l'autre, c'est-à-dire que N est plus grand, on voit que dès que N sera suffisamment grand, la quantité $\frac{3f}{32} E$ l'emportera très notablement sur le coefficient $\frac{1}{32} h = \frac{I_k}{N}$, et par suite le frottement de pivotement et son travail joueront un rôle prédominant, à moins que ω_n ne soit nul ou négligeable devant ω_t , c'est-à-dire que le mouvement se réduise sensiblement à un roulement pur.

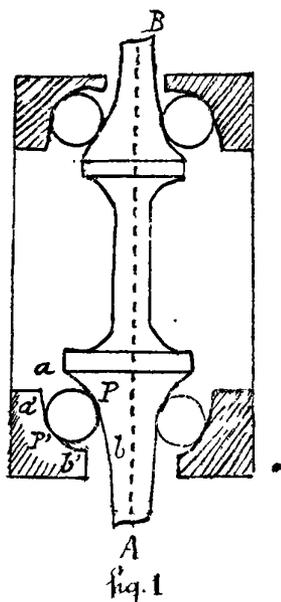
Dans le cas particulier où une des surfaces S, Σ est une sphère et l'autre une surface de révolution, la loi de variation de E d'après les courbures des surfaces en contact se simplifie et conduit à la conclusion suivante : pour des substances identiques [c'est-à-dire pour la même valeur de f] et pour des pressions normales égales, le périmètre E est plus grand si la surface de révolution tourne sa concavité vers le centre de la sphère que si elle tourne sa convexité vers ce centre ou que si elle est à courbures opposées. La résistance au pivotement est donc plus grande dans le premier cas que dans les deux autres.

Roulement sur billes.

328. — Description du dispositif.

Un procédé qui diminue considérablement le travail des forces de frottement dans la rotation d'un arbre consiste à interposer des billes entre l'arbre et son support de façon à supprimer les glissements. Ce procédé est aujourd'hui d'un usage courant notamment dans les organes de bicyclettes et d'automobiles.

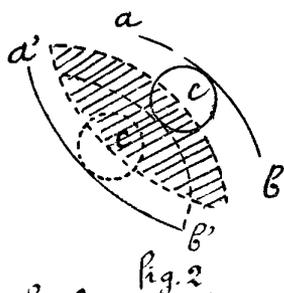
L'arbre et le support sont deux corps de révolution autour de l'axe de rotation AB , qui ne sont en contact que par les billes. Pour que les billes ne puissent



s'échapper, on les loge vers chaque bout de l'arbre dans un espace annulaire compris entre un épaulement près l'arbre et un évidement présenté par le support. L'évidement (surface de révolution engendrée par $a'b'$) constitue la cuvette; l'épaulement (surface de révolution engendrée par ab) s'appelle le cône. La cuvette est une surface de révolution à courbure positive qui tourne sa concavité vers c l'axe AB , le cône est une surface à courbures opposées. Dans chaque plan méridien, tel que le plan de la figure 1, la distance entre le cône et la cuvette présente un maximum précisément égal au diamètre de la bille. On obtient

ce résultat à l'aide d'un jeu de vis (filetage) qui permet d'écarter ou de rapprocher soit les deux cônes, soit les deux cuvettes: si on rapproche, par exemple, les deux cuvettes, à un certain moment on écrasera les billes.

On dit alors que le serrage est fait à fond. Avant que le serrage soit fait à fond, chaque cavité présente l'aspect de la



L'espace hachuré est l'espace (exagéré sur la figure) où peut se mouvoir le centre de la bille.

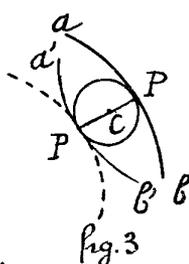


figure (2) où C est un grand cercle de la bille; quand le serrage est fait à fond, l'aspect est celui de la figure 3, la bille est tangente au cône et à la cuvette en deux points P, P' diamétralement opposés. Le centre C de la bille ne peut que décrire

un parallèle ainsi que les points P et P' , pendant que la bille tourne autour de C . Le serrage doit être fait presque à fond pour éviter les ballottements de l'arbre, mais sans excès de pression. sinon, les frottements deviendraient considérables.

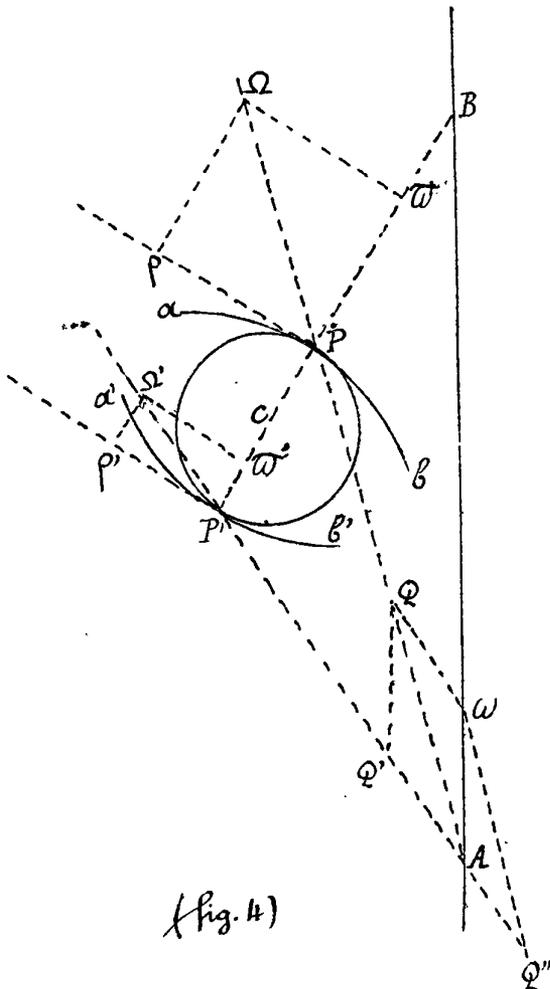
Au lieu de supposer fixe le support auxquelles sont liées invariablement les cuvettes, il est loisible d'admettre

que ce support est un arbre creux qui peut être animé d'un mouvement quelconque⁽¹⁾. Le système que nous considérons est donc en définitive un système de deux arbres assujettis à tourner l'un par rapport à l'autre autour de l'axe AB par l'intermédiaire de billes. Je représenterai dans ce qui suit, par ω la rotation instantanée de l'arbre creux (extérieur), par rapport à l'arbre plein (intérieur). La rotation de l'arbre plein par rapport à l'arbre creux est la rotation inverse.

329. - Étude du mouvement. - Chaque bille est supposée de masse négligeable; c'est-à-dire que son poids est négligeable par rapport aux pressions qu'elle supporte. Les forces extérieures qui lui sont appliquées se font donc sensiblement équilibre. Ces forces sont les réactions (sur la bille) du cône [pression normale N , force de frottement F , couple Γ] et de la cuvette [pression N' , force de frottement F' , couple Γ']. Les pressions N et N' sont donc égales et de sens contraires, de même que F et F' . Je dis, d'autre part, que la bille va rouler et pivoter sans glisser sur le cône et la cuvette; en effet, le moment des deux forces égales F et F' par rapport à C est égal (en valeur absolue) à $2Fl$ [l'rayon de la bille], et on a: $2Fl = \Gamma$, si l est la longueur de $\vec{\Gamma} + \vec{\Gamma}'$. Comme $\frac{\Gamma}{CN}$ et $\frac{\Gamma'}{CN}$ sont très petits par rapport à f , [à moins que l'écrasement de la bille ne soit considérable], la valeur $\frac{F}{N} = \frac{\Gamma}{2lN}$ est inférieure à f . La condition pour que le glissement reste nul est remplie.

La bille va donc rouler et pivoter sans glisser sur le cône et sur la cuvette. Par rapport au cône, le mouvement élémentaire de la bille est une rotation $\bar{\Omega}$ autour de P . De même le mouvement infinitésimal de la bille par rapport à la cuvette est une rotation $\bar{\Omega}'$ autour de P' . Comme la cuvette est animée de la rotation ω autour de l'axe AB , les deux rotations simultanées $\bar{\Omega}$ et $\bar{\Omega}'$ équivalent à la rotation $\bar{P}\bar{\Omega}$. Autrement dit, les deux vecteurs $\bar{P}'\bar{\Omega}'$ et $\bar{A}\bar{\omega}$ admettent une résultante géométrique qui est $\bar{P}\bar{\Omega}$. Les trois vecteurs $\bar{A}\bar{\omega}$, $\bar{P}\bar{\Omega}$, $\bar{P}'\bar{\Omega}'$ sont

(1) C'est ce dispositif que présentent les roues de bicyclettes.



(Fig. 4)

donc concourants ou parallèles. Soit A leur point d'intersection sur AB , point qui peut être à l'infini : une fois A connu, il suffit de décomposer $A\omega$ suivant les deux directions AP et AP' pour obtenir les deux vecteurs \overline{AQ} et $\overline{AQ'}$ équivalents à $\overline{\Omega}$ et à $-\overline{\Omega'}$. Les vecteurs $\overline{\Omega}$ et $\overline{\Omega'}$ sont donc bien définis en fonction de ω et de l'unique indéterminée dont dépend la position de A sur AB . Précisons ce résultat.

Appelons \overline{w} et f les composantes de $\overline{\Omega}$ suivant la normale $P'P$ et la tangente en P à la méridienne du cône : \overline{w} est la vitesse de pivotement, f la vitesse de roulement de la bille sur le cône. De même, soit $\overline{w'}$ et f' les projections de $\overline{\Omega'}$ sur la normale PP' et la tangente en P' à la méridienne de la cuvette : $\overline{w'}$ et f' sont les

vitesses de pivotement et de roulement de la bille sur la cuvette. Soit enfin l le rayon de la bille, d et d' les distances de P et de P' à l'axe AB . Le moment de $\overline{P\Omega}$ par rapport à P' est égal à $2lf$, mais il est égal aussi au moment résultant de $\overline{P'\Omega'}$ et $A\overline{w}$ [par rapport à P'], c'est-à-dire à $\overline{w'd}$. On a donc :

$$(1) \quad 2lf = \overline{w'd}.$$

De même, en considérant les moments par rapport à P , on trouve :

$$(2) \quad 2l'f' = \overline{w'd}.$$

Les vitesses de roulement f et f' sont donc bien déterminées en grandeur [et évidemment en sens], en fonction de \overline{w} , indépendamment de la position de A sur l'axe. Quant à \overline{w} et $\overline{w'}$, en projetant sur PP' , on trouve aussitôt (dans le cas de la figure), en appelant α l'angle PBA :

$$(3) \quad W = W' + W \cos \alpha.$$

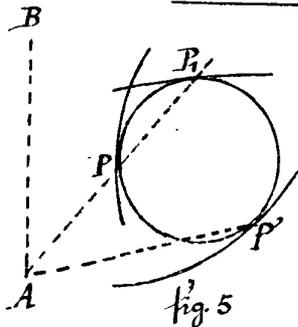
On voit que la somme des pivotements de la cuvette par rapport à la bille et de la bille par rapport au cône est égale à $W \cos \alpha$.

330. - Rôle de frottement de pivotement. - On connaît donc f et f' en fonction de W , et W' en fonction de W et de W . Mais W reste indéterminé. Admettons que le pivotement ait lieu par rapport à celle des deux surfaces (cône et cuvette) qui oppose au pivotement la moindre résistance. Le cône et la cuvette sont supposés de même matière et affectés du même coefficient de frottement de glissement f ; les pressions N et N' de la bille sur ces deux surfaces sont les mêmes. D'après la remarque du N° 327, la cuvette (qui tourne sa concavité vers le centre de la sphère) oppose au pivotement une résistance plus grande que le cône. La bille pivotera donc sur le cône et roulera sans pivoter sur la cuvette: $W' = 0$, $W = W \cos \alpha$, AP est tangent à la cuvette. D'après les lois du frottement de pivotement, on aura (I_n et I_n' désignant les axes des couples dus au frottement de pivotement entre la sphère et le cône et entre la sphère et la cuvette):

$$I_n = \mathcal{R}N, \quad I_n' \ll \mathcal{R}N, \quad (\text{car } N' = N).$$

Le travail du frottement de pivotement entre la bille et la cuvette est nul; le travail du frottement de pivotement entre la bille et le cône est $\int \mathcal{R}N W \cos \alpha dt$ (en valeur absolue). D'autre part, c'est le travail du frottement de pivotement qui est ici le plus important [N° 324]. Le cône doit donc s'user plus vite que la cuvette. C'est ce que vérifie l'observation.

331. - Billes à plusieurs contacts.



Quand les pressions à transmettre sont considérables, on emploie un dispositif où chaque bille a plusieurs contacts, deux contacts par exemple, avec le cône (ou la cuvette); le mouvement de

la bille par rapport au cône est alors une rotation Ω autour de PP_1 (puisque P et P_1 ont une vitesse nulle par rapport au cône), et la formule (1) donnant ρ , $\underline{\Omega}$ est connu. Le mouvement de la bille sur la cuvette est une rotation connue autour de AP' [fig. 5]; il y a roulement sans pivotement si AP' est tangent à la cuvette.

Quand la bille touche aussi la cuvette par deux points P', P_1' , il faut que les trois droites PP_1 , $P'P_1'$ et AB soient concourantes pour que la bille ne glisse ni sur le cône ni sur la cuvette en aucun point.

Livre III

Machines et moteurs.

Chapitre I.

332. - Rappel des principes de l'énergique.

Deux principes dominent la théorie des machines : le principe de l'équivalence combiné avec le théorème des forces-vives, et le principe de Carnot. Ces deux principes ont été étudiés plus haut [N^{os} 100-104]. Insistons sur le théorème des forces-vives qui nous sera d'un usage constant.

Les axes regardés comme fixes $Oxyz$ ayant été arbitrairement choisis, soit $2T$ la force vive d'un système matériel S ; soit E^e le travail des forces extérieures et E^i le travail des forces intérieures dans un intervalle de temps J , et soit ΔT la variation de T dans cet intervalle de temps, on a [N^o 78] :

$$\Delta T - E^e = E^i.$$

Les forces intérieures [forces absolues] se décomposent en forces à distance et forces de contact, et nous avons vu [N^{os} 76, 77] que le travail total E_i^d des premières est (ainsi que le travail total E_i^c des secondes) indépendant du choix des axes $Oxyz$. Au contraire les quantités $T, \Delta T, E^e$ dépendent du choix des axes, mais la différence $\Delta T - E^e$ est une quantité absolue.

Appelons Q_e la quantité totale (positive ou négative) d'énergie calorifique ou autre cédée par le système à l'extérieur, entre les instants t_0 et t , quantité mesurée en unités mécaniques d'énergie [N^{os} 99-103]. Le principe de l'équivalence exprime qu'on a :

$$Q_e + E_i = -\Delta W^i.$$

W^i désignant une quantité qui reprend la même valeur chaque fois que S reprend le même état [c'est-à-dire chaque

fois que S reprend la même configuration, chaque élément reprenant le même état physique et chimique]. On donne à W^i (expression définie à une constante d'addition près) le nom d'énergie potentielle interne. L'expression $E = T + W^i$ est dite énergie interne totale; cette quantité dépend du choix des axes, mais la différence ΔE , égale à $-Q_e$, est une grandeur absolue.

333. - Supposons qu'aucun élément de S ne soit électrisé, ou magnétique. Ses forces intérieures à distance se réduisent aux attractions newtoniennes (négligeables dans les applications ordinaires). C'est le cas des machines autres que les machines électriques ou magnéto-électriques; les forces intérieures se réduisent alors sensiblement aux forces (intérieures) de contact, et la quantité W^i est indépendante de la configuration de S ; elle reprend la même valeur à deux instants t_0 et t_1 , à ces deux instants chaque élément de S reprend le même état. - En particulier quand S peut être regardé comme composé d'éléments indéformables entre les instants t_0 et t_1 , le travail E^i des forces de contact est égale à $-Q_e$, et Q_e est toujours positif [cf.]. Nous admettrons, dans ces leçons, qu'un liquide dont chaque élément garde la même densité⁽¹⁾ est assimilable à un tel système, à savoir un sac de sable de grains très petits: le travail des forces extérieures de contact (pressions) dans un tel liquide est donc essentiellement négatif. Il est nul, si le liquide est parfait, c'est-à-dire dénué de frottement et assimilable à un sac de sable dont les grains seraient parfaitement lisses: toutefois quand il se produit des chocs entre éléments d'un liquide parfait, le travail des forces intérieures est négatif (et non nul en général).

De même, un fil ou une membrane inextensible et parfaitement flexible peut être regardé comme composé de petits éléments solides parfaitement articulés entre eux (sphériquement ou cylindriquement). Le travail des forces intérieures est nul pour un tel système. Si le fil ou la membrane inextensible a de la raideur, mais

(1) Ce sera le cas d'un liquide incompressible dont la température est partout la même et constante.

aucune élasticité [Exemple, courroie], la même assimilation est possible, à cela près que les articulations doivent être regardées comme ayant lieu avec frottement.

En définitive, si un système S peut être regardé entre deux instants t_0 et t_1 comme composé d'éléments indéformables, le travail des forces intérieures de contact entre t_0 et t_1 est toujours négatif, quel que soit le mouvement S , qu'il y ait ou non des chocs.

Supposons enfin, que les éléments S se déforment, mais que sa température soit partout la même, et constante: si chaque élément reprend le même état aux instants t_0 et t_1 , le travail des forces intérieures de contact entre t_0 et t_1 est négatif.

Notions générales sur les Machines.

332. - Définitions. - Lorsqu'on dispose d'un agent naturel (chûte d'eau, vapeur, muscle, etc) pour produire un effet déterminé, il est très rare qu'on puisse l'employer directement à l'usage qu'on a en vue. Il faut commencer par transformer les forces immédiates qu'il exerce. L'organe de cette transformation s'appelle une machine. C'est ainsi que, quand on dispose d'une chute d'eau pour écraser du blé, entre la chute et le blé on interpose un moulin.

Les machines affectent les types les plus variés. Elles se composent essentiellement d'un certain nombre de pièces rigides, reliées entre elles et à des appuis, les liaisons [ou du moins certaines d'entre elles] pouvant être effectuées par les liens déformables [courroies etc]. Mais dans la marche normale d'une machine, la machine reprend périodiquement la même configuration: les pièces déformables reprennent la même forme⁽¹⁾, et toutes les pièces (rigides et autres) reprennent les mêmes dispositions mutuelles. En général, une machine est un système à liaisons complètes, mais cette restriction

(1) En réalité, toutes les pièces de la machine (rigides et autres) subissent de lentes déformations permanentes: en un mot, la machine s'use. Mais cette usure est très lente et tout à fait négligeable dans l'étude de la marche normale d'une machine.

n'est point essentielle⁽¹⁾.

333. - Choix des axes. - Pour étudier la marche d'une machine, nous rapporterons systématiquement son mouvement à des axes liés invariablement au corps même⁽²⁾ de la machine. La machine sera dite fixe si son corps est lié invariablement au sol. Par ex., pour étudier la marche d'une machine à vapeur fixe, nous rapporterons le mouvement de la machine à des axes liés invariablement à la terre. Si la machine à vapeur fait partie d'un navire ou d'un ballon, nous rapporterons le mouvement de la machine à des axes liés invariablement à la carcasse du navire ou à la nacelle du ballon.

334. - Périodicité de la marche normale. - Les axes étant ainsi choisis, chaque fois que la machine reprend la même position ^{par rapport} ^{à la même configuration,} aux axes. D'une manière précise, dans la marche normale, la machine doit périodiquement reprendre les mêmes positions, avec les mêmes vitesses, être soumise aux mêmes forces, etc. Cette régularité est indispensable à son bon fonctionnement. En particulier, la force vive de la machine est ou constante ou périodique pendant la marche normale. La période d'ailleurs est très courte par rapport à la durée d'emploi continu de la machine: par exemple, pour une locomotive, la période est la durée d'un tour de roue.

335. - Réactions intérieures. - Les pièces mobiles de la machine sont en général assujetties à des liaisons avec des appuis fixes [crapaudines, etc.] c'est-à-dire avec des appuis invariablement liés au corps de la machine. Nous regarderons toujours ces appuis comme faisant partie de la machine: d'après cette convention, les réactions qui s'exercent entre les pièces mobiles de la machine

⁽¹⁾ Comme exemple (très rare) d'une machine qui n'est pas à liaisons complètes, on peut citer les anciennes meules à poudre où les cylindres qui parcourent la piste peuvent tourner librement autour de leur axe.

⁽²⁾ Il n'y aura jamais, dans les applications, d'ambiguïté sur le sens de ce terme.

et leurs appuis fixes seront toujours des forces intérieures.⁽¹⁾ Nous admettrons, pour plus de clarté, que les forces intérieures à distance sont négligeables.⁽²⁾ Dans ces conditions, quand la machine se compose de pièces rigides, le travail des forces intérieures est toujours négatif. Soit T_p ce travail : nous donnerons à T_p le nom de travail perdu : cette perte de travail est causée par les frottements et par les chocs intérieurs. Pour qu'elle fût nulle, il faudrait qu'il n'y eût ni chocs intérieurs, (ce qui est sensiblement réalisable dans bien des cas), ni frottements intérieurs (ce qui est impossible).

Quand la machine renferme des câbles et des courroies, les conclusions précédentes subsistent si on assimile les câbles et courroies à des cordes ou membranes inextensibles affectées de raideur. Mais on peut aussi regarder ces liens comme des systèmes quelconques dont la température sensiblement est partout la même et constante. Le travail des réactions intérieures de ces liens pendant une période est essentiellement négatif [page 365].

Les réactions intérieures de la machine sont souvent appelées les résistances passives. Le travail perdu a surtout pour effet 1° d'échauffer les pièces de la machine ; 2° de l'user (c'est-à-dire d'infliger à ces pièces des déformations permanentes).

336. - Forces motrices et résistances extérieures. -

Considérons maintenant les forces extérieures appliquées à la machine. Supposons d'abord la machine fixe : les éléments de la machine seront soumis, en outre de la pesanteur, à certaines forces extérieures absolues. Parmi ces forces, les unes ont un travail positif⁽³⁾, les autres un travail négatif : les premières seront dites forces motrices, les autres résistances utiles. Le mot utile

(1) Mais nous ne faisons pas rentrer dans la machine les corps sur lesquels l'outil exerce son effet, et qui peuvent être des corps fixes.

(2) Nous écartons ainsi le cas des machines électriques, auxquelles d'ailleurs la théorie s'étend avec quelques complications.

(3) Ce travail est bien déterminé puisque les axes auxquels on rapporte le mouvement sont déterminés.

est justifié par ce fait que ces résistances accompagnent l'effet utile qu'on veut produire : par exemple, s'il s'agit d'une machine à laminier, les résistances extérieures sont les réactions exercées sur l'outil par le métal qu'on lamine.

On donne au travail des forces motrices le nom de travail moteur, et au travail des résistances utiles [pris en valeur absolue] le nom de travail utile. Nous reviendrons tout à l'heure sur la notion de travail utile.

Pour ce qui est de la pesanteur, son travail pendant une période du mouvement est nul. Si on étudie la marche de la machine pendant un temps assez long ce temps sera toujours (avec une très faible erreur) un nombre exact de périodes, et le travail de la pesanteur sera négligeable.

Nous avons supposé la machine fixe. Si le corps de la machine est animé d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme par rapport à la terre, rien n'est changé à ce qui précède. Si le corps de la machine est animé d'un mouvement quelconque, dans toutes les applications, ce mouvement, pendant une période, peut être regardé comme un mouvement de translation dont l'accélération \bar{y} est constante : les axes étant liés au corps de la machine, il faut alors remplacer \bar{g} par $\bar{g} - \bar{y}$. Le travail total (pendant une période) de la nouvelle pesanteur $m[\bar{g} - \bar{y}]$ est encore nul, et la conclusion précédente subsiste.

En définitive, dans le calcul du travail des forces extérieures, nous n'aurons à tenir compte que des forces motrices et des résistances utiles [toutes forces absolues]

337 - Récepteur, outil et transmissions.

On distingue, en général, trois parties dans une machine⁽¹⁾

1° Le récepteur auquel sont appliquées les forces motrices;

(1) Cette distinction n'a d'ailleurs rien d'absolu, une machine pouvant toujours être décomposée en machines partielles, dont chacune reçoit un travail moteur et fournit un travail utile.

2° l'outil qui exerce sur les corps soumis à la machine les forces utiles [égales et directement opposées aux résistances utiles].

3° les transmissions qui relient le récepteur à l'outil. Le récepteur se compose essentiellement, soit d'un arbre tournant autour d'un axe fixe, soit d'un piston animé d'un mouvement alternatif. Les forces motrices sont alors les forces absolues qu'exerce sur l'arbre [et les organes qui lui sont liés invariablement] l'agent moteur dont on dispose [chûte d'eau, muscle, etc], ou bien les pressions qu'exerce sur le piston la vapeur motrice, etc.

338. - Application du théorème des forces-vives aux machines.

La machine étant en marche normale, considérons un intervalle de temps, t_0, t_1 , égal à un nombre entier de périodes. On a, dans ce cas: $I_0 = I_1$, et si on appelle

τ_m le travail moteur _____ dans l'intervalle de temps t_0, t_1

τ_p le travail perdu (travail changé de signe des résistances passives) _____ "

τ_u le travail utile (travail changé de signe des résistances utiles) _____ "

le théorème des forces-vives donne: $\tau_e + \tau_f = 0$, c'est-à-dire:

$$(1) \quad \tau_m = \tau_p + \tau_u .$$

Quand on embrasse toute la durée de marche de la machine, depuis la mise en train jusqu'à l'arrêt, on a: $I_0 = I_1 = 0$; si on admet que la machine s'arrête dans la même position qu'au départ, le travail de la pesanteur est nul, et l'égalité (1) subsiste (1).

Si t_0, t_1 est l'intervalle de mise en train de la machine, on a (en admettant toujours qu'à l'instant t_1 la machine occupe la même position qu'à l'instant t_0):

$$I_1 = \tau_m - \tau_p - \tau_u ,$$

(1) En général, les pièces de la machine dont le centre de gravité n'est pas fixe ont une masse peu considérable, et le travail de la pesanteur entre deux positions de la machine est faible.

d'où :

$$\tau_m = \tau_p + \tau_u + I_1 ;$$

la force-vive acquise joue le rôle d'un travail résistant ; une partie du travail moteur a été employé à communiquer à la machine l'énergie cinétique I_1 .

Si t_1, t_2 est la période d'arrêt, on a :

$$I_1 > 0, \quad I_2 = 0 \quad \text{et} :$$

$$-I_1 = \tau_m - \tau_p - \tau_u ,$$

d'où :

$$\tau_m + I_1 = \tau_p + \tau_u ;$$

l'énergie cinétique joue alors le rôle d'un travail moteur : la machine ne s'arrête qu'après avoir surmonté certaines des résistances.

339. - Rendement d'une machine.

On appelle rendement d'une machine le rapport entre le travail utile et le travail moteur [pendant la marche normale de la machine] ; ce rapport P est égal d'après ce qui précède à

$$P = \frac{\tau_u}{\tau_m} = \frac{\tau_m - \tau_p}{\tau_m} = \left(1 - \frac{\tau_p}{\tau_m} \right) .$$

On doit chercher à rendre P le plus grand possible, d'abord pour que le travail moteur soit dépensé aussi efficacement que possible ; ensuite parce que le travail perdu est non seulement inutile, mais nuisible puisqu'il a pour effet d'échauffer et d'user la machine. On diminue τ_p par un ajustement aussi parfait que possible des pièces de la machine (ajustement qui empêche les chocs sans gêner les mouvements), par le polissage et le graissage des pièces en contact, etc.

Lorsque les forces motrices, les résistances extérieures et la vitesse de marche sont données, le régime de marche et le rendement sont parfaitement définis. Mais en général, la même machine doit être adaptée à une infinité de régimes de marches : à chaque régime de marche normale, correspondent une vitesse de marche, des forces motrices et des résistances extérieures déterminées. Le rendement dans la plupart des cas sera

différent pour ces différents régimes: le régime pour lequel le rendement sera le plus élevé sera le régime optimum. C'est à ce régime en général qu'il faudra de préférence faire travailler la machine.

340 - Puissance.

Il ne suffit pas de considérer le travail utile total fourni par une machine: il faut considérer encore le temps employé pour produire ce travail. On appelle puissance d'une machine le travail utile qu'elle fournit pendant l'unité de temps.

On adopte dans l'industrie, comme unité de puissance, le cheval-vapeur c'est-à-dire (par définition) la puissance d'une machine qui fournit par seconde 75 kilogrammètres de travail utile.

Ainsi une machine de 50 chevaux ou 50 H. P.⁽¹⁾ est une machine qui fournit régulièrement et indéfiniment un travail moyen utile de $50 \times 75 = 3750$ kilogrammètres par seconde. Quand la machine comporte plusieurs régimes de marche, sa puissance varie avec le régime.

On prend aussi comme unité de puissance le Watt, puissance d'une machine qui fournit par seconde 1 Joule de travail utile. Le Watt est égal à $\frac{1 \text{ H.P.}}{75 \times 9,81}$; le Kilowatt est 1000 fois plus grand et vaut $1 \text{ H.P.} \times 35$.

Dimensions. - Les dimensions d'un travail sont, comme on sait, les mêmes que celles d'une force vive ML^2T^{-2} ; les dimensions d'une puissance sont donc ML^2T^{-3} .

341 - Du travail utile.

Nous avons défini le travail utile comme le travail (chargé de signe) des résistances utiles, c'est-à-dire le travail des résistances qui accompagnent l'effet utile auquel on emploie la machine. Discutons cette définition.

Dans certains cas, T_u est bien égal au travail vraiment absorbé par l'effet utile. Par exemple, considérons un monte-charge qui élève un fardeau de masse μ et revient (après s'en être déchargé) à sa position initiale. Le travail vraiment utile accompli est égal à Wh , W désignant

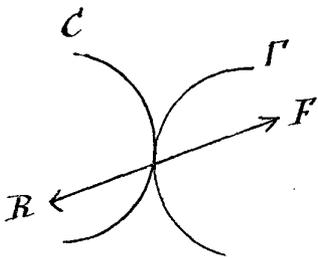
(1) H. P. [ou Horse-Power] représente un cheval-vapeur.

le poids du fardeau, h la hauteur dont il a été soulevé. Or le travail des résistances utiles [réactions du fardeau sur le plateau du monte-charge] est égal à $-Wh$; T_u représente bien ici le travail vraiment utilisé.

Mais en général le travail vraiment absorbé par l'effet utile est inférieur à T_u .

Supposons d'abord que la machine S ait pour but d'actionner une autre machine (un arbre ou une bielle, etc.) avec laquelle elle est articulée. Les forces \vec{F} que S exerce sur l'arbre (ou sur cette bielle, etc.) sont égales et directement opposées aux résistances utiles \vec{R} [forces exercées - par l'arbre (ou la bielle, etc.) sur S]; chaque force \vec{F} a même point d'application qu'une des résistances \vec{R} , à savoir un des points d'articulation de la machine et de l'arbre (ou de la bielle, etc.). Le travail total des forces \vec{F} et \vec{R} est nul, si on admet que les articulations sont parfaites et par suite sans frottement. Le travail vraiment utile, à savoir le travail des forces \vec{F} , coïncidera donc avec le travail (chargé de signe) T_u des résistances \vec{R} , c.à.d. avec le travail que, par définition, nous avons appelé le travail utile. En fait, les articulations entraînant toujours des frottements, le travail total des forces \vec{F} et \vec{R} sera négatif, et le travail vraiment utilisé sera inférieur au travail T_u , la différence entre les deux travaux étant absorbée par les frottements des articulations.

Si la machine S , au lieu d'être articulée avec la seconde machine, est en contact avec elle par certaines pièces



solides, soit C et Γ deux pièces en contact des deux machines: le travail des deux forces \vec{F} et \vec{R} serait nul si les deux pièces glissaient sans frottement (ou engrenaient parfaitement l'une sur l'autre). En réalité, il est toujours négatif:

si W est la vitesse de glissement de Γ sur C , F_t la composante tangentielle de \vec{F} , il est égal (en négligeant les frottements de roulement et de pivotement) à

$$-\int_{t_0}^{t_1} F_t W dt.$$

Quand la machine S agit sur un liquide ou un gaz,

soit encore \bar{F} la force exercée par S sur un élément du fluide en contact avec S : \bar{F} est égale et directement opposée à une résistance utile \bar{R} , et quand il n'y a pas de choc, le travail des forces \bar{F} est égal à T_u diminuée de la valeur absolue du travail des forces de frottement. Ce travail, donné par la même formule que ci-dessus, est très faible. Mais quand il y a chocs, le travail (négatif) des percussions de contact peut être considérable, et le travail des forces \bar{F} est très notablement inférieur à T_u . Si la machine est un ventilateur, le travail dépensé à ébranler l'air est moindre que E_u .

D'une manière générale, le travail vraiment absorbé par l'effet utile est presque toujours très inférieur à T_u .

Par exemple, si la machine est une machine à forer, ou un marteau-pilon etc, l'effet utile accompli [déformation permanente d'un certain corps] s'accompagne toujours d'un grand dégagement de chaleur, et la quantité de chaleur ainsi dégagée, évaluée en travail, ainsi que le travail d'usure de l'outil, diminue d'autant le travail vraiment utilisé.

342. — Il est même des cas où l'effet utile qu'on veut produire n'exige par lui-même aucun travail. Considérons un hélicoptère [c'est-à-dire un corps plus lourd que l'air muni d'hélices animées d'une rotation rapide], qui reste en équilibre dans l'air immobile. Le travail E_u est ici le travail (chargé de signe) des résistances de l'air sur les hélices. L'effet utile qu'on veut obtenir en battant l'air avec les hélices, c'est d'engendrer une résistance de l'air dont la résultante équilibre la pesanteur. Le travail de cette résultante, ainsi d'ailleurs que celui de la pesanteur, est nul. Si on maintenait l'hélicoptère en équilibre en le soutenant à la main par son centre de gravité, il n'y aurait aucune dépense de travail. La dépense de travail E_u tient ici uniquement au procédé de sustentation employé (hélices sustentatrices); suivant que la forme des hélices sera plus ou moins bien choisie, le même effet utile (sustentation de l'hélicoptère) sera obtenu, pendant le même temps, avec une dépense plus ou moins faible de travail.

343. Rendement industriel.

Nous avons supposé jusqu'ici qu'on connaissait les forces motrices appliquées au récepteur de la machine, et par suite leur travail. Par exemple, s'il s'agit d'une roue hydraulique (ou d'une machine à vapeur, etc), nous avons admis qu'on connaissait les forces exercées sur les palettes de la roue par l'eau motrice (ou les pressions exercées par la vapeur sur le piston, etc). Le rendement tel que nous l'avons défini ne fait que comparer le travail de ces forces au travail des résistances utiles, c'est-à-dire un travail mécanique proprement dit à un autre.

En réalité, ce n'est pas ainsi que le problème se pose naturellement. Considérons une machine à vapeur. Le problème industriel est le suivant: On a du charbon, de l'eau à vaporiser, une machine adaptée; quelle est la quantité de travail utile T_u que fournit la machine par kilogramme de charbon brûlé?

D'une manière générale, la marche de la machine étant entretenue par une source d'énergie quelconque [chûte d'eau, charbon, pétrole etc], il s'agit de comparer l'énergie naturelle dépensée (évaluée en travail), soit ΔE , au travail utile T_u de la machine. Le quotient $\frac{T_u}{\Delta E} = \rho$ peut s'appeler le rendement industriel de la machine, tandis que le rapport $\frac{T_u}{T_m} = P$ peut s'appeler le rendement mécanique (T_m désignant toujours le travail des forces absolues exercées par l'agent naturel, eau, vapeur, etc., sur le récepteur).

On a:

$$\rho = \frac{T_u}{\Delta E} = \frac{T_u}{T_m} \frac{T_m}{\Delta E} = P \frac{T_m}{\Delta E}.$$

Ainsi soit une machine à vapeur, où la chaleur qui transforme l'eau en vapeur est fournie, dans l'intervalle de temps t_0, t_1 , par la combustion d'un certain poids W de charbon en kilogrammes. Si n le nombre de calories dégagé par la combustion d'un kilogramme de charbon, et soit T_u le travail utile (en kilogrammètres) de la machine dans l'intervalle de temps t_0, t_1 . On a: $\Delta E = nW \times 425$ et le rapport $\frac{T_u}{nW \times 425}$ est le rendement industriel de la machine à vapeur.

344. - Machines qui englobent l'agent moteur.

Dans certains cas on est amené à englober dans la machine la source naturelle d'énergie (charbon, pétrole, etc.). C'est ce qui a lieu par exemple, quand on étudie le mouvement d'une automobile, ou d'une locomotive et de son tender. Dans ce dernier cas, la machine proprement dite, le charbon, l'eau et la vapeur motrice, sont regardés comme formant un système. Ses forces motrices (appliquées au récepteur) sont alors des forces intérieures. Ses transformations du système ne sont plus périodiques, mais l'énergie cinétique des éléments non périodiques de la machine [eau vaporisée, charbon brûlé] est négligeable, et à chaque tour de roue on peut regarder la force vive du système comme redevenue la même.

Soit t_0, t_1 la durée d'un certain nombre de tours de roue. Par la combustion du poids W de charbon, l'énergie interne du charbon est diminuée de $\Delta E = nW \times 425$. Je représente par ΔW la variation d'énergie interne (non cinétique) des autres parties du système (eau vaporisée, vapeur condensée, etc) et, par Q_e l'énergie calorifique cédée au milieu extérieur. D'après le principe de la conservation de l'énergie, on a [la variation d'énergie cinétique étant nulle entre t_0, t_1 pendant la marche normale de la machine, ainsi que ΔW]:

$$-\Delta E + Q_e = \tau_e, \quad [Q_e > 0]$$

τ_e représentant le travail des forces extérieures, qui sont toutes ici des résistances utiles; autrement dit, $\tau_e = -\tau_u$, d'où :

$$(1) \quad \tau_u = \Delta E - Q_e, \quad \tau_u < \Delta E.$$

Il est intéressant de remarquer que l'équation (1) n'est pas modifiée si on prend comme axes non pas des axes liés invariablement au corps de la machine mais des axes quelconques assujettis à la seule condition que, par rapport à ces axes, la force vive de la machine proprement dite soit périodique.

345 - Machines motrices ou moteurs.

Considérons une machine mise en mouvement par un agent naturel et réduite à son récepteur: une telle machine s'appelle machine motrice ou moteur. Le récepteur, comme nous l'avons dit, [N.°340], se compose essentiellement en général soit d'un arbre mobile autour d'un axe fixe auxquelles les forces motrices impriment une rotation continue, soit d'un piston que les forces motrices animent d'un mouvement alternatif. Dans ce dernier cas, ce mouvement alternatif est presque toujours transformé, par un jeu d'articulations, en mouvement circulaire continu. De sorte qu'en définitive l'effet de l'agent moteur est de communiquer à un arbre un mouvement de rotation continu.

346. - Rendement sur l'arbre. - Puissance.

Il est évident que l'étude d'un moteur peut être faite indépendamment des transmissions et de l'outil auxquelles il est loisible de l'adapter. Dans cette étude, c'est le rendement et la puissance qui sont surtout à considérer. Soit t_0, t_1 un intervalle de temps dans lequel l'arbre du moteur tourne avec une vitesse angulaire uniforme ω sous l'action d'une part des forces motrices, d'autre part d'un couple résistant constant (qui empêche la rotation de s'accélérer). Soit N l'axe du couple dirigé, selon l'axe de l'arbre) le travail du couple est égal à $N(t_1 - t_0) = T_u$ Soit de plus ΔE l'énergie dépensé par l'agent naturel (charbon, pétrole, etc) dans ce même intervalle de temps: le rapport $\frac{T_u}{\Delta E}$ est appelé le rendement sur l'arbre. Le quotient $\frac{T_u}{t_1 - t_0}$ est la puissance sur l'arbre.

Le rendement peut varier avec la vitesse ω . Le régime optimum est, en général, le régime pour lequel le rendement est le plus élevé. Pourtant dans certaines applications (machines volantes, automobiles de course), ce qui importe avant tout, c'est (comme nous l'avons déjà remarqué, N.°338) la puissance: il faut que le travail utile T_u , produit dans l'unité de temps par le moteur, soit le plus grand possible, sur ce qui dépend du rendement, c'est-à-dire en sacrifiant de l'énergie motrice. Dans les applications de cette nature, on se

trouve amené à comparer la puissance maxima du moteur à son poids : si, par exemple, une machine pèse 100 kilogrammes et a une puissance maxima de 20 chevaux, on dit que sa puissance est d'un cheval par cinq kilogrammes. Le poids d'une machine de puissance donnée a été, ces dernières années, abaissé dans des proportions colossales, grâce aux progrès des moteurs à explosion. On fabrique aujourd'hui des moteurs fournissant un cheval vapeur par 3 kilogrammes et au-dessous. Le moteur fournissant 1HP par kilogramme, apparaît comme prochainement réalisable.

Comme exemple, considérons un hélicoptère de poids \overline{W} maintenu en équilibre dans l'air par un hélice d'axe vertical. Si ω est la vitesse angulaire de l'hélice, la composante verticale des réactions de l'air est de la forme : $\lambda \omega^2$, et leur moment résultant par rapport à l'axe de l'hélice est de la forme $\mu \omega^2$ (λ et μ désignant certaines constantes attachées à l'hélice). Le travail élémentaire de ces réactions est donc : $-\mu \omega^2 \times \omega dt$, et leur travail dans l'unité de temps est $-\mu \omega^3$. Il faut donc que la puissance P du moteur soit égale à $\mu \omega^3 = \mu \left(\frac{\overline{W}}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}}$ [car $\overline{W} = \lambda \omega^2$]. Si on augmente le poids \overline{W} de l'hélicoptère, on voit que cette puissance doit croître proportionnellement à $\overline{W}^{\frac{3}{2}}$ [l'hélice restant la même].

Si on amplifie dans le rapport α toutes les dimensions de l'hélicoptère [hélice comprise], sa densité restant la même, on a ($\overline{W}_1, \lambda_1, \mu_1$ et P_1 désignant les nouvelles valeurs de $\overline{W}, \lambda, \mu, P$) :

$$\overline{W}_1 = \alpha^3 \overline{W}, \quad \lambda_1 = \lambda \alpha^4, \quad \mu_1 = \mu \alpha^5, \quad [N^{\circ} 250],$$

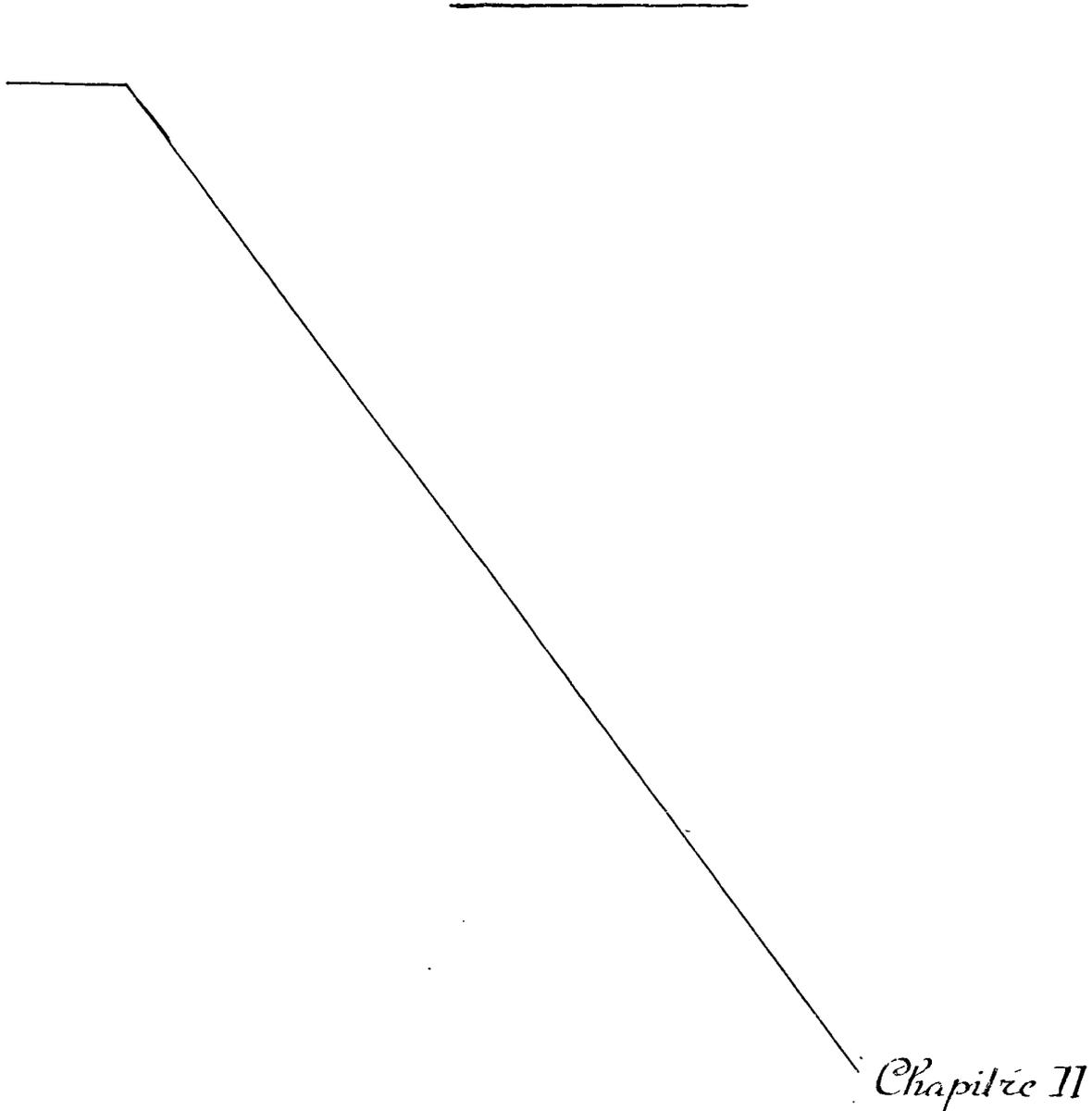
d'où :

$$\frac{P_1}{P} = \mu_1 \left(\frac{\overline{W}_1}{\lambda_1}\right)^{\frac{3}{2}} : \mu \left(\frac{\overline{W}}{\lambda}\right)^{\frac{3}{2}} = \alpha^{3 + \frac{1}{2}} = \left(\frac{\overline{W}_1}{\overline{W}}\right)^{1 + \frac{1}{6}}.$$

Mais (pour une vitesse angulaire de rotation donnée) la construction d'une hélice résistante, est d'autant

plus difficile que ses dimensions sont plus grandes.

Ces généralités bien comprises, nous allons étudier quelques types de moteurs. Les moteurs se rangent en deux grandes catégories :⁽¹⁾ les moteurs hydrauliques et les moteurs thermiques. Nous traiterons d'abord les moteurs hydrauliques.



(1) Nous ne parlons pas, dans ce cours, des moteurs électriques (Dynamos). Ces moteurs sont toujours animés par un moteur hydraulique ou thermique, soit directement, soit par une transmission électrique de force à distance.

Chapitre II.

Moteurs hydrauliques.

Motions générales.

347. Puissance d'une chute.

Les moteurs hydrauliques sont des moteurs qui sont actionnés par de l'eau courante (fleuve ou chute d'eau), issue d'un niveau plus élevé que le moteur et mise en mouvement par la pesanteur.

Le moteur [roue hydraulique ou turbine hydraulique] est constitué essentiellement par un arbre mobile autour d'un axe fixe et muni de palettes ou d'aubes. L'eau arrive sur les aubes, et par sa vitesse et ses pressions met l'arbre en mouvement, puis s'échappe.

Considérons une chute d'eau naturelle ou artificielle. Appelons niveau d'amont le niveau de l'eau avant la chute, niveau d'aval le niveau de l'eau après la chute; représentons par h la hauteur de la chute, c'est-à-dire la différence des deux niveaux. Nous supposons qu'au niveau d'amont comme au niveau d'aval, l'eau est en contact avec l'air libre, et par conséquent à la pression atmosphérique. Nous supposons de plus qu'au niveau d'amont la vitesse d'écoulement de l'eau est très faible. Soit m la masse et W le poids d'eau débités par la chute pendant l'unité de temps ($W = mg$). Si l'eau tombait en chute libre, sans rencontrer les aubes de la roue, sa vitesse V au niveau d'aval serait $\sqrt{2gh}$, l'énergie de la masse m d'eau serait $\frac{mV^2}{2} = mgh = Wh$. C'est ce qu'on exprime en disant que l'énergie débitée par la chute pendant l'unité de temps est égale à Wh , ou encore

que la puissance P de la chute est égal à $\overline{W}h$; si \overline{W} est mesurée en kilogrammes, h en mètres, cette puissance en chevaux vapeurs est $\overline{W} \frac{h}{75}$.

Par exemple, une chute d'eau débitant 100 mètres cubes d'eau par seconde et d'une hauteur de 1^m50 fournit une énergie de 150.000 kilogrammètres par seconde, soit 2.000 chevaux.

Si au niveau d'amont, l'eau a une vitesse acquise V_0 sensible, sa vitesse V en chute libre au niveau d'aval serait donnée par l'égalité

$$\overline{V}^2 = V_0^2 + 2gh ;$$

la puissance de la chute est alors

$$\begin{aligned} \frac{mV^2}{2} &= \frac{mV_0^2}{2} + \overline{W}h \\ &= \overline{W} \left(h + \frac{V_0^2}{2g} \right) \\ &= \overline{W} (h + h_0) = \overline{W}H \end{aligned}$$

h_0 étant la hauteur dont devrait tomber l'eau en chute libre pour acquérir la vitesse V_0 .

348 - Rendement du moteur.

La roue, actionnée par la chute et soumise d'autre part à un couple résistant convenable, tourne avec une vitesse uniforme pendant sa marche normale: soit τ_u le travail (chargé de signe) du couple résistant pendant l'unité de temps. Le rendement du moteur (rendement sur l'arbre) est par définition le rapport $\frac{\tau_u}{P}$; c'est si on veut, le rapport de la puissance du moteur à la puissance de la chute.

Rendement des moteurs hydrauliques.

349. - Étude général du rendement.

La discussion qui va suivre du rendement d'un moteur hydraulique s'applique quel que soit le dispositif de la machine, que l'eau tombe à l'air libre, ou qu'elle soit conduite jusqu'à la roue dans les conduites fermées ou elle est soumise à de fortes pressions, etc.

Nous supposons seulement pour fixer les idées (comme au N° 347), qu'au niveau d'amont et au niveau d'aval l'eau est en contact avec l'air libre et par conséquent à la pression atmosphérique. Appelons T_m le travail pendant l'unité de temps des forces exercées par l'eau sur les aubes de la roue (T_m est le travail mécanique moteur):

si l'arbre tournait sans frottement, T_m serait, comme on sait, égal à T_u ; en fait, T_u est un peu inférieur à T_m ⁽¹⁾. Soit, d'autre part, T_r le travail des réactions O exercées sur l'eau par les aubes de la roue. S'il n'y avait ni chocs, ni frottements, T_r serait égal à T_m ; en réalité, $T_m - T_r$ est négatif, la différence représentant le travail absorbé par les frottements et les chocs entre les aubes et l'eau; ces derniers frottements sont faibles, tandis que l'influence des chocs est très importante.

Nous supposons le régime permanent établi: autrement dit, un point géométrique fixe P qui est intérieur au liquide à l'instant t , fait partie du liquide

quel que soit t , et la vitesse du liquide en ce point est la même en grandeur, direction et sens, quel que soit t .

Considérons à l'instant t deux sections $A_0 B_0, A B$ perpendiculaires au courant, l'une en amont, l'autre en aval, et la masse μ du liquide comprise entre ces deux sections. Appliquons le théorème

des forces vives à cette masse μ entre ces instants t et $t+dt$.

À l'instant $t+dt$, la masse μ occupe la position $C_0 D_0, C D$. Le volume $C_0 D_0, A B$ est commun aux deux volumes $A_0 B_0, A B$ et $C_0 D_0, C D$, et la force vive de ce volume d'eau est

(1) Le rapport $\frac{T_u}{T_m}$ est le rendement mécanique du moteur [N° 343].

la même aux deux instants t et $t+dt$. La variation de la force vive de la masse μ est donc l'excès de la force vive du volume $ABCD$ sur celle du volume $A_0 B_0 C_0 D_0$, c'est-à-dire

$$\mathcal{E}(V^2 - V_0^2)$$

\mathcal{E} désignant la masse du volume d'eau $A_0 B_0 C_0 D_0$ (ou $ABCD$), V_0 la vitesse avec laquelle l'eau traverse la section $A_0 B_0$ et V la vitesse avec laquelle elle traverse la section AB ; ω_0 et ω sont les aires des sections $A_0 B_0$ et AB et ρ la densité de l'eau, on a :

$$\mathcal{E} = \rho \omega_0 V_0 dt = \rho \omega V dt = m dt,$$

m représentant la masse débitée pendant l'unité de temps. La variation de la force vive de la masse μ est donc, en définitive :

$$m(V^2 - V_0^2) dt.$$

D'autre part, les forces intérieures ont un travail nul [N°333] si les frottements intérieurs de l'eau sont négligeables, et s'il ne se produit pas de chocs. Les forces extérieures sont la pesanteur, les pressions extérieures [pressions sur les sections $A_0 B_0$, AB et pressions latérales], et les réactions des aubes sur l'eau dont le travail⁽¹⁾ est $-\tau_p dt$. Le travail des pressions latérales (normales au courant si on néglige la viscosité du liquide) est nul quand aucun choc ne se produit. Calculons le travail de la pesanteur et le travail des pressions qui s'exercent sur les sections $A_0 B_0$, AB .

Le travail de la pesanteur est le même⁽²⁾ que si la masse d'eau $\mathcal{E} = m dt$ avait été transportée de la position $A_0 B_0 C_0 D_0$ à la position $ABCD$; ce travail est :

$\mathcal{E}g(\zeta_0 - \zeta) = mg(\zeta_0 - \zeta) dt = W(\zeta_0 - \zeta) dt$, ζ_0 et ζ étant les hauteurs des centres de gravité de G_0 et G des volumes d'eau $A_0 B_0 C_0 D_0$ et $ABCD$. Nous supposons les sections $A_0 B_0$ et AB assez petites pour que $\zeta - \zeta_0$ se confondent sensiblement

(1) τ_p est le travail de ces réactions pendant l'unité de temps.

(2) En effet, ce travail est égal à $-\mu g dz$ (dz désignant la variation, entre les instants t et $t+dt$, du z du centre de gravité de la masse liquide μ). Or cette variation dz est la même que si la masse liquide liquide $A_0 B_0 C_0 D_0$ était passée en $ABCD$.

avec la hauteur h du niveau d'amont au-dessus du niveau d'aval et pour que la pression soit constante sensiblement en tout point de chacune de ces sections et se confonde par suite avec la pression atmosphérique.

Le travail de la pesanteur appliquée à la masse μ est donc, dans le temps dt :

$$mgh dt.$$

Le travail des pressions qui s'exercent sur la section $A_0 B_0$ est $p_a \omega_0 V_0 dt = p_a \frac{m}{\rho} dt$; celui des pressions qui s'exercent sur la section AB est: $- p_a \omega V dt = - p_a \frac{m}{\rho} dt$.

Le théorème des forces vives appliqué à la masse μ entre les instants t et $t+dt$, donne donc:

$$(1) \quad \frac{m}{2} (V^2 - V_0^2) = mgh - \mathcal{T}_r$$

D'où

$$\mathcal{T}_r = mgh + \frac{m}{2} (V_0^2 - V^2).$$

Si V et V_0 sont négligeables, \mathcal{T}_r est égal à mgh ou \overline{Wh} .
Si \overline{V} seul est négligeable,

$$\mathcal{T}_r = mg \left(h + \frac{V_0^2}{2g} \right) \\ = \overline{WH}$$

Dans les deux cas \mathcal{T}_r est égal à la puissance de la chute.

Comme $\mathcal{T}_r = \mathcal{T}_m = \mathcal{T}_u$ s'il n'y a ni chocs ni frottements entre l'arbre et l'eau ou entre l'arbre et ses pivots, on arrive à la conclusion suivante:

Quand le moteur hydraulique fonctionne sans frottements ni chocs d'aucune espèce, quand la viscosité du liquide est négligeable, et quand de plus la vitesse du courant en aval est négligeable, le travail utile \mathcal{T}_u fourni par l'arbre pendant l'unité de temps est égal à la puissance \overline{WH} de la chute: autrement dit, le rendement sur l'arbre est égal à l'unité.

350. - Cas où la pression en amont n'est pas la pression atmosphérique. - Tout ce qui précède suppose

que la pression au niveau supérieur d'amont est (comme en aval) la pression atmosphérique⁽¹⁾. Admettons maintenant que l'eau (enfermée dans des tuyaux) sorte d'un réservoir où sa pression p_0 au niveau supérieur soit plus grande que la pression atmosphérique. Rien ne sera changé dans les raisonnements du N° précédent, si ce n'est que le travail des pressions élémentaires sur la section $A_0 B_0$ sera égal à $p_0 \frac{m}{\rho}$, et le travail des pressions élémentaires sur la section AB sera $p \frac{m}{\rho}$, (p pression en AB) et l'équation (1) deviendra :

$$(2) \quad \frac{m}{2} (V^2 - V_0^2) = mgh + (p_0 - p) \frac{m}{\rho} - \mathcal{C}_r.$$

D'où, si V est négligeable et si $p = p_a$:

$$\mathcal{C}_r = mgh + \frac{mV_0^2}{2} + (p_0 - p_a) \frac{m}{\rho} = mg \left(h + \frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_0 - p_a}{\rho g} \right)$$

Posons :

$$H = h + \frac{V_0^2}{2g} + \frac{p_0 - p_a}{\rho g};$$

appelons puissance de la chute la quantité $\mathcal{W}H$, et H la hauteur fictive de la chute; H est égale à la hauteur vraie de la chute, augmentée : 1° de la hauteur $h_0 = \frac{V_0^2}{2g}$ due à la vitesse V_0 , c'est-à-dire de la hauteur dont une goutte d'eau devrait tomber librement pour acquérir la vitesse V_0 ; 2° de la hauteur $h_1 = \frac{p_0 - p_a}{\rho g}$, hauteur représentative de la pression $p_0 - p_a$, c. à. d. $\frac{p_0 - p_a}{\rho g}$ hauteur du liquide en équilibre qui exerce sur l'unité de surface de sa base la pression $p_0 - p_a$.

On donne le nom de hauteur de charge en un point d'un liquide pesant à la quantité $\frac{V^2}{2g} + \frac{p}{\rho g}$ (p étant la pression du liquide en ce point).

¹⁾ Quand on utilise de hautes chutes, l'eau est captée au niveau supérieur de la chute dans des conduites où sa pression devient considérable. On peut toujours, en remontant à l'origine de la chute, atteindre un niveau où la pression est atmosphérique, mais les frottements de l'eau dans toute la longueur des tuyaux qui rejoignent ce niveau au niveau de la roue, ont une influence notable qu'il est difficile d'évaluer. Il est préférable alors de choisir la section initiale $A_0 B_0$ en amont mais au voisinage de la roue, en tenant compte de la pression de l'eau en $A_0 B_0$.

La quantité H est égale à h augmentée de l'excès de la hauteur de charge au niveau d'amont sur la hauteur analogue au niveau d'aval où V est négligeable.⁽¹⁾

351. - Analyse de la perte de travail.

En réalité, les frottements intérieurs de l'eau, les frottements entre l'eau et les aubes et entre l'arbre et ses pivots, mais surtout les chocs entre l'eau et les aubes diminuent notablement le rendement. Analysons cette perte de rendement.

Considérons (à l'instant t) le système Σ formé par la masse d'eau μ et par la roue et ses aubes, et appliquons à ce système, entre les instants t et $t + dt$, le principe de la conservation de l'énergie. Les frottements et les chocs ^{engendrent} de la chaleur, mais une fois le régime permanent établi, l'énergie interne totale de la roue reste constante; elle cède à l'air une quantité de chaleur égale à celle que lui communique les frottements et les chocs. D'autre part, la masse d'eau $ABC'D'$ sort à une température θ plus élevée que la température θ_0 de la masse d'eau $A_0B_0C_0D_0$; de plus les chocs entre l'eau et les aubes provoquent des remous

⁽¹⁾ Si la section AB était en amont de la chute, l'équation (2) s'appliquerait, mais ζ_p serait nul. Cette équation exprime donc que la hauteur de charge en un point du liquide, augmentée de la hauteur au-dessus du niveau inférieur est constante entre le niveau supérieur et la roue, si les frottements et les chocs du liquide sur lui-même et sur les parois sont négligeables. [Théorème de Bernoulli]. La puissance H de la chute est donc indépendante de la section A_0B_0 considérée en amont. Si on remonte jusqu'au niveau supérieur h de la source où $p_0 = p_m$ et où V_0 est négligeable, H est égal à h . En réalité, à cause des frottements, H décroît si on considère des niveaux A_0B_0 de plus en plus bas en amont de la machine.

De plus, quand le tuyau de conduite présente un brusque rétrécissement, des chocs et des remous se produisent, et la hauteur de charge est notablement plus faible après le rétrécissement qu'avant [perte de charge]; H diminue brusquement.

Si on veut étudier le rendement d'un moteur hydraulique, abstraction faite des pertes de travail dues aux conduites, il faut adopter une section A_0B_0 un peu en amont de la machine et la valeur de H correspondante.

qui non seulement accroissent les frottements internes, mais communiquent à l'eau des vitesses tourbillonnaires; ces vitesses subsistent partiellement à la sortie de l'eau en aval, de sorte que la force vive de la masse $ABCD$ est supérieure à $mV^2 dt$ [$V = \frac{m}{\rho}$ désignant la vitesse moyenne de sortie]; soit $m[V^2 + V_1^2] dt$ cette force vive. Désignons par q la quantité de chaleur nécessaire pour élever de la température θ_0 à la température θ une masse d'eau égale à l'unité: la variation d'énergie interne de la masse d'eau μ entre les instants t et $t + dt$ est [en vertu de la permanence du régime] l'excès de l'énergie interne de la masse $ABCD$ sur celle de la masse $A_0 B_0 C_0 D_0$, c'est-à-dire:

$$\frac{m}{2} [V^2 + V_1^2 - V_0^2] dt + m q dt.$$

Je peux toujours représenter par $m q dt$ la quantité de chaleur cédée à l'extérieur (dans le temps dt) par le système Σ (masse d'eau μ et roue). Le principe de la conservation de l'énergie donne alors [en remarquant que le travail des forces extérieures est, d'après le même raisonnement qu'au N° 349 égal à $mgh + \frac{(\rho_0 - \rho_a)m}{\rho} - \tau_u$]:

$$(1) \quad \frac{m}{2} [V^2 + V_1^2 - V_0^2] + m q = mgh + (\rho_0 - \rho_a) \frac{m}{\rho} - \tau_u$$

d'où

$$\begin{aligned} \tau_u &= mgh - \frac{m}{2} [V^2 + V_1^2] - m(q + q_1) \\ &= W [H - \eta], \end{aligned}$$

où

$\eta = \frac{1}{g} \left[\frac{V^2 + V_1^2}{2} + q + q_1 \right]$. La quantité η est appelée perte de hauteur de chute.

Le but qu'on devra se proposer est de diminuer η ; il faudra pour cela autant que possible atténuer les chocs et réduire la force-vive de l'eau à sa sortie.

352. - Discussion de l'effet des chocs.

Supposons d'abord que la roue hydraulique soit garnie de palettes plantées normalement à la roue et sur lesquelles vient s'écraser l'eau, lancée tangentielllement à la roue.

Soit $\varepsilon = m dt$ la masse d'eau qui passe entre les instants t et $t + dt$, et \bar{v} la vitesse avec laquelle elle arrive sur une palette, \bar{u} sa vitesse après le choc vitesse qui est sensiblement égale en grandeur et sens à celle du point coïncidant de la palette. On peut décomposer les actions de l'eau sur la roue en une suite de petits chocs; dans un de ces chocs, la masse ε passe brusquement à l'instant t de la vitesse v à la vitesse u , et la vitesse angulaire ω de la roue s'accroît instantanément de la petite quantité $d\omega$, que les résistances lui font perdre entre les instants t et $t + dt$. La percussion subie par la masse ε est de sens contraire au sens de v et u , et égale en valeur absolue à $\varepsilon(v - u)$; la percussion subie par la roue, est égale et directement opposée à la précédente, et si $\Delta\omega$ est la petite variation de vitesse angulaire de la roue, on a :

$$(2) \quad MK^2 \Delta\omega = \varepsilon(v - u), \quad (MK^2 \text{ moment d'inertie de la roue autour de son axe})$$

la perte totale de force-vive produite par le choc est :

$$(3) \quad -MK^2 \left\{ (\omega + \Delta\omega)^2 - \omega^2 \right\} + \varepsilon(v^2 - u^2)$$

c'est-à-dire en tenant compte de (2) :

$$\varepsilon \left\{ (v^2 - u^2) - 2(\omega + \Delta\omega) \ell(v - u) \right\} + \frac{\varepsilon^2 \ell^2}{MK^2} (v - u)^2$$

ou encore en négligeant les termes en ε^2 et en remplaçant $\ell(\omega + \Delta\omega)$ par u :

$$(4) \quad \varepsilon(v - u)^2.$$

De plus, la masse ε sort avec une vitesse u ; entre les instants t et $t + dt$, la force-vive perdue par le choc ou non utilisée est donc :

$$\varepsilon(v^2 + 2u^2 - 2vu) = m(v^2 + 2u^2 - 2vu) dt.$$

Le théorème des forces vives appliqué au système eau et roue (comme tout à l'heure le principe de l'équivalence)

donne :

$$\frac{m}{2} (V^2 + 2u^2 - 2uV) - \frac{m}{2} V_0^2 = mgh + \frac{m}{\rho} (p_0 - p_a) - \mathcal{E}_u,$$

$$\text{D'où : } \mathcal{E}_u = mgh - \frac{m}{2} (V^2 + 2u^2 - 2uV);$$

le rendement \mathcal{P} est égal à :

$$1 - \frac{V^2 + 2u^2 - 2uV}{2gH}.$$

Or on a (théorème de Bernoulli, note 1, p.351) :

$$V^2 = V_0^2 + 2gh + \frac{p_0 - p}{\rho}$$

Or l'eau arrive ici à la pression atmosphérique, $p = p_a$, d'où $V^2 = 2gH$; V étant ainsi donné, le maximum de \mathcal{P} est atteint pour $u = \frac{V}{2}$, et il est égal à :

$$1 - \frac{1}{2} \frac{V^2}{2gH} = \frac{1}{2}.$$

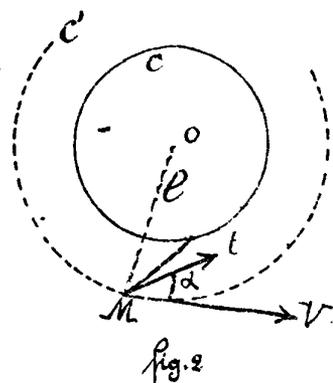
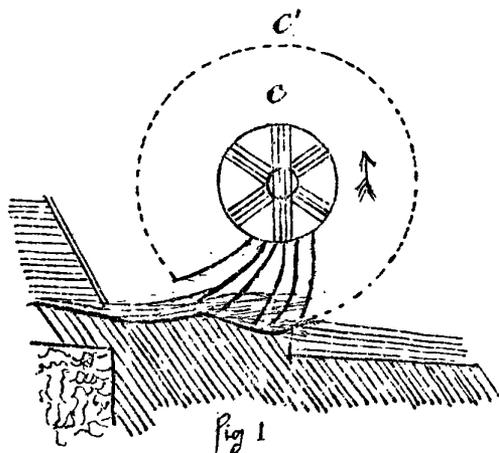
Le rendement optimum est donc égal à $\frac{1}{2}$ et correspond à u (ou ω) = $\frac{V}{2}$.

En réalité, le calcul précédent n'est que grossièrement approché, car nous n'avons pas tenu compte des frottements, et d'autre part nous avons admis que l'eau s'échappe avec la vitesse u , négligeant ainsi les vitesses tourbillonnaires et les fuites. Nous devons donc nous attendre à trouver dans la réalité un rendement moindre que $\frac{1}{2}$.

353 - Influence des aubes.

Au lieu de recevoir l'eau sur des palettes, on peut la recevoir sur des aubes courbes calculées de façon à diminuer l'importance des chocs. C'est le perfectionnement principal apporté par Toncellet aux roues hydrauliques. L'eau arrive tangentielllement à la circonférence extérieure C' de la roue (fig.1), et après avoir frappé une aube, monte puis redescend en glissant le long de cette aube et l'abandonne.

Soit α l'angle sous lequel l'aube coupe la circonférence extérieure C' de la roue, v la vitesse de la masse d'eau E à son arrivée sur l'aube au point M , u la vitesse du point M de l'aube. La vitesse v et la vitesse u ont même direction et sens. La vitesse relative $v-u$ de



l'élément d'eau \mathcal{E} par rapport au point M de l'aube a une composante normale à l'aube, à savoir $(V-u)\sin\alpha$, laquelle est détruite, et une composante tangente à l'aube, à savoir $(V-u)\cos\alpha$, qui est la vitesse initiale de glissement de l'élément d'eau \mathcal{E} sur l'aube. Calculons la perte de force vive due au choc.

Décomposons, comme dans le N.º précédent, les vitesses de l'eau en une suite de petits chocs : l'élément d'eau \mathcal{E} subit une percussion normale à l'aube et égale à $\mathcal{E}(V-u)\sin\alpha$; inversement, la roue subit une percussion dont le moment par rapport à l'axe de la roue est

$$\mathcal{E}l\sin^2\alpha(V-u).$$

La force vive perdue par l'eau et la roue est, d'après le même calcul qu'au N.º 352,

$$\mathcal{E}\sin^2\alpha(V-u)^2 + 2\mathcal{E}\sin^2\alpha(u-V)u + \mathcal{E}^2(\dots) = \mathcal{E}(V-u)^2\sin^2\alpha$$

en négligeant les termes en \mathcal{E}^2 .

Considérons maintenant le mouvement relatif de l'élément d'eau \mathcal{E} par rapport à l'aube. On peut regarder le mouvement de l'aube comme sensiblement rectiligne et uniforme pendant le temps très court durant lequel l'élément d'eau \mathcal{E} reste intérieur au même auge. Le mouvement relatif de la masse \mathcal{E} est donc celui d'un point pesant qui glisserait sur l'aube fixe, sa vitesse initiale [dirigée selon Mt , fig. 2] étant $(V-u)\cos\alpha$: dans ce mouvement (où on néglige le frottement de l'eau sur l'aube) l'élément \mathcal{E} s'élève le long de l'aube, puis redescend, revient à l'extrémité M de l'aube avec une vitesse égale et opposée

à sa vitesse initiale $(V-u)\cos\alpha$, et s'échappe. Sa vitesse absolue v' , quand il s'échappe, est la résultante [fig. 3] de la vitesse relative $(V-u)\cos\alpha$, et de la vitesse d'entraînement u du point M de l'aube; elle est donnée, en grandeur, par la relation:

$$v'^2 = (V-u)^2 \cos^2 \alpha + u^2 - 2(V-u)u \cos^2 \alpha$$

et la force-vive non utilisée correspondante est $\mathcal{E}v'^2$.

La somme des forces vives perdue et non utilisée est donc, pour la masse \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} \left\{ (V-u)^2 \sin^2 \alpha + (V-u)^2 \cos^2 \alpha + u^2 - 2(V-u)u \cos^2 \alpha \right\} \\ = \mathcal{E} \left\{ (V-u)^2 + u^2 - 2(V-u)u \cos^2 \alpha \right\};$$

pendant l'unité de temps, la somme des forces-vives perdue et non utilisée est donc

$$m \left\{ (V-u)^2 + u^2 - 2(V-u)u \cos^2 \alpha \right\}$$

et si on néglige les autres influences (frottements, etc) qui diminuent encore le rendement, on voit (comme au N° 352) que le rendement P est donné par la formule:

$$(5) \quad P = 1 - \frac{(V-u)^2 + u^2 - 2(V-u)u \cos^2 \alpha}{2gH}$$

Si nous faisons varier u seul, le maximum de P correspond à $u = \frac{V}{2}$, et a pour valeur

$$(6) \quad P = 1 - \frac{1}{2} \frac{V}{2gH} \sin^2 \alpha = 1 - \frac{\sin^2 \alpha}{2} \quad (\text{puisque } V^2 = 2gH)$$

Si $\alpha = 90^\circ$, on a: $P = \frac{1}{2}$, valeur déjà trouvée pour les aubes planes.

Si $\alpha = 0$, le rendement est maximum et égal à l'unité. Mais d'une part nous avons négligé les frottements, et d'autre part nous n'avons pas tenu compte de ce fait que l'eau en redescendant le long des aubes est gênée par celle qui se présente pour monter, et il en résulte nécessairement des vitesses tourbillonnaires dont l'influence est sensible. Enfin, il est matériellement impossible de faire $\alpha = 0$, parce que l'eau ne pénétrerait pas dans les aubes. Pour les basses chutes, (chutes dont la hauteur

n'exède pas 1 mètre 30), les expériences de Poncel ont montré que le meilleur rendement s'obtient en prenant $\alpha = 30^\circ$:

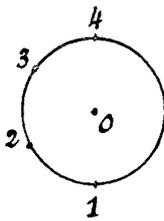
la formule (6) donne pour $\alpha = 30^\circ$,

$$P = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha = 0,875$$

valeur un peu supérieure (ainsi qu'on devait s'y attendre) à celle que donne l'expérience.

Pour les hautes chutes, c'est-à-dire pour les grandes valeurs de v , on peut prendre α inférieur à 30° . Le calcul de la forme des aubes d'après la vitesse d'arrivée de l'eau est un problème d'hydraulique des plus compliqués, ou la théorie doit constamment faire appel à l'expérience. Mais une règle pratique à laquelle a conduit la discussion précédente, c'est que l'eau doit arriver tangentiellement à la circonférence extérieure de la roue avec une vitesse sensiblement double de la vitesse des points de cette circonférence.

Description de quelques roues hydrauliques.



Suivant que l'eau arrive sur la roue en l'un des points, 1, 2, 3 ou 4, on a:

cas 1, une roue en dessous

cas 2, ——— de côté

cas 3, ——— de poitrine

cas 4, ——— en dessus ..

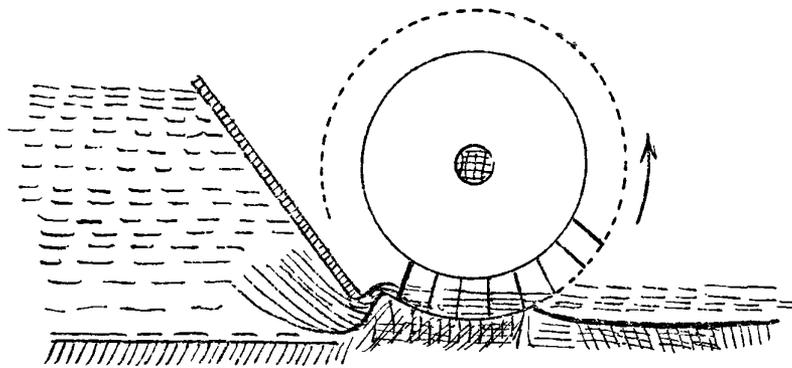
354 - Roues en dessous.

La roue en dessous est une roue mobile autour d'un axe horizontal, et qui, sur tout son contour extérieur, est munie de palettes ou d'aubes. Cette roue est disposée en avant d'une vanne qu'on lève d'une certaine quantité pour laisser l'eau couler par sa partie inférieure; l'eau sort de la vanne avec la vitesse due à la hauteur du niveau d'arrivée au-dessus de l'orifice: un coursier⁽¹⁾ horizontal

(1) On appelle coursier le lit artificiel, en général maçonné, où l'eau doit couler pendant son contact avec la roue.

ou légèrement incurvé l'amène sous la roue qui est enfermée entre deux murs latéraux.

Les chocs et les pressions de l'eau sur la roue lui communiquent une vitesse de rotation qui dépend des résistances que la roue doit surmonter. Si les aubes sont planes et plantées normalement sur la roue [roue à palettes], l'expérience montre que le meilleur rendement



s'obtient quand la vitesse u de la roue, mesurée à sa circonférence, est égale aux $\frac{45}{100}$ de la vitesse d'arrivée v de l'eau sur les aubes (vitesse sensiblement tangente à la circonférence de la roue): le rendement ne dépasse pas alors 0,30. [D'après la

discussion du N° 352, le rendement maximum devrait se s'obtenir pour $u = \frac{v}{2}$, et atteindre $\frac{1}{2}$]:

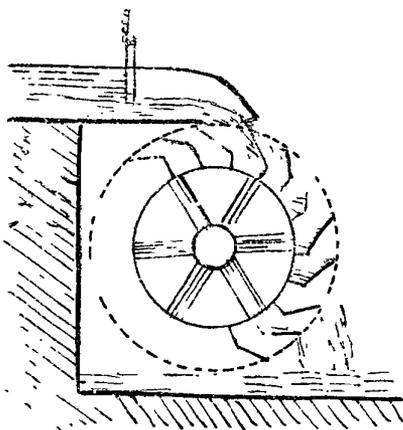
On améliore notablement le rendement en remplaçant les palettes par des aubes courbes (roues Louchelet) qui font un petit angle α avec la circonférence extérieure de la roue. Le rendement, pour les basses chutes, est maximum quand $\alpha = 30^\circ$ et $u = 0,55 v$; il est alors égal à 0,60. D'après la discussion du N° 353, le rendement devrait être maximum pour $u = \frac{v}{2}$, et être égal à 0,875 quand $\alpha = 30^\circ$.

355. - Roues en dessus.

Imaginons deux cylindres de révolution concentriques creux, en bois par exemple, limités par deux bases solides assez rapprochées (soit deux planches), et divisons l'espace annulaire (extérieur au petit cylindre) ainsi limité, en capacités égales (augets) par des cloisons cylindriques dont les arêtes sont parallèles à l'axe des cylindres. Supprimons enfin la surface latérale du grand cylindre. Nous obtenons ainsi la roue à augets ou roue de moulin

qu'on emploie comme roue en dessus. La roue est mobile autour d'un axe horizontal et met en mouvement un arbre moteur.

L'eau sortant du bief d'amont par un vannage, est dirigée sur une certaine étendue par un coursier rectiligne légèrement incliné qui l'amène sur le sommet de la roue. L'eau ne prend alors dans ce coursier que la vitesse nécessaire pour atteindre la roue et elle tombe, en nappe parabolique, dans les augets qu'elle remplit suc-



cessivement à mesure que, par le mouvement de la roue, ils se présentent à l'extrémité du coursier. Lorsque les augets arrivent à la partie inférieure de la roue, l'eau en sort pour tomber dans le bief d'aval et les augets remontent vides pour se remplir de nouveau à la partie supérieure. C'est le poids de l'eau ainsi contenue dans une moitié de la roue qui détermine son mouvement et qui surmonte les résistances.

Par suite de la rotation de la roue, la surface de l'eau, considérée comme étant en équilibre dans les augets, n'est pas horizontale.

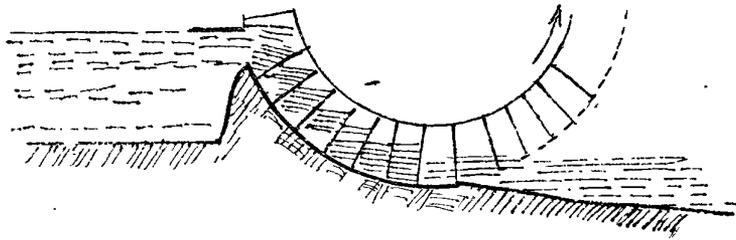
Comme nous le verrons en hydrostatique, sa surface libre est un cylindre de révolution autour de la droite horizontale parallèle à l'axe OZ de la roue et située dans le plan vertical de OZ à une hauteur égale à $\frac{g}{\omega^2}$ au-dessus de OZ (ω vitesse angulaire de la roue).

De là le phénomène connu sous le nom de déversement anticipé ..

Les roues en dessus doivent être employées pour les chutes dont la hauteur est comprise entre 2,50 et 10 mètres; quand elles tournent lentement, leur rendement peut atteindre 0,80, mais quand la vitesse à la circonférence dépasse 2 mètres, le rendement descend rapidement et peut s'abaisser à 0,40.

356. - Roues de côté.

La roue de côté est une roue à aubes planes ou courbes qui est emboîtée dans un coursier circulaire entre deux murs verticaux et qui reçoit l'eau, latéralement, à la partie supérieure de ce coursier. Elle tient à la fois de la roue en dessous et de la roue en dessus, l'eau agit d'abord sur les aubes par sa vitesse au moment où elle entre dans la roue, puis elle est maintenue entre ces aubes par le coursier et elle agit par son poids jusqu'à ce qu'elle soit arrivée à la partie inférieure. Les roues de



côté doivent être employées pour les chûtes dont la hauteur varie de 1^m 30 à 2^m 50. En pratique, on s'arrange de manière que la vitesse, à la circonférence de la roue

reste comprise entre 1 et 2 mètres et soit les 0,45 de la vitesse de l'eau à l'arrivée sur les aubes. Le rendement varie de 0,50 à 0,70.

Turbines hydrauliques.

357. - Dans les dispositifs précédents, l'eau est libre à son arrivée sur la roue et s'échappe librement après avoir frappé la roue : les trajectoires de l'eau présentent des rebroussements, forment de gerbes, en un mot manifestent, par toutes leurs singularités, l'influence des chocs.

Mais si l'eau provient d'une haute chute et arrive avec une grande vitesse, ces chocs, en outre de la perte d'énergie qu'ils entraînent, sont désastreux pour la solidité et la régularité de l'appareil. Il est donc indispensable de parer à ces inconvénients : à cet effet, l'eau est guidée à son arrivée sur la roue par des tuyères ou des directrices fixes, que prolongent en quelque sorte les aubes des roues ; avant et pendant son contact avec la roue, l'eau glisse ainsi dans de véritables canaux qui lui imposent des trajectoires bien

régulières, calculées de façon à rendre son action moins brusque, plus prolongée et plus continue. Les roues hydrauliques ainsi amenuisées ont reçu le nom général de turbines. Entre les anciennes roues hydrauliques où l'eau arrive et sort librement, et les turbines parfaites où l'eau est guidée rigoureusement, il existe une foule de types intermédiaires, entre lesquelles on ne saurait établir de démarcation tranchée. Ses premières turbines avaient en général leur axe vertical tandis que les roues hydrauliques vulgaires ont en général leur axe horizontal, mais c'est là une disposition qui n'a rien d'essentiel. La plupart des turbines récentes attelées à des dynamos, ont leur arbre horizontal.

358. - Turbines à impulsion et turbines à réaction.

Une turbine se compose essentiellement d'une roue mobile autour d'un axe fixe et munie d'aubes : l'eau sort d'un réservoir (distributeur) guidée par des tuyères ou des ajutages qui font face aux aubes. Mais deux modes de fonctionnement généraux sont possibles : ou bien l'eau sort du réservoir à la pression du milieu extérieur et avec une grande vitesse ; ou bien l'eau pénètre avec une faible vitesse mais sous une forte pression dans les canaux de la roue mobile. Dans le premier cas, l'eau agit par sa vitesse, et la condition $u = \frac{V}{2}$ (N° 353) implique une rotation rapide de la turbine. La turbine est dite alors turbine à impulsion ou à action. Dans le second cas, l'eau agit par sa pression : la turbine est dite à réaction.

- Turbines à libre déviation. - Deux classes de turbines à impulsion sont à distinguer, suivant que la turbine fonctionne dans l'air ou est noyée dans l'eau. Si la turbine fonctionne dans l'air, l'air circule dans les aubages où la pression est partout la pression atmosphérique. La veine d'eau ne remplit pas en général les canaux de la roue mobile ; elle s'appuie et s'étale librement sur la face d'une aube sans toucher le dos de l'aube voisine, d'où le nom de turbine à libre déviation (de l'eau) donné à ces turbines. Il est nécessaire, pour permettre ce mode de fonctionnement d'assurer la ventilation de la turbine.

Dans ces conditions, il n'y a pas d'inconvénient à ce que le distributeur ne s'étende que sur un secteur de la

roue : la turbine est dite alors à injection partielle ; dans le cas des très hautes chûtes, le distributeur est souvent réduit à une buse unique. — Si le distributeur s'étend sur toute la périphérie de la roue, la turbine est dite à injection totale.

Turbines à veine moulée. — Lorsqu'une turbine à impulsion est noyée, il faut que les canaux de la roue mobile soient calculés de façon que la veine liquide qui y pénètre épouse exactement la forme du canal : sinon, l'eau d'aval refluerait dans ces canaux, il y aurait des remous, des tourbillons ; d'où un mauvais rendement. Pour la même raison, il est impossible que la turbine soit à injection partielle. Ces turbines sont dites souvent turbines à veine moulée.

Turbines à réaction. — L'eau pénètre sous une forte pression dans les canaux d'une telle turbine, et les remplit exactement d'elle-même sans qu'il soit nécessaire de mouler la veine. Ces turbines fonctionnent nécessairement noyées et ne peuvent être qu'à injection totale.

Remarquons que les turbines à veine moulée et constituent comme une classe de passage entre les turbines à réaction et les turbines à libre déviation ; car ce sont d'une part des turbines à impulsion comme ces dernières, et d'autre part elles sont noyées et remplies d'eau comme les turbines à réaction. C'est pourquoi on les appelle souvent turbines limites. La difficulté de calculer leurs aubes leur fait préférer aujourd'hui les turbines à faible réaction, qui comportent les mêmes emplois.

Nous pouvons résumer cette classification ainsi :

Turbines à réaction (noyées, injection totale) ;

Turbines à impulsion { à veine moulée (noyées, injection totale)
à libre déviation { injection totale
injection partielle.

359 — Turbines axiales ou hélicoïdes, turbines centrifuges, turbines centripètes. — La classification précédente est relative au mode de fonctionnement ; au point de vue

du dispositif, chacune des turbines précédentes peut appartenir à un des trois types suivants. Pour plus de clarté, nous décrivons ces types en supposant vertical l'axe de la turbine.

Turbines axiales ou parallèles ou hélicoïdes. - Le distributeur est situé au dessus (ou au dessous) de la turbine, et l'eau s'échappe parallèlement à l'axe de la roue pour actionner ses aubes; d'où le nom de turbine axiale ou parallèle. En réalité, par suite du guidage, l'eau sort du distributeur suivant une sorte d'hélice tracée sur un cylindre de révolution dont l'axe est l'axe de la roue. D'où le nom de turbine hélicoïde. On peut dire encore que l'eau pénètre dans une telle turbine avec une vitesse normale au rayon.

Turbines centrifuges. - La roue entoure le distributeur d'où l'eau s'échappe latéralement en s'éloignant de l'axe.

Turbines centripètes. - Le distributeur entoure la roue, et l'eau s'échappe latéralement de distributeur en se rapprochant de l'axe.

Ces deux dernières espèces de turbines sont souvent dites radiales, parce que l'eau pénètre dans la turbine \circ suivant un rayon, soit en s'écartant du centre soit en s'en rapprochant.

Enfin certaines turbines qui participent à la fois du type radial et du type axial sont dites turbines mixtes.

L'extrême variété des types de turbines tient d'abord à la variété même de leurs applications: les chûtes qui les animent peuvent être très différentes, depuis les minces chûtes très rapides jusqu'aux larges chûtes très lentes; d'autre part, suivant les cas, il est avantageux que la turbine tourne vite ou lentement. Mais la variété des turbines tient aussi à l'insuffisance même de leur théorie, et aux innombrables tâtonnements empiriques qui suppléent à cette insuffisance.

La première turbine vraiment industrielle a été la turbine Fontaine [turbine limite parallèle] dont l'idée remonte à Euler. La première turbine de haute chute est la turbine Tourneyron (turbine centrifuge à réaction); une telle turbine, dont le diamètre n'était que de 0^m 55,

(¹) La première turbine Tourneyron a été construite en 1831.

fut établie sous une chute de 108^{mètres} à la vitesse de 2300^{tours} par minute et utilisant $75/100$ de la puissance de la chute égale à 40 chevaux.

Les turbines employées aujourd'hui pour les chutes puissantes et régulières sont surtout des turbines à réaction (turbine hélicoïde de Jonval, turbine centrifuge de Fourneyron, turbine centripète de Francis⁽¹⁾ ou turbine américaine). C'est par de telles turbines, et notamment par des turbines Fourneyron de 5.000 chevaux, que sont captés les 600.000 chevaux du Niagara.

Mais les turbines à libre déviation (telles que les turbines, Girard) sont également très employées, surtout pour les chutes à débit variable. Leur rendement maximum, un peu inférieur à celui des turbines à réaction est de 75%. La roue Pelton qui convient aux hautes chutes de faible débit, peut être regardée comme une turbine à libre déviation, hélicoïde, à axe horizontal; l'eau s'échappe avec une très grande vitesse, soit V , par des tuyères dans une direction tangente à la circonférence de la roue, et rencontre sous un très petit angle les aubes de la roue. L'expérience confirme le résultat du N° 353; le rendement est le meilleur quand u (vitesse périphérique de la roue) = V . On voit que la roue Pelton tout à la fois de la turbine et de la roue Poncelet. — Enfin, certaines turbines, mixtes à libre déviation, qu'on peut appeler turbines genre Pelton, sont aussi d'une application fréquente.

Comme exemples, nous décrivons la turbine Fourneyron et la turbine Fontaine.

360. — Turbine Fourneyron. [Portefeuille, Planche V]. — Un réservoir cylindrique $E.F$, d'axe vertical, rempli d'eau [distributeur] présenté vers le bas des ouvertures latérales BB (fentes verticales); une roue, dont l'axe CT coïncide avec celui du cylindre, entoure la partie inférieure du réservoir et offre ses aubes AA , toutes orientées de la même manière, aux nappes d'eau qui s'échappent. La turbine est radiale et centrifuge: l'eau rayonne en quelque sorte à partir de l'axe.

(1) C'est en France, à la poudrerie du Bouchet, que ce type de turbine a été construit pour la première fois, mais c'est l'ingénieur américain Francis qui l'a perfectionné et en a développé l'emploi.

En fait, on guide l'eau avant sa sortie, à l'intérieur du réservoir, à l'aide de cloisons dont la courbure est de sens contraire à celle des aubes de la roue; l'eau, par suite ne sort pas normalement au cylindre, mais sa vitesse fait un petit angle avec la normale au cylindre. Les aubes de la roue et les aubes du réservoir sont des surfaces cylindriques, à génératrices verticales, dont les sections horizontales sont représentées sur la fig. 2.

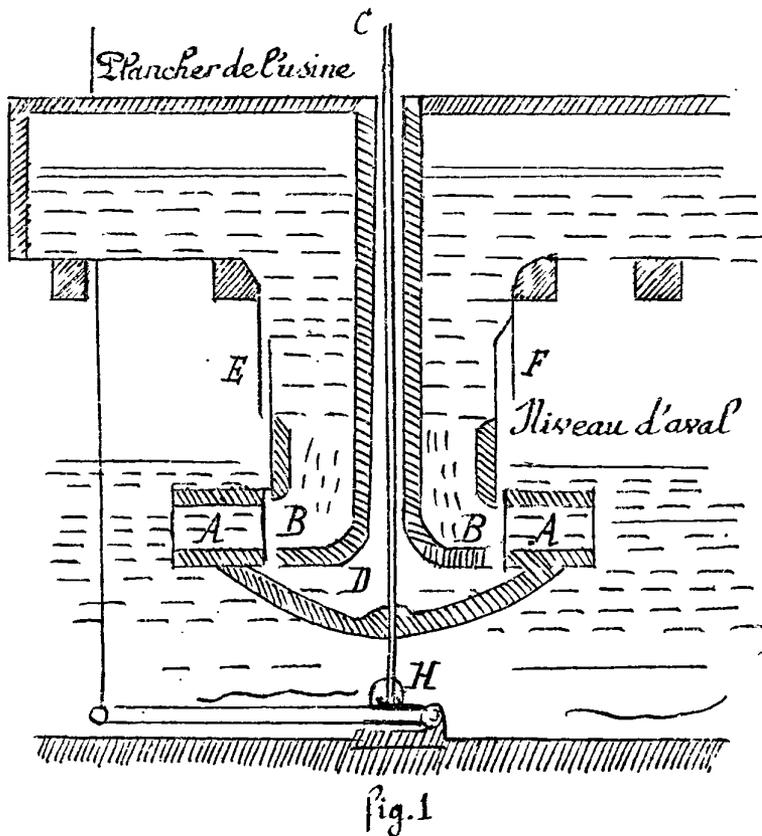


fig. 1

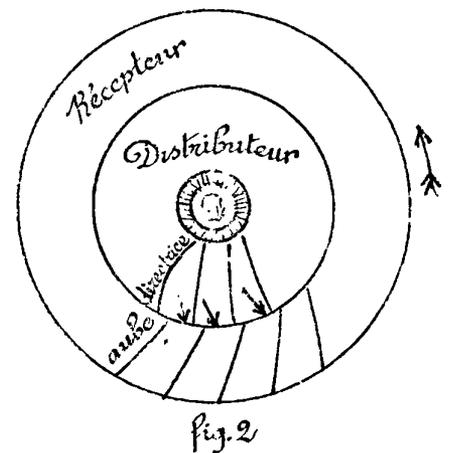
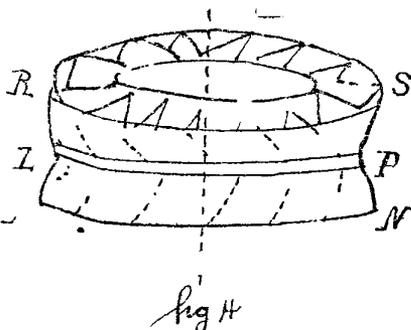
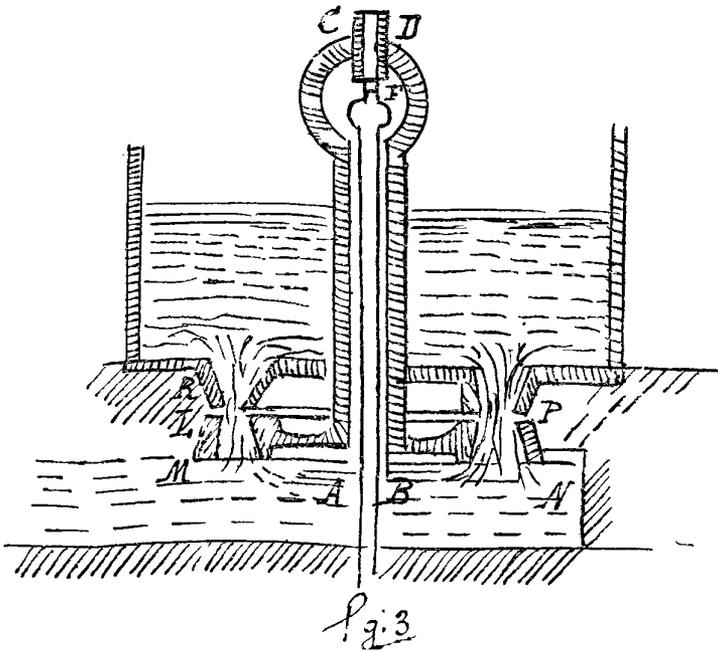


fig. 2

La turbine, entièrement immergée dans l'eau d'aval, est reliée à son arbre CD par une salotte de fonte D . L'arbre vertical CD passe à l'intérieur d'un tuyau creux qui traverse le réservoir en sorte que la partie inférieure de l'arbre est seule immergée. L'extrémité inférieure H de l'arbre repose sur un levier qu'on peut manier de l'extérieur de façon à disposer la turbine exactement en face des aires non obturées des orifices du distributeur. Enfin, dans le réservoir, une vanne mobile verticalement obture plus ou moins ces orifices, ce qui permet de régler arbitrairement le débit.

Cette turbine s'adapte parfaitement à toutes les hauteurs de chûtes. Son rendement qui varie très peu avec la vitesse de régime atteint 0,80 pour les hautes chûtes et est encore égal à 0,75 pour une chûte de 1^m15 et à 0,60 pour une chûte de 0^m30. Néanmoins, et malgré les très beaux exemples du Niagara, ce type de turbine ne se construit plus qu'assez rarement : pour les chûtes moyennes le rendement maximum des autres turbines à réaction semble un peu supérieur (80% pour les turbines centrifètes, 78% pour les turbines parallèles, au lieu de 75% pour les turbines centrifètes.

361. - Turbine Fontaine. [Portfeuille Planche V] Imaginons un réservoir cylindrique rempli d'eau et dont la base est percée, vers sa périphérie, d'orifices égaux et également espacés. L'eau s'échappe de haut en bas parallèlement



à l'axe; elle rencontre les aubes I, M, P, N d'une roue [fig 3] dont l'axe vertical coïncide avec l'axe du réservoir cylindrique, et qui est disposée au-dessous du réservoir, de sorte que ses aubes fassent face aux orifices du réservoir. En réalité ces orifices sont prolongés par des sortes d'ajutages R, L, S, P qui guident l'eau avant qu'elle ne rencontre la roue et dont la courbure est opposée

à celle des aubes de la roue, [fig. 4]. Le bec du réservoir, prolongé par les ajutages, constitue le distributeur. La roue et sa couronne d'aubes constituent le récepteur.

La roue est reliée à son arbre par une calotte sphérique: cet arbre

$ABCD$ est creux, et enveloppe un arbre fixe EF qui repose sur le fond du bief d'aval. La tête F de cet arbre fixe forme crapaudine, et c'est sur cette crapaudine que l'arbre mobile $ACDB$ repose par un pivot, qui se trouve ainsi hors de l'eau.

Chaque orifice du distributeur est muni d'une vanne spéciale à l'aide de laquelle on peut le fermer plus ou moins : une couronne réunit les extrémités supérieures des tiges verticales de ces vannes, et est soutenue elle-même par des tringles qui permettent de la faire monter ou descendre, ce qui fait varier la largeur des ouvertures par lesquelles l'eau peut s'écouler.

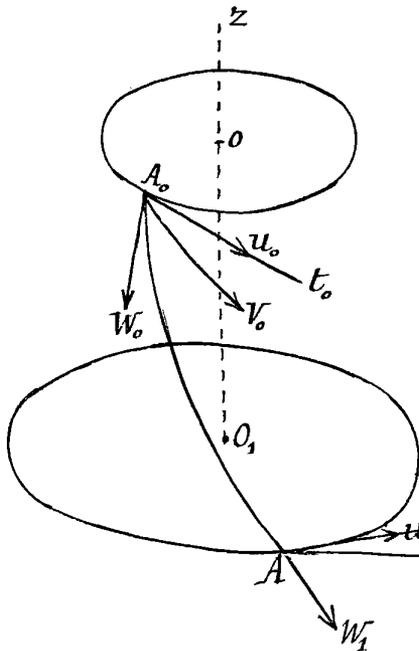
Éléments de la théorie des turbines.

362.- L'étude théorique des turbines est fort compliquée. Si on peut discuter assez aisément les conditions d'entrée et de sortie de l'eau (entrée qui doit être sans choc et sortie qui doit être presque sans vitesse), il est très difficile d'analyser les phénomènes qui se passent dans les conduits de la turbine et d'évaluer les pertes de force vive ou de charge dues aux remous, chocs et frottements intérieurs, aux élargissements brusques des filets liquides dans les turbines à impulsion, etc.

Voici pourtant quelques considérations simples qui permettent d'évaluer approximativement le couple moteur.

363.- Formule d'Euler.

Admettons, pour fixer les idées, que l'axe de la turbine soit vertical; soit O la circonférence horizontale sur laquelle sont distribués les orifices d'entrée de la turbine, et O_1 la circonférence horizontale sur laquelle sont distribués les orifices de sortie et que nous supposons au-dessous de O . Chaque tuyère qui guide l'eau à l'intérieur de la turbine part d'un point tel que A_0 de la circonférence O et aboutit à un point tel que A_1 de la circonférence O_1 . Le mouvement de l'eau par rapport aux axes fixes [mouvement que nous appellerons absolu] est la résultante du mouvement relatif de l'eau dans la turbine [mouvement où l'eau décrit comme trajectoire un canal A_0A_1] et du mouvement de rotation de la tuyère (liée à la turbine) autour de l'axe O, O_1 .



Preons comme sens positif sur l'axe O, O le sens ascendant O, Z et considérons la demitangente $A_0 t_0$ (ou $A_1 t_1$) menée en A_0 (ou A_1) à la circonférence O (ou O_1) dans le sens positif des rotations. La vitesse u_0 de l'élément A_0 de la turbine, comptée positivement suivant $A_0 t_0$, est égale à $\rho_0 \omega$, si ω représente en grandeur et signe la vitesse angulaire de la turbine autour de OZ , et ρ_0 le rayon de la circonférence O . De même la vitesse u_1 de l'élément A_1 de la turbine est égale à $\rho_1 \omega$.

D'autre part, soit \bar{W}_0 et \bar{W}_1 la vitesse relative de l'eau dans la turbine, à l'entrée et à la sortie; soit α_0, β_0 les angles sous lesquels une des tuyères de la turbine coupe la circonférence d'entrée O et la verticale: d'une façon précise, α_0 et β_0 sont les angles de \bar{W}_0 [vecteur tangent en A_0 à la tuyère] avec $A_0 t_0$ et la verticale descendante. De même α_1, β_1 sont les angles de \bar{W}_1 avec $A_1 t_1$ et la verticale descendante.

Ceci posé, la vitesse absolue \bar{V}_0 de l'eau à l'entrée α_0 comme composante a_0 tangente à la circonférence O (et comptée positivement dans le sens $A_0 t_0$):

$$(1) \quad a_0 = \omega \rho_0 + W_0 \cos \alpha_0$$

et comme composante verticale b_0 comptée dans le sens descendant:

$$(2) \quad b_0 = W_0 \cos \beta_0$$

De même, la vitesse absolue \bar{V}_1 de l'eau à la sortie α_1 comme composante a_1 tangente à la circonférence O_1 :

$$(3) \quad a_1 = \omega \rho_1 + W_1 \cos \alpha_1,$$

et comme composante verticale b_1 , comptée dans le sens descendant:

$$(4) \quad b_1 = W_1 \cos \beta_1.$$

364. — Ces remarques faites, supposons le régime permanent établi: il sort, dans le temps dt , de la turbine, une

masse d'eau $\varepsilon = m dt$, et il y entre une masse d'eau égale $\varepsilon_0 = m dt$. Considérons la masse d'eau μ qui, à l'instant t , est intérieure à la turbine et appliquons à ce système μ entre les instants t et $t + dt$, le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport à l'axe O, O . En vertu de la permanence du régime, la variation du moment cinétique (par rapport à O, O) du système μ est égal à l'excès du moment de la masse ε , sur le moment de la masse ε_0 . Or le moment cinétique (par rapport à O, O) de ε (ou de ε_0) est égal à :

$$\varepsilon_1 a_1 r_1 = m a_1 r_1 dt \quad (\text{ou à } \varepsilon_0 a_0 r_0 = m a_0 r_0 dt).$$

La variation du moment cinétique (par rapport à O, O) du système μ , entre les instants t et $t + dt$, est donc :

$$m(a_1 r_1 - a_0 r_0) dt,$$

m désignant le débit de la turbine (masse d'eau qui entre dans la turbine pendant l'unité de temps).

D'autre part, les forces extérieures qui, à l'instant t , sont appliquées à la masse μ , sont la pesanteur, les pressions sur les sections horizontales d'entrée et de sortie de l'eau (toutes forces verticales), enfin les réactions des tuyères de la turbine sur l'eau. Ces dernières forces donnent seules un moment, soit $-N$, par rapport à l'axe O, O , et [en vertu du principe de l'action et de la réaction] ce moment est égal et directement opposé à l'axe du couple moteur ⁽¹⁾ [couple exercé par l'eau sur la turbine]. Le théorème des moments appliqué à l'axe O, O et à la masse μ donne donc :

$$(5) \quad m(a_1 r_1 - a_0 r_0) = -N, \text{ ou bien } N = m(a_0 r_0 - a_1 r_1),$$

l'axe N du couple moteur étant compté positivement dans le sens O, O . Cette formule remonte à Euler.

365. Application aux turbines à réaction. - Les quantités a_0 et a_1 sont faciles à calculer pour les turbines entièrement remplies d'eau (turbines à réaction et turbines

(1) Ce couple moteur est un peu supérieur (par suite des frottements des pivots) au couple résistant N' qu'il faut appliquer à l'arbre pour que sa rotation demeure uniforme : si V est le moment par rapport à OZ des réactions des pivots sur l'arbre, on a : $N = N' + V$; ces trois quantités ont le même signe que ω .

limites). On connaît, en effet, les sections des tuyères par les plans horizontaux 0 et 0_1 , par suite les surfaces σ_0 et σ_1 d'entrée et de sortie de l'eau. Or, une fois mesuré le débit m de la turbine, on a

$$m = \rho \sigma_0 b_0 = \rho \sigma_1 b_1,$$

d'où les valeurs de b_0 et de b_1 . Comme on connaît les angles β_0 et β_1 , ainsi que les angles α_0 et α_1 , les formules (2) et (4) nous donnent W_0 et W_1 , et les formules (1) et (3) nous donnent a_0 et a_1 . Le couple moteur est dès lors déterminé.

366. - Application aux turbines à libre déviation

Quand les tuyères de la turbine ne sont pas entièrement remplies d'eau, il n'est pas difficile de mesurer directement la vitesse verticale d'entrée de l'eau :



En effet cette vitesse b_0 coïncide avec la composante verticale de la vitesse de sortie du distributeur, et chaque canal pq du distributeur est plein d'eau, une fois mesuré le débit de la turbine, on a : $m = \rho \sigma b_0$, σ désignant la surface de sortie dans le distributeur. Connaissant b_0 , on a la valeur de a_0 comme plus haut. Mais la valeur de a_1 ne peut plus se déduire du débit de la turbine, car la section horizontale de sortie de l'eau n'est qu'une fraction inconnue de l'aire des ouvertures des tuyères.

Pour calculer a_1 , nous allons appliquer le théorème des forces vives au système matériel formé par la turbine et par la masse d'eau μ que renferme la turbine à l'instant considéré t .

À l'instant $t + dt$, une partie ξ_1 de la masse μ est sortie de la turbine, et une masse égale ξ_0 d'eau nouvelle l'a remplacée. Le régime étant permanent, la variation de la force vive de la masse μ entre les instants t et $t + dt$, est évidemment égale à l'excès de la force vive de la masse ξ_1 sur la force vive de la masse ξ_0 ; d'autre part la force vive de la turbine est variable puisque sa vitesse de rotation W est constante. La variation d'énergie cinétique de Σ entre les instants t et $t + dt$ est donc :

$$\frac{\xi_1 V_1^2}{2} - \frac{\xi_0 V_0^2}{2} = \frac{m}{2} (V_1^2 - V_0^2) dt, \quad (V_0 \text{ et } V_1 \text{ vitesses absolues d'entrée et de sortie de l'eau}).$$

D'autre part, le travail des forces extérieures est nul, si on néglige les frottements intérieurs de l'eau, et les frottements de l'eau sur les aubes de la turbine. Les forces extérieures sont :

la pesanteur dont le travail est $mg(z_0 - z_1) dt$, [z_1 et z_0 désignant les z de A et de B],

les pressions sur la section d'entrée dont le travail est :

$$p_0 b_0 \sigma_0 dt = \frac{m}{\rho} p_0 dt, \quad [\rho \text{ densité du liquide}]$$

les pressions sur la section de sortie dont le travail est :

$$-p_1 b_1 \sigma_1 dt \quad (\sigma_1 \text{ aire totale de la section horizontale des veines d'eau à la sortie})$$

$$\text{ou encore } -\frac{m}{\rho} p_1 dt;$$

les résistances utiles qui s'exercent sur la roue et les frottements des pivots, dont le travail est $-(N' + V)\omega dt = -N\omega dt$. - Le théorème des forces vives donne donc :

$$(6) \quad \frac{m}{2} V_1^2 - \frac{m}{2} V_0^2 = mg(z_0 - z_1) + \frac{m}{\rho} (p_0 - p_1) - N\omega.$$

$$\text{Or } \bar{V}_1 = \bar{W}_1 + \bar{u}_1,$$

d'où :

$$\begin{aligned} V_1^2 &= W_1^2 + \omega^2 r_1^2 + 2\omega r_1 W_1 \cos \alpha, \\ &= W_1^2 - \omega^2 r_1^2 + 2\omega \alpha_1 r_1. \end{aligned}$$

De même :

$$V_0^2 = W_0^2 - \omega^2 r_0^2 + 2\omega \alpha_0 r_0.$$

Si on remplace V_1^2 et V_0^2 par ces valeurs dans l'équat^{on} (6), puis la quantité $\omega(\alpha_1 r_1 - \alpha_0 r_0)$ par $-N\omega$ d'après (5.), il vient :

$$(7) \quad \frac{W_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 - \frac{r_1^2 \omega^2}{2} = \frac{W_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gz_0 - \frac{r_0^2 \omega^2}{2}.$$

La turbine étant à libre réaction les pressions p et p_0 coïncident avec la pression atmosphérique. L'équat^{on} (7) donne donc :

$$W_1^2 = W_0^2 + \omega^2 (r_1^2 - r_0^2) + 2gh = W_0^2 + u_1^2 - u_0^2 + 2gh,$$

h désignant la hauteur $z_0 - z_1$ de la turbine. Cette formule

fait connaître W_1 , d'où a_1 par l'égalité (3), et par suite N .

Mais, en réalité, il faut introduire dans l'égalité (7) un terme correctif pour tenir compte des pertes de charge qui résultent des remous, frottements, élargissements brusques des filets liquides, etc. Ce terme correctif varie avec le type de turbine considérée : on admet qu'il est égal à une fonction linéaire de W_1^2 , W_0^2 , $U_0^2 = P_0^2 W^2$, $U_1^2 = P_1^2 W^2$, fonction dont on détermine empiriquement les coefficients.

Quand la turbine est complètement noyée, la formule (7) s'applique si la turbine est à réaction. p coïncide encore sensiblement avec la pression atmosphérique, mais la valeur de p peut être beaucoup plus grande. La formule (7), où tout est connu, sauf p , donne alors la valeur absolue de p .

Quand la turbine est une turbine limite, $p = p_0$, et la formule (7) établit une relation entre W_0 et W_1 , c'est-à-dire une condition entre l'aire de la section horizontale des canaux de la turbine à l'entrée de la turbine et l'aire analogue à la sortie.

Dans ces deux derniers cas, la formule (7) doit être corrigée de la même manière que dans le cas des turbines à libre déviation pour tenir compte des pertes de charge.

Chapitre III

Moteurs thermiques.

367. - Généralités. - Les moteurs thermiques, comme leur nom l'indique, sont des machines qui transforment en travail moteur l'énergie calorifique dégagée par phénomène en général chimique [combustion de la houille, combustion ou explosion du pétrole, etc.]

On peut diviser les machines thermiques en deux grandes classes : dans les premières (machines à vapeur, machines à air chaud, etc.) la chaleur dégagée par la réaction chimique est employée à volatiliser ou à échauffer un corps intermédiaire (eau, air, etc.) et c'est cette vapeur, ou cet air chaud, ainsi portés à haute pression, qui actionnent le moteur. Dans les machines thermiques de la seconde classe [moteurs à gaz, à pétrole, armes à feu], ce sont les gaz mêmes produits par la réaction chimique [combustion, explosion, etc.] qui, par leur expansion, entretiennent le mouvement de la machine.

Dans la plupart des moteurs thermiques, qu'ils appartiennent à la première ou à la seconde classe, la vapeur motrice agit par pression sur une face d'un piston cylindrique, qui se meut dans un cylindre de même diamètre. Le mouvement du piston qui est alternatif s'obtient en établissant des pressions inégales sur les deux faces. La machine est à simple ou double effet, suivant que l'excès de pression agit dans une oscillation complète (aller et retour) du piston sur une seule de ses faces, ou alternativement sur les deux faces. Ce sont les machines de la première classe et à piston que nous étudierons tout d'abord.

Machines à vapeur.

368. - Dispositions générales.
Toute machine à vapeur comprend :

1° une chaudière ou générateur, où l'eau est transformée en vapeur sous une pression p ;

2° un ou plusieurs cylindres dans lesquels la vapeur agit sur les pistons, leur donne un mouvement alternatif et produit ainsi un travail moteur ;

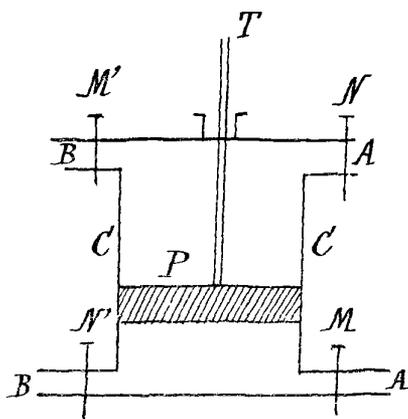
3° un milieu (condenseur ou air libre) dans lequel la vapeur après avoir travaillé, est envoyée et maintenue à une pression p_0 , inférieure à p .

Le condenseur est une cavité où de l'eau froide se renouvelle périodiquement; la machine est dite alors à condensation et la contre-pression p_0 est égale à la pression de la vapeur saturée qui correspond à la température de l'eau du condenseur après la condensation opérée.

Presque toutes les machines de l'industrie, sont des machines à condensation. Quand on se borne à envoyer la vapeur (qui a travaillé) dans l'atmosphère la machine est dite à échappement et la contre pression est alors égale à la pression atmosphérique ou plutôt lui est un peu supérieure, en raison des résistances qui s'opposent à l'écoulement de la vapeur.

369. Fonctionnement de la machine à double effet.

Le piston P , mobile dans le cylindre C , est alternativement poussé sur deux faces et transmet son mouvement au dehors par la tige T , qui traverse par joint étanché l'un des fonds du cylindre; A, A sont des tubes d'admission conduisant la vapeur de la chaudière au cylindre; B, B sont des tubes d'émission conduisant la vapeur au condenseur ou à l'échappement.



Dans la figure, on suppose que les tubes A, B sont ouverts ou fermés à volonté par la manœuvre de robinets de distribution M, N, M', N' . Si on ouvre M, M' en fer-

mant N, N' , le piston est sollicité par une force verticale ascendante, égale à $(p_1 - p_0) \omega$, ω étant sa surface⁽¹⁾. Il monte;

(1) Nous supposons, pour fixer les idées, l'axe du cylindre vertical, et nous négligeons le poids du piston. Mais rien n'est changé à ce qui va suivre si le cylindre est orienté d'une façon quelconque, par exemple et horizontal.

lorsqu'il est parvenu en haut de sa course, on ferme M, M' et on ouvre N, N' ; il est sollicité en sens inverse par une force égale à la précédente; il descend, et ainsi de suite; par le jeu indéfini des robinets, il prend donc un mouvement alternatif.

On conçoit d'ailleurs que l'on puisse produire automatiquement la manœuvre des robinets à l'aide d'un mécanisme spécial, commandé par le mouvement même du piston.

370. Transformation du mouvement du piston.

Dans la machine de Watt, le mouvement rectiligne alternatif du piston se transforme d'abord en oscillation d'un balancier (mouvement circulaire alternatif) par l'intermédiaire d'un parallélogramme de Watt, puis en mouvement de rotation continu d'un arbre par le moyen d'une bielle et d'une manivelle (Portefeuille, pl. IX).

On a renoncé aujourd'hui, à peu près universellement, à l'appareil encombrant du balancier. La tige du piston, guidée dans son mouvement rectiligne par une glissière ou par un galet mobile entre des pièces fixes, s'articule à une bielle agissant directement sur une manivelle qui fait corps avec l'arbre principal; la machine est dite alors à connexion directe.

371. Détente.

La manœuvre schématique des robinets M, M' et N, N' , peut être modifiée de façon à obtenir une meilleure utilisation de la vapeur (Watt).

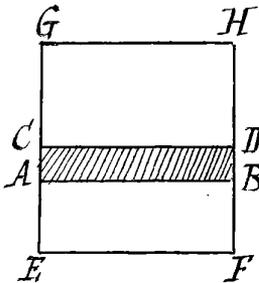
Considérons le piston dans sa course ascendante: N, N' sont fermés, M, M' sont ouverts. La cavité inférieure du cylindre communique avec la chaudière, la cavité supérieure avec le condenseur. Lorsque le piston est arrivé à une certaine position de sa course, fermons M en laissant M' ouvert. A partir de ce moment jusqu'à la fin de la course ascendante, la cavité inférieure du cylindre est close, la vapeur enfermée dans cette cavité se détend et, par son expansion, produit du travail sans qu'il y ait une nouvelle introduction de vapeur. Cette détente de la vapeur doit être réglée de manière que la pression sur la face inférieure du piston, soit, au haut de la course au

moins égale à la pression p_0 qui est celle du condenseur ou de l'échappement.

Il y a détente complète quand cette pression à la fin de la détente, est exactement égale à p_0 . En pratique, un excès de la pression finale sur p_0 , nécessaire à l'écoulement de la vapeur dans le condenseur, est de plus utile pour éviter les rentrées d'air⁽¹⁾. D'ailleurs, la détente complète exige un allongement excessif de la course et on perdrait par les frottements plus qu'on ne gagnerait en achevant la détente.

372 - Lorsque le piston, arrivé au bout de sa course ascendante, revient en sens inverse, il importe que la pression sur sa face inférieure soit immédiatement moindre que celle qui s'exerce sur l'autre face. Pour assurer sans retard cette condition, on met la cavité inférieure du cylindre en communication avec le condenseur avant que le piston soit arrivé au bout de sa course; c'est ce qu'on appelle l'échappement anticipé.

Dans le même but et aussi pour diminuer le choc qui se produit au changement de sens on fait communiquer la cavité supérieure $C'DGH$ avec la chaudière un peu avant la fin de la course du piston; c'est l'admission anticipée. Il est utile de diminuer, à ce moment, la différence entre la pression de l'espace $C'DGH$ et celle de la chaudière, afin de diminuer la vitesse avec laquelle la vapeur s'écoule de la chaudière dans le cylindre et les frottements et chocs concomitants. On réalise cette condition en supprimant, avant l'admission anticipée de la vapeur, la communication qui, depuis le commencement du mouvement ascendant,



existe entre l'espace $C'DGH$ et le condenseur. La cavité $C'DGH$ est alors close, et la vapeur qu'elle renferme est comprimée entre le piston et le fond GH ; c'est la période de compression.

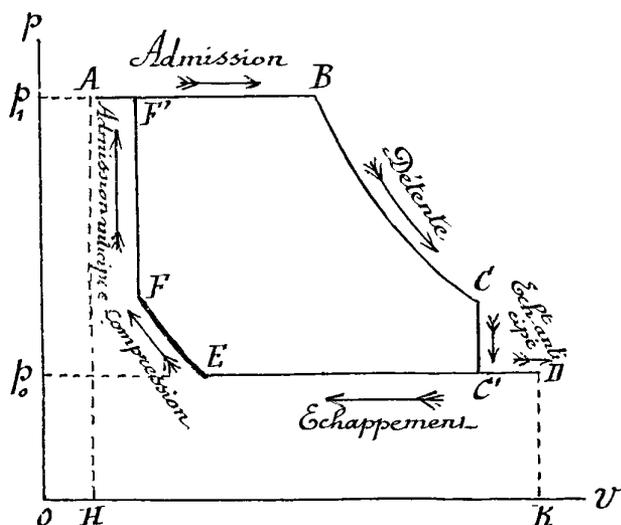
Les mêmes phases se répètent pendant la descente

(1) Cet air arrive dans le condenseur dissous dans l'eau froide, et, comme cet eau s'échauffe, il se dégage à une pression plus élevée que la pression atmosphérique (Voir le n° 381).

du piston, mais les rôles des deux cavités sont permutés.
En résumé, le développement des pressions dans les deux cavités du cylindre présente les phases suivantes :

	<u>Cavité inférieure</u>	<u>Cavité supérieure</u>
Montée du piston	1° Admission	1° Echappement
	2° Détente	2° Compression
	3° Echappement anticipé.	3° Admission anticipée.
Descente du piston	4° Echappement	4° Admission
	5° Compression	5° Détente
	6° Admission anticipée.	6° Echappement anticipé.

373. - Diagramme représentatif.



Représentons (à un instant t) le volume v de la cavité inférieure et la pression p dans cette cavité par un point en prenant θ pour abscisse le volume et pour ordonnée la pression. En considérant comme instantanées les variations de pressions dues à la manœuvre des robinets, les phases énumérées au N° 372 sont

figurées par le diagramme théorique suivant.

1° Pendant toute la durée de l'admission, la pression est égale à la pression p de la chaudière ; cette période est représentée par la droite AB parallèle à l'axe des volumes.

2° Pendant la détente, représentée par la courbe BC , la pression s'abaisse de p à une valeur supérieure à p_0 (pression du condenseur), si la détente est incomplète ; égale à p_0 , si la détente est complète.

3° L'échappement anticipé amène, brusquement et sans variation sensible de volume, la pression à p_0 et, sous cette pression, le piston arrive au bout de sa course.

D'où la ligne brisée $CC'D$: CC' n'existe que si la détente est incomplète.

4° Le piston revenant sur lui-même, le volume diminue et, la pression restant égale à p , la période d'échappement est représentée par la droite DE parallèle à l'axe des volumes.

5° La compression, qui se produit ensuite, est représentée par la courbe EF ;

6° Enfin, la période d'admission anticipée est représentée par la ligne brisée $FF'A$.

Le volume représenté par OH , qui existe entre le fond du cylindre et le piston quand celui-ci est au début de course, s'appelle espace libre, espace mort ou es
sible. La longueur HK représente la course totale p

Le même diagramme convient pour un cylindre supérieur du cylindre mais le nouveau p est en D quand le premier est en A .

Enfin, le travail développé par les pressions sur une des faces du piston, pendant la durée de sa double course, est représentée par l'aire $F'BC'F'F'$ car le travail des pressions élémentaires sur la face inférieure du piston dans le déplacement dh (>0 ou <0) du piston est $p \cdot dV = p \cdot dh$; et le travail pendant la montée du piston est égal à l'aire $HABCC'HK$; pendant la descente, il est égal à l'aire $KDEFF'AH$ changée de signe.

Le travail des pressions sur les deux faces du piston pendant un aller et retour du piston est donc égal au double de l'aire $F'BC'F'F'$.

Prenons comme unité de longueur le mètre; le volume V sera exprimé en mètres cubes, soit p la pression en kilogrammes-poids par mètre carré⁽¹⁾. Le double de l'aire $F'BC'F'F'$, (évaluée en mètres carrés) représentera le travail total en kilogrammètres des pressions de la vapeur sur les deux faces du piston.

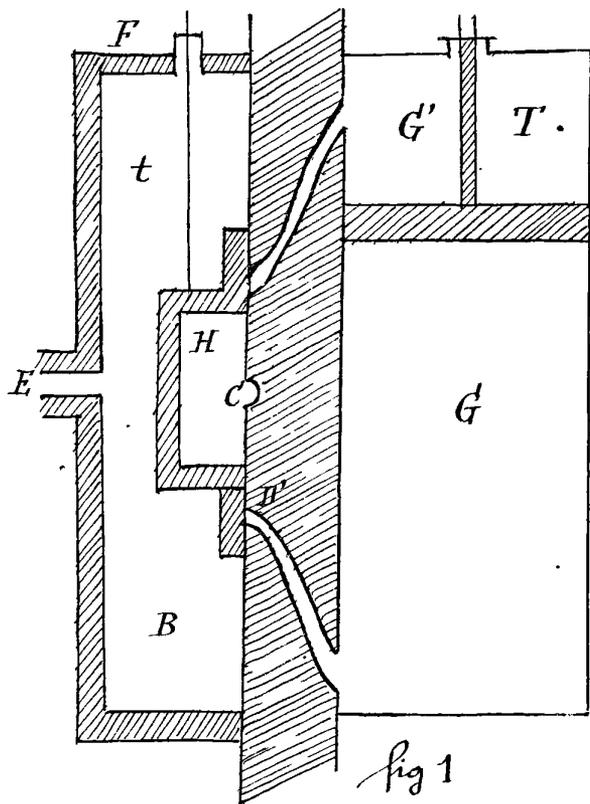
374. — Distribution par tiroir.

Le mode de distribution par quatre robinets que nous avons indiqué pour expliquer le fonctionnement de la machine

(1) Si, à un instant t , la pression est de dix atmosphères, p (avec les unités choisies) est égal. à $760 \times 13,596$.

à double effet, présente des inconvénients : les robinets sont difficilement étanches, et la manœuvre en est compliquée. En évitant ces inconvénients avec la distribution par tiroir dont le premier type (tiroir en Π , planche VI du porte-feuille) a été imaginé par Watt. Cette distribution est ordinairement réalisée comme il suit (tiroir ordinaire, pl. VI du porte-feuille)

Le tiroir est une sorte de boîte ouverte d'un côté qui glisse sur une paroi plane bien dressée, faisant corps avec le cylindre. Il est appliqué sur cette paroi par sa face ouverte et lui présente par suite sa cavité intérieure H (coquille); il se meut dans un espace clos dit boîte à vapeur, lequel communique par un tuyau E avec la chaudière. L'intérieur H du tiroir communique avec le condenseur (ou l'échappement) au moyen d'une conduite dont



C est l'orifice. Il résulte de ces dispositions que la pression de la vapeur appuie constamment le tiroir sur la paroi lisse. De chaque côté de l'ouverture centrale C se trouvent les orifices (lumières) de deux canaux recourbés D, D' qui viennent déboucher dans le cylindre G, G' vers les deux fonds.

Le schéma ci-dessus suppose que le cylindre (dont on a réduit les proportions par rapport au tiroir) est vertical, ainsi que le tiroir, et il montre le tiroir dans sa position moyenne.

Supposons maintenant que le tiroir ait été déplacé vers le haut, à partir de sa position moyenne de manière à dégager les lumières, (mais sans que la conduite C cesse de déboucher dans la coquille); la cavité inférieure G du cylindre communique avec la boîte à vapeur, donc avec la chaudière, et la cavité supérieure G' communique avec la coquille, donc avec le

condenseur. Si, au contraire, le piston a été déplacé vers le bas de façon à dégager encore les lumières, les communications sont interverties.

On anime le tiroir d'un mouvement vertical alternatif à l'aide d'une tige t commandée elle-même par le piston moteur. Lorsque le tiroir dans son mouvement ascendant, commence à dégager la lumière inférieure, l'admission anticipée commence dans la cavité inférieure G du cylindre; il faut, par suite, qu'à ce moment le piston moteur n'ait pas encore atteint le bas de sa course. Quand le piston moteur est au bas de sa course, la lumière inférieure est donc dégagée au moins partiellement, et l'admission se prolonge tant que le tiroir en redescendant n'a pas obturé complètement la lumière. A ce moment la détente commence dans la cavité G , et elle cesse quand le tiroir en descendant dégage la lumière inférieure.

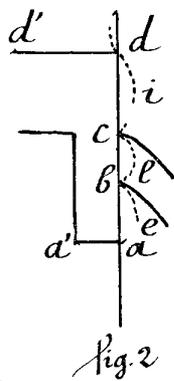


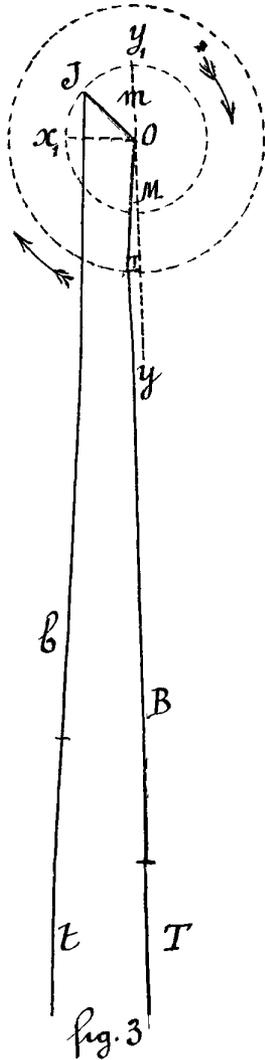
Fig. 2

L'échappement se produit alors et dure jusqu'à l'instant où le tiroir en remontant obture complètement la lumière inférieure; la compression commence alors dans la cavité G , et elle dure jusqu'à l'instant où le tiroir en remontant commence à dégager la lumière; l'admission se produit alors et ainsi de suite.

Les corrélations sont analogues si on considère la cavité supérieure G , du cylindre et la lumière supérieure, mais les phases de la cavité supérieure retardent sur celles de la cavité inférieure d'une durée égale à un aller simple du piston.

Relations entre les mouvements du piston et du tiroir.
Le mouvement de la tige T du piston moteur est transformé en un mouvement circulaire continu d'un certain arbre O par l'intermédiaire d'une bielle B et d'une manivelle M ou OI ; une manivelle OJ ou m invariablement liée à l'arbre O (et par suite à la manivelle OI) commande, par l'intermédiaire d'une bielle b , le mouvement alternatif de la tige et du tiroir. (1)

(1) En fait, le mouvement du tiroir est pris sur l'arbre O à l'aide d'un excentrique à collier.

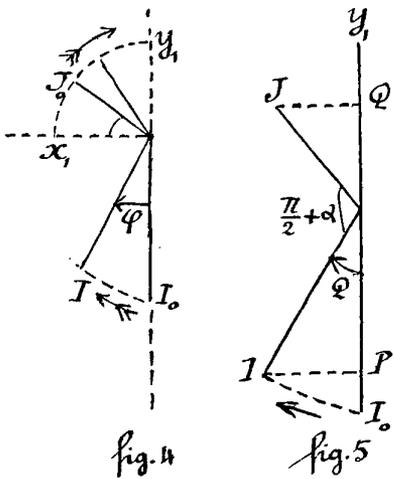


Nous négligerons, dans ce qui suit, l'inclinaison des bielles sur la verticale. Quand la manivelle OJ est horizontale, le tiroir occupe sa position moyenne; quand le point J atteint sa position la plus haute ou la plus basse, il en est de même du tiroir. Les mêmes remarques s'appliquent au piston moteur et à la manivelle OI .

Appelons φ l'angle \overline{yOI} que fait OI avec la verticale descendante oy , angle compté positivement dans le sens du mouvement de la manivelle OI . Pour $\varphi=0$, I est en I_0 au point le plus bas de sa course, et le tiroir doit être au-dessus de sa position moyenne et continuer à monter; ce qui exige que la position correspondante J_0 de J soit sur le quadrant x, y , parcouru par le point J lorsqu'il est au-dessus de O et qu'il monte. Autrement dit, l'angle $I_0 O J_0$ doit être compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π soit $I_0 O J_0 = \frac{\pi}{2} + \alpha$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

Quand φ croît, l'angle $y O J$ croît et est constamment égal à $\frac{\pi}{2} + \alpha + \varphi$. L'angle α s'appelle angle d'avance ou de calage.

Considérons maintenant les projections P et Q de I et de J sur la verticale de O . Les segments OP, OQ représenteront en grandeur et sens les déplacements du piston et du tiroir à partir de leur position moyenne (puisque nous négligeons les obliquités des bielles). Le segment $I_0 P$, toujours dirigé dans le sens ascendant, représente le déplacement du piston à partir de sa position la plus basse. Posons $I_0 P = x$, $OQ = y$; les



segments étant comptés positivement dans le sens ascendant: appelons r la longueur de la manivelle OJ , et c la course du piston (égale au double de la longueur OI); on a:

$$(1) \quad x = \frac{c}{2} (1 - \cos \varphi) = c \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

$$(2) \quad y = r \sin(\alpha + \varphi),$$

équations qui expriment les déplacements en fonction de φ .

Relations entre les éléments de la distribution.

Le tiroir étant dans sa position moyenne, les parties pleines ab, cd (fig. 2) qui s'étendent de part et d'autre d'une lumière (soit la lumière inférieure) s'appellent recouvrements; ab est le recouvrement extérieur et cd le recouvrement intérieur. Nous désignerons par e, l, i les longueurs ab, bc, cd .

Quand le piston est au bas de sa course, il faut que a' , dans sa course ascendante, ait dépassé le bord b de la lumière d'une certaine longueur δ qu'on appelle avance linéaire de a' . Le déplacement du tiroir est alors $e + \delta$, et comme ce déplacement correspond à $\varphi = 0$, on a [équation (2)]:

$$(3) \quad e + \delta = r \sin \alpha.$$

Étudions la succession des quatre phases de la cavité inférieure: admission, détente, échappement, compression.

1° L'admission cesse quand a' , après avoir atteint sa hauteur maxima et rétrogradé, affleure au bord b de la lumière; le déplacement est alors égal à e , et on a, si φ_1 est la valeur correspondante de φ :

$$(4) \quad e = r \sin(\alpha + \varphi_1).$$

2° La détente commence alors, et cesse quand d' , dans le mouvement descendant du tiroir, affleure au bord c de la lumière; le déplacement est alors $-i$, et on a, si φ_2 est la valeur de φ correspondante:

$$(5) \quad -i = r \sin(\alpha + \varphi_2);$$

3° L'échappement commence, et il cesse quand d' , ayant atteint sa position la plus basse et, rétrogradant, affleure de nouveau au bord c de la lumière; la valeur φ_3

correspondante vérifie la même équation que dans le cas précédent :

$$(6) \quad -i = P \sin(\alpha + \varphi_3)$$

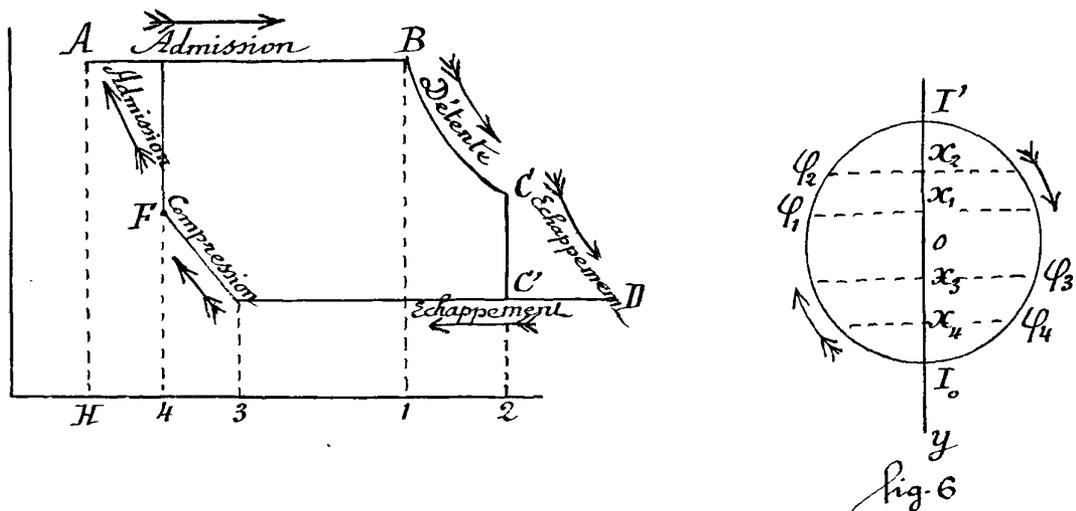
4° La compression commence, et elle cesse quand aa' , dans son mouvement ascendant, affleure de nouveau au bord b de la lumière; si φ_4 est la valeur de φ correspondante, on a :

$$(7) \quad e = P \sin(\alpha + \varphi_4)$$

L'échappement commence alors, et ainsi de suite.

La cavité supérieure G du cylindre et la lumière supérieure présentent les mêmes phases, mais elles correspondent aux valeurs $\varphi_1 + \pi$, $\varphi_2 + \pi$, $\varphi_3 + \pi$; car pendant un aller simple du piston, le point I parcourt une demi-circonférence.

375. - Le problème de la distribution consiste à trouver une disposition du tiroir amenant successivement la détente, l'échappement, la compression et l'admission pour des valeurs données x_1, x_2, x_3, x_4 du déplacement du piston. Si nous nous reportons au diagramme du N° 3, x_1, x_2, x_3, x_4 sont proportionnels aux segments H_1, H_2, H_3, H_4 , qui représentent les volumes du cylindre compris entre la position la plus basse du piston et sa



position à l'instant où commence la détente, puis l'échappement, etc. Aux valeurs x_1, x_2, x_3, x_4 , la relation (1) fait

correspondre des valeurs déterminées $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.

Sur le diamètre vertical du cercle de centre O et de rayon OI , portons, en effet, à partir du point I_0 , dans le sens ascendant, les longueurs x_1, x_2, x_3, x_4 ; les angles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ sont déterminés sans ambiguïté (fig. 6); car φ_1 et φ_2 doivent être compris entre 0 et π (variation de φ pendant la montée du piston) et φ_3, φ_4 entre π et 2π .

Ces valeurs $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ doivent vérifier les quatre équations (4), (5), (6), (7) du N° précédent. Or ces équations ne renferment que trois indéterminées $\frac{c}{l}$, $\frac{l}{d}$ et α , elles entraînent donc une condition entre $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$.

Formons-la. Les équations (4) et (7) donnent:

$$\alpha + \varphi_1 = \pi - (\alpha + \varphi_4) + 2K\pi \text{ ou}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1 + \varphi_4}{2} + K\pi \quad (K \text{ entier})$$

Comme $(\varphi_1 + \varphi_4)$ est compris entre 3π et π , α n'est compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ que pour $K=1$; on a donc:

$$(8) \quad \alpha = \frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi_1 + \varphi_4}{2};$$

Les équations (5) et (6) donnent de même:

$$\alpha = \frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}.$$

Il faut donc qu'on ait:

$$(9) \quad \frac{\varphi_1 + \varphi_4}{2} = \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}$$

Cette égalité impose une condition corrélatrice aux quantités x_1, x_2, x_3, x_4 , qui par suite ne sont pas arbitraires.

Cette condition étant supposée remplie, α est donné par l'équation (8). On a ensuite:

$$(10) \quad e = r \sin(\alpha + \varphi_1) = r \sin \left[\frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi_4 - \varphi_1}{2} \right],$$

$$(11) \quad i = -r \sin(\alpha + \varphi_2) = -r \sin \left[\frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2} \right];$$

$$(12) \quad \delta = r \sin \alpha - e = r \left[\sin \alpha - \sin(\alpha + \varphi_1) \right].$$

Tout d'abord, il faut que les seconds membres de (10) et de (11) soient positifs, donc que $\alpha + \varphi_1$ soit aigu et $\alpha + \varphi_2$

obtus, ce qui exige⁽¹⁾ $\varphi_1 < \varphi_2$.

Il faut : 1° que $\frac{\varphi_4 - \varphi_1}{2}$ (toujours $< \pi$) soit compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π , c'est-à-dire que φ_4 soit compris entre 2π et $\pi + \varphi_1$;
2° que $\frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2}$ (toujours $< \pi$) soit compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, c. à. d. que φ_3 soit compris entre π et $\pi + \varphi_2$.

D'après cela, choisissons arbitrairement φ_1 et φ_2 sous les seules restrictions $0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \pi$; puis l'angle φ_3 arbitrairement mais $> \pi$ et $\pi + 2\varphi_1 - \varphi_2$ et $< \pi + \varphi_2$ et $2\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)$; prenons enfin $\varphi_4 = \varphi_3 + \varphi_2 - \varphi_1$. Ces restrictions sont nécessaires et suffisantes pour φ_3 et φ_4 soient compris entre π et 2π et donnent pour e et i des valeurs positives.

Il faut enfin que la valeur de α ou $\frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi_2 + \varphi_3}{2}$ soit comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ [d'où $3\pi > \varphi_2 + \varphi_3 > 2\pi$, conditions qui résultent des précédentes] et que la valeur de δ donnée par (12) soit positive ; l'angle α étant aigu, ce qui exige que $\alpha + \varphi_1$ soit supérieure à $\pi - \alpha$, d'où :

$\alpha > \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1}{2}$, ou $\frac{3\pi}{2} - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} > \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi_1}{2}$, ou enfin $\pi > \frac{\varphi_4}{2}$, condition remplie.

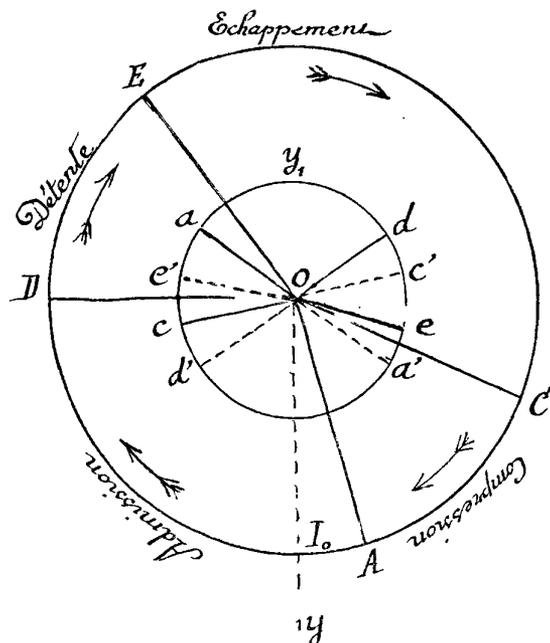
Les angles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ étant ainsi choisis, e et i sont donnés en fonction de r par (10) et (11), r et l pouvant être pris arbitrairement. Il est loisible d'assujettir e, i, r, l à une condition supplémentaire ; par exemple, on exigera que le tiroir redescende aussitôt que la lumière inférieure est entièrement démasquée par le tiroir dans son mouvement ascensionnel ; cette condition signifie que, pour $\varphi + \alpha = \pi$, le déplacement du tiroir est $e + l$; d'où l'égalité :

$$e + l = r,$$

qui détermine l , une fois r choisi arbitrairement.

La distribution doit être réglée avec une grande précision, surtout quand le mouvement du piston est rapide. Par exemple, une locomotive dont les roues ont 1^m40 de diamètre et qui fait 100^{km.} à l'heure avance de 4^m40 par tour de roue, donc pour un aller et retour du piston ; ce qui fait $\frac{100.000}{4,4}$ aller et retour par heure ou 6 par seconde.

(1) Condition évidente d'ailleurs, puisque le piston s'élève quand il passe de la position 1 à la position 2.



376. - Représentation graphique de la distribution.

Le graphique ci-contre résume toute cette discussion. Traçons le petit cercle décrit par la tête J de la manivelle OJ du tiroir, et le grand cercle décrit par la lettre I de la manivelle II du piston. Considérons les phases de la cavité inférieure du cylindre et soit :

- A la position de I et à la position de J au début de l'admission;
- B la position de I et à la position de J au début de la défente;
- C la position de I et à la position de J au début de l'échappement.
- D " " " " de la compression.

Les points a', d', e', c' , diamétralement opposés aux points a, d, e, c , sont les positions de J au début des phases analogues de la cavité supérieure du cylindre.

Les angles AOa, BOd, EOE, COc sont égaux entre eux et à $\frac{\pi}{2} + \alpha$. Les points a et d sont sur une même ligne horizontale, de même que c et e , car les projections de Oa et Od sur Oy coïncident avec la longueur c , et les projections de Oc et Oe coïncident avec $-c$.

377. - Épure de Fauveau.

Une autre représentation graphique est celle de Fauveau dont voici le principe.

Au lieu de compter le déplacement x du piston à partir de la position la plus basse, comptons-le (comme le déplacement du tiroir) à partir de la position moyenne. On a alors :

$$x = \frac{c}{2} \cos \varphi \quad y = r \sin (\alpha + \varphi);$$

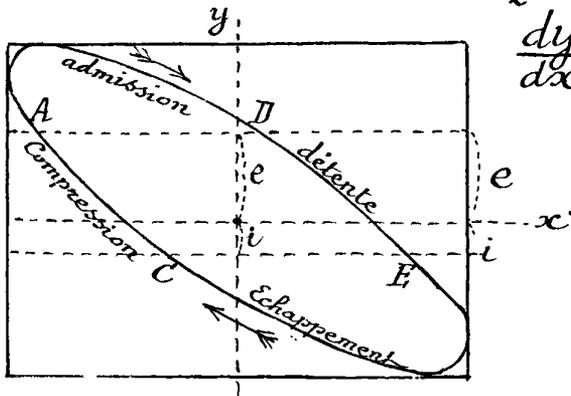
Donnons les x en abscisses, les y en ordonnées, l'élimination de φ montre que le point figuratif décrit l'ellipse :

$$\frac{4x^2}{c^2} - \frac{y^2}{r^2} - 4 \frac{xy}{cr} \sin \alpha = \cos^2 \alpha.$$

Le plus simple est de la construire paramétriquement par points. On a d'ailleurs, pour définir la tangente :

$$dx = -\frac{c}{2} \sin \varphi d\varphi \quad dy = r \cos(\alpha + \varphi) d\varphi$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2r \cos(\alpha + \varphi)}{c \sin \varphi}$$



Soit A et D les points où la droite $y = e$ rencontre l'ellipse, C et E les points où la droite $y = i$ rencontre l'ellipse. Les phases de la cavité inférieure du cylindre sont :

de A à D admission
de D à E détente
de E à C échappement
de C à A compression.

378. Distribution Corliss.

La durée de chacune des périodes successives du fonctionnement du piston influence évidemment sur la valeur du travail qu'il accomplit dans sa double course; d'après ce qui précède, ces durées ne peuvent être arbitraires, et par suite on ne peut pas toujours choisir les valeurs les plus avantageuses. Dans la distribution Corliss (pl. VI du portefeuille), l'admission et l'échappement se font au moyen de soupapes s'ouvrant brusquement à un instant arbitraire. Cet avantage est un de ceux qui font préférer aujourd'hui, pour les machines fixes, ce mode de distribution, bien que le dispositif Corliss (jeu de bielles et de cames excentriques commandant les soupapes à l'aide de tiges et commandé lui-même par l'arbre de la machine) soit moins simple que le tiroir.

Comme il y a intérêt à manoeuvrer rapidement les soupapes et à ouvrir largement le passage à la vapeur afin d'éviter le lamivage de la vapeur qui produit des pertes de charge, la tige agit en libérant un déclic qui déplace la soupape à l'aide d'un ressort puissant; la tige ramène ensuite le déclic à sa position primitive. Le fonctionnement est analogue à celui d'un chien de fusil qui serait alternativement armé et désarmé.

379 - Chaudières. - Les chaudières ordinaires ont la forme d'un cylindre allongé à bases circulaires, terminé aux extrémités par des calottes sphériques; deux cylindres, dits bouilleurs, qui ont à peu près la même longueur que la chaudière, et dont le diamètre est plus petit, sont placés au-dessous de la chaudière avec laquelle ils communiquent par des tubulures; ils sont destinés à augmenter la surface de chauffe, c'est-à-dire la portion de paroi exposée à l'action du foyer.

Généralement, la chaudière n'utilise que 0,60 de la chaleur dégagée par le combustible; les pertes se font:

- 1° par les cendres et scories du foyer,
- 2° par les gaz combustibles et le noir de fumée qui correspondent à une combustion incomplète et sortent avec la fumée;
- 3° par le dégagement des gaz chauds produits par la combustion et la vaporisation de l'eau qu'ils se ferment;
- 4° par rayonnement et conductibilité.

Ces diverses pertes ont à peu près les valeurs moyennes suivantes:

cendres et scories	0,02	}	0,40
matières combustibles de la fumée	0,06		
dégagement de gaz chauds et vapeur	0,08		
rayonnement et conductibilité	0,24		

Dans ces conditions, la chaudière n'utilise que 5.000 calories environ pour la combustion d'un kilogramme de houille dégageant de 8.000 à 8.500 calories. La quantité de chaleur nécessaire pour transformer un kilogramme d'eau, prise à la température de 0°, en vapeur saturée à la pression de 5 à 6 atmosphères etant 650 calories environ, on voit que la quantité d'eau vaporisée par un kilogramme de houille est $\frac{5000}{650} = 7,7$ environ.

380. - Les chaudières du type précédent, à foyer extérieur, de construction et d'installation simples, ont l'inconvénient d'exiger un grand emplacement. Les autres types usuels sont:

- 1° Les chaudières à foyer intérieur pour diminuer les pertes par rayonnement et conductibilité;
- 2° Les chaudières tubulaires dont la surface de chauffe

est constituée par des tubes traversant l'eau à vaporiser et parcourus intérieurement par la flamme; on a ainsi une grande puissance de vaporisation pour un poids et un volume de chaudière relativement faibles: ce sont les chaudières des locomotives;

3° Les chaudières dites inexplosibles, inverses des précédentes; l'eau est à l'intérieur des tubes; il n'y a pas ainsi de grand réservoir de vapeur et d'eau et, si une fissure se produit, l'accident ne porte que sur un faible volume de vapeur.

381. - Condenseurs. - Il y a deux types de condenseurs; les condenseurs par mélange et les condenseurs par surface.

Les condenseurs par mélange consistent en une cavité close, communiquant avec le conduit d'échappement du cylindre et recevant continuellement un jet d'eau froide qui détermine la condensation de la vapeur. L'appareil comprend:

1° une pompe à eau froide élevant l'eau à injecter au niveau du condenseur,
 2° une bâche à eau froide pour recueillir cette eau;
 3° le condenseur proprement dit, communiquant d'une part avec le cylindre d'autre part avec la bâche à eau froide par un robinet dont on règle l'ouverture. D'ordinaire le condenseur est plongé dans la bâche à eau froide;

4° une pompe à air, enlevant le mélange d'eau froide et d'eau de condensation au fur et à mesure de sa production, ainsi que l'air qui, primitivement dissous dans l'eau froide à la pression très faible du condenseur, se dégage quand la température s'élève et constituerait une contre-pression s'opposant au mouvement du piston;

5° une bâche à eau chaude où la pompe à air déverse l'eau extraite du condenseur;

6° une pompe à eau chaude (ou un injecteur, tel que l'injecteur Giffard) qui prend dans la bâche à eau chaude l'eau nécessaire à l'alimentation de la machine et l'envoie dans la chaudière.

Les condenseurs par surface sont formés par des tubes métalliques de petit diamètre et de grande longueur placés dans un récipient; tantôt la vapeur passe à l'intérieur des tubes et l'eau froide circule autour d'eux; tantôt c'est l'inverse qui se produit. En tout cas, il faut, pour renouveler l'eau froide, une pompe de circulation. Cette pompe est actionnée, soit par la machine elle-même, soit par un petit moteur spécial.

Rendement d'une machine à vapeur.

382. Application du principe de l'équivalence et du principe de Carnot.

Considérons une machine à condenseur et la masse d'eau μ , vaporisée partiellement, qui entretient le mouvement de la machine. Cette masse d'eau μ (toujours la même) est alternativement vaporisée, condensée, etc. En un mot elle parcourt indéfiniment le même cycle, une fois la machine en marche normale. Au foyer de la chaudière, dont la température absolue sera représentée par Θ_1 , elle emprunte pendant un cycle une quantité de chaleur Q_1 employée à échauffer et à vaporiser l'eau dans la chaudière. Au condenseur, dont la température absolue sera représentée par Θ_0 , elle cède pendant un cycle une quantité de chaleur Q_0 . La chaleur totale Q_e empruntée par la masse d'eau μ à l'extérieur pendant un cycle, est égale à $Q_1 - Q_0$.

Appliquons le principe de l'équivalence à cette masse d'eau μ et à la durée d'un cycle. Au début et à la fin du cycle, l'énergie interne de la masse μ (énergie cinétique et autre) est la même. Le travail des forces extérieures se réduit à celui des réactions des deux faces du piston sur la vapeur; or ce travail est ⁽¹⁾ sensiblement [N° 342] au travail τ_m (changement de signe des pressions de la vapeur sur les faces du piston). Le principe de l'équivalence donne donc ici :

$$-Q_e - \tau_m, \quad \text{ou} \quad \tau_m - Q_e = Q_1 - Q_0,$$

τ désignant le travail moteur (travail des forces motrices appliquées au piston) pendant un cycle.

D'autre part, en vertu du principe de Carnot-Clausius, on a [N° 104] :

$$\frac{Q_1}{\Theta_1} - \frac{Q_0}{\Theta_0} \leq 0,$$

(1) En effet, les frottements et les chocs de la vapeur sur le piston sont négligeables.

le signe = ne convenant qu'au cas d'un cycle réversible, cas qui n'est jamais rigoureusement réalisé.

D'où :

$$Q_0 > Q_1 \frac{\Theta_0}{\Theta_1}, \text{ et}$$

$$\tau_m < Q_1 \left[1 - \frac{\Theta_0}{\Theta_1} \right].$$

383. - Rendement thermique.

Le rapport τ_m du travail moteur produit à la quantité de chaleur empruntée au foyer s'appelle le rendement thermique de la machine.

D'après ce qui précède, quelle que soit la nature du corps qui se transforme et quel que soit le cycle décrit, le rendement est inférieur à la quantité.

$$1 - \frac{\Theta_0}{\Theta_1} = \frac{\Theta_1 - \Theta_0}{\Theta_1},$$

rendement du cycle réversible de Carnot.

Dans les machines à vapeur, la température Θ_1 (température de la chaudière) est limitée par la résistance des parois sur lesquelles s'exerce la pression de la vapeur. Cette pression croît rapidement avec la température: elle est de 5 atmosphères à 152° (au-dessus de zéro) et de 10 atmosphères à 180°. On ne peut sans craindre d'explosion, dépasser 200°; la température absolue⁽¹⁾ Θ_1 est alors 273 + 200 = 473.

La température du condenseur est en général égale à 40°; la valeur de Θ_0 est alors 273 + 40 = 313.

La limite supérieure du rendement thermique est donc:

$$\frac{473 - 313}{473} = 0,36,$$

mais ce rendement, dans les machines industrielles, est très inférieur à cette limite et s'abaisse au-dessous de $\frac{1}{4}$; sa valeur commune est voisine de 0,15.

(1) On sait que, si θ désigne la température en degrés centigrades à partir de la température de la glace fondante, et α le coefficient de dilatation à 0° de l'air ($\alpha = \frac{1}{273}$), on peut mesurer Θ par la formule:

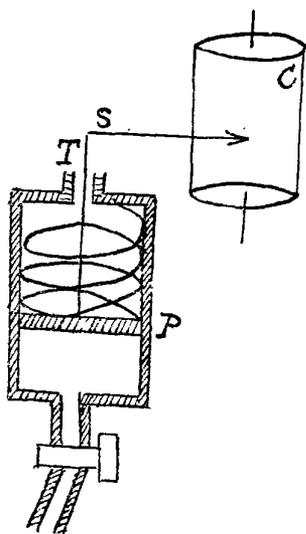
$$\Theta = \frac{1}{\alpha} + \theta.$$

Mesure de la puissance d'une machine à vapeur.

384. - Puissance indiquée; puissance effective.

Soit T_m le travail des pressions de la vapeur sur le piston pendant un aller et retour du piston; soit T_u le travail utile de la machine pendant, le même temps, travail (changé de signe) du couple résistant qu'il faut appliquer à l'arbre de la machine pour que sa vitesse de rotation garde sa valeur constante normale. Il importe de savoir mesurer ces deux travaux: le premier se mesure à l'aide de l'indicateur de Watt, le second à l'aide du frein de Prony. Si on désigne, d'autre part, par Π la durée d'un aller et retour du piston, la puissance motrice du piston sera, par définition, $\frac{T_m}{\Pi}$, puissance qu'on appelle souvent puissance indiquée de la machine; la puissance effective de la machine (ou puissance sur l'arbre) sera $\frac{T_u}{\Pi}$. Si T_m et T_u sont exprimés en kilogrammètres, Π en secondes, pour avoir les deux puissances en chevaux-vapeur, il faut diviser par 75 les nombres $\frac{T_m}{\Pi}$ et $\frac{T_u}{\Pi}$.

385. - Indicateur de Watt. - L'Indicateur de Watt se compose d'un petit cylindre où se meut un piston léger, dont la face inférieure peut être mise en communication (par l'intermédiaire d'un robinet) avec une des cavités du cylindre de la machine, soit la cavité inférieure, de sorte que la vapeur agissant sur la face inférieure du piston de la machine agit en même temps sur la face inférieure du piston P de l'indicateur.



La face supérieure de ce piston P communique avec l'atmosphère et est pressée par un ressort qui (le poids du piston étant négligeable) est à l'état naturel quand la pression p sur la face inférieure est égale à la pression atmosphérique p_a (qui s'exerce sur la face supérieure). Lorsque p est plus grand que p_a , le piston P s'élève d'une quantité y à partir de sa position naturelle, et cette quantité est, d'après les propriétés

des ressorts) proportionnelle à la force qu'exerce le ressort sur P , force qui devra être égale et directement opposée à la force ascensionnelle du piston $p - p_a$ (la masse du piston étant négligée); on peut donc écrire:

$$p - p_a = Ky,$$

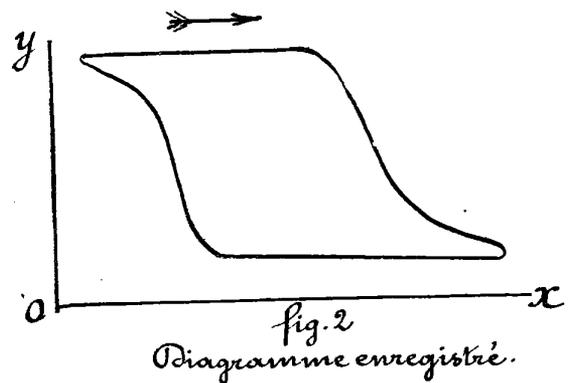
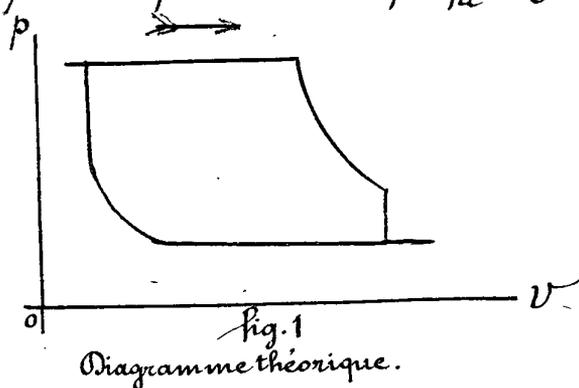
K désignant une certaine constante qu'on déterminera une fois pour toutes pour le ressort donné.

La tige T du piston porte un crayon ou style S dont la pointe inscrit sa trace sur un papier enroulé autour d'un cylindre de révolution C : ce cylindre est animé autour de son axe d'un mouvement alternatif de rotation commandé par le piston moteur de la machine; la transmission est telle que la vitesse angulaire de rotation du cylindre est proportionnelle à la vitesse linéaire du piston moteur et change de sens en même temps que cette dernière;

Si donc on appelle dv l'accroissement de volume (positif ou négatif) de la cavité inférieure pendant un temps infinitésimal dt et dx le chemin parcouru par un point o de la circonférence de base de C , compté positivement dans un certain sens, négativement dans l'autre, on a (en grandeur et signe) $dv = K'dx$,

K' désignant une certaine constante, qu'on mesurera une fois pour toutes pour l'appareil employé.

L'indicateur ayant été placé pendant un certain temps sur la machine, si on déroule le papier enregistreur, la courbe tracée par le style dans un aller et retour du piston doit être transformée du diagramme théorique [fig. 1] par les formules: $p - p_a = Ky$, $v = K'x$.



En réalité, le jeu des robinets ou du tiroir n'étant pas instantané, la pression ne saute pas brusquement d'une valeur à une autre, et le diagramme enregistré a l'aspect ci-dessus (fig. 2).

Or le travail T_m est égal au double de l'aire du diagramme 1 [N° 373] ou à cette aire suivant que la machine est à double ou simple effet. Si A est l'aire du diagramme 2, on a évidemment

$$\alpha = K.K'.A.$$

Le travail T_m de la vapeur pendant une double course est $K.K'.A$ si la machine est à simple effet, et $2K.K'.A$ si la machine est à double effet.

Quand on a employé, dans toutes les mesures, les unités C. G. S, le travail T_m en kilogrammètres est égal à $\frac{2K.K'.A}{981 \times 10^5}$ (si la machine est à double effet).

Soit maintenant n le nombre de tours de l'arbre moteur pendant une minute; la durée d'un aller et retour du piston est $\frac{60}{n}$, et la puissance indiquée de la machine est (en chevaux-vapeur)

$$T_m \times \frac{n}{60} \times \frac{1}{75} = \frac{2K.K'.A}{981 \times 10^5} \times \frac{n}{60} \times \frac{1}{75}.$$

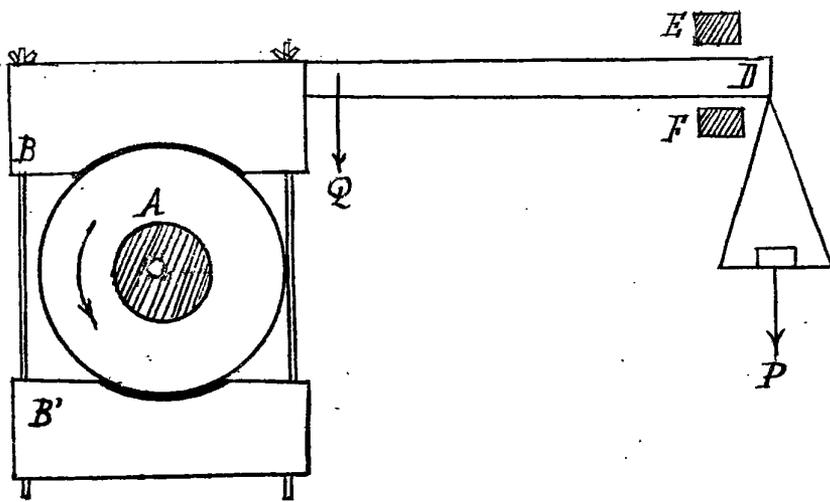
386. - Frein de Prony.

La machine étant actionnée par la vapeur, pour conserver à la vitesse de rotation de l'arbre la valeur constante qu'elle doit garder pendant la marche normale, on peut exercer sur l'arbre des frottements suffisamment considérables à l'aide d'un frein. Si on sait mesurer le moment (par rapport à l'axe de l'arbre) des frottements exercés par le frein (couple résistant), soit N , on peut en déduire aussitôt le travail utile T_u du moteur pendant un aller et retour du piston, c'est-à-dire pendant un tour de l'arbre, car ce travail T_u est égal $2\pi N$ (N étant la valeur absolue du moment).

C'est là le principe du frein de Prony, dont voici la description sommaire.

Une poulie A , calée sur l'arbre supposé horizontal, est ensermée entre deux pièces évidées (mâchoires) formant collier, que l'on peut rapprocher ou écarter à l'aide

de deux boulons munis d'écrous. Un levier horizontal CI , fixé à la mâchoire supérieure, passe entre deux taquets fixes qui limitent les oscillations. Le frein, enserrant la poulie, est entraîné par l'arbre dans son mouvement, vient buter contre un des taquets et reste immobile: la poulie frotte alors sur le frein, et on peut régler le serrage des écrous de façon que l'arbre conserve une vitesse de rotation constante (égale à la vitesse de marche normale). Il s'agit de mesurer le moment (par rapport à l'axe OZ de l'arbre) des réactions de frein sur la poulie.



Supposons pour fixer les idées que la rotation de θ l'arbre ait le sens de la flèche; si le poids du levier est négligeable, le levier sera buté contre le taquet supérieur. Mais si à l'extrémité du levier on attache un poids suffisant, le levier

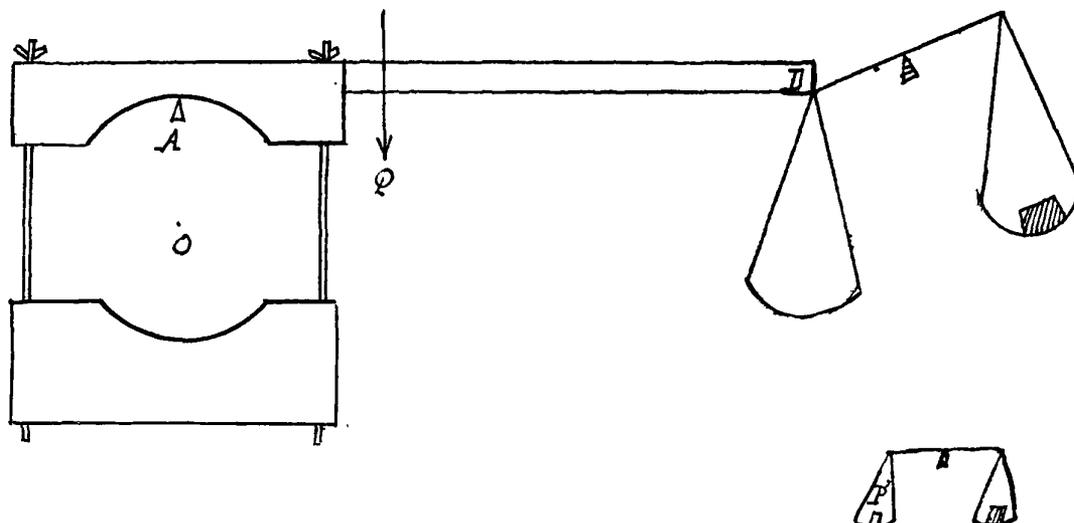
va venir buter contre le taquet inférieur. On détermine un poids P tel que, si on l'attache à l'extrémité II du levier, le levier reste en équilibre entre les deux taquets.

Soit Q le poids total du frein, et p et q les distances des vecteurs P et Q à l'axe OZ . Le moment par rapport à l'axe OZ des forces P, Q et des réactions de la poulie sur le collier est nul; autrement dit le moment N (par rapport à OZ) des réactions du collier sur la poulie est égal au moment (par rapport à OZ) des forces P, Q ; on a donc

$$N = Pp + Qq,$$

$$\text{et } T_u = 2\pi(Pp + Qq).$$

La quantité Pp se mesure immédiatement d'après l'expérience même. Pour avoir Qq une fois pour toutes, c'est-à-dire pour caler le frein, on procède de la manière suivante: le frein étant dégagé et libre, on le fait reposer sur un couteau horizontal A situé sur la verticale du point O ,



puis on attache son extrémité II au plateau W d'une balance qu'on maintient en équilibre en mettant dans l'autre plateau une certaine tare; enfin, on détache la balance de l'extrémité II, et on détermine le poids P' qu'il faut placer dans le plateau W pour que l'équilibre de la balance subsiste. Il est évident que le levier exerce en II sur la balance une force égale au poids P', et inversement la balance exerce sur le levier en II une force verticale dirigée vers le haut et égale à P'. Puisque le frein était en équilibre, on a (condition d'équilibre du levier): $Qq = P'p$.

Le frein est ainsi taré, par un procédé analogue à celui de la double pesée.

Remarques. - Il est difficile de déterminer un poids P tel que le levier reste en équilibre entre les deux arrêts. Par suite des inégalités des surfaces de contact du collier et de la poulie, le frein (pour un poids P' voisin du poids P cherché) viendra buter alternativement contre les deux taquets. Mais il est facile de déterminer un poids minimum P₁ pour lequel le levier restera buté contre F, et un poids maximum P₂ pour lequel le levier restera buté contre E. On prendra pour valeur de P la moyenne arithmétique $\frac{P_1 + P_2}{2}$.

387. - Rendement industriel d'une machine à vapeur.

Soit Q la quantité de chaleur (en kilogrammètres) dégagée par le combustible, et T_u le travail utile correspondant.

Le rendement industriel est, comme nous le savons, le quotient $\frac{T_u}{Q}$.

Ce rendement est toujours très faible, et on le comprend aussitôt en remarquant qu'il est le produit de trois rendements plus petits que l'unité. Soit, en effet, Q la portion de Q utilisée par la chaudière, T_m le travail moteur (travail des pressions de la vapeur sur le piston); on a :

$$\frac{T_u}{Q} = \frac{Q_1}{Q} \times \frac{T_m}{Q_1} \times \frac{T_u}{T_m}$$

Nous avons dit que $\frac{Q_1}{Q}$ est en général voisin de 0,60, que $\frac{T_m}{Q_1}$ (rendement thermique) ne dépasse guère 0,15.

Quand à $\frac{T_u}{T_m}$, il est sensiblement égal à 0,90. On a donc

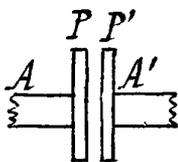
$$\frac{T_u}{Q} = 0,60 \times 0,15 \times 0,90 = 0,08.$$

Il suit de là qu'une machine ordinaire consomme au moins un kilogramme de charbon par cheval vapeur et par heure. En effet, la combustion d'un kilogramme de houille dégage environ 8000 calories c'est-à-dire une énergie équivalente à 8000×425 kilogrammètres. D'autre part, une machine dont la puissance est un cheval-vapeur fournit en une heure $75 \times 60 \times 60$ kilogrammètres. Or le quotient $\frac{75 \times 60 \times 60}{8000 \times 425}$ est égal à 0,08 environ.

388. - Dynamomètres enregistreurs.

Au lieu du frein de Prony, on emploie souvent des dynamomètres enregistreurs surtout pour mesurer le travail consommé par un outil. Un type de dynamomètre, dont l'idée remonte à Loncelé est le suivant :

Deux plateaux P, P' , calés normalement sur deux arbres indépendants sont placés en regard l'un de l'autre et reliés par des ressorts (non figurés). L'arbre A est mis en rotation par le moteur et l'arbre A' , entraîné par l'intermédiaire des ressorts, actionne l'outil. Si la masse des ressorts est négligeable, les deux couples exercés par P et P' sur les ressorts se font équilibre, et c'est la valeur (absolue) commune N des axes de ces deux couples



qu'il faut mesurer pour avoir la valeur du couple résis-
tant opposé par l'outil. Si $N=0$, l'arbre A n'est soumis
à aucun couple moteur; les ressorts sont à l'état naturel et
les deux plateaux ont une certaine position l'un par
rapport à l'autre. Si N n'est pas nul, la flexion des
ressorts est sensiblement proportionnelle à N ; mais elle
est également proportionnelle au déplacement relatif des
deux plateaux (c'est-à-dire à l'angle α dont un des plateaux
a tourné par rapport à l'autre). Un enregistreur inscrit
ce déplacement relatif α , et on a: $N=K\alpha$ (K désignant une
constante qui a été déterminée une fois pour toutes).
Connaissant la vitesse de rotation de l'arbre moteur (qui
est donnée par un autre enregistreur), on peut calculer
le travail consommé par l'outil.

Autres types de machines à vapeur.

389. - Machines à vapeur diverses.

On a essayé d'employer, comme vapeur motrice, d'au-
tres vapeurs [vapeur d'éther, vapeur d'alcool, etc] que la vapeur
d'eau. Mais ces tentatives ont été peu heureuses, et on en
conçoit aussitôt la raison si on se reporte à l'étude du
rendement thermique. Ce rendement est au plus égal à
 $\frac{\Theta_1 - \Theta_2}{\Theta_1}$; il sera donc d'autant plus faible que $\frac{\Theta_1}{\Theta_2}$ sera plus
 Θ_1 faible. Or les vapeurs d'éther et d'alcool Θ_1 atteignent
la pression de 10 atmosphères (pression qu'on ne peut dé-
passer sans danger), la première pour 119° , la seconde pour
 152° , tandis que la vapeur d'eau n'atteint cette pression
qu'à 180° . On peut, il est vrai, abaisser un peu pour l'éther
et l'alcool la température Θ_1 , mais cet abaissement est
bien loin de compenser celui de Θ_2 . Seules, les machines
à vapeur de pétrole ⁽¹⁾ semblent pouvoir rendre quelque
service, surtout à cause du graissage parfait des pièces
qu'entretient le pétrole.

(1) Il ne faut pas confondre ces machines avec les moteurs à pétrole
et à explosion. Dans les machines à vapeur de pétrole, le pétrole
est volatilisé par la chaleur comme l'eau dans les machines or-
dinaires; l'expansion de sa vapeur met le piston en mouvement,
puis cette vapeur se condense, etc.

390. - Turbines à vapeur.

Dans certains dispositifs, au lieu d'agir par sa pression sur un piston, la vapeur d'eau actionne directement un arbre auquel elle communique un mouvement de rotation uniforme. C'est ce qui a lieu dans les turbines à vapeur qui ont pris, au cours de ces dernières années une grande extension. Ces turbines sont très analogues, dans leur principe, aux turbines hydrauliques, mais le fait que l'eau motrice est remplacée par la vapeur d'eau motrice, entraîne dans leur construction, des modifications considérables. Dans les turbines à vapeur, on laisse la vapeur d'eau se détendre, soit complètement, soit partiellement: la vapeur d'eau, guidée dans les tuyères, arrive avec une certaine vitesse sur les aubes d'une roue formant de véritables alvéoles, et met la roue en mouvement soit par sa vitesse seule, soit surtout par sa pression. Dans le premier cas, la turbine est dite turbine à action; dans le second cas turbine à réaction, division analogue à celle que nous avons indiquée pour les turbines hydrauliques.

La turbine à réaction fonctionne à une allure modérée, qui n'exige pas de précautions particulières, et qui permet souvent de supprimer les transmissions par engrenages. Par contre, elle donne lieu à des fuites, dues au jeu inévitable entre les parties fixes et les parties tournantes. On atténue cet inconvénient dans une certaine mesure en fractionnant la détente entre plusieurs disques successifs. La turbine est alors composée d'une succession de couronnes, de diamètres croissants et dont les alvéoles formées par les aubes sont de plus en plus grandes: la vapeur en effet perdant à la fois de la vitesse et de la pression doit occuper un volume de plus en plus grand. La turbine Parsons est basée sur ce principe et réalise aujourd'hui des puissances considérables avec un bon rendement.

La turbine à action n'expose guère aux fuites, parce que la vapeur lui arrive entièrement détendue. Mais le fluide, à son entrée, possède une vitesse considérable, atteignant jusqu'à un kilomètre à la seconde. Pour recevoir, sans choc violent, l'impulsion d'un tel jet, il faut que la turbine elle-même soit animée d'une vitesse de rotation colossale. La turbine de Laval par exemple n'effectue pas moins de 500 tours à la seconde. Cette grande

vitesse de rotation présente plusieurs inconvénients : tout d'abord elle nécessite en général l'interposition entre l'arbre et l'outil d'un engrenage qui consomme toujours une quantité notable de travail. Ensuite, elle exige un calibrage parfait du disque et de l'arbre ; il faut que l'axe de rotation soit axe central d'inertie de l'arbre (à une erreur insignifiante près⁽¹⁾). On a reconnu d'ailleurs l'utilité de laisser à cet axe une certaine flexibilité, qui permet à l'axe de vibrer comme un gyroscope, au lieu qu'un axe absolument rigide et maintenu dans des coussinets fixes supporterait des réactions capables de le briser ou de le fausser.

Les turbines se recommandent par la simplicité de leurs dispositions, par la grandeur du travail qu'elles peuvent fournir sous un petit volume, par l'uniformité de la rotation due à la constance du couple moteur. Au point de vue du rendement, elles ne sont pas plus avantageuses que les machines ordinaires à piston.

391. — La théorie des turbines à vapeur est plus complexe encore que celle des turbines hydrauliques. Dans les turbines hydrauliques, on sait du moins que l'eau garde un volume invariable ; dans les turbines à vapeur, le fluide se détend suivant une loi inconnue qu'il faut déterminer. Or l'étude précise des lois d'écoulement d'une vapeur saturée est loin d'être achevée. D'où une difficulté considérable à calculer les formes des tuyères et des aubes : car il est indispensable, pour éviter des chocs ou des remous considérables, que les tuyères où se détend la vapeur et qui l'amènent sur la turbine imitent la forme d'un filon du fluide dans sa détente naturelle ; on est réduit à procéder empiriquement. On a reconnu à l'expérience que, dès que la pression d'amont devient considérable et dépasse le double de la pression d'aval, il faut employer des tuyères dont la section, après avoir diminué progressivement jusqu'à une certaine limite, augmente ensuite jusqu'à l'issue. On explique le fait en admettant que la vapeur traverse la section étranglée et

(1) On arrive à faire en sorte que le centre de gravité soit à une distance de l'axe inférieure à $\frac{1}{200e}$ de millimètre.

avec une vitesse égale à celle qu'aurait le son dans la vapeur: nous verrons, en effet, en Hydrodynamique qu'un filer fluide naturel doit alors présenter un étranglement.

Moteurs à explosion et à combustion.

392. - Machines acycliques.

Nous allons étudier maintenant les moteurs thermiques où le phénomène chimique, source d'énergie, produit des gaz d'où l'expansion est employée directement comme force motrice [N^o 3]. Ces moteurs à explosion ou à combustion, [machines à gaz, moteur à pétrole] ont pris, dans ces dernières années, une importance considérable.

La force-vive de la machine proprement dite reste périodique pendant la marche normale. Mais ces machines ne sont plus cycliques [N^o 382]: la masse μ de gaz (ou de pétrole) qui alimente la machine pendant un temps donné subit une transformation définitive.

393. - Disposition générale des machines à gaz et à pétrole.

La disposition générale d'une machine à gaz est analogue à celle d'une machine à vapeur. Pendant la marche normale, quand le piston se soulève, le mélange explosif (ou comburant), à la pression atmosphérique, est aspiré sous le piston, dans la cavité inférieure du cylindre: à un certain moment de la course ascendante du piston, cette cavité est fermée, et une étincelle provoque l'explosion; il en résulte une expansion brusque de gaz qui pousse le piston, et les gaz se détendent jusqu'à l'extrémité de sa course. A ce moment, le cylindre est mis en communication avec l'atmosphère, et le piston, entraîné par la vitesse acquise de la machine et redescend jusqu'au bas de la course, et ainsi de suite. (1)

Celle est la marche normale de la machine: mais il convient de remarquer que la machine doit être mise

(1) La description de l'appareil suppose le cylindre d'axe vertical, mais ce n'est là qu'une manière d'abrégier le langage.

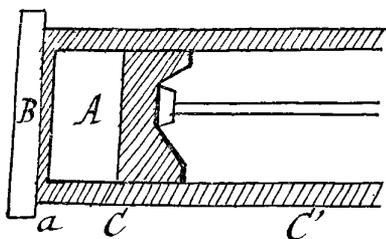
en train. Il faut que le piston soit animé préalablement, par un procédé quelconque, d'un mouvement alternatif.

394. - Types usuels.

Il existe différents types de machines à gaz.

1^{er} type. Le type le plus simple [machine à explosion sans compression] est celui qui vient d'être décrit au N^o précédent. La machine Senoir [portefeuille, pl XI], la première machine à explosion vraiment pratique, rentre dans ce type. Elle a été rapidement abandonnée, à cause de son mauvais rendement: elle consommait plus de trois mètres cubes de gaz par cheval et par heure.

Deuxième type. [Machine à explosion avec compression]. Le cylindre, qui est à simple effet, est représenté dans la figure avec le piston à l'extrémité de sa



course; on voit que le piston laisse un espace considérable A entre sa face postérieure et le fond du cylindre; cet espace est la chambre de compression.

Une période complète de la machine comprend deux aller et retour du piston, ce qu'on tra-

duit en disant que la machine est à 4 temps.

1^{er} Temps. - Le piston va de C en C'; le cylindre A communique avec le mélange explosif qui est aspiré dans le cylindre.

2^e Temps. - Le piston revient de C' en C, et comprime le mélange explosif dans la chambre A (qui est close pendant ce deuxième temps).

3^e Temps. - L'explosion se produit, les gaz chauds se détendent, et poussent le piston de C en C' en produisant du travail.

4^e Temps. - Le piston revient de C' en C et expulse les gaz brûlés dans l'atmosphère (avec lequel communique alors le cylindre A).

L'ouverture et la fermeture des orifices du cylindre A s'effectuent automatiquement par le jeu d'un tiroir que commande un arbre spécial actionné par l'arbre moeur.

On voit qu'il n'y a production de travail moteur que

pendant le 3^e temps. Pendant les trois autres temps, le piston ne se meut qu'en vertu de la vitesse acquise de la machine. De là le nom de machine à quart d'elles donné au moteur Otto [Portefeuille, Planche XI], qui est le moteur classique rentrant dans le type en question.

Le moteur Otto présente une grande économie sur les moteurs sans compression⁽¹⁾, car la consommation n'atteint pas 1000 litres par cheval et par heure.

Troisième Type. - Machines à combustion.

Dans ces machines, le mélange inflammable, au lieu de faire explosion, brûle graduellement. Les seuls moteurs de cette catégorie qui aient aujourd'hui un intérêt pratique sont à la fois à combustion et à compression [Moteur Diesel].

Le moteur Diesel est à quatre temps, comme le moteur Otto : seulement dans le premier temps, c'est de l'air seul qui est aspiré dans le cylindre ; dans le second temps, l'air est comprimé par le piston et s'échauffe notablement au-dessus du point d'inflammation du combustible. Au début du 3^e temps, on injecte le combustible qui s'enflamme, et l'expansion des gaz pousse le piston. Dans le dernier temps, les gaz sont expulsés.

Le combustible employé dans le moteur Diesel est du pétrole ; la consommation n'atteint pas 250 grammes par cheval-heure.

Dans tous les types de machine qui précèdent, l'avance à l'allumage améliore le rendement, comme le fait l'admission anticipée de la vapeur pour les machines à vapeur. Autrement dit, il convient de provoquer l'explosion (ou la combustion) un peu avant que le piston soit à la fin de sa course.

Quatrième type. - Moteurs atmosphériques. -

[Machine Otto-Langen, portefeuille, pl. XI]

Dans ces machines, le piston est libre pendant l'explosion : il est donc lancé violemment par l'expansion des gaz qui se détendent au-dessous de la pression atmosphérique.

(1) On peut justifier par certaines considérations de thermodynamique l'utilité de la compression.

Cette pression fait ensuite rétrograder le piston qui engrène alors sur l'arbre moteur; c'est donc la pression atmosphérique qui effectue directement un travail moteur.

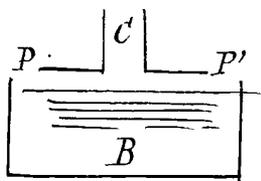
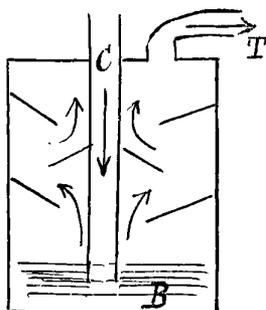
Bien que ces moteurs aient un rendement très satisfaisant (800 litres de gaz par cheval-heure), leur mécanisme compliqué, bruyant et irrégulier les a fait abandonner aujourd'hui.

Automobiles.

395. - Moteurs à pétrole. - Carburateurs.

Ce sont les moteurs à pétrole à explosion avec compression qui sont le plus employés. Les moteurs à pétrole ne diffèrent des moteurs à gaz que par la substitution au mélange d'air et de gaz d'un mélange d'air et de vapeurs de pétrole préparé dans le carburateur.

On distingue les carburateurs à barbotage et les carburateurs à pulvérisation.

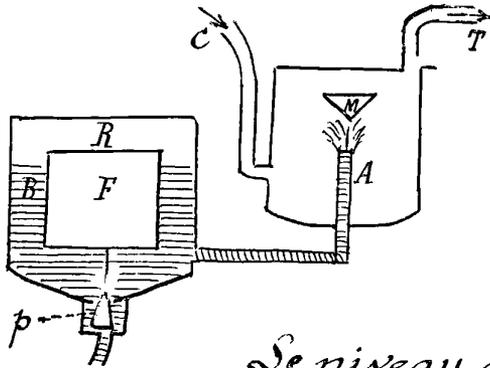


Dans les carburateurs à barbotage, l'air appelé du dehors par une cheminée C, plonge dans le bain liquide B, puis remonte par un chemin sinueux au cours duquel les gouttelettes non gazéifiées retombent dans le bain, et s'en va ensuite aux cylindres par le tuyaux T.

Une variante de ce dispositif consiste à arrêter la cheminée C un peu au-dessus du bain en lui adjoignant un plateau P P' qui oblige l'air à s'étaler au contact du liquide: on a alors un carburateur à l'échage.

On règle la carburation par divers procédés: échauffement du bain au moyen d'une dérivation de l'échappement du moteur; échauffement de l'air aspiré; entrée supplémentaire d'air frais venant se mélanger à l'air carburé en un point de son trajet du carburateur au moteur.

Dans les carburateurs à pulvérisation, l'essence est maintenue à un niveau constant dans un petit réservoir R, au moyen d'un flotteur F commandant un pointeau



est placé sur la conduite venant du réservoir principal. De là elle est conduite à un ajutage *A* au sortir duquel le jet se brise sur la pointe d'un cône métallique *M*. L'air frais arrivant de son côté par la cheminée *C*, volatilise les gouttelettes.

Le niveau de *A* doit être un peu supérieur à celui du bain *B*, afin qu'il ne se produise pas d'écoulement dans les périodes de repos. L'écoulement est déterminé, pendant la marche, par l'aspiration du tuyau *T* aboutissant aux cylindres moteurs.

Le réglage du mélange se fait par les mêmes procédés que pour les carburateurs à barbotage; toutefois il demande ici moins de précautions, et l'on se contente généralement de l'addition variable d'air frais au mélange carburé.

Les appareils qui précèdent concernent l'essence volatile. Ils fonctionneraient mal avec le pétrole lampant. Pour celui-ci, on volatilise le liquide par la chaleur directe, après l'avoir injecté, par une petite pompe, dans une capacité spéciale précédant la chambre d'explosion.

La distribution se fait par soupapes.

L'allumage a lieu de diverses façons (brûleurs, ou bien étincelle électrique fournie, en temps opportun, soit par des accumulateurs soit par une petite machine magnéto-électrique).

Enfin, pour empêcher l'échauffement du moteur, on l'entoure d'un radiateur à grande surface de rayonnement (radiateur à rayons d'abeille) à l'intérieur duquel circule de l'eau. Grâce au rayonnement et à la vitesse de l'air par rapport à la voiture, l'eau du radiateur garde une température assez faible.

396 - Transmission du mouvement - Différentiel.
Le mouvement du piston est transformé en mouvement circulaire continu par une connexion directe, et ce mouvement circulaire continu est transmis aux roues de la voiture par un engrenage ou une chaîne sans fin

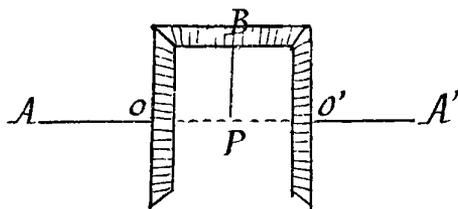
qui amplifie dans un rapport arbitrairement choisi la vitesse de rotation.

Mais pour éviter les glissements des roues dans les virages, au lieu d'animer directement l'essieu des roues motrices, le mouvement leur est transmis à l'aide d'un dispositif ingénieux appelé le différentiel.

Supposons en effet les deux roues calées sur un essieu qui leur communique, par suite, la même vitesse angulaire. Soit P le milieu de l'essieu AA' , $2l$ sa longueur: pour que la roue de centre A ne glisse pas il faut que la vitesse communiquée au point le plus bas par la rotation détruise la vitesse du centre A , donc que cette dernière vitesse soit perpendiculaire à l'essieu; la même remarque s'appliquant à A' , on voit que le point A et A' doivent décrire deux courbes parallèles (auxquelles AA' reste normal) avec la même vitesse, ce qui n'est possible que si ces deux courbes sont des droites parallèles.

Pour obvier à cet inconvénient (qui serait désastreux pour les pneus des roues), chaque roue est calée sur un essieu $AO, A'O'$ les deux arbres

$AO, A'O'$ (directement opposés) portant deux roues coniques égales O et O' calées sur ces arbres. Une troisième roue co-



mais mobile librement autour de cette droite, engrène sur les deux premières: la roue B peut donc tourner sur elle-même en même temps que son axe PB pivote autour de AA' .

Soit m, n, α , les rotations des roues O et O' et de PB , rotations comptées positivement autour de la demi-droite OO' . Si $\alpha = 0$, les vitesses des éléments de O et de O' en contact avec la roue B sont égales et de sens contraires; d'où $m = -n$. Si $\alpha \neq 0$, on voit aussitôt (en étudiant les mouvements relatifs par rapport au plan OPB) qu'on a:

$$m - \alpha = -(n - \alpha), \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{m+n}{2}.$$

(1) Ces roues ne sont pas figurées sur le schéma ci-contre.

Ce n'est là d'ailleurs qu'une application de la méthode de Willis, le plan IPB jouant le rôle de châssis.

C'est le châssis IPB qui actionne le moteur et auquel il communique une vitesse angulaire a autour de AA' . Supposons que l'automobile effectue un virage, dans lequel P décrit un cercle Γ de rayon R , passant par exemple A à son intérieur. Pour qu'aucune des roues A et A' ne glisse, il faut que les points A et A' décrivent deux cercles concentriques à Γ et de rayons $R+l$ et $R-l$; leurs vitesses sont dans le rapport $\frac{R+l}{R-l}$, et ce rapport doit être égal à celui des vitesses angulaires des deux roues A et A' ; d'où:

$$\frac{m}{n} = \frac{R+l}{R-l}$$

Cette équation, jointe à l'équation: $a = \frac{m+n}{2}$, donne⁽¹⁾

$$(1) \quad m = \alpha \left(1 + \frac{l}{R} \right), \quad n = \alpha \left(1 - \frac{l}{R} \right).$$

Le non-glissement est donc possible, grâce au différentiel. Pour que ce soit le mouvement réel, il faut et il suffit que les réactions du sol sur les roues A, A' , calculées dans cette hypothèse, vérifient les inégalités du frottement au repos. Cette condition sera toujours satisfaite si le coefficient de frottement entre les roues et le sol est suffisant: mais si ce coefficient est faible par exemple si le sol est humide, les roues glisseront sur le sol, malgré le différentiel.

- Réglage et changement de vitesse. - Considérons une automobile en marche normale sur une route horizontale. Le travail \mathcal{E}_m des forces motrices qui s'exercent sur le piston est égal au travail (chargé de signe) des résistances de l'air, des frottements de roulement des roues sur le sol et des frottements intérieurs de la machine. Quand on augmente la vitesse de l'automobile, le travail \mathcal{E}_m (par minute) croîtrait proportionnellement à la vitesse, si toutes les résistances restaient les mêmes; mais en réalité, les résistances de l'air croissent très rapidement avec la vitesse, en sorte que \mathcal{E}_m croît beaucoup plus vite que la vitesse. La puissance de la machine,

(1) Si P décrit une courbe Γ quelconque dont la courbure (à l'instant) serait $\frac{1}{R}$, les formules (1) donnent encore m et n à l'instant t .

par suite la dépense de pétrole, doit donc croître avec la vitesse, et plus rapidement que la vitesse. Si l'automobile monte une côte, d'inclinaison i , il faut ajouter aux résistances la force $Mg \sin i$ [M masse de la machine], force dont le travail (en une seconde) est proportionnel à la vitesse de la voiture.

Quand on veut que la machine fonctionne toujours en donnant le même nombre de coups de piston par minute, comment passe-t-on d'une vitesse à une vitesse plus grande par exemple? On changeant, à l'aide d'un désembrayage et d'un embrayage, l'engrenage qui commande la rotation du chassis PB du différentiel: à un aller et retour du piston correspond alors un plus grand nombre de tours de roue de la voiture. Mais il faudra que le réglage accroisse en même temps l'admission du mélange explosif, pour que la puissance du moteur soit accrue.

Chapitre IV.

Volants et régulateurs.

397. - Volants et régulateurs.

La régularité de la marche d'une machine est une condition indispensable de son bon fonctionnement.

Nous indiquerons brièvement les divers procédés qui servent à régulariser le mouvement d'une machine.

Pendant la marche normale, la force vive d'une machine, les forces appliquées, etc. sont périodiques. Mais, durant une période, les oscillations de la force vive peuvent être plus ou moins grandes; il importe de réduire autant que possible ces oscillations. C'est là l'objet des volants.

D'autre part, la même machine peut comporter plusieurs régimes. Imaginons, par exemple, qu'une machine actionne plusieurs outils et qu'on désembrayage un des outils: la machine, ayant à surmonter des résistances

moindres, va s'affoler à moins qu'on ne diminue les forces motrices. Il importe donc de munir la machine d'un dispositif qui diminue (ou accroisse) automatiquement les forces motrices quand les résistances diminuent (ou croissent). C'est le but des régulateurs.

Ainsi, tandis que les volants diminuent les oscillations de la force vive pendant un régime de marche déterminé, les régulateurs réalisent sans-à-coups le passage d'un régime de marche à un autre.

Théorie des volants.

398. - Travail des forces appliquées à une machine.

Nous supposons la machine à liaisons complètes, et nous définissons sa position à l'aide du paramètre θ , l'angle dont tourne l'arbre principal de la machine. Chaque fois que θ croît de 2π , la force vive, les forces données, les résistances doivent redevenir les mêmes.

Dans un déplacement θ à $\theta + d\theta$ de la machine, le travail des forces appliquées à la machine est de la forme $Q d\theta$. Pour que la force vive soit périodique, il faut et il suffit qu'on ait : $\int_{\theta}^{\theta+2\pi} Q d\theta = 0$. Analysons cette condition.

Le travail $Q d\theta$ se compose du travail des forces motrices, du travail des résistances utiles et du travail des résistances passives. Les deux premiers sont de la forme : $\Phi(\theta) d\theta$, $-\Psi(\theta) d\theta$, où les fonctions Φ , Ψ ne dépendent que de θ et admettent la période 2π ; en effet, les forces motrices et les résistances utiles ne dépendent (du moins en général) que de la position du système. Quant au travail des résistances passives, il dépend de θ' ; mais ce travail étant faible devant les deux autres, nous le négligerons dans ce qui suit. On aura donc :

$$Q(\theta) = \Phi(\theta) - \Psi(\theta);$$

la fonction Q est une fonction uniforme de θ qui admet la période 2π .

Ceci posé, considérons la fonction $R(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} Q(\theta) d\theta$; on a évidemment : $R(\theta + 2\pi) - R(\theta) = Cte = R(2\pi) - R(0)$, car

$R'(\theta + 2\pi) - R'(\theta) \equiv Q(\theta + 2\pi) - Q(\theta) \equiv 0$. Il suit de là que $\int^{\theta+2\pi} Q(\theta) d\theta = \int^{\theta} Q(\theta) d\theta$. Pour que la force vive de la machine soit périodique, il faut donc et il suffit que l'intégrale $\int_0^{2\pi} Q(\theta) d\theta$ soit nulle.

399. - Maxima et minima de la force vive

a :

$$I - I_0 = \int^{\theta} Q(\theta) d\theta, = R(\theta),$$

Les maxima ou minima de la force vive correspondent aux racines de l'équation: $R'(\theta) \equiv Q(\theta) = 0$. Puisque la force vive est périodique, elle présente (si elle n'est pas constante) au moins un maximum absolu et un minimum absolu correspondant à deux racines θ_2, θ_1 de $Q(\theta) = 0$; l'oscillation maxima de la force vive est donnée par l'intégrale :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} Q(\theta) d\theta.$$

400. - Expression de la force vive.

La force vive de la machine peut s'écrire :

$$C(\theta) \theta^2 \equiv C(\theta) \omega^2$$

$C(\theta)$ désignant une fonction de θ uniforme et périodique, qui admet la période 2π .

Approfondissons l'expression de cette force vive. La machine comprend deux espèces de pièces :

1° : Celles qui tournent avec des vitesses angulaires proportionnelles à ω (pièces tournantes); leur force vive totale est égale à $I\omega^2$, I désignant une certaine constante qui a les dimensions d'un moment d'inertie.

2° : Celles qui oscillent (bielles, balanciers pistons, etc), ou qui tournent avec des vitesses angulaires toujours de même sens, mais dont les rapports à ω dépendent de θ , en sorte que les courroies. Leur force-vive totale est de la forme $f(\theta)\theta^2$ où $f(\theta)$ admet la période 2π . La masse de ces pièces est toujours très faible devant celles des pièces tournantes: il y a exception toutefois pour les balanciers, mais ces derniers sont animés de faibles vitesses. Pour ces deux raisons, $f(\theta)$ est petit, et si f est sa valeur moyenne, nous pouvons, moyennant une faible erreur, confondre f avec f et le faire rentrer dans I . C'est ce que nous ferons dans ce qui suit.

401. Calcul d'un volant.

Le volant est une roue supplémentaire en fonte, montée en général sur l'arbre moteur : cette roue a un grand diamètre et sa masse est reportée autant que possible sur la circonférence où elle forme une couronne, de façon que le moment d'inertie par rapport à l'axe soit considérable. Nous allons montrer comment l'addition du volant permet de régulariser la marche normale. L'équation des forces vives donne

$$(1) \quad I(\omega^2 - \omega_0^2) = 2 \int_0^\theta Q(\theta) d\theta;$$

comme le volant est supposé mis en place, son moment d'inertie est compris dans la constante I , où il est prépondérant. Cette équation montre que l'on peut, en augmentant ce moment d'inertie, et par suite la valeur de I , diminuer à volonté, pour une valeur donnée du second membre, l'écart entre ω et ω_0 .

Il est à remarquer que l'équation (1), relative au mouvement général d'une machine; est la même que celle du mouvement d'un arbre unique ayant un moment d'inertie égal à I et soumis à des forces dont le moment total, par rapport à l'axe, est égal à $Q(\theta)$.

Ceci posé, soit ω_2 le plus grand maximum, et ω_1 le plus petit minimum de ω pendant une période. Pour que la marche soit régulière, il faut et il suffit que $\omega_2 - \omega_1$, qui représente dans une période la plus grande variation de la vitesse, soit une petite fraction de la vitesse moyenne $W = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$. Or par l'addition du volant, on peut rendre I assez grand pour que, si l'on pose $\omega_2 - \omega_1 = \frac{W}{n}$, le coefficient de régularisation n ait une valeur donnée très petite.

Ecrivons, en effet,

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{W}{n} \quad \omega_2 + \omega_1 = 2W.$$

D'autre part, désignant par θ_1, θ_2 les valeurs de θ qui correspondent aux vitesses ω_1, ω_2 [$Q(\theta_1) = 0, Q(\theta_2) = 0$];

$$I(\omega_2^2 - \omega_1^2) = 2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} Q(\theta) d\theta$$

ou, par suite des relations précédentes:

$$(2) \quad I \frac{W^2}{\pi} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} Q(\theta) d\theta.$$

Cette équation détermine I , si W est connu et si l'on se donne π , car la valeur numérique du second membre doit être considérée comme connue.

Désignant par τ le travail moteur effectif pendant un tour de l'arbre, $[\tau = \int_0^{2\pi} Q(\theta) d\theta]$, posons

$$(3) \quad \int_{\theta_1}^{\theta_2} Q(\theta) d\theta = A\tau;$$

A est un coefficient numérique indépendant des unités. La formule (2) devient ainsi :

$$(4) \quad I \frac{W^2}{\pi} = A\tau.$$

Voici comment, dans la pratique, on détermine W et τ .

1^o Valeur de W . - Soit N le nombre de tours par minute⁽¹⁾. L'angle décrit par minute est $2\pi N$. et du ce nombre par 60, on a l'angle décrit par seconde c d W .

On a donc :

$$(5) \quad W = \frac{2\pi N}{60}.$$

2^o Valeur de τ . - Pendant une minute le travail effectif (en kilogrammètres) est $N\tau$; si donc P est (en chevaux) la puissance effective de la machine, on a $\frac{N\tau}{60} = 75 P$, d'où :

$$(6) \quad \tau = 4500 \frac{P}{N}.$$

En substituant ces valeurs dans la relation (4), on a pour déterminer le moment d'inertie la formule :

$$(7) \quad I = 4,1 \times 10^5 \frac{\pi A P}{N^3}.$$

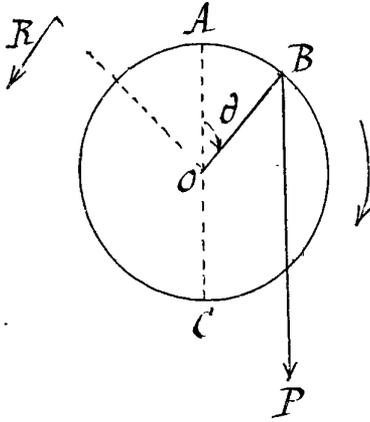
Le coefficient de régularisation π est généralement compris entre 50 et 60.

Dans chaque cas particulier, le seul nombre à calculer est A . Donnons un exemple de ce calcul.

(1) Ce nombre est mesuré à l'aide d'un tachymètre. Il est facile d'enregistrer de bien des manières le nombre de tours d'un arbre en un temps donné.

403. - Manivelle à simple effet.

Soit un arbre auquel sont appliquées deux forces : une résistance tangentielle constante R et une puissance constante P agissant sur le bouton B de la manivelle par une bielle dont on néglige l'obliquité. La manivelle est à simple effet, c.à.d. que B n'est actionné que sur la demi-circonférence ABC .



Designant par a la distance de R à l'axe et par b le rayon de la manivelle, par θ l'angle AOB , on a :
 $Q(\theta) = Pb \sin \theta - Ra$, le long de ABC ,
 et $Q(\theta) = -Ra$, le long de CA .

Voici maintenant, dans ce cas particulier, les solutions des trois questions du problème général.

1° Condition de la périodicité de la vitesse.

Exprimons que, dans un tour, le travail moteur est égal au travail résistant. On trouve $2Pb = 2\pi Ra$, c'est-à-dire

$$(8) \quad \frac{Ra}{Pb} = \frac{1}{\pi}.$$

2° Maximum et minimum de la vitesse.

L'équation $Q(\theta) = 0$ donne ici :

$$Pb \sin \theta - Ra = 0, \text{ d'où (en vertu de (8)) :}$$

$$\sin \theta = \frac{1}{\pi}.$$

Les deux racines sont

$$\theta_1 = 18^\circ 33' 40''$$

$$\theta_2 = 161^\circ 26' 20''$$

et la première correspond au minimum, la seconde au maximum.

3° Calcul de A . - On a ensuite : en remarquant que

$$\theta_2 = \pi - \theta_1 :$$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} Q(\theta) d\theta = 2Pb \cos \theta_1 - Ra(\theta_2 - \theta_1) = 2Pb \left(\cos \theta_1 - \frac{Ra}{Pb} \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} \right)$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (8) et remarquant que $2Pb$ représente le travail moteur de la bielle dans un tour :

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} Q(\theta) d\theta = \left(\cos \theta, -\frac{\theta_2 - \theta_1}{2\pi} \right) \tau.$$

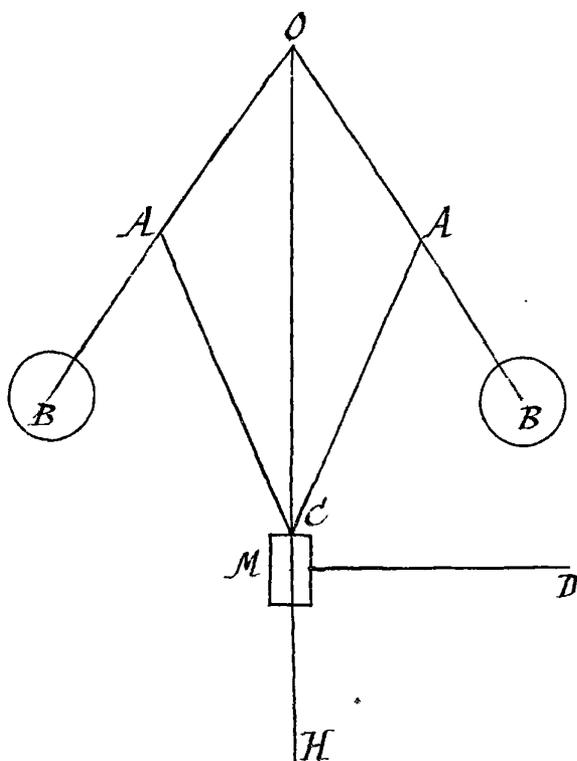
La quantité entre parenthèses est le coefficient A ;
en faisant le calcul on trouve ;

$$A = 0,552.$$

Régulateurs.

404. - Régulateur à force centrifuge de Watt.

Le régulateur de Watt se compose de deux boules pesantes B, B , suspendues par des tiges OB articulées en O autour d'un axe horizontal invariablement lié à un arbre auquel la machine communique une rotation (de vitesse angulaire ω) autour de la verticale OH . Le plan BOB tourne donc avec l'arbre. La vitesse angulaire ω coïncide avec celle de l'arbre principal de la machine, ou du moins croît avec cette vitesse.



Les tiges OB sont articulées en A à deux autres tiges AC , lesquelles sont articulées en C avec un manchon M qui peut glisser sans frottement sur l'arbre vertical. L'appareil est symétrique par rapport à OH .

Ce manchon est solidaire d'un levier de manœuvre MII qui agit sur l'organe de distribution (valve d'arrivée de la vapeur dans les moteurs à vapeur, vanne d'arrivée de l'eau dans les moteurs hydrauliques).

Pendant la marche normale, la vitesse ω est constante. Nous verrons, dans la théorie du mouvement

relatif, qu'à cette vitesse ω correspond une certaine position d'équilibre relatif (stable) de l'appareil, position où les boules ont un certain écart, d'autant plus grand que ω est plus

grand⁽¹⁾

Imaginons que pour une cause quelconque (pour exemple, le débrayage d'un outil), les résistances utiles diminuent (ou que les forces motrices croissent) brusquement : la machine, donc ω , s'accélère. Le régulateur se soulève. Soit M_1 la position du manchon pour laquelle l'admission règle les forces motrices de façon qu'elles équilibrent les résistances ; soit B_1 la position correspondante des boules B , et Ω la valeur que doit avoir ω pour que les boules restent en équilibre en B_1 . Tant que M dans son mouvement ascensionnel n'a pas dépassé M_1 , ω croît ; M atteint donc et dépasse M_1 ; mais dès que M_1 est dépassé, ω décroît ; M atteindra donc une hauteur maxima M' , puis redescendra au-dessous de M_1 , etc. Ce n'est qu'après une série d'oscillations que le manchon s'arrêtera (à cause des résistances passives) en M_1 ou très près de M_1 , ω gardent alors sensiblement la valeur Ω qui correspond au nouveau régime. L'appareil fonctionne d'une façon analogue si les résistances utiles sont brusquement accrues ; ω décroît ; M descend.

Sensibilité du régulateur. - Si les frottements du régulateur et du manchon (tant intérieurs que sur l'arbre) sont négligeables ainsi que la résistance du levier, le manchon se met en mouvement dès que la machine s'accélère. Mais en réalité, à cause de ces résistances qui sont appréciables, le manchon ne se met en mouvement que quand ω a varié d'une quantité suffisante : en un mot, il reste immobile tant que ω est compris entre deux certaines valeurs ω_1, ω_2 . La différence $\omega_1 - \omega_2$ mesure, par définition, la sensibilité du régulateur.

Soit $\bar{\omega}$ la valeur de ω pendant le premier régime $\bar{\omega} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ sensiblement. Posons $\omega_1 - \omega_2 = \frac{\bar{\omega}}{n}$; n est dit le coefficient de sensibilité du régulateur.

Il faut que le régulateur soit sensible, et en même temps qu'il se règle vite, c'est-à-dire qu'il s'adapte au nouveau régime, après un petit nombre d'oscillations. C'est là toute la difficulté de la construction d'un régulateur. Nous reviendrons, en seconde année, sur la théorie du régulateur.

(1) L'angle HOB tend vers un droit quand ω tend vers l'infini.

405. - Régulateurs isochrones. - Régulateur à bras croisés de Farco.

On a cherché à construire des régulateurs tels que la vitesse de marche, c'est-à-dire ω , reste la même dans tous les régimes.

Le principe de ces appareils est le suivant : un tube creux solide C est emporté dans la rotation de l'arbre OH , et à l'intérieur de ce tube glisse une boule homogène B , commandant un levier qui modère ou accroît la force motrice. On cherche à déterminer la courbe C [lieu du centre de B] de façon que pour une certaine vitesse de rotation de l'arbre OH (qui sera la vitesse de régime adoptée une fois pour toutes), les positions de B sur la courbe C soient toutes des positions d'équilibre. Nous verrons, dans la théorie des mouvements relatifs, que la courbe C doit être une parabole d'axe OH , tournant sa concavité vers le haut et de paramètre $\frac{g}{\omega^2}$. On associe deux paraboles et deux boules symétriques par rapport à Oy qui soulèvent le même levier. En remplaçant les deux arcs utilisés de parabole par les deux cercles osculateurs en leur milieu, on obtient le régulateur à bras croisés de Farco.

Mais ces appareils sont aujourd'hui abandonnés à cause de leur instabilité qui rend leur réglage impraticable. Cette instabilité est facile à concevoir par la raison suivante : imaginons le levier détaché du régulateur ; ω est constant ; donnons aux boules B une petite vitesse ; elles vont parcourir toute la courbe C (si les frottements sont négligeables). Au contraire, dans le cas d'un régulateur de Watt (détaché du levier), écartons un peu le régulateur de sa position d'équilibre (stable) et donnons-lui une petite vitesse : il oscille au voisinage de sa position d'équilibre.

Livre IV.

Théorie générale de l'équilibre et des mouvements des systèmes.

Chapitre I.

Théorie générale de l'équilibre des systèmes. Principe des travaux virtuels.

406. Problème général de l'équilibre. — Les axes $Oxyz$ regardés comme fixes ayant été choisis, on dit qu'un système matériel S est en équilibre s'il reste immobile par rapport à ces axes; la position S_0 de S est dite position d'équilibre du système si S , abandonné sans vitesse dans la position S_0 , reste immobile. Quand S est en équilibre, la force totale \vec{F} (relative aux axes $Oxyz$) qui s'exerce sur chaque élément P de S est nulle.

Nous considérons exclusivement, dans ce chapitre, des systèmes matériels formés de solides invariables, de dimensions d'ailleurs aussi petites qu'on voudra. Ce qui va suivre s'applique donc à tous les systèmes formés d'éléments dont chacun reste identique à soi-même et ne peut que se déplacer dans l'espace.

Ces éléments peuvent être en contact les uns avec les autres. Les corps solides fixes (par rapport aux axes choisis) extérieurs au système sont dits des obstacles. Par définition, les réactions extérieures appliquées au système seront les forces de contact (forces absolues) exercées par les obstacles fixes sur les éléments du système. Les réactions intérieures seront:

- 1° les forces intérieures de chaque solide;
- 2° les forces de contact qu'exercent entre eux les

solides qui composent le système.

Toutes les autres forces ⁽¹⁾ seront dites forces données.

Soit \bar{R} la réaction absolue totale et \bar{F}' la force donnée totale [relative aux axes $OXYZ$] qui s'exerce à l'instant t sur un élément P du système: La force totale \bar{F} (relative aux axes $OXYZ$) qui s'exerce sur P à l'instant t est:

$$\bar{F} = \bar{F}' + \bar{R};$$

Si le système est en équilibre, \bar{F} est nul; on a donc, pour chaque élément P et à chaque instant: $\bar{R} = -\bar{F}'$.

407. - Déplacements virtuels d'un système

Considérons un déplacement idéal du système dans lequel les liaisons sont respectées, c'est-à-dire dans lequel aucun solide du système ne pénètre dans un autre solide du système ni dans un des obstacles fixes. Il est loisible d'admettre que ce déplacement dépend d'un paramètre θ (qu'on peut appeler le temps virtuel). Le déplacement élémentaire de S correspondant à une variation infinitésimale $d\theta$ de θ sera dit déplacement virtuel de S : dans un tel déplacement l'élément P du système passe de la position P à la position P' , et on peut, si l'on veut appeler vitesse virtuelle ⁽²⁾ de P dans ce déplacement le vecteur $\frac{PP'}{SA}$.

D'après ces définitions, un déplacement virtuel du système est donc un déplacement infinitésimal conforme aux liaisons mais d'ailleurs quelconque. Si S occupe la position S_0 avant le déplacement, le déplacement est dit déplacement virtuel à partir de S_0 .

Le déplacement vrai du système entre les instants t et $t + dt$ est un déplacement virtuel.

⁽¹⁾ Si le système est en contact avec des corps extérieurs déformables ou avec des solides mobiles, les forces de contact exercées par ces corps sur le système sont rangées dans les forces données. Par exemple, si le système est mobile dans l'air, les résistances de l'air sont des forces données.

⁽²⁾ Cette terminologie n'a qu'un sens purement symbolique et son seul intérêt est de permettre d'employer, sans en changer les termes, les propositions de cinématique établies en regardant le temps comme paramètre variable.

408. - Travail virtuel des réactions. - A un instant t , le système occupe une position déterminée, soit S , et est soumis à des réactions déterminées \bar{R} . On appelle travail virtuel des réactions le travail des réactions \bar{R} dans tout déplacement virtuel, à partir de la position S . Un tel déplacement étant infinitésimal, le travail correspondant est un travail élémentaire. Il est sous-entendu que nous prenons comme infiniment petit principal (c'est-à-dire, si on veut, comme $d\theta$) le plus grand des déplacements des éléments P du système. Le travail élémentaire correspondant est du premier ordre ou nul.

409. - Systèmes dénués de frottement. - Admettons que tous les contacts entre les solides du système S ou entre ces solides et les obstacles aient lieu sans frottement, c.à.d. que les corps en contact soient parfaitement lisses. Nous allons étudier, dans cette hypothèse, le travail virtuel \mathcal{C} des réactions pour tout déplacement virtuel (compatible avec les liaisons).

I. - Système formé de solides libres et sans contact.

Cour-d'abord, si S se compose d'un solide libre [c.à.d. qui n'est en contact avec aucun obstacle fixe], les réactions se réduisent aux forces intérieures du solide, et on sait que le travail de ces forces est nul dans tout déplacement du solide. Le travail \mathcal{C} des réactions est donc nul dans ce cas particulier. Il en est de même si S se compose de solides libres et sans contacts entre eux ni avec aucun obstacle fixe.

II. - Système formé de deux solides en contact.

Quand S se compose de deux solides libres S' et S'' en contact à l'instant t au point géométrique P , soit P' et P'' les éléments matériels de S' et S'' qui se touchent en P , soit \bar{R} la réaction exercée par P'' sur P' et $-\bar{R}$ la réaction de P' sur P'' . La réaction \bar{R} est normale en P aux deux surfaces parfaitement lisses S' et S'' ; on admet de plus que ces deux surfaces sont sans adhérence, c.à.d. que \bar{R} s'oppose à la pénétration de l'élément P' dans l'élément P'' , mais ne s'oppose nullement à la séparation de P' et de P'' . Autrement dit, soit PN la demi-normale en P à S et à S' menée de P'' vers P' ; on admet que \bar{R} a le sens PN ou est nul.



Considérons maintenant un déplacement de S à partir de la position considérée: dans ce déplacement, ou bien les deux solides restent en contact et le déplacement de l'élément P' de S' par rapport à P'' (ou si on veut par rapport à S'') est tangent aux deux surfaces en P et a d'ailleurs un sens quelconque; ou bien les deux solides se séparent, et le déplacement virtuel de P' par rapport à S'' , soit δs , est dirigé du côté PN de S'' ; en un mot, le déplacement δs fait un angle aigu ou droit avec la demi normale PN .

Or, dans le déplacement virtuel considéré, le travail des deux réactions \bar{R} , $-\bar{R}$ que S' et S'' exercent l'un sur l'autre (à l'instant t) est ⁽¹⁾ [$N^\circ 90$]

$$R \delta s \cos (R, \delta s).$$

Ce travail est donc nul ou positif; il est positif si $\delta s \cos (R, \delta s) \neq 0$. Il est nul, si dans le déplacement virtuel, S' et S'' restent en contact.

Comme le travail virtuel des forces intérieures de chaque solide est nul, on voit que le travail virtuel \mathcal{C} des réactions est essentiellement nul ou positif dans ce cas particulier.

III. - Cas général. - Le dernier théorème s'étend immédiatement au cas général.

En effet tout d'abord le travail virtuel des forces intérieures de chaque solide de S est nul. D'autre part, soit (à l'instant t) P un contact des solides de S entre eux, par exemple des solides S' , S'' , et soit \bar{R} et $-\bar{R}$ les deux réactions que S' et S'' exercent l'un sur l'autre en P : dans tout déplacement virtuel de S' , S'' , le travail de \bar{R} et $-\bar{R}$ est nul ou positif. Soit enfin Q un contact de S et d'un des obstacles fixes, par exemple du solide S' et de l'obstacle Σ , et soit \bar{R}_1 la réaction en Q de Σ sur S' , $-\bar{R}_1$ la réaction de S' sur Σ ; le travail des deux réactions \bar{R}_1 , $-\bar{R}_1$ dans tout déplacement virtuel de S' est nul ou positif; mais le travail de la force $-\bar{R}_1$ appliquée à un élément immobile.

(1) Soit w la vitesse virtuelle de P' par rapport à S'' ; le travail des deux réactions est $Rw \cos (R, w) \delta \theta = R \delta s \cos (R, \delta s)$.

de Σ est nul⁽¹⁾; le travail virtuel de la réaction \bar{R}_1 appliquée à S est donc nul ou positif. En faisant la somme des travaux virtuels de toutes les réactions tant intérieures qu'extérieures, on voit que cette somme \mathcal{C} , composée de termes tous positifs ou nuls, est positive ou nulle.

Tous avons donc bien démontré le théorème énoncé:

“Soit S un système de solides invariables qui peuvent être en contact entre eux ou avec des obstacles fixes, les surfaces en contact étant toutes parfaitement lisses et sans adhérence: le travail virtuel \mathcal{C} des réactions dans tout déplacement virtuel⁽²⁾ de S est positif ou nul.”

410. - Liaisons bilatérales et unilatérales.

Considérons un déplacement virtuel de S (avec des liaisons) dans l'élément P : renversons, pour chaque élément P de S , le sens du déplacement PP' , et appelons déplacement inverse du premier le déplacement ainsi défini; si P varie de P en P'' dans ce nouveau déplacement, on a: $PP'' = -PP'$. On convient de dire que le déplacement virtuel considéré est bilatéral si son inverse est lui-même un déplacement virtuel (compatible avec les liaisons). Dans le cas contraire, le déplacement virtuel est dit unilatéral.

Lorsque tout déplacement virtuel du système est bilatéral, les liaisons sont dites bilatérales. Dans le cas contraire les liaisons sont dites unilatérales.

Lorsque tout déplacement virtuel du système à partir de la position S_0 de S est bilatéral, les liaisons sont dites bilatérales pour la position S_0 .

Exemples. - Supposons que S soit une sphère mobile entre deux plans fixes parallèles dont la distance est égale à son diamètre. Les liaisons sont ici bilatérales, car l'inverse de tout déplacement virtuel de S est lui-même un déplacement virtuel.

Soit maintenant S une sphère située au-dessus d'un plan horizontal fixe Π avec lequel elle peut venir en contact. Lorsque S est en contact avec Π , tout déplacement virtuel dans lequel elle reste en contact avec Π est

(1) C'est ici qu'intervient l'hypothèse que les obstacles sont fixes.

(2) D'après nos définitions, tout déplacement virtuel doit être compatible avec les liaisons.

bilatéral ; au contraire, tout déplacement virtuel dans lequel P se soulève au-dessus de Π est unilatéral. Les liaisons sont donc unilatérales. Si dans la position S_0 , S est au-dessus de Π , un déplacement virtuel de S à partir de S_0 est un déplacement arbitraire du solide, les liaisons sont bilatérales pour la position S_0 .

Théorème. - Dans tout déplacement bilatéral, le travail des réactions est nul.

En effet, il est positif ou nul. S'il est positif, il est négatif dans le déplacement inverse qui est aussi un déplacement virtuel ; le travail des réactions serait donc négatif pour un déplacement virtuel, ce qui est absurde [N° 4.9].

Corollaire. - Quand les liaisons du système S sont bilatérales, le travail des réactions est nul dans tout déplacement virtuel⁽¹⁾ de S .

Remarque. - Tout ce qui précède suppose essentiellement que les glissements des solides les uns sur les autres et sur les obstacles fixes aient lieu sans frottement. Par exemple, considérons un système de deux solides rugueux en contact, supposons que dans le mouvement infinitésimal vrai du système les deux solides glissent l'un sur l'autre ; dans ce déplacement qui est un déplacement virtuel (compatible avec les liaisons), le travail des réactions est négatif [N° 90].

411. - Le travail des réactions dans le déplacement vrai du système.

Quand tous les glissements ont lieu sans frottement, nous savons [N° 90] que le travail total des réactions dans le déplacement réel du système (entre les instants t_1 et t_2) est nul quel que soit l'intervalle de temps t_1, t_2 considéré pourvu qu'il n'y ait pas de chocs dans l'intervalle. Il suit de là que dans tout déplacement infinitésimal vrai du système, le travail des réactions est nul, cela que les liaisons soient unilatérales ou bilatérales, du moment

(1) Voir la note 2 de la page précédente.

qu'elles sont sans frottement⁽¹⁾ et qu'aucun choc ne se produit à l'instant t .

412. - Quelques types de liaisons particulières.

Toutes les liaisons où n'interviennent que des solides invariables [solides du système ou obstacles fixes] rentrent dans l'étude précédente, car elles se réduisent toujours à une combinaison de contacts entre les solides du système ou entre ces solides et les obstacles. Nous avons signalé déjà (N° 91) quelques types de liaisons simples obtenues par de telles combinaisons. Revenons seulement sur le cas de deux solides articulés autour d'un point commun (articulation sphérique) ou autour d'un axe (articulation cylindrique).

Articulation sphérique. - Quelle que soit la manière dont est réalisée l'articulation sphérique (N° 91), si tous les contacts qui la réalisent ont lieu sans frottements, les réactions d'un des deux solides S' , S'' sur l'autre admettent une résultante passant par le point d'articulation O . En effet, le travail total des réactions mutuelles de S' et de S'' est nul dans tout déplacement virtuel du système. Or laissons S'' immobile et faisons tourner S' d'un angle $d\theta$ autour d'une demi-droite arbitraire OW issue de O ; dans le déplacement infinitésimal (compatible avec les liaisons) ainsi défini, le travail des réactions se réduit à la quantité:

$$OK \times \cos(OK, OW) d\theta,$$

si OK désigne le moment résultant par rapport à O des réactions de S'' sur S' . Ce travail est nul quelle que soit la direction OW ; donc $OK = 0$.

C. q. f. d.

(1) Supposons, par exemple, que S soit un solide glissant sur une surface fixe Σ parfaitement lisse, et que dans l'intervalle de temps t_0, t_1 , S reste en contact avec Σ , mais s'en sépare pour t_1 et se meuve comme un solide libre. Le travail de la réaction \vec{R} de Σ sur S est constamment nul, entre les instants t_0, t_1 parce que les deux solides tangents sont parfaitement lisses, et entre les instants t_1, t_2 parce que les deux solides séparés ne créent plus l'un sur l'autre. Les forces données variant d'une façon continue, \vec{R} s'annule à l'instant t_1 et changerait de sens si S restait en contact avec Σ .

Inversement, si les réactions de S'' sur S' admettent une résultante passant par O , le travail total des réactions du système est nul pour tout déplacement virtuel. En effet, le déplacement peut toujours se décomposer: 1° en un déplacement d'ensemble de tout le système S', S'' transporté comme un solide; 2° en un déplacement de S'' seul. Dans le déplacement 1°, le travail des réactions (forces intérieures) est nul, puisque le système se déplace comme un solide. Dans le déplacement 2° il est nul parce que OK est nul.

Dans l'étude statique ou dynamique du système S', S'' , quelle que soit la manière dont l'articulation est réalisée, du moment qu'elle est réalisée sans frottements, tout se passe comme si l'articulation était l'articulation géométrique idéale où S' et S'' n'ont de contact qu'au point géométrique d'articulation, et n'exercent par suite l'un sur l'autre qu'une réaction appliquée en ce point.

Articulation cylindrique. - Les mêmes remarques s'appliquent à une articulation cylindrique. Si elle est réalisée par des contacts sans frottement, les réactions d'un des solides S', S'' sur l'autre ont un moment résultant nul par rapport à l'axe d'articulation. Réciproquement, si cette dernière condition est remplie, le travail total des réactions mutuelles de S', S'' est nul dans tout déplacement virtuel. Tout se passe comme si l'articulation était une articulation géométrique idéale, où S' et S'' n'ont de contact que sur l'axe d'articulation.

413. - Postulat fondamental de la Statique. - Lorsque le système matériel S est en équilibre, la force totale F [relative aux axes choisis $OXYZ$] qui s'exerce sur un élément quelconque P de S est constamment nulle.

Inversement, soit S_0 une position de S telle que, S étant placé sans vitesse en S_0 à l'instant t , la force totale, F qui s'exerce à l'instant t sur un quelconque P de ses éléments soit nulle, (et cela quel que soit l'instant t considéré). Nous admettons que S_0 est position d'équilibre de S , autrement dit, que S abandonné sans vitesse à l'instant t_0 dans la position S_0 reste immobile (!)

(!) Voir cette note page suivante.

414. - Principes des travaux virtuels (ou des vitesses virtuelles). - Nous sommes en état d'établir, sous la forme générale que lui a donnée Gauss, le principe des travaux virtuels (ou des vitesses virtuelles) qui donne les conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre d'un système matériel S répondant aux hypothèses faites ci-dessus [N°401]. Nous supposons que les forces données qui s'exercent sur S à l'instant t sont connues quand S est placé sans vitesse en S_0 à l'instant t , et les mêmes quel que soit cet instant t .

Le principe s'énonce ainsi :

Pour que la position S_0 du système soit une position d'équilibre, il faut et il suffit que le travail virtuel des forces données soit nul ou négatif dans tout déplacement virtuel¹⁾ de S à partir de la position S_0 .

1° La condition est nécessaire. - En effet si S est en équilibre dans la position S_0 [N°406], la force $\vec{F} = \vec{F}' + \vec{R}$ qui s'exerce sur un quelconque de ses éléments P est nulle; la force \vec{F}' est donc égale et directement opposée à \vec{R} ; par suite, le travail total des forces données F' est égal et de signe contraire à celui des réactions R , dans un déplacement.

note de la page précédente.

Ce postulat n'est pas une conséquence des autres axiomes de la mécanique. Par exemple si S est un point libre repoussé par l'origine O proportionnellement à la racine cubique de la distance, nous avons vu que, le point P étant placé sans vitesse en O, la solution $x \equiv y \equiv z \equiv 0$ des équations du mouvement n'est pas la seule qui réponde aux conditions initiales. Pour construire la Statique, il faut donc ajouter aux axiomes de la Mécanique le postulat précédent, ou bien assujettir les forces données et les liaisons à certaines restrictions délicates de continuité que nous ne sommes pas encore en état de préciser. Dans le cas où S est un élément P soumis à une force \vec{F} qui ne dépend que de la position x, y, z de P, ces restrictions sont que les fonctions X, Y, Z de x, y, z aient des dérivées premières continues pour la position P considérée et au voisinage.

(1) C'est-à-dire, d'après nos conventions, dans tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons.

virtuel quelconque à partir de S_0 . Or dans un tel déplacement, le travail \mathcal{T} des réactions est nul ou positif; le travail des forces F' est donc nul ou négatif.

2° La condition est suffisante. - D'après le postulat du N° 413, il me suffit d'établir que, si cette condition est remplie, la force totale \bar{F} qui s'exerce sur un élément q quelconque P de S [S étant placé sans vitesse en S_0 à l'instant t considéré] est nulle. Admettons que pour un au moins des éléments P , \bar{F} soit $\neq 0$, et montrons que l'hypothèse est absurde.

Si $\bar{F} \neq 0$, P se met en mouvement dans le sens de \bar{F} , et l'arc ds qu'il parcourt dans le temps dt est: $\frac{F dt^2}{2}$. Prenons comme infiniment petit principal le plus grand des déplacements des éléments du système, soit P l'élément correspondant; pour cet élément en particulier, \bar{F} est $\neq 0$, et le travail de \bar{F} , à savoir $\bar{F} ds$, essentiellement positif, est du premier ordre. Le travail de toutes les forces \bar{F} dans le déplacement élémentaire vrai du système est donc essentiellement positif et non nul, puisqu'il est formé de termes tous positifs et dont un au moins n'est pas nul.

Mais d'autre part le travail total des forces, \bar{F} dans ce déplacement est la somme du travail total des forces données et du travail total des réactions. Ce dernier travail est nul dans tout déplacement vrai de S [N° 407]; le travail des forces données serait donc différent de zéro et positif dans le déplacement élémentaire vrai de S , qui est un déplacement virtuel compatible avec les liaisons; résultat absurde puisque ce travail est supposé nul ou négatif. C. q. f. d.

Dans le cas où les forces données s'exercent sur le système placé en S_0 sans vitesse, varieraient avec l'instant considéré, la condition énoncée par le Principe des travaux virtuels devrait être vérifiée à chaque instant t .

Corollaire. - En particulier, le principe exige que le travail des forces données soit nul dans tout déplacement virtuel bilatéral de S .

En effet, considérons à la fois un déplacement virtuel bilatéral et son inverse: si \mathcal{T} , est le travail des forces données dans le premier déplacement, $-\mathcal{T}$, est le travail

dans le second; et comme ces deux travaux doivent être $\neq 0$, T_1 est nul.

Ce corollaire entraîne la forme suivante du Principe dans le cas où les liaisons sont bilatérales. — Pour que la position S_0 de S soit une position d'équilibre il faut et il suffit que le travail virtuel des forces données soit nul dans un déplacement virtuel (1) de S partir de la position S_0 .

415. — Rappelons avec précision les conditions imposées au système S pour qu'on puisse lui appliquer le principe de vitesses virtuelles.

1° S est formé de solides invariables de dimensions d'eux-mêmes aussi petites qu'on veut,

2° Les contacts entre solides du système et les solides fixés extérieurs au système ont lieu sans frottement, c'est-à-dire entre surfaces parfaitement lisses.

3° Les réactions du système sont: 1° les forces intérieures de chaque solide du système; 2° les forces de contact entre solides du système; 3° les forces de contact exercées par les obstacles fixés sur le système. Les forces données comprennent toutes les autres forces (2) .

Par exemple, les axes $Oxyz$ étant liés invariablement au sol, si S est un solide pesant, mobile dans l'air et qu'on pousse à l'aide d'une poutre, les forces données sont: 1° la pesanteur, 2° les résistances et poussée de l'air, 3° les forces de contact exercées sur S par la poutre.

Remarquons enfin que si S comprend un certain nombre d'éléments séparés, de dimensions négligeables sans contacts entre eux, mais qui peuvent avoir des contacts avec les solides de S et les obstacles fixes, toutes les considérations précédentes s'appliquent encore au système, sans qu'il soit nécessaire de supposer les dits éléments indéformables.

(1) Voir la note précédente.

(2) Ces forces comprennent notamment les forces intérieures à distance [s'il en existe], que les solides du système exercent entre eux [attractions newtoniennes, ou électriques, etc]. Mais dans la plupart des applications, les forces intérieures à distance sont négligeables et les forces données sont extérieures.

416. - Calcul des réactions. - Lorsqu'un système S est en équilibre, il n'y a aucune difficulté à calculer la réaction totale \bar{R} qui s'exerce sur un élément quelconque P de S . En effet, \bar{R} est égal à $-\bar{F}$, c'est-à-dire à la force donnée changée de sens. Mais il n'en faut pas conclure qu'on sache déterminer la réaction partielle exercée sur P par un quelconque des obstacles ou des autres éléments du système.

Par exemple, si S est un solide fixé par deux points O et O' , on ne sait pas calculer exactement les réactions exercées par les deux pivots sur les éléments O et O' du solide (N° 271).

Dans un grand nombre d'applications, on a besoin de calculer les réactions extérieures \bar{p} que subit chaque solide de S . On écrit alors que les six équations d'équilibre sont vérifiées par chaque solide et on tient compte de ce fait que les réactions entre solides du système satisfont au principe de l'action et de la réaction. On connaît sûrement ainsi la somme géométrique des réactions que subit chaque solide, et leur moment résultant. Mais cela ne suffit pas, dans bien des cas, pour définir exactement les réactions elles-mêmes.

417. - Corollaire du Principe des Travaux virtuels. - Le principe des travaux virtuels entraîne le corollaire suivant, qui rend rigoureux les raisonnements de la Statique Élémentaire.

Si on peut calculer un ensemble de réactions \bar{p} satisfaisant à toutes les hypothèses faites sur les réactions et telles que les six conditions d'équilibre soient vérifiées pour chaque solides de S , l'équilibre a lieu nécessairement.

En effet, pour chaque solide S_k de S , les forces données F' et les réactions calculées \bar{p} satisfont aux six conditions d'équilibre; leur travail total est donc nul dans tout déplacement virtuel de S . Par suite le travail virtuel de toutes les forces F' et \bar{p} est nul dans tout déplacement virtuel de S ; autrement dit, le travail virtuel des forces données est égal et de signe contraire à celui des forces \bar{p} . Mais ces dernières forces répondant à toutes les hypothèses faites sur les réactions, leur travail virtuel est nul ou positif. Donc le travail virtuel des forces F' est nul ou négatif dans tout déplacement virtuel à partir de S_0 ; S_0 est position d'équilibre.

C. q. f. d.

Exemple. - Équilibre d'un solide pesant reposant par une base sur un plan horizontal fixe Π parfaitement lissé au-dessus duquel il peut se soulever.

Pour que les réactions (verticales ascendantes) du plan Π admettent une résultante égale au poids du corps S et passant par son centre de gravité G , il faut que la verticale de G perce Π à l'intérieur de la base de sustentation⁽¹⁾ ou sur son contour. - Inversement, si cette condition est remplie, on peut calculer trois réactions verticales, ascendantes, appliquées en trois points de contact de Π et de S et dont la résultante, égale au poids du corps, passe par G . La condition est donc à la fois condition nécessaire et suffisante d'équilibre. Mais quand S repose sur Π par plus de trois points, les réactions peuvent être calculées d'une infinité de façon, et les réactions vraies dépendent de l'élasticité des éléments de S .

Dans la Statique élémentaire, on admet comme évident le corollaire du Principe des travaux virtuels démontré ci-dessus. C'est alors un véritable postulat, qui a quelque chose de choquant quand le calcul laisse le choix entre plusieurs ensembles de réactions possibles. De ce que des réactions calculées peuvent assurer l'équilibre, on admet que l'équilibre a lieu nécessairement sans pouvoir affirmer que les réactions calculées sont les réactions vraies.

Le Principe des travaux virtuels fait disparaître ce postulat.

418. - Équilibre des systèmes affectés de frottement.

Toute la théorie précédente suppose essentiellement que tous les glissements des solides du système S (entre eux ou sur les obstacles fixes) ont lieu sans frottement. Quand il en est autrement, que peut-on dire sur l'équilibre de S ?

Dans ce cas; si dans le déplacement vrai du système un glissement au moins a lieu avec frottement, nous savons [N.º 93] que le travail des réactions est négatif; le travail virtuel des réactions est donc négatif dans un certain déplacement virtuel de S (compatible avec les liaisons). Or pour établir que les conditions d'équilibre énoncées dans

(1) Voir le N.º 303 pour la définition de ce terme.

Le Principe des travaux virtuels sont nécessaires, la propriété donc nous sommes partis c'est que le travail virtuel des réactions nul ou positif. Cette démonstration ne subsiste donc plus quand il y a frottement.

Au contraire, pour démontrer que les mêmes conditions d'équilibre sont suffisantes, nous avons établi que le travail élémentaire des forces $\vec{F} = \vec{F}' + \vec{R}$ serait positif, si S se mettait en mouvement: or le travail des forces données \vec{F}' est supposé négatif; le travail des réactions dans le déplacement vrai est négatif ou nul⁽¹⁾. La démonstration subsiste donc a fortiori.

Nous arrivons ainsi à cette conclusion:

Soit S un système de solides invariables, les glissements de ces solides les uns sur les autres ou sur l'obstacle fixes pouvant avoir lieu avec frottement. Ses conditions énoncées par le principe des travaux virtuels sont en conditions suffisantes d'équilibre mais ne sont plus conditions nécessaires.

Cette conclusion s'accorde bien avec les exemples que nous avons déjà rencontrés: équilibre d'un point sur une courbe [N° 170], etc.

Dans les développements qui vont suivre nous supposerons les frottements négligeables.

419. - Équilibre d'un système pesant.

Étudions, comme application, le cas où le système S (dénué de frottement) n'est soumis à d'autres forces données que la pesanteur. Soit OZ la verticale descendante, M la masse totale du système, Z le Z de son centre de gravité. Dans un déplacement où Z varie de δZ , le travail de la pesanteur [d'après une remarque du N° 81] est: $Mg\delta Z$ comme si le système S était solide]. Pour que S_0 soit position d'équilibre du système pesant S , il faut et il suffit que δZ soit nul ou négatif dans tout déplacement virtuel compatible avec les liaisons, c'est-à-dire que, dans tout déplacement infinitésimal du système à partir de S_0 , le déplacement élémentaire du centre de gravité soit horizontal ou ascendant.

⁽¹⁾ Ce travail vrai est nul quand il n'y a pas frottement. L'existence du frottement ne fait donc que renforcer le raisonnement.

Quand toutes les liaisons sont bilatérales _____
 _____ il faut et il suffit que dans tout déplacement infi-
 nitésimal de S à partir de S_0 , le déplacement du centre de
 gravité soit horizontal.

A ce dernier principe, appelé principe de Coricelli,
 Lagrange a rattaché le principe général des travaux
 virtuels.

Considérons comme plus haut un solide S pesant qui
 dans la position S_0 repose par une base sur un plan horizon-
 tal fixe Π : dans un déplacement virtuel à partir de S_0 , S
 peut glisser sur Π , ou se soulever au dessus de Π , ou pivoter
 autour d'une tangente à sa base, ou autour d'une pointe
 de sa base, de façon qu'aucun point du solide ne descende
 au dessous de Π . Pour que S_0 soit position d'équilibre, il faut
 et il suffit que dans tous ces déplacements, le déplacement
 infinitésimal du centre de gravité de G soit horizontal ou
 ascendant; mais nous savons d'autre part, qu'il est né-
 cessaire et suffisant que la verticale de G perce Π à l'in-
 térieur de la base de sustentation ou sur son contour. Ces
 deux conditions sont donc sûrement équivalentes. On
 pourra la vérifier directement comme exercice.

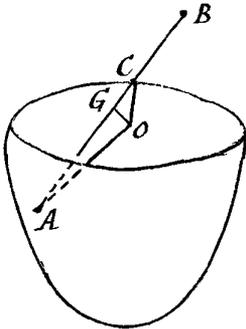
420. - Revenons au cas général d'un système pesant:
 pour que S soit en équilibre indifférent, c'est-à-dire qu'une
 position quelconque soit position d'équilibre de S , il faut
 et il suffit que le centre de gravité de S reste dans un plan
 horizontal lorsque S se déplace d'une façon quelconque.

Toutes les liaisons étant bilatérales, supposons
 que le centre de gravité décrive une surface Σ quel que
 soit le déplacement de S . Pour que S_0 soit position d'équi-
 libre de S , il faut que le déplacement de G , dans tout dé-
 placement virtuel de S , à partir de S_0 , soit horizontal.
 On en conclut d'ordinaire que le plan tangent en G_0 à la
 surface Σ est horizontal; cette condition est évidemment
suffisante, mais elle n'est pas nécessaire⁽¹⁾. C'est ce que
 va montrer l'exemple suivant.

(1) Cette condition n'est nécessaire que si, pour un déplacement in-
 finitésimal quelconque de S à partir de S_0 , le déplacement élémen-
 taire G_0, G peut avoir un sens quelconque sur Σ .

421. Exemple. - L'extrémité A d'une tige homogène pesante glisse sur un bol hémisphérique fixe de centre O et de rayon ρ tandis qu'un point C bien déterminé de AB glisse sur le rebord horizontal du bol. Les glissements ayant lieu sans frottement, on demande les positions d'équilibre de la tige. - [la longueur $l_1 = AC$ est supposée plus grande que $l_2 = BC$ et plus petite que 2ρ].

Le triangle AOC est invariable: G étant un point déterminé de AC , OG est constant, soit $OG = \rho$, G décrit une sphère Σ de centre O , mais il ne décrit pas toute la sphère; en effet, l'angle GOC est constant, soit $GOC = \alpha$; l'angle de OG et du plan $Z=0$ est donc au plus égal à α , et comme G est au dessous de ce plan, il décrit la zone sphérique comprise entre les plans $Z=0$ et



$Z = \rho \sin \alpha$. Soit Γ la section de la sphère Σ par le plan $Z = \rho \sin \alpha$: quand G est sur ce cercle, le plan AOB est vertical.

Toute position S_0 de AB où le plan AOB est vertical est donc position d'équilibre, et dans la position correspondante G_0 de G le plan tangent à Σ en G_0 n'est pas horizontal⁽¹⁾. Si G coïncide avec G_0 , l'équilibre est indifférent.

Nous avons supposé implicitement les liaisons bilatérales. La conclusion subsiste quand A peut se soulever au-dessus de l'hémisphère fixe. En effet, le point C de la barre étant sur le rebord du bol, la tige (que A soit sur l'hémisphère ou un peu au-dessus) fera avec le plan horizontal un angle au plus égal à α . Le cercle horizontal Γ est donc le lieu des positions les plus basses de G . C. q. f. d.

Applications des principes des liaisons virtuels.

I. - Équilibre d'un solide libre. - Les forces données sont les forces extérieures appliquées au solide S ; pour que le solide soit en équilibre, il faut et il suffit que le travail

⁽¹⁾ Dans un déplacement infinitésimal quelconque de la tige à partir de S_0 , le déplacement élémentaire de G a lieu selon la circonférence Γ , et non selon une direction quelconque tangente à la sphère Σ .

de ces forces soit nul dans tout déplacement virtuel du solide, c'est-à-dire [N°206] que l'ensemble de vecteurs formé par les forces extérieures soit équipollent géométriquement à un système de vecteurs nuls.

II. - Équilibre d'un solide mobile autour d'un axe.
 Les forces données sont ici les forces extérieures autres que les réactions des appuis fixes. Pour que le solide soit en équilibre, il faut et il suffit que dans une rotation virtuelle $\delta\theta$ de S autour de OZ , le travail de ces forces soit nul. Or ce travail est $N\delta\theta$, si N est le moment résultant de ces forces par rapport à l'axe. Pour que S soit en équilibre, il faut donc et il suffit que les forces extérieures données aient un moment résultant nul par rapport à l'axe.

III. - Équilibre d'un solide mobile autour d'un point fixe O . - Il faut et il suffit que le travail des forces extérieures données soit nul dans toute rotation virtuelle de S autour de O , c'est-à-dire [N°206] que le moment résultant de ces forces par rapport au point O soit nul. Pour que S soit en équilibre, il faut donc et il suffit que les forces extérieures données admettent une résultante passant par O ou nulle.

Exercice. - Équilibre d'une barre homogène pesante, dont une extrémité glisse à l'intérieur d'un bol hémisphérique dont le rebord est horizontal, et qui glisse sur ce rebord, (tous les glissements ayant lieu sans frottement). On suppose la demi longueur l de la barre comprise entre le rayon et le diamètre de l'hémisphère :

Étude analytique des conditions d'équilibre.

423. - Degré de liberté d'un système.

La position d'un système S formé de solides (dont certains peuvent être des éléments matériels) se laisse toujours définir à l'aide d'un nombre fini de paramètres. En effet, la position d'un solide libre dépend de six paramètres; si le solide se réduit à un élément matériel, sa position est définie par les trois coordonnées de l'élément. Soit q_1, \dots, q_n les paramètres qui définissent la position de S quand chaque solide du système est supposé libre.

Si toutes les liaisons imposées au système sont

bilatérales se traduisent par des égalités⁽¹⁾ telles que

$$F(q_1, q_2, q_3, \dots) = 0$$

restreignant la liberté du système. Il est loisible de passer ces équations de liaison résolues par rapport à certains des paramètres, q_{k+1}, \dots, q_n par exemple; la position du système est déterminée si on connaît q_1, q_2, \dots, q_k , paramètres qui sont indépendants c'est-à-dire qui ne sont liés par aucune relation. On dit alors que le système S a k degrés de liberté.

Si on connaît q_1, \dots, q_k , la position (x, y, z) d'un élément quelconque P (de masse m) du système est déterminée, autrement dit, on a:

$$(1) \quad x = f(q_1, q_2, \dots, q_k), \quad y = \varphi(q_1, q_2, \dots, q_k), \quad z = \psi(q_1, q_2, \dots, q_k),$$

les fonctions f, φ, ψ étant des fonctions données de q_1, \dots, q_k .

Un déplacement virtuel quelconque de S (compatible avec les liaisons) s'obtient en donnant à q_1, \dots, q_k des accroissements infinitésimaux arbitraires $\delta q_1, \dots, \delta q_k$.

Le déplacement virtuel le plus général est décomposable en k déplacements virtuels dans chacun desquels un seul des paramètres q varie.

424. - Conditions analytiques d'équilibre quand les liaisons sont bilatérales.

Dans un déplacement virtuel $\delta q_1, \dots, \delta q_k$, le déplacement $\delta x, \delta y, \delta z$ d'un élément P de S est donné par les égalités :

$$(2) \quad \begin{cases} \delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_k} \delta q_k \\ \delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial q_k} \delta q_k \\ \delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial q_k} \delta q_k \end{cases},$$

(1) Quand les liaisons sont unilatérales, certaines se traduisent par des inégalités. Ex. : une sphère homogène mobile sur le plan horizontal $z=0$ au-dessus duquel elle peut se soulever. Si l est le rayon de la sphère, z le z de son centre, oz la verticale ascendante, la liaison se traduit par l'inégalité :

$$z - l \geq 0$$

Si \vec{F}' ou (X', Y', Z') est la force donnée appliquée à l'élément P , le travail total des forces données dans le déplacement virtuel $\delta q_1, \dots, \delta q_K$ de S est :

$$(3) \quad \Sigma (X' \delta x + Y' \delta y + Z' \delta z) = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_K \delta q_K,$$

$$(4) \quad \begin{cases} Q_1 = \Sigma \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y' \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_1} \right), \\ \dots \\ Q_K = \Sigma \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_K} + Y' \frac{\partial y}{\partial q_K} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_K} \right) \end{cases}$$

Nous admettons que les forces données \vec{F}' qui s'exercent sur S sont connues explicitement à l'instant t quand on connaît (à cet instant) la position et la vitesse de chaque élément du système; autrement dit, les X', Y', Z' sont des fonctions données des q_j , de leurs dérivées q_j' , et de t ; il en est de même par suite des quantités Q_j définies par (4). En particulier, si à l'instant t , les vitesses du système sont nulles, c'est-à-dire si les q_j' sont nuls, les Q_j sont des fonctions connues de q_1, q_2, \dots, q_K, t . Je les représenterai dans ce qui suit par $Q_j(q_1, q_2, \dots, q_K, t)$.

Ceci posé, pour que le système S abandonné sans vitesse dans une position S_0 reste en équilibre, il faut et il suffit que le second membre de (3) soit nul pour tout déplacement virtuel à partir de S_0 [c'est-à-dire quels que soient $\delta q_1, \dots, \delta q_K$]; il faut donc et il suffit que les valeurs des paramètres q_1, \dots, q_K qui correspondent à la position S_0 vérifient les K conditions :

$$(5) \quad Q_1(q_1, \dots, q_K, t) = 0, \quad Q_2(q_1, \dots, q_K, t) = 0, \dots, \quad Q_K(q_1, \dots, q_K, t) = 0.$$

C'est la traduction analytique du Principe des travaux virtuels, dans le cas où les liaisons sont bilatérales.

Quand les forces données ne dépendent pas explicitement du temps, les conditions (5) forment un système de K équations à K inconnues q_1, \dots, q_K pour définir les positions d'équilibre de S . En général, ces équations seront compatibles et déterminées; dans des cas exceptionnels, elles seront incompatibles ou au contraire admettront une infinité continue de solutions.

Quand les forces données dépendent de t , pour qu'il

existe des positions d'équilibre, il faut et il suffit que les équations (5) admettent au moins une solution q_1^0, \dots, q_k^0 indépendante du temps, ce qui n'aura pas lieu en général.

425. - Cas où les forces données dérivent d'un potentiel. - Stabilité de l'équilibre.

Supposons que les forces données appliquées aux éléments du système supposés libres admettent une fonction de forces $U(x_1, y_1, z_1, x_2, \dots, x_n, y_n, z_n)$. Dans un déplacement virtuel arbitraire, le travail des forces données est δU ; remplaçons dans U les x, y, z en fonction de q_1, \dots, q_k , et soit $U = W(q_1, q_2, \dots, q_k)$; dans un déplacement virtuel de $\delta q_1, \dots, \delta q_k$ de S , on a:

$\delta U = \delta W = \frac{\partial W}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial W}{\partial q_k} \delta q_k$; cette dernière expression doit donc coïncider avec $Q_1 \delta q_1 + \dots + Q_k \delta q_k$, quels que soient $\delta q_1, \dots, \delta q_k$, c'est-à-dire qu'on a:

$$(6) \quad Q_1 \equiv \frac{\partial W}{\partial q_1}, \quad Q_2 \equiv \frac{\partial W}{\partial q_2}, \quad \dots, \quad Q_k \equiv \frac{\partial W}{\partial q_k}.$$

Plus généralement supposons que les forces données ne dépendent que de la position de S (et non de ses vitesses ni du temps), mais ne dérivent pas d'un potentiel quand les éléments de S sont supposés libres; les Q sont alors des fonctions de q_1, \dots, q_k indépendantes des q_j et de t . Il peut se faire que l'expression

$$Q_1 dq_1 + Q_2 dq_2 + \dots + Q_k dq_k$$

soit la différentielle exacte d'une certaine fonction $W(q_1, \dots, q_k)$; on dit alors qu'il existe une fonction de forces en tenant compte des liaisons.

Les conditions d'équilibre (5) peuvent s'écrire dans ce cas:

$$(7) \quad \frac{\partial W}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial W}{\partial q_k} = 0;$$

ce sont les égalités nécessaires (mais non suffisantes) pour que la fonction $W(q_1, \dots, q_k)$ soit maxima ou minima pour la position q_1, q_2, \dots, q_k considérée de S .

Quand ces conditions (7) sont remplies, ou bien W est maxima pour la position considérée, ou bien W est minima; ou enfin W n'est ni maxima ni minima.

Dans le premier cas, nous démontrerons plus loin que l'équilibre est stable. Dans les deux autres cas, si les forces et les liaisons satisfont à certaines restrictions de continuité assez étroites ⁽¹⁾, l'équilibre est instable, mais nous ne le démontrerons pas dans ces leçons.

Par exemple, si S n'est soumis à d'autres forces données que la pesanteur, les conditions d'équilibre (7) sont les égalités nécessaires (mais non suffisantes) pour que le centre de gravité G de S soit le plus bas ou le plus haut possible. Quand le centre de gravité est le plus bas possible, l'équilibre est stable; il est en général instable dans tous les autres cas.

426. - Remarque. - Quand le système, comme c'est le cas général, renferme des solides continus, les sommes \mathcal{Q} [où la fonction W] sont données par des intégrales définies [triples, doubles ou simples].

Chapitre II.

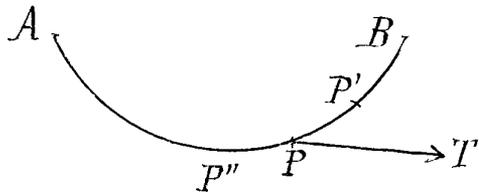
(1) Quand ces restrictions ne sont pas remplies, il peut se faire que l'équilibre soit stable bien que la fonction de forces ne soit pas maxima.

Chapitre II.

Equilibre des fils.

427. — Signes matérielles. — Considérons un système matériel S qui dessine sensiblement une ligne L , dans l'espace; autrement dit, la section σ de S par un plan normal à L , a des dimensions très petites; si on prend sur L une longueur PP' quelconque mais assez petite pour que PP' puisse être regardé comme sensiblement rectiligne, les dimensions de la section σ sont négligeables devant la longueur PP' . Nous dirons dans ce cas que S est un système linéaire ou encore une ligne matérielle.

Soit PP' et $P''P$ deux éléments contigus de S ; supposons la section σ assez petite pour que les forces de contact exercées par le premier élément sur le second puissent être regardées comme appliquées au point géométrique P ; nous dirons alors que le système linéaire est parfait ou parfaitement flexible. Soit donc \vec{T} la force de contact exercée par PP' sur $P''P$; si on compte les arcs s de L , dans le sens AB , \vec{T} sera dite la tension du système au point P ; la force de contact exercée par $P''P$ sur PP' est $-\vec{T}$. On voit que la tension change de sens quand on permute le rôle des extrémités de la chaîne.



tés de la chaîne.

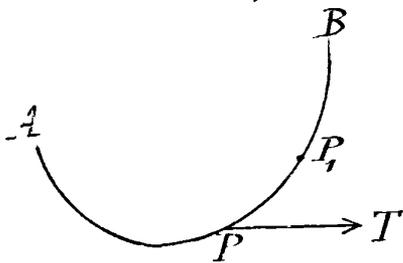
A un instant t , l'élément PP' , de longueur ds , est soumis, en outre des deux tensions appliquées à ses extrémités, à une force que j'appelle force appliquée; cette force est la résultante 1° des forces exercées sur PP' par les corps extérieurs au système (forces extérieures), 2° des forces à distance ⁽¹⁾ exercées sur PP' par les autres éléments du système. J'admets que cette force appliquée est de l'ordre de ds , quel que soit l'élément PP' considéré sur la chaîne, et je la

(1) Dans la plupart des applications, ces forces à distances sont négligeables et les forces appliquées se confondent avec les forces extérieures.

représente par $\bar{F}ds$; la valeur absolue de \bar{F} reste inférieure à une certaine limite F_0 tout le long de la chaîne. Toutefois les deux extrémités A, B de la chaîne peuvent être soumises respectivement à une force finie Φ et Φ' .

428. — Conditions nécessaires d'équilibre d'une ligne matérielle parfaitement flexible.

Soit s et $s+h$ deux valeurs quelconques de s comprises entre 0 et l [la longueur totale de L], P et P_1 les deux points correspondants de la chaîne. Puisque le système PP_1 est en équilibre, les forces extérieures qui lui sont appliquées ont une somme géométrique nulle, et un moment résultant nul par rapport au point P_1 .



La somme géométrique des forces $\bar{F}ds$ appliquées à l'arc PP_1 a une longueur moindre que

hF_0 ; soit $h\bar{F}'$ cette somme géométrique; le moment résultant des mêmes forces par rapport à P_1 a une longueur moindre que h^2F_0 , soit $h^2\bar{T}$ ce moment. Si \bar{T} et \bar{T}_1 représentent la tension du fil aux points P et P_1 , on doit avoir :

$$(1) \quad \bar{T}_1 - \bar{T} + h\bar{F}' = 0, \quad (PT, P_1) + h^2\bar{T} = 0.$$

Faisons tendre h vers zéro : la seconde équation géométrique (1) nous montre que (PT, P_1) est du 2^e ordre en h , ce qui exige ou que T soit nul ou que la distance de P_1 à PT soit du 2^e ordre par rapport à l'arc PP_1 , en un mot que le vecteur PT soit tangent en P à L .

Quant à la première équation géométrique, écrivons la :

$$(2) \quad \frac{\bar{T}_1 - \bar{T}}{h} + \bar{F}' = 0;$$

lorsque h tend vers zéro, \bar{F}' tend vers \bar{F} ou (X, Y, Z) . Soit T_x, T_y, T_z les composantes de T ; $(T_x + dT_x, T_y + dT_y, T_z + dT_z)$

(1) En effet, le moment par rapport à P_1 de la force $\bar{F}ds$ appliquée à un élément ds de l'arc PP_1 est moindre que le produit de $\bar{F}ds$ par la distance de P_1 à la force $\bar{F}ds$, donc a fortiori moindre que $hF_0 ds$. La résultante de ces moments est donc moindre que h^2F_0 .

sont les composantes de \vec{T} , et l'égalité géométrique (2), pour $h = ds$, donne :

$$(3) \quad \frac{d}{ds} T_x + X = 0, \quad \frac{d}{ds} T_y + Y = 0, \quad \frac{d}{ds} T_z + Z = 0.$$

Pour tenir compte du fait que \vec{T} est tangent à L , appelons T la tension comptée positivement selon la demi-tangente Pt à L , menée dans le sens des arcs s croissants (sens AB); que \vec{T} ait le sens Pt ou le sens contraire, on a dans tous les cas (en grandeur et signe)

$$T_x = T \frac{dx}{ds}, \quad T_y = T \frac{dy}{ds}, \quad T_z = T \frac{dz}{ds},$$

et les équations (3) peuvent s'écrire :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + X = 0, \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + Y = 0, \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) + Z = 0. \\ \text{avec } \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1. \end{array} \right.$$

Ces équations (4) doivent être vérifiées tout le long de L et à chaque instant, si le système est en équilibre.

Le raisonnement suppose que l'arc PP' est compris entre A et B . Soit maintenant AP , l'élément initial de S ; rien n'est changé à ce qui précède, si ce n'est que \vec{T} est remplacé par la force $\vec{\Phi}$ appliquée en A ; il faut donc que, si P tend vers A , $\vec{T} + \vec{\Phi}$ tende vers zéro, c'est à dire que le vecteur $\vec{T}(0)$ coïncide⁽¹⁾ avec $-\vec{\Phi}$. On voit de même, en considérant l'élément extrême PB , que $\vec{T}(l) = \vec{\Phi}$.

En définitive, si une ligne matérielle parfaitement flexible est en équilibre :

1° Les conditions (4) sont remplies tout le long de la ligne (à chaque instant), T désignant une fonction continue de s .

2° Si $\vec{T}(s)$ représente le vecteur dont les composantes sont $T \frac{dx}{ds}$, $T \frac{dy}{ds}$, $T \frac{dz}{ds}$, on doit avoir : $\vec{T}(0) = -\vec{\Phi}$ et $\vec{T}(l) = \vec{\Phi}$.

(1) Je représente par $\vec{T}(s)$ le vecteur tension au point s ou P de L ; $\vec{T}(0)$ et $\vec{T}(l)$ sont donc les vecteurs limites de $\vec{T}(s)$ quand s tend vers zéro ou vers l .

429. - Discussion des conditions précédentes. - Chaînes parfaites et fils inextensibles.

Les conditions nécessaires qui précèdent ne sont pas suffisantes pour une ligne matérielle quelconque. Mais elles sont suffisantes quand la ligne est inextensible et incompressible, c'est-à-dire quand chaque élément ne peut être ni allongé ni écrasé sur lui-même. Nous appellerons chaîne parfaite un tel système.

Un collier aux grains solides et très fins, un tuyau de toile flexible et inextensible, de très petite section, fermé aux deux bouts et rempli d'eau sont des exemples de chaîne parfaite.

Un tel système peut être assimilé à une chaîne formée de barres rectilignes de très petite longueur mais dont les sections ont des dimensions très petites devant leur longueur. Soit PP_1 un de ces chaînons : écrivons les conditions d'équilibre de chaque chaînon PP_1 (chaînons extrêmes compris); ces équations sont précisément celles qui nous ont servi de point de départ au N° 428. D'après le corollaire du N° 428, pour que la chaîne soit en équilibre, il faut et il suffit qu'à chaque sommet P de la chaîne on puisse associer un vecteur \vec{T} tels que les conditions précédentes soient remplies. Si nous regardons les chaînons comme infiniment petits, les conditions nécessaires et suffisantes deviennent les conditions énoncées à la fin du N° 429.

Mais les systèmes linéaires qui se rencontrent le plus fréquemment sont les fils : dans le cas d'une chaîne parfaite, les tensions qui s'exercent sur les extrémités d'un élément PP_1 sont sensiblement égales et directement opposées, mais peuvent avoir le sens marqué sur la figure ou le sens inverse. Un fil se distingue d'une chaîne parfaite en ce que la seconde circonstance est impossible [N° XVI] : si un élément PP_1 est soumis à deux forces opposées qui tendent à le comprimer, il s'écrase sur lui-même, le fil ne peut plus être assimilé à un système linéaire parce qu'il présente des sinuosités appréciables sur une longueur même de l'ordre de son diamètre. En un mot, quand un fil vulgaire est assimilable à un système



linéaire, la tension $T(s)$ ne peut être négative en aucun point du fil. Quand il est tendu, sa tension est positive, et si le fil est inextensible, il est tout à fait assimilable à une chaîne parfaite. Pour avoir les conditions d'équilibre (nécessaires et suffisantes) d'un fil parfaitement flexible et inextensible ou fil parfait, il suffit donc d'ajouter aux conditions du N° précédent la restriction :

$$T(s) \geq 0 \quad (0 \leq s \leq l).$$

430. — Cas où les extrémités du fil sont soumises à des liaisons. — Les conditions du N° 428 supposent les forces $\vec{\Phi}$ et $\vec{\Phi}'$ données. Supposons que l'extrémité A par exemple soit mobile sans frottement sur une surface fixe Σ ou une courbe fixe Γ ou encore fixée en un point donné O : la force $\vec{T}(0)$ (donc la tangente en A à L) est alors assujettie à être normale à Σ ou à Γ ; dans le troisième cas, elle n'est assujettie à aucune condition. Des remarques analogues s'appliquent à l'extrémité B . Les conditions d'équilibre 1° du N° 428 et les conditions ainsi substituées aux conditions 2° sont nécessaires et suffisantes dans le cas d'une chaîne parfaite ou d'un fil parfait, moyennant dans ce dernier cas la restriction $T(s) \geq 0$.

431. — Équations intrinsèques d'équilibre d'un fil.

Développons les équations (4), en appelant (α, β, γ) les cos directeurs de la tangente Pt au fil (menée dans le sens des arcs croissants), et $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ les cosinus directeurs de la normale principale Pn , enfin ρ le rayon de courbure du fil.

On a :

$$\alpha \frac{dT}{ds} + T \frac{d\alpha}{ds} + X = 0,$$

et deux équations analogues, ou encore, en remplaçant $\frac{d\alpha}{ds}$ par $\frac{\alpha_1}{\rho}$:

$$(4 \text{ bis}) \quad \begin{cases} \alpha \frac{dT}{ds} + \frac{\alpha_1}{\rho} T + X = 0 \\ \beta \frac{dT}{ds} + \frac{\beta_1}{\rho} T + Y = 0 \\ \gamma \frac{dT}{ds} + \frac{\gamma_1}{\rho} T + Z = 0 \end{cases}$$

Ces équations s'interprètent immédiatement. Lisons

sur Tt la longueur (positive ou négative) $\frac{dT}{ds}$, sur Pn la longueur $\frac{T}{\rho}$ [essentiellement positive si le système est un fil et non une chaîne parfaite]; les équations (4^{bis}) expriment que le vecteur \vec{F} est dans le plan osculateur du fil et que ses projections sur Pt et Pn sont $-\frac{dT}{ds}$ et $-\frac{T}{\rho}$.

On a donc, b désignant la direction de la binormale au fil :

$$(5) \quad \left\{ \frac{dT}{ds} + F_t = 0, \quad \frac{T}{\rho} + F_n = 0, \quad F_b = 0. \right.$$

Ces équations sont analogues aux équations intrinsèques du mouvement d'un point. Mais dans le cas d'un fil ($T > 0$), la force est toujours dirigée du côté de la convexité de la courbe tandis que dans le cas du mouvement d'un point, la force est toujours dirigée du côté de la concavité de la trajectoire.

432. - Remarques sur la tension d'un fil en équilibre. - La seconde équation (5) nous montre que si la position d'équilibre du fil est donnée en même temps que les forces $\vec{F}ds$, il ne saurait exister qu'une seule fonction $T(s)$ répondant aux questions d'équilibre, à savoir la fonction $T = -\rho F_n$, et cette fonction par suite coïncide nécessairement avec la tension du fil. Les deux forces $\vec{\Phi}$ et $\vec{\Phi}'$ appliquées aux extrémités A et B du fil doivent donc avoir pour valeurs absolues $\rho(0)F_n(0)$ et $\rho(l)F_n(l)$.

La remarque précédente n'est en défaut que si $\frac{1}{\rho}$ est nul le long d'un arc fini $A'B'$ du fil, c'est-à-dire si ρ la position $A'B'$ du fil est rectiligne. Dans ce cas, F_n est nul, la 2^e équation (5) est une identité et la première équation (5) donne, le long de $A'B'$:

$$T = T_0 - \int_{s_0}^s F_t ds,$$

(s_0 désignant l'arc AA') et fait connaître T (en particulier $T(l)$ et Φ') si on connaît T_0 (c'est-à-dire Φ).

D'où cette conclusion :

Si un fil AB est en équilibre dans une position donnée APB non rectiligne, la force $\vec{F}ds$ appliquée à chaque élément ds étant donnée, ainsi que les forces

$\bar{\Phi}$ et $\bar{\Phi}'$ appliquées aux extrémités, il est impossible que le fil reste en équilibre quand on modifie les deux forces $\bar{\Phi}$ et $\bar{\Phi}'$ (sans changer les forces $\bar{F} ds$).

Lorsque le fil AB est en équilibre dans une position rectiligne, les forces $\bar{F} ds$ sont dirigées selon le fil, ainsi que $\bar{\Phi}$ et $\bar{\Phi}'$ et l'équilibre subsiste si on remplace $\bar{\Phi}$ et $\bar{\Phi}'$ par $\bar{\Phi} + \bar{\Phi}_1$ et $\bar{\Phi}' + \bar{\Phi}'_1$, $\bar{\Phi}_1$ et $\bar{\Phi}'_1$ étant deux vecteurs égaux et directement opposés, de longueur arbitraire. La tension du fil est seulement augmentée ⁽¹⁾ de la constante positive ou négative h , valeur de $\bar{\Phi}_1$ comptée positivement dans le sens BA .

En particulier, supposons qu'aucune force $\bar{F} ds$ ne soit appliquée au fil. Si les deux forces extrêmes $\bar{\Phi}$ et $\bar{\Phi}'$ sont également nulles, les conditions d'équilibre sont vérifiées pour $T \equiv 0$ quelle que soit la forme du fil, le fil abandonné sans vitesse dans une position quelconque reste en équilibre, sans être tendu, [$T \equiv 0$]. Si les deux forces extrêmes ne sont pas nulles, le fil ne peut être en équilibre que s'il est rectiligne, et si les deux forces $\bar{\Phi}$ et $\bar{\Phi}'$ sont égales, opposées et dirigées de façon à tendre le fil et non à l'écraser. Quand ces conditions sont remplies, le fil est en équilibre et sa tension constante est la valeur commune, d'ailleurs arbitraire, des deux forces $\bar{\Phi}$ et $\bar{\Phi}'$.

433. — Correspondance entre l'équilibre des fils et la Dynamique du point.

Écrivons les équations intrinsèques du mouvement d'un point P , de masse m , soumis à la force F' :

$$m \frac{dV}{dt} = F'_t, \quad m \frac{V^2}{\rho} = F'_n, \quad F'_b = 0,$$

ou, si on veut:

$$(6) \quad \frac{dV}{ds} = \frac{F'_t}{mV}, \quad \frac{V}{\rho} = \frac{F'_n}{mV}, \quad F'_b = 0.$$

Considérons un fil en équilibre et vérifiant par suite les équations (5) et imaginons que le point matériel P

(1) Si le système est un fil (et non une chaîne parfaite), il faut toutefois que la tension reste positive après la modification des forces extrêmes c'est-à-dire que $-h$ (si $h < 0$) soit au plus égal à la valeur minima de la tension (avant la modification).

décrit la courbe d'équilibre AB avec une vitesse V qui pour chaque position s de P est égale à $T'(s)$; la force F' qui s'exerce sur lui est, d'après les équations (6) comparées aux équations (5), la force $-mV\ddot{F}$.

Il suit de là que chaque théorème de la Dynamique du point a un correspondant dans la théorie de l'équilibre des fils. Indiquons quelques applications de cette remarque générale.

434. - Quelques théorèmes sur les formes d'équilibre des fils.

Théorème I. - Quand la force appliquée $\vec{F}ds$ est perpendiculaire à une droite fixe, soit ox , tout le long du fil, la projection T_x de \vec{T} sur cette droite fixe est constante [N°30].

Théorème II. - Quand la force $\vec{F}ds$ est perpendiculaire à un plan fixe, soit le plan xoy , la forme d'équilibre est plane et son plan est parallèle à \vec{F} . La projection de la tension sur le plan xoy est constante.

Théorème III. - Quand la force $\vec{F}ds$ rencontre une droite fixe, soit oz , ou lui est perpendiculaire tout le long du fil, on a [N°32]:

$$(7) \quad T r^2 \frac{dt}{ds} = C t^2, \quad (r, \theta, z \text{ coordonnées semi-polaires d'un point du fil}).$$

Théorème IV. - Quand la force $\vec{F}ds$ passe par un point fixe o , la force du fil est plane et son plan π contient le point o ; on a de plus l'égalité (7), où r et θ sont les coordonnées polaires du plan π de pôle o (N°31).

435. - Généralités sur les équations d'équilibre.

Supposons que la force $\vec{F}ds$ appliquée à un élément PP' ou ds du fil soit une force extérieure [voir la note 1, p. 473], connue quand on connaît la position et l'orientation de l'élément, et sa position s sur le fil. Autrement dit, X, Y, Z sont des fonctions connues de $x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}, s$. Par exemple, si $\vec{F}ds$ est la pesanteur, on a (oz étant la verticale ascendante et μ la densité linéaire du fil):

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=-\mu(s)g.$$

Les équations (4) sont alors 4 équations différentielles portant sur les 4 fonctions inconnues $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$, $T(s)$. Il n'est pas difficile de voir que l'intégrale générale de ces équations dépend de six constantes arbitraires, dont on disposera pour satisfaire aux conditions aux limites imposées au fil. Par exemple, si les extrémités du fil (de longueur l) sont fixées en deux points donnés A et B, on exprimera que pour $s=0$ et $s=l$, les coordonnées x, y, z ont des valeurs données (6 équations).

— Cas où F dérive d'une fonction de forces. — Supposons que les composantes X, Y, Z de F ne dépendent que de x, y, z et soient les dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ d'une certaine fonction $U(x, y, z)$. La première équation intrinsèque peut s'écrire:

$$\frac{dT}{ds} = -\frac{F_t}{t} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{ds}\right) = -\frac{dU}{ds},$$

d'où

$$T + U = C^te$$

intégrale première des équations (4) qui peut remplacer une de ces équations.

Nous traiterons comme exemple l'équilibre d'un fil homogène pesant.

436. — Équilibre d'un fil homogène pesant.

Soit μ la densité linéaire du fil qui est ici une constante; si Oy est la verticale ascendante, Y est égal à $-\mu g = -p$, p désignant le poids de l'unité de longueur du fil⁽¹⁾.

Les équations d'équilibre donnent ici :

$$(6) \quad T \frac{dx}{ds} = c, \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = p,$$

d'où :

$$c \frac{d}{ds} y'_x = p, \quad \text{ou}$$

$$(7) \quad \frac{y'' x_x}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{p}{c} = \frac{1}{a}, \quad (c = ap).$$

La première égalité (6) (où $\left| \frac{dx}{ds} \right|$ est < 1) nous montre que T ne saurait s'annuler :

T a donc un signe constant (positif si le système est un fil

(1) Ses formes d'équilibre du fil sont les trajectoires d'un point de vitesse V de sens Oy à la force $+pV$ de sens Oy (V vitesse du point).

et non une chaîne parfaite); $\frac{dx}{ds}$ a par suite un signe constant, et on peut choisir le sens de s de façon que x croisse constamment avec s . La constante a est alors positive dans le cas d'une chaîne parfaite.

Cette remarque faite, intégrons l'équation (7); posons $y' = u$, il vient:

$$\frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{dx}{a},$$

d'où $\log(u + \sqrt{1+u^2}) = \frac{x-x_0}{a}$, (x_0 constante arbitraire), et

$$(8) \quad u + \sqrt{1+u^2} = e^{\frac{x-x_0}{a}}$$

Cette équation entraîne:

$$(9) \quad u - \sqrt{1+u^2} = -e^{-\frac{x-x_0}{a}};$$

en ajoutant les équations (8) et (9), on trouve:

$$y'_x = u = \frac{e^{\frac{x-x_0}{a}} - e^{-\frac{x-x_0}{a}}}{2}$$

et en intégrant:

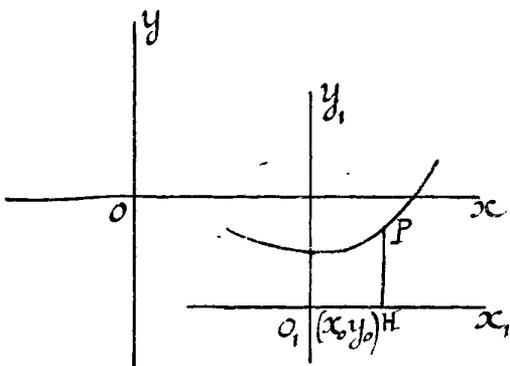
$$(10) \quad y - y_0 = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}} \right),$$

(y_0 constante arbitraire).

C'est l'équation d'une chaînette de base horizontale qui tourne sa concavité vers le haut (si $a > 0$). Quand on transporte l'origine des axes au point O_1 de coordonnées x_0, y_0 , l'équation de la chaînette prend la forme normale (où x_1, y_1 désignent les nouvelles coordonnées):

$$y_1 = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x_1}{a}} + e^{-\frac{x_1}{a}} \right);$$

$O_1 x_1$ est la base et $O_1 y_1$ l'axe de la chaînette.



Tension. - Calculons la tension en un point P de la chaînette; on a:

$$T = ap \frac{ds}{dx};$$

or les équations (8) et (9) donnent:

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dx} &= \sqrt{1+u^2} = \frac{e^{\frac{x-x_0}{a}} + e^{-\frac{x-x_0}{a}}}{2} \\ &= \frac{y_1}{a}, \end{aligned}$$

D'où $T = py$, égalité qui s'interprète immédiatement: soit PH la perpendiculaire abaissée de P sur la base de la chaînette; la tension du fil en P est égale au poids qu'aurait une portion PH du fil.

Conditions aux limites.

Supposons le fil fixé par ses deux extrémités; prenons comme origine des axes le point d'attache le plus bas et choisissons le sens de Ox de façon que l'abscisse du second point d'attache B soit positive; si α et β sont les coordonnées de B , on a: $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Il s'agit de déterminer les 3 constantes arbitraires a , x_0 , y_0 de façon que la courbe (10) passe par O et B et que sa longueur entre les deux points soit égale à la longueur donnée l du fil. La constante a doit être positive, (à moins que le système ne soit une chaîne parfaite).

Puisque le fil passe par O , on a:

$$(12) \quad -y_0 = \frac{a}{2} \left[e^{-\frac{x_0}{a}} + e^{\frac{x_0}{a}} \right];$$

puisque le fil passe par B , on a:

$$(13) \quad \beta - y_0 = \frac{a}{2} \left[e^{\frac{\alpha - x_0}{a}} + e^{-\frac{\alpha - x_0}{a}} \right].$$

Exprimons enfin que la longueur de la chaînette entre les abscisses $x=0$, $x=\alpha$ est égale à l ; l'arc s de la courbe est, d'après (11):

$$s = \frac{a}{2} \left[e^{\frac{x-x_0}{a}} - e^{-\frac{x-x_0}{a}} \right] + C^te;$$

On doit donc avoir:

$$(14) \quad l = \frac{a}{2} \left[e^{\frac{\alpha - x_0}{a}} - e^{-\frac{\alpha - x_0}{a}} - e^{-\frac{x_0}{a}} + e^{\frac{x_0}{a}} \right]$$

Discutons les 3 équations (12), (13) et (14) en x_0 , y_0 , a . En éliminant y_0 (par soustraction) entre les deux premières, on trouve:

$$(15) \quad \beta = \frac{a}{2} \left[e^{\frac{\alpha - x_0}{a}} + e^{-\frac{\alpha - x_0}{a}} - e^{-\frac{x_0}{a}} - e^{\frac{x_0}{a}} \right].$$

Les équations (14) et (15) ne dépendent que de x_0 et de a ;

pour éliminer x_0 , remarquons que, si on pose $e^{\frac{x_0}{a}} = \xi$, $e^{-\frac{x_0}{a}} = \zeta$, les deux équations (14) et (15) sont linéaires en ξ, ζ ; résolvons-les par rapport à ξ et ζ , et exprimons que le produit est égal à l'unité, nous obtenons une équation où a figure seul. La forme même des équations (14) et (15) conduit d'ailleurs à les remplacer préalablement par leur somme et leur différence; il vient ainsi:

$$(16) \quad l + \beta = a e^{-\frac{x_0}{a}} \left[e^{\frac{\alpha}{a}} - 1 \right]$$

$$(17) \quad l - \beta = a e^{\frac{x_0}{a}} \left[1 - e^{-\frac{\alpha}{a}} \right];$$

pour éliminer x_0 , il suffit de multiplier membre à membre; d'où:

$$l^2 - \beta^2 = a^2 \left[e^{\frac{\alpha}{a}} + e^{-\frac{\alpha}{a}} - 2 \right] = a^2 \left[e^{\frac{\alpha}{2a}} - e^{-\frac{\alpha}{2a}} \right]^2$$

c'est-à-dire, en posant $\frac{\alpha}{2a} = \tau$:

$$\frac{l^2 - \beta^2}{a^2} = \frac{1}{4\tau^2} (e^\tau - e^{-\tau})^2$$

ou enfin:

$$(18) \quad \frac{\pm \sqrt{l^2 - \beta^2}}{a} = \frac{1}{2\tau} [e^\tau - e^{-\tau}] = 1 + \frac{\tau^2}{6} + \dots$$

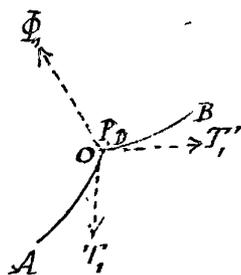
Le second membre de (18) est une fonction paire de τ qui croît constamment de 1 à $+\infty$ lorsque τ croît de zéro à $+\infty$. L'égalité (16) ne peut être vérifiée que si l'on prend le signe + dans le premier membre; il faut de plus que $\frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{a}$ soit supérieur à l'unité, c'est-à-dire que la longueur du fil soit supérieure à la distance rectiligne des points O et B , condition qui était évidente a priori. Quand cette condition est remplie, l'équation (18) a une racine positive τ et une seule; une fois τ connu, a est égal à $\frac{\alpha}{2\tau}$; $e^{\frac{x_0}{a}}$ est donné par l'équation (17); d'où x_0 sans ambiguïté; enfin y_0 est donné par l'équation (12). Il y a donc une position d'équilibre et une seule du fil homogène pesant fixé par ses extrémités.

Si au lieu d'un fil, on considère une chaîne parfaite, a peut être négatif; la racine négative de l'équation (18)

en T fournit une seconde solution où la chaînette est égale à la première mais tourne sa concavité vers le bas; la chaîne est alors comprimée tout le long de la chaînette.

437. - Cas où certains éléments du fil sont soumis à des forces finies. - Nous avons admis que la force appliquée (en outre des tensions) à chaque élément ds du fil est de l'ordre de ds , exception faite pour les deux éléments extrêmes.

Supposons qu'au point intermédiaire P_1 du fil soit appliquée une force finie Φ_1 . On décomposera le fil en deux parties AP_1, P_1B et on appliquera à chacune d'elles les considérations précédentes.



En général, le fil présentera un point anguleux au point P_1 , et si on considère l'élément I, II du fil, on aura (T_1 et T_1' désignant les tensions qui s'exercent sur les extrémités C et D de cet élément):

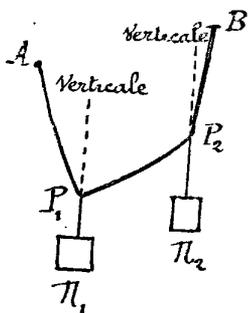
$$\bar{T}_1 + \bar{T}_1' + \bar{\Phi}_1 = 0,$$

en négligeant les forces appliquées de l'ordre ds .

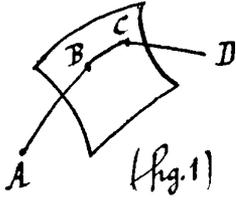
Si on fait tendre C et D vers P_1 , l'égalité limite est exactement l'égalité géométrique précédente; \bar{T}_1 et \bar{T}_1' sont dirigées selon les tangentes en P_1 aux deux brins du fil; en valeur absolue, la tension varie brusquement quand on franchit P_1 sur le fil, à moins que $\bar{\Phi}_1$ ne soit dirigé selon la bissectrice de l'angle des deux brins. Pour que le fil ne présente pas en P_1 un point anguleux, il faut et il suffit que $\bar{\Phi}_1$ soit tangent au fil: alors \bar{T} change brusquement de valeur, sans changer de direction.

Quand plusieurs points P_1, P_2, \dots du fil sont soumis à des forces finies, on décompose le fil en plusieurs segments AP_1, P_1P_2, \dots et ce qui précède s'applique à chaque point tel que P_1 .

Par exemple, si le fil en équilibre AB est homogène et pesante et si plusieurs poids π_1, π_2, \dots sont suspendus en P_1, P_2, \dots au fil, chaque portion AP_1, P_1P_2, \dots dessine un arc de chaînette (d'axe vertical) tournant sa concavité vers le haut, et les tensions des deux brins du fil sur l'élément P_1 , par exemple fait équilibre au poids π_1 .



438 - Équilibre d'un fil sur une surface fixe parfaitement lisse.



Soit $\bar{R}ds$ la réaction [normale à la surface] exercée sur l'élément ds du fil par la surface fixe Σ .

Si $\bar{F}'ds$ est la force appliquée donnée, [pesanteur, etc.], il suffit de remplacer dans les équations d'équilibre, \bar{F} par $\bar{F}' + \bar{R}$. La première équation intrinsèque donne :

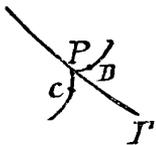
$$\frac{dT}{ds} + F'_t = 0.$$

En particulier, supposons que l'arc de contact BC du fil et de Σ soit très petit, (F' étant moindre qu'une certaine force H), on a :

$$|T_1 - T_0| < Hl,$$

si T_0 et T_1 sont les tensions en B et C , et l la longueur BC ; cela si grand que soit \bar{R} . La tension en C est sensiblement la même qu'en B .

Imaginons maintenant que la surface Σ se réduise sensiblement à une ligne Γ ou à un point O ; par exemple, Σ est un cylindre de révolution de très petite section ou une petite sphère. Le fil s'appuie alors sur une ligne (ou une arête) parfaitement lisse Γ , ou sur un point parfaitement lisse O . En général, le fil présente un point anguleux en P , contact du fil et de Γ (ou de O); les réactions de la surface dégénérée Σ s'exercent sur le fil le long d'un très petit arc, mais ont une somme géométrique finie, soit \bar{T} , nécessairement normale à Γ dans le cas d'une ligne puisque \bar{T} est la somme géométrique de forces $\bar{R}ds$ normales à Σ . En



sa valeur absolue, la tension T ne varie pas brusquement au point P ; la réaction \bar{T} est donc directement opposée à la bissectrice de l'angle intérieur formé par les deux brins du fil, bissectrice qui par

suite doit être normale à L . D'où cette conclusion :

Quand un fil qui s'appuie sur une ligne fixe L , parfaitement lisse est en équilibre, sa tension varie d'une façon continue quand on traverse le point de contact P du fil et de L , et la bissectrice en P des deux brins du fil est normale à L .

De même, si Σ se réduit à un point fixe O [par exemple à une petite sphère], on voit que la tension reste continue sur le fil, et que la réaction totale de O sur le fil est bissectrice de l'angle des deux brins du fil.

439. — La surface Σ ayant une forme quelconque, si la force appliquée donnée $F ds$ est nulle le long du fil en équilibre et tendu, la portion BC du fil en contact avec Σ dessine une géodésique de Σ , car \vec{F} (c'est-à-dire \vec{R}) est dans le plan osculateur à la courbe BC ; ce plan est donc normal à Σ . Le fil sera rectiligne en dehors de Σ et disposé suivant une géodésique sur Σ ; il se composera en général d'un segment rectiligne AB , d'un arc de géodésique BC , et d'un segment rectiligne CD [fig. 1].

Par exemple, si Σ est une sphère, BC sera un arc de grand cercle de la sphère.

Équations du mouvement d'un fil parfait.

440. — Il est facile d'obtenir les équations du mouvement d'un fil parfait par le procédé même qui nous a fourni les équations d'équilibre.

Pour obtenir les équations d'équilibre nous avons exprimé qu'un arc quelconque $P_1 P_2$ du fil en équilibre satisfait aux six conditions d'équilibre d'un solide. Or considérons un système quelconque au repos ou en mouvement; nous savons [N. 38] que l'ensemble de vecteurs formé par les forces d'inertie du système et par les forces qui s'exercent sur le système satisfait à chaque instant aux 6 conditions d'équilibre des forces appliquées à un solide.

Appliquons ce principe fondamental à un arc quelconque $P_1 P_2$ du fil en mouvement; soit ds un élément du fil, μ sa densité, \vec{y} son accélération à l'instant t , $\vec{F} ds$ la force qui lui est appliquée à cet instant. La force d'inertie de cet élément est $-\mu \vec{y} ds$; la somme géométrique de ce vecteur et de la force appliquée $\vec{F} ds$ est $(\vec{F} - \mu \vec{y}) ds = \vec{F} ds$. Pour traduire le principe fondamental, je puis donc répéter tout ce qui a été dit dans le cas de

l'équilibre à condition de remplacer partout \bar{F} par \bar{F}' .
D'où ces conclusions:

1°: Qu'un fil soit en mouvement ou au repos, la tension \bar{T} est constamment tangente au fil, et les vecteurs $-\bar{T}(0)$ et $\bar{T}(l)$ coïncident avec les forces $\bar{\Phi}$ et $\bar{\Phi}'$ appliquées à l'origine A et à l'extrémité B du fil.

2°: Le fil satisfait pendant le mouvement aux équations:

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + X - \mu Y_x = 0 \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + Y - \mu Y_y = 0 \\ \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) + Z - \mu Y_z = 0 \\ \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2 = 1 \end{cases}$$

équations qui peuvent, si on veut recevoir la forme intrinsèque: [N°431]

$$\frac{\partial T}{\partial s} + F_t = 0, \quad \frac{T}{\rho} + F_n = 0, \quad F_b = 0, \text{ c'est-à-dire:}$$

$$(1)^{\text{bis}} \quad \mu Y_t = \frac{\partial T}{\partial s} + F_t, \quad \mu Y_n = \frac{T}{\rho} - F_n, \quad \mu Y_b = F_b,$$

Y_t, Y_n, Y_b représentant les projections de \bar{y} sur les trois demi-directions Pt (tangente au fil menées dans le sens des arcs croissants),
Pn (normale principale au fil menée vers le centre de courbures),
Pb binormale.

441. - Ces équations s'appliquent à toute ligne matérielle parfaitement flexible [N°28]. Admettons maintenant que le système soit une chaîne parfaite ou un fil parfaitement flexible et inextensible, de longueur l .

Si on considère un point P ou s déterminé sur le fil, sa position x, y, z , à chaque instant t est déterminée, autrement dit, x, y et z sont des fonctions déterminées des deux variables indépendantes ⁽¹⁾ t et s , pour t quelconque

(1) Lorsque le système est une chaîne ordinaire formée de n chaînons, sa position à un instant t dépend de $(2n+3)$ paramètres, nombre qui croît indéfiniment avec n .

et pour s compris entre 0 et l ; soit

$$(2) \quad x = \varphi(s, t), \quad y = \psi(s, t), \quad z = \chi(s, t).$$

Si on laisse s constant dans les équations (2), elles définissent le mouvement du point déterminé P ou S du fil, et l'accélération de P a comme composantes à un instant t :

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Si on laisse t constant, les équations (2) définissent la position du fil à l'instant t , et les cosinus directeurs de la tangente Pt au fil menée dans le sens des arcs s croissants sont

$$\frac{\partial x}{\partial s}, \quad \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial s},$$

le symbole ∂ remplaçant le symbole d puisque x, y, z dépendent de deux variables indépendantes et que les dérivées sont des dérivées partielles par rapport à ces variables.

Les équations (1) peuvent donc s'écrire:

$$(3) \quad \begin{cases} \mu \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial x}{\partial s} \right) + X, \\ \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial y}{\partial s} \right) + Y, \\ \mu \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial s} \left(T \frac{\partial z}{\partial s} \right) + Z. \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial s} \right)^2 = 1;$$

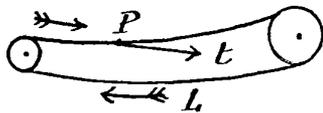
Dans ces équations, la densité μ est une fonction donnée de s , indépendante du temps, puisque le fil est inextensible; c'est une constante donnée si le fil est homogène.

Les équations (4) forment donc un système de quatre équations aux dérivées partielles portant sur les quatre fonctions inconnues x, y, z, T de s et de t . Supposons, par exemple, que le fil soit homogène, pesant, fixé par ses deux extrémités, et abandonné dans des conditions initiales quelconques à l'instant $t=0$; les équations (3), où on fait: $\mu = \mu_0, X=0, Y=0, Z = -\rho_0 g$,

définirait un système de fonctions (et un seul) $x(s,t)$, $y(s,t)$, $z(s,t)$, $T(s,t)$ répondant à la fois aux conditions initiales et aux conditions aux limites. (1)

Remarquons qu'il en serait tout autrement si, dans le même problème, le fil était extensible. Alors μ est une cinquième fonction inconnue, et aux quatre équations (4) il faudrait ajouter une relation nouvelle entre x , y , z , T , μ pour que le mouvement pût être calculé.

442. — Mouvement permanent d'un fil. — Imaginons un fil en mouvement qui dessine constamment la même ligne L dans l'espace.



Chaque élément P du fil a alors comme trajectoire la ligne L , et sa vitesse v à un instant t est la même (en valeur absolue) quel que soit l'élément considéré.

Appliquons les équations du mouvement sous la forme intrinsic (1)^{bis}, [N° 440]: nous pouvons toujours compter les arcs s dans le sens du mouvement du fil; dans ces conditions, les 3 demi-droites Pt , Pb , $P\bar{b}$ sont la tangente à la trajectoire L de P menée dans le sens du mouvement, la normale principale à cette trajectoire, et la binormale; on a donc: $X_t = \frac{dv}{dt}$, $X_n = \frac{v^2}{\rho}$, d'où:

$$\mu \frac{dv}{dt} = \frac{\partial T}{\partial s} + F_t, \quad \frac{\mu v^2}{\rho} = \frac{T}{\rho} + F_n.$$

Supposons en outre, que v soit constant, que le fil soit homogène et qu'en chaque point géométrique M de la courbe L , F soit invariable. On a alors:

$$\frac{\partial T}{\partial s} + F_t = 0, \quad \frac{T - \mu v^2}{\rho} + F_n = 0,$$

ou encore, en posant: $\Theta = T - \mu v^2$,

$$\frac{d\Theta}{ds} + F_t = 0, \quad \frac{\Theta}{\rho} + F_n = 0,$$

autrement dit, la forme du fil en mouvement est une position d'équilibre du fil, et la tension T est égale à la

(1) La démonstration rigoureuse de ce théorème est très difficile, et n'est pas encore faite sans restrictions.

tension d'équilibre Θ augmentée de μV_0^2 . Le régime du fil est un régime permanent: en un point fixe M pris sur L , la densité μ , la vitesse et la tension ont même valeur quel que soit t .

Applications. Transmissions téléodynamiques. - Aqueducs de montagnes.

Par exemple, si le fil est pesant et passe sur des appuis fixes, pendant le régime permanent il dessine dans l'espace, entre chaque appui, un arc de chaînette, et la tension en un point M d'un de ces arcs AB , est égale à $\mu(gy + V_0^2)$, y désignant la hauteur de M au-dessus de la base de la chaînette AB . Ce régime est réalisé dans les transmissions téléodynamiques par câbles et courroies.

Imaginons de même un tuyau en toile parfaitement flexible, de section normale très petite et partout la même, à travers lequel passe un courant d'eau de vitesse constante. Considérons le système formé par le tuyau et l'eau; soit \bar{T} la réaction totale exercée par l'élément de longueur PP' de ce système sur l'élément contigu PP'' ; soit μ la densité linéaire du filer liquide, μ_1 celle du tuyau. Le système tout entier étant pesant et le tube fixé par ses extrémités, on déduit immédiatement des considérations précédentes les égalités:

$$\frac{d\bar{T}}{ds} + (\mu + \mu_1)g_t = 0, \quad \frac{\bar{T} - \mu V_0^2}{\rho} + (\mu + \mu_1)g_n = 0, \quad g_b = 0.$$

g_t, g_n, g_b étant les projections de \bar{g} sur les demi-droites Pt, Pn, Pb .

Les positions de régime du système seront les positions d'équilibre d'une chaîne parfaite homogène, de densité linéaire égale à $\rho + \mu_1$ ayant même longueur et mêmes extrémités que le tuyau; c'est-à-dire deux chaînette tournant l'une sa concavité, l'autre sa convexité vers le bas.

Cette remarque est utilisée dans la construction moderne des aqueducs de montagne, pour franchir des abîmes dont les bords ont des niveaux très différents.

443. - Cas où des forces finies sont appliquées à plusieurs points du fil.

Quand des forces finies $\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2, \dots$, sont appliquées en

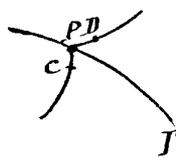
plusieurs points P_1, P_2, \dots du fil, le fil présente en général un point anguleux en P_1, P_2, \dots et la valeur de la tension en P_1, \dots des deux brins du fil est différente en général pour les deux brins : si on considère l'élément infinitésimal CP, D du fil, et les tensions \bar{T}_1, \bar{T}'_1 qui s'exercent sur ses extrémités, à chaque instant t on a :

$$\bar{T}_1 + \bar{T}'_1 + \bar{\Phi}_1 = 0.$$

Pour le voir, il suffit de raisonner comme au N° 437, en remplaçant partout \bar{F} par $\bar{F}' = \bar{F} - \mu \bar{y}$.

Pour que T ne change pas brusquement de valeur quand on passe du brin CP_1 au brin P_1D , il faut et il suffit que $\bar{\Phi}$ soit bissectrice de l'angle en P_1 des deux brins.

444. - Glissement sans frottement d'un fil sur une ligne solide ou sur un point.



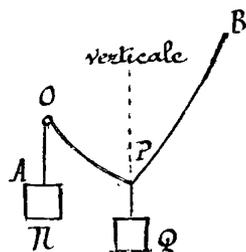
Quand un fil glisse sans frottement sur une surface solide Σ (fixe ou mobile), la réaction de cette surface sur un élément PP' du fil, de longueur ds , est un vecteur $\bar{R}ds$ normal à Σ ; la force appliquée totale \bar{F} est $(\bar{F}' + \bar{R})ds$; le vecteur \bar{F} ou $\bar{F}' - \mu \bar{y} = \bar{F}' - \mu \bar{y} + \bar{R}$.

Posons: $\bar{F} = \bar{F}' - \mu \bar{y}$; les raisonnements du N° 438 peuvent se répéter à condition de remplacer \bar{F} par \bar{F}' ; si donc l'arc de contact BC du fil et de Σ est très petit et si \bar{F} et $\mu \bar{y}$ restent finis (c'est-à-dire inférieurs à une limite donnée), la tension T a sensiblement même valeur en B et C . D'où les mêmes conclusions qu'au N° 438:

Quand un fil L (parfaitement flexible et inextensible) passe sur une ligne solide parfaitement lisse Γ , la bissectrice intérieure de l'angle des deux brins du fil au point de contact P de L et de Γ est normale à Γ , et la réaction de Γ sur le fil est directement opposée à cette bissectrice. La tension a même valeur en P sur les deux brins.

Si on place le fil dans des conditions initiales où la bissectrice de l'angle en P des deux brins n'est pas normale à Γ , le fil subit en P et au voisinage une brusque perturbation, son accélération, par suite $\mu \bar{y}$, est considérable; le raisonnement fait est donc en défaut tant que le fil n'a pas pris un mouvement régulier.

Si le fil passe sans frottement sur un élément matériel E , fixe ou mobile, on voit de même que la réaction \vec{R} de E sur le fil est opposée à la bissectrice intérieure de l'angle des deux brins; T ne change pas brusquement du brin CE au brin EE .



Exemple. — Imaginons un fil glissant sans frottement sur un appui fixe O , dont l'extrémité B est fixe tandis que l'autre supporte un poids π devant lequel le poids de la portion OA du fil est négligeable.

Un poids Q est suspendu au fil par un anneau qui glisse sans frottement sur le fil.

Si le système est en équilibre, la tension du fil en O est sensiblement égale à π ; la tension en un point M de l'arc OP est égale à $\pi - \rho h$, h désignant la hauteur de O au-dessus de M et ρ le poids de l'unité de longueur du fil. Comme T ne varie pas brusquement du brin OP au brin PB , on voit que la tension du fil en un point quelconque est égale à $\pi - \rho h$; en particulier, au point B , elle est égale à $\pi - \rho H$, H étant la hauteur positive ou négative de O au-dessus de B , cela si grand que soit Q . Il en serait tout autrement si Q était attaché en un point déterminé du fil.

Cette remarque trouve son application dans la théorie des porteurs aériens.

445. — Cas où la densité du fil est négligeable.

Quand la densité du fil est négligeable, et par suite sa masse totale négligeable devant les tensions, les équations du mouvement ⁽¹⁾, où on néglige μ , se confondent avec les équations d'équilibre. A chaque instant, pendant le mouvement du fil, les conditions d'équilibre sont donc vérifiées ⁽¹⁾.

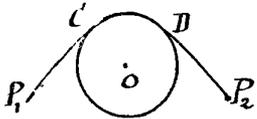
Supposons notamment que le fil soit libre et ne soit soumis à aucune force appliquée [les éléments extrêmes exceptés]: le fil s'il est tendu, reste rectiligne pendant le mouvement et sa tension est la même le long du fil. Ce sera le cas d'un fil pesant, de masse négligeable, reliant

⁽¹⁾ Ceci exige toutefois que \bar{y} ne soit pas considérable: si le fil subit une perturbation telle que $\mu \bar{y}$ ne soit plus négligeable, la conclusion précédente est en défaut.

deux points matériels. Ces deux points resteront à la même distance tant que le fil sera tendu.

De même, si un fil pesant de masse négligeable, glisse sans frottement sur une surface solide Σ , fixe ou mobile, il satisfait sensiblement à chaque instant aux équations d'équilibre du fil sur la surface supposée fixe; il dessinera donc à chaque instant une géodésique de la surface. Les parties du fil non situées sur la surface seront rectilignes; la tension sera la même tout le long du fil.

Par exemple, supposons que Σ soit une sphère fixe et que le fil (de longueur l) soit attachée à ses deux extrémités à deux points matériels P_1 et P_2 ; si on laisse le premier fixe, le second décrira une surface; en effet, menons



de P_1 une tangente quelconque P_1C à la sphère [une indéterminée], prenons sur le grand cercle de la sphère tangent à P_1C une longueur arbitraire CD (moindre que $l - P_1C$); menons en D la tangente à ce cercle et prenons sur cette tangente une

longueur DP_2 égale à $l - P_1C - \text{arc } CD$. La position P_2 ainsi obtenue dépend de deux paramètres et décrit une surface qu'on voit aussitôt être une surface de révolution dont la méridienne est une développante du cercle⁽¹⁾

La même conclusion subsiste, quelle que soit la surface Σ . Si on laisse Σ et P_1 immobiles, le point P_2 décrit une surface, quand le fil occupe ses diverses positions.

446. - Le travail des forces intérieures, d'un fil parfaitement flexible et inextensible.

Considérons une chaîne parfaite: elle est assimilable, avons-nous dit, à une chaîne ordinaire dont chaque chaînon a une très petite longueur et une section de dimension négligeable devant la longueur du chaînon. Les réactions des deux chaînons contigus pouvant être regardées comme appliquées au point géométrique d'articulation, le travail total de ces réactions est nul pendant

(1) Si on suppose le fil non tendu disposé sur Σ suivant une courbe quelconque, et si on le tend brusquement, le fil prend très vite une position où il dessine une géodésique, après avoir subi une courte perturbation où ces accélérations sont très grandes.

le mouvement de la chaîne. Comme cette remarque est vraie si petites que soient les longueurs des chaînons, elle est vraie pour une chaîne parfaite.

Au lieu du mouvement vrai de la chaîne, considérons un déplacement virtuel de la chaîne, c'est-à-dire un déplacement infinitésimal dans lequel chaque chaînon reste solide et articulé aux chaînons contigus. Le travail total des forces de contact intérieures est nul dans ce déplacement virtuel. D'où la même conclusion pour une chaîne parfaite. Autrement dit, le travail des forces de contact intérieures [tensions] d'une ligne matérielle parfaitement flexible est nul dans tout déplacement virtuel de la ligne où chaque élément garde la même longueur.⁽¹⁾

446. - Systèmes formés de solides et de fils parfaits.
D'après cela, considérons un système S composé d'un nombre fini de solides et de chaînes parfaites; certaines des chaînes glissent sur des surfaces solides fixes ou qui font partie du système, surfaces qui peuvent se réduire à des lignes ou à des points. Les extrémités [ou certains éléments déterminés] de chaque chaîne peuvent être attachées à des éléments solides fixes ou faisant partie du système, - ou glisser sur des courbes ou des surfaces solides [fixe ou du système]. Si tous les déplacements entre solides de S , chaînes parfaites et obstacles fixes ont lieu sans frottement, le travail total des réactions [forces de contact intérieures et forces de contact exercées par les obstacles fixes] est nul dans le déplacement vrai du système S , ainsi que dans tout déplacement virtuel de S (compatible avec les liaisons).⁽²⁾ Si les glissements ont lieu avec frottement, le travail des

On peut alors étendre à un tel système le principe des travaux virtuels. Pour que S_0 soit position d'équilibre de S , il faut et il suffit que, dans tout déplacement virtuel de S à partir de S_0 , le travail des forces données soit nul ou négatif.

(1) Le calcul des variations permet de vérifier rigoureusement cette conclusion.

(2) D'après ce qui précède, un déplacement virtuel d'une chaîne parfaite [c'est-à-dire d'une ligne matérielle inextensible et incompressible], est un déplacement infinitésimal où chaque élément de la ligne garde la même longueur.

En particulier, si les forces données se réduisent à la pesanteur, pour que S_0 soit position d'équilibre il faut et il suffit que dans tout déplacement virtuel à partir de S_0 , le déplacement infinitésimal du centre de gravité de S soit horizontal ou ascendant.

Considérons par exemple une chaîne parfaite, homogène, pesante suspendue par ses deux extrémités A et B . Il est évident qu'il existe une position, soit S_0 , où le centre de gravité G de la chaîne S est le plus bas possible et une position, soit S_1 , où il est le plus haut possible. Ces deux positions sont positions d'équilibre de la chaîne, d'après ce qui précède. Or nous savons [N° 436] qu'il n'existe que deux positions d'équilibre de S , à savoir deux chaînettes : les deux chaînettes définies au N° 436 coïncident donc avec S_0 et S_1 .

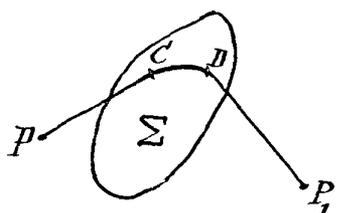
Enfin quand les contacts entre solides de S , chaînes parfaites et obstacles fixes ont lieu avec frottement, le Principe des travaux virtuels fournit encore une condition suffisante, mais non plus nécessaire, d'équilibre.

447. — Supposons maintenant que certaines des chaînes parfaites de S soient remplacées par des fils parfaitement flexibles et inextensibles. Rien n'est changé aux conclusions précédentes pourvu que les fils soient réellement tendus, c'est-à-dire pourvu que la quantité que nous avons appelée T soit positive le long de chaque fil. Par exemple, pour trouver les positions d'équilibre S_0 d'un tel système, on raisonnera d'abord comme si les fils étaient des chaînes parfaites; puis une position d'équilibre S_0 possible étant ainsi déterminée, on calculera T le long de chaque fil pour vérifier si dans cette position S_0 , T est bien positif.

Quand on applique cette remarque au cas d'un fil parfaitement flexible et inextensible, homogène, pesant, suspendu par deux points, on voit que des deux positions S_0 et S_1 indiquées ci-dessus, une seule S_0 est position d'équilibre d'un fil parfait; sur S_1 , T est négatif.

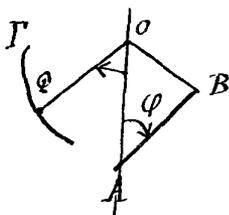
448. — Systèmes formés de solides et de fils de masse négligeable. — La position des systèmes S considérés [N° 446-447] ne se laisse plus définir à l'aide d'un nombre fini de paramètres

[N.º 441]. Il est un cas toutefois où il en est encore ainsi : c'est le cas où la densité (et par suite la masse) de chaque fil [ou chaîne parfaite] est négligeable, ainsi que les forces données appliquées à ses divers éléments, certains éléments exceptionnels (et notamment les extrémités) pouvant toutefois être soumis à des forces données finies. Comme nous l'avons remarqué (N.º 445), les chaînes ou fils du système S ne font qu'imposer aux solides de S certaines liaisons qui se traduisent par des relations entre les paramètres définissant leurs positions. Par exemple, supposons que deux éléments P, P_1 de S soient reliés par un fil parfait : dans l'hypothèse où nous nous plaçons, le fil est rectiligne et de longueur l s'il est tendu ; il maintient invariable la distance PP_1 . S'il est détendu, tout se passe (sa masse étant négligeable) comme s'il n'existait pas. De même, si le fil



reliant P et P_1 est tendu et passe sur une surface fixe Σ , parfaitement lisse, la liaison se traduit par une relation entre les coordonnées x, y, z et x_1, y_1, z_1 de P et de P_1 ; si Σ est une surface solide de S , le fil dessine toujours la figure $PCDP_1$ formée d'un segment rectiligne PC , d'une géodésique⁽¹⁾ CD de Σ , et d'un segment rectiligne DP_1 . La liaison se traduit par une relation entre x, y, z, x_1, y_1, z_1 et les six paramètres dont dépend la position de Σ .

449. — Application (Gonç. levis de Balidor). — Une barre AB homogène et pesante est mobile autour d'un axe horizontal passant par son extrémité A fixe ; son extrémité B est reliée à un fil parfaitement flexible, inextensible et de masse négligeable qui glisse sans frottement sur un point fixe O de la verticale de A . L'autre extrémité du fil est attachée à un point Q qui glisse sans frottement sur une courbe fixe Γ située dans le plan vertical OAB . On demande de déterminer C de façon que le système soit en équilibre dans toute position



(1) En effet, la force appliquée $\vec{F}ds$ à un élément de CD est la réaction $\vec{R}ds$ de Σ sur cet élément ; elle est donc normale à Σ , et comme le fil satisfait sensiblement aux conditions d'équilibre, CD est une géodésique de Σ . Il n'y a d'exception que pendant les périodes où les accélérations du système sont considérables.

(équilibre indifférent).

Il faut et il suffit pour cela, que dans tout déplacement infinitésimal du système le déplacement de G soit horizontal ou ascendant, ce qui exige que le centre de gravité décrive une horizontale quand le système se déplace. Appelons l la longueur du fil, 2λ celle de la barre, a la distance OA , m la masse OQ , M celle de AB ; soit $r = OQ$, $\theta = \widehat{AOQ}$, $\varphi = \widehat{OAB}$; la projection $O\bar{G}$, de OG sur OA est :

$$\frac{mr \cos \theta + M(\alpha - \lambda \cos \varphi)}{m + M}.$$

On doit donc avoir :

$$(1) \quad \frac{mr \cos \theta - M\lambda \cos \varphi}{m + M} = h;$$

d'autre part, $OB^2 = \sqrt{a^2 + 4\lambda^2 - 4a\lambda \cos \varphi}$, et $r + OB = l$
d'où :

$$(2) \quad (r - l)^2 = a^2 + 4\lambda^2 - 4a\lambda \cos \varphi.$$

En éliminant $\cos \varphi$ entre (1) et (2), on obtient l'équation en coordonnées polaires de la courbe Γ cherchée (ovale de Descartes, limaçon de Pascal dans un cas particulier).

450. - Systèmes généraux auxquels s'applique le principe des travaux virtuels. - Si nous assimilons un liquide incompressible parfait à un sac de sable aux grains très fins et parfaitement lisses, le travail des forces intérieures de contact (pressions) est nul dans tout déplacement virtuel du liquide, c'est-à-dire dans tout déplacement infinitésimal où chaque élément garde sa densité. On peut donc appliquer à un tel système le principe des travaux virtuels. Par exemple, considérons une masse liquide incompressible pesant enfermée dans un vase où on a fait le vide : les forces données sont ici la pesanteur. Pour que le liquide soit en équilibre dans la position S_0 , il faut et il suffit que dans tout déplacement virtuel du liquide à partir de S_0 , le déplacement infinitésimal du centre de gravité du liquide soit horizontal ou ascendant. Il faut pour cela, et il suffit, comme on le voit aisément, que la surface libre du liquide soit horizontale⁽¹⁾.

⁽¹⁾ Voir cette note page suivante.

Considérons enfin un système formé de petites surfaces solides ayant la forme de triangles équilatéraux de même côté, et articulés deux à deux autour d'un côté commun, de manière à former une surface déformable. Si les articulations ont lieu sans frottements, le travail des réactions intérieures est nul dans tout déplacement virtuel du système. Admettons qu'une membrane parfaitement flexible et inextensible [une membrane de toile par exemple] soit assimilable à un tel système. Le travail des tensions intérieures de la membrane dans tout déplacement virtuel de la membrane, c'est-à-dire dans toute déformation infinitésimale de la membrane où les longueurs se conservent, est nul.⁽²⁾



D'après cela, soit P un système matériel formé :

- 1° d'un certain nombre d'éléments matériels séparés, de dimensions négligeables, sans contacts entre eux;
- 2° de solides indéformables;
- 3° de fils et de membranes parfaitement flexibles et inextensibles;
- 4° de liquides incompressibles et parfaites.

Le principe des travaux virtuels peut être appliqué à un tel système et donne les conditions nécessaires et suffisantes d'équilibre du système, si tous les contacts des divers corps de S entre eux et avec les obstacles fixes ont lieu sans frottement. Ces conditions sont suffisantes, mais non plus nécessaires, si les dits contacts ont

(1) Si le liquide est en contact avec un gaz à pression constante, les pressions du gaz sur le fluide sont des forces données qu'il faut adjoindre à la pesanteur; il n'est pas difficile de montrer que la condition d'équilibre reste la même.

Remarquons que nous négligeons les forces intérieures du liquide autres que les forces de contact. Nous négligeons notamment les attractions à petite distance entre éléments du liquide, cause des phénomènes capillaires avec les attractions à petite distance des parois que nous négligeons aussi.

(2) Toutes les conclusions sur le travail virtuel des réactions intérieures auxquelles nous parvenons d'une façon intuitive, mais peu rigoureuse en assimilant les fils et membranes inextensibles et les liquides incompressibles à des systèmes de petits éléments solides, peuvent être vérifiées rigoureusement à l'aide du calcul des variations.

lieu avec frottement.

Dans le déplacement vrai d'un tel système, le travail des réactions est nul si les contacts des corps de S entre eux et avec les obstacles fixes, ont lieu sans frottement; il est négatif ou nul dans le cas contraire.

On fait, le principe des travaux virtuels sera applicable, tel que nous l'avons énoncé, à tout système formé de solides rigides, de fils et de membranes vulgaires, sensiblement inextensibles et bien flexibles, enfin de liquides, du moment qu'on saura que, dans les transformations possibles du système, la température de ces divers corps est partout et constamment la même (transformation isotherme). En effet, si la température d'un solide ou d'un liquide, par exemple, varie sensiblement, il se dilate ou se contracte.

On peut résumer ces conclusions en disant que le principe s'applique à tout système qui est assimilable, pendant ses transformations possibles, à un système de petits éléments indéformables.

Mais il faut bien se garder d'appliquer les conclusions précédentes à un fil ou à une membrane extensible ou à un fluide compressible, lors même qu'on sait que la température du système est partout la même et constante. Par exemple, soit L un fil de masse et de poids négligeable, soumis à deux forces extérieures égales et directement opposées Φ et Φ' . Le fil a la forme rectiligne, et s'il est abandonné sans vitesse, il reste en équilibre dans le cas où il est inextensible. Mais quand il est extensible, il ne reste en équilibre que s'il a une certaine longueur (fonction de Φ): sinon, il s'allonge ou se raccourcit et comme on néglige la masse du fil, le théorème des forces-vives exprime que le travail des tensions intérieures est égal au travail de Φ et de Φ' changé de signe, c'est-à-dire égal à $-\Phi \Delta l$, [Δl désignant la variation positive ou négative de longueur du fil]. Le travail vrai des tensions intérieures du fil n'est donc plus nul, mais peut être positif ou négatif.

Applications de la théorie de l'équilibre des fils.

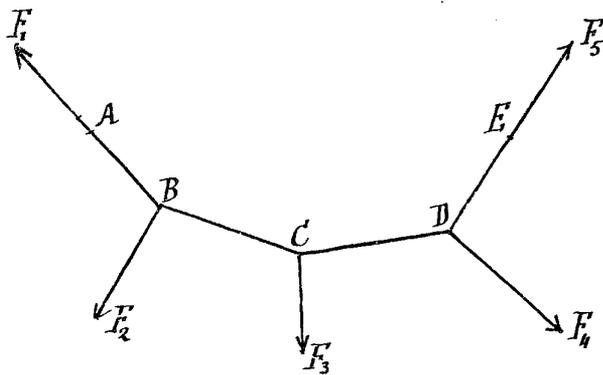
451. — Polygone de Varignon.

Soit $ABCDE$ un fil parfait, en certains points les quels sont appliquées des forces finies $\overline{AF}_1, \overline{BF}_2, \overline{CF}_3, \overline{DF}_4, \overline{EF}_5$, et d'autres forces \overline{F} ds appliquées à un élément quelconque ds du fil étant négligeables. C'est, par exemple, le cas d'un fil pesant, de masse négligeable, soumis à ses extrémités et à des forces finies et en certains points duquel sont suspendus des poids appréciables.

Si le fil est en équilibre, chaque partie AB, BC, CD, \dots est rectiligne et la tension du fil est constante et positive le long de AB, BC, CD, \dots (1).

Le polygone dessiné par le fil est du polygone funiculaire. La première force \overline{AF}_1 est directement opposée à la direction AB ; la tension en B du second cordon est égale et directement opposée à la résultante de \overline{BF}_2 et de la tension (équipollente à \overline{AF}_1) exercée par AB sur BC en B ; autrement dit, la direction BC est parallèle et de sens contraire à la somme géométrique des forces $\overline{F}_1, \overline{F}_2$, et la tension du cordon BC est égale (en v leur absolue) à cette somme géométrique. De même la tension de CD est égale et de sens contraire à la somme géométrique de $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3$. Enfin la tension du dernier côté DE est égale et

opposée à la somme géométrique de toutes les forces \overline{F}_i , la dernière \overline{F}_5 exceptée. Mais d'autre part cette tension est égale à \overline{F}_5 ; autrement dit, la somme géométrique des forces \overline{F} est nulle, résultat évident d'avance puisque les forces \overline{F}_i sont

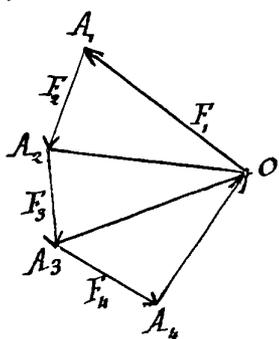


(1) Si le fil est de masse négligeable, il satisfait aux conditions d'équilibre pendant son mouvement, et dessine, à chaque instant, un polygone funiculaire. Par exemple, si au fil sont attachées en B, C, \dots des masses pesantes m_2, m_3, \dots , dont les accélérations à l'instant t sont $\overline{a}_2, \overline{a}_3, \dots$, on a : $m_2 \overline{a}_2 = m_2 \overline{g} - \overline{F}_2$, etc, et les forces $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \dots$ satisfont aux conditions qui vont suivre.

les forces extérieures appliquées à un système en équilibre.

Le polygone de Varignon traduit ces conditions.

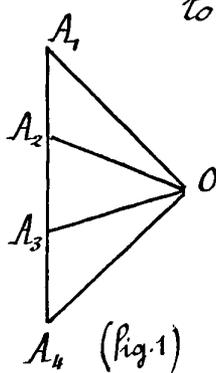
Construisons, avec O comme origine, la somme géométrique des forces F_1, \dots, F_5 , et joignons au point O les sommets A_1, A_2, A_3, A_4 du polygone fermé ainsi obtenu. Les vecteurs A_1O, A_2O, A_3O, A_4O représentent à la fois la direction et le sens des côtés AB, BC, \dots et leurs tensions respectives.



On reviendra dans le cours de géométrie sur cette construction qui peut être regardée comme le premier exemple de Statique graphique.

452. - Câble d'un pont suspendu.

Un câble de pont suspendu est amarré à ses deux extrémités qui sont soumises par suite à deux forces inconnues. Le câble supporte le tablier par l'intermédiaire de tiges verticales équidistantes; on peut admettre que chaque tige exerce sur le câble le même effort⁽¹⁾; les côtés intermédiaires A_1A_2, A_2A_3, \dots du polygone de Varignon sont



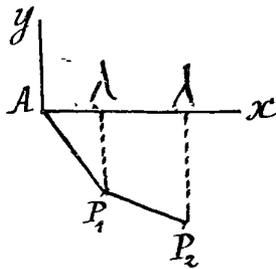
tous égaux et sur la même verticale; le polygone se réduit à un triangle. Construisons ce triangle sur une échelle telle que la distance de O à la verticale A_1A_4 soit par exemple égale à $\frac{1}{1000}$ de l'intervalle constant λ de deux tiges du tablier. Les vecteurs A_1O, A_2O, \dots sont alors équipollents aux côtés successifs de la ligne brisée dessinée par le câble réduite dans le rapport de $\frac{1}{1000}$. On construit donc immédiatement

cette dernière ligne. Il est facile de calculer les coordonnées des divers sommets d'après la construction graphique qui précède: on voit que les projections horizontales des tensions sont constantes et que leurs projections verticales varient

(1) Imaginons le pont séparé en tronçons distincts par des plans verticaux perpendiculaires à la direction du pont et équidistants des tiges verticales; si le système est en équilibre, chaque tige exerce sur le fil une force égale au poids de la section du tablier qu'elle supporte. D'autre part, l'équilibre subsistera si on relie ensemble invariablement les tronçons du tablier. En un mot nous cherchons les positions d'équilibre telles que chaque tige supporte le même poids du tablier.

en progression arithmétique.

Remarquons qu'on doit se donner la force \bar{F}_1 pour construire la fig. 1 ci-dessus, ce qui introduit deux indéterminées. Si on se donne les points d'attache et la longueur des câbles, on pourra calculer ces deux indéterminées.



Prenons comme origine A , comme axe des y la verticale ascendante; appelons P_1, P_2, \dots , les sommets successifs, α_k l'inclinaison sur Ax du côté $P_{k-1}P_k$. On a, si X_1, Y_1 sont les composantes de \bar{F}_1 , et ρ le poids supporté par une tige:

$$(1) \quad x_1 = \lambda, \quad y_1 = -\lambda \frac{Y_1}{X_1}; \quad -\operatorname{tg} \alpha_k = \frac{Y_1 - (k-1)\rho}{X_1}$$

$$(2) \quad x_k = k\lambda, \quad y_k = y_{k-1} + \lambda \operatorname{tg} \alpha_k = y_{k-1} + \frac{[(k-1)\rho - Y_1]}{X_1} \\ = -\frac{k\lambda y_1}{X_1} + \lambda \rho \frac{k(k-1)}{2X_1}.$$

Si dans ces formules on fait varier k d'une façon continue, on voit que le point x, y décrit une parabole; les points de cette parabole correspondant aux valeurs entières de k sont les sommets du câble.

Soit $(n-1)$ le nombre des tiges: le nombre des côtés du polygone funiculaire est n , la longueur du pont est $n\lambda$. Il faut que, h désignant la hauteur (positive ou négative) du second point d'attache au-dessus du premier, on ait:

$$(3) \quad \frac{\lambda \rho n(n-1)}{2X_1} - \frac{n\lambda Y_1}{X_1} = h$$

relation linéaire entre X_1 et Y_1 . Si on exprime que le câble a une longueur donnée, on obtient une seconde condition.

Supposons notamment $h=0$. La condition (3) définit Y_1 . Au lieu de la longueur du câble, donnons-nous la hauteur au-dessous de A du m^e sommet P_m , si $n=2m$ ou $2m+1$; dans ce dernier cas, la condition (3) montre que $\operatorname{tg} \alpha_{m+1} = 0$; le $(m+1)^e$ côté est horizontal. Le polygone funiculaire est ainsi défini sans ambiguïté; mais d'autre

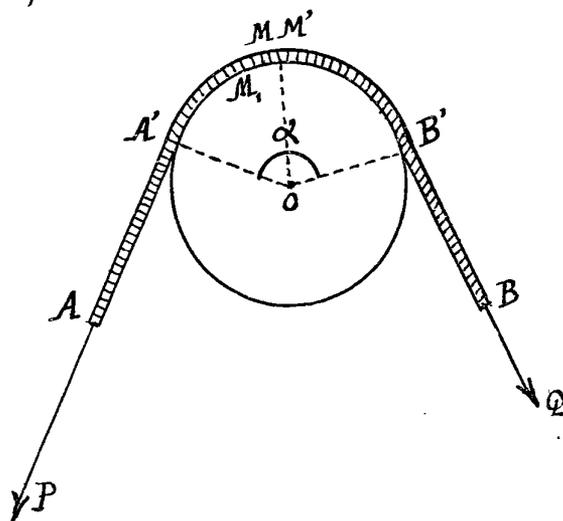
part, en prenant le symétrique du polygone par rapport à la verticale Oy menée à égale distance des deux points d'attache, on obtient un second polygone d'équilibre répondant aux mêmes conditions et qui par suite doit coïncider avec le premier. Le polygone est donc symétrique par rapport à Oy .

453. - Équilibre d'une corde enroulée sur un cylindre rugueux.

Examinons maintenant un exemple de l'équilibre d'un fil en tenant compte du frottement.

Considérons un fil tendu, enroulé sur un cylindre (fixe) de révolution selon une section droite de ce cylindre; sa masse et son poids sont négligeables; on demande les conditions que doivent remplir les deux forces P et Q appliquées à ses extrémités A et B pour que le fil reste en équilibre.⁽¹⁾

Les parties AA' et BB' du fil qui ne sont pas en contact avec le cylindre Σ sont rectilignes et tangentes à la section droite de Σ . Par raison de symétrie, la réaction \vec{R} de Σ sur l'élément ds ou M, M' du fil est située, elle aussi, dans le plan de cette section [ainsi d'ailleurs qu'on le vérifierait aussitôt]; si nous représentons par



R_t la projection de \vec{R} selon la demi-tangente Mt au cylindre (menée dans le sens des arcs croissants), par R_n la projection de \vec{R} sur la normale MO au cylindre, par r le rayon du cylindre, on a :

$$(1) \quad \frac{dT}{ds} + R_t = 0$$

$$(2) \quad \frac{T}{r} + R_n = 0$$

Soit f le coefficient de frottement au repos du fil sur le cylindre. On doit avoir en valeur absolue :

(1) Pratiquement, ce problème est le problème de l'équilibre d'une corde qui glisse avec frottement sur un corps mort (cylindre solide fixé au sol), lorsqu'on néglige la raideur de la corde.

$$|R_t| \leq \int_0^l |R_n| ,$$

c'est-à-dire en posant $R_t = -\lambda(s) R_n$:

$$(3) \quad -\int_0^l \leq \lambda(s) \leq \int_0^l ,$$

l'arc s désignant l'arc $A'M$ compté dans le sens $A'B'$, et s variant de 0 à l , si l est la longueur du fil entre A' et B' .

Or l'équation (1) donne :

$$\frac{dT}{ds} - \lambda \frac{T}{P} = 0 ,$$

ou $\frac{dT}{T} = \frac{\lambda(s)}{P} ds$,

ou enfin :

$$T = T_0 e^{\frac{1}{P} \int_0^s \lambda(s) ds}$$

T_0 désignant la tension du brin AA' ; en particulier, pour $s=l$, on a, T_1 désignant la tension du brin BB' :

$$T_1 = T_0 e^{\frac{1}{P} \int_0^l \lambda(s) ds} ;$$

l'exponentielle du second membre, d'après les inégalités (3), est comprise entre

$$e^{-\frac{f}{P} l} \text{ et } e^{+\frac{f}{P} l}, \text{ ou encore entre } e^{-f\alpha} \text{ et } e^{+f\alpha},$$

[$\alpha = A'\hat{O}B'$]. Pour que l'équilibre soit possible, il faut donc que le rapport des tensions extrêmes soit compris entre

$e^{-f\alpha}$ et $e^{+f\alpha}$, ou, si on veut, que P , la plus grande des deux forces \bar{P} , \bar{Q} , soit au plus égale à $Qe^{f\alpha}$.

Inversement, si cette condition est remplie, nous pouvons poser :

$P = Qe^{\mu\alpha}$, μ désignant une constante au plus égale à f . Admettons que R_t soit égal en chaque point de $A'B'$ à $-\mu R_n = \mu \frac{T}{P}$; le calcul précédent donne :

$$T_1 = T_0 e^{\mu\alpha} = P e^{\mu\alpha} ,$$

valeur de T_1 qui coïncide bien avec la valeur de Q . On peut donc calculer des réactions conformes aux lois du frottement au repos et assurant l'équilibre. Nous admettrons que dans ce cas, l'équilibre a lieu nécessairement.

454. - Si on confond f_0 et f [f coefficient de frottement de glissement, qui, en fait, est un peu inférieur à f_0], on peut confirmer la conclusion précédente en montrant que le mouvement est impossible.

En effet, tout d'abord si $P = Q$, le fil est en équilibre même quand le cylindre est parfaitement lisse, a fortiori quand il y a frottement. Ceci posé, augmentons progressivement P jusqu'à ce que le fil commence à glisser: par raison de symétrie, le glissement aura lieu dans le plan de la section droite $A'OB$; pendant ce glissement, le fil, dont le poids (par suite la masse) est négligeable et dont les accélérations sont faibles, vérifie les mêmes équations (1) et (2) que dans l'équilibre, mais ici R_t est directement opposé au glissement [donc < 0] et égal à $f|R_n| = f\frac{T}{r}$; l'équation (1) donne alors:

$$T = T_0 e^{-\int_0^s f \frac{ds}{r}} = T_0 e^{-\frac{fs}{r}} = Pe^{-\frac{fs}{r}}$$

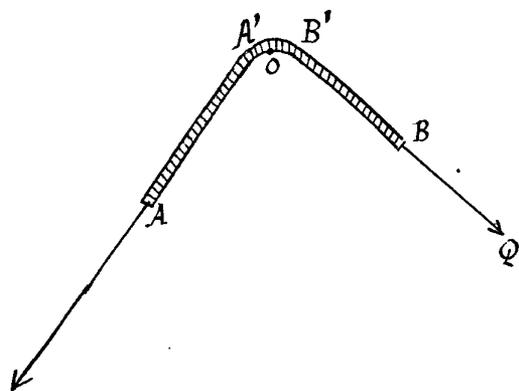
en particulier pour $s = l_1$:

$$T_1 = Pe^{-f\alpha}; \text{ d'où } Q = Pe^{-f\alpha}.$$

Il est donc impossible que le glissement commence si $P < Qe^{f\alpha}$.

455. - Remarques. - I. - Supposons que le fil de masse négligeable glisse lentement sur le cylindre dépoli, et que ce cylindre soit réduit sensiblement à son axe OZ , l'arc $A'B'$ étant par conséquent très petit, mais l'angle $A'OB'$ restant égal à α . Le fil glisse alors avec frottement sur une droite fixe OZ dans le sens de \vec{P} : le long du petit arc $A'B'$, la tension du fil varie brusquement de P à $Pe^{-f\alpha}$,

α désignant l'angle de deux brins du fil en O . Au contraire, quand il n'y a pas frottement, la tension reste la même le long du fil [N° 443].



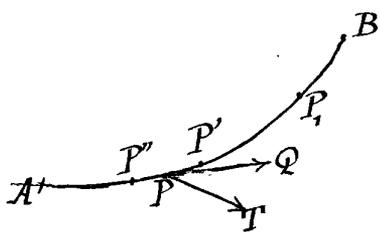
II. - Il est loisible d'enrouler plusieurs fois le fil [c'est-à-dire en pratique la corde] le long du cylindre; d'où le moyen

de faire équilibre avec une force Q à une force considérable P , P croissant avec d comme une exponentielle. Par exemple, si $f = 0, Q$, on trouve que pour $d = \pi, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \dots$, le rapport $\frac{P}{Q} = e^{fd}$ est : 1,87; 3,51; 12,34; 48,31. Les applications de cette remarque sont très nombreuses (amarrage d'un navire autour d'un corps mort, freins à corde, etc.).

456. - Fils imparfaitement flexibles. - Toute la théorie développée dans ce chapitre [p. 472-506] supposons essentiellement que la ligne matérielle considérée est parfaitement flexible [N° 427], c'est-à-dire que la section normale de la ligne a des dimensions assez petites pour que l'aire de contact entre deux éléments contigus PP', PP'' puisse être assimilée à un point géométrique P [Exemple, fil de soie]. En réalité, il n'en est jamais rigoureusement ainsi: les forces de contact exercées par PP' sur PP'' ont une somme géométrique \bar{PT} , et un moment résultant par rapport à P , soit \bar{R} . Dans tous les calculs précédents, nous avons négligé \bar{R} .

Or, dans de nombreuses applications \bar{R} est faible mais appréciable, soit parce que la section du fil des dimensions appréciables, soit parce que le fil a une résistance élastique à la flexion et à la torsion qui est sensible même si la section du fil est très petite [fil métallique, cheveu]

Quelles modifications doit-on apporter aux équations du N° 428 si on tient compte de \bar{R} . La notation étant la même que dans ce N°, et \bar{R} désignant le vecteur \bar{R} en P_1 , les six équations universelles d'équilibre donnent pour le système PP_1 :



$$\bar{I}_1 - \bar{I} + h\bar{F}' = 0, \quad (\bar{PT}, P_1) + \bar{R}_1 - \bar{R} + h^2\bar{I} = 0,$$

\bar{F}' et \bar{I} étant moindres en longueur que le maximum de F ;

d'où en divisant par h et faisant tendre h vers zéro :

$$(1) \quad \frac{d\bar{I}}{ds} + F = 0, \quad (\bar{PT}, Q) + \frac{d\bar{R}}{ds} = 0,$$

PQ désignant le vecteur égal à l'unité porté sur la demi-

tangente Pt au fil menée dans le sens des arcs croissants.

Il suit des équations géométriques (1) que si $\frac{d\mathcal{R}}{ds}$ n'est pas nul, ce vecteur est normal au fil en P ; de plus \vec{T} n'est pas tangent au fil, et sa composante normale T_n est en valeur absolue égale à la longueur de $\frac{d\mathcal{R}}{ds}$.

457. - Raideur et élasticité.

On résume ce qui précède en disant qu'on peut remplacer les forces de contact qu'exerce PP' sur PP'' par une force unique \vec{T} appliquée en P et un couple dont le plan est tangent au fil, soit un couple d'axe \mathcal{R} . Mais ce couple \mathcal{R} provient de forces de deux espèces.

Considérons une chaîne ordinaire dont les chaînons soient des barres rigides; les articulations de deux chaînons contigus entraînent des contacts le long d'une petite arc, et ces contacts ont toujours lieu avec frottement. Le moment (par rapport au point P d'articulation) des réactions du chaînon PP' sur le chaînon PP'' n'est pas nul, et le travail de ces réactions dans le déplacement de la chaîne est toujours négatif. Quand un fil est assimilable à une telle chaîne, on le dit affecté de raideur.

Mais supposons que les chaînons de la chaîne, au lieu d'être indéformables, soient des solides élastiques; les réactions intérieures de chaque chaînon dépendent de sa déformation; leur travail dans le déplacement vrai de la chaîne peut être positif ou négatif. Un fil assimilable à une telle chaîne où les articulations seraient parfaites, est dit fil élastique ou à torsion; si les articulations de la chaîne de comparaison étaient affectées de frottement, le fil aurait à la fois de la raideur et de l'élasticité.

En toute rigueur, les fils réels (extensibles ou non extensibles) présenteront toujours à la fois de la raideur et de l'élasticité. Mais l'élasticité de certains fils peut être tout à fait négligeable [Exemple: cordes], ou au contraire leur raideur [Exemple: fil métallique ou cheveu], ou enfin les deux [fil de soie].

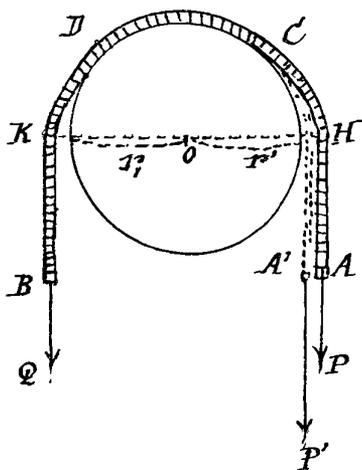
Cordons par exemple autour d'un axe vertical un fil métallique et libérons une extrémité: le fil se détord en acquérant une certaine énergie cinétique qui représente le travail des réactions [celui de la pesanteur étant

négligeable]. Ce travail est donc positif, tandis qu'il était négatif pendant la torsion. Au contraire, le travail des forces de raideur est essentiellement négatif.

Un fil affecté seulement de raideur reste en équilibre non seulement dans les conditions qu'indique la théorie mais dans des conditions voisines. C'est dans ce phénomène que consiste la raideur des cordes.

458.- Lois de Coulomb relatives à la raideur des cordes.

Considérons une poulie homogène, de centre O , qui tourne sans frottement appréciable autour de l'axe OZ perpendiculaire à son plan, et une corde AB enroulée sur la poulie sur laquelle elle peut glisser, et soumise à ses extrémités A et B à deux forces \bar{P} (puissance) et \bar{Q} (résistance) devant lesquelles le poids de la corde est négligeable.



Si on assimile la corde à un fil parfait, quand le système poulie et corde est en équilibre, la corde AB se compose de deux segments rectilignes AC et BD tangents à la poulie, et d'un

arc de cercle CD ; de plus, les deux forces P et Q doivent être égales et dirigées de façon à tendre la corde⁽¹⁾. Quand P est un peu plus grand que Q , l'équilibre est impossible, de plus, si le coefficient de frottement f entre la poulie et la corde est appréciable, la corde ne peut glisser sur la poulie, car P devrait être plus grand que $Qe^{f\alpha}$, [α arc d'enroulement]. Dès que P dépasse Q , la corde doit donc se mouvoir en entraînant la poulie de façon qu'il n'y ait point de glissement de la corde sur la poulie. Or l'expérience montre que si on augmente \bar{P} , la poulie ne tourne que quand P surpasse Q d'une certaine quantité. La différence $P - Q$ peut, d'après Coulomb, se

(1) En effet, le moment par rapport à OZ des forces données qui s'exercent sur le système corde et poulie, se réduit au moment de \bar{P} et de \bar{Q} par rapport à OZ , c'est-à-dire (au signe près) à $(P - Q)r$, si r désigne le rayon de la poulie. Or ce moment doit être nul, si les réactions de l'axe de la poulie en équilibre passent par O .

représenter par la formule empirique :

$$P - Q = \frac{A + BQ}{r}$$

A et B désignant deux constantes qui dépendent uniquement de la nature de la corde et de son diamètre d ; A varie à peu près comme d^4 et B comme d^2 . On peut rendre compte grossièrement de cet effet ainsi : dans une position d'équilibre où $P = Q$, les portions CA , AB de la corde ne sont pas rectilignes, mais à cause de la raideur de la corde dessinent un arc dont la courbure varie de $\frac{1}{r}$ à zéro pour se terminer par une partie sensiblement rectiligne, en sorte que la distance P' et Q' de O aux lignes d'action de P et de Q , à savoir OH et OK , est égale à une certaine longueur r , $r > R$.

Si on augmente P , le premier effet est d'appuyer davantage sur la poulie la portion CA de la corde qui prend la position CA' ; la ligne d'action de P se rapproche ainsi du point O [$r' < r < R$]; si P croît d'une façon continue, r' d'abord égal à r diminue de telle façon que Pr' reste égal à QR ; c'est seulement quand r' a atteint une certaine valeur que Pr' devient plus grand que QR et que la poulie se met en mouvement.

On peut dire encore que tout se passe comme si P était appliqué à la distance r de O et Q à la distance r' , r' étant lié à r par la formule :

$$r' = r + B + \frac{A}{Q}$$

Chapitre III

Etude de la stabilité de l'équilibre.

459. — Théorème de Sejeune-Dirichlet.

Considérons un système formé de solides ou d'éléments indéformables, tels que tous les glissements entre les corps du système ou entre ces corps et les obstacles fixes aient lieu sans frottement. Supposons de plus que les forces données dérivent d'une fonction de forces U [en tenant compte ou non des liaisons] [N° 425].

Si la position S_0 de ce système S est une position d'équilibre, on sait que dans tout déplacement virtuel⁽¹⁾ de S à partir de S_0 , la variation infinitésimale δU de U [réduite à sa partie du premier ordre] est négative ou nulle. Cette condition est nécessaire, mais non suffisante, pour que U soit maxima pour la position S_0 . Nous allons montrer que si U est effectivement maxima pour la position S_0 , l'équilibre est stable.

Je peux toujours admettre que, pour la position S_0 , U est nul, pour toutes les positions de S voisines de S_0 , U par hypothèse est alors négatif et non nul.

Définissons l'écart entre une position arbitraire S du système et la position S_0 : soit P_0 la position d'un élément P du système, de masse m , quand le système occupe la position S_0 ; soit P la position d'un élément P du système, de masse m , quand le système occupe la position S , et soit Δ la distance P_0P . La quantité $\mathcal{E} = \sum m \Delta^2$ est, par définition, l'écart entre les deux positions S et S_0 du système. C'est cette quantité que, dans ce qui suit, j'appellerai, pour abréger, l'écart du système.

Pour que l'écart du système soit nul, il faut et il suffit que S coïncide avec S_0 . Si cet écart est petit, S est voisin de S_0 . Dire que l'équilibre est stable, c'est dire que l'écart du système reste très faible si l'écart initial et la force vive initiale du système sont très faibles. Dire une façon plus précise, soit ε une quantité positive, choisie d'avance aussi petite qu'on veut: dire que l'équilibre est stable, c'est à dire qu'on peut trouver une quantité η ⁽²⁾ telle que, si l'écart initial et la force vive initiale sont moindres que η , l'écart du système reste indéfiniment moindre que ε . Quand cette condition est remplie, la force vive T du système reste elle-même très petite, car on a:

$$(1) \quad T = U + T_0 - U_0;$$

Or les constantes T_0 et U_0 sont très petites et U reste très petit.

(1) Déplacement infinitésimal compatible avec les liaisons.

(2) Cette quantité η tend vers zéro quand ε tend vers zéro, mais pour chaque valeur donnée de ε , on peut déterminer une telle quantité η .

Considérons l'ensemble des positions du système pour lesquelles l'écart \mathcal{E} a la valeur donnée ε ; ce sont des positions voisines de S_0 , pour lesquelles la fonction U varie d'une manière continue et est essentiellement négative et non nulle. La valeur maxima de U pour cet ensemble de positions est donc négative et différente de zéro: soit $-\alpha$ cette valeur.

Ceci posé, plaçons le système dans des conditions initiales assujetties aux seules restrictions suivantes: l'écart initial est inférieur à ε et, de plus, assez faible, ainsi que la force vive initiale, pour que les deux quantités positives T_0 et $-U_0$ aient une somme moindre que α . Comme $T_0 - U_0$ est nul quand l'écart initial \mathcal{E}_0 est nul ainsi que T_0 , la restriction

$$(2) \quad T_0 - U_0 < \alpha$$

signifie que les conditions initiales sont suffisamment voisines des conditions d'équilibre.

Je dis maintenant que, dans le mouvement qui correspond aux conditions initiales considérées, l'écart \mathcal{E} du système ne saurait dépasser ε .

En effet, s'il en était autrement, \mathcal{E} (inférieur à ε pour $t = t_0$) serait égal à ε à un certain instant t_1 , et dans l'équation des forces vives (1) le terme U serait $< -\alpha$; en vertu de la restriction (2), le second membre de (1) serait négatif, ce qui est absurde.

Nous avons donc bien démontré ce théorème:

Lorsque la fonction de force U est maxima pour une position S_0 du système, cette position S_0 est une position d'équilibre stable.

Ce théorème, d'une importance considérable est dû à Lejeune-Dirichlet.

En particulier, un système pesant dont le centre de gravité est le plus bas possible, est en équilibre stable.

460. Influence du frottement et des résistances.

La démonstration précédente s'applique, que les liaisons soient bilatérales ou unilatérales,

Le théorème subsiste même quand le système est

affecté de frottements et quand aux forces données dérivant d'un potentiel s'ajoutent des résistances directement opposées aux vitesses des éléments du système. En effet, le travail des réactions et le travail des résistances sont essentiellement négatifs: Soit $-T$ ce travail; on a:

$$(3) \quad T = U - \tau + T_0 - U_0 < U + T_0 - U_0.$$

Le raisonnement précédent subsiste donc a fortiori; les frottements et résistances ne font que diminuer l'amplitude des oscillations de S autour de S_0 .

Enfin, le raisonnement précédent s'applique évidemment quels que petits que soient les éléments indéformables du système. D'une manière générale, le théorème de Lejeune-Dirichlet s'applique à tout système matériel qui répond aux restrictions suivantes: 1° le travail des réactions intérieures et extérieures du système est nul ou négatif dans tout déplacement vrai du système; 2° les forces données se décomposent en forces qui dérivent d'une fonction de forces U , et en résistances (forces dont le travail est essentiellement nul ou négatif dans le déplacement vrai du système).

Moyennant ces restrictions, toute position S_0 de S pour laquelle U est maxima est position d'équilibre stable du système.

Le théorème s'applique donc aux systèmes formés de solides, de fils et de membranes inextensibles et parfaitement flexibles, - de liquides incompressibles, dont on sait que la température reste constante. Il subsiste si les fluides présentent de la viscosité, les fils et les membranes de la raideur.⁽¹⁾

Si au lieu de la fonction de forces, on considère l'énergie potentielle interne et externe du système $W = -U$, le théorème exprime qu'un système quelconque rentrant dans la

⁽¹⁾ Ses réactions sont [N :] les forces de contact intérieures du système et les forces de contact exercées par les obstacles extérieurs fixes.

⁽²⁾ Mais non si les fils et les membranes présentent des résistances élastiques à la flexion et à la torsion, résistances dont le travail peut être > 0 ou < 0 .

catégorie précédente est en équilibre stable quand son énergie potentielle est minima.

461. - Cas d'un maximum imparfait de la fonction de forces.

La fonction de forces U étant nulle pour la position S_0 , supposons que pour toutes les positions voisines on ait : $U \leq 0$; nous dirons dans ce cas qu'il y a maximum imparfait de la fonction de forces.

Il est facile de voir sur des exemples que, dans ce cas, l'équilibre n'est pas stable. Considérons, par exemple, un cylindre de révolution dont l'axe est horizontal et un élément pesant P mobile sans frottement sur le cylindre. Soit D la génératrice la plus basse du cylindre, P_0 un point de D ; P_0 est une position d'équilibre de P et on a sur le cylindre : $U = mg(z - z_0) \leq 0$, (Oz verticale descendante); or si on lance le point P à partir de P_0 avec une vitesse aussi faible qu'on veut, dirigée selon D , P s'écartera indéfiniment de P_0 sur D , d'un mouvement uniforme.

Dans la réalité, le point P frotte toujours sur le cylindre et est soumis à la résistance d'un milieu; soit $-T$ le travail essentiellement négatif de ces forces; T croît avec le chemin parcouru par P . Or on a :

$$(4) \quad T = U - T_0 + T_0 - U_0 \leq -T_0 + T_0 - U_0;$$

égalité qui montre que T reste inférieur à $T_0 - U_0$; si donc $T_0 - U_0$ est très petit, le chemin parcouru par P sera très petit.

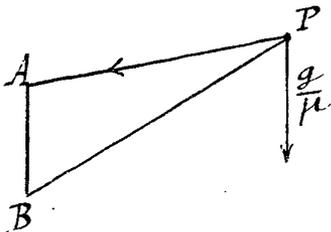
Les mêmes conclusions s'appliquent à un système quelconque, du moment que les corps du système ont des contacts entre eux ou avec des obstacles fixes. En vertu de l'équation (4), l'équilibre, qui ne serait pas rigoureusement stable si les frottements et résistances étaient nuls, est stable en fait.

462. - Cas d'un système à liaisons complètes.

Lorsqu'un système ne dépend que d'un paramètre, soit q ce paramètre et $U(q)$ la fonction de forces; les positions d'équilibre du système sont données par les valeurs q_0 de q , qui annulent $U'(q)$. En général, [c'est-à-dire si q_0 est racine simple de $U'(q)$], ces valeurs correspondent

à un maximum ou à un minimum de U ; si q_1 et q_2 sont deux racines simples consécutives de $U'(q)$, U est maxima pour l'une et minima pour l'autre; les positions d'équilibre sont alternativement stables ou instables⁽¹⁾.

Par exemple, considérons un point pesant P mobile sans frottement sur un cercle vertical et \mathcal{O} attiré proportionnellement à la distance par un point fixe A du plan du cercle; la force donnée qui s'exerce sur P , à savoir $m\bar{g} + m\mu\overline{PA}$ est égale à $m\mu\overline{PB}$,



B désignant le point fixe tel que $\overline{AB} = \frac{g}{\mu}$; les positions d'équilibre de P sont les extrémités P_0, P_1 du diamètre du cercle mené par B ; le point P_0 le plus voisin de B est position d'équilibre stable, et le point P_1 est position d'équilibre instable. C'est l'inverse qui aurait lieu si A repoussait P au lieu de l'attirer.

Chapitre IV.

Principe de d'Alembert... Equations générales du mouvement d'un système.

463. - Principe de d'Alembert. - Soit $Oxyz$ le trièdre de référence. Considérons un système matériel quelconque S , et soit P un quelconque de ses éléments, m sa masse, \vec{y} son accélération à l'instant t , \vec{F} la force totale, \vec{R} la

(1) Dans le cas d'un système à un paramètre, il est facile de voir à l'aide du théorème des forces vives que le mouvement est instable si $U(q)$ n'est pas maxima.

réaction⁽¹⁾ (totale) et F' la force donnée (totale) qui s'exercent sur P à cet instant, on a :

$$(1) \quad m\bar{y} = \bar{F} = \bar{F}' + \bar{R}.$$

Si on représente par $\bar{\Phi}$ la force d'inertie, c'est-à-dire le vecteur $-m\bar{y}$, l'égalité géométrique (1) peut s'écrire :

$$(2) \quad \bar{\Phi} + \bar{F}' + \bar{R} = 0.$$

Cette égalité étant vraie pour chaque point du système, imaginons un déplacement élémentaire (idéal) du système, entièrement quelconque, et calculons le travail total dans ce déplacement des forces \bar{F}' , \bar{R} et $\bar{\Phi}$, les vecteurs $\bar{\Phi}$ étant traités pour un instant comme des forces ordinaires.

Ce travail total est nul. Cette condition peut se traduire par l'égalité :

$$(3) \quad 0 = \sum \left\{ (X' + R_x - mx'') \delta x + (Y' + R_y - my'') \delta y + (Z' + R_z - mz'') \delta z \right\}$$

quels que soient δx , δy , δz .

Supposons maintenant que le système se compose de solides indéformables, de dimensions d'ailleurs aussi petites qu'on veut, et dont toutes les liaisons soient bilatérales et sans frottement. Le principe précédent s'applique, en particulier, à tous les déplacements virtuels de S , c'est-à-dire à tous les déplacements infinitésimaux compatibles avec les liaisons [N° 407]. Mais, dans un tel déplacement, le travail total des réactions est nul, d'où cette conclusion :

À chaque instant t , dans tout déplacement virtuel de S , le travail virtuel total des forces données et des forces d'inertie est nul.

Ce principe dit principe de d'Alembert se traduit analytiquement aussi :

À chaque instant t , on a :

⁽¹⁾ Les réactions [N° 406] sont les forces de contact intérieures et les forces de contact exercées par les obstacles fixes sur S . Les forces données sont toutes les autres forces s'exerçant sur S . La force \bar{R} est une force absolue, les forces \bar{F} et \bar{F}' sont relatives aux axes choisis.

(4) $0 = \Sigma \{ (X' - mx'') dx + (Y' - my'') dy + (Z' - mZ'') dz \}$
 les dx, dy, dz définissant un déplacement virtuel quelconque de S (à partir de sa position à l'instant t).

464. - Systèmes auxquels s'applique le principe de d'Alembert. - Le principe de d'Alembert, tel que l'exprime l'égalité (4), suppose seulement que dans tout déplacement virtuel de S , le travail des réactions est nul. Ce principe s'applique donc à tous les systèmes formés⁽¹⁾ de solides, de chaînes parfaites, de fils ou de membranes parfaitement flexibles et inextensibles et qui restent tendues, de liquides incompressibles, pourvu que toutes les liaisons soient sans frottements, et en outre bilatérales ou du moins se comportent comme si elles étaient bilatérales. Par exemple, si S est une sphère mobile sur un plan horizontal au-dessus duquel elle peut se soulever, la liaison est unilatérale; mais si on sait que dans son mouvement la sphère restera en contact avec le plan, le mouvement se calculera comme si la liaison était bilatérale. Nous reviendrons plus loin sur les liaisons unilatérales.

Quand le système S se compose d'un certain nombre de solides et de chaînes parfaites ou fils parfaits de masse négligeable et soumis à des forces données négligeables [N° 443], la position de S ne dépend que d'un nombre fini de paramètres.

Applications du Principe de d'Alembert.

Indiquons immédiatement quelques applications de ce principe à des cas particuliers qui se présentent fréquemment dans les applications.

(1) Le système peut en outre comprendre un certain nombre d'éléments matériels séparés, sans contacts entre eux, mais qui peuvent être en contact avec les autres corps de S et les obstacles fixes. Il n'est pas nécessaire de supposer ces éléments indéformables, du moment que leurs dimensions restent négligeables [N° 415].

465. - Les déplacements virtuels (à partir de toute position du système) comprennent une translation parallèle à une droite fixe, soit Ox .

Dans cette translation virtuelle, tous les x subissent la même variation δx , les y et les z ne varient pas, et l'équation fondamentale (4) donne :

$$\delta x \sum m x'' = \delta x \sum X'.$$

Or les forces intérieures données sont deux à deux égales et directement opposées; la somme $\sum X'$ se réduit donc à $\sum X^e$, somme des projections sur Ox des forces extérieures données. De là l'égalité, où M est la masse totale de S et ξ l'abscisse de son centre de gravité G :

$$(I) \quad \frac{d}{dt} \sum m x' = M \xi'' = \sum X^e.$$

La projection de G sur Ox se meut donc comme si (toute la masse M étant concentrée en G) toutes les forces extérieures données étaient appliquées à ce point.

Remarque. - Le théorème du mouvement du centre de gravité aurait donné :

$$M \xi'' = \sum X^e + \sum R_x^e,$$

en appelant R_x^e la composante suivant Ox d'une des réactions extérieures. Cette dernière égalité s'applique à tous les systèmes; la précédente ne s'applique qu'à ceux dont les liaisons (à partir de toute position) comportent une translation virtuelle parallèle à Ox ; pour ces systèmes, $\sum R_x^e$ est nul.

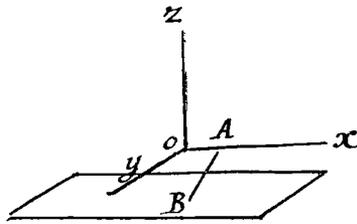
466. - Exemple. - Une barre rigide AB , homogène et pesante, a ses deux extrémités qui glissent sans frottement sur deux cylindres fixes de génératrices parallèles à Ox [lesquels peuvent se réduire chacun à un plan à une droite].

Le théorème précédent fournit l'intégrale première

$$\xi' = g_1 t + C^{te}, \quad (g_1 \text{ projection de } \bar{g} \text{ sur } Ox).$$

Supposons pour fixer les idées, qu'un des cylindres se

réduise à une droite horizontale OX et l'autre à un plan horizontal. La position de AB dépend de deux paramètres, soit l'abscisse x de A (mobile sur OX) et l'angle θ que fait avec OX la projection de AB sur le plan xOy . L'égalité précédente, qui donne ici $\xi = \xi_0 + l \sin \alpha \cos \theta$, et l'intégrale des forces vives \mathcal{E} qui exprime que T est constant définissent le mouvement. Soit α l'angle constant de AB avec Oz ; la force vive de AB , calculée par le théorème de Koenig est



$$2T = M(\dot{\xi}^2 + l^2 \sin^2 \alpha \cos^2 \theta \dot{\theta}^2) + \frac{Ml^2}{3} \sin^2 \alpha \dot{\theta}^2,$$

l désignant la longueur de AB . On a donc en définitive:

$$\xi = x + l \sin \alpha \cos \theta = \xi_0 t + \xi_0, \quad \dot{\theta}^2 (\cos^2 \theta + \frac{1}{3}) = h;$$

le problème est ramené aux quadratures.

467. Les déplacements virtuels (à partir de toute position du système) comprennent une rotation d'ensemble autour d'une droite fixe, soit Oz .

Dans cette rotation virtuelle, on a, pour chaque point P de S :

$$\delta x = -y \delta \theta, \quad \delta y = x \delta \theta, \quad \delta z = 0,$$

$\delta \theta$ étant le même pour tous les points P . L'égalité fondamentale (4) donne par suite:

$$\delta \theta \sum m (xy'' - yx'') = \delta \theta \sum (xY' - yX'),$$

d'où, comme le moment par rapport à Oz des forces données se réduit à celui des forces données extérieures:

$$(II) \quad \frac{d}{dt} \sum m (xy' - yx') = \sum (xY'^e - yX'^e).$$

Le théorème général des moments cinétiques aurait donné:

$$\frac{d}{dt} \sum m (xy' - yx') = \sum (xY'^e - yX'^e) + \sum (xR_y^e - yR_x^e).$$

Dans ce cas particulier, $\sum (xR_y^e - yR_x^e) = 0$.

Remarquons ce résultat obtenu en passant : dans une rotation virtuelle d'ensemble de S autour de Oz , le travail virtuel des forces d'inertie est

$$\begin{aligned} & -\delta\theta \frac{d}{dt} \sum m(xy' - yx') \\ & = -\delta\theta \frac{d}{dt} \sum m r^2 \theta', \end{aligned}$$

r, θ, z désignant les coordonnées semi polaires d'un point P .

Si notamment le système est un solide mobile autour de Oz , ce travail peut s'écrire :

$$-I\theta''\delta\theta,$$

I désignant le moment d'inertie du solide par rapport à Oz .

Exemple. - Les extrémités d'une force rigide AB glissent sans frottement sur deux surfaces de révolution fixes et de même axe. - L'égalité II s'applique : en particulier, si Oz est vertical et si les forces données se réduisent à la pesanteur, la somme $\sum m(xy' - yx')$ est constante.

468. - Les déplacements virtuels (à partir de toute position du système) comprennent un déplacement hélicoïdal invariable.

Soit Oz l'axe de ce déplacement hélicoïdal et h le rapport constant entre la translation infinitésimale δz et la rotation infinitésimale $\delta\theta$ [$\delta z = h\delta\theta$, $h > 0$ ou < 0].

Dans ce déplacement, on a, pour chaque point P ,

$$\delta x = -y\delta\theta, \quad \delta y = x\delta\theta, \quad \delta z = h\delta\theta,$$

et l'équation fondamentale (4) donne :

$$\delta\theta \sum m(xy'' - yx'' + hz'') = \delta\theta \sum (xY' - yX' + hZ'),$$

ou encore :

$$(III) \quad \frac{d}{dt} \sum m(xy' - yx' + hz') = xY'^e - yX'^e + hZ'^e.$$

En particulier, quand les forces extérieures données sont nulles, $\sum m(xy' - yx' + hz')$ est constant.

Exemples. - 1° Un point matériel P glisse sans frottement sur une surface de vis à filets carrés: mouvement de P quand aucune force donnée ne lui est appliquée.

Soit oz l'axe de la surface qui, en coordonnées semi-polaires, peut se définir par les équations:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = h \theta.$$

L'intégrale première que nous venons d'indiquer donne ici: $m(r^2 + h^2)\dot{\theta} = Cte$. L'intégrale des forces vives donne ensuite:

$$V^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2 \equiv \dot{r}^2 \equiv \dot{r}^2 + (r^2 + h^2) \dot{\theta}^2 \equiv Cte$$

Le problème est ramené aux quadratures: les trajectoires sont les géodésiques de la surface, car leur plan osculateur est constamment normal à la surface.

2° Deux points pesants P, P' de même masse m, mobiles sans frottement sur une hélice circulaire d'axe vertical oz , s'attirent suivant une certaine fonction de la distance $r = PP'$. - Mouvement du système.

Soit:

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad z = h \theta$$

les équations de l'hélice. Le système dépend de deux paramètres θ et θ_1 , qui déterminent la position de P et de P'.

L'égalité III donne ici (oz étant la verticale ascendante)

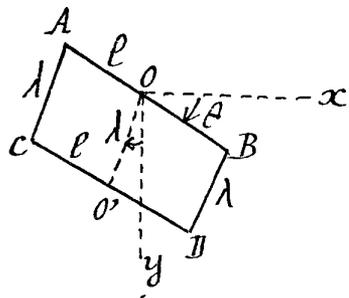
$$m(a^2 + h^2)(\theta'' + \theta_1'') = -2mgh.$$

L'intégrale des forces vives donne ensuite:

$$\frac{m}{2}(a^2 + h^2)(\dot{\theta}^2 + \dot{\theta}_1^2) = -mgh(\theta + \theta_1) + U(r) + Cte$$

Le problème se ramène aisément aux quadratures en posant $\theta + \theta_1 = u$ et $\theta - \theta_1 = \psi$.

469. Exercice. - Deux barres AB, CD homogènes et pesantes ont leurs extrémités reliées par des fils égaux inextensibles et parfaitement flexibles [ou des tiges égales] de masse négligeable; la barre AB tourne autour de son milieu O, maintenu fixe. Mouvement du système abandonné sans vitesse dans un plan vertical xoy , ou avec des vitesses situées dans ce plan.



Le mouvement a lieu évidemment dans le plan xOy où le système forme un parallélogramme. Sa position dépend de deux paramètres, soit $\theta = x\overline{OB}$, $\varphi = y\overline{OO'}$, (O' désignant le milieu de CD , et Oy la verticale descendante).

Considérons le déplacement virtuel $\delta\theta$; dans ce déplacement AB tourne autour

de O , et le travail de ses forces d'inertie est $-\delta\theta \times I\theta''$ [$I = M \frac{\ell^2}{3}$, si 2ℓ est la longueur de la barre et M sa masse]. Les forces d'inertie de AC, BD , négligeables ont un travail négligeable. La barre CD tourne de $\delta\theta$ autour de O' qui reste fixe. Considérons des axes $O'x, y$, parallèles aux axes Oxy , et soit Φ la force d'inertie d'un élément de CD (de masse m) dans son mouvement par rapport à ces nouveaux axes; si Γ est l'accélération de O' , on a: $\Phi = \bar{\Phi} - m\bar{\Gamma}$; or, dans le déplacement $\delta\theta$, O' restant fixe, le travail des forces $-m\bar{\Gamma}$ est nul, car ces vecteurs admettent une résultante appliquée à O' ; le travail des forces Φ , est [N.º 467]: $-\delta\theta \times I\theta''$, car le mouvement de CD par rapport aux axes $O'x, y$, est une rotation de vitesse θ' .

Le travail total de toutes les forces d'inertie du système dans le déplacement $\delta\theta$ est donc $-\delta\theta \times 2I\theta''$.

D'autre part, le travail des forces données (ici, la pesanteur) est nul, car la pesanteur peut être remplacée pour AB et CD par deux forces appliquées à O et O' points qui restent fixes, et la pesanteur de AC et de BD est négligeable.

Le principe de d'Alembert appliqué au déplacement $\delta\theta$ donne donc

$$2I\theta'' = 0, \quad \text{ou} \quad \theta = \theta_0 t + C t^2$$

Le théorème des forces vives donne d'autre part [théorème de Koenig]:

$$2M \frac{\ell^2}{3} \theta'^2 + M \lambda^2 \varphi'^2 = Mg \lambda \cos \varphi + C t^2 \quad (\lambda = OO'),$$

c'est-à-dire:

$$\lambda \varphi'^2 = 2g \cos \varphi + h,$$

équation du mouvement d'un pendule circulaire de longueur λ ; le point O' se meut donc comme un pendule simple.

Calcul des tensions des fils. — Calculons la tension de chaque fil AC et BD. Le théorème des moments cinétiques appliqué à AB par rapport au point O, nous montre que le moment résultant par rapport à O des deux forces exercées sur A et B par les deux fils est nul; ces deux forces sont donc égales et de même sens⁽¹⁾; les deux fils ont même tension; appelons N la force qu'ils exercent en C et D sur la barre CD, N étant comptée positivement dans le sens O'D; N est positif si les fils sont réellement tendus. Or la seconde équation intrinsèque du mouvement du centre de gravité O' de CD donne:

$$\frac{MV^2}{\lambda} = -Mg \cos \varphi + 2N$$

ou

$$2N = M(\lambda \varphi'^2 + g \cos \varphi);$$

N est donc positif, c'est-à-dire que les fils AC, BD sont effectivement tendus, pourvu que $\lambda \varphi'^2 + g \cos \varphi$ reste positif. Cette condition est la même que si O' était un pendule simple réalisé par un fil de longueur λ . Elle est toujours remplie quand O' ne s'élève pas au-dessus de O.

470 - Equations du mouvement déduites du Principe de d'Alembert.

Supposons que la position du système dépende d'un nombre fini de paramètres, et soit K son degré de liberté. Si les liaisons sont bilatérales et sans frottements, l'équation fondamentale (4) [N° 465] est vraie pour tout déplacement virtuel. Or décomposons (comme au N° 423) le système S en n éléments de très petites dimensions, et soit P un quelconque de ces éléments, m sa masse, x, y, z ses coordonnées; on a:

$$(5) \quad x = \varphi(q_1, \dots, q_K), \quad y = \psi(q_1, \dots, q_K), \quad z = \chi(q_1, \dots, q_K),$$

q_1, \dots, q_K désignant les K paramètres indépendants dont dépend la position de S. Le déplacement virtuel le plus général (à partir de la position q_1, \dots, q_K) s'obtient en donnant à $\delta q_1, \dots, \delta q_K$ des valeurs infinitésimales arbitraires.

⁽¹⁾ Ce sens doit être le sens AC, BD si AC et BD sont des fils et non des tiges (de masse négligeable).

les variations correspondantes $\delta x, \delta y, \delta z$ de x, y, z sont:

$$(6) \quad \delta x = \frac{\partial x}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_k} \delta q_k, \quad \delta y = \frac{\partial y}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial y}{\partial q_k} \delta q_k, \quad \delta z = \frac{\partial z}{\partial q_1} \delta q_1 + \dots + \frac{\partial z}{\partial q_k} \delta q_k.$$

Le travail virtuel des forces données est, comme au N° 423;

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_k \delta q_k,$$

$$(7) \quad \text{où } Q_1 = \sum \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y' \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_1} \right), \dots, Q_k = \sum \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_k} + Y' \frac{\partial y}{\partial q_k} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_k} \right).$$

L'égalité fondamentale (4) où on remplace les $\delta x, \delta y, \delta z$ par leurs valeurs (6) devient:

$$(8) \quad \delta q_1 (Q_1 - E_1) + \delta q_2 (Q_2 - E_2) + \dots + \delta q_k (Q_k - E_k) = 0,$$

avec

$$(9) \quad \begin{cases} E_1 = \sum m \left(x'' \frac{\partial x}{\partial q_1} + y'' \frac{\partial y}{\partial q_1} + z'' \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) \\ \dots \\ E_k = \sum m \left(x'' \frac{\partial x}{\partial q_k} + y'' \frac{\partial y}{\partial q_k} + z'' \frac{\partial z}{\partial q_k} \right), \end{cases}$$

les Q_j étant donnés par (7).

L'équation (8) doit être vérifiée pour tout déplacement virtuel, donc pour $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_k$ arbitraires. Il faut et il suffit pour cela qu'on ait:

$$(10) \quad E_1 = Q_1, \quad E_2 = Q_2, \quad \dots, \quad E_k = Q_k.$$

Le principe de d'Alembert se traduit donc par k équations distinctes, et comme le système dépend de k paramètres, on conçoit que ces k équations suffisent à déterminer le mouvement connaissant les forces données (et les conditions initiales). Précisons ce résultat fondamental.

471. - Propriétés des équations précédentes.

Nous pouvons dans les expressions (9) de E_1, E_2, \dots, E_k remplacer les x'', y'', z'' par leurs expressions en fonction t des q_j, q'_j, q''_j . On a:

$$(11) \begin{cases} x' = \frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2} q'_2 + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_K} q'_K \\ x' = \frac{\partial x}{\partial q_1} q''_1 + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_K} q''_K + \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} q'_1 + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_K} q'_K \right) \end{cases} \quad (2)$$

et des égalités analogues en y', y'', z', z'' . Ces égalités permettent d'exprimer les E_j à l'aide de $q, q_K, q'_1, q'_K, q''_1, \dots, q''_K$. Les E_j sont linéaires en $q''_1, q''_2, \dots, q''_K$. D'une façon précise, E_1 par exemple est de la forme:

$$A_1(q_1, \dots, q_K) q''_1 + \dots + A_K(q_1, \dots, q_K) q''_K + \sum_j B_{je}(q_1, \dots, q_K) q'_j q_e.$$

D'autre part, les forces données F'' sont connues, par hypothèse, à un instant t , quand on connaît la position et les vitesses de S . Il suit de là que les Q_j sont des fonctions données des $(2K+1)$ variables $t, q_1, \dots, q_K, q'_1, \dots, q'_K$.

En définitive, les équations (10) forment un système de K équations linéaires en q''_1, \dots, q''_K , dont les coefficients sont donnés en $q_1, \dots, q_K, q'_1, \dots, q'_K$ et t . Il est loisible de supposer ce système résolu par rapport à q''_1, \dots, q''_K , soit

$$(12) \quad q''_j = B_j(q_1, \dots, q_K, q'_1, \dots, q'_K, t) \quad (j=1, 2, \dots, K).$$

Pour calculer le mouvement de S , il faut intégrer ce système de K équations différentielles du second ordre, qui définit q_1, \dots, q_K en fonctions de t quand on connaît les conditions initiales $t^0, q_1^0, \dots, q_K^0, \dots, q_K^0$.

Le principe de d'Alembert permet donc de connaître les forces dites données, de calculer le mouvement d'un système matériel à K degrés de liberté, dont les liaisons sont bilatérales et sans frottement.

Si notamment les forces données ne dépendent que de la position de S , les Q_j ne dépendent que de q_1, \dots, q_K . Il suit de là que les équations (10) du mouvement ne changent pas quand on change t en $t+h$ ou t en $-t$. On traduit cette dernière propriété en disant que les mouvements de S sont réversibles⁽¹⁾.

(1) Voir cette note page suivante.

472. Calcul des réactions.

Supposons qu'à l'instant t on connaisse la position et les vitesses de S [c'est-à-dire les q , et les q']; la force donnée (totale) \bar{F}' qui s'exerce sur un élément P de S est alors connue à l'instant t , ainsi que l'accélération \bar{y} de P ; en effet, les q'' sont donnés par les éq. (12) puis les x'' , y'' , z'' par les éq. (11). La réaction totale \bar{R} qui s'exerce sur P à l'instant t est donc donnée par la relation géométrique:

$$\bar{R} = m\bar{y} - \bar{F}'$$

Si on veut connaître non la réaction totale qui s'exerce sur chaque élément, mais les réactions extérieures qui s'exercent sur un ou plusieurs solides du système, on procédera comme en Statique [N° 416] les six équations du mouvement d'un solide remplaçant les six équations d'équilibre.

473. Le théorème des forces-vives et le principe de d'Alembert.

Soit $2T$ la force-vive de S : le travail de toutes les forces appliquées à S , entre les instants t et $t+dt$ est $Q_1 dq_1 + \dots + Q_K dq_K$; le théorème des forces-vives se traduit par l'égalité:

$$dT = Q_1 dq_1 + \dots + Q_K dq_K$$

Cette égalité doit être une conséquence du principe de d'Alembert (qui définit le mouvement): il suffit, pour le vérifier d'appliquer l'égalité fondamentale (4) au déplacement infinitésimal vrai (qui est un déplacement virtuel). Il vient ainsi:

$$\Sigma m(x''dx + y''dy + z''dz) = \Sigma (X'dx + Y'dy + Z'dz),$$

ou bien

$$\Sigma m(x'x' + y'y' + z'z') = \Sigma (X'x' + Y'y' + Z'z'),$$

ou enfin:

$$\frac{dT}{dt} = Q_1 q'_1 + Q_2 q'_2 + \dots + Q_K q'_K.$$

Note de la page précédente.

(1) Ce qui précède suppose essentiellement que les liaisons sont sans frottements et les forces données indépendantes des vitesses. Si on tenait compte des frottements et des résistances, on introduirait des forces qui dépendent des vitesses, et les équations du mouvement renfermeraient des termes qui changeraient de signe quand on change t en $-t$.

474 - Cas où il y a une fonction de forces (en tenant compte des liaisons)

Quand les forces données ne dépendent que de la position du système, les Q_j sont des fonctions de q_1, \dots, q_k .
Si l'expression

$$Q_1 dq_1 + \dots + Q_k dq_k$$

est la différentielle exacte d'une fonction $V(q_1, \dots, q_k)$, on dit, (N.º 425) qu'il existe une fonction de forces en tenant compte des liaisons. On a, dans ce cas :

$$Q_1 = \frac{\partial V}{\partial q_1}, \dots, Q_k = \frac{\partial V}{\partial q_k}.$$

Le théorème des forces-vives donne alors l'intégrale première :

$$T = V + Cte$$

qui peut remplacer une des K équations de d'Alembert.

C'est ce qu'a lieu notamment quand les forces données qui s'exercent sur les éléments P supposés libres dérivent d'une fonction de forces $V(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ (Exemple pesanteur).

475. - Systèmes à liaisons complètes.

Si le système est à liaisons complètes, $K=1$; l'équation unique que fournit le principe de d'Alembert et qui définit le mouvement coïncide avec le théorème des forces-vives.

On a : $T = A(q) q'^2$, et Q est une fonction connue de q, q', t .

L'équation du mouvement est :

$$\frac{d}{dt} A(q) q'^2 = Q(q, q', t).$$

Si les forces données ne dépendent que de la position de S , Q est une simple fonction de q , et l'égalité précédente donne, si $V(q)$ est la primitive de $Q(q)$:

$$A(q) q'^2 = V(q) + Cte$$

t est donc donné en fonction de q par une quadrature.

476. - Remarque sur la formation des équations de d'Alembert. - Quand le système S renferme des corps continus dont la masse n'est pas négligeable, on décompose ces corps en éléments de très petites dimensions et on fait tendre ensuite ces dimensions vers zéro. Ses sommes

Σ qui figurent dans les équations de d'Alembert deviennent ainsi des intégrales triples, doubles ou simples suivant que les corps continus ont trois, deux ou une dimension. On peut répéter à ce sujet les remarques faites à propos des théorèmes du mouvement du centre de gravité et des moments cinétiques. [N.° 57].

477. - Les percussions et le principe de d'Alembert.

Supposons que pendant un intervalle de temps très court t_0, t_1 , on applique aux éléments du système S de très grandes forces données \bar{F} , de l'ordre de $\frac{1}{t_1 - t_0}$; ces forces engendreront des percussions données: $t_1 - t_0$.

En général, les réactions du système (ou certaines d'entre elles) seront aussi de l'ordre de $t_1 - t_0$, et engendreront des percussions de réaction. Les éléments P de S changent brusquement de vitesse sans changer sensiblement de positions; si m est la masse de l'élément P, ΔV la variation géométrique de sa vitesse entre les instants t_0, t_1 , la percussion totale $m\Delta V$ de P est la résultante de la percussion donnée, soit Π' , et de la percussion de liaison soit \bar{P} , appliquées à P.

Les composantes A', B', C' de Π' sont données par:

$$A' = \int_{t_0}^{t_1} X' dt, \quad B' = \int_{t_0}^{t_1} Y' dt, \quad C' = \int_{t_0}^{t_1} Z' dt.$$

Les liaisons étant supposées bilatérales et sans frottements, le mouvement pendant l'intervalle de temps t_0, t_1 , vérifie les équations de d'Alembert à chaque instant t, on a donc:

$$(1) \quad \Sigma m \left(x'' \frac{\partial x}{\partial q_1} + y'' \frac{\partial y}{\partial q_1} + z'' \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) = \Sigma \left(X' \frac{\partial x}{\partial q_1} + Y' \frac{\partial y}{\partial q_1} + Z' \frac{\partial z}{\partial q_1} \right) = Q_1,$$

et (K-1) autres équations analogues.

Intégrons l'équation (1) entre t_0 et t_1 , il vient, en remarquant que q_1, \dots, q_k restent sensiblement constants;

$$(2) \quad \Sigma m \left(\frac{\partial x}{\partial q_1} \Delta x' + \frac{\partial y}{\partial q_1} \Delta y' + \frac{\partial z}{\partial q_1} \Delta z' \right) = \Sigma \left(A' \frac{\partial x}{\partial q_1} + B' \frac{\partial y}{\partial q_1} + C' \frac{\partial z}{\partial q_1} \right)$$

et (K-1) autres équations analogues, $\Delta x', \Delta y', \Delta z'$ désignant les variations de x', y', z' pendant la percussion.

Les sommes Σ sont étendues à tous les éléments

du système.

Mais, d'autre part, on a, d'après les équations de liaison :

$$(3) \begin{cases} \Delta x' = \frac{\partial x}{\partial q_1} \Delta q_1' + \dots + \frac{\partial x}{\partial q_k} \Delta q_k' \\ \Delta y' = \frac{\partial y}{\partial q_1} \Delta q_1' + \dots + \frac{\partial y}{\partial q_k} \Delta q_k' \\ \Delta z' = \frac{\partial z}{\partial q_1} \Delta q_1' + \dots + \frac{\partial z}{\partial q_k} \Delta q_k' \end{cases} .$$

Si on porte ces valeurs dans les équations (2) on obtient des équations linéaires pour calculer $\Delta q_1', \dots, \Delta q_k'$ en fonction des percussions données.

Les conditions initiales avant le choc étant connues, les conditions initiales après le choc sont ainsi déterminées.

Appelons, pour chaque élément de S , percussion d'inertie le vecteur $-m \Delta \bar{v}$; les équations (2) expriment que, si on considère les percussions d'inertie et les percussions données comme des forces, le travail total de ces vecteurs est nul dans tout déplacement virtuel de S . C'est le principe de d'Alembert étendu aux percussions.

Le caractère linéaire des relations (2) et (3) met en évidence le fait suivant : Si on applique simultanément au système S deux ensembles de percussions données, la variation géométrique de vitesse de chaque élément P est la somme géométrique des variations de vitesse qu'eût engendrées chacun des deux ensembles de percussions appliqué séparément au système.

Une autre remarque, qui va nous servir dans la théorie des petits mouvements est relative aux systèmes S pour lesquels les coordonnées x, y, z de chaque élément de S sont des fonctions linéaires de q_1, \dots, q_k . Quand il en est ainsi, $\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial y}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial z}{\partial q_k}$ sont des constantes. Les équations (2) et (3) ont comme coefficients non plus des fonctions de q_1, \dots, q_k , mais des constantes. Si on applique à chaque élément de S une percussion donnée, la variation géométrique de vitesse de chaque élément est indépendante de la position de S .

Les petits mouvements d'un système.

478. - Position d'équilibre où la fonction des forces est maxima.

Le système S étant système à K degrés de liberté, soumis à des forces données qui dérivent d'une fonction de forces $V(q_1, \dots, q_K)$, nous savons que si cette fonction des forces, est maxima pour la position S_0 , cette position est position d'équilibre stable.

Nous allons étudier les petits mouvements du système autour de cette position S_0 en admettant que toutes les liaisons ont lieu sans frottement.

Il est loisible de supposer que S_0 correspond aux valeurs $q_1 = q_2 = \dots = q_K = 0$ des paramètres, et que V est nul quand S est en S_0 . Développons les coordonnées x, y, z de chaque élément P de S suivant les puissances de q_1, \dots, q_K . Il vient, pour l'élément P , de masse m :

$$(1) \quad \begin{cases} x - x_0 = a_1 q_1 + a_2 q_2 + \dots + a_K q_K + \dots \\ y - y_0 = b_1 q_1 + b_2 q_2 + \dots + b_K q_K + \dots \\ z - z_0 = c_1 q_1 + c_2 q_2 + \dots + c_K q_K + \dots \end{cases}$$

Si n est le nombre des éléments P en lesquels on a décomposé S_0 , nous avons à écrire $3n$ équation (1) : nous supposons⁽¹⁾ que parmi ces $3n$ équations, il en existe K , par exemple les K premières, qui réduites à leurs termes du 1^{er} degré sont résolubles par rapport à q_1, \dots, q_K . Cela signifie que le déterminant fonctionnel de ces K fonctions x, y, z de q_1, \dots, q_K est différent de zéro pour $q_1 = q_2 = \dots = q_K = 0$; il suit de là qu'à une position S du système voisine de S_0 correspond un système de valeurs q_1, \dots, q_K voisines de zéro et un seul.

Développons de même $V(q_1, \dots, q_K)$:

$$(2) \quad V = V_2(q_1, \dots, q_K) + V_3(q_1, \dots, q_K) + \dots$$

V_2 désignant un polynôme homogène de degré 2 en q_1, \dots, q_K . La forme quadratique V_2 est une somme algébrique de K carrés, en général distincts; ces carrés sont tous précédés

⁽¹⁾ On peut toujours faire en sorte qu'il en soit ainsi: il suffit de prendre comme paramètres q_1, \dots, q_K , K coordonnées indépendantes des éléments de S .

du signe - puisque V est maxima. Si par surcroît, ils sont distincts, ces conditions suffisent pour que V soit maxima en S_0 . C'est dans ce cas que nous nous proposons exclusivement. Quand il en est ainsi, la forme quadratique V_2 est négative pour toutes les valeurs de q_1, \dots, q_k sauf pour le système de valeurs $q_1 = q_2 = \dots = q_k = 0$.

Mouvement d'un système particulier

479. - Cas où les équations de liaison sont linéaires et où V se réduit à V_2 .

Imaginons que toutes les équations de liaison se réduisant rigoureusement aux termes linéaires écrits dans les équations (1) et V à V_2 . Appelons simplifié du système S le système matériel S' ainsi imaginé, et dont nous supposons les liaisons sans frottement.

Nous allons d'abord étudier les mouvements de S dans l'hypothèse où il se confond avec son simplifié S' ; autrement dit, nous allons étudier le mouvement d'un système matériel sans frottements S' dont les liaisons sont exactement de la forme :

$$(1)^{\text{bis}} \begin{cases} x - x_0 = a_1 q_1 + \dots + a_k q_k, \\ y - y_0 = b_1 q_1 + \dots + b_k q_k, \\ z - z_0 = c_1 q_1 + \dots + c_k q_k, \end{cases}$$

la fonction de force V se réduisant à

$$(2)^{\text{bis}} \quad V = V_2(q_1, \dots, q_k),$$

V_2 désignant une forme quadratique essentiellement négative sauf pour $q_1 = q_2 = \dots = q_k = 0$ ⁽¹⁾

Les équations de d'Alembert donnent ici :

$$(3) \begin{cases} q_1'' \sum m(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2) + q_2'' \sum m(a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) + \dots + q_k'' \sum m(a_1 q_k + b_1 b_k + c_1 c_k) \\ = \frac{\partial V_2}{\partial q_1} = e_1 q_1 + \dots + e_k q_k, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

⁽¹⁾ La position S_0 ou $q_1 = q_2 = \dots = q_k = 0$ est position unique d'équilibre de S' et elle est stable.

indéfiniment. Ce qui est absurde, puisque S_0 est position d'équilibre stable de S ; μ est donc nul.

Le même raisonnement montre que les polynômes $P_j(t)$ doivent se réduire à des constantes. En définitive dans toutes les solutions (4), μ est nul et les polynômes $P_j(t)$ sont des constantes. C. q. f. d.

Écrivons une de ces solutions :

$$(5) \quad q_1 = A_1 \sin \nu t + B_1 \cos \nu t, \dots, q_k = A_k \sin \nu t + B_k \cos \nu t;$$

si nous changeons t en $-t$, on obtient encore une solution qu'on peut combiner avec la précédente par addition ou soustraction. Il suit de là que de toute solution (5), on peut en déduire une autre où les A sont nuls, soit :

$$(6) \quad q_1 = A_1 \sin \nu t, \dots, q_k = A_k \sin \nu t.$$

Si nous multiplions les k fonctions q_j par la constante arbitraire C et si nous augmentons t d'une constante nous obtenons une solution dépendant de deux constantes arbitraires :

$$q_1 = CA_1 \sin(\nu t + h), \dots, q_k = CA_k \sin(\nu t + h).$$

Le mouvement périodique ainsi représenté sera dit un des mouvements périodiques fondamentaux de S ; la durée $\frac{2\pi}{\nu}$ de sa période sera dite période fondamentale de S , et tout multiple $\frac{2j\pi}{\nu}$ de cette durée sera dite période propre de S . La constante νh caractérisera la phase de ce mouvement; la constante C son amplitude. Précisons ce dernier point.

Si on remplace dans les équations de liaison (1)^{bis} les paramètres q_j par leurs expressions (6), les coordonnées x, y, z de chaque point P de S prennent la forme :

$$x - x_0 = R \sin(\nu t + h), \quad y - y_0 = \lambda \sin(\nu t + h), \quad z - z_0 = \mu \sin(\nu t + h)$$

le mouvement de P est donc un mouvement périodique oscillatoire dans lequel P décrit un segment de droite dont P_0 est le milieu⁽¹⁾. Tous les points P repassent en même temps et périodiquement par leur position d'équilibre P_0 , et leur écart PP_0 est maximum en même temps. Soit Δ cet écart maximum pour le point P ; appelons amplitude de l'oscillation considérée de S la quantité $\sqrt{\frac{\sum m \Delta^2}{\sum m}}$; la constante c

⁽¹⁾ P_0 est la position de P quand S est en S_0 .

permet de donner au mouvement une amplitude arbitraire, et la constante h une phase arbitraire.

Si on pose: $P = \pm \sqrt{v}$, les quantités P sont [d'après la théorie des équations linéaires] les zéros d'un polynôme en P de degré $2K$ représenté par un certain déterminant d'ordre $2K$. Ce polynôme ici est pur, car il ne change pas quand on change P en $-P$; les quantités V sont donc en définitive données par une équation: $\Pi(V^2) = 0$, où Π est un polynôme de degré K en V^2 . En général, les K racines V^2 de ce polynôme sont distinctes. Il existe alors K mouvements périodiques distincts de S' , ayant une amplitude et une phase arbitraires; les K périodes de ces mouvements $\frac{2\pi}{V_1}, \dots, \frac{2\pi}{V_K}$ sont en général incommensurables entre elles.

Si on superpose ces K mouvements périodiques, c'est-à-dire si on pose:

$$(7) \quad q = \sum C A_1 \sin(Vt + h), \dots, q_K = \sum C A_K \sin(Vt + h),$$

le mouvement ainsi défini dépend de $2K$ constantes arbitraires C et h , et représente, par conséquent, un mouvement quelconque de S' .

Dans des cas particuliers, deux ou plusieurs valeurs de V peuvent se confondre entre elles: deux ou plusieurs des mouvements périodiques fondamentaux ont alors même période. Mais le mouvement le plus général de S' est toujours représenté par les équations (7) où les valeurs de V ne sont plus toutes distinctes: les deux systèmes de constantes numériques A_1, \dots, A_K correspondant à deux valeurs V_1, V_2 qui deviennent égales restent distincts.

Considérons par exemple un point libre P de masse 1 attiré par l'origine proportionnellement à la distance; les équations du mouvement sont:

$$x'' + \mu x = 0, \quad y'' + \mu y = 0, \quad z'' + \mu z = 0 \quad (\mu > 0),$$

et le mouvement le plus général du système est:

$$x = C \sin(Vt + h), \quad y = C_1 \sin(Vt + h_1), \quad z = C_2 \sin(Vt + h_2), \quad (V = \sqrt{\mu}).$$

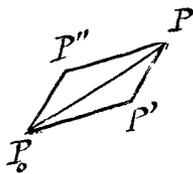
Ce mouvement est la superposition des trois mouvements fondamentaux.

$$\begin{aligned} x &= c \sin(\nu t + h), y \equiv 0, z \equiv 0 \\ x &\equiv 0, y = C_1 \sin(\nu t + h_1), z \equiv 0, \\ x &= 0, y \equiv 0, z = C_2 \sin(\nu t + h_2). \end{aligned}$$

Ici le mouvement le plus général est un mouvement périodique, mais qui n'a point de phase déterminée. Il en sera de même dans tous les cas où toutes les périodes fondamentales sont confondues ou commensurables entre elles. Ces cas exceptionnels écartés, le mouvement le plus général de S n'est pas périodique.

En définitive, il existe toujours K périodes fondamentales (distinctes ou confondues) du système S et K mouvements périodiques fondamentaux correspondants ayant une phase et une amplitude arbitraires; les périodes propres du système sont les multiples des K périodes fondamentales. Le mouvement le plus général de S s'obtient par la superposition des K mouvements périodiques fondamentaux; ce mouvement n'est point lui-même périodique, sauf dans le cas où les périodes fondamentales sont commensurables entre elles ⁽¹⁾.

481. - De la superposition de deux mouvements de S .
Considérons deux mouvements de S .



$$(8) \quad q_1 = f_1(t), \dots \dots \dots q_K = f_K(t), \text{ et}$$

$$(9) \quad q_1 = g_1(t), \dots \dots \dots q_K = g_K(t)$$

superposons ces deux mouvements, c.à.d.

posons:

$$(10) \quad q_1 = f_1 + g_1, \dots \dots \dots q_K = f_K + g_K$$

Soit P' la position qu'aurait P à l'instant t dans le mouvement (8), P'' celle qu'il aurait dans le mouvement (9), P celle qu'il a dans le mouvement (10); la forme linéaire des équations de liaison (1)^{bis} montre aussitôt que $P_0 P$ est la résultante de

(1) Dans ce cas, il existe des périodes propres communes à tous les mouvements fondamentaux et la plus petite de ces périodes communes est la période du mouvement général.

P_0P' et de P_0P'' , P_0 désignant la position d'équilibre de P . La règle s'étend évidemment à la superposition d'un nombre quelconque de mouvements. Autrement dit, quand on superpose plusieurs mouvements de S , le déplacement à un instant t de S à partir de sa position d'équilibre est pour chaque point P de S la résultante des déplacements qui correspondraient à chacun des mouvements qu'on superpose.

482. - Conditions initiales d'un mouvement de S . - Influence des percussions. - Soit, pour $t=0$, $q_1 = \alpha_1, \dots, q_k = \alpha_k, q'_1 = \alpha'_1, \dots, q'_k = \alpha'_k$. Les conditions initiales de S ; ces conditions définissent un mouvement de S . Supposons notamment que $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0$, c'est-à-dire que pour $t=0$, S soit en S_0 ; je dis que le mouvement est la superposition de k mouvements fondamentaux de phase nulle; autrement dit, on a :

$$(11) \quad q_1 = \sum C_1 A_1 \sin \nu_1 t, \quad q_2 = \sum C_2 A_2 \sin \nu_2 t, \quad \dots \quad q_k = \sum C_k A_k \sin \nu_k t.$$

En effet, pour $t=0$, les q_j sont nuls; d'autre part, on peut disposer les k constantes C_j pour donner aux q'_j les k valeurs arbitraires $\alpha'_1, \dots, \alpha'_k$.

Considérons maintenant pour $t=0$ deux systèmes de conditions initiales, soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_k, \alpha'_1, \dots, \alpha'_k)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_k, \beta'_1, \dots, \beta'_k)$. Superposons les deux mouvements ainsi définis: le nouveau mouvement répondra aux conditions initiales

$$q_1 = \alpha_1 + \beta_1, \dots, q_k = \alpha_k + \beta_k, \quad q'_1 = \alpha'_1 + \beta'_1, \dots, q'_k = \alpha'_k + \beta'_k, \quad \text{pour } t=0.$$

Si notamment les α_j et les β_j sont nuls, les conditions initiales du nouveau mouvement sont les suivantes: pour $t=0$, S est en S_0 et la vitesse initiale de chacun de ses éléments P est la résultante des vitesses qu'a P dans chacun des systèmes de conditions initiales données.

Ceci posé, imaginons que, S étant en équilibre en S_0 , on applique (à l'instant $t=0$) à chacun de ses éléments une percussion donnée Π , et soit $q'_1 = \alpha'_1, \dots, q'_k = \alpha'_k$ les vitesses ainsi communiquées à S ; le mouvement de S après le choc sera défini par les équations (11) où les constantes C_j ont des valeurs convenables. Nous disons que ce mouvement

est le mouvement engendré par les percussions données Π' (appliquées au système en équilibre à l'instant $t=0$).

Si, à l'instant $t=0$ nous appliquons à S en équilibre deux systèmes de percussions données Π' et Π'' , — soit $\beta'_1, \dots, \beta'_k$ les valeurs que les percussions Π'' communiquera à S aux q'_i : les vitesses communiquées à S par l'application simultanée des percussions Π' et Π'' sont [N.º 477]
 $q'_i = \alpha'_i + \beta'_i, \dots, q'_k = \alpha'_k + \beta'_k$. Le mouvement de S après le choc est la superposition des deux mouvements qu'eût communiqué à S chacun des systèmes de percussions données Π' et Π'' .

Le système S ayant à l'instant $t=0$ une position et des vitesses quelconques, appliquons à chacun de ses éléments une percussion donnée Π' ; le mouvement après le choc sera la superposition du mouvement primitif et du mouvement qu'engendreraient les percussions Π' appliquées (à l'instant $t=0$) au système en équilibre.⁽¹⁾

Nous avons pris $t=0$ comme instant initial: si l'instant initial est un instant t_0 quelconque, il suffit dans ce qui précède de changer t en $t-t_0$.

483. — Chocs synchrones. — Le système S étant en équilibre, appliquons lui à l'instant $t=0$ des percussions données Π' qui engendrent le mouvement fondamental

$$(10) \quad q_1 = CA_1 \sin Vt, \dots, q_k = CA_k \sin Vt.$$

Aux instants $t_1, 2t_1, 3t_1, \dots$, appliquons aux mêmes éléments les ^{mêmes} percussions données Π' : quel sera le mouvement de S ?

Ce mouvement est:

entre les instants t_1 et $2t_1$,

$$q_1 = CA_1 [\sin Vt + \sin V(t-t_1)], \dots, q_k = CA_k [\sin Vt + \sin V(t-t_1)];$$

entre les instants $2t_1$ et $3t_1$,

$$q_1 = CA_1 [\sin Vt + \sin V(t-t_1) + \sin V(t-2t_1)], \dots, q_k = CA_k [\sin Vt + \sin V(t-t_1) + \sin V(t-2t_1)],$$

etc.

(1) En effet, les variations $\Delta q'_1, \dots, \Delta q'_k$ de q'_1, \dots, q'_k produites par les percussions sont indépendantes de la position de S [N.º 477].

Supposons notamment que $t_1 = \frac{2j\pi}{V}$ (j entier); on aura entre les instants $(n-1)t_1$ et nt_1

$$(11) \quad q_1 = nCA_1 \sin Vt,$$

$$q_k = nCA_k \sin Vt.$$

On voit que, si petit que soit C , et par suite si faibles que soient les percussions Π' , l'amplitude du mouvement (11) finira par dépasser toute limite.

Nous nous sommes placés dans le cas où les percussions Π' engendrent précisément un mouvement fondamental. Plaçons nous dans le cas général où elles engendrent un mouvement quelconque:

$$(12) \quad q_1 = \sum CA_1 \sin Vt, \dots \dots q_k = \sum CA_k \sin Vt.$$

Si on répète indéfiniment les mêmes percussions, à intervalles de temps égaux à une période propre, soit $t_1 = \frac{j\pi}{V}$, de S' il suffit de considérer les termes $CA \sin Vt$ dans les équations (12) pour voir que l'amplitude du mouvement croît indéfiniment, à moins que C ne soit nul.

Enfin, si les percussions sont appliquées pour $t=0$, non plus au système S' non plus en équilibre, mais animé d'un mouvement quelconque, la conclusion est évidemment la même. D'où ce théorème:

Si on applique périodiquement aux éléments de S' les mêmes percussions données, la période étant précisément une des périodes propres de S' , l'amplitude du mouvement de S' croît en général indéfiniment, cela quelles que soient les conditions initiales de S' et si faibles que soient les percussions données.

On dit dans ce cas qu'il y a synchronisme entre les percussions appliquées et les oscillations propres de S' .

484. - Influence des résistances. - Supposons maintenant que les forces données comprennent, en outre des forces dérivant de la position V_2 , des résistances directement opposées à la vitesse de chaque élément de S' et proportionnelles à cette vitesse; ces résistances donnent, dans les Q_j des termes de la forme $-\lambda \left(x' \frac{dx}{dq_j} + y' \frac{dy}{dq_j} + z' \frac{dz}{dq_j} \right)$; autrement dit, elles introduisent dans les équations (3) du mouvement des termes linéaires et homogènes en q_1', \dots, q_k' , à coefficients constants. Dans les applications, ces coefficients sont toujours petits; si on les néglige, l'équation déterminante $D^*(P) = 0$ [N° 484] a toutes ses racines de la forme $P = \pm Vi$, et ces racines sont distinctes,

dans le cas général qui est celui où nous nous plaçons. Si on tient compte des petits termes en q'_1, \dots, q'_k , les racines de $D(P) = 0$ sont de la forme $\rho = -\mu \pm V i$, les μ étant très petits et les V différant peu des V et étant par suite, distincts. Les solutions fondamentales des équations du mouvement sont donc de la forme :

$$(13) \quad q_1 = CA_1 e^{-\mu t} \sin(Vt + h_1), \dots, q_k = CA_k e^{-\mu t} \sin(Vt + h_k).$$

Toutes les quantités μ sont positives ou nulles : autrement, un mouvement (13) correspondant à des conditions initiales aussi voisines qu'on veut des conditions d'équilibre, aurait une amplitude indéfiniment croissante, ce qui est absurde, puisque les résistances ne font qu'enfermer la stabilité de l'équilibre [N° 460].

Le mouvement le plus général de S est la superposition de ces k mouvements fondamentaux qu'on peut appeler mouvements périodiques amortis.

Si les résistances ont un travail appréciable tant que toutes les vitesses ^{ne sont pas négligeables} (ce qui est le cas dans beaucoup d'applications), il est impossible qu'une des quantités μ soit nulle. Autrement, le mouvement (13) correspondant satisferait à l'équation des forces vives :

$$T = V(q_1, \dots, q_k) - \tau,$$

T désignant le travail (changé de signe) des résistances; or T et V seraient des fonctions périodiques, finies de t , tandis que τ croîtrait indéfiniment. Toutes les quantités μ étant supposées différentes de zéro, le mouvement de S s'amortit lentement, quelles que soient les conditions initiales, et le système S au bout d'un temps suffisamment long restera sensiblement en équilibre en S_0 .

485. - Influence des forces perturbatrices périodiques.

Supposons maintenant que le système S soit soumis, en outre des forces données dérivant de V_2 , à des forces perturbatrices fonctions du temps et périodiques. Soit $X''(t), Y''(t), Z''(t)$ les composantes de la force perturbatrice s'exerçant sur l'élément P de S ; cette force introduit dans les Q_j des termes de la forme :

$$X'' \frac{\partial x}{\partial q_j} + Y'' \frac{\partial y}{\partial q_j} + Z'' \frac{\partial z}{\partial q_j}. \text{ En un mot, pour tenir compte des forces}$$

perturbatrices, il faut compléter Q_1, \dots, Q_k par des termes $R_1(t), \dots, R_k(t)$, fonctions périodiques de t . Il nous est loisible de choisir l'unité de temps de façon que la période de ces fonctions soit 2π .

Faisons passer dans le premier membre des équations (3) du mouvement tous les termes autres que R_1, \dots, R_k . Les équations du mouvement ainsi écrites, sont des équations linéaires, dont les premiers membres sont homogènes à coefficients constants, et les seconds membres des fonctions données de t . On sait intégrer ces équations par quadratures (méthode de la variation des constantes). Montrons qu'en général, il existe une solution $q_1(t), \dots, q_k(t)$ admettant la même période 2π que les seconds membres.

Supposons d'abord que les $R_i(t)$ soient de la forme :

$$(14) \quad R_1 = \xi_1 \sin t + \eta_1 \cos t, \dots, R_k = \xi_k \sin t + \eta_k \cos t$$

Les équations du mouvement admettent alors, comme on sait une solution et une seule de la forme :

$$(15) \quad q_1 = \omega_1 \sin t + \rho_1 \cos t, \dots, q_k = \omega_k \sin t + \rho_k \cos t$$

(les ω_i, ρ_i constants numériques),

à moins que $2\pi i$ ne soit une racine de l'équation déterminante $\Pi(p) = 0$, c'est-à-dire à moins que 2π ne soit une période fondamentale des mouvements de S . Dans ce dernier cas [cas exceptionnel], on dit qu'il y a synchronisme entre les forces perturbatrices et les mouvements propres de S ; il existe alors une solution particulière de la forme (15), mais où les ω, ρ sont des polynômes en t dont l'un au moins (en général), ne se réduit pas à une constante.

Le mouvement le plus général de S s'obtient en superposant le mouvement (15) et un mouvement propre quelconque de S . L'amplitude du mouvement propre reste toujours finie, et il en est de même de celle du mouvement (15) s'il n'y a pas synchronisme. L'écart entre S et sa position d'équilibre S_0 reste donc indéfiniment inférieur à une limite finie. Au contraire, dans le cas du synchronisme, l'amplitude du mouvement dépasse toute limite, si voisines que ces conditions initiales soient de l'équilibre.

486. - Nous avons supposé que les R_i étaient de forme (14); dans le cas général, ces fonctions périodiques sont développables

en séries de Fourier :

$$(16) \begin{cases} K_1 = \xi_1 \sin t + \eta_1 \cos t + \dots + \sigma_1 \sin mt + \tau_1 \cos mt + \dots \\ \dots \\ K_k = \xi_k \sin t + \eta_k \cos t + \dots + \sigma_k \sin mt + \tau_k \cos mt + \dots \end{cases}$$

Dans le N^o précédent, nous avons supposé les seconds membres des équations du mouvement étaient réduits à la première colonne des seconds membres de (16); dans le cas général, on peut répéter sur chacune de ces colonnes ce que nous venons de dire sur la première; à la m^e colonne par exemple correspond une solution périodique de période $\frac{2\pi}{m}$, à moins que $\frac{2\pi}{m}$ ne soit période fondamentale des mouvements de S, c'est-à-dire à moins que 2π ne soit une période propre de S.

Écartons ce cas exceptionnel: en superposant les solutions périodiques correspondant à chaque colonne (16), on obtient une solution périodique $q(t), \dots, q_k(t)$ développée en séries de Fourier; le mouvement le plus général de S est la superposition de ce mouvement périodique et d'un mouvement propre quelconque de S. Si on tient compte des résistances proportionnelles aux vitesses, le mouvement propre s'amortit avec le temps, et au bout d'un temps suffisamment long le mouvement de S se confond sensiblement avec le mouvement périodique (de période 2π) calculé ci-dessus. Quelles que soient les conditions initiales, et si faibles que soient en intensité les forces perturbatrices, elles imposent à la longue leur rythme au mouvement de S.

Les conclusions précédentes ne sont en défaut que si la période 2π des forces perturbatrices est une période propre des mouvements de S. Quand il est ainsi [cas général du synchronisme] soit $V = m$ par exemple; à la m^e colonne des équations (16) correspond une solution particulière où les fonctions trigonométriques sont multipliées par un polynôme en t . Les conclusions sont les mêmes que dans le cas $m=1$. Toutefois, si les coefficients σ, τ des termes en $\cos mt, \sin mt$ sont nuls dans les K séries de Fourier (16), le synchronisme n'entraîne aucune conséquence. Il suit de là que si les coefficients σ, τ sont très petits, l'influence perturbatrice du synchronisme sera extrêmement lente à se

faire sentir. Comme les séries de Fourier (16) sont uniformément convergentes plus m est grand, plus les coefficients à σ, τ sont petits, et plus la perturbation résultant du synchro-nisme est lente à se manifester.

Si deux systèmes de forces perturbatrices, le premier de période T , le second de période T_1 , agissent simultanément sur S , un mouvement quelconque de S s'obtient en calculant un mouvement particulier correspondant à chacun des deux systèmes de forces perturbatrices, et en superposant ces deux mouvements et le mouvement propre de S le plus général. Quand ni T , ni T_1 n'est période propre de S , il existe un mouvement particulier qui est la superposition d'un mouvement de période T et d'un mouvement de période T_1 ; quand on tient compte des résistances, c'est ce mouvement particulier qui au bout d'un temps très long a lieu sensiblement, quelles que soient ces conditions initiales de S .

Petits mouvements d'un système quelconque.

487. - Equations approchées des petits mouvements.
Les résultats précédents [N°s 479, 486] sont rigoureusement vrais pour tous les mouvements du système S . Revenons maintenant à un système S quelconque [N° 478], nous allons montrer que les mêmes conclusions sont vraies approximativement pour les petits mouvements du système S autour de la position d'équilibre stable S_0 .

Si les conditions initiales sont suffisamment voisines des conditions d'équilibre, nous savons que S reste très voisin de S_0 et que la force vive reste très petite. Appelons ε la limite supérieure de $\sqrt{q_1^2 + \dots + q_k^2}$ pendant le mouvement, et posons :

$$q_i = \varepsilon p_i, \dots, q_k = \varepsilon p_k, \quad \text{d'où}$$

$$q'_i = \varepsilon p'_i, \dots, q'_k = \varepsilon p'_k ;$$

les p_i sont moindres en module que l'unité, et la constante ε est très petit.

Les équations de liaison deviennent :

propres de S .

Si, à l'instant $t=0$, on applique au système S en équilibre des petites percussions données, le petit mouvement ainsi engendré est la superposition de K mouvements fondamentaux de phase nulle.

Si au même instant on applique à S (en équilibre) deux systèmes de petites percussions données, le petit mouvement ainsi engendré est la superposition des deux petits mouvements qu'eût engendrés seul chaque système de percussions.

Si, à l'instant $t=0$ on applique à S animé d'un petit mouvement, de petites percussions données, le petit mouvement après le choc est la superposition du petit mouvement primitif et du petit mouvement qu'eussent engendré les mêmes percussions données, appliquées (à l'instant $t=0$) aux mêmes éléments de S en équilibre.

Par exemple, considérons une carrière de sable en équilibre (le sable ayant des grains très fins et très lisses), et laissons tomber dans le sable une pierre; le sable va être animé d'un petit mouvement qui finira par s'amortir à cause des frottements qui ne sont jamais nuls. Laissons tomber simultanément deux pierres; le mouvement sera la superposition des deux mouvements qu'eût engendrée seule à cet instant la chute de chacune des pierres.

Enfin, laissons tomber la seconde pierre à l'instant t_0 quelque temps après l'autre; le petit mouvement engendré est la superposition du mouvement provoqué par la première pierre, et du petit mouvement qu'eût engendré la chute de la pierre, tombant à l'instant t_0 dans le sable en équilibre.

Considérons maintenant une nappe d'eau en équilibre, que nous pouvons assimiler à une carrière de sable. Si nous laissons tomber sensiblement deux pierres dans l'eau, l'ondulation ainsi engendrée est la superposition des deux ondulations qu'eût engendrées la chute (au même instant) d'une seule des deux pierres.

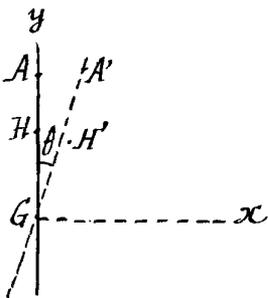
Si, l'eau étant animée d'un petit mouvement, on y laisse tomber une pierre, à l'instant $t=0$, le mouvement ultérieur de l'eau est la superposition du mouvement primitif de l'eau et de l'ondulation qu'eût engendrée la chute de la pierre tombant à l'instant $t=0$ dans l'eau immobile.

489. Chocs synchrones. - S'étant en équilibre en S_0 ou animé d'un petit mouvement, appliquons périodiquement à ses éléments les mêmes percussions données Π' (petites en valeur absolue). Si la période des percussions est une période propre de S , il est impossible en général que le mouvement reste petit⁽¹⁾ [N° 483].

Par exemple, considérons un pendule composé S d'axe OZ dont les oscillations infiniment petites ont comme période T . Appliquons à son centre de gravité G une petite percussion constante Π , normale au plan ZOG , chaque fois que ce plan est vertical et tourne dans le sens positif autour de OZ : la percussion Π' est périodique et de période T . Si petite que soit Π' , et quelles que soient les conditions initiales de S , l'amplitude des oscillations de S croîtra indéfiniment.

Phénomène de la Floue synchrone.

Considérons de même un navire en équilibre dans une mer calme, supposons que tout soit symétrique par rapport au plan xGy normal à la longueur GZ du navire et contenant



son centre de gravité G . Soit H le centre de gravité de la masse d'eau déplacée, point qui se trouve sur la verticale de G ; la poussée de l'eau est appliquée en H et égale et de sens contraire au poids du navire. Supposons que le navire penche un peu de côté, d'un petit angle θ ; le centre de gravité de l'eau déplacée vient en H' , et la poussée

de l'eau est sensiblement égale au poids du corps, de sens Gy et appliquée en H' ; la distance de H' à la verticale Gy peut se mettre (pour θ très petit) sous la forme $\lambda\theta$, λ désignant une certaine longueur qui dépend de la forme du navire.

Le petit mouvement du navire autour de son centre de gravité sera une oscillation autour de GZ définie sensiblement par l'équation $MK^2\theta'' = -\lambda M g \theta$

(1) Ceci n'est possible que si le petit mouvement engendré par les percussions appliquées à S immobile, ne renferme pas, parmi les mouvements fondamentaux qui le composent, le mouvement ayant T comme période (fondamentale ou non).

et la durée d'une oscillation (roulis du navire) sera $\pi \sqrt{\frac{K^2}{\lambda g}}$. Imaginons maintenant qu'une lame de flanc frappe λg périodiquement le navire : si la période T de la lame est précisément $\pi \sqrt{\frac{K^2}{\lambda g}}$ ou un multiple de cette quantité, l'amplitude du roulis ne saurait rester petite, lors même que la houle serait faible.

490. - Influence des résistances. - Supposons que le système S soit soumis à des résistances et à des frottements sensiblement proportionnelles aux vitesses des éléments de S ou à leurs vitesses relatives. Par exemple, le système est mobile dans l'air calme, ou bien ses éléments (lubrifiés) frottent entre eux ou sur des corps fixes ⁽¹⁾. Ces résistances et frottements introduisent dans les Q_i des termes linéaires et homogènes en q'_1, \dots, q'_k , dont les coefficients dépendent en général de q_1, \dots, q_k , mais comme q_1, \dots, q_k restent très petits par hypothèse, on peut confondre ces coefficients avec les valeurs qu'ils ont pour $q_1 = q_2 = \dots = q_k = 0$. Les conclusions du N° 484 s'appliquent donc : le petit mouvement quelconque de S sera la superposition de k mouvements fondamentaux amortis. Dans la plupart des applications, chaque mouvement fondamental sera effectivement amorti. Au bout d'un temps suffisamment long, le système sera sensiblement en équilibre.

491. - Forces perturbatrices périodiques. - Si le système est soumis à de petites forces perturbatrices données en fonction du temps et périodiques (en outre des forces dérivant de la fonction de force V), tout ce que nous avons dit au N° 485 peut se répéter pour les petits mouvements de S .

Soit T la période des forces perturbatrices. Si T n'est pas une période propre de S , il existe un petit mouvement périodique et un seul (de période T) ; un petit mouvement quelconque est la superposition de ce mouvement périodique particulier et du petit mouvement propre le plus général de S . S'il existe des résistances amortissantes, c'est le mouvement

(1) Dans le cas du frottement médial [N° 301], les frottements dépendent des vitesses de glissement et on peut admettre pour les petites vitesses qu'ils sont proportionnels à ses vitesses. Il en est tout autrement dans le cas du frottement à sec.

périodique de période T qui tend à s'établir, cela quelles que soient les conditions initiales de S (voisines des conditions d'équilibre).

Au contraire, si T est une période propre de S , il est impossible (en général) que le mouvement reste petit, cela quelque faible que soient les forces perturbatrices.

Quand deux systèmes de petites forces perturbatrices périodiques de périodes T et T_1 , agissent sur S , un petit mouvement quelconque de S est la superposition de deux mouvements périodiques particuliers de périodes t et t_1 et du petit mouvement propre le plus général de S . Ce dernier s'évanouit à la longue, s'il existe des résistances amortissantes. Une règle analogue s'applique au cas où il existe plus de deux systèmes de forces perturbatrices périodiques. Elle suppose toutefois qu'aucune des périodes T, T_1, \dots des forces perturbatrices ne soit période propre de S .

Considérons, par exemple, un Océan en équilibre, et auquel un coup de vent communique un petit mouvement. Si on néglige les attractions de la lune et du soleil, l'Océan, assimilé à une immense nappe de sable, est animé d'un petit mouvement qui dépend de la forme des côtes et des fonds. Mais, d'autre part, la lune et le soleil exercent sur l'Océan des attractions perturbatrices, ayant respectivement et sensiblement la période d'un jour lunaire ou $24^h 50'$ pour la lune, et d'un jour solaire ou $24^h 4'$ pour le soleil. Le mouvement de l'Océan est donc la superposition d'une onde lunaire, d'une onde solaire, et d'un mouvement propre de l'Océan. Ce dernier, si l'atmosphère reste très longtemps calme, s'amortit à la longue à cause de la viscosité de l'eau, et le mouvement est alors la superposition des deux ondes lunaire et solaire, la première de période $24^h 50'$, la seconde de période $24^h 4'$.

Ce qu'il importe de retenir des conclusions précédentes, c'est que (les cas de synchronisme écartés) les forces perturbatrices périodiques, à cause des résistances, finissent par imposer leur période aux petits mouvements des systèmes.

Remarquons que les percussions périodiques peuvent être rattachées aux forces perturbatrices périodiques. Soit, en effet, $X'(t)$ la projection sur OX de la force perturbatrice qui s'exerce sur P ; graphiquement, $X'(t)$ fonction périodique de période T , est représentée par le diagramme 1)

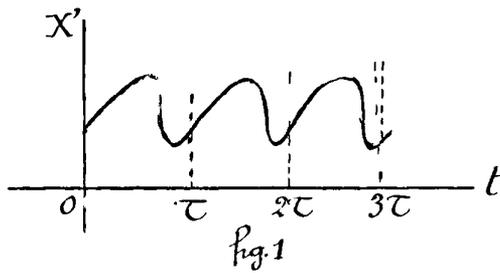


fig. 1

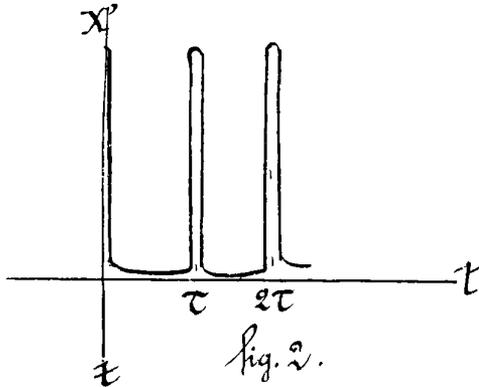


fig. 2.

où t est porté en abscisses, et X' en ordonnée.

Imaginons que (entre 0 et τ), pendant un temps très court, X' soit très grand, et presque nul le reste de la période. Le graphique a alors l'aspect 2, et la force perturbatrice devient une perturbation périodique.

492. - Conclusions générales sur les petits mouvements.

Ses propriétés démontrées plus haut s'appliquent aux petits mouvements des systèmes com-

posés de solides, ou qui peuvent être regardés comme formés d'éléments solides (fils parfaitement flexibles et inextensibles, liquides incompressibles, etc). Ces propriétés peuvent être étendues aux systèmes matériels les plus généraux [fluides compressibles, fils extensibles, etc]. Elles jouent en physique un rôle considérable, et expliquent une foule de phénomènes : par exemple, elles donnent la règle de composition des ondulations lumineuses de l'éther issues de deux sources d'ébranlement différentes (sources lumineuses). Le synchronisme explique la mise en vibration par l'air d'une corde sonore quand l'air vibre à l'unisson (et seulement dans ce cas), l'absorption élective des rayons lumineux et calorifiques par les milieux capables d'émettre des rayons de même longueur d'onde, etc.

493. - Exemple. Un élément matériel pesant P est attaché à un fil extensible OP , dont l'extrémité O est fixe. Le système étant en équilibre dans la position verticale AP_0 , on allonge légèrement le fil dans le sens AP_0 et on abandonne le système. Mouvement de P soumis en outre à une petite force perturbatrice de direction Ax et de période τ .

A
P
P
P
x

Dans la position d'équilibre la tension T du fil en P_0 est égale au poids $m.g$ de P . On admet que cette tension varie proportionnellement à $P_0 P$

pour les petites valeurs de $P_0 P$; autrement dit, on admet que $T = -(mg + K^2 x)$, si x est l'abscisse de P comptée en prenant P_0 pour origine).

Soit $X = \varphi(t)$ la force perturbatrice; l'équation du mouvement est

$$mx'' + K^2 x = \varphi(t).$$

Si la période τ de $\varphi(t)$ ne coïncide point avec la quantité $\frac{2\pi\sqrt{m}}{K}$ ou avec aucun de ses multiples, les oscillations de P restent petites. Quand on tient compte de la résistance de l'air, elles tendent vers un petit mouvement de période τ . Au contraire, si $\tau = 2j\frac{\pi\sqrt{m}}{K}$, (j entier), l'amplitude des oscillations de P devient notable.

On peut assimiler à cet exemple celui d'une locomotive dont le corps S est porté par des ressorts. Les forces perturbatrices exercées sur S par les pièces mobiles de la machine ont comme période la durée d'un tour de roue de la machine. Les oscillations propres de S sur ses ressorts ont une période τ_1 qui dépend de ces ressorts et qui est analogue à la période $\frac{2\pi\sqrt{m}}{K}$ de l'exemple précédent. Lorsque la vitesse de la locomotive est telle qu'il se fait un tour de roue pendant la durée τ_1 ou $j\tau_1$, les oscillations du corps de la machine deviennent notables.

494. Remarques sur l'emploi des équations des petits mouvements. — Pour employer les équations des petits mouvements, il est indispensable [N. 478] de choisir les paramètres de façon que K des équations (1) [page 530] réduites à leur termes du 1^{er} degré en q_1, \dots, q_k soient résolubles par rapport à q_1, \dots, q_k .

Considérons, par exemple, un élément P pesant mobile sans frottement sur une sphère fixe. Si on prend comme paramètres la longitude φ et la colatitude θ de P , il est impossible avec ces paramètres d'étudier les petits mouvements de P autour de sa position la plus basse A .

En effet, soit

$$x^2 + y^2 + z^2 = l^2$$

l'équation de la sphère; on a :

$$\begin{aligned}x &= l \sin \theta \cos \varphi \\y &= l \sin \theta \sin \varphi \\z - l &= l (\cos \theta - 1),\end{aligned}$$

et à la position A correspondent les valeurs $\theta = 0$ et φ arbitraire.

Mais prenons comme paramètres $x = q_1$, $y = q_2$;
on a :

$$z = l \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{l^2}} = l \left[1 - \frac{x^2 + y^2}{2l^2} + \dots \right], \text{ d'où :}$$

$$x = q_1, \quad y = q_2, \quad z - l = - \left(\frac{q_1^2 + q_2^2}{2l} \right) + \dots$$

$$V = mg(z - l) = - \frac{mg}{2l} (q_1^2 + q_2^2) + \dots$$

Les équations des petits mouvements sont les mouvements vrais du système :

$$x = q_1, \quad y = q_2, \quad z = 0$$

$$V = - \frac{mg}{2l} (q_1^2 + q_2^2),$$

c'est-à-dire les équations :

$$q_1'' = - \frac{g}{2l} q_1, \quad q_2'' = - \frac{g}{2l} q_2 ;$$

le point P se meut sensiblement dans le plan tangent en A à la sphère comme s'il était attiré par A proportionnellement à la masse et à la distance, le coefficient d'attraction étant $\frac{g}{2l}$.

495. — Cas où V_2 n'est pas une somme de carrés indépendants. — Toute la théorie exposée ci-dessus des petits mouvements suppose que V_2 est une somme de K carrés indépendants. S'il en est autrement, des circonstances toutes différentes se présentent. Montrons-le sur l'exemple du mouvement plan d'un élément P , soumis à une force dérivant de la fonction de force :

$$V = m \left(\frac{y}{2} + \mu^2 x^4 \right)$$

L'origine est une position d'équilibre stable de P .

Les équations du mouvement sont :

$$x'' = -4\mu^2 x^3, \quad y'' = -y$$

d'où

$$x'' = +\mu^2(a^4 - x^4), \quad y = C \sin(t+K), \quad (C, K \text{ constantes arbitraires});$$

les fonctions x et y de t sont des fonctions périodiques, donc la première a comme période

$$\frac{4}{\mu} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$$

$$\left\} \frac{4}{\mu} \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{2a^2(a^2 - x^2)}} \quad \text{ou } \sqrt{2} \frac{\pi}{\mu a}. \text{ Le mouve.}$$

ment le plus général de P est la superposition des deux mouvements périodiques :

$$x = \varphi(t+h, a), \quad y \equiv 0$$

$$x \equiv 0, \quad y = C \sin(t+K)$$

Mais la période du premier de ces deux mouvements tend vers l'infini quand son amplitude tend vers zéro.

Les équations classiques des petits mouvements se réduisent ici à :

$$x'' = 0, \quad y'' = -y.$$

Le système simplifié serait ici un point libre P' qui serait soumis à une force dérivant de la fonction de force $V = -\frac{m}{2}y^2$, et l'origine ne serait pas position d'équilibre² stable.

Chapitre VI.

Généralités sur le Principe de d'Alembert.

496. - Influence des frottements. - Nous avons supposé essentiellement, pour former les équations de d'Alembert, que les liaisons étaient sans frottements. Comment devrait être modifiée la théorie s'il en était autrement?

Considérons un système S formé de solides indéformables reliés par des fils parfaitement flexibles, inextensibles et sans masse. Mais supposons que les glissements de ces solides entre eux ou sur les obstacles fixes aient lieu avec frottement.

Soit R_x, R_y, R_z les composantes de la réaction \bar{R} qui s'exerce à l'instant t sur l'élément P de S ; on a, quels que soient les $\delta x, \delta y, \delta z$:

$$(1) \quad \Sigma m(x'' \delta x + y'' \delta y + z'' \delta z) = \Sigma (X' \delta x + Y' \delta y + Z' \delta z) + \Sigma (R_x \delta x + R_y \delta y + R_z \delta z);$$

en particulier considérons un déplacement virtuel de S [compatible avec les liaisons], et soit

$$K_1 \delta q_1 + \dots + K_n \delta q_n$$

le travail virtuel des réactions dans ce déplacement $\delta q_1, \dots, \delta q_n$, [$K_i = \Sigma (R_x \frac{\partial x}{\partial q_i} + R_y \frac{\partial y}{\partial q_i} + R_z \frac{\partial z}{\partial q_i})$, etc].

L'égalité (1) entraîne [N.°463]:

$$(2) \quad \Sigma m \left(x'' \frac{\partial x}{\partial q_i} + y'' \frac{\partial y}{\partial q_i} + z'' \frac{\partial z}{\partial q_i} \right) = Q_i + K_i,$$

et $(n-1)$ autres égalités analogues. Pour pouvoir calculer le mouvement, il faut faire sur les frottements des hypothèses qui fassent connaître en définitive K_1, \dots, K_n en fonction des q_j, q_j' .

Par exemple, si S est un point matériel de masse m

mobile avec frottement sur un plan incliné fixe Π qui fait un angle i avec ce plan horizontal, soit Oy une ligne de plus grande pente descendante de Π , et $x = q_1, y = q_2$ les coordonnées de P ; on a, dans ce cas $Q_1 = 0, Q_2 = mg \sin i$; on a d'autre part, si f est le coefficient de frottement entre Π et P : $R_1 = R_x = -\frac{fmg \cos i x'}{V}, R_2 = R_y = -\frac{fmg \cos i y'}{V}$, [où $V = +\sqrt{x'^2 + y'^2}$], et les équations (2) donnent ici:

$$m x'' = -\frac{fmg \cos i x'}{V}, \quad m y'' = mg \sin i - \frac{fmg \cos i y'}{V}.$$

Dans tous les cas, le travail des réactions est négatif, s'il n'est pas nul.

497. - Liaisons non holonomes. - Les liaisons entre solides et fils sans masse du système S et obstacles fixes que nous avons étudiées jusqu'ici se traduisent par un certain nombre de relations entre les paramètres q_1, q_2, \dots qui définissent les positions des solides de S . Il se présente souvent, dans les applications, des liaisons d'une autre espèce, qu'il importe de signaler: considérons, par exemple, une sphère solide homogène S , mobile sur un plan horizontal fixe Π assez rugueux pour s'opposer à tout glissement de S . Le mouvement de S est alors un roulement et pivotement sans glissement sur Π . Soit $Z = 0$ le plan Π , OZ une verticale ascendante; la liaison se traduit d'abord par la relation

$$z - l = 0, \quad \left[\begin{array}{l} l \text{ désignant le rayon de la sphère,} \\ z \text{ le rayon de son centre} \end{array} \right],$$

relation holonome (Hertz), c'est-à-dire non différentielle. De plus, il faut exprimer que la vitesse du point le plus bas de la sphère [vitesse qui est horizontale] est nulle, c'est-à-dire que ses composantes suivant Ox et Oy sont nulles, ce qui se traduit par deux relations linéaires et homogènes entre les vitesses et dont les coefficients dépendent des paramètres. Ces relations sont dites non holonomes.

Si on néglige les frottements de roulement et de pivotement, on peut, comme nous le verrons l'an prochain, étendre les équations de d'Alembert au cas où, parmi les liaisons, figurent des liaisons de l'espèce précédente. Je me bornerai

ici, à insister sur le cas, où les relations non holonomes peuvent être intégrées, et par suite remplacées par des relations holonomes.

Imaginons un cylindre mobile S qui reste en contact avec un cylindre fixe Σ tout le long d'une génératrice, des épaulements convergents empêchant tout glissement latéral. Soit C et Γ les sections de S et Σ par son plan fixe xoy normal aux génératrices; C roule sans glisser sur Γ , liaison qui se traduit en exprimant que C reste tangent à Γ et que la vitesse du point P de C en contact avec Γ est nulle à chaque instant; mais cette ^{dernière} condition (non holonome) peut être remplacée par la condition holonome: $s - \sigma = 0$, s et σ désignant les arcs de C et de Γ comptés à partir des deux éléments O et O' de ces deux courbes qui sont en contact pour $t = 0$. Il est loisible d'admettre que s et σ sont les deux paramètres qui définissent la position de S , quand on ne tient pas compte de la condition de non-glissement.

Ces remarques s'étendent immédiatement au cas où les deux cylindres sont deux surfaces mobiles du système.

D'une manière générale, elles s'appliquent chaque fois qu'une courbe solide C de S roule sans glisser sur une autre courbe solide Γ fixe ou appartenant au système. Quand toutes les liaisons non holonomes de S sont de cette nature, elles peuvent se traduire par des relations holonomes ordinaires; un déplacement virtuel de S est un déplacement infinitésimal de S compatibles avec toutes ces liaisons. Dans un tel déplacement le travail des réactions mutuelles de C et Γ est nul⁽¹⁾, non plus parce que ces deux solides sont lisses, mais parce que le glissement de C sur Γ est nul. On peut donc alors répéter sur le système S tout ce qui a été dit dans ce livre [N^{os} 406-494] sur les systèmes à liaisons holonomes. Tout se passe comme si les courbes C et Γ qui roulent l'une sur l'autre ne frottaient point entre elles mais étaient animés d'engrenages de masse nulle et parfaitement lisses, les contraignant à rouler sans glisser l'une sur l'autre.

(1) Ceci suppose, que ces réactions sont deux forces appliquées au point géométrique de contact, l'une exercée par C sur Γ , l'autre par Γ sur C . Autrement dit, on néglige les frottements de roulement et de pivotement.

498. - Systèmes à liaisons unilatérales. - Dans toutes les applications du Principe de d'Alembert, nous nous sommes limités au cas où les liaisons sont bilatérales. Dans un grand nombre d'applications, il n'en est pas ainsi.

Considérons, par exemple, une sphère homogène, pesante, qui repose sur un plan horizontal fixe $z=0$ au-dessus duquel elle peut se soulever. La liaison se traduit alors, non plus par l'égalité [N°497] : $\zeta - l = 0$, mais par l'égalité :

$$\zeta - l \geq 0.$$

La sphère occupant, à l'instant $t=0$, une position déterminée avec des vitesses déterminées, comment calculer son mouvement ?

On a nécessairement $\zeta - l \geq 0$. Si $\zeta - l > 0$, la sphère se meut comme si elle était libre, tant qu'elle ne vient pas heurter π ; alors un choc se produit, et il faut calculer les nouvelles conditions initiales.

Si $\zeta - l = 0$, on a nécessairement : $\zeta'_0 - l \geq 0$. Si $\zeta'_0 - l > 0$, la sphère se soulève au-dessus de π , et on peut répéter ce qui précède.

Enfin, reste le cas où on a : $\zeta_0 - l = 0$, $\zeta'_0 = 0$, c. à. d. où les conditions initiales sont les mêmes que si la liaison était bilatérale. Dans ce cas, S peut se soulever immédiatement au-dessus de π ou au contraire rester en contact avec π au moins un certain temps.

Plaçons-nous dans la première hypothèse ; la sphère se meut comme si elle était libre, (au moins tant qu'elle ne vient pas heurter π), mais elle doit rester au-dessus de π ; autrement dit, $\zeta - l$ est positif ou nul ; or $\zeta - l$ est nul ainsi que ζ' pour $t=0$; il faut donc que ζ''_0 soit positif ou nul. Soit Z la projection sur oz de la force donnée ; on a : $M\zeta'' = Z$. Si donc Z est négatif à l'instant $t=0$ pour les conditions initiales de S , le mouvement libre est inadmissible. La sphère dans ce dernier cas reste nécessairement en contact avec π , et tout se

passé (au moins pendant un certain temps) comme si la liaison était bilatérale.⁽¹⁾

499. - Une discussion analogue serait nécessaire dans le cas général des liaisons unilatérales. Tenons compte de toutes les liaisons bilatérales pour réduire au minimum le nombre des paramètres; les autres liaisons (liaisons unilatérales, mais que nous supposons holonomes) se traduisent par des inégalités :

$$(L) \quad \begin{cases} f(q_1, \dots, q_k) \geq 0 \\ \varphi(q_1, \dots, q_k) \geq 0 \\ \dots \end{cases}$$

Le système S étant placé dans des conditions initiales données, il n'y a point de difficulté si aucune des inégalités précédentes n'est vérifiée en tant qu'égalité: S se meut comme si les restrictions L n'existaient pas, au moins pendant un certain temps, à savoir tant qu'une des expressions f, φ, \dots ne s'annule pas⁽²⁾. Si f par exemple est nulle pour $t=0$, on a :

$$f' \equiv \frac{\partial f}{\partial q_1} q'_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_k} q'_k \geq 0 ;$$

si $f' > 0$ pour $t=0$ et si la condition analogue est remplie pour les autres expressions φ, \dots qui se trouvent nulles pour $t=0$, la même conclusion s'applique. Mais supposons que plusieurs des liaisons L, par exemples les deux premières, soient vérifiées pour $t=0$ comme si elles étaient bilatérales; autrement dit, on a pour $t=0$:

$$f=0, \quad f'=0, \quad \text{et} \quad \varphi=0, \quad \varphi'=0.$$

Quatre hypothèses sont possibles :

(1) On peut confirmer cette discussion [et c'est là une remarque générale] pour l'étude du signe de la réaction du plan Π . Les deux corps S et Π , sans frottement ni adhérence, la réaction de Π sur S (normale à Π) est dirigée vers le haut ou nulle; autrement dit, sa valeur R comptée positivement dans le sens OZ ne peut être négative. Or $R + Z = 0$; si donc $Z > 0$, R serait négatif, S ne peut rester en contact avec Π .

(2) A cet instant, il se produit en général un choc entre deux corps de S ou entre un de ces corps et un des obstacles.

1°: Les deux conditions $f=0$, $\varphi=0$ cessent immédiatement d'être vérifiées. On calcule alors le mouvement à l'aide des équations de d'Alembert comme si les liaisons (L) n'existaient pas. Mais le mouvement ainsi calculé doit satisfaire aux restrictions $f \geq 0$, $\varphi \geq 0$; on doit donc avoir, pour $t=0$, $f'' \geq 0$, $\varphi'' \geq 0$ [f'' désignant la valeur de $\frac{d^2 f}{dt^2}$ pour $t=0$]. Si ces restrictions ne sont pas remplies, ledit mouvement ainsi calculé est inadmissible. On se place alors dans l'hypothèse 2°.

2°: Pendant le mouvement, $f \equiv 0$, mais non φ : on calcule le mouvement en se servant de la liaison $f=0$ pour diminuer d'une unité le nombre des paramètres, et en employant ensuite le principe de d'Alembert. Le mouvement ainsi calculé n'est admissible que si la restriction $\varphi \geq 0$ est remplie, d'où $\varphi'' \geq 0$. Dans le cas contraire on se place dans l'hypothèse 3°.

3°: Pendant le mouvement, $\varphi \equiv 0$, mais non f . On procède comme dans l'hypothèse 2°. Le mouvement calculé doit satisfaire à la restriction $f \geq 0$, d'où $f'' \geq 0$. Si cette restriction n'est pas remplie, on se place dans l'hypothèse 4°.

4°: Pendant le mouvement, on a $f \equiv 0$, $\varphi \equiv 0$ (au moins d'un certain temps) comme si les liaisons étaient bilatérales. Ces relations permettent de diminuer de deux unités le nombre des paramètres, et on calcule le mouvement en appliquant les équations de d'Alembert au système à $(K-2)$ paramètres ainsi défini.

On voit que, si la discussion est compliquée, elle peut être entièrement effectuée par la méthode de d'Alembert.

500. - Cas où les liaisons dépendent du temps. - Nous nous sommes limités, dans cette étude des équations de d'Alembert, aux systèmes S formés de solides indéformables ou qui peuvent être regardés comme formés d'éléments indéformables. De plus, nous n'avons tenu compte (en outre des liaisons intérieures) que des liaisons imposées au système par les obstacles extérieurs fixes.

Imaginons maintenant que les solides de S , au lieu d'être indéformables, se déforment suivant une loi donnée quand le temps varie. Ce sera le cas, par exemple, d'un solide mobile dans une enceinte dont il a constamment la température, la température de cette enceinte

varient lentement avec le temps. A chaque instant t , le solide a une forme donnée, mais cette forme varie avec l'instant considéré.

Imaginons de même que, parmi les corps extérieurs au système, il en existe qui se déplacent ou se déforment (quand le temps varie) suivant une loi donnée. Nous les appellerons obstacles mobiles. Par exemple, admettons que S se compose d'un point matériel P de masse m , et que ce point soit mobile sur une circonférence Γ qui tourne autour d'un de ses diamètres fixes avec une vitesse angulaire égal à l'unité: à chaque instant t , le point doit se trouver sur la circonférence Γ , sa position dépend d'un paramètre, mais la position de la courbe Γ varie avec t suivant une loi donnée.

Dans ces divers cas, l'ensemble de toutes les positions que le système peut occuper à un instant t varie avec t . On dit alors que les liaisons dépendent du temps.

Nous verrons, l'an prochain, comment les équations de d'Alembert peuvent être étendues au cas où les liaisons dépendent du temps. Bornons-nous ici à cette remarque: Quand les liaisons sont indépendantes du temps, le travail des réactions est nul dans le déplacement vrai de S s'il n'y a pas de frottements; il est négatif si des frottements existent.

Ce théorème est absolument en défaut quand les liaisons dépendent du temps. [N.º 94]. Lors même qu'elles n'entraînent point de frottements, le travail des réactions est en général différent de zéro dans le mouvement vrai de S , et il peut avoir un signe quelconque, qu'il y ait ou non frottement.

Par exemple, supposons que S se compose d'un seul point matériel P , de masse m , pesant et mobile sur un plan horizontal Π qui se soulève avec une vitesse égale à l'unité. La réaction \bar{R} de Π sur P , s'il n'y a pas frottement est verticale ascendante et égale à mg ; son travail entre les instants t et $t + dt$ est $mg dt$. S'il y a frottement, et si W est la vitesse de P par rapport au plan Π , le travail de \bar{R} est $mg[1 - fW] dt$, et il est positif si $fW < 1$.

Chapitre VII.

Application du Principe des travaux virtuels
et du Principe de d'Alembert aux Machines simples.
Influence du frottement.

501. - Machines simples. - Les machines simples sont des systèmes à liaisons complètes, en général, de masse très petite, et qui ne sont soumis qu'à une seule force motrice qu'on appelle⁽¹⁾ la puissance P , et à une seule résistance utile R qu'on appelle la résistance.

Appelons q le paramètre dont dépend la position du système, Adq le travail élémentaire de P et de R ; le travail du poids de la machine étant négligeable, le théorème des forces vives qui équivaut ici à l'unique équation de d'Alembert donne en ne tenant pas compte des frottements :

$$(1) \quad dT = (A + B) dq, \quad [T \text{ demi force-vive de la machine}].$$

Si la force vive est constante une fois le régime établi, l'équation (1) donne :

$$A + B = 0$$

qui est la condition d'équilibre de la machine : autrement dit, pendant le mouvement la puissance et la résistance satisfont à la même condition que si elles maintenaient le système en équilibre. Quand on tient compte des frottements, soit τdq le travail (toujours négatif) des forces de frottement, on a (une fois T constant) :

$$(A + B + \tau) dq = 0,$$

d'où $A + B + \tau = 0$. La puissance, la résistance et les forces de frottements satisfont à la condition d'équilibre : Mais il convient de remarquer que les frottements n'obéissent pas

⁽¹⁾ Cette ancienne dénomination devrait être aujourd'hui abandonnée pour éviter toute confusion avec le sens actuel du mot puissance (travail utile d'une machine par unité de temps).

aux mêmes lois pendant le mouvement et pendant l'équilibre.

Pendant la période de mise en train de la machine, on a :

$$(A + B + T) dq > 0.$$

Les machines simples fonctionnent en général à assez petite vitesse et comme leur masse est très petite, leur force vive reste négligeable pendant toute la durée d'emploi.

Quelle que soit le régime de la machine, on a donc sensiblement à tout instant et même pendant la mise en marche

$$A + B + T = 0.$$

502. - Vérification du Principe des travaux virtuels. -

Négligeons les frottements : soit V la vitesse du point \mathcal{O} matériel auquel est appliquée la puissance \vec{P} , φ l'angle de \vec{P} et de \vec{V} ; soit de même W la vitesse du point matériel auquel est appliquée la résistance \vec{R} , et ψ l'angle de \vec{R} et de \vec{W} ; la condition que vérifient R et P est la même que la condition d'équilibre fournie par le principe des travaux virtuels, et s'écrit :

$$PV \cos \varphi + RW \cos \psi = 0.$$

Si notamment P a le sens de V , et R le sens contraire de W , on a :

$$(1) \quad PV = RW.$$

D'où l'antique adage : ce qu'on gagne en force, on le perd en vitesse.

Ce principe se vérifie immédiatement sur le levier soumis à une puissance et à une résistance parallèles et perpendiculaires au bras du levier. De même considérons un treuil, c'est-à-dire un arbre mobile autour d'un axe horizontal OZ et formé de deux cylindres de révolution autour de OZ , invariablement liés et de masse négligeable : une corde enroulée autour du petit cylindre supporte la masse μ à soulever ; la puissance est appliquée à une corde enroulée autour du grand cylindre ; pendant le fonctionnement de la machine, la masse μ monte uniformément ; la réaction de la corde sur cette masse est donc égale et directement opposée à $\mu \vec{g}$; la tension de la corde (résistance)

est égale à $\mu g = R$. Si on appelle r et ρ les rayons du petit et du grand cylindre, la condition (1) donne :

$$P\rho = Rr.$$

Dans le cours de Mathématiques spéciales, on a vérifié le même principe pour les divers types de machines simples (Balances, palans, etc.) Revenons seulement sur les palans et les moufles.

503. - Palans et moufles. - Un palan est essentiellement constitué par un groupe de poulies A, B, C tournant autour

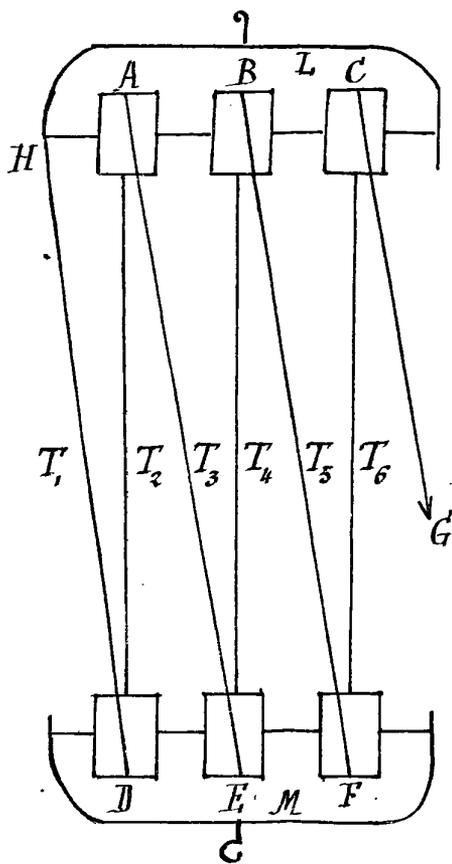


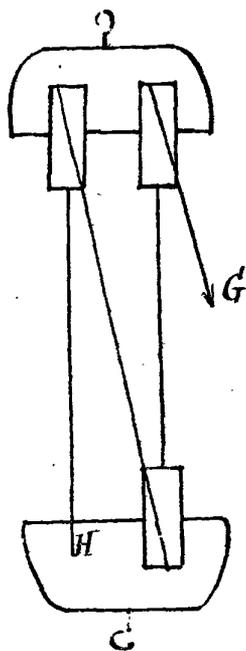
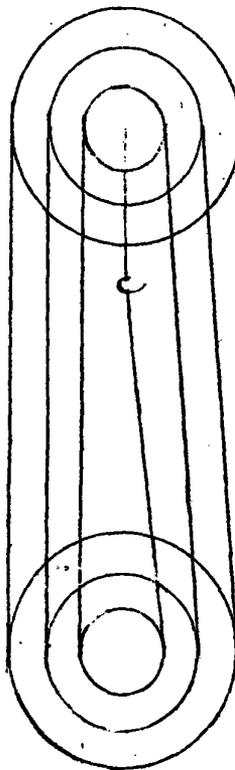
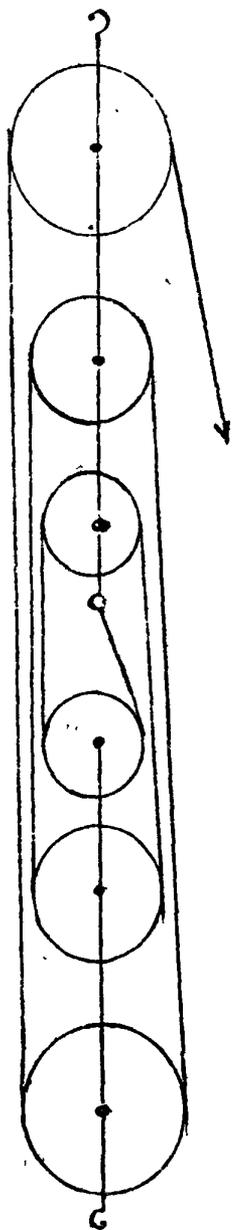
fig. 1.

d'un même axe fixe porté par une chape L et un groupe de poulies D, E, F tournant autour d'un même axe mobile portant la chape M. Une corde amarrée en un point fixe H passe alternativement sur une poulie mobile et sur une poulie fixe. Si l'on tire sur l'extrémité libre G, la chape inférieure s'élève d'une quantité h . Soit n le nombre des poulies mobiles. La corde présente, de H en G, $2n$ brins. Si nous négligeons leurs inclinaisons sur la verticale, nous voyons que chaque brin se raccourcit de h , et, comme la longueur totale de la corde ne change pas, il faut que l'extrémité G éprouve le déplacement $2nh$.

On remarque que certains brins arrivent obliquement sur les poulies. L'expérience montre que cette obliquité n'a pas d'inconvénient pourvu qu'elle soit assez légère. On peut d'ailleurs faire en sorte que toutes les poulies et tous les brins se trouvent dans un même plan, mais alors les poulies doivent être inégales et superposées comme dans la figure ci-dessous, qui représente une moufle.

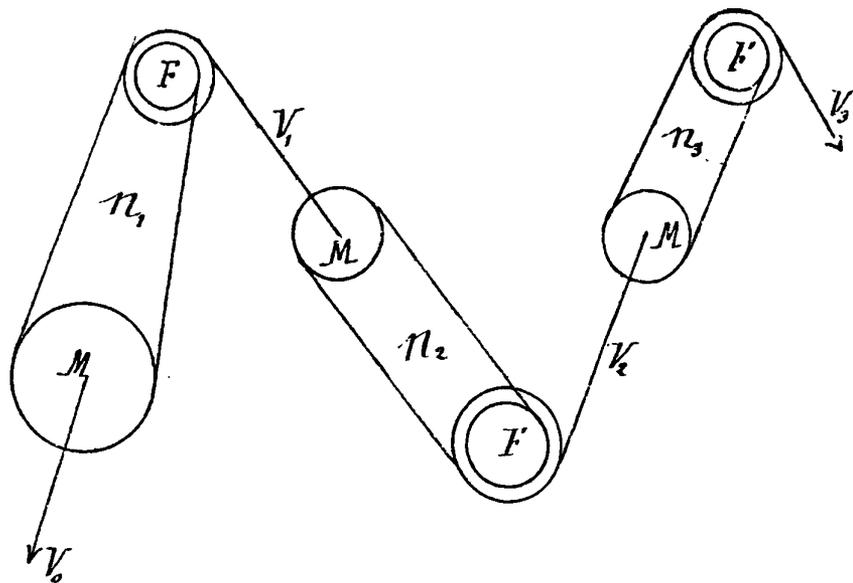
Il existe un type intermédiaire dit moufle de

White, dans lequel chacune des chapes porte des poulies inégales, montées sur le même arbre et solidaires les unes des autres. (Figure ci-dessous).



On peut également construire des palans ou des moufles présentant un nombre impair de poulies. Le rapport de transmission est dans tous les cas égal au nombre total des poulies.

504. - Erains de moustles. - Un train de moustles s'obtient en attachant la chape mobile M de chaque moustle à l'extrémité libre de la corde de la moustle précédente. Les poulies F sont fixes. Si



l'extrémité libre de la corde de la moustle précédente. Les poulies F sont fixes. Si n_1, n_2, n_3, \dots désignent les rapports de transmissions successifs, on a pour les vitesses des chapes mobiles en appelant V_0 la première vitesse :

$$V_1 = n_1 V_0 ;$$

$$V_2 = n_2 V_1 = n_1 n_2 V_0$$

$$V_3 = n_3 V_2 = n_1 n_2 n_3 V_0, \\ \text{etc. } [n_1, n_2, \dots]$$

sont les nombres des poulies de la 1^{ère} moustle, de la 2^e etc.]. On voit que le rapport de la dernière vitesse à la première croît rapidement avec le nombre des moustles. Si l'on suppose en particulier tous les nombres n égaux et si l'en le nombre des moustles, la vitesse finale est $n^l V_0$. Le rapport de transmission est $a = n^l$. Le nombre total des poulies $N = nl$.

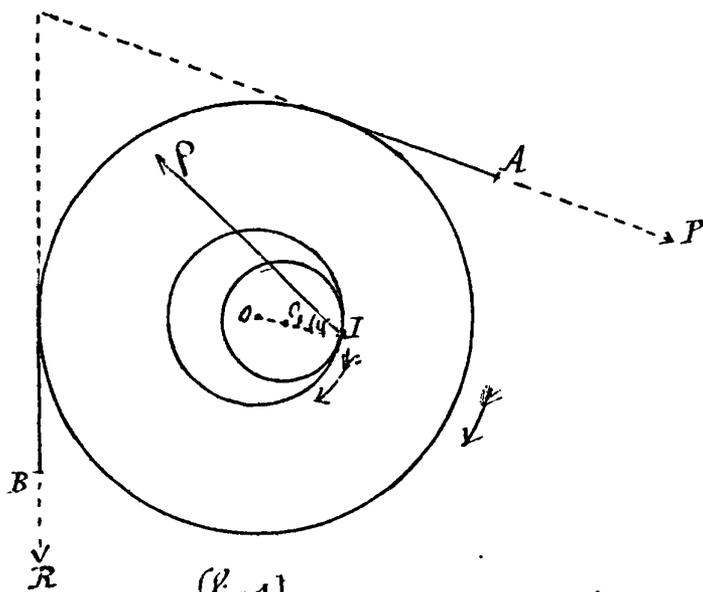
On peut écrire $N = \frac{n \log a}{\log n}$. Si a est donné, N est minimum pour $\log n = 1$, d'où $n = e$. Le nombre entier le plus voisin de e étant 3, on voit qu'il y a avantage, au point de vue de la réduction du nombre total des poulies à employer des trains formés de moustles à trois poulies

Comme exemple de l'influence des frottements, nous allons étudier le fonctionnement d'un palan en tenant compte des frottements et de la raideur des cordes. Nous traiterons d'abord le cas d'une poulie simple.

555. - Fonctionnement d'une poulie quand on tient compte des frottements de l'axe et de la raideur de la corde.

La poulie, que nous assimilons à un disque plat, est percée d'un petit cercle de rayon l [cousinnet], concentrique à la circonférence extérieure de la poulie, et à l'intérieur de ce cercle passe l'axe fixe horizontal, constitué par un cylindre de révolution dont le rayon l_1 est à peine inférieur à l . La section du système par le plan xoy de la poulie est représentée par la figure ci-contre, où la longueur l est exagérée ainsi que la différence $l - l_1$.

Étudions le système de masse négligeable formé par la poulie et la corde



(fig.1).

AB. Une fois le régime établi, la réaction \vec{P} exercée par l'axe fixe O sur le cousinnet, la puissance \vec{P} , la résistance \vec{R} se sont équilibrées. La réaction \vec{P} est donc égale et directement opposée à la résultante $\vec{\Phi}$ des forces \vec{P} et \vec{R} ; comme la résultante a une direction donnée, cette première condition exige que le point de contact du cousinnet O et de l'axe

ait lieu en un point fixe I : en effet, soit f le coefficient de frottement entre le cousinnet et l'axe, et soit $\operatorname{tg} \varphi = f$. En vertu des lois du frottement de glissement, la droite \vec{IP} fait avec OI l'angle φ , et OIP a le sens de la rotation de la poulie: pour que la direction OP ainsi définie soit celle de $\vec{\Phi}$, il faut que I occupe sur le cercle O , une position bien déterminée.

D'autre part, le moment par rapport à la droite OZ [perpendiculaire au plan du tableau] de \vec{P} , de \vec{R} et de \vec{P} est nul. À cause de la raideur de la corde, tout se passe [N°458] comme si \vec{R} était appliquée à une distance l_1 de O plus grande que l à savoir:

$$T_1 = P + B + \frac{A}{R}$$

\bar{P} étant appliqué à la distance P . Quant à la réaction Φ , elle est égale à Φ en valeur absolue, et si le sens OZ est choisi de façon que la rotation de la poulie autour de OZ soit positive, on a :

$$PT - RT - l \sin \varphi \Phi = 0$$

ou encore :⁽¹⁾

$$(1) \quad (P - R)T - (A + BR) - l \sin \varphi \sqrt{P^2 + R^2 + 2PR \cos(P, R)} = 0.$$

Si les forces T et R sont parallèles, on a : $\cos(T, R) = 1$,
d'où :

$$(2) \quad (P - R)T - (A + BR) - l \sin \varphi (T + R) = 0.$$

Cette relation peut s'écrire :

$$(3) \quad P = \alpha + BR, \text{ ou encore } \left(P + \frac{\alpha}{B-1}\right) = \beta \left[R + \frac{\alpha}{B-1}\right],$$

α et β étant deux nombres indépendants de T et de R ,
 $\alpha > 0$, $\beta > 1$. Quand la corde est sans raideur, $\alpha = 0$.

Appliquons maintenant les résultats précédents à l'étude du fonctionnement d'une moufle ou d'un palan.

506. - Moufle et Palan. - Les poulies du palan ou de la moufle sont supposées toutes identiques, ainsi que leurs cordes et leurs axes de suspension. Si T_n , T_{n+1} sont les tensions de deux brins aboutissant à la même poulie, [fig. 1 de la page 560], on a, d'après ce que nous venons de voir [formule (3)]

$$T_{n+1} = \alpha + \beta T_n$$

la tension du dernier brin est égale à la puissance P tirant sur l'extrémité libre, et en supposant que le nombre des brins soit égal à $n+1$, on a les formules :

$$(4) \quad \begin{aligned} T_2 &= \alpha + \beta T_1 \\ T_3 &= \alpha + \beta T_2 \\ &\dots \\ P &= \alpha + \beta T_n \end{aligned}$$

(1) Pendant la mise en mouvement, le premier membre de (1) est petit, mais positif, parce que la force vive de la poulie passe de zéro à une petite valeur positive. La poulie ne se met donc en mouvement que si P dépasse la valeur donnée par l'égalité (1).

T_1 est la tension inconnue du premier brin amarré en un point fixe ou lié à la chape.

Ces relations peuvent se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} T_2 + \frac{\alpha}{\beta-1} &= \beta \left(T_1 + \frac{\alpha}{\beta-1} \right) \\ T_3 + \frac{\alpha}{\beta-1} &= \beta \left(T_2 + \frac{\alpha}{\beta-1} \right) \\ &\dots\dots\dots \\ P + \frac{\alpha}{\beta-1} &= \beta \left(T_n + \frac{\alpha}{\beta-1} \right) \end{aligned}$$

Multiplions alors membre à membre, il vient :

$$(6) \quad P + \frac{\alpha}{\beta-1} = \beta^n \left(T_1 + \frac{\alpha}{\beta-1} \right).$$

Soit, d'autre part, R la force qui résiste au déplacement de la chape mobile. On a :

$$(7) \quad R = T_1 + T_2 + \dots + T_n.$$

Ajoutons membre à membre les équations (6) en tenant compte de (7). Nous obtenons :

$$(8) \quad P + R - T_1 = n\alpha + \beta R$$

d'où :

$$T_1 = P - (\beta-1) R - n\alpha$$

et cette valeur, portée, dans la relation (6) donne :

$$P = \frac{n\alpha\beta^n}{\beta^n-1} - \frac{\alpha}{\beta-1} + \beta^n \frac{\beta-1}{\beta^n-1} R.$$

Celle est la relation entre la puissance et la résistance.

Cette relation fait comprendre qu'il n'y a pas avantage à augmenter, au-delà d'une certaine limite le nombre des cordons. Bornons-nous au cas où la constante β surpasse très peu l'unité et posons $\beta = 1 + \varepsilon$. En traitant ε comme une quantité infiniment petite, on trouve :

$$P = n\alpha + \frac{R}{n}.$$

Pour R donné, le minimum de P a lieu, dans ces conditions pour $n = \sqrt{\frac{R}{\alpha}}$. Il faudra prendre le nombre

entier le plus voisin de ce radical. Pour $n = \sqrt{\frac{R}{\alpha}}$, il vient :

$$P = 2\sqrt{\alpha R} = 2 \frac{R}{n}$$

S'il n'y avait ni frottement, ni raideur des cordes la valeur de P serait $\frac{R}{n}$. On voit que dans le cas le plus favorable, la puissance nécessaire est réellement deux fois plus grande que la puissance calculée en négligeant les résistances passives.

Calculons le rendement : Le déplacement de l'extrémité libre étant n fois plus grand que celui de la chape mobile, le rapport du travail moteur au travail résistant est $\frac{nP}{R} = 1 + \frac{\pi^2 \alpha}{R}$. Le rendement égal à $\frac{R}{nP}$, peut s'écrire : $\frac{R}{R + n^2 \alpha}$. Il est d'autant plus faible que le nombre de brins est plus grand. Pour $n = \sqrt{\frac{R}{\alpha}}$, sa valeur est seulement $\frac{1}{2}$.

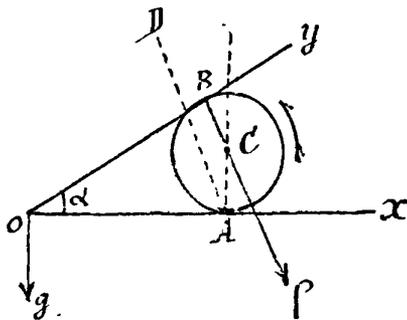
En résumé, l'emploi des mouffles, substitué à la traction directe, est avantageux au point de vue de la réduction de la force P nécessaire pour vaincre une résistance donnée R , mais cet avantage est acheté au prix d'une dépense supplémentaire de travail, et quand la force P est rendue la plus petite possible, la dépense de travail se trouve doublée.

— On pourrait étudier le fonctionnement d'un treuil comme on vient d'étudier le mouvement de la poulie, en tenant compte des frottements. L'axe commun OZ des cylindres du treuil se prolonge par deux cylindres de révolution d'axe OZ de petit rayon l qui reposent sur deux coussinets fixes, constitués par deux cylindres creux de révolution, de rayon à peine supérieur à l , et dont l'axe est sensiblement dans le prolongement de OZ . La coupe d'un coussinet par un plan perpendiculaire à OZ est donc représentée par la figure 1 du N° 505, mais ici le cercle O (coussinet) est fixe, et le cercle intérieur O_1 est lié invariablement au treuil. ⁽¹⁾

(1) On pourrait imaginer une poulie ainsi réalisée : un cylindre de révolution creux, fixe, horizontal et de très petite épaisseur (coussinet), à l'intérieur duquel passe un cylindre mobile de rayon presque égal invariablement lié aux deux faces de la poulie, cette dernière étant évidée
(suite page 567)

Je me bornerai ici à signaler quelques exemples d'arc-boutement remarquables [N° 304] qu'entraînent le frottement.

507. - Exemples d'arc-boutement. - Soit oxy un plan vertical, ox une horizontale, oy une droite inclinée dirigée au-dessus de ox . Soit S un disque circulaire plein et homogène, qui glisse avec frottement sur ox et sans frottement sur oy . Appelons f le coefficient de frottement entre ox et S , et α l'angle xoy . Le disque étant abandonné sans vitesse au contact de ox et de oy , appliquons-lui un couple situé dans le plan xoy et orienté dans le sens xoy [sens de la flèche]



Si $\operatorname{tg} \alpha \leq f$, je dis que, quelque grand que soit N , S reste immobile.

En effet, pour le démontrer, il suffit de calculer des réactions conformes aux lois de frottement et assurant l'équilibre. Soit \bar{R} la réaction de ox et \bar{P} la réaction de oy sur S ; le vecteur $\bar{R} + M\bar{g}$ doit être

égal et de sens contraire au vecteur \bar{P} perpendiculaire à oy ; l'égalité $\bar{R} = -\bar{P} - M\bar{g}$ montre aussitôt que \bar{R} est compris dans l'angle $CA\bar{D}$ ($A\bar{D}$ perpendiculaire à oy), et par suite fait avec AC un angle moindre que α , donc moindre que l'angle de frottement φ [$\operatorname{tg} \varphi = f$].

D'autre part, soit CZ la demi-perpendiculaire au plan telle que xoy soit compté positivement autour de CZ ; le moment de \bar{R} par rapport à CZ doit coïncider avec $-N$, ce qui exige que le vecteur équipollent à \bar{P} et construit avec A comme origine ait comme valeur N , d'où $f = \frac{N}{P}$ (si l est le rayon de S); f étant ainsi déterminé, on a \bar{R} par l'égalité $\bar{R} = -\bar{P} - M\bar{g}$. Ses réactions ainsi calculées assurent l'équilibre et satisfont aux lois du frottement. Le

intérieurement autour de son axe. La disposition serait alors analogue à celle du bœuil.

Ses paires de roues des wagons de chemins de fer et leur arbre forment, comme le bœuil, un solide, et les extrémités de cet arbre tournent dans des coussinets aménagés dans les parois latérales des wagons (boîtes à graisse). Les roues de voiture au contraire ont la disposition des poulies ordinaires [N° 505], leur partie centrale circule sur un coussinet mobile, autour d'un axe solide qui ne tourne pas.

disque. S reste donc en équilibre si grand que soit N .

On peut confirmer cette discussion en montrant directement que le mouvement est impossible: tout d'abord, on voit aussitôt que S ne peut se soulever au-dessus de Ox , ni abandonner Oy ; d'autre part, s'il reste en contact avec Ox et Oy , il ne peut que tourner autour de son centre fixe en glissant sur Ox et Oy . On aurait donc puisque C est fixe: $\vec{R} = -\vec{f} - M\vec{g}$, ce qui montre que l'angle de \vec{R} et de AC est moindre que φ ; mais en même temps cet angle doit être égal à φ en vertu des lois du frottement de glissement. N'est donc impossible que S se mette en mouvement. Il y a arc-boutement.

Au contraire, si le couple N est orienté dans le sens opposé au sens de la flèche, S se met en mouvement si petit que soit N en s'écartant de Oy .

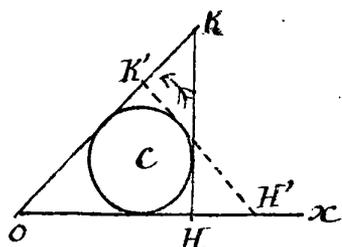


fig. 2

empêche S de s'écarter de Oy , le disque tourne en sens inverse du sens de la flèche dès que la valeur de N dépasse fMg .

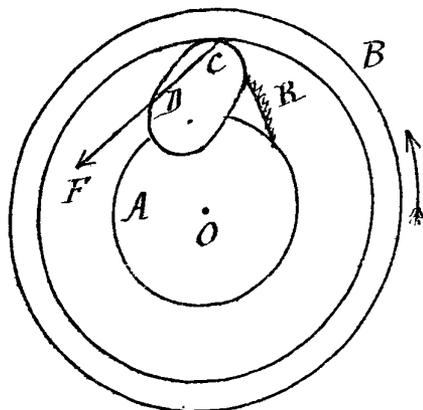
Supposons Mg petit: le disque sera arc-bouté quand on voudra le faire tourner dans le sens de la flèche; il tournera sans difficulté dans l'autre sens.

Si la barre HK au lieu d'être verticale, était disposée suivant $H'K'$ symétrique de Oy par rapport à la verticale de C, le disque serait arc-bouté dans les deux sens.

L'exemple précédent fait comprendre comment on peut réaliser des encliquetages sans dents ni chocs, à l'aide des phénomènes du frottement. Le type le plus célèbre de ces encliquetages est celui de Dobo, dont voici la description.

508. - Encliquetage Dobo. - Un disque A et un anneau B

mobiles autour d'un même axe O sont reliés par une came C, articulée en D avec le disque A et pressée contre l'intérieur de l'anneau par un ressort R.



- (1) En effet, si S n'est pas en contact avec Oy , la force de frottement exercée par Ox sur S a le sens AO , et S (en vertu du théorème du centre de gravité) traverserait Oy .

Si maintenant A fixe⁽¹⁾, on fait tourner l'anneau dans le sens de la flèche que je prends comme sens positif, il ne peut glisser sur la came sans exercer sur elle une réaction F' faisant avec la normale au point de contact un angle égal à l'angle de frottement. L'appareil est construit de façon que le moment de cette réaction par rapport à D soit de même signe que celui des forces exercées par le ressort.

Lorsqu'on applique à l'anneau B un couple moteur ayant le sens de la flèche et qui croît indéfiniment à partir de zéro, le disque va rester immobile; en effet, admettons qu'il commence à glisser à un certain moment: les forces appliquées à la came C immobile se font alors ^{sensiblement} équilibrer, et F' fait avec la normale l'angle de frottement. Or cela est impossible. L'anneau B reste donc immobile (quand A est fixé), si grand que soit le couple moteur de sens positif. Au contraire, il n'y a aucune difficulté à faire tourner l'anneau dans le sens négatif. Nous avons supposé que A était maintenu fixe; admettons qu'une certaine résistance (des frottements par exemple) s'oppose seulement à la rotation de A autour de D . Si on fait tourner B dans le sens de la flèche, il ne peut glisser sur A , quel que soit le couple appliqué à B , et il entraîne A avec lui. Si au contraire on fait tourner B dans le sens inverse, il glisse sur A sans l'entraîner.

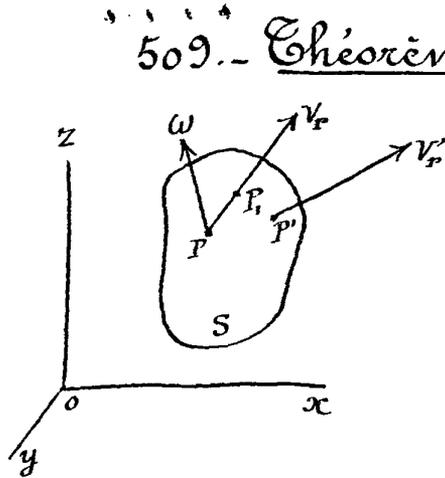
On réalise ainsi une transmission de mouvement de A en B dans un seul sens. Si on imprime à l'anneau un mouvement oscillatoire, on communique à A une série de rotations de sens constants, séparées par des intervalles de repos. Inversement, on peut donner à A un mouvement oscillatoire et c'est alors l'anneau B qui progresse dans un sens constant. En réalité, l'encliquetage Dobo présente, sur le contour du disque A , plusieurs cames symétriquement placées; la théorie demeure la même.

Ce genre d'encliquetage est très fréquemment employé, notamment dans les bicyclettes à roue libre.

(1) Quand A est fixe, la came dont le point D est fixe et qui est tangente au cercle B , est elle-même fixe.

Chapitre VII.

Théorème de Coriolis. - Application au mouvement relatif.



509. - Théorème de Coriolis. - Soit $oxyz$ les axes choisis comme axes fixes, S un solide animé par rapport à ces axes d'un mouvement donné, et auquel on peut attacher invariablement au trièdre d'axes $0, x, y, z$, (non figuré); soit enfin P un mobile animé d'un mouvement quelconque. Nous appellerons, pour abréger, mouvement absolu et mouvement relatif de P son mouvement rapporté respectivement au trièdre $oxyz$ et à S .

Soit, à un instant t , Π le point invariablement lié à S qui coïncide avec P ; ce point Π sera dit point coïncidant, et la vitesse absolue \vec{V}_c l'accélération absolue \vec{J}_c de Π seront dite vitesse, accélération du point coïncidant.

Soit \vec{V}_a et \vec{V}_r la vitesse absolue et la vitesse relative du mobile P à l'instant t ; on sait qu'on a (N° 175):

$$(1) \quad \vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_c$$

Soit de même \vec{J}_a et \vec{J}_r les accélérations absolue et relative de P à l'instant t . Le théorème de Coriolis fait connaître \vec{J}_a en fonction de \vec{J}_r , \vec{V}_r et des éléments différentiels du mouvement absolu de S .

510. - Plaçons-nous d'abord dans le cas où P décrit dans S une droite avec une vitesse constante. L'accélération \vec{J}_r est alors nulle, et \vec{V}_r est un vecteur de longueur constante, qui garde par rapport à S une direction et un sens invariables.

À l'instant t , le mobile occupe la position P et sa vitesse relative est le vecteur PV_r ; on a:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_c$$

À l'instant $t + dt$, le mobile est venu en P' , sa vitesse relative est le vecteur $P'V'_r$ et on a :

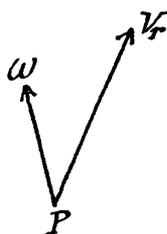
$$\bar{V}'_a = \bar{V}'_r + \bar{V}'_c$$

Or :

$$\bar{J}_a = \frac{\bar{V}'_a - \bar{V}_a}{dt} ; \quad \text{d'où}$$

$$(2) \quad \bar{J}_a = \frac{\bar{V}'_r - \bar{V}_r}{dt} + \frac{\bar{V}'_c - \bar{V}_c}{dt}$$

Étudions d'abord le terme $\frac{\bar{V}'_r - \bar{V}_r}{dt}$. Soit P la rotation instantanée de S à l'instant t ; le vecteur \bar{V}_r ayant dans S une direction et un sens invariables, la direction et le sens de \bar{V}'_r s'obtiennent en faisant subir au vecteur $P\bar{V}_r$ la rotation $P\bar{\omega}$ pendant le temps dt .



Construisons avec P comme origine le vecteur $P\bar{V}'$ équipollent à $P'V'_r$; la différence géométrique $\bar{V}'_r - \bar{V}_r$ est égale à $\bar{V}'_r \bar{V}'$, et la limite $\frac{\bar{V}'_r - \bar{V}_r}{dt}$ est la vitesse communiquée au point géométrique V_r par la rotation $P\bar{\omega}$; autrement dit, on a :

$$\frac{\bar{V}'_r - \bar{V}_r}{dt} = (P\bar{\omega}, \bar{V}_r).$$

Étudions maintenant le terme $\frac{\bar{V}'_c - \bar{V}_c}{dt}$. Pour cela, considérons l'élément de S qui coïncide avec le mobile (c'est-à-dire qui est en P') à l'instant $t + dt$, et soit P_1 sa position à l'instant t , \bar{W} sa vitesse absolue; P_1 se trouve sur le vecteur PV_r à la distance $V_r \times dt$ de P . On peut écrire :

$$\frac{\bar{V}'_c - \bar{V}_c}{dt} = \frac{\bar{V}'_c - \bar{W}}{dt} + \frac{\bar{W} - \bar{V}_c}{dt}$$

Or \bar{V}'_c et \bar{W} sont les vitesses absolues aux instants t et $t + dt$ du même élément de S , élément qui est en P_1 à l'instant t ; le vecteur $\frac{\bar{V}'_c - \bar{W}}{dt}$ diffère donc infiniment peu de l'accélération absolue \bar{J}_c de l'élément de S qui est en P_1 à l'instant t ; autrement dit, on a :

$$\frac{\bar{V}'_c - \bar{V}_c}{dt} = \bar{J}_c.$$

Considérons enfin le vecteur $\bar{W} - \bar{W}_c$. D'après le théo-
rème fondamental sur les déplace- $\frac{dt}{dt}$
ments infinitésimaux d'un solide, on a:

$$\bar{W} = \bar{V}_p + (P\omega, P),$$

d'où :

$$\frac{\bar{W} - \bar{V}_p}{dt} = \frac{(P\omega, P)}{dt}$$

Mais comme $PP_1 = V_p \times dt$, on peut écrire:
 $(P\omega, P) = (P\omega, V_p) dt$,
d'où : $\frac{(P\omega, P)}{dt} = (P\omega, V_p)$.

L'égalité géométrique (2) donne donc :

$$(3) \quad \bar{J}_a = 2(P\omega, V_p) + \bar{J}_c$$

511. — Plaçons-nous maintenant dans le cas général
où le mouvement de P par rapport à S est quelconque.
Le mobile P ayant à l'instant t par rapport à S une posi-
tion et une vitesse \bar{V}_p quelconques, imaginons un second
mobile Q qui, à l'instant t, a même position et même
vitesse relative que le premier; si \bar{J}_p et \bar{J}'_p sont les accéléra-
tions relatives de P et Q à l'instant t, on sait [N° VI] que
la différence géométrique $\bar{J}'_p - \bar{J}_p$ est indépendante du choix
des axes; autrement dit :

$$(4) \quad \bar{J}_a - \bar{J}'_a = \bar{J}_p - \bar{J}'_p.$$

Supposons en particulier que le mobile Q décrive dans
S une droite avec une vitesse constante; on a :

$$\bar{J}'_p = 0, \quad \bar{J}'_a = 2(P\omega, V_p) + \bar{J}_c.$$

D'où, d'après (4) :

$$(5) \quad \bar{J}_a = \bar{J}_p + \bar{J}_c + 2(P\omega, V_p).$$

L'égalité (5) s'énonce ainsi :

Théorème. — L'accélération absolue d'un mobile P
à un instant t est la somme géométrique :

- 1° de son accélération relative ;
- 2° de l'accélération absolue du point coïncidant,
qu'on appelle souvent accélération d'entraînement ;

3° du double du vecteur (PW, V_p) , PW étant la rotation instantanée des axes mobiles, et V_p l'extrémité du vecteur PV_p qui représente la vitesse relative de P .

Ce vecteur 3° est souvent appelé accélération complémentaire.

L'accélération complémentaire est perpendiculaire au plan WPV_p , donc toujours perpendiculaire à V_p ; elle est orientée positivement par rapport à PW ; sa valeur absolue est égale à : $2\omega V_p \sin \varphi$, si φ est l'angle des deux vecteurs PW et V_p . Pour qu'elle soit nulle à un instant t , il faut et il suffit qu'à cet instant la rotation instantanée ω des axes mobiles, ou la vitesse relative V_p du mobile P soit nulle, ou enfin que ω et V_p soient parallèles. Pour que l'accélération complémentaire soit nulle quel que soit t , il faut et il suffit ou que les axes mobiles soient animés d'un simple mouvement de translation; ou que le mobile P soit en équilibre par rapport aux axes mobiles, ou enfin que ω et V_p soient constamment parallèles.

Quand les axes mobiles sont animés d'un simple mouvement de translation, on a :

$$\bar{y}_a = \bar{y}_r + \bar{y}_c,$$

et comme tous les points de S ont même accélération absolue à un instant t , on peut écrire :

$$\bar{y}_a = \bar{y}_r + \bar{\Gamma},$$

$\bar{\Gamma}$ désignant l'accélération absolue de l'origine O des axes mobiles. C'est une formule que nous avons maintes fois employée.

512. - Application du théorème de Coriolis à la Dynamique. Soit m la masse de l'élément matériel P ; la formule (5) donne aussitôt :

$$(6) \quad m\bar{y}_a = m\bar{y}_r + m\bar{y}_c + 2m(PW, V_p).$$

égalité qu'on peut écrire :

$$\bar{F}_a = \bar{F}_r + \bar{F}_c + \bar{F}_d$$

\bar{F}_a désignant la force relative aux axes fixes $Oxyz$ qui s'exerce sur P à l'instant t , [force qu'on appelle ici pour abrégé force absolue], \bar{F}_r la force relative aux axes mobiles, \bar{F}_c le vecteur $m\bar{y}_c$

souvent appelé force d'entraînement [force absolue qui s'exercerait sur l'élément P s'il était en équilibre par rapport à S], enfin \vec{F}_d le vecteur $2m(\vec{P}\omega, \vec{v}_r)$, souvent appelé force complémentaire.

L'égalité précédente peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\vec{F}_r &= \vec{F}_a - m\vec{\gamma}_c - 2m(\vec{P}\omega, \vec{v}_r) \\ &= \vec{F}_a + \vec{F}_c + \vec{F}_G.\end{aligned}$$

Le vecteur \vec{F}_c (égal et directement opposé à la force d'entraînement) est dit force centrifuge; le vecteur $\vec{F}_G = -2m(\vec{P}\omega, \vec{v}_r)$ est dit force centrifuge composée ou force de Coriolis.

513. - Application à l'équilibre relatif. - Si l'élément matériel considéré P est en équilibre par rapport aux axes mobiles, \vec{F}_c est nul, et on a :

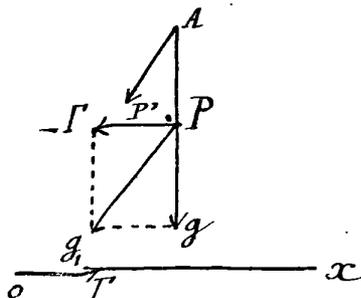
$$0 = \vec{F}_r = \vec{F}_a + \vec{F}_c,$$

autrement dit, la condition d'équilibre relatif est :

$$\vec{F}_a - m\vec{\gamma}_c = 0.$$

En particulier, supposons que l'élément soit pesant, voisin du sol et en équilibre relativement à des axes dont le mouvement par rapport à la terre est donné; - posons $\vec{q} = \vec{g} - \vec{\gamma}_c$; la condition d'équilibre est: $m\vec{q} + \vec{F}' = 0$, \vec{F}' désignant la force absolue qui s'exerce sur P en sus de la pesanteur.

Applications. - Considérons une voiture ou un wagon qui s'ébranle. Nous supposons que le véhicule se meut dans le sens ox , et que son accélération reste constante pendant la mise en marche, puis s'annule brusquement dès que la vitesse normale est atteinte. Quelle sera la position d'équilibre d'un fil à plomb AP suspendu dans le vide au toit du wagon?



Le wagon est animé d'un mouvement de translation, d'accélération Γ .

Le vecteur \vec{q} est ici $\vec{g} - \vec{\Gamma}$; tout se passera comme si la pesanteur était devenue le vecteur constant \vec{q} ; le fil AP

prendra la position AP' inclinée en arrière de la position verticale. La déviation du fil à plomb permet de mesurer immédiatement Γ .⁽¹⁾ Lorsque le wagon a atteint sa vitesse normale et que son accélération s'annule, le fil à plomb redevient vertical. Si plus tard, on arrête le wagon en faisant jouer les freins, de façon que son accélération retardatrice soit constante, le fil à plomb est dévié en avant, puis revient à la verticale à l'instant où le wagon s'arrête complètement et où son accélération s'annule.

Pour garder l'équilibre, un homme debout dans le wagon devra donc se jeter en avant pendant la mise en marche, puis se rejeter vers la verticale quand le wagon a atteint sa vitesse normale. Au début de la période d'arrêt, il doit au contraire se rejeter en arrière, puis revenir à la verticale à l'instant où le wagon s'arrête complètement.

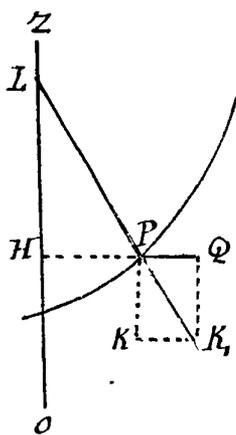
Régulateurs isochrones. - Soit C une courbe solide plane qui tourne avec une vitesse angulaire donnée ω autour d'un axe verticale fixe OZ de son plan, et P un point pesant, mobile sans frottement sur C . Quelle doit être la forme de C pour que chacun de ses points soit position d'équilibre relatif de P ?

Il faut que le vecteur $\vec{g}_1 = \vec{g} + \omega^2 \overline{HP}$ soit normal en chaque point à C . Soit $\overline{PK}_1 = \vec{g}_1$, $\overline{PQ} = \omega^2 \overline{HP}$; \vec{g}_1 est la diagonale PK_1 du rectangle dont PQ et PK sont deux côtés; prolongeons PK_1 jusqu'à son intersection L_1 avec OZ ; on a:

$$\frac{HL_1}{HP} = \frac{PK_1}{PQ}; \text{ d'où}$$

$$HL_1 = \frac{g}{\omega^2};$$

la sous-normale de C étant constante et égale à $\frac{g}{\omega^2}$, C est une parabole d'axe OZ et de paramètre $\frac{g}{\omega^2}$.



514. - Le théorème des forces vives dans le mouvement relatif. - Quand la vitesse relative \vec{v}_r de P n'est pas

⁽¹⁾ C'est là le principe de nombreuses dynamomètres.

nulle, la force centrifuge composée n'est pas nulle en général; mais comme elle est toujours perpendiculaire à \vec{V}_p , son travail (dans le mouvement relatif de P) est nul. Dans l'application du théorème des forces vives au mouvement relatif, on n'a donc à évaluer que le travail de \vec{F}_a et de la force centrifuge \vec{F}_c .

515. - Si les axes $Oxyz$ sont absolument fixes, la force \vec{F}_a représente la force absolue (au sens vrai du terme) qui s'exerce sur P , \vec{F}_c l'accélération absolue du point coïncidant, et ω la rotation instantanée des axes mobiles dans leur mouvement absolu.

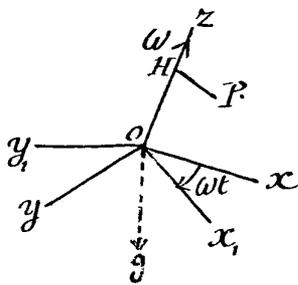
Si les axes $Oxyz$ sont liés invariablement à la terre et si l'élément P est voisin du sol, soit \vec{F}' la force absolue qui s'exerce sur P en outre de la pesanteur; les axes O, x, y, z , étant animés par rapport à la terre d'un mouvement connu, la force relative aux axes O, x, y, z , qui s'exerce sur P est

$$m\bar{g} + \vec{F}'_x$$

$$\text{avec } \bar{g}_i = \bar{g}_i - \bar{f}_c - 2(\vec{P}\omega, \vec{V}_r).$$

Exemple. - Un plan matériel Π tourne avec une vitesse angulaire constante ω autour d'une droite fixe OZ contenue dans le plan. Un élément pesant P , de masse m , glisse sans frottement sur ce plan Π . Mouvement de P .

Prenons comme plan ZOX le plan vertical contenant OZ , et soit x, OZ le plan Π .



Prenons comme plan ZOX le plan vertical contenant OZ , et soit x, OZ le plan Π . Étudions le mouvement de P par rapport aux axes Ox, y, z . L'angle $\widehat{xOx_1}$ est égal à ωt [si on choisit convenablement l'origine des temps], et si i désigne l'angle (compris entre 0 et π) de la verticale ascendante et de OZ , on a [le sens Ox ayant

été choisi descendant]:

$$g_x = g \sin i, \quad g_y = 0, \quad g_z = -g \cos i.$$

Soit X, Y, Z les projections sur Ox, Oy, Oz , de la force \vec{F}'_x (relative aux axes Ox, y, z) qui s'exerce sur P . On a:

$$\vec{F}_p = m\vec{g} + m\omega^2 \overline{HP} - 2m(\overline{O\omega}, \vec{v}_p) + \vec{R}$$

\vec{R} désignant la réaction du plan π sur le mobile, H la projection de P sur OZ , $\overline{O\omega}$ la rotation instantanée du plan π , et \vec{v}_p l'extrémité du vecteur $\overline{O\vec{v}_p}$ équipollent à la vitesse de P dans le plan π .

Or le vecteur $(\overline{O\omega}, \vec{v}_p)$ est perpendiculaire au plan π .
On a donc :

$$X_1 = mg \sin i \cos \omega t + m\omega^2 x_1, \quad Z = mg \cos i.$$

Le mouvement de P dans le plan π est défini par les équations :

$$m x_1'' = mg \sin i \cos \omega t + m\omega^2 x_1, \quad m z'' = -mg \cos i,$$

ou encore :

$$x'' - \omega^2 x = g \sin i \cos \omega t, \quad z'' = -g \cos i,$$

équations qui s'intègrent immédiatement.

Si on voulait calculer la réaction de π sur P , soit R la valeur de cette réaction comptée positivement dans le sens Oy ; on aurait :

$$0 = m y'' = R - mg \sin i \sin \omega t - 2m\omega x_1'.$$

La pesanteur et la gravitation universelle.

516. Les lois de l'attraction universelle. —

Les observations astronomiques confirmées par des expériences terrestres ont conduit au principe de la gravitation ou de l'attraction universelle :

Deux éléments matériels quelconques s'attirent proportionnellement à leurs masses m et m' et en raison inverse du carré de leur distance r^2 .

En valeur absolue, cette attraction, dite encore attraction newtonnienne, est représentée par la formule :

$$F = f \frac{m m'}{r^2};$$

le coefficient f [dont les dimensions sont $L^3 M^{-1} T^{-2}$] est appelé la constante de la gravitation universelle.

517. - La gravitation universelle et les lois de Képler.

Considérons plusieurs sphères homogènes (ou formées de couches concentriques homogènes) infiniment éloignées de tous les autres corps et qui s'attirent suivant les lois de Newton; on sait que les mouvements absolus de leurs centres sont les mêmes que si la masse de chaque sphère était concentrée en son centre.

Supposons que la masse d'une de ces sphères, la sphère S par exemple, soit colossale par rapport aux masses m_1, \dots, m_n des autres sphères P_1, \dots, P_n et que la sphère P_1 par exemple ne soit pas très voisine d'une des sphères P_2, \dots, P_n relativement à la distance $P_1 S = r$. Le mouvement du centre C_1 de P_1 sera sensiblement le même que celui d'un point de masse m_1 qui serait attiré par S seul.

Soit donc $Sxyz$ des axes de directions absolument fixes ayant comme origine le centre de S ; par rapport à ces axes, tout se passera [N° 44] comme si C_1 était un point de masse m_1 soumis à une attraction issue de S et égale à $f \frac{m_1(M+m_1)}{r^2}$, (M masse de S), c'est-à-dire égale à $f \frac{m_1 M}{r^2}$, [en négligeant $\frac{m_1}{M}$ devant l'unité]. Le point C_1 décrira donc une conique dont S sera un foyer intérieur, en vérifiant la loi des aires par rapport à ce foyer; de plus, si on pose $fM = \mu$, on aura, pour toutes les sphères telles que P_1 :

$$(1) \quad \mu = \frac{C^2}{\rho}$$

C désignant la constante des aires et ρ le paramètre de la conique. Si la conique est une ellipse, l'égalité précédente peut s'écrire, comme on sait:

$$(2) \quad fM = \mu = \frac{4\pi^2 \alpha^3}{T^2},$$

α désignant le demi-grand axe de l'ellipse, et T le temps employé par C_1 à parcourir cette ellipse.

Ce sont précisément les lois de Képler qui règlent le mouvement des planètes sans satellites par rapport à des axes ayant comme origine le centre du soleil des directions fixes par rapport aux étoiles.

Enfin, le moment résultant par rapport à C_1 des attractions qui s'exercent sur P , est nul; le moment cinétique de P , dans son mouvement autour de son centre de gravité C_1 est donc invariable. Si les éléments de P sont en équilibre relatif, la ^{sphère P} (dans son mouvement autour de C_1) tourne avec une vitesse angulaire constante autour d'une droite fixe dans le corps et dans l'espace.

518. — Supposons maintenant que parmi les sphères P_1, \dots, P_n , il en existe certaines, telles que P , qui soient très voisines de quelques autres (relativement à la distance PS), mais que ces dernières (p_1, \dots, p_k par exemple) aient des masses très petites devant celle de P . Soit G le centre de gravité du système (P, p_1, \dots, p_k) ou Σ .

À un instant t , soit $m\vec{A}$ l'attraction qu'exercent sur un élément m de Σ tous les corps extérieurs à Σ ; $m\vec{A}$ se réduit sensiblement à l'attraction exercée par S , et à cause de la petitesse des dimensions de Σ devant PS , le vecteur \vec{A} à un instant t est sensiblement le même quelle que soit la position de l'élément de masse m dans Σ . Il suit de là que le mouvement de G par rapport aux axes $Sxyz$ répond sensiblement aux mêmes lois que le mouvement de C_1 dans le N° ci-dessus.

D'autre part, le mouvement de Σ par rapport aux axes Gx, y, z , de directions absolument fixes sera le même [p. 41] que si ces axes étaient des axes absolus, le système Σ étant infiniment éloigné de tous les autres corps. On peut donc répéter sur le mouvement de p_1, \dots, p_k par rapport à Gx, y, z , ce que nous venons de dire (N° 517) sur le mouvement absolu de P . Le point G se confond d'ailleurs sensiblement avec le centre C de P . D'où cette conclusion:

Le centre C de P se meut par rapport aux axes $Sxyz$ suivant les lois de Kepler, en même temps que par rapport aux axes Cx, y, z (parallèles aux axes $Sxyz$) les centres des sphères p_1, \dots, p_k décrivent suivant la loi des aires des coniques ayant C comme foyer intérieur; quand ces coniques sont des ellipses, on a, si m' est la masse de P :

$$(3) \quad f m' = 4 \frac{\pi^2 \alpha'^3}{T'^2},$$

α' désignant le demi-grand axe de l'ellipse parcourue autour de C par le centre d'une des sphères p_1, \dots, p_k et T' le temps employé

par ce point à parcourir une fois cette ellipse.

Or ces lois sont précisément les lois qui, d'après Képler, règlent les mouvements d'une planète à satellites et de ses satellites.

519. - En définitive, en vertu du principe de la gravitation, le mouvement des planètes et de leurs satellites par rapport à des axes ayant comme origine le centre du soleil et des directions fixes relativement aux étoiles, doit répondre aux lois de Képler si on admet : 1° que les directions allant du soleil aux étoiles ont des directions absolument fixes; 2° que la masse des planètes est négligeable devant celle du soleil; 3° que la masse des satellites d'une planète est négligeable devant la masse de celle-ci.

Masse d'une planète à satellites.

Si une planète, soit P, a au moins un satellite, les considérations précédentes permettent de calculer le rapport de sa masse, soit m , à la masse M du soleil; on a, en effet :

$$fM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} ; \quad fm = \frac{4\pi^2 a'^3}{T'^2} ;$$

d'où :

$$\frac{m}{M} = \frac{a'^3}{T'^2} : \frac{a^3}{T^2} .$$

Mouvement des comètes.

Ce mouvement répond lui aussi aux lois de Newton. La trajectoire (par rapport aux axes $Sxyz$) d'une comète, trajectoire qu'on peut étudier au voisinage du soleil, est sensiblement une parabole (ellipse très allongée ou hyperbole) dont S est un foyer, et pour chaque comète la valeur $\frac{C^2}{\mu}$ est la même que pour les planètes.

Eoutefois, les lois de Newton ne rendent pas compte de la forme de la queue des comètes (rejetée en arrière quand la comète s'approche du soleil, et projetée en avant quand la comète s'éloigne, comme si la poussière cosmique qui compose la queue était repoussée par le soleil).

520. - Les équations de la Mécanique Céleste. - Les lois de Képler constituent qu'une première approximation du mouvement des planètes, l'approximation

consistant essentiellement à regarder la masse des planètes comme négligeable devant celle du soleil, et la masse des satellites d'une planète comme négligeable devant celle

de la planète. Le centre d'inertie (centre de gravité) du système solaire coïncide (à ce degré d'approximation) avec le centre S du soleil et les axes Sxyz ayant des directions fixes par rapport aux étoiles sont sensiblement des axes absolus.

Mais en réalité les attractions qu'exercent sur une planète les autres planètes ou ses propres satellites ne sont pas nulles, et perturbent le mouvement képlérien : chaque planète festonne en quelque sorte de part et d'autre de l'ellipse képlérienne.

Il est facile d'écrire les équations exactes du mouvement absolu des corps du système solaire, en négligeant les attractions des étoiles et en admettant toujours (vu la forme de ces corps, et leurs grandes distances mutuelles comparées à leurs dimensions) que le mouvement de leurs centres d'inertie est le même que si la masse de chacun de ces corps était concentrée en ce point.

Soit (x, y, z) les coordonnées du centre C de S, x_j, y_j, z_j celles du centre C_j d'un autre corps P_j du système (planète ou satellite); soit M la masse de S, m_j celle de P_j , r_j la distance SC_j , r_{jk} la distance $C_j C_k$. Les équations du mouvement absolu de S sont (n étant le nombre total des corps P_j):

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} Mx'' = \frac{Mm_1 f(x-x_1)}{r_1^3} + \frac{Mm_2 f(x-x_2)}{r_2^3} + \dots + \frac{Mm_n f(x-x_n)}{r_n^3} \\ \text{et deux équations analogues.} \end{array} \right.$$

Les équations du mouvement absolu de P_j sont :

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} m_j x_j'' = \frac{m_j M f(x-x_j)}{r_j^3} + \frac{m_j m_{j'} f(x-x_{j'})}{r_{j'}^3} \dots + \frac{m_j m_n f(x-x_n)}{r_{jn}^3}, \\ \text{et deux équations analogues.} \end{array} \right.$$

Il importe de remarquer qu'après division des équations (1), (2) respectivement par M et m_j , ces équations peuvent s'écrire, en posant : $\mu = fM, \dots, \mu_j = fm_j, \dots$

$$(1)^{\text{bis}} \begin{cases} x'' = \frac{\mu_1(x_1-x)}{r_1^3} + \dots + \frac{\mu_n(x_n-x)}{r_n^3}, \\ \text{et deux équations analogues,} \end{cases}$$

et

$$(2)^{\text{bis}} \begin{cases} x_j'' = \frac{\mu(x-x_j)}{r_j^3} + \frac{\mu_1(x_1-x_j)}{r_1^3} + \dots + \frac{\mu_n(x_n-x_j)}{r_n^3}, \\ \text{et deux équations analogues.} \end{cases}$$

Soit $C\xi\eta\zeta$ des axes ayant constamment le centre C du soleil comme origine et des directions absolument fixes; les équations du mouvement (relatif) des corps P_j rapporté à ces axes s'obtiendront en retranchant de chaque équation $(2)^{\text{bis}}$ l'équation $(1)^{\text{bis}}$ correspondante. Comme on a :

$\xi_j = x_j - x$, $\eta_j = y_j - y$, $\zeta_j = z_j - z$, les équations du nouveau mouvement de P_j seront :

$$(3) \begin{cases} \zeta_j'' = \frac{-\mu \zeta_j}{r_j^3} + \frac{\mu_1(\xi_1 - \xi_j)}{r_1^3} + \dots + \frac{\mu_n(\xi_n - \xi_j)}{r_n^3} \\ \text{et deux équations analogues.} \end{cases}$$

Si on connaît les constantes μ, μ_1, \dots, μ_n , ces $3n$ équations permettent de calculer à un instant quelconque les positions des points C_1, \dots, C_n par rapport aux axes $C\xi\eta\zeta$, connaissant leurs positions et leurs vitesses initiales.

Si on laisse μ, μ_1, \dots, μ_n indéterminées⁽¹⁾, en comparant les résultats du calcul avec un nombre suffisant d'observations on peut les déterminer avec une grande exactitude. En poursuivant ensuite la comparaison du calcul et de l'observation, on vérifiera si les lois de Newton rendent compte exactement des mouvements de notre système.

521. — Les équations (13) ne peuvent être intégrées exactement, même dans le cas où trois corps seulement s'attirent (problème des trois corps), mais des approximations successives permettent de calculer les éphémérides

(1) D'après les lois de Képler appliquées aux planètes et aux mouvements des satellites autour de leur planète, on connaît la valeur des constantes μ pour le soleil et les planètes à satellite (la terre par exemple). Mais ce n'est là qu'une première approximation, et qui ne s'applique point aux planètes dénuées de satellites.

pour un long intervalle de temps : les tables de Leverrier les donnent pour trois siècles (et aussi pour trois siècles en arrière). Si on compare les positions calculées avec les positions observées, l'accord est une confirmation éclatante des lois de Newton : l'astre qui s'écarte le plus de la position prévue est la lune qui passe tantôt en avance, tantôt en retard par la position calculée sans que ce retard ou cette avance dépasse une seconde de temps en un siècle.

Les observations des étoiles doubles permettent d'étendre aux étoiles le principe de gravitation, qui apparaît ainsi comme une loi universelle bien établie.

Connaissant les constantes μ , on connaît à chaque instant la position du centre d'inertie G du système solaire, et les axes $Gxyz$ de directions fixes par rapport aux étoiles sont des axes absolus.

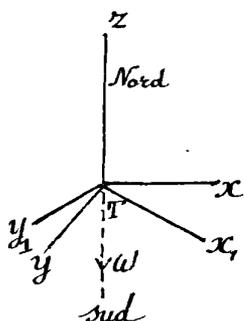
La comparaison entre le calcul et les observations astronomiques, si loin qu'on la pousse, ne saurait toutefois nous faire connaître que les quantités μ, μ_1, \dots, μ_n , c'est-à-dire les produits fM, fm_1, \dots, fm_n , mais non les masses elles-mêmes du soleil et des corps du système solaire. Pour connaître ces masses, il faut mesurer f par des expériences directes, telles que celle de Cavendish (attraction de deux sphères de plomb), reprise récemment avec tous les perfectionnements de la métrologie moderne. En unités C. G. S., la valeur de f est

$$f = 0,0767 = \frac{1}{(3862)^2}.$$

La pesanteur et la gravitation universelle.

522. - L'attraction universelle et les mouvements de masse terrestres par rapport à la terre.

Soit P un élément de masse m lancé dans un grand espace vide; la force absolue $\vec{\Gamma}_a$ qui s'exerce sur lui est l'attraction newtonienne de tous les corps de l'univers. Si l'élément est voisin de la terre, soit $m\vec{A}$ l'attraction newtonienne exercée



sur lui par la terre, $m\bar{a}$ l'attraction exercée sur lui par les corps du système solaire autres que la terre; on a (en négligeant les attractions des étoiles):

$$\bar{F}_a = m\bar{A} + m\bar{a};$$

les vecteurs \bar{A} et \bar{a} ne dépendent que de la position de P et de sa masse ni de sa nature. Considérons maintenant des axes Txyz ayant comme origine le centre de gravité T de la terre, et des directions fixes par rapport aux étoiles. Quelle est la force relative à ces axes, soit \bar{F} , qui s'exerce sur P à l'instant considéré? Si $\bar{\Gamma}$ est l'accélération absolue du point T, on a:

$$\bar{F} = \bar{F}_a - m\bar{\Gamma} = m\bar{A} + m(\bar{a} - \bar{\Gamma}).$$

Mais vu la grande distance du soleil et des corps du système solaire par rapport au rayon terrestre, on peut admettre qu'à un instant t le vecteur \bar{a} a même direction, grandeur et sens quelle que soit la position de P au voisinage ou à l'intérieur de la terre. Moyennant cette approximation, l'accélération absolue $\bar{\Gamma}$ de T se confond avec \bar{a} (théorème du centre de gravité), et on a:

$$\bar{F} = m\bar{A};$$

autrement dit, la force relative aux axes Txyz qui s'exerce sur P se confond sensiblement avec l'attraction absolue de la terre; elle est la même que si, les axes Txyz étant absolument fixes, la terre était infiniment éloignée des autres corps matériels.

Admettons que la pesanteur soit un cas particulier de la gravitation universelle, et voyons si les conséquences de cette hypothèse s'accordent avec l'expérience.

Dans ce qui suit, nous regardons la terre comme un corps de révolution formé de couches homogènes de révolution; sa rotation absolue est uniforme et a lieu sensiblement autour de son axe de révolution (ligne des pôles terrestres), donc la direction reste sensiblement fixe dans l'espace. Nous pouvons toujours supposer que Tz est cette direction menée vers le pôle-nord, et choisir comme axes liés invariablement à l'écorce terrestre le trièdre trirectangle Tx, y, z; par rapport au trièdre Txyz, le trièdre Tx, y, z, tourne uniformément dans le sens négatif autour

et nous lui donnerons le nom de pesanteur vulgaire (au lieu P de la terre); le vecteur $m\bar{g}$ sera le poids vulgaire de l'élément P ; le sens de \bar{g} sera, par définition, le sens de la verticale descendante.

524. - Équilibre d'un élément matériel par rapport à la terre.

Supposons que P soit soumis à d'autres forces absolues que la pesanteur, et soit \bar{F}' la résultante de ces forces. Pour que P , abandonné sans vitesse, reste en équilibre par rapport à l'écorce terrestre, et faut et il suffit qu'on ait:

$$m\bar{g} + \bar{F}' = 0.$$

En particulier, si P est un pendule en équilibre dans le vide, la tension T exercée par le fil OP , sur l'élément P est égale et directement opposée à $m\bar{g}$; le fil OP (fil à plomb) donne le sens de la verticale descendante.

525. - Surfaces de niveau de la pesanteur vulgaire.

Cette force $m\bar{g} = m(\bar{A} + \omega^2 \overline{HP})$, relative aux axes Tx, y, z , dérive d'une fonction de force $U(x, y, z)$. En effet, l'attraction $m\bar{A}$ de la terre sur P admet une fonction de forces $mW(x, y, z)$ [-potentiel newtonien], et la force $m\omega^2 \overline{HP}$ admet la fonction de force $\frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2) = \frac{m}{2}\omega^2 r^2$. En vertu des hypothèses faites sur la disposition des masses terrestres, W est une simple fonction de r et de z . Les surfaces de niveau de la pesanteur vulgaire $m\bar{g}$ sont donc des surfaces de révolution autour de Tz définies par la relation:

$$W(r, z) + \frac{\omega^2}{2} r^2 = Cte.$$

Nous verrons en hydrostatique que la surface libre des mers, si elle est en équilibre par rapport aux axes Tx, y, z , doit être en chaque point normale au fil à plomb, c'est-à-dire doit se confondre avec une surface de niveau de la pesanteur. Soit $W(r, z) + \omega^2 r^2 = C$ ou S cette surface. C'est cette surface S qu'on appelle surface théorique de la Terre ou niveau de la mer. La prolongation de cette surface sous les continents constitue un des problèmes fondamentaux de la géodésie.

526. - Variations de \bar{g} le long d'un méridien. -

Il suffit d'étudier les variations de g le long d'un méridien de la surface terrestre. On a en chaque point [fig. 1 p. 585]

$$\bar{g} = \bar{A} + \omega^2 \overline{HP} = \overline{PA} + \overline{PQ}, \text{ ou } \bar{A} = \bar{g} + \omega^2 \overline{PH}.$$

L'angle de g et de HP est dit la latitude du lieu P .

Le terme $\omega^2 \overline{HP}$ est nul aux pôles et égal en valeur absolue à $\omega^2 R$ à l'équateur [R rayon de l'équateur terrestre]; au pôle et à l'équateur, les directions de \bar{g} et de \bar{A} se confondent. Les oscillations du pendule composé [voir le N° 528], montrent qu'en valeur absolue \bar{g} est égal à 983,1 au voisinage des pôles, et à 978,1 à l'équateur. On a donc à l'équateur :

$$\begin{aligned} A &= 978,1 \left[1 + \frac{\omega^2 R}{978,1} \right] = 978,1 \left[1 + \frac{1}{289} \right], \text{ en C.G.S.} \\ &= 981,4, \end{aligned}$$

d'où :

$$g = A \left[1 - \frac{1}{289} \right] = A \left[1 - \frac{1}{17^2} \right] \text{ sensiblement.}$$

Cette égalité nous montre que si la terre tournait 17 fois plus vite, \bar{g} serait nul à l'équateur; si elle tournait 20 fois plus vite, \bar{g} serait dirigé vers l'extérieur de la terre, et un élément abandonné sans vitesse (pour un observateur terrestre s'élèverait d'un mouvement uniformément accéléré au lieu de tomber.

Si la terre était sensiblement sphérique, la valeur de \bar{A} devrait être la même au pôle et à l'équateur. En fait, A croît de 981,4 à 983,1 de l'équateur au pôle, c. à d. de $\frac{1}{580}$ environ. Ses mesures géodésiques montrent qu'on peut assimiler la surface de la terre à un ellipsoïde aplati dont l'aplatissement $\left(1 - \frac{b}{a} \right)$ est très faible et compris entre les deux nombres $\frac{1}{292,2 \pm 1}$.

527. - La pesanteur et l'attraction de la terre sur la lune.

On ne commet qu'une faible erreur en admettant que la terre est formée de couches homogènes sphériques de centre T et que son attraction newtonienne \bar{A} sur une masse 1 placée à sa surface est égale à $9^m,8$. Si R

désigne le rayon de la terre, M sa masse et f la constante de la gravitation universelle, on a :

$$A = f \frac{M}{R^2} .$$

Mais, d'autre part, nous savons [N° 519] que si a est le demi-grand axe de l'ellipse que la lune décrit autour de la terre et T le temps qu'elle emploie à parcourir cette ellipse, on a⁽¹⁾:

$$\frac{4\pi^2 a^3}{T^2} = fM .$$

Or l'orbite lunaire est sensiblement un cercle de rayon égal à $60R$; $T = 27^d 7^h 43^m = 39.343 \times 60$. On doit donc avoir approximativement (en mètres):

$$\begin{aligned} A &= \frac{4\pi^2 a^3}{R^2 T^2} = \frac{4\pi^2 \times 60^3}{T^2} \times 605 \\ &= \frac{\pi \times 48 \times 10^5}{(39.343)^2} = 9,7 . \end{aligned}$$

Cette dernière valeur est très voisine de la valeur vraie $9^m,8$. La vérification est très satisfaisante; la légère divergence tient aux approximations dont nous nous sommes contentés et disparaîtrait complètement si on faisait le calcul plus rigoureusement.

C'est de cette façon que Newton a vérifié que la pesanteur est un cas particulier de la gravitation universelle.

Remarquons que connaissant A , on a fM par la formule $fM = AR^2$, à une erreur relative près inférieure à $\frac{1}{500}$, puisque A est compris entre 983,1 et 981,4. Cette détermination de fM peut d'ailleurs être rendue beaucoup plus précise en tenant compte de la forme ellipsoïdale de la terre. Comme on connaît f , on connaît M et la densité moyenne de la terre. Cette densité est sensiblement égale à 5,53. Ses masses centrales de la terre sont donc beaucoup plus denses que les masses superficielles.

(1) Ceci n'est vrai qu'en négligeant la masse de la lune ($\frac{1}{80}$ de M) devant la masse M de la terre; d'où une erreur appréciable.

528. - Mouvement d'un corps pesant en tenant compte de la force centrifuge composée.

Si \vec{V}_p n'est pas nul à l'instant t , l'accélération par rapport au sol d'un élément matériel P dans le vide est [-p. 585]:

$$\bar{f}_p = \bar{g} - 2(T\omega, V_p).$$

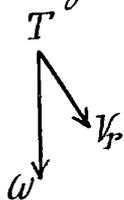
Nous donnerons à \bar{f}_p le nom d'accélération vraie de la pesanteur, et à la force $m\bar{f}_p$ le nom de pesanteur vraie.

Dans la plupart des applications, les positions des éléments matériels considérés restent voisins d'un point déterminé O de la terre, en sorte que leurs distances à O sont tout à fait négligeables devant le rayon terrestre. On peut alors admettre que \bar{g} , pour les divers éléments considérés et pendant leur mouvement, est un vecteur invariable en grandeur direction et sens (relativement à l'écorce terrestre). Il est loisible de prendre les axes liés invariablement à la terre tels que OZ soit la verticale descendante.

Le théorème des forces vives donne pour un élément soumis à la seule pesanteur:

$$V^2 = + 2gz + Cte$$

comme si la pesanteur vraie se confondait avec la pesanteur vulgaire.



Le vecteur $-2(T\omega, V_p)$ ne dépend que de \vec{V}_p et point de la position⁽¹⁾ de P . Sa valeur absolue (pour V_p donné en grandeur) est maxima quand \vec{V}_p est perpendiculaire à la ligne des pôles: elle est alors égale à

$$2\omega V_p = \frac{4\pi}{24 \times 60^2} V_p = \frac{145}{10^6} V_p.$$

Pour une vitesse V_p égale à 1^m par seconde, cette quantité est égale à $\frac{1}{67.000}$ de g . On peut écrire en C. G. S.

$$\text{Valeur absolue de } (T\omega, V_p) = \frac{g}{67.000} \times \frac{V_p}{100} \times \sin \varphi,$$

(φ angle de $T\omega$ et de V_p).

(1) Ce vecteur peut être construit en prenant comme origine T de $\vec{\omega}$ et de \vec{V}_p un point quelconque.

L'erreur commise en négligeant la force centrifuge composée est donc très faible à moins que V_r ne soit très grand et on conçoit que, — dans la plupart des expériences tout se passe sensiblement comme si \bar{V} était constamment confondu avec \bar{g} [lois vulgaires de la chute des corps].

Cependant si V_r atteint par exemple 800^m à la seconde (comme il arrive pour les projectiles des canons modernes), la force centrifuge composée peut être égale à $\frac{1}{84^e}$ du poids de l'élément matériel, soit plus de trois fois la valeur (à l'équateur) de la force centrifuge $\omega^2 HP$. Il est donc indispensable alors de tenir compte de la force centrifuge composée.

Dans d'autres expériences (gyroscope de Foucault, pendule de Foucault), la force centrifuge composée reste très faible mais ses effets s'accumulent, en sorte qu'à la longue l'influence de cette force devient manifeste.

529. Gyroscope de Foucault. — Étudions d'abord le gyroscope de Foucault : un solide homogène de révolution S , suspendu par son centre de gravité G est lancé dans le vide. Quel sera le mouvement de S ?

Soit Gx, y, z , des axes liés invariablement au sol, et $Gxyz$ des axes de directions fixes par rapport aux étoiles. Si nous admettons les lois vulgaires de la pesanteur, le mouvement de S est celui qui a été décrit aux N^{os} 223-226. En particulier, quand la rotation Ω , de S a lieu initialement autour de l'axe $G\zeta$ de S , $G\zeta$ doit rester immobile par rapport au sol.

Regardons au contraire la pesanteur comme un cas particulier de la gravitation universelle, et rapportons les mouvements aux axes $Gxyz$. Les attractions newtoniennes qu'exercent sur les éléments P de S la terre et les autres astres du système solaire peuvent être regardées (à chaque instant t) comme étant sensiblement de la forme mf , (m masse de P), f étant le même à l'instant t pour tous les éléments de S . D'après un théorème maintes fois invoqué (p. 41), le mouvement de S est le même que si, les axes $Gxyz$ étant absolument fixes, les forces extérieures étaient nulles. Le mouvement (par rapport aux axes $Gxyz$) sera donc le mouvement décrit N^o 223. En particulier,

si la rotation Ω de S a lieu initialement autour de GZ , l'axe de révolution GZ est fixe par rapport aux axes $Gxyz$; s'il vise une étoile déterminée au début de l'expérience, il visera constamment cette même étoile.

Quand on réalise l'expérience, il est facile de donner à S une grande vitesse initiale de rotation sur lui-même par rapport à la terre. Mais on a :

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega} + \bar{\Omega}_1, \quad (\bar{\omega} \text{ rotation absolue de la terre})$$

et si $\bar{\Omega}_1$ est très grand, $\bar{\omega}$ est négligeable devant $\bar{\Omega}_1$, et la rotation initiale de S par rapport à $Gxyz$ a lieu sensiblement autour de GZ . L'expérience permet donc de décider entre les deux hypothèses : les lois vulgaires de la pesanteur sont vraies ; ou au contraire la pesanteur est un cas particulier de la gravitation universelle. Or elle montre que GZ , au lieu de rester immobile par rapport au sol, décrit uniformément avec la vitesse angulaire $\bar{\omega}$ un cône de révolution autour de la parallèle Gz à la ligne des pôles ; en un mot, GZ accompagne la sphère céleste. La pesanteur est donc bien un cas particulier de la gravitation universelle, et les lois vulgaires de la chute des corps ne sont vraies qu'à la force centrifuge composée près.

530. - Pendule de Foucault. - Supposons que P soit non plus libre, mais relié par un fil inextensible, parfaitement flexible, de masse négligeable, à un point O fixé à l'écorce terrestre. Revenons aux axes $Txyz$ du N° 522. Par rapport à ces axes, tout se passe comme si les axes $Txyz$ étant absolument fixes, tous les astres du système solaires autres que la terre étaient infiniment éloignés de T . En premier lieu, choisissons O sur la ligne des pôles Oz et abandonnons P dans une position P située elle-même sur Oz avec une vitesse initiale quelconque PV (normale à Oz) : le plan ZPV est un plan de symétrie de phénomène, et P va se mouvoir dans ce plan (relativement aux axes $Txyz$). Pour un observateur terrestre [c. à d. par rapport aux axes Tx, y, z], le plan d'oscillation du pendule semblera donc tourner autour de Tz , en 24 heures, en sens inverse du mouvement de la terre.

Admettons que la terre possède un plan de symétrie perpendiculaire à Tz , (plan de l'équateur), plan qui coïncide nécessairement avec le plan xTy . Si le point O est choisi dans ce

plan ainsi que la position et la vitesse initiale V de P , le plan xTy est un plan de symétrie du phénomène (2); le point P va se mouvoir dans ce plan (par rapport aux axes $Txyz$). Pour un observateur terrestre, le pendule oscillera dans le plan de l'équateur, donc dans un plan fixe. — On conçoit que pour des positions intermédiaires de 0 à la surface de la terre, le phénomène qui se passera sera intermédiaire entre ces deux phénomènes extrêmes. Ce sont de telles considérations qui ont conduit Foucault à sa célèbre expérience.

Nous étudierons l'an prochain avec précision le mouvement du pendule de Foucault. Nous étudierons également la chute libre d'un corps pesant, en tenant compte de la force centrifuge composée: nous verrons que l'influence de cette force se traduit par une déviation vers l'est de la chute du corps.

531. — Influence du soleil et de la lune sur la pesanteur vraie.

Soit \bar{a} l'attraction newtonienne exercée par les astres du système solaire autres que la terre sur un élément de masse 1 située dans une position P voisine du sol, et soit $\bar{\Gamma}$ l'accélération absolue du centre de gravité T de la terre. La formule du N° 522 :

$$\bar{F}_p = m\bar{y}_p = m\bar{A} + m\omega^2\bar{H}\bar{P} - 2m(T\bar{\omega}, \bar{V}_p)$$

n'est exacte qu'à condition de confondre \bar{a} et $\bar{\Gamma}$. La formule exacte serait (1)

$$\bar{F}_p = m\bar{y}_p = m\bar{A} + m(\bar{a} - \bar{\Gamma}) + m\omega^2\bar{H}\bar{P} - 2m(T\bar{\omega}, \bar{V}_p).$$

Si \bar{V}_p était nul on aurait :

$$(2) \quad \bar{F}_p = m\bar{A} + m\omega^2\bar{H}\bar{P} + m(\bar{a} - \bar{\Gamma}) = m\bar{g} + m(\bar{a} - \bar{\Gamma}), \quad (\text{pour } \bar{V}_p = 0)$$

Si on regarde la terre comme sensiblement sphérique et formée de couches concentriques homogènes, $\bar{\Gamma}$ se confond avec l'attraction absolue \bar{a}_0 exercée sur l'unité de masse placée en T par tous les corps du système solaire autres que la terre, et on a

$$\bar{F}_p = m\bar{A} + m\omega^2\bar{H}\bar{P} + m(\bar{a} - \bar{a}_0) = m\bar{g} + m(\bar{a} - \bar{a}_0), \quad \text{pour } \bar{V}_p \text{ nul ou petit.}$$

Dans la différence $\bar{a} - \bar{a}_0$, le soleil et la lune donnent seuls des termes appréciables, le soleil à cause de sa masse, et la lune à cause de sa proximité. Mettons ces deux termes en évidence, en appelant \bar{a}_s et α_s^0 l'attraction du soleil sur l'unité de masse placée en P et en T , et α_L, α_L^0 les attractions analogues de la lune.

On a :

$$\bar{F}_p = m\bar{y}_p = m\bar{g} + m(\bar{a}_s - \alpha_s^0) + m(\alpha_L - \alpha_L^0) = m\bar{g} + m\bar{\varepsilon}(t) + m\bar{\eta}(t),$$

les deux vecteurs $\bar{\varepsilon}(t), \bar{\eta}(t)$ étant des vecteurs très petits, qui en un lieu de la terre sont bien déterminés à chaque instant t , et sont sensiblement périodiques, le premier ayant comme période un jour solaire, le second un jour lunaire. — Il suit de l'égalité (3) que le fil à plomb ne peut rester rigoureusement en équilibre (par rapport au sol) non plus qu'une nappe liquide. Si l'influence de ces termes correctifs $\bar{\varepsilon}(t), \bar{\eta}(t)$ n'a point encore été mise en évidence par des expériences de laboratoire, elle se traduit par le phénomène des marées.

Fin.

Planche V.

Légendes.

Turbine Fontaine.

- A. Distributeur (fixe).
- B. Récepteur (mobile).
- C. Arbre creux solidaire du récepteur B.
- D. Arbre fixe terminé par une crapaudine dans laquelle repose le pivot-P de l'arbre C.
- E. Tiges servant à régler l'ouverture des vanes du distributeur A au moyen des engrenages g.

Turbine Fourneyron.

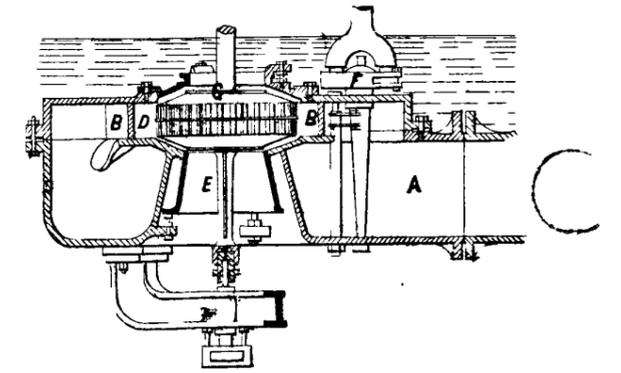
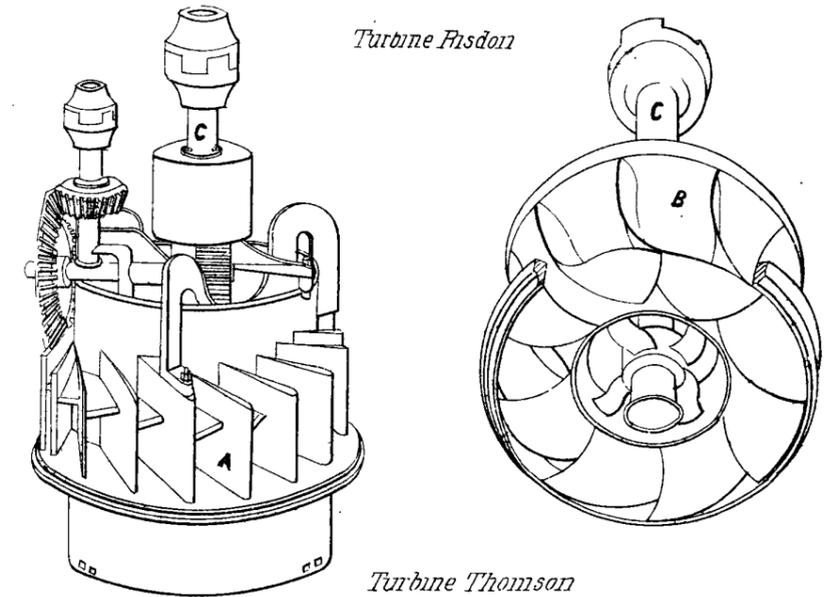
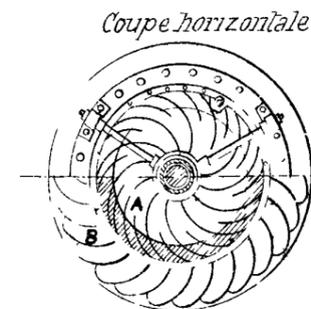
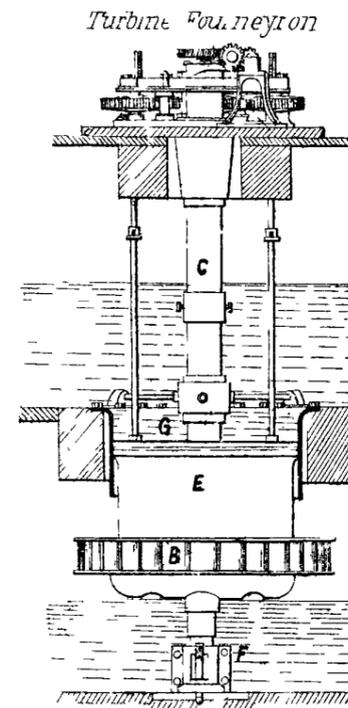
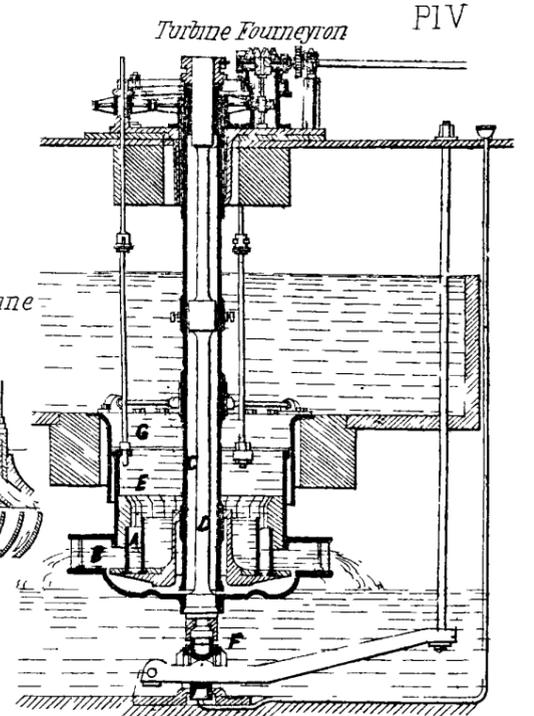
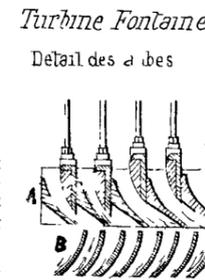
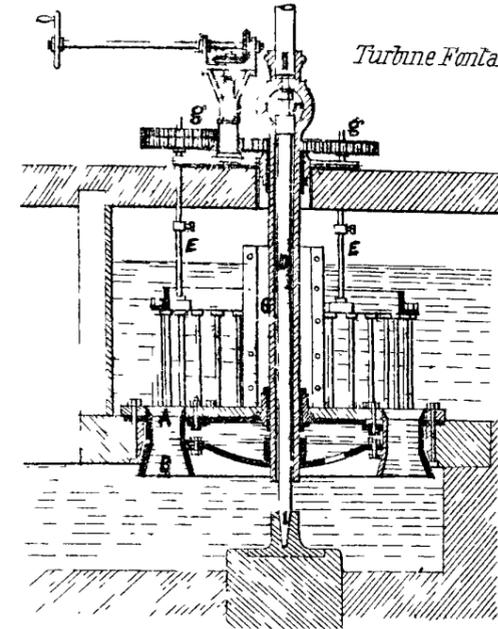
- A. Distributeur.
- B. Récepteur.
- C. Arbre creux solidaire du distributeur A.
- D. Arbre moteur solidaire du récepteur.
- E. Vanes de réglage manoeuvrées au moyen d'engrenages.
- F. Pivot.
- G. Lits d'arrivée d'eau.

Turbine Ridson.

- A. Distributeur.
- B. Récepteur.
- C. Arbre moteur.

Turbine Thomson.

- A. Conduit d'arrivée d'eau.
- B. Passages donnant accès à l'eau dans la couronne mobile D.
- E. Evacuation de l'eau ayant passé au travers de D.
- F. Arbre actionnant des obturateurs réglant l'ouverture des passages B.
- G. Arbre moteur.



Legendes.

Tiroir ordinaire

- A. Piston.
- B. Boîte à tiroir.
- C. Conduit d'échappement.
- DD'. Orifices d'admission.
- E. Arrivée de vapeur.
- F. Tige du tiroir.
- G. Tige du piston.
- H. Coquille du tiroir.
- I I'. Presse étoupe.

Tiroir en D.

- A. Arrivée de vapeur.
- B. Boîte à tiroir.
- C. Conduit d'échappement.
- DD'. Orifices d'admission.
- E. Tige du tiroir.
- F. Tige du piston.
- G. Coquille du tiroir.
- HH'. Presse étoupe.

Tiroir à doubles orifices.

- A. Piston
- B. Cylindre à haute pression.
- CC'. Orifices d'admission dans le cylindre à haute pression.
- DD. Orifices permettant à la vapeur d'échappement du cylindre à haute pression de passer dans le réservoir intermédiaire.
- E. Echappement.
- F. Coquille.

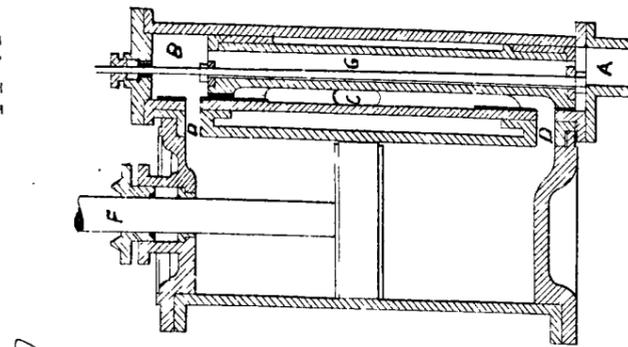
Distribution Corliss. (Fig 1).

- A. Tuyau d'arrivée de vapeur.
 - BB'. Robinets d'admission.
 - CC'. Robinets d'échappement.
 - D. Tuyau d'échappement.
- (Fig. 2).

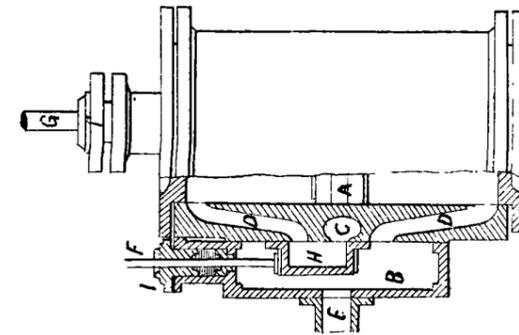
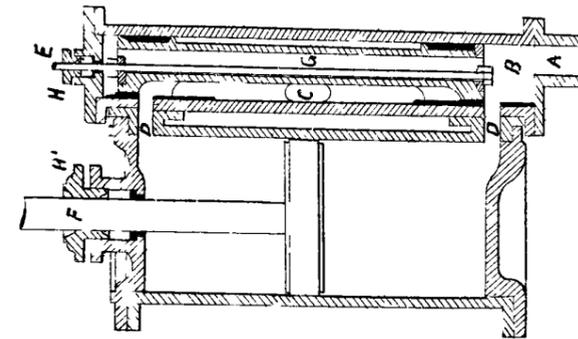
- A. Plateau de distribution.
- B. Point d'articulation de la tige d'excentrique commandant le plateau A.
- CC'. Bielles réglables transmettant le mouvement de A aux robinets d'admission.
- DD'. Bielles réglables transmettant le mouvement de A aux robinets d'échappement.
- E. Manivelles des distributeurs.
- FF'. Cames de déclie.
- GG'. Tringles transmettant le mouvement du régulateur aux cames de déclie.

- HH'. Cliquets de distribution.
- II'. Dash-pot évitant les chocs au moment du déclie.

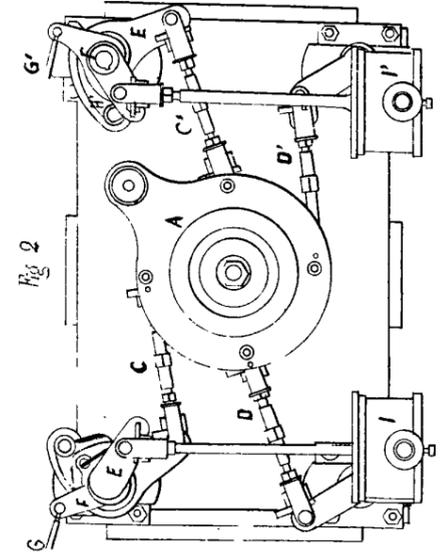
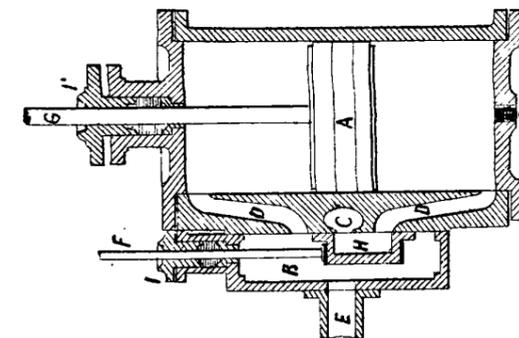
Pl VI



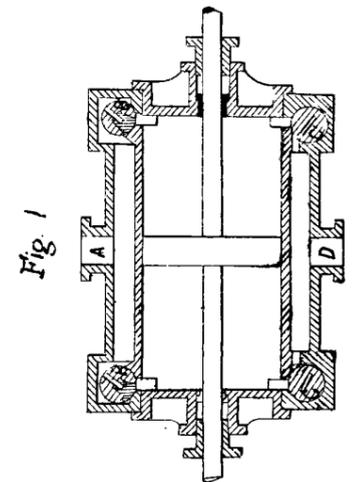
Tiroir en D



Tiroir ordinaire



Distribution Corliss



Tiroir à doubles orifices

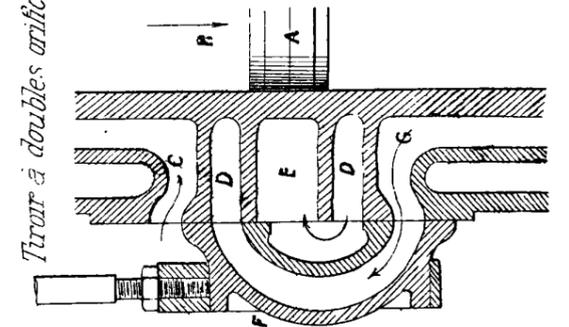


Planche VIII.

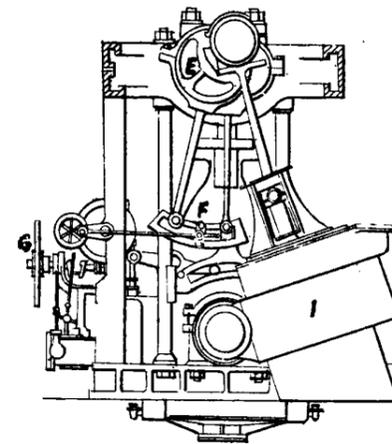
Légendes

Machine oscillante.

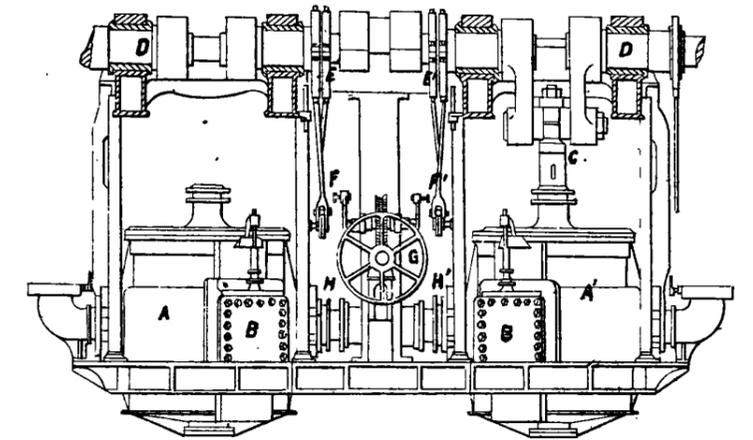
Machine rotative.

- AA'. Cylindres.
- BB'. Tiroirs.
- C. Tige de piston.
- D. Arbre à double rebrequin.
- EE'. Excentriques des tiroirs.
- FF'. Coulisses.
- G. Volant de manœuvre des coulisses.
- H. Tourillons des cylindres.
- I. Condenseur.

- A. Cylindre.
- B. Pistons rotatifs.
- C. Orifice d'admission.
- D. Conduit d'échappement.

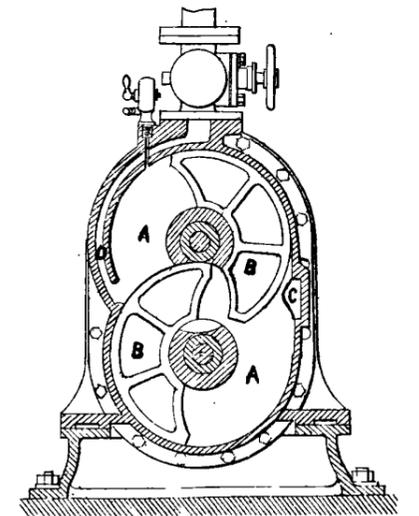
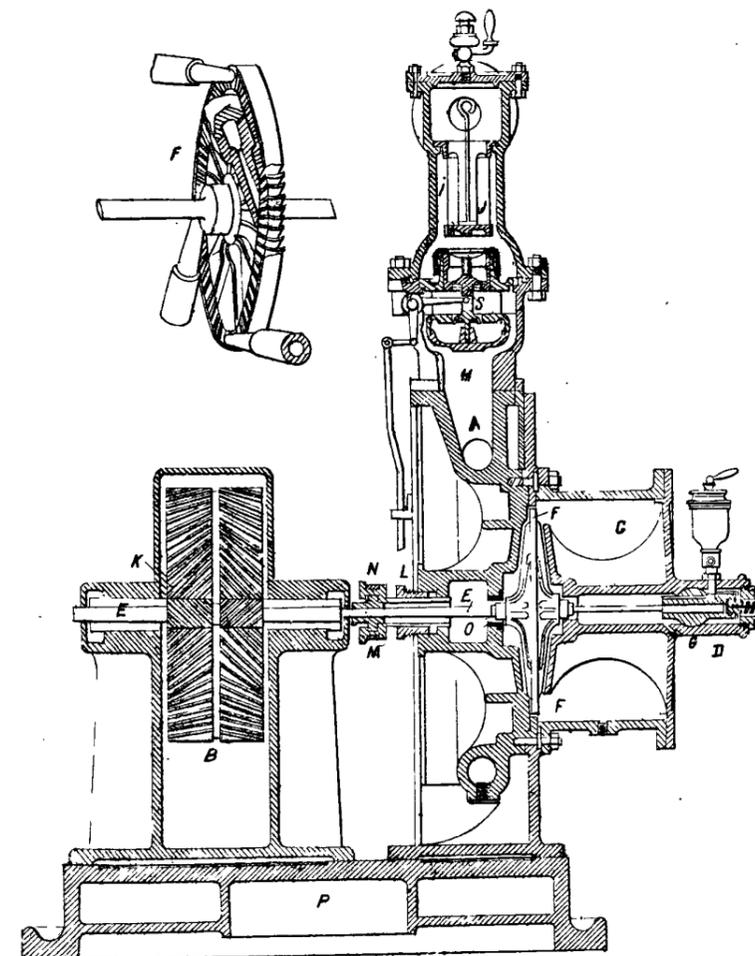


Machine Oscillante



Turbine système de Laval

Machine rotative



Légende de la Turbine de Laval

- P Plaque de fondation
- A Boîte de distribution
- B - d. d'engrenage
- C - d. d'échappement
- D - d. du Coussinet à Rotule
- H - d. de l'obturateur du Régulateur
- S Obturateur.
- I Boîte d'arrivée de vapeur
- J Crépine
- G Coussinet à rotule
- E Arbre portant la turbine et le pignon
- F Turbine
- K Pignon
- L Douille de l'arbre de la turbine avec presse-étoupe
- M Obturateur en deux pièces de l'arbre de la turbine.
- N Erou et bague filetés en 2 pièces maintenant l'obturateur au bout de la douille
- O Bague de sûreté.

Plaque X.

Légendes.

Chaudière Belleville

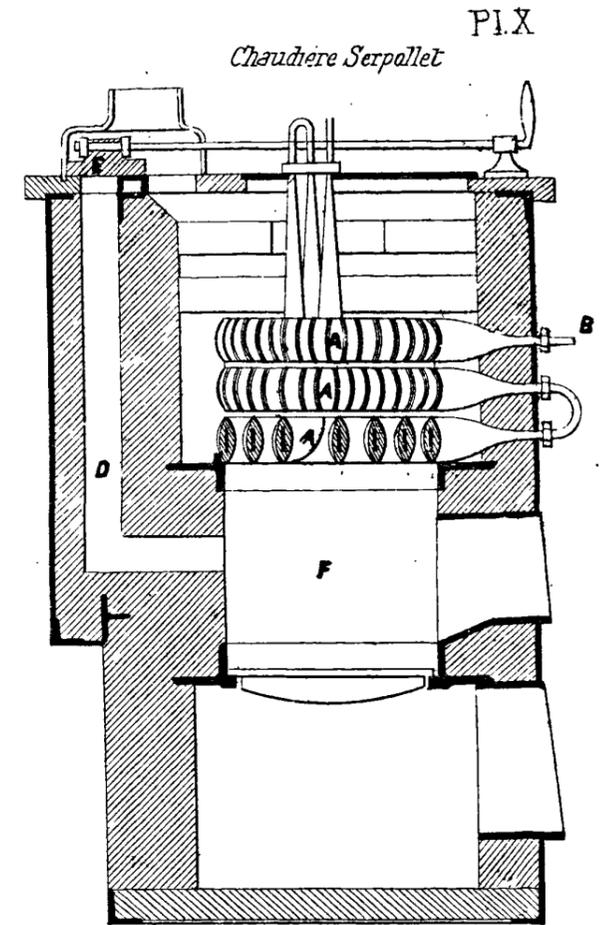
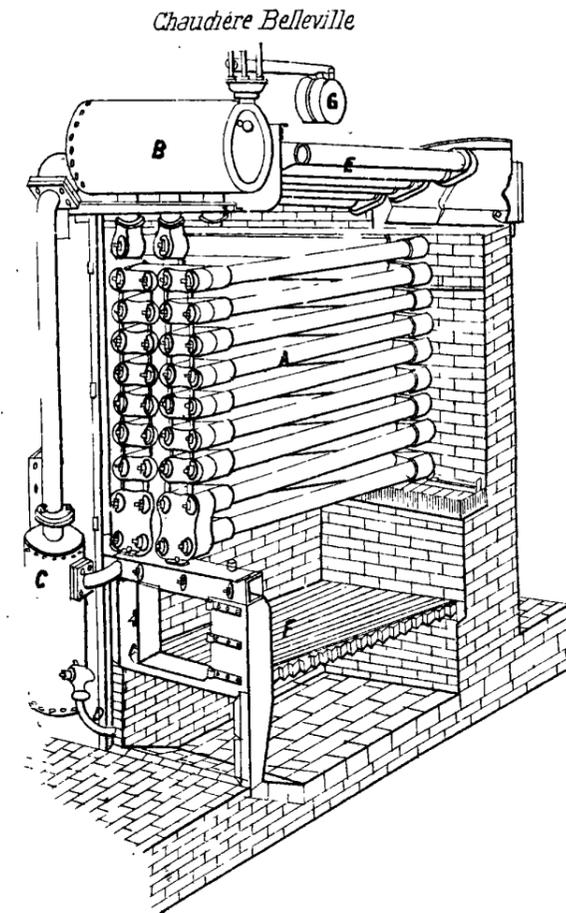
- A. Faisceau tubulé formant-serpentin.
- B. Réchauffeur recevant l'eau de la pompe alimentaire.
- C. Collecteur d'alimentation distribuant l'eau au serpentin.
- D. Surgeur.
- E. Tubes de séchage de la vapeur.
- F. Foyer.
- G. Soupape.

Chaudière Babcock et Wilcox.

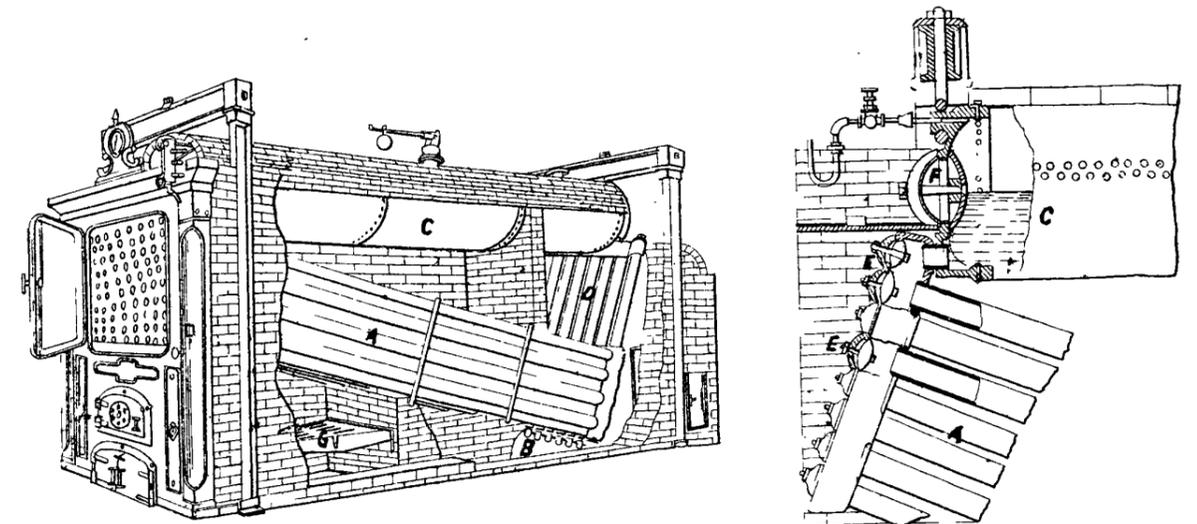
- A. Faisceau tubulé.
- B. Collecteur pour les boues précipitées.
- C. Réservoir d'eau et de vapeur.
- D. Tuyaux d'aménagement de l'eau dans le faisceau tubulé.
- E. Autoclaves.
- F. Trou d'homme.
- G. Foyer.

Chaudière serpolet.

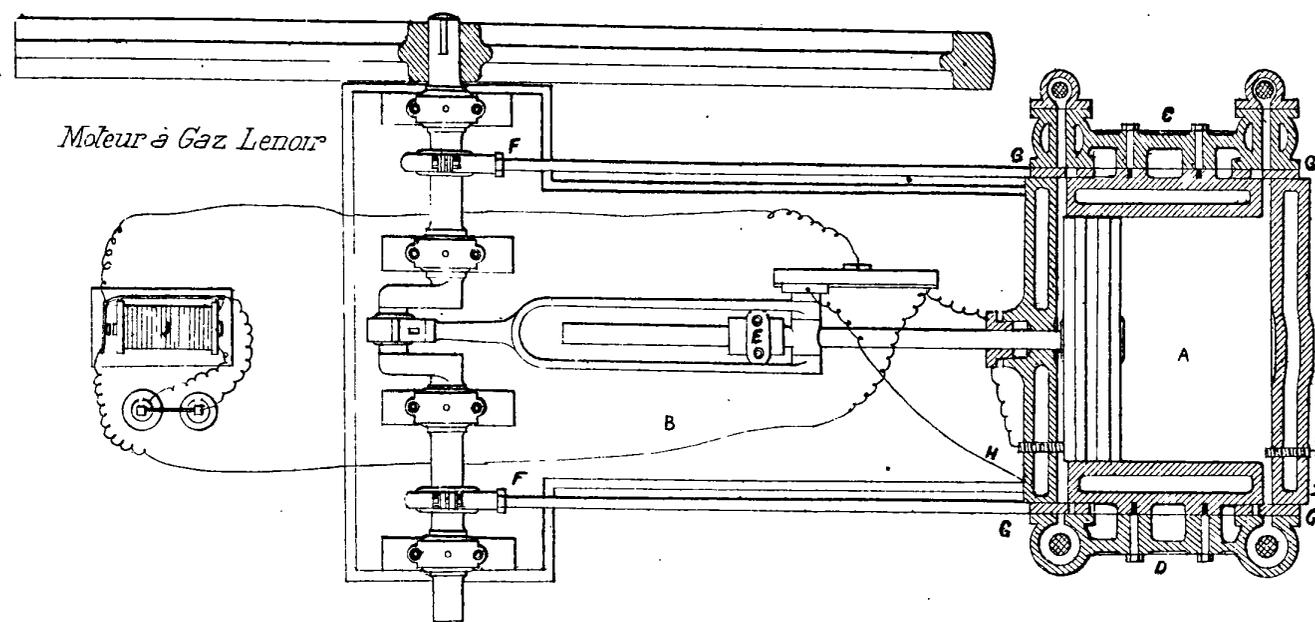
- A. Tube d'une section intérieure très faible et roulé en serpentin.
- B. Arrivée d'eau sous pression.
- C. Foyer.
- D. Cheminée.
- E. Registre.



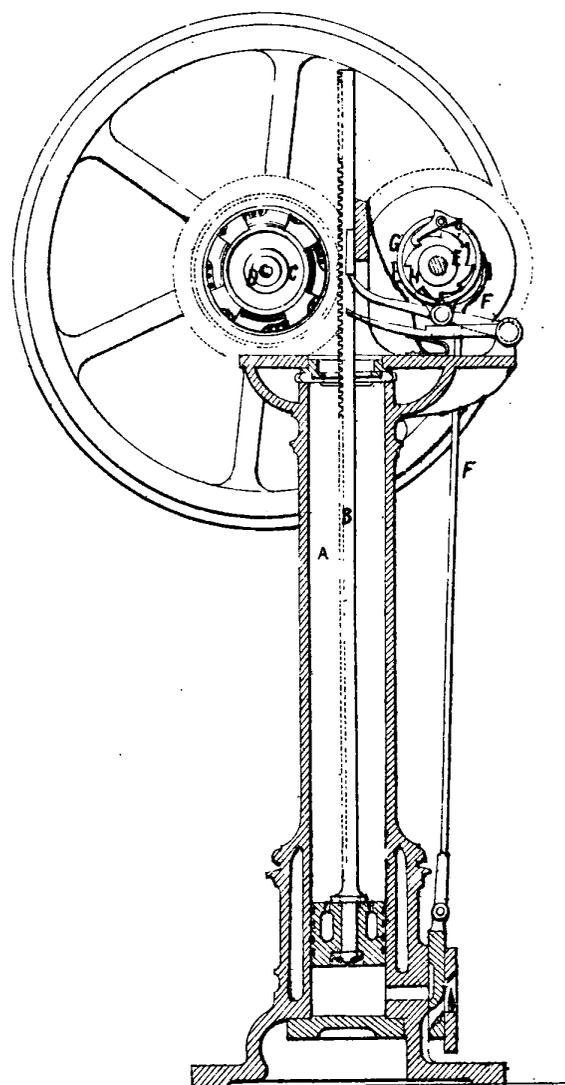
Chaudière Babcock et Wilcox



PL XI



Moteur à Gaz de Langen et Otto



Légende du moteur Lenoir

- A Cylindre moteur
- B Bâti
- C Appareil de décharge
- D — d' — de distribution
- E Guide de la tige du piston
- F Excentriques
- G Tiroirs
- HH' Inflammateurs
- I Bobine de Ruhmkorff

Légende du moteur Langen et Otto.

- A Cylindre moteur
- B Tige de piston munie d'une crémaillère
- C Pignon muni d'un embrayage genre Dobo.
Ce pignon est fou sur l'arbre pendant l'ascension du piston et entraîne pendant la descente.
- D Arbre moteur
- E Arbre en relation avec D au moyen de deux engrenages
- F Excentrique de commande du tiroir T
- G — d' — de relevage du piston.
Ces deux excentriques sont fous sur l'arbre E et sont entraînés par un encliquetage H de façon à n'agir que par intermittence

Légende
Moteur Otto.

- A. Cylindre.
- B. Piston.
- C. Bielle motrice.
- D. Coulisseau.
- E. Arbre de commande des organes de distribution.
- F. Tiroir.
- G. Bielle de commande du tiroir.
- H. Contre plaque à ressort maintenant le tiroir appuyé contre la culasse du cylindre.
- I. Soupape d'admission du gaz.
- I'. Arrivée du gaz dans le tiroir.
- J. Arrivée d'air.
- K. Brûleur.
- K'. Orifice d'allumage.
- L. Régulateur recevant son mouvement de l'arbre E par l'intermédiaire d'engrenages et le transmettant à la soupape I au moyen de la came M.
- N. Came manœuvrant la soupape d'échappement par l'intermédiaire du levier O.
- P. Circulation d'eau.
- Q. Graisseur.
- T. Soupape d'échappement.

